

ANALITICIDADE E EFEITO GRÁFICO DA
DILATAÇÃO EM FUNÇÕES OCTONIÔNICAS
QUASECONFORMES DO TIPO $F(Z) = Z^n$

Luiz Fernando Landucci Benzatti

Dissertação de Mestrado
Pós-Graduação em Matemática

Analiticidade e Efeito Gráfico da Dilatação em Funções Octoniônicas Quaseconformes do tipo $f(z) = z^n$

Luiz Fernando L. Benzatti¹

Dissertação apresentada ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto, São Paulo, para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Manoel Ferreira Borges Neto

São José do Rio Preto

23 de outubro de 2008

¹contato:benzatti@yahoo.com

Benzatti, Luiz Fernando Landucci.

Analiticidade e efeito gráfico da dilatação em funções octoniônicas quaseconformes do tipo $f(z) = z^n$ / Luiz Fernando Landucci Benzatti.
- São José do Rio Preto : [s.n.], 2008.
59f. ; 30 cm.

Orientador: Manoel Ferreira Borges Neto

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Física matemática. 2. Octônios. 3. Quasiconformidade. 4. Hipercomplexos. 5. Funções octoniônicas - Dilatação. 6. Funções hipercomplexas. I. Borges Neto, Manoel Ferreira. II. Universidade Estadual Paulista, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU- 53:51

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Matemática do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Manoel Ferreira Borges Neto
Prof. Titular
UNESP - São José do Rio Preto

Prof. Dr. Masayoshi Tsuchida
Prof. Assistente Doutor
UNESP - São José do Rio Preto

Prof. Dr. Siovani Felipussi
Prof. Assistente Doutor
UFSCAR - Universidade Federal de São Carlos

São José do Rio Preto, 23 de Outubro de 2008.

“The mistakes are there, waiting to be made.”

(Savielly Tartakower)

À minha família.

Agradecimentos

A Deus, pela saúde e pelas oportunidades.

Agradeço aos meus pais Luiz e Sandra, e ao meu querido irmão Danilo, pelo amor, carinho, e pelo apoio incondicional que sempre me dedicaram.

À minha namorada Amanda, agradeço o carinho, a compreensão e os conselhos.

Em especial, agradeço ao Prof. Dr. Manoel Ferreira Borges Neto, pela amizade, orientação e paciência na elaboração deste trabalho.

À todos os amigos presentes em minha vida durante a realização do mestrado, em especial ao Nilton, que me acompanhou em grande parte dessa caminhada.

Resumo

Neste trabalho estudamos transformações *quaseconformes* no contexto dos octônios, que são hipercomplexos de oito dimensões. Por não preservar a magnitude dos ângulos, mapeamentos *quaseconformes* causam uma dilatação linear.

A partir da definição métrica de quaseconformidade, utilizamos a forma binomial para mostrar que a distância $|f(y) - f(x)|$ pode ser escrita como um polinômio em r . Com isso, pudemos desenvolver não só um conjunto de fórmulas como também um método computacional simplificado para o cálculo analítico da dilatação.

Posteriormente, utilizamos ferramentas gráficas para visualizar as consequências da dilatação.

Palavras-chave: *Octônios*, transformações *quaseconformes*, dilatação, hipercomplexos, mapeamentos, quasiconformidade.

Abstract

In this work we study quasiconformal mappings related to octonionic algebra. Since quasiconformal mappings do not preserve the magnitude of the angles they cause a linear dilatation. We show that it also happens to 8-dimensional hipercomplex.

Based on the metric definition of quasiconformal mapping we show that the distance $|f(y) - f(x)|$ is a polynomial of variable r . Then it's possible to make not only a set of formulas but also a computational method to calculate the dilatation.

We also use some graphical tools to visualize the consequences of dilatation.

Keywords: Octonions, quasiconformal, dilatation, hipercomplex, mappings.

Sumário

1	Introdução	1
1.1	Breve História dos Octônios	1
1.2	Nota Histórica: Transformação Quaseconforme	3
1.3	Construção dos Octônios	3
1.4	Octônios: Definição e Operações Elementares	6
1.5	Funções Octoniônicas	7
1.6	Não-associatividade dos Octônios	8
2	Dilatação	8
2.1	Coordenadas Esféricas	9
2.2	Desenvolvimento de $f(x) = x^n$	10
2.3	Escrevendo $ f(y) - f(x) $ como um polinômio em r	11
2.3.1	Desenvolvendo $ f(y) - f(x) $	12
2.3.2	Fórmula para h_y^{2k}	15
2.3.3	Substituindo h_y^{2k} em F	17
2.3.4	Escrevendo F como um polinômio em r	19
2.3.5	Substituindo h_y^{2k} em F_i, F_j, \dots, F_{l_k}	19
2.3.6	Escrevendo F_i, F_j, \dots, F_{l_k} como polinômios em r	23
2.3.7	Resultado: $ f(y) - f(x) = \sqrt{\sum P_s^{(n)} r^s}$	25
2.4	Calculando a dilatação	28
2.5	Método computacional para o cálculo da dilatação	35
2.5.1	Introdução	35
2.5.2	Algoritmo	36
2.5.3	Implementação computacional do método	36
2.5.4	Interface	40
2.5.5	Testes	41
3	Análise Gráfica	42
3.1	Mapeamento do \mathbb{R}^8 para o \mathbb{R}^3	42
3.2	Mapeamento para $f(z) = z^2$	45
3.3	Mapeamento para $f(z) = z^3$	48
3.4	Variação do Raio	51
3.5	Translação da Imagem	53

3.6	Uso da interface para gerar imagem no \mathbb{R}^3	54
3.7	Desempenho da Interface Gráfica	57
4	Conclusão	58
5	Bibliografia	59

1 Introdução

Neste trabalho são utilizados dois resultados principais. Em primeiro lugar, a teoria dos octônios, que é, de certo modo, uma extensão não-associativa dos quatérnios. Sua álgebra de divisão normada em 8 dimensões sobre os reais é a mais vasta possível que pode ser obtida a partir da construção de Cayley-Dickson. Em segundo, utilizamos o conceito de funções *quaseconformes*, ou seja, funções que não preservam ângulos. Mais formalmente, uma função $w = f(z)$ é *quaseconforme* em z_0 se não preserva os ângulos entre as curvas através de z_0 e z .

Com esses conceitos, desenvolveremos um estudo sobre a dilatação em funções octonionicas quase conforme do tipo $f(z) = z^n$. A dilatação é uma consequência da transformação *quaseconforme*. Ao longo deste capítulo, introduziremos alguns conceitos e definições necessárias para execução desse trabalho.

1.1 Breve História dos Octônios

Muitos matemáticos conhecem a história de como Hamilton descobriu os quatérnios. Em 1835, com 30 anos de idade, ele havia descoberto como tratar números complexos como pares de números reais. Fascinado pela relação entre complexos e a geometria 2-dimensional, ele tentou por muitos anos descobrir uma álgebra maior, que tivesse o mesmo papel em uma geometria 3-dimensional. Na linguagem moderna, ele estava procurando por uma álgebra de divisão normada 3-dimensional. O problema, claro, era que não existe uma álgebra de divisão normada 3-dimensional. Em outubro de 1843 ele chegou a um resultado importante. Enquanto caminhava com sua esposa em volta do Canal Real, indo para uma reunião na Academia Real Irlandesa, fez sua descoberta histórica. *"Senti o circuito galvânico do meu pensamento se fechar; e a faísca que resultou foram as equações fundamentais entre i, j e k . Exatamente da maneira que eu sempre as usei."* E em um famoso ato de vandalismo, ele riscou estas equações em uma pedra da ponte de Brougham:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

Uma razão para que essa história seja tão conhecida é que Hamilton passou o resto de sua vida obscecado pelos quatérnios e suas aplicações na geometria. E por um tempo, quatérnios se tornaram um assunto de destaque. Eles eram tópico obrigatório em Dublin e em algumas universidades americanas. Muito do que fazemos hoje com escalares e vetores no \mathbb{R}^3 foi feito utilizando quatérnios reais e imaginários. Uma escola de "quaternionistas" foi desenvolvida e liderada, após

a morte de Hamilton, por Peter Tait de Edinburgh e Benjamin Peirce de Harvard. Tait escreveu 8 livros sobre quatérnios, enfatizando suas aplicações na física. Quando Gibbs desenvolveu uma notação moderna para produto pontual e produto cruzado, Tait condenou isso como uma "monstruosidade hermafrodita". Uma guerra de polêmicas surgiu desde então, tendo os quatérnios como perdedores.

Menos conhecida é a descoberta dos octônios por um colega de faculdade de Hamilton, John T. Graves. Foi o interesse de Graves em álgebra que fez Hamilton começar a pensar sobre números complexos e sua expansão. No dia seguinte à descoberta dos quatérnios, Hamilton enviou uma carta de 8 páginas descrevendo os quatérnios para Graves. Graves respondeu ainda em outubro para Hamilton, parabenizando-o por sua descoberta e também complementando: *Ainda há algo que me intriga nesse sistema. Eu não tenho ainda uma visão clara da nossa liberdade arbitrária em criar números imaginários. E então perguntou: Se com sua alquimia você pode criar 3 kg de ouro, por que não continuar?*

Em dezembro do mesmo ano, Graves escreveu para Hamilton descrevendo uma nova álgebra 8-dimensional, que ele denominou de "octavos". Ele demonstrou que sua nova descoberta era uma álgebra de divisão normada, e usou-a para expressar o produto de duas somas de oito quadrados perfeitos como uma outra soma de oito quadrados perfeitos.

Em janeiro de 1844, Graves escreveu 3 vezes para Hamilton, expandindo sua descoberta. Ele considerou a idéia de uma teoria generalizada, e tentou construir uma álgebra de divisão normada 16-dimensional. Encontrou certas dificuldades e passou a duvidar que isso fosse possível. Hamilton se ofereceu para publicar as descobertas de Graves, mas, estando ocupado com suas pesquisas sobre quatérnios, adiou diversas vezes a publicação. Em julho Hamilton escreveu para Graves, mostrando que os octônios eram não-associativos: " $A.BC=AB.C=ABC$, se A, B e C são quatérnios. Mas não vale para seus octavos." De fato, Hamilton criou o termo "associativo" e os octônios tiveram importante papel em mostrar a importância desse conceito.

Enquanto isso, o jovem Arthur Cayley de Cambridge, vinha pensando nos quatérnios desde que Hamilton anunciou sua existência. Ele parecia procurar relações entre quatérnios e funções hiperelípticas. Em março de 1845, ele publicou um artigo sobre funções hiperelípticas e adicionou no final um breve comentário sobre octônios. O artigo estava cheio de erros em relação as funções elípticas. No entanto, ele foi o primeiro a publicar algum comentário sobre os octônios.

Graves anexou um breve comentário a um artigo comentando que tinha conhecimento sobre octônios desde dezembro de 1843. Em junho de 1847, Hamilton escreveu para Academia Real Irlandesa confirmando a história de Graves. Mas era tarde demais: os octônios ficaram conhecidos como *números de Cayley* [4].

Uma razão para os octônios terem, inicialmente, menos destaque que os quatérnios foi a falta de um defensor como Hamilton. Outro motivo, foi a falta de uma aplicação clara na geometria e na física. Os quatérnios se encaixam perfeitamente no estudo de rotações e momento angular, particularmente no contexto da mecânica quântica. Hoje em dia, tal fenômeno é conhecido como teoria de Clifford. Apesar disso, muitos dizem que Hamilton exagerou na importância atribuída aos quatérnios. Mas sabemos que os quatérnios se encaixam muito bem no nosso entendimento de vários esquemas.

Com os octônios foi diferente. Sua relevância na geometria ficou obscura até 1925, quando Élie Cartan descreveu a 'trialidade' - a simetria entre vetores 'spinors' em espaços Euclidianos de 8 dimensões. Sua relevância na física foi notada em 1934, em um artigo de Jordan, von Neumann e Wigner [2]. No entanto, as tentativas em aplicar a teoria octoniônica à física obteve pouco sucesso até os anos 80, quando descobriram que octônios explicavam ferramentas interessantes da Teoria das Cordas.

1.2 Nota Histórica: Transformação Quaseconforme

O desenvolvimento moderno dessa teoria teve início em meados dos anos 50 e, desde então, vem crescendo enormemente. Parte disso, deve-se ao grande número de aplicações e conexões com outros campos da matemática.

Os trabalhos de Ahlfors tiveram grande impacto em mapeamentos *quaseconformes*, principalmente na área de Espaços de Teichmüller [6].

Por volta de 1920, Grotzsch foi o primeiro a considerar mapeamentos *quaseconformes* para dimensão 2, em seus estudos sobre domínios de planos simples [1].

Porém, os estudos para dimensões maiores, foram desenvolvidos por Lavrentev, com registros de 1938.

O passo mais importante foi dado por Teichmüller com mapeamentos *quaseconformes* em superfícies de Riemann [9], levando a uma conexão com diferenciais holomorfas.

1.3 Construção dos Octônios

A maneira elementar de se contruir um octônio é utilizando sua tabela de multiplicação [5]. Os octônios são uma álgebra 8-dimensional com base $1, i, j, k, l, li, lj$ e lk , e sua multiplicação é dada pela seguinte tabela, que descreve o resultado da multiplicação de um elemento na i -ésima linha por outro na j -ésima coluna.

Infelizmente, a tabela não esclarece muitas coisas. No entanto, podemos apontar alguns fatos

1	<i>i</i>	<i>j</i>	<i>k</i>	<i>l</i>	<i>li</i>	<i>lj</i>	<i>lk</i>
<i>i</i>	-1	<i>k</i>	- <i>j</i>	<i>li</i>	- <i>l</i>	- <i>lk</i>	<i>lj</i>
<i>j</i>	- <i>k</i>	-1	<i>i</i>	<i>lj</i>	<i>lk</i>	- <i>l</i>	- <i>li</i>
<i>k</i>	<i>j</i>	- <i>i</i>	-1	<i>lk</i>	- <i>lj</i>	<i>li</i>	- <i>l</i>
<i>l</i>	- <i>li</i>	- <i>lj</i>	- <i>lk</i>	-1	<i>i</i>	<i>j</i>	<i>k</i>
<i>li</i>	<i>l</i>	- <i>lk</i>	<i>lj</i>	- <i>i</i>	-1	- <i>k</i>	<i>j</i>
<i>lj</i>	<i>lk</i>	<i>l</i>	- <i>li</i>	- <i>j</i>	<i>k</i>	-1	- <i>i</i>
<i>lk</i>	- <i>lj</i>	<i>li</i>	<i>l</i>	- <i>k</i>	- <i>j</i>	<i>i</i>	-1

Figura 1: Tabela da multiplicação dos octônios

interessantes:

- ***i***, ***j***, ..., ***lk*** são raízes de -1
- se e_i e e_j são dois elementos da tabela, com $i \neq j$, então $e_i e_j = -e_j e_i$. Além disso:
- $e_i e_j = e_k \Rightarrow e_{i+1} e_{j+1} = e_{k+1}$. E também
- $e_i e_j = e_k \Rightarrow e_{2i} e_{2j} = e_{2k}$

Porém, precisamos de uma maneira mais prática para lembrar o produto dos octônios. Para tanto, apresentamos o Plano Fano.

Plano Fano

Os quatérnios são uma álgebra 4-dimensional com bases **1**, ***i***, ***j*** e ***k***. Para descrever seu produto, poderíamos utilizar a tabela de multiplicação, mas é bem mais fácil notar que:

- **1** é a identidade de multiplicação;
- ***i***, ***j*** e ***k*** são as raízes de -1;

- temos que $\mathbf{ij}=\mathbf{k}$, $\mathbf{ji}=-\mathbf{k}$ e todas as identidades são obtidas a partir de permutações cíclicas de $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$.

Podemos resumir tais fatos na seguinte figura:

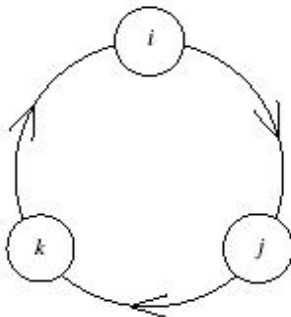


Figura 2: Diagrama da multiplicação dos quatérnios

Quando multiplicamos dois elementos no sentido horário, obtemos o próximo elemento: por exemplo, $ij = k$. Mas, quando multiplicamos no sentido anti-horário, obtemos o sinal de menos: $ji = -k$. Podemos utilizar o mesmo tipo de figura para multiplicar octônios.

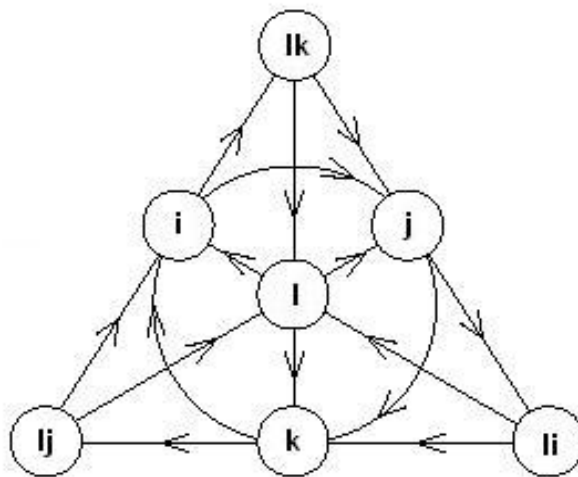


Figura 3: Diagrama da multiplicação dos octônios

Esse é o **Plano Fano**, um dispositivo com 7 pontos e 7 linhas. As linhas são os lados do triângulo, suas altitudes, e o círculo contendo todos os pontos intermediários dos lados. Cada par de pontos distintos está em uma única linha. Cada linha contém 3 pontos, e cada tripla possui uma ordem cíclica definida pelas flechas.

1.4 Octônios: Definição e Operações Elementares

Definimos o conjunto dos octônios como

$$\mathbb{O} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) : x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 \in \mathbb{R}\}$$

sendo que, dado $x \in \mathbb{O}$, podemos escrever:

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) = x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4 + lx_5 + lix_6 + ljx_7 + lkx_8$$

onde i, j, k, l, li, lj, lk são unidades imaginárias

$$i^2 = j^2 = k^2 = l^2 = (li)^2 = (lj)^2 = (lk)^2 = -1$$

que respeitam a tabela de multiplicação introduzida no tópico anterior[4,5].

A seguir, vamos definir as operações elementares dos octônios:

Definição 1. A norma $|x|$ de um octônio $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)$ é o número real

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2}$$

Definição 2. O octônio conjugado \bar{x} de $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)$ é dado por

$$\bar{x} = (x_1, -x_2, -x_3, -x_4, -x_5, -x_6, -x_7, -x_8)$$

Definição 3. Dado $x, y \in \mathbb{O}$, tais que $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)$ e $y = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8)$, enunciamos as operações:

- *Adição:*

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, x_4 + y_4, x_5 + y_5, x_6 + y_6, x_7 + y_7, x_8 + y_8) =$$

$$(x_1 + y_1) + i(x_2 + y_2) + j(x_3 + y_3) + k(x_4 + y_4) + l(x_5 + y_5) + li(x_6 + y_6) + lj(x_7 + y_7) + lk(x_8 + y_8)$$

- *Multiplicação:*

$$\begin{aligned}
xy = & (x_1y_1 - x_2y_2 - x_3y_3 - x_4y_4 - x_5y_5 - x_6y_6 - x_7y_7 - x_8y_8, \\
& x_1y_2 + x_2y_1 + x_3y_4 - x_4y_3 - x_5y_6 + x_6y_5 + x_7y_8 + x_8y_7, \\
& x_1y_3 - x_2y_4 + x_3y_1 + x_4y_2 - x_5y_7 + x_6y_8 + x_7y_5 - x_8y_6, \\
& x_1y_4 + x_2y_3 - x_3y_2 + x_4y_1 - x_5y_8 - x_6y_7 + x_7y_6 + x_8y_5, \\
& x_1y_5 + x_2y_6 + x_3y_7 + x_4y_6 + x_5y_1 - x_6y_2 - x_7y_3 - x_8y_4, \\
& x_1y_6 - x_2y_5 - x_3y_8 + x_4y_7 + x_5y_2 + x_6y_1 - x_7y_4 + x_8y_3, \\
& x_1y_7 + x_2y_8 - x_3y_5 - x_4y_6 + x_5y_3 + x_6y_4 + x_7y_1 - x_8y_2, \\
& x_1y_8 - x_2y_7 + x_3y_6 - x_4y_5 + x_5y_4 - x_6y_3 + x_7y_2 + x_8y_1)
\end{aligned}$$

1.5 Funções Octoniônicas

Sejam \mathbb{D} e \mathbb{D}' domínios no espaço euclidiano 8-dimensional \mathbb{R}^8 , $\mathbb{D} \subset \mathbb{O}$, $\mathbb{D}' \subset \mathbb{O}$. Uma função

$$f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}'$$

é uma função octoniônica se f é um mapeamento que faz corresponder a cada $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) \in \mathbb{O}$ um $y = f(x)$, $\mathbb{D}' \in \mathbb{O}$, ou seja

$$f : (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8) \rightarrow (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8)$$

Sendo f uma função octoniônica, podemos decompô-la em parte escalar $f_1(x) = \phi(x)$ e parte vetorial $if_2(x) + jf_3(x) + kf_4(x) + lf_5(x) + lif_6(x) + ljf_7(x) + lkf_8(x) = \varphi(x)$, ou seja

$$f(x) = f_1(x) + if_2(x) + jf_3(x) + kf_4(x) + lf_5(x) + lif_6(x) + ljf_7(x) + lkf_8(x) = \phi(x) + \varphi(x),$$

onde $f_i : \mathbb{R}^8 \rightarrow \mathbb{R}$ são funções coordenadas de valores reais para $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$.

Consequentemente,

$$|f(x)| = \sqrt{f_1(x)^2 + f_2(x)^2 + f_3(x)^2 + f_4(x)^2 + f_5(x)^2 + f_6(x)^2 + f_7(x)^2 + f_8(x)^2},$$

é sua norma.

1.6 Não-associatividade dos Octônios

Sabemos que os octônios são uma álgebra 8-dimensional não-associativa, ou seja, dados $a = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8)$, $b = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)$ e $c = (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6, z_7, z_8)$, temos que $(a.b).c \neq a.(b.c)$.

No entanto, quando $a = b = c$, temos que $(a.b).c = a.(b.c)$, conforme mostramos abaixo:

$$a.b = b.c = (y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 - y_4^2 - y_5^2 - y_6^2 - y_7^2 - y_8^2, \\ 2y_1y_2, 2y_1y_3, 2y_1y_4, 2y_1y_5, 2y_1y_6, 2y_1y_7, 2y_1y_8)$$

$$(a.b).c = (-2y_1y_2^2 - 2y_1y_3^2 - 2y_1y_4^2 - 2y_1y_5^2 - 2y_1y_6^2 - 2y_1y_7^2 - 2y_1y_8^2 + y_1(y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 - y_4^2 - y_5^2 - y_6^2 - y_7^2 - y_8^2), \\ 2y_1^2y_2 + y_2(y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 - y_4^2 - y_5^2 - y_6^2 - y_7^2 - y_8^2), \\ 2y_1^2y_3 + y_3(y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 - y_4^2 - y_5^2 - y_6^2 - y_7^2 - y_8^2), \\ 2y_1^2y_4 + y_4(y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 - y_4^2 - y_5^2 - y_6^2 - y_7^2 - y_8^2), \\ 2y_1^2y_5 + y_5(y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 - y_4^2 - y_5^2 - y_6^2 - y_7^2 - y_8^2), \\ 2y_1^2y_6 + y_6(y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 - y_4^2 - y_5^2 - y_6^2 - y_7^2 - y_8^2), \\ 2y_1^2y_7 + y_7(y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 - y_4^2 - y_5^2 - y_6^2 - y_7^2 - y_8^2), \\ 2y_1^2y_8 + y_8(y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 - y_4^2 - y_5^2 - y_6^2 - y_7^2 - y_8^2)) = \\ a.(b.c)$$

Esse fato tem grande importância neste trabalho, já que trabalharemos com funções do tipo $f(z) = z^n$, com $z \in \mathbb{O}$.

2 Dilatação

Já foi dito anteriormente que a dilatação é uma consequência de transformações *quaseconformes*. Sabendo que o objetivo principal deste trabalho é o cálculo da dilatação em funções octoniônicas do tipo $f(z) = z^n$, vamos definir transformação *quaseconforme*.

Definição Métrica

Sejam \mathbb{D} e \mathbb{D}' domínios no n -espaço Euclidiano \mathbb{R}^n com $n \geq 2$ e seja $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}'$ um homeomorfismo (contínua, bijetora e preserva topologia). Para $x \in \mathbb{D}$ e $r > 0$, considere $\overline{B}(x, r)$ a bola fechada (com centro em x) em \mathbb{D} . Seja

$$L(x, r) = \max_{|x-y|=r} |f(y) - f(x)|, \quad l(x, r) = \min_{|x-y|=r} |f(y) - f(x)|,$$

$$H(x, r) = \frac{L(x, r)}{l(x, r)} \quad \text{e} \quad H(x) = \limsup_{r \rightarrow 0} H(x, r),$$

então dizemos que a função f é *quaseconforme* se a dilatação $H(x)$ é uniformemente limitada em \mathbb{D} . Por conveniência, definimos f sendo K -*quaseconforme* com $1 \leq K < \infty$ se f é *quaseconforme* e $H(x) \leq K$.

Nos tópicos seguintes, desenvolveremos os ajustes necessários para calcular a dilatação dada na definição acima.

2.1 Coordenadas Esféricas

Neste tópico explicitamos o processo que nos leva a escrever bolas de oito dimensões, com a finalidade de calcular a distância $|f(y) - f(x)|$, onde x é o centro da hipersfera de raio r e y um ponto de sua fronteira.

Considerando as notações:

$$\cos(t_i) = c_i \text{ e } \sin(t_i) = s_i,$$

escrevemos as coordenadas de um ponto na fronteira da hipersfera como:

$$\left\{ \begin{array}{ll} y_1 = rc_1c_2\dots c_{n-2}c_{n-1}, & 0 \leq t_{n-1} \leq 2\pi; \\ y_2 = rc_1c_2\dots c_{n-2}s_{n-1}, & -\frac{1}{2}\pi \leq t_{n-2} \leq \frac{1}{2}\pi; \\ y_3 = rc_1c_2\dots s_{n-2}, & -\frac{1}{2}\pi \leq t_{n-3} \leq \frac{1}{2}\pi; \\ \dots\dots\dots, & \dots; \\ y_j = rc_1\dots c_{n-j}s_{n-j+1}, & \dots; \\ \dots\dots\dots, & \dots; \\ y_n = rs_1, & -\frac{1}{2}\pi \leq t_1 \leq \frac{1}{2}\pi. \end{array} \right.$$

Para $n = 3$, temos uma esfera no \mathbb{R}^3 definida por:

$$\left\{ \begin{array}{ll} y_1 = rc_1c_2, & 0 \leq t_2 \leq 2\pi; \\ y_2 = rc_1s_2, & -\frac{1}{2}\pi \leq t_1 \leq \frac{1}{2}\pi; \\ y_3 = rs_1, & 0 \leq r < \infty \end{array} \right.$$

Para $n = 8$, que é o caso de nosso interesse nesse trabalho, temos:

$$\left\{ \begin{array}{ll} y_1 = r c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 c_6 c_7, & 0 \leq t_7 \leq 2\pi; \\ y_2 = r c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 c_6 s_7, & -\frac{1}{2}\pi \leq t_6 \leq \frac{1}{2}\pi; \\ y_3 = r c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 s_6, & -\frac{1}{2}\pi \leq t_5 \leq \frac{1}{2}\pi; \\ y_4 = r c_1 c_2 c_3 c_4 s_5, & -\frac{1}{2}\pi \leq t_4 \leq \frac{1}{2}\pi; \\ y_5 = r c_1 c_2 c_3 s_4, & -\frac{1}{2}\pi \leq t_3 \leq \frac{1}{2}\pi; \\ y_6 = r c_1 c_2 s_3, & -\frac{1}{2}\pi \leq t_2 \leq \frac{1}{2}\pi; \\ y_7 = r c_1 s_2, & -\frac{1}{2}\pi \leq t_1 \leq \frac{1}{2}\pi; \\ y_8 = r s_1, & 0 \leq r < \infty \end{array} \right.$$

2.2 Desenvolvimento de $f(x) = x^n$

Tendo como objetivo calcular a dilatação, através do quociente entre o máximo e o mínimo da distância $|f(y) - f(x)|$, precisamos estudar o desenvolvimento das funções hipercomplexas $f(x) = x^n$.

Seja

$$x = x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4 + lx_5 + lix_6 + ljx_7 + lkx_8 = x_1 + h_x,$$

onde h_x é a parte vetorial dada por

$$h_x = ix_2 + jx_3 + kx_4 + lx_5 + lix_6 + ljx_7 + lkx_8$$

Pelas leis da multiplicação, temos que

$$h_x^2 = -x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 - x_5^2 - x_6^2 - x_7^2 - x_8^2$$

é um número real.

Para $n \in \mathbb{N}$, h_x^2 é real e $h_x^{2n+1} = h_x h_x^{2n} = h_x^{2n} h_x$ imaginário da forma

$$h_x^{2n}(ix_2 + jx_3 + kx_4 + lx_5 + lix_6 + ljx_7 + lkx_8) = ix_2 h_x^{2n} + jx_3 h_x^{2n} + kx_4 h_x^{2n} + lx_5 h_x^{2n} + lix_6 h_x^{2n} + ljx_7 h_x^{2n} + lkx_8 h_x^{2n}$$

Assim

$$h_x^{2n+1} = ix_2 h_x^{2n} + jx_3 h_x^{2n} + kx_4 h_x^{2n} + lx_5 h_x^{2n} + lix_6 h_x^{2n} + ljx_7 h_x^{2n} + lkx_8 h_x^{2n}$$

Então, segue-se que

$$x^n = (x_1 + h_x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x_1^{n-k} h_x^k =$$

$$\begin{aligned}
& \binom{n}{0} x_1^n h_x^0 + \binom{n}{2} x_1^{n-2} h_x^2 + \dots + \binom{n}{2k} x_1^{n-2k} h_x^{2k} + \\
& \binom{n}{1} x_1^{n-1} h_x^1 + \binom{n}{3} x_1^{n-3} h_x^3 + \dots + \binom{n}{2k+1} x_1^{n-(2k+1)} h_x^{2k+1} = \\
& \sum_{k=0}^{2k \leq n} \binom{n}{2k} x_1^{n-2k} h_x^{2k} + \sum_{k=0}^{2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1} x_1^{n-(2k+1)} h_x^{2k+1} = \\
& \underbrace{\sum_{k=0}^{2k \leq n} \binom{n}{2k} x_1^{n-2k} h_x^{2k}}_{Re(x^n)} + \underbrace{\sum_{k=0}^{2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1} x_1^{n-(2k+1)} h_x^{2k+1}}_{I(x^n)} \\
& = Re(x^n) + I(x^n)
\end{aligned}$$

2.3 Escrevendo $|f(y) - f(x)|$ como um polinômio em r

Neste tópico, desenvolveremos uma idéia central desse trabalho. Vamos mostrar que a expressão $|f(y) - f(x)|$, quando $x \in \mathbb{O}$ e $y \in \mathbb{O}$ são escritos em coordenadas esféricas, é a raiz de um polinômio na variável r e de grau $2n$ da forma

$$\sqrt{P_2^{(n)} r^2 + P_3^{(n)} r^3 + \dots + P_{2n}^{(n)} r^{2n}} \quad (2.1)$$

Tal resultado já foi demonstrado válido para os quatérnios [3].

Antes de demonstrar que isso é possível, devemos discutir sua finalidade. Dada a definição de dilatação e a distância $|f(y) - f(x)|$ definida como (2.1), segue-se que

$$\begin{aligned}
H(x) &= \limsup_{r \rightarrow 0} H(x, r) = \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{L(x, r)}{l(x, r)} = \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\max |f(y) - f(x)|}{\min |f(y) - f(x)|} = \\
&= \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\max \sqrt{P_2 r^2 + P_3 r^3 + \dots + P_{2n} r^{2n}}}{\min \sqrt{P_2 r^2 + P_3 r^3 + \dots + P_{2n} r^{2n}}} = \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\max r \sqrt{P_2 + P_3 r + \dots + P_{2n} r^{2n-2}}}{\min r \sqrt{P_2 + P_3 r + \dots + P_{2n} r^{2n-2}}} = \\
&= \frac{\max \sqrt{P_2}}{\min \sqrt{P_2}} = \sqrt{\frac{\max P_2}{\min P_2}}
\end{aligned}$$

Com isso, chegamos a duas conclusões importantes. Em primeiro, a dilatação não depende do raio r da hipersfera. Em segundo, a dilatação só depende dos termos multiplicados por r^2 de $|f(y) - f(x)|$. Logo, nosso próximo passo será extrair o termo P_2 de $|f(y) - f(x)|$. Contudo, precisamos mostrar que a distância $|f(y) - f(x)|$ é realmente um polinômio em r .

2.3.1 Desenvolvendo $|f(y) - f(x)|$

Consideremos $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)$ o centro da bola 8-dimensional de raio r e $y = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8)$ um ponto de sua fronteira, parametrizado por

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = x_1 + r \cos(t_1) \cos(t_2) \cos(t_3) \cos(t_4) \cos(t_5) \cos(t_6) \cos(t_7) \\ y_2 = x_2 + r \cos(t_1) \cos(t_2) \cos(t_3) \cos(t_4) \cos(t_5) \cos(t_6) \operatorname{sen}(t_7) \\ y_3 = x_3 + r \cos(t_1) \cos(t_2) \cos(t_3) \cos(t_4) \cos(t_5) \operatorname{sen}(t_6) \\ y_4 = x_4 + r \cos(t_1) \cos(t_2) \cos(t_3) \cos(t_4) \operatorname{sen}(t_5) \\ y_5 = x_5 + r \cos(t_1) \cos(t_2) \cos(t_3) \operatorname{sen}(t_4) \\ y_6 = x_6 + r \cos(t_1) \cos(t_2) \operatorname{sen}(t_3) \\ y_7 = x_7 + r \cos(t_1) \operatorname{sen}(t_2) \\ y_8 = x_8 + r \operatorname{sen}(t_1), \end{array} \right.$$

com a forma abreviada

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = x_1 + r c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 c_6 c_7 \\ y_2 = x_2 + r c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 c_6 s_7 \\ y_3 = x_3 + r c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 s_6 \\ y_4 = x_4 + r c_1 c_2 c_3 c_4 s_5 \\ y_5 = x_5 + r c_1 c_2 c_3 s_4 \\ y_6 = x_6 + r c_1 c_2 s_3 \\ y_7 = x_7 + r c_1 s_2 \\ y_8 = x_8 + r s_1, \end{array} \right.$$

e queremos calcular $|f(y) - f(x)|$ para $f(z) = z^n$.

Temos

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x)| &= \\ |Re(y^n) - Re(x^n) + I(y^n) - I(x^n)| &= \\ \left| \sum_{k=0}^{2k \leq n} \binom{n}{2k} (y_1^{n-2k} h_y^{2k} - x_1^{n-2k} h_x^{2k}) \right| & \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +i \left\{ \left[\sum_{k=0}^{2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1} y_1^{n-(2k+1)} h_y^{2k} \right] y_2 - \left[\sum_{k=0}^{2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1} x_1^{n-(2k+1)} h_x^{2k} \right] x_2 \right\} \\
& +j \left\{ \left[\sum_{k=0}^{2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1} y_1^{n-(2k+1)} h_y^{2k} \right] y_3 - \left[\sum_{k=0}^{2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1} x_1^{n-(2k+1)} h_x^{2k} \right] x_3 \right\} \\
& +k \left\{ \left[\sum_{k=0}^{2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1} y_1^{n-(2k+1)} h_y^{2k} \right] y_4 - \left[\sum_{k=0}^{2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1} x_1^{n-(2k+1)} h_x^{2k} \right] x_4 \right\} \\
& +l \left\{ \left[\sum_{k=0}^{2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1} y_1^{n-(2k+1)} h_y^{2k} \right] y_5 - \left[\sum_{k=0}^{2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1} x_1^{n-(2k+1)} h_x^{2k} \right] x_5 \right\} \\
& +li \left\{ \left[\sum_{k=0}^{2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1} y_1^{n-(2k+1)} h_y^{2k} \right] y_6 - \left[\sum_{k=0}^{2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1} x_1^{n-(2k+1)} h_x^{2k} \right] x_6 \right\} \\
& +lj \left\{ \left[\sum_{k=0}^{2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1} y_1^{n-(2k+1)} h_y^{2k} \right] y_7 - \left[\sum_{k=0}^{2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1} x_1^{n-(2k+1)} h_x^{2k} \right] x_7 \right\} \\
& +lk \left\{ \left[\sum_{k=0}^{2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1} y_1^{n-(2k+1)} h_y^{2k} \right] y_8 - \left[\sum_{k=0}^{2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1} x_1^{n-(2k+1)} h_x^{2k} \right] x_8 \right\} =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left| \sum_{k=0}^{2k \leq n} \binom{n}{2k} (y_1^{n-2k} h_y^{2k} - x_1^{n-2k} h_x^{2k}) \right. \\
& +i \left[\sum_{k=0}^{2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1} y_2 y_1^{n-(2k+1)} h_y^{2k} - x_2 x_1^{n-(2k+1)} h_x^{2k} \right] \\
& +j \left[\sum_{k=0}^{2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1} y_3 y_1^{n-(2k+1)} h_y^{2k} - x_3 x_1^{n-(2k+1)} h_x^{2k} \right] \\
& +k \left[\sum_{k=0}^{2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1} y_4 y_1^{n-(2k+1)} h_y^{2k} - x_4 x_1^{n-(2k+1)} h_x^{2k} \right] \\
& +l \left[\sum_{k=0}^{2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1} y_5 y_1^{n-(2k+1)} h_y^{2k} - x_5 x_1^{n-(2k+1)} h_x^{2k} \right] \\
& +li \left[\sum_{k=0}^{2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1} y_6 y_1^{n-(2k+1)} h_y^{2k} - x_6 x_1^{n-(2k+1)} h_x^{2k} \right] \\
& +lj \left[\sum_{k=0}^{2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1} y_7 y_1^{n-(2k+1)} h_y^{2k} - x_7 x_1^{n-(2k+1)} h_x^{2k} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +lk \left[\sum_{k=0}^{2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1} y_8 y_1^{n-(2k+1)} h_y^{2k} - x_8 x_1^{n-(2k+1)} h_x^{2k} \right] = \\
& = |F + iF_i + jF_j + kF_k + lF_l + liF_{li} + ljF_{lj} + lkF_{lk}| = \\
& = \sqrt{F^2 + F_i^2 + F_j^2 + F_k^2 + F_l^2 + F_{li}^2 + F_{lj}^2 + F_{lk}^2},
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
F &= \left| \sum_{k=0}^{2k \leq n} \binom{n}{2k} (y_1^{n-2k} h_y^{2k} - x_1^{n-2k} h_x^{2k}), \right. \\
F_i &= \sum_{k=0}^{2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1} (y_2 y_1^{n-(2k+1)} h_y^{2k} - x_2 x_1^{n-(2k+1)} h_x^{2k}), \\
F_j &= \sum_{k=0}^{2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1} (y_3 y_1^{n-(2k+1)} h_y^{2k} - x_3 x_1^{n-(2k+1)} h_x^{2k}), \\
F_k &= \sum_{k=0}^{2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1} (y_4 y_1^{n-(2k+1)} h_y^{2k} - x_4 x_1^{n-(2k+1)} h_x^{2k}), \\
F_l &= \sum_{k=0}^{2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1} (y_5 y_1^{n-(2k+1)} h_y^{2k} - x_5 x_1^{n-(2k+1)} h_x^{2k}), \\
F_{li} &= \sum_{k=0}^{2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1} (y_6 y_1^{n-(2k+1)} h_y^{2k} - x_6 x_1^{n-(2k+1)} h_x^{2k}), \\
F_{lj} &= \sum_{k=0}^{2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1} (y_7 y_1^{n-(2k+1)} h_y^{2k} - x_7 x_1^{n-(2k+1)} h_x^{2k}), \\
F_{lk} &= \sum_{k=0}^{2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1} (y_8 y_1^{n-(2k+1)} h_y^{2k} - x_8 x_1^{n-(2k+1)} h_x^{2k}),
\end{aligned}$$

Precisamos mostrar agora que todos os elementos de $F, F_i, F_j, F_k, F_l, F_{li}, F_{lj}, F_{lk}$ estão multiplicados por algum r^n , com $n \in \mathbb{I}$. Em outras palavras, se F, F_i, \dots, F_{lk} são polinômios em r , então $|f(y) - f(x)|^2$ também o será.

2.3.2 Fórmula para h_y^{2k}

Buscamos agora uma fórmula para o fator h_y^{2k} , que aparece em F, F_i, \dots, F_{lk} .

$$h_y^2 = -y_2^2 - y_3^2 - y_4^2 - y_5^2 - y_6^2 - y_7^2 - y_8^2$$

Substituindo pela forma parametrizada

$$h_y^2 = -[x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 + x_7^2 + x_8^2 + 2x_2rc_1c_2c_3c_4c_5c_6s_7 + 2x_3rc_1c_2c_3c_4c_5s_6 + 2x_4rc_1c_2c_3c_4s_5 + 2x_5rc_1c_2c_3s_4 + 2x_6rc_1c_2s_3 + 2x_7rc_1s_2 + 2x_8rs_1 + r^2(c_1^2c_2^2c_3^2c_4^2c_5^2c_6^2c_7^2 - 1)]$$

e denominando

$$-c_1^2c_2^2c_3^2c_4^2c_5^2c_6^2c_7^2 + 1 = -c^2 + 1 = s^2$$

e

$$\prod = x_2c_1c_2c_3c_4c_5c_6s_7 + x_3c_1c_2c_3c_4c_5s_6 + x_4c_1c_2c_3c_4s_5 + x_5c_1c_2c_3s_4 + x_6c_1c_2s_3 + x_7c_1s_2 + x_8s_1$$

Temos

$$h_y^2 = h_x^2 - 2r \prod + r^2 s^2$$

Como $h_y^{2k} = (h_y^2)^k$, onde $0 \leq 2k \leq n$, então

$$\begin{aligned} h_y^{2k} &= (h_x^2(-2r \prod + (rs)^2))^k = \\ &= \binom{k}{0} (h_x^2)^k (-2r \prod + (rs)^2)^0 + \\ &+ \binom{k}{1} (h_x^2)^{k-1} (-2r \prod + (rs)^2)^1 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \binom{k}{2} (h_x^2)^{k-2} (-2r \prod + (rs)^2)^2 + \\
& \quad \dots\dots \\
& + \binom{k}{m} (h_x^2)^{k-m} (-2r \prod + (rs)^2)^m + \\
& \quad \dots\dots \\
& + \binom{k}{k} (h_x^2)^{k-k} (-2r \prod + (rs)^2)^k, \quad (0 \leq m \leq k)
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
h_y^{2k} &= \binom{k}{0} (h_x^2)^k + \\
& \binom{k}{1} (h_x^2)^{k-1} \left[\binom{1}{0} (-2r \prod)^{1-0} (r^2 s^2)^0 + \binom{1}{1} (-2r \prod)^{1-1} (r^2 s^2)^1 \right] + \\
& \binom{k}{2} (h_x^2)^{k-2} \left[\binom{2}{0} (-2r \prod)^{2-0} (r^2 s^2)^0 + \binom{2}{1} (-2r \prod)^{2-1} (r^2 s^2)^1 + \binom{2}{2} (-2r \prod)^{2-2} (r^2 s^2)^2 \right] + \\
& \quad \dots\dots \\
& \binom{k}{m} (h_x^2)^{k-m} \left[\binom{m}{0} (-2r \prod)^{m-0} (r^2 s^2)^0 + \binom{m}{1} (-2r \prod)^{m-1} (r^2 s^2)^1 + \binom{2}{2} (-2r \prod)^{m-2} (r^2 s^2)^2 + \right. \\
& \quad \left. \dots + \binom{m}{q} (-2r \prod)^{m-q} (r^2 s^2)^q + \dots + \binom{m}{m} (-2r \prod)^{m-m} (r^2 s^2)^m \right] + \\
& \quad \dots\dots \\
& \binom{k}{k} (h_x^2)^{k-k} \left[\binom{k}{0} (-2r \prod)^{k-0} (r^2 s^2)^0 + \binom{k}{1} (-2r \prod)^{k-1} (r^2 s^2)^1 + \binom{k}{2} (-2r \prod)^{k-2} (r^2 s^2)^2 + \dots + \right. \\
& \quad \left. \binom{k}{k} (-2r \prod)^{k-k} (r^2 s^2)^k \right],
\end{aligned}$$

Agora podemos separar r de cada termo

$$\begin{aligned}
h_y^{2k} &= \left[\binom{k}{0} (h_x^2)^k \right] r^0 + \\
& \left[\binom{k}{1} (h_x^2)^{k-1} \binom{1}{0} (-2 \prod)^{1-0} (s^2)^0 \right] r^1 + \\
& \left[\binom{k}{1} (h_x^2)^{k-1} \binom{1}{1} (-2 \prod)^{1-1} (s^2)^1 + \binom{k}{1} (h_x^2)^{k-1} \binom{2}{0} (-2 \prod)^{2-0} (s^2)^0 \right] r^2 + \\
& \left[\binom{k}{2} (h_x^2)^{k-2} \binom{2}{1} (-2 \prod)^{2-1} (s^2)^1 + \binom{k}{3} (h_x^2)^{k-3} \binom{3}{0} (-2 \prod)^{3-0} (s^2)^0 \right] r^3 +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[\binom{k}{2} (h_x^2)^{k-2} \binom{2}{2} (-2 \prod)^{2-2} (s^2)^2 + \binom{k}{3} (h_x^2)^{k-3} \binom{3}{1} (-2 \prod)^{3-1} (s^2)^1 + \right. \\ & \quad \left. \binom{k}{4} (h_x^2)^{k-4} \binom{4}{0} (-2 \prod)^{4-0} (s^2)^0 \right] r^4 + \\ & \quad \dots\dots\dots + \\ & \quad [f_{m+q=}] r^{m+q} + \\ & \quad \dots\dots\dots + (s^2)^k r^{2k}, \end{aligned}$$

O elemento genérico dessa sequência, será definido como

$$\begin{aligned} f_{m+q=} &= \left[\binom{k}{m} \binom{m}{q} (h_x^2)^{k-m} (-2 \prod)^{m-q} (s^2)^q + \right. \\ & \left(\binom{k}{m+1} \binom{m+1}{q-1} (h_x^2)^{k-(m+1)} (-2 \prod)^{m-q+2} (s^2)^{q-1} + \dots \right. \\ & \left. \left. \binom{k}{m+q} \binom{m+q}{0} (h_x^2)^{k-(m+q)} (-2 \prod)^{m+q} (s^2)^0 \right], \end{aligned}$$

onde $0 \leq m+q \leq 2k$, $0 \leq q \leq m \leq k$ e $f_{m+q=} = 0$ se $m > k$.

Por fim, definimos a fórmula para h_y^{2k}

$$h_y^{2k} = \sum_{m+q=0}^{2k} f_{m+q=} r^{m+q} \quad (2.2)$$

2.3.3 Substituindo h_y^{2k} em F

Nosso objetivo é obter F, F_i, \dots, F_{lk} como polinômios em r . Para tanto, vamos começar calculando F . Anteriormente, obtivemos que

$$F = \sum_{k=0}^{2k \leq n} \binom{n}{2k} (y_1^{n-2k} h_y^{2k} - x_1^{n-2k} h_x^{2k})$$

Vamos definir então

$$f_{2k}^n = \binom{n}{2k} (y_1^{n-2k} h_y^{2k} - x_1^{n-2k} h_x^{2k})$$

Substituindo y_1 pela forma parametrizada e h_y^{2k} pela fórmula definida

$$f_{2k}^n = \binom{n}{2k} \left\{ (x_1 + rc)^{n-2k} \left(\sum_{m+q=0}^{2k} f_{m+q=} r^{m+q} \right) - x_1^{n-2k} h_x^{2k} \right\} =$$

$$\binom{n}{2k} \left\{ \left[\binom{n-2k}{0} x_1^{n-2k} (rc)^0 + \binom{n-2k}{1} x_1^{n-2k-1} (rc)^1 + \dots + \binom{n-2k}{p} x_1^{n-2k-p} (rc)^p + \dots + \binom{n-2k}{n-2k} x_1^0 (rc)^{n-2k} \right] \cdot \right. \\ \left. [f_{m+q=0} r^0 + f_{m+q=1} r^1 + \dots + f_{m+q=2k} r^{2k}] - x_1^{n-2k} h_x^{2k} \right\} =$$

Separando em função de r

$$\binom{n}{2k} \left\{ \left[\binom{n-2k}{0} x_1^{n-2k} c^0 f_{m+q=0} \right] r^0 + \right. \\ \left[\binom{n-2k}{0} x_1^{n-2k} c^0 f_{m+q=1} + \binom{n-2k}{1} x_1^{n-2k-1} c^1 f_{m+q=0} \right] r^1 + \\ \left[\binom{n-2k}{0} x_1^{n-2k} c^0 f_{m+q=2} + \binom{n-2k}{1} x_1^{n-2k-1} c^1 f_{m+q=1} + \binom{n-2k}{2} x_1^{n-2k-2} c^2 f_{m+q=0} \right] r^2 + \\ + \dots + \\ \left[\binom{n-2k}{0} x_1^{n-2k} c^0 f_{m+q=t} + \dots + \binom{n-2k}{p} x_1^{n-2k-p} c^p f_{m+q=t-p} + \dots + \binom{n-2k}{t} x_1^0 c^t f_{m+q=0} \right] r^t + \\ + \dots + \\ \left. \left[\binom{n-2k}{0} x_1^{n-2k} c^0 f_{m+q=n} + \dots + \binom{n-2k}{n-2k} x_1^0 c^{n-2k} f_{m+q=2k} \right] r^n - \right. \\ \left. - x_1^{n-2k} h_x^{2k} \right\}$$

O primeiro e o último termo se anulam. Logo

$$f_{2k}^{(n)} = \binom{n}{2k} \left[\binom{n-2k}{0} x_1^{n-2k} c^0 f_{m+q=1} + \binom{n-2k}{1} x_1^{n-2k-1} c^1 f_{m+q=0} \right] r^1 + \\ \binom{n}{2k} \left[\binom{n-2k}{0} x_1^{n-2k} c^0 f_{m+q=2} + \binom{n-2k}{1} x_1^{n-2k-1} c^1 f_{m+q=1} + \binom{n-2k}{2} x_1^{n-2k-2} c^2 f_{m+q=0} \right] r^2 + \\ + \dots + \\ \binom{n}{2k} \left[\binom{n-2k}{0} x_1^{n-2k} c^0 f_{m+q=n} + \dots + \binom{n-2k}{n-2k} x_1^0 c^{n-2k} f_{m+q=2k} \right] r^n +$$

Para facilitar a visualização de $f_{2k}^{(n)}$, definimos

$$f_{(2k,t)} = \binom{n}{2k} \left[\sum_{p=0}^t \binom{n-2k}{p} x_1^{n-2k-p} c^p f_{m+q=t-p} \right]$$

Portanto

$$f_{2k}^{(n)} = \sum_{t=1}^n f_{(2k,t)} r^t \quad (2.3)$$

2.3.4 Escrevendo F como um polinômio em r

Temos que

$$F = \sum_{k=0}^{2k \leq n} \binom{n}{2k} (y_1^{n-2k} h_y^{2k} - x_1^{n-2k} h_x^{2k})$$

Portanto

$$\begin{aligned} F &= \sum_{k=0}^{2k \leq n} f_{2k}^{(n)} = \sum_{k=0}^{2k \leq n} \left[\sum_{t=1}^n f_{(2k,t)} r^t \right] = \\ &= f_{(0,1)} r^1 + f_{(0,2)} r^2 + \dots + f_{(0,t)} r^t + \\ &\quad f_{(2,1)} r^1 + f_{(2,2)} r^2 + \dots + f_{(2,t)} r^t + \\ &\quad \dots + \\ &\quad f_{(2k,1)} r^1 + f_{(2k,2)} r^2 + \dots + f_{(2k,t)} r^t = \\ &= \sum_{k=0}^{2k \leq n} f_{(2k,1)} r^1 + \sum_{k=0}^{2k \leq n} f_{(2k,2)} r^2 + \dots + \sum_{k=0}^{2k \leq n} f_{(2k,t)} r^t \end{aligned}$$

Por fim, denominamos

$$f_t = \sum_{k=0}^{2k \leq n} f_{(2k,t)}$$

e obtemos F como um polinômio em r

$$F = \sum_{t=1}^n f_t r^t \quad (2.4)$$

2.3.5 Substituindo h_y^{2k} em F_i, F_j, \dots, F_{lk}

Nesse tópico, vamos escrever F_i como um polinômio em r . Seja

$$F_i = \sum_{k=0}^{2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1} (y_2 y_1^{n-(2k+1)} h_y^{2k} - x_2 x_1^{n-(2k+1)} h_x^{2k}),$$

e, separamos $f_{i2k}^{(n)}$ como

$$f_{i2k}^{(n)} = \binom{n}{2k+1} (y_2 y_1^{n-(2k+1)} h_y^{2k} - x_2 x_1^{n-(2k+1)} h_x^{2k})$$

Note que o desenvolvimento de $f_{i2k}^{(n)}$ será semelhante para F_j, \dots, F_{lk} .

Substituindo y_1 pela forma parametrizada, temos

$$f_{i2k}^{(n)} = \binom{n}{2k+1} \left\{ y_2 (x_1 + rc)^{n-(2k+1)} \left(\sum_{m+q=0}^{2k} f_{m+q} r^{m+q} \right) - x_2 x_1^{n-(2k+1)} h_x^{2k} \right\}$$

Desenvolvendo $(x_1 + rc)^{n-(2k+1)}$ pela forma binomial

$$\begin{aligned} f_{i2k}^{(n)} &= \binom{n}{2k+1} \left\{ y_2 \left[\binom{n-(2k+1)}{0} x_1^{n-(2k+1)} (rc)^0 + \binom{n-(2k+1)}{1} x_1^{n-(2k)} (rc)^1 + \dots \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \binom{n-(2k+1)}{p} x_1^{n-(2k+1)-p} (rc)^p + \dots + \binom{n-(2k+1)}{n-(2k+1)} x_1^0 (rc)^{n-(2k+1)} \right] \right. \\ &\quad \left. \left[f_{m+q=0} r^0 + f_{m+q=1} r^1 + \dots + f_{m+q=2k} r^{2k} \right] - x_2 x_1^{n-(2k+1)} h_x^{2k} \right\} \end{aligned}$$

Substituindo y_2 pela forma parametrizada e separando em função de r , temos

$$\begin{aligned} f_{i2k}^{(n)} &= \binom{n}{2k+1} \left\{ (x_2 + rc_1 c_2 c_3 c_4 c_5 c_6 s_7) \left\{ \left[\binom{n-(2k+1)}{0} x_1^{n-(2k+1)} c^0 f_{m+q=0} \right] r^0 + \right. \right. \\ &\quad \left[\binom{n-(2k+1)}{0} x_1^{n-(2k+1)} c^0 f_{m+q=1} + \binom{n-(2k+1)}{1} x_1^{n-(2k)} c^1 f_{m+q=0} \right] r^1 + \\ &\quad \left. \left. + \dots + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left[\sum_{p=0}^{t-1} \binom{n-(2k+1)}{p} x_1^{n-(2k+1)-p} c^p f_{m+q=t-(p+1)} \right] r^{t-1} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left[\sum_{p=0}^{t-1} \binom{n-(2k+1)}{p} x_1^{n-(2k+1)-p} c^p f_{m+q=t-p} \right] r^t + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \dots + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \binom{n-(2k+1)}{n-(2k+1)} x_1^0 c^{n-(2k+1)} f_{m+q=2k} r^{n-1} \right\} - x_2 x_1^{n-(2k+1)} h_x^{2k} \right\} \end{aligned}$$

Sabendo que $f_{m+q=0} = \binom{k}{0} \binom{0}{0} (h_x^2)^{k-0} (-2\Pi)^{0-0} (s^2)^0 = h_x^{2k}$, temos

$$\begin{aligned} f_{i2k}^{(n)} &= \binom{n}{2k+1} \left\{ \left[x_2 \sum_{p=0}^1 \binom{n-(2k+1)}{p} x_1^{n-(2k+1)-p} c^p f_{m+q=1-p} + c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 c_6 s_7 x_1^{n-(2k+1)} h_x^{2k} \right] r^1 + \right. \\ &\quad \left. + \left[x_2 \sum_{p=0}^2 \binom{n-(2k+1)}{p} x_1^{n-(2k+1)-p} c^p f_{m+q=2-p} + \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 c_6 s_7 \sum_{p=0}^1 \binom{n - (2k + 1)}{p} x_1^{n - (2k + 1) - p} c^p f_{m+q=2-p} \Big] r^2 + \\
& \quad + \dots + \\
& \quad + \left[x_2 \sum_{p=0}^t \binom{n - (2k + 1)}{p} x_1^{n - (2k + 1) - p} c^p f_{m+q=t-p} + \right. \\
& c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 c_6 s_7 \sum_{p=0}^{t-1} \binom{n - (2k + 1)}{p} x_1^{n - (2k + 1) - p} c^p f_{m+q=t-p-1} \Big] r^t + \dots \\
& \quad \left. + \left[c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 c_6 s_7 \binom{n - (2k + 1)}{n - (2k + 1)} x_1^0 c^{n - (2k + 1)} f_{m+q=2k} \right] r^n \right\}
\end{aligned}$$

Podemos então, definir um termo genérico de $f_{i2k}^{(n)}$ como

$$\begin{aligned}
f_{i(2k,t)} &= \binom{n}{2k + 1} \left[x_2 \sum_{p=0}^t \binom{n - (2k + 1)}{p} x_1^{n - (2k + 1) - p} c^p f_{m+q=t-p} + \right. \\
& \quad \left. + \left[c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 c_6 s_7 \sum_{p=0}^{t-1} \binom{n - (2k + 1)}{p} x_1^{n - (2k + 1) - p} c^p f_{m+q=t-p-1} \right] \right]
\end{aligned}$$

Logo

$$f_{i2k}^{(n)} = \sum_{t=1}^n f_{i(2k,t)} r^t$$

Os cálculos da substituição de h_y^{2k} em F_j, \dots, F_{lk} segue de maneira similar a F_i . Desse modo, definimos também

$$\begin{aligned}
\text{a) } f_{j(2k,t)} &= \binom{n}{2k + 1} \left[x_3 \sum_{p=0}^t \binom{n - (2k + 1)}{p} x_1^{n - (2k + 1) - p} c^p f_{m+q=t-p} + \right. \\
& \quad \left. + \left[c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 s_6 \sum_{p=0}^{t-1} \binom{n - (2k + 1)}{p} x_1^{n - (2k + 1) - p} c^p f_{m+q=t-p-1} \right] \right] \\
& \Rightarrow f_{j2k}^{(n)} = \sum_{t=1}^n f_{j(2k,t)} r^t ;
\end{aligned}$$

$$\text{b) } f_{k(2k,t)} = \binom{n}{2k + 1} \left[x_4 \sum_{p=0}^t \binom{n - (2k + 1)}{p} x_1^{n - (2k + 1) - p} c^p f_{m+q=t-p} + \right.$$

$$+ \left[c_1 c_2 c_3 c_4 s_5 \sum_{p=0}^{t-1} \binom{n - (2k + 1)}{p} x_1^{n - (2k - 1) - p} c^p f_{m+q=t-p-1} \right]$$

$$\Rightarrow f_{k2k}^{(n)} = \sum_{t=1}^n f_{k(2k,t)} r^t \quad ;$$

c)

$$f_{l(2k,t)} = \binom{n}{2k + 1} \left[x_5 \sum_{p=0}^t \binom{n - (2k + 1)}{p} x_1^{n - (2k + 1) - p} c^p f_{m+q=t-p} + \right.$$

$$\left. + \left[c_1 c_2 c_3 s_4 \sum_{p=0}^{t-1} \binom{n - (2k + 1)}{p} x_1^{n - (2k - 1) - p} c^p f_{m+q=t-p-1} \right] \right]$$

$$\Rightarrow f_{l2k}^{(n)} = \sum_{t=1}^n f_{l(2k,t)} r^t c \quad ;$$

d)

$$f_{li(2k,t)} = \binom{n}{2k + 1} \left[x_6 \sum_{p=0}^t \binom{n - (2k + 1)}{p} x_1^{n - (2k + 1) - p} c^p f_{m+q=t-p} + \right.$$

$$\left. + \left[c_1 c_2 s_3 \sum_{p=0}^{t-1} \binom{n - (2k + 1)}{p} x_1^{n - (2k - 1) - p} c^p f_{m+q=t-p-1} \right] \right]$$

$$\Rightarrow f_{li2k}^{(n)} = \sum_{t=1}^n f_{li(2k,t)} r^t$$

e)

$$f_{lj(2k,t)} = \binom{n}{2k + 1} \left[x_7 \sum_{p=0}^t \binom{n - (2k + 1)}{p} x_1^{n - (2k + 1) - p} c^p f_{m+q=t-p} + \right.$$

$$\left. + \left[c_1 s_2 \sum_{p=0}^{t-1} \binom{n - (2k + 1)}{p} x_1^{n - (2k - 1) - p} c^p f_{m+q=t-p-1} \right] \right]$$

$$\Rightarrow f_{lj2k}^{(n)} = \sum_{t=1}^n f_{lj(2k,t)} r^t \quad ;$$

$$\begin{aligned}
 \text{f)} \quad f_{lk(2k,t)} &= \binom{n}{2k+1} \left[x_8 \sum_{p=0}^t \binom{n-(2k+1)}{p} x_1^{n-(2k+1)-p} c^p f_{m+q=t-p} + \right. \\
 &\quad \left. + \left[s_1 \sum_{p=0}^{t-1} \binom{n-(2k+1)}{p} x_1^{n-(2k-1)-p} c^p f_{m+q=t-p-1} \right] \right] \\
 &\Rightarrow f_{lk2k}^{(n)} = \sum_{t=1}^n f_{lk(2k,t)} r^t \quad ;
 \end{aligned}$$

2.3.6 Escrevendo F_i, F_j, \dots, F_{lk} como polinômios em r

Seja

$$F_i = \sum_{k=0}^{2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1} (y_2 y_1^{n-(2k+1)} h_y^{2k} - x_2 x_1^{n-(2k+1)} h_x^{2k}),$$

dado

$$f_{i2k}^{(n)} = \sum_{t=1}^n f_{i(2k,t)} r^t$$

Temos

$$\begin{aligned}
 F_i &= \sum_{k=0}^{2k+1 \leq n} \left(\sum_{t=1}^n f_{i(2k,t)} r^t \right) = \\
 &= f_{i(0,1)} r^1 + f_{i(0,2)} r^2 + \dots + f_{i(0,t)} r^t + \\
 &\quad + f_{i(2,1)} r^1 + f_{i(2,2)} r^2 + \dots + f_{i(2,t)} r^t + \\
 &\quad + \dots + \\
 &\quad + f_{i(2k,1)} r^1 + f_{i(2k,2)} r^2 + \dots + f_{i(2k,t)} r^t = \\
 &\sum_{k=0}^{2k+1 \leq n} f_{i(2k,1)} r^1 + \sum_{k=0}^{2k+1 \leq n} f_{i(2k,2)} r^2 + \dots + \sum_{k=0}^{2k+1 \leq n} f_{i(2k,t)} r^t
 \end{aligned}$$

Definimos então

$$f_{it} = \sum_{k=0}^{2k+1 \leq n} f_{i(2k,t)}$$

com $1 \leq t \leq n$.

Por fim, escrevemos F_i em sua forma polinomial

$$F_i = \sum_{t=1}^n f_{it} r^t \quad (2.5)$$

Analogamente

$$\begin{aligned} F_j &= \sum_{k=0}^{2k+1 \leq n} \left(\sum_{t=1}^n f_{j(2k,t)} r^t \right) \implies f_{jt} = \sum_{k=0}^{2k+1 \leq n} f_{j(2k,t)} \\ &\implies F_j = \sum_{t=1}^n f_{jt} r^t \end{aligned} \quad (2.6)$$

e ainda:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad F_k &= \sum_{k=0}^{2k+1 \leq n} \left(\sum_{t=1}^n f_{k(2k,t)} r^t \right) \implies f_{kt} = \sum_{k=0}^{2k+1 \leq n} f_{k(2k,t)} \\ &\implies F_k = \sum_{t=1}^n f_{kt} r^t \quad ; \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad F_l &= \sum_{k=0}^{2k+1 \leq n} \left(\sum_{t=1}^n f_{l(2k,t)} r^t \right) \implies f_{lt} = \sum_{k=0}^{2k+1 \leq n} f_{l(2k,t)} \\ &\implies F_l = \sum_{t=1}^n f_{lt} r^t \quad ; \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad F_{li} &= \sum_{k=0}^{2k+1 \leq n} \left(\sum_{t=1}^n f_{li(2k,t)} r^t \right) \implies f_{lit} = \sum_{k=0}^{2k+1 \leq n} f_{li(2k,t)} \\ &\implies F_{li} = \sum_{t=1}^n f_{lit} r^t \quad ; \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\text{d)} \quad F_{lj} = \sum_{k=0}^{2k+1 \leq n} \left(\sum_{t=1}^n f_{lj(2k,t)} r^t \right) \implies f_{ljt} = \sum_{k=0}^{2k+1 \leq n} f_{lj(2k,t)}$$

$$\implies F_{lj} = \sum_{t=1}^n f_{ljt} r^t \quad ; \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \text{e)} \quad F_{lk} &= \sum_{k=0}^{2k+1 \leq n} \left(\sum_{t=1}^n f_{lk(2k,t)} r^t \right) \implies f_{lkt} = \sum_{k=0}^{2k+1 \leq n} f_{lk(2k,t)} \\ &\implies F_{lk} = \sum_{t=1}^n f_{lkt} r^t \end{aligned} \quad (2.11)$$

Por fim, escrevemos toda a parte vetorial F_j, \dots, F_{lk} como polinômios em r .

$$\mathbf{2.3.7 \ Resultado:} \quad |f(y) - f(x)| = \sqrt{\sum P_s^{(n)} r^s}$$

Vimos até aqui que

$$|f(y) - f(x)| = \sqrt{F^2 + F_i^2 + F_j^2 + F_k^2 + F_l^2 + F_{li}^2 + F_{lj}^2 + F_{lk}^2},$$

onde,

$$\begin{aligned} F &= \sum_{t=1}^n f_t r^t, \quad F_i = \sum_{t=1}^n f_{it} r^t, \quad F_j = \sum_{t=1}^n f_{jt} r^t, \quad F_k = \sum_{t=1}^n f_{kt} r^t \\ F_l &= \sum_{t=1}^n f_{lt} r^t, \quad F_{li} = \sum_{t=1}^n f_{lit} r^t, \quad F_{lj} = \sum_{t=1}^n f_{ljt} r^t, \quad F_{lk} = \sum_{t=1}^n f_{lkt} r^t \end{aligned}$$

Por isso

$$\begin{aligned} F^2 &= \left(\sum_{t=1}^n f_t r^t \right)^2 = (f_1 r^1 + f_2 r^2 + \dots + f_n r^n)^2 = \\ &= \sum_{v=1}^n (f_v r^v)^2 + 2 \sum_{w=1}^n \sum_{z=1}^n f_w r^w f_z r^z = \\ &= p_2 r^2 + p_3 r^3 + \dots + p_{2n} r^{2n} = \sum_{s=2}^{2n} p_s r^s \end{aligned}$$

, onde p_s fica definido como

$$p_s = \begin{cases} \sum_{p=1}^{s-1} f_p f_{s-p}, & \text{para } 2 \leq s \leq n+1; \\ \sum_{k=0}^{n-p} f_{p+k} f_{n-k}, & \text{para } s = n+p, p > 1 \end{cases}$$

De maneira análoga, temos

$$F_i = \sum_{s=2}^{2n} p_{is} r^s$$

onde,

$$p_{is} = \begin{cases} \sum_{p=1}^{s-1} f_{ip} f_{i(s-p)}, & \text{para } 2 \leq s \leq n+1; \\ \sum_{k=0}^{n-p} f_{i(p+k)} f_{i(n-k)}, & \text{para } s = n+p, p > 1 \end{cases}$$

e também:

$$\text{a) } F_j = \sum_{s=2}^{2n} p_{js} r^s$$

onde

$$p_{js} = \begin{cases} \sum_{p=1}^{s-1} f_{jp} f_{j(s-p)}, & \text{para } 2 \leq s \leq n+1; \\ \sum_{k=0}^{n-p} f_{j(p+k)} f_{j(n-k)}, & \text{para } s = n+p, p > 1 \end{cases}$$

$$\text{b) } F_k = \sum_{s=2}^{2n} p_{ks} r^s$$

onde

$$p_{ks} = \begin{cases} \sum_{p=1}^{s-1} f_{kp} f_{k(s-p)}, & \text{para } 2 \leq s \leq n+1; \\ \sum_{k=0}^{n-p} f_{k(p+k)} f_{k(n-k)}, & \text{para } s = n+p, p > 1 \end{cases}$$

$$\text{c) } F_l = \sum_{s=2}^{2n} p_{ls} r^s$$

onde

$$p_{ls} = \begin{cases} \sum_{p=1}^{s-1} f_{lp} f_{l(s-p)}, & \text{para } 2 \leq s \leq n+1; \\ \sum_{k=0}^{n-p} f_{l(p+k)} f_{l(n-k)}, & \text{para } s = n+p, p > 1 \end{cases}$$

$$d) \quad F_{li} = \sum_{s=2}^{2n} p_{lis} r^s$$

onde

$$p_{lis} = \begin{cases} \sum_{p=1}^{s-1} f_{lip} f_{li(s-p)}, & \text{para } 2 \leq s \leq n+1; \\ \sum_{k=0}^{n-p} f_{li(p+k)} f_{li(n-k)}, & \text{para } s = n+p, p > 1 \end{cases}$$

$$e) \quad F_{lj} = \sum_{s=2}^{2n} p_{ljs} r^s$$

onde

$$p_{ljs} = \begin{cases} \sum_{p=1}^{s-1} f_{ljp} f_{lj(s-p)}, & \text{para } 2 \leq s \leq n+1; \\ \sum_{k=0}^{n-p} f_{lj(p+k)} f_{lj(n-k)}, & \text{para } s = n+p, p > 1 \end{cases}$$

$$f) \quad F_{lk} = \sum_{s=2}^{2n} p_{lks} r^s$$

onde

$$p_{lks} = \begin{cases} \sum_{p=1}^{s-1} f_{lkp} f_{lk(s-p)}, & \text{para } 2 \leq s \leq n+1; \\ \sum_{k=0}^{n-p} f_{lk(p+k)} f_{lk(n-k)}, & \text{para } s = n+p, p > 1 \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned} & F^2 + F_i^2 + F_j^2 + F_k^2 + F_l^2 + F_{li}^2 + F_{lj}^2 + F_{lk}^2 = \\ & \sum_{s=2}^{2n} p_s r^s + \sum_{s=2}^{2n} p_{is} r^s + \sum_{s=2}^{2n} p_{js} r^s + \sum_{s=2}^{2n} p_{ks} r^s + \sum_{s=2}^{2n} p_{ls} r^s + \sum_{s=2}^{2n} p_{lis} r^s + \sum_{s=2}^{2n} p_{ljs} r^s + \sum_{s=2}^{2n} p_{lks} r^s = \\ & \sum_{s=2}^{2n} (p_s + p_{is} + p_{js} + p_{ks} + p_{ls} + p_{lis} + p_{ljs} + p_{lks}) r^s = \sum_{s=2}^{2n} P_s^{(n)} r^s \end{aligned}$$

Portanto

$$|f(y) - f(x)| = \sqrt{\sum_{s=2}^{2n} P_s^{(n)} r^s} \quad (2.12)$$

2.4 Calculando a dilatação

Exemplo 1: Calculando a dilatação na hipersfera 8-dimensional causada pela transformação *quaseconforme* $f(z) = z^2$, onde $z \in \mathbb{O}$.

Seja $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)$ o centro da hipersfera 8-dimensional de raio r e $y = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8)$ um ponto em sua fronteira.

Sabemos que o fator de expansão será $P_2^{(2)}$.

$$\begin{aligned} |f(y) - f(x)| &= \sqrt{\sum_{s=2}^{2n} P_s^{(n)} r^s} = \\ &= \sqrt{F^2 + F_i^2 + F_j^2 + F_k^2 + F_l^2 + F_{li}^2 + F_{lj}^2 + F_{lk}^2} \end{aligned}$$

Como $n = 2$, temos

$$P_2^{(2)} = p_2 + p_{i2} + p_{j2} + p_{k2} + p_{l2} + p_{li2} + p_{lj2} + p_{lk2}$$

e

$$p_2 = f_1 f_1 = f_1^2, p_{i2} = f_{i1}^2, p_{j2} = f_{j1}^2, p_{k2} = f_{k1}^2,$$

$$p_{l2} = f_{l1}^2, p_{li2} = f_{li1}^2, p_{lj2} = f_{lj1}^2 \text{ e } p_{lk2} = f_{lk1}^2$$

Por isso

$$\begin{aligned} P_2^{(2)} &= f_1^2 + f_{i1}^2 + f_{j1}^2 + f_{k1}^2 + f_{l1}^2 + \\ &\quad f_{li1}^2 + f_{lj1}^2 + f_{lk1}^2 \end{aligned}$$

Temos

$$f_t = \sum_{k=0}^{2k \leq n} f_{(2k,t)} \implies f_1 = f_{(0,1)} + f_{(2,1)},$$

$$f_{it} = \sum_{k=0}^{2k+1 \leq n} f_{i(2k,t)} \implies f_{i1} = f_{i(0,1)},$$

$$f_{jt} = \sum_{k=0}^{2k+1 \leq n} f_{j(2k,t)} \implies f_{j1} = f_{j(0,1)},$$

$$f_{kt} = \sum_{k=0}^{2k+1 \leq n} f_{k(2k,t)} \implies f_{k1} = f_{k(0,1)},$$

$$f_{lt} = \sum_{k=0}^{2k+1 \leq n} f_{l(2k,t)} \implies f_{l1} = f_{l(0,1)},$$

$$f_{lit} = \sum_{k=0}^{2k+1 \leq n} f_{li(2k,t)} \implies f_{li1} = f_{li(0,1)},$$

$$f_{ljt} = \sum_{k=0}^{2k+1 \leq n} f_{lj(2k,t)} \implies f_{lj1} = f_{lj(0,1)},$$

$$f_{lkt} = \sum_{k=0}^{2k+1 \leq n} f_{lk(2k,t)} \implies f_{lk1} = f_{lk(0,1)},$$

Dada a fórmula

$$f_{(2k,t)} = \binom{n}{2k} \left[\sum_{p=0}^t \binom{n-2k}{p} x_1^{n-2k-p} c^p f_{m+q=t-p} \right],$$

calculemos $f_1 = f_{(0,1)} + f_{(2,1)}$. Então,

$$f_{(0,1)} = \binom{2}{0} \left[\sum_{p=0}^1 \binom{2}{p} x_1^{2-p} c^p f_{m+q=1-p} \right] = 2x_1c,$$

e

$$f_{(2,1)} = \binom{2}{2} \left[\sum_{p=0}^1 \binom{0}{p} x_1^{-p} c^p f_{m+q=1-p} \right] = -2 \mathbb{I},$$

Por isso

$$f_1 = 2x_1c - 2 \mathbb{I}$$

Agora, lembramos que

$$\begin{aligned} f_{i(2k,t)} &= \binom{n}{2k+1} \left[x_2 \sum_{p=0}^t \binom{n-(2k+1)}{p} x_1^{n-(2k+1)-p} c^p f_{m+q=t-p} + \right. \\ &\quad \left. + \left[c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 c_6 s_7 \sum_{p=0}^{t-1} \binom{n-(2k+1)}{p} x_1^{n-(2k-1)-p} c^p f_{m+q=t-p-1} \right] \right], \end{aligned}$$

por isso,

$$f_{i(0,1)} = \binom{2}{1} \left[x_2 \sum_{p=0}^1 \binom{1}{p} x_1^{1-p} c^p f_{m+q=1-p} + c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 c_6 s_7 \binom{1}{0} x_1^1 c^0 f_{m+q=0} \right]$$

Logo

$$f_{i(0,1)} = 2(x_1c_1c_2c_3c_4c_5c_6s_7 + x_2c)$$

De maneira análoga, encontramos

$$f_{j(0,1)} = 2(x_1c_1c_2c_3c_4c_5s_6 + x_3c),$$

$$f_{k(0,1)} = 2(x_1c_1c_2c_3c_4s_5 + x_4c),$$

$$f_{l(0,1)} = 2(x_1c_1c_2c_3s_4 + x_5c),$$

$$f_{li(0,1)} = 2(x_1c_1c_2s_3 + x_6c),$$

$$f_{lj(0,1)} = 2(x_1c_1s_2 + x_7c)$$

e

$$f_{lk(0,1)} = 2(x_1s_1 + x_8c)$$

Como

$$P_2^{(2)} = f_1^2 + f_{i1}^2 + f_{j1}^2 + f_{k1}^2 + f_{l1}^2 + f_{li1}^2 + f_{lj1}^2 + f_{lk1}^2$$

temos

$$P_2^{(2)} = [2x_1c - 2\prod]^2 + [2(x_1c_1c_2c_3c_4c_5c_6s_7 + x_2c)]^2 + [2(x_1c_1c_2c_3c_4c_5s_6 + x_3c)]^2 + [2(x_1c_1c_2c_3c_4s_5 + x_4c)]^2 + [2(x_1c_1c_2c_3s_4 + x_5c)]^2 + [2(x_1c_1c_2s_3 + x_6c)]^2 + [2(x_1c_1s_2 + x_7c)]^2 + [2(x_1s_1 + x_8c)]^2$$

Agora, lembrando que a dilatação é dada por

$$H(x) = \sqrt{\frac{\max P_2}{\min P_2}},$$

segue a tabela com a dilatação $H(x)$ para diferentes centros da hipersfera

$x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)$	$Max(P_2^{(2)})$	$Min(P_2^{(2)})$	$H(x)$
$x = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$	32	4	$2\sqrt{2}$
$x = (12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12)$	4608	576	$2\sqrt{2}$
$x = (1, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0)$	16	4	2
$x = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$	4	4	1

Com o resultado da primeira e segunda linha, vemos que a translação não causou alteração no valor da dilatação. Com a quarta linha, vemos que a função $f(z) = z^2$ é *conforme* para os reais.

Obs: Para encontrar o máximo e o mínimo de $P_2^{(2)}$, foi utilizado o software *Mathematica 5.2*. Os comandos necessários são "NMaximize" e "NMinimize".

Exemplo 2: Calcular a dilatação na hipersfera 8-dimensional causada pela transformação *quaseconforme* $f(z) = z^3$, onde $z \in \mathbb{O}$.

Sabemos que

$$|f(y) - f(x)| = \sqrt{\sum_{s=2}^6 P_s^{(3)} r^s} =$$

$$= \sqrt{P_2^{(3)} r^2 + P_3^{(3)} r^3 + P_4^{(3)} r^4 + P_5^{(3)} r^5 + P_6^{(3)} r^6}$$

Precisamos encontrar $P_2^{(3)}$. Logo

$$P_2^{(3)} = p_2 + p_{i2} + p_{j2} + p_{k2} + p_{l2} + p_{li2} + p_{lj2} + p_{lk}$$

e

$$p_2 = f_1 f_1 = f_1^2, p_{i2} = f_{i1}^2, p_{j2} = f_{j1}^2, p_{k2} = f_{k1}^2,$$

$$p_{l2} = f_{l1}^2, p_{li2} = f_{li1}^2, p_{lj2} = f_{lj1}^2 \text{ e } p_{lk2} = f_{lk1}^2$$

Por isso

$$P_2^{(3)} = f_1^2 + f_{i1}^2 + f_{j1}^2 + f_{k1}^2 + f_{l1}^2 +$$

$$f_{li1}^2 + f_{lj1}^2 + f_{lk1}^2$$

Temos

$$f_t = \sum_{k=0}^{2k \leq n} f_{(2k,t)} \implies f_1 = f_{(0,1)} + f_{(2,1)},$$

$$f_{it} = \sum_{k=0}^{2k+1 \leq n} f_{i(2k,t)} \implies f_{i1} = f_{i(0,1)} + f_{i(2,1)},$$

$$f_{jt} = \sum_{k=0}^{2k+1 \leq n} f_{j(2k,t)} \implies f_{j1} = f_{j(0,1)} + f_{j(2,1)},$$

$$f_{kt} = \sum_{k=0}^{2k+1 \leq n} f_{k(2k,t)} \implies f_{k1} = f_{k(0,1)} + f_{k(2,1)},$$

$$f_{lt} = \sum_{k=0}^{2k+1 \leq n} f_{l(2k,t)} \implies f_{l1} = f_{l(0,1)} + f_{l(2,1)},$$

$$f_{lit} = \sum_{k=0}^{2k+1 \leq n} f_{li(2k,t)} \implies f_{li1} = f_{li(0,1)} + f_{li(2,1)},$$

$$f_{ljt} = \sum_{k=0}^{2k+1 \leq n} f_{lj(2k,t)} \implies f_{lj1} = f_{lj(0,1)} + f_{lj(2,1)},$$

$$f_{lkt} = \sum_{k=0}^{2k+1 \leq n} f_{lk(2k,t)} \implies f_{lk1} = f_{lk(0,1)} + f_{lk(2,1)},$$

Dada a fórmula

$$f_{(2k,t)} = \binom{n}{2k} \left[\sum_{p=0}^t \binom{n-2k}{p} x_1^{n-2k-p} c^p f_{m+q=t-p} \right],$$

calculemos $f_1 = f_{(0,1)} + f_{(2,1)}$.

$$f_{(0,1)} = \binom{3}{0} \left[\sum_{p=0}^1 \binom{3}{p} x_1^{3-p} c^p f_{m+q=1-p} \right] = \left[\binom{3}{0} x_1^3 c^0 f_{m+q=1} + \binom{3}{1} x_1^2 c^1 f_{m+q=0} \right] = 3x_1 c$$

$$f_{(2,1)} = \binom{3}{2} \left[\sum_{p=0}^1 \binom{1}{p} x_1^{1-p} c^p f_{m+q=1-p} \right] = 3 \left[\binom{1}{0} x_1^1 c^0 f_{m+q=1} + \binom{1}{1} x_1^0 c^1 f_{m+q=0} \right] =$$

$$3 \left[x_1 \binom{1}{1} \binom{1}{0} (h_x)^0 (-2 \mathbf{\Pi})^1 (s^2)^0 + c \binom{1}{0} (h_x^2)^1 \right] = 3h_x^2 c - 6x_1 \mathbf{\Pi}$$

Portanto

$$f_1 = 3x_1^2 c + 3h_x^2 c - 6x_1 \mathbf{\Pi}$$

Agora, lembramos que

$$f_{i(2k,t)} = \binom{n}{2k+1} \left[x_2 \sum_{p=0}^t \binom{n-(2k+1)}{p} x_1^{n-(2k+1)-p} c^p f_{m+q=t-p} + \right. \\ \left. + \left[c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 c_6 s_7 \sum_{p=0}^{t-1} \binom{n-(2k+1)}{p} x_1^{n-(2k+1)-p} c^p f_{m+q=t-p-1} \right] \right],$$

Então

$$f_{i(0,1)} = \binom{3}{1} \left[x_2 \sum_{p=0}^1 \binom{2}{p} x_1^{2-p} c^p f_{m+q=1-p} + c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 c_6 s_7 \binom{2}{0} x_1^2 c^0 f_{m+q=0} \right] = \\ 3x_2 \left[\binom{2}{0} x_1^2 f_{m+q=1} + \binom{2}{1} x_1^1 c^1 f_{m+q=0} \right] + x_1^2 c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 c_6 s_7 = \\ 3x_2 [0 + 2x_1 c] + x_1^2 c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 c_6 s_7$$

Logo

$$f_{i(0,1)} = 6x_1 x_2 c + 3x_1^2 c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 c_6 s_7$$

Agora

$$f_{i(2,1)} = \binom{3}{3} \left[x_2 \sum_{p=0}^1 \binom{0}{p} x_1^{-p} c^p f_{m+q=1-p} + c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 c_6 s_7 \sum_{p=0}^0 \binom{0}{p} x_1^{-p} c^p f_{m+q=-p} \right] = \\ = x_2 [f_{m+q=1}] + c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 c_6 s_7 f_{m+q=0} = \\ \left\{ x_2 \left[\binom{1}{1} \binom{1}{0} (h_x^2)^0 (-2 \prod)^1 \right] + c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 c_6 s_7 (h_x^2)^1 \right\} = -2x_2 \prod + h_x^2 c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 c_6 s_7$$

Por fim

$$f_{i1} = (3x_1^2 + h_x^2) c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 c_6 s_7 + 2x_2 (3x_1 c - \prod)$$

E, de maneira análoga, temos

$$f_{j1} = (3x_1^2 + h_x^2) c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 s_6 + 2x_3 (3x_1 c - \prod),$$

$$f_{k1} = (3x_1^2 + h_x^2) c_1 c_2 c_3 c_4 s_5 + 2x_4 (3x_1 c - \prod),$$

$$f_{l1} = (3x_1^2 + h_x^2) c_1 c_2 c_3 s_4 + 2x_5 (3x_1 c - \prod),$$

$$f_{i1} = (3x_1^2 + h_x^2) c_1 c_2 s_3 + 2x_6 (3x_1 c - \prod),$$

$$f_{lj1} = (3x_1^2 + h_x^2)c_1s_2 + 2x_7(3x_1c - \prod)$$

e

$$f_{lk1} = (3x_1^2 + h_x^2)s_1 + 2x_8(3x_1c - \prod)$$

Como

$$P_2^{(3)} = f_1^2 + f_{i1}^2 + f_{j1}^2 + f_{k1}^2 + f_{l1}^2 + f_{li1}^2 + f_{lj1}^2 + f_{lk1}^2$$

temos

$$\begin{aligned} P_2^{(3)} &= [3x_1^2c + 3h_x^2c - 6x_1\prod]^2 + [(3x_1^2 + h_x^2)c_1c_2c_3c_4c_5c_6s_7 + 2x_2(3x_1c - \prod)]^2 + \\ &+ [(3x_1^2 + h_x^2)c_1c_2c_3c_4c_5s_6 + 2x_3(3x_1c - \prod)]^2 + [(3x_1^2 + h_x^2)c_1c_2c_3c_4s_5 + 2x_4(3x_1c - \prod)]^2 \\ &+ [(3x_1^2 + h_x^2)c_1c_2c_3s_4 + 2x_5(3x_1c - \prod)]^2 + [(3x_1^2 + h_x^2)c_1c_2s_3 + 2x_6(3x_1c - \prod)]^2 \\ &+ [(3x_1^2 + h_x^2)c_1s_2 + 2x_7(3x_1c - \prod)]^2 + [(3x_1^2 + h_x^2)s_1 + 2x_8(3x_1c - \prod)]^2 \end{aligned}$$

Agora, sabendo que a dilatação será dada por

$$H(x) = \sqrt{\frac{\max P_2^{(3)}}{\min P_2^{(3)}}}$$

temos

$x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)$	$Max(P_2^{(3)})$	$Min(P_2^{(3)})$	$H(x)$
$x = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$	$1, 19.10^7$	331776	6
$x = (12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12)$	576	16	6
$x = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$	9	9	1
$x = (0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$	441	49	3

Exemplo 3: Calcular a dilatação na hipersfera 8-dimensional causada pela transformação *quaseconforme* $f(z) = z^4$, onde $z \in \mathbb{O}$.

Seguindo os mesmos passos dos dois exemplos anteriores, concluímos que o termo $P_2^{(4)}$ do nosso polinômio será:

$$\begin{aligned}
P_2^{(4)} &= [4(x_1^3 c - 3x_1^2 \prod + 3x_1 h_x^2 c - h_x^2 \prod)]^2 + \\
&(4(x_1^3 c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 c_6 s_7 + 3x_1^2 x_2 c + (h_x^2 c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 c_6 s_7 - 2x_2 \prod)x_1 + x_2 h_x^2 c))^2 + \\
&(4(x_1^3 c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 s_6 + 3x_1^2 x_3 c + (h_x^2 c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 s_6 - 2x_3 \prod)x_1 + x_3 h_x^2 c))^2 + \\
&(4(x_1^3 c_1 c_2 c_3 c_4 s_5 + 3x_1^2 x_4 c + (h_x^2 c_1 c_2 c_3 c_4 s_5 - 2x_4 \prod)x_1 + x_4 h_x^2 c))^2 + \\
&(4(x_1^3 c_1 c_2 c_3 s_4 + 3x_1^2 x_5 c + (h_x^2 c_1 c_2 c_3 s_4 - 2x_5 \prod)x_1 + x_5 h_x^2 c))^2 + \\
&(4(x_1^3 c_1 c_2 s_3 + 3x_1^2 x_6 c + (h_x^2 c_1 c_2 s_3 - 2x_6 \prod)x_1 + x_6 h_x^2 c))^2 + \\
&(4(x_1^3 c_1 s_2 + 3x_1^2 x_7 c + (h_x^2 c_1 s_2 - 2x_7 \prod)x_1 + x_7 h_x^2 c))^2 + \\
&(4(x_1^3 s_1 + 3x_1^2 x_8 c + (h_x^2 s_1 - 2x_8 \prod)x_1 + x_8 h_x^2 c))^2
\end{aligned}$$

Agora, sabendo que a dilatação será dada por

$$H(x) = \sqrt{\frac{\max P_2^{(4)}}{\min P_2^{(4)}}}$$

temos

$x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)$	$Max(P_2^{(4)})$	$Min(P_2^{(4)})$	$H(x)$
$x = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$	8192	576	3.77124
$x = (12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12)$	$1, 28 \cdot 10^8$	$9, 0 \cdot 10^6$	3.77124
$x = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$	16	16	1
$x = (1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0)$	1024	64	4

2.5 Método computacional para o cálculo da dilatação

2.5.1 Introdução

Como vimos, o cálculo da dilatação requer o uso de um grande número de fórmulas. Conforme aumentamos o valor de n em $f(z) = z^n$, os cálculos ficam ainda mais extensos. Logo, o cálculo manual é bastante demorado e ainda está sujeito a erros. Por isso, buscamos o uso de computadores, que garantem um resultado confiável em tempo reduzido.

2.5.2 Algoritmo

Tendo mostrado que o desenvolvimento de $|f(x) - f(y)|$ resulta em um polinômio em r , podemos adotar um método mais simples para calcular a dilatação. Sabendo que todos os termos de $|f(x) - f(y)|$ estarão multiplicados por r^s , com $s = 2, 3, \dots, n$, e que, o fator de expansão é dado pelos termos multiplicados por r^2 , seguiremos o seguinte método para o cálculo da dilatação k .

1. Desenvolver $f(y) = y^n$, com y escrito em coordenadas esféricas;
2. Desenvolver $f(x) = x^n$;
3. Calcular a diferença $f(y) - f(x)$
4. Calcular a norma do resultado anterior, ou seja, $|f(y) - f(x)|$. No entanto, não extraímos a raiz ainda;
5. Expandir o polinômio resultante;
6. Dividir o resultado anterior por r^2 , tornando somente o fator de expansão constante (independente de r);
7. Fazer $r = 0$, eliminando toda parte do polinômio que não influencia na dilatação;
8. Calcular o máximo e o mínimo do resultado, em função de t_1, t_2, \dots, t_7 ;
9. Extrair a raiz do máximo sobre o mínimo.

2.5.3 Implementação computacional do método

Para desenvolver o método computacional descrito, foi desenvolvida uma interface em Java, que utiliza o software Mathematica para resolver operações matemáticas.

Podemos destacar as seguintes vantagens do método computacional e do uso da interface:

1. A implementação computacional do método descrito acima é mais simples do que a implementação das fórmulas deduzidas para o cálculo da dilatação;
2. Esse método computacional é mais rápido;

3. A interface permite que uma pessoa sem conhecimentos avançados do software Mathematica calcule a dilatação e produza cortes no \mathbb{R}^3 ;

Os passos do algoritmo serão todos desenvolvidos pelo Mathematica, no entanto, o usuário não perceberá esse processo, já que a entrada e saída de dados será feita na interface. Por isso, podemos discutir a implementação do método computacional na linguagem do Mathematica, e posteriormente, mostrar o desenvolvimento da interface em Java.

1º Passo: Desenvolvimento de $f(y) = y^n$

Para calcular $f(y) = y^n$, basta multiplicarmos y n -vezes seguidas

```
a3=y1; b3=y2; c3=y3; d3=y4; e3=y5; f3=y6; g3=y7; h3=y8; a1=a3;
b1=b3; c1=c3; d1=d3; e1=e3; f1=f3; g1=g3; h1=h3;

For [i=1 , i< n , i++;
var1=a3*a1-b3*b1-c3*c1-d3*d1-e3*e1-f3*f1-g3*g1-h3*h1;
var2=a3*b1+b3*a1+c3*d1-d3*c1-e3*f1+f3*e1-g3*h1+h3*g1;
var3=a3*c1-b3*d1+c3*a1+d3*b1-e3*g1+f3*h1+g3*e1-h3*f1;
var4=a3*d1+b3*c1-c3*b1+d3*a1-e3*h1-f3*g1+g3*f1+h3*e1;
var5=a3*e1+b3*f1+c3*g1+d3*h1+e3*a1-f3*b1-g3*c1-h3*d1;
var6=a3*f1-b3*e1-c3*h1+d3*g1+e3*b1+f3*a1-g3*d1+h3*c1;
var7=a3*g1+b3*h1-c3*e1-d3*f1+e3*c1+f3*d1+g3*a1-h3*b1;
var8=a3*h1-b3*g1+c3*f1-d3*e1+e3*d1-f3*c1+g3*b1+h3*a1;

a3=var1; b3=var2; c3=var3; d3=var4; e3=var5; f3=var6; g3=var7; h3=var8;
];
```

Agora, basta substituir os valores de $y = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8)$ em coordenadas esféricas:

$$\begin{aligned}
y_1 &= a + r * \text{Cos}[t1] * \text{Cos}[t2] * \text{Cos}[t3] * \text{Cos}[t4] * \text{Cos}[t5] * \text{Cos}[t6] * \text{Cos}[t7]; \\
y_2 &= b + r * \text{Cos}[t1] * \text{Cos}[t2] * \text{Cos}[t3] * \text{Cos}[t4] * \text{Cos}[t5] * \text{Cos}[t6] * \text{Sin}[t7]; \\
y_3 &= c + r * \text{Cos}[t1] * \text{Cos}[t2] * \text{Cos}[t3] * \text{Cos}[t4] * \text{Cos}[t5] * \text{Sin}[t6]; \\
y_4 &= d + r * \text{Cos}[t1] * \text{Cos}[t2] * \text{Cos}[t3] * \text{Cos}[t4] * \text{Sin}[t5]; \\
y_5 &= e + r * \text{Cos}[t1] * \text{Cos}[t2] * \text{Cos}[t3] * \text{Sin}[t4]; \\
y_6 &= f + r * \text{Cos}[t1] * \text{Cos}[t2] * \text{Sin}[t3]; \\
y_7 &= g + r * \text{Cos}[t1] * \text{Sin}[t2]; \\
y_8 &= h + r * \text{Sin}[t1];
\end{aligned}$$

2º Passo: Desenvolvimento de $f(x) = x^n$

a3=a; b3=b; c3=c; d3=d; e3=e; f3=f; g3=g; h3=h; a1=a3; b1=b3;
c1=c3; d1=d3; e1=e3; f1=f3; g1=g3; h1=h3;

For [i=1 , i< n , i++;

cen1=a3*a1-b3*b1-c3*c1-d3*d1-e3*e1-f3*f1-g3*g1-h3*h1;

cen2=a3*b1+b3*a1+c3*d1-d3*c1-e3*f1+f3*e1-g3*h1+h3*g1;

cen3=a3*c1-b3*d1+c3*a1+d3*b1-e3*g1+f3*h1+g3*e1-h3*f1;

cen4=a3*d1+b3*c1-c3*b1+d3*a1-e3*h1-f3*g1+g3*f1+h3*e1;

cen5=a3*e1+b3*f1+c3*g1+d3*h1+e3*a1-f3*b1-g3*c1-h3*d1;

cen6=a3*f1-b3*e1-c3*h1+d3*g1+e3*b1+f3*a1-g3*d1+h3*c1;

cen7=a3*g1+b3*h1-c3*e1-d3*f1+e3*c1+f3*d1+g3*a1-h3*b1;

cen8=a3*h1-b3*g1+c3*f1-d3*e1+e3*d1-f3*c1+g3*b1+h3*a1;

a3=cen1; b3=cen2; c3=cen3; d3=cen4; e3=cen5; f3=cen6; g3=cen7; h3=cen8;

];

3º Passo: Calcular a diferença $f(y) - f(x)$

$$\begin{aligned}
\text{dif1} &= \text{var1} - \text{cen1}; \text{dif2} = \text{var2} - \text{cen2}; \text{dif3} = \text{var3} - \text{cen3}; \text{dif4} = \text{var4} - \text{cen4}; \\
\text{dif5} &= \text{var5} - \text{cen5}; \text{dif6} = \text{var6} - \text{cen6}; \text{dif7} = \text{var7} - \text{cen7}; \text{dif8} = \text{var8} - \text{cen8};
\end{aligned}$$

Agora, o octônio (dif1,dif2,...,dif8) contém o resultado de $f(y) - f(x)$

4º Passo: Calculando $|f(y) - f(x)|$, sem extrair a raiz

```
p1=dif12; p2=dif22; p3=dif32; p4=dif42;
p5=dif52; p6=dif62; p7=dif72; p8=dif82;
raizp = p1 + p2 + p3 + p4 + p5 + p6 + p7 + p8;
```

Temos agora $\sqrt{raizp} = |f(y) - f(x)|$

5º Passo: Pegar os elementos multiplicados por r^2

```
temp=ExpandAll[raizp];   Expandimos o polinômio
temp1=temp/r2;         Dividimos por r2
temp2=ExpandAll[temp1];  Expandimos o resultado
r=0;                     Anulamos o raio, para manter somente o fator de expansão
final=temp2;
```

Atribuimos à variável *final* os termos denominados anteriormente por P_2 .

6º Passo: Calcular a máximo e o mínimo e encontrar o valor de k

```
maior=NMaximize[{final, -Pi/2 < t1 < Pi/2 && -Pi/2 < t2 < Pi/2 && -Pi/2 < t3 < Pi/2
&& -Pi/2 < t4 < Pi/2 && -Pi/2 < t5 < Pi/2 && -Pi/2 < t6 < Pi/2 && 0 < t7 < 2 * Pi},
{t1,t2,t3,t4,t5,t6,t7}];

menor=NMinimize[{final, -Pi/2 < t1 < Pi/2 && -Pi/2 < t2 < Pi/2 && -Pi/2 < t3 < Pi/2
&& -Pi/2 < t4 < Pi/2 && -Pi/2 < t5 < Pi/2 && -Pi/2 < t6 < Pi/2 && 0 < t7 < 2 * Pi},
{t1,t2,t3,t4,t5,t6,t7}];

k=Sqrt[maior/menor];
```

2.5.4 Interface

O funcionamento da interface baseia-se no envio de informações para o software Mathematica e no recebimento de respostas para as operações requisitadas. Segue como exemplo, a implementação em Java de uma operação simples para ilustrar o funcionamento da interface:

- A interface cria uma conexão com o Mathematica;
- Envia-se uma operação matemática;
- O Mathematica resolve a operação e envia o resultado para interface;
- Interface imprime na tela o resultado

```
KernelLink ml = null;
String[] argv1 = { "-linkmode", "launch", "-linkname",
" c:/program files/wolfram research//mathematica//5.2//mathkernel.exe" };
try {
ml = MathLinkFactory.createKernelLink(argv1);
} catch (MathLinkException e) {
System.out.println("Erro criando conexão: " + e.getMessage());
return;
}

ml.evaluate("2+2");
ml.waitForAnswer();
int resultado = ml.getInteger();
System.out.println("2 + 2 = " + resultado);
```

2.5.5 Testes

Veremos o funcionamento da interface e os resultados gerados por ela. Também será útil comparar seus resultados com aqueles obtidos anteriormente por meio das fórmulas.

Exemplo: Calculando a dilatação para $f(z) = z^2$ e centro $x = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$

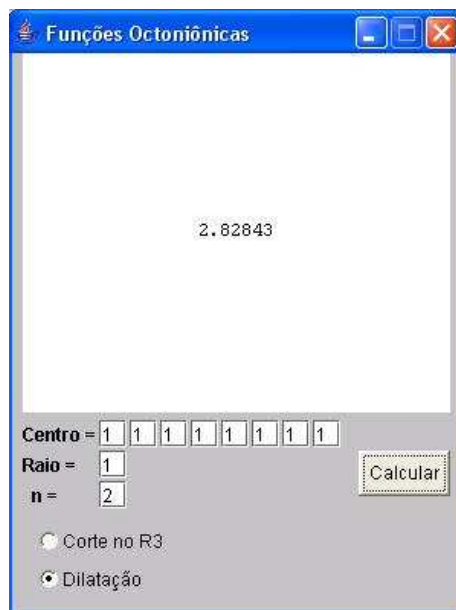


Figura 4: Exemplo da Interface

Segue uma tabela com os valores obtidos pelo método computacional. Tais resultados coincidem com aqueles obtidos anteriormente.

Tabela da dilatação para $n = 2$

$x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)$	$H(x)$
$x = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$	2.82843
$x = (12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12)$	2.82843
$x = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$	1
$x = (1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0)$	2

$x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)$	$H(x)$
$x = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$	6
$x = (12, 12, 12, 12, 12, 12, 12, 12)$	6
$x = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$	1
$x = (1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0)$	$3, 35 \cdot 10^{12}$

Tabela da dilatação para $n = 3$

$x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)$	$H(x)$
$x = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$	3.77124
$x = (4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4)$	3.77124
$x = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$	1
$x = (1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0)$	4

Tabela da dilatação para $n = 4$

3 Análise Gráfica

Neste tópico, utilizaremos ferramentas gráficas para visualizar e discutir as consequências da dilatação.

3.1 Mapeamento do \mathbb{R}^8 para o \mathbb{R}^3

Como não é possível visualizarmos a dilatação numa hipersfera 8-dimensional, temos de fazer um mapeamento para o \mathbb{R}^3 .

Para que fique claro como funciona esse procedimento, basta trabalharmos com um exemplo no \mathbb{R}^3 . Seja a esfera $B(y_1, y_2, y_3)$ definida por:

$$\begin{cases} y_1 = r \cos(t_1) \cos(t_2) & -\frac{\pi}{2} \leq t_1 \leq \frac{\pi}{2} \\ y_2 = r \cos(t_1) \sin(t_2) & 0 \leq t_2 \leq 2\pi \\ y_3 = r \sin(t_1) \end{cases}$$

Fazendo $t_1 = 0$, anula-se a terceira coordenada e resulta uma projeção da esfera no \mathbb{R}^2 dada por $B(y_1, y_2)$

$$\begin{cases} y_1 = r \cos(t_2) & 0 \leq t_2 \leq 2\pi \\ y_2 = r \sin(t_2) \end{cases}$$

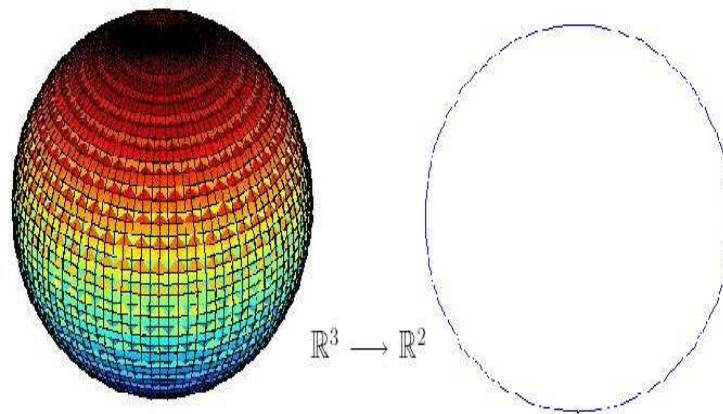


Figura 5: Mapeamento do R^3 para R^2

O mesmo esquema deve ser feito para obtermos uma projeção do \mathbb{R}^8 para o \mathbb{R}^3 .

Seja então a bola $B(x, r)$ 8-dimensional com centro $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8)$ e raio $r = |y - x|$ onde $y = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6, y_7, y_8)$ é um ponto na hipersuperfície da bola.

Podemos escrever então

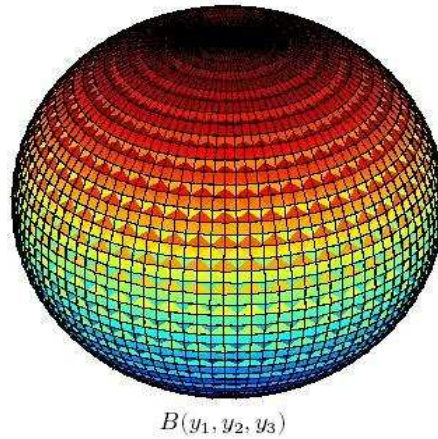
$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = x_1 + r \cos(t_1) \cos(t_2) \cos(t_3) \cos(t_4) \cos(t_5) \cos(t_6) \cos(t_7) \\ y_2 = x_2 + r \cos(t_1) \cos(t_2) \cos(t_3) \cos(t_4) \cos(t_5) \cos(t_6) \sin(t_7) \\ y_3 = x_3 + r \cos(t_1) \cos(t_2) \cos(t_3) \cos(t_4) \cos(t_5) \sin(t_6) \\ y_4 = x_4 + r \cos(t_1) \cos(t_2) \cos(t_3) \cos(t_4) \sin(t_5) \\ y_5 = x_5 + r \cos(t_1) \cos(t_2) \cos(t_3) \sin(t_4) \\ y_6 = x_6 + r \cos(t_1) \cos(t_2) \sin(t_3) \\ y_7 = x_7 + r \cos(t_1) \sin(t_2) \\ y_8 = x_8 + r \sin(t_1) \end{array} \right.$$

Fazendo $t_1 = t_2 = t_3 = t_4 = t_5 = 0$ e $x_4 = x_5 = x_6 = x_7 = x_8 = 0$ obtemos uma projeção do \mathbb{R}^8 no \mathbb{R}^3 :

$$B(y_1, y_2, y_3) : \left\{ \begin{array}{l} y_1 = x_1 + r \cos(t_6) \cos(t_7) \\ y_2 = x_2 + r \cos(t_6) \sin(t_7) \\ y_3 = x_3 + r \sin(t_6) \end{array} \right.$$

É interessante observar que a projeção da hipersfera 8-dimensional no \mathbb{R}^3 é exatamente uma esfera. No entanto, nosso objetivo é visualizar as consequências da dilatação. Para isso, devemos submeter a bola $B(x, r)$ 8-dimensional a uma transformação *quaseconforme*. No caso do nosso estudo, essa transformação será dada por alguma $f(z) = z^n$.

Com isso, devemos esperar que nossa projeção no \mathbb{R}^3 passe a ser uma esfera distorcida.

Figura 6: Projeção do R^8 para R^3

3.2 Mapeamento para $f(z) = z^2$

Seja $z \in \mathbb{O}$ um ponto na hipersuperfície da bola $B(x, r)$, com $x = (a, b, c, d, e, f, g, h)$. Temos:

$$f(z) = z^2 = (y_1 + iy_2 + jy_3 + ky_4 + ly_5 + liy_6 + l jy_7 + lky_8)^2$$

e então obtemos

$$B'(x, r) : \begin{cases} y'_1 = y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 - y_4^2 - y_5^2 - y_6^2 - y_7^2 - y_8^2 \\ y'_2 = 2y_1y_2 \\ y'_3 = 2y_1y_3 \\ y'_4 = 2y_1y_4 \\ y'_5 = 2y_1y_5 \\ y'_6 = 2y_1y_6 \\ y'_7 = 2y_1y_7 \\ y'_8 = 2y_1y_8 \end{cases}$$

Substituindo pela forma parametrizada, segue uma hipersfera 8-dimensional dilatada, devido à transformação *quaseconforme* $f(z) = z^2$.

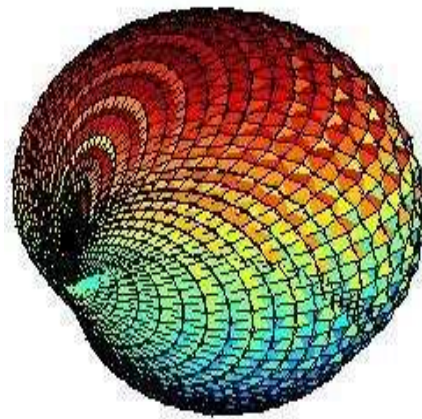
$$\left\{ \begin{array}{l} y'_1 = (a + r\cos(t_1)\cos(t_2)\cos(t_3)\cos(t_4)\cos(t_5)\cos(t_6)\cos(t_7))^2 - (b + r\cos(t_1) \\ \cos(t_2)\cos(t_3)\cos(t_4)\cos(t_5)\cos(t_6)\sin(t_7))^2 - (c + r\cos(t_1)\cos(t_2)\cos(t_3) \\ \cos(t_4)\cos(t_5)\sin(t_6))^2 - (d + r\cos(t_1)\cos(t_2)\cos(t_3)\cos(t_4)\sin(t_5))^2 - \\ (e + r\cos(t_1)\cos(t_2)\cos(t_3)\sin(t_4))^2 - (f + r\cos(t_1)\cos(t_2)\sin(t_3))^2 - \\ (g + r\cos(t_1)\sin(t_2))^2 - (h + r\sin(t_1))^2 \\ y'_2 = 2(a + r\cos(t_1)\cos(t_2)\cos(t_3)\cos(t_4)\cos(t_5)\cos(t_6)\cos(t_7))(b + \\ r\cos(t_1)\cos(t_2)\cos(t_3)\cos(t_4)\cos(t_5)\cos(t_6)\sin(t_7)) \\ y'_3 = 2(a + r\cos(t_1)\cos(t_2)\cos(t_3)\cos(t_4)\cos(t_5)\cos(t_6)\cos(t_7))(c + \\ r\cos(t_1)\cos(t_2)\cos(t_3)\cos(t_4)\cos(t_5)\sin(t_6)) \\ y'_4 = 2(a + r\cos(t_1)\cos(t_2)\cos(t_3)\cos(t_4)\cos(t_5)\cos(t_6)\cos(t_7))(d + \\ r\cos(t_1)\cos(t_2)\cos(t_3)\cos(t_4)\sin(t_5)) \\ y'_5 = 2(a + r\cos(t_1)\cos(t_2)\cos(t_3)\cos(t_4)\cos(t_5)\cos(t_6)\cos(t_7))(e + \\ r\cos(t_1)\cos(t_2)\cos(t_3)\sin(t_4)) \\ y'_6 = 2(a + r\cos(t_1)\cos(t_2)\cos(t_3)\cos(t_4)\cos(t_5)\cos(t_6)\cos(t_7))(f + r\cos(t_1)\cos(t_2)\sin(t_3)) \\ y'_7 = 2(a + r\cos(t_1)\cos(t_2)\cos(t_3)\cos(t_4)\cos(t_5)\cos(t_6)\cos(t_7))(g + r\cos(t_1)\sin(t_2)) \\ y'_8 = 2(a + r\cos(t_1)\cos(t_2)\cos(t_3)\cos(t_4)\cos(t_5)\cos(t_6)\cos(t_7))(h + r\sin(t_1)) \end{array} \right.$$

Fazendo $t_1 = t_2 = t_3 = t_4 = t_5 = 0$ e $d = e = f = g = h = 0$, obtemos uma projeção de $B'(x, r)$ no \mathbb{R}^3 , dada por:

$$B(y'_1, y'_2, y'_3) : \left\{ \begin{array}{l} y'_1 = (a + r\cos(t_6)\cos(t_7))^2 - (b + r\cos(t_6)\sin(t_7))^2 - (c + r\sin(t_6))^2 \\ y'_2 = 2(a + r\cos(t_6)\cos(t_7))(b + r\cos(t_6)\sin(t_7)) \\ y'_3 = 2(a + r\cos(t_6)\cos(t_7))(c + r\sin(t_6)) \end{array} \right.$$

e satisfazendo: $-\frac{\pi}{2} \leq t_6 \leq \frac{\pi}{2}$ e $0 \leq t_7 \leq 2\pi$.

Podemos agora observar as consequências da dilatação causada pela transformação $f(z) = z^2$ na hipersfera 8-dimensional.



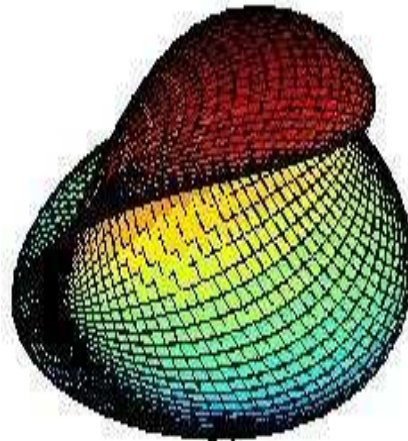
$$x = (1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0) \text{ e } r = 12$$

Figura 7: Projeção de $B(y'_1, y'_2, y'_3)$

Podemos encontrar outras projeções de $B'(x, r)$, como por exemplo, fazendo $t_1 = t_2 = t_3 = t_5 = t_6 = 0$ e $c = d = f = g = h = 0$:

$$B(y'_1, y'_2, y'_5) : \begin{cases} y'_1 = (a + r \cos(t_4) \cos(t_7))^2 - (b + r \cos(t_4) \sin(t_7))^2 - (e + r \sin(t_4))^2 \\ y'_2 = 2(a + r \cos(t_4) \cos(t_7))(b + r \cos(t_4) \sin(t_7)) \\ y'_5 = 2(a + r \cos(t_4) \cos(t_7))(e + r \sin(t_4)) \end{cases}$$

Podemos novamente observar as consequências da dilatação na esfera $B(y'_1, y'_2, y'_5)$ projetada.



$$x = (1, 1, 0, 0, -5, 0, 0, 0) \text{ e } r = -4$$

Figura 8: Projeção de $B(y'_1, y'_2, y'_3)$

3.3 Mapeamento para $f(z) = z^3$

Seja novamente $z \in \mathbb{O}$ um ponto na hipersuperfície da bola $B(x, r)$, com $x = (a, b, c, d, e, f, g, h)$.

Temos:

$$f(z) = z^3 = (y_1 + iy_2 + jy_3 + ky_4 + ly_5 + liy_6 + l jy_7 + lk y_8)^3$$

e cada y'_i será representado como segue abaixo:

$$\left\{ \begin{array}{l} y'_1 = (y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 - y_4^2 - y_5^2 - y_6^2 - y_7^2 - y_8^2)y_1 - 2y_1y_2^2 - 2y_1y_3^2 - 2y_1y_4^2 - 2y_1y_5^2 - \\ 2y_1y_6^2 - 2y_1y_7^2 - 2y_1y_8^2 \\ y'_2 = (y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 - y_4^2 - y_5^2 - y_6^2 - y_7^2 - y_8^2)y_2 + 2y_1^2y_2 \\ y'_3 = (y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 - y_4^2 - y_5^2 - y_6^2 - y_7^2 - y_8^2)y_3 + 2y_1^2y_3 \\ y'_4 = (y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 - y_4^2 - y_5^2 - y_6^2 - y_7^2 - y_8^2)y_4 + 2y_1^2y_4 \\ y'_5 = (y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 - y_4^2 - y_5^2 - y_6^2 - y_7^2 - y_8^2)y_5 + 2y_1^2y_5 \\ y'_6 = (y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 - y_4^2 - y_5^2 - y_6^2 - y_7^2 - y_8^2)y_6 + 2y_1^2y_6 \\ y'_7 = (y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 - y_4^2 - y_5^2 - y_6^2 - y_7^2 - y_8^2)y_7 + 2y_1^2y_7 \\ y'_8 = (y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 - y_4^2 - y_5^2 - y_6^2 - y_7^2 - y_8^2)y_8 + 2y_1^2y_8 \end{array} \right.$$

Substituindo os y_i 's pela forma parametrizada e fazendo $t_1 = t_2 = t_3 = t_4 = t_5 = 0$, com $d = e = f = g = h = 0$, obtemos a seguinte projeção:

$$B(y'_1, y'_2, y'_3) : \begin{cases} y'_1 = ((a + r\cos(t_6)\cos(t_7))^2 - (b + r\cos(t_6)\sin(t_7))^2 - (c + r\sin(t_6))^2)(a + r\cos(t_6)\cos(t_7)) - 2(a + r\cos(t_6)\cos(t_7))(b + r\cos(t_6)\sin(t_7))^2 - 2(a + r\cos(t_6)\cos(t_7))(c + r\sin(t_6))^2 \\ y'_2 = ((a + r\cos(t_6)\cos(t_7))^2 - (b + r\cos(t_6)\sin(t_7))^2 - (c + r\sin(t_6))^2)(b + r\cos(t_6)\sin(t_7)) + 2(a + r\cos(t_6)\cos(t_7))^2(b + r\cos(t_6)\sin(t_7)) \\ y'_3 = ((a + r\cos(t_6)\cos(t_7))^2 - (b + r\cos(t_6)\sin(t_7))^2 - (c + r\sin(t_6))^2)(c + r\sin(t_6)) + 2(a + r\cos(t_6)\cos(t_7))^2(c + r\sin(t_6)) \end{cases}$$

Podemos então visualizar a dilatação causada por $f(z) = z^3$:

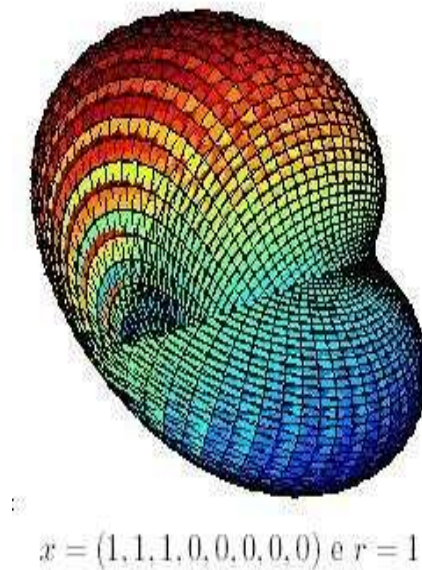
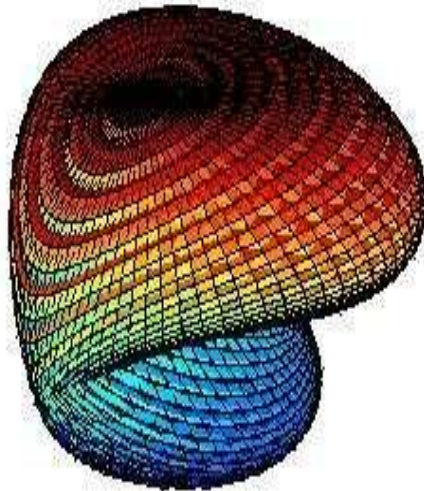


Figura 9: Projeção de $B(y'_1, y'_2, y'_3)$

Uma outra projeção pode ser obtida de $B'(x, r)$ fazendo $t_2 = t_3 = t_4 = t_5 = t_7 = 0$ e $b = c = d = e = f = g = 0$

$$B(y'_1, y'_3, y'_8) : \begin{cases} y'_1 = ((a + r\cos(t_1)\cos(t_6))^2 - r^2\cos(t_1)^2\sin(t_6)^2 - (h + r\sin(t_1))^2)(a + \\ r\cos(t_1)\cos(t_6)) - 2(a + r\cos(t_1)\cos(t_6))r^2\cos(t_1)^2\sin(t_6)^2 - 2(a + \\ r\cos(t_1)\cos(t_6))(h + r\sin(t_1))^2 \\ y'_3 = ((a + r\cos(t_1)\cos(t_6))^2 - r^2\cos(t_1)^2\sin(t_6)^2 - (h + r\sin(t_1))^2)r\cos(t_1)\sin(t_6) + \\ 2(a + r\cos(t_1)\cos(t_6))^2r\cos(t_1)\sin(t_6) \\ y'_8 = ((a + r\cos(t_1)\cos(t_6))^2 - r^2\cos(t_1)^2\sin(t_6)^2 - (h + r\sin(t_1))^2)(h + r\sin(t_1)) + \\ 2(a + r\cos(t_1)\cos(t_6))^2(h + r\sin(t_1)) \end{cases}$$

E visualizamos a projeção no \mathbb{R}^3 :



$$x = (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -3) \text{ e } r = 2$$

Figura 10: Projeção de $B(y'_1, y'_3, y'_8)$

3.4 Variação do Raio

Como vimos anteriormente no tópico (2.3), a dilatação independe do raio da hipersfera. Também vimos que a transformação *quaseconforme*, por não preservar ângulos, deforma a imagem que representa. Nosso objetivo agora é visualizar as consequências da variação do raio de uma hipersfera. Para isso, veremos um mesmo tipo de corte no \mathbb{R}^3 , originados de hipersferas de mesmo centro e raios diferentes.

Exemplo 1: Seja $B(x, r)$ e $\bar{B}(x, \bar{r})$ duas hipersferas definidas no \mathbb{R}^8 , ambas com centro definido em $x = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$. Submetendo ambas a uma mesma transformação *quaseconforme*, $f(z) = z^2$, teremos uma dilatação $H(x) = 2,82843$ para $B(x, r)$ e $\bar{B}(x, \bar{r})$. Fazendo $r = 1$ e $\bar{r} = 12$, e criando uma mesma projeção, obtemos

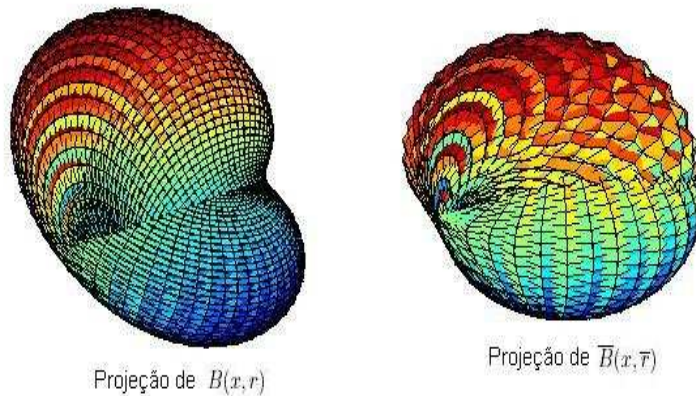


Figura 11: Projeções com mesmo valor de dilatação

Devemos observar que apesar da dilatação, que causa a deformação, ser a mesma, as imagens no \mathbb{R}^3 possuem uma distorção diferente, causada pela variação do raio [11].

Exemplo 2: Seja $B(x, r)$ e $\bar{B}(x, \bar{r})$ duas hipersferas definidas no \mathbb{R}^8 , ambas com centro definido em $x = (1, -3, 1, 1, 1, 7, 1, 1)$. Submetendo ambas a uma mesma transformação *quaseconforme*, $f(z) = z^3$, teremos uma dilatação $H(x) = 3,2$ para $B(x, r)$ e $\bar{B}(x, \bar{r})$. Fazendo $r = 2$ e $\bar{r} = 13$, e criando uma mesma projeção, obtemos

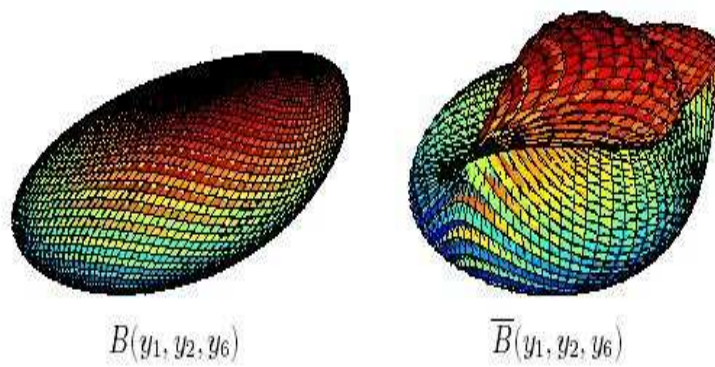


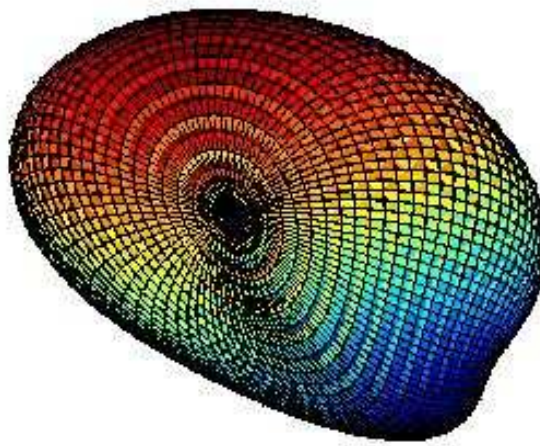
Figura 12: Projeções com mesmo valor de dilatação

Da mesma maneira, podemos observar que, apesar da dilatação ser a mesma, a distorção nas imagens no \mathbb{R}^3 é diferente.

3.5 Translação da Imagem

Vimos nos exemplos anteriores que a variação do centro da hipersfera não alterou o valor da dilatação. Agora, vamos observar graficamente as consequências da translação da imagem no espaço.

Seja então a hipersfera $B(x, r)$ com centro em $x = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$ e $\bar{B}(\bar{x}, r)$ com centro em $\bar{x} = (4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4)$. Calculando a dilatação para ambas, com $f(z) = z^2$, obtemos o mesmo valor $H(x) = 2,82843$. Observando a projeção de ambas, temos:



Ou seja, diferentemente do raio, a variação da posição da imagem no espaço, para alguns casos, não altera a distorção da esfera projetada no \mathbb{R}^3 .

3.6 Uso da interface para gerar imagem no \mathbb{R}^3

Podemos utilizar a interface gráfica para calcular cortes no \mathbb{R}^3 . No entanto, foi definido somente um tipo de corte, com $t_1 = t_2 = t_3 = t_4 = t_5 = 0$. O objetivo principal do uso dessa ferramenta é analisar as consequências da variação do raio para um dado n e centro fixos. Também pode ser destacada a praticidade com que a interface gera as imagens comparado com o software *Mathemática*. Algumas imagens seguem como exemplo.

Exemplo de mapeamento através da interface

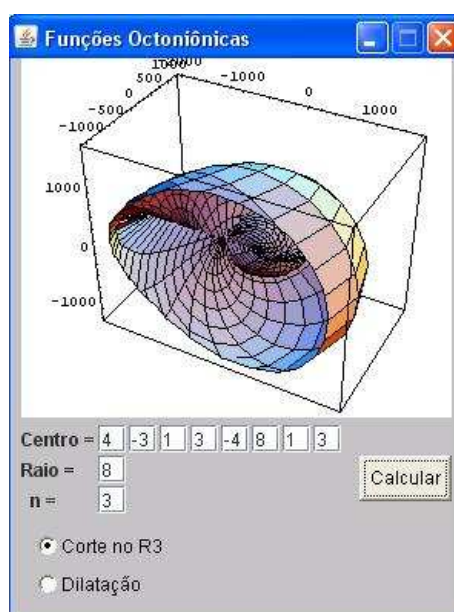
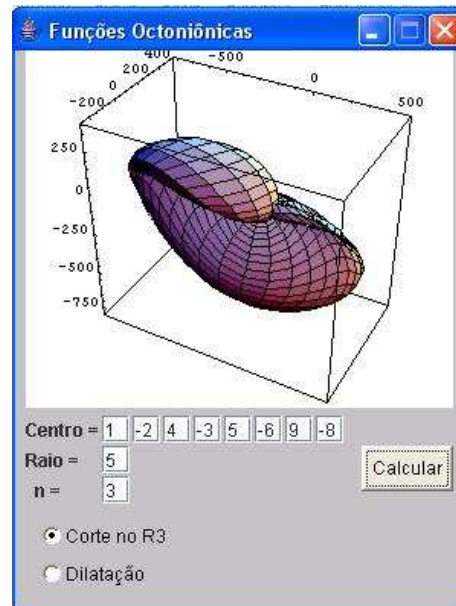


Figura 13: Projeção no \mathbb{R}^3

Figura 14: Projeção no \mathbb{R}^3

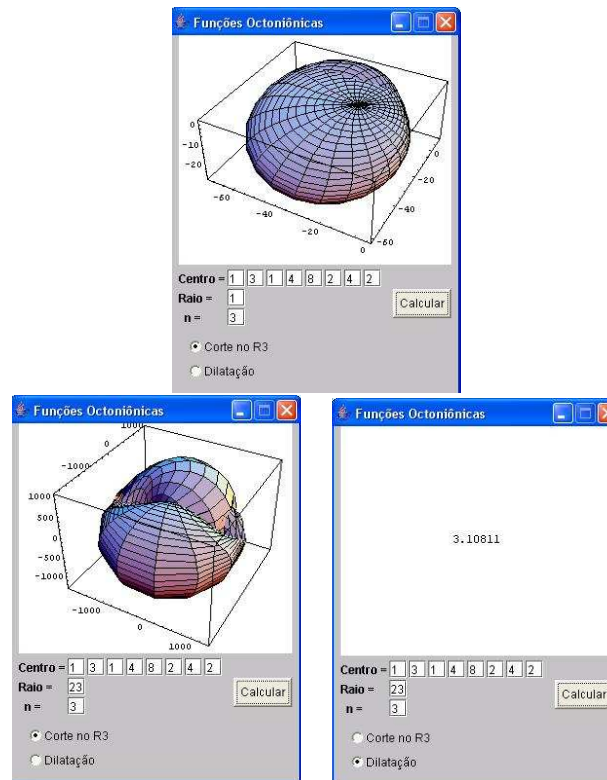


Figura 15: Variação do raio e mesmo valor da dilatação

3.7 Desempenho da Interface Gráfica

Conforme dito anteriormente, quanto maior o valor de n nas funções $f(z) = z^n$, maior será o grau do polinômio resultante da distância $|f(y) - f(x)|$. Conseqüentemente, o tempo para o cálculo da dilatação através do algoritmo definido pela interface será aumentado. Espera-se que para valores de n muito grandes, o cálculo da dilatação seja inviável. Segue abaixo uma tabela com valores do tempo de execução médio para cada valor de n .

n	<i>tempo(seg)</i>
2	2
3	4
4	11
5	70

Foi observado um aumento exponencial no tempo de execução. Não pudemos calcular a complexidade do algoritmo, já que utilizamos comandos do software Mathematica.

4 Conclusão

Nosso objetivo principal nesse trabalho foi o cálculo da dilatação no contexto dos hipercomplexos de oito dimensões. Seguindo a definição métrica de quaseconformidade, utilizamos o caso particular de transformações do tipo $f(z) = z^n$.

A álgebra octoniônica possui aplicações em diversas áreas [8]. Os octônios já foram utilizados para explicar as bases da mecânica quântica, porém sem sucesso. Atualmente, os octônios tem sido utilizados como base para a Teoria das Cordas [10], podendo provar seu valor na descrição do universo. Tantos os octônios quanto os quatérnios podem ser utilizados em computação gráfica para produzir rotações em imagens. Ainda podemos citar a relevância dos octônios em outras áreas da física como relatividade especial e lógica quântica. No entanto, a discussão dessas aplicações não fizeram parte do objetivo desse trabalho.

Mapeamentos *quaseconformes* e mapeamentos relacionados formam a mais vasta classe de mapeamentos que pode ser estudada por métodos analíticos. Suas teorias e aplicações se encontram na intersecção da geometria e da análise, além de possuir conexões com muitas outras áreas da matemática e da física. Enquanto questões fundamentais da teoria *quaseconforme* permanecem em aberto, recentes avanços em espaços métricos aumentaram o campo das aplicabilidades desses mapeamentos [7].

Esperamos que a união da álgebra octoniônica e de mapeamentos *quaseconformes* sejam úteis futuramente não só para matemática como também para outras áreas como a física e a computação. Para trabalhos futuros, podemos sugerir a busca de uma relação entre o valor da dilatação e a deformação causada em suas projeções, uma notação mais simplificada para o cálculo analítico da dilatação e também um aprimoramento na interface gráfica.

5 Bibliografia

- [1]Rickman, S. - *Quasiconformal Mappings* - Annales Ac. Scientiarum Fennicae, Séries A, I. Math, Volume 13, 1988
- [2]Baez, J.C. - *The Octonions* - Departamento de Matemática da Universidade da Califórnia, 2001
- [3]Maricato, J.B.J. - *Funções Quaseconformes* - Dissertação de Mestrado, UNESP, 2005.
- [4]Marão, J.A.P. - *Hipercomplexos: um estudo da analiticidade e da hiperperiodicidade de funções octoniônicas* - Dissertação de Mestrado, UNESP, 2007.
- [5]Pendeza, C.A. - *Álgebras não associativas octoniônicas e relações extensivas do tipo "De Moivre"* - Dissertação de Mestrado, UNESP, 2006.
- [6]Heinonen, J. - *What is ...a Quasiconformal Mapping?* - Notices of the AMS, Volume 53, 2006.
- [7]Bonk, M. - *Quasiconformal Mappings in Geometry and Analysis* - National Science Foundation, 2006.
- [8]Conway, J.H. - *On Quaternions and Octonions: Their Geometry, Arithmetic, and Symmetry* - 2004.
- [9]Teichmüller, O. - *Extremale quasiconforme Abbildungen and quadratische Differentiale* - Abh. Preuss. Akad. Iss. 22, 1940, 1-197
- [10]Baez, J. - *My Favorite Numbers* - The Ranking Lectures - 2008
- [11]Benzatti, L.F.;Borges, M.F. - *Estudo Gráfico da Dilatação em Funções Octoniônicas Quase Conforme* - XXVI Colóquio de Matemática - IMPA, 2007.