

unesp



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

*Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas*

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS DE COMPUTAÇÃO E ESTATÍSTICA

---

**Limitantes para os Zeros de  
Polinômios gerados por uma Relação  
de Recorrência de Três Termos**

**Josiani Batista Nunes**

Dissertação de Mestrado  
Pós-Graduação em Matemática

# Limitantes para os Zeros de Polinômios gerados por uma Relação de Recorrência de Três Termos

**Josiani Batista Nunes**

Dissertação apresentada ao Instituto de  
Biotecnologia, Letras e Ciências Exatas da  
Universidade Estadual Paulista “Júlio de  
Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio  
Preto, São Paulo, para a obtenção do título  
de Mestre em Matemática.

Orientadora: Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Eliana Xavier Li-  
nhares de Andrade

São José do Rio Preto  
Fevereiro de 2009

# Josiani Batista Nunes

## Limitantes para os zeros de polinômios gerados por uma relação de recorrência de três termos

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Matemática do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

### BANCA EXAMINADORA

---

Orientadora

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Eliana Xavier Linhares de Andrade

UNESP - São José do Rio Preto

---

Primeiro Examinador

Prof. Dr. Alagacone Sri Ranga

UNESP - São José do Rio Preto

---

Segundo Examinador

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Andrea Piranhe da Silva

FATEC - Jales

São José do Rio Preto, 27 de Fevereiro de 2009.

Com coisas tremendas de justiça  
nos responderás, ó Deus da nossa  
salvação; tu és a esperança de  
todas as extremidades da terra,  
e daqueles que estão longe sobre o mar.

*Sl. 65:5*

*Aos meus pais, Enoch (in memória) e Lázara,  
ofereço*

*Ao meu namorado Alessandro,  
aos meus irmãos Ronaldo, Rogério,  
Fernando e Fabiana, aos meus sobrinhos  
Ronaldo, Diego, Leonardo, Bárbara  
e Amanda e à minha afilhada Julia,  
dedico.*

# Agradecimentos

A Deus, Pai todo poderoso, que me deu forças para caminhar, amigo sincero de todas as horas.

À Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Eliana X. L. de Andrade, pelo carinho, paciência e orientação deste trabalho.

Ao Prof. Dr. Alagacone Sri Ranga e à Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Cleonice Fátima Bracciali, pelas valiosas explicações e sugestões.

Aos professores de graduação e pós-graduação, em especial ao Prof. Dr. Dimitar K. Dimitrov, pela contribuição intelectual.

Agradeço imensamente aos meus pais Enoch (in memória) e Lázara, por todo carinho, apoio, incentivo, compreensão e pelas palavras de aconchego nas horas mais difíceis.

À minha querida irmã Fabiana e seu esposo João Luíz, pelo apoio incondicional em todos os momentos.

Aos meus irmãos Fernando e sua esposa Fátima, Rogério e sua esposa Edvania, pelo apoio e incentivo.

Agradeço especialmente ao meu irmão Ronaldo e sua esposa Leila, que me hospedaram em sua casa durante quatro anos com muita paciência, compreensão e carinho.

Ao meu namorado Alessandro, uma pessoa muito especial, agradeço o carinho e o cuidado dedicados.

Aos meus amigos, pelo companheirismo em todos os momentos. Em especial, ao meu amigo Heron, pelo apoio e grandes dicas sobre o programa Latex.

A todas as pessoas e funcionários do IBILCE que, direta ou indiretamente, contribuíram para a elaboração deste trabalho.

À CAPES pelo auxílio financeiro.

# Resumo

Este trabalho trata do estudo da localização dos zeros dos polinômios gerados por uma determinada relação de recorrência de três termos. O objetivo principal é estudar limitantes, em termos dos coeficientes da relação de recorrência, para as regiões onde os zeros estão localizados. Os zeros são explorados através do problema de autovalor associado a uma matriz de Hessenberg.

As aplicações são consideradas para polinômios de Szegő  $\{S_n\}$ , alguns polinômios para-ortogonais  $\left\{ \frac{S_n(z) + S_n^*(z)}{1 + S_n(0)} \right\}$  e  $\left\{ \frac{S_n(z) - S_n^*(z)}{1 - S_{n+1}(0)} \right\}$ , especialmente quando os coeficientes de reflexão são reais. Um outro caso especial considerado são os zeros do polinômio  $P_n(z) = \sum_{m=0}^n b_m z^m$ , onde os coeficientes  $b_m$ , para  $m = 0, 1, \dots, n$ , são complexos e diferentes de zeros.

**Palavras-chave:** relação de recorrência, polinômios ortogonais, polinômios de Szegő, polinômios para-ortogonais, zeros de polinômios, problema de autovalor.



# Abstract

In this work we studied the localization the zeros of polynomials generated by a certain three term recurrence relation. The main objective is to study bounds, in terms of the coefficients of the recurrence relation, for the regions where the zeros are located. The zeros are explored through an eigenvalue representation associated with a Hessenberg matrix.

Applications are considered to Szegő polynomials  $\{S_n\}$ , some para-orthogonal polynomials  $\left\{ \frac{S_n(z) + S_n^*(z)}{1 + S_n(0)} \right\}$  and  $\left\{ \frac{S_n(z) - S_n^*(z)}{1 - S_{n+1}(0)} \right\}$ , especially when the reflection coefficients are real. As another special case, the zeros of the polynomial  $P_n(z) = \sum_{m=0}^n b_m z^m$ , where the non-zero complex coefficients  $b_m$  for  $m = 0, 1, \dots, n$ , were considered.

**Keywords:** recurrence relation, orthogonal polynomials, Szegő polynomials, para-orthogonal polynomials, zeros of polynomials, eigenvalue problem.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Preliminares</b>	<b>4</b>
2.1	Produto interno . . . . .	4
2.2	Dependência e independência linear . . . . .	5
2.3	Autovalores e autovetores . . . . .	6
2.4	Transformações de semelhança . . . . .	8
2.5	Transformações lineares fracionais . . . . .	9
2.5.1	Transformações de Moebius especiais . . . . .	12
2.6	Polinômios ortogonais na reta real . . . . .	13
2.6.1	Polinômios de Chebyshev de 2 <sup>a</sup> espécie . . . . .	18
2.7	Sequência encadeada e polinômios ortogonais . . . . .	19
2.8	Frações contínuas . . . . .	19
2.9	Relação entre frações contínuas e polinômios ortogonais na reta real . . . . .	21
2.10	Polinômios similares aos ortogonais . . . . .	22
2.11	Polinômios ortogonais no círculo unitário . . . . .	26
2.12	Polinômios para-ortogonais . . . . .	27
<b>3</b>	<b>Zeros de polinômios gerados por uma relação de recorrência</b>	<b>30</b>
3.1	Zeros e suas representações como autovalores . . . . .	30
3.2	Ortogonalidade dos Autovetores . . . . .	40
3.3	Limitantes para os zeros . . . . .	44
3.4	Relações com normas matriciais . . . . .	63
<b>4</b>	<b>Limitantes para os zeros: alguns casos particulares</b>	<b>73</b>
4.1	Polinômios de Szegő . . . . .	73
4.2	Polinômios para-ortogonais . . . . .	74
4.3	Polinômios com coeficientes não nulos . . . . .	76
4.4	Exemplos . . . . .	82



# Capítulo 1

## Introdução

Definimos um produto interno no espaço vetorial dos polinômios por

$$\langle f, g \rangle_\phi = \int_a^b f(x)g(x)d\phi(x),$$

onde  $d\phi(x)$  é uma distribuição ou medida (positiva).

Uma sequência de polinômios  $\{P_n\}_{n=0}^\infty$  é chamada de sequência de polinômios ortogonais com relação à medida  $d\phi$  no intervalo  $(a, b)$ ,  $-\infty \leq a < b \leq \infty$ , se  $P_n$  é de grau exatamente  $n$  e

$$\langle P_m, P_n \rangle_\phi = \int_a^b P_m(x)P_n(x)d\phi(x) = \begin{cases} 0, & \text{para } m \neq n \\ \rho_n > 0, & \text{para } m = n \end{cases}. \quad (1.1)$$

Esses polinômios satisfazem a muitas propriedades e por esta razão são aplicados na solução de diversos problemas da Matemática e Ciências Aplicadas. Uma das mais importantes é que eles satisfazem a uma relação de recorrência de três termos e, quando são mônicos, é dada por

$$P_{n+1}(x) = (x - \beta_{n+1})P_n(x) - \alpha_{n+1}P_{n-1}(x), \quad n \geq 1, \quad (1.2)$$

com  $P_0(x) = 1$ ,  $P_1(x) = x - \beta_1$ ,  $\beta_{n+1} \in \mathbb{R}$  e  $\alpha_{n+1} > 0$ ,  $n \geq 1$ . Outra propriedade importante é que os zeros desses polinômios são reais, distintos e estão no intervalo  $(a, b)$ . Veja, por exemplo, Chihara [7] e Szegő [24]. Além disso, se a medida  $d\phi$  é simétrica, isto é,  $d\phi(-x) = -d\phi(x)$ , então os coeficientes  $\beta_n$  são todos nulos.

Se o produto interno em (1.1) é dado por

$$\langle f, g \rangle_\nu = \int_C f(z)\overline{g(z)}d\nu(z) = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\overline{g(e^{i\theta})}d\nu(e^{i\theta}),$$

onde  $d\phi(x) = d\nu(z)$  é uma medida positiva no intervalo  $[0, 2\pi]$ , então os polinômios ortogonais  $P_n$ , denotados agora por  $S_n$ , são chamados polinômios ortogonais no círculo

unitário ou polinômios clássicos de Szegő. Esses polinômios foram introduzidos por Szegő em 1939 na primeira versão de seu livro [24].

Normalmente, os polinômios de Szegő não satisfazem a uma relação de recorrência de três termos como acontece com os polinômios ortogonais na reta real. Entretanto, eles satisfazem ao seguinte sistema de relações de recorrência

$$\begin{aligned} S_{n+1}(z) &= zS_n(z) + a_{n+1}S_n^*(z), \\ (1 - |a_{n+1}|^2)zS_n(z) &= S_{n+1}(z) - a_{n+1}S_{n+1}^*(z), \end{aligned} \quad n \geq 0,$$

onde  $S_0(z) = 1$ ,  $S_0^*(z) = 1$  e  $S_n^*(z) = z^n \overline{S_n}(1/z)$  são chamados de polinômios recíprocos aos polinômios de Szegő.  $\overline{S_n}$  indica que somente os coeficientes de  $S_n$  são conjugados. Os coeficientes  $S_{n+1}(0) = a_{n+1}$  são chamados coeficientes de reflexão e são menores do que um em módulo. Uma propriedade importante desses polinômios é que todos os seus zeros estão localizados dentro do disco unitário aberto.

Os polinômios  $S_n(z) + w_n S_n^*(z)$  onde  $|w_n| = 1$  são chamados polinômios para-ortogonais. Neste trabalho, consideramos dois casos especiais desses polinômios

$$R_n^{(1)}(z) = \frac{S_n(z) + S_n^*(z)}{1 + S_n(0)} \quad \text{e} \quad (z-1)R_n^{(2)}(z) = \frac{S_{n+1}(z) - S_{n+1}^*(z)}{1 - S_{n+1}(0)}, \quad n \geq 0,$$

onde  $R_n^{(1)}(z)$  e  $(z-1)R_n^{(2)}(z)$  são polinômios para-ortogonais mônicos.

Quando falamos de polinômios similares aos ortogonais estamos nos referindo à sequência de polinômios  $\{Q_m\}_{m=0}^{\infty}$  que satisfazem à relação de recorrência de três termos

$$Q_{m+1}(z) = (z + \beta_{m+1})Q_m(z) - \alpha_{m+1}zQ_{m-1}(z), \quad m \geq 1, \quad (1.3)$$

com  $Q_0(z) = 1$  e  $Q_1(z) = z + \beta_1$ , onde os números complexos  $\alpha_m$  e  $\beta_m$  são tais que  $\alpha_m \neq 0$  para  $m \geq 2$  e  $\beta_m \neq 0$  para  $m \geq 1$ . Além disso, quando  $\beta_m < 0$  e  $\alpha_m > 0$  foi mostrado em [16] que existe uma medida especial  $d\phi$ , chamada medida forte, tal que  $\{Q_m\}$  satisfaz

$$\int_0^{\infty} t^{-m+s} Q_m(t) d\phi(t) = \begin{cases} 0, & s = 0, 1, \dots, m-1 \\ \rho_n > 0, & s = m \end{cases}.$$

Baseado no artigo [22], nosso objetivo, neste trabalho, é estudar o comportamento dos zeros de polinômios ortogonais e similares. Consideramos os polinômios de Szegő, polinômios para-ortogonais, polinômios gerados pela relação de recorrência (1.3) e estudamos limitantes, em termos dos coeficientes de relação de recorrência, para as regiões onde os zeros estão localizados.

A seguir descrevemos, brevemente, os capítulos que compõem esta dissertação.

No Capítulo 2, abordamos alguns pré-requisitos da Álgebra Linear. Apresentamos algumas definições e resultados conhecidos sobre polinômios ortogonais na reta real, frações

contínuas, polinômios similares aos ortogonais, polinômios de Szegő e, também, polinômios para-ortogonais.

No Capítulo 3, estudamos a localização dos zeros de alguns polinômios gerados pela relação de recorrência (1.3). Na maioria das vezes, os zeros são explorados através da representação dos autovalores associados à correspondente matriz de Hessenberg.

No Capítulo 4, estendemos os resultados sobre a localização dos zeros dos polinômios de Szegő, polinômios para-ortogonais e polinômios com coeficientes não nulos. Apresentamos, também, alguns exemplos que são aplicações dos Teoremas 3.3.1, 3.3.4, 4.2.1 e 4.3.2 e do Corolário 3.3.1.

# Capítulo 2

## Preliminares

Neste capítulo introduzimos alguns conceitos importantes e apresentamos algumas ferramentas básicas especiais que serão extremamente úteis no desenvolvimento e melhor compreensão deste trabalho. Omitimos a demonstração de alguns resultados, que podem ser encontrados em Chihara [7], Noble [18] e Henrici [10].

### 2.1 Produto interno

**Definição 2.1.1.** *Seja  $\mathcal{V}$  um espaço vetorial sobre um corpo  $\mathcal{K} \subset \mathbb{C}$ . Um produto interno (ou produto escalar) sobre  $\mathcal{V}$  é uma aplicação*

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \longmapsto \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \quad (2.1)$$

de  $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$  em  $\mathcal{K}$ , para o qual se verificam as seguintes condições, para todo  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}$  e todo escalar  $\alpha \in \mathcal{K}$ :

(i)  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \geq 0$  e  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 0$  se, e somente se,  $\mathbf{x} \equiv \mathbf{0}$ ;

(ii)  $\langle \alpha \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \alpha \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ ;

(iii)  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \overline{\langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle}$ ;

(iv)  $\langle \mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{w} \rangle$ .

Denotaremos por  $\mathbb{C}^n$  o espaço vetorial dos vetores coluna com  $n$  componentes complexas sobre  $\mathcal{K} = \mathbb{C}$ .

Podemos definir um produto interno de dois vetores coluna  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$  como a quantidade escalar  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$  dada por:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^n \bar{x}_i y_i = \mathbf{x}^H \mathbf{y}, \quad (2.2)$$

onde  $\mathbf{x}^H$  é o vetor transposto conjugado de  $\mathbf{x}$ . Se os coeficientes forem reais, ou seja, se  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$  e  $\mathcal{K} = \mathbb{R}$ , o produto interno pode ser definido por:

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i = \mathbf{x}^T \mathbf{y}. \quad (2.3)$$

**Definição 2.1.2.** *Seja  $\mathcal{V}$  um espaço vetorial com produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Dizemos que dois vetores não nulos  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V}$  são ortogonais com relação ao produto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  se*

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0. \quad (2.4)$$

## 2.2 Dependência e independência linear

Sejam  $\mathcal{V}$  um espaço vetorial sobre um corpo  $\mathcal{K}$ ,  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n \in \mathcal{V}$  e  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathcal{K}$ .

**Definição 2.2.1.** *O vetor  $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{x}_i$  é um elemento de  $\mathcal{V}$  chamado de combinação linear de  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ .*

**Definição 2.2.2.** *O conjunto  $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$  é linearmente independente (LI), se a equação  $\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{x}_n = 0$  implica em  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ . No caso em que existir algum  $\alpha_i \neq 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , dizemos que  $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$  é linearmente dependente (LD).*

O conjunto definido por

$$\mathcal{W} = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n] = \left\{ \mathbf{v} \in \mathcal{V} : \mathbf{v} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{x}_i, \alpha_i \in \mathcal{K}, i = 1, 2, \dots, n \right\}$$

é chamado subespaço gerado por  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ .

**Definição 2.2.3.** *O conjunto  $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$  de vetores de  $\mathcal{V}$  é uma base de  $\mathcal{V}$  se*

(i)  $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$  é LI;

(ii)  $[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n] \equiv \mathcal{V}$ .

**Teorema 2.2.1.** *Se  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$  são ortogonais entre si, então  $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$  é LI.*

**Demonstração:** Como  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$  são ortogonais entre si, então, de (2.4),

$$\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle = 0 \quad (2.5)$$



para todo  $i \neq j; i, j = 1, 2, \dots, n$ . Seja  $\mathbf{v} = \sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbf{x}_k = \mathbf{0}$ . Então,  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{x}_i \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_i \right\rangle = \langle \mathbf{0}, \mathbf{x}_i \rangle = 0$ . Da Definição 2.1.1 e de (2.5), obtemos  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{x}_i \rangle = \sum_{k=1}^n \alpha_k \langle \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_i \rangle = \alpha_i \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i \rangle = 0$  para  $i = 1, 2, \dots, n$ . Então,  $\alpha_i = 0$  pois  $\langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_i \rangle \neq 0$  para todo  $i = 1, 2, \dots, n$ . Portanto, o conjunto  $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$  é LI. ■

## 2.3 Autovalores e autovetores

Seja  $\mathbb{C}^{n \times m}$  o espaço vetorial das matrizes de dimensão  $n \times m$  com elementos complexos sobre  $\mathbb{C}$ .

**Definição 2.3.1.** Dada uma matriz  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , se existir um número  $\lambda \in \mathbb{C}$  e um vetor  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ ,  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ , tal que  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ , dizemos que  $\lambda$  é um autovalor de  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{x}$  o autovetor correspondente.

**Definição 2.3.2.** O vetor  $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$  é autovetor à esquerda da matriz  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  associado ao autovalor  $\lambda$  se  $\mathbf{y}^H \mathbf{A} = \lambda \mathbf{y}^H$ , onde  $\mathbf{y}^H$  é o vetor conjugado transposto de  $\mathbf{y}$ .

**Definição 2.3.3.** Seja  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . O polinômio  $f(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$ , de grau exatamente  $n$ , é chamado polinômio característico e a equação  $f(\lambda) = 0$  é denominada equação característica da matriz  $\mathbf{A}$ .

**Definição 2.3.4.** Se as  $n$  raízes de  $f(\lambda)$  forem tais que o valor de uma raiz particular  $\lambda_i$  for repetido precisamente  $k$  vezes, então dizemos que  $\lambda_i$  é um autovalor de multiplicidade  $k$ ; se  $\lambda_i$  ocorre somente uma vez, então dizemos que  $\lambda_i$  é um autovalor simples.

Podemos enunciar o seguinte teorema.

**Teorema 2.3.1.** Seja uma matriz  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Se  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$  é uma coleção de autovalores distintos de  $\mathbf{A}$  e se  $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_s\}$  forma o conjunto dos autovetores associados, então  $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_s\}$  é LI.

**Demonstração:** Temos que  $\{\mathbf{x}_1\}$  é LI pois  $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{0}$ . Se  $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$  não for LI, temos que existe  $\alpha \neq 0$  tal que  $\mathbf{x}_2 = \alpha \mathbf{x}_1$ . Então,

$$\lambda_2 \mathbf{x}_2 = \mathbf{A} \mathbf{x}_2 = \mathbf{A} \alpha \mathbf{x}_1 = \alpha \lambda_1 \mathbf{x}_1. \quad (2.6)$$

Mas,

$$\lambda_1 \mathbf{x}_2 = \alpha \lambda_1 \mathbf{x}_1. \quad (2.7)$$

Subtraindo (2.6) de (2.7), obtemos  $(\lambda_2 - \lambda_1) \mathbf{x}_2 = 0$ . Como  $\lambda_2 \neq \lambda_1$  e  $\mathbf{x}_2 \neq 0$ , isto não é possível. Portanto,  $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$  é LI. Agora, suponhamos que  $\mathbf{x}_p = \alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_{p-1} \mathbf{x}_{p-1}$ , onde nem todos os  $\alpha_i, i = 1, 2, \dots, p-1$ , são nulos. Temos

$$\lambda_p \mathbf{x}_p = \alpha_1 \lambda_p \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \lambda_p \mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_{p-1} \lambda_p \mathbf{x}_{p-1} \quad (2.8)$$

e, também,  $\lambda_p \mathbf{x}_p = \mathbf{A} \mathbf{x}_p = \mathbf{A}(\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_{p-1} \mathbf{x}_{p-1})$ , ou seja,

$$\lambda_p \mathbf{x}_p = \alpha_1 \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_{p-1} \lambda_{p-1} \mathbf{x}_{p-1}. \quad (2.9)$$

Subtraindo (2.8) de (2.9), obtemos

$$0 = \alpha_1 (\lambda_p - \lambda_1) \mathbf{x}_1 + \alpha_2 (\lambda_p - \lambda_2) \mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_{p-1} (\lambda_p - \lambda_{p-1}) \mathbf{x}_{p-1}.$$

Como  $\lambda_p - \lambda_i \neq 0, i = 1, 2, \dots, p-1$ , e  $\alpha_i, i = 1, 2, \dots, p-1$ , não são todos iguais a zero, temos uma contradição, pois  $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{p-1}\}$  é LI. Assim, o conjunto  $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_p\}$  é LI. Por indução, obtemos o resultado do teorema. ■

A seguir, mostraremos um resultado de extrema importância em Álgebra Linear e que terá grande utilidade neste trabalho.

**Teorema 2.3.2. [Teorema dos Círculos de Gerschgorin]** *Cada autovalor  $\lambda$  (real ou complexo) de uma matriz  $\mathbf{B} = (b_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , satisfaz pelo menos a uma das desigualdades*

$$|\lambda - b_{ii}| \leq r_i, \quad \text{onde} \quad r_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |b_{ij}|, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.10)$$

**Demonstração:** Sejam  $\mathbf{B} = (b_{ij}) \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  $\lambda$  um autovalor de  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$  o autovetor correspondente. Então,  $\mathbf{B} \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$ , ou seja,  $\sum_{j=1}^n b_{ij} x_j = \lambda x_i, i = 1, 2, \dots, n$ .

Logo,  $(\lambda - b_{ii}) x_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n b_{ij} x_j, i = 1, 2, \dots, n$ . Suponhamos que  $|x_k| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ . Então,

$(\lambda - b_{kk}) x_k = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^k b_{kj} x_j$ . Como  $\mathbf{x} \neq 0$  segue que  $(\lambda - b_{kk}) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n b_{kj} \frac{x_j}{x_k}$ . Mas,  $\left| \frac{x_j}{x_k} \right| \leq 1$ .

Portanto,

$$|\lambda - b_{kk}| = \left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n b_{kj} \frac{x_j}{x_k} \right| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |b_{kj}| \left| \frac{x_j}{x_k} \right| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n |b_{kj}|.$$

■

## 2.4 Transformações de semelhança

O assunto que abordaremos a seguir é sobre uma transformação chamada transformação de semelhança. Primeiramente, demonstraremos o resultado abaixo.

**Teorema 2.4.1.** *Uma matriz  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  possui um conjunto LI de  $n$  autovetores se, e somente se, existe uma matriz não singular  $\mathbf{P}$  e uma matriz diagonal  $\mathbf{D}$  tal que  $\mathbf{AP} = \mathbf{PD}$ , ou seja,  $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}$  ou  $\mathbf{D} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$ . As colunas  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n$  de  $\mathbf{P} = [\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n]$  podem ser tomadas como os autovetores de  $\mathbf{A}$  associados, respectivamente, com os autovalores  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , onde  $\lambda_i$  é o  $(i, i)$ -ésimo elemento da diagonal da matriz  $\mathbf{D}$ .*

**Demonstração:** Suponha que  $\mathbf{A}$  tenha um conjunto de  $n$  autovetores  $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$  LI com os autovalores associados  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ . Então,  $\mathbf{Ax}_i = \lambda_i \mathbf{x}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Considere uma matriz  $\mathbf{P}$  onde as colunas de  $\mathbf{P}$  são constituídas pelos autovetores de  $\mathbf{A}$ , isto é,  $\mathbf{P} = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n]$ . Portanto, podemos escrever

$$\begin{aligned} \mathbf{AP} &= [\mathbf{Ax}_1, \mathbf{Ax}_2, \dots, \mathbf{Ax}_n] = [\lambda_1 \mathbf{x}_1, \lambda_2 \mathbf{x}_2, \dots, \lambda_n \mathbf{x}_n] \\ &= [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} = \mathbf{PD}. \end{aligned}$$

Como  $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$  é LI,  $\mathbf{P}$  é não singular, de onde segue que  $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}$ .

Por outro lado, se  $\mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}$ , então  $\mathbf{AP} = \mathbf{PD}$ . Podemos considerar

$$\mathbf{P} = [\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n] \text{ e } \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\mathbf{A}[\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n] = [\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Então,  $\mathbf{Ap}_i = \lambda_i \mathbf{p}_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Portanto, como  $\mathbf{P}$  é não singular, segue que  $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n\}$  é LI. Logo,  $\{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n\}$  são os  $n$  autovetores de  $\mathbf{A}$  e  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , são os autovalores associados. ■

**Definição 2.4.1.** Se existir uma matriz não singular  $\mathbf{P}$  tal que  $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{B}$ , então dizemos que a matriz  $\mathbf{B}$  é semelhante a  $\mathbf{A}$  ou que  $\mathbf{B}$  foi obtida de  $\mathbf{A}$  por meio de uma transformação de semelhança.

**Definição 2.4.2.** Uma matriz  $\mathbf{P}$  tal que  $\mathbf{P}^H\mathbf{P} = \mathbf{P}\mathbf{P}^H = \mathbf{I}$  é chamada matriz unitária. Como caso especial, uma matriz real  $\mathbf{P}$  tal que  $\mathbf{P}^T\mathbf{P} = \mathbf{P}\mathbf{P}^T = \mathbf{I}$  é denominada matriz ortogonal.

Mostraremos, a seguir, um teorema sobre matrizes semelhantes. Esse resultado importante será usado no Capítulo 3.

**Teorema 2.4.2.** (i) Matrizes semelhantes têm a mesma equação característica e os mesmos autovalores;

(ii) Se  $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \mathbf{B}$  e  $\mathbf{x}$  é um autovetor de  $\mathbf{A}$  correspondente ao autovalor  $\lambda$ , então  $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}$  é um autovetor de  $\mathbf{B}$  correspondente a  $\lambda$ .

**Demonstração:** Para demonstrar o item (i), seja  $\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ . Então,

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{B} - \lambda\mathbf{I}) &= \det(\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} - \lambda\mathbf{P}^{-1}\mathbf{P}) = \det[\mathbf{P}^{-1}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{P}] \\ &= \det(\mathbf{P}^{-1})\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\det(\mathbf{P}) = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}). \end{aligned}$$

Agora, para demonstrar (ii), consideremos  $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$  e  $\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ . Então,

$$\mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{P}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}.$$

Logo,  $\mathbf{B}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}$ . Portanto,  $\mathbf{B}\mathbf{y} = \lambda\mathbf{y}$  onde  $\mathbf{y} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{x}$ . ■

## 2.5 Transformações lineares fracionais

Seja  $\mathcal{M}$  a classe de todas as matrizes não-singulares de ordem dois, com elementos complexos. Em  $\mathcal{M}$  consideraremos uma relação de equivalência da seguinte forma: duas matrizes  $\mathbf{M}_1$  e  $\mathbf{M}_2$  em  $\mathcal{M}$  são chamadas equivalentes se existir um número complexo  $s$  (necessariamente não nulo) tal que  $\mathbf{M}_2 = s\mathbf{M}_1$ . Está claro que esta relação de equivalência satisfaz aos postulados usuais, ou seja, é simétrica, reflexiva e transitiva. A toda matriz

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad (ad - cb \neq 0)$$

em  $\mathcal{M}$ , associamos a função

$$t_{\mathbf{M}}: z \rightarrow \frac{az + b}{cz + d} \quad (2.11)$$

que é definida para todo  $z \neq -dc^{-1}$  se  $c \neq 0$  e para todo  $z$  se  $c = 0$ . A função  $t_M$  é chamada transformação linear fracional, ou transformação de Moebius ou, ainda, transformação bilinear (veja, por exemplo, [5] e [10]).

A matriz  $M$  determina a função  $t_M$  unicamente. Entretanto, desde que é possível multiplicar as quatro constantes  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  por uma constante não nula sem modificar a função  $t_M$ ,  $t_M$  determina simplesmente a classe de equivalência de matrizes a que  $M$  pertence e não apenas a matriz  $M$ .

Para um tratamento satisfatório das transformações de Moebius é necessário que, no caso em que  $c \neq 0$ , o ponto  $z := -dc^{-1}$ , onde  $t_M$  é indefinida, não tenha um papel fundamental. Para estudar a natureza excepcional desse ponto, estenderemos o conjunto dos números complexos, incluindo o ponto no infinito. Não são definidas operações aritméticas envolvendo  $\infty$ , mas nada impede de definir, se  $c \neq 0$ ,

$$t_M\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty. \quad (2.12)$$

Estenderemos ambos os domínios, o domínio de definição e o domínio de valores da função  $t_M$ . O primeiro constitui o conjunto de todos os números complexos e, para o último, anexamos o elemento  $\infty$ . Além disso, para que haja simetria, estenderemos o domínio de definição de  $t_M$  também para  $z = \infty$ . Se  $c \neq 0$ , o valor atribuído a  $t_M$  em  $z = \infty$  será escolhido de modo que a função  $f : z \rightarrow t_M(z^{-1})$  seja definida em  $z = 0$ . Se  $z \neq 0$ ,

$$f(z) = t_M(z^{-1}) = \frac{a + bz}{c + dz}.$$

Claramente  $f$  é contínua em  $z = 0$  se colocarmos  $f(0) := ac^{-1}$  e, conseqüentemente, definirmos

$$t_M(\infty) := \frac{a}{c}. \quad (2.13)$$

Se  $c = 0$ ,

$$t_M(\infty) := \infty. \quad (2.14)$$

Com essas convenções,  $t_M$  está definida no conjunto de todos os números complexos mais o ponto no infinito. Esse conjunto é chamado plano complexo estendido ( $\overline{\mathbb{C}}$ ). Os pontos do plano complexo ordinário (isto é, todos os pontos exceto  $\infty$ ) são chamados de pontos finitos do plano estendido.

O fato básico no que diz respeito às transformações de Moebius é o resultado que daremos a seguir.

**Teorema 2.5.1.** *Para alguma matriz  $M \in \mathcal{M}$ , a função  $t_M$  define uma aplicação biunívoca de  $\overline{\mathbb{C}}$  nele mesmo.*

**Demonstração:** Isso será mostrado de modo que, para algum ponto  $w$  no plano estendido, a equação

$$t_M(z) = w \quad (2.15)$$

tenha exatamente uma solução no plano estendido. Supondo que  $t_M$  é dado por (2.11), separamos a demonstração em dois casos,  $c = 0$  e  $c \neq 0$ .

Se  $c = 0$ , temos  $d \neq 0$  ( $M$  é não-singular) e  $t_M = \frac{az}{d} + \frac{b}{d}$  ( $z \neq \infty$ ). Novamente, como  $M$  é não-singular,  $a \neq 0$ . Assim, se  $w$  é finito, (2.15) tem uma única solução

$$z := \frac{dw - b}{a}.$$

Se  $w = \infty$ , então, por (2.14),  $z = \infty$  é uma solução. Essa é a única solução, pois  $t_M(z)$  é sempre finito para valores finitos de  $z$ .

Se  $c \neq 0$  e  $w$  é finito, encontramos que  $z$  deve satisfazer  $az + b = (cz + d)w$  ou

$$z(a - cw) = -b + dw. \quad (2.16)$$

Essa equação tem uma única solução  $z$  para todo  $w \neq \frac{a}{c}$ . Essa lacuna é preenchida, entretanto, pela Definição 2.13, que mostra que  $z = \infty$  é uma solução de (2.15) para  $w = \frac{a}{c}$ . Por (2.16) nenhum  $z$  finito pode satisfazer (2.15) para  $w = \frac{a}{c}$ ;  $z = \infty$  é a única solução. Finalmente, se  $w = \infty$ ,  $z = -\frac{d}{c}$  é uma solução. Como  $t_M(z)$  é finito para todo  $z \neq -\frac{d}{c}$ ,  $z = -\frac{d}{c}$  é a única solução. ■

A equação (2.16) mostra que, para  $c \neq 0$  e  $w \neq \frac{a}{c}$ , a função inversa de  $t_M$  é representada pela fórmula

$$z = t_M^{-1}(w) = \frac{dw - b}{-cw + a}, \quad (2.17)$$

isto é, pela transformação de Moebius associada à matriz

$$M^* := \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

Com as Definições 2.12 e 2.13, (2.17) pode ser considerada correta inclusive quando  $w = \frac{a}{c}$  e  $w = \infty$ . Isso também vale para todo  $w$  no plano estendido, se  $c = 0$ . Temos, então,  $(t_M)^{-1} = t_{M^*}$ , onde  $M^*$  é dado por (2.18). Um simples cálculo mostra que

$$M.M^* = (ad - bc).I,$$

onde  $I$  denota a matriz identidade. Então,  $M^*$  é equivalente a  $M^{-1}$  e provamos o seguinte resultado:

**Teorema 2.5.2.** *A inversa de uma transformação de Moebius é também uma transformação de Moebius. Além disso, para qualquer matriz  $\mathbf{M} \in \mathcal{M}$ ,*

$$(t_{\mathbf{M}})^{-1} = t_{\mathbf{M}^{-1}}.$$

### 2.5.1 Transformações de Moebius especiais

As transformações de Moebius especiais são aquelas associadas às matrizes

$$\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

onde  $a$  e  $b$  são números complexos,  $b \neq 0$ . A primeira delas,  $z \rightarrow z + a$ , é chamada translação. A segunda,  $z \rightarrow bz$ , é chamada rotação se  $|b| = 1$  e extensão se  $b > 0$ . É mais conveniente chamar rotação para todo  $b \neq 0$ . A transformação associada à terceira matriz,  $z \rightarrow z^{-1}$ , é chamada inversão. Translações, rotações e inversões fazem parte da construção de qualquer transformação de Moebius.

**Teorema 2.5.3.** *Toda transformação de Moebius pode ser representada como a composição de no máximo uma translação, uma rotação, uma inversão e mais uma translação.*

**Demonstração:** Seja  $t$  uma transformação de Moebius associada à matriz

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Mostraremos que a matriz  $\mathbf{M}$ , ou qualquer múltiplo escalar não nulo dela, pode ser escrita como o produto de matrizes descritas pelo teorema, na ordem também indicada. Se  $c = 0$ , então  $d \neq 0$ , e a representação requerida é

$$\frac{1}{d} \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a/d & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & b/a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Se  $c \neq 0$ , a afirmação segue da identidade

$$\frac{1}{c} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & a/c \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (bc - ad)/c^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & d/c \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

que é o mesmo que dizer que, para todo  $z$ , exceto para alguns valores excepcionais,

$$\frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c^2} \cdot \frac{1}{z + d/c}.$$

■

Essas fórmulas definem uma forma padrão das transformações de Moebius. Outras formas padrão podem ser obtidas pela representação da matriz  $\mathbf{M}$  em uma das formas

canônicas da Álgebra Linear. Além disso, cada uma dessas transformações tem a propriedade de levar retas e círculos em retas ou círculos. Portanto, o mesmo podemos dizer sobre a transformação linear fracional.

A seguir, enunciaremos um resultado de primordial importância neste trabalho e sua demonstração pode ser encontrada em Henrici [10].

**Teorema 2.5.4.** *A transformação de Moebius transforma qualquer reta e qualquer círculo numa reta ou num círculo.*

## 2.6 Polinômios ortogonais na reta real

Consideremos  $\phi$  uma função real, limitada, não decrescente, definida no intervalo  $(a, b)$ ,  $-\infty \leq a < b \leq \infty$ , e o conjunto

$$\mathfrak{G}(\phi) = \{x \mid \phi(x + \epsilon) - \phi(x - \epsilon) > 0 \text{ para todo } \epsilon > 0\},$$

onde os pontos  $x \in \mathfrak{G}$  são chamados pontos de aumento de  $\phi$ . O produto interno

$$\langle f, g \rangle_\phi = \int_a^b f(x)g(x)d\phi(x) \quad (2.19)$$

é definido positivo se o conjunto  $\mathfrak{G}$  é infinito e, além disso,  $\mathfrak{G}$  é chamado suporte de  $d\phi$ . A condição de que a função  $\phi$  tem infinitos pontos de aumento garante que

$$\int_a^b p(x)d\phi(x) > 0,$$

para qualquer polinômio  $p(x) \geq 0$ , mas não identicamente nulo para todo  $x \in (a, b)$ .

Seja  $\mathfrak{G}(\phi)$  infinito. Se os momentos definidos por

$$\mu_n^\phi = \int_a^b x^n d\phi(x), \quad n = 0, 1, \dots, \quad (2.20)$$

são todos finitos, então  $d\phi$  é chamada distribuição ou medida (positiva). (Veja Chihara [7] para mais detalhes).

Quando  $d\phi(x) = w(x)dx$ , então  $w$  é uma função não negativa, mas não identicamente nula em  $(a, b)$  e a chamamos de função peso. Além disso, dizemos que uma medida  $d\phi$  é simétrica quando é definida em um intervalo  $(-a, a)$ ,  $0 < a \leq \infty$  e satisfaz  $d\phi(-x) = -d\phi(x)$ .

**Definição 2.6.1.** *A sequência de polinômios  $\{P_n\}_{n=0}^\infty$  é chamada de sequência de polinômios ortogonais com relação à medida  $d\phi$  no intervalo  $(a, b)$  se*

(i)  $P_n(x)$  é de grau exatamente  $n$ ;



$$(ii) \langle P_m, P_n \rangle_\phi = \int_a^b P_m(x)P_n(x)d\phi(x) = \begin{cases} 0, & \text{para } m \neq n \\ \rho_n > 0, & \text{para } m = n \end{cases}.$$

Caso

$$\langle P_n, P_n \rangle_\phi = \int_a^b P_n^2(x)d\phi(x) = 1,$$

dizemos que  $\{P_n\}_{n=0}^\infty$  é uma sequência de polinômios ortonormais com relação à medida  $d\phi$ . Por conveniência, consideraremos neste trabalho apenas polinômios mônicos, ou seja, polinômios cujos coeficientes dos termos de maior grau são iguais a 1.

Denotaremos por  $\mathbb{P}$  o espaço vetorial de todos os polinômios e  $\mathbb{P}_n$  o espaço vetorial de todos os polinômios de grau no máximo  $n$ .

O teorema que mostraremos a seguir afirma que podemos definir polinômios ortogonais de três maneiras diferentes.

**Teorema 2.6.1.** *Consideremos o produto interno definido em (2.19) e seja  $\{P_n\}_{n=0}^\infty$  uma sequência de polinômios. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i)  $\{P_n\}_{n=0}^\infty$  é uma sequência de polinômios ortogonais com relação à medida  $d\phi$ ;

(ii) para todo polinômio  $\pi(x)$  de grau  $m \leq n$ , temos

$$\langle \pi, P_n \rangle_\phi = \int_a^b \pi(x)P_n(x)d\phi(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } m < n \\ K_n \neq 0, & \text{se } m = n \end{cases};$$

$$(iii) \langle x^m, P_n \rangle_\phi = \int_a^b x^m P_n(x)d\phi(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } m < n \\ \tilde{K}_n \neq 0, & \text{se } m = n \end{cases}.$$

**Demonstração:** (i)  $\implies$  (ii) Sejam  $\{P_n\}_{n=0}^\infty$  uma sequência de polinômios ortogonais com relação à medida  $d\phi$  e  $\pi(x)$  um polinômio de grau  $m \leq n$ . Temos que  $P_0, P_1, \dots, P_m$  são LI pelo Teorema 2.2.1. Logo, formam uma base para  $\mathbb{P}_m$ . Então,  $\pi(x) = \sum_{k=0}^m c_k P_k(x)$ ,  $c_m \neq 0$ . Aplicando o produto interno

$$\begin{aligned} \langle \pi, P_n \rangle_\phi &= \int_a^b \pi(x)P_n(x)d\phi(x) = \int_a^b \sum_{k=0}^m c_k P_k(x)P_n(x)d\phi(x) \\ &= \sum_{k=0}^m c_k \int_a^b P_k(x)P_n(x)d\phi(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } m < n \\ c_n \int_a^b P_n^2(x)d\phi(x), & \text{se } m = n \end{cases}. \end{aligned}$$

(ii)  $\implies$  (iii) Imediato. Basta tomarmos  $\pi(x) = x^m$ .

(iii)  $\implies$  (i) Seja  $\{P_k\}_{k=0}^{\infty}$  tal que  $\langle x^m, P_n \rangle_{\phi}$  satisfaz (iii) e suponhamos que  $m \leq n$ . Vamos escrever  $P_m(x) = \sum_{k=0}^m a_{m,k} x^k$ ,  $a_{m,m} \neq 0$ . Multiplicando a igualdade anterior por  $P_n$  e aplicando o produto interno, obtemos

$$\begin{aligned} \langle P_m, P_n \rangle_{\phi} &= \left\langle \sum_{k=0}^m a_{m,k} x^k, P_n \right\rangle_{\phi} = \sum_{k=0}^m a_{m,k} \langle x^k, P_n \rangle_{\phi} \\ &= \sum_{k=0}^m a_{m,k} \int_a^b x^k P_n(x) d\phi(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } m < n \\ a_{n,n} \tilde{K}_n, & \text{se } m = n \end{cases}. \end{aligned}$$

■

Para discutirmos a existência de uma sequência de polinômios ortogonais, introduzimos os determinantes

$$\mathbf{H}_n = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n} \end{vmatrix}, \quad n \geq 0,$$

que são chamados Determinantes de Hankel.

**Teorema 2.6.2.** *Seja o produto interno definido em (2.19) com sequência de momentos  $\{\mu_n\}$ . Uma sequência de polinômios ortogonais com relação à medida  $d\phi$  existe se, e somente se,  $\mathbf{H}_n \neq 0$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ .*

**Demonstração:** Fazendo  $P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_{n,k} x^k$ , temos, pelo Teorema 2.6.1, que

$$\langle x^m, P_n \rangle_{\phi} = \sum_{k=0}^n a_{n,k} \mu_{m+k} = \begin{cases} 0, & \text{se } m < n \\ \rho_n \neq 0, & \text{se } m = n \end{cases},$$

que pode ser representado pelo sistema linear

$$\begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n,0} \\ a_{n,1} \\ \vdots \\ a_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \rho_n \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

Portanto, existem únicos  $a_{n,0}, a_{n,1}, \dots, a_{n,n}$ , com  $a_{n,n} \neq 0$ , que satisfazem ao sistema linear (2.21).

Reciprocamente, supondo que  $\mathbf{H}_n \neq 0$ , a solução do sistema (2.21) é única e, assim, existe uma única sequência de polinômios ortogonais. ■

**Definição 2.6.2.** *Um produto interno é chamado quase definido se, e somente se,  $\mathbf{H}_n \neq 0$  para todo  $n \geq 0$ .*

O seguinte teorema é um resultado sobre os determinantes de Hankel cuja demonstração encontra-se em Chihara [7], pag. 15.

**Teorema 2.6.3.** *Um produto interno é positivo definido se, e somente se, seus momentos são reais e  $\mathbf{H}_n > 0$  para todo  $n \geq 0$ .*

Os polinômios ortogonais satisfazem a uma relação de recorrência de três termos, o que é muito importante pois permite encontrar o polinômio de um certo grau conhecendo-se os dois polinômios de graus imediatamente inferiores. Este resultado, o Teorema de Favard e o Teorema 2.6.6, podem ser encontrados em Chihara [7], pags. 18 e 21, respectivamente.

**Teorema 2.6.4.** *Seja  $\{P_n\}_{n=0}^\infty$  uma sequência de polinômios ortogonais mônicos com relação a uma medida  $d\phi$ . Então, existem constantes  $c_n$  e  $\lambda_n \neq 0$  tais que*

$$P_n(x) = (x - c_n)P_{n-1}(x) - \lambda_n P_{n-2}(x), \quad n \geq 1, \quad (2.22)$$

com  $P_{-1}(x) = 0$  e  $P_0(x) = 1$ .

**Teorema 2.6.5. [Teorema de Favard]** *Sejam  $\{c_n\}_{n=0}^\infty$  e  $\{\lambda_n\}_{n=0}^\infty$  sequências arbitrárias de números complexos e  $\{P_n\}_{n=0}^\infty$  definida pela fórmula de recorrência*

$$P_n(x) = (x - c_n)P_{n-1}(x) - \lambda_n P_{n-2}(x), \quad n \geq 1, \quad P_{-1}(x) = 0 \quad e \quad P_0(x) = 1. \quad (2.23)$$

Então, existe um único produto interno tal que  $\langle 1, 1 \rangle_\phi = \int_a^b d\phi(x) = \lambda_1$  e

$$\langle P_m, P_n \rangle_\phi = \int_a^b P_m(x)P_n(x)d\phi(x) = 0, \quad m \neq n, \quad m, n = 0, 1, \dots .$$

O produto interno é quase definido e  $\{P_n\}_{n=0}^\infty$  é a correspondente sequência de polinômios ortogonais mônicos se, e somente se,  $\lambda_n \neq 0$ . Além disso, o produto interno é positivo definido se, e somente se,  $c_n \in \mathbb{R}$  e  $\lambda_n > 0$ ,  $n \geq 1$ .

**Teorema 2.6.6.** *Seja  $\{P_n\}_{n=0}^\infty$  uma sequência de polinômios ortogonais mônicos em  $(-a, a)$ ,  $a > 0$ , com relação a uma medida simétrica  $d\phi$ . Então, as afirmações a seguir são equivalentes:*

(i)  $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$ ;

(ii) na correspondente fórmula de recorrência (2.22),  $c_n = 0$  para todo  $n \geq 1$ .

Quando o produto interno é definido positivo, os zeros dos correspondentes polinômios ortogonais mostram uma certa regularidade em seu comportamento.

**Teorema 2.6.7.** *Seja  $\{P_n\}_{n=0}^\infty$  uma seqüência de polinômios ortogonais em  $(a, b)$  com relação a  $d\phi(x)$ . Então, os zeros de  $P_n(x)$ ,  $n \geq 1$ , são reais, distintos e localizados no interior de  $(a, b)$ .*

**Demonstração:** Visto que  $\langle 1, P_n \rangle_\phi = 0$ , então  $P_n(x)$  deve mudar de sinal pelo menos uma vez em  $(a, b)$ , ou seja,  $P_n(x)$  tem pelo menos uma raiz de multiplicidade ímpar no interior de  $(a, b)$ . Suponhamos que  $x_{n,1}, x_{n,2}, \dots, x_{n,k}$ , com  $k < n$ , sejam os zeros de multiplicidade ímpar de  $P_n(x)$  em  $(a, b)$ . Daí,  $P_n(x) = (x - x_{n,1})^{i_1}(x - x_{n,2})^{i_2} \dots (x - x_{n,k})^{i_k} q(x)$  onde  $i_1, i_2, \dots, i_k$  são números ímpares e  $q(x)$  pode ter somente zeros de multiplicidade par em  $(a, b)$ . Considerando  $p(x) = (x - x_{n,1})(x - x_{n,2}) \dots (x - x_{n,k})$ , como  $k < n$ , pelo Teorema 2.6.1 (ii), temos

$$\begin{aligned} 0 &= \langle p, P_n \rangle_\phi = \int_a^b p(x)P_n(x)d\phi(x) \\ &= \int_a^b (x - x_{n,1})^{i_1+1}(x - x_{n,2})^{i_2+1} \dots (x - x_{n,k})^{i_k+1} q(x)d\phi(x) > 0, \end{aligned}$$

o que é um absurdo. Portanto  $k \geq n$ . Como  $P_n(x)$  é de grau  $n$ , então  $k = n$ . Logo,  $i_1 = i_2 = \dots = i_k = 1$  pois, se existisse algum  $i_k > 1$ , teríamos mais que  $n$  raízes para  $P_n(x)$ , o que é uma contradição. ■

Agora, consideremos os zeros de  $P_n(x)$ ,  $n \geq 1$ , ordenados em ordem crescente:

$$x_{n,1} < x_{n,2} < \dots < x_{n,n}.$$

Desde que  $P_n(x)$  possui coeficiente do termo de maior grau positivo, segue que,  $P_n(x) > 0$  para  $x > x_{n,n}$  e  $\text{sgn}(P_n(x)) = (-1)^n P_n(x)$  para  $x < x_{n,1}$ , onde

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

**Teorema 2.6.8. [Separação dos zeros]** *Os zeros de  $P_n(x)$  e  $P_{n+1}(x)$  se intrelaçam, isto é,  $x_{n+1,i} < x_{n,i} < x_{n+1,i+1}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .*

**Corolário 2.6.1.** *Para cada  $k \geq 1$ ,  $\{x_{n,k}\}_{n=k}^\infty$  é uma seqüência decrescente e  $\{x_{n,n-k+1}\}_{n=k}^\infty$  é uma seqüência crescente. Ou seja, podemos dizer que*

$$\xi_i = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n,i}, \quad \eta_j = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n,n-j+1}, \quad i, j = 1, 2, \dots \quad (2.24)$$

As demonstrações do Teorema 2.6.8 e do Corolário 2.6.1, que acabamos de enunciar, podem ser encontrados em Chihara [7], pags. 27 e 28, respectivamente.

**Definição 2.6.3.** *O intervalo fechado  $[\xi_1, \eta_1]$  é chamado o verdadeiro intervalo de ortogonalidade para a sequência de polinômios ortogonais mônicos com relação à medida  $d\phi$ .*

### 2.6.1 Polinômios de Chebyshev de 2ª espécie

Os polinômios de Laguerre, Hermite e Jacobi (incluindo os casos especiais de Chebyshev, Legendre e Gegenbauer) são chamados de polinômios ortogonais clássicos (veja, por exemplo, Chihara [7]). Nesta seção, daremos uma breve apresentação dos polinômios de Chebyshev de 2ª espécie, pois terá grande utilidade no próximo capítulo.

Os polinômios de Chebyshev de 2ª espécie,  $U_n(x)$ , são ortogonais no intervalo  $[-1, 1]$  com relação à função peso  $w(x) = \sqrt{1-x^2}$  e são definidos por

$$U_n(x) = \frac{\text{sen}((n+1)\arccos(x))}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\text{sen}((n+1)\theta)}{\text{sen}(\theta)}, \quad x \in [-1, 1], \quad n \geq 0,$$

onde  $x = \cos(\theta)$  e  $\theta \in [0, \pi]$ .

Da definição acima, obtemos que os zeros de  $U_n(x)$  são dados por  $x_{n,k} = \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ .

Consideremos a seguinte relação trigonométrica

$$\text{sen}[(n+2)\theta] + \text{sen}(n\theta) = 2\cos(\theta)\text{sen}[(n+1)\theta].$$

Com esta relação e com  $x = \cos(\theta)$  podemos obter a relação de recorrência de três termos:

$$U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x), \quad n \geq 1, \quad (2.25)$$

com  $U_0(x) = 1$  e  $U_1(x) = 2x$ . Assim, podemos verificar, facilmente, que  $U_n(x) = 2^n x^n + \dots$ , ou seja, o coeficiente do termo de maior grau é  $a_{n,n} = 2^n$ ,  $n \geq 0$ . Usando este fato e (2.25), vemos que a relação de recorrência de três termos na forma mônica é dada por:

$$U_{n+1}(x) = xU_n(x) - \frac{1}{4}U_{n-1}(x), \quad n \geq 1,$$

com  $U_0(x) = 1$  e  $U_1(x) = x$ .

Além disso, os polinômios de Chebyshev de 2ª espécie satisfazem à seguinte relação de ortogonalidade

$$\langle U_n, U_m \rangle = \int_{-1}^1 U_n(x)U_m(x)\sqrt{1-x^2}dx = \begin{cases} 0, & \text{se } n \neq m \\ \frac{\pi}{2}, & \text{se } m = n \end{cases}.$$

## 2.7 Sequência encadeada e polinômios ortogonais

A teoria de seqüências encadeadas pode ser utilizada para obter uma relação entre o verdadeiro intervalo de ortogonalidade  $[\xi_1, \eta_1]$  e as seqüências de coeficientes  $\{c_n\}$  e  $\{\lambda_n\}$ ,  $n \geq 1$ . Esse assunto terá papel importante no Capítulo 3.

**Definição 2.7.1.** *Uma seqüência  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  é chamada de seqüência encadeada se existe uma seqüência  $\{g_k\}_{k=0}^{\infty}$  tal que*

$$(i) \quad 0 \leq g_0 < 1, \quad 0 < g_n < 1, \quad n \geq 1;$$

$$(ii) \quad a_n = (1 - g_{n-1})g_n, \quad n \geq 1,$$

$\{g_k\}$  é chamada a seqüência de parâmetros para  $\{a_n\}$  e  $g_0$  é o parâmetro inicial.

**Teorema 2.7.1. [Teste da Comparação]** *Se  $0 < b_n \leq a_n$  para  $n \geq 1$ , então  $\{b_n\}$  é também uma seqüência encadeada.*

A demonstração deste teorema encontra-se em Chihara [7], pag. 97.

Agora, introduzimos a notação

$$r_n(x) = \frac{\lambda_{n+1}}{(c_n - x)(c_{n+1} - x)} \quad (2.26)$$

onde  $\lambda_{n+1}$  e  $c_n$  são os coeficientes da relação de recorrência de três termos dada em (2.22).

O Teorema 2.7.2 e o Corolário 2.7.1, que enunciaremos a seguir, podem ser encontrados em Chihara [7], pag. 108.

**Teorema 2.7.2.**  $\xi_1 \geq s$  se, e somente se,

$$(i) \quad c_n > s, \quad n \geq 1;$$

(ii)  $\{r_n(x)\}$  é seqüência encadeada.

**Corolário 2.7.1.**  $\eta_1 \leq t$  se, e somente se,  $c_n < t$ ,  $n \geq 1$ , e  $r_n(x)$  é seqüência encadeada.

## 2.8 Frações contínuas

Uma fração contínua é uma expressão do tipo

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \dots + \frac{a_n}{b_n} + \dots}} \quad (2.27)$$

onde  $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$  e  $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$  são seqüências arbitrárias de números reais ou complexos ou funções reais ou complexas, com  $a_n \neq 0$ . Uma fração contínua pode ser finita ou infinita.

Consideremos a seqüência  $\{C_n\}_{n=0}^{\infty}$  construída da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 C_0 &= b_0 \\
 C_1 &= b_0 + \frac{a_1}{b_1} \\
 C_2 &= b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2}} \\
 &\vdots \\
 C_n &= b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \dots + \frac{a_n}{b_n}}} \\
 &\vdots
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

$C_n$ , que é uma fração contínua finita, é chamado de  $n$ -ésimo convergente ou aproximante da fração contínua (2.27). Adotamos, também, as seguintes notações para as frações contínuas (2.27) e (2.28), respectivamente,

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \dots + \frac{a_n}{b_n} + \dots}} = b_0 + K_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a_n}{b_n} \right)$$

e

$$C_n = b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \dots + \frac{a_n}{b_n}}}.$$

Da relação (2.28), podemos escrever  $C_n = \frac{A_n}{B_n}$ ,  $n = 0, 1, \dots$ , onde

$$\begin{aligned}
 A_0 &= b_0, & B_0 &= 1, \\
 A_1 &= b_0 b_1 + a_1, & B_1 &= b_1, \\
 A_2 &= b_0 b_1 b_2 + b_0 a_2 + a_1 b_2, & B_2 &= b_1 b_2 + a_2, \\
 &\vdots & &\vdots
 \end{aligned}$$

Note que  $A_2 = b_2 A_1 + a_2 A_0$  e  $B_2 = b_2 B_1 + a_2 B_0$ . Deste modo, podemos demonstrar o resultado a seguir.

**Lema 2.8.1.** *Sejam as seqüências  $\{A_n\}$  e  $\{B_n\}$  tais que*

$$A_n = b_n A_{n-1} + a_n A_{n-2}, \quad B_n = b_n B_{n-1} + a_n B_{n-2}, \quad n \geq 1, \tag{2.29}$$

com  $A_{-1} = 1$ ,  $A_0 = b_0$ ,  $B_{-1} = 0$  e  $B_0 = 1$ . Então, o  $n$ -ésimo convergente  $C_n$  da fração contínua (2.27), dado por (2.28), satisfaz  $C_n = \frac{A_n}{B_n}$ ,  $n = 0, 1, \dots$

**Demonstração:** Mostraremos por indução. Facilmente podemos mostrar para  $n = 1$ . Suponhamos que (2.29) seja válido para  $n \leq k$  e mostremos que vale para  $n = k + 1$ .

$$\begin{aligned} C_{k+1} &= b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots + \frac{a_k}{b_k} + \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}} \\ &= b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots + \frac{a_k}{b_k^*} = C_k^*, \end{aligned}$$

onde  $b_k^* = b_k + \frac{a_{k+1}}{b_{k+1}}$ . Logo,  $C_k^*$  é o  $k$ -ésimo convergente da fração contínua

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} + \cdots + \frac{a_k}{b_k^*} + \cdots .$$

Usando a hipótese de indução, obtemos

$$C_k^* = \frac{A_k + (a_{k+1}/b_{k+1})A_{k-1}}{B_k + (a_{k+1}/b_{k+1})B_{k-1}} = \frac{b_{k+1}A_k + a_{k+1}A_{k-1}}{b_{k+1}B_k + a_{k+1}B_{k-1}} = \frac{A_{k+1}}{B_{k+1}}.$$

■

As fórmulas dadas por (2.29) são conhecidas por fórmulas de Wallis, onde  $A_n$  é chamado o  $n$ -ésimo numerador parcial e  $B_n$  é o  $n$ -ésimo denominador parcial da fração contínua. Para maiores informações sobre frações contínuas ver, por exemplo, Wall [26] ou Lorentzen e Waadeland [17].

Segundo Chihara [7], as sequências encadeadas surgiram dos estudos de E.B. Van Vleck sobre certas frações contínuas, cuja teoria foi formalizada por Wall [26].

## 2.9 Relação entre frações contínuas e polinômios ortogonais na reta real

As equações (2.29) fornecem uma ligação direta entre frações contínuas e polinômios ortogonais. Para isto, consideremos a seguinte fração contínua

$$\frac{\lambda_1}{x - c_1} - \frac{\lambda_2}{x - c_2} - \frac{\lambda_3}{x - c_3} - \cdots, \quad (2.30)$$

com  $\alpha_1 = \mu_0$ , obtida de (2.27) quando

$$b_0 = 0, \quad a_1 = \lambda_1 \neq 0, \quad a_{n+1} = -\lambda_{n+1} \neq 0, \quad b_n = x - c_n, \quad n \geq 1.$$

Assim, por (2.29), o  $n$ -ésimo denominador do convergente da fração contínua (2.30),  $B_n(x)$ , é dado pela expressão

$$B_n(x) = (x - c_n)B_{n-1}(x) - \lambda_n B_{n-2}(x), \quad n \geq 1,$$



com  $B_{-1}(x) = 0$  e  $B_1(x) = 1$ . Podemos observar que esta relação é a mesma de (2.23), ou seja, a sequência dos denominadores forma uma sequência de polinômios ortogonais.

Ainda pelas equações (2.29), o  $n$ -ésimo numerador do convergente da fração contínua (2.30),  $A_n(x)$ , é dado por

$$A_n(x) = (x - c_n)A_{n-1}(x) - \lambda_n A_{n-2}(x), \quad n \geq 1,$$

com  $A_{-1}(x) = 1$  e  $A_0(x) = 0$ . Os polinômios  $A_n(x)$  são chamados de polinômios numeradores correspondentes a  $P_n(x)$  ou, simplesmente, polinômios associados a  $P_n(x)$ . Veja, também, Oliani [19] para outras informações sobre frações contínuas.

## 2.10 Polinômios similares aos ortogonais

A introdução do problema forte de momento pelos pesquisadores Jones, Thron e Waadeland [16] abriu caminho para o estudo de polinômios que apresentam propriedades semelhantes às dos polinômios ortogonais. Nesta seção faremos um breve estudo sobre os polinômios similares, pré-requisitos essenciais ao desenvolvimento deste trabalho, tendo como referência Andrade [2] e Sri Ranga [23].

**Definição 2.10.1.** *Seja  $\varphi(t)$  uma função real, limitada, não-decrescente e com infinitos pontos de aumento em  $(a, b)$ ,  $-\infty \leq a < b \leq \infty$ . Se os momentos definidos por*

$$\mu_m^\varphi = \int_a^b t^m d\varphi(t) \quad (2.31)$$

*existem para  $m = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ , então  $d\varphi(t)$  é uma distribuição forte em  $(a, b)$  e se  $d\varphi(t) = w(t)dt$ ,  $w(t)$  é chamada função peso forte. Se, além disso,  $(a, b) \subseteq (0, \infty)$ ,  $d\varphi(t)$  recebe o nome de distribuição forte de Stieltjes.*

A medida  $d\varphi$  é assim chamada pois surgiu como soluções de problemas fortes de momento estudados por Jones, Thron e Waadeland [16] e Jones, Njåstad e Thron [12].

**Definição 2.10.2.** *Seja  $d\varphi(t)$  uma distribuição forte de Stieltjes. Definimos os polinômios similares aos ortogonais,  $B_n(t)$ , por*

$$i) \quad B_n(t) \text{ é de grau exatamente } n, \quad n \geq 0; \quad (2.32)$$

$$ii) \quad \int_a^b t^{-n+s} B_n(t) d\varphi(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } s = 0, 1, \dots, n-1, \\ \rho_n > 0, & \text{se } s = n. \end{cases}$$

Consideraremos os polinômios  $B_n(t)$  na forma mônica, isto é, se  $B_n(t) = \sum_{k=0}^n b_{n,k}t^k$  então  $b_{n,n} = 1$ .

**Teorema 2.10.1.** *Para as distribuições fortes de Stieltjes, os determinantes de Hankel definidos por*

$$\mathbf{H}_n^{(m)} = \begin{vmatrix} \mu_m & \mu_{m+1} & \cdots & \mu_{m+n-1} \\ \mu_{m+1} & \mu_{m+2} & \cdots & \mu_{m+n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{m+n-1} & \mu_{m+n} & \cdots & \mu_{m+2n-2} \end{vmatrix} \quad (2.33)$$

satisfazem  $\mathbf{H}_n^{(m)} > 0$ ,  $\forall m, n \in \mathbb{Z}$  e  $n > 0$ .

**Demonstração:** Sabemos que uma matriz  $\mathbf{A}$  é positiva definida se  $\langle \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle > 0$ ,  $\forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ . Além disso,  $\det(\mathbf{A}) > 0$ .

Mostremos, então, que a matriz

$$\mathbf{H}_n^{(m)} = \begin{pmatrix} \mu_m & \mu_{m+1} & \cdots & \mu_{m+n-1} \\ \mu_{m+1} & \mu_{m+2} & \cdots & \mu_{m+n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{m+n-1} & \mu_{m+n} & \cdots & \mu_{m+2n-2} \end{pmatrix}$$

é definida positiva. Seja  $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1})^T \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ . Então,

$$\begin{aligned} \left\langle \mathbf{H}_n^{(m)} \mathbf{x}, \mathbf{x} \right\rangle &= x_0 \sum_{i=0}^{n-1} \mu_{m+i} x_i + x_1 \sum_{i=0}^{n-1} \mu_{m+1+i} x_i + \cdots + x_{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} \mu_{m+n-1+i} x_i \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} \mu_{m+i+j} x_i x_j = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} \int_a^b t^{m+i+j} x_i x_j d\varphi(t) \\ &= \int_a^b t^m \left( \sum_{j=0}^{n-1} x_j t^j \right) \left( \sum_{i=0}^{n-1} x_i t^i \right) d\varphi(t) = \int_a^b t^m \left( \sum_{k=0}^{n-1} x_k t^k \right)^2 d\varphi(t) > 0. \end{aligned}$$

Logo,  $\mathbf{H}_n^{(m)}$  é definida positiva e, portanto,  $\mathbf{H}_n^{(m)} = \det(\mathbf{H}_n^{(m)}) > 0$ . ■

**Teorema 2.10.2.** *Os polinômios similares  $B_n(t)$  existem e são únicos.*

**Demonstração:** Seja

$$B_n(t) = \sum_{k=0}^n b_{n,k} t^k. \quad (2.34)$$

Então,

$$\begin{aligned} \int_a^b t^{-n+s} B_n(t) d\varphi(t) &= \int_a^b t^{-n+s} \sum_{k=0}^n b_{n,k} t^k d\varphi(t) = \sum_{k=0}^n b_{n,k} \mu_{-n+s+k} \\ &= \begin{cases} 0, & \text{se } s = 0, 1, \dots, n-1 \\ \rho_n > 0, & \text{se } s = n \end{cases}. \end{aligned}$$

Fazendo  $s = 0, 1, \dots, n-1, n$ , obtemos o seguinte sistema linear

$$\begin{pmatrix} \mu_{-n} & \mu_{-n+1} & \dots & \mu_{-1} & \mu_0 \\ \mu_{-n+1} & \mu_{-n+2} & \dots & \mu_0 & \mu_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mu_{-1} & \mu_0 & \dots & \mu_{n-2} & \mu_{n-1} \\ \mu_0 & \mu_1 & \dots & \mu_{n-1} & \mu_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{n,0} \\ b_{n,1} \\ \vdots \\ b_{n,n-1} \\ b_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \rho_n \end{pmatrix}. \quad (2.35)$$

Portanto, pelo Teorema 2.10.1, existem únicos  $b_{n,0}, b_{n,1}, \dots, b_{n,n}$ , não todos nulos, solução do sistema linear (2.35).

Resolvendo o sistema linear (2.35) pela Regra de Cramer, temos que

$$b_{n,n} = \frac{\begin{vmatrix} \mu_{-n} & \mu_{-n+1} & \dots & \mu_{-1} & 0 \\ \mu_{-n+1} & \mu_{-n+2} & \dots & \mu_0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mu_{-1} & \mu_0 & \dots & \mu_{n-2} & 0 \\ \mu_0 & \mu_1 & \dots & \mu_{n-1} & \rho_n \end{vmatrix}}{\mathbf{H}_{n+1}^{(-n)}}.$$

Por Laplace,  $b_{n,n} = \rho_n \frac{\mathbf{H}_n^{(-n)}}{\mathbf{H}_{n+1}^{(-n)}} > 0$ . Desta forma, existe  $B_n(t)$  de grau exatamente  $n$ . ■

Como consideramos  $B_n(t)$  mônico, então  $\rho_n = \frac{\mathbf{H}_{n+1}^{(-n)}}{\mathbf{H}_n^{(-n)}}$ .

Podemos escrever  $B_n(t)$  em termos dos determinantes de Hankel. Substituindo a última linha do sistema (2.35) por (2.34) e, novamente, resolvendo pela Regra de Cramer, encontramos que

$$b_{n,n} = \frac{\begin{vmatrix} \mu_{-n} & \mu_{-n+1} & \dots & \mu_{-1} & 0 \\ \mu_{-n+1} & \mu_{-n+2} & \dots & \mu_0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mu_{-1} & \mu_0 & \dots & \mu_{n-2} & 0 \\ 1 & t & \dots & t^{n-1} & B_n(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mu_{-n} & \mu_{-n+1} & \dots & \mu_{-1} & \mu_0 \\ \mu_{-n+1} & \mu_{-n+2} & \dots & \mu_0 & \mu_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mu_{-1} & \mu_0 & \dots & \mu_{n-2} & \mu_{n-1} \\ 1 & t & \dots & t^{n-1} & t^n \end{vmatrix}}.$$

Aplicando o Teorema de Laplace e considerando que o polinômio  $B_n(t)$  é mônico, temos

$$B_n(t) = \frac{\begin{vmatrix} \mu_{-n} & \mu_{-n+1} & \cdots & \mu_{-1} & \mu_0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mu_{-1} & \mu_0 & \cdots & \mu_{n-2} & \mu_{n-1} \\ 1 & t & \cdots & t^{n-1} & t^n \end{vmatrix}}{\mathbf{H}_n^{(-n)}}.$$

Se tomarmos  $t = 0$  na relação acima e em (2.34), obtemos

$$b_{n,0} = B_n(0) = (-1)^n \frac{\begin{vmatrix} \mu_{-n+1} & \cdots & \mu_{-1} & \mu_0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mu_0 & \cdots & \mu_{n-2} & \mu_{n-1} \end{vmatrix}}{\mathbf{H}_n^{(-n)}}$$

e, portanto,

$$b_{n,0} = (-1)^n \frac{\mathbf{H}_n^{(-n+1)}}{\mathbf{H}_n^{(-n)}} \neq 0. \quad (2.36)$$

Logo,  $t = 0$  não é raiz de  $B_n(t)$ ,  $n \geq 1$ .

**Teorema 2.10.3.** *Os zeros dos polinômios similares  $B_n(t)$ ,  $n \geq 1$ , são reais, distintos e pertencem ao intervalo  $(a, b)$ .*

**Demonstração:** Provemos que  $B_n(t)$  possui pelo menos uma raiz em  $(a, b)$ ,  $0 \leq a < b \leq \infty$ . Suponhamos o contrário, ou seja,  $B_n(t)$  não tenha raízes em  $(a, b)$ . Então,  $B_n(t)$  não muda de sinal em  $(a, b)$  e, assim,  $B_n(t) > 0$  ou  $B_n(t) < 0$  em  $(a, b)$ .

Logo, como  $t^{-n} > 0$  e  $B_n(t)$  não muda de sinal em  $(a, b)$ , temos

$$\int_a^b t^{-n} B_n(t) d\varphi(t) \neq 0. \quad (2.37)$$

Mas, pela definição de polinômios similares,

$$\int_a^b t^{-n} B_n(t) d\varphi(t) = 0. \quad (2.38)$$

De (2.37) e (2.38) chegamos a um absurdo. Portanto,  $B_n(t)$  tem pelo menos uma raiz de multiplicidade ímpar em  $(a, b)$ . Vamos supor, agora, que  $B_n(t)$  muda de sinal  $r$  vezes em  $(a, b)$ ,  $r < n$ . Sejam  $t_{n,1}, t_{n,2}, \dots, t_{n,r}$  as raízes de multiplicidade ímpar de  $B_n(t)$  em  $(a, b)$ . Logo,  $(t - t_{n,1})(t - t_{n,2}) \cdots (t - t_{n,r}) = \sum_{j=0}^r a_{r,j} t^j$  é um polinômio mônico de grau  $r$ .

Consideremos o polinômio  $B_n(t) \sum_{j=0}^r a_{r,j} t^j$ . Multiplicando este polinômio por  $t^{-n}$  e integrando em  $(a, b)$ , obtemos

$$\sum_{j=0}^r a_{r,j} \int_a^b t^{-n+j} B_n(t) d\varphi(t) = 0, \quad \text{pois } j = 0, 1, \dots, r \text{ e } r < n. \quad (2.39)$$

O polinômio  $B_n(t) \sum_{j=0}^r a_{r,j} t^j$  é um polinômio cujas raízes são de multiplicidade par em  $(a, b)$ . Assim, não muda de sinal em  $(a, b)$ . Então,

$$\sum_{j=0}^r a_{r,j} \int_a^b t^{-n+j} B_n(t) d\varphi(t) \neq 0. \quad (2.40)$$

De (2.39) e (2.40), temos um absurdo. Logo,  $B_n(t)$  muda de sinal  $r \geq n$  vezes em  $(a, b)$ . Como  $B_n(t)$  é um polinômio de grau  $n$ ,  $r = n$  e suas raízes são simples. Portanto,  $B_n(t)$  possui todas as raízes simples e no interior do intervalo  $(a, b)$ . ■

## 2.11 Polinômios ortogonais no círculo unitário

**Definição 2.11.1.** Se  $q_n(z) = \sum_{k=0}^n a_{n,k} z^k$  é um polinômio de grau no máximo  $n$ , então o seu polinômio recíproco é definido por

$$q_n^*(z) = z^n \bar{q}_n(1/z),$$

onde  $\bar{q}_n$  é obtido do polinômio  $q_n$  conjugando-se apenas os coeficientes, ou seja,

$$\bar{q}_n(z) = \sum_{k=0}^n \bar{a}_{n,k} z^k.$$

**Definição 2.11.2.** Uma função  $\nu(z)$  é uma distribuição no círculo unitário  $C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  quando  $\nu(e^{i\theta})$ , definida em  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ , é uma função real, limitada e com infinitos pontos de aumento, tal que os momentos

$$\mu_m^\nu = \int_C z^m d\nu(z) = \int_0^{2\pi} e^{im\theta} d\nu(e^{i\theta}), \quad m = 0, 1, \dots$$

existem.

Considere o produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle_\nu = \int_C f(z) \overline{g(z)} d\nu(z) = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \overline{g(e^{i\theta})} d\nu(e^{i\theta}). \quad (2.41)$$

**Definição 2.11.3.** Os polinômios ortogonais com relação ao produto interno (2.41), definido por

$$\int S_n(z) \overline{S_m(z)} d\nu(z) = 0, \quad n \neq m,$$

são chamados de polinômios ortogonais no círculo unitário ou polinômios clássicos de Szegő.

Chamamos de coeficiente de reflexão a constante  $a_n \in \mathbb{C}$  dada por

$$a_n = S_n(0), \quad n = 1, 2, \dots$$

Os coeficientes de reflexão têm a propriedade  $|a_n| < 1$  para  $n \geq 1$ . Além disso, os zeros dos polinômios de Szegő estão no disco unitário aberto.

Os polinômios ortogonais no círculo unitário não satisfazem a uma relação de recorrência de três termos como acontece com os polinômios ortogonais na reta real. Na verdade, esses polinômios são conhecidos por satisfazerem a um sistema de relações de recorrência (dadas aqui em termos de polinômios mônicos)

$$\begin{aligned} S_{n+1}(z) &= zS_n(z) + a_{n+1}S_n^*(z), \\ (1 - |a_{n+1}|^2)zS_n(z) &= S_{n+1}(z) - a_{n+1}S_{n+1}^*(z), \end{aligned} \quad n \geq 0, \quad (2.42)$$

com  $S_0(z) = 1$  e  $S_0^*(z) = 1$ , onde  $S_n^*(z) = z^n \overline{S_n(1/z)}$  são chamados de polinômios recíprocos aos polinômios de Szegő. Ver, por exemplo, Van Assche [25] para outras informações interessantes sobre esses polinômios.

Se  $S_n(0) \neq 0$ ,  $n \geq 1$ , então os polinômios de Szegő também satisfazem à seguinte relação de recorrência de três termos

$$S_{n+1}(z) = \left( z + \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) S_n(z) - \frac{a_{n+1}}{a_n} (1 - |a_n|^2) z S_{n-1}(z), \quad n \geq 1, \quad (2.43)$$

com  $S_1(z) = z + \frac{a_1}{a_0}$  e  $a_0 = 1$ .

Consequentemente, os polinômios mônicos de Szegő satisfazem à relação de recorrência de três termos da forma (1.3) com

$$\beta_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \quad \text{e} \quad \alpha_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{a_n} (1 - |a_n|^2), \quad \text{para } n \geq 1.$$

Para aplicações de polinômios de Szegő no estudo de fórmulas de quadratura na reta real veja, por exemplo, Bressan, Menegasso e Sri Ranga [6] e Peherstorfer [20]. Há um número considerável de trabalhos sobre a aplicação de polinômios de Szegő no estudo do problema de Análise de Frequência. Jones e Peterson [14], publicaram um trabalho sobre esse assunto.

## 2.12 Polinômios para-ortogonais

Dizemos que uma medida  $\psi$  é simétrica no círculo unitário quando  $d\psi(1/z) = -d\psi(z)$ . Nesse caso, os momentos são todos reais.

De fato, temos que

$$\mu_n^\psi = \int_0^{2\pi} e^{in\theta} d\psi(e^{i\theta}) = \int_0^\pi e^{in\theta} d\psi(e^{i\theta}) + \int_\pi^{2\pi} e^{in\theta} d\psi(e^{i\theta}). \quad (2.44)$$

Fazendo  $\theta = t + 2\pi$  na segunda equação do lado direito de (2.44) e utilizando as propriedades  $\cos(nt + 2n\pi) = \cos(nt)$  e  $\sin(nt + 2n\pi) = \sin(nt)$ , obtemos

$$\begin{aligned} \int_\pi^{2\pi} e^{in\theta} d\psi(e^{i\theta}) &= \int_{-\pi}^0 e^{in(t+2\pi)} d\psi(e^{i(t+2\pi)}) \\ &= \int_{-\pi}^0 \cos(tn + 2n\pi) + i\sin(tn + 2n\pi) d\psi(\cos(t + 2\pi) + i\sin(t + 2\pi)) \\ &= \int_{-\pi}^0 \cos(nt) + i\sin(nt) d\psi(\cos(t) + i\sin(t)) \\ &= \int_{-\pi}^0 e^{int} d\psi(e^{it}). \end{aligned} \quad (2.45)$$

Substituindo  $t = -\theta$  no lado direito da equação (2.45) e usando o fato de que a medida  $\psi(e^{i\theta})$  é simétrica, temos

$$\int_{-\pi}^0 e^{int} d\psi(e^{it}) = \int_\pi^0 e^{-in\theta} d\psi(e^{-i\theta}) = \int_0^\pi e^{-in\theta} d\psi(e^{i\theta}).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \mu_n^\psi &= \int_0^\pi e^{in\theta} d\psi(e^{i\theta}) + \int_0^\pi e^{-in\theta} d\psi(e^{i\theta}) = \int_0^\pi (e^{in\theta} + e^{-in\theta}) d\psi(e^{i\theta}) \\ &= 2 \int_0^\pi \cos(n\theta) d\psi(e^{i\theta}), \end{aligned} \quad (2.46)$$

de onde concluímos que  $\mu_n^\psi$  é real para todo  $n \geq 0$ .

Logo, como a medida  $\psi$  é simétrica, os coeficientes de reflexão são todos reais e, conseqüentemente,  $-1 < a_n < 1$ . Em 1989, Jones, Njåstad e Thron [13] estudaram os polinômios  $S_n(z) + w_n S_n^*(z)$ , com  $|w_n| = 1$ , que denominaram de polinômios para-ortogonais.

Consideremos dois casos especiais de polinômios para-ortogonais

$$R_n^{(1)}(z) = \frac{S_n(z) + S_n^*(z)}{1 + S_n(0)} \quad \text{e} \quad (z-1)R_n^{(2)}(z) = \frac{S_{n+1}(z) - S_{n+1}^*(z)}{1 - S_{n+1}(0)}, \quad n \geq 0, \quad (2.47)$$

onde  $R_n^{(1)}(z)$  e  $(z-1)R_n^{(2)}(z)$  são polinômios para-ortogonais mônicos.

De (2.47), temos

$$2S_n(z) = (1 + a_n)R_n^{(1)}(z) + (1 - a_n)(z-1)R_{n-1}^{(2)}(z), \quad n \geq 1.$$

Além disso, de (2.42) e (2.47), obtemos

$$\begin{aligned}
R_n^{(1)}(z) + (z-1)R_{n-1}^{(2)}(z) &= \frac{S_n(z) + S_n^*(z)}{1+a_n} + \frac{S_n(z) - S_n^*(z)}{1-a_n} \\
&= \frac{(1-a_n)[S_n(z) + S_n^*(z)] + (1+a_n)[S_n(z) - S_n^*(z)]}{1-a_n^2} \\
&= \frac{2[S_n(z) - a_n S_n^*(z)]}{1-a_n^2} \\
&= 2zS_{n-1}(z), \quad \text{para } n \geq 1.
\end{aligned} \tag{2.48}$$

Temos ainda que se  $-1 < a_n < 1$ , então os polinômios mônicos  $R_n^{(i)}$ ,  $i = 1, 2$ , satisfazem

$$R_0^{(i)}(z) = 1, \quad R_1^{(i)}(z) = z + 1$$

e

$$R_{n+1}^{(i)}(z) = (z+1)R_n^{(i)}(z) - \alpha_{n+1}^{(i)}zR_{n-1}^{(i)}(z), \quad n \geq 1, \tag{2.49}$$

com  $\alpha_{n+1}^{(1)} = (1+a_n)(1-a_n) > 0$  e  $\alpha_{n+1}^{(2)} = (1-a_n)(1+a_{n+1}) > 0$ ,  $n \geq 1$ .

Este último resultado pode ser encontrado em Delsarte e Genin [8].

Portanto, se  $-1 < a_n < 1$ , os polinômios para-ortogonais  $R_n^{(i)}$ ,  $i = 1, 2$ , satisfazem à relação de recorrência de três termos (1.3) com

$$\beta_n = 1, \quad \text{e} \quad \alpha_{n+1} = \alpha_{n+1}^{(i)}, \quad n \geq 1.$$



# Capítulo 3

## Zeros de polinômios gerados por uma relação de recorrência

Este capítulo trata do estudo da localização dos zeros de polinômios gerados por uma certa relação de recorrência de três termos. Estudaremos regiões que contém zeros e outras livres de zeros, chamadas regiões parabólicas livres de zero. A principal referência é o artigo de Silva e Sri Ranga [22].

### 3.1 Zeros e suas representações como autovalores

Consideremos a sequência de polinômios  $\{Q_m\}$  gerados pela relação de recorrência de três termos

$$Q_{m+1}(z) = (z + \beta_{m+1})Q_m(z) - \alpha_{m+1}zQ_{m-1}(z), \quad m \geq 1, \quad (3.1)$$

com  $Q_0(z) = 1$  e  $Q_1(z) = (z + \beta_1)$ , onde os números complexos  $\alpha_m$  e  $\beta_m$  são tais que

$$\alpha_m \neq 0, \quad m = 2, 3, \dots \quad \text{e} \quad \beta_m \neq 0, \quad m = 1, 2, \dots$$

Se

$$\alpha_{m+1} > 0 \quad \text{e} \quad \beta_m < 0 \quad \text{para} \quad m \geq 1, \quad (3.2)$$

então os polinômios correspondentes satisfazem à propriedade da ortogonalidade dada em (2.32), ou seja,

$$\int_0^\infty t^{-m+s} Q_m(t) d\phi(t) = \begin{cases} 0, & s = 0, 1, \dots, m-1 \\ \rho_n > 0, & s = m \end{cases}, \quad (3.3)$$

onde  $d\phi$  é uma medida forte e positiva definida no eixo real positivo.

**Propriedade 3.1.1.** *Consideremos a relação de recorrência (3.1). Então,*

(i)  $Q_m(0) = \beta_1\beta_2 \dots \beta_m \neq 0$  para  $m \geq 1$ . Ou seja,  $z = 0$  não é raiz do polinômio  $Q_m$  para qualquer  $m \geq 1$ ;

(ii) além disso, podemos escrever as formas

$$\alpha_2 z = (z + \beta_2)Q_1(z) - Q_2(z), \quad (3.4)$$

$$\alpha_{m+1} z = (z + \beta_{m+1}) \frac{Q_m(z)}{Q_{m-1}(z)} - \frac{Q_{m+1}(z)}{Q_{m-1}(z)}, \quad m \geq 2. \quad (3.5)$$

**Demonstração:** Por indução mostraremos o item (i).

Usando (3.1), temos que  $Q_1(0) = \beta_1 \neq 0$ . Suponhamos que o resultado seja válido para  $m$ , isto é,  $Q_m(0) = \beta_1\beta_2 \dots \beta_m \neq 0$ . Novamente de (3.1),  $Q_{m+1}(0) = \beta_{m+1}Q_m(0) = \beta_1\beta_2 \dots \beta_m\beta_{m+1} \neq 0$ , pois  $\beta_m \neq 0$  para todo  $m \geq 1$ .

Para provar o item (ii), de (3.1) vemos facilmente que

$$\alpha_{m+1} z Q_{m-1}(z) = (z + \beta_{m+1})Q_m(z) - Q_{m+1}(z).$$

Logo,  $\alpha_{m+1} z = (z + \beta_{m+1}) \frac{Q_m(z)}{Q_{m-1}(z)} - \frac{Q_{m+1}(z)}{Q_{m-1}(z)}$ ,  $m \geq 1$ . Fazendo  $m = 1$ ,

$$\alpha_2 z = (z + \beta_2) \frac{Q_1(z)}{Q_0(z)} - \frac{Q_2(z)}{Q_0(z)} = (z + \beta_2)Q_1(z) - Q_2(z).$$

■

**Lema 3.1.1.** Para qualquer  $m \geq 1$ , dois polinômios de graus consecutivos,  $Q_m$  e  $Q_{m+1}$ , não têm zeros em comum.

**Demonstração:** Seja  $w \in \mathbb{C}$ ,  $w \neq 0$ , e suponhamos que  $Q_1(w) = Q_2(w) = 0$ . De (3.1), temos  $Q_1(w) = w + \beta_1 = 0$ . Logo,

$$w = -\beta_1. \quad (3.6)$$

Novamente de (3.1),

$$Q_2(w) = (w + \beta_2)Q_1(w) - \alpha_2 w = -\alpha_2 w = 0 \iff w = 0. \quad (3.7)$$

Então, de (3.6) e (3.7) temos uma contradição. Portanto,  $Q_1$  e  $Q_2$  não têm zeros em comum.

Agora, consideremos  $m \geq 2$  e suponhamos que  $Q_{m-1}$  e  $Q_m$  não tenham zeros em comum. Logo, se  $Q_m(w) = 0$ , então  $Q_{m-1}(w) \neq 0$ . Como

$$Q_{m+1}(w) = (w + \beta_{m+1})Q_m(w) - \alpha_{m+1}wQ_{m-1}(w),$$

então  $Q_{m+1}(w) = -\alpha_{m+1}wQ_{m-1}(w)$ . Desde que  $\alpha_{m+1} > 0$  para  $m \geq 1$  e  $w \neq 0$ , segue que  $Q_{m+1}(w) \neq 0$ . Assim, por indução, provamos que  $Q_m$  e  $Q_{m+1}$  não têm raízes em comum para todo  $m \geq 1$ . ■

O teorema que enunciaremos a seguir mostra que podemos representar os polinômios gerados pela relação de recorrência (3.1) por um determinante.

**Teorema 3.1.1.** *Da relação de recorrência (3.1), verifica-se que, para todo  $n \geq 1$ ,*

$$Q_n(z) = \det(\mathbf{Q}_n(z)) = \begin{vmatrix} z + \beta_1 & -\alpha_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -z & z + \beta_2 & -\alpha_3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -z & z + \beta_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & z + \beta_{n-1} & -\alpha_n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -z & z + \beta_n \end{vmatrix}. \quad (3.8)$$

**Demonstração:** Se  $n = 1$  temos que  $|z + \beta_1| = z + \beta_1 = Q_1(z)$ . Vamos supor que o resultado seja válido para  $k$ ,  $1 \leq k \leq n - 1$ . Logo,

$$Q_k(z) = \begin{vmatrix} z + \beta_1 & -\alpha_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -z & z + \beta_2 & -\alpha_3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -z & z + \beta_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & z + \beta_{k-1} & -\alpha_k \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -z & z + \beta_k \end{vmatrix}, \quad 1 \leq k \leq n - 1.$$

Então, pela regra de Laplace,

$$\begin{vmatrix} z + \beta_1 & -\alpha_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -z & z + \beta_2 & -\alpha_3 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -z & z + \beta_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & z + \beta_{n-1} & -\alpha_n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -z & z + \beta_n \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= (z + \beta_n)Q_{n-1}(z) + \alpha_n \begin{vmatrix} z + \beta_1 & -\alpha_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -z & z + \beta_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -z & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -z & z + \beta_{n-2} & -\alpha_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -z \end{vmatrix} \\
&= (z + \beta_n)Q_{n-1}(z) - \alpha_n z Q_{n-2}(z) = Q_n(z). \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

O resultado que apresentaremos a seguir afirma que os zeros de  $Q_n$  são os autovalores de uma matriz cujos elementos são obtidos da relação de recorrência (3.1).

**Teorema 3.1.2.** *Os zeros de  $Q_n$  são os autovalores da matriz de Hessenberg inferior*

$$\mathbf{H}_n^{(Q)} = \begin{pmatrix} \eta_1 & \alpha_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \eta_1 & \eta_2 & \alpha_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \dots & \alpha_{n-1} & 0 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \dots & \eta_{n-1} & \alpha_n \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \dots & \eta_{n-1} & \eta_n \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

onde  $\eta_m = \alpha_m - \beta_m$ ,  $m = 1, 2, \dots, n$ , com  $\alpha_1 = 0$ .

**Demonstração:** Consideremos a matriz  $\mathbf{Q}_n(z)$  cujo determinante é dado em (3.8). Observe que ela pode ser escrita como  $\mathbf{Q}_n(z) = z\mathbf{A}_n - \mathbf{B}_n$ , com  $\mathbf{A}_n$  e  $\mathbf{B}_n$  dadas por:

$$\mathbf{A}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } \mathbf{B}_n = \begin{pmatrix} -\beta_1 & \alpha_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\beta_2 & \alpha_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\beta_{n-1} & \alpha_n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\beta_n \end{pmatrix}.$$

Como  $\det(\mathbf{A}_n) = 1$ ,  $\mathbf{A}_n$  é não singular. Logo,

$$\begin{aligned}
Q_n(z) &= \det(z\mathbf{A}_n - \mathbf{B}_n) = \det[\mathbf{A}_n(z\mathbf{I}_n - \mathbf{A}_n^{-1}\mathbf{B}_n)] \\
&= \det(\mathbf{A}_n)\det(z\mathbf{I}_n - \mathbf{A}_n^{-1}\mathbf{B}_n) = \det(z\mathbf{I}_n - \mathbf{A}_n^{-1}\mathbf{B}_n),
\end{aligned}$$

onde  $\mathbf{I}_n$  é a matriz identidade de ordem  $n$ .

Mas,  $\mathbf{A}_n^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Portanto,  $\mathbf{A}_n^{-1}\mathbf{B}_n$  é a matriz dada por

$$\mathbf{A}_n^{-1}\mathbf{B}_n = \begin{pmatrix} -\beta_1 & \alpha_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\beta_1 & \alpha_2 - \beta_2 & \alpha_3 & \dots & 0 & 0 \\ -\beta_1 & \alpha_2 - \beta_2 & \alpha_3 - \beta_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -\beta_1 & \alpha_2 - \beta_2 & \alpha_3 - \beta_3 & \dots & \alpha_{n-1} - \beta_{n-1} & \alpha_n \\ -\beta_1 & \alpha_2 - \beta_2 & \alpha_3 - \beta_3 & \dots & \alpha_{n-1} - \beta_{n-1} & \alpha_n - \beta_n \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Considerando  $\eta_m = \alpha_m - \beta_m$ ,  $m = 1, 2, \dots, n$ , verificamos que a matriz (3.10) é exatamente  $\mathbf{H}_n^{(Q)}$ . Portanto,  $Q_n$  é o polinômio característico (mônico) associado à matriz de Hessenberg inferior  $\mathbf{H}_n^{(Q)} = \mathbf{A}_n^{-1}\mathbf{B}_n$ . ■

Como  $\det(\mathbf{A}_n) = 1$ , então

$$\begin{aligned} Q_n(z) &= \det(z\mathbf{A}_n - \mathbf{B}_n) = \det[(z\mathbf{I}_n - \mathbf{B}_n\mathbf{A}_n^{-1})\mathbf{A}_n] \\ &= \det(z\mathbf{I}_n - \mathbf{B}_n\mathbf{A}_n^{-1})\det(\mathbf{A}_n) = \det(z\mathbf{I}_n - \mathbf{B}_n\mathbf{A}_n^{-1}). \end{aligned}$$

A matriz  $\mathbf{B}_n\mathbf{A}_n^{-1}$  é dada da seguinte forma:

$$\mathbf{B}_n\mathbf{A}_n^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha_2 - \beta_1 & \alpha_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \alpha_3 - \beta_2 & \alpha_3 - \beta_2 & \alpha_3 & \dots & 0 & 0 \\ \alpha_4 - \beta_3 & \alpha_4 - \beta_3 & \alpha_4 - \beta_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \alpha_n - \beta_{n-1} & \alpha_n - \beta_{n-1} & \alpha_n - \beta_{n-1} & \dots & \alpha_n - \beta_{n-1} & \alpha_n \\ -\beta_n & -\beta_n & -\beta_n & \dots & -\beta_n & -\beta_n \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

Assim,  $Q_n(z)$  também é o polinômio característico associado à matriz (3.11) e, da mesma maneira, temos que se  $z$  é zero do polinômio  $Q_n$ , então  $z$  é um autovalor desta matriz.

Sabemos que  $(z\mathbf{I}_n - \mathbf{B}_n\mathbf{A}_n^{-1})^T = [z\mathbf{I}_n - (\mathbf{B}_n\mathbf{A}_n^{-1})^T]$  e que o determinante da transposta de uma matriz é igual ao determinante da matriz. Logo,  $Q_n(z) = \det(z\mathbf{I}_n - \mathbf{B}_n\mathbf{A}_n^{-1}) = \det[z\mathbf{I}_n - (\mathbf{B}_n\mathbf{A}_n^{-1})^T]$ . Concluimos, então, que  $Q_n(z)$  é também o polinômio característico associado à matriz de Hessenberg superior  $(\mathbf{B}_n\mathbf{A}_n^{-1})^T$ . Usando a notação  $\gamma_m = \alpha_{m+1} -$

$\beta_m$ ,  $m = 1, 2, \dots, n$ , temos que a transposta da matriz (3.11) pode ser escrita como

$$(\mathbf{B}_n \mathbf{A}_n^{-1})^T = \begin{pmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \cdots & \gamma_{n-1} & -\beta_n \\ \alpha_2 & \gamma_2 & \gamma_3 & \cdots & \gamma_{n-1} & -\beta_n \\ 0 & \alpha_3 & \gamma_3 & \cdots & \gamma_{n-1} & -\beta_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \gamma_{n-1} & -\beta_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha_n & -\beta_n \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

**Teorema 3.1.3.** *Sejam  $\tilde{Q}_0(z) = \hat{Q}_0(z) = Q_0(z)$  e, para  $1 \leq m \leq n$ ,*

$$\tilde{Q}_m(z) = z^{-m} Q_m(z) \quad e \quad \hat{Q}_m(z) = (\alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_{m+1})^{-1} Q_m(z). \quad (3.13)$$

Então,

$$(a) \quad z[-\hat{Q}_{m-1}(z) + \hat{Q}_m(z)] = -\beta_{m+1} \hat{Q}_m(z) + \alpha_{m+2} \hat{Q}_{m+1}(z), \quad 1 \leq m \leq n-1, \\ \text{com } z\hat{Q}_0(z) = -\beta_1 \hat{Q}_0(z) + \alpha_2 \hat{Q}_1(z);$$

$$(b) \quad z[\tilde{Q}_m(z) - \tilde{Q}_{m+1}(z)] = \alpha_{m+1} \tilde{Q}_{m-1}(z) - \beta_{m+1} \tilde{Q}_m(z), \quad 1 \leq m \leq n-1, \\ \text{com } z[\tilde{Q}_0(z) - \tilde{Q}_1(z)] = -\beta_1 \tilde{Q}_0(z).$$

Além disso, podemos obter as seguintes representações matriciais:

$$(c) \quad z \mathbf{A}_n \hat{\mathbf{b}}(z) = \mathbf{B}_n \hat{\mathbf{b}}(z) + \alpha_{n+1} \hat{Q}_n(z) \mathbf{e}_n;$$

$$(d) \quad z \tilde{\mathbf{b}}(z)^T \mathbf{A}_n = \tilde{\mathbf{b}}(z)^T \mathbf{B}_n + z \tilde{Q}_n(z) \mathbf{e}_n^T, \quad \text{onde } \mathbf{e}_n \text{ é a } n\text{-ésima coluna de } \mathbf{I}_n, \hat{\mathbf{b}}(z) = \\ [\hat{Q}_0(z), \hat{Q}_1(z), \dots, \hat{Q}_{n-1}(z), \hat{Q}_n(z)]^T \text{ e } \tilde{\mathbf{b}}(z) = [\tilde{Q}_0(z), \tilde{Q}_1(z), \dots, \tilde{Q}_{n-1}(z), \tilde{Q}_n(z)]^T.$$

**Demonstração:** Item (a)– Da relação de recorrência (3.1) e de (3.13), obtemos

$$(\alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_{m+1}) \hat{Q}_m(z) = Q_m(z).$$

Assim,

$$(\alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_{m+2}) \hat{Q}_{m+1}(z) = (z + \beta_{m+1}) (\alpha_2 \dots \alpha_{m+1}) \hat{Q}_m(z) - \alpha_{m+1} z (\alpha_2 \dots \alpha_m) \hat{Q}_{m-1}(z),$$

ou seja,  $\alpha_{m+2} \hat{Q}_{m+1}(z) = z \hat{Q}_m(z) + \beta_{m+1} \hat{Q}_m(z) - z \hat{Q}_{m-1}(z)$ . Logo,

$$z[-\hat{Q}_m(z) + \hat{Q}_{m-1}(z)] = \beta_{m+1} \hat{Q}_m(z) - \alpha_{m+2} \hat{Q}_{m+1}(z). \quad (3.14)$$

Como  $Q_1(z) = (z + \beta_1) Q_0(z)$ , então  $\alpha_2 \hat{Q}_1(z) = (z + \beta_1) \hat{Q}_0(z)$ .

Portanto,  $-z \hat{Q}_0(z) = \beta_1 \hat{Q}_0(z) - \alpha_2 \hat{Q}_1$ , isto é,

$$z \hat{Q}_0(z) = \alpha_2 \hat{Q}_1(z) - \beta_1 \hat{Q}_0(z). \quad (3.15)$$

Item (b)– De (3.13), temos que  $z^m \tilde{Q}_m(z) = Q_m(z)$ . Substituindo na relação de recorrência de três termos (3.1), obtemos

$$z^{m+1} \tilde{Q}_{m+1}(z) = (z - \beta_{m+1})z^m \tilde{Q}_m(z) - \alpha_{m+1}z z^{m-1} \tilde{Q}_{m-1}(z),$$

ou seja,  $z \tilde{Q}_{m+1}(z) = (z - \beta_{m+1}) \tilde{Q}_m(z) - \alpha_{m+1} \tilde{Q}_{m-1}(z)$ , que é equivalente a escrever

$$z[\tilde{Q}_m(z) - \tilde{Q}_{m+1}(z)] = \alpha_{m+1} \tilde{Q}_{m-1}(z) - \beta_{m+1} \tilde{Q}_m(z). \quad (3.16)$$

Temos, ainda, que  $z \tilde{Q}_1(z) = z \tilde{Q}_0(z) + \beta_1 \tilde{Q}_0(z)$ , ou seja,

$$z[\tilde{Q}_0(z) - \tilde{Q}_1(z)] = -\beta_1 \tilde{Q}_0(z). \quad (3.17)$$

Para provar o item (c), obtemos, da relação de recorrência (3.1), o seguinte sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_1(z) = (z + \beta_1)Q_0(z) \\ Q_2(z) = (z + \beta_2)Q_1(z) - \alpha_2 z Q_0(z) \\ Q_3(z) = (z + \beta_3)Q_2(z) - \alpha_3 z Q_1(z) \\ \vdots \\ Q_{n-1}(z) = (z + \beta_{n-1})Q_{n-2}(z) - \alpha_{n-1} z Q_{n-3}(z) \\ Q_n(z) = (z + \beta_n)Q_{n-1}(z) - \alpha_n z Q_{n-2}(z) \end{array} \right. . \quad (3.18)$$

A partir da segunda, vamos multiplicar cada equação acima por  $(\alpha_2 \alpha_3 \dots \alpha_k)^{-1}$ ,  $k = 2, 3, \dots, n$ , e obtemos o sistema equivalente

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_1(z) = (z + \beta_1)Q_0(z) \\ \frac{Q_2(z)}{\alpha_2} = (z + \beta_2) \frac{Q_1(z)}{\alpha_2} - z Q_0(z) \\ \frac{Q_3(z)}{\alpha_2 \alpha_3} = (z + \beta_3) \frac{Q_2(z)}{\alpha_2 \alpha_3} - z \frac{Q_1(z)}{\alpha_2} \\ \vdots \\ \frac{Q_{n-1}(z)}{\alpha_2 \dots \alpha_{n-1}} = (z + \beta_{n-1}) \frac{Q_{n-2}(z)}{\alpha_2 \dots \alpha_{n-1}} - z \frac{Q_{n-3}(z)}{\alpha_2 \dots \alpha_{n-2}} \\ \frac{Q_n(z)}{\alpha_2 \dots \alpha_n} = (z + \beta_n) \frac{Q_{n-1}(z)}{\alpha_2 \dots \alpha_n} - z \frac{Q_{n-2}(z)}{\alpha_2 \dots \alpha_{n-1}} \end{array} \right. . \quad (3.19)$$

De (3.13), podemos escrever o sistema (3.19) da seguinte forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_2 \hat{Q}_1(z) = (z + \beta_1) \hat{Q}_0(z) \\ \alpha_3 \hat{Q}_2(z) = (z + \beta_2) \hat{Q}_1(z) - z \hat{Q}_0(z) \\ \alpha_4 \hat{Q}_3(z) = (z + \beta_3) \hat{Q}_2(z) - z \hat{Q}_1(z) \\ \vdots \\ \alpha_n \hat{Q}_{n-1}(z) = (z + \beta_{n-1}) \hat{Q}_{n-2}(z) - z \hat{Q}_{n-3}(z) \\ \alpha_{n+1} \hat{Q}_n(z) = (z + \beta_n) \hat{Q}_{n-1}(z) - z \hat{Q}_{n-2}(z) \end{array} \right. \quad (3.20)$$

ou, equivalentemente,

$$\left\{ \begin{array}{l} z\hat{Q}_0(z) = -\beta_1\hat{Q}_0(z) + \alpha_2\hat{Q}_1(z) \\ -z\hat{Q}_0(z) + z\hat{Q}_1(z) = -\beta_2\hat{Q}_1(z) + \alpha_3\hat{Q}_2(z) \\ -z\hat{Q}_1(z) + z\hat{Q}_2(z) = -\beta_3\hat{Q}_2(z) + \alpha_4\hat{Q}_3(z) \\ \vdots \\ -z\hat{Q}_{n-3}(z) + z\hat{Q}_{n-2}(z) = -\beta_{n-1}\hat{Q}_{n-2}(z) + \alpha_n\hat{Q}_{n-1}(z) \\ -z\hat{Q}_{n-2}(z) + z\hat{Q}_{n-1}(z) = -\beta_n\hat{Q}_{n-1}(z) + \alpha_{n+1}\hat{Q}_n(z) \end{array} \right. \quad (3.21)$$

Escrevendo este sistema em notação matricial, obtemos

$$z \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{Q}_0 \\ \hat{Q}_1 \\ \hat{Q}_2 \\ \vdots \\ \hat{Q}_{n-2} \\ \hat{Q}_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta_1 & \alpha_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\beta_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \beta_{n-1} & \alpha_n \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -\beta_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{Q}_0 \\ \hat{Q}_1 \\ \hat{Q}_2 \\ \vdots \\ \hat{Q}_{n-2} \\ \hat{Q}_{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \alpha_{n+1}\hat{Q}_n \end{pmatrix},$$

ou seja,

$$z\mathbf{A}_n \hat{\mathbf{b}}(z) = \mathbf{B}_n \hat{\mathbf{b}}(z) + \alpha_{n+1}\hat{Q}_n(z)\mathbf{e}_n. \quad (3.22)$$

Para provar o item (d), consideremos o sistema (3.18) e, novamente, a partir da segunda, multiplicamos cada equação por  $\frac{1}{z^k}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ , obtendo o novo sistema equivalente:

$$\left\{ \begin{array}{l} Q_1(z) = (z + \beta_1)Q_0(z) \\ \frac{Q_2(z)}{z} = (z + \beta_2)\frac{Q_1(z)}{z} - \alpha_2 Q_0(z) \\ \frac{Q_3(z)}{z^2} = (z + \beta_3)\frac{Q_2(z)}{z^2} - \alpha_3 \frac{Q_1(z)}{z} \\ \vdots \\ \frac{Q_{n-1}(z)}{z^{n-2}} = (z + \beta_{n-1})\frac{Q_{n-2}(z)}{z^{n-2}} - \alpha_{n-1} \frac{Q_{n-3}(z)}{z^{n-3}} \\ \frac{Q_n(z)}{z^{n-1}} = (z + \beta_n)\frac{Q_{n-1}(z)}{z^{n-1}} - \alpha_n \frac{Q_{n-2}(z)}{z^{n-2}} \end{array} \right. \quad (3.23)$$



De (3.13), podemos escrever o sistema anterior da seguinte forma:

$$\begin{cases} z\tilde{Q}_1(z) &= (z + \beta_1)\tilde{Q}_0(z) \\ z\tilde{Q}_2(z) &= (z + \beta_2)\tilde{Q}_1(z) - \alpha_2\tilde{Q}_0(z) \\ z\tilde{Q}_3(z) &= (z + \beta_3)\tilde{Q}_2(z) - \alpha_3\tilde{Q}_1(z) \\ &\vdots \\ z\tilde{Q}_{n-1}(z) &= (z + \beta_{n-1})\tilde{Q}_{n-2}(z) - \alpha_{n-1}\tilde{Q}_{n-3}(z) \\ z\tilde{Q}_n(z) &= (z + \beta_n)\tilde{Q}_{n-1}(z) - \alpha_n\tilde{Q}_{n-2}(z) \end{cases}, \quad (3.24)$$

ou seja,

$$\begin{cases} z\tilde{Q}_0(z) - z\tilde{Q}_1(z) &= -\beta_1\tilde{Q}_0(z) \\ z\tilde{Q}_1(z) - z\tilde{Q}_2(z) &= \alpha_2\tilde{Q}_0(z) - \beta_2\tilde{Q}_1(z) \\ z\tilde{Q}_2(z) - z\tilde{Q}_3(z) &= \alpha_3\tilde{Q}_1(z) - \beta_3\tilde{Q}_2(z) \\ &\vdots \\ z\tilde{Q}_{n-2}(z) - z\tilde{Q}_{n-1}(z) &= \alpha_{n-1}\tilde{Q}_{n-3}(z) - \beta_{n-1}\tilde{Q}_{n-2}(z) \\ z\tilde{Q}_{n-1}(z) &= \alpha_n\tilde{Q}_{n-2}(z) - \beta_n\tilde{Q}_{n-1}(z) + z\tilde{Q}_n(z) \end{cases}. \quad (3.25)$$

Em notação matricial, temos

$$z \begin{pmatrix} 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{Q}_0 \\ \tilde{Q}_1 \\ \tilde{Q}_2 \\ \vdots \\ \tilde{Q}_{n-2} \\ \tilde{Q}_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \alpha_2 & -\beta_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -\beta_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_n & -\beta_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{Q}_0 \\ \tilde{Q}_1 \\ \tilde{Q}_2 \\ \vdots \\ \tilde{Q}_{n-2} \\ \tilde{Q}_{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ z\tilde{Q}_n \end{pmatrix},$$

isto é,  $z\mathbf{A}_n^T \tilde{\mathbf{b}}(z) = \mathbf{B}_n^T \tilde{\mathbf{b}}(z) + z\tilde{Q}_n(z)\mathbf{e}_n$ . Aplicando a transposta em ambos os lados da última igualdade, obtemos

$$z\tilde{\mathbf{b}}(z)^T \mathbf{A}_n = \tilde{\mathbf{b}}(z)^T \mathbf{B}_n + z\tilde{Q}_n(z)\mathbf{e}_n^T, \quad (3.26)$$

que é o resultado desejado, concluindo, assim, a demonstração do teorema.  $\blacksquare$

**Lema 3.1.2.** [Autovalores e Autovetores da matriz  $\mathbf{H}_n^{(Q)}$ ]

- (i) Os vetores  $\hat{\mathbf{b}}(z_{n,j})$ , para  $j = 1, 2, \dots, n$ , são autovetores à direita da matriz  $\mathbf{H}_n^{(Q)} = \mathbf{A}_n^{-1} \mathbf{B}_n$  associados com os autovalores  $z_{n,j}$ . Além disso, desde que esses autovalores são distintos, os correspondentes autovetores  $\hat{\mathbf{b}}(z_{n,j})$  são linearmente independentes;
- (ii) os vetores  $\mathbf{c}(z_{n,j}) = \mathbf{A}_n^T \tilde{\mathbf{b}}(z_{n,j})$  são autovetores à esquerda da matriz  $\mathbf{H}_n^{(Q)}$  associados com os autovalores  $z_{n,j}$ ;
- (iii) os vetores  $\tilde{\mathbf{b}}(z_{n,j})$  são autovetores à esquerda da matriz  $\mathbf{B}_n \mathbf{A}_n^{-1}$  e  $z_{n,j}$  são os correspondentes autovalores.

**Demonstração:** Para demonstrar o item (i) consideremos a representação matricial (3.22). Então,  $z \mathbf{A}_n^{-1} \mathbf{A}_n \hat{\mathbf{b}}(z) = \mathbf{A}_n^{-1} \mathbf{B}_n \hat{\mathbf{b}}(z) + \alpha_{n+1} \mathbf{A}_n^{-1} \hat{Q}_n(z) \mathbf{e}_n$ . Fazendo  $z = z_{n,j}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$  (as raízes de  $Q_n$ ), obtemos  $z_{n,j} \hat{\mathbf{b}}(z_{n,j}) = \mathbf{A}_n^{-1} \mathbf{B}_n \hat{\mathbf{b}}(z_{n,j}) + \alpha_{n+1} \mathbf{A}_n^{-1} \hat{Q}_n(z_{n,j}) \mathbf{e}_n$ , ou seja,

$$z_{n,j} \hat{\mathbf{b}}(z_{n,j}) = \mathbf{A}_n^{-1} \mathbf{B}_n \hat{\mathbf{b}}(z_{n,j}).$$

Portanto,  $\hat{\mathbf{b}}(z_{n,j})$  é autovetor à direita da matriz  $\mathbf{H}_n^{(Q)}$ . Como  $Q_n$  satisfaz (3.3), do Teorema 2.10.3 segue que seus zeros são distintos. Assim, pelo Teorema 2.3.1,  $\hat{\mathbf{b}}(z_{n,j})$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , são todos LI.

(ii) Consideremos a representação matricial (3.26). Como anteriormente, fazendo  $z = z_{n,j}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , obtemos  $z_{n,j} \tilde{\mathbf{b}}(z_{n,j})^T \mathbf{A}_n = \tilde{\mathbf{b}}(z_{n,j})^T \mathbf{A}_n \mathbf{A}_n^{-1} \mathbf{B}_n + z_{n,j} \tilde{Q}_n(z_{n,j}) \mathbf{e}_n^T$ , isto é,

$$z_{n,j} [\tilde{\mathbf{b}}(z_{n,j})^T \mathbf{A}_n] = [\tilde{\mathbf{b}}(z_{n,j})^T \mathbf{A}_n] \mathbf{A}_n^{-1} \mathbf{B}_n,$$

ou seja,

$$z_{n,j} \mathbf{c}(z_{n,j})^T = \mathbf{c}(z_{n,j})^T \mathbf{H}_n^{(Q)}. \quad (3.27)$$

Desta maneira,  $\mathbf{c}(z_{n,j})$  é autovetor à esquerda de  $\mathbf{H}_n^{(Q)}$ .

(iii) Novamente da representação matricial (3.26), obtemos

$$z \tilde{\mathbf{b}}(z)^T \mathbf{A}_n \mathbf{A}_n^{-1} = \tilde{\mathbf{b}}(z)^T \mathbf{B}_n \mathbf{A}_n^{-1} + z \tilde{Q}_n(z) \mathbf{e}_n^T \mathbf{A}_n^{-1}.$$

Considerando,  $z = z_{n,j}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , concluímos que  $z_{n,j} \tilde{\mathbf{b}}(z_{n,j})^T = \tilde{\mathbf{b}}(z_{n,j})^T \mathbf{B}_n \mathbf{A}_n^{-1}$ . ■

## 3.2 Ortogonalidade dos Autovetores

**Teorema 3.2.1.** [Fórmula do Tipo Identidade de Cristoffel-Darboux]

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{n-2} [\tilde{Q}_m(z) - \tilde{Q}_{m+1}(z)] \hat{Q}_m(w) + \tilde{Q}_{n-1}(z) \hat{Q}_{n-1}(w) \\ = \frac{z \tilde{Q}_n(z) \hat{Q}_{n-1}(w) - \alpha_{n+1} \hat{Q}_n(w) \hat{Q}_{n-1}(z)}{z - w}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

**Demonstração:** Fazendo  $z = w$  e, em seguida, multiplicando a equação (3.22) à direita por  $\tilde{\mathbf{b}}(z)^T$ , obtemos

$$w \mathbf{A}_n \hat{\mathbf{b}}(w) \tilde{\mathbf{b}}(z)^T = \mathbf{B}_n \hat{\mathbf{b}}(w) \tilde{\mathbf{b}}(z)^T + \alpha_{n+1} \hat{Q}_n(w) \mathbf{e}_n \tilde{\mathbf{b}}(z)^T. \quad (3.29)$$

Agora, multiplicamos (3.26) à esquerda por  $\hat{\mathbf{b}}(w)$  e obtemos

$$z \hat{\mathbf{b}}(w) \tilde{\mathbf{b}}(z)^T \mathbf{A}_n = \hat{\mathbf{b}}(w) \tilde{\mathbf{b}}(z)^T \mathbf{B}_n + z \hat{\mathbf{b}}(w) \tilde{Q}_n(z) \mathbf{e}_n^T. \quad (3.30)$$

Então, de (3.29),  $\text{tr}[w \mathbf{A}_n \hat{\mathbf{b}}(w) \tilde{\mathbf{b}}(z)^T] = \text{tr}[\mathbf{B}_n \hat{\mathbf{b}}(w) \tilde{\mathbf{b}}(z)^T] + \text{tr}[\alpha_{n+1} \hat{Q}_n(w) \mathbf{e}_n \tilde{\mathbf{b}}(z)^T]$ , ou seja,

$$w \text{tr}[\mathbf{A}_n \hat{\mathbf{b}}(w) \tilde{\mathbf{b}}(z)^T] = \text{tr}[\mathbf{B}_n \hat{\mathbf{b}}(w) \tilde{\mathbf{b}}(z)^T] + \alpha_{n+1} \text{tr}[\hat{Q}_n(w) \mathbf{e}_n \tilde{\mathbf{b}}(z)^T]. \quad (3.31)$$

De (3.30),  $\text{tr}[z \hat{\mathbf{b}}(w) \tilde{\mathbf{b}}(z)^T \mathbf{A}_n] = \text{tr}[\hat{\mathbf{b}}(w) \tilde{\mathbf{b}}(z)^T \mathbf{B}_n] + \text{tr}[z \hat{\mathbf{b}}(w) \tilde{Q}_n(z) \mathbf{e}_n^T]$ , isto é,

$$z \text{tr}[\hat{\mathbf{b}}(w) \tilde{\mathbf{b}}(z)^T \mathbf{A}_n] = \text{tr}[\hat{\mathbf{b}}(w) \tilde{\mathbf{b}}(z)^T \mathbf{B}_n] + z \text{tr}[\hat{\mathbf{b}}(w) \tilde{Q}_n(z) \mathbf{e}_n^T]. \quad (3.32)$$

Subtraindo (3.32) de (3.31), obtemos

$$(z - w) \text{tr}[\hat{\mathbf{b}}(w) \tilde{\mathbf{b}}(z)^T \mathbf{A}_n] = z \text{tr}[\hat{\mathbf{b}}(w) \tilde{Q}_n(z) \mathbf{e}_n^T] - \alpha_{n+1} \text{tr}[\hat{Q}_n(w) \mathbf{e}_n \tilde{\mathbf{b}}(z)^T],$$

ou seja,

$$(z - w) \text{tr}[\mathbf{C}_n^{(1)}] = z \text{tr}[\mathbf{C}_n^{(2)}] - \alpha_{n+1} \text{tr}[\mathbf{C}_n^{(3)}], \quad (3.33)$$

onde  $\mathbf{C}_n^{(1)} = \hat{\mathbf{b}}(w) \tilde{\mathbf{b}}(z)^T \mathbf{A}_n$ ,  $\mathbf{C}_n^{(2)} = \hat{\mathbf{b}}(w) \tilde{Q}_n(z) \mathbf{e}_n^T$  e  $\mathbf{C}_n^{(3)} = \hat{Q}_n(w) \mathbf{e}_n \tilde{\mathbf{b}}(z)^T$ .

Determinemos as matrizes  $\mathbf{C}_n^{(1)}$ ,  $\mathbf{C}_n^{(2)}$  e  $\mathbf{C}_n^{(3)}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_n^{(1)} &= \begin{pmatrix} \hat{Q}_0(w) \\ \hat{Q}_1(w) \\ \hat{Q}_2(w) \\ \vdots \\ \hat{Q}_{n-1}(w) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{Q}_0(z) & \tilde{Q}_1(z) & \tilde{Q}_2(z) & \dots & \tilde{Q}_{n-1}(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \hat{Q}_0(w)[\tilde{Q}_0(z) - \tilde{Q}_1(z)] & \hat{Q}_0(w)[\tilde{Q}_1(z) - \tilde{Q}_2(z)] & \dots & \hat{Q}_0(w)\tilde{Q}_{n-1}(z) \\ \hat{Q}_1(w)[\tilde{Q}_0(z) - \tilde{Q}_1(z)] & \hat{Q}_1(w)[\tilde{Q}_1(z) - \tilde{Q}_2(z)] & \dots & \hat{Q}_1(w)\tilde{Q}_{n-1}(z) \\ \hat{Q}_2(w)[\tilde{Q}_0(z) - \tilde{Q}_1(z)] & \hat{Q}_2(w)[\tilde{Q}_1(z) - \tilde{Q}_2(z)] & \dots & \hat{Q}_2(w)\tilde{Q}_{n-1}(z) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{Q}_{n-2}(w)[\tilde{Q}_0(z) - \tilde{Q}_1(z)] & \hat{Q}_{n-2}(w)[\tilde{Q}_1(z) - \tilde{Q}_2(z)] & \dots & \hat{Q}_{n-2}(w)\tilde{Q}_{n-1}(z) \\ \hat{Q}_{n-1}(w)[\tilde{Q}_0(z) - \tilde{Q}_1(z)] & \hat{Q}_{n-1}(w)[\tilde{Q}_1(z) - \tilde{Q}_2(z)] & \dots & \hat{Q}_{n-1}(w)\tilde{Q}_{n-1}(z) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\text{tr}(\mathbf{C}_n^{(1)}) = \sum_{m=0}^{n-2} [\tilde{Q}_m(z) - \tilde{Q}_{m+1}(z)] \hat{Q}_m(w) + \hat{Q}_{n-1}(w) \tilde{Q}_{n-1}(z). \quad (3.34)$$

$$\mathbf{C}_n^{(2)} = \begin{pmatrix} \hat{Q}_0(w) \\ \hat{Q}_1(w) \\ \vdots \\ \hat{Q}_{n-1}(w) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & \tilde{Q}_n(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & \hat{Q}_0(w) \tilde{Q}_n(z) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \hat{Q}_1(w) \tilde{Q}_n(z) \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \hat{Q}_2(w) \tilde{Q}_n(z) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \hat{Q}_{n-1}(w) \tilde{Q}_n(z) \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$\text{tr}(\mathbf{C}_n^{(2)}) = \hat{Q}_{n-1}(w) \tilde{Q}_n(z). \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_n^{(3)} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \hat{Q}_n(w) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{Q}_0(z) & \hat{Q}_1(z) & \dots & \hat{Q}_{n-1}(z) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hat{Q}_n(w) \hat{Q}_0(z) & \hat{Q}_n(w) \hat{Q}_1(z) & \dots & \hat{Q}_n(w) \hat{Q}_{n-1}(z) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Desta forma,

$$\text{tr}(\mathbf{C}_n^{(3)}) = \hat{Q}_n(w) \hat{Q}_{n-1}(z). \quad (3.36)$$

Substituindo (3.34), (3.35) e (3.36) em (3.33), obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{n-2} [\tilde{Q}_m(z) - \tilde{Q}_{m+1}(z)] \hat{Q}_m(w) + \tilde{Q}_{n-1}(z) \hat{Q}_{n-1}(w) \\ = \frac{z \tilde{Q}_n(z) \hat{Q}_{n-1}(w) - \alpha_{n+1} \hat{Q}_n(w) \hat{Q}_{n-1}(z)}{z - w}, \end{aligned}$$

que é o resultado desejado. ■

Fazendo  $w \rightarrow z$  na identidade (3.28), obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{n-2} [\tilde{Q}_m(z) - \tilde{Q}_{m+1}(z)] \hat{Q}_m(z) + \tilde{Q}_{n-1}(z) \hat{Q}_{n-1}(z) \\ = \alpha_{n+1} \hat{Q}'_n(z) \hat{Q}_{n-1}(z) - z \hat{Q}'_{n-1}(z) \tilde{Q}_n(z). \quad (3.37) \end{aligned}$$

**Lema 3.2.1.** O termo à esquerda na fórmula (3.28) pode ser identificado como

$\tilde{\mathbf{b}}(z)^T \mathbf{A}_n \hat{\mathbf{b}}(w) = \mathbf{c}(z)^T \hat{\mathbf{b}}(w)$ , o que confirma a ortogonalidade dos autovetores à esquerda  $\mathbf{c}(z_{n,j})$  e dos autovetores à direita  $\hat{\mathbf{b}}(z_{n,k})$  quando  $j \neq k$ . Além disso, para  $1 \leq j \leq n$  e  $1 \leq k \leq n$ , obtemos

$$[\mathbf{A}_n^T \tilde{\mathbf{b}}(z_{n,j})]^T \hat{\mathbf{b}}(z_{n,k}) = \hat{\mathbf{b}}(z_{n,k})^T [\mathbf{A}_n^T \tilde{\mathbf{b}}(z_{n,j})] = \lambda_{n,j}^{-1} \delta_{j,k}$$

onde  $\lambda_{n,j}^{-1} = \alpha_{n+1} \hat{Q}'_n(z_{n,j}) \tilde{Q}_{n-1}(z_{n,j})$  e  $\delta_{j,k}$  é o delta de Kronecker.

**Demonstração:** Como

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{b}}(z)^T \mathbf{A}_n \hat{\mathbf{b}}(w) &= \begin{pmatrix} \tilde{Q}_0(z) & \tilde{Q}_1(z) & \dots & \tilde{Q}_{n-1}(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{Q}_0(w) \\ \hat{Q}_1(w) \\ \vdots \\ \hat{Q}_{n-1}(w) \end{pmatrix} \\ &= \sum_{m=0}^{n-2} [\tilde{Q}_m(z) - \tilde{Q}_{m+1}(z)] \hat{Q}_m(w) + \tilde{Q}_{n-1}(z) \hat{Q}_{n-1}(w), \end{aligned}$$

então, por (3.28), temos  $\tilde{\mathbf{b}}(z)^T \mathbf{A}_n \hat{\mathbf{b}}(w) = \frac{z \tilde{Q}_n(z) \hat{Q}_{n-1}(w) - \alpha_{n+1} \hat{Q}_n(w) \hat{Q}_{n-1}(z)}{z - w}$ .

Fazendo  $z = z_{n,j}$  e  $w = z_{n,k}$ , com  $j \neq k$ , obtemos

$$\frac{z_{n,j} \tilde{Q}_n(z_{n,j}) \hat{Q}_{n-1}(z_{n,k}) - \alpha_{n+1} \hat{Q}_n(z_{n,k}) \hat{Q}_{n-1}(z_{n,j})}{z_{n,j} - z_{n,k}} = 0.$$

Logo,

$$\tilde{\mathbf{b}}(z_{n,j})^T \mathbf{A}_n \hat{\mathbf{b}}(z_{n,k}) = \mathbf{c}(z_{n,j})^T \hat{\mathbf{b}}(z_{n,k}) = \langle \hat{\mathbf{b}}(z_{n,k}), \mathbf{c}(z_{n,j}) \rangle = 0. \quad (3.38)$$

Portanto,  $\mathbf{c}(z_{n,j})$  e  $\hat{\mathbf{b}}(z_{n,k})$  são ortogonais quando  $j \neq k$ .

Agora, para  $1 \leq j \leq n$  e  $1 \leq k \leq n$ , temos

$$\tilde{\mathbf{b}}(z)^T \mathbf{A}_n \hat{\mathbf{b}}(w) = [\mathbf{A}_n^T \tilde{\mathbf{b}}(z)]^T \hat{\mathbf{b}}(w) = \frac{z \tilde{Q}_n(z) \hat{Q}_{n-1}(w) - \alpha_{n+1} \hat{Q}_n(w) \hat{Q}_{n-1}(z)}{z - w}.$$

Novamente, fazendo  $z = z_{n,j}$  e  $w = z_{n,j}$  na equação acima, de (3.37), obtemos

$$[\mathbf{A}_n^T \tilde{\mathbf{b}}(z_{n,j})]^T \hat{\mathbf{b}}(z_{n,j}) = \alpha_{n+1} \hat{Q}'_n(z_{n,j}) \hat{Q}_{n-1}(z_{n,j}) = \lambda_{n,j}^{-1}. \quad (3.39)$$

Portanto, de (3.38) e (3.39), concluímos que

$$[\mathbf{A}_n^T \tilde{\mathbf{b}}(z_{n,j})]^T \hat{\mathbf{b}}(z_{n,k}) = \lambda_{n,j}^{-1} \delta_{j,k} = \begin{cases} 0, & \text{se } j \neq k \\ \lambda_{n,j}^{-1} \neq 0, & \text{se } j = k \end{cases}, \quad j, k = 1, 2, \dots, n,$$

concluindo, assim, a demonstração do lema.  $\blacksquare$

Podemos dizer, ainda, que as duas seqüências  $\{\hat{\mathbf{b}}(z_{n,j})\}_{j=1}^n$  e  $\{A_n^T \tilde{\mathbf{b}}(z_{n,j})\}_{j=1}^n$  são biortogonais.

Se definirmos a matriz não singular  $\mathbf{P}_n$ ,  $n \times n$ , por

$$\mathbf{P}_n = \begin{pmatrix} \frac{\hat{\mathbf{b}}(z_{n,1})}{\alpha_{n+1}\hat{Q}'_n(z_{n,1})} & \frac{\hat{\mathbf{b}}(z_{n,2})}{\alpha_{n+1}\hat{Q}'_n(z_{n,2})} & \cdots & \frac{\hat{\mathbf{b}}(z_{n,n})}{\alpha_{n+1}\hat{Q}'_n(z_{n,n})} \end{pmatrix}, \quad (3.40)$$

então sua inversa é dada por

$$\mathbf{P}_n^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_n^T \tilde{\mathbf{b}}(z_{n,1})}{\tilde{Q}_{n-1}(z_{n,1})} & \frac{A_n^T \tilde{\mathbf{b}}(z_{n,2})}{\tilde{Q}_{n-1}(z_{n,2})} & \cdots & \frac{A_n^T \tilde{\mathbf{b}}(z_{n,n})}{\tilde{Q}_{n-1}(z_{n,n})} \end{pmatrix}^T. \quad (3.41)$$

De fato, fazendo a multiplicação da  $j$ -ésima linha de  $\mathbf{P}_n^{-1}$  pela  $j$ -ésima coluna de  $\mathbf{P}_n$ , de (3.39), obtemos

$$\frac{[A_n^T \tilde{\mathbf{b}}(z_{n,j})]^T}{\tilde{Q}_{n-1}(z_{n,j})} \frac{\hat{\mathbf{b}}(z_{n,j})}{\alpha_{n+1}\hat{Q}'_n(z_{n,j})} = \lambda_{n,j} \lambda_{n,j}^{-1} = 1.$$

Agora, multiplicando a  $j$ -ésima linha de  $\mathbf{P}_n^{-1}$  pela  $k$ -ésima coluna de  $\mathbf{P}_n$ ,  $j \neq k$ , de (3.38), temos

$$\frac{[A_n^T \tilde{\mathbf{b}}(z_{n,j})]^T}{\tilde{Q}_{n-1}(z_{n,j})} \frac{\hat{\mathbf{b}}(z_{n,k})}{\alpha_{n+1}\hat{Q}'_n(z_{n,k})} = 0.$$

Portanto,  $\mathbf{P}_n^{-1} \mathbf{P}_n = \mathbf{I}_n$ .

Denotemos por  $\hat{\mathbf{p}}_{k,j}$  e  $\tilde{\mathbf{p}}_{k,j}$  os elementos da  $k$ -ésima linha e  $j$ -ésima coluna das matrizes  $\mathbf{P}_n$  e  $\mathbf{P}_n^{-1}$ , respectivamente. Então,

$$\hat{\mathbf{p}}_{k,j} = \frac{\hat{Q}_{k-1}(z_{n,j})}{\alpha_{n+1}\hat{Q}'_n(z_{n,j})} \quad \text{e} \quad \tilde{\mathbf{p}}_{k,j} = \frac{\tilde{Q}_{j-1}(z_{n,k}) - \tilde{Q}_j(z_{n,k})}{\tilde{Q}_{n-1}(z_{n,k})}. \quad (3.42)$$

De  $\mathbf{P}_n \mathbf{P}_n^{-1} = \mathbf{I}_n$ , obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \hat{\mathbf{p}}_{l,j} \tilde{\mathbf{p}}_{j,k} &= \sum_{j=1}^n \frac{\hat{Q}_{l-1}(z_{n,j})}{\alpha_{n+1}\hat{Q}'_n(z_{n,j})} \frac{\tilde{Q}_{k-1}(z_{n,j}) - \tilde{Q}_k(z_{n,j})}{\tilde{Q}_{n-1}(z_{n,j})} \\ &= \delta_{l,k} = \begin{cases} 0, & \text{se } l \neq k \\ 1, & \text{se } l = k \end{cases}, \quad l, k = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Desta maneira, obtemos a biortogonalidade das seqüências finitas  $\{\hat{Q}_l\}_{l=0}^{n-1}$  e  $\{\tilde{Q}_k - \tilde{Q}_{k+1}\}_{k=0}^{n-1}$  nos pontos  $z_{n,1}, z_{n,2}, \dots, z_{n,n}$ .

Com as matrizes  $\mathbf{P}_n$  e  $\mathbf{P}_n^{-1}$ , podemos escrever o problema de autovalores associado com  $\mathbf{H}_n^{(Q)}$  da seguinte forma:

$$\mathbf{P}_n^{-1} \mathbf{H}_n^{(Q)} \mathbf{P}_n = \Xi_n \quad \text{ou} \quad \mathbf{H}_n^{(Q)} = \mathbf{P}_n \Xi_n \mathbf{P}_n^{-1}, \quad (3.44)$$

onde  $\Xi_n$  é a matriz diagonal cujos elementos diagonais são  $z_{n,1}, z_{n,2}, \dots, z_{n,n}$ .

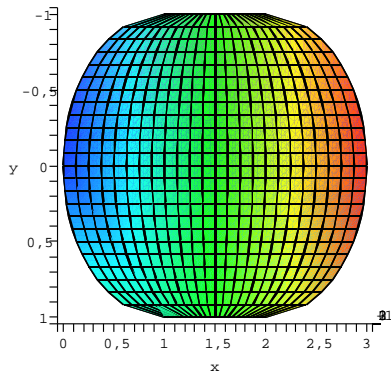
Em outras palavras,  $\mathbf{H}_n^{(Q)}$  e  $\Xi_n$  são matrizes semelhantes. Logo, pelo Teorema 2.4.2, têm a mesma equação característica e os mesmos autovalores. Além disso, pelo Teorema 2.4.1, as colunas de  $\mathbf{P}_n$  podem ser consideradas os  $n$  autovetores LI de  $\mathbf{H}_n^{(Q)}$ .

### 3.3 Limitantes para os zeros

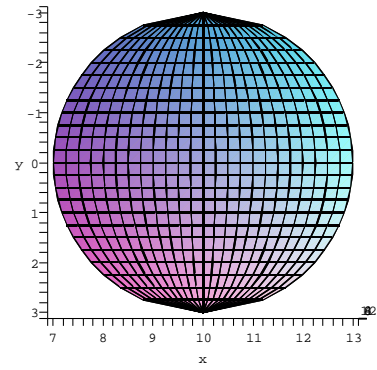
Consideremos a região  $\mathcal{W}(\lambda_1, \lambda_2, \tau)$ , onde  $\lambda_2 \geq \lambda_1$  e  $\tau > 0$ , definida por

$$\mathcal{W}(\lambda_1, \lambda_2, \tau) \equiv \left\{ z = x + iy \in \mathbb{C} : |y| \leq \tau, \lambda_1 - \sqrt{\tau^2 - y^2} \leq x \leq \lambda_2 + \sqrt{\tau^2 - y^2} \right\}. \quad (3.45)$$

Na Figura 3.1 (a), temos o desenho da região  $\mathcal{W}(1, 2, 1)$  e, em 3.1 (b), encontramos o desenho da região  $\mathcal{W}(10, 10, 3)$ .



(a)



(b)

Figura 3.1: Região  $\mathcal{W}(\lambda_1, \lambda_2, \tau)$

Agora, para  $\delta \neq 0$ , seja  $\mathbf{D}_\delta$  uma matriz diagonal,  $n \times n$ , com diagonal composta por  $(\delta, \delta^2, \dots, \delta^n)$ . Logo,  $\mathbf{D}_\delta \mathbf{H}_n^{(Q)} \mathbf{D}_\delta^{-1}$  é a seguinte matriz:

$$\mathbf{D}_\delta \mathbf{H}_n^{(Q)} \mathbf{D}_\delta^{-1} = \begin{pmatrix} \eta_1 & \delta^{-1}\alpha_2 & 0 & \dots & 0 \\ \delta\eta_1 & \eta_2 & \delta^{-1}\alpha_3 & \dots & 0 \\ \delta^2\eta_1 & \delta\eta_2 & \eta_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta^{n-1}\eta_1 & \delta^{n-2}\eta_2 & \delta^{n-3}\alpha_3 & \dots & \eta_n \end{pmatrix}.$$

Então, os autovalores de  $\mathbf{H}_n^{(Q)}$  são os mesmos que os da matriz  $\mathbf{D}_\delta \mathbf{H}_n^{(Q)} \mathbf{D}_\delta^{-1}$ , pois são matrizes semelhantes. Além disso, se  $\mathbf{z}$  é o autovetor correspondente ao autovalor  $\lambda$  de  $\mathbf{H}_n^{(Q)}$ , então  $\mathbf{D}_\delta \mathbf{H}_n^{(Q)} \mathbf{D}_\delta^{-1} \mathbf{D}_\delta \mathbf{z} = \lambda \mathbf{D}_\delta \mathbf{z}$ . Fazendo  $\mathbf{y} = \mathbf{D}_\delta \mathbf{z}$ , obtemos

$$\mathbf{D}_\delta \mathbf{H}_n^{(Q)} \mathbf{D}_\delta^{-1} \mathbf{y} = \lambda \mathbf{y}.$$

Podemos, agora, enunciar o teorema a seguir.

**Teorema 3.3.1.** *Para qualquer  $n \geq 2$ , consideremos*

$$\alpha_n^M = \max\{|\alpha_k|, k = 2, \dots, n\} \quad e \quad \eta_n^M = \max\{|\eta_k|, k = 2, 3, \dots, n\}$$

Sejam

$$d_1 = \frac{\sqrt{\alpha_n^M}}{\sqrt{\alpha_n^M} + \sqrt{\eta_n^M}}, \quad d_2 = \frac{\alpha_n^M}{\alpha_n^M + |\eta_1| - \eta_n^M} \quad e \quad d_3 = \frac{2\alpha_n^M}{\sqrt{(\alpha_n^M)^2 + 4\alpha_n^M(|\eta_1| - \eta_n^M) + \alpha_n^M}}.$$

Então, os zeros de  $Q_k$ ,  $1 \leq k \leq n$ , estão no interior do disco  $|z| \leq \hat{\rho}_n$ , onde

$$\hat{\rho}_n = \begin{cases} \frac{\alpha_n^M + |\eta_1| - \eta_n^M}{|\eta_1| - \eta_n^M} |\eta_1|, & \text{se } 0 < d_2 < d_1 \\ (\sqrt{\alpha_n^M} + \eta_n^M)^2, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Se  $\eta_k$ , para  $k = 1, 2, \dots, n$ , são todos reais, então os zeros de  $Q_k$ ,  $1 \leq k \leq n$ , estão no interior da região  $\mathcal{W}(\eta_{n,1}, \eta_{n,2}, \tilde{\rho}_n)$ , onde

$$\eta_{n,1} = \min\{\eta_k, k = 1, 2, \dots, n\}, \quad \eta_{n,2} = \max\{\eta_k, k = 1, 2, \dots, n\} \quad e$$

$$\tilde{\rho}_n = \begin{cases} \frac{\sqrt{(\alpha_n^M)^2 + 4\alpha_n^M(|\eta_1| - \eta_n^M) + \alpha_n^M} |\eta_1|}{2(|\eta_1| - \eta_n^M)}, & \text{se } 0 < d_3 < d_1 \\ (\sqrt{\alpha_n^M} + \eta_n^M)^2 - \eta_n^M, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

**Demonstração:** Suponhamos que  $0 < \delta < 1$ . Lembremos que  $\alpha_1 = 0$ . Pelo Teorema 2.3.2, temos que os autovalores de  $\mathbf{D}_\delta \mathbf{H}_n^{(Q)} \mathbf{D}_\delta^{-1}$ , que são os mesmos que os da matriz  $\mathbf{H}_n^{(Q)}$ , estão no interior da região  $\bigcup_{k=1}^n \Delta_k^{(n)}(\delta)$  onde  $\Delta_k^{(n)}(\delta)$  são discos fechados com centros  $\eta_k$  e raios

$$\rho_k(\delta) = |\eta_k| \sum_{r=1}^{n-k} \delta^r + |\alpha_k| \delta^{-1}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Assim,  $\rho_1(\delta) = |\eta_1| \sum_{r=1}^{n-1} \delta^r = |\eta_1| \delta (1 + \delta + \dots + \delta^{n-3} + \delta^{n-2})$ .

Sabemos que  $1 + \delta + \dots + \delta^{n-3} + \delta^{n-2} = \frac{1 - \delta^{n-1}}{1 - \delta}$  e, como  $0 < \delta < 1$ , concluímos que  $\delta \frac{1 - \delta^{n-1}}{1 - \delta} < \frac{\delta}{1 - \delta}$ . Portanto,  $\rho_1(\delta) = |\eta_1| \sum_{r=1}^{n-1} \delta^r = |\eta_1| \delta \frac{1 - \delta^{n-1}}{1 - \delta} < |\eta_1| \frac{\delta}{1 - \delta} = \tilde{\rho}_1(\delta)$  e, assim,  $\rho_1(\delta) < \tilde{\rho}_1(\delta)$ .



Considerando  $\eta_n^M = \max\{|\eta_k|, k = 2, 3, \dots, n\}$  e  $\alpha_n^M = \max\{|\alpha_k|, k = 2, 3, \dots, n\}$  para  $k = 2, 3, \dots, n$ , temos que

$$\begin{aligned} \rho_k(\delta) &= |\eta_k| \sum_{r=1}^{n-k} \delta^r + |\alpha_k| \delta^{-1} \leq |\eta_k| \frac{\delta}{1-\delta} + |\alpha_k| \delta^{-1} \\ &\leq \tilde{\rho}_n(\delta) = \frac{\delta}{1-\delta} \eta_n^M + \delta^{-1} \alpha_n^M = \frac{\delta-1+1}{1-\delta} \eta_n^M + \delta^{-1} \alpha_n^M \\ &= \frac{\delta-1}{1-\delta} \eta_n^M + \frac{1}{1-\delta} \eta_n^M + \delta^{-1} \alpha_n^M = -\eta_n^M + \frac{1}{1-\delta} \eta_n^M + \delta^{-1} \alpha_n^M. \end{aligned}$$

Assim,  $\rho_k(\delta) \leq \tilde{\rho}_n(\delta) = -\eta_n^M + \hat{\rho}_n(\delta)$ , onde  $\hat{\rho}_n(\delta) = \frac{1}{1-\delta} \eta_n^M + \alpha_n^M \delta^{-1}$ . Desta maneira,  $\Delta_1^{(n)}(\delta)$  está no interior de  $|z| < \hat{\rho}_1(\delta) = |\eta_1| \frac{1}{1-\delta}$  e os discos  $\Delta_k^{(n)}(\delta)$ ,  $2 \leq k \leq n$ , estão no interior de

$$|z| \leq \hat{\rho}_n(\delta) = \frac{1}{1-\delta} \eta_n^M + \delta^{-1} \alpha_n^M.$$

Escolhemos o valor de  $\delta$  que minimiza  $\max\{\hat{\rho}_1(\delta), \hat{\rho}_n(\delta)\}$  e vamos verificar que este valor será  $d_2$  ou  $d_1$ , dependendo de  $\eta_n^M \ll |\eta_1|$  ou não.

Se  $\eta_n^M \ll |\eta_1|$ , então  $\max\{\hat{\rho}_1(\delta), \hat{\rho}_n(\delta)\} = \hat{\rho}_1(\delta)$ . Logo,  $\hat{\rho}_1(\delta) > \hat{\rho}_n(\delta)$ , ou seja,  $\hat{\rho}_1(\delta) - \hat{\rho}_n(\delta) > 0$ , isto é,

$$\frac{\delta(|\eta_1| - \eta_n^M) - (1-\delta)\alpha_n^M}{(1-\delta)\delta} > 0.$$

Como  $(1-\delta)\delta > 0$ , então  $\delta(|\eta_1| - \eta_n^M + \alpha_n^M) - \alpha_n^M > 0$ , ou seja,  $\delta > \frac{\alpha_n^M}{|\eta_1| - \eta_n^M + \alpha_n^M}$ .

Podemos obter, também,  $\delta \geq \frac{\alpha_n^M}{|\eta_1| - \eta_n^M + \alpha_n^M}$ . Assim, escolhemos

$$\delta = \frac{\alpha_n^M}{|\eta_1| - \eta_n^M + \alpha_n^M} = d_2$$

que minimiza  $\max\{\hat{\rho}_1(\delta), \hat{\rho}_n(\delta)\} = \hat{\rho}_1(\delta)$ . Substituindo  $\delta = d_2$  em  $\hat{\rho}_1(\delta)$ , obtemos o raio

$$\hat{\rho}_1(d_2) = |\eta_1| \frac{1}{1-d_2} = |\eta_1| \frac{(\alpha_n^M + |\eta_1| - \eta_n^M)}{|\eta_1| - \eta_n^M}.$$

Portanto, os zeros de  $Q_k$ ,  $1 \leq k \leq n$ , estão no interior do disco

$$|z| \leq \hat{\rho}_1(\delta), \quad \text{onde } \delta = d_2.$$

Agora, se  $|\eta_1| \ll \eta_n^M$  temos que  $\max\{\hat{\rho}_1(\delta), \hat{\rho}_n(\delta)\} = \hat{\rho}_n(\delta)$ . Encontremos o valor de  $\delta$  que minimiza  $\hat{\rho}_n(\delta)$ . Determinemos o ponto de mínimo de  $\hat{\rho}_n(\delta) = \frac{1}{1-\delta} \eta_n^M + \frac{1}{\delta} \alpha_n^M$ . Temos que

$$\hat{\rho}'_n(\delta) = \frac{1}{(1-\delta)^2} \eta_n^M - \frac{1}{\delta^2} \alpha_n^M = \frac{\delta^2 \eta_n^M - (1-\delta)^2 \alpha_n^M}{(1-\delta)^2 \delta^2}.$$

Logo,  $\hat{\rho}'(\delta) = 0 \implies \frac{\delta^2 \eta_n^M - (1 - \delta)^2 \alpha_n^M}{(1 - \delta)^2 \delta^2} = 0$ , isto é,

$$(\eta_n^M - \alpha_n^M) \delta^2 + 2\alpha_n^M \delta - \alpha_n^M = 0. \quad (3.46)$$

Desta maneira,

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{-2\alpha_n^M \pm \sqrt{4(\alpha_n^M)^2 - 4(\eta_n^M - \alpha_n^M)(-\alpha_n^M)}}{2(\eta_n^M - \alpha_n^M)} \\ &= \frac{-2\alpha_n^M \pm \sqrt{4\eta_n^M \alpha_n^M}}{2(\eta_n^M - \alpha_n^M)} = \frac{-\alpha_n^M \pm \sqrt{\eta_n^M \alpha_n^M}}{\eta_n^M - \alpha_n^M}. \end{aligned}$$

Assim, obtemos  $\delta_1 = \frac{-\alpha_n^M + \sqrt{\eta_n^M \alpha_n^M}}{\eta_n^M - \alpha_n^M}$  e  $\delta_2 = \frac{-\alpha_n^M - \sqrt{\eta_n^M \alpha_n^M}}{\eta_n^M - \alpha_n^M}$ .

Por (3.2),  $\alpha_{m+1} > 0$  e  $\beta_m < 0$  para  $m \geq 1$ . Logo,  $\eta_m^M = \alpha_m^M - \beta_m^M > 0$  e, portanto,  $\delta_2 < 0$ . Temos, ainda, que

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \frac{-\alpha_n^M + \sqrt{\eta_n^M \alpha_n^M}}{\eta_n^M - \alpha_n^M} = \frac{\sqrt{\alpha_n^M} (\sqrt{\eta_n^M} - \sqrt{\alpha_n^M})}{(\sqrt{\eta_n^M} - \sqrt{\alpha_n^M})(\sqrt{\eta_n^M} + \sqrt{\alpha_n^M})} \\ &= \frac{\sqrt{\alpha_n^M}}{\sqrt{\eta_n^M} + \sqrt{\alpha_n^M}} = d_1. \end{aligned}$$

Logo, escolhemos  $\delta = d_1$  que minimiza  $\hat{\rho}_n(\delta)$ . Além disso, o raio  $\hat{\rho}_n(d_1)$  é dado por

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_n(d_1) &= \frac{1}{1 - d_1} \eta_n^M + \frac{1}{d_1} \alpha_n^M = \frac{\sqrt{\eta_n^M} + \sqrt{\alpha_n^M}}{\sqrt{\eta_n^M}} \eta_n^M + \frac{\sqrt{\eta_n^M} + \sqrt{\alpha_n^M}}{\sqrt{\alpha_n^M}} \alpha_n^M \\ &= \frac{(\sqrt{\eta_n^M} + \sqrt{\alpha_n^M}) \sqrt{(\eta_n^M)^2}}{\sqrt{\eta_n^M}} + \frac{(\sqrt{\eta_n^M} + \sqrt{\alpha_n^M}) \sqrt{(\alpha_n^M)^2}}{\sqrt{\alpha_n^M}} \\ &= (\sqrt{\eta_n^M} + \sqrt{\alpha_n^M}) \sqrt{\eta_n^M} + (\sqrt{\eta_n^M} + \sqrt{\alpha_n^M}) \sqrt{\alpha_n^M} \\ &= (\sqrt{\eta_n^M} + \sqrt{\alpha_n^M})^2. \end{aligned}$$

Desta forma, os zeros de  $Q_k$ ,  $1 \leq k \leq n$ , estão no interior do disco

$$|z| \leq \hat{\rho}_n(\delta), \quad \text{onde } \delta = d_1 \text{ e } 0 < d_1 < d_2.$$

Portanto, concluímos que os zeros de  $Q_k$ ,  $1 \leq k \leq n$ , estão no interior do disco

$$|z| \leq \hat{\rho}_n,$$

onde

$$\hat{\rho}_n = \begin{cases} \frac{\alpha_n^M + |\eta_1| - \eta_n^M}{|\eta_1| - \eta_n^M} |\eta_1|, & \text{se } 0 < d_2 < d_1 \\ (\sqrt{\alpha_n^M} + \eta_n^M)^2, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

Para demonstrar a segunda parte do teorema, notemos que  $\Delta_1^{(n)}(\delta)$  está no interior do disco

$$|z - \eta_1| < \tilde{\rho}_1(\delta) = \frac{\delta}{1 - \delta} |\eta_1| \quad (3.47)$$

e, para qualquer  $k$ ,  $2 \leq k \leq n$ , os discos  $\Delta_k^{(n)}(\delta)$  estão no interior do disco

$$\begin{aligned} |z - \eta_k| \leq \tilde{\rho}_n(\delta) &= -\eta_n^M + \frac{1}{1 - \delta} \eta_n^M + \delta^{-1} \alpha_n^M \\ &= -\eta_n^M + \hat{\rho}_n(\delta). \end{aligned} \quad (3.48)$$

Como anteriormente, escolhemos  $\delta$  que minimiza  $\max\{\tilde{\rho}_1(\delta), \tilde{\rho}_n(\delta)\}$  e este valor será  $d_3$  ou  $d_1$ , dependendo de  $\eta_n^M \ll |\eta_1|$  ou não.

Se  $|\eta_1| \ll \eta_n^M$ , então  $\max\{\tilde{\rho}_1(\delta), \tilde{\rho}_n(\delta)\} = \tilde{\rho}_n(\delta)$ . Determinemos o valor de  $\delta$  que minimiza  $\tilde{\rho}_n(\delta)$ . Sabemos que  $\tilde{\rho}_n(\delta) = -\eta_n^M + \hat{\rho}_n(\delta)$ . Derivando em  $\delta$ , obtemos

$$\tilde{\rho}'_n(\delta) = \hat{\rho}'_n(\delta).$$

Igualando esta última igualdade a 0, de (3.46), temos

$$0 = \tilde{\rho}'_n(\delta) = \hat{\rho}'_n(\delta) = (\eta_n^M - \alpha_n^M)\delta^2 + 2\alpha_n^M\delta - \alpha_n^M.$$

Assim,  $\tilde{\rho}'_n(\delta)$  e  $\hat{\rho}'_n(\delta)$  possuem a mesma equação do 2º grau em delta e, portanto, os mesmos valores para  $\delta_1$  e  $\delta_2$ . Logo, escolhemos  $\delta = d_1$  que minimiza  $\max\{\tilde{\rho}_1(\delta), \tilde{\rho}_n(\delta)\} = \tilde{\rho}_n(\delta)$  e obtemos

$$\tilde{\rho}_n(d_1) = -\eta_n^M + \hat{\rho}_n(d_1) = -\eta_n^M + \left( \sqrt{\alpha_n^M} + \sqrt{\eta_n^M} \right)^2.$$

Agora, se  $\eta_n^M \ll |\eta_1|$ , então  $\max\{\tilde{\rho}_1(\delta), \tilde{\rho}_n(\delta)\} = \tilde{\rho}_1(\delta)$ . Assim,  $\tilde{\rho}_1(\delta) > \tilde{\rho}_n(\delta)$ , ou seja,  $\tilde{\rho}_1(\delta) - \tilde{\rho}_n(\delta) > 0$ . Logo,

$$\frac{\delta^2(|\eta_1| - \eta_n^M) - (1 - \delta)\alpha_n^M}{(1 - \delta)\delta} > 0.$$

Temos que  $(1 - \delta)\delta > 0$ . Assim,  $\delta^2(|\eta_1| - \eta_n^M) + \delta\alpha_n^M - \alpha_n^M > 0$ . Podemos obter, também,  $\delta^2(|\eta_1| - \eta_n^M) + \delta\alpha_n^M - \alpha_n^M \geq 0$ . Quando ocorre a igualdade, temos

$$\delta = \frac{-\alpha_n^M \pm \sqrt{(\alpha_n^M)^2 - 4(|\eta_1| - \eta_n^M)(-\alpha_n^M)}}{2(|\eta_1| - \eta_n^M)} = \frac{-\alpha_n^M \pm \sqrt{(\alpha_n^M)^2 + 4\alpha_n^M(|\eta_1| - \eta_n^M)}}{2(|\eta_1| - \eta_n^M)}.$$

Portanto, obtemos

$$\delta_1 = \frac{-\alpha_n^M - \sqrt{(\alpha_n^M)^2 + 4\alpha_n^M(|\eta_1| - \eta_n^M)}}{2(|\eta_1| - \eta_n^M)} \quad \text{e} \quad \delta_2 = \frac{-\alpha_n^M + \sqrt{(\alpha_n^M)^2 + 4\alpha_n^M(|\eta_1| - \eta_n^M)}}{2(|\eta_1| - \eta_n^M)}.$$

Observemos que  $\delta_1 < 0$ , então escolhemos  $\delta_2$  que minimiza  $\tilde{\rho}_1(\delta)$ . Multiplicando e dividindo  $\delta_2$  por  $\frac{\alpha_n^M + \sqrt{(\alpha_n^M)^2 + 4\alpha_n^M(|\eta_1| - \eta_n^M)}}{2(|\eta_1| - \eta_n^M)}$ , obtemos

$$\delta_2 = \frac{2\alpha_n^M}{\alpha_n^M + \sqrt{(\alpha_n^M)^2 + 4\alpha_n^M(|\eta_1| - \eta_n^M)}} = d_3.$$

Desta maneira,  $\delta_2 = d_3$  minimiza  $\max\{\tilde{\rho}_1(\delta), \tilde{\rho}_n(\delta)\} = \tilde{\rho}_1(\delta)$  e, neste caso,  $0 < d_3 < d_1$ . Além disso, o raio  $\tilde{\rho}_1(d_3)$  é dado por

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_1(d_3) &= \frac{d_3}{1-d_3} |\eta_1| \\ &= \frac{2\alpha_n^M}{\alpha_n^M + \sqrt{(\alpha_n^M)^2 + 4\alpha_n^M(|\eta_1| - \eta_n^M)} - \alpha_n^M + \sqrt{(\alpha_n^M)^2 + 4\alpha_n^M(|\eta_1| - \eta_n^M)}} \frac{\alpha_n^M + \sqrt{(\alpha_n^M)^2 + 4\alpha_n^M(|\eta_1| - \eta_n^M)}}{2} |\eta_1| \\ &= \frac{2\alpha_n^M [\alpha_n^M + \sqrt{(\alpha_n^M)^2 + 4\alpha_n^M(|\eta_1| - \eta_n^M)}]}{4\alpha_n^M(\alpha_n^M - \eta_n^M)} |\eta_1| \\ &= \frac{\alpha_n^M + \sqrt{(\alpha_n^M)^2 + 4\alpha_n^M(|\eta_1| - \eta_n^M)}}{2(|\eta_1| - \eta_n^M)} |\eta_1|. \end{aligned}$$

Desde que os centros  $\eta_k$ ,  $1 \leq k \leq n$ , dos discos  $\Delta_k^{(n)}(\delta)$  estão sobre uma mesma reta, neste caso a reta real e, também, de (3.47) e (3.48), concluímos que os zeros de  $Q_k$ ,  $1 \leq k \leq n$ , estão no interior do disco  $|z - \eta_k| \leq \tilde{\rho}_n(\delta)$ , onde

$$\tilde{\rho}_n = \begin{cases} \frac{\sqrt{(\alpha_n^M)^2 + 4\alpha_n^M(|\eta_1| - \eta_n^M)} + \alpha_n^M}{2(|\eta_1| - \eta_n^M)} |\eta_1|, & \text{se } 0 < d_3 < d_1, \\ (\sqrt{\alpha_n^M + \eta_n^M})^2 - \eta_n^M, & \text{caso contrário} \end{cases},$$

ou seja, os zeros de  $Q_k$ ,  $1 \leq k \leq n$ , estão no interior da região  $\mathcal{W}(\eta_{n,1}, \eta_{n,2}, \tilde{\rho}_n)$ , onde

$$\eta_{n,1} = \min\{\eta_k, k = 1, 2, \dots, n\}, \quad \eta_{n,2} = \max\{\eta_k, k = 1, 2, \dots, n\}.$$

Lembrando que  $\eta_1 = \alpha_1 - \beta_1 = \beta_1$  e, que  $Q_1(z) = z + \beta_1$ , então  $z = \eta_1$  é raiz do polinômio  $Q_1(z)$  e certamente está no interior  $\bigcup_{k=1}^n \Delta_k^{(n)}(\delta)$ .

Agora, se  $p$  é tal que  $1 < p < n$ , então, pelo Teorema 2.3.2, os autovalores de  $\mathbf{H}_p^{(Q)}$  (isto é, os zeros de  $Q_p$ ) estão no interior da união  $\bigcup_{k=1}^p \Delta_k^{(p)}(\delta)$ , onde  $\Delta_k^{(p)}$  são os discos com

centros  $|\eta_k|$  e raios  $\rho_k^{(p)}(\delta) = |\eta_k| \sum_{r=1}^{p-k} \delta^r + |\alpha_k| \delta^{-1}$ . Temos que  $\Delta_k^{(n)}$  são os discos com centros  $|\eta_k|$  e raios  $\rho_k^{(n)}(\delta) = |\eta_k| \sum_{r=1}^{n-k} \delta^r + |\alpha_k| \delta^{-1}$ . Portanto, para  $1 < p < n$ ,  $\rho_k^{(p)}(\delta) < \rho_k^{(n)}(\delta)$ .

Desta maneira, para  $1 \leq k \leq p$ ,  $\Delta_k^{(p)}(\delta) \subset \Delta_k^{(n)}(\delta)$ . Logo,  $\bigcup_{k=1}^p \Delta_k^{(p)}(\delta) \subset \bigcup_{k=1}^n \Delta_k^{(n)}(\delta)$  e, assim, os zeros de  $Q_p$  estão no interior de  $\bigcup_{k=1}^n \Delta_k^{(n)}(\delta)$ . Portanto, concluímos que os resultados do teorema são válidos também para todos os polinômios  $Q_k$ ,  $1 \leq k \leq n$ . ■

O teorema que demonstraremos a seguir afirma que certas sequências de polinômios  $\{p_k\}_{k=0}^n$  gerados por uma relação de recorrência de três termos não têm zeros em regiões

parabólicas do plano complexo. Este importante resultado nos dará a base para provarmos o teorema posterior que garante a existência de uma região parabólica que não contém zeros dos polinômios  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ . Tais regiões são chamadas de regiões parabólicas livres de zeros. Esses dois resultados podem ser encontrados em Saff e Varga [21].

**Teorema 3.3.2.** *Seja  $\{p_k\}_{k=0}^n$  uma sequência de polinômios de respectivos graus  $k$  que satisfazem à relação de recorrência de três termos*

$$p_k(z) = \left(\frac{z}{b_k} + 1\right)p_{k-1}(z) - \frac{z}{c_k}p_{k-2}(z), \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (3.49)$$

onde  $p_{-1}(z) := 0$  e  $p_0(z) := p_0 \neq 0$ . Além disso,  $b_k$  e  $c_k$  são números reais e positivos para todo  $1 \leq k \leq n$ . Seja

$$\alpha := \min\{b_k(1 - b_{k-1}c_k^{-1}) : k = 1, 2, \dots, n\}, \quad b_0 := 0. \quad (3.50)$$

Então, se  $\alpha > 0$ , a região parabólica

$$\mathfrak{P}_\alpha := \{z = x + iy \in \mathbb{C} : y^2 \leq 4\alpha(x + \alpha), x > -\alpha\} \quad (3.51)$$

não contém zeros de  $p_1, p_2, \dots, p_n$ .

**Demonstração:** Sejam  $z \in \mathfrak{P}_\alpha$  um ponto qualquer fixado que não é zero de  $p_k(z)$ ,  $1 \leq k \leq n$ , e

$$\gamma_k = \gamma_k(z) := \frac{zp_{k-1}(z)}{b_k p_k(z)} \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, n. \quad (3.52)$$

Mostraremos indutivamente que

$$Re(\gamma_k) \leq 1 \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, n. \quad (3.53)$$

Para  $k = 1$ , temos que mostrar que  $Re(\gamma_1) \leq 1$ . De fato, usando (3.49), (3.52) e o fato de que  $p_0(z) := p_0 \neq 0$ , temos  $p_1(z) = \left(\frac{z}{b_1}\right)p_0(z)$ . Então,

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{zp_0(z)}{b_1 p_1(z)} = \frac{zp_0(z)}{b_1 \left(\frac{z}{b_1} + 1\right)p_0(z)} = \frac{z}{z + b_1} \\ &= \frac{x + iy}{x + iy + b_1} \frac{(x + b_1 - iy)}{(x + b_1 - iy)} = \frac{x(x + b_1) + y^2}{(x + b_1)^2 + y^2} + i \frac{yb_1}{(x + b_1)^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Assim, temos que  $Re(\gamma_1) \leq 1$  se, e somente se,  $Re(z) \geq -b_1$ . Ou seja,

$$\begin{aligned} Re(\gamma_1) \leq 1 &\iff \frac{x(x + b_1) + y^2}{(x + b_1)^2 + y^2} \leq 1 \\ &\iff x^2 + xb_1 + y^2 \leq x^2 + 2xb_1 + b_1^2 + y^2 \\ &\iff xb_1 - 2xb_1 \leq b_1^2 \iff -xb_1 \leq b_1^2 \\ &\iff -x \leq b_1 \iff x \geq -b_1, \quad \text{pois } b_1 > 0. \end{aligned}$$

Observemos que, como  $z = x + iy \in \mathfrak{P}_\alpha$ , então  $x > -\alpha$ . Além disso, de (3.50), temos  $\alpha := \min\{b_1\}$ , ou seja,  $\alpha \leq b_1 \implies -\alpha \geq -b_1$ . Portanto,  $x > -\alpha \geq -b_1$ .

Agora, suponhamos que  $Re(\gamma_{k-1}) \leq 1$  para algum  $k$  satisfazendo  $2 \leq k \leq n$ . De (3.49), temos que  $b_k p_k(z) = (z + b_k)p_{k-1}(z) - \frac{b_k}{c_k} z p_{k-2}(z)$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , e, também, podemos expressar  $\gamma_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , da seguinte forma:

$$\gamma_k = \frac{z p_{k-1}(z)}{b_k p_k(z)} = \frac{z p_{k-1}(z)}{(z + b_k)p_{k-1}(z) - b_k c_k^{-1} z p_{k-2}(z)} = \frac{z}{(z + b_k) - b_k c_k^{-1} z \frac{p_{k-2}(z)}{p_{k-1}(z)}}.$$

Como  $\gamma_{k-1} = \frac{z p_{k-2}(z)}{b_{k-1} p_{k-1}(z)}$ , então  $\gamma_k$  pode ser dado como

$$\gamma_k = T_k(\gamma_{k-1}), \quad (3.54)$$

onde  $T_k(w)$  é a transformação bilinear

$$\xi = T_k(w) := \frac{z}{z + b_k - b_k c_k^{-1} b_{k-1} w}. \quad (3.55)$$

Agora, mostraremos que  $Re(\gamma_k) \leq 1$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ .

Portanto, desde que  $Re(\gamma_{k-1}) \leq 1$  por hipótese, então  $\gamma_k$  pertence à imagem do semi-plano  $Re(w) \leq 1$  sob a transformação  $T_k$ . Agora,  $T_k$  tem seu pólo em

$$w_k := \frac{z + b_k}{b_k c_k^{-1} b_{k-1}} = \frac{x + b_k}{b_k c_k^{-1} b_{k-1}} + i \frac{y}{b_k c_k^{-1} b_{k-1}}. \quad (3.56)$$

De (3.50), temos que  $x > -\alpha \geq -(b_k - b_k c_k^{-1} b_{k-1})$ , então

$$Re(w_k) = \frac{x + b_k}{b_k c_k^{-1} b_{k-1}} > \frac{-(b_k - b_k c_k^{-1} b_{k-1}) + b_k}{b_k c_k^{-1} b_{k-1}} = 1.$$

Assim,  $Re(w_k) > 1$ . Além disso, como  $T_k$  é uma transformação linear fracionária, do Teorema 2.5.4,  $T_k$  leva  $Re(w) \leq 1$  em um disco fechado  $D_k$  no plano  $\xi_k$ .

Sabemos, também, que o conjugado de  $w_k$  é

$$\bar{w}_k = \frac{\bar{z} + b_k}{b_k c_k^{-1} b_{k-1}}$$

e o seu simétrico com respeito à linha  $Re(w) = 1$  é dado por

$$2 - \bar{w}_k = 2 - \frac{\bar{z} + b_k}{b_k c_k^{-1} b_{k-1}}.$$

Então, o centro  $\xi_k$  do disco é a imagem, sob  $T_k$ , do ponto no plano  $w$  simétrico ao pólo  $w_k$  com respeito à reta  $Re(w) = 1$ , isto é,

$$\begin{aligned} \xi_k &= T_k(2 - \bar{w}_k) = T_k\left(2 - \frac{x - b_k + iy}{b_k c_k^{-1} b_{k-1}}\right) \\ &= T_k\left(\frac{2b_k c_k^{-1} b_{k-1} - x - b_k + iy}{b_k c_k^{-1} b_{k-1}}\right) = \frac{z}{z + b_k - b_k c_k^{-1} b_{k-1} \frac{2b_k c_k^{-1} b_{k-1} - x - b_k + iy}{b_k c_k^{-1} b_{k-1}}} \\ &= \frac{z}{2x + 2b_k - 2b_k c_k^{-1} b_{k-1}} = \frac{z}{2x + 2b_k(1 - c_k^{-1} b_{k-1})}. \end{aligned}$$

Além disso, desde que  $T_k(\infty) = 0$  está na fronteira de  $D_k$ , o raio  $r_k$  do disco é dado por

$$r_k = |\xi_k| = \frac{|z|}{2x + 2b_k(1 - b_{k-1}c_k^{-1})} = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{2x + 2b_k(1 - b_{k-1}c_k^{-1})}.$$

Conseqüentemente, a parte real de qualquer ponto em  $D_k$  não excede a soma

$$Re(\xi_k) + r_k = \frac{Re(z) + |z|}{2Re(z) + 2b_k(1 - b_{k-1}c_k^{-1})} = \frac{x + |z|}{2x + 2b_k(1 - b_{k-1}c_k^{-1})}.$$

De (3.50),  $Re(\xi_k) + r_k < \frac{x + |z|}{2x + 2\alpha}$ . Assim,  $\frac{x + |z|}{2x + 2\alpha}$  é um limitante superior para a soma  $Re(\xi_k) + r_k$ . Como  $z \in \mathfrak{P}_\alpha$ , de (3.51), obtemos

$$\frac{x + |z|}{2x + 2\alpha} \leq \frac{x + \sqrt{x^2 + 4\alpha(x + \alpha)}}{2x + 2\alpha} = \frac{x + \sqrt{(x + 2\alpha)^2}}{2x + 2\alpha} = 1.$$

Em particular, como  $\gamma_k = T_k(\gamma_{k-1})$ , então  $\gamma_k \in D_k$  pois  $Re(\gamma_{k-1}) \leq 1$ . Portanto,  $Re(\gamma_k) \leq 1$ , o que completa a demonstração de (3.53).

Da relação de recorrência (3.49), obtemos facilmente que

$$p_k(0) = p_{k-1}(0) = \cdots = p_0(0) \neq 0.$$

Desta maneira, concluímos que  $z = 0$  não é raiz do polinômio  $p_k(z)$ , para  $k = 0, 1, \dots, n$ .

Agora, consideremos  $z = z_0 \in \mathfrak{P}_\alpha$  e suponhamos que  $p_k(z_0) = p_{k-1}(z_0) = 0$  para algum  $k \geq 1$  (evidentemente  $z_0 \neq 0$ ). Novamente, pela relação de recorrência (3.49), obtemos

$$p_k(z_0) = \left(\frac{z_0}{b_k} + 1\right)p_{k-1}(z_0) - \frac{z_0}{c_k}p_{k-2}(z_0),$$

ou seja,  $-\frac{z_0}{c_k}p_{k-2}(z_0) = 0 \iff p_{k-2}(z_0) = 0$ . Recursivamente,  $p_{k-j}(z_0) = 0$  para todo  $0 \leq j \leq k$ . Chegamos em uma contradição, pois  $p_0(z) = p_0 \neq 0$ . Portanto,  $p_k(z)$  e  $p_{k-1}(z)$  não têm zeros em comum para todo  $k$ ,  $1 \leq k \leq n$ .

Finalmente, suponhamos que  $p_k(z_0) = 0$  para algum  $z_0 \in \mathfrak{P}_\alpha$  e algum  $k$ ,  $1 \leq k \leq n$ . De (3.49), temos que  $p_1(z) = \left(\frac{z}{b_1} + 1\right)p_0(z)$  e, então,  $p_1(z) = 0 \iff \frac{z}{b_1} + 1 = 0$ . Assim,  $p_1(z)$  tem seu único zero em  $-b_1$ . Mas, de (3.50),

$$\alpha \leq b_1 \implies -b_1 \leq -\alpha. \quad (3.57)$$

Desta maneira,  $z = -b_1$  é real e positivo, mas, de (3.57) e por (3.51), este zero não está em  $\mathfrak{P}_\alpha$ . Chegamos em um absurdo.

Logo, para  $k = 2, \dots, n$ ,  $p_k(z_0) = 0$ , ou seja,

$$\left(\frac{z_0 + b_k}{b_k}\right)p_{k-1}(z_0) = \frac{z_0}{c_k}p_{k-2}(z_0).$$

Como  $p_k(z)$  e  $p_{k-1}(z)$  não têm zeros em comum, multiplicando ambos os lados da igualdade acima por  $\frac{1}{b_{k-1}}$ , obtemos

$$\left(\frac{z_0 + b_k}{b_k}\right) \frac{c_k}{b_{k-1}} = \frac{z_0}{b_{k-1}} \frac{p_{k-2}(z_0)}{p_{k-1}(z_0)} = \gamma_{k-1}(z_0). \quad (3.58)$$

Agora, como  $z_0 \in \mathfrak{P}_\alpha$ , de (3.53) e por argumento de continuidade, implica que  $Re(\gamma_{k-1}(z_0)) \leq 1$ . Desta maneira, tomando a parte real em (3.58) e usando (3.50), obtemos

$$\begin{aligned} Re\left(\frac{c_k}{b_{k-1}b_k}(z_0 + b_k)\right) \leq 1 &\implies Re\left(\frac{c_k}{b_{k-1}b_k}z_0 + \frac{c_k}{b_{k-1}}\right) \leq 1 \\ &\implies \frac{c_k}{b_{k-1}b_k}Re(z_0) + \frac{c_k}{b_{k-1}} \leq 1 \implies \frac{c_k}{b_{k-1}} \left[\frac{Re(z_0)}{b_k} + 1\right] \leq 1 \\ &\implies \frac{Re(z_0)}{b_k} \leq \frac{b_{k-1}}{c_k} - 1 \\ &\implies Re(z_0) \leq -b_k \left(1 - \frac{b_{k-1}}{c_k}\right) \leq -\alpha. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Como estamos considerando  $z_0 \in \mathfrak{P}_\alpha$ , então, de (3.51), segue que

$$Re(z_0) > -\alpha. \quad (3.60)$$

Assim, de (3.59) e (3.60), chegamos em uma contradição.

Desta forma, concluímos que  $p_k(z)$  não tem zeros em  $\mathfrak{P}_\alpha$  para todo  $k$ ,  $1 \leq k \leq n$ . ■

**Teorema 3.3.3.** *Sejam  $\alpha_k$ ,  $k = 2, 3, \dots, n$ , e  $\beta_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , números reais e positivos. Consideremos*

$$\tau = \min\{-\eta_k = \beta_k - \alpha_k : k = 1, 2, \dots, n\}, \quad \text{com } \alpha_1 = 0. \quad (3.61)$$

Então, se  $\tau > 0$ , a região parabólica

$$\mathfrak{P}^+(\tau) \equiv \{z = x + iy \in \mathbb{C} : y^2 \leq 4\tau(\tau + x), x > -\tau\} \quad (3.62)$$

não contém zeros dos polinômios  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ .

**Demonstração:** Consideremos a sequência de polinômios  $\{Q_k\}_{k=0}^n$  gerada pela relação de recorrência de três termos dada em (3.1). Seja  $\{p_k\}_{k=0}^n$  uma sequência de polinômios de respectivos graus  $k$  satisfazendo à relação de recorrência de três termos dada em (3.49). Desta forma, podemos escrever os polinômios  $p_k(z)$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , da seguinte forma:

$$p_k(z) = \frac{Q_k(z)}{\beta_1\beta_2 \dots \beta_k} \quad \text{com } p_{-1}(z) = Q_{-1}(z) = 0 \quad \text{e} \quad p_0(z) = Q_0(z) = 1, \quad (3.63)$$



onde os números  $b_k$  e  $c_k$  são tais que

$$b_k = \beta_k \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, n \quad \text{e} \quad c_k = \frac{\beta_{k-1}\beta_k}{\alpha_k} \quad \text{para } k = 2, 3, \dots, n.$$

Temos que

$$\begin{aligned} \tau &= \min\{-\eta_k = \beta_k - \alpha_k : k = 1, 2, \dots, n\} \\ &= \min\left\{-\eta_k = \beta_k \left(1 - \beta_{k-1} \frac{\alpha_k}{\beta_{k-1}\beta_k}\right) : k = 1, 2, \dots, n\right\} \\ &= \min\left\{-\eta_k = b_k \left(1 - \frac{b_{k-1}}{c_k}\right) : k = 1, 2, \dots, n\right\}. \end{aligned} \quad (3.64)$$

De (3.64), (3.50) e (3.51), segue que  $\tau = \alpha$  e  $\mathfrak{P}_\alpha = \mathfrak{P}^+(\tau)$ . Assim, pelo Teorema 3.3.2,  $p_k(z)$ ,  $1 \leq k \leq n$ , não tem zeros em  $\mathfrak{P}_\alpha$ . Portanto, pelo Teorema 3.3.2 e por (3.63), podemos afirmar que  $Q_k(z)$ , para  $k = 1, 2, \dots, n$ , não tem zeros em  $\mathfrak{P}^+(\tau)$ . ■

Na Figura 3.2 temos o gráfico da região  $\mathfrak{P}^+(\tau)$  com  $\tau = 1$ .

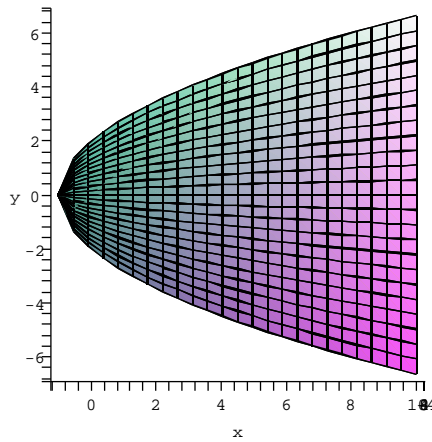


Figura 3.2: Região  $\mathfrak{P}^+(\tau)$

O seguinte teorema fornece informações sobre os zeros dos polinômios  $Q_n$  quando  $\alpha_{n+1} > 0$  e  $\beta_n = \beta > 0$ .

**Teorema 3.3.4.** *Sejam  $\beta_k = \beta > 0$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$  e  $\alpha_k > 0$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ . Então, os zeros de  $Q_k$ ,  $1 \leq k \leq n$ , são distintos (exceto para a possibilidade de zero duplo em  $z = \beta$ ) e pertencem à região  $\mathfrak{C}(\beta) \cup (0, \infty)$ , onde*

$$\mathfrak{C}(\beta) \equiv \{z : z = \beta e^{i\theta}, \quad 0 < \theta < 2\pi\}. \quad (3.65)$$

Em particular, se  $\left\{ \frac{\alpha_{k+1}}{4\beta} \right\}_{k=1}^{n-1}$  é uma seqüência encadeada positiva, então todos os zeros são distintos e estão sobre o círculo aberto  $\mathfrak{C}(\beta)$ .

**Demonstração:** Seja

$$x = x(\beta; z) = \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{z}{\beta}} + \sqrt{\frac{\beta}{z}} \right). \quad (3.66)$$

Observe que a função inversa é dada por

$$z = \beta \left[ (2x^2 - 1) + 2\sqrt{x^2(x^2 - 1)} \right]. \quad (3.67)$$

Então, os polinômios  $P_k(x) = (4\beta z)^{-\frac{k}{2}} Q_k(z)$ ,  $0 \leq k \leq n$ , satisfazem

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1, \quad P_1(x) = x \quad \text{e} \\ P_{k+1}(x) &= xP_k(x) - \frac{\alpha_{k+1}}{4\beta} P_{k-1}(x), \quad 1 \leq k \leq n-1. \end{aligned} \quad (3.68)$$

De fato, da relação de recorrência de três termos (3.1), obtemos  $P_0(x) = Q_0(z) = 1$  e

$$P_1(x) = (4\beta z)^{-\frac{1}{2}} Q_1(z) = \frac{1}{\sqrt{4\sqrt{\beta}z}} (z + \beta_1) = \frac{1}{2} \left( \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{\beta}} + \frac{\beta_1}{\sqrt{\beta}\sqrt{z}} \right) = x$$

e, também,

$$\begin{aligned} P_{k+1}(x) &= (4\beta z)^{-\frac{(k+1)}{2}} Q_{k+1}(z) = (4\beta z)^{-\frac{(k+1)}{2}} [(z + \beta)Q_k(z) - \alpha_{k+1}zQ_{k-1}(z)] \\ &= \frac{(z + \beta)}{\sqrt{4\beta z}} \frac{Q_k(z)}{\sqrt{(4\beta z)^k}} - \frac{\alpha_{k+1}}{4\beta} \frac{Q_{k-1}}{\sqrt{(4\beta z)^{k-1}}} = \frac{(z + \beta)}{2\sqrt{\beta z}} P_k(x) - \frac{\alpha_{k+1}}{4\beta} P_{k-1}(x) \\ &= \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{z}{\beta}} + \sqrt{\frac{\beta}{z}} \right) P_k(x) - \frac{\alpha_{k+1}}{4\beta} P_{k-1}(x) = xP_k(x) - \frac{\alpha_{k+1}}{4\beta} P_{k-1}(x). \end{aligned}$$

Comparando a relação de recorrência de três termos (2.23) com a relação de recorrência (3.68), encontramos  $c_n = 0$  e  $\lambda_n = \frac{\alpha_{k+1}}{4\beta}$ . Logo, pelos Teoremas 2.6.6 e 2.6.7, temos que os zeros de  $P_k$  são reais, distintos e simétricos com relação à origem.

Se  $x_{k,j}$ ,  $j = 1, 2, \dots, k$ , são os zeros de  $P_k(x)$ , de (3.67), os zeros de  $Q_k(z)$  são dados por

$$z_{k,j} = \beta \left[ (2x_{k,j}^2 - 1) + 2\sqrt{x_{k,j}^2(x_{k,j}^2 - 1)} \right], \quad j = 1, 2, \dots, k. \quad (3.69)$$

Podemos, então, escrever

$$P_{2k}(x) = \prod_{j=1}^k (x^2 - x_{2k,j}^2) \quad \text{e} \quad P_{2k+1}(x) = x \prod_{j=1}^k (x^2 - x_{2k+1,j}^2).$$

De  $Q_k(z) = (4\beta z)^{\frac{k}{2}} P_k(x(\beta; z))$ , temos que

$$\begin{aligned} Q_{2k}(z) &= (4\beta z)^k P_{2k}(x) = (4\beta z)^k \prod_{j=1}^k (x^2 - x_{2k,j}^2) \\ &= (4\beta z)^k \prod_{j=1}^k \left[ \frac{1}{4} \left( \sqrt{\frac{z}{\beta}} + \sqrt{\frac{\beta}{z}} \right)^2 - \frac{1}{4} \left( \sqrt{\frac{z_{2k,j}}{\beta}} + \sqrt{\frac{\beta}{z_{2k,j}}} \right)^2 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (4\beta z)^k \prod_{j=1}^k \frac{1}{4} \left[ \left( \frac{z}{\beta} + \frac{\beta}{z} + 2 \right) - \left( \frac{z_{2k,j}}{\beta} + \frac{\beta}{z_{2k,j}} + 2 \right) \right] \\
&= (\beta z)^k \prod_{j=1}^k \left[ \frac{z - z_{2k,j}}{\beta} + \beta \left( \frac{z_{2k,j} - z}{z z_{2k,j}} \right) \right] = (\beta z)^k \prod_{j=1}^k (z - z_{2k,j}) \left( \frac{1}{\beta} - \frac{\beta}{z z_{2k,j}} \right) \\
&= (\beta z)^k \prod_{j=1}^k (z - z_{2k,j}) \left( \frac{z z_{2k,j} - \beta^2}{\beta z z_{2k,j}} \right) = \prod_{j=1}^k (z - z_{2k,j}) \left( z - \frac{\beta^2}{z_{2k,j}} \right)
\end{aligned}$$

e, também, que

$$\begin{aligned}
Q_{2k+1}(z) &= (4\beta z)^{\frac{2k+1}{2}} P_{2k+1}(x) = (4\beta z)^{\frac{2k+1}{2}} x \prod_{j=1}^k (x^2 - x_{2k+1,j}^2) \\
&= x (4\beta z)^{\frac{2k+1}{2}} \prod_{j=1}^k \left[ \frac{1}{4} \left( \sqrt{\frac{z}{\beta}} + \sqrt{\frac{\beta}{z}} \right)^2 - \frac{1}{4} \left( \sqrt{\frac{z_{2k+1,j}}{\beta}} + \sqrt{\frac{\beta}{z_{2k+1,j}}} \right)^2 \right] \\
&= x (4\beta z)^{\frac{2k+1}{2}} \prod_{j=1}^k \frac{1}{4} \left[ \left( \frac{z}{\beta} + \frac{\beta}{z} + 2 \right) - \left( \frac{z_{2k+1,j}}{\beta} + \frac{\beta}{z_{2k+1,j}} + 2 \right) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{z}{\beta}} + \sqrt{\frac{\beta}{z}} \right) (4\beta z)^{\frac{2k+1}{2}} \prod_{j=1}^k \frac{1}{4} \left[ \frac{z - z_{2k+1,j}}{\beta} + \beta \left( \frac{z_{2k+1,j} - z}{z z_{2k+1,j}} \right) \right] \\
&= \left( \sqrt{\frac{z}{\beta}} + \sqrt{\frac{\beta}{z}} \right) (\beta z)^k (\beta z)^{\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^k (z - z_{2k+1,j}) \left( \frac{1}{\beta} - \frac{\beta}{z z_{2k+1,j}} \right) \\
&= \left( \sqrt{\frac{z}{\beta}} + \sqrt{\frac{\beta}{z}} \right) (\beta z)^k (\beta z)^{\frac{1}{2}} \prod_{j=1}^k (z - z_{2k+1,j}) \left( \frac{z z_{2k+1,j} - \beta^2}{\beta z z_{2k+1,j}} \right) \\
&= (z + \beta) \prod_{j=1}^k (z - z_{2k+1,j}) \left( z - \frac{\beta^2}{z_{2k+1,j}} \right).
\end{aligned}$$

Analisemos três casos.

(1°) Se  $x_{k,j}^2 > 1 \implies x_{k,j}^2(x_{k,j}^2 - 1) > 0$ . Logo, de (3.69),  $z_{k,j} \in (\beta, \infty)$  e a outra raiz  $\frac{\beta^2}{z_{k,j}} \in (0, \beta)$ , uma sendo a inversa da outra com relação a  $\beta^2$ . Assim, temos dois zeros reais e positivos de  $Q_k$ .

(2°) Se  $x_{k,j}^2 < 1 \implies x_{k,j}^2(x_{k,j}^2 - 1) < 0$ . Logo, de (3.69),  $z_{k,j}$  é uma raiz complexa  $\implies \overline{z_{k,j}}$  também é raiz.

Além disso,  $|z_{k,j}| = \sqrt{z_{k,j} \overline{z_{k,j}}} = \beta$ . Portanto,  $z_{k,j}$  e  $\frac{\beta^2}{z_{k,j}}$  são zeros de  $Q_k$  e aparecem em pares conjugados no círculo  $\mathfrak{C}(\beta)$ .

(3°) Se  $x_{k,j}^2 = 1 \implies x_{k,j} = 1$  ou  $x_{k,j} = -1$ . Fazendo  $x_{k,j} = 1$  ou  $x_{k,j} = -1$  em (3.69) obtemos, exatamente,  $z_{k,j} = \beta$ . Assim,  $z_{k,j} = \beta$  é uma raiz de  $Q_k$  com multiplicidade dois.

Agora, suponhamos que  $\left\{ \frac{\alpha_{k+1}}{4\beta} \right\}_{k=1}^{n-1}$  é sequência encadeada positiva, isto é, existe uma

segunda sequência  $\{g_k\}_{k=0}^{n-1}$ , onde  $0 \leq g_0 < 1$  e  $0 < g_k < 1$  para  $1 \leq k \leq n-1$ , tal que

$$\frac{\alpha_{k+1}}{4\beta} = (1 - g_{k-1})g_k, \quad 1 \leq k \leq n-1.$$

De (3.68), segue que  $\frac{\alpha_{k+1}}{4\beta}P_{k-1}(x) = xP_k(x) - P_{k+1}(x)$ , isto é,

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_{k+1}}{4\beta} &= x \frac{P_k(x)}{P_{k-1}(x)} - \frac{P_{k+1}(x)}{P_{k-1}(x)} = \frac{x^2 P_k(x)}{x P_{k-1}(x)} - \frac{x^2 P_{k+1}(x) P_k(x)}{x^2 P_{k-1}(x) P_k(x)} \\ &= \frac{x^2 P_k(x)}{x P_{k-1}(x)} \left[ 1 - \frac{P_{k+1}(x)}{x P_k(x)} \right] = \frac{P_k(x)}{x P_{k-1}(x)} \left[ 1 - \frac{P_{k+1}(x)}{x P_k(x)} \right]. \end{aligned} \quad (3.70)$$

Considerando (2.26) com  $c_n = 0$  e  $\lambda_{n+1} = \frac{\alpha_{k+1}}{4\beta}$ , obtemos que  $r_n(x) = \frac{\alpha_{k+1}}{4\beta x^2}$  é uma sequência encadeada. Assim, como  $c_n = 0$ , então  $-1 < c_n < 1$  e, também,  $r_n(-1) = r_n(1) = \frac{\alpha_{k+1}}{4\beta}$  é sequência encadeada. Portanto, pelo Teorema 2.7.2 e Corolário 2.7.1, segue que  $\xi_1 \geq -1$  e  $\eta_1 \leq 1$ , onde  $[\xi_1, \eta_1]$  é o verdadeiro intervalo de ortogonalidade.

Desta maneira, concluímos que todos os zeros de  $P_k$ ,  $1 \leq k \leq n$ , estão no interior de  $(-1, 1)$ . Portanto, neste caso, todos as raízes de  $Q_k$ ,  $1 \leq k \leq n$ , estão no círculo aberto  $\mathfrak{C}(\beta)$ . ■

O teorema que mostraremos agora fornecerá a base para provarmos o Teorema 3.3.6. Podemos encontrar esses dois resultados em Ismail e Li [11].

**Teorema 3.3.5.** *Seja  $\{p_n\}_{n=0}^N$ , uma família de polinômios reais gerados por*

$$\gamma_{n+1}p_{n+1}(x) = (x - \beta_{n+1})p_n(x) - \alpha_{n+1}p_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (3.71)$$

com  $p_0(x) = 1$  e  $p_1(x) = \frac{x + \beta_0}{\gamma_0}$ . Suponhamos que todos os  $\beta_n$  sejam reais e que vale a condição

$$\gamma_n \alpha_n > 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N. \quad (3.72)$$

Então, os zeros de  $p_n(x)$  pertencem ao intervalo  $(A, B)$  se, e somente se,

- (i)  $A < \beta_n < B$ ,  $0 \leq n < N$ ;
- (ii)  $\left\{ \frac{\gamma_n \alpha_n}{(x - \beta_n)(x - \beta_n)} \right\}_{n=1}^{N-1}$  é sequência encadeada para  $x = A$  e  $x = B$ .

**Demonstração:** Consideremos, sem perda de generalidade,  $\gamma_n = 1$ ,  $n = 0, 1, \dots, N$ .

Seja  $\{p_n\}_{n=0}^N$  uma sequência de polinômios como em (3.71). Sabemos que se  $\beta_n \neq 0$  e  $\alpha_{n+1} > 0$ ,  $n \geq 1$ , então  $\{p_n\}_{n=0}^N$  é uma sequência de polinômios ortogonais associados a alguma medida na reta real e também os zeros de  $p_n(x)$  são reais, distintos e se entrelaçam com os zeros de  $p_{n-1}(x)$ .

Suponhamos que todos os zeros de  $p_1, p_2, \dots, p_N$  estão no intervalo  $(A, B)$ . De (3.71), temos que

$$(x - \beta_{n+1}) = \frac{p_{n+1}(x)}{p_n(x)} + \alpha_{n+1} \frac{p_{n-1}(x)}{p_n(x)}. \quad (3.73)$$

Como  $\{p_n\}_{n=0}^N$  são polinômios mônicos, temos que  $p_n(x) > 0$  para  $x \geq B$  e, considerando a condição (3.72), segue que  $x - \beta_{n+1} > 0$ . Então,  $\beta_{n+1} < B$ .

Da mesma forma, temos que  $(-1)^n p_n(x) > 0$  para  $x \leq A$ . Logo,  $x - \beta_{n+1} < 0$  e, conseqüentemente,  $A < \beta_{n+1}$ .

Temos, também, de (3.73), que  $\frac{\alpha_{n+1} p_{n-1}(x)}{(x - \beta_{n+1}) p_n(x)} = 1 - \frac{p_{n+1}(x)}{(x - \beta_{n+1}) p_n(x)}$ . Então,

$$\frac{\alpha_{n+1}}{(x - \beta_n)(x - \beta_{n+1})} \frac{(x - \beta_n) p_{n-1}(x)}{p_n(x)} = 1 - \frac{p_{n+1}(x)}{(x - \beta_{n+1}) p_n(x)},$$

ou seja,

$$\frac{\alpha_{n+1}}{(x - \beta_n)(x - \beta_{n+1})} = \frac{p_n(x)}{(x - \beta_n) p_{n-1}(x)} \left[ 1 - \frac{p_{n+1}(x)}{(x - \beta_{n+1}) p_n(x)} \right].$$

Logo,

$$a_n(x) = [1 - g_{n-1}(x)] g_n(x), \quad (3.74)$$

onde

$$a_n(x) = \frac{\alpha_{n+1}}{(x - \beta_n)(x - \beta_{n+1})}, \quad 1 - g_{n-1}(x) = \frac{p_n(x)}{(x - \beta_n) p_{n-1}(x)}$$

e

$$g_n(x) = 1 - \frac{p_{n+1}(x)}{(x - \beta_{n+1}) p_n(x)}.$$

Se  $x \geq B$  ou  $x \leq A$ , temos que

$$a_n(x) = \frac{\alpha_{n+1}}{(x - \beta_n)(x - \beta_{n+1})} > 0, \quad 1 - g_{n-1}(x) > 0$$

e

$$1 - g_0(x) = \frac{p_1(x)}{(x - \beta_1) p_0(x)} = \frac{(x - \beta_1)}{(x - \beta_1)} = 1 \implies g_0(x) = 0.$$

Como  $1 - g_{n-1}(x) > 0$  e  $a_n(x) > 0$  para  $x \geq B$  ou  $x \leq A$ , temos que

$$g_n(x) > 0 \quad \text{para } x \geq B \quad \text{ou } x \leq A.$$

Desta maneira,  $g_n(x) > 0$  e  $1 - g_n(x) > 0$  e, então,

$$g_0(x) = 0 \quad \text{e} \quad 0 < g_n(x) < 1, \quad n \geq 1.$$

Portanto,  $\{g_n\}_{n=0}^N$  é seqüência de parâmetros para a seqüência encadeada  $\{a_n(x)\}_{n=0}^N$  para qualquer  $x$  tal que  $x \geq B$  ou  $x \leq A$ .

Reciprocamente, considerando (3.74), temos que  $\{a_n\}_{n=1}^N$  é sequência encadeada para  $x \geq B$  ou  $x \leq A$ . Logo,  $g_0(x) = 0$ . Então,  $\{g_n\}_{n=1}^N$  é sequência de parâmetros minimal e  $0 < g_n(x) < 1 \implies 0 < 1 - g_n(x) < 1$  para  $x \geq B$  ou  $x \leq A$ , isto é,

$$0 < \frac{p_n(x)}{(x - \beta_n)p_{n-1}(x)} < 1$$

para  $x \geq B$  ou  $x \leq A$ . Então,  $p_n(x)$  não tem zeros em  $x \geq B$  ou  $x \leq A$ . Portanto, as raízes de  $p_n(x)$ , obviamente, pertencem ao intervalo  $(A, B)$ . ■

Consideremos, agora, a sequência de polinômios  $\{p_n\}_{n=0}^\infty$  gerada por

$$\sqrt{a}p_{n+1}(x) = xp_n(x) - \sqrt{a}p_{n-1}(x), \quad n \geq 1, \quad (3.75)$$

com  $a > 0$ ,  $p_0(x) = 1$  e  $p_1(x) = x$ . Facilmente, podemos mostrar que

$$p_n(x) = U_n\left(\frac{x}{2\sqrt{a}}\right), \quad n \geq 0, \quad (3.76)$$

onde  $U_n(x)$  são os polinômios de Chebyshev de 2ª espécie.

De fato, consideremos a relação de recorrência de três termos dos polinômios de Chebyshev de 2ª espécie

$$U_{n+1}(y) = 2yU_n(y) - U_{n-1}(y), \quad n \geq 1,$$

com  $U_0(y) = 1$  e  $U_1(y) = 2y$ . Fazendo  $y = \frac{x}{2\sqrt{a}}$ , obtemos

$$U_{n+1}\left(\frac{x}{2\sqrt{a}}\right) = \frac{x}{\sqrt{a}}U_n\left(\frac{x}{2\sqrt{a}}\right) - U_{n-1}\left(\frac{x}{2\sqrt{a}}\right), \quad n \geq 1,$$

com  $U_0\left(\frac{x}{2\sqrt{a}}\right) = 1$  e  $U_1\left(\frac{x}{2\sqrt{a}}\right) = \frac{x}{\sqrt{a}}$ . Logo,

$$\sqrt{a}U_{n+1}\left(\frac{x}{2\sqrt{a}}\right) = xU_n\left(\frac{x}{2\sqrt{a}}\right) - \sqrt{a}U_{n-1}\left(\frac{x}{2\sqrt{a}}\right), \quad n \geq 1,$$

ou seja,  $\sqrt{a}p_{n+1}(x) = xp_n(x) - \sqrt{a}p_{n-1}(x)$ ,  $n \geq 1$ , onde

$$p_{n+1}(x) = U_{n+1}\left(\frac{x}{2\sqrt{a}}\right),$$

com  $p_1(x) = x = \sqrt{a}U_1\left(\frac{x}{2\sqrt{a}}\right)$  e  $p_0(x) = U_0\left(\frac{x}{2\sqrt{a}}\right) = 1$ .

**Teorema 3.3.6.** *A sequência constante  $\{a_n(x) = a\}_{n=1}^N$  é sequência encadeada finita se, e somente se,*

$$0 < a < \left[4 \cos^2\left(\frac{\pi}{N+2}\right)\right]^{-1}.$$

**Demonstração:** Suponhamos que  $\{a\}_{n=1}^N$  seja uma sequência encadeada finita. Vamos aplicar o Teorema 3.3.5 com  $\beta_n = 0$ ,  $\alpha_n = \gamma_n = \sqrt{a}$ ,  $A = -1$  e  $B = 1$ . Assim, os zeros de  $p_{N+1}(x)$ , gerados pela relação de recorrência (3.75), pertencem ao intervalo  $(-1, 1)$ .

Sabemos que os zeros de  $U_N(x)$  são dados por  $x_{N+1,j} = \cos\left(\frac{j\pi}{N+2}\right)$ ,  $j = 1, 2, \dots, N+1$ . Então, de (3.76), os zeros extremos de  $p_{N+1}(x)$  são  $\pm 2\sqrt{a} \cos\left(\frac{\pi}{N+2}\right)$ . Como os zeros extremos de  $p_{N+1}(x)$  devem pertencer ao intervalo  $(-1, 1)$ , então  $2\sqrt{a} \cos\left(\frac{\pi}{N+2}\right) < 1$ .

Logo,  $\sqrt{a} < \left[2 \cos\left(\frac{\pi}{N+2}\right)\right]^{-1}$ , ou seja,  $0 < a < \left[4 \cos^2\left(\frac{\pi}{N+2}\right)\right]^{-1}$ .

Reciprocamente, se  $0 < a < \left[4 \cos^2\left(\frac{\pi}{N+2}\right)\right]^{-1}$ , definimos os polinômios

$$\frac{1}{2}p_{n+1}(x) = xp_n(x) - \frac{1}{2}p_{n-1}(x), \quad n = 0, 1, \dots, N,$$

com  $p_0(x) = 1$  e  $p_{-1}(x) = 0$ . Logo, temos que  $p_{N+1}(x) = U_{N+1}(x)$ , o polinômio de Chebyshev de 2ª espécie. Os zeros extremos de  $p_{N+1}(x)$  são  $\pm \cos\left(\frac{\pi}{n+2}\right)$ .

Agora, aplicando o Teorema 3.3.5 com  $-A = B = \cos\left(\frac{\pi}{n+2}\right) + \epsilon$ ,  $\epsilon > 0$ , concluimos, então, que  $\left\{\left[4 \cos^2\left(\frac{\pi}{N+2}\right) + \epsilon\right]^{-1}\right\}$  deve ser uma sequência encadeada para todo  $\epsilon > 0$ . Portanto, pelo Teorema 2.7.1, concluimos que  $\{a\}_{n=1}^N$  é sequência encadeada finita. ■

Agora, estamos em condições de provar o corolário a seguir, que é um caso especial do Teorema 3.3.4.

**Corolário 3.3.1.** *Seja  $\beta_k = \beta > 0$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ . Então,*

(i) *se  $0 < \alpha_{k+1} \leq \beta$ ,  $k = 1, 2, \dots, n-1$ , todos os zeros de  $Q_k$ ,  $1 \leq k \leq n$ , estão em  $\mathfrak{C}(\beta)$ ;*

(ii) *em particular, para  $\epsilon > 0$ , se  $0 < \alpha_{k+1} \leq \beta - \epsilon$ ,  $1 \leq k \leq n-1$ , os zeros de qualquer  $Q_k$ ,  $1 \leq k \leq n$ , estão no arco de  $\mathfrak{C}(\beta)$  que fica no exterior da região parabólica*

$$\mathfrak{B}^+(\epsilon) := \{z = x + iy \in \mathbb{C} : y^2 \leq 4\epsilon(x + \epsilon), x > -\epsilon\};$$

(iii) *novamente, se  $0 < \alpha_{k+1} \leq \beta$ ,  $k = 1, 2, \dots, n-1$ , e  $\kappa_n = \max_{1 \leq k \leq n-1} \sqrt{\frac{\alpha_{k+1}}{\beta}}$ , todos os zeros de  $Q_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , estão no arco aberto*

$$\mathfrak{C}(\beta, \theta_n) \equiv \{z : z = \beta e^{i\theta}, \theta_n < \theta < 2\pi - \theta_n\},$$

$$\text{onde } \theta_n = 2 \arccos\left(\kappa_n \cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)\right);$$

(iv) para  $\epsilon > 0$ , suponha que  $0 < \alpha_{k+1} \leq \beta + \epsilon$ ,  $1 \leq k \leq n-1$ . Se  $Q_n$  tem zeros no exterior de  $\mathfrak{C}(\beta)$ , então esses zeros estão no interior do intervalo  $\left(\frac{\beta^2}{b}, b\right)$ , onde  $b = (\sqrt{\beta + \epsilon} + \sqrt{\epsilon})^2$ .

**Demonstração:** Item (i)– Como  $0 < \alpha_{k+1} \leq \beta$ , então  $0 < \frac{\alpha_{k+1}}{4\beta} \leq \frac{1}{4} < 1$ . Podemos encontrar uma sequência  $\{g_k\}$  tal que  $\frac{\alpha_{k+1}}{4\beta} = (1 - g_{k-1})g_k$  com  $0 \leq g_0 < 1$  e  $0 < g_k < 1$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ . Isto é fácil de verificar, se tomarmos, por exemplo,  $g_0 = 0$ . Logo, pelo Teorema 3.3.4 segue a primeira parte.

Item (ii)– Como  $\beta_k = \beta > 0$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$  e  $\alpha_k > 0$ ,  $k = 2, 3, \dots, n$ , pelo Teorema 3.3.4, os zeros de  $Q_k$  estão em  $\mathfrak{C}(\beta) \cup (0, \infty)$ . Tomemos  $\epsilon > 0$ . Se  $0 < \alpha_k \leq \beta - \epsilon$ ,  $k = 2, \dots, n$ , então  $\eta_k = \alpha_k - \beta_k = \alpha_k - \beta \leq \beta - \epsilon - \beta = -\epsilon$ , isto é,

$$-\eta_k \geq \epsilon \quad \text{para todo } k = 2, \dots, n. \quad (3.77)$$

Mas,  $-\eta_1 = \beta_1 > 0$ . Logo, de (3.61),  $\tau = \min\{-\eta_k : k = 1, 2, \dots, n\} \geq \epsilon > 0$ . Pelo Teorema 3.3.3, a região parabólica  $\mathfrak{P}^+(\tau)$  não contém zeros dos polinômios  $Q_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ . Como  $0 < \epsilon \leq \tau$ , então  $\mathfrak{P}^+(\epsilon) \subset \mathfrak{P}^+(\tau)$ . Assim, não há zeros de  $Q_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , em  $\mathfrak{P}^+(\epsilon)$ . Portanto, os zeros de  $Q_k$ ,  $1 \leq k \leq n$ , estão no arco  $\mathfrak{C}(\beta)$  que fica no exterior da região parabólica  $\mathfrak{P}^+(\epsilon)$ .

Para provar o item (iii), consideremos os polinômios

$$P_k(x) = (4\beta z)^{-\frac{k}{2}} Q_k(z),$$

onde  $x = x(\beta; z) = \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{z}{\beta}} + \sqrt{\frac{\beta}{z}} \right)$ . Como já foi provado no Teorema 3.3.4, esses polinômios satisfazem  $P_{k+1}(x) = xP_k(x) - \frac{\alpha_{k+1}}{4\beta} P_{k-1}(x)$ ,  $1 \leq k \leq n-1$ , com  $P_0(x) = 1$  e  $P_1(x) = x$ . Portanto, dos Teoremas 3.3.5 e 3.3.6, os zeros de  $P_k(x)$ ,  $1 \leq k \leq n$ , estão no interior do intervalo  $(-\hat{x}, \hat{x})$ , onde

$$\hat{x} = \cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right) \max_{1 \leq k \leq n-1} \sqrt{\frac{\alpha_{k+1}}{\beta}}.$$

De fato, como  $\beta_n = 0$ , temos que  $-\hat{x} < \beta_n < \hat{x}$ . Além disso,  $\gamma_n = 1$  e  $\frac{\alpha_{k+1}}{4\beta} > 0$ .

Precisamos mostrar que  $\left\{ \frac{\alpha_{k+1}}{4\beta \hat{x}^2} \right\}_{k=1}^n$  é sequência encadeada para aplicarmos o Teorema

3.3.5. Do Teorema 3.3.6, temos que a sequência  $\left\{ \frac{\alpha_{k+1}}{4\beta x^2} \right\}_{k=1}^n$  é encadeada se

$$0 < \frac{\alpha_{k+1}}{4\beta x^2} < \frac{1}{4 \cos^2\left(\frac{\pi}{n+1}\right)},$$



ou seja,  $x > \sqrt{\frac{\alpha_{k+1}}{\beta}} \cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$ . Então, para  $\hat{x} = \max_{1 \leq k \leq n-1} \sqrt{\frac{\alpha_{k+1}}{\beta}} \cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right)$  a sequência  $\left\{\frac{\alpha_{k+1}}{4\beta\hat{x}^2}\right\}_{k=1}^n$  é encadeada.

Como  $z = \beta e^{i\theta}$ , substituindo em  $x = x(\beta; z)$ , e sabendo que  $2 \cos(\theta) = e^{i\theta} + e^{-i\theta}$ , temos que  $x = \frac{1}{2} \left( \sqrt{e^{i\theta}} + \sqrt{e^{-i\theta}} \right) = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ . Assim,  $\theta = 2 \arccos(x)$ . Logo, para  $x = \hat{x}$ , obtemos

$$\theta_n = 2 \arccos(\hat{x}) = 2 \arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right) \kappa_n\right).$$

Logo, como os zeros de  $P_k(x)$  estão em  $(-\hat{x}, \hat{x})$ , concluímos que os zeros de  $Q_k$ ,  $1 \leq k \leq n$ , estão no arco aberto  $\mathfrak{C}(\beta, \theta_n)$ .

Para provar o último item, vamos considerar os polinômios  $P_k(x)$ ,  $1 \leq k \leq n$ , como anteriormente. Pelo item (iii) os zeros de  $P_k(x)$ ,  $1 \leq k \leq n$ , estão no interior do intervalo  $(-\hat{x}, \hat{x})$ . Como  $0 < \alpha_{k+1} \leq \beta + \epsilon$ ,  $1 \leq k \leq n-1$ , temos

$$\hat{x} = \cos\left(\frac{\pi}{n+1}\right) \max_{1 \leq k \leq n-1} \sqrt{\frac{\alpha_{k+1}}{\beta}} \leq \sqrt{\frac{\beta + \epsilon}{\beta}}.$$

Assim, os zeros de  $P_k(x)$ ,  $1 \leq k \leq n$ , pertencem ao intervalo

$$(-\hat{x}, \hat{x}) \subset \left(-\sqrt{\frac{\beta + \epsilon}{\beta}}, \sqrt{\frac{\beta + \epsilon}{\beta}}\right).$$

Seja  $z_{k,j}$  um zero de  $Q_k(z)$  tal que  $z_{k,j} \notin \mathfrak{C}(\beta) \implies z_{k,j} \in (0, \infty)$ . Se  $x_{k,j}$  é um zero de  $P_k(x)$ , então

$$-\sqrt{\frac{\beta + \epsilon}{\beta}} < x_{k,j} = \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{z_{k,j}}{\beta}} + \sqrt{\frac{\beta}{z_{k,j}}} \right) < \sqrt{\frac{\beta + \epsilon}{\beta}}.$$

Então,  $x_{k,j}^2 = \frac{1}{4} \left( \frac{z_{k,j}}{\beta} + \frac{\beta}{z_{k,j}} + 2 \right) < \frac{\beta + \epsilon}{\beta}$ , ou seja,  $\frac{1}{4} \left( \frac{z_{k,j}^2 + \beta^2 + 2\beta z_{k,j}}{\beta z_{k,j}} \right) < \frac{\beta + \epsilon}{\beta}$ , isto é,  $z_{k,j}^2 - 2(\beta + 2\epsilon)z_{k,j} + \beta^2 < 0$ . Podemos obter, também,

$$z_{k,j}^2 - 2(\beta + 2\epsilon)z_{k,j} + \beta^2 \leq 0$$

e, assim, encontramos que os zeros de  $Q_k$  satisfazem

$$(\beta + 2\epsilon) - 2\sqrt{\epsilon(\beta + \epsilon)} < z_{k,j} < (\beta + 2\epsilon) + 2\sqrt{\epsilon(\beta + \epsilon)},$$

onde  $(\beta + 2\epsilon) + 2\sqrt{\epsilon(\beta + \epsilon)} = (\sqrt{\beta + \epsilon} + \sqrt{\epsilon})^2 = b$  e, também,

$$\begin{aligned} (\beta + 2\epsilon) - 2\sqrt{\epsilon(\beta + \epsilon)} &= \frac{(\beta + 2\epsilon) - 2\sqrt{\epsilon(\beta + \epsilon)}}{(\sqrt{\beta + \epsilon} + \sqrt{\epsilon})^2} (\beta + 2\epsilon) + 2\sqrt{\epsilon(\beta + \epsilon)} \\ &= \frac{(\beta + 2\epsilon)^2 - 4\epsilon(\beta + \epsilon)}{(\sqrt{\beta + \epsilon} + \sqrt{\epsilon})^2} = \frac{\beta^2}{(\sqrt{\beta + \epsilon} + \sqrt{\epsilon})^2} = \frac{\beta^2}{b}. \end{aligned}$$

■

### 3.4 Relações com normas matriciais

A seguir, vamos estudar os zeros de polinômios através da representação de autovalores (3.44) associada à correspondente matriz de Hessenberg.

**Teorema 3.4.1.** *Dado a relação de recorrência de três termos (3.1), suponha que todos os zeros  $z_{n,j}$  de  $Q_n$  (isto é, os autovalores de  $\mathbf{H}_n^{(Q)}$ ) sejam distintos e que as matrizes  $\mathbf{P}_n$ ,  $\mathbf{P}_n^{-1}$  e  $\Xi_n$  sejam aquelas dadas, respectivamente, por (3.40), (3.41) e (3.44).*

*Considere a relação de recorrência de três termos perturbada*

$$Q_{m+1}^\epsilon(z) = (z + \beta_{m+1}^\epsilon)Q_m^\epsilon(z) - \alpha_{m+1}^\epsilon z Q_{m-1}^\epsilon(z), \quad m = 1, 2, \dots, n-1, \quad (3.78)$$

com  $Q_0^\epsilon(z) = 1$  e  $Q_1^\epsilon(z) = z + \beta_1^\epsilon$ , onde os números complexos  $\alpha_m^\epsilon$  e  $\beta_m^\epsilon$  são tais que

$$|\alpha_m^\epsilon - \alpha_m| \leq \epsilon, \quad m = 2, 3, \dots, n \quad \text{e} \quad |\beta_m^\epsilon - \beta_m| \leq \epsilon, \quad m = 1, 2, \dots, n, \quad (3.79)$$

com  $\epsilon > 0$ . Seja  $\mathbf{H}_n^{(\epsilon)}$  a matriz de Hessenberg associada à relação de recorrência de três termos definida no Teorema 3.1.2, cujos autovalores são os zeros do polinômio  $Q_n^\epsilon$ . Então, para qualquer zero  $z^\epsilon$  de  $Q_n^\epsilon$ ,

$$\min_{1 \leq j \leq n} |z^\epsilon - z_{n,j}| \leq \| \mathbf{H}_n^{(\epsilon)} - \mathbf{H}_n^{(Q)} \| \| \mathbf{P}_n \| \| \mathbf{P}_n^{-1} \|,$$

onde  $\| \cdot \|$  é qualquer norma subordinada em  $\mathbb{C}^n$ .

**Demonstração:** Se  $z^\epsilon$  é igual a qualquer dos zeros de  $Q_n$ , o resultado é trivial.

Suponhamos que  $z^\epsilon$  não seja igual a nenhum dos zeros de  $Q_n$ . Seja  $\mathbf{u}$  o autovetor de  $\mathbf{H}_n^{(\epsilon)}$  associado com o autovalor de  $z^\epsilon$ . Então,  $\mathbf{H}_n^{(\epsilon)}\mathbf{u} = z^\epsilon\mathbf{u}$ , ou seja,

$$\mathbf{H}_n^{(Q)}\mathbf{u} - z^\epsilon\mathbf{u} = \mathbf{H}_n^{(Q)}\mathbf{u} - \mathbf{H}_n^{(\epsilon)}\mathbf{u},$$

isto é,

$$\mathbf{H}_n^{(Q)}\mathbf{u} - z^\epsilon\mathbf{u} = -(\mathbf{H}_n^{(\epsilon)} - \mathbf{H}_n^{(Q)})\mathbf{u}. \quad (3.80)$$

De (3.44), temos  $\mathbf{H}_n^{(Q)} = \mathbf{P}_n\Xi_n\mathbf{P}_n^{-1}$ , onde  $\Xi_n$  é a matriz diagonal cujos elementos diagonais são  $z_{n,1}, z_{n,2}, \dots, z_{n,n}$ . Assim, podemos escrever (3.80) da seguinte forma:

$$\mathbf{P}_n\Xi_n\mathbf{P}_n^{-1}\mathbf{u} - z^\epsilon\mathbf{u} = -(\mathbf{H}_n^{(\epsilon)} - \mathbf{H}_n^{(Q)})\mathbf{u},$$

ou seja,

$$\mathbf{P}_n(\Xi_n - z^\epsilon\mathbf{I}_n)\mathbf{P}_n^{-1}\mathbf{u} = -(\mathbf{H}_n^{(\epsilon)} - \mathbf{H}_n^{(Q)})\mathbf{u},$$

isto é,

$$\mathbf{u} = -\mathbf{P}_n(\Xi_n - z^\epsilon\mathbf{I}_n)^{-1}\mathbf{P}_n^{-1}(\mathbf{H}_n^{(\epsilon)} - \mathbf{H}_n^{(Q)})\mathbf{u}.$$

Tomando qualquer norma subordinada, obtemos

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\| &= \left\| -\mathbf{P}_n(\Xi_n - z^\epsilon \mathbf{I}_n)^{-1} \mathbf{P}_n^{-1} (\mathbf{H}_n^{(\epsilon)} - \mathbf{H}_n) \mathbf{u} \right\| \\ &\leq \|\mathbf{P}_n\| \left\| (\Xi_n - z^\epsilon \mathbf{I}_n)^{-1} \right\| \|\mathbf{P}_n^{-1}\| \|\mathbf{H}_n^{(\epsilon)} - \mathbf{H}_n\| \|\mathbf{u}\|, \end{aligned}$$

isto é,

$$1 \leq \|\mathbf{P}_n\| \left\| (\Xi_n - z^\epsilon \mathbf{I}_n)^{-1} \right\| \|\mathbf{P}_n^{-1}\| \|\mathbf{H}_n^{(\epsilon)} - \mathbf{H}_n\|,$$

ou seja,

$$\left\| (\Xi_n - z^\epsilon \mathbf{I}_n)^{-1} \right\|^{-1} \leq \|\mathbf{H}_n^{(\epsilon)} - \mathbf{H}_n\| \|\mathbf{P}_n\| \|\mathbf{P}_n^{-1}\|. \quad (3.81)$$

Observe que  $(\Xi_n - z^\epsilon \mathbf{I}_n)^{-1}$  é uma matriz diagonal. Logo, como estamos considerando normas subordinadas, temos  $\left\| (\Xi_n - z^\epsilon \mathbf{I}_n)^{-1} \right\| = \max_{1 \leq j \leq n} |(z_{n,j} - z^\epsilon)^{-1}|$ . Então,

$$\left\| (\Xi_n - z^\epsilon \mathbf{I}_n)^{-1} \right\|^{-1} = \max_{1 \leq j \leq n} |z_{n,j} - z^\epsilon| = \max_{1 \leq j \leq n} |z^\epsilon - z_{n,j}|.$$

De (3.81), segue que

$$\max_{1 \leq j \leq n} |z^\epsilon - z_{n,j}| = \left\| (\Xi_n - z^\epsilon \mathbf{I}_n)^{-1} \right\|^{-1} \leq \|\mathbf{H}_n^{(\epsilon)} - \mathbf{H}_n^{(Q)}\| \|\mathbf{P}_n\| \|\mathbf{P}_n^{-1}\|.$$

Portanto, concluímos que  $\min_{1 \leq j \leq n} |z^\epsilon - z_{n,j}| \leq \|\mathbf{H}_n^{(\epsilon)} - \mathbf{H}_n^{(Q)}\| \|\mathbf{P}_n\| \|\mathbf{P}_n^{-1}\|$ . ■

Podemos verificar facilmente que

$$\|\mathbf{H}_n^{(\epsilon)} - \mathbf{H}_n^{(Q)}\|_\infty \leq (2n-1)\epsilon \quad \text{e} \quad \|\mathbf{H}_n^{(\epsilon)} - \mathbf{H}_n^{(Q)}\|_1 \leq (2n-1)\epsilon. \quad (3.82)$$

De fato, do Teorema 3.1.2, podemos observar que  $\mathbf{H}_n^{(\epsilon)}$  é a seguinte matriz:

$$\mathbf{H}_n^{(\epsilon)} = \begin{pmatrix} \eta_1^\epsilon & \alpha_2^\epsilon & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \eta_1^\epsilon & \eta_2^\epsilon & \alpha_3^\epsilon & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \eta_1^\epsilon & \eta_2^\epsilon & \eta_3^\epsilon & \dots & \alpha_{n-1}^\epsilon & 0 \\ \eta_1^\epsilon & \eta_2^\epsilon & \eta_3^\epsilon & \dots & \eta_{n-1}^\epsilon & \alpha_n^\epsilon \\ \eta_1^\epsilon & \eta_2^\epsilon & \eta_3^\epsilon & \dots & \eta_{n-1}^\epsilon & \eta_n^\epsilon \end{pmatrix}, \quad (3.83)$$

onde  $\eta_m^\epsilon = \alpha_m^\epsilon - \beta_m^\epsilon$ ,  $m = 1, 2, \dots, n$ , com  $\alpha_1^\epsilon = 0$ .

Logo, a matriz  $\mathbf{H}_n^{(\epsilon)} - \mathbf{H}_n^{(Q)}$  é dada por

$$\mathbf{H}_n^{(\epsilon)} - \mathbf{H}_n^{(Q)} = \begin{pmatrix} \eta_1^\epsilon - \eta_1 & \alpha_2^\epsilon - \alpha_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \eta_1^\epsilon - \eta_1 & \eta_2^\epsilon - \eta_2 & \alpha_3^\epsilon - \alpha_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \eta_1^\epsilon - \eta_1 & \eta_2^\epsilon - \eta_2 & \eta_3^\epsilon - \eta_3 & \dots & \alpha_{n-1}^\epsilon - \alpha_{n-1} & 0 \\ \eta_1^\epsilon - \eta_1 & \eta_2^\epsilon - \eta_2 & \eta_3^\epsilon - \eta_3 & \dots & \eta_{n-1}^\epsilon - \eta_{n-1} & \alpha_n^\epsilon - \alpha_n \\ \eta_1^\epsilon - \eta_1 & \eta_2^\epsilon - \eta_2 & \eta_3^\epsilon - \eta_3 & \dots & \eta_{n-1}^\epsilon - \eta_{n-1} & \eta_n^\epsilon - \eta_n \end{pmatrix}.$$

Usando as condições (3.79), obtemos

$$\begin{aligned} \|\mathbf{H}_n^{(\epsilon)} - \mathbf{H}_n^{(Q)}\|_\infty &= \max \left\{ \begin{array}{l} |\eta_1^\epsilon - \eta_1| + |\alpha_2^\epsilon - \alpha_2| \\ \sum_{k=1}^2 |\eta_k^\epsilon - \eta_k| + |\alpha_3^\epsilon - \alpha_3| \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n |\eta_k^\epsilon - \eta_k| \end{array} \right. \\ &\leq \max \left\{ \begin{array}{l} |\beta_1^\epsilon - \beta_1| + |\alpha_2^\epsilon - \alpha_2| \\ \sum_{k=1}^3 (|\beta_k^\epsilon - \beta_k| + |\alpha_k^\epsilon - \alpha_k|) \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^n (|\beta_k^\epsilon - \beta_k| + |\alpha_k^\epsilon - \alpha_k|) \end{array} \right. \\ &\leq \max \left\{ \begin{array}{l} \epsilon + \epsilon = 2\epsilon \\ \epsilon + \epsilon + \epsilon + \epsilon = 4\epsilon \\ \vdots \\ \epsilon + \epsilon + \dots + \epsilon = 2(n-1)\epsilon + \epsilon = (2n-1)\epsilon \end{array} \right. . \end{aligned}$$

Portanto,  $\|\mathbf{H}_n^{(\epsilon)} - \mathbf{H}_n^{(Q)}\|_\infty \leq (2n-1)\epsilon$ .

De modo análogo, verifica-se que  $\|\mathbf{H}_n^{(\epsilon)} - \mathbf{H}_n^{(Q)}\|_1 \leq (2n-1)\epsilon$ .

O corolário que provaremos a seguir, trata das raízes do polinômio  $Q_n^\epsilon$ .

**Corolário 3.4.1.** *Seja  $\beta > 0$  e considere a relação de recorrência de três termos*

$$Q_{m+1}^\epsilon(z) = (z + \beta_{m+1}^\epsilon)Q_m^\epsilon(z) - \alpha_{m+1}^\epsilon z Q_{m-1}^\epsilon(z), \quad m = 1, 2, \dots, n-1,$$

com  $Q_0^\epsilon(z) = 1$  e  $Q_1^\epsilon(z) = z + \beta_1^\epsilon$ , onde os números complexos  $\alpha_m^\epsilon$  e  $\beta_m^\epsilon$  são tais que

$$|\operatorname{Im}(\alpha_m^\epsilon)| \leq \epsilon, \quad 0 < \operatorname{Re}(\alpha_m^\epsilon) \leq \beta, \quad m = 2, 3, \dots, n$$

e

$$|\beta_m^\epsilon - \beta| \leq \epsilon, \quad m = 1, 2, \dots, n,$$

com  $\epsilon > 0$ . Seja  $\mathbf{H}_n^{(\epsilon)}$  a matriz de Hessenberg associada à relação de recorrência de três termos definida no Teorema 3.1.2, cujo autovalores são os zeros dos polinômios  $Q_n^\epsilon$ .

Considere a relação de recorrência de três termos

$$Q_{m+1}(z) = (z + \beta)Q_m(z) - \operatorname{Re}(\alpha_{m+1}^\epsilon)zQ_{m-1}(z), \quad m = 1, 2, \dots, n-1, \quad (3.84)$$

com  $Q_0(z) = 1$ ,  $Q_1(z) = z + \beta$ .

Para esta relação de recorrência sejam  $\mathbf{H}_n^{(Q)}$ ,  $\mathbf{P}_n$  e  $\mathbf{P}_n^{-1}$  as matrizes associadas definidas, respectivamente, no Teorema 3.1.2 e equações (3.40) e (3.41). Então, todos os zeros de  $Q_n^\epsilon$  estão no interior do anel

$$\zeta(\beta - \|(\mathbf{H}_n^{(\epsilon)} - \mathbf{H}_n^{(Q)})\| \| \mathbf{P}_n \| \| \mathbf{P}_n^{-1} \|) \leq |z^\epsilon| \leq \beta + \|(\mathbf{H}_n^{(\epsilon)} - \mathbf{H}_n^{(Q)})\| \| \mathbf{P}_n \| \| \mathbf{P}_n^{-1} \|,$$

onde a função real

$$\zeta(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

**Demonstração:** Da relação de recorrência (3.84), observemos que

$$\beta_{m+1} = \beta, \quad m = 0, 1, \dots, n-1 \quad \text{e} \quad \alpha_{m+1} = \text{Re}(\alpha_{m+1}^\epsilon), \quad m = 1, 2, \dots, n-1.$$

Logo,  $|\beta_m^\epsilon - \beta_m| = |\beta_m^\epsilon - \beta| \leq \epsilon$  e

$$\begin{aligned} |\alpha_m^\epsilon - \alpha_m| &= |\alpha_m^\epsilon - \text{Re}(\alpha_m^\epsilon)| = |\text{Re}(\alpha_m^\epsilon) + \text{Im}(\alpha_m^\epsilon) - \text{Re}(\alpha_m^\epsilon)| \\ &= |\text{Im}(\alpha_m^\epsilon)| \leq \epsilon. \end{aligned}$$

Pelo Teorema 3.4.1,

$$\min_{1 \leq j \leq n} |z^\epsilon - z_{n,j}| \leq \|(\mathbf{H}_n^{(\epsilon)} - \mathbf{H}_n^{(Q)})\| \| \mathbf{P}_n \| \| \mathbf{P}_n^{-1} \|,$$

onde  $z^\epsilon$  e  $z_{n,j}$  são zeros de  $Q_n^\epsilon$  e  $Q_n$ , respectivamente. Como  $|z| = \beta$ , obtemos

$$\min_{1 \leq j \leq n} |z^\epsilon - z_{n,j}| \geq \min_{1 \leq j \leq n} (|z^\epsilon| - |z_{n,j}|) = \min_{1 \leq j \leq n} (|z^\epsilon| - \beta) = |z^\epsilon| - \beta,$$

ou seja,

$$|z^\epsilon| - \beta \leq \min_{1 \leq j \leq n} |z^\epsilon - z_{n,j}| \leq \|(\mathbf{H}_n^{(\epsilon)} - \mathbf{H}_n^{(Q)})\| \| \mathbf{P}_n \| \| \mathbf{P}_n^{-1} \|,$$

isto é,

$$|z^\epsilon| \leq \beta + \|(\mathbf{H}_n^{(\epsilon)} - \mathbf{H}_n^{(Q)})\| \| \mathbf{P}_n \| \| \mathbf{P}_n^{-1} \|.$$

Por outro lado, temos que

$$|z^\epsilon| = |z^\epsilon - z_{n,j} + z_{n,j}| \geq |z_{n,j}| - |z^\epsilon - z_{n,j}| = \beta - |z^\epsilon - z_{n,j}|.$$

Tomando o mínimo em ambos os lados da inequação acima, obtemos

$$\begin{aligned} |z^\epsilon| &\geq \beta - \min_{1 \leq j \leq n} |z^\epsilon - z_{n,j}| \\ &\geq \beta - \|(\mathbf{H}_n^{(\epsilon)} - \mathbf{H}_n^{(Q)})\| \| \mathbf{P}_n \| \| \mathbf{P}_n^{-1} \| . \end{aligned}$$

Considerando a função  $\zeta(x)$ , concluímos que

$$\zeta(\beta - \|(\mathbf{H}_n^{(\epsilon)} - \mathbf{H}_n^{(Q)})\| \| \mathbf{P}_n \| \| \mathbf{P}_n^{-1} \|) \leq |z^\epsilon| \leq \beta + \|(\mathbf{H}_n^{(\epsilon)} - \mathbf{H}_n^{(Q)})\| \| \mathbf{P}_n \| \| \mathbf{P}_n^{-1} \| .$$

■

**Observação 3.4.1.** Além de  $|\beta_m^\epsilon - \beta| \leq \epsilon$ ,  $m = 1, 2, \dots, n$ , a condição  $|Im(\alpha_m^\epsilon)| \leq \epsilon$ ,  $m = 2, 3, \dots, n$ , também nos permite fazer uso do limitante superior em (3.82), se a norma apropriada for escolhida.

Agora, consideremos o seguinte caso especial da relação de recorrência de três termos para a qual as matrizes  $\Xi_n$ ,  $\mathbf{P}_n$  e  $\mathbf{P}_n^{-1}$  podem ser explicitamente encontradas.

Com  $\beta > 0$ , sejam os polinômio  $\{Q_m(\beta; z)\}_{m=0}^n$  dados por

$$Q_{m+1}(\beta; z) = (z + \beta)Q_m(\beta; z) - \beta z Q_{m-1}(\beta; z), \quad m = 1, 2, \dots, n-1, \quad (3.85)$$

com  $Q_0(\beta; z) = 1$  e  $Q_1(\beta; z) = z + \beta$ .

Denotemos a matriz de Hessenberg associada com esta relação de recorrência (dada no Teorema 3.1.2) por  $\mathbf{H}_n^{(\beta)}$ . Logo, observando a relação de recorrência de três termos (3.85), temos que

$$\beta_m = \beta, \quad m = 1, 2, \dots, n \quad \text{e} \quad \alpha_m = \beta \quad m = 2, 3, \dots, n.$$

Assim, pelo Teorema 3.1.2, obtemos que a matriz  $\mathbf{H}_n^{(\beta)}$  tem a seguinte forma:

$$\mathbf{H}_n^{(\beta)} = \begin{pmatrix} -\beta & \beta & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\beta & 0 & \beta & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -\beta & 0 & 0 & \dots & \beta & 0 \\ -\beta & 0 & 0 & \dots & 0 & \beta \\ -\beta & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.86)$$

Sejam

$$Q_k(\beta; z) = \frac{(z^{k+1} - \beta^{k+1})}{z - \beta}, \quad k = 0, 1, \dots, n. \quad (3.87)$$

Se tomarmos

$$z_{n,j}^{(\beta)} = \beta e^{i\frac{2j\pi}{n+1}}, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

de (3.87), obtemos que

$$\begin{aligned} Q_n(\beta; z_{n,j}^{(\beta)}) &= \frac{(\beta e^{i\frac{2j\pi}{n+1}})^{n+1} - \beta^{n+1}}{\beta e^{i\frac{2j\pi}{n+1}} - \beta} = \frac{\beta^{n+1}(e^{i2j\pi} - 1)}{\beta(e^{i\frac{2j\pi}{n+1}} - 1)} = \frac{\beta^n(e^{i2j\pi} - 1)}{e^{i\frac{2j\pi}{n+1}} - 1} \\ &= \frac{\beta^n(\cos(2j\pi) + i\text{sen}(2j\pi) - 1)}{e^{i\frac{2j\pi}{n+1}} - 1} = \frac{0}{e^{i\frac{2j\pi}{n+1}} - 1} = 0. \end{aligned}$$

Portanto,  $z_{n,j}^{(\beta)}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , são os zeros de  $Q_n(\beta; z)$ , isto é, os autovalores de  $\mathbf{H}_n^{(\beta)}$ . Consequentemente, usando as propriedades  $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos(\theta)$  e  $e^{i\theta} - e^{-i\theta} = 2i\text{sen}(\theta)$ , verificamos que

$$\hat{Q}_k(\beta; z_{n,j}^{(\beta)}) = \beta^{-k} Q_k(\beta; z_{n,j}^{(\beta)}) = \frac{\text{sen}\left(\frac{(k+1)j\pi}{n+1}\right)}{\text{sen}\left(\frac{j\pi}{n+1}\right)} e^{i\frac{kj\pi}{n+1}} \quad (3.88)$$

e

$$\tilde{Q}_k(\beta; z_{n,j}^{(\beta)}) = (z_{n,j}^{(\beta)})^{-k} Q_k(\beta; z_{n,j}^{(\beta)}) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{(k+1)j\pi}{n+1}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{j\pi}{n+1}\right)} e^{-i\frac{kj\pi}{n+1}}. \quad (3.89)$$

De fato,

$$\begin{aligned} \hat{Q}_k(\beta; z_{n,j}^{(\beta)}) &= \beta^{-k} Q_k(\beta; z_{n,j}^{(\beta)}) = \beta^{-k} \frac{((z_{n,j}^{(\beta)})^{k+1} - \beta^{k+1})}{z_{n,j} - \beta} = \beta^{-k} \frac{[(\beta e^{i\frac{2j\pi}{n+1}})^{k+1} - \beta^{k+1}]}{\beta e^{i\frac{2j\pi}{n+1}} - \beta} \\ &= \frac{e^{i\frac{2(k+1)j\pi}{n+1}} - 1}{e^{i\frac{2j\pi}{n+1}} - 1} = \frac{e^{i\frac{j\pi}{n+1}} (e^{i\frac{2kj\pi}{n+1}} e^{i\frac{j\pi}{n+1}} - e^{-i\frac{j\pi}{n+1}})}{e^{i\frac{j\pi}{n+1}} (e^{i\frac{j\pi}{n+1}} - e^{-i\frac{j\pi}{n+1}})} \\ &= \frac{e^{i\frac{2kj\pi}{n+1}} e^{i\frac{j\pi}{n+1}} - e^{-i\frac{j\pi}{n+1}}}{e^{i\frac{j\pi}{n+1}} - e^{-i\frac{j\pi}{n+1}}} = \frac{e^{i\frac{(k+1)j\pi}{n+1}} - e^{-i\frac{(k+1)j\pi}{n+1}}}{e^{i\frac{j\pi}{n+1}} - e^{-i\frac{j\pi}{n+1}}} e^{i\frac{kj\pi}{n+1}} \\ &= \frac{e^{i\frac{(k+1)j\pi}{n+1}} - e^{-i\frac{(k+1)j\pi}{n+1}}}{e^{i\frac{j\pi}{n+1}} - e^{-i\frac{j\pi}{n+1}}} \frac{2i}{2i} e^{i\frac{kj\pi}{n+1}} = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{(k+1)j\pi}{n+1}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{j\pi}{n+1}\right)} e^{i\frac{kj\pi}{n+1}} \end{aligned}$$

e, também,

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_k(\beta; z_{n,j}^{(\beta)}) &= z_{n,j}^{-k} Q_k(\beta; z_{n,j}^{(\beta)}) = (\beta e^{i\frac{2j\pi}{n+1}})^{-k} \frac{[(\beta e^{i\frac{2j\pi}{n+1}})^{k+1} - \beta^{k+1}]}{\beta e^{i\frac{2j\pi}{n+1}} - \beta} \\ &= \frac{\beta^{k+1} e^{-i\frac{2kj\pi}{n+1}} [e^{i\frac{2(k+1)j\pi}{n+1}} - 1]}{\beta^{k+1} (e^{i\frac{2j\pi}{n+1}} - 1)} = \frac{e^{i\frac{j\pi}{n+1}} e^{-i\frac{2kj\pi}{n+1}} [e^{i\frac{2(k+1)j\pi}{n+1}} - e^{-i\frac{j\pi}{n+1}}]}{e^{i\frac{j\pi}{n+1}} (e^{i\frac{j\pi}{n+1}} - e^{-i\frac{j\pi}{n+1}})} \\ &= e^{-i\frac{kj\pi}{n+1}} e^{-i\frac{kj\pi}{n+1}} \frac{(e^{i\frac{2kj\pi}{n+1}} e^{i\frac{j\pi}{n+1}} - e^{-i\frac{j\pi}{n+1}})}{e^{i\frac{j\pi}{n+1}} - e^{-i\frac{j\pi}{n+1}}} = \frac{(e^{i\frac{(k+1)j\pi}{n+1}} - e^{-i\frac{(k+1)j\pi}{n+1}})}{e^{i\frac{j\pi}{n+1}} - e^{-i\frac{j\pi}{n+1}}} e^{-i\frac{kj\pi}{n+1}} \frac{2i}{2i} \\ &= \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{(k+1)j\pi}{n+1}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{j\pi}{n+1}\right)} e^{-i\frac{kj\pi}{n+1}}. \end{aligned}$$

Sejam  $\hat{\mathbf{p}}_{k,j}^{(\beta)}$  e  $\tilde{\mathbf{p}}_{k,j}^{(\beta)}$  os elementos das  $k$ -ésima linha e  $j$ -ésima coluna das correspondentes matrizes  $\mathbf{P}_n = \mathbf{P}_n^{(\beta)}$  e  $\mathbf{P}_n^{-1} = (\mathbf{P}_n^{(\beta)})^{-1}$ , respectivamente. Então, de (3.42), (3.40) e (3.41), obtemos

$$\hat{\mathbf{p}}_{k,j}^{(\beta)} = \frac{\hat{Q}_{k-1}(\beta; z_{n,j}^{(\beta)})}{\alpha_{n+1} \hat{Q}'_n(\beta; z_{n,j}^{(\beta)})} \quad (3.90)$$

e

$$\tilde{\mathbf{p}}_{k,j}^{(\beta)} = \frac{\tilde{Q}_{j-1}(\beta; z_{n,k}^{(\beta)}) - \tilde{Q}_j(\beta; z_{n,k}^{(\beta)})}{\tilde{Q}_{n-1}(\beta; z_{n,k}^{(\beta)})} \quad (3.91)$$

Temos que

$$\hat{Q}_{k-1}(\beta; z_{n,j}^{(\beta)}) = \beta^{-(k-1)} Q_{k-1}(\beta; z_{n,j}^{(\beta)}) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{kj\pi}{n+1}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{j\pi}{n+1}\right)} e^{i\frac{(k-1)j\pi}{n+1}} \quad (3.92)$$

e

$$\hat{Q}_n(\beta; z) = \beta^{-n} Q_n(\beta; z) = \beta^{-1} \frac{z^{n+1} - \beta^{n+1}}{z - \beta}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \hat{Q}'_n(\beta; z) &= \beta^{-n} \left[ \frac{(n+1)z^n(z-\beta) - (z^{n+1} - \beta^{n+1})}{(z-\beta)^2} \right] = \beta^{-n} \left[ \frac{(n+1)z^n}{z-\beta} - \frac{z^{n+1} - \beta^{n+1}}{(z-\beta)^2} \right] \\ &= \beta^{-n} \left[ \frac{(n+1)z^n}{z-\beta} - \frac{Q_n(\beta; z)}{z-\beta} \right]. \end{aligned}$$

Fazendo  $z = z_{n,j}^{(\beta)} = \beta e^{i\frac{2j\pi}{n+1}}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , na equação acima, obtemos

$$\begin{aligned} \hat{Q}'_n(\beta; z_{n,j}^{(\beta)}) &= \beta^{-n} \left[ \frac{(n+1)\beta^n e^{i\frac{2nj\pi}{n+1}}}{\beta e^{i\frac{2j\pi}{n+1}} - \beta} \right] = \frac{(n+1)e^{i\frac{2nj\pi}{n+1}}}{\beta e^{i\frac{2j\pi}{n+1}} - \beta} \\ &= \frac{(n+1)e^{i\frac{2nj\pi}{n+1}}}{\beta e^{i\frac{j\pi}{n+1}}(e^{i\frac{j\pi}{n+1}} - e^{-i\frac{j\pi}{n+1}})} \frac{2i}{2i} \\ &= \frac{(n+1)e^{i\frac{2nj\pi}{n+1}}}{\beta e^{i\frac{j\pi}{n+1}} \operatorname{sen}\left(\frac{j\pi}{n+1}\right) 2i}. \end{aligned} \quad (3.93)$$

Substituindo (3.92) e (3.93) em (3.90) e observando que, na relação de recorrência de três termos (3.85), temos  $\alpha_{n+1} = \beta$ , obtemos

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{P}}_{k,j}^{(\beta)} &= \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{kj\pi}{n+1}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{j\pi}{n+1}\right)} e^{i\frac{(k-1)j\pi}{n+1}} \frac{\beta e^{i\frac{j\pi}{n+1}} \operatorname{sen}\left(\frac{j\pi}{n+1}\right) 2i}{(n+1)e^{i\frac{2nj\pi}{n+1}}} \\ &= \frac{2i}{n+1} \operatorname{sen}\left(\frac{kj\pi}{n+1}\right) e^{-i\frac{(2n-k)j\pi}{n+1}}. \end{aligned}$$

Como

$$\tilde{Q}_j(\beta; z_{n,k}^{(\beta)}) = (z_{n,k}^{(\beta)})^{-j} \frac{(z_{n,k}^{(\beta)})^{j+1} - \beta^{j+1}}{z_{n,k}^{(\beta)} - \beta}, \quad (3.94)$$

então, de (3.91), obtemos

$$\tilde{\mathbf{P}}_{k,j}^{(\beta)} = \frac{\tilde{Q}_{j-1}(\beta; z_{n,k}) - \tilde{Q}_j(\beta; z_{n,k})}{\tilde{Q}_{n-1}(\beta; z_{n,k})} = \frac{z_{n,k}^{-(j-1)}(z_{n,k}^j - \beta^j) - z_{n,k}^{-j}(z_{n,k}^{j+1} - \beta^{j+1})}{z_{n,k}^{-(n-1)}(z_{n,k}^n - \beta^n)}$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{-z_{n,k}^{-j+1}\beta^j + z_{n,k}^{-j}\beta^{j+1}}{z_{n,k} - z_{n,k}^{-n+1}\beta^n} = \frac{-z_{n,k}^{-j}\beta^j + z_{n,k}^{-j+1}\beta^{j+1}}{1 - z_{n,k}^{-n}\beta^n} \\
&= \frac{\beta^{-(j+1)}e^{-i\frac{2(j+1)k\pi}{n+1}}\beta^{j+1} - \beta^{-j}e^{-i\frac{2kj\pi}{n+1}}\beta}{1 - \beta^{-n}e^{-i\frac{2kn\pi}{n+1}}\beta^n} = \frac{e^{-i\frac{2(j+1)k\pi}{n+1}}(1 - e^{i\frac{2k\pi}{n+1}})}{1 - e^{-i\frac{2kn\pi}{n+1}}} \\
&= \frac{e^{-i\frac{2(j+1)k\pi}{n+1}}(1 - e^{i\frac{2k\pi}{n+1}})}{(1 - e^{i\frac{2k\pi}{n+1}})} = e^{-i\frac{2(j+1)k\pi}{n+1}},
\end{aligned}$$

lembrando que  $e^{-i\frac{2nk\pi}{n+1}} = e^{-i\frac{2(n+1)k\pi - 2k\pi}{n+1}} = e^{-i2k\pi}e^{i\frac{2k\pi}{n+1}} = e^{i\frac{2k\pi}{n+1}}$ .

De  $\mathbf{P}_n^{(\beta)}(\mathbf{P}_n^{(\beta)})^{-1} = \mathbf{I}_n$ , temos

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n \hat{\mathbf{P}}_{k,j} \tilde{\mathbf{P}}_{j,l} &= \sum_{j=1}^n \frac{2i}{n+1} \operatorname{sen}\left(\frac{kj\pi}{n+1}\right) e^{-i\frac{(2n-k)j\pi}{n+1}} e^{-i\frac{2(l+1)j\pi}{n+1}} \\
&= \frac{2i}{n+1} \sum_{j=1}^n \operatorname{sen}\left(\frac{kj\pi}{n+1}\right) e^{i\frac{(k-2l)j\pi}{n+1}} e^{i\frac{2(n+1)j\pi}{n+1}} \\
&= \frac{2i}{n+1} \sum_{j=1}^n \operatorname{sen}\left(\frac{kj\pi}{n+1}\right) e^{i\frac{(k-2l)j\pi}{n+1}} \\
&= \delta_{k,l} = \begin{cases} 0, & \text{se } k \neq l \\ 1, & \text{se } k = l \end{cases}, \quad l, k = 1, 2, \dots, n.
\end{aligned}$$

Podemos demonstrar, então, o seguinte lema.

**Lema 3.4.1.** (i)  $\|(\mathbf{P}_n^{(\beta)})^{-1}\|_1 = \|(\mathbf{P}_n^{(\beta)})^{-1}\|_\infty = n$ ;

(ii)  $\|\mathbf{P}_n^{(\beta)}\|_1 = \|\mathbf{P}_n^{(\beta)}\|_\infty = \frac{2}{n+1}\sigma_n$ , onde

$$\sigma_n = \max_{1 \leq k \leq n} \left\{ \sum_{j=1}^n \left| \operatorname{sen}\left(\frac{kj\pi}{n+1}\right) \right| \right\} \leq \sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

**Demonstração:** Para provar o primeiro item, temos que

$$\|(\mathbf{P}_n^{(\beta)})^{-1}\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{k=1}^n |\tilde{\mathbf{P}}_{k,j}| = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{k=1}^n \left| e^{-i\frac{(j+1)k\pi}{n+1}} \right| = \max_{1 \leq j \leq n} n = n$$

e, também,

$$\|(\mathbf{P}_n^{(\beta)})^{-1}\|_\infty = \max_{1 \leq k \leq n} \sum_{j=1}^n |\tilde{\mathbf{P}}_{k,j}| = \max_{1 \leq k \leq n} \sum_{j=1}^n \left| e^{-i\frac{(j+1)k\pi}{n+1}} \right| = \max_{1 \leq k \leq n} n = n.$$

Agora, para provar (ii), temos

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{P}_n^{(\beta)}\|_1 &= \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{k=1}^n |\hat{\mathbf{P}}_{k,j}| = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{k=1}^n \left| \frac{2i}{n+1} \operatorname{sen}\left(\frac{kj\pi}{n+1}\right) e^{-i\frac{(2n-k)j\pi}{n+1}} \right| \\
&= \max_{1 \leq j \leq n} \left\{ \frac{2i}{n+1} \sum_{k=1}^n \left| \operatorname{sen}\left(\frac{kj\pi}{n+1}\right) \right| \left| e^{-i\frac{(2n-k)j\pi}{n+1}} \right| \right\} \\
&= \frac{2i}{n+1} \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{k=1}^n \left| \operatorname{sen}\left(\frac{kj\pi}{n+1}\right) \right|.
\end{aligned}$$

Consideremos

$$\sigma_n = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{k=1}^n \left| \operatorname{sen} \left( \frac{kj\pi}{n+1} \right) \right|.$$

Logo,  $\| \mathbf{P}_n^{(\beta)} \|_1 = \frac{2i}{n+1} \sigma_n$ .

Como  $\frac{1-z^{n+1}}{1-z} = \sum_{j=0}^n z^j$ , então, se  $z = e^{i\frac{2k\pi}{n+1}}$ , obtemos  $\frac{1 - (e^{i\frac{2k\pi}{n+1}})^{n+1}}{1 - e^{i\frac{2k\pi}{n+1}}} = \sum_{j=0}^n e^{i\frac{2kj\pi}{n+1}}$ .

Logo,

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1-1}{1-e^{i\frac{2k\pi}{n+1}}} = \sum_{j=0}^n \left[ \cos \left( \frac{2kj\pi}{n+1} \right) + i \operatorname{sen} \left( \frac{2kj\pi}{n+1} \right) \right] \\ &= \sum_{j=0}^n \cos \left( \frac{2kj\pi}{n+1} \right) + i \sum_{j=0}^n \operatorname{sen} \left( \frac{2kj\pi}{n+1} \right). \end{aligned}$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwartz, temos que  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \leq \| \mathbf{x} \|_2 \| \mathbf{y} \|_2$ . Tomando

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \left( \left| \operatorname{sen} \left( \frac{k\pi}{n+1} \right) \right|, \left| \operatorname{sen} \left( \frac{2k\pi}{n+1} \right) \right|, \dots, \left| \operatorname{sen} \left( \frac{nk\pi}{n+1} \right) \right| \right)^T \quad \text{e} \\ \mathbf{y} &= \left( 1, 1, \dots, 1 \right)^T \end{aligned}$$

e lembrando que  $\operatorname{sen}^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$ , obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \left| \operatorname{sen} \left( \frac{kj\pi}{n+1} \right) \right| &\leq \sqrt{\sum_{j=1}^n \left[ \operatorname{sen} \left( \frac{kj\pi}{n+1} \right) \right]^2} \sqrt{\sum_{j=1}^n 1^2} \\ &= \sqrt{n} \sqrt{\sum_{j=1}^n \left[ \operatorname{sen} \left( \frac{kj\pi}{n+1} \right) \right]^2} = \sqrt{n} \sqrt{\sum_{j=0}^n \frac{1}{2} \left[ 1 - \cos \left( \frac{2kj\pi}{n+1} \right) \right]} \\ &= \sqrt{n} \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sum_{j=0}^n 1 - \underbrace{\sum_{j=0}^n \cos \left( \frac{2kj\pi}{n+1} \right)}_{=0}} = \sqrt{n} \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{n+1}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\sigma_n = \max_{1 \leq k \leq n} \sum_{j=1}^n \left| \operatorname{sen} \left( \frac{kj\pi}{n+1} \right) \right| \leq \sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

Desta forma, completamos a demonstração. ■

**Corolário 3.4.2.** *Seja  $\beta > 0$  e considere a relação de recorrência de três termos*

$$Q_{m+1}^\epsilon(z) = (z + \beta_{m+1}^\epsilon) Q_m^\epsilon(z) - \alpha_{m+1}^\epsilon z Q_{m-1}^\epsilon(z), \quad m = 1, 2, \dots, n-1,$$

com  $Q_0^\epsilon(z) = 1$  e  $Q_1^\epsilon(z) = z + \beta_1^\epsilon$ , onde os números complexos  $\alpha_m^\epsilon$  e  $\beta_m^\epsilon$  são tais que  $|\alpha_m^\epsilon - \beta| \leq \epsilon$  para  $m = 2, 3, \dots, n$  e  $|\beta_m^\epsilon - \beta| \leq \epsilon$  para  $m = 1, 2, \dots, n$ , onde  $\epsilon > 0$ . Seja  $\mathbf{H}_n^{(\epsilon)}$  a matriz de Hessenberg associada com a relação de recorrência de três termos definida no Teorema 3.1.2, cujos autovalores são os zeros dos polinômios  $Q_n^\epsilon$ . Então, todos os zeros de  $Q_n^\epsilon$  estão no interior do anel

$$\zeta\left(\beta - \frac{2n\sigma_n}{n+1} \|\mathbf{H}_n^{(\epsilon)} - \mathbf{H}_n^{(\beta)}\|\right) \leq |z^\epsilon| \leq \beta + \frac{2n\sigma_n}{n+1} \|\mathbf{H}_n^{(\epsilon)} - \mathbf{H}_n^{(\beta)}\|,$$

onde a função real  $\zeta(x)$  é tal que:

$$\zeta(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}.$$

O número  $\sigma_n$  é como no Lema 3.4.1.

**Demonstração:** Considerando  $\mathbf{H}_n^{(Q)} = \mathbf{H}_n^{(\beta)}$  no Corolário 3.4.1, então os zeros de  $Q_n^\epsilon$  estão no interior do anel

$$\zeta\left(\beta - \|\mathbf{H}_n^{(\epsilon)} - \mathbf{H}_n^{(\beta)}\| \|\mathbf{P}_n\| \|\mathbf{P}_n^{-1}\|\right) \leq |z^\epsilon| \leq \beta + \|\mathbf{H}_n^{(\epsilon)} - \mathbf{H}_n^{(\beta)}\| \|\mathbf{P}_n\| \|\mathbf{P}_n^{-1}\|. \quad (3.95)$$

Pelo Lema 3.4.1, temos  $\|\mathbf{P}_n\| = \|\mathbf{P}_n^{(\beta)}\| = n$  e  $\|\mathbf{P}_n^{-1}\| = \|(\mathbf{P}_n^{(\beta)})^{-1}\| = \frac{2}{n+1}\sigma_n$ .

Substituindo em (3.95), obtemos o resultado desejado, ou seja,

$$\zeta\left(\beta - \frac{2n\sigma_n}{n+1} \|\mathbf{H}_n^{(\epsilon)} - \mathbf{H}_n^{(\beta)}\|\right) \leq |z^\epsilon| \leq \beta + \frac{2n\sigma_n}{n+1} \|\mathbf{H}_n^{(\epsilon)} - \mathbf{H}_n^{(\beta)}\|.$$

■

# Capítulo 4

## Limitantes para os zeros: alguns casos particulares

Neste capítulo, estudaremos a localização dos zeros dos polinômios de Szegő, para-ortogonais e com coeficientes não nulos. Como anteriormente, os zeros são explorados através da representação de autovalores associados a uma matriz de Hessenberg.

### 4.1 Polinômios de Szegő

Com a relação de recorrência de três termos (2.43), temos que os polinômios de Szegő satisfazem a uma relação da forma (3.1) com

$$\beta_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \quad \text{e} \quad \alpha_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{a_n}(1 - |a_n|^2), \quad n \geq 1.$$

Pelo Teorema 3.1.2, temos que os zeros de  $S_n$  são os autovalores da matriz de Hessenberg inferior  $\mathbf{H}_n^{(Q)}$ , onde

$$\begin{aligned} \eta_r &= \alpha_r - \beta_r = \frac{a_r}{a_{r-1}}(1 - |a_{r-1}|^2) - \frac{a_r}{a_{r-1}} = -\frac{a_r}{a_{r-1}}|a_{r-1}|^2 \\ &= -\frac{a_r}{a_{r-1}}a_{r-1}\bar{a}_{r-1} = -a_r\bar{a}_{r-1}, \quad \text{para } r = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \alpha_r &= \eta_r + \beta_r = \frac{a_r}{a_{r-1}} - a_r\bar{a}_{r-1} = \frac{a_r}{a_{r-1}}[1 - a_r\bar{a}_{r-1}a_{r-1}] \\ &= \frac{a_r}{a_{r-1}}[1 - |a_{r-1}|^2], \quad \text{para } r = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Logo, podemos aplicar o Teorema 3.3.3 para a relação de recorrência (2.43) e, assim, obtemos o seguinte teorema.

**Teorema 4.1.1.** (i) *Suponha que  $0 < a_k < 1$  para  $k = 1, 2, \dots, n$ . Seja*

$$\tau = \min\{-\eta_k = a_k a_{k-1}, k = 1, 2, \dots, n\}.$$

*Então, a região parabólica*

$$\mathfrak{P}^+(\tau) \equiv \{z = x + iy \in \mathbb{C} : y^2 \leq 4\tau(\tau + x), x > -\tau\},$$

*não contém zeros de  $S_1, S_2, \dots, S_n$ ;*

(ii) *suponha que  $0 < (-1)^k a_k < 1$  para  $k = 1, 2, \dots, n$ . Seja*

$$\tau = \min\{-a_k a_{k-1}, k = 1, 2, \dots, n\}.$$

*Então, a região parabólica*

$$\mathfrak{P}^-(\tau) \equiv \{z = x + iy \in \mathbb{C} : y^2 \leq 4\tau(\tau - x), x < \tau\},$$

*não contém zeros de  $S_1, S_2, \dots, S_n$ .*

**Demonstração:** A primeira parte deste teorema é obtida aplicando-se o Teorema 3.3.3 à relação de recorrência (2.43).

Para obter a segunda parte, precisamos escrever a relação de recorrência (2.43) em termos dos polinômios  $\{(-1)^n S_n(-z)\}$ , ou seja,

$$(-1)^{n+1} S_{n+1}(-z) = \left(z - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) (-1)^n S_n(-z) + \frac{a_{n+1}}{a_n} (1 - |a_n|^2) z (-1)^{n-1} S_{n-1}(-z)$$

para  $n \geq 1$ . Como, por hipótese,  $0 < (-1)^k a_k < 1$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , os coeficientes da relação acima são positivos. Assim, do Teorema 3.3.3, a região parabólica  $\mathfrak{P}^-(\tau)$  não contém zeros de  $S_1, S_2, \dots, S_n$ . ■

## 4.2 Polinômios para-ortogonais

Em [13], Jones, Njåstad e Thron mostraram que os zeros dos polinômios para-ortogonais são distintos e estão no círculo unitário. Podemos verificar isso para as duas sequências de polinômios para-ortogonais  $R_n^{(1)}(z)$  e  $R_n^{(2)}(z)$  definidos por (2.47).

Como  $-1 < a_n < 1$ , na relação de recorrência (2.49) para esses polinômios os coeficientes

$$\left\{ \frac{1}{4} \alpha_{n+1}^{(1)} \right\} \quad \text{e} \quad \left\{ \frac{1}{4} \alpha_{n+1}^{(2)} \right\}$$

são seqüências encadeadas positivas com as respectivas seqüências de parâmetros dadas por

$$\left\{ g_n^{(1)} = \frac{1 - a_n}{2} \right\} \quad \text{e} \quad \left\{ g_n^{(2)} = \frac{1 - a_{n+1}}{2} \right\},$$

isto é,

$$(1 - g_{n-1}^{(1)})g_n^{(1)} = \frac{1}{4}\alpha_{n+1}^{(1)} \quad \text{e} \quad (1 - g_{n-1}^{(2)})g_n^{(2)} = \frac{1}{4}\alpha_{n+1}^{(2)}$$

para  $n \geq 1$ , com  $g_0^{(1)} = 0$  e  $0 < g_0^{(2)} = 1 - \alpha_2^{(1)} = \frac{1 + a_1}{2} < 1$ .

Portanto, do Teorema 3.3.4, os zeros de  $R_n^{(1)}$  e  $R_n^{(2)}$  são distintos e estão sobre o círculo unitário aberto  $\mathfrak{C}(1) \equiv \{z : z = e^{i\theta}, \quad 0 < \theta < 2\pi\}$ .

O próximo teorema relaciona os polinômios de Szegő  $\{S_n\}$  e os polinômios ortogonais  $P_n^{(i)}$  obtidos através de

$$P_n^{(i)}(x(z)) = (4z)^{-\frac{n}{2}} R_n^{(i)}(z), \quad i = 1, 2,$$

onde  $x(z) = \frac{1}{2} \left( \sqrt{z} + \frac{1}{\sqrt{z}} \right)$ .

**Teorema 4.2.1.** (i) *Seja  $dv(z)$  uma medida positiva no círculo unitário tal que os polinômios de Szegő associados  $\{S_n\}$  são todos reais, isto é,  $-1 < S_n(0) = a_n < 1$  para  $n \geq 1$ . Sejam*

$$\alpha_{n+1}^{(1)} = (1 + a_{n-1})(1 - a_n) > 0 \quad \text{e} \quad \alpha_{n+1}^{(2)} = (1 + a_n)(1 - a_{n+1}) > 0, \quad n \geq 1.$$

*Consideremos as medidas positivas  $d\phi^{(1)}$  e  $d\phi^{(2)}$  definidas por*

$$d\phi^{(1)}(x) = -dv(z) \quad \text{e} \quad d\phi^{(2)}(x) = -(1 - x^2)d\phi^{(1)}(x),$$

*onde  $x = x(z)$ . Os suportes de  $d\phi^{(1)}$  e  $d\phi^{(2)}$  estão no interior de  $[-1, 1]$ . Então, para  $i = 1, 2$ , as seqüências de polinômios  $\{P_n^{(i)}\}$ , dadas por  $P_0^{(i)} = 1$ ,  $P_1^{(i)}(z) = x$  e*

$$P_{n+1}^{(i)}(z) = xP_n^{(i)}(z) - \frac{1}{4}\alpha_{n+1}^{(i)}P_{n-1}^{(i)}(z), \quad n \geq 1,$$

*são os polinômios ortogonais mônicos com respeito à medida  $d\phi^{(i)}$ ;*

(ii) *reciprocamente, sejam  $d\phi^{(1)}$  e  $d\phi^{(2)}$  duas medidas positivas definidas em  $[-1, 1]$  tais que  $d\phi^{(2)}(x) = (1 - x^2)d\phi^{(1)}(x)$ . Suponhamos que os respectivos polinômios ortogonais mônicos  $P_n^{(1)}$  e  $P_n^{(2)}$ , associados com essas medidas, satisfaçam*

$$P_{n+1}^{(i)}(x) = xP_n^{(i)}(x) - \frac{1}{4}\alpha_{n+1}^{(i)}P_{n-1}^{(i)}(x), \quad n \geq 1.$$

*Então, os coeficientes de reflexão  $a_n = S_n(0)$  dos polinômios de Szegő  $S_n$ , associados à medida positiva  $dv(z) = -d\phi^{(1)}(x(z))$ , satisfazem*

$$a_n = \frac{1 - \alpha_{n+1}^{(1)}}{1 + a_{n-1}} \quad \text{e} \quad a_{n+1} = -1 + \frac{\alpha_{n+1}^{(2)}}{1 - a_n}, \quad n \geq 1,$$

com  $a_0 = 1$ . Explicitamente (com os momentos  $\mu_0^{(i)}$  de ordem zero associados com  $d\phi^{(i)}$ ),

$$a_{2n-1} = 2 \frac{\alpha_{2n-1}^{(2)} \alpha_{2n-3}^{(2)} \cdots \alpha_3^{(2)} \mu_0^{(2)}}{\alpha_{2n-1}^{(1)} \alpha_{2n-3}^{(1)} \cdots \alpha_3^{(1)} \mu_0^{(1)}} - 1 \quad e \quad a_{2n} = 2 \frac{\alpha_{2n}^{(2)} \alpha_{2n-2}^{(2)} \cdots \alpha_2^{(2)}}{\alpha_{2n}^{(1)} \alpha_{2n-2}^{(1)} \cdots \alpha_2^{(1)}} - 1, \quad n \geq 1.$$

Além disso,

$$2zS_{n-1}(z) = R_n^{(1)}(z) + (z-1)R_{n-1}^{(2)}(z), \quad n \geq 1,$$

onde  $R_n^{(i)}(z) = (4z)^{n/2} P_n^{(i)}(x(z))$ ,  $i = 1, 2$ .

A demonstração deste teorema segue de resultados dados em Bracciali, Silva e Sri Ranga [4] e Zhedanov [27].

### 4.3 Polinômios com coeficientes não nulos

Seja

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^n b_k z^k = b_n \sum_{k=0}^n \tilde{b}_k z^k = b_n \tilde{P}_n(z), \quad (4.1)$$

onde  $b_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ , são complexos, diferentes de zeros e  $\tilde{b}_k = \frac{b_k}{b_n}$  para  $k = 0, 1, \dots, n$ .

Seja

$$t_k = \frac{b_{k-1}}{b_k} = \frac{\tilde{b}_{k-1}}{\tilde{b}_k}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \quad (4.2)$$

Consideremos as seguintes expressões

$$\tilde{A}_n = \frac{1}{\tilde{P}_n(z)} \left[ z^{n-1} + \frac{b_{n-1}}{b_n} z^{n-2} + \dots + \frac{b_2}{b_n} z + \frac{b_1}{b_n} \right]$$

e

$$A_{n-1}^* = \frac{1}{\tilde{P}_n(z)} \left[ z^{n-1} + \frac{b_{n-2}}{b_{n-1}} z^{n-2} + \dots + \frac{b_1}{b_{n-1}} z + \frac{b_0}{b_{n-1}} \right].$$

Então,  $\tilde{A}_n$  e  $A_{n-1}^*$  podem ser dadas em termos de frações contínuas da seguinte forma:

$$\tilde{A}_n = \frac{1}{z+t_1} - \frac{t_1 z}{z+t_2} - \dots - \frac{t_{n-1} z}{z+t_n} \quad (4.3)$$

e

$$A_{n-1}^* = \frac{1}{z+t_n} - \frac{t_{n-1} z}{z+t_{n-1}} - \dots - \frac{t_1 z}{z+t_1}. \quad (4.4)$$

De fato, de (4.1), temos que

$$\tilde{P}_n(z) = \frac{b_{n-1}}{b_n} \left( \frac{b_n}{b_{n-1}} z^n + z^{n-1} + \frac{b_{n-2}}{b_{n-1}} z^{n-2} + \dots + \frac{b_1}{b_{n-1}} z + \frac{b_0}{b_{n-1}} \right)$$

e, usando (4.2), obtemos

$$\begin{aligned}
A_{n-1}^* &= \frac{1}{\tilde{P}_n(z)} \left[ z^{n-1} + b_{n-2}/b_{n-1}z^{n-2} + \dots + b_1/b_{n-1}z + b_0/b_{n-1} \right] \\
&= \frac{z^{n-1} + b_{n-2}/b_{n-1}z^{n-2} + \dots + b_1/b_{n-1}z + b_0/b_{n-1}}{b_{n-1}/b_n \left( b_n/b_{n-1}z^n + z^{n-1} + b_{n-2}/b_{n-1}z^{n-2} + \dots + b_1/b_{n-1}z + b_0/b_{n-1} \right)} \\
&= \frac{1}{z + t_n - \left( z - \frac{z^n}{z^{n-1} + b_{n-2}/b_{n-1}z^{n-2} + \dots + b_1/b_{n-1}z + b_0/b_{n-1}} \right)} \\
&= \frac{1}{z + t_n - \frac{b_{n-2}/b_{n-1}z^{n-1} + b_{n-3}/b_{n-1}z^{n-2} + \dots + b_1/b_{n-1}z^2 + b_0/b_{n-1}z}{z^{n-1} + b_{n-2}/b_{n-1}z^{n-2} + \dots + b_1/b_{n-1}z + b_0/b_{n-1}}} \\
&= \frac{1}{z + t_n - \frac{b_{n-2}/b_{n-1}z \left( z^{n-2} + b_{n-3}/b_{n-2}z^{n-3} + \dots + b_1/b_{n-2}z + b_0/b_{n-2} \right)}{b_{n-2}/b_{n-1} \left( b_{n-1}/b_{n-2}z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + b_1/b_{n-2}z + b_0/b_{n-2} \right)}}
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
A_{n-1}^* &= \frac{1}{z + t_n - t_{n-1}z \left( \frac{z^{n-2} + b_{n-3}/b_{n-2}z^{n-3} + \dots + b_1/b_{n-2}z + b_0/b_{n-2}}{b_{n-2}/b_{n-1} \left( b_{n-1}/b_{n-2}z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + b_1/b_{n-2}z + b_0/b_{n-2} \right)} \right)} \\
&= \frac{1}{z + t_n - t_{n-1}A_{n-2}^*} = \frac{1}{z + t_n - \frac{t_{n-1}z}{z + t_{n-1} - t_{n-2}zA_{n-3}^*}} \\
&= \dots \\
&= \frac{1}{z + t_n - \frac{t_{n-1}z}{z + t_{n-1} - \frac{t_{n-2}z}{z + t_{n-2} - \dots - \frac{t_2z}{z + t_2 - \frac{t_1z}{z + t_1}}}}}. \tag{4.5}
\end{aligned}$$

Temos, também de (4.1), que  $\tilde{P}_n(z) = \tilde{b}_0 + \tilde{b}_1z + \dots + \tilde{b}_{n-1}z^{n-1} + z^n$ . Logo,

$$\begin{aligned}
\tilde{A}_{n-1} &= \frac{1}{\tilde{P}_n(z)} \left[ z^{n-1} + \frac{b_{n-1}}{b_n}z^{n-2} + \dots + \frac{b_2}{b_n}z + \frac{b_1}{b_n} \right] \\
&= \frac{z^{n-1} + \tilde{b}_{n-1}z^{n-2} + \dots + \tilde{b}_2z + \tilde{b}_1}{z^n + \tilde{b}_{n-1}z^{n-1} + \dots + \tilde{b}_2z^2 + \tilde{b}_1z + \tilde{b}_0} = \frac{z^{n-1} + \tilde{b}_{n-1}z^{n-2} + \dots + \tilde{b}_2z + \tilde{b}_1}{\tilde{b}_0 + z \left( z^{n-1} + \tilde{b}_{n-1}z^{n-2} + \dots + \tilde{b}_2z + \tilde{b}_1 \right)} \\
&= \frac{1}{z + \frac{\tilde{b}_0}{z^{n-1} + \tilde{b}_{n-1}z^{n-2} + \dots + \tilde{b}_2z + \tilde{b}_1}}
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{z + \tilde{b}_0/\tilde{b}_1 z \frac{(\tilde{b}_2 + \tilde{b}_3 z + \dots + \tilde{b}_{n-1} z^{n-3} + z^{n-2})}{\tilde{b}_1 + z(\tilde{b}_2 + \tilde{b}_3 z + \dots + \tilde{b}_{n-1} z^{n-3} + z^{n-2})}} = \frac{1}{z + t_1 - t_1 z \tilde{A}_{n-2}} \\
&= \dots \\
&= \frac{1}{z + t_1 - \frac{t_1 z}{z + t_2 - \frac{t_2 z}{z + t_3 - \dots - \frac{t_{n-1} z}{z + t_n}}}}. \tag{4.6}
\end{aligned}$$

Comparando a definição de frações contínuas dada em (2.28) com a fração contínua (4.6), obtemos

$$\begin{aligned}
b_0 &= 0, & b_1 &= z + t_1, & b_2 &= z + t_2, & \dots, & b_n &= z + t_n, \\
a_1 &= 1, & a_2 &= -t_1 z, & a_3 &= -t_2 z, & \dots, & a_n &= -t_{n-1} z.
\end{aligned}$$

Logo, o polinômio  $Q_k^{(1)}(z)$ , dado pela relação de recorrência

$$Q_k^{(1)}(z) = (z + t_k)Q_{k-1}^{(1)} - t_{k-1}zQ_{k-2}^{(1)}(z), \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

com  $Q_0^{(1)} = 1$  e  $Q_1^{(1)}(z) = z + t_1$ , é o denominador do  $k$ -ésimo convergente da fração contínua (4.3). Em particular,  $Q_n^{(1)} = \tilde{P}_n$ .

Da mesma forma, comparando a fração contínua (4.5) com a definição dada em (2.28), obtemos

$$\begin{aligned}
b_0 &= 0, & b_1 &= z + t_n, & b_2 &= t_{n-1}, & \dots, & b_k &= z + t_{n-k+1}, & \dots, & b_n &= z + t_1, \\
a_1 &= 1, & a_2 &= -t_{n-1}z, & a_3 &= -t_{n-2}z, & \dots, & a_k &= -t_{n-k+1}, & \dots, & a_n &= t_1 z.
\end{aligned}$$

Assim, o polinômio  $Q_k^{(2)}(z)$ , dado por

$$Q_k^{(2)}(z) = (z + t_{n-k+1})Q_{k-1}^{(2)} - t_{n-k+1}zQ_{k-2}^{(2)}(z), \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

com  $Q_0^{(2)} = 1$  e  $Q_1^{(2)}(z) = z + t_n$ , é o denominador do  $k$ -ésimo convergente da fração contínua (4.4) e, da mesma forma,  $Q_n^{(2)} = \tilde{P}_n$ .

Portanto, aplicando o Teorema 3.1.2 na relação de recorrência de três termos acima, obtemos o seguinte resultado.

**Teorema 4.3.1.** *Os zeros de  $P_n$  são os autovalores da matriz de Hessenberg inferior*

$$\mathbf{H}_n^{(P)} = \begin{pmatrix} -t_n & t_{n-1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -t_n & 0 & t_{n-2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ -t_n & 0 & 0 & \dots & t_2 & 0 \\ -t_n & 0 & 0 & \dots & 0 & t_1 \\ -t_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.7}$$

Uma análise similar à prova do Teorema 3.3.1 com a matriz acima gera o seguinte resultado.

**Teorema 4.3.2.** *Sejam  $t_n^M = \max\{|t_k|, k = 1, 2, \dots, n-1\}$  e  $\tilde{t}_n^M = \max\{|t_k^{-1}|, k = 1, 2, \dots, n\}$ . Para  $0 < \delta < 1$ , considere os discos*

$$\Delta_{0,1}(\delta) \equiv \{z : |z + t_n| \leq \tilde{\rho}_1(\delta)\} \quad e \quad \Delta_{0,2}(\delta) \equiv \{z : |z| \leq \tilde{\rho}_2(\delta)\},$$

onde  $\tilde{\rho}_1(\delta) = \delta(1 - \delta)^{-1}|t_n|$  e  $\tilde{\rho}_2(\delta) = \delta^{-1}t_n^M$ . Então, os zeros dos polinômios  $P_n$  estão no interior da região  $\Delta_{0,1}(\delta) \cup \Delta_{0,2}(\delta)$ . Em particular, valem os seguintes resultados:

(i) com  $\tau_1 = |t_n| + t_n^M$ , os zeros dos polinômios  $P_n$  estão no interior do disco

$$\Delta_1 \equiv \{z : |z| \leq \tau_1\};$$

(ii) com  $\tau_2 = \frac{|t_n| - t_n^M + \sqrt{(|t_n| - t_n^M)^2 + 8t_n^M|t_n|}}{3|t_n| + t_n^M \sqrt{(|t_n| - t_n^M)^2 + 8t_n^M|t_n|}}|t_n|$ , os zeros dos polinômios  $P_n$  estão no interior do disco

$$\Delta_2 \equiv \{z : |z + t_n| \leq \tau_2\};$$

(iii) com  $\tau_3 = \frac{1}{2}[\sqrt{(t_n^M)^2 + 4t_n^M|t_n|} + t_n^M]$ , os zeros dos polinômios  $P_n$  estão no interior da união  $\Lambda_3 \equiv \Delta_{3,1} \cup \Delta_{3,2}$  dos discos

$$\Delta_{3,1} \equiv \{z : |z + t_n| \leq \tau_3\} \quad e \quad \Delta_{3,2} \equiv \{z : |z| \leq \tau_3\};$$

(iv) com  $\tau_4 = (|t_1^{-1}| + \tilde{t}_n^M)^{-1}$ , os zeros dos polinômios  $P_n$  estão no exterior do disco aberto

$$\tilde{\Delta}_4 \equiv \{z : |z| < \tau_4\}.$$

**Demonstração:** Seja a matriz  $D_\delta H_n^{(P)} D_\delta^{-1}$  dada da seguinte forma:

$$D_\delta H_n^{(P)} D_\delta^{-1} = \begin{pmatrix} -t_n & \delta^{-1}t_{n-1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\delta t_n & 0 & \delta^{-1}t_{n-2} & \dots & 0 & 0 \\ -\delta^2 t_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -\delta^{n-2} t_n & 0 & 0 & \dots & 0 & \delta^{-1}t_1 \\ -\delta^{n-1} t_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.8)$$

Os discos  $\Delta_{0,1}(\delta)$  e  $\Delta_{0,2}(\delta)$  são obtidos aplicando-se o Teorema 2.3.2 à matriz  $D_\delta H_n^{(P)} D_\delta^{-1}$  e a demonstração é análoga à do Teorema 3.3.1.

O resultado do item (i) é obtido escolhendo-se  $\delta$  tal que  $\tilde{\rho}_1(\delta) + |t_n| = \tilde{\rho}_2(\delta)$ . Assim, temos que  $\delta = \frac{t_n^M}{|t_n| + t_n^M}$ . Logo,  $\tilde{\rho}_2(\delta) = |t_n| + t_n^M = \tau_1$ . Portanto, os zeros dos polinômios  $P_n$  estão no interior do disco  $\Delta_1$ .

Para provar o segundo item, escolhamos  $\delta$  tal que  $\tilde{\rho}_1(\delta) = \tilde{\rho}_2(\delta) + |t_n|$ . Encontramos  $\delta = \frac{|t_n| - t_n^M + \sqrt{(t_n^M - |t_n|)^2 + 8t_n^M|t_n|}}{4|t_n|}$ . Desta forma,

$$\tilde{\rho}_1(\delta) = \frac{|t_n| - t_n^M + \sqrt{(|t_n| - t_n^M)^2 + 8t_n^M|t_n|}}{3|t_n| + t_n^M \sqrt{(|t_n| - t_n^M)^2 + 8t_n^M|t_n|}} |t_n| = \tau_2.$$

Assim, concluimos que os zeros dos polinômios  $P_n$  estão no interior do disco  $\Delta_2$ .

Da mesma maneira, para provar (iii) escolhamos  $\delta$  tal que  $\tilde{\rho}_1(\delta) = \tilde{\rho}_2(\delta)$  e encontramos o seguinte valor  $\delta = \frac{-t_n^M + \sqrt{(t_n^M)^2 + 4t_n^M|t_n|}}{2|t_n|}$  e, também,

$$\tilde{\rho}_2(\delta) = \frac{1}{2} [\sqrt{(t_n^M)^2 + 4t_n^M|t_n|} + t_n^M] = \tau_3.$$

Portanto, os zeros de  $P_n$  estão no interior da união  $\Lambda_3 \equiv \Delta_{3,1} \cup \Delta_{3,2}$ .

Finalmente, o resultado do item (iv) é obtido considerando-se o polinômio  $\hat{P}_n(z) = z^n P_n(1/z)$ . Para esse polinômio, temos a seguinte matriz de Hessenberg:

$$\mathbf{H}_n^{(\hat{P})} = \begin{pmatrix} -t_1^{-1} & t_2^{-1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -t_1^{-1} & 0 & t_3^{-1} & \dots & 0 & 0 \\ -t_1^{-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -t_1^{-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & t_n^{-1} \\ -t_1^{-1} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Os zeros de  $\hat{P}_n(z)$  são dados por  $w_r = \frac{1}{z_r}$ ,  $r = 1, 2, \dots, n$ , onde  $z_r$  são os zeros de  $P_n$ . Assim, pela parte (i), os zeros de  $\hat{P}_n(z)$  estão no interior do disco  $|z| \leq |t_1^{-1}| + \tilde{t}_n^M$ . Logo,

$$|w_r| \leq |t_1^{-1}| + \tilde{t}_n^M = \frac{1}{\tau_4}$$

e, conseqüentemente,

$$|z_r| > (|t_1^{-1}| + \tilde{t}_n^M)^{-1} = \tau_4.$$

Desta forma, os zeros de  $P_n$  estão fora do disco  $\tilde{\Delta}_4$ . ■

O próximo teorema fornece algumas informações sobre a variação local dos zeros do polinômio  $P_n$ .

**Teorema 4.3.3.** *Seja  $|\beta| > 0$  e considere o polinômio  $P_n(z) = \sum_{k=0}^n b_k z^k$  tal que as razões*

$$t_k = \frac{b_{k-1}}{b_k} \text{ satisfazem}$$

$$|t_k - \beta| \leq \epsilon, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

com  $\epsilon > 0$ . Então, todos os zeros de  $P_n$  estão no anel

$$\zeta\left(|\beta| - \frac{4n\sigma_n}{n+1}\epsilon\right) \leq |z| \leq |\beta| + \frac{4n\sigma_n}{n+1}, \quad (4.9)$$

lembrando que a função real  $\zeta(x)$  é dada por

$$\zeta(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x > 0 \\ 0, & \text{se caso contrário} \end{cases}.$$

O número  $\sigma_n$  é como no Lema 3.4.1.

**Demonstração:** Para  $|\beta| > 0$ . Então, de (3.86) e (4.7), a matriz  $\mathbf{H}_n^{(P)} - \mathbf{H}_n^{(\beta)}$  é dada da seguinte forma:

$$\mathbf{H}_n^{(P)} - \mathbf{H}_n^{(\beta)} = \begin{pmatrix} -t_n + \beta & t_{n-1} - \beta & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -t_n + \beta & 0 & t_{n-2} - \beta & \dots & 0 & 0 \\ -t_n + \beta & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -t_n + \beta & 0 & 0 & \dots & 0 & t_1 - \beta \\ -t_n + \beta & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

Sabemos que  $|t_k - \beta| \leq \epsilon$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , então  $\|\mathbf{H}_n^{(P)} - \mathbf{H}_n^{(\beta)}\|_\infty \leq 2\epsilon$ . Consequentemente, do Corolário 3.4.2, segue que

$$\zeta\left(|\beta| - \frac{4n\sigma_n}{n+1}\epsilon\right) \leq |z| \leq |\beta| + \frac{4n\sigma_n}{n+1}.$$

Agora, consideremos

$$\beta = |\beta|e^{i\theta} \quad (4.11)$$

e o polinômio  $\tilde{P}_n(z) = P_n(ze^{-i\theta}) = \sum_{k=0}^n b_k e^{-ik\theta} z^k = \sum_{k=0}^n \tilde{b}_k z^k$ , onde  $b_k$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ , são complexos, diferentes de zero e  $\tilde{b}_k = \frac{b_k}{b_n}$ . Temos, também,  $t_k = \frac{b_{k-1}}{b_k} = \frac{b_{k-1}}{b_k} e^{i\theta}$ , ou seja,

$$e^{-i\theta} t_k = \frac{b_{k-1}}{b_k} = \tilde{t}_k. \quad (4.12)$$

Substituindo (4.11) e (4.12) em (4.10), obtemos a seguinte matriz:

$$\mathbf{H}_n^{(P)} - \mathbf{H}_n^{(\beta)} = e^{i\theta} \begin{pmatrix} -\tilde{t}_n + |\beta| & \tilde{t}_{n-1} - |\beta| & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\tilde{t}_n + |\beta| & 0 & \tilde{t}_{n-2} - |\beta| & \dots & 0 & 0 \\ -\tilde{t}_n + |\beta| & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -\tilde{t}_n + |\beta| & 0 & 0 & \dots & 0 & \tilde{t}_1 - |\beta| \\ -\tilde{t}_n + |\beta| & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Logo,  $\| \mathbf{H}_n^{(P)} - \mathbf{H}_n^{(\beta)} \| = \max_{1 \leq k \leq n-1} \{ |e^{i\theta}| (|-\tilde{t}_n + |\beta|| + |-\tilde{t}_k + |\beta||) \} \leq 2\epsilon$  e, assim, concluimos a demonstração do teorema.  $\blacksquare$

## 4.4 Exemplos

**Exemplo 4.4.1.** Neste exemplo, analisaremos o comportamento dos zeros dos polinômios  $Q_n$  para diferentes valores de  $\alpha_n$  e  $\beta_n$  na relação de recorrência (3.1).

- (a) A Figura 4.1(a) mostra os zeros de  $Q_{10}$  quando  $\beta_n = 1$ ,  $\alpha_{2n} = -0.05$  e  $\alpha_{2n+1} = 0.05$  para  $n \geq 1$ . Como indicado no Teorema 3.3.1, todos os zeros estão na região  $\mathcal{W}(\lambda_1, \lambda_2, \tau)$ , onde  $\lambda_1 = -1.05$ ,  $\lambda_2 = -0.95$  e  $\tau \approx 0.50825757$ .
- (b) A Figura 4.1(b) mostra os zeros de  $Q_{10}$  quando  $\beta_n = 1$ ,  $\alpha_{2n} = 0.05$  e  $\alpha_{2n+1} = -0.05$  para  $n \geq 1$ . Os zeros estão na região  $\mathcal{W}(\lambda_1, \lambda_2, \tau)$ , onde  $\lambda_1 = -1.05$ ,  $\lambda_2 = -0.95$  e  $\tau \approx 0.50825757$ .
- (c) A Figura 4.1(c) mostra os zeros de  $Q_{10}$  quando  $\beta_1 = \beta_2 = -0.1$ ,  $\beta_{n+2} = 1$  e  $\alpha_n = 0.05$  para  $n \geq 1$ . Todos os zeros estão na região  $\mathcal{W}(\lambda_1, \lambda_2, \tau)$ , onde  $\lambda_1 = -0.95$ ,  $\lambda_2 = 0.15$  e  $\tau \approx 0.4858899$ .
- (d) A Figura 4.1(d) mostra os zeros de  $Q_{10}$  quando  $\beta_1 = \beta_2 = 0.1$ ,  $\beta_{n+2} = -1$  e  $\alpha_n = 0.05$  para  $n \geq 1$ . Novamente, pelo Teorema 3.3.1, todos os zeros estão na região  $\mathcal{W}(\lambda_1, \lambda_2, \tau)$ , onde  $\lambda_1 = -0.10$ ,  $\lambda_2 = 1.05$  e  $\tau \approx 0.50825757$ .

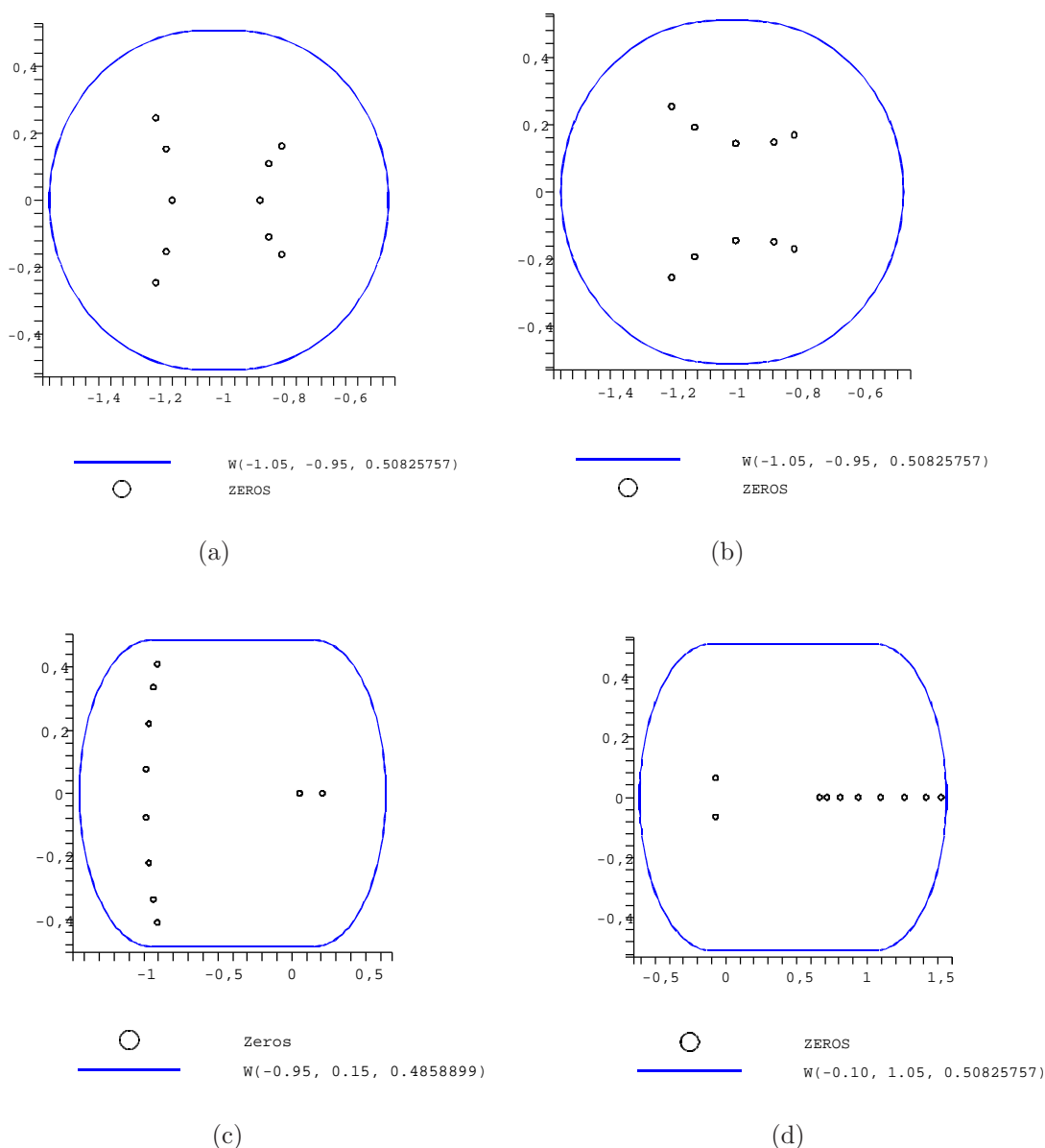


Figura 4.1: Zeros de  $Q_{10}$  no interior da região  $\mathcal{W}$ .

**Exemplo 4.4.2.** Consideremos os polinômios de Szegő com  $a_n = q^n$ ,  $n \geq 1$ , onde  $0 \leq q < 1$ . De (2.43), quando  $q > 0$ , esses polinômios (denotados por  $S_n^{(q)}$ ) satisfazem à relação de recorrência de três termos

$$S_{n+1}^{(q)}(z) = (z + q)S_n^{(q)}(z) - q(1 - q^{2n})zS_{n-1}^{(q)}(z), \quad n \geq 1, \quad (4.13)$$

com  $S_1^{(q)}(z) = z + q$ .

Considere os polinômios para-ortogonais  $R_n^{(1,q)} = R_n^{(1)}$  e  $R_n^{(2,q)} = R_n^{(2)}$  definidos por

(2.47). Esses polinômios satisfazem

$$\begin{aligned} R_{n+1}^{(1,q)}(z) &= (z+1)R_n^{(1,q)}(z) - (1+q^{n-1})(1-q^n)zR_{n-1}^{(1,q)}(z), \\ R_{n+1}^{(2,q)}(z) &= (z+1)R_n^{(2,q)}(z) - (1+q^{n-1})(1-q^n)zR_{n-1}^{(2,q)}(z), \end{aligned} \quad n \geq 1, \quad (4.14)$$

com  $R_1^{(1,q)}(z) = R_1^{(2,q)}(z) = z+1$ . Portanto, do Teorema 4.2.1, os polinômios  $P_n^{(1,q)}(x) = (4z)^{-n/2}R_n^{(1,q)}(z)$ ,  $n \geq 1$ , onde  $x = x(z) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ , satisfazem

$$P_{n+1}^{(1,q)}(x) = xP_n^{(1,q)}(x) - \frac{1}{4}(1+q^{n-1})(1-q^n)P_{n-1}^{(1,q)}(x), \quad n \geq 1,$$

com  $P_1^{(1,q)}(x) = x$ . Essa relação de recorrência mostra que (veja, por exemplo, Al-Salam e Chihara [1] e Askey e Ismail [3]) os polinômios  $\{P_n^{(1,q)}\}$  são certos polinômios de Al-Salam-Chihara, ortogonais com relação à medida

$$d\phi^{(1,q)}(x) = \frac{(q^2; q^2)_\infty}{\pi} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} h(x, q^{1/2}) h(x, -q^{1/2}) dx$$

definida em  $[-1, 1]$ , onde  $h(x, c) = \prod_{k=0}^{\infty} [1 - 2cxq^k + c^2q^{2k}]$  e  $(a; q)_\infty = \prod_{k=0}^{\infty} (1 - aq^k)$ . Portanto, ainda do Teorema 4.2.1, obtemos que

$$\int_{\mathcal{C}} S_n^{(q)}(z) \overline{S_m^{(q)}(z)} d\nu^{(q)}(z) = 0, \quad n \neq m,$$

onde  $d\nu^{(q)}(e^{i\theta}) = \frac{(q^2; q^2)_\infty}{\pi} (\sqrt{q}e^{i\theta/2}, \sqrt{q}e^{-i\theta/2}; q)_\infty (-\sqrt{q}e^{i\theta/2}, -\sqrt{q}e^{-i\theta/2}; q)_\infty d\theta$ . Podemos escrever, também,

$$d\nu^{(q)}(e^{i\theta}) = \frac{(q^2; q^2)_\infty}{\pi} (qz; q^2)_\infty (qz^{-1}; q^2)_\infty \frac{dz}{2iz}.$$

Note que  $\left\{\frac{1}{4}(1+q^{n-1})(1-q^n)\right\}_{n=1}^{\infty}$  e  $\left\{\frac{1}{4}(1-q^n)(1+q^{n+1})\right\}_{n=1}^{\infty}$  são seqüências encadeadas positivas com seqüências de parâmetros  $\left\{\frac{1}{2}(1-q^n)\right\}_{n=1}^{\infty}$  e  $\left\{\frac{1}{2}(1+q^{n+1})\right\}_{n=1}^{\infty}$ , respectivamente. Consequentemente, de (4.14) e do Teorema 3.3.4, todos os zeros de  $R_n^{(j,q)}$ ,  $j = 1, 2$ , estão sobre o círculo unitário  $\mathfrak{C}(1) \equiv \{z : z = e^{i\theta}, 0 < \theta < 2\pi\}$ .

Como  $(1-q^{2n}) < (1+q^{n-1})(1-q^n)$  para  $n \geq 1$ , a seqüência  $\left\{\frac{1}{4}(1-q^{2n})\right\}_{n=1}^{\infty}$  também é seqüência encadeada positiva. Portanto de (4.13) e do Teorema 3.3.4, todos os zeros de  $S_n^{(q)}$  estão sobre o círculo aberto  $\mathfrak{C}(q) \equiv \{z : z = qe^{i\theta}, 0 < \theta < 2\pi\}$ .

Além disso, em (4.13), temos  $q(1-q^{2n}) \leq q - q^{2m-1}$  para  $1 \leq n \leq m-1$ . Portanto, da parte segunda parte do Corolário 3.3.1, os zeros de qualquer  $S_n^{(q)}$ ,  $1 \leq n \leq m$ , devem estar sobre o arco do círculo  $\mathfrak{C}(q)$  que está fora da região parabólica  $\mathfrak{P}^+(q^{2m-1})$ .

Também em (4.14), para  $R_n^{(2,q)}$  temos, por exemplo,  $(1 - q^n)(1 + q^{n+1}) < (1 - q^{2m-1})$  para  $1 \leq n \leq m-1$ . Portanto, da parte (ii) do Corolário 3.3.1, os zeros de qualquer  $R_n^{(2,q)}$ ,  $1 \leq n \leq m$ , devem estar sobre o arco do círculo  $\mathfrak{C}(1)$  que está fora da região parabólica  $\mathfrak{P}^+(q^{2m-1})$ .

Esses resultados são confirmados através da Figura 4.2(a) e 4.2(b), onde os zeros de  $S_{10}^{(q)}$  e os de  $R_{10}^{(2,q)}$  estão ilustrados para  $q = 0.9$  e  $q = 0.8$ , respectivamente.

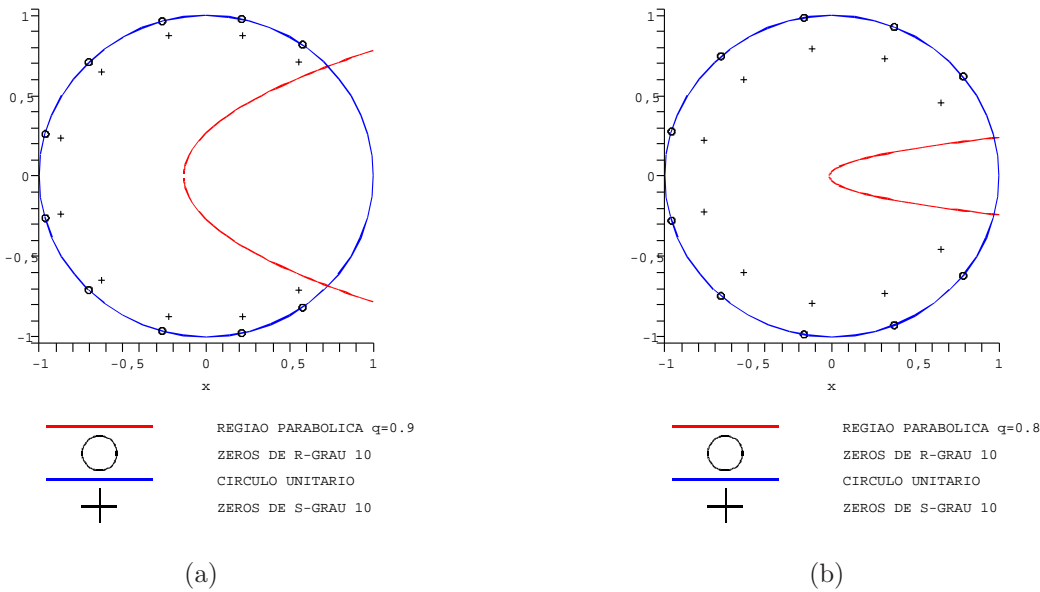


Figura 4.2: Zeros de  $S_{10}^{(q)}$  e de  $R_{10}^{(2,q)}$ .

**Exemplo 4.4.3.** Seja  $P_n(z) = \sum_{k=0}^n b_k z^k$ , onde  $|b_k| = 2^k$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ . De acordo com a parte (i) do Teorema 4.3.2, todos os zeros de  $P_n$  devem estar no disco  $\Delta_1 \equiv \{|z| \leq 1\}$ . Claramente isto é verdade se  $b_k = 2^k$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ , já que os zeros de  $P_n$  estão todos sobre o círculo  $|z| = \frac{1}{2}$ .

As Figura 4.3(a) e 4.3(b) mostram os zeros de  $P_{10}$  para duas outras escolhas de  $\{b_k\}$  satisfazendo à condição  $|b_k| = 2^k$  e são comparados com os resultados dados pelo Teorema 4.3.2. Nessas figuras, o círculo maior é a fronteira da região  $\Delta_2$ , o círculo intermediário, a fronteira de  $\Delta_1$ , o círculo menor é a fronteira da região  $\tilde{\Delta}_4$  e o último é a fronteira da região  $\Lambda_3$ .

Na Figura 4.3(a), os zeros de  $P_{10}$  são dados quando  $b_k = 2^k$ ,  $k = 2, \dots, 8$  e  $b_0 = -i$ ,  $b_1 = 2i$ ,  $b_9 = 2^9 i$  e  $b_{10} = -2^{10} i$ . Os zeros estão na intersecção das quatro regiões dadas



pelo Teorema 4.3.2.

Na Figura 4.3(b), os zeros de  $P_{10}$  são dados quando  $b_k = 2^k$ ,  $k = 1, 2, \dots, 9$ ,  $b_0 = -1$  e  $b_{10} = -2^{10}$ . Da mesma forma, os zeros de  $P_{10}$  estão na intersecção das quatro regiões dadas pelo Teorema 4.3.2. Esclarecemos que o zero próximo à fronteira do disco  $\Delta_1$  vale aproximadamente 0.99999857, enquanto que o zero próximo à fronteira do disco  $\tilde{\Delta}_4$  tem o valor aproximado de 0.25000036. Isto indica que os resultados dos itens (i) e (iv) do Teorema 4.3.2 são satisfeitos.

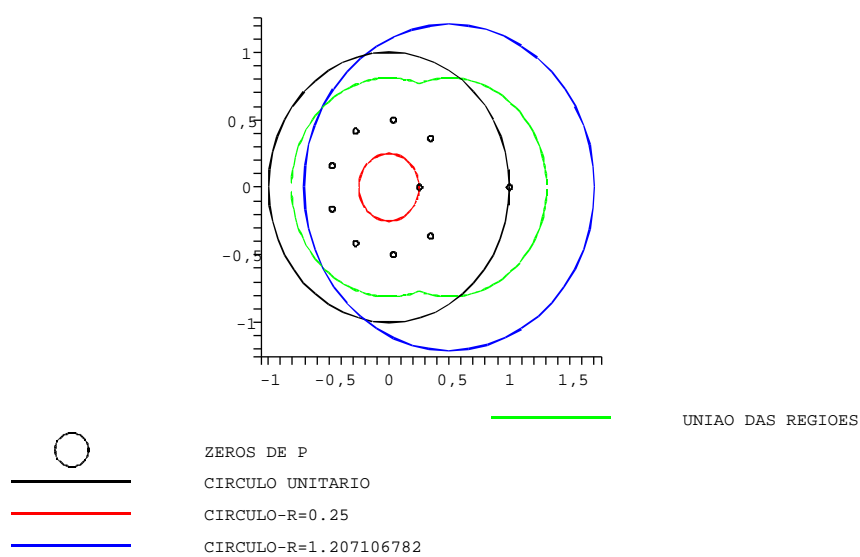
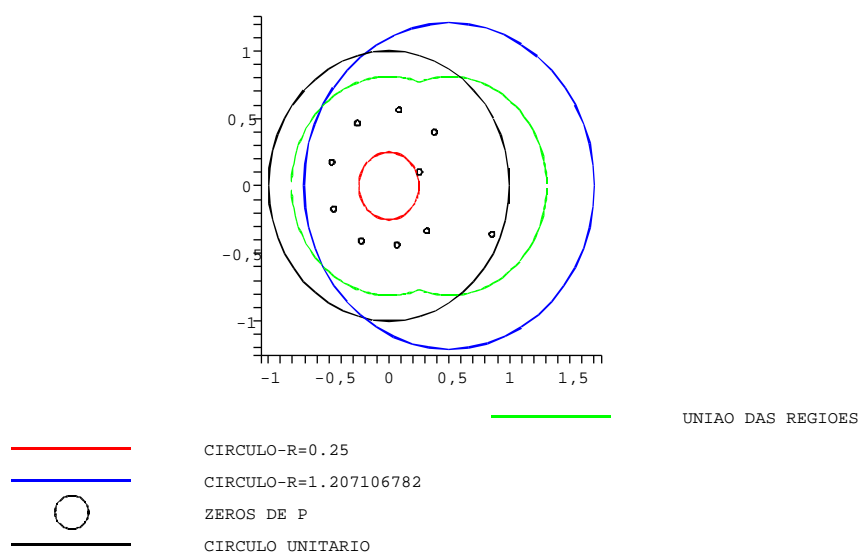


Figura 4.3: Zeros de  $P_{10}$  quando  $|b_k| = 2^k$ ,  $k = 0, 1, \dots, 10$ .

# Referências Bibliográficas

- [1] AL-SALAM, W. A.; CHIHARA, T.S. Convolutions of orthogonal polynomials, *SIAM J. Math. Anal.*, v. 7, p. 16-28, 1976.
- [2] ANDRADE, E. X. L. Sobre polinômios Similares aos Ortogonais Associados a uma Classe Especial de Distribuição, Tese de doutorado, UNICAMP, Campinas, 1995.
- [3] ASKEY, R. A.; ISMAIL, M. E. H. *Recurrence relations, continued fractions and orthogonal polynomials*, Mem. Amer. Math. Soc., v. 49, 1984.
- [4] BRACCIALI, C. F.; SILVA, A. P.; SRI RANGA, A. Szegő polynomials: some relations to L-orthogonal and orthogonal polynomials, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, v. 153, p. 79-88, 2003.
- [5] BRESSAN, R. Propriedades e aplicações dos polinômios ortogonais de Szegő. 1999. 94 f., Dissertação de Mestrado, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, São José do Rio Preto, 1999.
- [6] BRESSAN, R.; MENEGASSO, S. F.; SRI RANGA, A. Szegő polynomials: quadrature rules on the unit circle and on  $[-1, 1]$ , *Rocky Mountain J. Math.*, v. 33, p. 567-584, 2003.
- [7] CHIHARA, T. S. *An Introduction to Orthogonal Polynomials, Mathematics and its Applications Series*, New York: Gordon and Breach, v. 13, 1978.
- [8] DELSARTE, P.; GENIN, Y. The split Levinson algorithm, *IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process.*, v. 34, p. 470-478, 1986.
- [9] FREUD, G. *Orthogonal Polynomials*, New York: Pergamon Press, 1971.
- [10] HENRICI, P. *Applied and computational complex analysis*, New York: John Wiley, v.1, 1974.
- [11] ISMAIL, M. E. H.; LI, X. Bound on the extreme zeros of orthogonal polynomials, *Proc. Amer. Math. Soc.*, v. 115, p. 131-140, 1992.

- [12] JONES, W. B.; NJÅSTAD, O.; THRON, W. J. Orthogonal Laurent polynomials and a strong Hamburger moment problem, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, v. 98, p. 528-554, 1984.
- [13] JONES, W. B.; NJÅSTAD, O.; THRON, W. J. Moment theory, orthogonal polynomials, quadrature, and continued fractions associated with the unit circle, *Bulletin of the London Mathematical Society*, v. 21, p. 113-152, 1989.
- [14] JONES, W. B.; PETERSON, V. Continued fractions and Szegő polynomials in frequency analysis and related topics, *Acta Appl. Math.*, v. 61, p. 149-174, 2000.
- [15] JONES, W. B.; THRON, W. J. *Continued fractions: analytic theory and applications*, Encyclopedia of mathematics and its applications, Addison-Wesley Publishing Company, London, v. 11, 1980.
- [16] JONES, W. B.; THRON, W. J.; WAADELAND, H. A strong stieltjes moment problem, *Transactions of the American Mathematical Society*, v. 261, n. 2, p. 503-528, 1980.
- [17] LORENTZEN, L.; WAADELAND, H. *Continued Fractions with Applications*, North-Holland, 1992.
- [18] NOBLE, B.; DANIEL, J. W. *Álgebra linear aplicada*, Rio de Janeiro: Prentice-Hall do Brasil, 1986.
- [19] OLIANI, E. A. Frações contínuas: convergência, aceleração e erro de truncamento. 2000. 72 f., Dissertação de Mestrado, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, São José do Rio Preto, 2000.
- [20] PEHERSTORFER, F. Linear combinations of orthogonal polynomials generating positive quadrature formulas, *Math. Comp.*, v. 55, p. 231-241, 1990.
- [21] SAFF, E. B.; VARGA, R. S. Zero-free parabolic regions for sequences of polynomials, *SIAM J. Math. Anal.*, v. 7, p. 344-357, 1976.
- [22] SILVA, A. P.; SRI RANGA, A. Polynomials generated by a three term recurrence relation: bounds for complex zeros, *Linear Algebra Appl.*, v. 397, p. 299-324, 2005.
- [23] SRI RANGA, A. Polinômios Ortogonais e Similares, Tese de Livre-Docência, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1990.
- [24] SZEGŐ, G. *Orthogonal Polynomials*, American Mathematical Society Colloquium Publications, v. 23, Providence, RI, USA, 1975.

- 
- [25] VAN ASSCHE, W. Orthogonal polynomials in the complex plane and the real line, *Special Functions, q-series and Related Topics*, M. E. H. Ismail et al., Ed., Field Institute Communications, American Mathematical Society, v. 14, p. 211-245, 1997.
- [26] WALL, H. S. *Analytic Theory of Continued Fractions*, The University Series in Higher Mathematics, Chelsea, Van Nostrand, New York, v. 1, 1948.
- [27] ZHEDANOV, A. On some classes of polynomials orthogonal on arcs of the unit circle connected with symmetric orthogonal polynomials on an interval, *J. Approx. Theory*, v. 94, p. 73-106, 1998.