

unesp



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS DE COMPUTAÇÃO E ESTATÍSTICA

Um estudo da dinâmica fracamente não-linear
de um sistema nanomecânico

Josimeire Maximiano dos Santos

Dissertação de Mestrado
Pós-Graduação em Matemática

Josimeire Maximiano dos Santos

Um estudo da dinâmica fracamente não-linear de um sistema nanomecânico

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, Área de Concentração - Geometria e Sistemas Dinâmicos, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de São José do Rio Preto.

Orientador: Prof. Dr. Masayoshi Tsuchida

São José do Rio Preto

2009

Santos, Josimeire Maximiano dos.

Um estudo da dinâmica fracamente não-linear de
um sistema nanomecânico/Josimeire Maximiano dos Santos. -
São José do Rio Preto:[s.n.],2009.

64 f.: il.; 30 cm.

Orientador: Masayoshi Tsuchida

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de
Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Sistemas dinâmicos diferenciais. 2. Equações diferenciais não-lineares -
Soluções analíticas aproximadas. 3. Sistema nanomecânico. 4. Teoria de
Perturbações. 5. Método da média. 6. Método das múltiplas escalas. 7.
Método da expansão direta. 8. Ressonância (Matemática). I. Tsuchida,
Masayoshi. II. Universidade Estadual Paulista, Instituto de Biociências,
Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU - 517.93

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
Campus de São José do Rio Preto - UNESP

JOSIMEIRE MAXIMIANO DOS SANTOS

Um estudo da dinâmica fracamente não-linear de um sistema nanomecânico

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, Área de Concentração - Geometria e Sistemas Dinâmicos, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de São José do Rio Preto.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Masayoshi Tsuchida
Professor Assistente Doutor
UNESP - São José do Rio Preto
Orientador

Prof. Dr. José Manoel Balthazar
Professor Titular
UNESP - Rio Claro

Prof. Dr. Adalberto Spezamiglio
Professor Adjunto
UNESP - São José do Rio Preto

São José do Rio Preto, 16 de Fevereiro de 2009.

”É impossível proceder ao infinito na série dos seres que se geram sucessivamente. Deve-se admitir, por isso, que existe um ser necessário que tenha em si toda a razão de sua existência, e do qual procedam todos os outros seres.

A este chamamos Deus.”

São Tomás de Aquino

A Deus.

Aos meus pais, Rodrigo e Maria Rosa,
que sempre me apoiaram e me incentivaram em todos os momentos
de minha vida, principalmente nos estudos, não poupando
esforços para que eu chegasse até aqui.

Dedico.

Agradecimentos

A Deus, que é a fonte e o caminho da minha vida.

Agradeço imensamente aos meus queridos pais Rodrigo e Maria Rosa, pelo amor, carinho, e pelo apoio incondicional que sempre me dedicaram.

Ao meu estimado irmão Rodrigo Junior, e sua esposa, Andréa, por estarem sempre presentes quando precisei.

À minha querida prima Luciana, pelo apoio e amizade, a qual considero como uma irmã.

Agradeço ao Professor Dr. Masayoshi Tsuchida, pela orientação, sabedoria, amizade, compreensão e atenção, presteza e paciência.

Aos professores Dr. Adalberto Spezamiglio e Dr^a. Maria do Socorro Rangel, pela orientação durante o curso de graduação.

À banca examinadora, pela criteriosa avaliação.

Aos professores da graduação em Matemática do IBILCE - UNESP, por terem auxiliado no meu processo de aprendizagem.

A todos os professores do departamento e a todos os funcionários.

Aos meus amigos, companheiros e todos aqueles que contribuíram direta ou indiretamente para a realização deste trabalho.

À Capes, pelo auxílio financeiro.

Resumo

Osciladores eletromecânicos podem ser modelados matematicamente através da equação de Duffing ou equação de Van der Pol, mesmo que sejam sistemas de escala nanométrica.

Nesta dissertação analisamos um oscilador forçado sujeito a um amortecimento não-linear, que é representado pela equação de Duffing - Van der Pol. Em geral, não é fácil obter solução analítica exata para esta equação, então a análise é feita utilizando a teoria de perturbações para obter uma solução analítica aproximada. Para isso consideramos certos parâmetros do problema como sendo pequenos parâmetros, e obtemos a solução na forma de expansão direta. Devido o fato da frequência natural do sistema dinâmico depender do pequeno parâmetro, essa expansão é não uniforme, ou seja, apresenta termos seculares mistos (termos de Poisson), e além disso possui pequenos divisores.

Essas inconveniências são eliminadas aplicando o método das múltiplas escalas e o método da média. Inicialmente os pequenos parâmetros são escolhidos de modo que o problema não perturbado se reduz a um oscilador harmônico forçado, e na escolha posterior o problema não perturbado é um oscilador linear amortecido e forçado.

Palavras-chave: Oscilador de Duffing - Van der Pol, método das múltiplas escalas, método da média, sistema nanomecânico.

Abstract

Electromechanical oscillators can be mathematically modeled by a Duffing equation or a Van der Pol equation, even if they are nanometric systems.

In this work we studied a forced oscillator having nonlinear damping, that is represented by a Duffing - Van der Pol equation. In general, it is not easy to get the exact analytical solution for this equation, then the analysis is done using the perturbation theory to get an approximate analytical solution. For this reason we considered that certain parameters of the problem are small parameters and we obtain the solution in the form of straightforward expansion. Due to the fact that natural frequency of the dynamic system depends on the small parameter, this expansion is not uniform, i.e. presents secular terms (Poisson terms) and also small-divisors.

These inconveniences are eliminated using the method of multiple scales and the averaging method. Initially the small parameters are chosen so that the unperturbed problem is reduced to a forced harmonic oscillator, and in the subsequent choice the unperturbed is a forced oscillator having linear damping.

Keywords: *Duffing - Van der Pol oscillator, method of multiple scales, method of averaging, nanomechanical system.*

Sumário

1	Introdução	1
2	Introdução à teoria de sistemas dinâmicos	3
2.1	Definição de um sistema dinâmico	4
2.2	Espaço de estados (ou espaço de fases)	5
2.3	Equações diferenciais e sistemas dinâmicos	5
2.4	Sistema linear	6
2.5	Sistema não-linear	8
2.5.1	Linearização	8
2.5.2	Estabilidade e ponto de equilíbrio	9
2.5.3	Equivalência topológica	11
2.5.4	Teorema de Hartman-Grobman	11
2.6	A equação de Duffing	12
2.7	A equação de Van der Pol	14
2.8	Oscilações e ressonância	14
2.8.1	Osciladores	14
2.8.2	O fenômeno do salto de amplitude	16
3	Introdução à teoria de perturbação	17
3.1	O método da expansão direta	17
3.2	O método de múltiplas escalas	18
3.3	O método da média	19
4	Aplicação do método das múltiplas escalas e método da média na equação de Duffing - Van der Pol	22
4.1	Equação do movimento	22
4.2	Expansão Direta	23
4.3	O Método de Múltiplas Escalas	28

4.4	O Método da Média	33
5	Equação de Duffing - Van der Pol (Caso mais geral)	38
5.1	Expansão Direta	38
5.2	Método das Múltiplas Escalas	44
6	Conclusões e Sugestões para Trabalhos Futuros	47
6.1	Conclusão	47
6.2	Trabalhos Futuros	49
	Referências Bibliográficas	50

Lista de Figuras

2.1	Estado da amplitude $ A $ como uma função da frequência ω para um oscilador linear sem amortecimento.	15
2.2	Amplitude versus frequência em um oscilador não-linear com amortecimento. A curva tracejada representa as oscilações livres e a curva sólida a amplitude em função da frequência.	15
2.3	Fenômeno do salto de amplitude.	16
4.1	O dispositivo consiste em um suporte nanomecânico duplamente apertado e um eletrodo. A força de excitação é aplicada como voltagem entre o suporte e o eletrodo.	23
4.2	Varição de a e γ com T_1 calculada numericamente de (4.43) e (4.44) para $\beta = 0.1$, $\Lambda = 1.0$, $\sigma = 0.1$, $\omega = 0.5$, $a(0) = 1.0$ e $\gamma(0) = 1.0$. [20]	32

Capítulo 1

Introdução

O conceito de perturbação foi introduzido pelos mecânicos celestes, mas esse conceito pode ser generalizado para sistemas dinâmicos em geral [23]. O interesse pela teoria de sistemas dinâmicos ganhou um grande impulso a partir da descoberta de comportamentos caóticos devido às não linearidades envolvidas e sensibilidades às condições iniciais.

A dinâmica não-linear passou a ser largamente utilizada na modelagem de sistemas dinâmicos. Embora as soluções das equações envolvidas na abordagem não-linear apresentem uma maior dificuldade, seus modelos permitem considerar os efeitos de um número maior de parâmetros relevantes a um projeto, reduzindo o número de hipóteses simplificadoras.

Podemos representar uma situação ou um problema de várias maneiras diferentes, e dessa forma ter vários modelos matemáticos para o mesmo sistema. A dinâmica de muitos sistemas, sejam eles elétricos, mecânicos, etc., ou outros, pode ser descrita em termos de equações diferenciais ou de mapas de forma precisa ou, pelo menos, o mais próximo possível da realidade. O estudo de sistemas dinâmicos ganhou impulso a partir da observação de que, em certas circunstâncias, a fonte de perturbação e o sistema podem interagir [6] [7] [8] [16].

Equações diferenciais muito utilizadas para representar vários sistemas dinâmicos são a equação de Duffing e a equação de Van der Pol, mesmo nas suas formas mais simplificadas. Um motivo que torna essas equações interessantes, é o fato das mesmas apresentarem soluções multiperiódicas dependendo de valores dos seus parâmetros. Em virtude disso, essas equações são largamente citadas em livros [19] [23] [22] [24], bem como estudadas [1] [4] [5] [28].

Neste trabalho fazemos uma análise de um sistema representado por um oscilador mecânico forçado com amortecimento não-linear através da equação de Duffing - Van der Pol. Em geral, não é fácil obter soluções analíticas exatas de equações diferenciais não-lineares, e portanto, sob determinadas condições, a solução de um sistema não-linear é aproximada através de métodos analíticos. Entre tais métodos, os mais utilizados são os métodos de perturbação.

O objetivo deste trabalho é encontrar uma solução aproximada para a equação do movimento que descreve um oscilador de Duffing - Van der Pol livre de termos que comprometem a solução, tais como termos seculares mistos ou a presença de pequenos divisores. Dessa forma, contribuir com os estudos sobre o amortecimento não-linear em sistemas aplicados na mecânica e nanomecânica através de osciladores.

O trabalho foi dividido em 6 capítulos. No capítulo 2 apresentamos um resumo dos principais tópicos da teoria de sistemas dinâmicos. No capítulo 3 fazemos uma breve introdução à teoria de perturbações, apresentando os métodos da expansão direta, múltiplas escalas e média.

No capítulo 4 apresentamos a equação analisada neste trabalho, a qual é semelhante à equação de Duffing estudada por Almog *et al.*[2], onde o impacto de um suporte nanomecânico duplamente apertado é investigado. Ainda neste capítulo, buscamos uma solução aproximada empregando a teoria de perturbação, através do método de múltiplas escalas e método da média.

No capítulo 5 apresentamos uma breve análise do sistema apresentado no capítulo 4 de forma mais generalizada.

O capítulo 6 contém as considerações finais sobre o trabalho desenvolvido, e a seguir são apresentadas as referências bibliográficas utilizadas.

Capítulo 2

Introdução à teoria de sistemas dinâmicos

Um *sistema* pode ser definido como um conjunto de objetos agrupados por alguma interação ou interdependência, de modo que existam relações de causa e efeito nos fenômenos que ocorrem com os elementos desse conjunto. Um sistema é *dinâmico* quando algumas grandezas que caracterizam seus objetos constituintes variam no tempo. Leibniz foi o primeiro a usar a palavra dinâmica nesse contexto [19].

Sistemas dinâmicos de dimensão finita ou infinita são modelos matemáticos para um grande número de problemas em áreas aplicadas como a física, a economia, a engenharia e muitas outras ciências. Em geral, estes sistemas dinâmicos estão associados a equações diferenciais que podem ser equações diferenciais ordinárias, equações diferenciais funcionais, equações diferenciais parciais ou equações discretas. Exemplos de modelos matemáticos que podem representar sistemas dinâmicos são as equações de ondas, as equações para a supercondutividade de líquidos, os modelos de crescimento populacional, as equações de reação e difusão, as equações do calor entre muitas outras.

Neste capítulo introduzimos alguns conceitos básicos da teoria de sistemas dinâmicos. Apresentamos definições que são válidas tanto para sistemas lineares como não-lineares, como espaço de estados (ou espaço de fases), que é o espaço no qual se realiza o estudo qualitativo de um sistema dinâmico, pontos de equilíbrio e estabilidade no sentido de Lyapunov.

2.1 Definição de um sistema dinâmico

A evolução de um sistema dinâmico pode ser caracterizada pela trajetória que se propaga com a passagem do tempo, em um dado espaço S . O espaço S pode ser pensado como um espaço de estados ou algum sistema físico. Matematicamente S pode ser um espaço Euclidiano, ou um subconjunto aberto do espaço Euclidiano de uma determinada dimensão [12].

Formalizamos um sistema dinâmico contínuo com a seguinte definição.

Um sistema dinâmico é uma aplicação C^1 , $\phi : \mathbb{R} \times S \rightarrow S$ onde S é um conjunto aberto do espaço Euclidiano, e escrevemos $\phi(t, x) = \phi_t(x)$. A aplicação $\phi_t : S \rightarrow S$ satisfaz

- (a) $\phi_0 : S \rightarrow S$ é a identidade;
- (b) A composição $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}$ para todo $t, s \in \mathbb{R}$.

Note que a definição implica que a aplicação $\phi_t : S \rightarrow S$ é C^1 para cada t e tem uma inversa C^1 , ϕ_{-t} (fazer $s = -t$ em (b)).

Seja A um operador em um espaço vetorial E , seja $E = S$ e $\phi : \mathbb{R} \times S \rightarrow S$ definida por $\phi(t, x) = e^{tA}x$. Então $\phi_t : S \rightarrow S$ pode ser representado por $\phi_t = e^{tA}$. Claramente, $\phi_0 = e^0$ é o operador identidade, e desde que $e^{(t+s)A} = e^{tA} \cdot e^{sA}$, definimos um sistema dinâmico em E .

Esse exemplo de sistema dinâmico é representado pela equação diferencial $\frac{dx}{dt} = Ax$ em E . Um sistema dinâmico ϕ_t em S é, muitas vezes, dado por uma equação diferencial. Podemos reescrever isso em termos mais convencionais. Seja $\phi_t : S \rightarrow S$ um sistema dinâmico e $x \in S$, seja $x(t) = \phi_t(x)$, e $f : S \rightarrow E$ como

$$f(x) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi_t(x) \quad (2.1)$$

Então podemos escrever (2.1) como

$$\dot{x} = f(x) \quad (2.2)$$

Assim, $x(t)$ ou $\phi_t(x)$ é solução de (2.2) satisfazendo a condição inicial $x(0) = x_0$.

A equação (2.2) é chamada de equação autônoma pois não depende do tempo.

A equação é chamada não-autônoma quando $\dot{x} = f(t, x)$.

2.2 Espaço de estados (ou espaço de fases)

O *espaço de estados*, ou *espaço de fases*, é um espaço n -dimensional, cujos eixos coordenados são os eixos x_1, x_2, \dots, x_n . Um estado é representado como um ponto com coordenadas $(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ nesse espaço. Conforme o tempo passa, esse ponto se move, sendo sua evolução temporal determinada pelas n equações diferenciais de primeira ordem

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned} \tag{2.3}$$

ou, na notação vetorial

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

com $f_j : B \times \mathbb{R}_+ \rightarrow A$ ($j = 1, 2, \dots, n$), sendo $B \subseteq \mathbb{R}^n$, $A \subseteq \mathbb{R}$.

As variáveis dependentes x_j são chamadas de *variáveis de estado* e as funções f_j definem o *campo de velocidades* desse sistema, pois a velocidade instantânea é dada por $d\mathbf{x}/dt = \mathbf{f}$. A dimensão do espaço de fases equivale ao número de equações diferenciais de primeira ordem necessárias para descrever o sistema, que é igual ao número de variáveis de estado.

Chama-se *retrato de fases* o conjunto de curvas obtidas pela evolução temporal do sistema a partir de todas as condições iniciais nas quais as funções f_j são definidas.

2.3 Equações diferenciais e sistemas dinâmicos

O modo mais comum de definir um sistema dinâmico de tempo contínuo é usando equações diferenciais. Suponha que o espaço de estados do sistema é $X = \mathbb{R}^n$ com coordenadas (x_1, x_2, \dots, x_n) . Frequentemente a lei de evolução do sistema é dada implicitamente em termos das velocidades \dot{x}_i como função das coordenadas (x_1, x_2, \dots, x_n) .

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n), i = 1, 2, \dots, n,$$

ou na forma vetorial

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (2.4)$$

onde o vetor $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é diferenciável.

A função do lado direito de (2.4) é denominada um campo vetorial, dado que relaciona um vetor $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ para cada ponto \mathbf{x} . A equação (2.4) representa um sistema de n equações diferenciais autônomas [19].

2.4 Sistema linear

Há duas razões principais para se estudar sistemas lineares. A primeira é que vários fenômenos podem ser modelados por sistemas lineares, com precisão adequada às aplicações. A segunda é que, por meio de um processo de linearização, pode-se realizar um estudo local de sistemas não-lineares, através da análise do sistema linear associado.

A forma mais geral de se escrever uma equação diferencial linear de ordem n é

$$a_n(t) \frac{d^n x(t)}{dt^n} + a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_1(t) \frac{dx(t)}{dt} + a_0(t)x(t) = F(t). \quad (2.5)$$

Uma equação diferencial de ordem n pode ser escrita na forma de um sistema de n equações diferenciais de primeira ordem. Fazemos essa transformação através da definição de novas variáveis

$$\begin{aligned} x(t) &\equiv x_1(t) \\ \frac{dx_1(t)}{dt} &\equiv x_2(t) \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &\equiv x_3(t) \\ &\vdots \\ \frac{dx_{n-1}(t)}{dt} &\equiv x_n(t) \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\frac{dx_n(t)}{dt} = \frac{F(t)}{a_n(t)} - \frac{a_0(t)}{a_n(t)}x_1(t) - \frac{a_1(t)}{a_n(t)}x_2(t) - \dots - \frac{a_{n-1}(t)}{a_n(t)}x_n(t).$$

O *estado* de um sistema num instante t é especificado pelos valores das *variáveis de estado* $x_i(t)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) nesse instante. O estado de um sistema, num dado momento

de sua história passada, constitui toda informação que é necessária para se determinar sua evolução futura, num problema de condição inicial. A escolha das variáveis de estado não é única, pois depende das condições que o sistema oferece.

O sistema (2.6) é equivalente à equação (2.5), entretanto, há algumas vantagens de se escrever uma equação diferencial de ordem n como n equações diferenciais de primeira ordem. Contudo, a principal vantagem de se trabalhar com n equações de primeira ordem é que existem três técnicas para se analisar um sistema dinâmico

- *Técnica analítica*: integram-se analiticamente as equações, determinando a solução em termos de fórmulas gerais. Essa técnica possui a desvantagem de que nem sempre é possível se determinar tais fórmulas (quase nunca a integração analítica é factível).
- *Técnica numérica*: integram-se numericamente as equações, calculando-se valores para as variáveis dependentes $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ em pontos pré selecionados da variável independente t . A desvantagem desse método é que a solução calculada é aproximada e só é válida para a situação calculada, ou seja, vale apenas para aqueles valores de condições iniciais e de parâmetros usados na integração. Quando se altera algum desses valores, é necessário integrar novamente as equações do sistema.
- *Técnica qualitativa*: através de cálculos analíticos relativamente simples, temos uma idéia de como o sistema evolui. Essa técnica usa a descrição das variáveis de estado, e seus resultados são representados no espaço de estados, também chamado de espaço de fases. A desvantagem dessa técnica é que parte da informação quantitativa é perdida. Perde-se a informação sobre o comportamento transiente do sistema, isto é, sobre o comportamento que o sistema apresenta antes de atingir um regime permanente.

Para sistemas lineares valem o *princípio da aditividade* e o *princípio da proporcionalidade entre excitação e resposta*. O primeiro princípio estabelece que se para uma entrada $F_1(t)$ o sistema exibe uma resposta $\mathbf{x}_1(t)$, e para uma entrada $F_2(t)$ o sistema exibe uma resposta $\mathbf{x}_2(t)$, então para uma entrada $F_1(t) + F_2(t)$, a saída do sistema será $\mathbf{x}_1(t) + \mathbf{x}_2(t)$. O segundo princípio, também conhecido como *princípio da homogeneidade*, afirma que, se para uma entrada $F(t)$, o sistema tem uma saída $\mathbf{x}(t)$, então para uma entrada $kF(t)$, sendo k uma constante, a saída será $k\mathbf{x}(t)$. Em sistemas não-lineares não

valem, em geral, esses princípios. Não há um método analítico geral para se obter a solução explícita dessa equação para quaisquer coeficientes $a_j(t)$ ($j = 0, 1, \dots, n$) e entrada $F(t)$. Ou seja, não há um método geral para se obter a fórmula que expressa como \mathbf{x} varia em função de t [18].

2.5 Sistema não-linear

Em geral é impossível obter soluções analíticas exatas de equações diferenciais não-lineares. Entretanto, um sistema não-linear pode ser aproximado em torno de um ponto de equilíbrio por um sistema linear. Tal procedimento é conhecido como linearização. Estudando a aproximação linear, pode-se, às vezes, prever o comportamento das soluções do sistema não-linear na vizinhança do ponto de equilíbrio.

2.5.1 Linearização

Seja o sistema de equações diferenciais não-lineares de primeira ordem

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned} \tag{2.7}$$

para o qual existe um ponto de equilíbrio $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$. Em torno desse ponto, as funções $f_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$, ($i = 1, 2, \dots, n$), podem ser aproximadas por equações de retas, ou seja, equações lineares. Para isso, expandem-se essas funções em série de Taylor

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \dots, x_n) &= f_i(x_1^*, \dots, x_n^*) + \frac{\partial f_i}{\partial x_1} \Big|_{\mathbf{x}^*} (x_1 - x_1^*) + \frac{\partial f_i}{\partial x_2} \Big|_{\mathbf{x}^*} (x_2 - x_2^*) + \dots \\ &+ \frac{\partial f_i}{\partial x_n} \Big|_{\mathbf{x}^*} (x_n - x_n^*) + \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_1^2} \Big|_{\mathbf{x}^*} (x_1 - x_1^*)^2 + \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_2^2} \Big|_{\mathbf{x}^*} (x_2 - x_2^*)^2 \\ &+ \dots + \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_n^2} \Big|_{\mathbf{x}^*} (x_n - x_n^*)^2 + \dots, \end{aligned}$$

onde $i = 1, 2, \dots, n$. Retendo-se apenas a parte linear obtém-se, em notação matricial,

$$\frac{d\xi}{dt} = Jd\xi(t) \tag{2.8}$$

sendo ξ o vetor coluna das variáveis de estado e J a matriz Jacobiana

$$d\xi(t) = \begin{pmatrix} x_1 - x_1^* \\ x_2 - x_2^* \\ \vdots \\ x_n - x_n^* \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\mathbf{x}^*)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x}^*)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\mathbf{x}^*)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(\mathbf{x}^*)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_n(\mathbf{x}^*)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(\mathbf{x}^*)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n(\mathbf{x}^*)}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

2.5.2 Estabilidade e ponto de equilíbrio

Estabilidade, segundo Lyapunov, é uma palavra usada para caracterizar tanto uma solução, quanto uma equação diferencial. A estabilidade de uma solução é determinada pelo comportamento das soluções cujas condições iniciais pertencem à sua vizinhança. A estabilidade de uma equação diferencial é determinada pelo comportamento de equações isomórficas, cujos valores dos parâmetros são próximos aos da equação estudada.

Seja \mathbf{x}^* a posição de equilíbrio de um sistema dinâmico. Define-se \mathbf{x}^* como um ponto de equilíbrio assintoticamente estável se, tomando uma condição inicial $\mathbf{x}(0)$ próxima de \mathbf{x}^* , então a trajetória $\mathbf{x}(t)$ tende a \mathbf{x}^* quando $t \rightarrow \infty$. Um ponto assintoticamente estável atrai todas as trajetórias contidas em uma "esfera" com centro em \mathbf{x}^* , conforme o tempo passa. Se essa esfera possui raio finito, \mathbf{x}^* é um ponto de equilíbrio *localmente* assintoticamente estável. Se essa esfera tem raio infinito, ou seja, abrange todo o espaço de fases, o ponto de equilíbrio é *globalmente* assintoticamente estável. Em ambos os casos, tal ponto é classificado como um atrator. O conjunto de todas as condições iniciais que convergem para um mesmo atrator formam uma bacia de atração.

Define-se \mathbf{x}^* como um ponto de equilíbrio *neutramente estável* se, após uma perturbação na condição inicial $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^*$, então $\mathbf{x}(t)$ permanece dentro de uma esfera centrada em \mathbf{x}^* , conforme o tempo passa. Nesse caso porém, $\mathbf{x}(t)$ não tende para \mathbf{x}^* quando $t \rightarrow \infty$.

Define-se \mathbf{x}^* como um ponto *instável* se, após uma perturbação na condição inicial $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^*$, então $\mathbf{x}(t)$ deixa a esfera centrada em \mathbf{x}^* num tempo finito. Usamos a palavra esfera se o sistema for tridimensional, se fosse unidimensional seria um segmento de reta. No caso bidimensional um círculo, e para dimensão maior que três usamos o termo hiper-esfera.

A estabilidade de um ponto no sentido de Lyapunov é definida em termos do comportamento das trajetórias que partem de uma condição inicial localizada na vizinhança

desse ponto. A existência de um ponto instável implica que, conforme o tempo passa, a magnitude das variáveis pode aumentar de maneira ilimitada, distando-se do ponto em questão. Num sistema físico real, isso corresponde a elementos mecânicos que se rompem, ou a elementos elétricos que saturam ou queimam.

Considere o sistema de n equações diferenciais (2.8). O polinômio característico é obtido através de $\det(J - \lambda I) = 0$. Quando todos os autovalores da matriz J tiverem a parte real diferente de zero, o ponto de equilíbrio correspondente x^* é chamado de *hiperbólico*, independente do valor da parte imaginária. Quando pelo menos um autovalor tem a parte real nula, o ponto de equilíbrio é denominado de *não-hiperbólico*.

Os pontos de equilíbrio hiperbólicos podem ser classificados de três formas quanto à estabilidade: *atratores*, *repulsores* e *selas* [12].

- Se todos os autovalores de J tem a parte real negativa, o ponto de equilíbrio é chamado de atrator, sendo que neste caso o equilíbrio é assintoticamente estável. Se todos os autovalores de J são complexos, então o atrator é chamado de *foco estável*, e se todos os autovalores de J são reais, o atrator é chamado de *nó estável*.
- Se todos os autovalores da matriz J tem a parte real positiva, o ponto de equilíbrio é chamado de repulsor ou *fonte*. Se os autovalores são complexos, então a fonte é chamada de *foco instável* e, se todos os autovalores de J são reais, a fonte é chamada de *nó instável*.
- Quando alguns autovalores (mas não todos) têm parte real positiva e o restante tem a parte real negativa, então o ponto de equilíbrio é chamado de *sela*.

Quanto à estabilidade de pontos de equilíbrio não-hiperbólicos, pode-se dizer que:

- Um ponto de equilíbrio não-hiperbólico é *instável* se um ou mais autovalores de J tem a parte real positiva.
- Se alguns autovalores da matriz J têm a parte real negativa, enquanto que os outros autovalores têm a parte real nula, o ponto de equilíbrio é chamado de *marginalmente estável*.
- Se todos os autovalores da matriz J são imaginários puros e não-nulos, o ponto de equilíbrio é chamado de *centro*.

2.5.3 Equivalência topológica

Seja uma função $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$, $\mathbf{g} = (g_1, g_2, \dots, g_n)$ e $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, suponha g uma função bijetora. Uma função com essa propriedade é invertível, isto é, existe uma função inversa $\mathbf{g}^{-1}(\mathbf{y}) = \mathbf{x}$. Se \mathbf{g} é contínua, invertível e sua inversa \mathbf{g}^{-1} é contínua, então g é um homeomorfismo, e o domínio \mathbf{x} e a imagem \mathbf{y} são homeomorfos. Quando os retratos de fases dos sistemas dinâmicos $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ e $\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{h}(\mathbf{y})$ podem ser relacionados por um homeomorfismo $\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ que preserva o sentido do movimento (a orientação) no espaço de fases, então esses sistemas são *topologicamente orbitalmente equivalentes*. Isso significa que as trajetórias de um sistema podem ser continuamente deformadas até se tornarem iguais às trajetórias do outro sistema. Deformações contínuas envolvem esticamentos e alongamentos, mas não cortes ou emendas. Dois retratos de fases que apresentam a mesma estrutura orbital são qualitativamente equivalentes, conseqüentemente eles apresentam comportamentos dinâmicos similares. Portanto, se as trajetórias na vizinhança de um ponto fixo do sistema dinâmico não-linear são qualitativamente equivalentes àquelas do sistema linearizado, então é possível fazer um estudo local da estabilidade.

2.5.4 Teorema de Hartman-Grobman

D.M. Grobman, em 1959, e P. Hartman, em 1963, provaram independentemente que, na vizinhança de um ponto de equilíbrio hiperbólico, um sistema não-linear de dimensão n apresenta um comportamento qualitativamente equivalente ao do sistema linear correspondente [18].

Portanto, o teorema de Hartman-Grobman garante que a estabilidade de um ponto de equilíbrio hiperbólico é preservada quando se lineariza o sistema em torno desse ponto, de modo que o retrato de fases, na sua vizinhança, é topologicamente orbitalmente equivalente ao retrato de fases do sistema linear associado. Dois retratos de fases são topologicamente orbitalmente equivalentes quando um é uma versão distorcida do outro. Se o ponto de equilíbrio é não-hiperbólico, ou seja, se há algum autovalor com parte real nula, então a linearização não permite predizer sua estabilidade. Nesse caso, devem-se considerar termos de ordem superior que foram desprezados na expansão em série das funções $f_i(x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$, ou usar outro método para determinar a estabilidade, como o *método direto de Lyapunov* ou a *teoria da variedade central*.

2.6 A equação de Duffing

A vibração está presente já nos primeiros tempos da História da Humanidade. Instrumentos rudimentares, como apitos e tambores têm no seu princípio de funcionamento, um problema vibratório como essência. Estes instrumentos tiveram muita importância entre os povos primitivos como meios de comunicação. Mais tarde uma série de instrumentos musicais (percussão, cordas, metais, etc.) foram concebidos aproveitando movimentos vibratórios, geradores de ondas sonoras. O desenvolvimento da teoria da vibração resultou dos avanços das ciências básicas das quais deriva: matemática e mecânica geral [25].

J. Bernoulli (1654 – 1705) foi o primeiro a propor o princípio da superposição linear de harmônicas. C. A. Coulomb (1736 – 1806), por volta de 1784, realizou estudos teóricos e experimentais sobre as oscilações torcionais de um cilindro metálico suspenso por um arame.

Em 1877, Lord Rayleigh (1842 – 1919) publicou seu livro *A Teoria do Som*, até hoje considerado um clássico no assunto. Frahm, em 1909, propôs o absorvedor dinâmico de vibração, que envolve a adição de um sistema massa-mola secundário para eliminar as vibrações de um sistema principal.

Modernamente, muitos outros pesquisadores contribuíram com o estudo de vibrações. Em vibrações não-lineares a teoria começou a se desenvolver no final do século XIX com J. H. Poincaré (1854 – 1912) e A. M. Lyapunov (1857 – 1918). Após 1920, G. Duffing (1861 – 1944) e B. Van der Pol (1889-1959) realizaram estudos (suas equações são paradigmas de sistemas dinâmicos não-lineares) sobre a teoria de vibrações não-lineares e concentraram atenção em sua aplicação a problemas de engenharia.

As vibrações simples de muitos sistemas conservativos, com um grau de liberdade, podem ser modelados matematicamente da forma

$$\frac{d^2x^*}{dt^2} + f(x^*) = 0 \quad (2.9)$$

com f não-linear em $x^* = x_0^*$ que é a posição de equilíbrio do sistema vibratório, ou seja, $f(x_0^*) = 0$ [20].

Se f for suposto como analítica em $x^* = x_0^*$, então obtemos

$$f(x^*) = k_1(x^* - x_0^*) + k_2(x^* - x_0^*)^2 + \dots \quad (2.10)$$

onde

$$k_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n f}{dx^{*n}}(x_0^*)$$

Assim, fazendo $u^* = x^* - x_0^*$ a equação (2.9) pode ser reescrita como

$$\frac{d^2 u^*}{dt^{*2}} + k_1 u^* + k_2 u^{*2} + \dots = 0. \quad (2.11)$$

A equação (2.11) descreve o movimento do sistema na vizinhança da posição de equilíbrio.

Considerando o caso particular da equação (2.11)

$$\frac{d^2 u^*}{dt^{*2}} + k_1 u^* + k_3 u^{*3} = 0 \quad (2.12)$$

onde $k_1 > 0$ e k_3 pode ser positivo ou negativo, obtemos a equação (2.12) que é conhecida como equação de Duffing. Em geral, as equações são analisadas em termos de variáveis adimensionais, então introduzimos novas variáveis definidas por $t = \frac{t^*}{T^*}$ e $u = \frac{u^*}{U^*}$, onde T^* e U^* são o tempo e a distância característicos. Assim,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt^*} &= \frac{d}{dt} \frac{dt}{dt^*} = \frac{1}{T^*} \frac{d}{dt} \\ \frac{d^2}{dt^{*2}} &= \frac{1}{T^{*2}} \frac{d^2}{dt^2}. \end{aligned}$$

Então, (2.12) se torna

$$\ddot{u} + k_1 T^{*2} u + k_3 T^{*2} U^{*2} u^3 = 0 \quad (2.13)$$

Escolhendo, de maneira conveniente, T^* tal que $k_1 T^{*2} = 1$ e fazendo $\varepsilon = k_3 T^{*2} U^{*2} = k_3 U^{*2} / k_1$, podemos reescrever (2.13) como

$$\ddot{u} + u + \varepsilon u^3 = 0 \quad (2.14)$$

onde $u(0) = x_0$ e $\dot{u}(0) = \dot{x}_0$ são as condições iniciais.

Verificamos que ε é uma quantidade adimensional, e é uma medida da força de não-linearidade.

A equação de Duffing é usada para descrever a dinâmica não-linear de sistemas elétricos e mecânicos, e recebeu este nome em homenagem aos estudos de G. Duffing na década de 1930. Esta equação descreve uma série de fenômenos físicos importantes, dentre os quais deve-se destacar um circuito elétrico com uma indutância não-linear e a *viga de Moon e Holmes*, que trata a flambagem de uma viga elástica devida a ação de forças magnéticas [26]. A equação de Duffing pode representar, inclusive o movimento de um pêndulo.

No capítulo seguinte introduzimos a teoria de perturbação, onde apresentamos técnicas para a resolução da equação (2.14).

2.7 A equação de Van der Pol

Vários problemas de vibrações com amortecimento não linear são modelados dinamicamente pela equação de Van der Pol. A principal característica dos sistemas que permitem essa modelagem é a existência de um ciclo limite para suas trajetórias de movimento. Independentemente da amplitude inicial de movimento desses sistemas, o diagrama de fase sempre tende para uma única curva que corresponde à solução periódica quando o tempo tende ao infinito [17].

A equação diferencial não-linear de Van der Pol é dada por

$$\ddot{x} - \alpha(1 - x^2)\dot{x} + x = 0 \quad (2.15)$$

onde o termo $\alpha(1 - x^2)$ introduz um amortecimento que assume valores negativos para pequenas amplitudes de movimento, caracterizando o sistema como acreativo, e assume valores positivos para grandes amplitudes de movimento, caracterizando o sistema como dissipativo.

Exemplos de sistemas que se enquadram nesse modelo são sistemas elétricos de realimentação.

2.8 Oscilações e ressonância

As oscilações naturais de um corpo ocorrem quando ele é deslocado da posição de equilíbrio e, a seguir, solto. Se esse corpo tem massa m e está preso a uma mola, com constante de elasticidade k , então a frequência natural desse sistema é $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

No entanto, quando o corpo é submetido a uma força periódica externa temos uma nova situação. As oscilações resultantes desta força são denominadas oscilações forçadas e têm a frequência da força externa e não a natural do corpo. A resposta do corpo depende da relação entre as frequências da oscilação forçada e da natural do corpo [9].

2.8.1 Osciladores

Em um oscilador linear, sem amortecimento, excitado por uma força periódica externa, cuja frequência pode ser variada lentamente, a amplitude tende para infinito, quando a frequência da força externa ω é igual à frequência natural ω_0 , conforme mostrado

na figura 2.1.

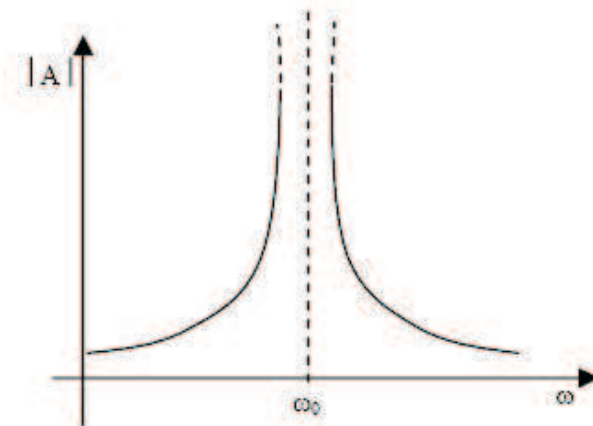


Figura 2.1: Estado da amplitude $|A|$ como uma função da frequência ω para um oscilador linear sem amortecimento.

No oscilador não-linear com amortecimento, quando excitado por uma força periódica externa o estado da amplitude pode mudar subitamente de maneira descontínua. Esse fenômeno do salto de amplitude está presente nesse oscilador quando mantemos fixa a amplitude da força periódica externa e variamos lentamente a sua frequência. A frequência natural é ω_0 em pequenas amplitudes e cresce com o crescimento da amplitude conforme vemos na curva tracejada da figura 2.2. Nessa mesma figura, a curva sólida representa o comportamento da amplitude como uma função da frequência.

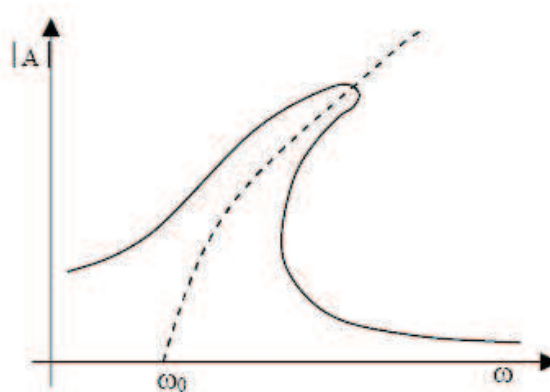


Figura 2.2: Amplitude versus frequência em um oscilador não-linear com amortecimento. A curva tracejada representa as oscilações livres e a curva sólida a amplitude em função da frequência.

2.8.2 O fenômeno do salto de amplitude

Consideremos um ponto P se deslocando ao longo da curva de ressonância não-linear da figura 2.3. Para valores decrescentes de ω quando P se move de 1 para 2 a amplitude $|A|$ é lentamente aumentada e possui um valor único. Ao continuar decrescendo o valor de ω , abaixo de ω' , P precisa continuar a se mover ao longo do ramo inferior estável da curva de ressonância não-linear até alcançar o ponto 3. Mesmo que $|A|$ não tenha um valor único no intervalo de frequência entre ω' e ω'' , devido as considerações de estabilidade, P precisa continuar a se mover ao longo do mesmo segmento estável da curva de ressonância que ele começou anteriormente. Desde que a curva de ressonância corresponde a um valor fixo da amplitude da força externa, quando ω é decrescido adiante, P precisa saltar verticalmente para cima no ponto 4 e então seguir o ramo superior estável para 5. Assim $|A|$ salta descontinuamente de seu valor em 3 para um valor maior em 4 e então decresce suavemente quando P vai para o ponto 5. Se por outro lado ω é aumentado a partir de 5, P se move ao longo do ramo superior estável ($|A|$ cresce suavemente) do ponto 5 até o ponto 6 no que ele salta verticalmente para baixo ($|A|$ decresce descontinuamente) em 2 e então se move ($|A|$ decresce suavemente) para o ponto 1.

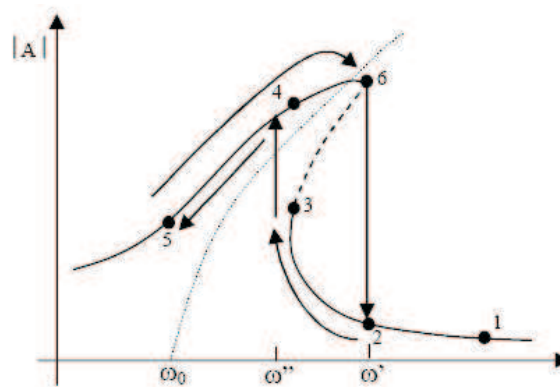


Figura 2.3: Fenômeno do salto de amplitude.

Capítulo 3

Introdução à teoria de perturbação

As equações diferenciais que descrevem sistemas vibratórios geralmente não são lineares, e sua solução analítica dificilmente pode ser encontrada. Uma análise qualitativa dos sistemas dinâmicos não-lineares pode ser realizada através de uma abordagem analítica, quando as não-linearidades podem ser consideradas pequenas (fracamente não-linear). Neste caso, elas são tratadas como perturbações em relação a um sistema linear. Assim, a resposta de um sistema não-linear é uma perturbação da resposta do sistema linear. A principal característica desta análise é avaliar o comportamento de um dado sistema nas vizinhanças de uma solução conhecida [26].

Os métodos de perturbação (também denominados técnicas analíticas aproximadas) formulam procedimentos com os quais é possível introduzir perturbações em um sistema linear. A idéia básica é utilizar séries de potência relativamente a um pequeno parâmetro ε , que represente a grandeza de uma perturbação. Trata-se de um procedimento analítico usado para obter soluções no tempo. Neste capítulo, descrevemos três métodos clássicos da teoria de perturbação: o método da expansão direta, o método de múltiplas escalas e o método da média.

3.1 O método da expansão direta

Consideremos o seguinte sistema de equações diferenciais

$$\ddot{u}_i + \omega_i^2 u_i = \varepsilon f_i(\varphi, u_1, \dots, u_n, \dot{u}_1, \dots, \dot{u}_n), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.1)$$

onde ω_i^2 são as frequências de oscilação. As funções f_i são chamadas funções ou forças perturbativas e contém termos que representam a dissipação de energia, termos não-

lineares e a excitação externa. Além disso, consideramos que f_i são funções periódicas em φ com período 2π .

O método da expansão direta pode ser particularmente útil na identificação das diversas condições de ressonância de um sistema dinâmico. Neste caso, a variável dependente $u_i(t)$ é expressa como uma série em potências de um pequeno parâmetro ε e funções $u_{i,j}(t)$.

$$u_i(t; \varepsilon) = \sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon^j u_{i,j}(t) + O(\varepsilon^n), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.2)$$

Ao substituir a expansão dada acima na equação do movimento, obtém-se um conjunto de equações diferenciais para a determinação de $u_{i,0}, u_{i,1}, \dots$, ordenadas segundo o valor do expoente do pequeno parâmetro ε . Estas equações são resolvidas recursivamente, e neste procedimento, as condições de ressonância podem então ser identificadas.

Embora seja adequado na identificação das condições de ressonância, o método da expansão direta não pode ser empregado de maneira eficaz para diversas análises de interesse, como por exemplo na obtenção da resposta do sistema em regime permanente. Nestas análises outros métodos de perturbação devem ser empregados, dentre estes os mais utilizados são o método de múltiplas escalas e o método da média [27].

3.2 O método de múltiplas escalas

A expansão direta da solução da equação (3.1) em série de potências é dada pela equação (3.2), e as funções $u_{i,j}(t)$ podem apresentar termos seculares mistos e pequenos divisores (termos ressonantes). Isto ocorre devido ao fato de não considerarmos que ω_i também dependem de ε . Então, ao lado da expansão direta devemos considerar a expansão

$$\omega_i = \omega_{i0} + \varepsilon\omega_{i1} + \varepsilon^2\omega_{i2} + \dots \quad (3.3)$$

Esse procedimento leva ao aparecimento de várias escalas de tempo $t, \varepsilon t, \varepsilon^2 t, \dots$, e o método de múltiplas escalas considera que essas escalas são variáveis independentes distintas, e portanto o problema dinâmico originalmente descrito na forma de equações diferenciais ordinárias é transformado na forma de equações diferenciais parciais.

Consideremos as escalas de tempo $T_0 = t, T_1 = \varepsilon t, \dots$ e procuramos soluções definidas da seguinte forma

$$u_i(t; \varepsilon) = u_i(T_0, T_1, T_2, \dots; \varepsilon), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.4)$$

Como a variável independente original (escala temporal t) foi substituída por novas variáveis (escalas) independentes T_0, T_1, T_2, \dots , as derivadas em relação a t devem ser expressas em termos de derivadas parciais, relativamente a T_n tal que,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} &= D_0 + \varepsilon D_1 + \dots \\ \frac{d^2}{dt^2} &= D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \dots\end{aligned}$$

onde $D_n = \frac{\partial}{\partial T_n}$.

Ao substituir a equação (3.4) juntamente com as expansões das derivadas temporais em termos das novas escalas na equação do movimento (3.2), obtém-se um conjunto de equações perturbadas para a determinação de $u_{i,0}, u_{i,1}, \dots$ ordenadas segundo o valor do expoente presente no pequeno parâmetro ε , as quais podem ser resolvidas de maneira recursiva [27].

3.3 O método da média

Originalmente criado por Krylov e Bogoliubov, o método da média é um dos métodos que podem ser utilizados para obter uma solução analítica aproximada de equações diferenciais. Este método é um método de perturbação que consiste em considerar certas quantidades como funções que variam suavemente no tempo [14].

Consideremos as equações (3.1). Fazendo $\varepsilon = 0$ temos

$$\ddot{u}_i + \omega_i^2 u_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.5)$$

as quais são denominadas equações não perturbadas correspondentes ao sistema (3.1) e cujas soluções são funções harmônicas do ângulo de fase $\psi_i = \varphi + \beta_i$:

$$u_i = a_i \cos \psi_i, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.6)$$

sendo a_i a amplitude do i -ésimo modo.

Quando são considerados os parâmetros perturbativos na excitação externa, ou seja, quando $\varepsilon \neq 0$, harmônicos mais altos podem aparecer na solução e as frequências naturais podem depender da amplitude. Considerando que $\varepsilon \rightarrow 0$ a solução pode ser representada por (3.6), podemos representar a solução do sistema de equações diferenciais (3.1) na seguinte forma

$$u_i = a_i(\varepsilon t) \cos \psi_i + \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j M_{ij}(\varphi, a_1, \dots, a_n, \beta_1, \dots, \beta_n), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.7)$$

onde M_{ij} são funções desconhecidas, periódicas em φ , com período 2π , e dependentes de a_i .

O primeiro passo para obter uma solução analítica para o sistema dinâmico (3.1) através do método da média é utilizar o método de variação de parâmetros para transformar as variáveis dependentes u_i em novas variáveis dependentes a_i e β_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Como (3.1) e (3.6) constituem $2n$ equações para $3n$ variáveis, impõe-se condições adicionais

$$\dot{u}_i = -\omega_i a_i \sin \psi_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.8)$$

requerendo que a velocidade da coordenada u do sistema perturbado (3.1) tenha a mesma forma que para o caso $\varepsilon = 0$.

Logo, quando as equações (3.6) são substituídas nas equações (3.1) proporcionam uma mudança de variáveis $v \rightarrow z$, sendo $v = (u_1, \dot{u}_1, u_2, \dot{u}_2, \dots, u_n, \dot{u}_n)^T$ e $z = (a_1, \beta_1, a_2, \beta_2, \dots, a_n, \beta_n)^T$, cujas equações diferenciais são da forma

$$\begin{aligned} \dot{a}_i &= \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j G_{ij}(\varphi, a_1, \dots, a_n, \beta_1, \dots, \beta_n) \sin \psi_i; \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ a_i \dot{\beta}_i &= a_i(\omega_i - \omega) + \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j T_{ij}(\varphi, a_1, \dots, a_n, \beta_1, \dots, \beta_n) \cos \psi_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (3.9)$$

as quais, unidas a $\frac{d\varphi}{dt} = \omega$ formam um sistema equivalente ao (3.1). As funções periódicas $G_{ij}(\varphi, a_1, \dots, a_n, \beta_1, \dots, \beta_n)$ e $T_{ij}(\varphi, a_1, \dots, a_n, \beta_1, \dots, \beta_n)$, $i = 1, 2, \dots, n$ são funções que variam suavemente no tempo. Em geral, restringe-se a solução à k -ésima aproximação, ou seja, as somas infinitas que aparecem nas três últimas equações, são substituídas por somas finitas de 1 até k . Supondo que a solução das equações (3.9) para $k = 1$ são do tipo $z = y + \varepsilon W(y, t, \varepsilon)$, ou seja,

$$\begin{aligned} a_i &= A_i + \varepsilon U_i(\varphi, A_1, \dots, A_n, \xi_1, \dots, \xi_n) \quad i = 1, 2, \dots, n/2; \\ \beta_i &= \xi_i + \varepsilon V_i(\varphi, A_1, \dots, A_n, \xi_1, \dots, \xi_n) \quad i = 1, 2, \dots, n/2, \end{aligned} \quad (3.10)$$

onde U_i e V_i são funções periódicas que variam suavemente no tempo, pode-se obter uma primeira aproximação para as equações acima determinando A_i e ξ_i através de equações médias $\dot{y} = \varepsilon \bar{f}(y)$ de (3.9), substituindo as novas variáveis A_i e ξ_i nestas equações. Para isso, basta que existam as integrais

$$\dot{A}_i = \frac{1}{T} \int_0^T \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j G_{ij}(\varphi, a_1, \dots, a_n, \xi_1, \dots, \xi_n) d\varphi \quad i = 1, 2, \dots, n;$$

$$a_i \dot{\xi}_i = \frac{1}{T} \int_0^T [\varepsilon \sigma_i a_i + \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon^j T n_{ij}(\varphi, a_1, \dots, a_n, \xi_1, \dots, \xi_n)] d\varphi \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.11)$$

onde T é o período.

Obtidas as equações médias acima, basta igualar estas equações a zero e obtém-se as expressões A_i e ξ_i em seu estado estacionário. Observe que este primeiro termo da solução é constante e é equivalente a solução de equilíbrio das equações médias. Chega-se à solução (3.6) retornando às variáveis iniciais u .

Capítulo 4

Aplicação do método das múltiplas escalas e método da média na equação de Duffing - Van der Pol

4.1 Equação do movimento

O problema estudado neste trabalho é um oscilador nanomecânico [2], [3], [4], cuja equação linear de movimento está representada na seguinte forma

$$m\ddot{x} + 2b\dot{x} + kx = -\frac{dE_{cap}}{dx} \quad (4.1)$$

onde m é a massa efetiva de uma haste, $E_{cap} = \frac{C(x)V^2}{2}$ é a energia capacitante, $C(x) = d\frac{C_0}{(1-\frac{x}{d})}$ é o deslocamento dependente da capacitância, d é a distância entre o eletrodo e a haste, b é a constante de amortecimento e k é a constante de elasticidade.

A voltagem aplicada é composta de componentes "grande DC" e "pequeno AC", ou seja, $V(t) = V_{DC} + v \cos \omega t$ onde v é constante e $v \ll V_{DC}$. Nesse caso, $x \ll d$ e a equação do movimento é

$$\ddot{u} + 2\gamma\dot{u} + \omega_0^2 \left\{ 1 - \frac{2C_0v[V_{DC} \cos \omega t + 1/4v \cos 2\omega t]}{k_e d^2} \right\} u = f(t) \quad (4.2)$$

onde $u = x - \frac{C_0 V_{DC}^2}{2k_e d}$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $\gamma = \frac{b}{m} = \frac{\omega_0}{2Q}$ (Q sendo o fator de qualidade mecânica) e $f(t) = \frac{C_0 V_{DC} v}{dm} \cos \omega t$.

A seguir é acrescentado um termo elástico proporcional a u^3 e um termo de amorte-

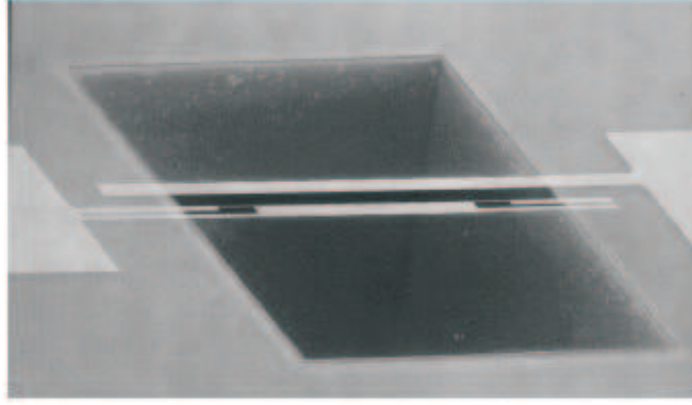


Figura 4.1: O dispositivo consiste em um suporte nanomecânico duplamente apertado e um eletrodo. A força de excitação é aplicada como voltagem entre o suporte e o eletrodo.

cimento não-linear proporcional a $u^2\dot{u}$. Logo, temos que

$$\ddot{u} + 2\gamma(1 + \beta u^2)\dot{u} + \omega_0^2(1 + ku^2)u = f(t). \quad (4.3)$$

A equação do movimento obtida descreve um oscilador de Duffing - Van der Pol com amortecimento não-linear, ou ainda

$$\ddot{u} + 2\gamma(1 + \beta u^2)\dot{u} + \omega_0^2(1 + ku^2)u = F \cos \omega t \quad (4.4)$$

onde $F = \frac{C_0 V_{DC} v}{dm}$.

Assim, temos

$$\ddot{u} + 2\gamma\dot{u} + 2\gamma\beta u^2\dot{u} + \omega_0^2 u + \omega_0^2 k u^3 = F \cos \omega t. \quad (4.5)$$

Considerando como pequenos parâmetros, γ e k , podemos reescrever a equação (4.5) de forma que

$$\ddot{u} + 2\varepsilon(1 + \beta u^2)\dot{u} + \omega_0^2 u + \varepsilon\omega_0^2 u^3 = F \cos \omega t. \quad (4.6)$$

4.2 Expansão Direta

A expansão direta para a solução da equação (4.6) é dada por

$$u(t; \varepsilon) = u_0(t) + \varepsilon u_1(t) + \dots \quad (4.7)$$

Substituindo (4.7) em (4.6), obtemos

$$\begin{aligned} &(\ddot{u}_0 + \varepsilon\ddot{u}_1 + \dots) + 2\varepsilon(\dot{u}_0 + \varepsilon\dot{u}_1 + \dots) + 2\varepsilon\beta(u_0 + \varepsilon u_1 + \dots)^2(\dot{u}_0 + \varepsilon\dot{u}_1 + \dots) \\ &+ \omega_0^2(u_0 + \varepsilon u_1 + \dots) + \varepsilon\omega_0^2(u_0 + \varepsilon u_1 + \dots)^3 = F \cos \omega t \end{aligned}$$

$$(4.8)$$

ou

$$\ddot{u}_0 + \varepsilon \ddot{u}_1 + \omega_0^2 u_0 + \varepsilon \omega_0^2 u_1 + 2\varepsilon \dot{u}_0 + 2\varepsilon \beta u_0^2 \dot{u}_0 + \varepsilon \omega_0^2 u_0^3 + \dots = F \cos \omega t. \quad (4.9)$$

Separando os termos segundo as potências de ε , obtemos

$$\ddot{u}_0 + \omega_0^2 u_0 = F \cos \omega t \quad (4.10)$$

$$\ddot{u}_1 + \omega_0^2 u_1 = -2\dot{u}_0 - 2\beta u_0^2 \dot{u}_0 - \omega_0^2 u_0^3 \quad (4.11)$$

A solução da equação (4.10) é dada por

$$u_0 = u_{0h} + u_{0p} \quad (4.12)$$

onde u_{0h} é a solução da parte homogênea e u_{0p} é a solução particular.

A solução homogênea é da forma

$$u_{0h} = a \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (4.13)$$

onde a e φ são constantes, enquanto que uma solução particular, pelo método dos coeficientes indeterminados, resulta

$$u_{0p} = \frac{F}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t. \quad (4.14)$$

Portanto,

$$u_0 = a \cos(\omega_0 t + \varphi) + \frac{F}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t \quad (4.15)$$

ou

$$u_0 = a \cos(\omega_0 t + \varphi) + 2\Lambda \cos \omega t \quad (4.16)$$

onde $2\Lambda = F(\omega_0^2 - \omega^2)^{-1}$.

Substituindo (4.16) em (4.11) obtemos

$$\begin{aligned}
\ddot{u}_1 + \omega_0^2 u_1 = & \left[2a\omega_0 + 2\beta\omega_0\left(\frac{a^3}{4} + 2a\Lambda^2\right) \right] \sin(\omega_0 t + \varphi) - \omega_0^2 \left[6a\Lambda^2 + \frac{3}{4}a^3 \right] \cos(\omega_0 t + \varphi) \\
& + [2\Lambda\omega + 2\beta a^2 \Lambda\omega + 4\beta\Lambda^3\omega] \sin \omega t - \omega_0^2 [3a^2\Lambda + 6\Lambda^3] \cos \omega t \\
& + 4\beta\Lambda^3\omega \sin(3\omega t) - 2\omega_0^2\Lambda^3 \cos(3\omega t) + 2\beta \left[a^2\omega_0\Lambda + \frac{a^2}{2}\Lambda\omega \right] \sin[(2\omega_0 + \omega)t + 2\varphi] \\
& - \frac{3}{2}\omega_0^2 a^2 \Lambda \cos[(2\omega_0 + \omega)t + 2\varphi] + 2\beta \left[a^2\omega_0\Lambda - \frac{a^2}{2}\Lambda\omega \right] \sin[(2\omega_0 - \omega)t + 2\varphi] \\
& - \frac{3}{2}\omega_0^2 a^2 \Lambda \cos[(2\omega_0 - \omega)t + 2\varphi] + [4a\beta\Lambda^2\omega + 2a\beta\Lambda^2\omega_0] \sin[(\omega_0 + 2\omega)t + \varphi] \\
& - 3\omega_0^2 a\Lambda^2 \cos[(\omega_0 + 2\omega)t + \varphi] + [2a\beta\Lambda^2\omega_0 - 4a\beta\Lambda^2\omega] \sin[(\omega_0 - 2\omega)t + \varphi] \\
& - 3\omega_0^2 a\Lambda^2 \cos[(\omega_0 - 2\omega)t + \varphi] - \frac{\omega_0^2}{4} a^3 \cos(3\omega_0 t + 3\varphi) \\
& + \frac{a^3}{2} \beta\omega_0 \sin(3\omega_0 t + 3\varphi)
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Como (4.17) é linear, uma solução particular pode ser obtida como a soma de soluções particulares, onde cada uma corresponde a um termo não homogêneo diferente. Assim,

temos

$$\begin{aligned}
u_1 = & \left[a + \frac{1}{4}\beta a^3 + 2\beta a\Lambda^2 \right] t \sin(\omega_0 t + \varphi) + \left[3a\Lambda^2 + \frac{3}{8}a^3 \right] \omega_0 t \cos(\omega_0 t + \varphi) \\
& + \frac{(2\Lambda\omega + 2\beta a^2\Lambda\omega + 4\beta\Lambda^3\omega)}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \omega t - \frac{\omega_0^2(3a^2\Lambda + 6\Lambda^3)}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t \\
& + \frac{4\beta\omega\Lambda^3}{\omega_0^2 - 9\omega^2} \sin 3\omega t - \frac{2\omega_0^2\Lambda^3}{\omega_0^2 - 9\omega^2} \cos 3\omega t + \frac{2\beta(a^2\omega_0\Lambda + \frac{a^2}{2}\Lambda\omega)}{\omega_0^2 - (2 + \omega)^2} \sin [(2\omega_0 + \omega)t + 2\varphi] \\
& - \frac{3\omega_0^2 a^2 \Lambda}{2[\omega_0^2 - (2\omega_0 + \omega)^2]} \cos [(2\omega_0 + \omega)t + 2\varphi] + \frac{2\beta(a^2\omega_0\Lambda - \frac{a^2}{2}\Lambda\omega)}{\omega_0^2 - (2\omega_0 - \omega)^2} \sin [(2\omega_0 - \omega)t + 2\varphi] \\
& - \frac{3\omega_0^2 a^2 \Lambda}{2[\omega_0^2 - (2\omega_0 - \omega)^2]} \cos [(2\omega_0 - \omega)t + 2\varphi] + \frac{4\beta a\omega\Lambda^2 + 2a\beta\Lambda^2}{\omega_0^2 - (1 + \omega)^2} \sin [(\omega_0 + 2\omega)t + \varphi] \\
& + \frac{2a\beta\omega_0\Lambda^2 - 4\beta a\omega\Lambda^2}{\omega_0^2 - (\omega_0 - \omega)^2} \sin [(\omega_0 - 2\omega)t + \varphi] - \frac{3\omega_0^2 a\Lambda^2}{\omega_0^2 - (\omega_0 + 2\omega)^2} \cos [(\omega_0 + 2\omega)t + \varphi] \\
& - \frac{4a\beta\Lambda^2\omega}{\omega_0^2 - (1 - 2\omega)^2} \sin [(1 - 2\omega)t + \varphi] - \frac{3\omega_0^2 a\Lambda^2}{\omega_0^2 - (\omega_0 - 2\omega)^2} \cos [(\omega_0 - 2\omega)t + \varphi] \\
& + \frac{a^3}{32} \cos(3\omega_0 t + 3\varphi) - \frac{\beta a^3}{16\omega_0} \sin(3\omega_0 t + 3\varphi).
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Substituindo (4.16) e (4.18) em (4.7), obtemos

$$\begin{aligned}
u = & a \cos(\omega_0 t + \varphi) + \frac{F}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t + \varepsilon \left\{ \left[a + \frac{1}{4}\beta a^3 + 2\beta a\Lambda^2 \right] t \sin(\omega_0 t + \varphi) \right. \\
& + \left[3a\Lambda^2 + \frac{3}{8}a^3 \right] \omega_0 t \cos(\omega_0 t + \varphi) + \frac{(2\Lambda\omega + 2\beta a^2\Lambda\omega + 4\beta\Lambda^3\omega)}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \omega t \\
& - \frac{\omega_0^2(3a^2\Lambda + 6\Lambda^3)}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t + \frac{4\beta\omega\Lambda^3}{\omega_0^2 - 9\omega^2} \sin 3\omega t - \frac{2\omega_0^2\Lambda^3}{\omega_0^2 - 9\omega^2} \cos 3\omega t \\
& + \frac{2\beta(a^2\omega_0\Lambda + \frac{a^2}{2}\Lambda\omega)}{\omega_0^2 - (2 + \omega)^2} \sin [(2\omega_0 + \omega)t + 2\varphi] - \frac{3\omega_0^2 a^2 \Lambda}{2[\omega_0^2 - (2\omega_0 + \omega)^2]} \cos [(2\omega_0 + \omega)t + 2\varphi]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2\beta(a^2\omega_0\Lambda - \frac{a^2}{2}\Lambda\omega)}{\omega_0^2 - (2\omega_0 - \omega)^2} \sin [(2\omega_0 - \omega)t + 2\varphi] - \frac{3\omega_0^2 a^2 \Lambda}{2[\omega_0^2 - (2\omega_0 - \omega)^2]} \cos [(2\omega_0 - \omega)t + 2\varphi] \\
& + \frac{4\beta a\omega\Lambda^2 + 2a\beta\Lambda^2}{\omega_0^2 - (1 + \omega)^2} \sin [(\omega_0 + 2\omega)t + \varphi] + \frac{2a\beta\omega_0\Lambda^2 - 4\beta a\omega\Lambda^2}{\omega_0^2 - (\omega_0 - \omega)^2} \sin [(\omega_0 - 2\omega)t + \varphi] \\
& - \frac{3\omega_0^2 a\Lambda^2}{\omega_0^2 - (\omega_0 + 2\omega)^2} \cos [(\omega_0 + 2\omega)t + \varphi] - \frac{4a\beta\Lambda^2\omega}{\omega_0^2 - (1 - 2\omega)^2} \sin [(1 - 2\omega)t + \varphi] \\
& - \frac{3\omega_0^2 a\Lambda^2}{\omega_0^2 - (\omega_0 - 2\omega)^2} \cos [(\omega_0 - 2\omega)t + \varphi] + \frac{a^3}{32} \cos (3\omega_0 t + 3\varphi) \\
& - \left. \frac{\beta a^3}{16\omega_0} \sin (3\omega_0 t + 3\varphi) \right\} + \dots
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Podemos observar em (4.19) que termos do tipo $t \sin (\omega_0 t + \varphi)$ ou $t \cos (\omega_0 t + \varphi)$ tende a infinito quando $t \rightarrow \infty$, mas a solução da equação (4.6) é limitada para qualquer valor de t . Estes termos são conhecidos como *termos seculares mistos* ou *termos de Poisson*, e comprometem a solução da equação. Este fato ocorre porque truncamos uma série infinita. Observe ainda que (4.19) contém termos cujos denominadores podem ser muito pequenos. Estes termos são denominados *pequenos divisores*. Neste problema, pequenos divisores ocorrem quando $\omega \approx 0$, $\omega \approx \omega_0$, $\omega \approx \frac{\omega_0}{3}$, $\omega \approx 2\omega_0$, $\omega \approx \frac{1}{2}(1 + \omega_0)$, $\omega \approx \frac{1}{2}(1 - \omega_0)$, $\omega \approx \omega_0 - 1$. Essas frequências especiais são denominadas *frequências ressonantes*.

Dessa forma podemos identificar, através da expansão direta, a presença de pequenos divisores e também termos seculares. Estes termos devem ser eliminados da solução para não comprometer a sua validade.

Na próxima sessão, usamos o método de múltiplas escalas para encontrar uma expansão uniforme de primeira ordem para (4.6) que não contenha termos seculares e pequenos divisores.

4.3 O Método de Múltiplas Escalas

Para encontrarmos uma solução aproximada para a equação (4.6) que seja livre de termos seculares e termos com pequenos divisores, utilizaremos um dos métodos de perturbação, o método de múltiplas escalas [20]. Introduzimos as escalas $T_0 = t$ e $T_1 = \varepsilon t$, então as derivadas ficam

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} &= D_0 + \varepsilon D_1 + \dots \\ \frac{d^2}{dt^2} &= D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \dots\end{aligned}$$

onde $D_n = \frac{\partial}{\partial T_n}$.

Devemos verificar se ωt será uma escala rápida ou lenta. Se ω está distante de zero, então $\cos \omega t$ varia rapidamente, e teremos

$$\cos \omega t = \cos \omega T_0 \quad (\text{pois } t = T_0) \quad (4.20)$$

Por outro lado, se $\omega \approx 0$, $\cos \omega t$ varia lentamente. Neste caso, faremos $\omega = \varepsilon \sigma$, onde $\sigma = O(1)$. Assim,

$$\cos \omega t = \cos \sigma \varepsilon t = \cos \sigma(\varepsilon t) = \cos \sigma T_1 \quad (4.21)$$

e portanto, ωt é representado em termos de T_1 . Conseqüentemente, o caso $\omega \approx 0$ precisará ser tratado de forma independente.

Supondo que ω está distante de zero, introduzindo as escalas na equação (4.6) obtemos

$$D_0^2 u + 2\varepsilon D_0 D_1 u + \dots + \omega_0^2 u + 2\varepsilon(1 + \beta u^2)(D_0 u + \varepsilon D_1 u + \dots) + \varepsilon \omega_0^2 u^3 = F \cos \omega T_0. \quad (4.22)$$

Buscamos uma solução aproximada para a equação (4.22) da forma

$$u = u_0(T_0, T_1) + \varepsilon u_1(T_0, T_1) + \dots \quad (4.23)$$

Substituindo (4.23) em (4.22), obtemos

$$\begin{aligned}D_0^2 u_0 + \varepsilon D_0^2 u_1 + 2\varepsilon D_0 D_1 u_0 + \omega_0^2 u_0 + \varepsilon \omega_0^2 u_1 + 2\varepsilon[1 + \beta(u_0 + \varepsilon u_1 + \dots)^2][D_0 u_0 + \varepsilon D_0 u_1 \\ + \varepsilon(D_1 u_0 + \varepsilon D_1 u_1 + \dots)] + \varepsilon \omega_0^2 [u_0 + \varepsilon u_1 + \dots]^3 = F \cos \omega T_0\end{aligned}$$

Logo,

$$D_0^2 u_0 + \varepsilon D_0^2 u_1 + 2\varepsilon D_0 D_1 u_0 + \omega_0^2 u_0 + \varepsilon \omega_0^2 u_1 + 2\varepsilon D_0 u_0 + \varepsilon 2\beta u_0^2 D_0 u_0 + \varepsilon \omega_0^2 u_0^3 + \dots = F \cos \omega T_0 \quad (4.24)$$

Agora, separando os termos em relação às potências de ε , temos

$$\varepsilon^0 : D_0^2 u_0 + \omega_0^2 u_0 = F \cos \omega T_0 \quad (4.25)$$

$$\varepsilon^1 : D_0^2 u_1 + \omega_0^2 u_1 = -2D_0 u_0 - 2D_0 D_1 u_0 - 2\beta u_0^2 D_0 u_0 - \omega_0^2 u_0^3 \quad (4.26)$$

A solução geral da equação (4.25) é dada por

$$u_0 = a(T_1) \cos [\omega_0 T_0 + \varphi(T_1)] + 2\Lambda \cos (\omega T_0) \quad (4.27)$$

onde $2\Lambda = F(\omega_0^2 - \omega^2)^{-1}$.

Ou ainda, na forma complexa onde $\cos \theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$, podemos reescrever (4.27) como

$$u_0 = A e^{i\omega_0 T_0} + \Lambda e^{i\omega T_0} + \bar{A} e^{-i\omega_0 T_0} + \Lambda e^{-i\omega T_0} \quad (4.28)$$

com $A = \frac{1}{2} a e^{i\varphi}$ e $\bar{A} = \frac{1}{2} a e^{-i\varphi}$.

Assim, (4.26) fica

$$\begin{aligned} D_0^2 u_1 + \omega_0^2 u_1 &= -[2iA + 2iA' + 2i\beta A^2 \bar{A} + 4i\beta A \Lambda^2 + 3\omega_0^2 A^2 \bar{A} + 6\omega_0^2 A \Lambda^2] e^{i\omega_0 T_0} \\ &\quad - [2i\omega \Lambda + 4i\beta A \bar{A} \omega \Lambda + 2i\beta \omega \Lambda^3 + 6\omega_0^2 A \bar{A} \Lambda + 3\omega_0^2 \Lambda^3] e^{i\omega T_0} \\ &\quad - [2i\omega_0 \beta A^3 + \omega_0^2 A^3] e^{3i\omega_0 T_0} - [2i\beta \omega \Lambda^3 + \omega_0^2 \Lambda^3] e^{i3\omega T_0} - [4i\omega_0 \beta A^2 \Lambda \\ &\quad + 2i\beta A^2 \omega \Lambda + 3\omega_0^2 A^2 \Lambda] e^{i(2\omega_0 + \omega) T_0} - [4i\omega_0 \beta A^2 \Lambda - 2i\beta A^2 \omega \Lambda \\ &\quad + 3\omega_0^2 A^2 \Lambda] e^{i(2\omega_0 - \omega) T_0} - [2i\omega_0 \beta A \Lambda^2 + 4i\beta A \omega \Lambda^2 + 3\omega_0^2 A \Lambda^2] e^{i(\omega_0 + 2\omega) T_0} \\ &\quad - [2i\omega_0 \beta A \Lambda^2 - 4i\beta A \omega \Lambda^2 + 3\omega_0^2 A \Lambda^2] e^{i(\omega_0 - 2\omega) T_0} + cc \end{aligned} \quad (4.29)$$

onde cc representa os termos complexos conjugados. A solução particular de (4.29) contém termos seculares e termos com pequenos divisores. Considerando o caso onde $\omega = \frac{\omega_0}{3}$ (ressonância secundária) e $\omega_0 = 1$, introduziremos o parâmetro de sintonia $\sigma = O(1)$ dado por

$$3\omega = 1 + \varepsilon\sigma. \quad (4.30)$$

Assim temos

$$3\omega T_0 = (1 + \varepsilon\sigma)T_0 = T_0 + \sigma\varepsilon T_0 = T_0 + \sigma T_1. \quad (4.31)$$

Substituindo (4.31) em (4.29) obtemos

$$\begin{aligned} D_0^2 u_1 + u_1 &= -[2iA + 2iA' + 2i\beta A^2 \bar{A} + 4i\beta A \Lambda^2 + 3A^2 \bar{A} + 6A \Lambda^2] e^{iT_0} \\ &\quad - [2i\omega\Lambda + 4i\beta A \bar{A} \omega\Lambda + 2i\beta\omega\Lambda^3 + 6A \bar{A} \Lambda + 3\Lambda^3] e^{i\frac{T_0}{3} + i\frac{\sigma}{3}\varepsilon T_0} - [2i\beta A^3 + A^3] e^{3iT_0} \\ &\quad - [2i\beta\omega\Lambda^3 + \Lambda^3] e^{iT_0 + i\sigma\varepsilon T_0} - [4i\beta A^2 \Lambda + 2i\beta A^2 \omega\Lambda + 3A^2 \Lambda] e^{\frac{7}{3}iT_0 + i\frac{\sigma}{3}\varepsilon T_0} \\ &\quad - [4i\beta A^2 \Lambda - 2i\beta A^2 \omega\Lambda + 3A^2 \Lambda] e^{\frac{5}{3}iT_0 - i\frac{\sigma}{3}\varepsilon T_0} - [2i\beta A \Lambda^2 + 4i\beta A \omega\Lambda^2 \\ &\quad + 3A \Lambda^2] e^{\frac{5}{3}iT_0 + i\frac{2}{3}\sigma\varepsilon T_0} - [2i\beta A \Lambda^2 - 4i\beta A \omega\Lambda^2] e^{\frac{1}{3}iT_0 - i\frac{2}{3}\sigma\varepsilon T_0} + cc. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Temos que T_0 é uma escala rápida e a combinação εT_0 é lenta. Como $T_1 = \varepsilon T_0$, então, (4.32) poderá ser escrita na forma

$$\begin{aligned} D_0^2 u_1 + u_1 &= -[2iA + 2iA' + 2i\beta A^2 \bar{A} + 4i\beta A \Lambda^2 + 3A^2 \bar{A} + 6A \Lambda^2] e^{iT_0} \\ &\quad - [2i\omega\Lambda + 4i\beta A \bar{A} \omega\Lambda + 2i\beta\omega\Lambda^3 + 6A \bar{A} \Lambda + 3\Lambda^3] e^{i\frac{T_0}{3} + i\frac{\sigma}{3}T_1} - [2i\beta A^3 + A^3] e^{3iT_0} \\ &\quad - [2i\beta\omega\Lambda^3 + \Lambda^3] e^{iT_0 + i\sigma T_1} - [4i\beta A^2 \Lambda + 2i\beta A^2 \omega\Lambda + 3A^2 \Lambda] e^{\frac{7}{3}iT_0 + i\frac{\sigma}{3}T_1} - [4i\beta A^2 \Lambda \\ &\quad - 2i\beta A^2 \omega\Lambda + 3A^2 \Lambda] e^{\frac{5}{3}iT_0 - i\frac{\sigma}{3}T_1} - [2i\beta A \Lambda^2 + 4i\beta A \omega\Lambda^2 + 3A \Lambda^2] e^{iT_0 + i\frac{2}{3}T_0 + i\frac{2}{3}\sigma T_1} \\ &\quad - [2i\beta A \Lambda^2 - 4i\beta A \omega\Lambda^2] e^{\frac{1}{3}iT_0 - i\frac{2}{3}\sigma T_1} + cc. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Agora escrevemos a equação (4.33), como sendo

$$\begin{aligned}
D_0^2 u_1 + u_1 = & -[2iA + 2iA' + 2i\beta A^2 \bar{A} + 4i\beta A \Lambda^2 + 3A^2 \bar{A} + 6A\Lambda^2]e^{iT_0} \\
& -[2i\beta\omega\Lambda^3 + \Lambda^3]e^{iT_0}e^{i\sigma T_1} + cc + TNS
\end{aligned} \tag{4.34}$$

onde TNS representa os termos que não dão origem a termos seculares. Para evitar os termos seculares que aparecem na solução em u_1 , fazemos

$$2iA + 2iA' + 2i\beta A^2 \bar{A} + 4i\beta A \Lambda^2 + 3A^2 \bar{A} + 6A\Lambda^2 + [2i\beta\omega\Lambda^3 + \Lambda^3]e^{i\sigma T_1} = 0 \tag{4.35}$$

ou ainda

$$ia'e^{i\varphi} - a\varphi'e^{i\varphi} + ia e^{i\varphi} + \frac{1}{4}i\beta a^3 e^{i\varphi} + 2i\beta\Lambda^2 a e^{i\varphi} + \frac{3}{8}a^3 e^{i\varphi} + 3a\Lambda^2 e^{i\varphi} + (2i\beta\omega\Lambda^3 + \Lambda^3)e^{i\sigma T_1} = 0. \tag{4.36}$$

Multiplicando a equação (4.36) por $\exp(-i\varphi)$ resulta

$$ia' - a\varphi' + ia + \frac{1}{4}i\beta a^3 + 2i\beta\Lambda^2 a + \frac{3}{8}a^3 + 3a\Lambda^2 + (2i\beta\omega\Lambda^3 + \Lambda^3)e^{i\sigma T_1}e^{-i\varphi} = 0 \tag{4.37}$$

ou

$$\begin{aligned}
ia' - a\varphi' + ia + \frac{1}{4}i\beta a^3 + 2i\beta\Lambda^2 a + \frac{3}{8}a^3 + 3a\Lambda^2 + (2i\beta\omega\Lambda^3 + \Lambda^3) \cos(\sigma T_1 - \varphi) \\
+i(2i\beta\omega\Lambda^3 + \Lambda^3) \sin(\sigma T_1 - \varphi) = 0.
\end{aligned} \tag{4.38}$$

Separando as partes real e imaginária da equação (4.38), temos

$$a' = -a - \frac{1}{4}\beta a^3 - 2\beta\Lambda^2 a - 2\beta\omega\Lambda^3 \cos(\sigma T_1 - \varphi) - \Lambda^3 \sin(\sigma T_1 - \varphi) \tag{4.39}$$

$$a\varphi' = \frac{3}{8}a^3 + 3a\Lambda^2 + \Lambda^3 \cos(\sigma T_1 - \varphi) - 2\beta\omega\Lambda^3 \sin(\sigma T_1 - \varphi) \tag{4.40}$$

Agora, transformamos o sistema não-linear acima em um sistema autônomo, introduzindo a transformação

$$\gamma = \sigma T_1 - \varphi \tag{4.41}$$

$$\gamma' = \sigma - \varphi' \tag{4.42}$$

Logo, temos

$$a' = -a - \frac{1}{4}\beta a^3 - 2\beta\Lambda^2 a - 2\beta\omega\Lambda^3 \cos \gamma - \Lambda^3 \sin \gamma \quad (4.43)$$

$$a\gamma' = a\sigma - \frac{3}{8}a^3 - 3a\Lambda^2 - \Lambda^3 \cos \gamma + 2\beta\omega\Lambda^3 \sin \gamma \quad (4.44)$$

Agora, das equações (4.27) e (4.41), obtemos

$$u_0 = a \cos(T_0 + \sigma T_1 - \gamma) + 2\Lambda \cos(\omega T_0) \quad (4.45)$$

ou ainda,

$$u_0 = a \cos(t + \varepsilon\sigma t - \gamma) + 2\Lambda \cos(\omega t). \quad (4.46)$$

Substituindo (4.46) em (4.23), e usando (4.30), obtemos

$$u = a \cos(3\omega t - \gamma) + 2\Lambda \cos(\omega t) + O(\varepsilon) \quad (4.47)$$

Com isso, temos uma primeira aproximação para u , dada por (4.47) onde a e γ são soluções das equações (4.43) e (4.44) respectivamente.

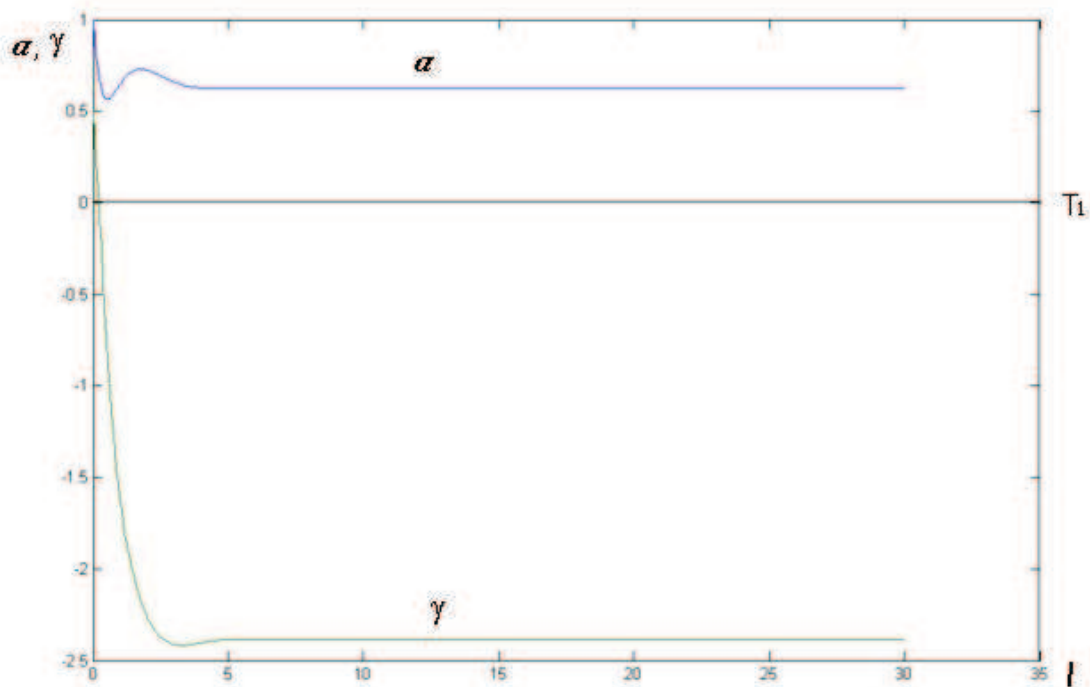


Figura 4.2: Variação de a e γ com T_1 calculada numericamente de (4.43) e (4.44) para $\beta = 0.1$, $\Lambda = 1.0$, $\sigma = 0.1$, $\omega = 0.5$, $a(0) = 1.0$ e $\gamma(0) = 1.0$. [20]

A *Figura 4.1* mostra a variação de a e γ em relação a T_1 , calculada através da integração numérica das equações (4.43) e (4.44). A princípio, a e γ apresentam oscilações, mas no estado estacionário tornam-se constantes. Assim, fazendo $a' = 0$ e $\gamma' = 0$ em (4.43) e (4.44), obtemos

$$2\beta\omega\Lambda^3 \cos \gamma + \Lambda^3 \sin \gamma = -a - \frac{1}{4}\beta a^3 - 2\beta\Lambda^2 a \quad (4.48)$$

$$\Lambda^3 \cos \gamma - 2\beta\omega\Lambda^3 \sin \gamma = a\sigma - \frac{3}{8}a^3 - 3a\Lambda^2. \quad (4.49)$$

Elevando ao quadrado os dois lados de cada uma das equações (4.48) e (4.49) e somando-as, resulta

$$\begin{aligned} a^2 \left(1 + \frac{1}{4}a^2\beta\right)^2 + 4a^2\beta\Lambda^2 \left(1 + \frac{1}{4}a^2\beta\right) + 4a^2\beta^2\Lambda^4 + a^2 \left(\sigma - \frac{3}{8}a^2\right)^2 - 6a^2\Lambda^2 \left(\sigma - \frac{3}{8}a^2\right) \\ + 9a^2\Lambda^4 - 4\beta^2\omega^2\Lambda^6 - \Lambda^6 = 0 \end{aligned} \quad (4.50)$$

A equação (4.50) é uma equação cúbica em a^2 e representa a equação resposta de frequência.

4.4 O Método da Média

O primeiro passo na aplicação do método da média é o uso do método da variação dos parâmetros, para transformar as constantes de integração da solução do problema não perturbado em duas variáveis dependentes de t . No problema tratado aqui essas constantes são a amplitude a e a fase φ do termo de oscilações livres. Para realizarmos este processo, notemos que quando $\varepsilon = 0$, a solução geral da equação (4.6) é

$$u = a \cos(\omega_0 t + \varphi) + 2\Lambda \cos(\omega t). \quad (4.51)$$

Derivando (4.51) em relação a t , obtemos

$$\dot{u} = -a\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) - 2\Lambda\omega \sin(\omega t). \quad (4.52)$$

Quando $\varepsilon \neq 0$, ainda temos a solução na forma (4.51), no entanto com $a = a(t)$ e $\varphi = \varphi(t)$, que são determinadas pelas equações variacionais.

Agora, derivando (4.51) em relação ao tempo, obtemos

$$\dot{u} = -a\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) + \dot{a} \cos(\omega_0 t + \varphi) - a\dot{\varphi} \sin(\omega_0 t + \varphi) - 2\Lambda\omega \sin(\omega t). \quad (4.53)$$

Comparando (4.52) com (4.53), temos que

$$\dot{a} \cos(\omega_0 t + \varphi) - a\dot{\varphi} \sin(\omega_0 t + \varphi) = 0. \quad (4.54)$$

Derivando (4.52) em relação ao tempo t , obtemos

$$\ddot{u} = -a\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) - \dot{a}\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) - a\dot{\varphi}\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) - 2\Lambda\omega^2 \cos(\omega t). \quad (4.55)$$

Substituindo (4.51), (4.52) e (4.55) em (4.6), resulta

$$\begin{aligned} & -\dot{a}\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) - a\dot{\varphi}\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) - 2\Lambda\omega^2 \cos(\omega t) + 2\omega_0^2\Lambda \cos(\omega t) \\ & + 2\varepsilon\{1 + \beta[a \cos(\omega_0 t + \varphi) + 2\Lambda \cos(\omega t)]^2\} \cdot \{-a\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) \\ & - 2\Lambda\omega \sin(\omega t)\} + \varepsilon\omega_0^2[a \cos(\omega_0 t + \varphi) + 2\Lambda \cos(\omega t)]^3 = F \cos(\omega t). \end{aligned} \quad (4.56)$$

Como $F = 2\Lambda(\omega_0^2 - \omega^2)$, a equação (4.56) ficará

$$\begin{aligned} \dot{a}\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) + a\dot{\varphi}\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) &= 2\varepsilon\{1 + \beta[a \cos(\omega_0 t + \varphi) + 2\Lambda \cos(\omega t)]^2\} \cdot \\ & \{-a \sin(t + \varphi) - 2\Lambda\omega \sin(\omega t)\} + \varepsilon\omega_0^2[a \cos(t + \varphi) + 2\Lambda \cos(\omega t)]^3. \end{aligned} \quad (4.57)$$

Multiplicando (4.54) por $\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$ e (4.57) por $\sin(\omega_0 t + \varphi)$ e somando os resultados, obtemos

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \frac{2}{\omega_0}\varepsilon\{1 + \beta[a \cos(\omega_0 t + \varphi) + 2\Lambda \cos(\omega t)]^2\} \cdot \{-a\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) \\ & - 2\Lambda\omega \sin(\omega t)\} \sin(\omega_0 t + \varphi) + \varepsilon\omega_0[a \cos(\omega_0 t + \varphi) + 2\Lambda \cos(\omega t)]^3 \sin(\omega_0 t + \varphi). \end{aligned} \quad (4.58)$$

Agora substituindo (4.58) em (4.54), temos

$$\begin{aligned} a\dot{\varphi} &= \frac{2}{\omega_0}\varepsilon\{1 + \beta[a \cos(\omega_0 t + \varphi) + 2\Lambda \cos(\omega t)]^2\} \cdot \{-a\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) \\ & - 2\Lambda\omega \sin(\omega t)\} \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi) + \varepsilon\omega_0[a \cos(\omega_0 t + \varphi) + 2\Lambda \cos(\omega t)]^3 \cos(\omega_0 t + \varphi). \end{aligned}$$

(4.59)

Usando as identidades trigonométricas, reescrevemos (4.58) e (4.59) de forma que

$$\begin{aligned}
\dot{a} = & -\varepsilon a - 2\varepsilon\beta a\Lambda^2 - \frac{1}{4}\varepsilon\beta a^3 + \left[\frac{1}{4}\varepsilon\omega_0 a^3 + 3\varepsilon\omega_0 a\Lambda^2 \right] \cdot \sin(2\omega_0 t + 2\varphi) \\
& + [\varepsilon a + 2\varepsilon\beta a\Lambda^2] \cdot \cos(2\omega_0 t + 2\varphi) + \frac{1}{4}\varepsilon\beta a^3 \cos(4\omega_0 t + 4\varphi) - 2\varepsilon\beta a\Lambda^2 \cos(2\omega t) \\
& + \frac{1}{8}\varepsilon\omega_0 a^3 \sin(4\omega_0 t + 4\varphi) + \left[\frac{2}{\omega_0}\varepsilon\Lambda\omega - \varepsilon\beta\Lambda a^2 + \frac{1}{2\omega_0}\varepsilon\beta\Lambda\omega a^2 + \frac{2}{\omega_0}\varepsilon\beta\Lambda^3\omega \right] \cdot \\
& \cos[(\omega_0 + \omega)t + \varphi] - \left[\varepsilon\beta\Lambda a^2 + \frac{2}{\omega_0}\varepsilon\Lambda\omega + \frac{1}{2\omega_0}\varepsilon\beta\Lambda\omega a^2 + \frac{2}{\omega_0}\varepsilon\beta\Lambda^3\omega \right] \cdot \cos[(\omega_0 - \omega)t + \varphi] \\
& + \left[\varepsilon\beta\Lambda a^2 - \frac{1}{2\omega_0}\varepsilon\beta\Lambda\omega a^2 \right] \cdot \cos[(3\omega_0 - \omega)t + 3\varphi] + \left[\varepsilon\beta\Lambda a^2 + \frac{1}{2\omega_0}\varepsilon\beta\Lambda\omega a^2 \right] \cdot \\
& \cos[(3\omega_0 + \omega)t + 3\varphi] + \left[\varepsilon\beta\Lambda^2 a + \frac{2}{\omega_0}\varepsilon\beta\Lambda^2\omega a \right] \cdot \cos[(2\omega_0 + 2\omega)t + 2\varphi] + \left[\varepsilon\beta\Lambda^2 a \right. \\
& \left. - \frac{2}{\omega_0}\varepsilon\beta\Lambda^2\omega a \right] \cdot \cos[(2\omega_0 - 2\omega)t + 2\varphi] - \frac{2}{\omega_0}\varepsilon\beta\Lambda^3\omega \cos[(\omega_0 - 3\omega)t + \varphi] \\
& + \frac{2}{\omega_0}\varepsilon\beta\Lambda^3\omega \cos[(\omega_0 + 3\omega)t + \varphi] + \frac{3}{4}\varepsilon\omega_0\Lambda a^2 \sin[(3\omega_0 + \omega)t + 3\varphi] \\
& + \frac{3}{4}\varepsilon\omega_0\Lambda a^2 \sin[(3\omega_0 - \omega)t + 3\varphi] + \left[\frac{3}{4}\varepsilon\omega_0\Lambda a^2 + 3\varepsilon\omega_0\Lambda^3 \right] \cdot \sin[(\omega_0 + \omega)t + \varphi] \\
& + \left[\frac{3}{4}\varepsilon\omega_0\Lambda a^2 + 3\varepsilon\omega_0\Lambda^3 \right] \cdot \sin[(\omega_0 - \omega)t + \varphi] + \frac{3}{2}\varepsilon\omega_0\Lambda^2 a \sin[(2\omega_0 + 2\omega)t + 2\varphi] \\
& + \frac{3}{2}\varepsilon\omega_0\Lambda^2 a \sin[(2\omega_0 - 2\omega)t + 2\varphi] + \varepsilon\omega_0\Lambda^3 \sin[(\omega_0 + 3\omega)t + \varphi] \\
& + \varepsilon\omega_0\Lambda^3 \sin[(\omega_0 - 3\omega)t + \varphi]
\end{aligned}$$

(4.60)

$$\begin{aligned}
a\dot{\varphi} = & \frac{3}{8}\omega_0 a^3 + 3\varepsilon\omega_0\Lambda^2 a + \left[\frac{4}{8}\varepsilon\omega_0 a^3 + 3\varepsilon\omega_0\Lambda^2 a \right] \cdot \cos(2\omega_0 t + 2\varphi) + \left[-\varepsilon a - \frac{1}{2}\varepsilon\beta a^3 \right. \\
& \left. - 2\varepsilon\beta\Lambda^2 a \right] \cdot \sin(2\omega_0 t + 2\varphi) - \frac{1}{4}\varepsilon\beta a^3 \sin(4\omega_0 t + 4\varphi) + \frac{1}{8}\varepsilon\omega_0 a^3 \cos(4\omega_0 t + 4\varphi) \\
& - \frac{4}{\omega_0}\varepsilon\beta\Lambda^2 \omega a \sin(2\omega t) + 3\varepsilon\omega_0\Lambda^2 a \cos(2\omega t) + \left[-\frac{2}{\omega_0}\varepsilon\Lambda\omega - \frac{3}{2\omega_0}\varepsilon\beta\Lambda\omega a^2 - \varepsilon\beta\omega_0\Lambda a^2 \right. \\
& \left. - 2\varepsilon\beta\omega\Lambda^3 \right] \cdot \sin[(\omega_0 + \omega)t + \varphi] + \left[\frac{9}{4}\varepsilon\omega_0\Lambda a^2 + 3\varepsilon\omega_0\Lambda^3 \right] \cdot \cos[(\omega_0 + \omega)t + \varphi] \\
& + \left[\frac{2}{\omega_0}\varepsilon\Lambda\omega + \frac{3}{2\omega_0}\varepsilon\Lambda\omega a^2 - \varepsilon\beta\omega_0\Lambda a^2 + \frac{2}{\omega_0}\varepsilon\beta\omega\Lambda^3 \right] \cdot \sin[(\omega_0 - \omega)t + \varphi] + \left[\frac{9}{4}\varepsilon\omega_0\Lambda a^2 \right. \\
& \left. + 3\varepsilon\omega_0\Lambda^3 \right] \cdot \cos[(\omega_0 - \omega)t + \varphi] - \frac{2}{\omega_0}\varepsilon\beta\omega\Lambda^3 \sin[(\omega_0 + 3\omega)t + \varphi] \\
& + \frac{2}{\omega_0}\varepsilon\beta\Lambda^3 \omega \sin[(\omega_0 - 3\omega)t + \varphi] + \varepsilon\Lambda^3 \omega_0 \cos[(\omega_0 + 3\omega)t + \varphi] \\
& + \varepsilon\Lambda^3 \omega_0 \cos[(\omega_0 - 3\omega)t + \varphi] + \left[-\frac{1}{\omega_0}\varepsilon\beta\Lambda\omega a^2 - \varepsilon\beta\omega_0\Lambda a^2 \right] \cdot \sin[(3\omega_0 + \omega)t + 3\varphi] \\
& + \left[\frac{1}{\omega_0}\varepsilon\beta\Lambda\omega a^2 - \varepsilon\beta\omega_0\Lambda a^2 \right] \cdot \sin[(3\omega_0 - \omega)t + 3\varphi] + \frac{3}{4}\varepsilon\omega_0\Lambda a^2 \cos[(3\omega_0 + \omega)t + 3\varphi] \\
& + \frac{3}{4}\varepsilon\omega_0\Lambda a^2 \cos[(3\omega_0 - \omega)t + 3\varphi] + \left[-\frac{2}{\omega_0}\varepsilon\beta\omega\Lambda^2 a - \varepsilon\beta a\Lambda^2 \right] \cdot \sin[(2\omega_0 + 2\omega)t + 2\varphi] \\
& + \left[\frac{2}{\omega_0}\varepsilon\beta\omega\Lambda^2 a + \varepsilon\beta\Lambda^2 a \right] \cdot \sin[(2\omega_0 - 2\omega)t + 2\varphi] + \frac{3}{2}\varepsilon\omega_0\Lambda^2 a \cos[(2\omega_0 + 2\omega)t + 2\varphi] \\
& + \frac{3}{2}\varepsilon\omega_0\Lambda^2 a \cos[(2\omega_0 - 2\omega)t + 2\varphi].
\end{aligned} \tag{4.61}$$

Assim, obtivemos as equações variacionais (4.60) e (4.61). Essas equações possuem uma variação lenta, uma vez que grande parte de seus termos são da ordem $O(\varepsilon)$. Por outro lado, um termo possui variação lenta quando o coeficiente de t (ou seja, a frequência) for pequeno.

Nas equações variacionais encontradas essa variação lenta ocorre quando $\omega \approx 0, \omega_0, 3\omega_0$, e $\frac{\omega_0}{3}$. Em seguida, analisamos o caso $\omega \approx \frac{\omega_0}{3}$.

Neste caso, $\cos[(\omega_0 - 3\omega)t + \varphi]$ e $\sin[(\omega_0 - 3\omega)t + \varphi]$ são termos que variam lentamente. Assim, considerando $\omega_0 = 1$, temos

$$\dot{a} = -\varepsilon a - 2\varepsilon\beta\Lambda^2 a - \frac{1}{4}\varepsilon\beta a^3 - 2\varepsilon\beta\omega\Lambda^3 \cos[(1 - 3\omega)t + \varphi] + \varepsilon\omega_0^2\Lambda^3 \sin[(1 - 3\omega)t + \varphi] \quad (4.62)$$

$$a\dot{\varphi} = (\omega_0^2 - 1)\frac{a}{2} + \frac{3}{8}\omega_0^2 a^3 + 3\varepsilon\omega_0^2\Lambda^2 a + 2\varepsilon\beta\omega\Lambda^3 \sin[(1 - 3\omega)t + \varphi] + \varepsilon\omega_0^2\Lambda^3 \cos[(1 - 3\omega)t + \varphi] \quad (4.63)$$

Introduzindo o parâmetro de sintonia σ pela transformação $3\omega - 1 = \varepsilon\sigma$, obtemos

$$\dot{a} = -\varepsilon a - 2\varepsilon\beta\Lambda^2 a - \frac{1}{4}\varepsilon\beta a^3 - 2\varepsilon\beta\omega\Lambda^3 \cos\phi + \varepsilon\Lambda^3 \sin\phi \quad (4.64)$$

$$a\dot{\varphi} = \frac{3}{8}a^3 + 3\varepsilon\Lambda^2 a + 2\varepsilon\beta\omega\Lambda^3 \sin\phi + \varepsilon\Lambda^3 \cos\phi \quad (4.65)$$

com $\phi = \sigma\varepsilon t + \varphi$. Essas equações estão de acordo com (4.39) e (4.40) obtidas através do método das múltiplas escalas.

Como a e φ variam lentamente em um intervalo de tempo igual a um período do ângulo ϕ , elas podem ser consideradas constantes nesse intervalo.

Assim,

$$\langle \dot{a} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \dot{a} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [-\varepsilon a - 2\varepsilon\beta\Lambda^2 a - \frac{1}{4}\varepsilon\beta a^3] dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\text{termos que contêm seno e cosseno}] dt \quad (4.66)$$

$$\langle \dot{\varphi} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \dot{\varphi} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [3\varepsilon\Lambda^2 + \frac{3}{8}a^2] dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [\text{termos que contêm seno e cosseno}] dt. \quad (4.67)$$

Portanto,

$$\langle \dot{a} \rangle = -\varepsilon a (1 + 2\beta\Lambda^2 + \frac{1}{4}\beta a^2) \quad (4.68)$$

$$\langle \dot{\varphi} \rangle = 3\varepsilon\Lambda^2 + \frac{3}{8}a^2 \quad (4.69)$$

As equações (4.68) e (4.69) são chamadas equações médias. Quando as soluções $a(t)$ e $\varphi(t)$ são substituídas na equação (4.51) obtemos a solução da equação diferencial (4.6).

Capítulo 5

Equação de Duffing - Van der Pol (Caso mais geral)

5.1 Expansão Direta

Seja o oscilador de Duffing - Van der Pol com amortecimento não-linear descrito na seção anterior,

$$\ddot{u} + 2\gamma(1 + \beta u^2)\dot{u} + \omega_0^2(1 + ku^2)u = F \cos \omega t.$$

Consideremos como pequenos parâmetros, β e k . Assim, reescrevemos a equação (4.4) de forma que

$$\ddot{u} + 2\gamma\dot{u} + 2\varepsilon\gamma u^2\dot{u} + \omega_0^2 u + \varepsilon\omega_0^2 u^3 = F \cos \omega t. \quad (5.1)$$

A expansão direta para a solução da equação (5.1) é dada por

$$u(t; \varepsilon) = u_0(t) + \varepsilon u_1(t) + \dots \quad (5.2)$$

Substituindo (5.2) em (5.1), obtemos

$$\begin{aligned} &(\ddot{u}_0 + \varepsilon\ddot{u}_1 + \dots) + 2\gamma(\dot{u}_0 + \varepsilon\dot{u}_1 + \dots) + 2\varepsilon\gamma(u_0 + \varepsilon u_1 + \dots)^2(\dot{u}_0 + \varepsilon\dot{u}_1 + \dots) \\ &+ \omega_0^2(u_0 + \varepsilon u_1 + \dots) + \varepsilon\omega_0^2(u_0 + \varepsilon u_1 + \dots)^3 = F \cos \omega t. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} &(\ddot{u}_0 + \omega_0^2 u_0 + 2\gamma\dot{u}_0 - F \cos(\omega t)) + \varepsilon(\ddot{u}_1 + \omega_0^2 u_1 + 2\gamma\dot{u}_1 + 2\gamma u_0^2 \dot{u}_0 + \omega_0^2 u_0^3) + O(\varepsilon^2) = 0. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Separando as potências de ε temos

$$\varepsilon^0 : \ddot{u}_0 + 2\gamma\dot{u}_0 + \omega_0^2 u_0 = F \cos(\omega t) \quad (5.4)$$

$$\varepsilon^1 : \ddot{u}_1 + 2\gamma\dot{u}_1 + \omega_0^2 u_1 = -2\gamma u_0^2 \dot{u}_0 - \omega_0^2 u_0^3 \quad (5.5)$$

Como a equação (5.4) é linear não-homogênea, sua solução geral é a soma da solução homogênea e da solução particular. Assim, a solução desta equação será

$$u_0 = u_{0h} + u_{0p} \quad (5.6)$$

A solução homogênea pode ser encontrada da seguinte forma

$$m^2 + 2\gamma m + \omega_0^2 = 0 \quad (5.7)$$

$$\Delta = 4\gamma^2 - 4\omega_0^2 = 4(\gamma^2 - \omega_0^2)$$

e

$$m = \frac{-2\gamma \pm 2\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}}{2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}.$$

Logo, temos

$$\begin{aligned} m_1 &= -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \\ m_2 &= -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Consideremos os seguintes casos.

◇ **Caso 1:** $\gamma^2 - \omega_0^2 > 0$, ou seja, $\gamma > \omega_0$. (superamortecido)

Assim, temos que m_1 e m_2 são reais e distintos. Logo,

$$u_{0h} = c_1 e^{m_1 t} + c_2 e^{m_2 t}$$

ou seja,

$$u_{0h} = c_1 e^{(-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} + c_2 e^{(-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t}. \quad (5.9)$$

◇ **Caso 2:** $\gamma^2 - \omega_0^2 = 0$, ou seja, $\gamma = \omega_0$. (criticamente amortecido)

A solução homogênea será

$$u_{0h} = u_{0h1} + u_{0h2} \quad (5.10)$$

onde, $u_{0h1} = e^{-\gamma t}$ e $u_{0h2} = t e^{-\gamma t}$.

Logo,

$$u_{0h} = (c_1 + c_2t)e^{-\gamma t}. \quad (5.11)$$

◇ **Caso 3:** $\gamma^2 - \omega_0^2 < 0$, ou seja, $\gamma < \omega_0$. (subamortecido)

A equação característica possui duas raízes complexas conjugadas, m_1 e m_2 . Assim, temos

$$m_1 = -\gamma + i\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|}$$

e

$$m_2 = -\gamma - i\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|}. \quad (5.12)$$

Logo, a solução homogênea será

$$u_{0h} = c_1 e^{-\gamma t} e^{i\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|}t} + c_2 e^{-\gamma t} e^{-i\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|}t} \quad (5.13)$$

e pela fórmula de Euler temos

$$u_{0h} = C_1 e^{-\gamma t} \cos \sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|}t + C_2 e^{-\gamma t} \sin \sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|}t \quad (5.14)$$

com $C_1 = c_1 + c_2$ e $C_2 = i(c_1 - c_2)$.

Agora, como $f(t) = F \cos(\omega t)$, tem-se a solução na forma

$$u_{0p} = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t). \quad (5.15)$$

Pelo método de parâmetros a determinar encontramos os coeficientes A e B . Derivando (5.15), obtemos

$$\dot{u}_{0p} = -A\omega \sin(\omega t) + B\omega \cos(\omega t) \quad (5.16)$$

$$\ddot{u}_{0p} = -A\omega^2 \cos(\omega t) - B\omega^2 \sin(\omega t). \quad (5.17)$$

Substituindo (5.15), (5.16) e (5.17) em (5.4), obtemos

$$(-A\omega^2 + 2B\gamma\omega + \omega_0^2 A - F) \cos(\omega t) + (-B\omega^2 - 2A\gamma\omega + \omega_0^2 B) \sin(\omega t) = 0. \quad (5.18)$$

Logo,

$$(\omega_0^2 - \omega^2)A + 2\gamma\omega B = F$$

$$-2\gamma\omega A + (\omega_0^2 - \omega^2)B = 0. \quad (5.19)$$

Resolvendo o sistema (5.19) para A e B , obtemos

$$A = \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)F}{4\gamma^2\omega^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2} \quad \text{e} \quad B = \frac{2\gamma\omega F}{4\gamma^2\omega^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2}. \quad (5.20)$$

Substituindo (5.20) em (5.15) temos que

$$u_{0p} = \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)F}{4\gamma^2\omega^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2} \cos(\omega t) + \frac{2\gamma\omega F}{4\gamma^2\omega^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2} \sin(\omega t). \quad (5.21)$$

Fazendo $\frac{F}{4\gamma^2\omega^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2} = \Lambda$, a equação (5.21) ficará

$$u_{0p} = (\omega_0^2 - \omega^2)\Lambda \cos(\omega t) + 2\gamma\omega\Lambda \sin(\omega t). \quad (5.22)$$

Considerando $\gamma < \omega_0$, temos que

$$u_0 = \alpha \cos(\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|}t + \beta) + \mu \cos(\omega t + \xi). \quad (5.23)$$

onde $\alpha = \sqrt{(C_1^2 + C_2^2)}e^{-\gamma t}$, $\beta = \arctan\left(\frac{C_2}{C_1}\right)$, $\mu = \Lambda\sqrt{4\gamma^2\omega^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)}$ e $\xi = \arctan\left(\frac{2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$.

Substituindo (5.23) em (5.5), obtemos

$$\begin{aligned} \ddot{u}_1 + \omega_0^2 u_1 + 2\gamma \dot{u}_1 &= -2\gamma\alpha^2 \dot{\alpha} \cos^3 x + \gamma\alpha^3 \sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} \cos x \sin 2x \\ &+ 2\gamma\alpha^2 \mu \omega \cos^2 x \sin y - 4\gamma\alpha \dot{\alpha} \mu \cos^2 x \cos y \\ &- 2\gamma\alpha^2 \mu \sqrt{|\gamma^2 + \omega_0^2|} \sin 2x \cos y \\ &+ 2\gamma\alpha \mu^2 \omega \cos x \sin 2y - 2\gamma\mu^2 \dot{\alpha} \cos x \cos^2 y \\ &+ 2\gamma\alpha \mu^2 \sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} \sin x \cos^2 y \\ &+ \gamma\mu^3 \omega \cos y \sin 2x - \omega_0^2 \alpha^3 \cos^3 x \\ &- 3\omega_0^2 \mu \alpha^2 \cos^2 x \cos y - 3\omega_0^2 \alpha \mu^2 \cos^2 y - \omega_0^2 \mu^3 \cos y \end{aligned} \quad (5.24)$$

onde $x = \sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|}t + \beta$ e $y = \omega t + \xi$.

Utilizando as identidades trigonométricas, obtemos

$$\begin{aligned}
\ddot{u}_1 + \omega_0^2 u_1 + 2\gamma \dot{u}_1 = & \left[\frac{1}{2} \gamma \alpha^3 \sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} + \gamma \mu^2 \alpha \sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} \right] \sin x + \left[-\frac{3}{2} \gamma \alpha^2 \dot{\alpha} \right. \\
& \left. - \gamma \mu^2 \dot{\alpha} - \frac{3}{4} \omega_0^2 \alpha^3 - \frac{3}{2} \omega_0^2 \alpha \mu^2 \right] \cos x + \left[\gamma \alpha^2 \mu \omega + \frac{1}{2} \gamma \mu^3 \omega \right] \sin y \\
& + \left[-2\gamma \alpha \dot{\alpha} \mu - \frac{3}{2} \omega_0^2 \alpha^2 \mu - \frac{3}{4} \omega_0^2 \mu^3 \right] \cos y + \frac{1}{2} \gamma \alpha^3 \sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} \sin 3x \\
& - \frac{1}{4} \omega_0^2 \alpha^3 \cos 3x + \frac{1}{2} \gamma \mu^3 \omega \sin 3y - \frac{1}{4} \omega_0^2 \alpha^3 \cos 3y + \left[\frac{1}{2} \gamma \alpha^2 \mu \omega \right. \\
& \left. + \gamma \alpha^2 \mu \sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} \right] \sin(2x + y) + \left[-\gamma \alpha \dot{\alpha} \mu - \frac{3}{4} \omega_0^2 \alpha^2 \mu \right] \cos(2x + y) \\
& + \left[-\frac{1}{2} \gamma \alpha^2 \mu \omega + \gamma \alpha^2 \mu \sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} \right] \sin(2x - y) + \left[-\gamma \alpha \dot{\alpha} \mu \right. \\
& \left. - \frac{3}{4} \omega_0^2 \alpha^2 \mu \right] \cos(2x - y) + \left[\gamma \alpha \mu^2 \omega + \frac{1}{2} \gamma \mu^2 \alpha \sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} \right] \sin(x + 2y) \\
& + \left[-\frac{1}{2} \gamma \mu^2 \dot{\alpha} - \frac{3}{4} \omega_0^2 \alpha \mu^2 \right] \cos(x + 2y) + \left[-\gamma \alpha \mu^2 \omega \right. \\
& \left. + \frac{1}{2} \gamma \mu^2 \alpha \sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} \right] \sin(x - 2y) + \left[-\frac{1}{2} \gamma \mu^2 \dot{\alpha} - \frac{3}{4} \omega_0^2 \alpha \mu^2 \right] \cos(x - 2y).
\end{aligned} \tag{5.25}$$

Simplificando a equação (5.25), temos que

$$\begin{aligned}
\ddot{u}_1 + \omega_0^2 u_1 + 2\gamma \dot{u}_1 = & a_1 \cos(x + \theta_1) + a_2 \cos(y + \theta_2) + a_3 \cos(3x + \theta_3) + a_4 \cos(3y + \theta_4) \\
& + a_5 \cos(2x + y + \theta_5) + a_6 \cos(2x - y + \theta_6) + a_7 \cos(x + 2y + \theta_7) \\
& + a_8 \cos(x - 2y + \theta_8)
\end{aligned} \tag{5.26}$$

$$\begin{aligned}
\text{onde } a_1 = & \left[\gamma^2 \alpha^2 |\gamma^2 - \omega_0^2| \left(\frac{1}{2} \alpha^2 + \mu^2 \right)^2 + \left(-\frac{3}{2} \gamma \alpha^2 \dot{\alpha} - \gamma \mu^2 \dot{\alpha} - \frac{3}{4} \omega_0^2 \alpha^3 - \frac{3}{2} \omega_0^2 \alpha \mu^2 \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \\
a_2 = & \left[\left(\gamma \alpha^2 \mu \omega + \frac{1}{2} \gamma \mu^3 \omega \right)^2 + \left(2\gamma \alpha \dot{\alpha} + \frac{3}{2} \omega_0^2 \mu + \frac{3}{4} \omega_0^2 \mu^3 \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \\
a_3 = & \left[\frac{1}{4} \gamma^2 \alpha^6 |\gamma^2 - \omega_0^2| + \frac{1}{16} \omega_0^4 \alpha^6 \right]^{\frac{1}{2}}, \\
a_4 = & \left[\frac{1}{4} \gamma^2 \mu^6 \omega^2 + \frac{1}{16} \omega_0^4 \alpha^6 \right]^{\frac{1}{2}}, \\
a_5 = & \left[\gamma^2 \alpha^4 \mu^2 \omega^2 |\gamma^2 - \omega_0^2| + \left(\gamma \alpha \dot{\alpha} \mu + \frac{3}{4} \omega_0^2 \alpha^2 \mu \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \\
a_6 = & \left[\left(-\frac{1}{2} \gamma \alpha^2 \mu \omega + \gamma \alpha^2 \mu |\gamma^2 - \omega_0^2| \right)^2 + \left(\gamma \alpha \dot{\alpha} \mu + \frac{3}{4} \omega_0^2 \alpha^2 \mu \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_7 &= \left[(\gamma\alpha\mu^2\omega + \frac{1}{2}\gamma\mu^2\alpha\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|})^2 + (\frac{1}{2}\gamma\mu^2\dot{\alpha} + \frac{3}{4}\omega_0^2\alpha\mu^2)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \\
a_8 &= \left[(-\gamma\alpha\mu^2\omega + \frac{1}{2}\gamma\mu^2\alpha\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|})^2 + (\frac{1}{2}\gamma\mu^2\dot{\alpha} + \frac{3}{4}\omega_0^2\alpha\mu^2)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \\
\theta_1 &= \arctan \left(\frac{\frac{1}{2}\gamma\alpha^3\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} + \gamma\mu^2\alpha\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|}}{-\frac{3}{2}\gamma\alpha^2\dot{\alpha} - \gamma\mu^2\dot{\alpha} - \frac{3}{4}\omega_0^2\alpha^3 - \frac{3}{2}\omega_0^2\alpha\mu^2} \right), \\
\theta_2 &= \arctan \left(\frac{\gamma\alpha^2\mu\omega + \frac{1}{2}\gamma\mu^3\omega}{-2\gamma\alpha\dot{\alpha}\mu - \frac{3}{2}\omega_0^2\alpha^2\mu - \frac{3}{4}\omega_0^2\mu^3} \right), \\
\theta_3 &= \arctan \left(\frac{\frac{1}{2}\gamma\alpha^3\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|}}{-\frac{1}{4}\omega_0^2\alpha^3} \right), \\
\theta_4 &= \arctan \left(\frac{\frac{1}{2}\gamma\mu^3\omega}{-\frac{1}{4}\omega_0^2\alpha^3} \right), \\
\theta_5 &= \arctan \left(\frac{\frac{1}{2}\gamma\alpha^2\mu\omega + \gamma\alpha^2\mu\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|}}{-\gamma\alpha\dot{\alpha}\mu - \frac{3}{4}\omega_0^2\alpha^2\mu} \right), \\
\theta_6 &= \arctan \left(\frac{-\frac{1}{2}\gamma\alpha^2\mu\omega + \gamma\alpha^2\mu\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|}}{-\gamma\alpha\dot{\alpha}\mu - \frac{3}{4}\omega_0^2\alpha^2\mu} \right), \\
\theta_7 &= \arctan \left(\frac{\gamma\alpha\mu^2\omega + \frac{1}{2}\gamma\mu^2\alpha\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|}}{-\frac{1}{2}\gamma\mu^2\dot{\alpha} - \frac{3}{4}\omega_0^2\alpha\mu^2} \right), \\
\theta_8 &= \arctan \left(\frac{-\gamma\alpha\mu^2\omega + \frac{1}{2}\gamma\mu^2\alpha\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|}}{-\frac{1}{2}\gamma\mu^2\dot{\alpha} - \frac{3}{4}\omega_0^2\alpha\mu^2} \right).
\end{aligned}$$

Resolvendo a equação (5.26), obtemos

$$u_1 = u_p = u_{p1} + u_{p2} + \dots + u_{p8}. \quad (5.27)$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
u_1 &= \frac{(\omega_0^2 - |\gamma^2 - \omega_0^2|)a_1}{4\gamma^2|\gamma^2 - \omega_0^2| + (\omega_0^2 - |\gamma^2 - \omega_0^2|)^2} \cos(x + \theta_1) \\
&+ \frac{2a_1\gamma\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|}}{4\gamma^2|\gamma^2 - \omega_0^2| + (\omega_0^2 - |\gamma^2 - \omega_0^2|)^2} \sin(x + \theta_1) \\
&+ \frac{2\gamma\omega a_2}{4\gamma^2\omega^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2} \sin(y + \theta_2) + \frac{a_2(\omega_0^2 - \omega^2)}{4\gamma^2\omega^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2} \cos(y + \theta_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(\omega_0^2 - 9|\gamma^2 - \omega_0^2|)a_3}{36\gamma^2|\gamma^2 - \omega_0^2| + (\omega_0^2 - 9|\gamma^2 - \omega_0^2|)^2} \cos(3x + \theta_3) \\
& + \frac{6a_3\gamma\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|}}{36\gamma^2|\gamma^2 - \omega_0^2| + (\omega_0^2 - 9|\gamma^2 - \omega_0^2|)^2} \sin(3x + \theta_3) \\
& - \frac{6\gamma\omega a_4}{-36\gamma^2\omega^2 + (\omega_0^2 - 9\omega^2)^2} \cos(3y + \theta_4) - \frac{a_4(\omega_0^2 - 9\omega^2)}{-36\gamma^2\omega^2 + (\omega_0^2 - 9\omega^2)^2} \sin(3y + \theta_4) \\
& + \frac{a_5[\omega_0^2 - (2\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} + \omega)^2]}{4\gamma^2(2\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} + \omega)^2 + [\omega_0^2 - (2\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} + \omega)^2]^2} \cos(2x + y + \theta_5) \\
& + \frac{2\gamma(2\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} + \omega)a_5}{4\gamma^2(2\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} + \omega)^2 + [\omega_0^2 - (2\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} + \omega)^2]^2} \sin(2x + y + \theta_5) \\
& + \frac{a_6[\omega_0^2 - (2\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} - \omega)^2]}{4\gamma^2(2\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} - \omega)^2 + [\omega_0^2 - (2\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} - \omega)^2]^2} \cos(2x - y + \theta_6) \\
& + \frac{2\gamma(2\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} - \omega)a_6}{4\gamma^2(2\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} - \omega)^2 + [\omega_0^2 - (2\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} - \omega)^2]^2} \sin(2x - y + \theta_6) \\
& + \frac{a_7[\omega_0^2 - (\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} + 2\omega)^2]}{4\gamma^2(\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} + 2\omega)^2 + [\omega_0^2 - (\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} + 2\omega)^2]^2} \cos(x + 2y + \theta_7) \\
& + \frac{2\gamma(\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} + 2\omega)a_7}{4\gamma^2(\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} + 2\omega)^2 + [\omega_0^2 - (\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} + 2\omega)^2]^2} \sin(x + 2y + \theta_7) \\
& + \frac{a_8[\omega_0^2 - (\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} - 2\omega)^2]}{4\gamma^2(\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} - 2\omega)^2 + [\omega_0^2 - (\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} - 2\omega)^2]^2} \cos(x - 2y + \theta_8) \\
& + \frac{2\gamma(\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} - 2\omega)a_8}{4\gamma^2(\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} - 2\omega)^2 + [\omega_0^2 - (\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} - 2\omega)^2]^2} \sin(x - 2y + \theta_8).
\end{aligned} \tag{5.28}$$

Nesta solução os termos seculares estão presentes nos coeficientes a_i , $i = 1, \dots, 8$.

5.2 Método das Múltiplas Escalas

Introduzimos as escalas $T_1 = \varepsilon t$ e $T_0 = t$, e pela regra da cadeia temos as derivadas

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} &= D_0 + \varepsilon D_1 + \dots \\ \frac{d^2}{dt^2} &= D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \dots\end{aligned}$$

onde $D_n = \frac{\partial}{\partial T_n}$.

Se ω esta distante de zero, então $\cos \omega t$ varia rapidamente. Dai temos

$$\cos \omega t = \cos \omega T_0.$$

Por outro lado, se $\omega \approx 0$, $\cos \omega t$ varia de forma lenta. Neste caso, faremos $\omega = \varepsilon \sigma$ onde $\sigma = O(\varepsilon)$. Assim,

$$\cos \omega t = \cos \sigma \varepsilon t = \cos \sigma T_1.$$

Introduzimos em (5.1) as escalas e obtemos

$$D_0^2 u + 2\varepsilon D_0 D_1 u + 2\gamma D_0 u + 2\varepsilon \gamma u^2 D_0 u + \dots + \omega_0^2 u + \varepsilon \omega_0^2 u^3 = F \cos \omega T_0. \quad (5.29)$$

A solução aproximada para (5.29) será

$$u = u_0(T_0, T_1) + \varepsilon u_1(T_0, T_1) + \dots \quad (5.30)$$

Substituindo (5.30) em (5.29), obtemos

$$\begin{aligned}D_0^2 u_0 + \varepsilon D_0^2 u_1 + \varepsilon 2D_0 D_1 u_0 + 2\gamma D_0 u_0 + \varepsilon 2\gamma D_0 u_1 + \varepsilon 2\gamma u_0^2 D_0 u_0 + \omega_0^2 u_0 + \varepsilon \omega_0^2 u_1 \\ + \varepsilon \omega_0^2 u_0^3 + \dots = F \cos \omega T_0.\end{aligned}$$

Separando os termos segundo as potências de ε , obtemos as seguintes equações

$$\varepsilon^0 : D_0^2 u_0 + 2\gamma D_0 u_0 + \omega_0^2 u_0 = F \cos \omega T_0 \quad (5.31)$$

$$\varepsilon^1 : D_0^2 u_1 + 2\gamma D_0 u_1 + \omega_0^2 u_1 = -2D_0 D_1 u_0 - 2\gamma u_0^2 D_0 u_0 - \omega_0^2 u_0^3. \quad (5.32)$$

A solução geral para a equação (5.31) é dada por

$$u_0 = \alpha(T_0, T_1) \cos[\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|} T_0 + \beta(T_1)] + (\omega_0^2 - \omega^2) \Lambda \cos \omega T_0 + 2\gamma \omega \Lambda \sin \omega T_0 \quad (5.33)$$

onde $\Lambda = F[4\gamma^2 \omega^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2]^{-1}$.

Reescrevendo (5.33) na forma complexa, obtemos

$$u_0 = \frac{1}{2}\alpha e^{i\beta} e^{i\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|}T_0} + \left[\frac{(\omega_0^2 - \omega^2)\Lambda}{2} + \gamma\omega\Lambda \right] e^{i\omega T_0} + cc$$

onde cc representa os termos complexos conjugados. Logo,

$$u_0 = A(T_0, T_1) e^{i\sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|}T_0} + \left[\frac{(\omega_0^2 - \omega^2)\Lambda}{2} + \gamma\omega\Lambda \right] e^{i\omega T_0} + cc \quad (5.34)$$

onde $A = \frac{1}{2}\alpha e^{i\beta}$.

Assim, a equação (5.32) ficará

$$\begin{aligned} D_0^2 u_1 + 2\gamma D_0 u_1 + \omega_0^2 u_1 = & -[2A'' + 2iA'x - 4\gamma A\bar{A}A' + 2i\gamma A^2\bar{A}x + 4\gamma A'\Omega^2 + 4i\gamma A\Omega^2x \\ & + 2\gamma A^2\bar{A}' + 3\omega_0^2 A^2\bar{A} + 6\omega_0^2 A\Omega] e^{ixT_0} - [4i\gamma\omega\Omega^3 + 4\gamma A\bar{A}'\Omega \\ & + 4i\gamma A\bar{A}\Omega x + 4\gamma A'\bar{A}\Omega + 3\omega_0^2 + 4\gamma A\bar{A}\Omega x - 2i\gamma\omega\Omega^3 + 6\omega_0^2 A\bar{A}\Omega] e^{i\omega T_0} \\ & - [2\gamma A^2 + 2i\gamma A^3x + \omega_0^2 A^3] e^{i3xT_0} - [2i\gamma\omega\Omega^3 + \omega_0^2\Omega^3] e^{i3\omega T_0} \\ & - [2i\gamma A^2\omega\Omega + 4\gamma AA'\Omega + 4i\gamma A^2\Omega x + 3\omega_0^2 A^2\Omega] e^{i(2x+\omega)T_0} \\ & - [2i\gamma A^2\omega\Omega + 4\gamma AA'\Omega + 4i\gamma A^2\Omega x + 3\omega_0^2 A^2\Omega] e^{i(2x-\omega)T_0} \\ & - [4i\gamma A\omega\Omega^2 + 2\gamma A'\Omega^2 + 2i\gamma A\Omega^2x + 3\omega_0^2 A\Omega^2] e^{i(x+2\omega)T_0} \\ & - [4i\gamma A\omega\Omega^2 - 3\omega_0^2 A\Omega^2] e^{i(x+2\omega)T_0} + cc \end{aligned} \quad (5.35)$$

onde $x = \sqrt{|\gamma^2 - \omega_0^2|}$.

A solução particular de (5.35) contém termos com pequenos divisores e termos seculares, no entanto o processo de eliminação desses termos na forma como está apresentada aqui não é usual. A aplicação do método de múltiplas escalas e do método da média requer um cuidado especial, e portanto será deixada para um trabalho posterior.

Capítulo 6

Conclusões e Sugestões para Trabalhos Futuros

6.1 Conclusão

Neste trabalho estudamos um sistema constituído por um oscilador forçado nanomecânico representado pela equação (4.1), e também já estudada por Almog *et al* [2], onde é acrescentado um termo proporcional a u^3 e um termo de amortecimento não-linear proporcional a $u^2\dot{u}$. Dessa forma obtivemos a equação do movimento que descreve um oscilador de Duffing - Van der Pol com amortecimento não-linear.

Em virtude das dificuldades encontradas na busca de uma solução analítica exata para equações diferenciais não-lineares, podemos encontrar uma solução aproximada com o auxílio de métodos de perturbação.

Para que a análise do sistema estudado pudesse ser realizada através de uma abordagem analítica, consideramos as não-linearidades como sendo "pequenas". Dessa forma, estas não-linearidades foram tratadas como perturbações em relação a um sistema linear. Utilizando a teoria de perturbação foi possível introduzir essas perturbações no sistema através de séries de potências relativamente a um pequeno parâmetro ε .

O objetivo principal do trabalho foi encontrar uma solução aproximada para o sistema livre de termos que comprometem a solução, tais como *termos seculares mistos* ou *termos de Poisson* e a presença de pequenos divisores.

Primeiramente consideramos como pequenos parâmetros, γ e k , na equação (4.5) e aplicamos o método da expansão direta com o objetivo de identificar termos com possível

ressonância. Assim obtivemos a equação (4.19), a qual nos mostrou que tais condições ocorrem quando $\omega \approx 0$, $\omega \approx \omega_0$, $\omega \approx \frac{\omega_0}{3}$, $\omega \approx 2\omega_0$, $\omega \approx \frac{1}{2}(1 + \omega_0)$, $\omega \approx \frac{1}{2}(1 - \omega_0)$, $\omega \approx \omega_0 - 1$. Dessa forma identificamos a presença de pequenos divisores e também termos seculares.

Apesar do método da expansão direta ser adequado na identificação das condições de ressonância, este por sua vez não se mostra eficaz para certas análises, como por exemplo na obtenção da resposta do sistema em regime permanente. Para encontrarmos uma expansão uniforme de primeira ordem para a equação (4.6) livre de termos seculares e pequenos divisores, utilizamos o método das múltiplas escalas. Com a aplicação do método obtivemos equações que descrevem as modulações de amplitudes e fases para o sistema, tornando assim a solução analítica livre de termos seculares mistos e pequenos divisores. Para esta análise tratamos o caso de ressonância onde $\omega \approx \frac{\omega_0}{3}$ (frequência ressonante), introduzimos um parâmetro de sintonia e chegamos na solução livre de termos seculares e pequenos divisores. Para uma análise no estado estacionário, consideramos que as equações diferenciais que descrevem as modulações de amplitude e fase do sistema são nulas no estado estacionário. Encontramos a equação resposta de frequência, a qual poderá ser utilizada para obter mais informações sobre o comportamento do sistema.

Um outro método utilizado para a obtenção de uma solução analítica aproximada foi o método da média. Através deste método consideramos certas quantidades como funções que variam suavemente no tempo. Obtivemos as equações variacionais e tratamos o caso onde $\omega \approx \frac{\omega_0}{3}$ e encontramos as equações que descrevem as modulações de amplitude e fase para o sistema. Estas equações estão de acordo com as equações (4.39) e (4.40) obtidas através do método das múltiplas escalas conforme o esperado. Encontramos as equações médias do sistema, as quais poderão ser utilizadas para se obter informações para o sistema.

Em seguida, fizemos uma breve análise do sistema representado pela equação (4.5) considerando como pequenos parâmetros, β e k . De forma análoga, obtivemos a expansão direta, mas não aplicamos o método de múltiplas escalas e o método da média, pois essas aplicações demandam um estudo criterioso.

6.2 Trabalhos Futuros

O estudo apresentado neste trabalho é preliminar, e portanto é preciso dar sequência para obter mais informações sobre a dinâmica da equação de Duffing - Van der Pol. Por exemplo, a equação resposta de frequência (4.50) deve ser analisada para estabelecer as regiões de estabilidade, e determinar os fenômenos de salto e histerese. Esses estudos permitirão localizar as bifurcações do sistema, e assim facilitar a análise da dinâmica através de métodos numéricos apropriados.

A aplicação dos métodos de perturbação no caso geral (Capítulo 5) deve ser feito com cuidado, pois trata-se de uma aplicação não usual.

Referências Bibliográficas

- [1] ALMOG, R.; ZAITSEV, S.; SHTEMPLUCK, O. e BUKS, E.; **High intermodulation gain in a micromechanical Duffing resonator** . arXiv:cond-mat, no.0511587v1, Nov 2005.
- [2] ALMOG, R.; ZAITSEV, S.; SHTEMPLUCK, O. e BUKS, E.; **Nonlinear damping in a nanomechanical beam oscillator** . arXiv:cond-mat, no.0503130v2, Aug 2006.
- [3] ALMOG, R.; ZAITSEV, S.; SHTEMPLUCK, O. e BUKS, E.; **Noise squeezing in a nanomechanical Duffing resonator** . arXiv:cond-mat, no.0607055v3, Jul 2006.
- [4] ALMOG, R.; ZAITSEV, S.; SHTEMPLUCK, O. e BUKS, E.; **Signal amplification in a nanomechanical Duffing resonator via stochastic resonance** . arXiv:cond-mat, no.0611049v1, Nov 2006.
- [5] BALTANÁS, J. P.; TRUEBA, J. L. e SANJUÁN, M. A. F.; **Energy dissipation in a nonlinearly damped Duffing oscillator** . Physica D 159, 22-34, 2001.
- [6] BALTHAZAR, J. M.; MOOK, D. T.; BRASIL, R. M. L. R. F.; WEBER, H. I.; FENILI, A.; BELATO, D. and FELIX, J. L. P.; **Recent Results on Vibrating Problems with Limited Power Supply** . In 6th Conference on Dynamical Systems. Theory and Applications, Łódz, Poland, 2001.
- [7] BALTHAZAR, J. M.; MOOK, D. T.; WEBER, H. I. e BRASIL, R. M. L.R. F.; **An overview on nonideal vibrations** . Meccanica, Vol.38, 613-621, 2003.
- [8] BALTHAZAR, J. M.; MOOK, D. T.; BRASIL, R. M. L. R. F.; WEBER, H. I.; FENILI, A.; BELATO, D.; FELIX, J. L. P. and GARZERI, J.; **Review on New Vibration Issues Due to Nonideal Energy Sources** . In Dynamic Systems

-
- and Control, Ed. Udwadia F. E., Weber H. I., Leitman G. Chapman and Hallick, 237-258, 2004.
- [9] CAMPANHA, J. R.; JUNIOR, N. C. e CHIERICE, R. A. F.; **Salto de amplitude de um oscilador não-ideal com atrito seco e excitação externa** . DINCON - Brazilian Conference on Dynamics, Control and Applications, 2008.
- [10] DIAS, A. O.; **Estudo de um sistema pêndulo mecânico não ideal** . Dissertação de Mestrado. Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas - UNESP, São José do Rio Preto, 2007.
- [11] EVAN-IWANOWSKI, R. M.; **Resonance oscillations in mechanical systems** . The Netherlands. Amsterdam: Elsevier, 1976, p.
- [12] FERREIRA, M. C.; **Análise de um sistema dinâmico não ideal com excitação vertical e horizontal** . Dissertação de Mestrado. Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas - UNESP, São José do Rio Preto, 2007.
- [13] FERRERA-FIEDLER, N. e PRADO, C. P. C.; **Caos: uma introdução** . Edgard Blücher Ltda. São Paulo - SP, 1994.
- [14] GUILHERME, K. L.; **Vibrações não lineares e não ideais de um sistema de dois graus de liberdade** . Dissertação de Mestrado. Faculdade de Engenharia Mecânica - UNICAMP, Campinas, 2004.
- [15] HIRSCH, M. W. e SMALE, S.; **Differential equations, dynamical systems, and linear algebra** . Academic Press, 1974.
- [16] KONONENKO, V. O.; **Vibrating systems with a limited power supply** . Iliffe Books, London, England, 1969.
- [17] LIMA, R. Q.; **Estudo de Modelos Dinâmicos Lineares e Não Lineares** . Dissertação de Mestrado. DEM - Departamento de Engenharia Mecânica, PUC - Rio de Janeiro, 2008.
- [18] MESQUITA, A. J. N.; **Análise da estabilidade de sistemas dinâmicos periódicos usando a Teoria de Sinha** . Dissertação de Mestrado. Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas - UNESP, São José do Rio Preto, 2007.

- [19] MONTEIRO, L. H.; **Sistemas Dinâmicos** . Editora Livraria da Física, São Paulo, 2002.
- [20] NAYFEH, A. H.; **Introduction to perturbation techniques** . USA: Wiley, 1981.
- [21] NAYFEH, A. H.; **Perturbation Methods** . USA: Wiley series in pure and applied mathematics, 1973, p.
- [22] NAYFEH, A. H. e BALACHANDRAN, B.; **Applied nonlinear dynamics** . USA: Wiley, 1995.
- [23] NAYFEH, A. H. e MOOK, D. T.; **Nonlinear Oscillations**. USA: Wiley, 1979.
- [24] PARKER, T. S. e CHUA, L. O.; **Practical numerical algorithms for chaotic systems** . Springer-Verlag, New York, 1989.
- [25] PICCOLI, H. C.; **Mecânica das vibrações** , DMC, FURG, 2008. URL: <http://www.dmc.furg.br/piccoli/apostila/cap1.pdf>, consultado em 07/07/2008.
- [26] SAVI, M. A.; **Dinâmica Não-linear e Caos** . E-papers Serviços Editoriais Ltda., 2006.
- [27] SILVA, D. G.; **Vibrações ressonantes não-lineares em estruturas tipo viga sob excitação paramétrica e combinada** . Tese de Doutorado. Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo, São Carlos-SP, 2006.
- [28] TRUEBA, J. L.; RAMS, J. e SANJUÁN, M. A. F.; **Analytical estimates of the effect of nonlinear damping in some nonlinear oscillators** . International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol.10, No.9, 2257-2267, 2000.