Universidade Estadual Paulista

Campus de São José do Rio Preto
Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

Seqüências Espectrais e Aplicações aos Cálculos de Cohomologias de Espaços Fibrados

Beethoven Adriano de Souza

Orientador: João Peres Vieira

Dissertação apresentada ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista, Campus de São José do Rio Preto, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

São José do Rio Preto
Janeiro - 2009

Comissão Julgadora

Membros Titulares

Prof. Dr. João Peres Vieira
Profa. Dra. Maria Gorete Carreira Andrade
Prof. Dr. Dirceu Penteado

Membros Suplentes

Profa. Dra. Ermínia de Lourdes Campello Fanti
Prof. Dr. Oziride Manzoli Neto

Para fazer Matemática não precisamos enxergar,
andar, ter braços, ou mesmo corpo.
Só precisamos ter espírito, vontade, perseverança
e principalmente convicção
na mais bela estrutura lógica criada pelo homem.
(Leonhard Euler)

A Deus.
À minha família.
À minha esposa.
Aos meus professores.
Aos meus amigos.
Dedico

Agradecimentos

A Deus, pela constante presença em todos os momentos da minha vida, iluminando, protegendo e conduzindo os meus passos.

Agradeço imensamente aos meus pais Nezia e Cirilei, pelo amor, carinho, e pelo apoio incondicional que sempre me dedicaram.

À minha esposa Marcela, uma pessoa muito especial, agradeço o carinho, a compreensão e o cuidado dedicados.

Aos amigos pós-graduandos do Departamento de Matemática e amigos de república, agradeço pelas conversas, pelas risadas e principalmente pela paciência, que tornaram nossa convivência tão prazerosa e cuja amizade e discussões sobre o trabalho foram muito valiosas.

Em especial, agradeço ao Prof. Dr. João Peres Vieira, pela amizade, orientação, incentivo e paciência na elaboração deste trabalho.

Aos meus professores de graduação e pós-graduação que me deram a estrutura necessária para minha formação.

A todas as pessoas e funcionários do IBILCE e do IGCE que, direta ou indiretamente, contribuíram para a elaboração deste trabalho.

À CAPES e à FAPESP pelo auxílio financeiro.

Resumo

Este trabalho tem como objetivo principal o cálculo dos grupos de Cohomologia de alguns Grupos Clássicos como o Grupo das Rotações do Espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$ ($SO(n)$), o Grupo Unitário ($U(n)$), o Grupo Especial Unitário ($SU(n)$) e o Grupo Simplético ($Sp(n)$). Além disso calcularemos também o grupo de Cohomologia do Espaço Projetivo Complexo ($\mathbb{C}P(n)$). Para esses cálculos usaremos seqüências espectrais e o Teorema de Serre para Cohomologia.

Palavras-chave: Seqüências Espectrais, Fibrações, Grupos Clássicos, Grupos de Cohomologia.

Abstract

The main purpose of this work is to calculate the cohomology groups of some classical groups as the rotation groups of the euclidean space $\mathbb{R}^n$, $SO(n)$, the unitary group $U(n)$, your special unitary subgroup $SU(n)$ and the symplectic group $Sp(n)$. Moreover we also calculate the cohomology groups of complex projective space $\mathbb{C}P(n)$. For these calculus we will use spectral sequences and the Serre's Theorem for Cohomology.

Keywords: Espectral Sequences, Fibrations, Classical Groups, Cohomology Groups.

Sumário

Introdução

A noção de seqüências espectrais foi introduzida na topologia por Leray, J.
A seqüência espectral de Leray usava a teoria de cohomologia de $\check{C}$ech e foi definida para algumas aplicações contínuas (não necessariamente fibrações). Em 1951 Serre, J. P., usando teoria cúbica singular, introduziu a seqüência espectral para uma aplicação que satisfazia condições mais fracas do que as fibrações (a propriedade do levantamento de homotopia era usada somente para CW complexos de dimensão finita). Serre teve um papel fundamental na teoria de homotopia, muitas aplicações hoje conhecidas são devidas a ele. Em 1952 Massey, W. S. introduziu o conceito de triângulo exato que fora usado nas seqüências espectrais.

Os axiomas da teoria de homologia foram introduzidos por Eilenberg, S. e Steenrod, N. em 1945. Os seis primeiros axiomas do trabalho deles têm características gerais, enquanto que o axioma de dimensão é mais específico. A partir dos anos 60, o número de teorias de homologia interessantes cresceu extraordinariamente, como por exemplo: bordismo, $K-$theory, homotopia estável, etc. Em 1961, Atiyah, M. F. e Hirzebruch, F. fizeram o uso de seqüência espectral pela primeira vez no estudo da $K-$theory.

Neste trabalho estudamos a teoria de seqüências espectrais e aplicamos essa teoria para um complexo de cocadeias filtrado e para uma fibração, com o objetivo de demonstrar o teorema de Serre para cohomologia. No final, calculamos o anel de cohomologia de alguns grupos clássicos através do teorema de Serre.

No capítulo 1 apresentamos os pré-requisitos necessários para o desenvolvimento deste trabalho. Dentre eles destacam-se a definição de uma aplicação p ter a propriedade do levantamento de homotopia que define o conceito de fibração e os conceitos de CW complexo e álgebra exterior que serão necessários no decorrer deste estudo.

No capítulo 2 definimos a seqüência espectral (E_r, d_r), onde $E_r = H(E_{r-1})$ e $d_r : E_r \longrightarrow E_r$ é um homomorfismo, a partir do triângulo exato inicial

$$\begin{tikzcd} D \arrow[rr, "i"] & & D \arrow[dl, "j"] \\ & E \arrow[ul, "k"] & \end{tikzcd}$$

onde D e E são grupos abelianos e i, j, k são homomorfismos.

Em geral, os grupos D e E do triângulo exato são grupos graduados, e mais ainda, são grupos graduados com filtração, o que torna o manuseio complicado, porém, com cuidado, é possível extrair resultados interessantes.

Além disso, definimos o conceito de E_∞.

No capítulo 3 definimos o conceito de filtração de um grupo diferencial e a partir dessa filtração construímos uma seqüência exata curta, afim de encontrarmos a seqüência espectral de um complexo de cocadeias filtrado. Também, calculamos os bigraus das aplicações $i_r^{p,q}$, $j_r^{p,q}$, $k_r^{p,q}$ e $d_r^{p,q}$ e, finalmente, mostramos que o elemento $E_2^{p,q}$ da seqüência espectral (E_r, d_r) converge para um módulo graduado $H^n(A)$.

No capítulo 4, a partir de uma fibração $p : E \longrightarrow B$ construímos uma seqüência espectral de primeiro quadrante que converge para $H^*(E)$; este é o Teorema de Serre.

Finalmente, no capítulo 5 calculamos o anel de cohomologia de alguns grupos clássicos e do espaço projetivo complexo $\mathbb{C}P(n)$. Para os grupos $U(n)$, $SU(n)$, $Sp(n)$ e para o espaço projetivo complexo $\mathbb{C}P(n)$ calculamos o anel de cohomologia para todo n; já para o grupo $SO(n)$, calculamos o anel de cohomologia para alguns valores de n. Terminamos exibindo duas tabelas contendo todos os resultados obtidos ao longo deste trabalho.

Capítulo 1

Preliminares

1.0.1 Seqüências Exatas

Seja R um anel comutativo com unidade.

Definição 1.0.1 *Uma seqüência finita ou infinita*

$$\ldots \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow \ldots$$

de homomorfismos de R-módulos, é dita uma seqüência exata no R-módulo Y se a imagem do homomorfismo f coincide com o Kernel do homomorfismo g $(Im(f) = Ker(g))$. A sequência é dita simplesmente exata se isso acontece em todo R-módulo.

Definição 1.0.2 *Uma seqüência exata do tipo*

$$0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \longrightarrow 0$$

é dita uma seqüência exata curta.

Observação 1.0.1 *Considere a seguinte seqüência exata curta*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} B \longrightarrow 0$$

Como a seqüência é exata, temos que f é monomorfismo, g é epimorfismo e $Im\ f = Ker\ g$. Se $E = Im\ f \subset X$, então f define o isomorfismo $j : A \longrightarrow E$ e g define o isomorfismo $k : Q \longrightarrow B$, onde $Q = X/E$.

Se identificarmos A e B com E e Q, respectivamente, através dos isomorfismos j e k^{-1}, então teremos a seqüência exata curta

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{i} X \xrightarrow{p} Q \longrightarrow 0$$

Definição 1.0.3 *Considere a seguinte seqüência exata curta*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \longrightarrow 0$$

Dizemos que a seqüência é split se β possui inversa, isto é, existe $\delta : C \to B$ tal que $\beta \circ \delta = 1$, onde 1 denota a identidade de C.

Lema 1.0.1 ***(Lema dos 5)*** *Considere o diagrama comutativo abaixo*

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{j} & C & \xrightarrow{k} & D & \xrightarrow{l} & E \\ \alpha\downarrow & & \beta\downarrow & & \gamma\downarrow & & \delta\downarrow & & \epsilon\downarrow \\ A' & \xrightarrow{i'} & B' & \xrightarrow{j'} & C' & \xrightarrow{k'} & D' & \xrightarrow{l'} & E' \end{array}$$

onde $A, B, C, D, E, A', B', C', D'$ e E' são grupos abelianos. Se as duas seqüências são exatas e α, β, δ e ϵ são isomorfismos, então γ é um isomorfismo.

Demonstração. É suficiente mostrar que

(i) Se β e δ são sobrejetoras e ϵ é injetora, então γ é sobrejetora.

(ii) Se β e δ são injetoras e α é sobrejetora, então γ é injetora.

De fato,

(i) Se $c' \in C'$, então $k'(c') = \delta(d)$ para algum $d \in D$, pois δ é sobrejetora.

Por hipótese ϵ é injetora e assim $l(d) = 0$, pois

$$\epsilon(l(d)) = l'(\delta(d)) = l'(k'(c')) = 0$$

desde que $Ker\ l' = Im\ k'$.

Agora, como $d \in Ker\ l = Im\ k$ então $d = k(c)$ para algum $c \in C$.

Consideremos o elemento $c' - \gamma(c)$. Então

$$k'(c' - \gamma(c)) = k'(c') - k'(\gamma(c)) = k'(c') - \delta(k(c)) = k'(c') - \delta(d) = 0$$

Logo, $c' - \gamma(c) \in Ker\ k' = Im\ j'$, isto é, $c' - \gamma(c) = j'(b')$ para algum $b' \in B'$.

Por hipótese, β é sobrejetora e assim $b' = \beta(b)$ com $b \in B$.

Logo,

$$\gamma(c + j(b)) = \gamma(c) + \gamma(j(b)) = \gamma(c) + j'(\beta(b)) = \gamma(c) + j'(b') = \gamma(c) + c' - \gamma(c) = c'.$$

Portanto, γ é sobrejetora.

(ii) Seja $c \in C$ e suponhamos que $\gamma(c) = 0$.

Temos que δ é injetora e como $\delta(k(c)) = k^{'}(\gamma(c)) = k^{'}(0) = 0$ segue que $k(c) = 0$.

Assim, $c \in Ker\ k = Im\ j$, ou seja, $c = j(b)$ para algum $b \in B$.

Temos que

$$j^{'}(\beta(b)) = \gamma(j(b)) = \gamma(c) = 0.$$

Logo $\beta(b) \in Ker\ j^{'} = Im\ i^{'}$, ou seja, $\beta(b) = i^{'}(a^{'})$ para algum $a^{'} \in A^{'}$.

Como α é sobrejetora então $a^{'} = \alpha(a)$ para algum $a \in A$.

Por outro lado, temos que

$$\beta(i(a) - b) = \beta(i(a)) - \beta(b) = i^{'}(\alpha(a)) - i^{'}(a^{'}) = i^{'}(a^{'}) - i^{'}(a^{'}) = 0$$

e como β é injetora então $i(a) - b = 0$, ou seja, $i(a) = b$.

Daí, $c = j(b) = j(i(a)) = 0$, pois $Ker\ j = Im\ i$.

Portanto, γ é injetora. ■

1.0.2 Categorias e Funtores

Definição 1.0.4 *Uma categoria $\mathcal{C}$ consiste em*

(a) Uma classe de objetos.

(b) Para todo par ordenado de objetos X e Y, o conjunto $Hom(X,Y)$ é o conjunto de todos os homomorfismos de X em Y; se $f \in Hom(X,Y)$ escrevemos $f : X \longrightarrow Y$.

(c) Para toda tripla ordenada de objetos X, Y e Z, se $f : X \longrightarrow Y$ e $g : Y \longrightarrow Z$ então a composição é $g \circ f : X \longrightarrow Z$.

Definição 1.0.5 *Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ duas categorias. Um funtor T de $\mathcal{C}$ em $\mathcal{D}$ consiste numa aplicação que leva todo objeto $X \in \mathcal{C}$ num objeto $T(X) \in \mathcal{D}$ e leva todo homomorfismo $f : X \longrightarrow Y$ de $\mathcal{C}$ num homomorfismo $T(f) : T(X) \longrightarrow T(Y)$ (ou $T(f) : T(Y) \longrightarrow T(X)$) em $\mathcal{D}$ tal que*

(a) $T(1_X) = 1_{T(X)}$;

(b) $T(g \circ f) = T(g) \circ T(f)$ (ou $T(g \circ f) = T(f) \circ T(g)$).

1.0.3 Produto Tensorial e Torção

Seja R um anel comutativo com unidade.

Definição 1.0.6 *Sejam A, B e X módulos sobre R. Por um produto tensorial (sobre R) dos módulos A e B, entendemos um módulo T sobre R junto com uma função bilinear $f : A \times B \longrightarrow T$ tal que, para toda função bilinear $g : A \times B \longrightarrow X$, existe um único homomorfismo $h : T \longrightarrow X$ que satisfaz $h \circ f = g$.*

Notação. $T = A \otimes_R B$ ou $T = A \otimes B$.

Proposição 1.0.1 *Para todo módulo X sobre R, temos $X \otimes R \cong X \cong R \otimes X$.*

Demonstração. Vide [3], Proposição 7.4, p.60. ∎

Dados $f : A \longrightarrow A'$ e $g : B \longrightarrow B'$ homomorfismos de $R-$ módulos existe um único homomorfismo $f \otimes g : A \otimes B \longrightarrow A' \otimes B'$ com $(f \otimes g)(a \otimes b) = f(a) \otimes g(b)$, chamado o produto tensorial sobre R de f e g(vide [9], Proposição 3.2, p.76).

Definição 1.0.7 *Por uma resolução de A sobre R entendemos uma seqüência exata de R-módulos*

$$C : \cdots \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} \ldots \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\epsilon} A \longrightarrow 0$$

Se cada C_q é um $R-$módulo livre, dizemos que a resolução C é livre.

Para qualquer $R-$ módulo A existe uma resolução livre $\cdots \to L' \xrightarrow{i} L \to A \to 0$ (ver [3], proposição 1.1, p.124). Se B é outro $R-$ módulo, definimos, $A * B = \text{Tor}(A, B) = \ker(L' \otimes B \xrightarrow{i \otimes 1} L \otimes B)$ onde 1 denota o homomorfismo identidade de B.

Temos os resultados do Lema abaixo que podem ser encontrados por exemplo em [8] ou [3].

Lema 1.0.2

i) Para qualquer par de módulos A e B, $A * B \cong B * A$.

ii) Se A ou B é livre de torção então $A * B = 0$.

iii) $A * 0 = 0$ para qualquer módulo A (0 denota o módulo trivial).

1.0.4 Sistema direto de grupos

Definição 1.0.8 *Um conjunto direto Λ é um conjunto com uma relação de ordem parcial $\preceq$ onde, para todos $a, b \in \Lambda$, existe $c \in \Lambda$ com $a \preceq c$ e $b \preceq c$.*

Definição 1.0.9 *Um sistema direto de conjuntos é uma família de conjuntos $\{X_a\}_{a\in\Lambda}$, onde Λ é um conjunto direto, e as funções $f_a^b : X_a \longrightarrow X_b$ com $a \preceq b$ satisfazem:*
(i) $f_a^a = id_{X_a}$, para todo $a \in \Lambda$;
(ii) se $a \preceq b \preceq c$ então $f_a^c = f_b^c \circ f_a^b$.

Estaremos interessados no caso em que X_a são grupos abelianos e f_a^b são homomorfismos.

Seja $\{X_a, f_a^b\}$ um sistema direto de grupos abelianos e homomorfismos e definamos um subgrupo H de $\Sigma_a X_a$ como

$$H = \{\Sigma x_{a_i} | \exists c \in \Lambda, c \preceq a_i, \forall i \;\; e \;\; \Sigma f_{a_i}^c(x_{a_i}) = 0\}$$

Assim o limite direto do sistema $\{X_a, f_a^b\}$ é o grupo $\varinjlim X_a = \Sigma_a X_a / H$.

1.0.5 CW complexos

Definição 1.0.10 *Um espaço topológico X de Hausdorff é um CW complexo se for construído da seguinte forma:*

(i) Comece com um conjunto discreto X^0, cujos pontos são chamados $0-$células ou vértices.

(ii) Indutivamente, para $n \geq 1$, obtenha o conjunto X^n de X^{n-1} por colar $n-$células e^n_α via aplicações $\varphi_\alpha : S^{n-1} \longrightarrow X^{n-1}$.

Isto significa que, X^n é o espaço quociente da união disjunta $X^{n-1} \coprod_\alpha D^n_\alpha$ de X^{n-1} com uma coleção de $n-$discos D^n_α via as identificações $x \sim \varphi_\alpha(x)$, para todo $x \in \partial D^n_\alpha$.

Portanto, como um conjunto $X^n = X^{n-1} \coprod_\alpha e^n_\alpha$ onde cada e^n_α é um $n-$disco aberto.

(iii) Pode-se parar este processo indutivo num estágio finito colocando $X = X^n$ para algum $n < \infty$ ou pode-se continuar indefinidamente colocando $X = \bigcup_n X^n$. Neste último caso, a X é dado a topologia fraca:

"Um conjunto $A \subset X$ é aberto (fechado) se, e somente se, $A \cap X^n$ é aberto (fechado) em X^n, para cada n".

Definição 1.0.11 *Dizemos que um CW complexo é finito ou infinito conforme o seu número de células é finito ou infinito, respectivamente.*

Definição 1.0.12 *O subconjunto fechado X^n de X é chamado $n-$esqueleto e satisfaz $X^0 \subseteq X^1 \subseteq X^2 \subseteq ...X^n \subseteq ... \subseteq X$.*

Definição 1.0.13 *Se $X = X^n$ para algum inteiro n, o CW complexo é chamado de dimensão finita e o menor inteiro n para o qual isso ocorre é chamado a dimensão de X. Neste caso temos $X = X^n = X^{n+1} = \ldots$.*

Exemplo 1.0.1 *Um CW complexo $1-$dimensional $X = X^1$ consiste de vértices ($0-$células) nos quais as arestas ($1-$células) são coladas.*

Exemplo 1.0.2 *A esfera S^n é um CW complexo $n-$dimensional consistindo de uma $0-$célula e uma $n-$célula. A $n-$célula sendo colada por uma aplicação constante $\varphi : S^{n-1} \longrightarrow X^{n-1}$ onde $X^{n-1} = \{p\} = X^0$ com $p \in S^n$.*

Notemos que para cada célula e^n_α em um CW complexo X, tem-se uma aplicação $\Phi_\alpha : D^n_\alpha \longrightarrow X$ que estende a aplicação de colagem $\varphi_\alpha : S^{n-1} \longrightarrow X^{n-1}$ e é um homeomorfismo do interior do disco D^n_α em e^n_α, isto é, podemos tomar Φ_α como sendo a composição:

$$D^n_\alpha \hookrightarrow X^{n-1} \coprod_\alpha D^n_\alpha \xrightarrow{\pi} X^n \hookrightarrow X$$

onde π denota a aplicação quociente que define X^n.

Definição 1.0.14 *Chamamos Φ_α de função característica.*

Definição 1.0.15 *Um subcomplexo de um CW complexo X é um subespaço fechado $A \subset X$ que é uma união de células de X.*

Desde que A é fechado, a função característica de cada célula em A tem imagem contida em A e em particular a imagem da aplicação de colagem de cada célula em A está contida em A, assim A é ele próprio um CW complexo.

Definição 1.0.16 *Um par (X, A) consistindo de um CW complexo X e um subcomplexo A será chamado um par CW.*

Definição 1.0.17 *Dizemos que um espaço X é compactamente gerado se, e somente se, X é Hausdorff e cada subconjunto $A \subset X$, com a propriedade que $A \cap C$ é fechado para todo $C \subset X$ compacto, é ele próprio fechado em X.*

Definição 1.0.18 *Sejam X um espaço compactamente gerado e A um subespaço de X. Dizemos que o par (X, A) é um NDR-par se, e somente se, existem funções contínuas $u : X \longrightarrow I \subset \mathbb{R}$ e $h : I \times X \longrightarrow X$ tais que*

(i) $A = u^{-1}(0)$;

(ii) $h(0, x) = x$, para todo $x \in X$;

(iii) $h(t, x) = x$, para todo $t \in I$ e para todo $x \in A$;

(iv) $h(1, x) \in A$ para todo $x \in X$ tal que $u(x) < 1$.

O par (u, h) é dito representar (X, A) como um NDR-par.

Observação 1.0.1

i) *Se X é um CW complexo então X é um espaço compactamente gerado(vide [2],p.523).*

ii) *Se (X, A) é um par CW, então $X \times \{0\} \bigcup A \times I$ é um retrato por deformação de $X \times I$ (vide [2],Proposição 0.16, p.15) e portanto de [10],(5.1), p.22 (X, A) é um NDR-par.*

1.0.6 Homotopia

Denotemos I o intervalo fechado $[0, 1] \subset \mathbb{R}$.

Definição 1.0.19 *Sejam X e Y CW complexos e $f, g : X \longrightarrow Y$ duas aplicações contínuas. Dizemos que f é homotópica a g se existir uma função contínua $H : X \times I \longrightarrow Y$, satisfazendo as seguintes condições:*

(i) $H(x, 0) = f(x)$, $\forall x \in X$;

(ii) $H(x, 1) = g(x)$, $\forall x \in X$,

ou equivalentemente, para cada $t \in I$ temos uma função $H_t : X \longrightarrow Y$ dada por $H_t(x) = H(x, t)$, onde $(H_t)_{t \in I}$ é uma família de funções contínuas satisfazendo:

(i) $H_0(x) = H(x, 0) = f(x)$, $\forall x \in X$;

(ii) $H_1(x) = H(x, 1) = g(x)$, $\forall x \in X$.

Notação. $f \simeq g$.

Definição 1.0.20 *Seja $A \subset X$. Dizemos que A é um retrato por deformação de X se, e somente se, existe uma homotopia $H : X \times I \to X$, tal que:*

(i) $H(0, x) = x, \forall x \in X$;

(ii) $H(t, a) = a, \forall a \in A, \forall t \in I$;

(iii) $H(X \times I) \subset A$.

O valor final da homotopia é uma retraçao $r = H_1 : X \to A$, chamada uma retração por deformação.

Definição 1.0.21 *Seja $f : X \longrightarrow Y$ uma função contínua. Dizemos que f é uma equivalência de homotopia se existir $g : Y \longrightarrow X$ contínua tal que $g \circ f \simeq id_X$ e $f \circ g \simeq id_Y$.*

Definição 1.0.22 *Se existir uma equivalência de homotopia $f : X \longrightarrow Y$, dizemos que X e Y têm o mesmo tipo de homotopia e denotaremos por $X \sim Y$.*

Definição 1.0.23 *Dizemos que um espaço X é contrátil se, e somente se, X tem o mesmo tipo de homotopia que um ponto $p_0 \in X$.*

Definição 1.0.24 *Seja X um espaço topológico. Por um caminho em X, entendemos uma aplicação contínua $\gamma : I \longrightarrow X$. Se $\gamma(0) = \gamma(1) = x_0$ dizemos que γ é um laço baseado em x_0.*

Definição 1.0.25 *Sejam $\alpha, \beta : I \longrightarrow X$ laços baseados em $x_0 \in X$. Dizemos que α e β são homotópicos relativamente a x_0 se existir $H : I \times I \longrightarrow X$ contínua satisfazendo*

(i) $H(t, 0) = \alpha(t)$, $\forall t \in I$;

(ii) $H(t, 1) = \beta(t)$, $\forall t \in I$;

(iii) $H(0, s) = H(1, s) = x_0$, $\forall s \in I$.

Neste caso dizemos que H é uma homotopia relativa a x_0 entre α e β e denotamos $\alpha \simeq_{x_0} \beta$.

Definição 1.0.26 *Um caminho $\alpha : I \longrightarrow X$ é chamado de caminho constante em $x_0 \in X$, se $\alpha(t) = x_0$ para todo $t \in I$.*

Definição 1.0.27 *Sejam $\alpha, \beta : I \longrightarrow X$ caminhos com $\alpha(0) = x_0$, $\alpha(1) = \beta(0) = x_1$ e $\beta(1) = x_2$. O caminho $\alpha * \beta : I \longrightarrow X$ definido por*

$$\alpha * \beta(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & se \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2}; \\ \beta(2t-1), & se \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

é chamado a justaposição de α por β.

Definição 1.0.28 *Seja $\gamma : I \longrightarrow X$ um caminho. Definimos o caminho inverso de γ, que denotaremos por γ^{-1}, como sendo o caminho $\gamma^{-1} : I \longrightarrow X$ definido por $\gamma^{-1}(t) = \gamma(1-t)$, para qualquer $t \in I$.*

Exemplo 1.0.3 *Seja $\gamma : I \longrightarrow X$ um caminho e γ^{-1} o seu caminho inverso. Então $\gamma^{-1} * \gamma \simeq_{\gamma(1)} \gamma(1)$.*

De fato, basta definirmos $H : I \times I \longrightarrow X$ por

$$H(t,s) = \begin{cases} \gamma^{-1}(2t), & 0 \leq \mathrm{t} \leq \frac{1-s}{2}; \\ \gamma^{-1}(1-s), & \frac{1-s}{2} \leq \mathrm{t} \leq \frac{1+s}{2} \\ \gamma(2t-1), & \frac{1+s}{2} \leq \mathrm{t} \leq 1. \end{cases}$$

Assim,

- $H(t,0) = \gamma^{-1} * \gamma(t)$;
- $H(t,1) = \gamma(1)$;
- $H(0,s) = H(1,s) = \gamma(1)$.

Definição 1.0.29 *O Grupo Fundamental do espaço X com ponto base em x_0, denotado por $\pi_1(X, x_0)$, é o conjunto formado pelas classes de homotopia de laços baseados em x_0, munido da operação "$\cdot$" de forma que, $[a].[b] = [a*b]$, sendo a e b laços baseados em x_0 e $a*b$ a justaposição desses caminhos.*

Observação 1.0.2 *O elemento neutro de $\pi_1(X, x_0)$ é a classe de homotopia $[e_{x_0}] = 1$ do caminho constante no ponto x_0 e o elemento inverso de $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$ é $[\gamma^{-1}]$.*

Definição 1.0.30 *Um espaço topológico X é chamado de espaço simplesmente conexo se X for conexo por caminhos e $\pi_1(X) = \{1\}$.*

1.0.7 Grupo de Homologia de um par CW

Seja (X, A) um par CW. Se $i : A \longrightarrow X$ denota a inclusão e $j : X \longrightarrow X/A$ a projeção então temos uma seqüência exata curta a nível de cadeias singulares

$$0 \longrightarrow C_n(A) \xrightarrow{i_\sharp} C_n(X) \xrightarrow{j_\sharp} C_n(X,A) = C_n(X/A) \longrightarrow 0$$

Daí, pelo teorema do isomorfismo $C_n(X,A) \cong \dfrac{C_n(X)}{C_n(A)}$.

O operador bordo $\partial_n : C_n(X) \longrightarrow C_{n-1}(X)$ tem a propriedade que $\partial_n(C_n(A)) \subset C_{n-1}(A)$ e, portanto, induz um homomorfismo $\partial_n' : C_n(X,A) \longrightarrow C_{n-1}(X,A)$.

Assim, temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccccc} \ldots & \xrightarrow{\partial_{n+2}} & C_{n+1}(X) & \xrightarrow{\partial_{n+1}} & C_n(X) & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1}(X) & \xrightarrow{\partial_{n-1}} & \ldots \\ \curvearrowright & & (j_{n+1})_\sharp \downarrow & \curvearrowright & (j_n)_\sharp \downarrow & \curvearrowright & \downarrow (j_{n-1})_\sharp & \curvearrowright & \\ \ldots & \xrightarrow{\partial_{n+2}'} & C_{n+1}(X,A) & \xrightarrow{\partial_{n+1}'} & C_n(X,A) & \xrightarrow{\partial_n'} & C_{n-1}(X,A) & \xrightarrow{\partial_{n-1}'} & \ldots \end{array}$$

Ainda, $\partial_n' \circ \partial_{n+1}' = 0$, pois $Im\ \partial_{n+1}' = Ker\ \partial_n'$.

Assim, podemos definir $H_n(X, A) = H(C_n(X, A)) = \dfrac{Ker\ \partial_n'}{Im\ \partial_{n+1}'}$.

Definição 1.0.31 *O grupo $H_n(X, A)$ é chamado o n-ésimo grupo de homologia relativa associado ao par (X, A).*

Temos uma seqüência infinita de grupos e homomorfismos

$$\ldots \xrightarrow{j_*} H_{n+1}(X, A) \xrightarrow{\partial_*} H_n(A) \xrightarrow{i_*} H_n(X) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial_*} \ldots$$

onde $i_* = (i_\sharp)_*$, $j_* = (j_\sharp)_*$ e ∂_* é o operador bordo do par (X, A).

Definição 1.0.32 *A seqüência acima é chamada de seqüência de homologia do par (X, A).*

Temos o seguinte

Teorema 1.0.1 *A seqüência de homologia do par (X, A) é exata.*

Demonstração. Vide [6], Teorema 5.1, p.24. ■

Lema 1.0.3 *Seja B um CW complexo com $p-$esqueleto B^p. Então as injeções $H_q(D_i^p, \partial D_i^p) \hookrightarrow H_q(B^p, B^{p-1})$ representam o grupo $H_q(B^p, B^{p-1})$ como uma soma direta dos grupos $H_q(D_i^p, \partial D_i^p)$, isto é, $H_q(B^p, B^{p-1}) \cong \oplus_i H_q(D_i^p, \partial D_i^p)$.*

Demonstração. Vide [10], (2.8), p.60. ■

1.0.8 Grupo de Cohomologia de um par CW

Sejam (X, A) um par CW. Se $i : A \longrightarrow X$ é a inclusão e $j : X \longrightarrow X/A$ é a projeção então temos uma seqüência exata curta a nível de cocadeias singulares

$$0 \longrightarrow C^n(X/A) = C^n(X, A) \xrightarrow{j^\sharp} C^n(X) \xrightarrow{i^\sharp} C^n(A) \longrightarrow 0$$

onde $i^\sharp : C^n(X) \longrightarrow C^n(A)$ é dada por $i^\sharp(f) = f \circ i_\sharp$, com $f : C_n(X) \longrightarrow \mathbb{Z}$ e $j^\sharp : C^n(X, A) \longrightarrow C^n(X)$ é dada por $j^\sharp(g) = g \circ j_\sharp$ onde $g : C_n(X, A) \longrightarrow \mathbb{Z}$.

Como a seqüência acima é exata então $C^n(X, A) \cong Im\ j^\sharp = Ker\ i^\sharp$.

Definição 1.0.33 *O conjunto $C^n(X, A)$ é chamado de conjunto das n-cocadeias de X que se anulam em A.*

Assim, temos que $C^n(X,A) \cong \dfrac{C^n(X)}{C^n(A)}$.

O operador cobordo $\delta^n : C^n(X) \longrightarrow C^{n+1}(X)$ tem a propriedade de que $\delta^n(C^n(A)) \subset C^{n+1}(A)$ e, portanto, induz o homomorfismo $(\delta^n)' : C^n(X,A) \longrightarrow C^{n+1}(X,A)$.

Assim, temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccccc}
... & \stackrel{(\delta^{n-2})'}{\longrightarrow} & C^{n-1}(X,A) & \stackrel{(\delta^{n-1})'}{\longrightarrow} & C^n(X,A) & \stackrel{(\delta^n)'}{\longrightarrow} & C^{n+1}(X,A) & \stackrel{(\delta^{n+1})'}{\longrightarrow} & ... \\
\curvearrowright & & \downarrow (j^{n-1})^\sharp & \curvearrowright & \downarrow (j^n)^\sharp & \curvearrowright & \downarrow (j^{n+1})^\sharp & \curvearrowright & \\
... & \stackrel{\delta^{n-2}}{\longrightarrow} & C^{n-1}(X) & \stackrel{\delta^{n-1}}{\longrightarrow} & C^n(X) & \stackrel{\delta^n}{\longrightarrow} & C^{n+1}(X) & \stackrel{\delta^{n+1}}{\longrightarrow} & ...
\end{array}$$

Temos ainda $(\delta^n)' \circ (\delta^{n-1})' = 0$ pois $Im\ (\delta^{n-1})' = Ker\ (\delta^n)'$.

Assim podemos definir $H^n(X,A) = H(C^n(X,A)) = \dfrac{Ker\ (\delta^n)'}{Im\ (\delta^{n-1})'}$.

Definição 1.0.34 *O grupo $H^n(X,A)$ é chamado de n-ésimo grupo de cohomologia relativa associada ao par (X,A).*

Temos uma seqüência infinita de grupos e homomorfismos

$$... \xrightarrow{\delta^*} H^n(X,A) \xrightarrow{j^*} H^n(X) \xrightarrow{i^*} H^n(A) \xrightarrow{\delta^*} H^{n+1}(X,A) \xrightarrow{j^*} ...$$

onde $i^* = (i^\sharp)_*$, $j^* = (j^\sharp)_*$ e δ^* é o operador cobordo do par (X,A).

Definição 1.0.35 *A seqüência acima é chamada de seqüência de cohomologia do par (X,A).*

Temos o seguinte

Teorema 1.0.2 *A seqüência de cohomologia do par (X,A) é exata.*

Demonstração. Vide [2], p.200 ou [9], p.91. ■

Teorema 1.0.3 *Sejam (X,A) e (Y,B) pares CW. Então $H^*(X,A;R) \otimes H^*(Y,B;R) \cong H^*(X \times Y, A \times Y \cup X \times B; R) \stackrel{def.}{=} H^*((X,A) \times (Y,B)))$ se $H^k(Y,B;R)$ é um $R-$módulo livre finitamente gerado para cada k.*

Demonstração. Vide [2], Teorema 3.21, p.223. ■

Observação 1.0.2 *O teorema acima nos diz em outras palavras que*

$$\prod_{i+j=q} H^i(X,A;R) \otimes H^j(Y,B;R) = [H^*(X,A;R) \otimes H^*(Y,B;R)]^q \cong H^q((X,A) \times (Y,B);R)$$

Definição 1.0.36 *Uma aplicação $f : X \to Y$ é chamada uma proclusão se, e somente se, f é sobrejetora e Y tem a topologia da identificação imposta por f, isto é, um subconjunto U de Y é aberto se, e somente se, $f^{-1}(U)$ é aberto em X.(Vide [10], p.20)*

Definição 1.0.37 *Uma aplicação $f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ é um homeomorfismo relativo de pares CW se, e somente se, f é uma proclusão de X em Y e $f_{|X-A}$ é um homeomorfismo de $X - A$ com $Y - B$.*

Teorema 1.0.4 *(Aplicação Excisão) Seja $f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ um homeomorfismo relativo de pares CW. Então $f^* : H^n(Y, B) \longrightarrow H^n(X, A)$ é isomorfismo para todo n.*

Demonstração. Sejam $p : (X, A) \longrightarrow (X/A, *)$ e $q : (Y, B) \longrightarrow (Y/B, *)$ as proclusões naturais.

Temos que f induz $g : (X/A, *) \longrightarrow (Y/B, *)$ tal que $g \circ p = q \circ f$.

Como q e f são proclusões então g é proclusão e também homeomorfismo, pois g é uma aplicação contínua e bijetora.

Temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} H^n(Y/B, *) & \xrightarrow{q^*} & H^n(Y, B) \\ \downarrow g^* & \curvearrowright & \downarrow f^* \\ H^n(X/A, *) & \xrightarrow{p^*} & H^n(X, A) \end{array}$$

Agora, como p^*, q^* e g^* são isomorfismos, então f^* é isomorfismo para todo n. ■

1.0.9 Seqüência Exata de uma Tripla (Tríada) CW

Seja (X, A, B) uma tripla CW, isto é, (X, A), (X, B) e (A, B) são pares CW.

Temos uma seguinte seqüência exata split a nível de cadeias singulares

$$0 \longrightarrow C_n(A, B) \xrightarrow{i_\sharp} C_n(X, B) \xrightarrow{j_\sharp} C_n(X, A) \longrightarrow 0$$

Essa seqüência exata split dá origem a uma seqüência exata longa em homologia

$$... \xrightarrow{\partial_*} H_n(A, B; G) \xrightarrow{i_*} H_n(X, B; G) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A; G) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(A, B; G) \xrightarrow{i_*} ...$$

e outra seqüência exata longa em cohomologia

$$... \xrightarrow{i^*} H^{n-1}(A, B; G) \xrightarrow{\delta^*} H^n(X, A; G) \xrightarrow{j^*} H^n(X, B; G) \xrightarrow{i^*} H^n(A, B; G) \xrightarrow{\delta^*} ...$$

1.0.10 Homologia e Cohomologia de um CW complexo X celular

Denotemos $K = \{X^n | n = 0, 1, 2, ...\}$ uma estrutura de CW complexo de X e definamos $X^n = \emptyset$ para todo $n < 0$.

Teorema 1.0.5 *Sejam X um CW complexo e $X^n = X^{n-1} \coprod_\alpha e_\alpha^n$. Então $H_q(X^n, X^{n-1}) = 0$, para todo $q \neq n$ e $H_n(X^n, X^{n-1})$ é um grupo abeliano livre, com uma base em correspondência um a um com as $n-$células de X.*

Demonstração. Vide [6], Teorema 2.1, p.78 ou [2], Lema 2.34, p.137. ■

Lema 1.0.4 *$H_q(X^n) = 0$, para todo $q > n$.*

Demonstração. A prova é por indução sobre n.

Para $n = 0$, o lema é trivial pois X^0 é um conjunto discreto por definição.

Os passos de indução são provados usando a seqüência de homologia do par (X^n, X^{n-1}).

Consideremos a seguinte seqüência

$$... \longrightarrow H_{q+1}(X^n, X^{n-1}) \overset{\partial_{q+1}}{\longrightarrow} H_q(X^{n-1}) \overset{i_q}{\longrightarrow} H_q(X^n) \overset{j_q}{\longrightarrow} H_q(X^n, X^{n-1}) \overset{\partial_q}{\longrightarrow} H_{q-1}(X^{n-1}) \longrightarrow ...$$

Pelo Teorema 1.0.5, como $q + 1 > q > n$ então $q \neq n \neq q + 1$ e, assim, $H_{q+1}(X^n, X^{n-1}) = H_q(X^n, X^{n-1}) = 0$.

Logo, obtemos a seqüência exata curta

$$0 \overset{\partial_{q+1}}{\longrightarrow} H_q(X^{n-1}) \overset{i_q}{\longrightarrow} H_q(X^n) \overset{j_q}{\longrightarrow} 0$$

Assim $H_q(X^{n-1}) \cong H_q(X^n)$.

Mas por hipótese de indução $H_q(X^{n-1}) = 0$.

Portanto, $H_q(X^n) = 0$, para todo $q > n$. ■

Agora associaremos ao CW complexo K certos grupos de cadeia $C_n(K), n = 0, 1, 2, \cdots$ e entao concluíremos que $H_n(K)$ é isomorfo a $H_n(X)$.

Definamos $C_n(K) = H_n(X^n, X^{n-1})$ e $d_n : C_n(K) \to C_{n-1}(K)$ o homomorfismo dado pela composição dos homomorfismos

$$H_n(X^n, X^{n-1}) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(X^{n-1}) \xrightarrow{j_{n-1}} H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2})$$

onde ∂_n é o operador bordo do par (X^n, X^{n-1}) e j_{n-1} é o homomorfismo induzido pela aplicação inclusão.

Então $d_n \circ d_{n+1} = 0$ para todo n.

Definimos $H(C_n(K)) = \dfrac{Ker\ d_n}{Im\ d_{n+1}} = H_n(K)$.

Consideremos o seguinte diagrama

$$H_n(X) \overset{k_n}{\longleftarrow} H_n(X^n) \overset{j_n}{\longrightarrow} H_n(X^n, X^{n-1}) = C_n(K)$$

onde k_n é a induzida da inclusão $X^n \overset{k}{\hookrightarrow} X$ e j_n é a induzida da projeção $X^n \overset{j}{\hookrightarrow} X^n/X^{n-1}$.

Então, usando o Teorema 1.0.5 e o Lema 1.0.4 temos o

Teorema 1.0.6 *No diagrama acima:*

- k_n *é epimorfismo;*
- j_n *é monomorfismo;*
- $Im\ j_n = Ker\ d_n$, *onde* $d_n : C_n(K) \longrightarrow C_{n-1}(K)$;
- $Ker\ k_n = j_n^{-1}(Im\ d_{n+1})$.

Assim, $j_n \circ k_n^{-1}$ *define um isomorfismo* $\theta_n : H_n(X) \longrightarrow H_n(K)$.

Demonstração. Vide [6], Teorema 4.2, p.85. ∎

Como aplicações desse teorema temos:

(1) Se X é um CW complexo $n-$dimensional então $H_q(X) = 0$, para todo $q > n$.

(2) Seja X um CW complexo com um número finito de células $n-$dimensionais. Então $H_n(X)$ é um grupo abeliano finitamente gerado (isto é, $H_n(X)$ é soma direta de grupos cíclicos).

(3) Seja X um CW complexo sem células $n-$dimensionais. Então $H_n(X) = 0$.

Propriedades 1.0.1 *(de homologia)*

Sejam X, Y *e* Z *CW complexos. Se* $f : X \longrightarrow Y$ *é contínua, então* f *induz um homomorfismo* $f_* : H_n(X) \longrightarrow H_n(Y)$, *para todo* $n \geq 0$ *(chamado de homomorfismo induzido por* f*) tal que*

(1) *Se* $f : X \longrightarrow Y$ *e* $g : Y \longrightarrow Z$ *são contínuas, então* $g \circ f : X \longrightarrow Z$ *é contínua e* $(g \circ f)_* = (g_*) \circ (f_*)$.

(2) *Se* $1_X : X \longrightarrow X$ *denota a identidade de* X, *então* $(1_X)_* = 1_{H_n(X)}$ *para todo* n.

(3) *Se* $f : X \longrightarrow Y$ *é um homeomorfismo, então* $f_* : H_n(X) \longrightarrow H_n(Y)$ *é isomorfismo para todo* n.

(4) *Se* $f \simeq g : X \longrightarrow Y$ *então* $f_* = g_* : H_n(X) \longrightarrow H_n(Y)$ *para todo* n.

(5) *Se* $X = \coprod_\alpha X_\alpha$*(união disjunta) com inclusões* $i_\alpha : X_\alpha \hookrightarrow X$, *a aplicação soma direta* $\bigoplus_\alpha (i_\alpha)_* : \bigoplus_\alpha H_n(X_\alpha) \longrightarrow H_n(X)$ *é um isomorfismo para cada* n *(Vide [10],(2.7) ,p 59).*

Proposição 1.0.2 *Os grupos de homologia do espaço projetivo real* $\mathbb{R}P(n)$ *são dados por*

$$H_i(\mathbb{R}P(n)) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{para } i=0; \\ \mathbb{Z}_2, & \text{para } i \text{ ímpar}, \ 0<i<n; \\ \mathbb{Z}, & \text{para } i \text{ ímpar}, \ i=n; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Demonstração. Vide [9], Proposição 2.22, p.72. ∎

Proposição 1.0.3 *Os grupos de homologia da esfera* S^n *são dados por*

$$H_i(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{para } i=0,n \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Demonstração. Vide [9], Teorema 1.15 , p. 27. ∎

Definição 1.0.38 *O grupo das $n-$cadeias de X com coeficientes em G, que denotaremos por $A_n(X;G)$, é igual a $C_n(K)\otimes G$, onde K é uma estrutura de CW complexo de X.*

Como um resultado dual do Teorema 1.0.6 também temos $H^n(K)\cong H^n(X)$.

Definição 1.0.39 *O grupo das $n-$cocadeias de X com coeficientes em G, que denotaremos por $A^n(X;G)$, é igual a $Hom(C_n(K),G)$ onde K é a estrutura de CW complexo X.*

Observação 1.0.3 *Conforme [3], Exercício 8D, p. 76 como $C_n(K)$ é um $\mathbb{Z}-$ módulo livre segue que $Hom(C_n(K),\mathbb{Z})\otimes G\cong Hom(C_n(K),G)$.*

Propriedades 1.0.2 *(de cohomologia) Sejam X, Y e Z CW complexos. Se $f:X\longrightarrow Y$ é contínua, então f induz um homomorfismo $f^*:H^n(Y)\longrightarrow H^n(X)$, para todo $n\geq 0$ (chamado de homomorfismo induzido por f) tal que*

(1) Se $f:X\longrightarrow Y$ e $g:Y\longrightarrow Z$ são contínuas então $g\circ f:X\longrightarrow Z$ é contínua e $(g\circ f)^*=f^*\circ g^*$.

(2) Se $1_X:X\longrightarrow X$ denota a identidade de X, então $(1_X)^*=1_{H^n(X)}$ para todo n.

(3) Se $f:X\longrightarrow Y$ é um homeomorfismo, então $f^*:H^n(Y)\longrightarrow H^n(X)$ é isomorfismo para todo n.

(4) Se $f\simeq g:X\longrightarrow Y$ então $f^*=g^*:H^n(Y)\longrightarrow H^n(X)$ para todo n.

Lema 1.0.5 *Se $f:X\longrightarrow Y$ é uma equivalência de homotopia, então o homomorfismo $f^*:H^r(Y)\longrightarrow H^r(X)$ é um isomorfismo.*

Demonstração. Se $f:X\longrightarrow Y$ é uma equivalência de homotopia, então existe $g:Y\longrightarrow X$ tal que $f\circ g\simeq 1_Y$ e $g\circ f\simeq 1_X$.

Assim,

$$g^*\circ f^*=(f\circ g)^*=(1_Y)^*=1_{H^r(Y)}\ \ \mathbf{(1)}\qquad \text{e}\qquad f^*\circ g^*=(g\circ f)^*=(1_X)^*=1_{H^r(X)}\ \ \mathbf{(2)}$$

Logo, de **(1)** temos que f^* é monomorfismo e de **(2)** temos que f^* é epimorfismo.

Portanto, f^* é um isomorfismo. ∎

Segue da observação 1.0.1 a seguinte

Proposição 1.0.4 *Se $X=\coprod_\alpha X_\alpha$(união disjunta) com inclusões $i_\alpha:X_\alpha\hookrightarrow X$, o produto $\prod_\alpha(i_\alpha)^*:H^n(X)\longrightarrow\prod_\alpha H^n(X_\alpha)$ é um isomorfismo para cada n.*

Demonstração. Vide [10],(7.19), p.598. ∎

Teorema 1.0.7 *Sejam X um CW complexo e $X^n = X^{n-1} \coprod_\alpha e^n_\alpha$. Então $H^q(X^n, X^{n-1}) = 0$, para todo $q \neq n$ e $H^n(X^n, X^{n-1})$ é um grupo abeliano livre, com uma base em correspondência um a um com as $n-$células de X.*

Demonstração. Vide [2], Teorema 3.5, p.203. ∎

Definição 1.0.40 *Uma n-variedade sem bordo é um espaço de Hausdorff X no qual cada ponto tem uma vizinhança aberta homeomorfa a $\mathbb{R}^n$.*

Lema 1.0.6 *Se X é uma n-variedade sem bordo, então $H_k(X;\mathbb{Z}) = 0$ para todo $k > n$.*

Demonstração. Vide [9], Lema 5.2, p.130. ∎

Teorema 1.0.8 *(Dualidade de Poincaré) Seja X uma n-variedade $\mathbb{Z}$-orientável fechada com $[X] \in H_n(X;\mathbb{Z})$. Então $H^k(X;\mathbb{Z})$ é isomorfo a $H_{n-k}(X;\mathbb{Z})$ para todo k.*

Demonstração. Vide [2], Teorema 3.30, p.241. ∎

Observação 1.0.4 *Se X é uma n-variedade sem bordo, então $H^k(X;\mathbb{Z}) = 0$ para todo $k > n$.*

Observação 1.0.5 *Usando o Teorema 1.0.8 e a Proposição 1.0.2 podemos calcular os grupos de cohomologia do espaço projetivo real $\mathbb{R}P(n)$ da seguinte maneira*

$$H^i(\mathbb{R}P(n)) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \textit{para i=0 e n ímpar;} \\ \mathbb{Z}_2, & \textit{para } 0<i<n \textit{ e } (n-i) \textit{ ímpar;} \\ \mathbb{Z}, & \textit{para i=n;} \\ 0, & \textit{caso contrário.} \end{cases}$$

Exemplo 1.0.1 *Os grupos de cohomologia do espaço projetivo real $\mathbb{R}P(3)$ são dados por*

$$H^i(\mathbb{R}P(3)) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & i = 0,\ 3; \\ \mathbb{Z}_2, & i = 2; \\ 0, & \textit{caso contrário.} \end{cases}$$

Exemplo 1.0.2 *Usando o Teorema 1.0.8 e a Proposição 1.0.3 concluímos que os grupos de cohomologia da esfera S^n são dados por*

$$H^i(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & i = 0,\ n; \\ 0, & \textit{caso contrário.} \end{cases}$$

Exemplo 1.0.3 *Os grupos de cohomologia de um ponto pt são dados por (Vide [9], Exemplo, p. 95)*

$$H^i(pt) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \textit{para i=0} \\ 0, & \textit{caso contrário.} \end{cases}$$

1.0.11 Produtos Cross e Cup

Definição 1.0.41 *Se X é um CW complexo, existe (vide [8], p. 249) um bem definido produto em cohomologia $\mu : H^p(X) \otimes H^q(X) \to H^{p+q}(X \times X)$. Se $u \in H^p(X)$ e $v \in H^q(X)$, definimos o produto cross $u \times v \in H^{p+q}(X \times X)$ por $u \times v = \mu(u \otimes v)$.*

Definição 1.0.42 *Se X é um CW complexo e $u \in H^p(X), v \in H^q(X)$, o produto cup $u \smile v \in H^{p+q}(X)$ é definido por $u \smile v = \Delta^*(u \times v)$, onde $\Delta^* : H^{p+q}(X \times X) \to H^{p+q}(X)$ é o homomorfismo induzido pela aplicação diagonal $\Delta : X \to X \times X; x \to (x, x)$ e $u \times v$ é o produto cross definido acima.*

1.0.12 Fibração

Sejam $p : E \longrightarrow B$ contínua e sobrejetora na categoria dos CW complexos e $I = [0, 1]$.

Definição 1.0.43 *Seja $f_0 : X \longrightarrow B$ uma aplicação contínua. Dizemos que f_0 admite um levantamento com relação a p se existe $F_0 : X \longrightarrow E$ tal que $p \circ F_0 = f_0$.*

Definição 1.0.44 *Dizemos que $p : E \longrightarrow B$ tem a propriedade do levantamento de homotopia se para qualquer $f_0 : X \longrightarrow B$ contínua e qualquer $H : X \times I \longrightarrow B$ homotopia com $H(x, 0) = f_0(x)$, se f_0 admite um levantamento com relação a p, digamos $F_0 : X \longrightarrow E$, então existe uma única $\widetilde{H} : X \times I \longrightarrow E$ homotopia com $\widetilde{H}(x, 0) = F_0(x)$ para todo $x \in X$ e $p \circ \widetilde{H} = H$.*

Definição 1.0.45 *Dizemos que $p : E \longrightarrow B$ é uma fibração se p tem a propriedade do levantamento de homotopia.*

Definição 1.0.46 *Sejam $p : E \longrightarrow B$ uma fibração e $b_0 \in B$ (b_0 é chamado ponto base de B). Então $\mathcal{F}_0 = p^{-1}(b_0)$ é chamada fibra sobre b_0.*

Definição 1.0.47 *Sejam $p : E \longrightarrow B$ uma fibração e $\varphi : X \longrightarrow B$ uma aplicação contínua. Consideremos $\varphi^*(E) = \{(x, e) \in X \times E \mid \varphi(x) = p(e)\}$. Então temos o diagrama comutativo abaixo:*

$$\begin{array}{ccc} \varphi^*(E) & \xrightarrow{p_2} & E \\ {\scriptstyle p_1}\downarrow & \curvearrowright & \downarrow{\scriptstyle p} \\ X & \xrightarrow{\varphi} & B \end{array}$$

onde p_1 é a restrição da projeção no primeiro fator de $X \times E \longrightarrow X$ ao subconjunto $\varphi^*(E)$ e p_2 é a restrição da projeção no segundo fator de $X \times E \longrightarrow E$ ao subconjunto $\varphi^*(E)$.

Chamamos p_1 de fibração induzida de p por φ e $\varphi^*(E)$ o pullback de p por φ.

Lema 1.0.7 *Sejam $p : E \longrightarrow B$ uma fibração, $\varphi : X \longrightarrow B$ um homeomorfismo e $\varphi^*(E)$ o pullback de p por φ. Então a segunda projeção $p_2 : \varphi^*(E) \longrightarrow E$ é um homeomorfismo.*

Demonstração. Temos que p_2 é contínua. Além disso p_2 é bijetora e possui inversa contínua.

De fato, consideremos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} \varphi^*(E) & \xrightarrow{p_2} & E \\ p_1\downarrow & \curvearrowright & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{\varphi} & B \end{array}$$

Dado $e \in E$ então $p(e) \in B$.

Como φ é sobrejetora, existe $x \in X$ tal que $\varphi(x) = p(e)$. Assim, $(x, e) \in \varphi^*(E)$ e $p_2(x, e) = e$.

Portanto, p_2 é sobrejetora.

Sejam $(x_1, e_1), (x_2, e_2) \in \varphi^*(E)$ tais que $p_2(x_1, e_1) = p_2(x_2, e_2)$. Então $e_1 = e_2 = e$.

Como $p \circ p_2 = \varphi \circ p_1$ temos

$$p(e) = p \circ p_2(x_1, e) = \varphi \circ p_1(x_1, e) = \varphi(x_1) \quad \text{e} \quad p(e) = p \circ p_2(x_2, e) = \varphi \circ p_1(x_2, e) = \varphi(x_2)$$

Logo, $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$ e como φ é injetora segue que $x_1 = x_2$.

Assim, $(x_1, e_1) = (x_2, e_2)$ e p_2 é injetora.

Logo, p_2 é bijetora.

Ainda $p_2^{-1} : E \to \varphi^*(E)$ é dada por $p_2^{-1}(e) = (x_0, e)$ onde x_0 é o único elemento de X tal que $\varphi(x_0) = p(e)$ (note que φ é um homeomorfismo) e assim p_2^{-1} é contínua.

Portanto p_2 é um homeomorfismo. ■

Definição 1.0.48 *Uma homotopia $H : X \times I \to B$ é estacionária se, e somente se, $H(x, t) = H(x, 0)$, $\forall t \in I, \forall x \in X$.*

Definição 1.0.49 *Sejam $p : X \longrightarrow B$ e $p' : X' \longrightarrow B$ fibrações com o mesmo espaço base B. Dizemos que p e p' possuem o mesmo tipo de homotopia de fibra se, e somente se, existem aplicações $\lambda : X \longrightarrow X'$, $\mu : X' \longrightarrow X$ tais que $p' \circ \lambda = p$, $p \circ \mu = p'$, e homotopias $F : X \times I \longrightarrow X$ entre $\mu \circ \lambda$ e a aplicação identidade de X e $G : X' \times I \longrightarrow X'$ entre $\lambda \circ \mu$ e a aplicação identidade de X' tais que as homotopias $p \circ F$ e $p' \circ G$ são estacionárias.*

Definição 1.0.50 *Seja $p : X \longrightarrow B$ uma fibração. Dizemos que p é homotopicamente trivial na fibra se, e somente se, $p : X \to B$ e $p' : \mathcal{F} \times B \longrightarrow B$, onde $\mathcal{F} = p^{-1}(b_0)$ com $b_0 \in B$, possuem o mesmo tipo de homotopia de fibra.*

Lema 1.0.8 *Seja $p : X \longrightarrow B$ uma fibração e suponhamos que B seja contrátil. Então p é homotopicamente trivial na fibra. Além disso, para qualquer subespaço B_0 de B, os pares $(X, p^{-1}(B_0))$ e $(\mathcal{F} \times B, \mathcal{F} \times B_0)$ têm o mesmo tipo de homotopia.*

Demonstração. Vide [10], Corolário 7.27, p.40. ■

1.0.13 Álgebra Exterior

Por um A-módulo $\mathbb{Z}$-graduado entendemos uma família $M = \{M_n, n = 0, \pm 1, \pm 2, ...\}$ de A-módulos M_n; um elemento m de M_n é também chamado um elemento de grau n em M (denotamos $deg\ m = n$).

Um A-módulo graduado M é um módulo $\mathbb{Z}$-graduado com $M_n = 0$, para $n < 0$.

Uma álgebra graduada Ω é uma família de A-módulos $\{\Omega_n, n = 0, 1, ...\}$ com um elemento distinguido $1 \in \Omega_0$ e uma função A-bilinear.

$$\begin{array}{ccc} \Omega \times \Omega & \longrightarrow & \Omega \\ (\lambda, \mu) & \mapsto & \lambda.\mu \end{array}$$

tal que sempre temos $deg(\lambda.\mu) = deg(\lambda) + deg(\mu)$,

$$\lambda.(\mu.\nu) = (\lambda.\mu).\nu, \quad 1.\lambda = \lambda.1 = \lambda.$$

Uma álgebra graduada Ω é comutativa se sempre

$$\lambda.\mu = (-1)^{deg(\lambda)deg(\mu)}.\mu.\lambda.$$

Em conseqüência, os elementos de grau par comutam no sentido normal. Se, além disso, $\lambda^2 = 0$ para todo elemento λ de grau ímpar, Ω é chamada rigorosamente comutativa.

O produto tensorial de duas A-álgebras graduadas Ω e Σ é seu produto tensorial $\Omega \otimes \Sigma$, como módulos graduados, onde em termos de elementos, o produto é dado por

$$(\lambda \otimes \sigma)(\lambda^{'} \otimes \sigma^{'}) = (-1)^{deg(\sigma)deg(\lambda^{'})}\lambda.\lambda^{'} \otimes \sigma.\sigma^{'}$$

e a identidade de $\Omega \otimes \Sigma$ é $1_\Omega \otimes 1_\Sigma$.

O produto tensorial para álgebras graduadas satisfaz

$$\alpha : \Omega \otimes \Sigma \cong \Sigma \otimes \Omega, \quad \alpha[\lambda \otimes \sigma] = (-1)^{deg(\lambda)deg(\sigma)}\sigma \otimes \lambda$$

$$\beta : (\Omega \otimes \Sigma) \otimes \tau \cong \Omega \otimes (\Sigma \otimes \tau), \quad \beta[(\lambda \otimes \sigma) \otimes \gamma] = \lambda \otimes (\sigma \otimes \gamma),$$

$$A \otimes \Omega \cong \Omega \cong \Omega \otimes A, \quad a \otimes \lambda \rightarrow a\lambda \leftarrow \lambda \otimes a$$

(Aqui A é reconhecido como uma álgebra graduada com $A_0 = A$, $A_n = 0$, $n \neq 0$).

A álgebra exterior $\Lambda = \Lambda(u)$ sobre um símbolo u de grau ímpar d é construída do A-módulo livre Au com um gerador u como a álgebra graduada Λ com $\Lambda_0 = A$, $\Lambda_d = Au$, $\Lambda_n = 0$ para $0 \neq n \neq d$, e com produto determinado por $1u = u = u1$, $u^2 = 0$.

É rigorosamente comutativa.

Seja $\Lambda(u_i)$, $i = 1, ..., n$, a álgebra exterior sobre o símbolo u_i de grau ímpar d_i.

Para n letras $u_1, ..., u_n$, cada uma de grau ímpar d_i, o produto tensorial (sobre A)

$$\Lambda(u_1, ..., u_n) = \Lambda(u_1) \otimes ... \otimes \Lambda(u_n)$$

é uma álgebra graduada rigorosamente comutativa, chamada a álgebra exterior sobre A com geradores $u_1, ..., u_n$.

O produto de dois elementos e e e' na álgebra exterior é frequentemente escrito como $e \wedge e'$. Claramente $(*)$ Λ é o módulo livre sobre todos os produtos (em ordem) dos geradores u_i; os produtos de grau $d_{i1} + ... + d_{ip} > 0$ são

$$u_{i_1} u_{i_2} ... u_{i_p} = u_{i_1} \wedge u_{i_2} \wedge ... \wedge u_{i_p},$$

com $1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_p \leq n$.

$(*)$ Note que $u_i \wedge u_j = -u_j \wedge u_i$ para $i \neq j$.

O número de tais produtos é $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$ onde $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix} = \dfrac{n!}{(n-p)!p!}$.

Vale a regra

$$u_{i_{\sigma(1)}} u_{i_{\sigma(2)}} ... u_{i_{\sigma(p)}} = (-1)^{sgn(\sigma)} u_{i_1} u_{i_2} ... u_{i_p}$$

onde σ é uma permutação qualquer de $\{1, ..., p\}$ e $sgn\ \sigma$ é o sinal da permutação σ.

1.0.14 Grupos Clássicos

Definição 1.0.51 *O grupo das rotações do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, denotado por $SO(n)$, é formado pelas transformações lineares $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tais que $\langle T(x), T(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^n$ e, além disso, $det(T) = 1$.*

Os elementos do $SO(n)$ também podem ser vistos como matrizes reais ortogonais $n \times n$, com determinante 1.

Definição 1.0.52 *O grupo unitário, denotado por $U(n)$, é o conjunto de todas as transformações lineares $T : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$ que preservam produto interno, ou seja, que cumprem a condição $\langle T(z), T(w) \rangle = \langle z, w \rangle$, para quaisquer $z, w \in \mathbb{C}^n$.*

Os elementos do $U(n)$ também podem ser vistos como matrizes complexas unitárias $n \times n$.

Definição 1.0.53 *O grupo especial unitário, denotado por $SU(n)$, é o subgrupo de $U(n)$ formado pelas matrizes unitárias que têm determinante igual a 1.*

Definição 1.0.54 *O grupo simplético, denotado por $Sp(n)$, é o conjunto das $2n \times 2n$ matrizes reais A tais que $A^t JA = J$, onde J é a $2n \times 2n$ matriz de blocos*

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$$

Definição 1.0.55 *O espaço projetivo complexo, denotado por $\mathbb{C}P(n)$, é definido como o espaço quociente da esfera S^{2n+1} pela relação de equivalência segundo a qual dois pontos $w, z \in S^{2n+1}$ são equivalentes se, e somente se, existe $u \in S^1$ tal que $w = u.z$.*

Proposição 1.0.5 *Temos os seguintes resultados:*

(i) $SO(1)$ é um ponto (Vide [2], p.293).
(ii) $SO(2)$ é homeomorfo e isomorfo como um grupo a S^1 (Vide [2], p.293).
(iii)$SO(3)$ é homeomorfo a $\mathbb{R}P(3)$ (Vide [2], p.293).
(iv) $SU(1)$ é um ponto (Vide [2], p.434).
(v) $SU(2)$ é homeomorfo a S^3 (Vide [2], p.434).
(vi) $Sp(1)$ é homeomorfo a S^3 (Vide [7], Exercício 11, p.214).
(vii) $U(n)$ é homeomorfo a $S^1 \times SU(n)$ (Vide [7], p.141).

Capítulo 2

Seqüências Espectrais

Sejam D e E grupos abelianos e consideremos o seguinte triângulo

$$\begin{tikzcd} D \arrow[rr, "i"] & & D \arrow[dl, "j"] \\ & E \arrow[ul, "k"] & \end{tikzcd}$$

onde i, j, k são homomorfismos.

Definição 2.0.56 *Dizemos que o triângulo acima é exato em cada vértice se*

$$Im\ k = Ker\ i$$

$$Im\ i = Ker\ j$$

$$Im\ j = Ker\ k$$

Tal triângulo é chamado triângulo exato.

Lema 2.0.9 *Se* $d = j \circ k : \ E \ \longrightarrow \ E$, *então* $d^2 = 0$.

Demonstração. De fato, se $x \in E$ então

$$d^2(x) = (j \circ k)^2(x) = (j \circ k) \circ (j \circ k)(x) = j \circ (k \circ j) \circ k\ (x) = 0$$

pois $Im\ j = ker\ k$ e assim $k \circ j = 0$. ∎

Assim podemos construir a homologia $E_1 = H(E,d) = \frac{ker\ d}{Im\ d}$ de E com relação a d, pois $Im\ d \subset\ ker\ d$, uma vez que se $y \in Im\ d$, então $y = d(x)$ para algum $x \in E$.

Assim, $d(y) = d(d(x)) = d \circ d(x) = d^2(x) = 0$.

Se chamarmos $D_1 = Im\ i$ podemos formar o seguinte triângulo

$$\begin{tikzcd} D_1 \arrow[rr, "i_1"] & & D_1 \arrow[dl, "j_1"] \\ & E_1 \arrow[ul, "k_1"] & \end{tikzcd}$$

onde

$i_1 = i\ |_{D_1}$;

$j_1(i(a)) = [j(a)]$, $a \in D$;

$k_1([x]) = k(x)$, $x \in ker\ d$.

Definição 2.0.57 *O triângulo acima é chamado triângulo derivado.*

Inicialmente, observemos que i_1, j_1 e k_1 estão bem definidas.

• Como $i_1 = i\ |_{D_1}$ e $D_1 = Im\ i \subset D$ então i_1 está bem definida.

• Para verificarmos que j_1 está bem definida, primeiramente, observemos que $j(a) \in ker\ d$. De fato, $d(j(a)) = d \circ j(a) = (j \circ k) \circ j(a) = j \circ (k \circ j)(a) = 0$ pois $Im\ j = ker\ k$.

Agora, mostremos que j_1 está bem definida, isto é

$$i(x_1) = i(x_2) \Longrightarrow [j(x_1)] = [j(x_2)]$$

ou equivalentemente

$$i(x_1) = i(x_2) \Longrightarrow j(x_1) - j(x_2) \in Im\ d$$

De fato,

$$i(x_1) = i(x_2) \Longrightarrow i(x_1) - i(x_2) = 0 \Longrightarrow i(x_1 - x_2) = 0 \Longrightarrow x_1 - x_2 \in ker\ i = Im\ k$$

$\Longrightarrow x_1 - x_2 = k(y), \quad y \in E$

Logo, $j(x_1) - j(x_2) = j(x_1 - x_2) = j(k(y)) = j \circ k(y) = d(y) \in Im\ d$.

Portanto, j_1 está bem definida.

• Falta verificar que k_1 está bem definida, mas primeiro observemos que $k(x) \in D_1 = Im\, i = ker\ j$, com $x \in ker\ d$.

De fato, $j(k(x)) = j \circ k(x) = d(x) = 0$.

Agora, mostremos que k_1 está bem definida, isto é,

$$[x_1] = [x_2] \Longrightarrow k(x_1) = k(x_2), \qquad com \ \ x_1, x_2 \in ker\ d$$

De fato,

$$[x_1] = [x_2] \Longrightarrow x_1 - x_2 \in Im\ d \Longrightarrow x_1 - x_2 = d(y), \quad y \in E$$

Assim, $k(x_1) - k(x_2) = k(x_1 - x_2) = k(d(y)) = k \circ d(y) = k \circ (j \circ k)(y) = (k \circ j) \circ k(y) = 0$, pois $Im\ j = ker\ k$.

Logo, $k(x_1) = k(x_2)$.

Portanto, k_1 está bem definida.

Observemos, agora, que i_1, j_1 e k_1 são homomorfismos.

• Como i_1 é restrição de homomorfismo, então i_1 também é homomorfismo.

• Mostremos que j_1 é homomorfismo.

De fato, sejam $i(x_1), i(x_2) \in D_1$, com $x_1, x_2 \in D$.

Então,

$j_1(i(x_1)+i(x_2)) \overset{i\ hom}{=} j_1(i(x_1+x_2)) := [j(x_1+x_2)] \overset{j\ hom}{=} [j(x_1)+j(x_2)] = [j(x_1)]+[j(x_2)] =: j_1(i(x_1)) + j_1(i(x_2))$

• Mostremos que k_1 é homomorfismo.

De fato, sejam $[x_1], [x_2] \in E_1$, com $x_1, x_2 \in ker\ d$.

Então,

$k_1([x_1] + [x_2]) = k_1([x_1 + x_2]) := k(x_1 + x_2) \overset{k\ hom}{=} k(x_1) + k(x_2) =: k_1([x_1]) + k_1([x_2])$

Lema 2.0.10 *O triângulo derivado acima é exato em cada vértice.*

Demonstração. Para mostrarmos que o triângulo derivado é exato, devemos mostrar que

$$Im\ i_1 = Ker\ j_1$$

$$Im\ j_1 = Ker\ k_1$$

$$Im\ k_1 = Ker\ i_1$$

• Mostremos que $Im\ i_1 = Ker\ j_1$.

Se $y \in Im\ i_1$ então $y = i_1(x)$, com $x \in D_1 = Im\ i$. Assim, $x = i(a)$ para algum $a \in D$ e

$$j_1(y) = j_1(i_1(x)) \overset{x \in D_1}{=} j_1(i(x)) = [j(x)] = [j(i(a))] = [j \circ i(a)] = 0$$

pois $Im\ i = ker\ j$.

Portanto, $y \in ker\ j_1$.

Reciprocamente, seja $y \in ker\ j_1$ então $j_1(y) = 0$, com $y \in D_1 = Im\ i$.

Assim, $y = i(x), \quad x \in D$.

Agora, $0 = j_1(y) = j_1(i(x)) = [j(x)]$ então $j(x) \in Im\ d$.

Daí, $j(x) = d(a)$, com $a \in E$.

Logo,

$$j(x) = j \circ k(a) = j(k(a)) \Longrightarrow j(x) - j(k(a)) = 0 \Longrightarrow$$

$$j(x - k(a)) = 0 \Longrightarrow x - k(a) \in ker\ j = Im\ i \Longrightarrow x - k(a) = i(b), \quad b \in D$$

Daí, $i(x-k(a)) = i(i(b)) \Longrightarrow i(x) - i\circ k(a) = i\circ i(b) \overset{Imk=keri}{\Longrightarrow} i(x) = i(i(b))$
Assim, $y = i(x) = i(i(b)) = i_1(i(b)) \in Im\ i_1$
Portanto, $Im\ i_1 = Ker\ j_1$.
• Mostremos que $Im\ j_1 = Ker\ k_1$.
Se $[z] \in Im\ j_1$, com $z \in ker\ d$, então $[z] = j_1(y)$, onde $y \in D_1 = Im\ i$, isto é, $[z] = j_1(i(x))$, com $y = i(x)$ para algum $x \in D$.
Assim, $k_1([z]) = k_1(j_1(i(x))) = k_1([j(x)]) = k(j(x)) = k\circ j(x) = 0$ pois $Im\ j = ker\ k$.
Portanto, $[z] \in ker\ k_1$.
Reciprocamente, se $[z] \in ker\ k_1$ então $k_1([z]) = 0$, ou seja, $k(z) = 0$.
Logo, $z \in ker\ k = Im\ j$, e daí, $z = j(y)$ com $y \in D$.
Então, $[z] = [j(y)] = j_1(i(y)) \in Im\ j_1$.
Portanto, $Im\ j_1 = Ker\ k_1$.
• Mostremos que $Im\ k_1 = Ker\ i_1$.
Se $x \in Im\ k_1$ então $x = k_1([z])$, com $z \in ker\ d$, isto é, $x = k(z)$.
Daí, $i_1(x) \overset{x\in D_1}{=} i(x) = i(k(z)) = i\circ k(z) = 0$ pois $ker\ i = Im\ k$.
Portanto, $x \in ker\ i_1$.
Reciprocamente, se $x \in ker\ i_1$ então $i_1(x) = 0$, com $x \in D_1$, isto é, $i(x) = 0$.
Logo $x \in ker\ i = Im\ k$ e portanto $x = k(z)$ para algum $z \in E$.
Assim, $x = k(z) = k_1([z]) \in Im\ k_1$.
Portanto, $Im\ k_1 = Ker\ i_1$. ∎
Definindo $d_1 = j_1 \circ k_1 : E_1 \longrightarrow E_1$ temos que $(d_1)^2 = 0$.
De fato, se $x \in E_1$, então

$$(d_1)^2(x) = (j_1\circ k_1)^2(x) = (j_1\circ k_1)\circ(j_1\circ k_1)(x) = j_1\circ(k_1\circ j_1)\circ k_1\ (x) = 0$$

pois $Im\ j_1 = ker\ k_1$.
Assim podemos construir a homologia $E_2 = H(E_1, d_1) = \frac{ker\ d_1}{Im\ d_1}$ de E_1 com relação a d_1.
Se chamarmos $D_2 = Im\ i_1$ podemos formar o segundo triângulo derivado

$$\begin{tikzcd}
D_2 \arrow[rr, "i_2"] & & D_2 \arrow[dl, "j_2"] \\
& E_2 \arrow[ul, "k_2"] &
\end{tikzcd}$$

onde

$i_2 = i_1 |_{D_2}$;
$j_2(i_1(a)) = [j_1(a)]$, $a \in D_1$;
$k_2([x]) = k_1(x)$, $x \in kerd\ d_1$.

Analogamente ao primeiro triângulo derivado, este segundo triângulo derivado também é exato. Podemos verificar também que $(d_2)^2 = 0$.

E, assim sucessivamente, podemos construir uma seqüência de triângulos derivados.

Definição 2.0.58 *A seqüência $(E_r,\ d_r)$ é chamada seqüência espectral associada ao triângulo exato inicial.*

2.0.15 O termo E_∞

Consideremos $Z_n^0 = Z_n = Ker\ d_n$. Então podemos definir o epimorfismo

$$\begin{array}{rccl} h_n: & Z_n^0 & \longrightarrow & E_{n+1} = H(E_n, d_n) \\ & a & \longmapsto & [a] \end{array}$$

Definamos

$$Z_n^1 = \{z \in Z_n^0 : h_n(z) \in Z_{n+1} = Ker\ d_{n+1}\}$$

$$Z_n^2 = \{z \in Z_n^1 : h_{n+1} \circ h_n(z) \in Z_{n+2} = Ker\ d_{n+2}\}$$

$$Z_n^3 = \{z \in Z_n^2 : h_{n+2} \circ h_{n+1} \circ h_n(z) \in Z_{n+3} = Ker\ d_{n+3}\}$$

e, assim sucessivamente.

Consideremos

$$\overline{E_n} = \bigcap_{p=0}^{\infty} Z_n^p = \text{ } conjunto\ dos\ ciclos\ persistentes\ em\ E_n$$

Observemos que se $x \in \overline{E_n}$ então $h_n(x) \in \overline{E_{n+1}}$.

De fato, como $x \in \overline{E_n}$ então $x \in \bigcap_{p=0}^{\infty} Z_n^p$.

Devemos mostrar que $h_n(x) \in \overline{E_{n+1}} = \bigcap_{q=0}^{\infty} Z_{n+1}^q$.

Temos que

$$Z_{n+1}^0 = Ker\ d_{n+1}$$

$$Z_{n+1}^1 = \{x \in Z_{n+1}^0 : h_{n+1}(x) \in Ker\ d_{n+2}\}$$

$$Z_{n+1}^2 = \{x \in Z_{n+1}^1 : h_{n+2} \circ h_{n+1}(x) \in Ker\ d_{n+3}\}$$

$$Z_{n+1}^3 = \{x \in Z_{n+1}^2 : h_{n+3} \circ h_{n+2} \circ h_{n+1}(x) \in Ker\ d_{n+4}\}$$

e, assim sucessivamente.

Logo, como $x \in \bigcap_{p=0}^{\infty} Z_n^p$ temos que

$$x \in Z_n^1 \Rightarrow h_n(x) \in Ker\ d_{n+1} = Z_{n+1}^0$$

$$h_n(x) \in Z_{n+1}^0 \quad \text{e} \quad x \in Z_n^2 \Rightarrow h_{n+1}(h_n(x)) \in Ker\ d_{n+2} \Rightarrow h_n(x) \in Z_{n+1}^1$$

$$h_n(x) \in Z^1_{n+1} \;\text{ e }\; x \in Z^3_n \Rightarrow h_{n+2} \circ h_{n+1}(h_n(x)) \in Ker\ d_{n+3} \Rightarrow h_n(x) \in Z^2_{n+1}$$

e, assim sucessivamente, concluímos que $h_n(x) \in \bigcap_{q=0}^{\infty} Z^q_{n+1}$.
Portanto, $h_n(x) \in \overline{E_{n+1}}$.
Podemos então definir a seguinte aplicação

$$\begin{array}{rccc} \overline{h_n}: & \overline{E_n} & \longrightarrow & \overline{E_{n+1}} \\ & x & \longmapsto & h_n(x) \end{array}$$

Assim, o sistema $(\overline{E_n}, \overline{h_n})$ é um sistema direto de grupos e $E_\infty = \underrightarrow{lim}\ (\overline{E_n}, \overline{h_n})$.
Suponhamos que exista $r \geq 0$ tal que $d_n = 0$, para todo $n \geq r$.
Então, $Im\ d_n = \{0\}$, para todo $n \geq r$.
Logo,

$$E_{r+1} = H(E_r, d_r) = \frac{ker\ d_r}{Im\ d_r} = Ker\ d_r$$

$$E_{r+2} = H(E_{r+1}, d_{r+1}) = \frac{ker\ d_{r+1}}{Im\ d_{r+1}} = Ker\ d_{r+1}$$

e, assim sucessivamente.
Daí, $Ker\ d_n = E_n \cong E_{n+1} \cong E_{n+2} \cong ...,\ \forall n \geq r$, pois desde que $h_n : Ker\ d_n = E_n \longrightarrow E_{n+1}$ é um epimorfismo, então para mostrarmos que $E_n \cong E_{n+1}$ basta verificar que h_n é injetor.
De fato, sejam $x_1,\ x_2 \in Ker\ d_n$, então

$$h_n(x_1) = h_n(x_2) \Rightarrow [x_1] = [x_2] \Rightarrow x_1 - x_2 \in Im\ d_n = \{0\},\ \forall n \geq r$$

Assim, $x_1 - x_2 = 0$ e, daí, $x_1 = x_2$.
Logo, $E_n \cong E_{n+1}$ para todo $n \geq r$.
Portanto, $E_n \cong E_{n+1} \cong E_{n+2} \cong ...$, para todo $n \geq r$.
Assim, todos os grupos E_n, com $n \geq r$, são ciclos persistentes e $E_\infty \cong E_r$.
Isto vai ocorrer com freqüência.

Capítulo

3

Seqüências Espectrais de um Grupo diferencial com filtração e de um Complexo de Cocadeias com filtração

Por um grupo diferencial entendemos um par (A, d) onde A é um grupo e $d : A \to A$ é um homomorfismo tal que $d^2 = 0$, chamado diferencial.

Para melhor compreensão da maquinária algébrica, vamos trabalhar por partes, introduzindo primeiro a seqüência espectral de um grupo diferencial com filtração e posteriormente a seqüência espectral de um complexo de cocadeias com filtração.

3.0.16 Seqüência Espectral de um Grupo diferencial com filtração

Definição 3.0.59 *Uma filtração de um grupo diferencial* $(A,\ d)$ *é uma seqüência decrescente de subgrupos* $A = F^0(A) \supset F^1(A) \supset F^2(A) \supset ... \supset F^p(A) \supset F^{p+1}(A) \supset ...$ *satisfazendo* $d_p(F^p(A)) \subset F^p(A)$*, onde* $d_p = d_{|_{F^p(A)}}$.

Assim, temos a seqüência exata curta

$$0 \longrightarrow F^{p+1}(A) \xrightarrow{i_p} F^p(A) \xrightarrow{j_p} \frac{F^p(A)}{F^{p+1}(A)} \longrightarrow 0$$

onde $i_p : F^{p+1}(A) \longrightarrow F^p(A)$ é a inclusão e $j_p : F^p(A) \longrightarrow \frac{F^p(A)}{F^{p+1}(A)}$ é a projeção com $j_p(x) = [x]$.

De fato, mostremos que essa seqüência é exata.

• Exatidão em $F^{p+1}(A)$.

Basta mostrar que i_p é injetor, isto é, $Ker\ i_p = \{0\}$.

Assim, seja $x \in Ker\ i_p$ então $i_p(x) = 0$, ou seja, $x = 0$.

• Exatidão em $\frac{F^p(A)}{F^{p+1}(A)}$.

Basta observar que j_p é sobrejetora, o que é óbvio pois j_p é a projeção.

• Exatidão em $F^p(A)$.

Mostremos que $Im\ i_p = Ker\ j_p$.

Se $x \in Im\ i_p$ então $x = i_p(x)$, com $x \in F^{p+1}(A)$.

Assim, $j_p(x) = j_p(i_p(x)) = [i_p(x)] = [x] = 0$, pois $x \in F^{p+1}(A)$.

Logo, $Im\ i_p \subset Ker\ j_p$.

Reciprocamente, se $x \in Ker\ j_p$ então $j_p(x) = 0$, com $x \in F^p(A)$.

Assim, $[x] = 0$ o que significa que $x \in F^{p+1}(A)$ e, daí, $x = i_p(x) \in Im\ i_p$.

Logo, $Ker\ j_p \subset Im\ i_p$.

Portanto, $Im\ i_p = Ker\ j_p$.

Considere $d_{p+1} : F^{p+1}(A) \longrightarrow F^{p+1}(A)$ tal que $d_{p+1} = d_{|F^{p+1}(A)}$ e $\overline{d} : \frac{F^p(A)}{F^{p+1}(A)} \longrightarrow \frac{F^p(A)}{F^{p+1}(A)}$ tal que $\overline{d}([x]) = [d_p(x)]$.

Para melhor enxergarmos

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & \uparrow{\scriptstyle d_{p+1}} & & \uparrow{\scriptstyle d_p} & & \uparrow{\scriptstyle \overline{d}} & & \\
0 & \longrightarrow & F^{p+1}(A) & \xrightarrow{i_p} & F^p(A) & \xrightarrow{j_p} & \frac{F^p(A)}{F^{p+1}(A)} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow{\scriptstyle d_{p+1}} & & \uparrow{\scriptstyle d_p} & & \uparrow{\scriptstyle \overline{d}} & & \\
0 & \longrightarrow & F^{p+1}(A) & \xrightarrow{i_p} & F^p(A) & \xrightarrow{j_p} & \frac{F^p(A)}{F^{p+1}(A)} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow{\scriptstyle d_{p+1}} & & \uparrow{\scriptstyle d_p} & & \uparrow{\scriptstyle \overline{d}} & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

Observemos que a aplicação $\overline{d}$ é bem definida, pois

$[x] = [y] \Rightarrow x - y \in F^{p+1}(A) \subset F^p(A) \Rightarrow d_p(x-y) \in F^{p+1}(A) \overset{d_p\ hom}{\Rightarrow} d_p(x) - d_p(y) \in F^{p+1}(A) \Rightarrow [d_p(x)] = [d_p(y)] \Rightarrow \overline{d}([x]) = \overline{d}([y])$.

Além disso o diagrama acima comuta, pois

$$\overline{d} \circ j_p(x) = \overline{d}([x]) = [d_p(x)] = j_p(d_p(x)) = j_p \circ d_p(x)$$

Consideremos o seguinte triângulo:

$$\begin{tikzcd}
\frac{Ker\ d_{p+1}}{Im\ d_{p+1}} = H(F^{p+1}(A)) \arrow[rr, "H(i_p)"] & & H(F^p(A)) = \frac{Ker\ d_p}{Im\ d_p} \arrow[dl, "H(j_p)"] \\
 & H(\frac{F^p(A)}{F^{p+1}(A)}) = \frac{Ker\ \overline{d}}{Im\ \overline{d}} \arrow[ul, "\partial_p"] &
\end{tikzcd}$$

onde $H(i_p)([x]) = [i_p(x)]$, $H(j_p)([y]) = [j_p(y)]$ e $\partial_p([z]) = [v]$, onde v é o único elemento em

$F^{p+1}(A)$ tal que $i_p(v) = d_p(u)$ com $j_p(u) = z$.

Mostremos que essas aplicações estão bem definidas.

• $H(i_p)$ está bem definida, pois

$$[x_1] = [x_2] \Rightarrow x_1 - x_2 \in Im\ d_{p+1} \Rightarrow x_1 - x_2 = d_{p+1}(a),\ a \in F^{p+1}(A)$$

Logo, $i_p(x_1) - i_p(x_2) = i_p(x_1 - x_2) = i_p(d_{p+1}(a)) = i_p \circ d_{p+1}(a) = d_p \circ i_p(a) = d_p(i_p(a)) \in Im\ d_p$.

Portanto, $[i_p(x_1)] = [i_p(x_2)]$.

• $H(j_p)$ está bem definida, pois

$$[y_1] = [y_2] \Rightarrow y_1 - y_2 \in Im\ d_p \Rightarrow y_1 - y_2 = d_p(b), b \in F^p(A)$$

Logo, $j_p(y_1) - j_p(y_2) = j_p(y_1 - y_2) = j_p(d_p(b)) = j_p \circ d_p(b) = \overline{d} \circ j_p(b) = \overline{d}(j_p(b)) \in Im\ \overline{d}$.

Portanto, $[j_p(y_1)] = [j_p(y_2)]$.

• ∂_p está bem definida.

Consideremos a seqüência exata curta

$$0 \longrightarrow F^{p+1}(A) \xrightarrow{i_p} F^p(A) \xrightarrow{j_p} \frac{F^p(A)}{F^{p+1}(A)} \longrightarrow 0$$

Seja $z \in Ker\ \overline{d} \subset \frac{F^p(A)}{F^{p+1}(A)}$.

Como j_p é sobrejetora existe $u \in F^p(A)$ tal que $j_p(u) = z$.

Temos $j_p(d_p(u)) = j_p \circ d_p(u) = \overline{d} \circ j_p(u) = \overline{d}(z) = 0 \Rightarrow d_p(u) \in Ker\ j_p = Im\ i_p$.

Como i_p é monomorfismo, então existe um único $v \in F^{p+1}(A)$ tal que $i_p(v) = d_p(u)$. $(*)$

Assim, considere $\phi : Ker\ \overline{d} \longrightarrow H(F^{p+1}(A))$ tal que $\phi(z) = [v]$ onde v é o único elemento em $F^{p+1}(A)$ tal que $i_p(v) = d_p(u)$ com $j_p(u) = z$.

Lema 3.0.11 *ϕ está bem definida, isto é, $[v] \in H(F^{p+1}(A))$ independe da escolha do elemento $u \in F^p(A)$ e, portanto, depende somente de $z \in Ker\ \overline{d}$.*

Demonstração: Sejam $u, u' \in F^p(A)$ tais que $j_p(u) = z = j_p(u')$.

De $(*)$, existem únicos $v, v' \in F^{p+1}(A)$ tais que $i_p(v) = d_p(u)$ e $i_p(v') = d_p(u')$.

Afirmamos que $[v] = [v']$.

De fato,

$$u - u' \in F^p(A) \Rightarrow j_p(u - u') = j_p(u) - j_p(u') = z - z = 0 \Rightarrow u - u' \in Ker\ j_p = Im\ i_p$$

Assim, existe $y \in F^{p+1}(A)$ tal que $u - u' = i_p(y)$.

Consideremos o elemento $v - v' - d_{p+1}(y) \in F^{p+1}(A)$, então

$i_p(v - v' - d_{p+1}(y)) = i_p(v) - i_p(v') - i_p(d_{p+1}(y)) = i_p(v) - i_p(v') - i_p \circ d_{p+1}(y) = i_p(v) - i_p(v') - d_p \circ i_p(y) = d_p(u) - d_p(u') - d_p(i_p(y)) = d_p(u - u') - d_p(u - u') = 0 \Rightarrow v - v' - d_{p+1}(y) \in Ker\ i_p = \{0\} \Rightarrow v - v' = d_{p+1}(y) \in Im\ d_{p+1} \Rightarrow [v] = [v']$

Portanto, $[v] \in H(F^{p+1}(A))$ independe da escolha de $u \in F^p(A)$, o que mostra que ϕ está bem definida. ■

Lema 3.0.12 *ϕ é um homomorfismo.*

Demonstração. De fato, sejam $z, z' \in Ker\ \overline{d}$.

Tome $u, u' \in F^p(A)$ e únicos $v, v' \in F^{p+1}(A)$ tais que $j_p(u) = z$, $j_p(u') = z'$, $i_p(v) = d_p(u)$ e $i_p(v') = d_p(u')$.

Temos $i_p(v+v') = i_p(v)+i_p(v') = d_p(u)+d_p(u') = d_p(u+u')$ com $j_p(u+u') = j_p(u)+j_p(u') = z + z'$.

Assim, $\phi(z + z') = [v + v'] = [v] + [v'] = \phi(z) + \phi(z')$.

Portanto, ϕ é homomorfismo. ■

Lema 3.0.13 *$Ker\ \phi \supset Im\ \overline{d}$.*

Demonstração. Se $z \in Im\ \overline{d}$, então existe $y \in \frac{F^p(A)}{F^{p+1}(A)}$ tal que $z = \overline{d}(y)$ e como j_p é epimorfismo, temos que existe $w \in F^p(A)$ tal que $j_p(w) = y$.

Faça $u = d_p(w)$.

Então $j_p(u) = j_p \circ d_p(w) = \overline{d} \circ j_p(w) = \overline{d}(y) = z$ e, ainda, $d_p(u) = d_p \circ d_p(w) = d_p^2(w) = 0 = i_p(0)$.

Logo, $\phi(z) = 0$ e, assim, $z \in Ker\ \phi$.

Portanto, $Im\ \overline{d} \subset Ker\ \phi$. ■

Assim, podemos definir

$$\begin{array}{rccc} \partial_p: & H(\frac{F^p(A)}{F^{p+1}(A)}) & \longrightarrow & H(F^{p+1}(A)) \\ & [z] & \longmapsto & \phi(z) \end{array}$$

Observemos que ∂_p está bem definida, pois

$$[z] = [z'] \Rightarrow z - z' \in Im\ \overline{d} \subset ker\ \phi \Rightarrow \phi(z - z') = 0 \Rightarrow \phi(z) = \phi(z')$$

Mostremos agora que essas aplicações são homomorfismos.

• ∂_p é homomorfismo, pois

$\partial_p([z] + [z']) = \partial_p([z + z']) = \phi(z + z') = \phi(z) + \phi(z') = \partial_p([z]) + \partial_p([z'])$

• $H(i_p)$ é homomorfismo.

$H(i_p)([x] + [y]) = H(i_p)([x + y]) = [i_p(x + y)] = [i_p(x) + i_p(y)] = [i_p(x)] + [i_p(y)] = H(i_p)([x]) + H(i_p)([y])$.

• $H(j_p)$ é homomorfismo.

$H(j_p)([y]+[z]) = H(j_p)([y+z]) = [j_p(y+z)] = [j_p(y)+j_p(z)] = [j_p(y)]+[j_p(z)] = H(j_p)([y]) + H(j_p)([z])$.

Mais ainda,

Lema 3.0.14 *O triângulo*

$$\begin{tikzcd}
\frac{Ker\ d_{p+1}}{Im\ d_{p+1}} = H(F^{p+1}(A)) \arrow[rr, "H(i_p)"] & & H(F^p(A)) = \frac{Ker\ d_p}{Im\ d_p} \arrow[dl, "H(j_p)"] \\
& H(\frac{F^p(A)}{F^{p+1}(A)}) = \frac{Ker\ \overline{d}}{Im\ \overline{d}} \arrow[ul, "\partial_p"] &
\end{tikzcd}$$

é exato.

Demonstração.

• Exatidão em $H(F^p(A))$.

Se $[y] \in Im\ H(i_p)$, então existe $[x] \in H(F^{p+1}(A))$ tal que $H(i_p)([x]) = [y]$.

Assim,

$$H(j_p)([y]) = H(j_p)(H(i_p)([x])) = H(j_p)([i_p(x)]) = [j_p(i_p(x))] = [j_p \circ i_p(x)] = [0]$$

pois $Im\ i_p = Ker\ j_p$.

Logo, $Im\ H(i_p) \subset Ker\ H(j_p)$.

Falta mostrar que $Ker\ H(j_p) \subset Im\ H(i_p)$.

Se $[y] \in Ker\ H(j_p)$ então

$H(j_p)([y]) = [0] \Rightarrow [j_p(y)] = 0 \Rightarrow j_p(y) \in Im\ \overline{d} \Rightarrow j_p(y) = \overline{d}(a), \quad a \in \frac{F^p(A)}{F^{p+1}(A)}$

Como j_p é epimorfismo existe $b \in F^p(A)$ tal que $j_p(b) = a$.

Considere o elemento $y - d_p(b)$. Então

$$j_p(y - d_p(b)) = j_p(y) - j_p \circ d_p(b) = \overline{d}(a) - \overline{d}(a) = 0$$

Logo, $y - d_p(b) \in Ker\ j_p = Im\ i_p$.

Assim, existe $c \in F^{p+1}(A)$ tal que $i_p(c) = y - d_p(b)$.

Mostremos que $c \in Ker\ d_{p+1}$.

De fato, temos

$$i_p(d_{p+1}(c)) = i_p \circ d_{p+1}(c) = d_p \circ i_p(c) = d_p(y - d_p(b)) = d_p(y) - d_p \circ d_p(b) = d_p(y) = 0$$

pois $y \in Ker\ d_p$.

Logo, $d_{p+1}(c) \in Ker\ i_p = \{0\}$ e, assim, $d_{p+1}(c) = 0$.

Assim, $[y] = [i_p(c)]$, ou seja, $[y] = H(i_p)([c])$.

Portanto, $[y] \in Im\ H(i_p)$.

• Exatidão em $H(F^{p+1}(A))$.

Seja $[x] \in Im\ \partial_p$, com $x \in Ker\ d_{p+1}$. Então $[x] = \partial_p([z])$, com $z \in Ker\ \overline{d}$, ou seja, $[x] = [v]$ onde v é o único elemento em $F^{p+1}(A)$ tal que $i_p(v) = d_p(u)$ e $j_p(u) = z$.

Assim,

$$H(i_p)([x]) = H(i_p)([v]) = [i_p(v)] = [d_p(u)] = [0]$$

pois $d_p(u) \in Im\ d_p$.

Portanto, $Im\ \partial_p \subset Ker\ H(i_p)$.

Mostremos que $Ker\ H(i_p) \subset Im\ \partial_p$.

Se $[x] \in Ker\ H(i_p)$, com $x \in Ker\ d_{p+1}$ então

$$H(i_p)([x]) = [i_p(x)] = 0 \Rightarrow i_p(x) \in Im\ d_p \Rightarrow i_p(x) = d_p(a), \quad a \in F^p(A)$$

Seja $z = j_p(a)$ e mostremos que $z \in Ker\ \overline{d}$.

De fato,

$$\overline{d}(z) = \overline{d} \circ j_p(a) = j_p \circ d_p(a) = j_p \circ i_p(x) = 0$$

pois $Im\ i_p = ker\ j_p$.

Portanto, $z \in Ker\overline{d}$.

Assim, $\partial_p([z]) = [x]$, pois $i_p(x) = d_p(a)$ com $j_p(a) = z$.

Portanto, $[x] \in Im\partial_p$.

• Exatidão em $H(\frac{F^p(A)}{F^{p+1}(A)})$.

Se $[z] \in Im\ H(j_p)$, com $z \in Ker\ \overline{d}$, então $[z] = H(j_p)([y]) = [j_p(y)],\ y \in Ker\ d_p$.

Assim,

$$\partial_p([z]) = \partial_p([j_p(y)]) = [0]$$

pois $i_p(0) = 0 = d_p(y)$.

Portanto, $Im\ H(j_p) \subset Ker\ \partial_p$.

Mostremos que $Ker\ \partial_p \subset ImH(j_p)$.

Se $[z] \in Ker\ \partial_p$, com $z \in Ker\ \overline{d}$, então $\partial_p([z]) = [v] = 0$, onde v é o único elemento de $Ker\ d_{p+1}$ tal que $i_p(v) = d_p(u)$ e $j_p(u) = z$.

Como $[v] = [0]$ então $v \in Im\ d_{p+1}$ e, assim, $v = d_{p+1}(w)$, onde $w \in F^{p+1}(A)$.

Considere o elemento $y = u - i_p(w) \in F^p(A)$.

Temos

$$d_p(y) = d_p(u - i_p(w)) = d_p(u) - d_p \circ i_p(w) = d_p(u) - i_p \circ d_{p+1}(w) = i_p(v) - i_p(v) = 0$$

Assim, $y \in Ker\ d_p$.

Logo, $H(j_p)([y]) = [j_p(y)] = [j_p(u) - j_p \circ i_p(w)] = [j_p(u)] = [z]$.

Portanto, $[z] \in Im\ H(j_p)$. ■

Definamos

$$D_1 = \sum_{p=0}^{\infty} H(F^p(A))$$

$$E_1 = \sum_{p=0}^{\infty} H(\frac{F^p(A)}{F^{p+1}(A)})$$

e, portanto, temos o seguinte triângulo exato

$$\begin{tikzcd}
D_1 \arrow[rr, "\{H(i_p)\}=i_1"] & & D_1 \arrow[dl, "\{H(j_p)\}=j_1"] \\
& E_1 \arrow[ul, "\{\partial_p\}=k_1"] &
\end{tikzcd}$$

Temos ainda,

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
D_1 & = & H(F^0(A)) & \oplus & H(F^1(A)) \arrow[dll, "H(i_0)"] & \oplus & H(F^2(A)) \arrow[dll, "H(i_1)"] & \oplus & H(F^3(A)) \arrow[dll, "H(i_2)"] & \oplus & \cdots \\
D_1 & = & H(F^0(A)) \arrow[d, "H(j_0)"] & \oplus & H(F^1(A)) \arrow[d, "H(j_1)"] & \oplus & H(F^2(A)) \arrow[d, "H(j_2)"] & \oplus & H(F^3(A)) \arrow[d, "H(j_3)"] & \oplus & \cdots \\
E_1 & = & H(\frac{F^0(A)}{F^1(A)}) \arrow[drr, "\partial_0"] & \oplus & H(\frac{F^1(A)}{F^2(A)}) \arrow[drr, "\partial_1"] & \oplus & H(\frac{F^2(A)}{F^3(A)}) \arrow[drr, "\partial_2"] & \oplus & H(\frac{F^3(A)}{F^4(A)}) \arrow[drr, "\partial_3"] & \oplus & \cdots \\
D_1 & = & H(F^0(A)) & \oplus & H(F^1(A)) & \oplus & H(F^2(A)) & \oplus & H(F^3(A)) & \oplus & \cdots
\end{tikzcd}$$

Assim, os grupos D_1 e E_1 são graduados e i_1 tem grau -1, j_1 tem grau 0 e k_1 tem grau $+1$.

3.1 Seqüência Espectral de um Complexo de Cocadeias com Filtração

Seja $A : A^0 \xrightarrow{d} A^1 \xrightarrow{d} A^2 \xrightarrow{d} ... \xrightarrow{d} A^p \xrightarrow{d} A^{p+1} \xrightarrow{d} ...$ um complexo de cocadeias. Uma filtração de A é uma seqüência decrescente de sub-complexos $F^p(A)$. Temos assim, o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
F^0(A) = A: & & A^0 & \xrightarrow{d} & A^1 & \xrightarrow{d} & A^2 & \xrightarrow{d} & ... & \xrightarrow{d} & A^{p+q} & \xrightarrow{d} & A^{p+q+1} & \xrightarrow{d} & ... \\
\cup & & \cup & & \cup & & \cup & & & & \cup & & \cup & & \\
F^1(A) & : & (F^1(A))^0 & \xrightarrow{d} & (F^1(A))^1 & \xrightarrow{d} & (F^1(A))^2 & \xrightarrow{d} & ... & \xrightarrow{d} & (F^1(A))^{p+q} & \xrightarrow{d} & (F^1(A))^{p+q+1} & \xrightarrow{d} & ... \\
\cup & & \cup & & \cup & & \cup & & & & \cup & & \cup & & \\
F^2(A) & : & (F^2(A))^0 & \xrightarrow{d} & (F^2(A))^1 & \xrightarrow{d} & (F^2(A))^2 & \xrightarrow{d} & ... & \xrightarrow{d} & (F^2(A))^{p+q} & \xrightarrow{d} & (F^2(A))^{p+q+1} & \xrightarrow{d} & ... \\
\cup & & \cup & & \cup & & \cup & & & & \cup & & \cup & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots & & \\
\cup & & \cup & & \cup & & \cup & & & & \cup & & \cup & & \\
F^p(A) & : & (F^p(A))^0 & \xrightarrow{d} & (F^p(A))^1 & \xrightarrow{d} & (F^p(A))^2 & \xrightarrow{d} & ... & \xrightarrow{d} & (F^p(A))^{p+q} & \xrightarrow{d} & (F^p(A))^{p+q+1} & \xrightarrow{d} & ... \\
\cup & & \cup & & \cup & & \cup & & & & \cup & & \cup & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

Assim, temos para cada p, uma seqüência exata curta de complexos de cocadeias

$$0 \longrightarrow F^{p+1}(A) \xrightarrow{i_p} F^p(A) \xrightarrow{j_p} \frac{F^p(A)}{F^{p+1}(A)} = E_0^p(A) \longrightarrow 0$$

Colocando na forma detalhada temos

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & \uparrow d & & \uparrow d & & \uparrow \overline{d} & & \\
0 & \longrightarrow & (F^{p+1}(A))^{p+q+1} & \longrightarrow & (F^p(A))^{p+q+1} & \longrightarrow & \frac{(F^p(A))^{p+q+1}}{(F^{p+1}(A))^{p+q+1}} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow d & & \uparrow d & & \uparrow \overline{d} & & \\
0 & \longrightarrow & (F^{p+1}(A))^{p+q} & \longrightarrow & (F^p(A))^{p+q} & \longrightarrow & \frac{(F^p(A))^{p+q}}{(F^{p+1}(A))^{p+q}} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow d & & \uparrow d & & \uparrow \overline{d} & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & \uparrow d & & \uparrow d & & \uparrow \overline{d} & & \\
0 & \longrightarrow & (F^{p+1}(A))^{0} & \longrightarrow & (F^p(A))^{0} & \longrightarrow & \frac{(F^p(A))^{0}}{(F^{p+1}(A))^{0}} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Assim, obtemos o seguinte triângulo exato

$$\begin{tikzcd}
H(F^{p+1}(A)) \arrow[rr, "H(i_p)"] & & H(F^p(A)) \arrow[dl, "H(j_p)"] \\
 & H(E_0^p(A)) \arrow[ul, "\partial_p"] &
\end{tikzcd}$$

Colocando na forma detalhada

$$\begin{tikzcd}
H^{p+q}(F^{p+1}(A)) \arrow[rrr, "i_1^{p,q}"] & & & H^{p+q}(F^p(A)) \arrow[ddl, "j_1^{p,q}"] & & & \\
H^{p+q+1}(F^{p+1}(A)) \arrow[rrrrr, "i_1^{p,q+1}"] & & & & & H^{p+q+1}(F^p(A)) \arrow[dddl, "j_1^{p,q+1}"] & \\
 & & H^{p+q}(E_0^p(A)) \arrow[ull, "\partial_1^{p,q}"] & & & & \\
 & & H^{p+q+2}(F^{p+1}(A)) \arrow[rrrr, "i_1^{p,q+2}"] & & & & {} \\
 & & & & H^{p+q+1}(E_0^p(A)) \arrow[ull, "\partial_1^{p,q+1}"] & &
\end{tikzcd}$$

Para colocarmos isto na linguagem de triângulo exato é necessário bi-indexar da seguinte maneira

$$D_1^{p,q} = H^{p+q}(F^p(A)) \qquad\qquad E_1^{p,q} = H^{p+q}(E_0^p(A))$$

onde p é o grau da filtração e q é o grau complementar de p em relação ao nível de cohomologia.

Assim, temos

$$\begin{tikzcd}
D_1^{p+1,q-1} \arrow[rrr, "i_1^{p,q}"] & & & D_1^{p,q} \arrow[ddl, "j_1^{p,q}"] & & & \\
& D_1^{p+1,q} \arrow[rrrr, "i_1^{p,q+1}"] & & & & D_1^{p,q+1} \arrow[dddl, "j_1^{p,q+1}"] & \\
& & E_1^{p,q} \arrow[ul, "\partial_1^{p,q}"] & & & & \\
& & & D_1^{p+1,q+1} \arrow[rrr, "i_1^{p,q+2}"] & & & {} \\
& & & & E_1^{p,q+1} \arrow[ul, "\partial_1^{p,q+1}"] & &
\end{tikzcd}$$

Definamos

$$D_1 = \sum_{p,q} D_1^{p,q} \qquad \text{e} \qquad E_1 = \sum_{p,q} E_1^{p,q}$$

e, portanto, temos o seguinte triângulo exato

$$\begin{tikzcd}
D_1 \arrow[rr, "i_1=\{i_1^{p,q}\}"] & & D_1 \arrow[dl, "j_1=\{j_1^{p,q}\}"] \\
& E_1 \arrow[ul, "k_1=\{\partial_1^{p,q}\}"] &
\end{tikzcd}$$

E, assim, bigrau de $i_1 = (-1, +1)$, bigrau de $j_1 = (0, 0)$ e bigrau de $k_1 = (1, 0)$.

Portanto, os grupos D_1 e E_1 são bi-graduados.

Definamos $d_1 = j_1 \circ k_1 : E_1 \longrightarrow E_1$ tal que

$$d_1^{p,q} : E_1^{p,q} \xrightarrow{\partial_1^{p,q}} D_1^{p+1,q} \xrightarrow{j_1^{p+1,q}} E_1^{p+1,q}$$

e, assim, bigrau de $d_1^{p,q} = (+1, 0)$, consequentemente, bigrau de $d_1 = (+1, 0)$.

Observemos que a definição de $E_1^{p,q}$ envolveu somente os termos de ordem p e $p+1$ da filtração. Assim, $E_1^{p+1,q}$ envolverá, de forma análoga, os termos de ordem $p+1$ e $p+2$ da filtração.

Nesse sentido, é possível obter uma expressão para $d_1^{p,q} : E_1^{p,q} \longrightarrow E_1^{p+1,q}$ em termos dos elementos de ordem p, $p+1$ e $p+2$ da filtração.

Temos

$$E_0^{p+1}(A) = \frac{F^{p+1}(A)}{F^{p+2}(A)} \hookrightarrow \frac{F^p(A)}{F^{p+2}(A)} \qquad \text{e} \qquad \frac{\frac{F^p(A)}{F^{p+2}(A)}}{\frac{F^{p+1}(A)}{F^{p+2}(A)}} = E_0^p(A)$$

Assim, temos a seguinte seqüência exata curta

$$* : 0 \longrightarrow E_0^{p+1}(A) \longrightarrow \frac{F^p(A)}{F^{p+2}(A)} \longrightarrow E_0^p(A) \longrightarrow 0$$

Lema 3.1.1 $d_1^{p,q} : E_1^{p,q} \longrightarrow E_1^{p+1,q}$ *é o homomorfismo de conexão da seqüência exata curta* $*$.

Demonstração. Consideremos as duas seqüências

$$\begin{array}{ccccccccccc}
(1) & 0 & \longrightarrow & F^{p+1}(A) & \longrightarrow & F^p(A) & \longrightarrow & E_0^p(A) & \longrightarrow & 0 \\
 & & & \downarrow j_{p+1} & & \downarrow & & \downarrow 1 & & \\
(2) & 0 & \longrightarrow & E_0^{p+1}(A) & \longrightarrow & \frac{F^p(A)}{F^{p+2}(A)} & \longrightarrow & E_0^p(A) & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Observemos que a seqüência (2) é obtida de (1) passando ao quociente por $F^{p+2}(A)$.
Sabemos que k_1 é o homomorfismo de conexão de (1).
Temos então,

$$\begin{array}{ccccccc}
... & \longrightarrow & H^{p+q}(E_0^p(A)) = E_1^{p,q} & \xrightarrow{\partial_1^{p,q}} & H^{p+q+1}(F^{p+1}(A)) = D_1^{p+1,q} & \longrightarrow & ... \\
 & & \downarrow 1 & & \downarrow j_1^{p+1,q} & & \\
... & \longrightarrow & H^{p+q}(E_0^p(A)) = E_1^{p,q} & \xrightarrow{\delta} & H^{p+q+1}(E_0^{p+1}(A)) = E_1^{p+1,q} & \longrightarrow & ...
\end{array}$$

Portanto, $\delta = \delta \circ 1 = j_1^{p+1,q} \circ \partial_1^{p,q} = d_1^{p,q}$. ■

O objetivo agora é descobrir o bigrau de $d_n : E_n \longrightarrow E_n$.
Considere a seqüência exata curta

$$0 \longrightarrow F^{p+1}(A) \xrightarrow{i_p} F^p(A) \xrightarrow{j_p} E_0^p(A) \longrightarrow 0$$

Calculemos o bigrau de i_2.
Temos

$$\begin{array}{ccccc}
H^{p+q}(F^{p+1}(A)) & \xrightarrow{i_1^{p,q}} & H^{p+q}(F^p(A)) & \xrightarrow{i_1^{p-1,q+1}} & H^{p+q}(F^{p-1}(A)) \\
\shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel \\
D_1^{p+1,q-1} & & D_1^{p,q} & & D_1^{p-1,q+1}
\end{array}$$

Definamos

$$D_2^{p,q} = Im\ i_1^{p,q} \qquad \text{e} \qquad i_2^{p-1,q+1} = i_1^{p-1,q+1}|_{D_2^{p,q}} : D_2^{p,q} \to D_2^{p-1,q+1} = Im\ i_1^{p-1,q+1}$$

Portanto, o bigrau de $i_2 = (-1, 1)$.

Calculemos agora o bigrau de j_2.

Recordemos que

$$j_1^{p+1,q-1} : D_1^{p+1,q-1} \longrightarrow E_1^{p+1,q-1}$$

Se $x \in D_2^{p,q} = Im\ i_1^{p,q}$, então $x = i_1^{p,q}(a)$, com $a \in D_1^{p+1,q-1}$.

Assim,

$$j_2^{p,q}(x) = j_2^{p,q}(i_1^{p,q}(a)) = [j_1^{p+1,q-1}(a)]$$

Logo, $j_2^{p,q} : D_2^{p,q} \longrightarrow E_2^{p+1,q-1}$.

Portanto, o bigrau de $j_2 = (1, -1)$.

Calculemos agora o bigrau de k_2, onde $k_2 = \{\partial_2^{p,q}\}$.

Sabemos que o domínio de $\partial_2^{p,q}$ é $E_2^{p,q} = H(E_1^{p,q})$ e queremos encontrar o seu contra-domínio.

Recordemos que

$$\partial_1^{p,q} : E_1^{p,q} \longrightarrow D_1^{p+1,q}$$

Se $x \in E_2^{p,q} = H(E_1^{p,q})$ então $x = [a]$, com $a \in Ker\ d_1^{p,q}$.

Assim,

$$\partial_2^{p,q}([a]) = \partial_1^{p,q}(a) \in D_2^{p+1,q} = Im\ i_1^{p+1,q} = Ker\ j_1^{p+1,q}$$

pois $j_1^{p+1,q} \circ \partial_1^{p,q}(a) = d_1^{p,q}(a) = 0$.

Logo, $\partial_2^{p,q} : E_2^{p,q} \longrightarrow D_2^{p+1,q}$.

Portanto, o bigrau de $k_2 = (1, 0)$.

Como $d_2^{p,q} = j_2^{p+1,q} \circ \partial_2^{p,q}$, bigrau de $j_2^{p+1,q} = (1, -1)$ e bigrau de $\partial_2^{p,q} = (1, 0)$ então bigrau de $d_2^{p,q} = (2, -1)$.

Portanto, bigrau de $d_2 = (2, -1)$.

Agora, por indução, provemos o seguinte

Lema 3.1.2 *Temos bigrau de* $i_n = (-1, 1)$, *bigrau de* $j_n = (n-1, 1-n)$, *bigrau de* $k_n = (1, 0)$ *e bigrau de* $d_n = (n, 1-n)$

Demonstração. A prova será feita por indução sobre n.

Inicialmente mostremos que bigrau de $i_n = (-1, 1)$.

Temos que

- Se $n = 1$, então bigrau de $i_1 = (-1, 1)$, pois $i_1^{p,q} : D_1^{p+1,q-1} \to D_1^{p,q}$.
- Se $n = 2$, então bigrau de $i_2 = (-1, 1)$, pois $i_2^{p,q} : D_2^{p+1,q-1} \to D_2^{p,q}$ onde $D_2^{p,q} = Im\ i_1^{p,q}$.

Suponhamos, por indução, que bigrau de $i_{n-1} = (-1, 1)$.

Assim, temos

$$\begin{array}{ccccc} D_{n-1}^{p+1,q-1} & \xrightarrow{i_{n-1}^{p,q}} & D_{n-1}^{p,q} & \xrightarrow{i_{n-1}^{p-1,q+1}} & D_{n-1}^{p-1,q+1} \\ & & \cup & & \\ & & D_n^{p,q} := Im\ i_{n-1}^{p,q} & & \end{array}$$

Então,

$$i_n^{p-1,q+1} = i_{n-1}^{p-1,q+1}|_{D_n^{p,q}} : D_n^{p,q} \longrightarrow D_n^{p-1,q+1} = Im\ i_{n-1}^{p-1,q+1}$$

Portanto, bigrau de $i_n = (-1, 1)$.

Mostremos agora que bigrau de $j_n = (n-1, 1-n)$.

Temos que

• Se $n = 1$, então bigrau de $j_1 = (0, 0)$ pois $j_1^{p,q} : D_1^{p,q} \longrightarrow E_1^{p,q}$.

• Se $n = 2$, então bigrau de $j_2 = (1, -1)$ pois $j_2^{p,q} : D_2^{p,q} \longrightarrow E_2^{p+1,q-1}$.

Suponhamos, por indução, que bigrau de $j_{n-1} = (n-2, 2-n)$, isto é, $j_{n-1}^{p+1,q-1} : D_{n-1}^{p+1,q-1} \longrightarrow E_{n-1}^{p+n-1,q-n+1}$.

Se $x \in D_n^{p,q} = Im\ i_{n-1}^{p,q}$ então $x = i_{n-1}^{p,q}(a)$, onde $a \in D_{n-1}^{p+1,q-1}$.

Assim,

$$j_n^{p,q}(x) = j_n^{p,q}(i_{n-1}^{p,q}(a)) = [j_{n-1}^{p+1,q-1}(a)] \in E_n^{p+n-1,q-n+1} = H(E_{n-1}^{p+n-1,q-n+1})$$

pois $d_{n-1}^{p+n-1,q-n+1}(j_{n-1}^{p+1,q-1}(a)) = j_{n-1}^{p+n,q-n+1}(\partial_{n-1}^{p+n-1,q-n+1} \circ j_{n-1}^{p+1,q-1}(a)) = 0$ desde que $\partial_{n-1}^{p+n-1,q-n+1} \circ j_{n-1}^{p+1,q-1} = 0$.

Logo, $j_n^{p,q} : D_n^{p,q} \longrightarrow E_n^{p+n-1,q-n+1}$.

Portanto, bigrau de $j_n = (n-1, 1-n)$.

Mostremos agora que bigrau de $k_n = (1, 0)$.

Temos que

• Se $n = 1$, então bigrau de $k_1 = (1, 0)$, pois $\partial_1^{p,q} : E_1^{p,q} \longrightarrow D_1^{p+1,q}$

• Se $n = 2$, então bigrau de $k_2 = (1, 0)$, pois $\partial_2^{p,q} : E_2^{p,q} \longrightarrow D_2^{p+1,q}$

Suponhamos, por indução, que bigrau de $k_{n-1} = (1, 0)$.

Se $x \in E_n^{p,q}$ então $x = [a]$, com $a \in Ker\ d_{n-1}^{p,q} \subset E_{n-1}^{p,q}$.

Assim,

$$\partial_n^{p,q}(x) = \partial_n^{p,q}([a]) = \partial_{n-1}^{p,q}(a) \in D_n^{p+1,q} = Im\ i_{n-1}^{p+1,q} = Ker\ j_{n-1}^{p+1,q}$$

pois $j_{n-1}^{p+1,q} \circ \partial_{n-1}^{p,q}(a) = d_{n-1}^{p,q}(a) = 0$.

Logo, $\partial_n^{p,q} : E_n^{p,q} \longrightarrow D_n^{p+1,q}$.

Portanto, bigrau de $k_n = (1, 0)$.

Finalmente, temos que bigrau de $d_n = (n, 1-n)$, pois

$$d_n^{p,q} = j_n^{p+1,q} \circ \partial_n^{p,q} : E_n^{p,q} \xrightarrow{d_n^{p,q}} E_n^{p+n,q+1-n}$$

Portanto, bigrau de $d_n = (n, 1-n)$. ∎

Assim, temos a seguinte seqüência exata longa

$$\begin{tikzcd}
D_n^{p-n+2,q+n-2} \arrow[rr, "i_n^{p-n+1,q+n-1}"] & & D_n^{p-n+1,q+n-1} \arrow[dd, "j_n^{p-n+1,q+n-1}"] & & \\
& D_n^{p+1,q} \arrow[rrr, "i_n^{p,q+1}"] & & & D_n^{p,q+1} \arrow[ddd, "j_n^{p,q+1}"] \\
& & E_n^{p,q} \arrow[ul, "\partial_n^{p,q}"] & & \\
& & & D_n^{p+n,q+2-n} \arrow[rr, "i_n^{p+n-1,q+3-n}"] & & {} \\
& & & & E_n^{p+n-1,q+2-n} \arrow[ul, "\partial_n^{p+n-1,q+2-n}"] &
\end{tikzcd}$$

Definição 3.1.1 *Seja $A : A^0 \xrightarrow{d} A^1 \xrightarrow{d} A^2 \xrightarrow{d} ... \xrightarrow{d} A^n \xrightarrow{d} ...$ um complexo de cocadeias filtrado. Dizemos que A é limitado se para cada $n \in \mathbb{N}$, existe um inteiro $p(n)$ tal que $(F^s(A))^n = 0$, para qualquer $s \geq p(n)$.*

Isto é, a seqüência $A^n = (F^0(A))^n \supset (F^1(A))^n \supset (F^2(A))^n \supset ... \supset (F^p(A))^n \supset ...$ termina para algum p.

Definição 3.1.2 *A seqüência espectral (E_r, d_r) é chamada de primeiro quadrante se $E_r^{p,q} = 0$ para $p < 0$ ou $q < 0$, onde $E_r = \sum_{p,q} E_r^{p,q}$.*

Lema 3.1.3 *Se (E_r, d_r) é uma seqüência espectral de primeiro quadrante, então $E_r^{p,q} = E_{r+1}^{p,q} = E_{r+2}^{p,q} = ... = E_\infty^{p,q}$ se $r > max\ \{p, q+1\}$.*

Demonstração. Seja $r > max\ \{p, q+1\}$ então $q - r + 1 < 0$ e $p - r < 0$.

Temos que

$$E_r^{p-r,q+r-1} \xrightarrow{d_r^{p-r,q+r-1}} E_r^{p,q} \xrightarrow{d_r^{p,q}} E_r^{p+r,q-r+1}$$

Por hipótese, (E_r, d_r) é uma seqüência espectral de primeiro quadrante então $E_r^{p-r,q+r-1} = 0 = E_r^{p+r,q-r+1}$.

Logo,

$$E_{r+1}^{p,q} = H(E_r^{p,q}) = \frac{Ker\ d_r^{p,q}}{Im\ d_r^{p-r,q+r-1}} = \frac{E_r^{p,q}}{\{0\}} = E_r^{p,q}$$

$$E_{r+2}^{p,q} = H(E_{r+1}^{p,q}) = H(E_r^{p,q}) = E_{r+1}^{p,q}$$
$$\vdots$$

para qualquer $r > max\ \{p, q+1\}$.

E, assim por diante, obteremos $E_\infty^{p,q} = E_r^{p,q}$ para qualquer $r > max\ \{p, q+1\}$.

Portanto, $E_r^{p,q} = E_{r+1}^{p,q} = ... = E_\infty^{p,q}$. ∎

Definição 3.1.3 *Uma seqüência espectral (E_r, d_r) converge para um módulo graduado $H = (H^n)$, e denota-se por $E_2^{p,q} \Rightarrow H^n$, se existe uma filtração limitada de H^n dada por $H^n = L^{0,n} \supset L^{1,n-1} \supset ... \supset L^{p,q} \supset L^{p+1,q-1} \supset ... \supset L^{n,0} \supset L^{n+1,-1} = 0$ de forma que $\dfrac{L^{p,q}}{L^{p+1,q-1}} \cong E_\infty^{p,q}$ com $p+q=n$.*

Vamos agora filtrar $H^m(A)$, para cada m, onde

$$\begin{array}{ccccccccc}
A: & A^0 & \xrightarrow{d} & A^1 & \xrightarrow{d} & ... & \xrightarrow{d} & A^m & \xrightarrow{d} & ... \\
 & & & & & & & \shortparallel & & \\
 & & & & & & & (F^0(A))^m & & \\
 & & & & & & & \uparrow i_0^m & & \\
 & & & & & & & (F^1(A))^m & & \\
 & & & & & & & \uparrow i_1^m & & \\
 & & & & & & & (F^2(A))^m & & \\
 & & & & & & & \uparrow i_2^m & & \\
 & & & & & & & \vdots & & \\
 & & & & & & & \uparrow i_{p-1}^m & & \\
 & & & & & & & (F^p(A))^m & & \\
 & & & & & & & \uparrow i_p^m & & \\
 & & & & & & & \vdots & &
\end{array}$$

é um complexo de cocadeias filtrado e limitado, ou seja, $(F^s(A))^m = 0$, para qualquer $s \geq p(m)$.

Consideremos $l_p : (F^p(A))^m \hookrightarrow A^m$, onde $l_p = i_0^m \circ i_1^m \circ ... \circ i_{p-2}^m \circ i_{p-1}^m$ e $i_q^m : (F^{q+1}(A))^m \hookrightarrow (F^q(A))^m$ denotam as inclusões, para qualquer $q = 0, 1, \cdots, p-1$.

Assim, a aplicação l_p induz a aplicação

$$H(l_p) = (l_p)_* : H((F^p(A))^m) = H^m(F^p(A)) \longrightarrow H(A^m) = H^m(A)$$

onde $(l_p)_* = (i_0^m)_* \circ (i_1^m)_* \circ ... \circ (i_{p-1}^m)_* = H(i_0^m) \circ H(i_1^m) \circ \cdots \circ H(i_{p-1}^m) = i_1^{0,m} \circ i_1^{1,m-1} \circ \cdots \circ i_1^{p-2,m-p+2} \circ i_1^{p-1,m-p+1}$.

Façamos $m = p+q$ e definamos $L^{p,q} = Im\ (l_p)_* = (l_p)_*(H^m(F^p(A))) \subset H^m(A)$.

Lema 3.1.4 *Sejam $A : A^0 \xrightarrow{d} A^1 \xrightarrow{d} A^2 \xrightarrow{d} \ldots \xrightarrow{d} A^n \xrightarrow{d} \ldots$ um complexo de cocadeias filtrado e limitado e (E_r, d_r) uma sequência espectral de primeiro quadrante.*

Se $r > max\ \{p, q+1\}$, $r > p+2$ e $r \geq p(m+1) - p$, onde $p \geq 0$, $q \geq 0$ e $p(m+1)$ é tal que $(F^s(A))^{m+1} = 0$ para qualquer $s \geq p(m+1)$, então, para cada $m = p+q$ temos:

$(i) E_r^{p,q} = E_\infty^{p,q}$

$(ii) E_r^{p-r+1,q+r-2} = 0$

$(iii) D_r^{p-r+1,q+r-1} = L^{p,q}$

$(iv) D_r^{p-r+2,q+r-2} = L^{p+1,q-1}$

$(v) D_r^{p+1,q} = 0$

Demonstração.

(i) Como $r > max\{p, q+1\}$, onde $p \geq 0$ e $q \geq 0$ então, pelo Lema 3.1.3, temos que $E_r^{p,q} = E_\infty^{p,q}$.

(ii) Como (E_r, d_r) é uma seqüência espectral de primeiro quadrante e $r > p+2 > p+1$, então $E_r^{p-r+1,q+r-2} = 0$, pois $p - r + 1 < 0$.

(iii) Observe o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd}
D_1^{p,q} \arrow[r, two heads, "i_1^{p-1,q+1}"] \arrow[dr, "i_1^{p-1,q+1}"] & D_2^{p-1,q+1} \arrow[r, two heads, "i_2^{p-2,q+2}"] \arrow[dr, "i_2^{p-2,q+2}"] \arrow[d, phantom, "\cap"] & D_3^{p-2,q+2} \arrow[r, two heads, "i_3^{p-3,q+3}"] \arrow[dr, "i_3^{p-3,q+3}"] \arrow[d, phantom, "\cap"] & D_4^{p-3,q+3} \arrow[r, two heads] \arrow[d, phantom, "\cap"] & {} \\
& D_1^{p-1,q+1} \arrow[r, "i_1^{p-2,q+2}"] & D_2^{p-2,q+2} \arrow[r, "i_2^{p-3,q+3}"] & D_3^{p-3,q+3} \arrow[r] & {}
\end{tikzcd}$$

Lembremos que $D_r^{p,q} = Im\ i_{r-1}^{p,q}$ para todo $r > 1$.

Assim, temos que a aplicação $i_2^{p-2,q+2} \circ i_1^{p-1,q+1} : D_1^{p,q} \longrightarrow D_3^{p-2,q+2}$ é sobrejetora e portanto

$$D_3^{p-2,q+2} = i_2^{p-2,q+2} \circ i_1^{p-1,q+1}(D_1^{p,q})$$

Temos também que $i_3^{p-3,q+3} \circ i_2^{p-2,q+2} \circ i_1^{p-1,q+1} : D_1^{p,q} \longrightarrow D_4^{p-3,q+3}$ é sobrejetora e portanto

$$D_4^{p-3,q+3} = i_3^{p-3,q+3} \circ i_2^{p-2,q+2} \circ i_1^{p-1,q+1}(D_1^{p,q})$$

Prosseguindo indutivamente, teremos

$$\begin{aligned}
D_r^{p-r+1,q+r-1} &= i_{r-1}^{p-r+1,q+r-1} \circ i_{r-2}^{p-r+2,q+r-2} \circ \ldots \circ i_2^{p-2,q+2} \circ i_1^{p-1,q+1}(D_1^{p,q}) \\
&= i_1^{p-r+1,q+r-1} \circ i_1^{p-r+2,q+r-2} \circ \ldots \circ i_1^{p-2,q+2} \circ i_1^{p-1,q+1}(D_1^{p,q}) \qquad (3.1) \\
&\overset{r>p+1}{=} (l_p)_*(D_1^{p,q})
\end{aligned}$$

Sabemos que $D_1^{p,q} = H^m(F^p(A))$ e então

$$(l_p)_*(D_1^{p,q}) = (l_p)_*(H^m(F^p(A))) = L^{p,q}$$

onde $m = p + q$.

Portanto, $D_r^{p-r+1,q+r-1} = L^{p,q}$.

(iv) Mostremos agora que $D_r^{p-r+2,q+r-2} = L^{p+1,q-1}$.

De (3.1), podemos observar que

$$\begin{aligned} D_r^{p-r+2,q+r-2} &= D_r^{(p+1)-r+1,(q-1)+r-1} \\ &= i_1^{p-r+2,q+r-2} \circ ... \circ i_1^{p-1,q+1} \circ i_1^{p,q}(D_1^{p+1,q-1}) \\ &\overset{r>p+2}{=} (l_{p+1})_*(D_1^{p+1,q-1}) \end{aligned}$$

Sabemos que $D_1^{p+1,q-1} = H^m(F^{p+1}(A))$ e então

$$(l_{p+1})_*(D_1^{p+1,q-1}) = (l_{p+1})_*(H^m(F^{p+1}(A))) = L^{p+1,q-1}$$

onde $m = p + q$.

Portanto, $D_r^{p-r+2,q+r-2} = L^{p+1,q-1}$.

(v) Mostremos que $D_r^{p+1,q} = 0$.

De (3.1), podemos observar que

$$D_r^{p+1,q} = D_r^{(p+r)-r+1,(q-r+1)+r-1} = i_{r-1}^{p+1,q} \circ ... \circ i_2^{p+r-2,q-r+3} \circ i_1^{p+r-1,q-r+2}(D_1^{p+r,q-r+1})$$

Mas $D_1^{p+r,q-r+1} = H^{p+q+1}(F^{p+r}(A)) = 0$, pois $p + r \geq p(m + 1)$.

Portanto, $D_r^{p+1,q} = 0$. ■

Teorema 3.1.1 *Nas condições do Lema 3.1.4, para cada $m = p + q$, temos $E_2^{p,q} \Rightarrow H^m(A)$.*

Demonstração. Queremos mostrar que existe uma filtração limitada de $H^m(A)$ dada por $H^m(A) = L^{0,m} \supset L^{1,m-1} \supset ... \supset L^{p,q} \supset L^{p+1,q-1} \supset ... \supset L^{m,0} \supset 0$ de forma que $\dfrac{L^{p,q}}{L^{p+1,q-1}} \cong E_\infty^{p,q}$ com $p + q = m$.

Temos que

$$L^{0,m} = (l_0)_*(H^m(A)) = (id)_*(H^m(A)) = id_{H^m(A)}(H^m(A)) = H^m(A)$$

Consideremos a seguinte seqüência exata

$$E_r^{p-r+1,q+r-2} \overset{\partial_r^{p-r+1,q+r-2}}{\longrightarrow} D_r^{p-r+2,q+r-2} \overset{i_r^{p-r+1,q+r-1}}{\longrightarrow} D_r^{p-r+1,q+r-1} \overset{j_r^{p-r+1,q+r-1}}{\longrightarrow} E_r^{p,q} \overset{\partial_r^{p,q}}{\longrightarrow} D_r^{p+1,q}$$

Usando o Lema 3.1.4, a seqüência exata acima fica

$$0 \longrightarrow L^{p+1,q-1} \overset{j}{\hookrightarrow} L^{p,q} \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} E_\infty^{p,q} \longrightarrow 0$$

Assim,

$$E_\infty^{p,q} \cong \frac{L^{p,q}}{Ker \pi} = \frac{L^{p,q}}{Im\ j} \cong \frac{L^{p,q}}{L^{p+1,q-1}}$$

pois $L^{p+1,q-1} \cong Im\ j \subset L^{p,q}$.

Portanto, o teorema está provado. ■

Capítulo

4

Seqüência Espectral de uma Fibração

Seja $p : E \longrightarrow B$ uma aplicação contínua e sobrejetora na categoria de CW complexos. Suponha que p é uma fibração e seja $b_0 \in B$ um ponto base.

Tomemos $\gamma : I \longrightarrow B$ um caminho com $\gamma(0) = b_0$, $\mathcal{F}_0 = p^{-1}(b_0)$ e consideremos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}_0 \times \{0\} & \overset{j}{\hookrightarrow} & E \\ \downarrow i & & \downarrow p \\ \mathcal{F}_0 \times I & \xrightarrow{p_2} I \xrightarrow{\gamma} & B \end{array}$$

onde i e j são inclusões e p_2 é a projeção no segundo fator.

Observemos que este diagrama é comutativo, pois

$$\gamma \circ p_2 \circ i(x,0) = \gamma(p_2(x,0)) = \gamma(0) = b_0 \qquad \text{e} \qquad p \circ j(x,0) = p(x) = b_0$$

para todo $x \in \mathcal{F}_0$.

Consideremos $f_0 : \mathcal{F}_0 \longrightarrow B$ definida por $f_0(x) = b_0$. Então $\gamma \circ p_2 : \mathcal{F}_0 \times I \longrightarrow B$ é uma homotopia com $\gamma \circ p_2(x,0) = \gamma(0) = b_0 = f_0(x)$.

Temos que f_0 admite um levantamento com relação a p, a saber $F_0 : \mathcal{F}_0 \longrightarrow E$ definida por $F_0(x) = x$ para todo $x \in \mathcal{F}_0$, pois $p \circ F_0 = f_0$.

Assim, como p é uma fibração, existe $\widetilde{\gamma \circ p_2} : \mathcal{F}_0 \times I \longrightarrow E$ homotopia com $\widetilde{\gamma \circ p_2}(x,0) = F_0(x) = x$ e, ainda, $p \circ \widetilde{\gamma \circ p_2} = \gamma \circ p_2$.

Consideremos agora a aplicação contínua $\varepsilon^{\gamma}_{\mathcal{F}_0} : p^{-1}(\gamma(0)) = \mathcal{F}_0 \longrightarrow \mathcal{F}_1 = p^{-1}(\gamma(1))$ definida por $\varepsilon^{\gamma}_{\mathcal{F}_0}(x) = \widetilde{\gamma \circ p_2}(x,1)$.

Observemos que $\varepsilon^{\gamma}_{\mathcal{F}_0}$ é bem definida pois

$$p \circ \varepsilon^{\gamma}_{\mathcal{F}_0}(x) = p \circ \widetilde{\gamma \circ p_2}(x,1) = \gamma \circ p_2(x,1) = \gamma(1)$$

Agora, usando o caminho inverso $\gamma^{-1} : I \longrightarrow B$ e fazendo a mesma construção anterior trocando γ por γ^{-1}, b_0 por $\gamma(1)$, $\mathcal{F}_0$ por $\mathcal{F}_1$, f_0 por f_1 e F_0 por F_1, então existirá $\widetilde{\gamma^{-1} \circ p_2} : \mathcal{F}_1 \times I \longrightarrow E$ homotopia com $\widetilde{\gamma^{-1} \circ p_2}(y, 0) = F_1(y) = y$ e, ainda, $p \circ \widetilde{\gamma^{-1} \circ p_2} = \gamma^{-1} \circ p_2$.

Assim, obtemos uma aplicação contínua $\varepsilon^{\gamma^{-1}}_{\mathcal{F}_1} : \mathcal{F}_1 \longrightarrow \mathcal{F}_0$ definida por $\varepsilon^{\gamma^{-1}}_{\mathcal{F}_1}(y) = \widetilde{\gamma^{-1} \circ p_2}(y, 1)$ a qual é bem definida, pois

$$p \circ \varepsilon^{\gamma^{-1}}_{\mathcal{F}_1}(y) = p \circ \widetilde{\gamma^{-1} \circ p_2}(y, 1) = \gamma^{-1} \circ p_2(y, 1) = \gamma^{-1}(1) = \gamma(0) = b_0$$

O objetivo agora é mostrar que $\varepsilon^{\gamma}_{\mathcal{F}_0}$ é uma equivalência de homotopia e para isto mostraremos alguns lemas.

Lema 4.0.5 *Sejam $p : E \longrightarrow B$ uma fibração e $\varepsilon^{cte}_{\mathcal{F}_1} : \mathcal{F}_1 \longrightarrow \mathcal{F}_1$ a aplicação contínua definida como anteriormente. Então $\varepsilon^{cte}_{\mathcal{F}_1} \simeq id_{\mathcal{F}_1}$ onde $cte : I \longrightarrow B$ é dada por $cte(t) = \gamma(1)$ para todo $t \in I$. Em outras palavras, $\varepsilon^{\gamma(1)}_{\mathcal{F}_1} \simeq id_{\mathcal{F}_1}$.*

Demonstração.

Observemos que $\varepsilon^{cte}_{\mathcal{F}_1} : \mathcal{F}_1 \longrightarrow \mathcal{F}_1$ é definida por $\varepsilon^{cte}_{\mathcal{F}_1}(y) = \widetilde{cte \circ p_2}(y, 1)$.

Definamos a aplicação contínua $H : \mathcal{F}_1 \times I \longrightarrow \mathcal{F}_1$ tal que $H(y, t) = \widetilde{cte \circ p_2}(y, t)$ e observemos que H é bem definida pois

$$p \circ H(y, t) = p \circ \widetilde{cte \circ p_2}(y, t) = cte \circ p_2(y, t) = cte(t) = \gamma(1)$$

Além disso, para todo $y \in \mathcal{F}_1$, temos

- $H(y, 0) = \widetilde{cte \circ p_2}(y, 0) = y = id_{\mathcal{F}_1}(y)$.
- $H(y, 1) = \widetilde{cte \circ p_2}(y, 1) = \varepsilon^{cte}_{\mathcal{F}_1}(y)$.

Portanto, $\varepsilon^{cte}_{\mathcal{F}_1} \simeq id_{\mathcal{F}_1}$. ∎

Lema 4.0.6 *Sejam $p : E \longrightarrow B$ uma fibração, $\lambda, \lambda' : I \longrightarrow B$ dois laços baseados em $x_0 \in B$ e $\lambda \simeq_{x_0} \lambda'$, então $\varepsilon^{\lambda}_{\mathcal{F}} \simeq \varepsilon^{\lambda'}_{\mathcal{F}}$ onde $\mathcal{F} = p^{-1}(x_0)$.*

Demonstração.

Como $\lambda \simeq_{x_0} \lambda'$, então existe $H : I \times I \longrightarrow B$ homotopia com

- $H(s, 0) = \lambda(s)$, para qualquer $s \in I$;
- $H(s, 1) = \lambda'(s)$, para qualquer $s \in I$;
- $H(0, t) = H(1, t) = x_0$, para qualquer $t \in I$,

ou equivalentemente, para cada $t \in I$, existe $H_t : I \longrightarrow B$, dada por $H_t(s) = H(s, t)$ tal que

- $H_0(s) = H(s, 0) = \lambda(s)$, para qualquer $s \in I$;
- $H_1(s) = H(s, 1) = \lambda'(s)$, para qualquer $s \in I$;
- $H_t(0) = H_t(1) = x_0$.

Consideremos $f_0 : \mathcal{F} \longrightarrow B$ definida por $f_0(y) = x_0$, para qualquer $y \in \mathcal{F}$.

Então, $H_t \circ p_2 : \mathcal{F} \times I \longrightarrow B$ é uma homotopia tal que

$$H_t \circ p_2(y,0) = H_t(0) = x_0 = f_0(y)$$

Observemos que f_0 admite um levantamento $F_0 : \mathcal{F} \longrightarrow E$ dado por $F_0(y) = y$ e como p é uma fibração, existe $\widetilde{H_t \circ p_2} : \mathcal{F} \times I \longrightarrow E$ tal que

$$\widetilde{H_t \circ p_2}(y,0) = F_0(y) = y$$

para qualquer $y \in \mathcal{F}$ e, ainda, $p \circ \widetilde{H_t \circ p_2} = H_t \circ p_2$.

Definamos $G : \mathcal{F} \times I \longrightarrow \mathcal{F}$ por $G(y,t) = \widetilde{H_t \circ p_2}(y,1)$, a qual é bem definida pois

$$p \circ \widetilde{H_t \circ p_2}(y,1) = H_t \circ p_2(y,1) = H_t(1) = x_0$$

Além disso,

• $G(y,0) = \widetilde{H_0 \circ p_2}(y,1) = \widetilde{\lambda \circ p_2}(y,1) = \varepsilon^{\lambda}_{\mathcal{F}}(y)$, para todo $y \in \mathcal{F}$.

• $G(y,1) = \widetilde{H_1 \circ p_2}(y,1) = \widetilde{\lambda' \circ p_2}(y,1) = \varepsilon^{\lambda'}_{\mathcal{F}}(y)$, para todo $y \in \mathcal{F}$.

Portanto, $\varepsilon^{\lambda}_{\mathcal{F}} \simeq \varepsilon^{\lambda'}_{\mathcal{F}}$. ■

Temos $\gamma^{-1} * \gamma \simeq_{\gamma(1)} \gamma(1)$ pelo exemplo 1.0.3 e, assim, segue pelo lema 4.0.6 que $\varepsilon^{\gamma^{-1}*\gamma}_{\mathcal{F}_1} \simeq \varepsilon^{\gamma(1)}_{\mathcal{F}_1}$.

Lema 4.0.7 *Sejam $p : E \longrightarrow B$ uma fibração, $\gamma_1,\ \gamma_2 : I \longrightarrow B$ dois caminhos em B, $\mathcal{F}_0 = p^{-1}(\gamma_1(1))$ e $\mathcal{F}_1 = p^{-1}(\gamma_1(0))$. Se $\gamma = \gamma_1 * \gamma_2$ então $\varepsilon^{\gamma}_{\mathcal{F}_1} = \varepsilon^{\gamma_2}_{\mathcal{F}_0} \circ \varepsilon^{\gamma_1}_{\mathcal{F}_1}$.*

Demonstração.

Como p é uma fibração temos

$$\varepsilon^{\gamma_1}_{\mathcal{F}_1}(y) = \widetilde{\gamma_1 \circ p_2}(y,1), \quad \forall y \in \mathcal{F}_1$$

onde $p \circ \widetilde{\gamma_1 \circ p_2} = \gamma_1 \circ p_2$ e $\widetilde{\gamma_1 \circ p_2}(y,0) = y$.

$$\varepsilon^{\gamma_2}_{\mathcal{F}_0}(x) = \widetilde{\gamma_2 \circ p_2}(x,1), \quad \forall x \in \mathcal{F}_0$$

onde $p \circ \widetilde{\gamma_2 \circ p_2} = \gamma_2 \circ p_2$ e $\widetilde{\gamma_2 \circ p_2}(x,0) = x$.

Definamos $\widetilde{F} : \mathcal{F}_1 \times I \longrightarrow E$ por

$$\widetilde{F}(y,t) = \begin{cases} \widetilde{\gamma_1 \circ p_2}(y,2t), & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \widetilde{\gamma_2 \circ p_2}(\widetilde{\gamma_1 \circ p_2}(y,1), 2t-1), & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

Temos que $\widetilde{F}$ é contínua, pois as aplicações $\widetilde{\gamma_1 \circ p_2}$ e $\widetilde{\gamma_2 \circ p_2}$ são contínuas e ainda se $t = \frac{1}{2}$ temos

$$\widetilde{F}(y,\frac{1}{2}) = \begin{cases} \widetilde{\gamma_1 \circ p_2}(y,1) \\ \widetilde{\gamma_2 \circ p_2}(\widetilde{\gamma_1 \circ p_2}(y,1),0) = \widetilde{\gamma_1 \circ p_2}(y,1) \end{cases}$$

Ainda,

• $\widetilde{F}(y,0) = \widetilde{\gamma_1 \circ p_2}(y,0) = y$, para qualquer $y \in \mathcal{F}_1$.

• $p \circ \widetilde{F}(y,t) = \begin{cases} p \circ \widetilde{\gamma_1 \circ p_2}(y,2t), & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ p \circ \widetilde{\gamma_2 \circ p_2}(\widetilde{\gamma_1 \circ p_2}(y,1), 2t-1), & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases} =$

$= \begin{cases} \gamma_1 \circ p_2(y,2t), & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \gamma_2 \circ p_2(\widetilde{\gamma_1 \circ p_2}(y,1), 2t-1), & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases} = \begin{cases} \gamma_1(2t), & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ \gamma_2(2t-1), & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases} =$

$= \gamma(t) = \gamma \circ p_2(y,t)$.

Logo, $\varepsilon^{\gamma}_{\mathcal{F}_1}(y) = \widetilde{\gamma \circ p_2}(y,1) = \widetilde{F}(y,1)$, para qualquer $y \in \mathcal{F}_1$.

Mas

$$\widetilde{F}(y,1) = \widetilde{\gamma_2 \circ p_2}(\widetilde{\gamma_1 \circ p_2}(y,1),1) = \varepsilon^{\gamma_2}_{\mathcal{F}_0}(\widetilde{\gamma_1 \circ p_2}(y,1)) = \varepsilon^{\gamma_2}_{\mathcal{F}_0} \circ \varepsilon^{\gamma_1}_{\mathcal{F}_1}(y)$$

para qualquer $y \in \mathcal{F}_1$.

Portanto, $\varepsilon^{\gamma}_{\mathcal{F}_1} = \varepsilon^{\gamma_2}_{\mathcal{F}_0} \circ \varepsilon^{\gamma_1}_{\mathcal{F}_1}$. ■

Corolário 4.0.1 *Sejam $p : E \to B$ uma fibração, $\gamma : I \longrightarrow B$ um caminho em B e γ^{-1} o seu caminho inverso, então $\varepsilon^{\gamma^{-1}*\gamma}_{\mathcal{F}_1} = \varepsilon^{\gamma}_{\mathcal{F}_0} \circ \varepsilon^{\gamma^{-1}}_{\mathcal{F}_1}$.*

Demonstração. Imediata. ■

Assim, usando o corolário 4.0.1 e os lemas 4.0.5 e 4.0.6 temos

$$\varepsilon^{\gamma}_{\mathcal{F}_0} \circ \varepsilon^{\gamma^{-1}}_{\mathcal{F}_1} = \varepsilon^{\gamma^{-1}*\gamma}_{\mathcal{F}_1} \simeq \varepsilon^{\gamma(1)}_{\mathcal{F}_1} \simeq id_{\mathcal{F}_1}$$

Analogamente, temos que

$$\varepsilon^{\gamma^{-1}}_{\mathcal{F}_1} \circ \varepsilon^{\gamma}_{\mathcal{F}_0} = \varepsilon^{\gamma*\gamma^{-1}}_{\mathcal{F}_0} \simeq \varepsilon^{b_0}_{\mathcal{F}_0} \simeq id_{\mathcal{F}_0}$$

Portanto, segue o seguinte resultado:

Lema 4.0.8 $\varepsilon^{\gamma}_{\mathcal{F}_0}$ *é uma equivalência de homotopia.*

Demonstração. Basta observarmos que

$$\varepsilon^{\gamma}_{\mathcal{F}_0} \circ \varepsilon^{\gamma^{-1}}_{\mathcal{F}_1} \simeq id_{\mathcal{F}_1} \qquad \text{e} \qquad \varepsilon^{\gamma^{-1}}_{\mathcal{F}_1} \circ \varepsilon^{\gamma}_{\mathcal{F}_0} \simeq id_{\mathcal{F}_0}$$

■

Lema 4.0.9 *Sejam $p : E \longrightarrow B$ uma fibração e B conexo por caminhos. Então todas as fibras $p^{-1}(b)$ têm o mesmo tipo de homotopia.*

Demonstração. Sejam $b_0, b_1 \in B$. Como B é conexo por caminhos então existe $\gamma : I \longrightarrow B$ tal que $\gamma(0) = b_0$ e $\gamma(1) = b_1$.

Assim, pelo Lema 4.0.8 temos que $\varepsilon^{\gamma}_{\mathcal{F}_0} : \mathcal{F}_0 = p^{-1}(b_0) \longrightarrow \mathcal{F}_1 = p^{-1}(b_1)$ é uma equivalência de homotopia entre $p^{-1}(b_0)$ e $p^{-1}(b_1)$.

Portanto, $p^{-1}(b_0) \sim p^{-1}(b_1)$ e como b_0 e b_1 são quaisquer, o resultado segue. ■

Seja $\gamma : I \longrightarrow B$ um laço baseado em b_0. Então, a aplicação $\varepsilon^{\gamma}_{\mathcal{F}_0} : \mathcal{F}_0 \longrightarrow \mathcal{F}_0$ é uma equivalência de homotopia e, portanto, $\varepsilon^{\gamma}_{\mathcal{F}_0}$ induz um isomorfismo $(\varepsilon^{\gamma}_{\mathcal{F}_0})^* : H^r(\mathcal{F}_0) \longrightarrow H^r(\mathcal{F}_0)$.

Considere a aplicação

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(B,b_0) \times H^r(\mathcal{F}_0) & \longrightarrow & H^r(\mathcal{F}_0) \\ ([\alpha],x) & \longmapsto & [\alpha].x = (\varepsilon^{\alpha}_{\mathcal{F}_0})^*(x) \end{array}$$

Observemos que esta aplicação é bem definida, pois

$$[\alpha] = [\alpha'] \Rightarrow \alpha \simeq_{b_0} \alpha' \Rightarrow \varepsilon^{\alpha}_{\mathcal{F}_0} \simeq \varepsilon^{\alpha'}_{\mathcal{F}_0} \Rightarrow (\varepsilon^{\alpha}_{\mathcal{F}_0})^* = (\varepsilon^{\alpha'}_{\mathcal{F}_0})^*$$

Além disso, satisfaz

- $[b_0].x = x$, pois $[b_0].x = (\varepsilon^{b_0}_{\mathcal{F}_0})^*(x) = (1_{\mathcal{F}_0})^*(x) = 1_{H^r(\mathcal{F}_0)}(x) = x$;
- $([\alpha][\beta]).x = [\alpha].([\beta].x)$, pois

$([\alpha][\beta]).x = ([\alpha * \beta]).x = (\varepsilon^{\alpha*\beta}_{\mathcal{F}_0})^*(x) = (\varepsilon^{\beta}_{\mathcal{F}_0} \circ \varepsilon^{\alpha}_{\mathcal{F}_0})^*(x) = (\varepsilon^{\alpha}_{\mathcal{F}_0})^* \circ (\varepsilon^{\beta}_{\mathcal{F}_0})^*(x) = (\varepsilon^{\alpha}_{\mathcal{F}_0})^*((\varepsilon^{\beta}_{\mathcal{F}_0})^*(x)) = (\varepsilon^{\alpha}_{\mathcal{F}_0})^*([\beta].x) = [\alpha].([\beta].x)$.

Portanto, esta aplicação define uma ação de $\pi_1(B,b_0)$ em $H^r(\mathcal{F}_0)$.

Definição 4.0.4 *Dizemos que a ação do grupo fundamental da base $\pi_1(B,b_0)$ na cohomologia da fibra $H^r(\mathcal{F}_0)$ é trivial se $(\varepsilon^{\alpha}_{\mathcal{F}_0})^* = 1_{H^r(\mathcal{F}_0)}$, para todo $[\alpha] \in \pi_1(B,b_0)$.*

Proposição 4.0.1 *Sejam $p : E \longrightarrow B$ uma fibração e $\varphi : X \longrightarrow B$ uma aplicação contínua. Então $p_1 : \varphi^*(E) \longrightarrow X$ é uma fibração com fibra $\mathcal{F}_{x_0} = p_1^{-1}(x_0)$ homeomorfa à fibra $\mathcal{F}_{\varphi(x_0)} = p^{-1}(\varphi(x_0))$.*

Demonstração. Para mostrarmos que p_1 é uma fibração, devemos verificar que p_1 tem a propriedade do levantamento de homotopia, isto é, para toda $f_0 : Y \longrightarrow X$ contínua e toda homotopia $H : Y \times I \longrightarrow X$ com $H(y,0) = f_0(y)$, se f_0 admite um levantamento $F_0 : Y \longrightarrow \varphi^*(E)$ (i.e $p_1 \circ F_0 = f_0$) então existe uma homotopia $\widetilde{H} : Y \times I \longrightarrow \varphi^*(E)$ com $\widetilde{H}(y,0) = F_0(y)$ e $p_1 \circ \widetilde{H} = H$.

Como p é fibração, consideremos a aplicação contínua $\varphi \circ f_0 : Y \longrightarrow B$ e a homotopia $\varphi \circ H : Y \times I \longrightarrow B$.

Assim,

$$\varphi \circ H(y,0) = \varphi(f_0(y)) = \varphi \circ f_0(y)$$

Observemos ainda que $\varphi \circ f_0$ admite o levantamento $p_2 \circ F_0 : Y \longrightarrow E$, pois

$$p \circ p_2 \circ F_0 = \varphi \circ p_1 \circ F_0 = \varphi \circ f_0$$

Portanto, existe uma homotopia $\widetilde{\varphi \circ H} : Y \times I \longrightarrow E$ com $\widetilde{\varphi \circ H}(y,0) = p_2 \circ F_0(y)$ e $p \circ \widetilde{\varphi \circ H} = \varphi \circ H$.

Definamos $\widetilde{H} : Y \times I \longrightarrow \varphi^*(E)$ por $\widetilde{H}(y,t) = (H(y,t), \widetilde{\varphi \circ H}(y,t))$.

Temos que $\widetilde{H}$ é bem definida, pois

$$\varphi(H(y,t)) = \varphi \circ H(y,t) = p \circ \widetilde{\varphi \circ H}(y,t) = p(\widetilde{\varphi \circ H}(y,t))$$

Além disso,

• $\widetilde{H}(y,0) = (H(y,0), \widetilde{\varphi \circ H}(y,0)) = (f_0(y), p_2 \circ F_0(y)) = (p_1 \circ F_0(y), p_2 \circ F_0(y)) = F_0(y)$;

• $p_1 \circ \widetilde{H}(y,t) = p_1(\widetilde{H}(y,t)) = p_1(H(y,t), \widetilde{\varphi \circ H}(y,t)) = H(y,t)$.

Portanto, p_1 é uma fibração.

Falta mostrarmos que a fibra $\mathcal{F}_{x_0}$ é homeomorfa a fibra $\mathcal{F}_{\varphi(x_0)}$.

Consideremos a aplicação $h : \mathcal{F}_{x_0} \longrightarrow \mathcal{F}_{\varphi(x_0)}$ dada por $h(x_0, e) = e$. Então h é contínua com inversa contínua $h^{-1} : \mathcal{F}_{\varphi(x_0)} \longrightarrow \mathcal{F}_{x_0}$ dada por $h^{-1}(e) = (x_0, e)$.

Portanto, h é um homeomorfismo entre $\mathcal{F}_{x_0}$ e $\mathcal{F}_{\varphi(x_0)}$. ∎

Como antes, sejam $p : E \longrightarrow B$ uma fibração, com B conexo por caminhos, e $b_0 \in B$ um ponto base. Denotemos por B^p o p-ésimo esqueleto de B e $E^p = p^{-1}(B^p)$.

Sejam $A^r(B; G)$ o grupo das r-cocadeias de B com coeficientes em G e $\mathcal{F}$ a fibra sobre b_0.

Teorema 4.0.2 *Se $\pi_1(B)$ atua trivialmente em $H^n(\mathcal{F})$ então $H^n(E^p, E^{p-1}) \cong A^p(B; H^{n-p}(\mathcal{F}))$.*

Demonstração.

Para cada p-célula e_i^p de B, consideremos o seu disco fechado D_i^p e $\Phi_i : D_i^p \longrightarrow B$ a função característica.

Sejam $\varphi : \coprod_i D_i^p \longrightarrow B$ a função determinada por cada Φ_i e $p_1 : \varphi^*(E) \longrightarrow \coprod_i D_i^p$ a fibração induzida de p por φ.

Temos o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} \varphi^*(E) & \xrightarrow{p_2} & E^p \\ {\scriptstyle p_1}\downarrow & \curvearrowright & \downarrow{\scriptstyle p_{|E^p}} \\ \coprod_i D_i^p & \xrightarrow{\varphi} & B^p \end{array} \qquad (1)$$

Consideremos a aplicação $f = (\varphi, \varphi_1) : (\coprod_i D_i^p, \coprod_i \partial D_i^p) \longrightarrow (B^p, B^{p-1})$ onde $\varphi_1 = \varphi_{|\coprod_i \partial D_i^p} : \coprod_i \partial D_i^p \longrightarrow B^{p-1}$.

Temos que f é um homeomorfismo relativo, pois

(1) f é uma proclusão de $\coprod_i D_i^p$ em B^p;

(2) $\varphi_{|\coprod_i \overset{o}{D_i^p}} = f_{|(\coprod_i D_i^p) - (\coprod_i \partial D_i^p)} : (\coprod_i D_i^p) - (\coprod_i \partial D_i^p) \longrightarrow B^p - B^{p-1} = \coprod_i e_i^p$ é um homeomorfismo, pois

• $\varphi_{|\coprod_i \overset{o}{D_i^p}}$ é determinada por cada $\Phi_{i|\overset{o}{D_i^p}}$;

- $\Phi_{i_{|\overset{o}{D_i^p}}} : \overset{o}{D_i^p} \longrightarrow e_i^p$ é um homeomorfismo.

Então, a aplicação $g = (p_2, q_2) : (\varphi^*(E), \varphi_1^*(E)) \longrightarrow (E^p, E^{p-1})$ também é um homeomorfismo relativo, onde p_2 é dada pelo diagrama (1) e q_2 é dada pelo diagrama abaixo

$$\begin{array}{ccc} \varphi_1^*(E) & \xrightarrow{q_2} & E^{p-1} \\ q_1\downarrow & \curvearrowright & \downarrow p_{|E^{p-1}} \\ \coprod_i \partial D_i^p & \xrightarrow{\varphi_1} & B^{p-1} \end{array}$$

pois,

(1) p_2 é uma proclusão de $\varphi^*(E)$ em E^p;

(2) $\pi_2 = g_{|\varphi^*(E)-\varphi_1^*(E)} : \varphi^*(E) - \varphi_1^*(E) = (\varphi_{|\coprod_i \overset{o}{D_i^p}})^*(E) \longrightarrow E^p - E^{p-1}$ dada pelo diagrama abaixo

$$\begin{array}{ccc} (\varphi_{|\coprod_i \overset{o}{D_i^p}})^*(E) & \xrightarrow{\pi_2} & E^p - E^{p-1} \\ \pi_1\downarrow & \curvearrowright & \downarrow p_{|E^p - E^{p-1}} \\ \coprod_i \overset{o}{D_i^p} & \xrightarrow{\varphi_{|\coprod_i \overset{o}{D_i^p}}} & B^p - B^{p-1} \end{array}$$

é um homeomorfismo, desde que $\varphi_{|\coprod_i \overset{o}{D_i^p}}$ é um homeomorfismo(vide Lema 1.0.7).

Assim, por excisão temos para todo n que

$$H^n(E^p, E^{p-1}) \overset{Teo.1.0.4}{\cong} H^n(\varphi^*(E), \varphi_1^*(E))$$

Por outro lado, pela naturalidade da aplicação

$$\psi : H^n(\varphi^*(E), \varphi_1^*(E)) \longrightarrow \prod_i H^n((\Phi_i)^*(E), (\Phi_1^i)^*(E))$$

dada por $\psi = \prod_i (l_i, l_i^{'})^*$ onde $(l_i, l_i^{'}) : ((\Phi_i)^*(E), (\Phi_1^i)^*(E)) \hookrightarrow (\varphi^*(E), \varphi_1^*(E))$ é a aplicação de pares dada pelas inclusões $l_i : (\Phi_i)^*(E) \longrightarrow \varphi^*(E)$ e $l_i^{'} : (\Phi_1^i)^*(E) \longrightarrow \varphi_1^*(E)$, temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccccc} ... \longrightarrow & H^{n-1}(\varphi^*(E)) & \xrightarrow{k^{n-1}} & H^{n-1}(\varphi_1^*(E)) & \xrightarrow{\triangle} & H^n(\varphi^*(E), \varphi_1^*(E)) & \xrightarrow{j^n} \\ & \prod_i (l_i)^{n-1} \downarrow\cong & \curvearrowright & \prod_i (l_i^{'})^{n-1} \downarrow\cong & \curvearrowright & \psi = \prod_i (l_i, l_i^{'})^* \downarrow\cong & \curvearrowright \\ ... \longrightarrow & \prod_i H^{n-1}((\Phi_i)^*(E)) & \xrightarrow{\prod_i k_i^{n-1}} & \prod_i H^{n-1}((\Phi_1^i)^*(E)) & \xrightarrow{\prod_i \delta_i} & \prod_i H^n((\Phi_i)^*(E), (\Phi_1^i)^*(E)) & \xrightarrow{\prod_i j_i^n} \end{array}$$

$$
\begin{array}{cccccc}
\xrightarrow{j^n} & H^n(\varphi^*(E)) & \xrightarrow{k^n} & H^n(\varphi_1^*(E)) & \longrightarrow ... \\
\curvearrowright & \prod_i (l_i)^n \downarrow\cong & \curvearrowright & \prod_i (l_i')^n \downarrow\cong & \\
\xrightarrow{\prod_i j_i^n} & \prod_i H^n((\Phi_i)^*(E)) & \xrightarrow{\prod_i k_i^n} & \prod_i H^n(\Phi_1^i)^*(E) & \longrightarrow ...
\end{array}
$$

Como $\varphi^*(E) = \coprod_i (\Phi_i)^*(E)$ e $\varphi_1^*(E) = \coprod_i (\Phi_1^i)^*(E)$ segue pela Proposição 1.0.4 que

$$\prod_i (l_i)^n : H^n(\varphi^*(E)) \longrightarrow \prod_i H^n((\Phi_i)^*(E)) \quad \text{e} \quad \prod_i (l_i')^n : H^n(\varphi_1^*(E)) \longrightarrow \prod_i H^n((\Phi_1^i)^*(E))$$

são isomorfismos para todo n.

Assim, pelo Lema 1.0.1 segue que ψ é um isomorfismo.

Consideremos agora a fibração $p_{1|} : p_1^{-1}(D_i^p) = (\Phi_i)^*(E) \longrightarrow D_i^p$ e $\mathcal{F}_i = {p_{1|}}^{-1}(b_i) = p^{-1}(b_i)$, onde $b_i = \Phi_i(0)$.

Pelo Lema 1.0.8, como D_i^p é contrátil e $\partial D_i^p \subset D_i^p$ temos

$$((\Phi_i)^*(E), (\Phi_1^i)^*(E)) \sim (\mathcal{F}_i \times D_i^p, \mathcal{F}_i \times \partial D_i^p)$$

Assim,

$H^n((\Phi_i)^*(E), (\Phi_1^i)^*(E)) \cong H^n(\mathcal{F}_i \times D_i^p, \mathcal{F}_i \times \partial D_i^p) \stackrel{def.}{=} H^n(\mathcal{F}_i \times (D_i^p, \partial D_i^p)) \stackrel{Teo.1.0.3}{\cong}$
$\prod_{k+j=n} H^k(D_i^p, \partial D_i^p) \otimes H^j(\mathcal{F}_i) \stackrel{Teo.1.0.7}{=} H^p(D_i^p, \partial D_i^p) \otimes H^{n-p}(\mathcal{F}_i)$

Sejam γ um caminho ligando b_i a b_0 e $\mathcal{F} = p^{-1}(b_0)$. Então temos uma equivalência de homotopia $\varepsilon_{\mathcal{F}_i}^{\gamma} : \mathcal{F}_i \longrightarrow \mathcal{F}$ que induz um isomorfismo $(\varepsilon_{\mathcal{F}_i}^{\gamma})^* : H^*(\mathcal{F}) \longrightarrow H^*(\mathcal{F}_i)$.

Observemos que se β é um outro caminho ligando b_i a b_0 então $(\varepsilon_{\mathcal{F}_i}^{\beta})^* = (\varepsilon_{\mathcal{F}_i}^{\gamma})^*$ desde que $\pi_1(B, b_0)$ atua trivialmente em $H^*(\mathcal{F})$.

De fato, se considerarmos $[\gamma^{-1} * \beta] \in \pi_1(B, b_0)$ então $(\varepsilon_{\mathcal{F}}^{\gamma^{-1}*\beta})^* = id$.

Logo, temos

$$(\varepsilon_{\mathcal{F}}^{\gamma^{-1}})^* \circ (\varepsilon_{\mathcal{F}_i}^{\beta})^* = (\varepsilon_{\mathcal{F}_i}^{\beta} \circ \varepsilon_{\mathcal{F}}^{\gamma^{-1}})^* = (\varepsilon_{\mathcal{F}}^{\gamma^{-1}*\beta})^* = id$$

Por outro lado, desde que $\gamma * \gamma^{-1} \simeq cte = b_i$ temos $\varepsilon_{\mathcal{F}_i}^{\gamma*\gamma^{-1}} = \varepsilon_{\mathcal{F}_i}^{cte} = id_{\mathcal{F}_i}$ e, assim,

$$(\varepsilon_{\mathcal{F}_i}^{\gamma})^* \circ (\varepsilon_{\mathcal{F}}^{\gamma^{-1}})^* = (\varepsilon_{\mathcal{F}}^{\gamma^{-1}} \circ \varepsilon_{\mathcal{F}_i}^{\gamma})^* = (\varepsilon_{\mathcal{F}_i}^{\gamma*\gamma^{-1}})^* = id$$

Como $(\varepsilon_{\mathcal{F}}^{\gamma^{-1}})^* \circ (\varepsilon_{\mathcal{F}_i}^{\beta})^* = id$ segue que $(\varepsilon_{\mathcal{F}_i}^{\gamma})^* \circ (\varepsilon_{\mathcal{F}}^{\gamma^{-1}})^* \circ (\varepsilon_{\mathcal{F}_i}^{\beta})^* = (\varepsilon_{\mathcal{F}_i}^{\gamma})^*$.

Mas, $(\varepsilon_{\mathcal{F}_i}^{\gamma})^* \circ (\varepsilon_{\mathcal{F}}^{\gamma^{-1}})^* = id$ e portanto, $(\varepsilon_{\mathcal{F}_i}^{\beta})^* = (\varepsilon_{\mathcal{F}_i}^{\gamma})^*$.

Assim, o isomorfismo $H^*(\mathcal{F}) \cong H^*(\mathcal{F}_i)$ independe do caminho γ ligando b_i a b_0.

Portanto,

$$H^n(E^p, E^{p-1}) \cong \prod_i H^n((\Phi_i)^*(E), (\Phi_1^i)^*(E)) \cong \prod_i H^p(D_i^p, \partial D_i^p) \otimes H^{n-p}(\mathcal{F}_i) \cong [\prod_i H^p(D_i^p, \partial D_i^p)] \otimes H^{n-p}(\mathcal{F})$$

Mas $A_p(B;\mathbb{Z}) = H_p(B^p, B^{p-1}) \otimes \mathbb{Z} \cong H_p(B^p, B^{p-1}) \overset{Lema 1.0.3}{\cong} \oplus_i H_p(D_i^p, \partial D_i^p)$.

Assim, $A^p(B;\mathbb{Z}) \cong Hom(A_p(B;\mathbb{Z}), \mathbb{Z}) \cong Hom(\oplus_i H_p(D_i^p, \partial D_i^p), \mathbb{Z}) \cong \prod_i Hom(H_p(D_i^p, \partial D_i^p), \mathbb{Z})$ $= \prod_i H^p(D_i^p, \partial D_i^p)$.

Logo,

$$H^n(E^p, E^{p-1}) \cong A^p(B;\mathbb{Z}) \otimes H^{n-p}(\mathcal{F}) \cong A^p(B; H^{n-p}(\mathcal{F}))$$

Portanto, $H^n(E^p, E^{p-1}) \cong A^p(B; H^{n-p}(\mathcal{F}))$ ■

Digressão: Podemos pensar em $H^n(E^p, E^{p-1})$ como uma primeira aproximação de $H^n(E^p)$; $H^n(E^p, E^{p-2})$ como uma segunda aproximação melhor que a primeira e assim por diante. Portanto, é aqui que a seqüência espectral vai desempenhar seu papel.

Consideremos $A^* = A^*(E)$ um complexo de cocadeias de E com coeficientes em $\mathbb{Z}$ e vamos supor que B é um CW complexo de dimensão finita.

Determinemos uma filtração de A^*.

Se $t_{p-1} : E^{p-1} \longrightarrow E$ é a inclusão, então t_{p-1} induz uma aplicação $t_{p-1}^\sharp : A^*(E) \longrightarrow A^*(E^{p-1})$.

Definamos $F^p(A^*) = Ker\ t_{p-1}^\sharp$.

Observemos que $F^0(A^*) = A^*$, pois $E^{-1} = \phi$ por definição.

Assim, temos o seguinte diagrama

$$\begin{array}{cccccccccccccc}
F^0(A^*) = A^* & : & A^0 & \xrightarrow{\delta} & A^1 & \xrightarrow{\delta} & A^2 & \xrightarrow{\delta} & \cdots & \xrightarrow{\delta} & A^p & \xrightarrow{\delta} & A^{p+1} & \xrightarrow{\delta} \cdots \\
\cup & & \cup & & \cup & & \cup & & & & \cup & & \cup & \\
F^1(A^*) & : & (F^1(A))^0 & \xrightarrow{\delta} & (F^1(A))^1 & \xrightarrow{\delta} & (F^1(A))^2 & \xrightarrow{\delta} & \cdots & \xrightarrow{\delta} & (F^1(A))^p & \xrightarrow{\delta} & (F^1(A))^{p+1} & \xrightarrow{\delta} \cdots \\
\cup & & \cup & & \cup & & \cup & & & & \cup & & \cup & \\
F^2(A^*) & : & (F^2(A))^0 & \xrightarrow{\delta} & (F^2(A))^1 & \xrightarrow{\delta} & (F^2(A))^2 & \xrightarrow{\delta} & \cdots & \xrightarrow{\delta} & (F^2(A))^p & \xrightarrow{\delta} & (F^2(A))^{p+1} & \xrightarrow{\delta} \cdots \\
\cup & & \cup & & \cup & & \cup & & & & \cup & & \cup & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots & \\
\cup & & \cup & & \cup & & \cup & & & & \cup & & \cup & \\
F^p(A^*) & : & (F^p(A))^0 & \xrightarrow{\delta} & (F^p(A))^1 & \xrightarrow{\delta} & (F^p(A))^2 & \xrightarrow{\delta} & \cdots & \xrightarrow{\delta} & (F^p(A))^p & \xrightarrow{\delta} & (F^p(A))^{p+1} & \xrightarrow{\delta} \cdots \\
\cup & & \cup & & \cup & & \cup & & & & \cup & & \cup & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots &
\end{array}$$

onde

- $A^p = A^p(E) = C^p(K) = Hom(C_p(K), \mathbb{Z})$, sendo K a estrutura de CW-complexo de E;
- $(F^p(A))^r = Ker\ t_{p-1}^r$ onde $t_{p-1}^r : A^r = A^r(E) \longrightarrow A^r(E^{p-1})$;
- $\delta : A^r \longrightarrow A^{r+1}$ é o operador cobordo dado por $f \longmapsto \delta(f)$ onde $\delta(f) : C_{r+1}(K) \longrightarrow \mathbb{Z}$ é definida por $\delta(f)(\sigma) = f(\partial(\sigma))$ onde $\partial : C_{r+1}(K) \longrightarrow C_r(K)$ é o operador bordo.

Observemos que δ, por restrição, fornece a $F^p(A^*)$ um complexo de cocadeias, pois se $x \in (F^p(A))^r = Ker\ t_{p-1}^r \subset A^r$ então $\delta(x) \in A^{r+1}$ e ainda observemos que $\delta(x) \in (F^p(A))^{r+1} = Ker\ t_{p-1}^{r+1}$.

De fato, como $t^{\sharp}_{p-1}$ é uma aplicação de cocadeias temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccccc}
A^*(E) & : & ... & \xrightarrow{\delta} & A^r & \xrightarrow{\delta} & A^{r+1} & \xrightarrow{\delta} & ... \\
\downarrow t^{\sharp}_{p-1} & & & \curvearrowright & \downarrow t^r_{p-1} & \curvearrowright & \downarrow t^{r+1}_{p-1} & \curvearrowright & \\
A^*(E^{p-1}) & : & ... & \xrightarrow{\widetilde{\delta}} & A^r(E^{p-1}) & \xrightarrow{\widetilde{\delta}} & A^{r+1}(E^{p-1}) & \xrightarrow{\widetilde{\delta}} & ...
\end{array}$$

isto é, $t^{r+1}_{p-1} \circ \delta = \widetilde{\delta} \circ t^r_{p-1}$ onde $\widetilde{\delta}$ é o operador cobordo de $A^*(E^{p-1})$.

Assim, se $x \in (F^p(A))^r = Ker\ t^r_{p-1}$ então

$$t^{r+1}_{p-1}(\delta(x)) = t^{r+1}_{p-1} \circ \delta(x) = \widetilde{\delta} \circ t^r_{p-1}(x) = \widetilde{\delta}(t^r_{p-1}(x)) = \widetilde{\delta}(0) = 0$$

Portanto, $\delta(x) \in (F^p(A))^{r+1}$.

Além disso, observemos que $(F^p(A))^r \subset (F^{p-1}(A))^r$.

De fato, se $x \in (F^p(A))^r = Ker\ t^r_{p-1}$ então $t^r_{p-1}(x) = 0$.

Mas, $(F^{p-1}(A))^r = Kert^r_{p-2}$ e como $t^r_{p-2} = u^r \circ t^r_{p-1}$, onde $u^r : A^r(E^{p-1}) \longrightarrow A^r(E^{p-2})$ é a induzida a nível de cocadeias da aplicação inclusão $u : E^{p-2} \hookrightarrow E^{p-1}$, segue que

$$t^r_{p-2}(x) = u^r \circ t^r_{p-1}(x) = u^r(t^r_{p-1}(x)) = u^r(0) = 0$$

Portanto, $x \in Ker\ t^r_{p-2} = (F^{p-1}(A))^r$.

Assim, $A^* = F^0(A^*) \supset F^1(A^*) \supset F^2(A^*) \supset ...$ é uma seqüência decrescente fornecendo uma filtração de A^*.

Observemos que esta filtração é limitada, pois desde que B é um CW-complexo de dimensão finita, digamos n, temos $B = B^n = B^{n+1} = ...$ e, portanto, $E = p^{-1}(B) = E^n = E^{n+1} = ...$

Desde que, para todo p, $(F^s(A))^p = Ker\ t^p_{s-1}$, onde $t^p_{s-1} : A^p(E) \longrightarrow A^p(E^{s-1})$; se tomarmos $s \geq n+1$ temos $s-1 \geq n$ e, portanto,

$$E^{s-1} = E \quad \text{e} \quad t^p_{s-1} = id_{A^p(E)}$$

Portanto, $(F^s(A))^p = \{0\}$ para $s \geq n+1$.

Observemos que esta filtração fornece uma seqüência espectral (E_r, d_r) de primeiro quadrante que converge para $H^*(E) = (H^n(E))$, denotado por $E_2^{p,q} \Rightarrow H^n(E)$, como veremos abaixo.

A filtração de $H^n(E)$ será dada, como anteriormente, por

$$H^n(E) = L^{0,n} \supset L^{1,n-1} \supset L^{2,n-2} \supset ... \supset L^{p,q} \supset L^{p+1,q-1} \supset ... \supset L^{n,0} \supset L^{n+1,-1} = 0$$

onde $L^{p,q} = Im\ (l_p)_* = (l_p)_*(H^n(F^p(A^*))) \subset H^n(E)$ e a aplicação $(l_p)_* : H((F^p(A))^n) = H^n(F^p(A^*)) \longrightarrow H(A^n) = H^n(E)$ é a induzida da aplicação $l_p : (F^p(A))^n \hookrightarrow A^n = A^n(E)$ com

$n = p + q$.

Identifiquemos então os primeiros termos da seqüência espectral.

Temos a seguinte seqüência exata curta

$$0 \longrightarrow F^{p+1}(A^*) \xrightarrow{i_p} F^p(A^*) \xrightarrow{j_p} \frac{F^p(A^*)}{F^{p+1}(A^*)} = E_0^p(A^*) \longrightarrow 0$$

Colocando na forma detalhada temos

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & \delta\uparrow & & \delta\uparrow & & \delta\uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & (F^{p+1}(A))^{p+q+1} & \longrightarrow & (F^p(A))^{p+q+1} & \longrightarrow & \frac{(F^p(A))^{p+q+1}}{(F^{p+1}(A))^{p+q+1}} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \delta\uparrow & & \delta\uparrow & & \delta\uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & (F^{p+1}(A))^{p+q} & \longrightarrow & (F^p(A))^{p+q} & \longrightarrow & \frac{(F^p(A))^{p+q+1}}{(F^{p+1}(A))^{p+q}} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \delta\uparrow & & \delta\uparrow & & \delta\uparrow & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
 & & \delta\uparrow & & \delta\uparrow & & \delta\uparrow & & \\
0 & \longrightarrow & (F^{p+1}(A))^{0} & \longrightarrow & (F^p(A))^{0} & \longrightarrow & \frac{(F^p(A))^{p+q+1}}{(F^{p+1}(A))^{0}} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

Assim, obtemos

$$\begin{tikzcd}
H^{p+q}(F^{p+1}(A^*)) \arrow[rr, "i_1^{p,q}"] & & H^{p+q}(F^p(A^*)) \arrow[ddl, "j_1^{p,q}"] & \\
H^{p+q+1}(F^{p+1}(A^*)) \arrow[rrr, "i_1^{p,q+1}"] & & & H^{p+q+1}(F^p(A^*)) \arrow[dddl, "j_1^{p,q+1}"'] \\
 & H^{p+q}(E_0^p(A^*)) \arrow[ul, "\partial_1^{p,q}"] & & \\
 & H^{p+q+2}(F^{p+1}(A^*)) \arrow[rr, "i_1^{p,q+2}"] & & {} \\
 & & H^{p+q+1}(E_0^p(A^*)) \arrow[ul, "\partial_1^{p,q+1}"] &
\end{tikzcd}$$

Para colocarmos isso na linguagem de triângulo exato é necessário bi-indexar da seguinte maneira

$$D_1^{p,q} = H^{p+q}(F^p(A^*))$$

$$E_1^{p,q} = H^{p+q}(E_0^p(A^*)) = H\Big(\frac{(F^p(A))^{p+q}}{(F^{p+1}(A))^{p+q}}\Big)$$

onde p é o grau da filtração e q é o grau complementar de p em relação ao nível de homologia.

Mas $(F^p(A))^{p+q} = Ker\ t_{p-1}^{p+q}$, onde $t_{p-1}^{p+q} : A^{p+q}(E) \longrightarrow A^{p+q}(E^{p-1})$.

Então $(F^p(A))^{p+q} = A^{p+q}(E, E^{p-1}) :=$ conjunto das $(p+q)$ cocadeias de E que se anulam em E^{p-1}.

Assim,

$$\frac{(F^p(A))^{p+q}}{(F^{p+1}(A))^{p+q}} = \frac{A^{p+q}(E,E^{p-1})}{A^{p+q}(E,E^p)} \cong \frac{\frac{A^{p+q}(E)}{A^{p+q}(E^{p-1})}}{\frac{A^{p+q}(E)}{A^{p+q}(E^p)}} \cong \frac{A^{p+q}(E^p)}{A^{p+q}(E^{p-1})} \cong A^{p+q}(E^p,E^{p-1})$$

Portanto,

$$E_1^{p,q} \cong H(A^{p+q}(E^p,E^{p-1})) = H^{p+q}(E^p,E^{p-1}) \overset{Teor.4.0.2}{\cong} A^p(B)\otimes H^q(\mathcal{F})$$

onde $\mathcal{F}$ é uma fibra sobre $b_0 \in B$ fixado, desde que $\pi_1(B)$ atua trivialmente em $H^*(\mathcal{F})$.

Assim, temos

$$\begin{tikzcd}
D_1^{p+1,q-1} \arrow[rrr, "i_1^{p,q}"] & & & D_1^{p,q} \arrow[ddl, "j_1^{p,q}"] & & & \\
& D_1^{p+1,q} \arrow[rrrr, "i_1^{p,q+1}"] & & & & D_1^{p,q+1} \arrow[dddl, "j_1^{p,q+1}"] & \\
& & E_1^{p,q} \arrow[ul, "\partial_1^{p,q}"] & & & & \\
& & & D_1^{p+1,q+1} \arrow[rrr, "i_1^{p,q+2}"] & & & {} \\
& & & & E_1^{p,q+1} \arrow[ul, "\partial_1^{p,q+1}"] & &
\end{tikzcd}$$

Definamos

$$D_1 = \sum_{p,q} D_1^{p,q} \qquad \text{e} \qquad E_1 = \sum_{p,q} E_1^{p,q}$$

e, portanto, temos o seguinte triângulo exato

$$\begin{tikzcd}
D_1 \arrow[rr, "i_1=\{i_1^{p,q}\}"] & & D_1 \arrow[dl, "j_1=\{j_1^{p,q}\}"] \\
& E_1 \arrow[ul, "k_1=\{\partial_1^{p,q}\}"] &
\end{tikzcd}$$

onde bigrau de $i_1 = (-1,1)$, bigrau de $j_1 = (0,0)$ e bigrau de $k_1 = (1,0)$.

Definamos $d_1 = j_1 \circ k_1 : E_1 \longrightarrow E_1$ tal que

$$d_1^{p,q} : E_1^{p,q} \xrightarrow{\partial_1^{p,q}} D_1^{p+1,q} \xrightarrow{j_1^{p+1,q}} E_1^{p+1,q}$$

e, assim, bigrau de $d_1^{p,q} = (1,0)$, consequentemente, bigrau de $d_1 = (1,0)$.

Pelo Lema 3.1.1, $d_1^{p,q}$ é o homomorfismo de conexão da seqüência exata de cohomologia do complexo curto

$$0 \longrightarrow E_0^{p+1}(A^*) \longrightarrow \frac{F^p(A^*)}{F^{p+2}(A^*)} \longrightarrow E_0^p(A^*) \longrightarrow 0$$

a saber,

$$\delta' : H^{p+q}(E_0^p(A^*)) \cong H^{p+q}(E^p, E^{p-1}) \longrightarrow H^{p+q+1}(E_0^{p+1}(A^*)) \cong H^{p+q+1}(E^{p+1}, E^p)$$

onde δ' é o homomorfismo de conexão da seqüência exata longa da tripla (E^{p+1}, E^p, E^{p-1}).

Como temos o diagrama comutativo de seqüências exatas longas

$$\begin{array}{ccccccc}
\ldots & \longrightarrow & H^{p+q}(E^p, E^{p-1}) & \xrightarrow{\delta'} & H^{p+q+1}(E^{p+1}, E^p) & \longrightarrow & \ldots \\
 & & \wr\| & \curvearrowright & \wr\| & & \\
\ldots & \longrightarrow & A^p(B) \otimes H^q(\mathcal{F}) & \xrightarrow{\widetilde{\delta}\otimes 1} & A^{p+1}(B) \otimes H^q(\mathcal{F}) & \longrightarrow & \ldots \\
 & & \| & & \| & & \\
 & & A^p(B; H^q(\mathcal{F})) & & A^{p+1}(B; H^q(\mathcal{F})) & &
\end{array}$$

onde $\widetilde{\delta}$ é o operador cobordo do complexo de cocadeias de B, segue que a menos de isomorfismo $\delta' = \widetilde{\delta} \otimes 1$.

Portanto, $d_1^{p,q} = \widetilde{\delta} \otimes 1$.

Desta forma, temos então

$E_2^{p,q} = H(E_1^{p,q}) \cong H(A^p(B) \otimes H^q(\mathcal{F})) \cong H(A^p(B; H^q(\mathcal{F}))) \cong H^p(B, H^q(\mathcal{F})) \cong H^p(B) \otimes H^q(\mathcal{F})$.

Temos $E_3^{p,q} = H(E_2^{p,q})$.

Assim, $E_r^{p,q} = \underbrace{H(H(H...H(E_2^{p,q})))}_{(r-2)\text{ vezes}}$.

Logo, a seqüência espectral (E_r, d_r), onde $E_r = \sum_{p,q} E_r^{p,q}$ e $d_r = \{d_r^{p,q}\}$, é de primeiro quadrante, pois $E_r^{p,q} = 0$ para $p < 0$ ou $q < 0$, já que $E_2^{p,q} = 0$ para $p < 0$ ou $q < 0$.

Logo, pelo Lema 3.1.4, para r suficientemente grande temos $E_\infty^{p,q} = \frac{L^{p,q}}{L^{p+1,q-1}}$ com $p + q = n$ e pelo Teorema 3.1.1 temos $E_2^{p,q} \Rightarrow H^n(E)$ com $n = p + q$.

Com isso, obtemos o seguinte teorema.

Teorema 4.0.3 ***(Teorema de Serre para Cohomologia)***. *Seja $p : E \longrightarrow B$ uma fibração com base B simplesmente conexa e fibra sobre $b_0 \in B$, $\mathcal{F} = p^{-1}(b_0)$, conexa.*

Então existe uma seqüência espectral (E_r, d_r) de primeiro quadrante tal que $E_2^{p,q} \cong H^p(B; H^q(\mathcal{F})) \Rightarrow H^n(E)$, ou seja, existe uma filtração limitada de $H^n(E)$ dada por

$$H^n(E) = L^{0,n} \supset L^{1,n-1} \supset ... \supset L^{p,q} \supset L^{p+1,q-1} \supset ... \supset L^{n,0} \supset L^{n+1,-1} = 0$$

satisfazendo $E_\infty^{p,q} \cong \frac{L^{p,q}}{L^{p+1,q-1}}$, com $p + q = n$.

■

Existe uma compatibilidade entre os diferenciais $d_r : E_r \to E_r$ com relação a estrutura de produto de E_r. Esta relação é dada como parte da Proposição 4.5, p. 285 de [1]. Assim obtemos a seguinte

Proposição 4.0.2 *O diferencial d_r é uma derivação com respeito ao produto sobre E_r, isto é,*

$$d_r(uv) = d_r(u)v + (-1)^{degu} u d_r(v)$$

Para as seqüências espectrais que iremos estudar este produto será o produto cup.

Capítulo

5

Cálculo dos Grupos e/ou Anéis de Cohomologia de alguns Grupos Clássicos

Neste capítulo as fibrações $SO(n) \longrightarrow S^{n-1}$ com fibra $SO(n-1)$ para $n \geq 3$, $SU(n) \longrightarrow S^{2n-1}$ com fibra $SU(n-1)$ para $n \geq 3$, $U(n) \longrightarrow S^1$ com fibra $SU(n)$ para $n \geq 2$, $Sp(n) \longrightarrow S^{4n-1}$ com fibra $Sp(n-1)$ para $n \geq 2$ e $S^{2n+1} \longrightarrow \mathbb{C}P(n)$ com fibra S^1 para $n \geq 1$ serão usadas para calcularmos os grupos e/ou anéis de cohomologia dos grupos clássicos com coeficientes em $\mathbb{Z}$. Para maiores detalhes sobre as fibrações acima mencionadas vide [10] ou [4].

Usaremos com freqüência que bigrau de $d_r = (r, 1-r)$ pois

$$d_r^{p,q} : E_r^{p,q} \longrightarrow E_r^{p+r,q+1-r}$$

Ainda, por abuso de notação usaremos o símbolo de igualdade para significar isomorfismo.

5.1 Cálculo dos grupos de cohomologia de $SO(n)$ para alguns valores de n.

Desde que $SO(1) = \{pt\}$ e $SO(2) \approx S^1$ então

•$H^*(SO(1)) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & * = 0; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

• $H^*(SO(2)) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & * = 0,\ 1; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

5.1.1 Cálculo dos grupos de cohomologia de $SO(3)$ com coeficientes em $\mathbb{Z}$.

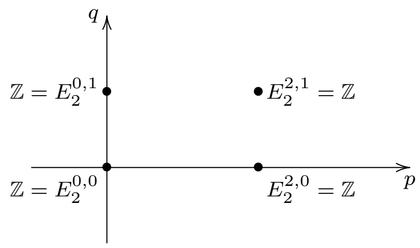
Consideremos a fibração

$$\begin{array}{ccc} SO(2) & \hookrightarrow & SO(3) \\ & & \downarrow \\ & & S^2 \end{array}$$

Pelo teorema de Serre temos que

$$E_2^{p,q} = H^p(S^2) \otimes H^q(SO(2)) \Rightarrow H^*(SO(3))$$

Assim, $E_2^{p,q} \neq 0$ apenas nas posições p, q com $p \in \{0, 2\}$ e $q \in \{0, 1\}$, conforme figura abaixo



• Calculemos $H^0(SO(3))$.

Para isto, consideremos uma filtração de $H^0(SO(3))$ dada por

$$H^0(SO(3)) = L^{0,0} \supset 0$$

Pelo teorema de Serre temos $L^{0,0} = \dfrac{L^{0,0}}{0} = E_\infty^{0,0} = H(H(H...H(E_2^{0,0})))$

Observemos agora a seguinte seqüência

$$E_2^{-2,1} \xrightarrow{d_2^{-2,1}} E_2^{0,0} \xrightarrow{d_2^{0,0}} E_2^{2,-1}$$

Como a seqüência (E_r, d_r) é de primeiro quadrante, temos $E_2^{-2,1} = 0 = E_2^{2,-1}$.

Assim, como $2 > \max\{0, 1 = 0 + 1\}$, pelo Lema 3.1.3 temos que

$$E_\infty^{0,0} = E_2^{0,0} = H^0(S^2) \otimes H^0(SO(2)) = \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$$

Portanto, $H^0(SO(3)) = \mathbb{Z}$.

• Calculemos $H^1(SO(3))$.

Para isto, consideremos uma filtração de $H^1(SO(3))$ dada por

$$H^1(SO(3)) = L^{0,1} \supset L^{1,0} \supset 0$$

Pelo fato que $E_\infty^{p,q} = H(H(H...H(E_2^{p,q})))$ temos

$$E_\infty^{1,0} = 0 \Rightarrow L^{1,0} = 0$$

$$E_\infty^{0,1} = H(H(H...H(E_2^{0,1}))) = \frac{L^{0,1}}{L^{1,0}} = L^{0,1}$$

Logo, $H^1(SO(3)) = E_\infty^{0,1}$.

Observemos agora a seguinte seqüência

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & \mathbb{Z} & & & & \\ & & & & \| & & & & \\ 0 & = & E_2^{-2,2} & \xrightarrow{d_2^{-2,2}} & E_2^{0,1} & \xrightarrow{d_2^{0,1}} & E_2^{2,0} & = & \mathbb{Z} \end{array}$$

Assim, $E_3^{0,1} = H(E_2^{0,1}) = \dfrac{\text{Ker } d_2^{0,1}}{\text{Im } d_2^{-2,2}} = \text{ Ker } d_2^{0,1}$.

Como $3 > \max\{0, 2 = 1 + 1\}$ temos $E_\infty^{0,1} = E_3^{0,1} = \text{ Ker } d_2^{0,1}$.

Portanto $H^1(SO(3)) = \text{ Ker } d_2^{0,1}$.

• Calculemos $H^2(SO(3))$.

Para isto, consideremos uma filtração de $H^2(SO(3))$ dada por

$$H^2(SO(3)) = L^{0,2} \supset L^{1,1} \supset L^{2,0} \supset 0$$

Assim, temos

$$E_\infty^{2,0} = H(H(H...H(E_2^{2,0}))) = L^{2,0}$$

$$E_\infty^{1,1} = 0 \Rightarrow L^{1,1} = L^{2,0}$$

$$E_\infty^{0,2} = 0 \Rightarrow L^{0,2} = L^{1,1}$$

Logo, $H^2(SO(3)) = E_\infty^{2,0}$.

Observemos agora a seguinte seqüência

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & \mathbb{Z} & & & & \\ & & & & \| & & & & \\ \mathbb{Z} & = & E_2^{0,1} & \xrightarrow{d_2^{0,1}} & E_2^{2,0} & \xrightarrow{d_2^{2,0}} & E_2^{4,-1} & = & 0 \end{array}$$

Assim, $E_3^{2,0} = H(E_2^{2,0}) = \dfrac{\text{Ker } d_2^{2,0}}{\text{Im } d_2^{0,1}} = \dfrac{\mathbb{Z}}{\text{Im } d_2^{0,1}}$.

Como $3 > \max\{2, 1 = 0 + 1\}$ temos $E_\infty^{2,0} = E_3^{2,0} = \dfrac{\mathbb{Z}}{\text{Im } d_2^{0,1}}$.

Portanto $H^2(SO(3)) = \dfrac{\mathbb{Z}}{\text{Im } d_2^{0,1}}$.

• Calculemos $H^3(SO(3))$.

Para isto, consideremos uma filtração de $H^3(SO(3))$ dada por

$$H^3(SO(3)) = L^{0,3} \supset L^{1,2} \supset L^{2,1} \supset L^{3,0} \supset 0$$

Assim, temos

$$E_\infty^{3,0} = 0 \Rightarrow L^{3,0} = 0$$

$$E_\infty^{2,1} = H(H(H...H(E_2^{2,1}))) = L^{2,1}$$

$$E_\infty^{1,2} = 0 \Rightarrow L^{1,2} = L^{2,1}$$

$$E_\infty^{0,3} = 0 \Rightarrow L^{0,3} = L^{1,2}$$

Logo, $H^3(SO(3)) = E_\infty^{2,1}$

Observemos a seqüência abaixo

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & \mathbb{Z} & & & & \\ & & & & \| & & & & \\ 0 & = & E_2^{0,2} & \xrightarrow{d_2^{0,2}} & E_2^{2,1} & \xrightarrow{d_2^{2,1}} & E_2^{4,0} & = & 0 \\ & & & & \| & & & & \\ & & & & E_3^{2,1} & & & & \end{array}$$

Como $3 > \max\{2, 2 = 1 + 1\}$ temos que

$$E_\infty^{2,1} = E_3^{2,1} = \mathbb{Z}$$

Portanto, $H^3(SO(3)) = \mathbb{Z}$.

• Calculemos $H^n(SO(3))$, para $n \geq 4$.

Para isto, consideremos uma filtração de $H^n(SO(3))$ dada por

$$H^n(SO(3)) = L^{0,n} \supset L^{1,n-1} \supset L^{2,n-2} \supset L^{3,n-3} \supset L^{4,n-4} \supset ... \supset L^{n-1,1} \supset L^{n,0} \supset 0$$

Assim, para $n \geq 4$ temos

$$E_\infty^{n,0} = 0 \Rightarrow L^{n,0} = 0$$

$$E_\infty^{n-1,1} = 0 \Rightarrow L^{n-1,1} = L^{n,0}$$

$$\vdots$$

$$E_\infty^{3,n-3} = 0 \Rightarrow L^{3,n-3} = L^{4,n-4}$$

$$E_\infty^{2,n-2} = H(H(H...H(E_2^{2,n-2}))) = 0 \text{ pois } n-2 \geq 2 \Rightarrow L^{2,n-2} = L^{3,n-3}$$

$$E_\infty^{1,n-1} = 0 \Rightarrow L^{1,n-1} = L^{2,n-2}$$

$$E_\infty^{0,n} = H(H(H...H(E_2^{0,n}))) = 0 \quad \text{pois} \quad n \geq 4 \Rightarrow L^{0,n} = L^{1,n-1}$$

Portanto, $H^n(SO(3)) = L^{0,n} = 0$ para todo $n \geq 4$.
Logo, os grupos de cohomologia de $SO(3)$ com coeficientes em $\mathbb{Z}$ são dados por

$$H^*(SO(3)) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & * = 0,\ 3; \\ \text{Ker } d_2^{0,1}, & * = 1; \\ \frac{\mathbb{Z}}{\text{Im } d_2^{0,1}}, & * = 2; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Podemos obter um quadro mais completo da estrutura de $H^*(SO(3))$ do que a obtida acima desde que $SO(3) \overset{Prop.1.0.5(iii)}{\approx} \mathbb{R}P(3)$ e portanto

$$H^*(SO(3)) = H^*(\mathbb{R}P(3)) \overset{Ex.1.0.1}{=} \begin{cases} \mathbb{Z}, & * = 0,\ 3; \\ \mathbb{Z}_2, & * = 2; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

o que nos permite deduzir que $d_2^{0,1} : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ é o homomorfismo $n \rightarrow 2n$.

5.1.2 Cálculo dos grupos de cohomologia de $SO(4)$ com coeficientes em $\mathbb{Z}$.

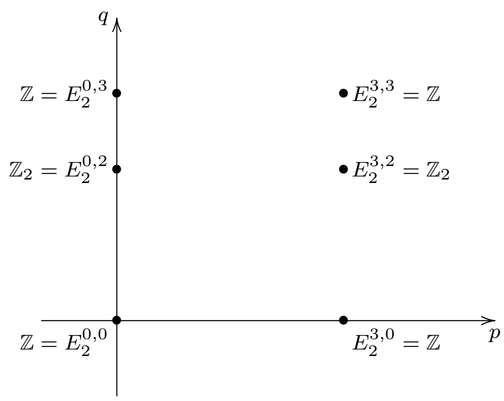
Consideremos a fibração

$$\begin{array}{ccc} SO(3) & \hookrightarrow & SO(4) \\ & & \downarrow \\ & & S^3 \end{array}$$

Pelo teorema de Serre temos que

$$E_2^{p,q} = H^p(S^3) \otimes H^q(SO(3)) \Rightarrow H^*(SO(4))$$

Assim, $E_2^{p,q} \neq 0$ apenas nas posições p, q com $p \in \{0, 3\}$ e $q \in \{0, 2, 3\}$, conforme figura abaixo



• Calculemos $H^0(SO(4))$.
Para isto, consideremos uma filtração de $H^0(SO(4))$ dada por

$$H^0(SO(4)) = L^{0,0} \supset 0$$

Pelo teorema de Serre temos

$$L^{0,0} = \frac{L^{0,0}}{0} = E_\infty^{0,0} = H(H(H...H(E_2^{0,0})))$$

Observemos agora a seguinte seqüência

$$E_2^{-2,1} \xrightarrow{d_2^{-2,1}} E_2^{0,0} \xrightarrow{d_2^{0,0}} E_2^{2,-1}$$

Como a seqüência (E_r, d_r) é de primeiro quadrante, temos $E_2^{-2,1} = 0 = E_2^{2,-1}$.
Assim, como $2 > \max\{0, 1 = 0 + 1\}$, pelo Lema 3.1.3 temos que

$$E_\infty^{0,0} = E_2^{0,0} = H^0(S^3) \otimes H^0(SO(3)) = \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$$

Portanto, $H^0(SO(4)) = \mathbb{Z}$.
• Calculemos $H^1(SO(4))$.
Para isto, consideremos uma filtração de $H^1(SO(4))$ dada por

$$H^1(SO(4)) = L^{0,1} \supset L^{1,0} \supset 0$$

Observando que $E_2^{1,0} = E_2^{0,1} = 0$ e pelo fato que $E_\infty^{p,q} = H(H(H...H(E_2^{p,q})))$ temos

$$E_\infty^{1,0} = 0 \Rightarrow \frac{L^{1,0}}{0} = 0 \Rightarrow L^{1,0} = 0$$

$$E_\infty^{0,1} = 0 \Rightarrow \frac{L^{0,1}}{L^{1,0}} = 0 \Rightarrow L^{0,1} = L^{1,0}$$

Portanto, $H^1(SO(4)) = 0$.
• Calculemos $H^2(SO(4))$.
Para isto, consideremos uma filtração de $H^2(SO(4))$ dada por

$$H^2(SO(4)) = L^{0,2} \supset L^{1,1} \supset L^{2,0} \supset 0$$

Assim, temos

$$E_\infty^{2,0} = 0 \Rightarrow L^{2,0} = 0$$

$$E_\infty^{1,1} = 0 \Rightarrow L^{1,1} = L^{2,0}$$

$$E_\infty^{0,2} = H(H(H...H(E_2^{0,2}))) = L^{0,2}$$

Logo, $H^2(SO(4)) = E_\infty^{0,2}$.

Observemos agora a seguinte seqüência

$$0 = E_2^{-2,3} \xrightarrow{d_2^{-2,3}} E_2^{0,2} \xrightarrow{d_2^{0,2}} E_2^{2,1} = 0$$

Assim, $E_3^{0,2} = H(E_2^{0,2}) = \dfrac{Ker\ d_2^{0,2}}{Im\ d_2^{-2,3}} = \dfrac{E_2^{0,2}}{\{0\}} = E_2^{0,2} = H^0(S^3) \otimes H^2(SO(3)) = \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}_2$.

Consideremos agora a seqüência

$$0 = E_3^{-3,4} \xrightarrow{d_3^{-3,4}} E_3^{0,2} \xrightarrow{d_3^{0,2}} E_3^{3,0} \tag{5.1}$$

e calculemos $E_3^{3,0} = H(E_2^{3,0})$. Para isto, consideremos a seqüência

$$0 \;=\; E_2^{1,1} \xrightarrow{d_2^{1,1}} E_2^{3,0} \xrightarrow{d_2^{3,0}} E_2^{5,-1} \;=\; 0$$

Assim, $E_3^{3,0} = E_2^{3,0} = H^3(S^3) \otimes H^0(SO(3)) = \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$.

Da seqüência (5.1) temos

$$0 \xrightarrow{d_3^{-3,4}} \mathbb{Z}_2 = E_3^{0,2} \xrightarrow{d_3^{0,2}} \mathbb{Z}$$

Assim $d_3^{0,2} = 0$, pois $d_3^{0,2}$ é homomorfismo e então $E_4^{0,2} = E_3^{0,2} = \mathbb{Z}_2$.

Como $4 > \max\{0, 3 = 2 + 1\}$ temos $E_\infty^{0,2} = E_4^{0,2} = \mathbb{Z}_2$.

Portanto, $H^2(SO(4)) = \mathbb{Z}_2$.

- Calculemos $H^3(SO(4))$.

Para isto, consideremos uma filtração de $H^3(SO(4))$ dada por

$$H^3(SO(4)) = L^{0,3} \supset L^{1,2} \supset L^{2,1} \supset L^{3,0} \supset 0$$

Assim, temos

$$E_\infty^{3,0} = H(H(H...H(E_2^{3,0}))) = L^{3,0}$$

$$E_\infty^{2,1} = 0 \Rightarrow L^{2,1} = L^{3,0}$$

$$E_\infty^{1,2} = 0 \Rightarrow L^{1,2} = L^{2,1}$$

$$E_\infty^{0,3} = H(H(H...H(E_2^{0,3}))) = \frac{L^{0,3}}{L^{3,0}}$$

Observemos as seqüências abaixo

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & = & E_2^{1,1} & \xrightarrow{d_2^{1,1}} & E_2^{3,0} & \xrightarrow{d_2^{3,0}} & E_2^{5,-1} & = & 0 \\ & & & & \| & & & & \\ \mathbb{Z}_2 & = & E_3^{0,2} & \xrightarrow{d_3^{0,2}=0} & E_3^{3,0} & \xrightarrow{d_3^{3,0}} & E_3^{6,-2} & = & 0 \\ & & & & \| & & & & \\ & & & & E_4^{3,0} & & & & \end{array}$$

Como $4 > \max\{3, 1 = 0 + 1\}$ temos que

$$L^{3,0} = E_\infty^{3,0} = E_4^{3,0} = E_2^{3,0} = \mathbb{Z}$$

Assim, $E_\infty^{0,3} = \dfrac{L^{0,3}}{\mathbb{Z}}$.
Consideremos agora as seguintes seqüências

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & \mathbb{Z} & & & & \\ & & & & \| & & & & \\ 0 & = & E_2^{-2,4} & \xrightarrow{d_2^{-2,4}} & E_2^{0,3} & \xrightarrow{d_2^{0,3}} & E_2^{2,2} & = & 0 \\ & & & & \| & & & & \\ 0 & = & E_3^{-3,5} & \xrightarrow{d_3^{-3,5}} & E_3^{0,3} & \xrightarrow{d_3^{0,3}} & E_3^{3,1} & = & 0 \\ & & & & \| & & & & \\ 0 & = & E_4^{-4,6} & \xrightarrow{d_4^{-4,6}} & E_4^{0,3} & \xrightarrow{d_4^{0,3}} & E_4^{4,0} & = & 0 \\ & & & & \| & & & & \\ & & & & E_5^{0,3} & & & & \end{array}$$

Como $5 > \max\{0, 4 = 3 + 1\}$ temos que $E_\infty^{0,3} = E_5^{0,3} = \mathbb{Z}$.
Assim, $\dfrac{L^{0,3}}{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$ e portanto $L^{0,3} = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, pois $L^{0,3}$ é abeliano.
Portanto, $H^3(SO(4)) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.
• Calculemos $H^4(SO(4))$.
Para isto, consideremos uma filtração de $H^4(SO(4))$ dada por

$$H^4(SO(4)) = L^{0,4} \supset L^{1,3} \supset L^{2,2} \supset L^{3,1} \supset L^{4,0} \supset 0$$

Assim, temos

$$E_\infty^{4,0} = 0 \Rightarrow L^{4,0} = 0$$

$$E_\infty^{3,1} = 0 \Rightarrow L^{3,1} = L^{4,0}$$

$$E_\infty^{2,2} = 0 \Rightarrow L^{2,2} = L^{3,1}$$

$$E_\infty^{1,3} = 0 \Rightarrow L^{1,3} = L^{2,2}$$

$$E_\infty^{0,4} = 0 \Rightarrow L^{0,4} = L^{1,3}$$

Portanto, $H^4(SO(4)) = 0$.
• Calculemos $H^5(SO(4))$.
Para isto, consideremos uma filtração de $H^5(SO(4))$ dada por

$$H^5(SO(4)) = L^{0,5} \supset L^{1,4} \supset L^{2,3} \supset L^{3,2} \supset L^{4,1} \supset L^{5,0} \supset 0$$

Assim, temos

$$E_\infty^{5,0} = 0 \Rightarrow L^{5,0} = 0$$

$$E_\infty^{4,1} = 0 \Rightarrow L^{4,1} = L^{5,0}$$

$$E_\infty^{3,2} = H(H(H...H(E_2^{3,2}))) = L^{3,2}$$

$$E_\infty^{2,3} = 0 \Rightarrow L^{2,3} = L^{3,2}$$

$$E_\infty^{1,4} = 0 \Rightarrow L^{1,4} = L^{2,3}$$

$$E_\infty^{0,5} = 0 \Rightarrow L^{0,5} = L^{1,4}$$

Logo, $H^5(SO(4)) = E_\infty^{3,2}$.
Observemos as seguintes seqüências

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \mathbb{Z}_2 & & & & \\
 & & & & \| & & & & \\
0 & = & E_2^{1,3} & \xrightarrow{d_2^{1,3}} & E_2^{3,2} & \xrightarrow{d_2^{3,2}} & E_2^{5,1} & = & 0 \\
 & & & & \| & & & & \\
0 & = & E_3^{0,4} & \xrightarrow{d_3^{0,4}} & E_3^{3,2} & \xrightarrow{d_3^{3,2}} & E_3^{6,0} & = & 0 \\
 & & & & \| & & & & \\
 & & & & E_4^{3,2} & & & &
\end{array}$$

Como $4 > \max\{3, 3 = 2 + 1\}$ temos que $E_\infty^{3,2} = E_4^{3,2} = \mathbb{Z}_2$.
Portanto, $H^5(SO(4)) = \mathbb{Z}_2$.
• Calculemos $H^6(SO(4))$.
Para isto, consideremos uma filtração de $H^6(SO(4))$ dada por

$$H^6(SO(4)) = L^{0,6} \supset L^{1,5} \supset L^{2,4} \supset L^{3,3} \supset L^{4,2} \supset L^{5,1} \supset L^{6,0} \supset 0$$

Assim, temos

$$E_\infty^{6,0} = 0 \Rightarrow L^{6,0} = 0$$

$$E_\infty^{5,1} = 0 \Rightarrow L^{5,1} = L^{6,0}$$

$$E_\infty^{4,2} = 0 \Rightarrow L^{4,2} = L^{5,1}$$

$$E_\infty^{3,3} = H(H(H...H(E_2^{3,3}))) = L^{3,3}$$

$$E_\infty^{2,4} = 0 \Rightarrow L^{2,4} = L^{3,3}$$

$$E_\infty^{1,5} = 0 \Rightarrow L^{1,5} = L^{2,4}$$

$$E_\infty^{0,6} = 0 \Rightarrow L^{0,6} = L^{1,5}$$

Logo, $H^6(SO(4)) = E_\infty^{3,3}$.

Observemos as seguintes seqüências

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \mathbb{Z} & & & & \\
 & & & & \| & & & & \\
0 & = & E_2^{1,4} & \xrightarrow{d_2^{1,4}} & E_2^{3,3} & \xrightarrow{d_2^{3,3}} & E_2^{5,2} & = & 0 \\
 & & & & \| & & & & \\
0 & = & E_3^{0,5} & \xrightarrow{d_3^{0,5}} & E_3^{3,3} & \xrightarrow{d_3^{3,3}} & E_3^{6,1} & = & 0 \\
 & & & & \| & & & & \\
0 & = & E_4^{-1,6} & \xrightarrow{d_4^{-1,6}} & E_4^{3,3} & \xrightarrow{d_4^{3,3}} & E_4^{7,0} & = & 0 \\
 & & & & \| & & & & \\
 & & & & E_5^{3,3} & = & E_\infty^{3,3} & &
\end{array}$$

Portanto, $H^6(SO(4)) = \mathbb{Z}$.

- Calculemos $H^n(SO(4))$, para $n \geq 7$.

Para isto, consideremos uma filtração de $H^n(SO(4))$ dada por

$$H^n(SO(4)) = L^{0,n} \supset L^{1,n-1} \supset L^{2,n-2} \supset L^{3,n-3} \supset L^{4,n-4} \supset L^{5,n-5} \supset ... \supset L^{n-1,1} \supset L^{n,0} \supset 0$$

Assim, para $n \geq 7$ temos

$$E_\infty^{n,0} = 0 \Rightarrow L^{n,0} = 0$$

$$E_\infty^{n-1,1} = 0 \Rightarrow L^{n-1,1} = L^{n,0}$$

$$\vdots$$

$$E_\infty^{4,n-4} = 0 \Rightarrow L^{4,n-4} = L^{5,n-5}$$

$$E_\infty^{3,n-3} = H(H(H...H(E_2^{3,n-3}))) = 0 \quad \text{pois} \quad n-3 \geq 4 \Rightarrow L^{3,n-3} = L^{4,n-4}$$

$$E_\infty^{2,n-2} = 0 \Rightarrow L^{2,n-2} = L^{3,n-3}$$

$$E_\infty^{1,n-1} = 0 \Rightarrow L^{1,n-1} = L^{2,n-2}$$

$$E_\infty^{0,n} = H(H(H...H(E_2^{0,n}))) = 0 \quad \text{pois} \quad n \geq 7 \Rightarrow L^{0,n} = L^{1,n-1}$$

Portanto, $H^n(SO(4)) = L^{0,n} = 0$ para todo $n \geq 7$.

Logo, os grupos de cohomologia de $SO(4)$ com coeficientes em $\mathbb{Z}$ são dados por

$$H^*(SO(4)) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & * = 0,\, 6; \\ \mathbb{Z}_2, & * = 2,\, 5; \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & * = 3; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

5.1.3 Cálculo dos grupos de cohomologia de $SO(5)$ com coeficientes em $\mathbb{Z}$.

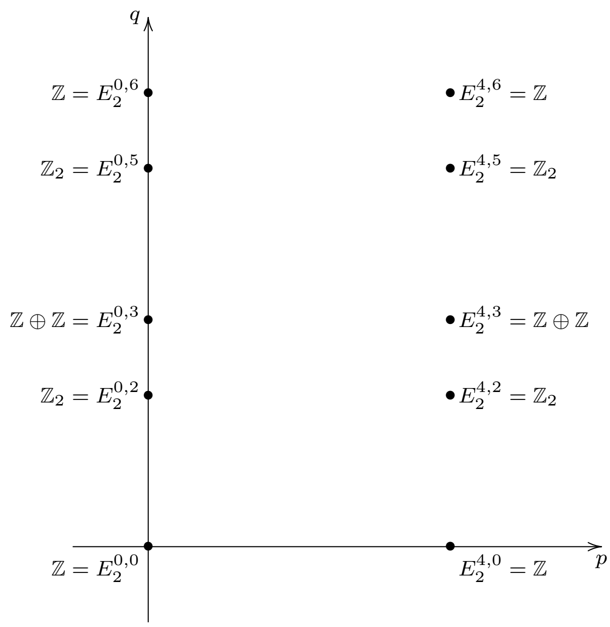
Temos a fibração

$$\begin{array}{ccc} SO(4) & \hookrightarrow & SO(5) \\ & & \downarrow \\ & & S^4 \end{array}$$

Pelo teorema de Serre temos que

$$E_2^{p,q} = H^p(S^4) \otimes H^q(SO(4)) \Rightarrow H^*(SO(5))$$

Assim, $E_2^{p,q} \neq 0$ apenas nas posições p, q com $p \in \{0, 4\}$ e $q \in \{0, 2, 3, 5, 6\}$.



- Calculemos $H^0(SO(5))$.

Para isto, consideremos uma filtração de $H^0(SO(5))$ dada por

$$H^0(SO(5)) = L^{0,0} \supset 0$$

Logo, $E_\infty^{0,0} = L^{0,0}$

Observemos a seguinte seqüência

$$0 = E_2^{-2,1} \xrightarrow{d_2^{-2,1}} E_2^{0,0} \xrightarrow{d_2^{0,0}} E_2^{2,-1} = 0$$

Como $2 > \max\{0, 1 = 0 + 1\}$ temos que

$$E_\infty^{0,0} = E_2^{0,0} = H^0(S^4) \otimes H^0(SO(4)) = \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$$

Portanto, $H^0(SO(5)) = \mathbb{Z}$.

• Calculemos $H^1(SO(5))$.

Para isto, consideremos uma filtração de $H^1(SO(5))$ dada por

$$H^1(SO(5)) = L^{0,1} \supset L^{1,0} \supset 0$$

Assim, temos

$$E_\infty^{1,0} = 0 \Rightarrow L^{1,0} = 0$$

$$E_\infty^{0,1} = 0 \Rightarrow L^{0,1} = L^{1,0}$$

Portanto, $H^1(SO(5)) = 0$.

• Calculemos $H^2(SO(5))$.

Para isto, consideremos uma filtração de $H^2(SO(5))$ dada por

$$H^2(SO(5)) = L^{0,2} \supset L^{1,1} \supset L^{2,0} \supset 0$$

Assim, temos

$$E_\infty^{2,0} = 0 \Rightarrow L^{2,0} = 0$$

$$E_\infty^{1,1} = 0 \Rightarrow L^{1,1} = L^{2,0}$$

$$E_\infty^{0,2} = H(H(H...H(E_2^{0,2}))) = L^{0,2}$$

Logo, $H^2(SO(5)) = E_\infty^{0,2}$.

Observemos as seqüências abaixo

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & \mathbb{Z}_2 & & & & \\ & & & & \| & & & & \\ 0 & = & E_2^{-2,3} & \xrightarrow{d_2^{-2,3}} & E_2^{0,2} & \xrightarrow{d_2^{0,2}} & E_2^{2,1} & = & 0 \\ & & & & \| & & & & \\ 0 & = & E_3^{-3,4} & \xrightarrow{d_3^{-3,4}} & E_3^{0,2} & \xrightarrow{d_3^{0,2}} & E_3^{3,0} & = & 0 \\ & & & & \| & & & & \\ & & & & E_4^{0,2} & & & & \end{array}$$

Como $4 > \max\{0, 3 = 2 + 1\}$ temos que $E_\infty^{0,2} = E_4^{0,2} = \mathbb{Z}_2$.

Portanto, $H^2(SO(5)) = \mathbb{Z}_2$.

• Calculemos $H^3(SO(5))$.

Para isto, consideremos uma filtração de $H^3(SO(5))$ dada por

$$H^3(SO(5)) = L^{0,3} \supset L^{1,2} \supset L^{2,1} \supset L^{3,0} \supset 0$$

Assim, temos

$$E_\infty^{3,0} = 0 \Rightarrow L^{3,0} = 0$$

$$E_\infty^{2,1} = 0 \Rightarrow L^{2,1} = L^{3,0}$$

$$E_\infty^{1,2} = 0 \Rightarrow L^{1,2} = L^{2,1}$$

$$E_\infty^{0,3} = H(H(H...H(E_2^{0,3}))) = L^{0,3}$$

Logo, $H^3(SO(5)) = E_\infty^{0,3}$.

Observemos as seqüências abaixo

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & & & & \\ & & & & \| & & & & \\ 0 & = & E_2^{-2,4} & \xrightarrow{d_2^{-2,4}} & E_2^{0,3} & \xrightarrow{d_2^{0,3}} & E_2^{2,2} & = & 0 \\ & & & & \| & & & & \\ 0 & = & E_3^{-3,5} & \xrightarrow{d_3^{-3,5}} & E_3^{0,3} & \xrightarrow{d_3^{0,3}} & E_3^{3,1} & = & 0 \\ & & & & \| & & & & \\ 0 & = & E_4^{-4,6} & \xrightarrow{d_4^{-4,6}} & E_4^{0,3} & \xrightarrow{d_4^{0,3}} & E_4^{4,0} & & \end{array}$$

e

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & \mathbb{Z} & & & \\
 & & & \| & & & \\
0 & = & E_2^{2,1} & \xrightarrow{d_2^{2,1}} & E_2^{4,0} & \xrightarrow{d_2^{4,0}} & E_2^{6,-1} & = & 0 \\
 & & & & \| & & & & \\
0 & = & E_3^{1,2} & \xrightarrow{d_3^{1,2}} & E_3^{4,0} & \xrightarrow{d_3^{4,0}} & E_3^{7,-2} & = & 0 \\
 & & & & \| & & & & \\
 & & & & E_4^{4,0} & & & &
\end{array}$$

Assim, $E_5^{0,3} = \mathrm{Ker} d_4^{0,3}$ onde $d_4^{0,3} : \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$.
Como $5 > \max\{0, 4 = 3 + 1\}$ temos que $E_\infty^{0,3} = E_5^{0,3} = \mathrm{Ker} d_4^{0,3}$.
Portanto, $H^3(SO(5)) = \mathrm{Ker} d_4^{0,3}$.
• Calculemos $H^4(SO(5))$.
Para isto, consideremos uma filtração de $H^4(SO(5))$ dada por

$$H^4(SO(5)) = L^{0,4} \supset L^{1,3} \supset L^{2,2} \supset L^{3,1} \supset L^{4,0} \supset 0$$

Assim, temos

$$E_\infty^{4,0} = H(H(H...H(E_2^{4,0}))) = L^{4,0}$$

$$E_\infty^{3,1} = 0 \Rightarrow L^{3,1} = L^{4,0}$$

$$E_\infty^{2,2} = 0 \Rightarrow L^{2,2} = L^{3,1}$$

$$E_\infty^{1,3} = 0 \Rightarrow L^{1,3} = L^{2,2}$$

$$E_\infty^{0,4} = 0 \Rightarrow L^{0,4} = L^{1,3}$$

Logo, $H^4(SO(5)) = E_\infty^{4,0}$.
Observemos as seqüências abaixo

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \mathbb{Z} & & & & \\
 & & & & \| & & & & \\
0 & = & E_2^{2,1} & \xrightarrow{d_2^{2,1}} & E_2^{4,0} & \xrightarrow{d_2^{4,0}} & E_2^{6,-1} & = & 0 \\
 & & & & \| & & & & \\
0 & = & E_3^{1,2} & \xrightarrow{d_3^{1,2}} & E_3^{4,0} & \xrightarrow{d_3^{4,0}} & E_3^{7,-2} & = & 0 \\
 & & & & \| & & & & \\
\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & = & E_4^{0,3} & \xrightarrow{d_4^{0,3}} & E_4^{4,0} & \xrightarrow{d_4^{4,0}} & E_4^{8,-3} & = & 0
\end{array}$$

Assim, $E_5^{4,0} = \frac{\mathbb{Z}}{\mathrm{Im} d_4^{0,3}}$ onde $d_4^{0,3} : \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$.
Como $5 > \max\{4, 1 = 0 + 1\}$ temos que $E_\infty^{4,0} = E_5^{4,0} = \frac{\mathbb{Z}}{\mathrm{Im} d_4^{0,3}}$.

Portanto, $H^4(SO(5)) = \frac{\mathbb{Z}}{\mathrm{Im} d_4^{0,3}}$.

• Calculemos $H^5(SO(5))$.

Para isto, consideremos uma filtração de $H^5(SO(5))$ dada por

$$H^5(SO(5)) = L^{0,5} \supset L^{1,4} \supset L^{2,3} \supset L^{3,2} \supset L^{4,1} \supset L^{5,0} \supset 0$$

Assim, temos

$$E_\infty^{5,0} = 0 \Rightarrow L^{5,0} = 0$$

$$E_\infty^{4,1} = 0 \Rightarrow L^{4,1} = L^{5,0}$$

$$E_\infty^{3,2} = 0 \Rightarrow L^{3,2} = L^{4,1}$$

$$E_\infty^{2,3} = 0 \Rightarrow L^{2,3} = L^{3,2}$$

$$E_\infty^{1,4} = 0 \Rightarrow L^{1,4} = L^{2,3}$$

$$E_\infty^{0,5} = H(H(H...H(E_2^{0,5}))) = L^{0,5}$$

Logo, $H^5(SO(5)) = E_\infty^{0,5}$.

Observemos as seqüências abaixo

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \mathbb{Z}_2 & & & & \\
 & & & & \| & & & & \\
0 & = & E_2^{2,3} & \xrightarrow{d_2^{2,3}} & E_2^{4,2} & \xrightarrow{d_2^{4,2}} & E_2^{6,1} & = & 0 \\
 & & & & \| & & & & \\
0 & = & E_3^{1,4} & \xrightarrow{d_3^{1,4}} & E_3^{4,2} & \xrightarrow{d_3^{4,2}} & E_3^{7,0} & = & 0 \\
 & & & & \| & & & & \\
 & & & & E_4^{4,2} & & & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \mathbb{Z}_2 & & & & \\
 & & & & \| & & & & \\
0 & = & E_2^{-2,6} & \xrightarrow{d_2^{-2,6}} & E_2^{0,5} & \xrightarrow{d_2^{0,5}} & E_2^{2,4} & = & 0 \\
 & & & & \| & & & & \\
0 & = & E_3^{-3,7} & \xrightarrow{d_3^{-3,7}} & E_3^{0,5} & \xrightarrow{d_3^{0,5}} & E_3^{3,3} & = & 0 \\
 & & & & \| & & & & \\
0 & = & E_4^{-4,8} & \xrightarrow{d_4^{-4,8}} & E_4^{0,5} & \xrightarrow{d_4^{0,5}} & E_4^{4,2} & &
\end{array}$$

e

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & = & E_5^{-5,9} & \xrightarrow{d_5^{-5,9}} & E_5^{0,5} & \xrightarrow{d_5^{0,5}} & E_5^{5,1} & = & 0 \\
 & & & & \| & & & & \\
0 & = & E_6^{-6,10} & \xrightarrow{d_6^{-6,10}} & E_6^{0,5} & \xrightarrow{d_6^{0,5}} & E_6^{6,0} & = & 0 \\
 & & & & \| & & & & \\
0 & = & E_7^{-7,11} & \xrightarrow{d_7^{-7,11}} & E_7^{0,5} & \xrightarrow{d_7^{0,5}} & E_7^{7,-1} & = & 0
\end{array}$$

Como $7 > \max\{0, 6 = 5+1\}$ temos que $E_\infty^{0,5} = E_7^{0,5} = E_5^{0,5} = \mathrm{Ker} d_4^{0,5}$ onde $d_4^{0,5} : \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathbb{Z}_2$.

Portanto, $H^5(SO(5)) = \mathrm{Ker} d_4^{0,5}$.

• Calculemos $H^6(SO(5))$.

Para isto, consideremos uma filtração de $H^6(SO(5))$ dada por

$$H^6(SO(5)) = L^{0,6} \supset L^{1,5} \supset L^{2,4} \supset L^{3,3} \supset L^{4,2} \supset L^{5,1} \supset L^{6,0} \supset 0$$

Assim, temos

$$E_\infty^{6,0} = 0 \Rightarrow L^{6,0} = 0$$

$$E_\infty^{5,1} = 0 \Rightarrow L^{5,1} = L^{6,0}$$

$$E_\infty^{4,2} = H(H(H...H(E_2^{4,2}))) = L^{4,2}$$

$$E_\infty^{3,3} = 0 \Rightarrow L^{3,3} = L^{4,2}$$

$$E_\infty^{2,4} = 0 \Rightarrow L^{2,4} = L^{3,3}$$

$$E_\infty^{1,5} = 0 \Rightarrow L^{1,5} = L^{2,4}$$

$$E_\infty^{0,6} = H(H(H...H(E_2^{0,6}))) = \frac{L^{0,6}}{E_\infty^{4,2}} = \frac{H^6(SO(5))}{E_\infty^{4,2}}$$

Logo, $H^6(SO(5)) = E_\infty^{0,6} \oplus E_\infty^{4,2}$.

Temos a seqüência abaixo

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \mathbb{Z}_2 & & & & \\
 & & & & \| & & & & \\
\mathbb{Z}_2 & = & E_4^{0,5} & \xrightarrow{d_4^{0,5}} & E_4^{4,2} & \xrightarrow{d_4^{4,2}} & E_4^{8,-1} & = & 0
\end{array}$$

Como $5 > \max\{4, 3 = 2+1\}$ temos que $E_\infty^{4,2} = E_5^{4,2} = \frac{\mathbb{Z}_2}{\mathrm{Im} d_4^{0,5}}$.

Observemos as seqüências abaixo

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} & & & & \\
 & & & & \| & & & & \\
0 & = & E_2^{2,4} & \xrightarrow{d_2^{2,4}} & E_2^{4,3} & \xrightarrow{d_2^{4,3}} & E_2^{6,2} & = & 0 \\
 & & & & \| & & & & \\
0 & = & E_3^{1,5} & \xrightarrow{d_3^{1,5}} & E_3^{4,3} & \xrightarrow{d_3^{4,3}} & E_3^{7,1} & = & 0 \\
 & & & & \| & & & & \\
 & & & & E_4^{4,3} & & & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \mathbb{Z} & & & & \\
 & & & & \| & & & & \\
0 & = & E_2^{-2,7} & \xrightarrow{d_2^{-2,7}} & E_2^{0,6} & \xrightarrow{d_2^{0,6}} & E_2^{2,5} & = & 0 \\
 & & & & \| & & & & \\
0 & = & E_3^{-3,8} & \xrightarrow{d_3^{-3,8}} & E_3^{0,6} & \xrightarrow{d_3^{0,6}} & E_3^{3,4} & = & 0 \\
 & & & & \| & & & & \\
0 & = & E_4^{-4,9} & \xrightarrow{d_4^{-4,9}} & E_4^{0,6} & \xrightarrow{d_4^{0,6}} & E_4^{4,3} & &
\end{array}$$

e

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & = & E_5^{-5,10} & \xrightarrow{d_5^{-5,10}} & E_5^{0,6} & \xrightarrow{d_5^{0,6}} & E_5^{5,2} & = & 0 \\
 & & & & \| & & & & \\
0 & = & E_6^{-6,11} & \xrightarrow{d_6^{-6,11}} & E_6^{0,6} & \xrightarrow{d_6^{0,6}} & E_6^{6,1} & = & 0 \\
 & & & & \| & & & & \\
0 & = & E_7^{-7,12} & \xrightarrow{d_7^{-7,12}} & E_7^{0,6} & \xrightarrow{d_7^{0,6}} & E_7^{7,0} & = & 0 \\
 & & & & \| & & & & \\
 & & & & E_8^{0,6} & & & &
\end{array}$$

Como $8 > \max\{0, 7 = 6+1\}$ temos que $E_\infty^{0,6} = E_8^{0,6} = E_5^{0,6} = \mathrm{Ker} d_4^{0,6}$ onde $d_4^{0,6} : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$. Portanto, $H^6(SO(5)) = \mathrm{Ker} d_4^{0,6} \oplus \frac{\mathbb{Z}_2}{\mathrm{Im} d_4^{0,5}}$.

• Calculemos $H^7(SO(5))$.

Para isto, consideremos uma filtração de $H^7(SO(5))$ dada por

$$H^7(SO(5)) = L^{0,7} \supset L^{1,6} \supset L^{2,5} \supset L^{3,4} \supset L^{4,3} \supset L^{5,2} \supset L^{6,1} \supset L^{7,0} \supset 0$$

Assim, temos

$$E_\infty^{7,0} = 0 \Rightarrow L^{7,0} = 0$$

$$E_\infty^{6,1} = 0 \Rightarrow L^{6,1} = L^{7,0}$$

$$E_\infty^{5,2} = 0 \Rightarrow L^{5,2} = L^{6,1}$$

$$E_\infty^{4,3} = H(H(H...H(E_2^{4,3}))) = L^{4,3}$$

$$E_\infty^{3,4} = 0 \Rightarrow L^{3,4} = L^{4,3}$$

$$E_\infty^{2,5} = 0 \Rightarrow L^{2,5} = L^{3,4}$$

$$E_\infty^{1,6} = 0 \Rightarrow L^{1,6} = L^{2,5}$$

$$E_\infty^{0,7} = 0 \Rightarrow L^{0,7} = L^{1,6}$$

Logo, $H^7(SO(5)) = E_\infty^{4,3}$.

Observemos as seqüências abaixo

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} & & & & \\
 & & & & \| & & & & \\
0 & = & E_2^{2,4} & \xrightarrow{d_2^{2,4}} & E_2^{4,3} & \xrightarrow{d_2^{4,3}} & E_2^{6,2} & = & 0 \\
 & & & & \| & & & & \\
0 & = & E_3^{1,5} & \xrightarrow{d_3^{1,5}} & E_3^{4,3} & \xrightarrow{d_3^{4,3}} & E_3^{7,1} & = & 0 \\
 & & & & \| & & & & \\
\mathbb{Z} & = & E_4^{0,6} & \xrightarrow{d_4^{0,6}} & E_4^{4,3} & \xrightarrow{d_4^{4,3}} & E_4^{8,0} & = & 0
\end{array},$$

Como $5 > \max\{4, 4 = 3+1\}$ temos que $E_\infty^{4,3} = E_5^{4,3} = \frac{\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}}{\mathrm{Im} d_4^{0,6}}$ onde $d_4^{0,6} : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$.

Portanto, $H^7(SO(5)) = \frac{\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}}{\mathrm{Im} d_4^{0,6}}$.

• Calculemos $H^8(SO(5))$.

Para isto, consideremos uma filtração de $H^8(SO(5))$ dada por

$$H^8(SO(5)) = L^{0,8} \supset L^{1,7} \supset L^{2,6} \supset L^{3,5} \supset L^{4,4} \supset L^{5,3} \supset L^{6,2} \supset L^{7,1} \supset L^{8,0} \supset 0$$

Assim, temos

$$E_\infty^{8,0} = 0 \Rightarrow L^{8,0} = 0$$

$$E_\infty^{7,1} = 0 \Rightarrow L^{7,1} = L^{8,0}$$

$$E_\infty^{6,2} = 0 \Rightarrow L^{6,2} = L^{7,1}$$

$$E_\infty^{5,3} = 0 \Rightarrow L^{5,3} = L^{6,2}$$

$$E_\infty^{4,4} = 0 \Rightarrow L^{4,4} = L^{5,3}$$

$$E_\infty^{3,5} = 0 \Rightarrow L^{3,5} = L^{4,4}$$

$$E_\infty^{2,6} = 0 \Rightarrow L^{2,6} = L^{3,5}$$

$$E_\infty^{1,7} = 0 \Rightarrow L^{1,7} = L^{2,6}$$

$$E_\infty^{0,8} = 0 \Rightarrow L^{0,8} = L^{1,7}$$

Portanto, $H^8(SO(5)) = 0$.

• Calculemos $H^9(SO(5))$.

Para isto, consideremos uma filtração de $H^9(SO(5))$ dada por

$$H^9(SO(5)) = L^{0,9} \supset L^{1,8} \supset L^{2,7} \supset L^{3,6} \supset L^{4,5} \supset L^{5,4} \supset L^{6,3} \supset L^{7,2} \supset L^{8,1} \supset L^{9,0} \supset 0$$

Assim, temos

$$E_\infty^{9,0} = 0 \Rightarrow L^{9,0} = 0$$
$$E_\infty^{8,1} = 0 \Rightarrow L^{8,1} = L^{9,0}$$
$$E_\infty^{7,2} = 0 \Rightarrow L^{7,2} = L^{8,1}$$
$$E_\infty^{6,3} = 0 \Rightarrow L^{6,3} = L^{7,2}$$
$$E_\infty^{5,4} = 0 \Rightarrow L^{5,4} = L^{6,3}$$
$$E_\infty^{4,5} = H(H(H...H(E_2^{4,5}))) = L^{4,5}$$
$$E_\infty^{3,6} = 0 \Rightarrow L^{3,6} = L^{4,5}$$
$$E_\infty^{2,7} = 0 \Rightarrow L^{2,7} = L^{3,6}$$
$$E_\infty^{1,8} = 0 \Rightarrow L^{1,8} = L^{2,7}$$
$$E_\infty^{0,9} = 0 \Rightarrow L^{0,9} = L^{1,8}$$

Logo, $H^9(SO(5)) = E_\infty^{4,5}$.

Observemos as seguintes seqüências

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \mathbb{Z}_2 & & & & \\
 & & & & \| & & & & \\
0 & = & E_2^{2,6} & \xrightarrow{d_2^{2,6}} & E_2^{4,5} & \xrightarrow{d_2^{4,5}} & E_2^{6,4} & = & 0 \\
 & & & & \| & & & & \\
0 & = & E_3^{1,7} & \xrightarrow{d_3^{1,7}} & E_3^{4,5} & \xrightarrow{d_3^{4,5}} & E_3^{7,3} & = & 0 \\
 & & & & \| & & & & \\
0 & = & E_4^{0,8} & \xrightarrow{d_4^{0,8}} & E_4^{4,5} & \xrightarrow{d_4^{4,5}} & E_4^{8,2} & = & 0 \\
 & & & & \| & & & & \\
0 & = & E_5^{-1,9} & \xrightarrow{d_5^{-1,9}} & E_5^{4,5} & \xrightarrow{d_5^{4,5}} & E_5^{9,1} & = & 0 \\
 & & & & \| & & & & \\
0 & = & E_6^{-2,10} & \xrightarrow{d_6^{-2,10}} & E_6^{4,5} & \xrightarrow{d_6^{4,5}} & E_6^{10,0} & = & 0 \\
 & & & & \| & & & & \\
 & & & & E_7^{4,5} & = & E_\infty^{4,5} & &
\end{array}$$

Portanto, $H^9(SO(5)) = \mathbb{Z}_2$.

• Calculemos $H^{10}(SO(5))$.

Para isto, consideremos uma filtração de $H^{10}(SO(5))$ dada por

$$H^{10}(SO(5)) = L^{0,10} \supset L^{1,9} \supset L^{2,8} \supset L^{3,7} \supset L^{4,6} \supset L^{5,5} \supset L^{6,4} \supset L^{7,3} \supset L^{8,2} \supset L^{9,1} \supset L^{10,0} \supset 0$$

Assim, temos

$$E_\infty^{10,0} = 0 \Rightarrow L^{10,0} = 0$$

$$E_\infty^{9,1} = 0 \Rightarrow L^{9,1} = L^{10,0}$$

$$E_\infty^{8,2} = 0 \Rightarrow L^{8,2} = L^{9,1}$$

$$E_\infty^{7,3} = 0 \Rightarrow L^{7,3} = L^{8,2}$$

$$E_\infty^{6,4} = 0 \Rightarrow L^{6,4} = L^{7,3}$$

$$E_\infty^{5,5} = 0 \Rightarrow L^{5,5} = L^{6,4}$$

$$E_\infty^{4,6} = H(H(H...H(E_2^{4,6}))) = L^{4,6}$$

$$E_\infty^{3,7} = E_\infty^{2,8} = E_\infty^{1,9} = E_\infty^{0,10} = 0 \Rightarrow L^{0,10} = L^{1,9} = L^{2,8} = L^{3,7} = L^{4,6}$$

Logo, $H^{10}(SO(5)) = E_\infty^{4,6}$.

Observemos as seguintes seqüências

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & \mathbb{Z} & & & \\
 & & & \| & & & \\
0 & = & E_2^{2,7} & \xrightarrow{d_2^{2,7}} E_2^{4,6} \xrightarrow{d_2^{4,6}} & E_2^{6,5} & = & 0 \\
 & & & \| & & & \\
0 & = & E_3^{1,8} & \xrightarrow{d_3^{1,8}} E_3^{4,6} \xrightarrow{d_3^{4,6}} & E_3^{7,4} & = & 0 \\
 & & & \| & & & \\
0 & = & E_4^{0,9} & \xrightarrow{d_4^{0,9}} E_4^{4,6} \xrightarrow{d_4^{4,6}} & E_4^{8,3} & = & 0 \\
 & & & \| & & & \\
0 & = & E_5^{-1,10} & \xrightarrow{d_5^{-1,10}} E_5^{4,6} \xrightarrow{d_5^{4,6}} & E_5^{9,2} & = & 0 \\
 & & & \| & & & \\
0 & = & E_6^{-2,11} & \xrightarrow{d_6^{-2,11}} E_6^{4,6} \xrightarrow{d_6^{4,6}} & E_6^{10,1} & = & 0 \\
 & & & \| & & & \\
0 & = & E_7^{-3,12} & \xrightarrow{d_7^{-3,12}} E_7^{4,6} \xrightarrow{d_7^{4,6}} & E_7^{11,0} & = & 0 \\
 & & & \| & & & \\
 & & & E_8^{4,6} \;=\; & E_\infty^{4,6} & &
\end{array}$$

Portanto, $H^{10}(SO(5)) = \mathbb{Z}$.

• Calculemos $H^n(SO(5))$, para $n \geq 11$.

Para isto, consideremos uma filtração de $H^n(SO(5))$ dada por

$$H^n(SO(5)) = L^{0,n} \supset L^{1,n-1} \supset L^{2,n-2} \supset L^{3,n-3} \supset L^{4,n-4} \supset L^{5,n-5} \supset ... \supset L^{n-1,1} \supset L^{n,0} \supset 0$$

Assim, para $n \geq 11$ temos

$$E_\infty^{n,0} = 0 \Rightarrow L^{n,0} = 0$$

$$E_\infty^{n-1,1} = 0 \Rightarrow L^{n-1,1} = L^{n,0}$$

$$\vdots$$

$$E_\infty^{5,n-5} = 0 \Rightarrow L^{5,n-5} = L^{6,n-6}$$

$$E_\infty^{4,n-4} = H(H(H...H(E_2^{4,n-4}))) = 0 \ \text{ pois } \ n-4 \geq 7 \Rightarrow L^{4,n-4} = L^{5,n-5}$$

$$E_\infty^{3,n-3} = 0 \Rightarrow L^{3,n-3} = L^{4,n-4}$$

$$E_\infty^{2,n-2} = 0 \Rightarrow L^{2,n-2} = L^{3,n-3}$$

$$E_\infty^{1,n-1} = 0 \Rightarrow L^{1,n-1} = L^{2,n-2}$$

$$E_\infty^{0,n} = H(H(H...H(E_2^{0,n}))) = 0 \ \text{ pois } \ n \geq 11 \Rightarrow L^{0,n} = L^{1,n-1}$$

Portanto, $H^n(SO(5)) = L^{0,n} = 0$ para todo $n \geq 11$.

Logo, os grupos de cohomologia de $SO(5)$ com coeficientes em $\mathbb{Z}$ são dados por

$$H^*(SO(5)) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & * = 0,\ 10; \\ \mathbb{Z}_2, & * = 2,\ 9; \\ \mathrm{Ker} d_4^{0,3}, & * = 3; \\ \frac{\mathbb{Z}}{\mathrm{Im} d_4^{0,3}}, & * = 4; \\ \mathrm{Ker} d_4^{0,5}, & * = 5; \\ \mathrm{Ker} d_4^{0,6} \oplus \frac{\mathbb{Z}_2}{\mathrm{Im} d_4^{0,5}}, & * = 6; \\ \frac{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}}{\mathrm{Im} d_4^{0,6}}, & * = 7; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Homomorfismos de Bockstein(vide [2], Capítulo 3, Tópicos adicionais, 3.E, p. 303) podem ser usados para obter um quadro mais completo da estrutura de $H^*(SO(5))$ do que a obtida acima (vide [2], Example 3E.7, p.308), a saber

$$H^*(SO(5)) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & * = 0,\ 3,\ 10; \\ \mathbb{Z}_2, & * = 2,\ 4,\ 5,\ 6,\ 9; \\ \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}, & * = 7; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

o que nos permite deduzir que $d_4^{0,5} : \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ é o homomorfismo nulo, $d_4^{0,6} : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ é o homomorfismo $n \to (2n, 0)$ e que o homomorfismo $d_4^{0,3} : \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ deve satisfazer $\mathrm{Ker} d_4^{0,3} = \mathbb{Z}$ e $\mathrm{Im} d_4^{0,3} = 2\mathbb{Z}$.

5.2 Cálculo dos grupos de cohomologia de $\mathbb{C}P(n)$ com coeficientes em $\mathbb{Z}$.

Calcularemos os grupos de cohomologia de $\mathbb{C}P(n)$ com coeficientes em $\mathbb{Z}$ para todo n e para efetuarmos estes cálculos usaremos as fibrações $S^{2n+1} \longrightarrow \mathbb{C}P(n)$ com fibra S^1 para todo $n \geq 1$.

5.2.1 Cálculo dos grupos de cohomologia de $\mathbb{C}P(1)$ com coeficientes em $\mathbb{Z}$

Consideremos a fibração

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \hookrightarrow & S^3 \\ & & \downarrow \\ & & \mathbb{C}P(1) \end{array}$$

Pelo teorema de Serre temos que

$$E_2^{p,q} = H^p(\mathbb{C}P(1)) \otimes H^q(S^1) \Rightarrow H^*(S^3) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & * = 0,\ 3; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

• Cálculo de $H^0(\mathbb{C}P(1))$.

Temos a filtração $\mathbb{Z} = H^0(S^3) = L^{0,0} \supset 0$ e assim $E_\infty^{0,0} = L^{0,0} = \mathbb{Z}$.

Por outro lado

$$E_2^{0,0} = H^0(\mathbb{C}P(1)) \otimes H^0(S^1) = H^0(\mathbb{C}P(1)) \otimes \mathbb{Z} = H^0(\mathbb{C}P(1))$$

e como $2 > \max\{0, 1 = 0 + 1\}$ temos que $E_2^{0,0} = E_\infty^{0,0} = \mathbb{Z}$.

Portanto, $H^0(\mathbb{C}P(1)) = \mathbb{Z}$.

• Cálculo de $H^1(\mathbb{C}P(1))$.

Temos a filtração $0 = H^1(S^3) = L^{0,1} \supset L^{1,0} \supset 0$ e assim

$$L^{0,1} = L^{1,0} = 0 \Longrightarrow E_\infty^{0,1} = E_\infty^{1,0} = 0.$$

Observemos que $E_2^{1,0} = H^1(\mathbb{C}P(1)) \otimes H^0(S^1) = H^1(\mathbb{C}P(1))$.

Como $2 > \max\{1, 1 = 0+1\}$ temos que $E_2^{1,0} = E_\infty^{1,0} = 0$.

Portanto, $H^1(\mathbb{C}P(1)) = 0$.

• Cálculo de $H^2(\mathbb{C}P(1))$.

Temos a filtração $0 = H^2(S^3) = L^{0,2} \supset L^{1,1} \supset L^{2,0} \supset 0$ e assim

$$L^{0,2} = L^{1,1} = L^{2,0} = 0 \Longrightarrow E_\infty^{0,2} = E_\infty^{1,1} = E_\infty^{2,0} = 0$$

Observemos que $E_2^{2,0} = H^2(\mathbb{C}P(1)) \otimes H^0(S^1) = H^2(\mathbb{C}P(1))$.

Consideremos a seqüência

$$E_2^{0,1} \xrightarrow{d_2^{0,1}} E_2^{2,0} \xrightarrow{d_2^{2,0}} E_2^{4,-1} = 0.$$

Temos que $E_2^{0,1} = H^0(\mathbb{C}P(1)) \otimes H^1(S^1) = H^0(\mathbb{C}P(1)) = \mathbb{Z}$.

Como

$$0 = E_\infty^{2,0} = E_3^{2,0} = H(E_2^{2,0}) = \frac{E_2^{2,0}}{Im\ d_2^{0,1}}$$

então $E_2^{2,0} = Im\ d_2^{0,1}$ e portanto $d_2^{0,1}$ é sobrejetora.

Também temos a seqüência

$$0 = E_2^{-2,2} \xrightarrow{d_2^{-2,2}} E_2^{0,1} \xrightarrow{d_2^{0,1}} E_2^{2,0}$$

e assim, $0 = E_\infty^{0,1} = E_3^{0,1} = H(E_2^{0,1}) = Ker d_2^{0,1}$ e portanto $d_2^{0,1}$ é injetora .

Logo, $d_2^{0,1}$ é um isomorfismo e $E_2^{2,0} = E_2^{0,1} = \mathbb{Z}$.

Portanto, $H^2(\mathbb{C}P(1)) = \mathbb{Z}$.

Agora, como $\mathbb{C}P(1)$ tem dimensão 2, então pela Observação 1.0.4 $H^n(\mathbb{C}P(1)) = 0$ para todo $n \geq 3$.

Portanto, os grupos de cohomologia de $\mathbb{C}P(1)$ com coeficientes em $\mathbb{Z}$ são dados por

$$H^*(\mathbb{C}P(1)) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & * = 0,\ 2; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

5.2.2 Cálculo dos grupos de cohomologia de $\mathbb{C}P(2)$ com coeficientes em $\mathbb{Z}$

Consideremos a fibração

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \hookrightarrow & S^5 \\ & & \downarrow \\ & & \mathbb{C}P(2) \end{array}$$

Pelo teorema de Serre temos

$$E_2^{p,q} = H^p(\mathbb{C}P(2)) \otimes H^q(S^1) \Rightarrow H^*(S^5) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & * = 0,\, 5; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

• Cálculo de $H^0(\mathbb{C}P(2))$.

Temos a filtração $\mathbb{Z} = H^0(S^5) = L^{0,0} \supset 0$ e assim $E_\infty^{0,0} = L^{0,0} = \mathbb{Z}$.

Por outro lado,

$$E_2^{0,0} = H^0(\mathbb{C}P(2)) \otimes H^0(S^1) = H^0(\mathbb{C}P(2)).$$

Como $2 > \max\{0, 1 = 0 + 1\}$ temos que $E_2^{0,0} = E_\infty^{0,0} = \mathbb{Z}$.

Portanto, $H^0(\mathbb{C}P(2)) = \mathbb{Z}$.

• Cálculo de $H^1(\mathbb{C}P(2))$.

Temos a filtração $0 = H^1(S^5) = L^{0,1} \supset L^{1,0} \supset 0$ e assim

$$L^{0,1} = L^{1,0} = 0 \Longrightarrow E_\infty^{0,1} = E_\infty^{1,0} = 0$$

Observemos que

$$E_2^{1,0} = H^1(\mathbb{C}P(2)) \otimes H^0(S^1) = H^1(\mathbb{C}P(2))$$

Como $2 > \max\{1, 1 = 0 + 1\}$ temos que $E_2^{1,0} = E_\infty^{1,0} = 0$.

Portanto, $H^1(\mathbb{C}P(2)) = 0$.

• Cálculo de $H^2(\mathbb{C}P(2))$

Temos a filtração $0 = H^2(S^5) = L^{0,2} \supset L^{1,1} \supset L^{2,0} \supset 0$ e assim

$$L^{0,2} = L^{1,1} = L^{2,0} = 0 \Longrightarrow E_\infty^{0,2} = E_\infty^{1,1} = E_\infty^{2,0} = 0$$

Observemos que $E_2^{2,0} = H^2(\mathbb{C}P(2)) \otimes H^0(S^1) = H^2(\mathbb{C}P(2))$.

Consideremos a seqüência

$$E_2^{0,1} \xrightarrow{d_2^{0,1}} E_2^{2,0} \xrightarrow{d_2^{2,0}} E_2^{4,-1} = 0.$$

Temos que $E_2^{0,1} = H^0(\mathbb{C}P(2)) \otimes H^1(S^1) = \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$.

Como

$$0 = E_\infty^{2,0} = E_3^{2,0} = H(E_2^{2,0}) = \frac{E_2^{2,0}}{Im\ d_2^{0,1}}$$

então $E_2^{2,0} = Im\ d_2^{0,1}$, e portanto, $d_2^{0,1}$ é sobrejetora.

Também temos a seqüência

$$0 = E_2^{-2,2} \xrightarrow{d_2^{-2,2}} E_2^{0,1} \xrightarrow{d_2^{0,1}} E_2^{2,0}.$$

Assim, $0 = E_{\infty}^{0,1} = E_3^{0,1} = H(E_2^{0,1}) = Kerd_2^{0,1}$ e portanto $d_2^{0,1}$ é injetora.
Logo, $d_2^{0,1}$ é isomorfismo e $E_2^{2,0} = E_2^{0,1} = \mathbb{Z}$.
Portanto, $H^2(\mathbb{C}P(2)) = \mathbb{Z}$.

• Cálculo de $H^3(\mathbb{C}P(2))$.

Temos a filtração $0 = H^3(S^5) = L^{0,3} \supset L^{1,2} \supset L^{2,1} \supset L^{3,0} \supset 0$ e assim

$$L^{0,3} = L^{1,2} = L^{2,1} = L^{3,0} = 0 \Longrightarrow E_{\infty}^{0,3} = E_{\infty}^{1,2} = E_{\infty}^{2,1} = E_{\infty}^{3,0} = 0.$$

Observemos que $E_2^{3,0} = H^3(\mathbb{C}P(2))$.
Consideremos a seqüência

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & = & E_2^{1,1} & \xrightarrow{d_2^{1,1}} & E_2^{3,0} & \xrightarrow{d_2^{3,0}} & E_2^{5,-1} & = & 0 \\ & & & & \| & & & & \\ 0 & = & E_3^{0,2} & \xrightarrow{d_3^{0,2}} & E_3^{3,0} & \xrightarrow{d_3^{3,0}} & E_3^{6,-2} & = & 0 \\ & & & & \| & & & & \\ & & & & E_4^{3,0} & = & E_{\infty}^{3,0} & = & 0 \end{array}$$

Portanto, $H^3(\mathbb{C}P(2)) = 0$.

• Cálculo de $H^4(\mathbb{C}P(2))$.

Temos a filtração $0 = H^4(S^5) = L^{0,4} \supset L^{1,3} \supset L^{2,2} \supset L^{3,1} \supset L^{4,0} \supset 0$ e assim

$$L^{0,4} = L^{1,3} = L^{2,2} = L^{3,1} = L^{4,0} = 0 \Longrightarrow E_{\infty}^{0,4} = E_{\infty}^{1,3} = E_{\infty}^{2,2} = E_{\infty}^{3,1} = E_{\infty}^{4,0} = 0.$$

Observemos que $E_2^{4,0} = H^4(\mathbb{C}P(2))$.
Consideremos as seqüências

$$E_2^{2,1} \xrightarrow{d_2^{2,1}} E_2^{4,0} \xrightarrow{d_2^{4,0}} E_2^{6,-1} = 0$$

e

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & = & E_3^{1,2} & \xrightarrow{d_3^{1,2}} & E_3^{4,0} & \xrightarrow{d_3^{4,0}} & E_3^{7,-2} & = & 0 \\ & & & & \| & & & & \\ 0 & = & E_4^{0,3} & \xrightarrow{d_4^{0,3}} & E_4^{4,0} & \xrightarrow{d_4^{4,0}} & E_4^{8,-3} & = & 0 \\ & & & & \| & & & & \\ & & & & E_5^{4,0} & = & E_{\infty}^{4,0} & = & 0 \end{array}.$$

Temos que $E_2^{2,1} = H^2(\mathbb{C}P(2)) \otimes H^1(S^1) = \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$.
Como

$$0 = E_{\infty}^{4,0} = E_3^{4,0} = H(E_2^{4,0}) = \frac{E_2^{4,0}}{Im\ d_2^{2,1}}$$

então $E_2^{4,0} = Im\ d_2^{2,1}$ e, portanto, $d_2^{2,1}$ é sobrejetora.

Consideremos agora a seguinte seqüência

$$0 = E_2^{0,2} \xrightarrow{d_2^{0,2}} E_2^{2,1} \xrightarrow{d_2^{2,1}} E_2^{4,0}.$$

Assim, $0 = E_\infty^{2,1} = E_3^{2,1} = H(E_2^{2,1}) = Ker\ d_2^{2,1}$ e portanto $d_2^{2,1}$ é injetora.

Logo, $d_2^{2,1}$ é um isomorfismo e $E_2^{4,0} = E_2^{2,1} = \mathbb{Z}$.

Portanto, $H^4(\mathbb{C}P(2)) = \mathbb{Z}$.

Agora, como $\mathbb{C}P(2)$ tem dimensão 4, então pela Observação 1.0.4 $H^n(\mathbb{C}P(2)) = 0$ para todo $n \geq 5$.

Portanto, os grupos de cohomologia de $\mathbb{C}P(2)$ com coeficientes em $\mathbb{Z}$ são dados por

$$H^*(\mathbb{C}P(2)) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & * = 0,\ 2,\ 4; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

5.2.3 Cálculo dos grupos de cohomologia de $\mathbb{C}P(n)$, $n \geq 3$, com coeficientes em $\mathbb{Z}$.

Consideremos a fibração

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \hookrightarrow & S^{2n+1} \\ & & \downarrow \\ & & \mathbb{C}P(n) \end{array}$$

Pelo teorema de Serre temos

$$E_2^{p,q} = H^p(\mathbb{C}P(n)) \otimes H^q(S^1) \Rightarrow H^*(S^{2n+1}) = \begin{cases} \mathbb{Z} & * = 0,\ \text{2n+1}; \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

• Cálculo de $H^0(\mathbb{C}P(n))$.

Temos a filtração $\mathbb{Z} = H^0(S^{2n+1}) = L^{0,0} \supset 0$ e assim

$$E_\infty^{0,0} = L^{0,0} = \mathbb{Z}$$

Por outro lado, $E_2^{0,0} = H^0(\mathbb{C}P(n)) \otimes H^0(S^1) = H^0(\mathbb{C}P(n))$.

Como $2 > \max\{0, 1 = 0 + 1\}$ temos que $E_2^{0,0} = E_\infty^{0,0} = \mathbb{Z}$.

Portanto, $H^0(\mathbb{C}P(n)) = \mathbb{Z}$.

• Cálculo de $H^1(\mathbb{C}P(n))$.

Temos a filtração $0 = H^1(S^{2n+1}) = L^{0,1} \supset L^{1,0} \supset 0$ e assim

$$L^{0,1} = L^{1,0} = 0 \Longrightarrow E_\infty^{0,1} = E_\infty^{1,0} = 0.$$

Observemos que

$$E_2^{1,0} = H^1(\mathbb{C}P(n))$$

Como $2 > \max\{1, 1 = 0 + 1\}$ temos que $E_2^{1,0} = E_\infty^{1,0} = 0$.

Portanto, $H^1(\mathbb{C}P(n)) = 0$.

• Cálculo de $H^2(\mathbb{C}P(n))$.

Temos a filtração $0 = H^2(S^{2n+1}) = L^{0,2} \supset L^{1,1} \supset L^{2,0} \supset 0$ e assim

$$L^{0,2} = L^{1,1} = L^{2,0} = 0 \Longrightarrow E_\infty^{0,2} = E_\infty^{1,1} = E_\infty^{2,0} = 0.$$

Observemos que $E_2^{2,0} = H^2(\mathbb{C}P(n))$.

Consideremos a seqüência

$$E_2^{0,1} \xrightarrow{d_2^{0,1}} E_2^{2,0} \xrightarrow{d_2^{2,0}} E_2^{4,-1} = 0$$

Temos que $E_2^{0,1} = H^0(\mathbb{C}P(n)) \otimes H^1(S^1) = \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$.

Como

$$0 = E_\infty^{2,0} = E_3^{2,0} = H(E_2^{2,0}) = \frac{E_2^{2,0}}{Im\ d_2^{0,1}}$$

então $E_2^{2,0} = Im\ d_2^{0,1}$ e, portanto, $d_2^{0,1}$ é sobrejetora.

Consideremos agora a seguinte seqüência

$$0 = E_2^{-2,2} \xrightarrow{d_2^{-2,2}} E_2^{0,1} \xrightarrow{d_2^{0,1}} E_2^{2,0}.$$

Assim, $0 = E_\infty^{0,1} = E_3^{0,1} = H(E_2^{0,1}) = Kerd_2^{0,1}$ e portanto $d_2^{0,1}$ é injetora.

Logo, $d_2^{0,1}$ é isomorfismo e $E_2^{2,0} = E_2^{0,1} = \mathbb{Z}$.

Portanto, $H^2(\mathbb{C}P(n)) = \mathbb{Z}$.

Suponhamos agora que, para $n \geq 3$,

$$H^*(\mathbb{C}P(n)) = \begin{cases} \mathbb{Z} & * = 0,\ 2,\ 4,\ \ldots\ ,\ 2n\text{-}2; \\ 0 & * = 1,\ 3,\ 5,\ \ldots\ ,\ 2n\text{-}3 \end{cases}$$

• Cálculo de $H^{2n-1}(\mathbb{C}P(n))$.

Temos a filtração

$$0 = H^{2n-1}(S^{2n+1}) = L^{0,2n-1} \supset L^{1,2n-2} \supset \ldots \supset L^{2n-2,1} \supset L^{2n-1,0} \supset 0$$

e assim $L^{0,2n-1} = L^{1,2n-2} = \ldots = L^{2n-2,1} = L^{2n-1,0} = 0 \Longrightarrow E_\infty^{0,2n-1} = E_\infty^{1,2n-2} = \ldots = E_\infty^{2n-2,1} = E_\infty^{2n-1,0} = 0$.

Observemos que $E_2^{2n-1,0} = H^{2n-1}(\mathbb{C}P(n))$.

Consideremos as sequências

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & = & E_2^{2n-3,1} & \xrightarrow{d_2^{2n-3,1}} & E_2^{2n-1,0} & \xrightarrow{d_2^{2n-1,0}} & E_2^{2n+1,-1} & = & 0 \\
 & & & & \| & & & & \\
0 & = & E_3^{2n-4,2} & \xrightarrow{d_3^{2n-4,2}} & E_3^{2n-1,0} & \xrightarrow{d_3^{2n-1,0}} & E_3^{2n+2,-2} & = & 0 \\
 & & & & \| & & & & \\
 & & & & \vdots & & & & \\
 & & & & \| & & & & \\
0 & = & E_{2n-1}^{0,2n-2} & \xrightarrow{d_{2n-1}^{0,2n-2}} & E_{2n-1}^{2n-1,0} & \xrightarrow{d_{2n-1}^{2n-1,0}} & E_{2n-1}^{4n-2,2-2n} & = & 0 \\
 & & & & \| & & & & \\
 & & & & E_{2n}^{2n-1,0} & = & E_\infty^{2n-1,0} & = & 0
\end{array}$$

Portanto, $H^{2n-1}(\mathbb{C}P(n)) = 0$.

• Cálculo de $H^{2n}(\mathbb{C}P(n))$.

Temos a filtração $0 = H^{2n}(S^{2n+1}) = L^{0,2n} \supset L^{1,2n-1} \supset ... \supset L^{2n-1,1} \supset L^{2n,0} \supset 0$ e assim

$$L^{0,2n} = L^{1,2n-1} = ... = L^{2n-1,1} = L^{2n,0} = 0 \Longrightarrow E_\infty^{0,2n} = E_\infty^{1,2n-1} = ... = E_\infty^{2n-1,1} = E_\infty^{2n,0} = 0$$

Observemos que $E_2^{2n,0} = H^{2n}(\mathbb{C}P(n))$.

Consideremos as sequências

$$E_2^{2n-2,1} \xrightarrow{d_2^{2n-2,1}} E_2^{2n,0} \xrightarrow{d_2^{2n,0}} E_2^{2n+2,-1} = 0$$

e

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & = & E_3^{2n-3,2} & \xrightarrow{d_3^{2n-3,2}} & E_3^{2n,0} & \xrightarrow{d_3^{2n,0}} & E_3^{2n+3,-2} & = & 0 \\
 & & & & \| & & & & \\
0 & = & E_4^{2n-4,3} & \xrightarrow{d_4^{2n-4,3}} & E_4^{2n,0} & \xrightarrow{d_4^{2n,0}} & E_4^{2n+4,-3} & = & 0 \\
 & & & & \| & & & & \\
 & & & & \vdots & & & & \\
 & & & & \| & & & & \\
0 & = & E_{2n}^{0,2n-1} & \xrightarrow{d_{2n}^{0,2n-1}} & E_{2n}^{2n,0} & \xrightarrow{d_{2n}^{2n,0}} & E_{2n}^{4n,1-2n} & = & 0 \\
 & & & & \| & & & & \\
 & & & & E_{2n+1}^{2n,0} & = & E_\infty^{2n,0} & = & 0
\end{array}$$

Temos que $E_2^{2n-2,1} = H^{2n-2}(\mathbb{C}P(n)) \otimes H^1(S^1) = \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$.

Como

$$0 = E_\infty^{2n,0} = E_3^{2n,0} = H(E_2^{2n,0}) = \frac{E_2^{2n,0}}{Im\ d_2^{2n-2,1}}$$

então $E_2^{2n,0} = Im\ d_2^{2n-2,1}$ e, portanto, $d_2^{2n-2,1}$ é sobrejetora.

Consideremos agora as seqüências

$$0 = E_2^{2n-4,2} \xrightarrow{d_2^{2n-4,2}} E_2^{2n-2,1} \xrightarrow{d_2^{2n-2,1}} E_2^{2n,0}$$

e

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & = & E_3^{2n-5,3} & \xrightarrow{d_3^{2n-5,3}} & E_3^{2n-2,1} & \xrightarrow{d_3^{2n-2,1}} & E_3^{2n+1,-1} & = & 0 \\
 & & & & \| & & & & \\
0 & = & E_4^{2n-6,4} & \xrightarrow{d_4^{2n-6,4}} & E_4^{2n-2,1} & \xrightarrow{d_4^{2n-2,1}} & E_4^{2n+2,-2} & = & 0 \\
 & & & & \| & & & & \\
 & & & & \vdots & & & & \\
 & & & & \| & & & & \\
0 & = & E_{2n-2}^{0,2n-2} & \xrightarrow{d_{2n-2}^{0,2n-2}} & E_{2n-2}^{2n-2,1} & \xrightarrow{d_{2n-2}^{2n-2,1}} & E_{2n-2}^{4n-4,4-2n} & = & 0 \\
 & & & & \| & & & & \\
 & & & & E_{2n-1}^{2n-2,1} & = & E_\infty^{2n-2,1} & = & 0
\end{array}$$

Assim, $0 = E_\infty^{2n-2,1} = E_3^{2n-2,1} = H(E_2^{2n-2,1}) = Ker\ d_2^{2n-2,1}$ e portanto $d_2^{2n-2,1}$ é injetora.

Logo, $d_2^{2n-2,1}$ é um isomorfismo e $E_2^{2n,0} = E_2^{2n-2,1} = \mathbb{Z}$.

Portanto, $H^{2n}(\mathbb{C}P(n)) = \mathbb{Z}$.

Agora, como $\mathbb{C}P(n)$ tem dimensão $2n$, então pela Observação 1.0.4 $H^m(\mathbb{C}P(n)) = 0$ para todo $m \geq 2n+1$.

Portanto, os grupos de cohomologia de $\mathbb{C}P(n)$ com coeficientes em $\mathbb{Z}$ são dados por

$$H^*(\mathbb{C}P(n)) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & * = 0,\ 2,\ 4,\ ...,\ \text{2n-2},\ \text{2n}; \\ 0, & \text{caso contrário}; \end{cases}$$

5.3 Cálculo dos grupos de cohomologia de $SU(n)$ com coeficientes em $\mathbb{Z}$.

Desde que $SU(1) = \{pt\}$ e $SU(2) \approx S^3$(vide Proposição 1.0.5 (iv) e (v)) então

$\bullet H^*(SU(1)) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & * = 0; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

$\bullet\ H^*(SU(2)) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & * = 0,\ 3; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

5.3.1 Cálculo dos grupos de cohomologia de $SU(3)$ com coeficientes em $\mathbb{Z}$.

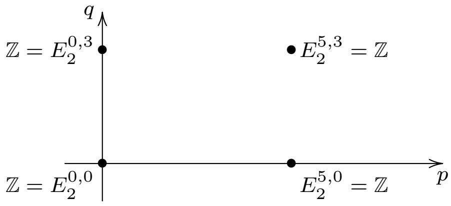
Consideremos a fibração

$$\begin{array}{ccc} SU(2) & \hookrightarrow & SU(3) \\ & & \downarrow \\ & & S^5 \end{array}$$

Pelo Teorema de Serre temos que

$$E_2^{p,q} = H^p(S^5) \otimes H^q(SU(2)) \Rightarrow H^*(SU(3))$$

Assim, $E_2^{p,q} \neq 0$ apenas nas posições p, q com $p \in \{0, 5\}$ e $q \in \{0, 3\}$.



• Calculemos $H^0(SU(3))$.
Consideremos uma filtração de $H^0(SU(3))$ dada por

$$H^0(SU(3)) = L^{0,0} \supset 0$$

Assim, $E_\infty^{0,0} = L^{0,0} = H^0(SU(3))$.
Observemos a seqüência

$$0 = E_2^{-2,1} \xrightarrow{d_2^{-2,1}} E_2^{0,0} \xrightarrow{d_2^{0,0}} E_2^{2,-1} = 0$$

Como $2 > max\{0, 1 = 0 + 1\}$ temos que

$$E_\infty^{0,0} = E_2^{0,0} = H^0(S^5) \otimes H^0(SU(3)) = \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$$

Portanto, $H^0(SU(3)) = \mathbb{Z}$.
• Calculemos $H^1(SU(3))$.
Consideremos uma filtração de $H^1(SU(3))$ dada por

$$H^1(SU(3)) = L^{0,1} \supset L^{1,0} \supset 0$$

Assim,

$$E_\infty^{1,0} = 0 \Longrightarrow L^{1,0} = 0$$

$$E_\infty^{0,1} = 0 \Longrightarrow L^{0,1} = 0$$

Portanto, $H^1(SU(3)) = 0$.

• Calculemos $H^2(SU(3))$.

Consideremos uma filtração de $H^2(SU(3))$ dada por

$$H^2(SU(3)) = L^{0,2} \supset L^{1,1} \supset L^{2,0} \supset 0$$

Assim temos

$$E_\infty^{2,0} = 0 \Longrightarrow L^{2,0} = 0$$

$$E_\infty^{1,1} = 0 \Longrightarrow L^{1,1} = L^{2,0}$$

$$E_\infty^{0,2} = 0 \Longrightarrow L^{0,2} = L^{1,1}$$

Portanto, $H^2(SU(3)) = 0$.

• Calculemos $H^3(SU(3))$.

Consideremos uma filtração de $H^3(SU(3))$ dada por

$$H^3(SU(3)) = L^{0,3} \supset L^{1,2} \supset L^{2,1} \supset L^{3,0} \supset 0$$

Assim temos

$$E_\infty^{3,0} = 0 \Longrightarrow L^{3,0} = 0$$

$$E_\infty^{2,1} = 0 \Longrightarrow L^{2,1} = L^{3,0}$$

$$E_\infty^{1,2} = 0 \Longrightarrow L^{1,2} = L^{2,1}$$

$$E_\infty^{0,3} = H(H(H...H(E_2^{0,3}))) = L^{0,3}$$

Logo, $H^3(SU(3)) = E_\infty^{0,3}$.

Observemos a seguinte seqüência

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \mathbb{Z} & & & & \\
 & & & & \| & & & & \\
0 & = & E_2^{-2,4} & \xrightarrow{d_2^{-2,4}} & E_2^{0,3} & \xrightarrow{d_2^{0,3}} & E_2^{2,2} & = & 0 \\
 & & & & \| & & & & \\
0 & = & E_3^{-3,5} & \xrightarrow{d_3^{-3,5}} & E_3^{0,3} & \xrightarrow{d_3^{0,3}} & E_3^{3,1} & = & 0 \\
 & & & & \| & & & & \\
0 & = & E_4^{-4,6} & \xrightarrow{d_4^{-4,6}} & E_4^{0,3} & \xrightarrow{d_4^{0,3}} & E_4^{4,0} & = & 0 \\
 & & & & \| & & & & \\
 & & & & E_5^{0,3} & = & E_\infty^{0,3} & &
\end{array}$$

Portanto, $H^3(SU(3)) = \mathbb{Z}$.

• Calculemos $H^4(SU(3))$.

Consideremos uma filtração de $H^4(SU(3))$ dada por

$$H^4(SU(3)) = L^{0,4} \supset L^{1,3} \supset L^{2,2} \supset L^{3,1} \supset L^{4,0} \supset 0$$

Assim,

$$E_\infty^{4,0} = 0 \Longrightarrow L^{4,0} = 0$$

$$E_\infty^{3,1} = 0 \Longrightarrow L^{3,1} = L^{4,0}$$

$$E_\infty^{2,2} = 0 \Longrightarrow L^{2,2} = L^{3,1}$$

$$E_\infty^{1,3} = 0 \Longrightarrow L^{1,3} = L^{2,2}$$

$$E_\infty^{0,4} = 0 \Longrightarrow L^{0,4} = L^{1,3}$$

Portanto, $H^4(SU(3)) = 0$.

- Calculemos $H^5(SU(3))$.

Consideremos uma filtração de $H^5(SU(3))$ dada por

$$H^5(SU(3)) = L^{0,5} \supset L^{1,4} \supset L^{2,3} \supset L^{3,2} \supset L^{4,1} \supset L^{5,0} \supset 0$$

Assim,

$$E_\infty^{5,0} = H(H(H...H(E_2^{5,0}))) = L^{5,0}$$

$$E_\infty^{4,1} = 0 \Longrightarrow L^{4,1} = L^{5,0}$$

$$E_\infty^{3,2} = 0 \Longrightarrow L^{3,2} = L^{4,1}$$

$$E_\infty^{2,3} = 0 \Longrightarrow L^{2,3} = L^{3,2}$$

$$E_\infty^{1,4} = 0 \Longrightarrow L^{1,4} = L^{2,3}$$

$$E_\infty^{0,5} = 0 \Longrightarrow L^{0,5} = L^{1,4}$$

Logo, $H^5(SU(3)) = E_\infty^{5,0}$.

Observemos a seguinte seqüência

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \mathbb{Z} & & & & \\
 & & & & \| & & & & \\
0 & = & E_2^{3,1} & \xrightarrow{d_2^{3,1}} & E_2^{5,0} & \xrightarrow{d_2^{5,0}} & E_2^{7,-1} & = & 0 \\
 & & & & \| & & & & \\
0 & = & E_3^{2,2} & \xrightarrow{d_3^{2,2}} & E_3^{5,0} & \xrightarrow{d_3^{5,0}} & E_3^{8,-2} & = & 0 \\
 & & & & \| & & & & \\
0 & = & E_4^{1,3} & \xrightarrow{d_4^{1,3}} & E_4^{5,0} & \xrightarrow{d_4^{5,0}} & E_4^{9,-3} & = & 0 \\
 & & & & \| & & & & \\
0 & = & E_5^{0,4} & \xrightarrow{d_5^{0,4}} & E_5^{5,0} & \xrightarrow{d_5^{5,0}} & E_5^{10,-4} & = & 0 \\
 & & & & \| & & & & \\
 & & & & E_6^{5,0} & = & E_\infty^{5,0} & &
\end{array}
$$

Portanto, $H^5(SU(3)) = \mathbb{Z}$.

• Calculemos $H^6(SU(3))$.

Consideremos uma filtração de $H^6(SU(3))$ dada por

$$H^6(SU(3)) = L^{0,6} \supset L^{1,5} \supset L^{2,4} \supset L^{3,3} \supset L^{4,2} \supset L^{5,1} \supset L^{6,0} \supset 0$$

Podemos verificar facilmente que

$$E_\infty^{6,0} = E_\infty^{5,1} = E_\infty^{4,2} = E_\infty^{3,3} = E_\infty^{2,4} = E_\infty^{1,5} = E_\infty^{0,6} = 0 \Longrightarrow L^{6,0} = L^{5,1} = L^{4,2} = L^{3,3} =$$

$L^{2,4} = L^{1,5} = L^{0,6} = 0$.

Portanto, $H^6(SU(3)) = 0$.

• Calculemos $H^7(SU(3))$.

Consideremos uma filtração de $H^7(SU(3))$ dada por

$$H^7(SU(3)) = L^{0,7} \supset L^{1,6} \supset L^{2,5} \supset L^{3,4} \supset L^{4,3} \supset L^{5,2} \supset L^{6,1} \supset L^{7,0} \supset 0$$

Podemos verificar facilmente que $E_\infty^{7,0} = E_\infty^{6,1} = E_\infty^{5,2} = E_\infty^{4,3} = E_\infty^{3,4} = E_\infty^{2,5} = E_\infty^{1,6} = E_\infty^{0,7} = 0 \Longrightarrow L^{7,0} = L^{6,1} = L^{5,2} = L^{4,3} = L^{3,4} = L^{2,5} = L^{1,6} = L^{0,7} = 0$.

Portanto, $H^7(SU(3)) = 0$.

• Calculemos $H^8(SU(3))$.

Consideremos uma filtração de $H^8(SU(3))$ dada por

$$H^8(SU(3)) = L^{0,8} \supset L^{1,7} \supset L^{2,6} \supset L^{3,5} \supset L^{4,4} \supset L^{5,3} \supset L^{6,2} \supset L^{7,1} \supset L^{8,0} \supset 0$$

Assim temos

$$E_\infty^{8,0} = E_\infty^{7,1} = E_\infty^{6,2} = 0 \Longrightarrow L^{8,0} = L^{7,1} = L^{6,2} = 0$$

$$E_\infty^{5,3} = H(H(H...H(E_2^{5,3}))) = L^{5,3}$$

$$E_\infty^{4,4} = E_\infty^{3,5} = E_\infty^{2,6} = E_\infty^{1,7} = E_\infty^{0,8} = 0 \Longrightarrow L^{5,3} = L^{4,4} = L^{3,5} = L^{2,6} = L^{1,7} = L^{0,8}$$

Logo, $H^8(SU(3)) = E_\infty^{5,3}$.

Observemos a seguinte seqüência

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \mathbb{Z} & & & & \\
 & & & & \| & & & & \\
0 & = & E_2^{3,4} & \xrightarrow{d_2^{3,4}} & E_2^{5,3} & \xrightarrow{d_2^{5,3}} & E_2^{7,2} & = & 0 \\
 & & & & \| & & & & \\
0 & = & E_3^{2,5} & \xrightarrow{d_3^{2,5}} & E_3^{5,3} & \xrightarrow{d_3^{5,3}} & E_3^{8,1} & = & 0 \\
 & & & & \| & & & & \\
0 & = & E_4^{1,6} & \xrightarrow{d_4^{1,6}} & E_4^{5,3} & \xrightarrow{d_4^{5,3}} & E_4^{9,0} & = & 0 \\
 & & & & \| & & & & \\
0 & = & E_5^{0,7} & \xrightarrow{d_5^{0,7}} & E_5^{5,3} & \xrightarrow{d_5^{5,3}} & E_5^{10,-1} & = & 0 \\
 & & & & \| & & & & \\
 & & & & E_6^{5,3} & = & E_\infty^{5,3} & &
\end{array}$$

Portanto,$H^8(SU(3)) = \mathbb{Z}$.

• Calculemos $H^n(SU(3))$ para $n \geq 9$.

Consideremos uma filtração de $H^n(SU(3))$ dada por

$$H^n(SU(3)) = L^{0,n} \supset L^{1,n-1} \supset L^{2,n-2} \supset L^{3,n-3} \supset L^{4,n-4} \supset L^{5,n-5} \supset L^{6,n-6} \supset ... \supset L^{n-1,1} \supset L^{n,0} \supset 0$$

Assim, para $n \geq 9$, temos

$$E_\infty^{n,0} = 0 \Rightarrow L^{n,0} = 0$$

$$E_\infty^{n-1,1} = 0 \Rightarrow L^{n-1,1} = L^{n,0}$$

$$\vdots$$

$$E_\infty^{6,n-6} = 0 \Rightarrow L^{6,n-6} = L^{7,n-7}$$

$$E_\infty^{5,n-5} = 0, \quad \text{pois} \quad n-5 \geq 4 \Rightarrow L^{5,n-5} = L^{6,n-6}$$

$$E_\infty^{4,n-4} = E_\infty^{3,n-3} = E_\infty^{2,n-2} = E_\infty^{1,n-1} = 0 \Rightarrow L^{5,n-5} = L^{4,n-4} = L^{3,n-3} = L^{2,n-2} = L^{1,n-1}$$

$$E_\infty^{0,n} = 0, \quad \text{pois} \quad n \geq 9 \Rightarrow L^{0,n} = L^{1,n-1}$$

Portanto, $H^n(SU(3)) = 0$ para qualquer $n \geq 9$.

Assim, os grupos de cohomologia de $SU(3)$ com coeficientes em $\mathbb{Z}$ são dados por

$$H^*(SU(3)) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & * = 0,\ 3,\ 5,\ 8; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

5.3.2 Cálculo dos grupos de cohomologia de $SU(4)$ com coeficientes em $\mathbb{Z}$.

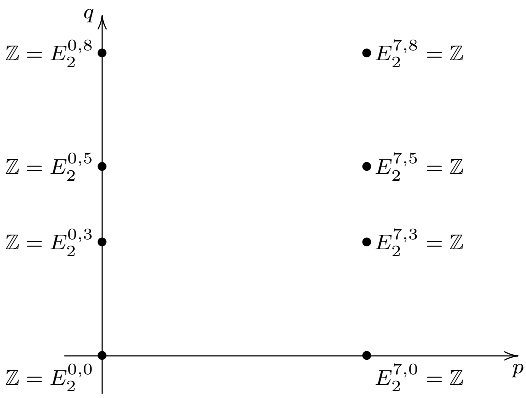
Consideremos a fibração

$$\begin{array}{ccc} SU(3) & \hookrightarrow & SU(4) \\ & & \downarrow \\ & & S^7 \end{array}$$

Pelo Teorema de Serre temos que

$$E_2^{p,q} = H^p(S^7) \otimes H^q(SU(3)) \Rightarrow H^*(SU(4))$$

Assim, $E_2^{p,q} \neq 0$ apenas nas posições p, q com $p \in \{0, 7\}$ e $q \in \{0, 3, 5, 8\}$.



Analogamente aos cálculos dos grupos de cohomologia anteriores é fácil verificar que

$$H^*(SU(4)) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & * = 0,\ 3,\ 5,\ 7,\ 8,\ 10,\ 12,\ 15; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

5.3.3 Cálculo dos grupos de cohomologia de $SU(5)$ com coeficientes em $\mathbb{Z}$.

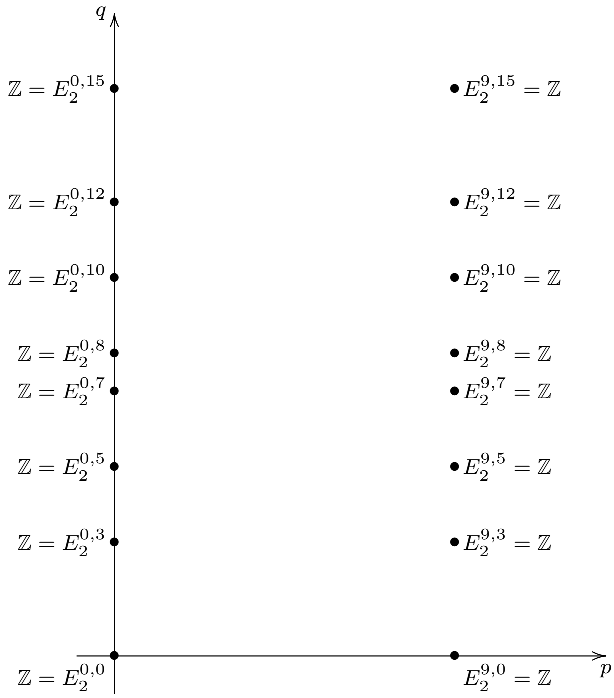
Consideremos a fibração

$$\begin{array}{ccc} SU(4) & \hookrightarrow & SU(5) \\ & & \downarrow \\ & & S^9 \end{array}$$

Pelo Teorema de Serre temos que

$$E_2^{p,q} = H^p(S^9) \otimes H^q(SU(4)) \Rightarrow H^*(SU(5))$$

Assim, $E_2^{p,q} \neq 0$ apenas nas posições p, q com $p \in \{0, 9\}$ e $q \in \{0, 3, 5, 7, 8, 10, 12, 15\}$.



Analogamente aos cálculos dos grupos de cohomologia anteriores é fácil verificar que $H^*(SU(5)) = \mathbb{Z}$ para $* = 0, 3, 5, 7, 10, 14, 17, 19, 21, 24$ e $H^*(SU(5)) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ para $* = 12$. Calcularemos os grupos de cohomologia nos níveis $* = 8, 9, 15, 16$, já que nos outros casos temos $H^*(SU(5)) = 0$.

• Calculemos $H^8(SU(5))$.

Consideremos uma filtração de $H^8(SU(5))$ dada por

$$H^8(SU(5)) = L^{0,8} \supset L^{1,7} \supset L^{2,6} \supset L^{3,5} \supset L^{4,4} \supset L^{5,3} \supset L^{6,2} \supset L^{7,1} \supset L^{8,0} \supset 0$$

Podemos verificar facilmente que

$E_\infty^{8,0} = E_\infty^{7,1} = E_\infty^{6,2} = E_\infty^{5,3} = E_\infty^{4,4} = E_\infty^{3,5} = E_\infty^{2,6} = E_\infty^{1,7} = 0 \Longrightarrow L^{8,0} = L^{7,1} = L^{6,2} = L^{5,3} = L^{4,4} = L^{3,5} = L^{2,6} = L^{1,7} = 0$

$$E_\infty^{0,8} = H(H(H...H(E_2^{0,8}))) = L^{0,8}$$

Logo, $H^8(SU(5)) = E_\infty^{0,8}$.

Observemos as seguintes seqüências

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & \mathbb{Z} & & & & \\ & & & & \| & & & & \\ 0 & = & E_2^{7,1} & \xrightarrow{d_2^{7,1}} & E_2^{9,0} & \xrightarrow{d_2^{9,0}} & E_2^{11,-1} & = & 0 \\ & & & & \| & & & & \\ 0 & = & E_3^{6,2} & \xrightarrow{d_3^{6,2}} & E_3^{9,0} & \xrightarrow{d_3^{9,0}} & E_3^{12,-2} & = & 0 \\ & & & & \| & & & & \\ & & & & \vdots & & & & \\ & & & & \| & & & & \\ 0 & = & E_8^{1,7} & \xrightarrow{d_8^{1,7}} & E_8^{9,0} & \xrightarrow{d_8^{9,0}} & E_8^{17,-7} & = & 0 \\ & & & & \| & & & & \\ & & & & E_9^{9,0} & & & & \end{array}$$

e

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & \mathbb{Z} & & & & \\ & & & & \| & & & & \\ 0 & = & E_2^{-2,9} & \xrightarrow{d_2^{-2,9}} & E_2^{0,8} & \xrightarrow{d_2^{0,8}} & E_2^{2,7} & = & 0 \\ & & & & \| & & & & \\ 0 & = & E_3^{-3,10} & \xrightarrow{d_3^{-3,10}} & E_3^{0,8} & \xrightarrow{d_3^{0,8}} & E_3^{3,6} & = & 0 \\ & & & & \| & & & & \\ & & & & \vdots & & & & \\ & & & & \| & & & & \\ 0 & = & E_8^{-8,15} & \xrightarrow{d_8^{-8,15}} & E_8^{0,8} & \xrightarrow{d_8^{0,8}} & E_8^{8,1} & = & 0 \\ & & & & \| & & & & \\ 0 & = & E_9^{-9,16} & \xrightarrow{d_9^{-9,16}} & E_9^{0,8} & \xrightarrow{d_9^{0,8}} & E_9^{9,0} & & \end{array}$$

Temos que $E_\infty^{0,8} = E_{10}^{0,8} = H(E_9^{0,8}) = Ker\ d_9^{0,8}$.

Agora, se $E_2^{0,3} = \mathbb{Z}(x_3)$ e $E_2^{0,5} = \mathbb{Z}(x_5)$ então $E_2^{0,8} = \mathbb{Z}(x_3 \smile x_5)$.

Logo, como $d_9^{0,8}$ é uma derivação então pela Proposição 4.0.2 temos

$$d_9^{0,8}(x_3 \smile x_5) = d_9^{0,3}(x_3) \smile x_5 + (-1)^3 x_3 \smile d_9^{0,5}(x_5) = 0$$

pois $d_9^{0,3} : E_9^{0,3} = E_2^{0,3} \to E_9^{9,-5} = 0$ e $d_9^{0,5} : E_9^{0,5} = E_2^{0,5} \to E_9^{9,-3} = 0$. Assim, $Ker\ d_9^{0,8} = \mathbb{Z}$

Portanto, $H^8(SU(5)) = \mathbb{Z}$.

• Calculemos $H^9(SU(5))$.

Consideremos uma filtração de $H^9(SU(5))$ dada por

$$H^9(SU(5)) = L^{0,9} \supset L^{1,8} \supset L^{2,7} \supset L^{3,6} \supset L^{4,5} \supset L^{5,4} \supset L^{6,3} \supset L^{7,2} \supset L^{8,1} \supset L^{9,0} \supset 0$$

Podemos verificar facilmente que

$$E_\infty^{9,0} = H(H(H...H(E_2^{9,0}))) = L^{9,0}$$

$E_\infty^{8,1} = E_\infty^{7,2} = E_\infty^{6,3} = E_\infty^{5,4} = E_\infty^{4,5} = E_\infty^{3,6} = E_\infty^{2,7} = E_\infty^{1,8} = E_\infty^{0,9} = 0 \Longrightarrow L^{9,0} = L^{8,1} = L^{7,2} = L^{6,3} = L^{5,4} = L^{4,5} = L^{3,6} = L^{2,7} = L^{1,8} = L^{0,9}$

Logo, $H^9(SU(5)) = E_\infty^{9,0}$.

Observemos a seguinte seqüência

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & \mathbb{Z} & & & \\
 & & & \| & & & \\
0 & = & E_2^{7,1} & \xrightarrow{d_2^{7,1}} & E_2^{9,0} & \xrightarrow{d_2^{9,0}} & E_2^{11,-1} = 0 \\
 & & & & \| & & \\
0 & = & E_3^{6,2} & \xrightarrow{d_3^{6,2}} & E_3^{9,0} & \xrightarrow{d_3^{9,0}} & E_3^{12,-2} = 0 \\
 & & & & \| & & \\
 & & & & \vdots & & \\
 & & & & \| & & \\
\mathbb{Z} & = & E_9^{0,8} & \xrightarrow{d_9^{0,8}=0} & E_9^{9,0} & \xrightarrow{d_9^{9,0}} & E_9^{18,-8} = 0 \\
 & & & & \| & & \\
 & & & & E_{10}^{9,0} & = & E_\infty^{9,0}
\end{array}$$

Portanto, $H^9(SU(5)) = \mathbb{Z}$.

Analogamente teremos $H^{15}(SU(5)) = H^{16}(SU(5)) = \mathbb{Z}$, pois, como $d_9^{0,15}$ é uma derivação pela Proposição 4.0.2 temos

$$d_9^{0,15}((x_3 \smile x_5) \smile x_7) = \underbrace{d_9^{0,8}(x_3 \smile x_5)}_{0} \smile x_7 + (-1)^8 (x_3 \smile x_5) \smile d_9^{0,7}(x_7) = 0$$

pois $d_9^{0,7} : E_9^{0,7} = E_2^{0,7} \to E_9^{9,-1} = 0$ onde x_7 é o gerador de $H^7(SU(5)) = \mathbb{Z}$ e, portanto, $Ker\ d_9^{0,15} = \mathbb{Z}$.

Assim, os grupos de cohomologia de $SU(5)$ com coeficientes em $\mathbb{Z}$ são dados por

$$H^*(SU(5)) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & * = 0,3,5,7,8,9,10,14,15,16,17,19,21,24; \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & * = 12 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

5.3.4 O anel de cohomologia de $SU(n)$ com coeficientes em $\mathbb{Z}$ como uma álgebra exterior.

Consideremos a fibração

$$\begin{array}{ccc} SU(n-1) & \hookrightarrow & SU(n) \\ & & \downarrow \\ & & S^{2n-1} \end{array}$$

Pelo Teorema de Serre temos que

$$E_2^{p,q} = H^p(S^{2n-1}) \otimes H^q(SU(n-1)) \Rightarrow H^*(SU(n))$$

Para $n \geq 2$, calcularemos por indução finita sobre n, o anel de cohomologia de $SU(n)$ com coeficientes em $\mathbb{Z}$.

• Para $n = 2$ temos

$$H^*(SU(2)) = H^*(S^3) = \Lambda(x_3)$$

onde x_3 é o gerador de $H^3(SU(2))$.

• Suponhamos, por hipótese de indução, que $H^*(SU(n-1)) = \Lambda(x_3, x_5, ..., x_{2n-3})$ onde x_i é o gerador de $H^i(SU(n-1))$ para $i = 3, 5, ..., 2n-3$.

Assim,

$$E_2^{*,*} = H^*(S^{2n-1}) \otimes H^*(SU(n-1)) = \Lambda(x_{2n-1}) \otimes \Lambda(x_3, x_5, ..., x_{2n-3}).$$

Portanto, $H^*(SU(n)) = \Lambda(x_3, x_5, ..., x_{2n-3}, x_{2n-1})$ onde x_i é o gerador de $H^i(SU(n))$ para $i = 3, 5, ..., 2n-3, 2n-1$.

5.4 Cálculo dos grupos de cohomologia de $U(n)$ com coeficientes em $\mathbb{Z}$.

Desde que $U(1) \approx S^1$ então

• $H^*(U(1)) = H^*(S^1) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & * = 0,\ 1; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$

5.4.1 Cálculo dos grupos de cohomologia de $U(2)$ com coeficientes em $\mathbb{Z}$.

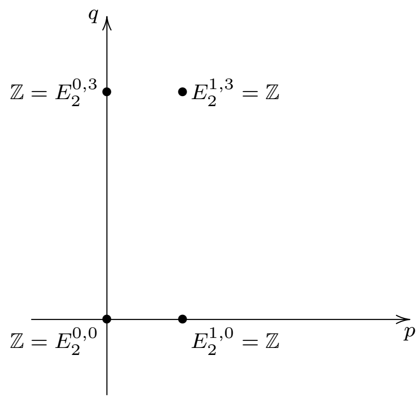
Consideremos a fibração

$$\begin{array}{ccc} SU(2) & \hookrightarrow & U(2) \\ & & \downarrow \\ & & S^1 \end{array}$$

Pelo teorema de Serre temos que

$$E_2^{p,q} = H^p(S^1) \otimes H^q(SU(2)) \Rightarrow H^*(U(2))$$

Assim, $E_2^{p,q} \neq 0$ apenas nas posições p, q com $p \in \{0, 1\}$ e $q \in \{0, 3\}$.



• Calculemos $H^0(U(2))$.

Consideremos uma filtração de $H^0(U(2))$ dada por

$$H^0(U(2)) = L^{0,0} \supset 0$$

Temos que $E_\infty^{0,0} = L^{0,0} = H^0(U(2))$.

Observemos a seguinte seqüência

$$0 = E_2^{-2,1} \xrightarrow{d_2^{-2,1}} E_2^{0,0} \xrightarrow{d_2^{0,0}} E_2^{2,-1} = 0$$

Como $2 > \max\{0, 1 = 0 + 1\}$ temos que $E_\infty^{0,0} = E_2^{0,0} = H^0(S^1) \otimes H^0(SU(2)) = \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$.

Portanto, $H^0(U(2)) = \mathbb{Z}$.

• Calculemos $H^1(U(2))$.

Consideremos uma filtração de $H^1(U(2))$ dada por

$$H^1(U(2)) = L^{0,1} \supset L^{1,0} \supset 0$$

Assim, temos

$$E_\infty^{1,0} = H(H(H...H(E_2^{1,0}))) = L^{1,0}$$

$$E_\infty^{0,1} = 0 \Rightarrow L^{0,1} = L^{1,0}$$

Logo, $H^1(U(2)) = E_\infty^{1,0}$.

Observemos a seguinte seqüência

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & \mathbb{Z} & & & & \\ & & & & \| & & & & \\ 0 & = & E_2^{-1,1} & \xrightarrow{d_2^{-1,1}} & E_2^{1,0} & \xrightarrow{d_2^{1,0}} & E_2^{3,-1} & = & 0 \\ & & & & \| & & & & \\ & & & & E_3^{1,0} & = & E_\infty^{1,0} & & \end{array}$$

Portanto, $H^1(U(2)) = \mathbb{Z}$.

• Calculemos $H^2(U(2))$.

Consideremos uma filtração de $H^2(U(2))$ dada por

$$H^2(U(2)) = L^{0,2} \supset L^{1,1} \supset L^{2,0} \supset 0$$

Assim, temos

$$E_\infty^{2,0} = 0 \Rightarrow L^{2,0} = 0$$

$$E_\infty^{1,1} = 0 \Rightarrow L^{1,1} = L^{2,0}$$

$$E_\infty^{0,2} = 0 \Rightarrow L^{0,2} = L^{1,1}$$

Portanto, $H^2(U(2)) = 0$.

• Calculemos $H^3(U(2))$.

Consideremos uma filtração de $H^3(U(2))$ dada por

$$H^3(U(2)) = L^{0,3} \supset L^{1,2} \supset L^{2,1} \supset L^{3,0} \supset 0$$

Assim, temos

$$E_\infty^{3,0} = 0 \Rightarrow L^{3,0} = 0$$

$$E_\infty^{2,1} = 0 \Rightarrow L^{2,1} = L^{3,0}$$

$$E_\infty^{1,2} = 0 \Rightarrow L^{1,2} = L^{2,1}$$

$$E_\infty^{0,3} = H(H(H...H(E_2^{0,3}))) = L^{0,3}$$

Logo, $H^3(U(2)) = E_\infty^{0,3}$.

Observemos a seguinte seqüência

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \mathbb{Z} & & & & \\
 & & & & \| & & & & \\
0 & = & E_2^{-2,4} & \xrightarrow{d_2^{-2,4}} & E_2^{0,3} & \xrightarrow{d_2^{0,3}} & E_2^{2,2} & = & 0 \\
 & & & & \| & & & & \\
0 & = & E_3^{-3,5} & \xrightarrow{d_3^{-3,5}} & E_3^{0,3} & \xrightarrow{d_3^{0,3}} & E_3^{3,1} & = & 0 \\
 & & & & \| & & & & \\
0 & = & E_3^{-4,6} & \xrightarrow{d_3^{-4,6}} & E_4^{0,3} & \xrightarrow{d_4^{0,3}} & E_3^{4,0} & = & 0 \\
 & & & & \| & & & & \\
 & & & & E_5^{0,3} & = & E_\infty^{0,3} & &
\end{array}$$

Portanto, $H^3(U(2)) = \mathbb{Z}$.

• Calculemos $H^4(U(2))$.

Consideremos uma filtração de $H^4(U(2))$ dada por

$$H^4(U(2)) = L^{0,4} \supset L^{1,3} \supset L^{2,2} \supset L^{3,1} \supset L^{4,0} \supset 0$$

Assim, temos

$$E_\infty^{4,0} = 0 \Rightarrow L^{4,0} = 0$$

$$E_\infty^{3,1} = 0 \Rightarrow L^{3,1} = L^{4,0}$$

$$E_\infty^{2,2} = 0 \Rightarrow L^{2,2} = L^{3,1}$$

$$E_\infty^{1,3} = H(H(H...H(E_2^{1,3}))) = L^{1,3}$$

$$E_\infty^{0,4} = 0 \Rightarrow L^{0,4} = L^{1,3}$$

Logo, $H^4(U(2)) = E_\infty^{1,3}$.

Observemos a seguinte seqüência

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \mathbb{Z} & & & & \\
 & & & & \| & & & & \\
0 & = & E_2^{-1,4} & \xrightarrow{d_2^{-1,4}} & E_2^{1,3} & \xrightarrow{d_2^{1,3}} & E_2^{3,2} & = & 0 \\
 & & & & \| & & & & \\
0 & = & E_3^{-2,5} & \xrightarrow{d_3^{-2,5}} & E_3^{1,3} & \xrightarrow{d_3^{1,3}} & E_3^{4,1} & = & 0 \\
 & & & & \| & & & & \\
0 & = & E_3^{-3,6} & \xrightarrow{d_4^{-3,6}} & E_4^{1,3} & \xrightarrow{d_4^{1,3}} & E_3^{5,0} & = & 0 \\
 & & & & \| & & & & \\
 & & & & E_5^{1,3} & = & E_\infty^{1,3} & &
\end{array}$$

Portanto, $H^4(U(2)) = \mathbb{Z}$.

• Calculemos $H^n(U(2))$, para $n \geq 5$.

Consideremos uma filtração de $H^n(U(2))$ dada por

$$H^n(U(2)) = L^{0,n} \supset L^{1,n-1} \supset L^{2,n-2} \supset L^{3,n-3} \supset L^{4,n-4} \supset L^{5,n-5} \supset ... \supset L^{n-1,1} \supset L^{n,0} \supset 0$$

Assim, para $n \geq 5$, temos

$$E_\infty^{n,0} = 0 \Rightarrow L^{n,0} = 0$$

$$E_\infty^{n-1,1} = 0 \Rightarrow L^{n-1,1} = L^{n,0}$$

$$\vdots$$

$$E_\infty^{2,n-2} = 0 \Rightarrow L^{2,n-2} = L^{3,n-3}$$

$$E_\infty^{1,n-1} = 0 \ \text{ pois } \ n-1 \geq 4 \Rightarrow L^{1,n-1} = L^{2,n-2}$$

$$E_\infty^{0,n} = 0 \ \text{ pois } \ n \geq 5 \Rightarrow L^{0,n} = L^{1,n-1}$$

Portanto, $H^n(U(2)) = 0$ para todo $n \geq 5$.

Logo, os grupos de cohomologia de $U(2)$ com coeficientes em $\mathbb{Z}$ são dados por

$$H^*(U(2)) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & * = 0,\ 1,\ 3,\ 4; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

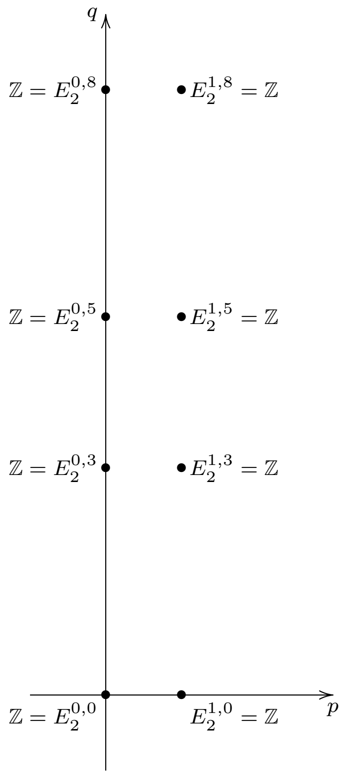
5.4.2 Cálculo dos grupos de cohomologia de $U(3)$ com coeficientes em $\mathbb{Z}$.

Consideremos a fibração

$$\begin{array}{ccc} SU(3) & \hookrightarrow & U(3) \\ & & \downarrow \\ & & S^1 \end{array}$$

Pelo teorema de Serre temos $E_2^{p,q} = H^p(S^1) \otimes H^q(SU(3)) \Rightarrow H^*(U(3))$

Assim, $E_2^{p,q} \neq 0$ apenas nas posições p, q com $p \in \{0, 1\}$ e $q \in \{0, 3, 5, 8\}$.



• Calculemos $H^0(U(3))$.

Consideremos uma filtração de $H^0(U(3))$ dada por

$$H^0(U(3)) = L^{0,0} \supset 0$$

Temos que $E_\infty^{0,0} = L^{0,0} = H^0(U(3))$.

Observemos a seguinte seqüência

$$0 = E_2^{-2,1} \xrightarrow{d_2^{-2,1}} E_2^{0,0} \xrightarrow{d_2^{0,0}} E_2^{2,-1} = 0$$

Como $2 > \max\{0, 1 = 0+1\}$ temos que $E_\infty^{0,0} = E_2^{0,0} = H^0(S^1) \otimes H^0(SU(3)) = \mathbb{Z} \otimes \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$.

Portanto, $H^0(U(3)) = \mathbb{Z}$.

• Calculemos $H^1(U(3))$.

Consideremos uma filtração de $H^1(U(3))$ dada por

$$H^1(U(3)) = L^{0,1} \supset L^{1,0} \supset 0$$

Assim, temos

$$E_\infty^{1,0} = H(H(H...H(E_2^{1,0}))) = L^{1,0}$$

$$E_\infty^{0,1} = 0 \Rightarrow L^{0,1} = L^{1,0}$$

Logo, $H^1(U(3)) = E_\infty^{1,0}$.

Observemos a seguinte seqüência

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & \mathbb{Z} & & & & \\ & & & & \| & & & & \\ 0 & = & E_2^{-1,1} & \xrightarrow{d_2^{-1,1}} & E_2^{1,0} & \xrightarrow{d_2^{1,0}} & E_2^{3,-1} & = & 0 \\ & & & & \| & & & & \\ & & & & E_\infty^{1,0} & & & & \end{array}$$

Portanto, $H^1(U(3)) = \mathbb{Z}$.

• Calculemos $H^2(U(3))$.

Consideremos uma filtração de $H^2(U(3))$ dada por

$$H^2(U(3)) = L^{0,2} \supset L^{1,1} \supset L^{2,0} \supset 0$$

Assim, temos

$$E_\infty^{2,0} = 0 \Rightarrow L^{2,0} = 0$$

$$E_\infty^{1,1} = 0 \Rightarrow L^{1,1} = L^{2,0}$$

$$E_\infty^{0,2} = 0 \Rightarrow L^{0,2} = L^{1,1}$$

Portanto, $H^2(U(3)) = 0$.

• Calculemos $H^3(U(3))$.

Consideremos uma filtração de $H^3(U(3))$ dada por

$$H^3(U(3)) = L^{0,3} \supset L^{1,2} \supset L^{2,1} \supset L^{3,0} \supset 0$$

Assim, temos

$$E_\infty^{3,0} = 0 \Rightarrow L^{3,0} = 0$$

$$E_\infty^{2,1} = 0 \Rightarrow L^{2,1} = L^{3,0}$$

$$E_\infty^{1,2} = 0 \Rightarrow L^{1,2} = L^{2,1}$$

$$E_\infty^{0,3} = H(H(H...H(E_2^{0,3}))) = L^{0,3}$$

Logo, $H^3(U(3)) = E_\infty^{0,3}$.

Observemos a seguinte seqüência

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \mathbb{Z} & & & & \\
 & & & & \| & & & & \\
0 & = & E_2^{-2,4} & \xrightarrow{d_2^{-2,4}} & E_2^{0,3} & \xrightarrow{d_2^{0,3}} & E_2^{2,2} & = & 0 \\
 & & & & \| & & & & \\
0 & = & E_3^{-3,5} & \xrightarrow{d_3^{-3,5}} & E_3^{0,3} & \xrightarrow{d_3^{0,3}} & E_3^{3,1} & = & 0 \\
 & & & & \| & & & & \\
0 & = & E_4^{-4,6} & \xrightarrow{d_4^{-4,6}} & E_4^{0,3} & \xrightarrow{d_4^{0,3}} & E_4^{4,0} & = & 0 \\
 & & & & \| & & & & \\
 & & & & E_5^{0,3} & = & E_\infty^{0,3} & &
\end{array}$$

Portanto, $H^3(U(3)) = \mathbb{Z}$.

• Calculemos $H^4(U(3))$.

Consideremos uma filtração de $H^4(U(3))$ dada por

$$H^4(U(3)) = L^{0,4} \supset L^{1,3} \supset L^{2,2} \supset L^{3,1} \supset L^{4,0} \supset 0$$

Assim, temos

$$E_\infty^{4,0} = 0 \Rightarrow L^{4,0} = 0$$

$$E_\infty^{3,1} = 0 \Rightarrow L^{3,1} = L^{4,0}$$

$$E_\infty^{2,2} = 0 \Rightarrow L^{2,2} = L^{3,1}$$

$$E_\infty^{1,3} = H(H(H...H(E_2^{1,3}))) = L^{1,3}$$

$$E_\infty^{0,4} = 0 \Rightarrow L^{0,4} = L^{1,3}$$

Logo, $H^4(U(3)) = E_\infty^{1,3}$.

Observemos a seguinte seqüência

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \mathbb{Z} & & & & \\
 & & & & \| & & & & \\
0 & = & E_2^{-1,4} & \xrightarrow{d_2^{-1,4}} & E_2^{1,3} & \xrightarrow{d_2^{1,3}} & E_2^{3,2} & = & 0 \\
 & & & & \| & & & & \\
0 & = & E_3^{-2,5} & \xrightarrow{d_3^{-2,5}} & E_3^{1,3} & \xrightarrow{d_3^{1,3}} & E_3^{4,1} & = & 0 \\
 & & & & \| & & & & \\
0 & = & E_4^{-3,6} & \xrightarrow{d_4^{-3,6}} & E_4^{1,3} & \xrightarrow{d_4^{1,3}} & E_3^{5,0} & = & 0 \\
 & & & & \| & & & & \\
 & & & & E_5^{1,3} & = & E_\infty^{1,3} & &
\end{array}$$

Portanto, $H^4(U(3)) = \mathbb{Z}$.

• Calculemos $H^5(U(3))$.

Consideremos uma filtração de $H^5(U(3))$ dada por

$$H^5(U(3)) = L^{0,5} \supset L^{1,4} \supset L^{2,3} \supset L^{3,2} \supset L^{4,1} \supset L^{5,0} \supset 0$$

Assim, temos

$$E_\infty^{5,0} = E_\infty^{4,1} = E_\infty^{3,2} = E_\infty^{2,3} = E_\infty^{1,4} = 0 \Rightarrow L^{1,4} = L^{2,3} = L^{3,2} = L^{4,1} = L^{5,0} = 0$$

$$E_\infty^{0,5} = H(H(H...H(E_2^{0,5}))) = L^{0,5}$$

Logo, $H^5(U(3)) = E_\infty^{0,5}$.

Observemos a seguinte seqüência

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & \mathbb{Z} & & & \\
 & & & \| & & & \\
0 & = & E_2^{-2,6} & \xrightarrow{d_2^{-2,6}} & E_2^{0,5} & \xrightarrow{d_2^{0,5}} & E_2^{2,4} & = & 0 \\
 & & & & \| & & \\
 & & & & \vdots & & \\
 & & & & \| & & \\
0 & = & E_6^{-6,10} & \xrightarrow{d_6^{-6,10}} & E_6^{0,5} & \xrightarrow{d_6^{0,5}} & E_3^{6,0} & = & 0 \\
 & & & & \| & & \\
 & & & & E_7^{0,5} & = & E_\infty^{0,5}
\end{array}$$

Portanto, $H^5(U(3)) = \mathbb{Z}$.

Usando o mesmo raciocínio é fácil verificar que

$$H^6(U(3)) = \mathbb{Z}$$

$$H^7(U(3)) = 0$$

$$H^8(U(3)) = \mathbb{Z}$$

$$H^9(U(3)) = \mathbb{Z}$$

• Calculemos $H^n(U(3))$ para $n \geq 10$.

Consideremos uma filtração de $H^n(U(3))$ dada por

$$H^n(U(3)) = L^{0,n} \supset L^{1,n-1} \supset L^{2,n-2} \supset L^{3,n-3} \supset ... \supset L^{n-1,1} \supset L^{n,0} \supset 0$$

Assim, para $n \geq 10$, temos

$$E_\infty^{n,0} = 0 \Rightarrow L^{n,0} = 0$$

$$E_\infty^{n-1,1} = 0 \Rightarrow L^{n-1,1} = L^{n,0}$$

$$\vdots$$

$$E_\infty^{2,n-2} = 0 \Rightarrow L^{2,n-2} = L^{3,n-3}$$

$$E_\infty^{1,n-1} = 0, \quad \text{pois} \quad n-1 \geq 9 \Rightarrow L^{1,n-1} = L^{2,n-2}$$

$$E_\infty^{0,n} = 0, \quad \text{pois} \quad n \geq 10 \Rightarrow L^{0,n} = L^{1,n-1}$$

Portanto, $H^n(U(3)) = 0$ para $n \geq 10$.

Logo, os grupos de cohomologia de $U(3)$ com coeficientes em $\mathbb{Z}$ são dados por

$$H^*(U(3)) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & * = 0,\ 1,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 8,\ 9; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

5.4.3 Cálculo dos grupos de cohomologia de U(4) com coeficientes em $\mathbb{Z}$.

Temos a fibração

$$\begin{array}{ccc} SU(4) & \hookrightarrow & U(4) \\ & & \downarrow \\ & & S^1 \end{array}$$

Analogamente aos cálculos dos grupos de cohomologia anteriores é fácil verificar que

$$H^*(U(4)) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & * = 0,\ 1,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13,\ 15,\ 16; \\ \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}, & * = 8; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

5.4.4 Cálculo dos grupos de cohomologia de U(5) com coeficientes em $\mathbb{Z}$.

Temos a fibração

$$\begin{array}{ccc} SU(5) & \hookrightarrow & U(5) \\ & & \downarrow \\ & & S^1 \end{array}$$

Analogamente aos cálculos dos grupos de cohomologia anteriores é fácil verificar que

$$H^*(U(5)) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & * = 0,\ 1,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 11,\ 14,\ 18,\ 19,\ 20,\ 21,\ 22,\ 24,\ 25\ ; \\ \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}, & * = 8,\ 9,\ 10,\ 12,\ 13,\ 15,\ 16,\ 17; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

5.4.5 O anel de cohomologia de $U(n)$ com coeficientes em $\mathbb{Z}$ como uma álgebra exterior.

Temos que $U(n) \approx S^1 \times SU(n)$(vide Proposição 1.0.5($vii$)), para todo $n \geq 1$. Assim,

• Para $n = 1$ temos

$$H^*(U(1)) = H^*(S^1 \times SU(1)) = H^*(S^1) = \Lambda(x_1)$$

onde x_1 é o gerador de $H^1(U(1))$.

• Para $n \geq 2$ temos

$$H^*(U(n)) = H^*(S^1 \times SU(n)) = H^*(S^1) \otimes H^*(SU(n)) = \Lambda(x_1) \otimes \Lambda(x_3, x_5, ..., x_{2n-1})$$

onde x_1 é o gerador de $H^1(S^1)$ e x_i é o gerador de $H^i(SU(n))$ para $i = 3, 5, \cdots, 2n-1$.

Portanto, $H^*(U(n)) = \Lambda(x_1, x_3, x_5, ..., x_{2n-3}, x_{2n-1})$ onde x_i é o gerador de $H^i(U(n))$ para $i = 1, 3, 5, \cdots, 2n-1$.

5.5 Cálculo dos grupos de cohomologia de $Sp(n)$ com coeficientes em $\mathbb{Z}$.

Desde que $Sp(1) \approx S^3$(vide proposição 1.0.5(vi)) então

$$H^*(Sp(1)) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & * = 0,\ 3; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

5.5.1 Cálculo dos grupos de cohomologia de $Sp(2)$ com coeficientes em $\mathbb{Z}$.

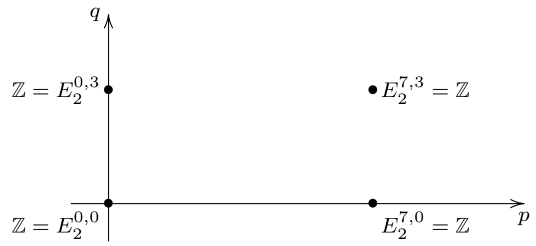
Temos a fibração

$$\begin{array}{ccc} Sp(1) & \hookrightarrow & Sp(2) \\ & & \downarrow \\ & & S^7 \end{array}$$

Pelo teorema de Serre temos que

$$E_2^{p,q} = H^p(S^7) \otimes H^q(Sp(1)) \Rightarrow H^*(Sp(2))$$

Assim, $E_2^{p,q} \neq 0$ apenas nas posições p, q com $p \in \{0, 7\}$ e $q \in \{0, 3\}$.



• Cálculo de $H^0(Sp(2))$.

Consideremos uma filtração de $H^0(Sp(2))$ dada por

$$H^0(Sp(2)) = L^{0,0} \supset 0$$

Assim, $E_\infty^{0,0} = L^{0,0} = H^0(Sp(2))$.

Como $2 > \max\{0, 1 = 0 + 1\}$ temos que $E_\infty^{0,0} = E_2^{0,0} = \mathbb{Z}$.

Portanto, $H^0(Sp(2)) = \mathbb{Z}$.

• Cálculo de $H^1(Sp(2))$.

Consideremos uma filtração de $H^1(Sp(2))$ dada por

$$H^1(Sp(2)) = L^{0,1} \supset L^{1,0} \supset 0$$

Assim temos

$$E_\infty^{1,0} = 0 \Rightarrow L^{1,0} = 0$$

$$E_\infty^{0,1} = 0 \Rightarrow L^{0,1} = L^{1,0}$$

Portanto, $H^1(Sp(2)) = 0$.

• Cálculo de $H^2(Sp(2))$.

Consideremos uma filtração de $H^2(Sp(2))$ dada por

$$H^2(Sp(2)) = L^{0,2} \supset L^{1,1} \supset L^{2,0} \supset 0$$

Assim temos

$$E_\infty^{2,0} = 0 \Rightarrow L^{2,0} = 0$$

$$E_\infty^{1,1} = 0 \Rightarrow L^{1,1} = L^{2,0}$$

$$E_\infty^{0,2} = 0 \Rightarrow L^{0,2} = L^{1,1}$$

Portanto, $H^2(Sp(2)) = 0$.

• Cálculo de $H^3(Sp(2))$.

Consideremos uma filtração de $H^3(Sp(2))$ dada por

$$H^3(Sp(2)) = L^{0,3} \supset L^{1,2} \supset L^{2,1} \supset L^{3,0} \supset 0$$

Assim temos

$$E_\infty^{3,0} = 0 \Rightarrow L^{3,0} = 0$$

$$E_\infty^{2,1} = 0 \Rightarrow L^{2,1} = L^{3,0}$$

$$E_\infty^{1,2} = 0 \Rightarrow L^{1,2} = L^{2,1}$$

$$E_\infty^{0,3} = H(H(H...H(E_2^{0,3}))) = L^{0,3}$$

Logo, $H^3(Sp(2)) = E_\infty^{0,3}$.

Observemos a seguinte seqüência

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \mathbb{Z} & & & & \\
 & & & & \| & & & & \\
0 & = & E_2^{-2,4} & \xrightarrow{d_2^{-2,4}} & E_2^{0,3} & \xrightarrow{d_2^{0,3}} & E_2^{2,2} & = & 0 \\
 & & & & \| & & & & \\
0 & = & E_3^{-3,5} & \xrightarrow{d_3^{-3,5}} & E_3^{0,3} & \xrightarrow{d_3^{0,3}} & E_3^{3,1} & = & 0 \\
 & & & & \| & & & & \\
0 & = & E_4^{-4,6} & \xrightarrow{d_4^{-4,6}} & E_4^{0,3} & \xrightarrow{d_4^{0,3}} & E_4^{4,0} & = & 0 \\
 & & & & \| & & & & \\
 & & & & E_5^{0,3} & = & E_\infty^{0,3} & &
\end{array}$$

Portanto, $H^3(Sp(2)) = \mathbb{Z}$.

• Cálculo de $H^4(Sp(2))$.

Consideremos uma filtração de $H^4(Sp(2))$ dada por

$$H^4(Sp(2)) = L^{0,4} \supset L^{1,3} \supset L^{2,2} \supset L^{3,1} \supset L^{4,0} \supset 0$$

Assim temos

$$E_\infty^{4,0} = 0 \Rightarrow L^{4,0} = 0$$

$$E_\infty^{3,1} = 0 \Rightarrow L^{3,1} = L^{4,0}$$

$$E_\infty^{2,2} = 0 \Rightarrow L^{2,2} = L^{3,1}$$

$$E_\infty^{1,3} = 0 \Rightarrow L^{1,3} = L^{2,2}$$

$$E_\infty^{0,4} = 0 \Rightarrow L^{0,4} = L^{1,3}$$

Portanto, $H^4(Sp(2)) = 0$.

• Cálculo de $H^5(Sp(2))$.

Consideremos uma filtração de $H^5(Sp(2))$ dada por

$$H^5(Sp(2)) = L^{0,5} \supset L^{1,4} \supset L^{2,3} \supset L^{3,2} \supset L^{4,1} \supset L^{5,0} \supset 0$$

Assim temos

$$E_\infty^{5,0} = 0 \Rightarrow L^{5,0} = 0$$

$$E_\infty^{4,1} = 0 \Rightarrow L^{4,1} = L^{5,0}$$

$$E_\infty^{3,2} = 0 \Rightarrow L^{3,2} = L^{4,1}$$

$$E_\infty^{2,3} = 0 \Rightarrow L^{2,3} = L^{3,2}$$

$$E_\infty^{1,4} = 0 \Rightarrow L^{1,4} = L^{2,3}$$

$$E_\infty^{0,5} = 0 \Rightarrow L^{0,5} = L^{1,4}$$

Portanto, $H^5(Sp(2)) = 0$.

• Cálculo de $H^6(Sp(2))$.

Consideremos uma filtração de $H^6(Sp(2))$ dada por

$$H^6(Sp(2)) = L^{0,6} \supset L^{1,5} \supset L^{2,4} \supset L^{3,3} \supset L^{4,2} \supset L^{5,1} \supset L^{6,0} \supset 0$$

Assim temos

$$E_\infty^{6,0} = 0 \Rightarrow L^{6,0} = 0$$

$$E_\infty^{5,1} = 0 \Rightarrow L^{5,1} = L^{6,0}$$

$$E_\infty^{4,2} = 0 \Rightarrow L^{4,2} = L^{5,1}$$

$$E_\infty^{3,3} = 0 \Rightarrow L^{3,3} = L^{4,2}$$

$$E_\infty^{2,4} = 0 \Rightarrow L^{2,4} = L^{3,3}$$

$$E_\infty^{1,5} = 0 \Rightarrow L^{1,5} = L^{2,4}$$

$$E_\infty^{0,6} = 0 \Rightarrow L^{0,6} = L^{1,5}$$

Portanto, $H^6(Sp(2)) = 0$.

• Cálculo de $H^7(Sp(2))$.

Consideremos uma filtração de $H^7(Sp(2))$ dada por

$$H^7(S_p(2)) = L^{0,7} \supset L^{1,6} \supset L^{2,5} \supset L^{3,4} \supset L^{4,3} \supset L^{5,2} \supset L^{6,1} \supset L^{7,0} \supset 0$$

Assim temos

$$E_\infty^{7,0} = H(H(H...H(E_2^{7,0}))) = L^{7,0}$$
$$E_\infty^{6,1} = 0 \Rightarrow L^{6,1} = L^{7,0}$$
$$E_\infty^{5,2} = 0 \Rightarrow L^{5,2} = L^{6,1}$$
$$E_\infty^{4,3} = 0 \Rightarrow L^{4,3} = L^{5,2}$$
$$E_\infty^{3,4} = 0 \Rightarrow L^{3,4} = L^{4,3}$$
$$E_\infty^{2,5} = 0 \Rightarrow L^{2,5} = L^{3,4}$$
$$E_\infty^{1,6} = 0 \Rightarrow L^{1,6} = L^{2,5}$$
$$E_\infty^{0,7} = 0 \Rightarrow L^{0,7} = L^{1,6}$$

Logo $H^7(Sp(2)) = E_\infty^{7,0}$.

Observemos a seguinte seqüência

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \mathbb{Z} & & & & \\
 & & & & \| & & & & \\
0 & = & E_2^{5,1} & \xrightarrow{d_2^{5,1}} & E_2^{7,0} & \xrightarrow{d_2^{7,0}} & E_2^{9,-1} & = & 0 \\
 & & & & \| & & & & \\
0 & = & E_3^{4,2} & \xrightarrow{d_3^{4,2}} & E_3^{7,0} & \xrightarrow{d_3^{7,0}} & E_3^{10,-2} & = & 0 \\
 & & & & \| & & & & \\
 & & & & \vdots & & & & \\
 & & & & \| & & & & \\
0 & = & E_7^{0,6} & \xrightarrow{d_7^{0,6}} & E_7^{7,0} & \xrightarrow{d_7^{7,0}} & E_7^{14,-6} & = & 0 \\
 & & & & \| & & & & \\
 & & & & E_8^{7,0} & = & E_\infty^{7,0} & &
\end{array}$$

Portanto, $H^7(Sp(2)) = \mathbb{Z}$.

- Cálculo de $H^8(Sp(2))$.

Consideremos uma filtração de $H^8(Sp(2))$ dada por

$$H^8(Sp(2)) = L^{0,8} \supset L^{1,7} \supset L^{2,6} \supset L^{3,5} \supset L^{4,4} \supset L^{5,3} \supset L^{6,2} \supset L^{7,1} \supset L^{8,0} \supset 0$$

Temos $E_\infty^{0,8} = E_\infty^{1,7} = E_\infty^{2,6} = E_\infty^{3,5} = E_\infty^{4,4} = E_\infty^{5,3} = E_\infty^{6,2} = E_\infty^{7,1} = E_\infty^{8,0} = 0$ e então $L^{0,8} = L^{1,7} = L^{2,6} = L^{3,5} = L^{4,4} = L^{5,3} = L^{6,2} = L^{7,1} = L^{8,0} = 0$.

Portanto, $H^8(Sp(2)) = 0$.

- Cálculo de $H^9(Sp(2))$.

Consideremos uma filtração de $H^9(Sp(2))$ dada por

$$H^9(Sp(2)) = L^{0,9} \supset L^{1,8} \supset L^{2,7} \supset L^{3,6} \supset L^{4,5} \supset L^{5,4} \supset L^{6,3} \supset L^{7,2} \supset L^{8,1} \supset L^{9,0} \supset 0$$

Temos $E_\infty^{0,9} = E_\infty^{1,8} = E_\infty^{2,7} = E_\infty^{3,6} = E_\infty^{4,5} = E_\infty^{5,4} = E_\infty^{6,3} = E_\infty^{7,2} = E_\infty^{8,1} = E_\infty^{9,0} = 0$ e então $L^{0,9} = L^{1,8} = L^{2,7} = L^{3,6} = L^{4,5} = L^{5,4} = L^{6,3} = L^{7,2} = L^{8,1} = L^{0,9} = 0$.

Portanto, $H^9(Sp(2)) = 0$.

• Cálculo de $H^{10}(Sp(2))$.

Consideremos uma filtração de $H^{10}(Sp(2))$ dada por

$$H^{10}(Sp(2)) = L^{0,10} \supset L^{1,9} \supset L^{2,8} \supset L^{3,7} \supset L^{4,6} \supset L^{5,5} \supset L^{6,4} \supset L^{7,3} \supset L^{8,2} \supset L^{9,1} \supset L^{10,0} \supset 0$$

Assim temos

$$E_\infty^{10,0} = E_\infty^{9,1} = E_\infty^{8,2} = 0 \Rightarrow L^{8,2} = L^{9,1} = L^{10,0} = 0$$

$$E_\infty^{7,3} = H(H(H...H(E_2^{7,3}))) = L^{7,3}$$

$E_\infty^{6,4} = E_\infty^{5,5} = E_\infty^{4,6} = E_\infty^{3,7} = E_\infty^{2,8} = E_\infty^{1,9} = E_\infty^{0,10} = 0 \Longrightarrow L^{0,10} = L^{1,9} = L^{2,8} = L^{3,7} = L^{4,6} = L^{5,5} = L^{6,4} = L^{7,3}$

Logo $H^{10}(Sp(2)) = E_\infty^{7,3}$.

Observemos a seguinte seqüência

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \mathbb{Z} & & & & \\
 & & & & \| & & & & \\
0 & = & E_2^{5,4} & \xrightarrow{d_2^{5,4}} & E_2^{7,3} & \xrightarrow{d_2^{7,3}} & E_2^{9,2} & = & 0 \\
 & & & & \| & & & & \\
0 & = & E_2^{4,5} & \xrightarrow{d_3^{4,5}} & E_3^{7,3} & \xrightarrow{d_3^{7,3}} & E_2^{10,1} & = & 0 \\
 & & & & \| & & & & \\
 & & & & \vdots & & & & \\
 & & & & \| & & & & \\
0 & = & E_7^{0,9} & \xrightarrow{d_7^{0,9}} & E_7^{7,3} & \xrightarrow{d_7^{7,3}} & E_7^{14,-3} & = & 0 \\
 & & & & \| & & & & \\
 & & & & E_8^{7,3} & = & E_\infty^{7,3} & &
\end{array}$$

Portanto, $H^{10}(Sp(2)) = \mathbb{Z}$.

• Cálculo de $H^n(Sp(2))$ para $n \geq 11$.

Consideremos uma filtração de $H^n(Sp(2))$ dada por

$$H^n(S_p(2)) = L^{0,n} \supset L^{1,n-1} \supset L^{2,n-2} \supset ... \supset L^{7,n-7} \supset L^{8,n-8} \supset ... \supset L^{n-1,1} \supset L^{n,0} \supset 0$$

Assim, para $n \geq 11$, temos

$$E_\infty^{n,0} = 0 \Rightarrow L^{n,0} = 0$$

$$E_\infty^{n-1,1} = 0 \Rightarrow L^{n-1,1} = L^{n,0}$$

$$\vdots$$

$$E_\infty^{7,n-7} = 0 \ \text{ pois } \ n-7 \geq 4 \Rightarrow L^{7,n-7} = L^{8,n-8}$$

$$\vdots$$

$$E_\infty^{1,n-1} = 0 \Rightarrow L^{1,n-1} = L^{2,n-2}$$

$$E_\infty^{0,n} = 0 \ \text{ pois } \ n \geq 11 \Rightarrow L^{0,n} = L^{1,n-1}$$

Portanto, $H^n(Sp(2)) = 0$ para todo $n \geq 11$.

Logo, os grupos de cohomologia de $Sp(2)$ com coeficientes em $\mathbb{Z}$ são dados por

$$H^*(Sp(2)) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & * = 0,\ 3,\ 7,\ 10; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

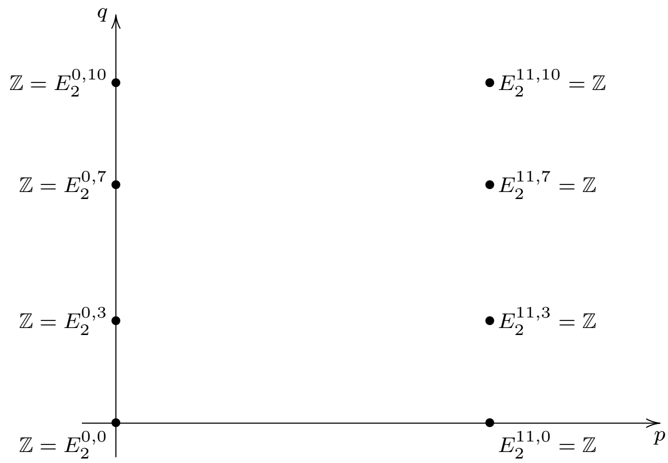
5.5.2 Cálculo dos grupos de cohomologia de $Sp(3)$ com coeficientes em $\mathbb{Z}$.

Temos a fibração

$$\begin{array}{ccc} Sp(2) & \hookrightarrow & Sp(3) \\ & & \downarrow \\ & & S^{11} \end{array}$$

Pelo teorema de Serre temos que $E_2^{p,q} = H^p(S^{11}) \otimes H^q(Sp(2)) \Rightarrow H^*(Sp(3))$

Assim, $E_2^{p,q} \neq 0$ apenas nas posições p, q com $p \in \{0, 11\}$ e $q \in \{0, 3, 7, 10\}$.



Usando a mesma técnica que foi utilizada para calcular $H^*(Sp(2))$, podemos calcular $H^*(Sp(3))$. Vejamos por exemplo alguns cálculos:

• Cálculo de $H^{10}(Sp(3))$.

Consideremos uma filtração de $H^{10}(Sp(3))$ dada por

$$H^{10}(Sp(3)) = L^{0,10} \supset L^{1,9} \supset L^{2,8} \supset L^{3,7} \supset L^{4,6} \supset L^{5,5} \supset L^{6,4} \supset L^{7,3} \supset L^{8,2} \supset L^{9,1} \supset L^{10,0} \supset 0$$

Assim temos

$E_\infty^{10,0} = E_\infty^{9,1} = E_\infty^{8,2} = E_\infty^{7,3} = E_\infty^{6,4} = E_\infty^{5,5} = E_\infty^{4,6} = E_\infty^{3,7} = E_\infty^{2,8} = E_\infty^{1,9} = 0 \Longrightarrow L^{1,9} = L^{2,8} = L^{3,7} = L^{4,6} = L^{5,5} = L^{6,4} = L^{7,3} = L^{8,2} = L^{9,1} = L^{10,0} = 0$

$$E_\infty^{0,10} = H(H(H...H(E_2^{0,10}))) = L^{0,10}$$

Logo $H^{10}(Sp(3)) = E_\infty^{0,10}$.

Observemos a seguinte seqüência

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \mathbb{Z} & & & & \\
 & & & & \| & & & & \\
0 & = & E_2^{-2,11} & \xrightarrow{d_2^{-2,11}} & E_2^{0,10} & \xrightarrow{d_2^{0,10}} & E_2^{2,9} & = & 0 \\
 & & & & \| & & & & \\
0 & = & E_3^{-3,12} & \xrightarrow{d_3^{-3,12}} & E_3^{0,10} & \xrightarrow{d_3^{0,10}} & E_3^{3,8} & = & 0 \\
 & & & & \| & & & & \\
 & & & & \vdots & & & & \\
 & & & & \| & & & & \\
0 & = & E_{10}^{-10,19} & \xrightarrow{d_{10}^{-10,19}} & E_{10}^{0,10} & \xrightarrow{d_{10}^{0,10}} & E_{10}^{10,1} & = & 0 \\
 & & & & \| & & & & \\
0 & = & E_{11}^{-11,20} & \xrightarrow{d_{11}^{-11,20}} & E_{11}^{0,10} & \xrightarrow{d_{11}^{0,10}} & E_{11}^{11,0} & = & \mathbb{Z}
\end{array}$$

Assim, $E_\infty^{0,10} = E_{12}^{0,10} = H(E_{11}^{0,10}) = Ker\ d_{11}^{0,10}$.

Agora, se $E_2^{0,3} = \mathbb{Z}(x_3)$ e $E_2^{0,7} = \mathbb{Z}(x_7)$ então $E_2^{0,10} = \mathbb{Z}(x_3 \smile x_7)$.

Como $d_{11}^{0,10}$ é uma derivação, pela Proposição 4.0.2 temos

$$d_{11}^{0,10}(x_3 \smile x_7) = d_{11}^{0,3}(x_3) \smile x_7 + (-1)^3 x_3 \smile d_{11}^{0,7}(x_7) = 0$$

pois $d_{11}^{0,3} : E_2^{0,3} = E_{11}^{0,3} \to E_{11}^{11,-7} = 0$ e $d_{11}^{0,7} : E_2^{0,7} = E_{11}^{0,7} \to E_{11}^{11,-3} = 0$.

Logo, $Ker\ d_{11}^{0,10} = E_{11}^{0,10} = E_2^{0,10} = \mathbb{Z}$.

Portanto, $H^{10}(Sp(3)) = \mathbb{Z}$.

• Cálculo de $H^{11}(Sp(3))$.

Consideremos uma filtração de $H^{11}(Sp(3))$ dada por

$H^{11}(Sp(3)) = L^{0,11} \supset L^{1,10} \supset L^{2,9} \supset L^{3,8} \supset L^{4,7} \supset L^{5,6} \supset L^{6,5} \supset L^{7,4} \supset L^{8,3} \supset L^{9,2} \supset$

$L^{10,1} \supset L^{11,0} \supset 0$

Assim temos

$$E_\infty^{11,0} = H(H(H...H(E_2^{11,0}))) = L^{11,0}$$

$E_\infty^{10,1} = E_\infty^{9,2} = E_\infty^{8,3} = E_\infty^{7,4} = E_\infty^{6,5} = E_\infty^{5,6} = E_\infty^{4,7} = E_\infty^{3,8} = E_\infty^{2,9} = E_\infty^{1,10} = E_\infty^{0,11} = 0 \Longrightarrow$ $L^{0,11} = L^{1,10} = L^{2,9} = L^{3,8} = L^{4,7} = L^{5,6} = L^{6,5} = L^{7,4} = L^{8,3} = L^{9,2} = L^{10,1} = 0$

Logo $H^{11}(Sp(3)) = E_\infty^{11,0}$.

Observemos a seguinte seqüência

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \mathbb{Z} & & & & \\
 & & & & \| & & & & \\
0 & = & E_2^{9,1} & \xrightarrow{d_2^{9,1}} & E_2^{11,0} & \xrightarrow{d_2^{11,0}} & E_2^{13,-1} & = & 0 \\
 & & & & \| & & & & \\
0 & = & E_3^{8,2} & \xrightarrow{d_3^{8,2}} & E_3^{11,0} & \xrightarrow{d_3^{11,0}} & E_3^{14,-2} & = & 0 \\
 & & & & \| & & & & \\
 & & & & \vdots & & & & \\
 & & & & \| & & & & \\
0 & = & E_{10}^{1,9} & \xrightarrow{d_{10}^{1,9}} & E_{10}^{11,0} & \xrightarrow{d_{10}^{11,0}} & E_{10}^{21,-9} & = & 0 \\
 & & & & \| & & & & \\
\mathbb{Z} & = & E_{11}^{0,10} & \xrightarrow{d_{11}^{0,10}=0} & E_{11}^{11,0} & \xrightarrow{d_{11}^{11,0}} & E_{11}^{22,-10} & = & 0
\end{array}$$

Logo, $E_\infty^{11,0} = E_{12}^{11,0} = H(E_{11}^{11,0}) = \dfrac{E_{11}^{11,0}}{Im\ d_{11}^{0,10}} = E_{11}^{11,0} = \mathbb{Z}$.

Portanto, $H^{11}(Sp(3)) = \mathbb{Z}$.

• Cálculo de $H^n(Sp(3))$ para $n \geq 22$.

Consideremos uma filtração de $H^n(Sp(3))$ dada por

$$H^n(S_p(3)) = L^{0,n} \supset L^{1,n-1} \supset ... \supset L^{11,n-11} \supset L^{12,n-12} \supset ... \supset L^{n-1,1} \supset L^{n,0} \supset 0$$

Assim, para $n \geq 22$, temos

$$E_\infty^{n,0} = 0 \Rightarrow L^{n,0} = 0$$

$$E_\infty^{n-1,1} = 0 \Rightarrow L^{n-1,1} = L^{n,0}$$

$$\vdots$$

$$E_\infty^{11,n-11} = 0 \ \text{ pois } \ n - 11 \geq 11 \Rightarrow L^{11,n-11} = L^{12,n-12}$$

$$\vdots$$

$$E_\infty^{1,n-1} = 0 \Rightarrow L^{1,n-1} = L^{2,n-2}$$

$$E_\infty^{0,n} = 0 \quad \text{pois} \quad n \geq 22 \Rightarrow L^{0,n} = L^{1,n-1}$$

Portanto, $H^n(Sp(3)) = 0$ para $n \geq 22$.

Efetuando-se todos os cálculos é facil verificar que os grupos de cohomologia de $Sp(3)$ com coeficientes em $\mathbb{Z}$ são dados por

$$H^*(Sp(3)) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & * = 0,\ 3,\ 7,\ 10,\ 11,\ 14,\ 18,\ 21; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

5.5.3 Cálculo dos grupos de cohomologia de $Sp(4)$ com coeficientes em $\mathbb{Z}$.

Temos a fibração

$$\begin{array}{ccc} Sp(3) & \hookrightarrow & Sp(4) \\ & & \downarrow \\ & & S^{15} \end{array}$$

É fácil verificar que os grupos de cohomologia de $Sp(4)$ com coeficientes em $\mathbb{Z}$ são dados por

$$H^*(Sp(4)) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & * = 0,\ 3,\ 7,\ 10,\ 11,\ 14,\ 15,\ 21,\ 22,\ 25,\ 26,\ 29,\ 33,\ 36; \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & * = 18; \\ 0, & \text{caso contrário;} \end{cases}$$

5.5.4 O anel de cohomologia de $Sp(n)$ com coeficientes em $\mathbb{Z}$ como uma álgebra exterior.

Consideremos a fibração

$$\begin{array}{ccc} Sp(n-1) & \hookrightarrow & Sp(n) \\ & & \downarrow \\ & & S^{4n-1} \end{array}$$

Pelo Teorema de Serre temos que

$$E_2^{p,q} = H^p(S^{4n-1}) \otimes H^q(Sp(n-1)) \Rightarrow H^*(Sp(n))$$

Calcularemos o anel de cohomologia de $Sp(n)$, para $n \geq 1$, com coeficientes em $\mathbb{Z}$ por indução finita sobre n.

• Para $n = 1$ temos

$$H^*(Sp(1)) = H^*(S^3) = \Lambda(x_3)$$

onde x_3 é o gerador de $H^3(Sp(1))$.

• Suponhamos, por hipótese de indução, que $H^*(Sp(n-1)) = \Lambda(x_3, x_7, ..., x_{4n-5})$ onde x_i é o gerador de $H^i(Sp(n-1))$ para $i = 3, 7, ..., 4n-5$.

Assim,

$$E_2^{*,*} = H^*(S^{4n-1}) \otimes H^*(Sp(n-1)) = \Lambda(x_{4n-1}) \otimes \Lambda(x_3, x_7, ..., x_{4n-5}).$$

Portanto, $H^*(Sp(n)) = \Lambda(x_3, x_7, ..., x_{4n-5}, x_{4n-1})$ onde x_i é o gerador de $H^i(Sp(n))$ para $i = 3, 7, ..., 4n-5, 4n-1$.

5.6 Resultados obtidos

Finalmente, apresentamos os resultados obtidos:

$*\backslash H^*$	SU(1)	SU(2)	SU(3)	SU(4)	SU(5)	U(1)	U(2)	U(3)	U(4)	U(5)	Sp(1)	Sp(2)	Sp(3)	Sp(4)
0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$
1	0	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$
4	0	0	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	0	0	0	0
5	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	0	0	0	0
7	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$
8	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$	0	0	0	0
9	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$	0	0	0	0
10	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$
11	0	0	0	0	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$
12	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$	0	0	0	0
14	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$
15	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$	0	0	0	$\mathbb{Z}$
16	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$	0	0	0	0
17	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$	0	0	0	0	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$	0	0	0	0
18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$
19	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$	0	0	0	0
20	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$	0	0	0	0
21	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$
22	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$	0	0	0	$\mathbb{Z}$
23	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
24	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$	0	0	0	0
25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$
26	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$
27	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
28	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
29	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$
30	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
31	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
32	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
33	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$
34	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
35	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
36	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$

$*\backslash H^*$	SO(1)	SO(2)	SO(3)	SO(4)	SO(5)	$\mathbb{C}$P(1)	$\mathbb{C}$P(2)	$\mathbb{C}$P(n)
0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$
1	0	$\mathbb{Z}$	0	0	0	0	0	0
2	0	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$
3	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$	$\mathrm{Ker}d_4^{0,3}$	0	0	0
4	0	0	0	0	$\frac{\mathbb{Z}}{\mathrm{Im}d_4^{0,3}}$	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$
5	0	0	0	$\mathbb{Z}_2$	$\mathrm{Ker}d_4^{0,5}$	0	0	0
6	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathrm{Ker}d_4^{0,6}\oplus\frac{\mathbb{Z}_2}{\mathrm{Im}d_4^{0,5}}$	0	0	$\mathbb{Z}$
7	0	0	0	0	$\frac{\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}}{\mathrm{Im}d_4^{0,6}}$	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$
9	0	0	0	0	$\mathbb{Z}_2$	0	0	0
10	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$	0	0	$\mathbb{Z}$
11	0	0	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
2n-2	0	0	0	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$
2n-1	0	0	0	0	0	0	0	0
2n	0	0	0	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$

• Para todo $n \geq 2$, $H^*(SU(n)) = \Lambda(x_3, x_5, ..., x_{2n-3}, x_{2n-1})$ onde x_i é o gerador de $H^i(SU(n))$ para $i = 3, 5, ..., 2n-3, 2n-1$.

• Para todo $n \geq 1$, $H^*(U(n)) = \Lambda(x_1, x_3, x_5, ..., x_{2n-3}, x_{2n-1})$ onde x_i é o gerador de $H^i(U(n))$ para $i = 1, 3, 5, \cdots, 2n-1$.

• Para todo $n \geq 1$, $H^*(Sp(n)) = \Lambda(x_3, x_7, ..., x_{4n-5}, x_{4n-1})$ onde x_i é o gerador de $H^i(Sp(n))$ para $i = 3, 7, ..., 4n-5, 4n-1$.

Referências Bibliográficas

[1] Brown, K. S.; *Cohomology of Groups*, Springer-Verlag, 1982.

[2] Hatcher, A. *Algebraic Topology*. Cambridge: Cambridge University Press, 2001.

[3] Hu, S. T.; *Introduction to Homological Algebra*, Holden-Day, Inc., 1968.

[4] Lima, E. L.; *Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1998.

[5] Mac Lane, Saunders; *Homology Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*, Band 114, New York: Academic Press and Berlin - Heidelberg - New York: Springer-Verlag, 1963, 1975.

[6] Massey, W. S.; *Singular Homology Theory*, Springer-Verlag, 1980.

[7] McCleary, J.; *User's Guide To Spectral Sequences*, Publish or Perish, Inc., 1985.

[8] Spanier, E. H.; *Algebraic Topology*, McGraw-Hill, Inc., 1966.

[9] Vick, J. W.; *Homology Theory: An Introduction to Algebraic Topology*, Academic Press, Inc., 1973.

[10] Whitehead, G. W.; *Elements of Homotopy Theory*, Springer-Verlag, 1978.

Índice Remissivo