unesp

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

DEPARTAMENTO DE CIÊNCIAS DE COMPUTAÇÃO E ESTATÍSTICA

QUATÉRNIOS, OPERADORES DE FUETER E RELAÇÕES QUATERNIÔNICAS TRANSCENDENTAIS

Ana Carolina de Oliveira

Dissertação de Mestrado
Pós-Graduação em Matemática Aplicada

Rua Cristóvão Colombo, 2265
15054-000 – São José do Rio Preto – SP – Brasil
Telefone: (17) 3221-2444
Fax: (17) 3221-2445

Quatérnios, operadores de Fueter e Relações Quaterniônicas Transcendentais

Ana Carolina de Oliveira

Dissertação a ser apresentada ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de São José do Rio Preto, São Paulo, para obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Manoel Ferreira Borges Neto

São José do Rio Preto

Fevereiro de 2006

Aos meus pais e
irmão,
Dedico

Agradecimentos

Ao Prof. Dr. Manoel Ferreira Borges Neto por ter estimulado e acompanhado o meu trabalho de pesquisa durante o mestrado.

A todos os amigos de pós-graduação, em especial, Cristiane e Ricardo.

Aos meus pais.

A toda minha família.

A Deus, por tudo

Resumo

O objetivo deste trabalho é estabelecer similaridades entre os complexos e os hipercomplexos, motivados em explorar idéias de Murnaghan, que introduziu, pela primeira vez, em uma apresentação elementar, a teoria dos quatérnios baseados no teorema de Moivre. É mostrada em detalhes uma analogia da relação complexa clássica de Moivre para quatérnios, e em brevidade para octônios generalizados, e apresenta-se as conexões com os operadores da teoria de Fueter e as funções transcendentais. A extensão do teorema de Moivre é estudada para quatérnios em definindo-se uma função exponencial quaterniônica.

Palavras-chaves: Quatérnios, funções hipercomplexas, relações de Moivre.

Abstract

In this work we establish similarities between the complex and the hipercomplex numbers, motivated in exploring ideas of Murnaghan, that introduced, for the first time, in an elementary presentation, the theory of the quaternions based on the theorem of Moivre. We show an analogy of the classic complex relation of Moivre for quaternions, and briefly discuss generalized octonions, as well as to present connections to operators of the theory of Fueter and transcendental functions. We consider them to study the extension of the theorem of Moivre for quaternions, in defining a exponential function on the quaternions.

Keywords: Quaternions, hypercomplex functions, de Moivre relation.

Sumário

Introdução

O cálculo da raiz quadrada de um número negativo foi um dos mais fascinantes desafios da história da matemática. O ano de 1545 nos remonta o primeiro sinal dos números complexos, quando Geronimo Cardano (1501-1576), com “Ars Magna”, estudou a solução algébrica das equações cúbicas com sugestões de Nicolo Tartaglia (1500-1557) e quárticas descobertas por Ludovico Ferrari (1522-1565). Em 1777, Euler introduziu a notação i e –i para as duas raízes quadradas de –1, provavelmente referindo-se a expressão números imaginários, introduzida por René Descartes (1596-1650). Euler visualizou números complexos como um ponto no plano com coordenadas retangulares x, y. Introduzindo coordenadas polares r, θ, ele escreveu $x + iy = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$ e representou as raízes da equação $z^n = 1$, $n \geq 3$ com vértices de um polígono regular no plano (x, y). Muitos matemáticos importantes deram contribuições notáveis, entre eles, Augustin Cauchy (1789-1857) que construiu uma rigorosa teoria para funções complexas. William Rowan Hamilton (1805-1865), fez importantes contribuições à física e à astronomia mas nos interessa aqui ocuparmo-nos de suas idéias matemáticas. Em 1833, aos 28 anos de idade, deu a fundamentação definitiva dos números complexos como pares ordenados de números reais, tal como é apresentada atualmente. Hamilton percebeu que seus pares ordenados podiam ser entendidos como entidades no plano e tentou estender a idéia a três dimensões indo dos números complexos, $a + bi$, para ternas ordenadas, $a + bi + cj$. O problema era, uma vez conhecida a regra para multiplicar os números complexos, encontrar uma regra para multiplicar ternas. Em 1843, Hamilton teve a idéia de usar quatro números que ele chamou quatérnios e renunciar a lei comutativa da multiplicação. Esta é uma das poucas grandes descobertas matemáticas que esta muito bem localizada no tempo e circunstâncias.

Dizem que Lord Hamilton teve a idéia de definir o produto quaterniônico num passeio que fez com a Lady Hamilton. Deu-se o tal “insight” no momento exato que passeavam pela ponte de Brougham, que hoje é chamada de “Quaternion Bridge”, Dublin. Ele repentinamente parou sob a ponte, tirou seu canivete, e arranhou a fórmula fundamental:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

em uma pedra.

Figura 1.1: Placa erguida em honra a descoberta de Hamilton.

Nenhum sinal disto pode ser encontrado hoje, mas em 1956 uma placa foi erguida no local, comemorando a descoberta e exibindo a fórmula. Hamilton passou o resto de sua vida trabalhando com quatérnios; ele apresentou uma detalhada teoria de um sistema não comutativo algébrico, percebendo a relação de quatérnios com o espaço tridimensional e tendo interpretado o quatérnio como a razão entre dois vetores, ele pensou na interpretação física da parte escalar. Hamilton morreu em 1865 deixando inacabado seu trabalho sobre quatérnios. Mais tarde, após sua morte, seu filho, William Edwin Hamilton, publicaria o famoso *“Elements of Quaternions”*.

A perda da propriedade comutativa da multiplicação para sistemas numéricos foi de particular importância para as sucessivas investigações. Em 1843, Graves encontrou uma álgebra não associativa com 8 elementos de base, a álgebra das oitavas ou octônios. Em 1845 os octônios foram redescobertos por Arthur Cayley , por causa disto os octônios também são conhecidos como números de Cayley. Os quatérnios eram de muito interesse para o físico James Clerk Maxwell que buscou aplicar esta matemática em seu trabalho. Em 1864, ele descobriu as equações do eletromagnetismo. Gibbs, na década seguinte introduziu a análise vetorial e Heaviside desenvolveu o cálculo vetorial promovendo sua aplicação em Física. O cálculo vetorial foi muito bem aceito na comunidade científica e, desta forma, os quatérnios foram sendo deixados de lado. A teoria da relatividade especial revelou-se uma aplicação natural dos biquatérnios, ou quatérnios complexificados, introduzidos previamente por Clifford. Mais tarde, este formalismo foi revisado, expandido e usado por Wigner, F. Klein, Lanczoz, entre outros. Embora discretamente, os quatérnios estavam reaparecendo na Física.

Esta tese está dividida da seguinte maneira: no capítulo 1 apresentamos uma breve introdução a teoria das funções de variável complexa, que teve sua origem cercada de suspeita e desconfiança; o que é notado pelo uso dos termos “imaginário” e “complexo” em sua literatura. Não foi senão a partir do século XIX que Cauchy, Gauss e Riemann colocaram-na em bases sólidas, mostrando tratar-se de um dos mais poderosos instrumentos matemáticos, seja para o matemático, como para o físico ou o engenheiro. Sua estrutura elegante e lógica influenciou e penetrou em quase todos os ramos da matemática pura e aplicada. Hoje a teoria das variáveis complexas é indispensável na resolução de problemas de fluxo de calor, mecânica dos fluidos, aerodinâmica, teoria eletromagnética, e, praticamente, qualquer outro ramo da ciência e da engenharia. O capítulo 2 será dedicado a alguns tópicos de álgebra quaterniônica. Foram muitas as tentativas de generalizar os quatérnios para três dimensões, na esperança de que efetuassem então transformações geométricas no espaço tridimensional através de operações simples, como os complexos faziam em duas dimensões. A forma pela qual se tentava a generalização, hoje entendemos bem, não era possível. A alternativa foi generalizar os complexos para quatro dimensões, um quatérnio é o que agora chamamos de vetor quadrimensional, escrito da forma $\vec{q} = q + q_x \vec{i} + q_y \vec{j} + q_z \vec{k}$. Finalizamos o capítulo, lançando a base teórica deste nosso trabalho. O capítulo 3 é baseado essencialmente no artigo recentemente escrito por Borges e Machado [17]. Apresentamos em detalhes uma analogia da relação complexa clássica de Moivre para quatérnios e sem muitos detalhes alguns resultados obtidos para octônios, que podem ser encontrados detalhadamente na dissertação de Pendeza [20]. E apresentamos conexões com os operadores da teoria de Fueter e as funções transcendentais. Definimos uma função exponencial quaterniônica a partir da extensão do teorema de Moivre.

Capítulo 1

Breve introdução às variáveis complexas

O estudo das funções de uma variável complexa constitui um dos ramos mais importantes da Matemática. Cauchy, Riemann, Weierstrass e Gauss muito contribuíram para o desenvolvimento desse estudo, no século XIX. Neste capítulo apresentaremos uma breve introdução às variáveis complexas, as quais julgamos necessárias para um bom entendimento do texto.

1.1 Números Complexos

Um número complexo z é um par ordenado (a, b) de números reais a e b; isto é,

$$z = (a, b),$$

sujeito a certas regras e leis.

Os números reais a e b chamam-se, respectivamente, parte real e parte imaginária do complexo z; isto é,

$$\text{a = parte real de } z = \mathrm{Re}(z), \quad \text{b = parte imaginária de } z = \mathrm{Im}(z).$$

O par $(x, 0)$ se identifica com o número real x; e um par do tipo $(0, y)$ é um imaginário puro. O par $(0,1)$ é a unidade imaginária i.

Os complexos $z_1 = (a_1, b_1)$ e $z_2 = (a_2, b_2)$ são iguais se, e somente se, suas partes reais a_1 e a_2 são iguais, e suas partes imaginárias b_1 e b_2 são também iguais, isto é,

$$z_1 = z_2 \text{ se, e somente se, } a_1 = a_2 \text{ e } b_1 = b_2.$$

Os números complexos satisfazem as seguintes regras de operação:

Adição: A cada par de complexos z_1 e z_2 corresponde um único complexo z_3 chamado soma e denotado por $z_3 = z_1 + z_2$; define-se como segue: Se $z_1 = (a_1, b_1)$, $z_2 = (a_2, b_2)$, então

$$z_3 = z_1 + z_2 = (a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2). \tag{1.1.1}$$

Multiplicação: A cada par de complexos z_1 e z_2 corresponde um único complexo z_3, chamado produto de z_1 e z_2 e denotado por $z_1 \bullet z_2$; define-se como segue: Se $z_1 = (a_1, b_1)$ e $z_2 = (a_2, b_2)$, então

$$z_3 = z_1 \bullet z_2 = (a_1, b_1) \bullet (a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1). \tag{1.1.2}$$

Sejam z_1, z_2, z_3 três complexos arbitrários. Então, as seguintes regras da álgebra complexa decorrem diretamente das propriedades dos números reais, da definição de igualdade e das regras de adição e multiplicação:

A *igualdade aditiva* é o complexo $0 = (0,0)$ com as propriedades

$$z + 0 = 0 + z = z, \tag{1.1.3}$$

$$z \bullet 0 = 0 \bullet z = 0. \tag{1.1.4}$$

A *identidade multiplicativa* é o complexo $1 = (1,0)$ com a propriedade

$$1 \bullet z = z \bullet 1 = z. \tag{1.1.5}$$

Lei *comutativa* para a adição:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1. \tag{1.1.6}$$

Lei *comutativa* para a multiplicação:

$$z_1 \bullet z_2 = z_2 \bullet z_1. \tag{1.1.7}$$

Lei *associativa* para a adição:

$$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3. \tag{1.1.8}$$

Lei *associativa* para a multiplicação:

$$z_1 \bullet (z_2 \bullet z_3) = (z_1 \bullet z_2) \bullet z_3 . \tag{1.1.9}$$

Lei *distributiva para a multiplicação* em relação à *adição*:

$$z_1 \bullet (z_2 + z_3) = z_1 \bullet z_2 + z_1 \bullet z_3 . \tag{1.1.10}$$

Lei do *corte para a adição*: Se $z_1 + z_2 = z_1 + z_3$, então

$$z_2 = z_3 . \tag{1.1.11}$$

Lei do *corte para a multiplicação*: Se $z_1 \bullet z_2 = z_1 \bullet z_3$, e se $z_1 \neq 0$, então

$$z_2 = z_3 . \tag{1.1.12}$$

O inverso aditivo z^* de um complexo $z = (a, b)$ é um complexo com a propriedade

$$z + z^* = z^* + z = 0 . \tag{1.1.13}$$

Pela definição (1.1.1) de adição, se $z^* = (-a, -b)$, então (1.1.13) é satisfeita. Assim, todo complexo tem um inverso aditivo.

O *inverso multiplicativo* z^{-1} de um complexo $z = (a, b)$ não-nulo é um complexo com a propriedade

$$z \bullet z^{-1} = z^{-1} \bullet z = 1. \tag{1.1.14}$$

Pela definição (1.1.2) de multiplicação, se $z^{-1} = \left(\dfrac{a}{a^2 + b^2}, \dfrac{-b}{a^2 + b^2} \right)$, então (1.1.14) é satisfeita. Assim, todo complexo não-nulo tem um inverso multiplicativo.

O *complexo conjugado* de um complexo $z = x + iy$ é um complexo $\bar{z} = x - iy$, que tem a mesma parte real de z, mas cuja parte imaginária tem sinal oposto. De acordo com esta definição, z é também o conjugado de $\bar{z}$; por isso, z e $\bar{z}$ dizem-se complexos conjugados. Para z arbitrário,

$$z.\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 . \tag{1.1.15}$$

Assim, o produto de um complexo pelo seu conjugado é sempre um número real.

1.2 Representação Geométrica

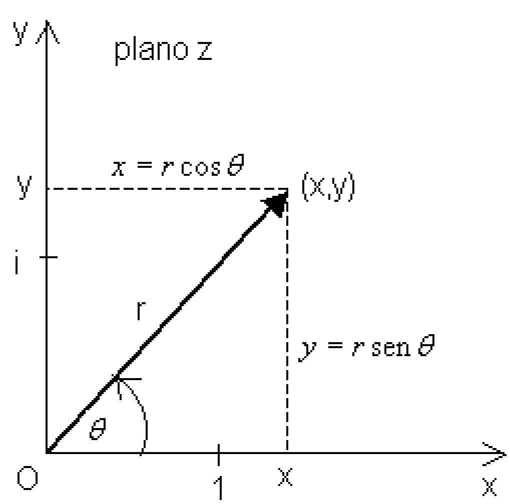
Quando os complexos estão em correspondência biunívoca com os pontos de um plano cartesiano, este chama-se *plano complexo* ou *plano z*. Os eixos coordenados são os eixos real e imaginário do plano z. Assim, para o complexo $z = x + iy = (x, y)$, x é a projeção de z sobre o eixo das abscissas (eixo real) e y é a projeção de z sobre o eixo das ordenadas (eixo imaginário). Obviamente, o complexo $z = 0 = (0,0)$ representa a origem. Note que a cada ponto do plano z corresponde um e um só complexo z, e reciprocamente.

Na figura (1.2.1), r é o comprimento do segmento da origem ao ponto $z = (x, y)$, e θ é o ângulo de inclinação desse segmento. Então, $x = r\cos\theta$ e $y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$. Assim, um complexo não-nulo *z* escrito em *forma polar* é

$$z = x + iy = r\cos\theta + ir\,\mathrm{sen}\,\theta = r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta); \qquad (1.2.1)$$

r e θ são as *coordenadas polares* de z.

Figura 1.2.1 Representação geométrica de números complexos como pontos no plano complexo ou plano z.



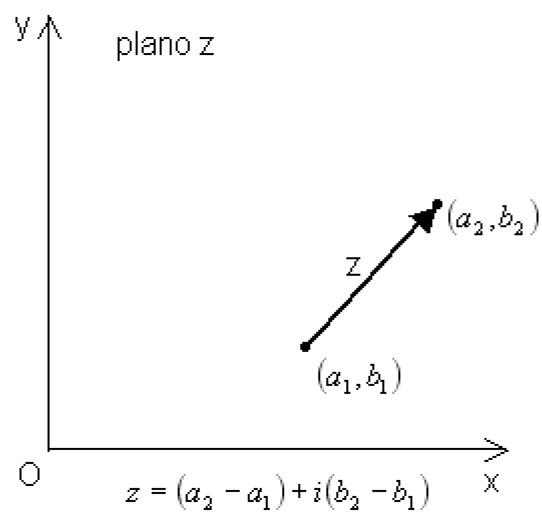
Da figura (1.2.1) , $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, e se $x \neq 0$, $\theta = arc\,tg\left(y/x \right)$. Se x = 0 e $y > 0$, $\theta = \frac{1}{2}\pi + 2k\pi$, enquanto que se x = 0 e $y < 0$, $\theta = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$, $k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots$. Se z = 0 , isto é, se x = y = 0, θ não é definido. O comprimento

$$r = +\sqrt{x^2 + y^2} \qquad (1.2.2)$$

é chamado *módulo* de z; denota-se por $|z|$. θ (grandeza plurivalente) é chamada *argumento* de z e se denota por $\theta = \arg z$.

O complexo $z = x + iy$ pode também ser encarado como o segmento orientado, ou vetor, da origem ao ponto (x, y) no plano complexo; ou também como qualquer vetor obtido pela translação desse vetor paralelamente a si mesmo. Assim, o vetor do ponto (a_1, b_1) ao ponto (a_2, b_2), que tem $a_2 - a_1$ como componente –x , e $b_2 - b_1$ como componente –y, representa o número $z = (a_2 - a_1) + i(b_2 - b_1)$. (Ver Figura 1.2.2). O ponto inicial (a_1, b_1) do vetor é chamado *origem*, e o ponto terminal (a_2, b_2) é a sua *extremidade*.

Figura 1.2.2 Representação geométrica dos complexos como vetores no plano z.



As operações de multiplicação e divisão podem dar-se interpretações geométricas simples utilizando-se a forma polar (1.2.1) de um complexo. As igualdades (1.2.3) e (1.2.4) nos dá um importante instrumento para trabalhar com a forma polar.

$$\begin{aligned}(\cos\theta_1 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_1)(\cos\theta_2 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_2) &= \cos(\theta_1+\theta_2) + i\,\mathrm{sen}(\theta_1+\theta_2),\\ (\cos\theta_1 - i\,\mathrm{sen}\,\theta_1)(\cos\theta_2 - i\,\mathrm{sen}\,\theta_2) &= \cos(\theta_1+\theta_2) - i\,\mathrm{sen}(\theta_1+\theta_2);\end{aligned} \tag{1.2.3}$$

$$\begin{aligned}(\cos\theta_1 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_1)(\cos\theta_2 - i\,\mathrm{sen}\,\theta_2) &= \cos(\theta_1-\theta_2) + i\,\mathrm{sen}(\theta_1-\theta_2),\\ (\cos\theta_1 - i\,\mathrm{sen}\,\theta_1)(\cos\theta_2 + i\,\mathrm{sen}\,\theta_2) &= \cos(\theta_1-\theta_2) - i\,\mathrm{sen}(\theta_1-\theta_2);\end{aligned} \tag{1.2.4}$$

para ângulos arbitrários θ_1 e θ_2.

O teorema de *De Moivre* afirma que, para θ e n arbitrários, n inteiro,

$$(\cos\theta \pm i\,\mathrm{sen}\,\theta)^n = \cos n\theta \pm i\,\mathrm{sen}\,n\theta, \tag{1.2.5}$$

$$(\cos\theta \pm i\,\mathrm{sen}\,\theta)^{-n} = \cos(-n\theta) \pm i\,\mathrm{sen}(-n\theta). \tag{1.2.6}$$

A demonstração de (1.2.5) é simples. Mostremos primeiro, por indução matemática, que $(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)^n = \cos n\theta + i\,\mathrm{sen}\,n\theta.$ Suponhamos que, para algum inteiro $k \geq 1$, se tenha $(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)^k = \cos k\theta + i\,\mathrm{sen}\,k\theta.$

Então, para o próximo inteiro k + 1,

$$(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)^{k+1} = (\cos k\theta + i\,\mathrm{sen}\,k\theta).(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta) =$$

$$= (\cos k\theta\cos\theta - \mathrm{sen}\,k\theta\,\mathrm{sen}\,\theta) + i(\mathrm{sen}\,k\theta\cos\theta + \cos k\theta\,\mathrm{sen}\,\theta) =$$

$$= \cos(k+1)\theta + i\,\mathrm{sen}(k+1)\theta.$$

Logo, se o teorema vale para algum inteiro $k \geq 1$, vale também para o próximo inteiro k + 1. E como, obviamente, é válido para k = 1, isto é, $(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)^1 = \cos\theta \pm i\,\mathrm{sen}\,\theta,$ vale também para k = 2 e , daí, para k = 3, 4, ... Conseqüentemente, o resultado é válido para todo inteiro positivo n, isto é,

$$(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)^n = \cos n\theta + i\,\mathrm{sen}\,n\theta\,. \qquad [1.2.5]$$

O resultado $(\cos\theta - i\,\mathrm{sen}\,\theta)^n = \cos n\theta - i\,\mathrm{sen}\,n\theta$ decorre agora de (1.2.5), substituindo θ por $-\theta$.

Como as identidades trigonométricas $\operatorname{sen}(-\varphi) = -\operatorname{sen}\varphi$, $\cos(-\varphi) = \cos\varphi$, são válidas qualquer que seja φ,

$$\begin{aligned}(\cos\theta - i\operatorname{sen}\theta)^n &= [\cos(-\theta) + i\operatorname{sen}(-\theta)]^n = \cos n(-\theta) + i\operatorname{sen} n(-\theta) = \\ &= \cos(-n\theta) + i\operatorname{sen}(-n\theta) = \cos n\theta - i\operatorname{sen} n\theta.\end{aligned}$$

Seja z um complexo com representação polar $r(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$, com $r = |z|$. Então, uma conseqüência direta de (1.2.5) e (1.2.6) é

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\operatorname{sen} n\theta), \tag{1.2.7}$$

$$z^{-n} = r^{-n}(\cos n\theta - i\operatorname{sen} n\theta). \tag{1.2.8}$$

1.3 Funções de uma Variável Complexa

Uma *função* f de um conjunto A para um conjunto B é uma regra que associa um único elemento de B a cada elemento de A . Se z e w , são variáveis em A e B , respectivamente , a expressão $w = f(z)$ é usada para indicar que *f* é uma função de *A* para *B*.

O *domínio* de definição de *f* é o conjunto *A*, e seu *contradomínio* é o conjunto *R* de elementos de *B* que *f* associa a elementos de *A*.

Uma *variável independente* é uma variável z definida no domínio de definição *A* de *f* ; uma variável dependente é uma variável *w* definida no contradomínio *R* de *f* .

Se *R* é subconjunto de *B* , a função *f* de *A* para *B* é chamada uma transformação , ou aplicação, de *A* em *B* ; enquanto que , se *R* = *B*, *f* se diz uma transformação, ou aplicação, de *A* sobre *B*.

Uma aplicação *sobrejetora* é também *injetora*, mas recíproca não é necessariamente verdadeira.

Uma regra *f* que associa mais de um elemento de um conjunto *B* a um elemento de um conjunto *A* é uma função multiforme de *A* para *B*.

Se as variáveis *z* e *w* são complexas, chamam-se variáveis complexas, e *f* é uma função complexa , ou mais precisamente , uma função complexa de variável complexa.

Se os pontos de *A* são números complexos e os de *B* são reais , *f* é uma função real de variável complexa .

Se os pontos de *A* são reais e os de *B* são complexos, *f* é uma função complexa de variável real .

Note que o conjugado $\bar{z}$ do complexo $\bar{z}$ é uma função de z :

$$\bar{z} = \frac{|z|^2}{z} \quad \text{para } z \neq 0$$

$$= 0 \qquad \text{para } z = 0 .$$

1.3.1 Representação Geométrica

É freqüente o emprego de gráficos para ilustrar o comportamento e propriedades de funções reais e complexas. Para o gráfico de uma função complexa de variável complexa são necessárias quatro dimensões; isto é, duas para a variável independente (uma para a parte real, uma para a parte imaginária) e duas para a variável dependente. Em outras palavras, as quantidades complexas z (variável independente) e w (variável dependente) são representadas em planos complexos separados, chamados plano z e o plano w. Então, a relação funcional $w = f(z)$ estabelece uma correspondência entre o plano (x, y) no plano z, no domínio *D* de definição de $f(z)$, e os pontos (u,v) no plano w. Na prática, faz-se o gráfico de $f(z)$ determinando-se os valores de w no plano w correspondentes aos valores de z em *D* do plano z.

A correspondência entre os pontos (x, y)e (u,v) é chamada uma aplicação, ou transformação, dos pontos (x, y) do plano z nos pontos (u,v) do plano w, pela função f. Os pontos correspondentes chamam-se imagens um do outro.

1.4 Limites

Uma vizinhança δ $N_\delta(z_0)$ de um complexo z_0 é um conjunto de pontos {z} que satisfazem $|z - z_0| < \delta$.

Uma vizinhança δ restrita, $\hat{N}_\delta(z_0)$ de z_0 é uma vizinhança δ se z_0 da qual se exclui o próprio ponto z_0.

Um ponto z diz-se ponto interior de um conjunto *S* de complexos se existe uma vizinhança δ de z que contem somente pontos de *S*.

Um domínio é um conjunto conexo por arcos cujos pontos são todos interiores.

Uma região é a união de um domínio com um subconjunto de sua fronteira.

Se *f* é uma função definida em todos os pontos z (exceto possivelmente z = z_0) de uma região *R*, então um complexo w_0 é o limite de $f(z)$ quando z tende para z_0, isto é,

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$$

se, para cada $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que $|f(z) - w_0| < \varepsilon$ sempre que $z \in \hat{N}_\delta(z) \cap R$.

Se existe o limite de z quando $z \to z_0$, ele é único.

Note que , se $|f(z) - w_0| < \varepsilon$ vale para todo $z \in \hat{N}_\delta(z_0) \cap R$ e se $\delta_1 < \delta$, então $|f(z) - w_0| < \varepsilon$ também vale para todo $z \in N_{\delta 1}(z) \cap R$. Alem disso, como $\hat{N}_\delta(z_0) \cap R$ é um subconjunto de $\hat{N}_\delta(z_0)$, a desigualdade $|f(z) - w_0| < \varepsilon$ vale para todo $z \in N_\delta(z_0) \cap R$ sempre que for válida para todo $z \in \hat{N}_\delta(z_0)$.

Se $w = f(z)$ e $\xi = g(z)$ são duas funções tais que $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = w_0$ e $\lim\limits_{z \to z_{02}} g(z) = \xi_0$, então

(1) $$\lim_{z\to z_0}[f(z)+g(z)] = w_0 + \xi_0 \qquad (1.4.1)$$

(2) $$\lim_{z\to z_0}[f(z)-g(z)] = w_0 - \xi_0 \qquad (1.4.2)$$

(3) $$\lim_{z\to z_0}[f(z)g(z)] = w_0\xi_0 \qquad (1.4.3)$$

(4) $$\lim_{z\to z_0}\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right] = \frac{w_0}{\xi_0}_{0} \quad \text{quando} \quad \xi_0 \neq 0 .$$

(5) se $\lim_{z\to z_0} g(z) = \xi_0$ e $\lim_{\xi\to\xi_0} f(\xi)$ existe e se há uma vizinhança restrita $\hat{N}_\delta(z_0)$ de z_0

tal que g(z) $\neq \xi_0$ para $z \in \hat{N}_\delta(z_0)$ então $\lim_{z\to z_0} f[g(z)] = \lim_{\xi\to\xi_0} f(\xi)$.

1.5 Continuidade

Uma função *f* , definida em uma região R, é contínua num ponto $z_0 \in R$ se, e somente se, satisfaz as seguintes condições:

(1) $f(z_0)$ existe (2) $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$.

Isto é, para cada $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ para todo $z \in N_\delta(z_0) \cap R$. O número δ , que corresponde a um ε dado, pode, também , depender do ponto z_0 .

Uma função que não é contínua em z_0 é descontínua aí (ou tem uma descontinuidade em z_0).

Uma função $f(z)$ é contínua em uma região *R* se o é em cada ponto de *R*.

A composta de duas funções contínuas é contínua; isto é, se uma função *f* é definida numa região *R*, e para todo z em alguma vizinhança *N* de um ponto z_0 o contradomínio de uma função g está em *R*, então a composta $f[g(z)]$ é definida quando z está em *N* e é contínua em z_0 quando *f* e *g* são contínuas em $g(z_0)$ e z_0 respectivamente.

Seja *f* definida numa região *R*. Se, para todo $\xi \in R$ e para todo $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$, onde $\delta = \delta(\varepsilon)$, independentemente de ξ, tal que $|f(z) - f(\xi)| < \varepsilon$ para todo $z \in N_\delta(\xi) \cap R$, então *f* é *uniformemente contínua* em *R*.

1.6 Diferenciação

Se uma função *f* é definida numa região *R* e z é um ponto na vizinhança $N_\delta(z_0)$ de um ponto fixo z_0, $N_\delta(z_0) \in R$, então a derivada *f'*, ou df/dz, de *f* em z_0 é

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

se o limite existe. Escrevendo $\Delta z = z - z_0$ (variação ou acréscimo de z_0) e $\Delta f = f(z) - f(z_0)$ (variação ou acréscimo de f em z_0), a derivada $f'(z_0)$ de *f* em z_0 se escreve

$$f'(z_0) = \lim_{z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z}.$$

As regras para diferenciação de funções complexas $f_1(z)$ e $f_2(z)$, supondo-se existirem $f'_1(z)$ e $f'_2(z)$, são

(a) $\frac{d}{dz}(c) = 0$, onde *c* é qualquer constante complexa. (1.6.1)

(b) $\frac{d}{dz}[cf_1(z)] = c\frac{d}{dz}[f_1(z)]$, (1.6.2)

(c) $\frac{d}{dz}[f_1(z) \pm f_2(z)] = \frac{d}{dz}[f_1(z)] \pm \frac{d}{dz}[f_2(z)]$, (1.6.3)

(d) $\frac{d}{dz}[f_1(z).f_2(z)] = f'_1(z) f_2(z) + f_1(z) f'_2(z)$, (1.6.4)

(e) $\frac{d}{dz}\left[\frac{f_1(z)}{f_2(z)}\right] = \frac{f_2(z) f'_1(z) - f_1(z) f'_2(z)}{[f_2(z)]^2}$ desde que $f_2(z) \neq 0$. (1.6.5)

1.6.1 As Equações de Cauchy- Riemann

Uma condição necessária para que uma função $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ seja diferenciável num ponto $z = x + iy$ num domínio *D* é que, em *D*, as derivadas parciais de *u* e *v* em relação a *x* e *y* existam e satisfaçam as equações de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{y}} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{1.6.1.1}$$

Se as derivadas parciais em (1.6.1.1) são contínuas, então as condições de Cauchy-Riemann são suficientes para que $f(z)$ seja diferenciável em *D*.

As funções *u* e *v* dizem-se conjugadas; conhecida uma, pode-se determinar a outra, a menos de uma constante, de modo que $f = u + iv$ seja diferenciável.

Para mostrar que se a função $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ é diferenciável no ponto $z = x + iy$, então as equações de Cauchy- Riemann (1.6.1.1) são satisfeitas no ponto z, é simples.

Como $f'(z)$ existe, $\lim_{z' \to z} \frac{f(z') - f(z)}{z' - z}$ também existe, e é igual a $f'(z)$. Escrevendo as partes reais e imaginárias de $f'(z)$ e $f(z)$ e as partes real e imaginária de z' e z,

$$f'(z) = \lim_{z' \to z} \frac{[u(x', y') - u(x, y)] + i[v(x', y') - v(x, y)]}{(x' - x) + i(y' - y)}.$$

Este limite se calcula de duas maneiras. Se x' = x, então

$$f'(z) = \lim_{y' \to y} \frac{[u(x,y') - u(x,y)] + i[v(x,y') - v(x,y)]}{i(y'-y)}$$

$$= \lim_{y' \to y} \frac{v(x,y') - v(x,y)}{y'-y} - i \lim_{y' \to y} \frac{u(x,y') - u(x,y)}{y'-y}$$

pois os dois últimos limites existem. Eles são $\partial v/\partial y$ e $\partial u/\partial y$. Portanto,

$$f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} \quad . \tag{1.6.1.2}$$

Se y’ = y, então

$$f'(z) = \lim_{x' \to x} \frac{[u(x',y) - u(x,y)] + i[v(x',y) - v(x,y)]}{x'-x}$$

$$= \lim_{x' \to x} \frac{u(x',y) - u(x,y)}{x'-x} - i \lim_{y' \to y} \frac{v(x',y) - v(x,y)}{x'-x}$$

Pois os dois últimos limites existem. Esses limites são $\partial u/\partial x$ e $\partial v/\partial x$. Portanto,

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} . \tag{1.6.1.3}$$

Comparando (1.6.1.2) e (1.6.1.3),

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{y}} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

o que prova se $f'(z)$existe em um ponto z, as equações de Cauchy- Riemann são satisfeitas nesse ponto.

1.7 Integrais

1.7.1 Curvas no Plano Complexo

Uma curva C no plano z complexo é um conjunto de pontos

$$x = x(t) , \qquad y = y(t) , \qquad a \le t \le b , \tag{1.7.1.1}$$

com z e y funções contínuas da variável real *t* no intervalo fechado $[a,b]$. Como $z = x + iy$, (1.7.1.1) pode escrever-se como

$$z = z(t) \ , \qquad a \leq t \leq b \, . \tag{1.7.1.2}$$

O ponto $z(a)$ é chamado ponto inicial de C, e o ponto $z(b)$ ponto terminal de C. $z(a)$ e $z(b)$ são as extremidades de C.

Se $z(a) = z(b)$, C diz-se uma curva fechada; caso contrário, um arco.

Se existem dois valores distintos de t, t_1 e t_2 com $t_1 < t_2$ e $t_1 \neq a, t_2 \neq b$, em $[a,b]$, tais que $z(t_1) = z(t_2)$ diz-se que a curva C se intercepta.

Um arco que não se intercepta diz-se um arco simples, ou arco de Jordan.

Uma curva fechada que não se intercepta diz-se uma curva fechada simples, ou curva de Jordan.

Uma curva diz-se suave se $z'(t)$ existe, é contínua e não se anula para nenhum t em $[a,b]$.

Uma curva diz-se retificável se tem comprimento finito L ; isso é , se a integral

$$L = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt$$

existe . Se C é suave , é retificável , pois a integranda ainda acima é então função contínua de t em $[a,b]$, o que é suficiente para assegurar a existência da integral .

Sejam $C_1, C_2, ..., C_n$ n arcos suaves tais que o ponto terminal de C_j coincida com o ponto inicial de C_{j+1}, $j = 1,2...,n-1$. A união desses n arcos suaves é uma curva seccionalmente (parcialmente) suave , se chama um contorno .

Se um contorno não se intercepta , é chamado contorno simples. Se o ponto terminal de C_n coincide com o ponto inicial de C_1 o contorno se chama contorno fechado.

Um contorno fechado que não se intercepta chama-se contorno fechado simples; isto é , um contorno fechado simples é uma curva de Jordan parcialmente suave, retificável.

Nota: A palavra curva significará aqui sempre curva retificável.

1.7.2 Integração Complexa

Se $[a,b]$ é um intervalo fechado e $\{t_0, t_1, ..., t_n\}$ é uma seqüência finita crescente de valores tais que t_0 = a e t_n = b , então o conjunto de intervalos $\{[t_{j-1} - t_j]\}$, j= 1,2,...,n é chamado uma decomposição p_n do intervalo $[a,b]$.

O maior dos números $t_j - t_{j-1}$, j = 1 , 2,..., n é chamado norma de P_n e se indica por $\|P_n\|$.

Qualquer conjunto de *n* números formado pela escolha de um número t'_j de cada intervalo $[t_{j-1}, t_j]$, j = 1 , 2, ..., n é chamado um refinamento Q_n da decomposição P_n . Se Q_n = $\{t'_1, t'_2, ..., t'_n\}$ é um refinamento de uma decomposição $P_n = \{t_0, t_1, ..., t_{n-1}, t_n\}$ de $[a,b]$, então

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_{n-1} < t_n = b \quad \text{e} \quad t_{j-1} \leq t'_j \leq t_j \quad \text{j = 1 ,2 , ..., n.}$$

Seja $z = z(t)$, $a \leq t \leq b$, um contorno C e Q_n um refinamento da decomposição P_n de $[a,b]$ com norma $\|P_n\|$. Denotemos $z(t_j)$ por z_j, j = 0 , 1 , 2 ,..., n, e $z(t'_j)$ por z'_j. Então , a soma de Riemann , baseada em P_n, para qualquer função *f* definida para todo z em *C* é

$$S(f, P_n, Q_n) = \sum_{j=1}^{n} f(z'_j)(z_j - z_{j-1}) = \sum_{j=1}^{n} f(z'_j)\Delta z_j \qquad (1.7.2.1)$$

onde $\Delta z_j = z_j - z_{j-1}$, j = 1 , 2 ,..., n.

Se um numero *J* é tal que , para todo $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que

$$|J - S(f, P_n, Q_n)| < \varepsilon$$

para todas as decomposições P_n e todos os refinamentos Q_n de P_n para os quais $\|P_n\| < \delta$, então *f* se diz integrável sobre *C* e o número *J* é a integral de *f* sobre *C* , escreve-se

$$J = \int_c f(z)dz \qquad \text{ou} \qquad J = \int_c f(\zeta)d\zeta \qquad \text{ou} \qquad J = \int_c f$$

Se *C* : $z = z(t) + iy(t)$, $a \leq t \leq b$, é um contorno qualquer , então C tem um “sentido” , isto é , quando t varia de maneira crescente de a para b , o ponto $z(t)$ se move ao longo de C de alguma maneira (em algum sentido). Define-se como segue uma curva C^- que tenha o mesmo lugar , ou conjunto , que C , porém sentido oposto .

Se C^- é a curva parametrizada por $s=-t,-b\le s\le -a$, e cuja equação é $z=\tilde{z}(s)=x(-s)+iy(-s)$, então o lugar de C^- é o lugar de C , mas o ponto inicial de C^- é $\tilde{z}(-b)=z(b)$ (que é o ponto terminal de C) e o ponto terminal de C^- é $\tilde{z}(-a)=z(a)$ (que é o ponto inicial de C) .

A mudança de variável de t para $-t$ inverte então o sentido em uma curva e permuta os papéis dos pontos inicial e terminal.

A curva C^- diz-se reversa , ou oposta , ou negativa , da curva C .

1.7.3 Integrais Curvilíneas Reais

Passaremos em revista as integrais curvilíneas reais para mostrar a existência de integrais de funções de uma variável complexa.

Seja C: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a\le t\le b$, um contorno , e $P_n : a=t_0<t_1<...<t_{n-1}<t_n=b$ uma decomposição qualquer do intervalo fechado $[a,b]$. Representando por (x_j, y_j) o ponto $(x(t_j), y(t_j))$, a decomposição P_n define uma seqüência $(x_0,y_0),(x_1 y_1),...,(x_n,y_n)$ de pontos no plano xy e cada um desses pontos pertence ao contorno C. Seja $Q_n : t'_1\le t'_2\le ...\le t'_{n-1}\le t'_n$ com $t_{j-1}\le t'_j\le t_j,\ j=1,2,...,n.$ um refinamento de P_n. Então , Q_n define uma seqüência $(x'_1,y'_1),(x'_2,y'_2),...,(x'_n,y'_n)$ de pontos do plano xy e cada um desses pontos pertence ao contorno C .

Seja $f(x,y)$ uma função definida em todos os pontos do contorno C ; formemos a soma

$$J_n=\sum_{j=1}^{n} f(x'_j,y'_j)\Delta x_j \ , \qquad (1.7.3.1)$$

onde $\Delta x_j = x_j - x_{j-1}$, j = 1, 2 ...,n . Observe que , em geral , esta soma depende do contorno *C* e dos pontos (x_j, y_j) e (x'_j, y'_j). Se existe o limite J de J_n quando $\|P\| \to 0$ e se o valor J não depende dos pontos (x_j, y_j) e (x'_j, y'_j), então, a integral curvilínea de $f(x, y)$, em relação a *x* , ao longo de *C* , existe e seu valor é *J* . Simbolicamente.

$$\int_c f(x, y)dx = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{j=1}^{n} f(x'_j, y'_j)\Delta x_j. \qquad (1.7.3.2)$$

Analogamente , a integral curvilínea de uma função $g(x, y)$ em relação a *y* , ao longo de *C*, é

$$\int_c g(x, y)dy = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{j=1}^{n} g(x'_j, y'_j)\Delta y_j. \qquad (1.7.3.3)$$

Na prática integrais curvilíneas das formas (1.7.3.2) e (1.7.3.3) costumam aparecer em conjunto como uma soma $\int_c f(x, y)dx + \int_c g(x, y)dy$, e se escrevem usualmente $\int_c f(x, y)dx + g(x, y)dy$.

1.7.4 O Teorema da Integral de Cauchy

O teorema da integral de Cauchy afirma que, se *C* é um contorno fechado (não necessariamente simples) contido em um domínio simplesmente conexo onde *f* seja analítica, então

$$\int_C f(z)dz = 0.$$

Um conjunto diz-se aberto se todo ponto seu é ponto interior.

Um conjunto é conexo se dois pontos seus quaisquer podem ser unidos por um arco inteiramente contido no conjunto.

Um domínio é um conjunto conexo, aberto, de complexos. Assim, os abertos são ambos conexos e , daí, são ambos domínios.

Um domínio *D* diz-se simplesmente conexo se todo ponto interior de todo contorno fechado inteiramente em *D* também pertence a *D*. Equivalentemente, um domínio *D* no plano z finito é simplesmente conexo se seu complementar em relação ao plano z prolongado é conexo. Intuitivamente, um domínio simplesmente conexo não tem “buracos”. Assim, o domínio *D* é simplesmente conexo porque não tem “buracos” e porque seu complementar em relação ao plano z prolongado é o conjunto conexo que consiste da união da curva *C* e seu exterior, inclusive o ponto no infinito.

1.7.5 A Fórmula Integral de Cauchy

A fórmula integral de Cauchy afirma que, se uma função $f(z)$ é analítica em todo ponto de um contorno fechado simples *C* e de seu interior, e se z_0 é ponto interior de *C*, então

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}, \qquad (1.7.5.1)$$

onde a integral é tomada no sentido positivo ao longo de C.

Esta fórmula mostra que se uma função é analítica sobre um contorno fechado simples e em seu interior, o valor da função em qualquer ponto interior ao contorno fica completamente determinado pelos valores que a função toma no contorno. Além disso, proporciona uma fórmula para cálculo do valor da função em qualquer ponto interior, em termos de seus valores de contorno.

1.8 Seqüências e Séries

1.8.1 Definição

Uma seqüência infinita (ou simplesmente seqüência) de complexos é uma função complexa *f* cujo domínio é conjugado *J* de todos os inteiros positivos. Assim, a função $f(n)$ definida para todo inteiro positivo n = 1,2,3,..., é uma seqüência. Escrevendo $z_n = f(n)$, a seqüência $f(n)$ é representada por $\{z_n\} = \{z_1, z_2, z_3, ...z_n, ...\}$.

Por exemplo, se f é uma função definida para cada inteiro n por $f(n) = n$, a seqüência $f(n)$ é $\{n\} = \{1,2,3,...,n,...\}$. Se g é uma função definida por $g(n) = i^n$, então $g(n)$é a seqüência $\{i^n\} = \{i,-1,-i,i,...\}$.

Os termos de uma seqüência $\{z^n\} = \{z_1, z_2,..., z_n,...\}$ são $z_1, z_2,..., z_n,...$.

O contradomínio R de uma seqüência $\{z_n\}$ é o conjunto de termos distintos de $\{z_n\}$.

Uma seqüência $\{z_n\}$ é limitada se , e somente se, seu contradomínio o é.

O contradomínio R de uma seqüência $\{z_n\}$ é finito se contém apenas um número finito de termos , ou valores, distintos; caso contrário, é infinito.

Uma seqüência cujo contradomínio é finito é sempre limitada, enquanto que, se o contradomínio é infinito, a seqüência pode ser , ou não, limitada.

Uma seqüência $\{z_n\}$ é chamada seqüência fundamental , ou seqüência de Cauchy, se, para cada $\varepsilon > 0$ arbitrário, existe um $N > 0$ tal que

$$|z_n - z_m| < \varepsilon \text{ para todo } n > N \text{ e } m > N.$$

A seqüência $\{z_n\} = \{z_1, z_2, z_3,...z_n,...\}$é convergente, e converge para o limite L, se, para cada $\varepsilon > 0$ existe um inteiro $N > 0$ tal que $|z_n - L| < \varepsilon$ para todo $n > N$.

A convergência de uma seqüência $\{z_n\}$ para o limite L é representada por $z_n \to L, \{z_n\} \to L,$ ou $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = L$.

Quando uma seqüência não converge para o limite L, diz-se divergente, ou que diverge.

Diz-se que uma seqüência $\{z_n\}$ diverge para o infinito (escreve-se $\{z_n\} \to \infty$), se, para cada $M > 0$, existe um $N > 0$ tal que $|z_n| > M$ para todo $n > N$.

Por exemplo, as seqüências $\{n\} = \{1,2,3,...,n,...\}$ e $\{1 - ni\} = \{1 - i, 1 - 2i, 1 - 3i,..., 1 - ni,...\}$ divergem ambas para infinito.

Diz-se que uma seqüência é oscilante, ou que oscila, se não converge nem diverge para infinito. Por exemplo, as seqüências $\{(-1)^n\} = \{-1,1,-1,...,(-1)^n...\}$ e $\{i^n\} = \{i,-1,-i,1,...,i^n,...\}$ são oscilantes.

Se $\{z_n\} = \{z_1, z_2,..., z_n...\}$ é uma seqüência infinita e se $S_k = \sum_{\upsilon=1}^{k} z_\upsilon, K = 1,2,...,$ então, a seqüência $\{S_n\} = \{S_1 S_2,..., S_n,..\}$. é chamada uma serie infinita.

O termo $S_k = \sum_{\upsilon=1}^{k} z_\upsilon$ é chamado soma parcial de ordem *k* da serie infinita $\{S_n\}$.

A série infinita $\{S_n\}$ é dita convergente se a seqüência converge. Se a seqüência $\{S_n\}$ converge para *S* , então *S*, então *S* se diz soma da série $\{S_n\}$; a série então converge para *S*. Em tal caso, escreve-se $S = \sum_{\upsilon=1}^{\infty} z_\upsilon = z_1 + z_2 + z_3 + \ldots$. Usualmente, não se faz distinção entre a série infinita S_n e a sua soma. Isto é, $\sum_{\upsilon=1}^{\infty} z_\upsilon$ tanto pode representar a série infinita $\{S_n\}$ como a sua soma *S* (quando esta última existe). A série infinita $\sum_{\upsilon=1}^{\infty} z_\upsilon$ converge para *S* , oscila ou diverge, conforme a seqüência $\{S_n\}$ de somas parciais $S_k = \sum_{\upsilon=1}^{k} z_\upsilon$ convirja , oscile ou divirja.

Se $\{z_n\} = z_1, z_2,..., z_n,...,$ e se $\{z'_n\} = z'_1, z'_2,..., z'_n,...$ são duas seqüências , usaremos a anotação seguinte:

$$\{z_n + z'_n\} = z_1 + z'_1 + z_2 + z'_2 ,...z_n + z'_n + ...$$

$$\{z_n z'_n\} = z_1 z'_1, z_2 z'_2,..., z_n z'_n,...$$

$$\left\{\frac{z_n}{z'_n}\right\} = \frac{z_1}{z'_1}, \frac{z_2}{z'_2},..., \frac{z_n}{z'_n},..., \text{ desde que } z'_n \neq 0, \text{ n = 1, 2, ...}$$

$$\{-z_n\} = -z_1, -z_2,..., -z,...$$

1.8.2 Critérios de Convergência

Uma série infinita $\sum z_\upsilon$ se diz absolutamente convergente se a série $\sum |z_\upsilon|$ converge. Se apenas a primeira série converge, $\sum z_\upsilon$ se diz condicionalmente convergente. Se a série de valores absolutos converge, a primeira série também converge.

O critério de comparação para convergência absoluta: Se a série $\sum \xi_\upsilon$ é absolutamente convergente e $\sum z_\upsilon$ é uma série tal que, para um dado *k > 0*, $|z_\upsilon| \leq k|\xi_\upsilon|$ para cada v = 1, 2, 3, ..., então a série $\sum z_\upsilon$ também é absolutamente convergente .

Duas séries muito usadas para a determinação de convergência absoluta são

(a) a série geométrica

$$\sum z^\upsilon = z^0 + z^1 + z^2 + \ldots + z^n + \ldots,$$

que é absolutamente convergente para $|z| < 1$ e divergente para $|z| \geq 1$ e

(b) a série *S*

$$\sum \frac{1}{\nu^S} = \frac{1}{1^S} + \frac{1}{2^S} + \frac{1}{3^S} + \ldots + \frac{1}{n^S} + \ldots,$$

que é absolutamente convergente para *S > 1* e divergente para $S \leq 1$.

O critério da razão de D´Alembert: A série $\sum z_\upsilon$ converge absolutamente se , para todo inteiro *n > N* , onde *N* é um inteiro positivo fixo ,

$$\left|\frac{z_n + 1}{z_n}\right| < \rho, \qquad (1.8.2.1)$$

onde ρ é independente de *n* e $0 < \rho < 1$.

Desigualdade de Abel: Se $A = \max\limits_{1 \leq r \leq n} |S_r|$, onde $S_r = \sum_{\nu=1}^{r} a_\upsilon$, e se $\{x_n\}$ é uma seqüência de reais tais que $x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq \ldots > 0$, então

$$\left|\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\upsilon x_\upsilon\right| \leq Ax_1.$$

O critério de Dirichlet: Se $\{x_n\}$ é uma seqüência não-crescente de reais positivos que converge para zero e se existe k real positivo tal que , para todo n , $\left|\sum_{\upsilon=1}^{n} a_\upsilon\right| \leq k$, então a série $\sum_{\upsilon=1}^{\infty} a_\upsilon x_\upsilon$ converge.

Se $\sum_{\upsilon=1}^{\infty} u_\upsilon$ é uma série , $\mu = f(\nu)$ é uma aplicação $1-1$ dos inteiros positivos sobre os inteiros positivos, e $v_\mu = u_\upsilon$, então a série $\sum_{\mu=1}^{\infty} v_\mu$ se diz um rearranjo da série $\sum_{\upsilon=1}^{\infty} u_\upsilon$.

Se $\sum z_\upsilon$ é condicionalmente convergente , o rearranjo da ordem de seus termos dará uma série que poderá divergir ou convergir para uma outra soma .

Se $\sum z_\upsilon$ é absolutamente convergente, a ordem de seus termos pode ser rearranjada , dando uma nova série , que terá sempre a mesma soma que a original.

Um amálgama $\sum u_n$ das duas séries $\sum x_n$ e $\sum y_n$ é um rearranjo das séries $x_1 + y_1 + x_2 + y_2 + x_3 + y_3 + \ldots$ com as propriedades:

(1) $u_{n_1} = x_{k_1}$, $u_{n_2} = x_{k_2}$. e $k_2 > k_1$ implica $n_2 > n_1$,

(2) $u_{n_1} = y_{k_1}$, $u_{n_2} = y_{k_2}$. e $k_2 > k_1$ implica $n_2 > n_1$.

Por exemplo, um amálgama das duas séries $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ é a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{4.5} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \ldots$$

porque esta série é um rearranjo da série

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{4.5} + \ldots,$$

e tem as duas propriedades indicadas. Isto é, os termos das séries $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ aparecem na mesma ordem em $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ que em $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ respectivamente. Outro amálgama das duas séries é

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{4.5}+\frac{1}{5.6}+\frac{1}{6.7}+...$$

1.8.3 Convergência de Seqüências e Séries de Funções

Uma seqüência de funções $\{f_n\}$ em um conjunto E de complexos é o conjunto $\{f_1, f_2,..., f_n,...\}$ de funções $f_n(z)$, n = 1, 2, 3, ..., definidas para cada z um E .

Se a seqüência numérica $\{f_n(z)\}$ = $\{f_1(z), f_2(z),..., f_n(z)\}$ converge para $f(z)$ para cada z em um subconjunto R de E , então $f(z)$ é chamada o limite da seqüência $\{f_n\}$ em R e se escreve $f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z)$. Isto é , $\{f_n\}$ converge para f em R se , dado $\varepsilon > 0$, existe um $N > 0$, dependendo de ε e de z , tal que, para cada z em R , $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ para todo $n > N = N(\varepsilon, z)$.

A seqüência $\{f_n\}$ converge sempre , se o subconjunto R é todo o plano z .

A seqüência $\{f_n\}$ diverge em $z = z_1$ se $z_1 \notin R$.

A seqüência $\{f_n\}$ diverge sempre se R é o conjunto vazio .

A série $\sum_{r=1}^{\infty} f_r$ é absolutamente convergente em R se $\sum_{r=1}^{\infty} |f_\upsilon(z)|$ é convergente para cada $z \in R$.

A série $\sum_{r=1}^{\infty} f_r$ é condicionalmente convergente em R se a série numérica $\sum_{r=1}^{\infty} f_\upsilon(z_0)$ é condicionalmente convergente em *R*.

A série $\sum_{r=1}^{\infty} f_r$ é divergente em *R* se a série numérica $\sum_{r=1}^{\infty} f_r(z_0)$ é divergente em *R*.

Seja $\{f_n(z)\}$ uma seqüência de funções contínuas em um região *R* do plano z. Suponhamos que essa seqüência convirja para uma função $f\ (z)$ em *R*. Pode-se concluir daí que $f\ (z)$ não é necessariamente contínua em *R* ?

Uma seqüência de funções $\{f_n(z)\}$ converge uniformemente para uma função $f\ (z)$,para todo z, em uma região *R*, se , dado um $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeno , existe um $N > 0$, inteiro, que pode depender de ε , mas não de z , tal que

$$|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon \quad \text{para todo } n > N \text{ e todo z em } R.$$

A convergência uniforme é uma propriedade de uma seqüência em uma região , ou em um conjunto ; a convergência é uma propriedade de uma seqüência em um ponto . Assim , a afirmação "uma seqüência converge uniformemente em um ponto z_0" implica a existência de uma região , contendo o ponto z_0 na qual a seqüência converge uniformemente.

Uma seqüência converge não- uniformemente em um ponto z_0 se ela é convergente aí , mas não existe nenhuma região contendo o ponto z_0 onde a seqüência seja uniformemente convergente .

Uma série de funções converge uniformemente em um conjunto ou região *R* se a seqüência de suas somas parciais converge uniformemente em *R* .

1.8.4 Séries de Potências

Uma série de potências é uma série infinita da forma

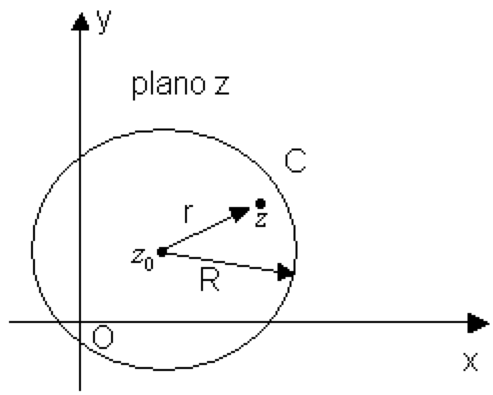
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n , \tag{1.8.4.1}$$

onde z_0 é um complexo fixo e os a_n , n = 1, 2, 3,..., são números complexos dados.

O círculo de convergência, $C : |z - z_0| = R$, é o maior círculo centrado em z_0 em cujo interior a série (1.8.4.1) converge em cada ponto. (V. Fig. 1.8.4.1).

O raio de convergência R é o raio do círculo de convergência da série de potências. (V. Fig. 1.8.4.1)

Figura 1.8.4.1 O círculo de convergência C e o raio de convergência da série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$.



O teorema de Taylor afirma que, se $f(z)$ é analítica em todos os pontos interiores a um círculo C de centro z_0 e raio *R*, a série de potências

$$\sum a_n (z - z_0)^n = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \frac{1}{2!} f''(z_0)(z - z_0)^2 + ... + \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)(z - z_0)^n + ..$$

converge para $f(z)$ em todo ponto z interior a C.

Esta série também se chama desenvolvimento de Taylor para a função *f* na vizinhança de z_0, e se escreve freqüentemente como

$$f(z) = f(z_0) + \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{v!} f^{(v)}(z_0)(z - z_0)^v \quad \text{ou} \quad f(z) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{v!} f^{(v)}(z_0)(z - z_0)^v .$$

Se se desenvolve uma função *f* em série de Taylor na vizinhança do ponto $z_0 = 0$, a série é $f(z) = f(0) + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu!} f^{(\nu)}(0) z^{\nu}$. Tal série também se chama série de Maclaurin.

Desenvolvendo as seguintes funções em série de Maclaurin:

(a) e^z

A n-ésima derivada de e^z é $\frac{d^n(e^z)}{dz^n} = e^z$, $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$ para $n = 1,2,3,\ldots$, e $f\ (0) = e^0 = 1$.

Portanto, $e^z = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu!} z^{\nu}$.

(b) $\operatorname{sen} z$

A n-ésima derivada de $\operatorname{sen} z$ é

$\frac{d^n(\operatorname{sen} z)}{dz^n} = (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)} \cos z$ se n é ímpar

$= (-1)^{\frac{1}{2}n} \operatorname{sen} z$ se n é par

Logo, $f(0) = 0$ e

$f^{(n)}(0) = (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}$ se n é ímpar

$= 0$ se n é par

Portanto, $\operatorname{sen} z = \sum_{\mu \text{ímpar}} (-1)^{\frac{1}{2}(\mu-1)} \frac{z^{\mu}}{\mu!}$. Fazendo $\mu = 2\nu - 1$, $\operatorname{sen} z = \sum_{\nu=1}^{\infty} (-1)^{\nu-1} \frac{z^{2\nu-1}}{(2\nu-1)!}$.

(c) $\cos z$

A n-ésima derivada de cos z é

$$\frac{d^n(\cos z)}{dz^n} = (-1)^{\frac{1}{2}(n+1)} \operatorname{sen} z \qquad \text{se n é ímpar}$$

$$= (-1)^{\frac{1}{2}n} \cos z \qquad \text{se n é par}$$

Logo, $f(0) = 1$ e

$$f^{(n)}(0) = 0 \qquad \text{se n é ímpar}$$

$$= (-1)^{\frac{1}{2}n} \qquad \text{se n é par}$$

Portanto, $\cos z = 1 + \sum_{\mu par} (-1)^{\frac{1}{2}\mu} \frac{z^\mu}{\mu!}$. Fazendo $\mu = 2v$,

$$\cos z = 1 + \sum_{v=1}^{\infty} (-1)^v \frac{z^{2v}}{(2v)!}.$$

Capítulo 2

Álgebra Quaterniônica

Os quatérnios não vieram ocupar o lugar que Hamilton sonhava na física, comparável ao papel desempenhado pelo cálculo na mecânica, mas, mesmo assim, tiveram importância decisiva em pelo menos dois sentidos. Por um lado, eles deram origem ao cálculo vetorial, e por outro lado, a descoberta teve um papel decisivo no desenvolvimento da Álgebra. Neste capítulo apresentaremos alguns conceitos da teoria da álgebra quaterniônica.

2.1 O conceito de quatérnios

Os quatérnios foram idealizados por Willian R. Hamilton (1805-1865), em 1843, e são definidos no espaço $\mathbf{R}^4$, sendo algumas vezes simbolizados por **H** em homenagem ao seu criador.

Os quatérnios podem ser interpretados de várias maneiras. Entre elas pode-se considerar: como um vetor de dimensão quatro, um número complexo com três unidades imaginárias, ou um número hipercomplexo . Considerando o escalar 1 e os versores, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ como base do espaço de quatérnios pode-se representar um quatérnio genérico por:

$$\vec{q} = q + q_x\vec{i} + q_y\vec{j} + q_z\vec{k} = q + \vec{q} = \left(q, \vec{q}\right) = \left(q, q_x, q_y, q_z\right) \qquad (2.1.1)$$

onde q, q_x, q_y e q_z são escalares reais e q_x, q_y e q_z são componentes do vetor $\vec{q}$. Como pode-se ver na Equação (2.1.1) são usados quatro modos para representar os quatérnios. Uma característica interessante dos quatérnios é que ele pode ser usado tanto para representar um escalar, um número complexo na forma $z = a + bi$ quanto um vetor do $\mathbf{R}^3$. Fazendo q = 0 tem- se um vetor, chamado também de quatérnio puro ; considerando $q_y = q_z = 0$ tem-se um número complexo e fazendo $q_x = q_y = q_z = 0$ tem-se um escalar.

Assim como no caso de números complexos na forma $z = a + bi$, no qual i é a unidade imaginária ($i^2 = -1$), os três componentes imaginários do quatérnio, denominados imaginários principais possuem a mesma propriedade. Além desta propriedade os produtos, dois a dois, de i, j e k, seguem a mesma regra do produto vetorial. Deste modo pode-se admitir as seguintes relações:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1 \tag{2.1.2}$$

$$ij = -ji = k,\ ki = -ik = j,\ jk = -kj = i,\ ijk = -1$$

Dado o quatérnio da Equação (2.1.1), pode-se apresentar algumas características e propriedades fundamentais:

- parte escalar de $\vec{q}$: q
- parte vetorial de $\vec{q}$: $\vec{q} = q_x \vec{i} + q_y \vec{j} + q_z \vec{k}$
- conjugado de $\vec{q}$: $\bar{\vec{q}} = q - q_x \vec{i} - q_y \vec{j} - q_z \vec{k} = q - \vec{q} = (q, -\vec{q}) = (q, -q_x, -q_y, -q_z)$ (2.1.3)
- norma de $\vec{q}$: $\left|\vec{q}\right| = \sqrt{q^2 + q_x{}^2 + q_y{}^2 + q_z{}^2}$ (2.1.4)
- quatérnio unitário: $\left|\vec{q}\right| = \sqrt{q^2 + q_x{}^2 + q_y{}^2 + q_z{}^2} = 1$ (2.1.5)

Dados os quatérnios, $\vec{q}_1 = \left(q_1, \overrightarrow{q_1}\right)$ e $\vec{q}_2 = \left(q_2, \overrightarrow{q_2}\right)$ bem como as condições 2.2, pode-se desenvolver a soma e o produto dos quatérnios, obtendo-se:

- soma de quatérnios:

$$\vec{q}_1 + \vec{q}_2 = \left(q_1, \overrightarrow{q_1}\right) + \left(q_2, \overrightarrow{q_2}\right) = \left(q_1 + q_2, \overrightarrow{q_1} + \overrightarrow{q_2}\right) \tag{2.1.6}$$

- produto de quatérnios:

$$\vec{q}_1 \vec{q}_2 = \left(q_1, \overrightarrow{q_1}\right).\left(q_2, \overrightarrow{q_2}\right) = \left(q_1 q_2 - \overrightarrow{q_1}.\overrightarrow{q_1}\ ,\ q_1 \overrightarrow{q_2} + q_2 \overrightarrow{q_1} + \overrightarrow{q_1} \times \overrightarrow{q_2}\right) \tag{2.1.7}$$

2.2 Representação matricial quaterniônica

É notório que um quatérnio pode ser representado por uma matriz real 4×4. Portanto em definindo:

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad j = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Podemos escrever,

$$\vec{q} = q + q_x i + q_y j + q_z k$$

$$\vec{q} = q\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + q_x \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + q_y \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + q_z \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & q_x & 0 & 0 \\ -q_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -q_x \\ 0 & 0 & q_x & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & q_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_y \\ -q_y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -q_y & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & q_z \\ 0 & 0 & -q_z & 0 \\ 0 & q_z & 0 & 0 \\ -q_z & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{q} = \begin{pmatrix} q & q_x & q_y & q_z \\ -q_x & q & -q_z & q_y \\ -q_y & q_z & q & -q_x \\ -q_z & -q_y & q_x & q \end{pmatrix}$$

E além disso verificamos as seguintes relações:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

$$ij = -ji = k,\ ki = -ik = j,\ jk = -kj = i\ ,\ ijk = -1$$

$$i^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -1$$

$$j^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -1$$

$$k^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -1$$

$$ij = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -ji = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = k$$

$$ki = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = -ik = -\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = j$$

$$jk = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -kj = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = i$$

$$ijk = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -1$$

2.3 O anel dos quatérnios

O conjunto dos quatérnios H é definido como

$$\mathrm{H} = \{(q, q_x, q_y, q_z) / q, q_x, q_y, q_z \in \Re\},$$

onde

$$(q, q_x, q_y, q_z) = (q', q'_x, q'_y, q'_z) \Leftrightarrow q = q', q_x = q'_x,\ q_y = q'_y,\ q_z = q'_z,$$

cujas operações de adição e multiplicação são definidas da seguinte forma:

$$(q, q_x, q_y, q_z) + (q', q'_x, q'_y, q'_z) = (q + q', q_x + q'_x,\ q_y + q'_y,\ q_z + q'_z); \tag{2.3.1}$$

$$(q, q_x, q_y, q_z)(q', q'_x, q'_y, q'_z) = (qq' - q_x q'_x - q_y q'_y - q_z q'_z,\ qq'_x + q_x q' + q_y q'_z - q'_y q_z,$$
$$qq'_y + q' q_y + q_z q'_x - q'_z q_x,\ qq'_z + q_z q' + q_x q'_y - q'_x q_y) \tag{2.3.2}$$

Sendo assim , H satisfaz a todos os axiomas de um anel (ver, p.ex.,[8]), e suas propriedades associativa e distributiva da adição e multiplicação, sendo comutativa apenas a operação de adição.

O número quaterniônico (0,0,0,0) é o elemento neutro da adição e (1,0,0,0) a unidade da multiplicação , e existe ainda o inverso aditivo e multiplicativo para cada elemento não-nulo em H.

Um anel quaterniônico é representado por $(H,+,.)$. Dizemos que é um anel com divisão ou um corpo não comutativo. E para ser um corpo basta apenas da propriedade comutativa da multiplicação, por (2.2.2) temos:

$$(0,1,0,0).(0,0,1,0) \neq (0,0,1,0).(0,1,0,0)$$

Definimos as bases como:

$$\begin{aligned} &(1,0,0,0) \leftrightarrow 1; \\ &(0,1,0,0) \leftrightarrow i; \\ &(0,0,1,0) \leftrightarrow j; \\ &(0,0,0,1) \leftrightarrow k; \end{aligned} \tag{2.3.3}$$

E representamos um número quaterniônico $\vec{q} = (q, q_x, q_y, q_z)$, com $q, q_x, q_y, q_z \in \Re$ por

$$\begin{aligned} \vec{q} &= (q,0,0,0)(1,0,0,0) + (q_x,0,0,0)(0,1,0,0) \\ &+ (q_y,0,0,0)(0,0,1,0) + (q_z,0,0,0)(0,0,0,1) \\ &= q + q_x i + q_y j + q_z k \end{aligned} \tag{2.3.4}$$

onde q é a parte escalar do quatérnio $\vec{q}$ e $r = q_x i + q_y j + q_z k$ a sua parte vetorial.

Geometricamente pode-se identificar r como o raio vetor tridimensional de componentes q_x, q_y e q_z .

Sendo assim, podemos representar H como a soma direta

$$H = \Re \oplus V \tag{2.3.5}$$

sendo $\Re$ o corpo dos reais e V um espaço euclidiano tridimensional.

E se multiplicarmos as unidades quaterniônicas i, j, k, utilizando (2.3.2), obtemos

$$\begin{gathered} i^2 = j^2 = k^2 = -1, \\ ij = k, \quad ji = -k, \\ ki = j, \quad ik = -j, \\ jk = i, \quad kj = -i, \\ ki = j, \quad ik = -j. \end{gathered} \tag{2.3.6}$$

Definição 2.3.1 (quatérnio conjugado) – O quatérnio conjugado $\overline{q}$ de um quatérnio $\vec{q} = (q, q_x, q_y, q_z) = q + q_x\vec{i} + q_y\vec{j} + q_z\vec{k}$ é o número $\overline{q} = (q, -q_x, -q_y, -q_z) = q - q_x\vec{i} - q_y\vec{j} - q_z\vec{k}$

Definição 2.3.2 (norma) – A norma $|q|$ de um quatérnio $\vec{q} = (q, q_x, q_y, q_z) = q + q_x\vec{i} + q_y\vec{j} + q_z\vec{k}$ é o número real $|q| = \sqrt{q^2 + q_x{}^2 + q_y{}^2 + q_z{}^2}$

Propriedade 2.3.1 – Dados dois números quaterniônicos q_1 e q_2, temos que:

$$\overline{q_1 q_2} = \overline{q_2}\,\overline{q_1} \tag{2.3.7}$$

Propriedade 2.3.2 – Dado um número quaterniônico q_1, temos que:

$$\overline{q_1} q_1 = q_1 \overline{q_1} = |q_1|^2 \tag{2.3.8}$$

Dados dois números quaterniônicos $\vec{q}_1 = q + q_x\vec{i} + q_y\vec{j} + q_z\vec{k}$ e $\vec{q}_2 = q + q'_x\vec{i} + q'_y\vec{j} + q'_z\vec{k}$ enunciaremos as seguintes operações algébricas, definidas no conjunto H, de acordo com a representação (2.3.4):

Adição:

$$\overrightarrow{q_1} + \overrightarrow{q_2} = (q + q') + (q_x + q'_x)i + (q_y + q'_y)j + (q_z + q'_z)k;$$

Multiplicação:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{q_1}.\overrightarrow{q_2} &= (qq' - q_xq'_x - q_yq'_y - q_zq'_z) + (qq'_x + q_xq' + q_yq'_z - q'_y\,q_z)i \\ &+ (qq'_y + q'q_y + q_zq'_x - q'_z\,q_x)j + (qq'_z + q_zq' + q_xq'_y - q'_x\,q_y)k;\end{aligned}$$

Divisão:

$$\begin{aligned}\frac{\overrightarrow{q_1}}{\overrightarrow{q_2}} &= \frac{q_1}{q_2}.\frac{\overline{q_2}}{\overline{q_2}} = \left(\frac{qq' + q_xq'_x + q_yq'_y + q_zq'_z}{q'^2 + q'^2_x + q'^2_y + q'^2_z}\right) + \left(\frac{-qq'_x + q_xq' - q_yq'_z + q'_y\,q_z}{q'^2 + q'^2_x + q'^2_y + q'^2_z}\right)i \\ &\left(\frac{-qq'_y + q'q_y - q_zq'_x + q'_z\,q_x}{q'^2 + q'^2_x + q'^2_y + q'^2_z}\right)j + \left(\frac{-qq'_z + q_zq' - q_xq'_y + q'_x\,q_y}{q'^2 + q'^2_x + q'^2_y + q'^2_z}\right)k\end{aligned}$$

Note que em H, existem três cópias do corpo C, que são dadas por:

$$\{q + q_xi / q, q_x \in \Re\}, \quad \{q + q_y j / q, q_y \in \Re\} \quad \text{e} \quad \{q + q_zk / q, q_z \in \Re\}.$$

Podemos ainda definir o conjunto $Q_8 = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\} \subset \mathrm{H}$. Este conjunto com as operações induzidas de H formam o subanel[1] $(Q_8, +, .)$ de $(\mathrm{H}, +, .)$, ou seja:

$$(Q_8, +, .) \leq (\mathrm{H}, +, .) \tag{2.3.9}$$

[1]Um subconjunto $S \neq \phi$ de um anel $(\Re, +, .)$ é um subanel de $\Re$, se S é um anel, com as operações induzidas de $\Re$.

2.4 Função de uma variável quaterniônica

Seja $E^4 \subset \mathrm{H}$ um espaço quadri- dimensional e $q \in E^4$ uma variável que assume a forma

$$q = u_1 + u_2 i + u_3 j + u_4 k \tag{2.4.1}$$

com $u_i \in \Re$ $(\mathrm{i} = 1,2,3,4)$. Uma função quaterniônica $f : E^4 \rightarrow \mathrm{H}$ é um mapeamento que faz corresponder a cada $q \in E^4$ um número quaterniônico $w = f(q)$, isto é:

$$f : E^4 \rightarrow \mathrm{H}$$

$$(u_1, u_2, u_3, u_4) \mapsto f(u_1, u_2, u_3, u_4)$$

Sabendo que w é uma função de variáveis quaterniônicas, nós o decompomos em uma parte escalar $\phi(q)$ e em uma parte vetorial $\psi(q)$, ou seja,

$$f(q) = \phi(q) + \psi(q)$$

Onde $\phi(q) = f_1(q)$, $\psi(q) = if_2(q) + jf_3(q) + kf_4(q)$ e as $f_i : \Re^4 \rightarrow \Re$ são funções coordenadas de valores reais.

2.5 Funções quaterniônicas regulares

Definimos o operador quaterniônico Γ , de acordo com a teoria de Fueter [7] como:

$$\Gamma = \left(\frac{\partial}{\partial u_1} + i \frac{\partial}{\partial u_2} + j \frac{\partial}{\partial u_3} + k \frac{\partial}{\partial u_4} \right) \tag{2.5.1}$$

Veremos a seguir algumas definições.

Definição 2.5.1 (regularidade à esquerda) – Uma função de variáveis quaterniônicas f, tal que $f = f_1 + if_2 + jf_3 + kf_4$ com as $f_i : \Re^4 \to \Re$ parcialmente diferenciáveis, é regular à esquerda se:

$$\Gamma f = 0 \tag{2.5.2}$$

Explicitamente, (2.5.2) apresenta-se como:

$$\begin{aligned}
\Gamma f &= \left(\frac{\partial}{\partial u_1} + i\frac{\partial}{\partial u_2} + j\frac{\partial}{\partial u_3} + k\frac{\partial}{\partial u_4} \right)\left(f_1 + if_2 + jf_3 + kf_4 \right) \\
&= \left(\frac{\partial f_1}{\partial u_1} - \frac{\partial f_2}{\partial u_2} - \frac{\partial f_3}{\partial u_3} - \frac{\partial f_4}{\partial u_4} \right) + i\left(\frac{\partial f_2}{\partial u_1} + \frac{\partial f_1}{\partial u_2} + \frac{\partial f_4}{\partial u_3} - \frac{\partial f_3}{\partial u_4} \right) + \\
& j\left(\frac{\partial f_3}{\partial u_1} - \frac{\partial f_4}{\partial u_2} + \frac{\partial f_1}{\partial u_3} + \frac{\partial f_2}{\partial u_4} \right) + k\left(\frac{\partial f_4}{\partial u_1} + \frac{\partial f_3}{\partial u_2} - \frac{\partial f_2}{\partial u_3} - \frac{\partial f_1}{\partial u_4} \right) = 0
\end{aligned} \tag{2.5.3}$$

Definição 2.5.2 (regularidade à direita) – Uma função de variáveis quaterniônicas f, tal que $f = f_1 + if_2 + jf_3 + kf_4$ com as $f_i : \Re^4 \to \Re$ parcialmente diferenciáveis, é regular à direita se:

$$f\,\Gamma = 0 \tag{2.5.4}$$

Expandindo a equação (2.5.4) temos:

$$\begin{aligned}
f\Gamma &= \left(f_1 + if_2 + jf_3 + kf_4 \right)\left(\frac{\partial}{\partial u_1} + i\frac{\partial}{\partial u_2} + j\frac{\partial}{\partial u_3} + k\frac{\partial}{\partial u_4} \right) \\
&= \left(\frac{\partial f_1}{\partial u_1} - \frac{\partial f_2}{\partial u_2} - \frac{\partial f_3}{\partial u_3} - \frac{\partial f_4}{\partial u_4} \right) + i\left(\frac{\partial f_2}{\partial u_1} + \frac{\partial f_1}{\partial u_2} - \frac{\partial f_4}{\partial u_3} + \frac{\partial f_3}{\partial u_4} \right) + \\
& j\left(\frac{\partial f_3}{\partial u_1} + \frac{\partial f_4}{\partial u_2} + \frac{\partial f_1}{\partial u_3} - \frac{\partial f_2}{\partial u_4} \right) + k\left(\frac{\partial f_4}{\partial u_1} - \frac{\partial f_3}{\partial u_2} + \frac{\partial f_2}{\partial u_3} + \frac{\partial f_1}{\partial u_4} \right) = 0
\end{aligned} \tag{2.5.5}$$

Dizemos que a função f é regular, se a função f for regular à direita e à esquerda simultaneamente.

2.6 Integração e diferenciação quaterniônica

Mostraremos alguns resultados obtidos em um espaço hipercomplexo por Borges e Machado [14], onde podem ser vistos como uma extensão quadri- dimensional de conceitos estabelecidos em um plano complexo associados a funções quaterniônicas que observam relações do tipo Cauchy- Riemann generalizadas.

E para esta classe de funções apresentaremos definições sobre derivação hipercomplexa.

Conforme definimos na seção (2.4), seja f uma função sobre o anel dos quatérnios. Então definiremos duas integrais $\int fdz$ e $\int dz\,f$, já que o grupo dos quatérnios é não comutativo:

$$\begin{aligned}\int fdz &= \int\left(f_1 + if_2 + jf_3 + kf_4\right)\left(du_1 + idu_2 + jdu_3 + kdu_4\right)\\ &= \int\left(f_1du_1 - f_2du_2 - f_3du_3 - f_4du_4\right)\\ &+ i\int\left(f_2du_1 + f_1du_2 - f_4du_3 + f_3du_4\right)\\ &+ j\int\left(f_3du_1 + f_4du_2 + f_1du_3 - f_2du_4\right)\\ &+ k\int\left(f_4du_1 - f_3du_2 + f_2du_3 + f_1du_4\right),\end{aligned} \tag{2.6.1}$$

e

$$\begin{aligned}\int dz\,f &= \int\left(du_1 + idu_2 + jdu_3 + kdu_4\right)\left(f_1 + if_2 + jf_3 + kf_4\right)\\ &= \int\left(du_1 f_1 - du_2 f_2 - du_3 f_3 - du_4 f_4\right)\\ &+ i\int\left(du_1 f_2 + du_2 f_1 + du_3 f_4 - du_4 f_3\right)\\ &+ j\int\left(du_1 f_3 - du_2 f_4 + du_3 f_1 + du_4 f_2\right)\\ &+ k\int\left(du_1 f_4 + du_2 f_3 - du_3 f_2 + du_4 f_1\right),\end{aligned} \tag{2.6.2}$$

Sejam contínuas as funções coordenadas $f_i : \Re^4 \to \Re$, e dado um caminho com extremos em $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ e $y = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ em um domínio simplesmente conexo de um espaço quadri- dimensional .

As integrais $\int fdz$ e $\int dz\, f$ independerão do caminho de integração, desde que satisfeitas as condições dos dois teoremas seguintes.

Teorema 2.6.1 – Para todo par de pontos x e y, e qualquer caminho ligando-os em um espaço simplesmente conexo quadri-dimensional, a integral $\int_x^y fdz$ sobre o anel dos quatérnios independe do caminho dado se, e somente se, existe uma função $F = F_1 + iF_2 + jF_3 + kF_4$ com $\int_x^y fdz = F(y) - F(x)$ e que satisfaz as seguintes relações:

$$\frac{\partial F_1}{\partial u_1} = \frac{\partial F_2}{\partial u_2} = \frac{\partial F_3}{\partial u_3} = \frac{\partial F_4}{\partial u_4}, \qquad \frac{\partial F_2}{\partial u_1} = -\frac{\partial F_1}{\partial u_2} = \frac{\partial F_4}{\partial u_3} = -\frac{\partial F_3}{\partial u_4},$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial u_1} = -\frac{\partial F_4}{\partial u_2} = -\frac{\partial F_1}{\partial u_3} = \frac{\partial F_2}{\partial u_4}, \qquad \frac{\partial F_4}{\partial u_1} = \frac{\partial F_3}{\partial u_2} = -\frac{\partial F_2}{\partial u_3} = -\frac{\partial F_1}{\partial u_4} \tag{2.6.3}$$

Prova: A integral $\int_x^y fdz$ dada por (2.4.1) independerá do caminho se existir uma função F, tal que,

$$\int_x^y fdz = \int_x^y dF = \int_x^y d\left(F_1 + iF_2 + jF_3 + kF_4\right) = F(y) - F(x)$$

de modo que o valor dessa diferença dependerá unicamente dos pontos extremos.

Admitindo a existência de F , podemos expressar as diferenciais totais das suas funções coordenadas como:

$$dF_1 = \frac{\partial F_1}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial F_1}{\partial u_2}du_2 + \frac{\partial F_1}{\partial u_3}du_3 + \frac{\partial F_1}{\partial u_4}du_4 = f_1 du_1 - f_2 du_2 - f_3 du_3 - f_4 du_4,$$
$$dF_2 = \frac{\partial F_2}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial F_2}{\partial u_2}du_2 + \frac{\partial F_2}{\partial u_3}du_3 + \frac{\partial F_2}{\partial u_4}du_4 = f_2 du_1 + f_1 du_2 - f_4 du_3 + f_3 du_4,$$
$$dF_3 = \frac{\partial F_3}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial F_3}{\partial u_2}du_2 + \frac{\partial F_3}{\partial u_3}du_3 + \frac{\partial F_3}{\partial u_4}du_4 = f_3 du_1 + f_4 du_2 + f_1 du_3 - f_2 du_4,$$
$$dF_4 = \frac{\partial F_4}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial F_4}{\partial u_2}du_2 + \frac{\partial F_4}{\partial u_3}du_3 + \frac{\partial F_4}{\partial u_4}du_4 = f_4 du_1 - f_3 du_2 + f_2 du_3 + f_1 du_4,$$

decorrendo assim, as relações

$$f_1 = \frac{\partial F_1}{\partial u_1} = \frac{\partial F_2}{\partial u_2} = \frac{\partial F_3}{\partial u_3} = \frac{\partial F_4}{\partial u_4}, \qquad f_2 = \frac{\partial F_2}{\partial u_1} = -\frac{\partial F_1}{\partial u_2} = \frac{\partial F_4}{\partial u_3} = -\frac{\partial F_3}{\partial u_4},$$

$$f_3 = \frac{\partial F_3}{\partial u_1} = -\frac{\partial F_4}{\partial u_2} = -\frac{\partial F_1}{\partial u_3} = \frac{\partial F_2}{\partial u_4} \qquad f_4 = \frac{\partial F_4}{\partial u_1} = \frac{\partial F_3}{\partial u_2} = -\frac{\partial F_2}{\partial u_3} = -\frac{\partial F_1}{\partial u_4},$$

concluindo nossa prova.

Teorema 2.6.2 – Para todo par de pontos x e y , e qualquer caminho ligando-os em um espaço simplesmente conexo quadri-dimensional, a integral $\int_x^y dzf$ sobre o anel dos quatérnios independe do caminho dado se, e somente se, existe uma função $G = G_1 + iG_2 + jG_3 + kG_4$ com $\int_x^y dzf = G(y) - G(x)$ e que satisfaz as seguintes relações:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial G_1}{\partial u_1} = \frac{\partial G_2}{\partial u_2} = \frac{\partial G_3}{\partial u_3} = \frac{\partial G_4}{\partial u_4} \qquad &&\frac{\partial G_2}{\partial u_1} = -\frac{\partial G_1}{\partial u_2} = -\frac{\partial G_4}{\partial u_3} = \frac{\partial G_3}{\partial u_4} \\ &\frac{\partial G_3}{\partial u_1} = \frac{\partial G_4}{\partial u_2} = -\frac{\partial G_1}{\partial u_3} = -\frac{\partial G_2}{\partial u_4} \qquad &&\frac{\partial G_4}{\partial u_1} = -\frac{\partial G_3}{\partial u_2} = \frac{\partial G_2}{\partial u_3} = -\frac{\partial G_1}{\partial u_4} \end{aligned} \qquad (2.6.4)$$

Prova: Analogamente à prova anterior, a integral $\int_x^y dzf$, dada por (2.6.2), independerá do caminho se existir uma função G , onde,

$$\int_x^y dzf = \int_x^y dG = \int_x^y d(G_1 + iG_2 + jG_3 + kG_4) = G(y) - G(x)$$

tal que o valor dessa diferença irá depender unicamente dos pontos extremos.

Admitindo a existência de G , podemos expressar as diferenciais totais das suas funções coordenadas como:

$$\begin{aligned}
dG_1 &= \frac{\partial G_1}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial G_1}{\partial u_2}du_2 + \frac{\partial G_1}{\partial u_3}du_3 + \frac{\partial G_1}{\partial u_4}du_4 = f_1du_1 - f_2du_2 - f_3du_3 - f_4du_4,\\
dG_2 &= \frac{\partial G_2}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial G_2}{\partial u_2}du_2 + \frac{\partial G_2}{\partial u_3}du_3 + \frac{\partial G_2}{\partial u_4}du_4 = f_2du_1 + f_1du_2 + f_4du_3 - f_3du_4,\\
dG_3 &= \frac{\partial G_3}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial G_3}{\partial u_2}du_2 + \frac{\partial G_3}{\partial u_3}du_3 + \frac{\partial G_3}{\partial u_4}du_4 = f_3du_1 - f_4du_2 + f_1du_3 + f_2du_4,\\
dG_4 &= \frac{\partial G_4}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial G_4}{\partial u_2}du_2 + \frac{\partial G_4}{\partial u_3}du_3 + \frac{\partial G_4}{\partial u_4}du_4 = f_4du_1 + f_3du_2 - f_2du_3 + f_1du_4,
\end{aligned}$$

decorrendo assim, as relações

$$f_1 = \frac{\partial F_1}{\partial u_1} = \frac{\partial F_2}{\partial u_2} = \frac{\partial F_3}{\partial u_3} = \frac{\partial F_4}{\partial u_4}, \qquad f_2 = \frac{\partial F_2}{\partial u_1} = -\frac{\partial F_1}{\partial u_2} = \frac{\partial F_4}{\partial u_3} = -\frac{\partial F_3}{\partial u_4},$$

$$f_3 = \frac{\partial F_3}{\partial u_1} = -\frac{\partial F_4}{\partial u_2} = -\frac{\partial F_1}{\partial u_3} = \frac{\partial F_2}{\partial u_4} \qquad f_4 = \frac{\partial F_4}{\partial u_1} = \frac{\partial F_3}{\partial u_2} = -\frac{\partial F_2}{\partial u_3} = -\frac{\partial F_1}{\partial u_4},$$

concluindo nossa prova.

Veja que estes dois últimos teoremas podem ser considerados como os análogos em quatro dimensões aos teoremas (1.7.4) e (1.7.5) enunciados em um domínio de duas dimensões.

Observamos ainda que, as condições dadas em (2.6.3) e (2.6.4) têm em comum as equações de Cauchy- Riemann (1.6.1.1) da teoria de variáveis complexas, sendo pois equações de Cauchy- Riemann generalizadas.

Para dar continuidade, apresentamos as funções $h(z)$ e $g(z)$, definidas em termos da função quaterniônica $f(z)$ cujas funções coordenadas obedecem as relações de Cauchy-Riemann generalizadas (2.6.3) e (2.6.4), as quais serão identificadas respectivamente como derivada quaterniônica à esquerda e à direita de $f(z)$.

Lema 2.6.1 – Dada uma função $f(z)$ sobre o anel dos quatérnios com funções coordenadas diferenciáveis satisfazendo as relações (2.6.3), e uma função $g(z)$, definida em termos de $f(z)$ por:

$$\begin{aligned} g(z) = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial f_1}{\partial u_1}+\frac{\partial f_2}{\partial u_2}+\frac{\partial f_3}{\partial u_3}+\frac{\partial f_4}{\partial u_4}\right)+\frac{1}{4}i\left(\frac{\partial f_2}{\partial u_1}-\frac{\partial f_1}{\partial u_2}-\frac{\partial f_4}{\partial u_3}+\frac{\partial f_3}{\partial u_4}\right)+ \\ \frac{1}{4}j\left(\frac{\partial f_3}{\partial u_1}+\frac{\partial f_4}{\partial u_2}-\frac{\partial f_1}{\partial u_3}-\frac{\partial f_2}{\partial u_4}\right)+\frac{1}{4}k\left(\frac{\partial f_4}{\partial u_1}-\frac{\partial f_3}{\partial u_2}+\frac{\partial f_2}{\partial u_3}-\frac{\partial f_1}{\partial u_4}\right) \end{aligned} \tag{2.6.5}$$

logo $\int dz g(z) = f(z)$.

Onde a função $g(z)$ pode ser vista como a derivada quaterniônica à direita de $f(z)$, sendo denotada por $g(z) = \dfrac{df_r(z)}{dz}$

Prova: Inicialmente, façamos a seguinte identificação:

$$g(z) = \frac{1}{4}(g_1 + ig_2 + jg_3 + kg_4)$$

Sabendo que $dz = du_1 + idu_2 + jdu_3 + kdu_4$ e utilizando as relações (2.1.2) , então temos:

$$\int dzg(z) = \int \left(du_1 + idu_2 + jdu_3 + kdu_4\right)\frac{1}{4}\left(g_1 + ig_2 + jg_3 + kg_4\right)$$
$$= \frac{1}{4}\int (du_1g_1 + idu_1g_2 + jdu_1g_3 + kdu_1g_4 + idu_2g_1 - du_2g_2 + kdu_2g_3 - jdu_2g_4$$
$$+ jdu_3g_1 - kdu_3g_2 - du_3g_3 + idu_3g_4 + kdu_4g_1 + jdu_4g_2 - idu_4g_3 - du_4g_4)$$
$$= \frac{1}{4}\int \left(du_1g_1 - du_2g_2 - du_3g_3 - du_4g_4\right) + i\left(du_1g_2 + du_2g_1 + du_3g_4 - du_4g_3\right)$$
$$+ j\left(du_1g_3 - du_2g_4 + du_3g_1 + du_4g_2\right) + k\left(du_1g_4 + du_2g_3 - du_3g_2 + du_4g_1\right)$$

E substituindo as relações (2.6.3) em $dzg(z)$ temos,

$$\int dzg(z) = \frac{1}{4}\int 4\left(\frac{\partial f_1}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial f_1}{\partial u_2}du_2 + \frac{\partial f_1}{\partial u_3}du_3 + \frac{\partial f_1}{\partial u_4}du_4\right) +$$
$$i4\left(\frac{\partial f_2}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial f_2}{\partial u_2}du_2 + \frac{\partial f_2}{\partial u_3}du_3 + \frac{\partial f_2}{\partial u_4}du_4\right) +$$
$$j4\left(\frac{\partial f_3}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial f_3}{\partial u_2}du_2 + \frac{\partial f_3}{\partial u_3}du_3 + \frac{\partial f_3}{\partial u_4}du_4\right) +$$
$$k4\left(\frac{\partial f_4}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial f_4}{\partial u_2}du_2 + \frac{\partial f_4}{\partial u_3}du_3 + \frac{\partial f_4}{\partial u_4}du_4\right)$$

E ao aplicarmos a regra da cadeia, obtemos as diferenciais totais das funções coordenadas, isto é

$$\int dzg(z) = \int \left(df_1 + idf_2 + jdf_3 + kdf_4\right) = f_1 + if_2 + jf_3 + kf_4 = f(z)$$

Sendo assim o lema está provado.

Lema 2.6.1 – Dada uma função $f(z)$ sobre o anel dos quatérnios com funções coordenadas diferenciáveis satisfazendo as relações (2.6.4), e uma função $h(z)$, definida em termos de $f(z)$ por:

$$h(z)=\frac{1}{4}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1}+\frac{\partial f_2}{\partial x_2}+\frac{\partial f_3}{\partial x_3}+\frac{\partial f_4}{\partial x_4}\right)+\frac{1}{4}i\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_1}-\frac{\partial f_1}{\partial x_2}+\frac{\partial f_4}{\partial x_3}-\frac{\partial f_3}{\partial x_4}\right)+$$
$$\frac{1}{4}j\left(\frac{\partial f_3}{\partial x_1}-\frac{\partial f_4}{\partial x_2}-\frac{\partial f_1}{\partial x_3}+\frac{\partial f_2}{\partial x_4}\right)+\frac{1}{4}k\left(\frac{\partial f_4}{\partial x_1}+\frac{\partial f_3}{\partial x_2}-\frac{\partial f_2}{\partial x_3}-\frac{\partial f_1}{\partial x_4}\right)$$

logo $\int h(z)dz = f(z)$

Onde a função $h(z)$ pode ser vista como a derivada quaterniônica à esquerda de $f(z)$, sendo denotada por $h(z)=\frac{df_l(z)}{dz}$.

Prova: Analogamente à prova anterior, façamos a seguinte identificação:

$$h(z)=\frac{1}{4}(h_1+ih_2+jh_3+kh_4)$$

Sabendo que $dz=du_1+idu_2+jdu_3+kdu_4$ e utilizando as relações (2.1.2), então temos:

$$\int h(z)dz=\int\frac{1}{4}(h_1+ih_2+jh_3+kh_4)\frac{1}{4}(du_1+idu_2+jdu_3+kdu_4)$$
$$=\frac{1}{4}\int(h_1du_1+ih_1du_2+jh_1du_3+kh_1du_4+ih_2du_1-h_2du_2+kh_2du_3-jh_2du_4$$
$$+jh_3du_1-kh_3du_2-h_3du_3+ih_3du_4+kh_4du_1+jh_4du_2-ih_4du_3-h_4du_4)$$
$$=\frac{1}{4}\int(h_1du_1-h_2du_2-h_3du_3-h_4du_4)+i(h_1du_2+h_2du_1+h_3du_4-h_4du_3)$$
$$+j(h_1du_3-h_2du_4+h_3du_1+h_4du_2)+k(h_1du_4+h_2du_3-h_3du_2+h_4du_1)$$

E substituindo as relações (2.6.4) em $dzg(z)$ temos,

$$\int dzg(z) = \frac{1}{4}\int 4\left(\frac{\partial f_1}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial f_1}{\partial u_2}du_2 + \frac{\partial f_1}{\partial u_3}du_3 + \frac{\partial f_1}{\partial u_4}du_4\right) +$$
$$i4\left(\frac{\partial f_2}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial f_2}{\partial u_2}du_2 + \frac{\partial f_2}{\partial u_3}du_3 + \frac{\partial f_2}{\partial u_4}du_4\right) +$$
$$j4\left(\frac{\partial f_3}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial f_3}{\partial u_2}du_2 + \frac{\partial f_3}{\partial u_3}du_3 + \frac{\partial f_3}{\partial u_4}du_4\right) +$$
$$k4\left(\frac{\partial f_4}{\partial u_1}du_1 + \frac{\partial f_4}{\partial u_2}du_2 + \frac{\partial f_4}{\partial u_3}du_3 + \frac{\partial f_4}{\partial u_4}du_4\right)$$

E ao aplicarmos a regra da cadeia, obtemos as diferenciais totais das funções coordenadas , isto é

$$\int h(z)dz = \int (df_1 + idf_2 + jdf_3 + kdf_4) = f_1 + if_2 + jf_3 + kf_4 = f(z)$$

Sendo assim o lema está provado.

Em um artigo recente publicado em 2002, Machado e Borges [15] por meio da conjugação direta do operador quaterniônico da teoria de Fueter, isto é,

$$\overline{\Gamma} = \frac{\partial}{\partial u_1} - i\frac{\partial}{\partial u_2} - j\frac{\partial}{\partial u_3} - k\frac{\partial}{\partial u_4} \tag{2.6.6}$$

reproduzem definições de derivadas quaterniônicas à direita e à esquerda.

Obtendo respectivamente, para (2.6.4) e (2.6.5), as seguintes formas:

$$4g(z) = \overline{\Gamma} f \qquad \text{ou} \qquad \int dzg(z) = \frac{1}{4}\int dz\overline{\Gamma} f = f \tag{2.6.7}$$

e

$$4h(z) = f\,\overline{\Gamma} \qquad \text{ou} \qquad \int h(z)dz = \frac{1}{4}\int f\,\overline{\Gamma} dz = f \tag{2.6.8}$$

Capítulo 3

Funções transcendentais quaterniônicas e operadores de Fueter

Mostraremos detalhadamente neste capítulo uma analogia da relação complexa clássica de Moivre para quatérnios, as conexões com os operadores da teoria de Fueter e as funções transcendentais. A extensão do teorema de Moivre é estudada para quatérnios em definindo-se uma função exponencial quaterniônica.

3.1 Séries de potências

Na representação vetorial, o produto de dois números quaterniônicos P e Q, escritos como,

$$\begin{aligned} P &= p_1 + p_2 i + p_3 j + p_4 k = p_1 + \vec{p} \\ Q &= q_1 + q_2 i + q_3 j + q_4 k = q_1 + \vec{q} \end{aligned} \qquad (3.1.1)$$

sendo que p_1 e q_1 representam a parte escalar e $\vec{p}$ e $\vec{q}$ a parte vetorial, pode ser dado por:

$$P.Q = (p_1 + p_2 i + p_3 j + p_4 k).(q_1 + q_2 i + q_3 j + q_4 k) =$$

$$\begin{aligned}
&p_1 q_1 + p_1 q_2 i + p_1 q_3 j + p_1 q_4 k + \\
&p_2 i q_1 + p_2 i q_2 i + p_2 i q_3 j + p_2 i q_4 k + \\
&p_3 j q_1 + p_3 j q_2 i + p_3 j q_3 j + p_3 j q_4 k + \\
&p_4 k q_1 + p_4 k q_2 i + p_4 k q_3 j + p_4 k q_4 k =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&p_1 q_1 + p_1 q_2 i + p_1 q_3 j + p_1 q_4 k + \\
&p_2 q_1 i + p_2 q_2 i^2 + p_2 q_3 ij + p_2 q_4 ik + \\
&p_3 q_1 j + p_3 q_2 ji + p_3 q_3 j^2 + p_3 q_4 jk + \\
&p_4 q_1 k + p_4 q_2 ki + p_4 q_3 kj + p_4 q_4 k^2
\end{aligned}$$

A multiplicação de quatérnios não é comutativa, mas muitas propriedades formais de números complexos podem ser generalizados para números quaterniônicos.

Nos propomos as generalizações naturais da fórmula de Euler e da fórmula de Moivre aplicadas para quatérnios.

Um quatérnio q é uma combinação linear $a_1 + bi + cj + dk$; a, b, c e d são números reais e

$$1 = (1,0,0,0)$$

$$i = (0,1,0,0)$$

$$j = (0,0,1,0)$$

$$k = (0,0,0,1)$$

Usando a lei associativa da multiplicação definida para que (1,0,0,0) seja a identidade e i, j e k satisfazem:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1,$$

$$ij = k, \quad ji = -k,$$

$$ki = j, \quad ik = -j,$$

$$jk = i, \quad kj = -i,$$

$$ki = j, \quad ik = -j.$$

Obtemos então:

$$\begin{aligned} &= p_1q_1 + p_1q_2i + p_1q_3j + p_1q_4k + \\ &p_2q_1i + p_2q_2(-1) + p_2q_3(k) + p_2q_4(-j) + \\ &p_3q_1j + p_3q_2(-k) + p_3q_3(-1) + p_3q_4(i) + \\ &p_4q_1k + p_4q_2(j) + p_4q_3(-i) + p_4q_4(-1) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &p_1q_1 + (p_1q_2i + p_1q_3j + p_1q_4k) + (p_2q_1i + p_3q_1j + p_4q_1k) + \\ &(-p_2q_2 + p_2q_3k - p_2q_4j - p_3q_2k - p_3q_3 + p_3q_4i + p_4q_2j - p_4q_3i - p_4q_4) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &p_1q_1 + p_1(q_2i + q_3j + q_4k) + q_1(p_2i + p_3j + p_4k) + \\ &-(p_2i + p_3j + p_4k)(q_2i + q_3j + q_4k) + \vec{p} \times \vec{q} \end{aligned}$$

Logo

$$P.Q = p_1q_1 + p_1\vec{q} + q_1\vec{p} - \vec{p}.\vec{q} + \vec{p} \times \vec{q} \tag{3.1.2}$$

$\vec{p}.\vec{q}$ e $\vec{p} \times \vec{q}$ seriam respectivamente o produto interno usual e o produto vetorial no espaço Euclidiano de três dimensões.

De acordo com esta métrica, podemos dar forma à seqüência de potências $z^1, z^2, z^3, ...$ para um dado número quaterniônico $z^1 = u_1 + u_2i + u_3j + u_4k = u_1 + \vec{u}$, de tal maneira que:

$$z^0 = 1$$
$$z^1 = u_1 + \vec{u}$$
$$\frac{z^2}{2!} = \frac{u_1^{\,2}}{2!} - \frac{\vec{u}.\vec{u}}{2!} + \frac{2u_1.\vec{u}}{2!}$$
$$\frac{z^3}{3!} = \frac{u_1^{\,3}}{3!} - \frac{3u_1\vec{u}.\vec{u}}{3!} + \left(\frac{3u_1^{\,2}}{3!} - \frac{\vec{u}.\vec{u}}{3!}\right)\vec{u}$$
$$\frac{z^4}{4!} = \frac{u_1^{\,4}}{4!} - \frac{4!u_1^{\,2}\vec{u}.\vec{u}}{2!2!4!} + \frac{(\vec{u}.\vec{u})^2}{4!} + \left(\frac{4u_1^{\,3}}{4!} - \frac{4u_1\vec{u}.\vec{u}}{4!}\right)\vec{u}$$
$$\frac{z^5}{5!} = \frac{u_1^{\,5}}{5!} + \frac{5u_1(\vec{u}.\vec{u})^2}{5!} - \frac{5!u_1^{\,3}\vec{u}.\vec{u}}{3!2!5!} + \left(\frac{5u_1^{\,4}}{5!} - \frac{5!u_1^{\,2}\vec{u}.\vec{u}}{3!2!5!} + \frac{(\vec{u}.\vec{u})^2}{5!}\right)\vec{u} \tag{3.1.3}$$
$$\frac{z^6}{6!} = \frac{u_1^{\,6}}{6!} + \frac{6!u_1^{\,2}(\vec{u}.\vec{u})^2}{4!2!6!} - \frac{6!u_1^{\,4}\vec{u}.\vec{u}}{4!2!6!} - \frac{(\vec{u}.\vec{u})^3}{6!} + \left(\frac{6u_1^{\,5}}{6!} + \frac{6u_1(\vec{u}.\vec{u})^2}{6!} - \frac{6!u_1^{\,3}(\vec{u}.\vec{u})}{3!3!6!}\right)\vec{u} \tag{3.1.4}$$

Observe que:

$$z^0 = 1$$

$$z^1 = u_1 + \vec{u}$$

$$\frac{z^2}{2!} = \frac{u_1^{\,2}}{2!} - \frac{\vec{u}.\vec{u}}{2!} + \frac{2u_1.\vec{u}}{2!} \quad \text{pois}$$

$$\frac{z^2}{2!} = \frac{(u_1+\vec{u})(u_1+\vec{u})}{2!} = \frac{u_1^{\,2} + u_1.\vec{u} + \vec{u}.u_1 - \vec{u}.\vec{u}}{2!} = \frac{u_1^{\,2}}{2!} - \frac{\vec{u}.\vec{u}}{2!} + \frac{2u_1.\vec{u}}{2!}$$

$$\frac{z^3}{3!} = \frac{u_1^{\,3}}{3!} - \frac{3u_1\vec{u}.\vec{u}}{3!} + \left(\frac{3u_1^{\,2}}{3!} - \frac{\vec{u}.\vec{u}}{3!}\right)\vec{u} \text{ pois}$$

$$\frac{z^3}{3!} = \frac{(u_1+\vec{u})^2(u_1+\vec{u})}{3!} = \frac{\left(u_1^{\,2} - \vec{u}.\vec{u} + 2u_1.\vec{u}\right)(u_1+\vec{u})}{3!} = \frac{u_1^{\,3} + u_1^{\,2}\vec{u} - u_1\vec{u}\vec{u} - \vec{u}\vec{u}\vec{u} + 2u_1^{\,2}\vec{u} - 2u_1\vec{u}\vec{u}}{3!} =$$
$$= \frac{u_1^{\,3}}{3!} - \frac{3u_1\vec{u}\vec{u}}{3!} + \left(\frac{3u_1^{\,2}}{3!} - \frac{\vec{u}\vec{u}}{3!}\right)\vec{u}$$

$$\frac{z^4}{4!}=\frac{u_1^{\;4}}{4!}-\frac{4!u_1^{\;2}\vec{u}.\vec{u}}{2!2!4!}+\frac{(\vec{u}.\vec{u})^2}{4!}+\left(\frac{4u_1^{\;3}}{4!}-\frac{4u_1\vec{u}.\vec{u}}{4!}\right)\vec{u}\text{ pois}$$

$$\frac{z^4}{4!}=\frac{(u_1+\vec{u})^2(u_1+\vec{u})^2}{4!}=\frac{(u_1^{\;2}-\vec{u}.\vec{u}+2u_1.\vec{u})(u_1^{\;2}-\vec{u}.\vec{u}+2u_1.\vec{u})}{4!}=$$

$$\frac{u_1^{\;4}-u_1^{\;2}\vec{u}\vec{u}+2u_1^{\;3}\vec{u}-u_1^{\;2}\vec{u}\vec{u}+(\vec{u}\vec{u})^2-2u_1\vec{u}\vec{u}\vec{u}+2u_1^{\;3}\vec{u}-2u_1\vec{u}\vec{u}\vec{u}-4u_1^{\;2}\vec{u}\vec{u}}{4!}=$$

$$\frac{u_1^{\;4}-6u_1^{\;2}\vec{u}\vec{u}+(\vec{u}\vec{u})^2+(4u_1^{\;3}-4u_1\vec{u}\vec{u})\vec{u}}{4!}=$$

$$=\frac{u_1^{\;4}}{4!}-\frac{4!u_1^{\;2}\vec{u}.\vec{u}}{2!2!4!}+\frac{(\vec{u}.\vec{u})^2}{4!}+\left(\frac{4u_1^{\;3}}{4!}-\frac{4u_1\vec{u}.\vec{u}}{4!}\right)\vec{u}$$

$$\frac{z^5}{5!}=\frac{u_1^{\;5}}{5!}+\frac{5u_1(\vec{u}.\vec{u})^2}{5!}-\frac{5!u_1^{\;3}\vec{u}.\vec{u}}{3!2!5!}+\left(\frac{5u_1^{\;4}}{5!}-\frac{5!u_1^{\;2}\vec{u}.\vec{u}}{3!2!5!}+\frac{(\vec{u}.\vec{u})^2}{5!}\right)\vec{u}\text{ pois}$$

$$\frac{z^5}{5!}=\frac{(u_1+\vec{u})^4(u_1+\vec{u})}{5!}=\frac{(u_1^{\;4}-6u_1^{\;2}\vec{u}\vec{u}+(\vec{u}\vec{u})^2+(4u_1^{\;3}-4u_1\vec{u}\vec{u})\vec{u})(u_1+\vec{u})}{5!}=$$

$$\frac{u_1^{\;5}+u_1^{\;4}\vec{u}-6u_1^{\;3}\vec{u}\vec{u}-6u_1^{\;2}\vec{u}\vec{u}\vec{u}+(\vec{u}\vec{u})^2u_1+(\vec{u}\vec{u})^2\vec{u}+4u_1^{\;4}\vec{u}-4u_1^{\;3}\vec{u}\vec{u}-4u_1^{\;2}\vec{u}\vec{u}\vec{u}+4u_1(\vec{u}\vec{u})^2}{5!}=$$

$$\frac{u_1^{\;5}+5u_1(\vec{u}\vec{u})^2-10u_1^{\;3}\vec{u}\vec{u}+(5u_1^{\;4}-10u_1^{\;2}\vec{u}\vec{u}++(\vec{u}\vec{u})^2)\vec{u}}{5!}=$$

$$=\frac{u_1^{\;5}}{5!}+\frac{5u_1(\vec{u}.\vec{u})^2}{5!}-\frac{5!u_1^{\;3}\vec{u}.\vec{u}}{3!2!5!}+\left(\frac{5u_1^{\;4}}{5!}-\frac{5!u_1^{\;2}\vec{u}.\vec{u}}{3!2!5!}+\frac{(\vec{u}.\vec{u})^2}{5!}\right)\vec{u}$$

$$\frac{z^6}{6!}=\frac{u_1^{\;6}}{6!}+\frac{6!u_1^{\;2}(\vec{u}.\vec{u})^2}{4!2!6!}-\frac{6!u_1^{\;4}\vec{u}.\vec{u}}{4!2!6!}-\frac{(\vec{u}.\vec{u})^3}{6!}+\left(\frac{6u_1^{\;5}}{6!}+\frac{6u_1(\vec{u}.\vec{u})^2}{6!}-\frac{6!u_1^{\;3}(\vec{u}.\vec{u})}{3!3!6!}\right)\vec{u}\text{ pois}$$

$$\frac{z^6}{6!}=\frac{(u_1+\vec{u})^5(u_1+\vec{u})}{6!}=\frac{(u_1^{\;5}+5u_1(\vec{u}\vec{u})^2-10u_1^{\;3}\vec{u}\vec{u}+(5u_1^{\;4}-10u_1^{\;2}\vec{u}\vec{u}++(\vec{u}\vec{u})^2)\vec{u})(u_1+\vec{u})}{6!}=$$

$$\frac{u_1^{\;6}+u_1^{\;5}\vec{u}+5u_1^{\;2}(\vec{u}\vec{u})^2+5u_1(\vec{u}\vec{u})^2\vec{u}-10u_1^{\;4}\vec{u}\vec{u}-10u_1^{\;3}\vec{u}\vec{u}\vec{u}+5u_1^{\;5}\vec{u}-5u_1^{\;4}\vec{u}\vec{u}-}{6!}$$

$$\frac{10u_1^{\;3}\vec{u}\vec{u}\vec{u}+10u_1^{\;2}(\vec{u}\vec{u})^2+(\vec{u}\vec{u})^2\vec{u}u_1+(\vec{u}\vec{u})^2\vec{u}\vec{u}}{6!}=$$

$$= \frac{u_1^{\,6}}{6!} + \frac{6!u_1^{\,2}(\vec{u}.\vec{u})^2}{4!2!6!} - \frac{6!u_1^{\,4}\vec{u}.\vec{u}}{4!2!6!} - \frac{(\vec{u}.\vec{u})^3}{6!} + \left(\frac{6u_1^{\,5}}{6!} + \frac{6u_1(\vec{u}.\vec{u})^2}{6!} - \frac{6!u_1^{\,3}(\vec{u}.\vec{u})}{3!3!6!}\right)\vec{u}$$

Algumas simplificações evidentes são o bastante para arranjar os termos em uma maneira mais familiar, desde que pela definição:

$$e^z = z^0 + z^1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^6}{6!} + ... =$$

Então temos:

$$e^z = 1 + u_1 + \vec{u} + \frac{u_1^{\,2}}{2!} - \frac{\vec{u}.\vec{u}}{2!} + \frac{2u_1.\vec{u}}{2!} + \frac{u_1^{\,3}}{3!} - \frac{3u_1\vec{u}.\vec{u}}{3!} + \left(\frac{3u_1^{\,2}}{3!} - \frac{\vec{u}.\vec{u}}{3!}\right)\vec{u} +$$
$$\frac{u_1^{\,4}}{4!} - \frac{4!u_1^{\,2}\vec{u}.\vec{u}}{2!2!4!} + \frac{(\vec{u}.\vec{u})^2}{4!} + \left(\frac{4u_1^{\,3}}{4!} - \frac{4u_1\vec{u}.\vec{u}}{4!}\right)\vec{u} + \frac{u_1^{\,5}}{5!} + \frac{5u_1(\vec{u}.\vec{u})^2}{5!} -$$
$$\frac{5!u_1^{\,3}\vec{u}.\vec{u}}{3!2!5!} + \left(\frac{5u_1^{\,4}}{5!} - \frac{5!u_1^{\,2}\vec{u}.\vec{u}}{3!2!5!} + \frac{(\vec{u}.\vec{u})^2}{5!}\right)\vec{u} + \frac{u_1^{\,6}}{6!} + \frac{6!u_1^{\,2}(\vec{u}.\vec{u})^2}{4!2!6!} -$$
$$\frac{6!u_1^{\,4}\vec{u}.\vec{u}}{4!2!6!} - \frac{(\vec{u}.\vec{u})^3}{6!} + \left(\frac{6u_1^{\,5}}{6!} + \frac{6u_1(\vec{u}.\vec{u})^2}{6!} - \frac{6!u_1^{\,3}(\vec{u}.\vec{u})}{3!3!6!}\right)\vec{u} + ... =$$

$$= \left(1 + u_1 + \frac{u_1^{\,2}}{2!} + \frac{u_1^{\,3}}{3!} + \frac{u_1^{\,4}}{4!} + \frac{u_1^{\,5}}{5!} + ...\right)\left(1 - \frac{\vec{u}.\vec{u}}{2!} + \frac{(\vec{u}.\vec{u})^2}{4!} - \frac{(\vec{u}.\vec{u})^3}{6!} + ...\right) +$$
$$\vec{u}\left\{\left(1 + u_1 + \frac{u_1^{\,2}}{2!} + \frac{u_1^{\,3}}{3!} + \frac{u_1^{\,4}}{4!} + \frac{u_1^{\,5}}{5!} + ...\right) - \frac{\vec{u}.\vec{u}}{3!}\left(1 + u_1 + \frac{u_1^{\,2}}{2!} + \frac{u_1^{\,3}}{3!} + \frac{u_1^{\,4}}{4!} + \frac{u_1^{\,5}}{5!} + ...\right)\right\} +$$
$$\vec{u}\left\{\frac{(\vec{u}.\vec{u})^2}{5!}\left(1 + u_1 + \frac{u_1^{\,2}}{2!} + \frac{u_1^{\,3}}{3!} + \frac{u_1^{\,4}}{4!} + \frac{u_1^{\,5}}{5!} + ...\right) - \frac{(\vec{u}.\vec{u})^3}{7!}(1 + u_1 + ...) + ...\right\}$$

E conseqüentemente,

$$e^z = \left(1 + u_1 + \frac{u_1^{\,2}}{2!} + \frac{u_1^{\,3}}{3!} + \frac{u_1^{\,4}}{4!} + \frac{u_1^{\,5}}{5!} + \dots\right)\left(1 - \frac{\vec{u}.\vec{u}}{2!} + \frac{(\vec{u}.\vec{u})^2}{4!} - \frac{(\vec{u}.\vec{u})^3}{6!} + \dots\right) + \vec{u}\left\{\left(1 + u_1 + \frac{u_1^{\,2}}{2!} + \frac{u_1^{\,3}}{3!} + \frac{u_1^{\,4}}{4!} + \frac{u_1^{\,5}}{5!} + \dots\right)\left(1 - \frac{\vec{u}.\vec{u}}{3!} + \frac{(\vec{u}.\vec{u})^2}{5!} - \frac{(\vec{u}.\vec{u})^3}{7!} + \dots\right)\right\} \tag{3.1.5}$$

Pelas correspondências,

$$\left(1 + u_1 + \frac{u_1^{\,2}}{2!} + \frac{u_1^{\,3}}{3!} + \frac{u_1^{\,4}}{4!} + \frac{u_1^{\,5}}{5!} + \dots\right) = e^{u_1}$$

$$\left(1 - \frac{\vec{u}.\vec{u}}{2!} + \frac{(\vec{u}.\vec{u})^2}{4!} - \frac{(\vec{u}.\vec{u})^3}{6!} + \dots\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\left(\sqrt{\vec{u}.\vec{u}}\right)^{2n}}{(2n)!}$$

$$\left(1 - \frac{\vec{u}.\vec{u}}{3!} + \frac{(\vec{u}.\vec{u})^2}{5!} - \frac{(\vec{u}.\vec{u})^3}{7!} + \dots\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\left(\sqrt{\vec{u}.\vec{u}}\right)^{2n-1}}{(2n+1)!} . \frac{1}{\sqrt{\vec{u}.\vec{u}}} \quad , \tag{3.1.6}$$

e de acordo com as definições precedentes, temos:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\left(\sqrt{\vec{u}.\vec{u}}\right)^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots$$

sen z = $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\sqrt{\vec{u}.\vec{u}}\right)^{2n-1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + ...$

Sendo $z = \sqrt{\vec{u}.\vec{u}}$ e $\vec{u} = u_2 i + u_3 j + u_4 k$

Logo,

$$\vec{u}.\vec{u} = (u_2 i + u_3 j + u_4 k)(u_2 i + u_3 j + u_4 k) = (u_2 i)^2 + (u_2 i u_3 j) + (u_2 i u_4 k) + (u_3 j u_2 i) + (u_3 j)^2 + (u_3 j u_4 k) + (u_4 k u_2 i) + (u_4 k u_3 j) + (u_4 k)^2 =$$

$$\vec{u}.\vec{u} = (u_2 i + u_3 j + u_4 k)(u_2 i + u_3 j + u_4 k) = u_2{}^2 i^2 + (u_2 u_3 ij) + (u_2 u_4 ik) + (u_3 u_2 ji) + u_3{}^2 j^2 + (u_3 u_4 jk) + (u_4 u_2 ki) + (u_4 u_3 kj) + u_4{}^2 k^2 =$$

Com as regras da multiplicação:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1,$$

$$ij = k, \quad ji = -k,$$

$$ki = j, \quad ik = -j,$$

$$jk = i, \quad kj = -i,$$

$$ki = j, \quad ik = -j.$$

Obtemos:

$$\vec{u}.\vec{u} = u_2{}^2(-1) + (u_2 u_3 i(k)) + (u_2 u_4(-j)) + (u_3 u_2(-k)) + u_3{}^2(-1) + (u_3 u_4(i)) + (u_4 u_2(j)) + (u_4 u_3(-i)) + u_4{}^2(-1) =$$

Então:

$$\vec{u}.\vec{u} = -u_2{}^2 - u_3{}^2 - u_4{}^2$$

Logo,

$$\sqrt{\vec{u}.\vec{u}} = \sqrt{\left|-u_2^{\ 2} - u_3^{\ 2} - u_4^{\ 2}\right|} = \sqrt{u_2^{\ 2} + u_3^{\ 2} + u_4^{\ 2}}$$

$$\cos\left(\sqrt{\vec{u}.\vec{u}}\right) = \cos\left(\sqrt{u_2^{\ 2} + u_3^{\ 2} + u_4^{\ 2}}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\left(\sqrt{\vec{u}.\vec{u}}\right)^{2n}}{(2n)!}$$

$$\operatorname{sen}\left(\sqrt{\vec{u}.\vec{u}}\right) = \frac{\operatorname{sen}\sqrt{u_2^{\ 2} + u_3^{\ 2} + u_4^{\ 2}}}{\sqrt{u_2^{\ 2} + u_3^{\ 2} + u_4^{\ 2}}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\left(\sqrt{\vec{u}.\vec{u}}\right)^{2n-1}}{(2n+1)!} . \frac{1}{\sqrt{\vec{u}.\vec{u}}} \tag{3.1.7}$$

O que conduz à expressão final para a equação (3.1.5):

$$e^z = e^{u_1}\left\{\cos\left(\sqrt{u_2^{\ 2} + u_3^{\ 2} + u_4^{\ 2}}\right) + \vec{u}\left(\frac{\operatorname{sen}\sqrt{u_2^{\ 2} + u_3^{\ 2} + u_4^{\ 2}}}{\sqrt{u_2^{\ 2} + u_3^{\ 2} + u_4^{\ 2}}}\right)\right\},$$

com $\vec{u} = u_2 i + u_3 j + u_4 k$, $z = u_1 + \vec{u}$ (3.1.8)

De forma análoga podemos encontrar os seguintes resultados para séries de potências de números octoniônicos.

Na representação vetorial, o produto de dois números octoniônicos P e Q, dados por:

$$P = p_1 + p_2 i + p_3 j + p_4 k + p_5 kl + p_6 jl + p_7 il + p_8 l = p_1 + \vec{p}$$

$$Q = q_1 + q_2 i + q_3 j + q_4 k + q_5 kl + q_6 jl + q_7 il + q_8 l = q_1 + \vec{q}$$

Também será escrito como:

$$P.Q = p_1 q_1 + p_1 \vec{q} + q_1 \vec{p} - \vec{p}.\vec{q} + \vec{p} \times \vec{q}$$

O que os diferencia dos quatérnios é que a multiplicação de octônios não é comutativa nem associativa. Mas mesmo assim nós encontramos generalizações naturais da fórmula de Euler e a fórmula de Moivre aplicadas para octônios. (Mais detalhes podem ser obtidos em [20]).

É importante que as bases sejam definidas desta forma:

$$\begin{aligned} 1 &\leftrightarrow (1,0,0,0,0,0,0,0) \\ i &\leftrightarrow (0,1,0,0,0,0,0,0) \\ j &\leftrightarrow (0,0,1,0,0,0,0,0) \\ k &\leftrightarrow (0,0,0,1,0,0,0,0) \\ kl &\leftrightarrow (0,0,0,0,1,0,0,0) \\ jl &\leftrightarrow (0,0,0,0,0,1,0,0) \\ il &\leftrightarrow (0,0,0,0,0,0,1,0) \\ l &\leftrightarrow (0,0,0,0,0,0,0,1) \end{aligned} \tag{3.1.9}$$

Sendo assim, nós podemos dar forma à seqüência de potências $z^1, z^2, z^3,...$ para um dado número octoniônico, da mesma forma que o fizemos para um dado número quarteniônico, $z^1 = u_1 + u_2 i + u_3 j + u_4 k + u_5 kl + u_6 jl + u_7 il + u_8 l = u_1 + \vec{u}$, de tal maneira que:

$$\begin{aligned}
&z^0 = 1 \\
&z^1 = u_1 + \vec{u} \\
&\frac{z^2}{2!} = \frac{u_1{}^2}{2!} - \frac{\vec{u}.\vec{u}}{2!} + \frac{2u_1.\vec{u}}{2!} \\
&\frac{z^3}{3!} = \frac{u_1{}^3}{3!} - \frac{3u_1\vec{u}.\vec{u}}{3!} + \left(\frac{3u_1{}^2}{3!} - \frac{\vec{u}.\vec{u}}{3!}\right)\vec{u} \\
&\frac{z^4}{4!} = \frac{u_1{}^4}{4!} - \frac{4!u_1{}^2\vec{u}.\vec{u}}{2!2!4!} + \frac{(\vec{u}.\vec{u})^2}{4!} + \left(\frac{4u_1{}^3}{4!} - \frac{4u_1\vec{u}.\vec{u}}{4!}\right)\vec{u} \\
&\frac{z^5}{5!} = \frac{u_1{}^5}{5!} + \frac{5u_1(\vec{u}.\vec{u})^2}{5!} - \frac{5!u_1{}^3\vec{u}.\vec{u}}{3!2!5!} + \left(\frac{5u_1{}^4}{5!} - \frac{5!u_1{}^2\vec{u}.\vec{u}}{3!2!5!} + \frac{(\vec{u}.\vec{u})^2}{5!}\right)\vec{u} \\
&\frac{z^6}{6!} = \frac{u_1{}^6}{6!} + \frac{6!u_1{}^2(\vec{u}.\vec{u})^2}{4!2!6!} - \frac{6!u_1{}^4\vec{u}.\vec{u}}{4!2!6!} - \frac{(\vec{u}.\vec{u})^3}{6!} + \left(\frac{6u_1{}^5}{6!} + \frac{6u_1(\vec{u}.\vec{u})^2}{6!} - \frac{6!u_1{}^3(\vec{u}.\vec{u})}{3!3!6!}\right)\vec{u}
\end{aligned}$$

Como já foi verificado para quatérnios, e lembrando que:

$$e^z = z^0 + z^1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^6}{6!} + ... =$$

Então temos:

$$e^z = \left(1 + u_1 + \frac{u_1^{\;2}}{2!} + \frac{u_1^{\;3}}{3!} + \frac{u_1^{\;4}}{4!} + \frac{u_1^{\;5}}{5!} + ...\right)\left(1 - \frac{\vec{u}.\vec{u}}{2!} + \frac{(\vec{u}.\vec{u})^2}{4!} - \frac{(\vec{u}.\vec{u})^3}{6!} + ...\right) +$$
$$\vec{u}\left\{\left(1 + u_1 + \frac{u_1^{\;2}}{2!} + \frac{u_1^{\;3}}{3!} + \frac{u_1^{\;4}}{4!} + \frac{u_1^{\;5}}{5!} + ...\right)\left(1 - \frac{\vec{u}.\vec{u}}{3!} + \frac{(\vec{u}.\vec{u})^2}{5!} - \frac{(\vec{u}.\vec{u})^3}{7!} + ...\right)\right\}$$

E similarmente como foi feito para quatérnios, fazemos as correspondências.

Sendo $z = \sqrt{\vec{u}.\vec{u}}$ e $\vec{u} = u_2 i + u_3 j + u_4 k + u_5 kl + u_6 jl + u_7 il + u_8 l$

Logo

$$\sqrt{\vec{u}.\vec{u}} = \sqrt{\left|-u_2^2 - u_3^2 - u_4^2 - u_5^2 - u_6^2 - u_7^2 - u_8^2\right|} = \sqrt{u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2 + u_6^2 + u_7^2 + u_8^2}$$

$$\cos\left(\sqrt{\vec{u}.\vec{u}}\right) = \cos\left(\sqrt{u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2 + u_6^2 + u_7^2 + u_8^2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\sqrt{\vec{u}.\vec{u}}\right)^{2n}}{(2n)!}$$

$$\text{sen}\left(\sqrt{\vec{u}.\vec{u}}\right) = \frac{\text{sen}\sqrt{u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2 + u_6^2 + u_7^2 + u_8^2}}{\sqrt{u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2 + u_6^2 + u_7^2 + u_8^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\sqrt{\vec{u}.\vec{u}}\right)^{2n-1}}{(2n+1)!} . \frac{1}{\sqrt{\vec{u}.\vec{u}}}$$

O que conduz à expressão

$$e^{z}=e^{u_1}\left\{\cos\left(\sqrt{u_2^2+u_3^2+u_4^2+u_5^2+u_6^2+u_7^2+u_8^2}\right)+\vec{u}\left(\frac{\operatorname{sen}\sqrt{u_2^2+u_3^2+u_4^2+u_5^2+u_6^2+u_7^2+u_8^2}}{\sqrt{u_2^2+u_3^2+u_4^2+u_5^2+u_6^2+u_7^2+u_8^2}}\right)\right\}$$

com $\vec{u}=u_2 i+u_3 j+u_4 k+u_5 kl+u_6 jl+u_7 il+u_8 l$, $z=u_1+\vec{u}$

Todos estes resultados obtidos para séries de potências de números octoniônicos podem ser encontrados detalhadamente na dissertação de Pendeza [20], como já mencionado anteriormente.

3.2 Equações com Operadores

Vamos considerar as funções $f:\mathrm{H}\to\mathrm{H}$ na álgebra de divisão dos quatérnios

$$f(u_1,u_2,u_3,u_4)=f_1(u_1,u_2,u_3,u_4)+if_2(u_1,u_2,u_3,u_4)+jf_3(u_1,u_2,u_3,u_4)+kf_4(u_1,u_2,u_3,u_4)$$

não havendo restrições nas funções de coordenadas $f_i:\Re^4\to\Re$,exceto que devem ser k vezes parcialmente diferenciáveis em suas variáveis independentes.

Na teoria de Fueter de funções regulares, o operador Γ é:

$$\Gamma=\frac{\partial}{\partial u_1}+i\frac{\partial}{\partial u_2}+j\frac{\partial}{\partial u_3}+k\frac{\partial}{\partial u_4}$$

Com as regras da multiplicação:

$$i^2=j^2=k^2=-1,$$

$$ij=k,\quad ji=-k,$$

$$ki = j, \quad ik = -j,$$

$$jk = i, \quad kj = -i,$$

$$ki = j, \quad ik = -j.$$

A ação do Γ sobre uma função quaterniônica f é dada por:

$$\Gamma f = \left(\frac{\partial}{\partial u_1} + i\frac{\partial}{\partial u_2} + j\frac{\partial}{\partial u_3} + k\frac{\partial}{\partial u_4} \right)\left(f_1 + if_2 + jf_3 + kf_4 \right) =$$

$$\frac{\partial}{\partial u_1} f_1 + i\frac{\partial}{\partial u_1} f_2 + j\frac{\partial}{\partial u_1} f_3 + k\frac{\partial}{\partial u_1} f_4 +$$
$$i\frac{\partial}{\partial u_2} f_1 + i^2\frac{\partial}{\partial u_2} f_2 + ij\frac{\partial}{\partial u_2} f_3 + ik\frac{\partial}{\partial u_2} f_4 +$$
$$j\frac{\partial}{\partial u_3} f_1 + ji\frac{\partial}{\partial u_3} f_2 + j^2\frac{\partial}{\partial u_3} f_3 + jk\frac{\partial}{\partial u_3} f_4 +$$
$$k\frac{\partial}{\partial u_4} f_1 + ki\frac{\partial}{\partial u_4} f_2 + kj\frac{\partial}{\partial u_4} f_3 + k^2\frac{\partial}{\partial u_4} f_4 =$$

$$\frac{\partial}{\partial u_1} f_1 + i\frac{\partial}{\partial u_1} f_2 + j\frac{\partial}{\partial u_1} f_3 + k\frac{\partial}{\partial u_1} f_4 +$$
$$i\frac{\partial}{\partial u_2} f_1 + (-1)\frac{\partial}{\partial u_2} f_2 + (k)\frac{\partial}{\partial u_2} f_3 + (-j)\frac{\partial}{\partial u_2} f_4 +$$
$$j\frac{\partial}{\partial u_3} f_1 + (-k)\frac{\partial}{\partial u_3} f_2 + (-1)\frac{\partial}{\partial u_3} f_3 + (i)\frac{\partial}{\partial u_3} f_4 +$$
$$k\frac{\partial}{\partial u_4} f_1 + (j)\frac{\partial}{\partial u_4} f_2 + (-i)\frac{\partial}{\partial u_4} f_3 + (-1)\frac{\partial}{\partial u_4} f_4 =$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial u_1} f_1 - \frac{\partial}{\partial u_2} f_2 - \frac{\partial}{\partial u_3} f_3 - \frac{\partial}{\partial u_4} f_4\right) +$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial u_1} f_2 + \frac{\partial}{\partial u_2} f_1 + \frac{\partial}{\partial u_3} f_4 - \frac{\partial}{\partial u_4} f_3\right) i +$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial u_1} f_3 - \frac{\partial}{\partial u_2} f_4 + \frac{\partial}{\partial u_3} f_1 + \frac{\partial}{\partial u_4} f_2\right) j +$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial u_1} f_4 + \frac{\partial}{\partial u_2} f_3 - \frac{\partial}{\partial u_3} f_2 + \frac{\partial}{\partial u_4} f_1\right) k$$

Em uma forma similar, se define um operador $\overline{\Gamma}$ conjugado, como:

$$\overline{\Gamma} = \frac{\partial}{\partial u_1} - i \frac{\partial}{\partial u_2} - j \frac{\partial}{\partial u_3} - k \frac{\partial}{\partial u_4},$$

tal que:

$$\overline{\Gamma} f = \left(\frac{\partial}{\partial u_1} - i \frac{\partial}{\partial u_2} - j \frac{\partial}{\partial u_3} - k \frac{\partial}{\partial u_4}\right)\left(f_1 + if_2 + jf_3 + kf_4\right) =$$

$$\frac{\partial}{\partial u_1} f_1 + i \frac{\partial}{\partial u_1} f_2 + j \frac{\partial}{\partial u_1} f_3 + k \frac{\partial}{\partial u_1} f_4 -$$
$$i \frac{\partial}{\partial u_2} f_1 - i^2 \frac{\partial}{\partial u_2} f_2 - ij \frac{\partial}{\partial u_2} f_3 - ik \frac{\partial}{\partial u_2} f_4 -$$
$$j \frac{\partial}{\partial u_3} f_1 - ji \frac{\partial}{\partial u_3} f_2 - j^2 \frac{\partial}{\partial u_3} f_3 - jk \frac{\partial}{\partial u_3} f_4 -$$
$$k \frac{\partial}{\partial u_4} f_1 - ki \frac{\partial}{\partial u_4} f_2 - kj \frac{\partial}{\partial u_4} f_3 - k^2 \frac{\partial}{\partial u_4} f_4 =$$

$$\frac{\partial}{\partial u_1} f_1 + i \frac{\partial}{\partial u_1} f_2 + j \frac{\partial}{\partial u_1} f_3 + k \frac{\partial}{\partial u_1} f_4 -$$
$$i \frac{\partial}{\partial u_2} f_1 - (-1) \frac{\partial}{\partial u_2} f_2 - (k) \frac{\partial}{\partial u_2} f_3 - (-j) \frac{\partial}{\partial u_2} f_4 -$$

$$j\frac{\partial}{\partial u_3}f_1-(-k)\frac{\partial}{\partial u_3}f_2-(-1)\frac{\partial}{\partial u_3}f_3-(i)\frac{\partial}{\partial u_3}f_4+$$
$$k\frac{\partial}{\partial u_4}f_1-(j)\frac{\partial}{\partial u_4}f_2-(-i)\frac{\partial}{\partial u_4}f_3-(-1)\frac{\partial}{\partial u_4}f_4=$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial u_1}f_1+\frac{\partial}{\partial u_2}f_2+\frac{\partial}{\partial u_3}f_3+\frac{\partial}{\partial u_4}f_4\right)+$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial u_1}f_2-\frac{\partial}{\partial u_2}f_1-\frac{\partial}{\partial u_3}f_4+\frac{\partial}{\partial u_4}f_3\right)i+$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial u_1}f_3+\frac{\partial}{\partial u_2}f_4-\frac{\partial}{\partial u_3}f_1-\frac{\partial}{\partial u_4}f_2\right)j+$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial u_1}f_4-\frac{\partial}{\partial u_2}f_3+\frac{\partial}{\partial u_3}f_2-\frac{\partial}{\partial u_4}f_1\right)k$$

Então, o seguinte resultado mostra que:

$$Tf=\frac{1}{2}\left(\Gamma f+\overline{\Gamma}f\right)=$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)\left\{\left(\frac{\partial}{\partial u_1}f_1-\frac{\partial}{\partial u_2}f_2-\frac{\partial}{\partial u_3}f_3-\frac{\partial}{\partial u_4}f_4\right)+\left(\frac{\partial}{\partial u_1}f_2+\frac{\partial}{\partial u_2}f_1+\frac{\partial}{\partial u_3}f_4-\frac{\partial}{\partial u_4}f_3\right)i+\right.$$
$$\left.\left(\frac{\partial}{\partial u_1}f_3-\frac{\partial}{\partial u_2}f_4+\frac{\partial}{\partial u_3}f_1+\frac{\partial}{\partial u_4}f_2\right)j+\left(\frac{\partial}{\partial u_1}f_4+\frac{\partial}{\partial u_2}f_3-\frac{\partial}{\partial u_3}f_2+\frac{\partial}{\partial u_4}f_1\right)k\right\}+$$
$$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial u_1}f_1+\frac{\partial}{\partial u_2}f_2+\frac{\partial}{\partial u_3}f_3+\frac{\partial}{\partial u_4}f_4\right)+\left(\frac{\partial}{\partial u_1}f_2-\frac{\partial}{\partial u_2}f_1-\frac{\partial}{\partial u_3}f_4+\frac{\partial}{\partial u_4}f_3\right)i+\right.$$
$$\left.\left(\frac{\partial}{\partial u_1}f_3+\frac{\partial}{\partial u_2}f_4-\frac{\partial}{\partial u_3}f_1-\frac{\partial}{\partial u_4}f_2\right)j+\left(\frac{\partial}{\partial u_1}f_4-\frac{\partial}{\partial u_2}f_3+\frac{\partial}{\partial u_3}f_2-\frac{\partial}{\partial u_4}f_1\right)k\right\}=$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)\left(2\frac{\partial}{\partial u_1}f_1+2\frac{\partial}{\partial u_1}f_2i+2\frac{\partial}{\partial u_1}f_3j+2\frac{\partial}{\partial u_1}f_4k\right)=$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)\left\{(2)\left(\frac{\partial}{\partial u_1}f_1+\frac{\partial}{\partial u_1}f_2 i+\frac{\partial}{\partial u_1}f_3 j+\frac{\partial}{\partial u_1}f_4 k\right)\right\}=$$
$$\frac{\partial}{\partial u_1}f_1+\frac{\partial}{\partial u_1}f_2 i+\frac{\partial}{\partial u_1}f_3 j+\frac{\partial}{\partial u_1}f_4 k$$

E pode-se imediatamente verificar, como esperado, que as exponenciais quaterniônicas

$$e^z = e^{u_1}\left\{\cos\left(\sqrt{u_2^2+u_3^2+u_4^2}\right)+\vec{u}\left(\frac{\operatorname{sen}\sqrt{u_2^2+u_3^2+u_4^2}}{\sqrt{u_2^2+u_3^2+u_4^2}}\right)\right\},$$
$$\vec{u}=u_2 i+u_3 j+u_4 k, \qquad z=u_1+\vec{u}$$

tem a propriedade $T\left(e^z\right)=e^z$

Esta é de fato uma relação quase trivial, mas as outras equações do operador que não são assim tão simples no primeiro momento podem também ser deduzidos.

Por exemplo, se pode definir o operador:

$$Sf=\frac{1}{2}\left(\Gamma f-\overline{\Gamma} f\right)=$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)\left\{\left(\frac{\partial}{\partial u_1}f_1-\frac{\partial}{\partial u_2}f_2-\frac{\partial}{\partial u_3}f_3-\frac{\partial}{\partial u_4}f_4\right)+\left(\frac{\partial}{\partial u_1}f_2+\frac{\partial}{\partial u_2}f_1+\frac{\partial}{\partial u_3}f_4-\frac{\partial}{\partial u_4}f_3\right)i+\right.$$
$$\left.\left(\frac{\partial}{\partial u_1}f_3-\frac{\partial}{\partial u_2}f_4+\frac{\partial}{\partial u_3}f_1+\frac{\partial}{\partial u_4}f_2\right)j+\left(\frac{\partial}{\partial u_1}f_4+\frac{\partial}{\partial u_2}f_3-\frac{\partial}{\partial u_3}f_2+\frac{\partial}{\partial u_4}f_1\right)k\right\}-$$
$$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial u_1}f_1+\frac{\partial}{\partial u_2}f_2+\frac{\partial}{\partial u_3}f_3+\frac{\partial}{\partial u_4}f_4\right)+\left(\frac{\partial}{\partial u_1}f_2-\frac{\partial}{\partial u_2}f_1-\frac{\partial}{\partial u_3}f_4+\frac{\partial}{\partial u_4}f_3\right)i+\right.$$
$$\left.\left(\frac{\partial}{\partial u_1}f_3+\frac{\partial}{\partial u_2}f_4-\frac{\partial}{\partial u_3}f_1-\frac{\partial}{\partial u_4}f_2\right)j+\left(\frac{\partial}{\partial u_1}f_4-\frac{\partial}{\partial u_2}f_3+\frac{\partial}{\partial u_3}f_2-\frac{\partial}{\partial u_4}f_1\right)k\right\}=$$

$$\left(-\frac{\partial}{\partial u_2}f_2-\frac{\partial}{\partial u_3}f_3-\frac{\partial}{\partial u_4}f_4\right)+i\left(\frac{\partial}{\partial u_2}f_1+\frac{\partial}{\partial u_3}f_4-\frac{\partial}{\partial u_4}f_3\right)+$$
$$j\left(\frac{\partial}{\partial u_3}f_1+\frac{\partial}{\partial u_4}f_2-\frac{\partial}{\partial u_2}f_4\right)+k\left(\frac{\partial}{\partial u_4}f_1+\frac{\partial}{\partial u_2}f_3-\frac{\partial}{\partial u_3}f_2\right)$$

Então usando $f=e^z$, encontramos as seguintes relações:

$$\left(-\frac{\partial}{\partial u_2}f_2-\frac{\partial}{\partial u_3}f_3-\frac{\partial}{\partial u_4}f_4\right)=e^{u_1}\left(-\cos\left(\sqrt{u_2^2+u_3^2+u_4^2}\right)-\left(\frac{2\operatorname{sen}\sqrt{u_2^2+u_3^2+u_4^2}}{\sqrt{u_2^2+u_3^2+u_4^2}}\right)\right),$$

$$i\left(\frac{\partial}{\partial u_2}f_1+\frac{\partial}{\partial u_3}f_4-\frac{\partial}{\partial u_4}f_3\right)=-e^{u_1}\left(\frac{u_2\operatorname{sen}\sqrt{u_2^2+u_3^2+u_4^2}}{\sqrt{u_2^2+u_3^2+u_4^2}}\right)i,$$

$$j\left(\frac{\partial}{\partial u_3}f_1+\frac{\partial}{\partial u_4}f_2-\frac{\partial}{\partial u_2}f_4\right)=-e^{u_1}\left(\frac{u_3\operatorname{sen}\sqrt{u_2^2+u_3^2+u_4^2}}{\sqrt{u_2^2+u_3^2+u_4^2}}\right)j,$$

$$k\left(\frac{\partial}{\partial u_4}f_1+\frac{\partial}{\partial u_2}f_3-\frac{\partial}{\partial u_3}f_2\right)=-e^{u_1}\left(\frac{u_4\operatorname{sen}\sqrt{u_2^2+u_3^2+u_4^2}}{\sqrt{u_2^2+u_3^2+u_4^2}}\right)k,$$

O que conduz à conclusão:

$$Sf=Se^z=$$
$$\left(-\frac{\partial}{\partial u_2}f_2-\frac{\partial}{\partial u_3}f_3-\frac{\partial}{\partial u_4}f_4\right)+i\left(\frac{\partial}{\partial u_2}f_1+\frac{\partial}{\partial u_3}f_4-\frac{\partial}{\partial u_4}f_3\right)+$$
$$j\left(\frac{\partial}{\partial u_3}f_1+\frac{\partial}{\partial u_4}f_2-\frac{\partial}{\partial u_2}f_4\right)+k\left(\frac{\partial}{\partial u_4}f_1+\frac{\partial}{\partial u_2}f_3-\frac{\partial}{\partial u_3}f_2\right)=$$
$$e^{u_1}\left(-\cos\left(\sqrt{u_2^2+u_3^2+u_4^2}\right)-\left(\frac{2\operatorname{sen}\sqrt{u_2^2+u_3^2+u_4^2}}{\sqrt{u_2^2+u_3^2+u_4^2}}\right)\right)-e^{u_1}\left(\frac{u_2\operatorname{sen}\sqrt{u_2^2+u_3^2+u_4^2}}{\sqrt{u_2^2+u_3^2+u_4^2}}\right)i-$$
$$e^{u_1}\left(\frac{u_3\operatorname{sen}\sqrt{u_2^2+u_3^2+u_4^2}}{\sqrt{u_2^2+u_3^2+u_4^2}}\right)j-e^{u_1}\left(\frac{u_4\operatorname{sen}\sqrt{u_2^2+u_3^2+u_4^2}}{\sqrt{u_2^2+u_3^2+u_4^2}}\right)k=$$

$$-e^{u_1}\cos\sqrt{u_2^2+u_3^2+u_4^2}-\frac{2e^{u_1}\,\mathrm{sen}\sqrt{u_2^2+u_3^2+u_4^2}}{\sqrt{u_2^2+u_3^2+u_4^2}}-\frac{e^{u_1}u_2\,\mathrm{sen}\sqrt{u_2^2+u_3^2+u_4^2}}{\sqrt{u_2^2+u_3^2+u_4^2}}i-$$

$$\frac{e^{u_1}u_3\,\mathrm{sen}\sqrt{u_2^2+u_3^2+u_4^2}}{\sqrt{u_2^2+u_3^2+u_4^2}}j-\frac{e^{u_1}u_4\,\mathrm{sen}\sqrt{u_2^2+u_3^2+u_4^2}}{\sqrt{u_2^2+u_3^2+u_4^2}}k=$$

$$-e^{u_1}\cos\sqrt{u_2^2+u_3^2+u_4^2}-\frac{e^{u_1}\,\mathrm{sen}\sqrt{u_2^2+u_3^2+u_4^2}}{\sqrt{u_2^2+u_3^2+u_4^2}}\left(u_2i+u_3j+u_4k\right)-\frac{2e^{u_1}\,\mathrm{sen}\sqrt{u_2^2+u_3^2+u_4^2}}{\sqrt{u_2^2+u_3^2+u_4^2}}=$$

$$-e^{u_1}\cos\sqrt{u_2^2+u_3^2+u_4^2}-\frac{e^{u_1}\,\mathrm{sen}\sqrt{u_2^2+u_3^2+u_4^2}}{\sqrt{u_2^2+u_3^2+u_4^2}}\vec{u}-\frac{2e^{u_1}\,\mathrm{sen}\sqrt{u_2^2+u_3^2+u_4^2}}{\sqrt{u_2^2+u_3^2+u_4^2}}=$$

$$-e^z-A,$$

$$A=e^{u_1}\left(\frac{2\,\mathrm{sen}\sqrt{u_2^2+u_3^2+u_4^2}}{\sqrt{u_2^2+u_3^2+u_4^2}}\right),$$

Portanto $Se^z=-e^z-A$

Estas propriedades podem ser aplicadas para a fatoração de umas relações mais complicadas do operador, assemelhando-se aos procedimentos similares usados para a solução de equações diferenciais ordinárias.

De forma análoga podemos encontrar os seguintes resultados para números octoniônicos.

Na teoria de Fueter de funções regulares o operador Γ é :

$$\Gamma=\frac{\partial}{\partial u_1}+i\frac{\partial}{\partial u_2}+j\frac{\partial}{\partial u_3}+k\frac{\partial}{\partial u_4}+kl\frac{\partial}{\partial u_5}+jl\frac{\partial}{\partial u_6}+il\frac{\partial}{\partial u_7}+l\frac{\partial}{\partial u_8}$$

É importante que as bases sejam definidas como em (3.1.9).

Então as regras de multiplicação das bases octoniônicas podem ser encontradas pelo processo de Cayley- Dickson. (Mais detalhes em [20]).

A ação de Γ sobre uma função octoniônica f é dada por:

$$\Gamma f = \left(\frac{\partial}{\partial u_1} + i\frac{\partial}{\partial u_2} + j\frac{\partial}{\partial u_3} + k\frac{\partial}{\partial u_4} + kl\frac{\partial}{\partial u_5} + jl\frac{\partial}{\partial u_6} + il\frac{\partial}{\partial u_7} + l\frac{\partial}{\partial u_8} \right).$$
$$\left(f_1 + if_2 + jf_3 + kf_4 + klf_5 + jlf_6 + ilf_7 + lf_8 \right) =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial u_1} f_1 - \frac{\partial}{\partial u_2} f_2 - \frac{\partial}{\partial u_3} f_3 - \frac{\partial}{\partial u_4} f_4 - \frac{\partial}{\partial u_5} f_5 - \frac{\partial}{\partial u_6} f_6 - \frac{\partial}{\partial u_7} f_7 - \frac{\partial}{\partial u_8} f_8 \right) +$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial u_1} f_2 + \frac{\partial}{\partial u_2} f_1 + \frac{\partial}{\partial u_3} f_4 - \frac{\partial}{\partial u_4} f_3 + \frac{\partial}{\partial u_5} f_6 - \frac{\partial}{\partial u_6} f_5 + \frac{\partial}{\partial u_7} f_8 - \frac{\partial}{\partial u_8} f_7 \right) i +$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial u_1} f_3 - \frac{\partial}{\partial u_2} f_5 + \frac{\partial}{\partial u_3} f_1 + \frac{\partial}{\partial u_4} f_2 + \frac{\partial}{\partial u_5} f_7 - \frac{\partial}{\partial u_6} f_8 - \frac{\partial}{\partial u_7} f_5 + \frac{\partial}{\partial u_8} f_6 \right) j +$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial u_1} f_4 + \frac{\partial}{\partial u_2} f_3 - \frac{\partial}{\partial u_3} f_2 + \frac{\partial}{\partial u_4} f_1 - \frac{\partial}{\partial u_5} f_8 - \frac{\partial}{\partial u_6} f_7 + \frac{\partial}{\partial u_7} f_6 + \frac{\partial}{\partial u_8} f_5 \right) k +$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial u_1} f_5 - \frac{\partial}{\partial u_2} f_6 - \frac{\partial}{\partial u_3} f_7 + \frac{\partial}{\partial u_4} f_8 + \frac{\partial}{\partial u_5} f_1 + \frac{\partial}{\partial u_6} f_2 + \frac{\partial}{\partial u_7} f_3 - \frac{\partial}{\partial u_8} f_4 \right) kl +$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial u_1} f_6 + \frac{\partial}{\partial u_2} f_5 + \frac{\partial}{\partial u_3} f_8 + \frac{\partial}{\partial u_4} f_7 - \frac{\partial}{\partial u_5} f_2 + \frac{\partial}{\partial u_6} f_1 - \frac{\partial}{\partial u_7} f_4 - \frac{\partial}{\partial u_8} f_3 \right) jl +$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial u_1} f_7 - \frac{\partial}{\partial u_2} f_8 + \frac{\partial}{\partial u_3} f_5 - \frac{\partial}{\partial u_4} f_6 - \frac{\partial}{\partial u_5} f_3 + \frac{\partial}{\partial u_6} f_4 + \frac{\partial}{\partial u_7} f_1 + \frac{\partial}{\partial u_8} f_2 \right) il +$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial u_1} f_8 + \frac{\partial}{\partial u_2} f_7 - \frac{\partial}{\partial u_3} f_6 - \frac{\partial}{\partial u_4} f_5 + \frac{\partial}{\partial u_5} f_4 + \frac{\partial}{\partial u_6} f_3 - \frac{\partial}{\partial u_7} f_2 + \frac{\partial}{\partial u_8} f_1 \right) l$$

Em uma forma similar, se define um operador $\overline{\Gamma}$ conjugado, como:

$$\overline{\Gamma} = \frac{\partial}{\partial u_1} - i\frac{\partial}{\partial u_2} - j\frac{\partial}{\partial u_3} - k\frac{\partial}{\partial u_4} - kl\frac{\partial}{\partial u_5} - jl\frac{\partial}{\partial u_6} - il\frac{\partial}{\partial u_7} - l\frac{\partial}{\partial u_8}$$

tal que:

$$\overline{\Gamma} f = \left(\frac{\partial}{\partial u_1} - i\frac{\partial}{\partial u_2} - j\frac{\partial}{\partial u_3} - k\frac{\partial}{\partial u_4} - kl\frac{\partial}{\partial u_5} - jl\frac{\partial}{\partial u_6} - il\frac{\partial}{\partial u_7} - l\frac{\partial}{\partial u_8}\right).$$
$$\left(f_1 + if_2 + jf_3 + kf_4 + klf_5 + jlf_6 + ilf_7 + lf_8\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial u_1} f_1 + \frac{\partial}{\partial u_2} f_2 + \frac{\partial}{\partial u_3} f_3 + \frac{\partial}{\partial u_4} f_4 + \frac{\partial}{\partial u_5} f_5 + \frac{\partial}{\partial u_6} f_6 + \frac{\partial}{\partial u_7} f_7 + \frac{\partial}{\partial u_8} f_8\right) +$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial u_1} f_2 - \frac{\partial}{\partial u_2} f_1 - \frac{\partial}{\partial u_3} f_4 + \frac{\partial}{\partial u_4} f_3 - \frac{\partial}{\partial u_5} f_6 + \frac{\partial}{\partial u_6} f_5 - \frac{\partial}{\partial u_7} f_8 + \frac{\partial}{\partial u_8} f_7\right) i +$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial u_1} f_3 + \frac{\partial}{\partial u_2} f_5 - \frac{\partial}{\partial u_3} f_1 - \frac{\partial}{\partial u_4} f_2 - \frac{\partial}{\partial u_5} f_7 + \frac{\partial}{\partial u_6} f_8 + \frac{\partial}{\partial u_7} f_5 - \frac{\partial}{\partial u_8} f_6\right) j +$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial u_1} f_4 - \frac{\partial}{\partial u_2} f_3 + \frac{\partial}{\partial u_3} f_2 - \frac{\partial}{\partial u_4} f_1 + \frac{\partial}{\partial u_5} f_8 + \frac{\partial}{\partial u_6} f_7 - \frac{\partial}{\partial u_7} f_6 - \frac{\partial}{\partial u_8} f_5\right) k +$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial u_1} f_5 + \frac{\partial}{\partial u_2} f_6 + \frac{\partial}{\partial u_3} f_7 - \frac{\partial}{\partial u_4} f_8 - \frac{\partial}{\partial u_5} f_1 - \frac{\partial}{\partial u_6} f_2 - \frac{\partial}{\partial u_7} f_3 + \frac{\partial}{\partial u_8} f_4\right) kl +$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial u_1} f_6 - \frac{\partial}{\partial u_2} f_5 - \frac{\partial}{\partial u_3} f_8 - \frac{\partial}{\partial u_4} f_7 + \frac{\partial}{\partial u_5} f_2 - \frac{\partial}{\partial u_6} f_1 + \frac{\partial}{\partial u_7} f_4 + \frac{\partial}{\partial u_8} f_3\right) jl +$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial u_1} f_7 + \frac{\partial}{\partial u_2} f_8 - \frac{\partial}{\partial u_3} f_5 + \frac{\partial}{\partial u_4} f_6 + \frac{\partial}{\partial u_5} f_3 - \frac{\partial}{\partial u_6} f_4 - \frac{\partial}{\partial u_7} f_1 - \frac{\partial}{\partial u_8} f_2\right) il +$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial u_1} f_8 - \frac{\partial}{\partial u_2} f_7 + \frac{\partial}{\partial u_3} f_6 + \frac{\partial}{\partial u_4} f_5 - \frac{\partial}{\partial u_5} f_4 - \frac{\partial}{\partial u_6} f_3 + \frac{\partial}{\partial u_7} f_2 - \frac{\partial}{\partial u_8} f_1\right) l$$

Então o seguinte resultado mostra que:

$$Tf = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\Gamma f + \overline{\Gamma} f\right) =$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)(2)\left(\frac{\partial}{\partial u_1} f_1 + \frac{\partial}{\partial u_1} f_2 i + \frac{\partial}{\partial u_1} f_3 j + \frac{\partial}{\partial u_1} f_4 k + \frac{\partial}{\partial u_1} f_5(kl) + \frac{\partial}{\partial u_1} f_6(jl) + \frac{\partial}{\partial u_1} f_7(il) + \frac{\partial}{\partial u_1} f_8(l)\right) =$$

$$\frac{\partial}{\partial u_1} f_1 + \frac{\partial}{\partial u_1} f_2 i + \frac{\partial}{\partial u_1} f_3 j + \frac{\partial}{\partial u_1} f_4 k + \frac{\partial}{\partial u_1} f_5(kl) + \frac{\partial}{\partial u_1} f_6(jl) + \frac{\partial}{\partial u_1} f_7(il) + \frac{\partial}{\partial u_1} f_8(l).$$

E pode-se imediatamente verificar, como esperado, que as exponenciais octoniônicas:

$$e^z = e^{u_1}\left\{\cos\sqrt{u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2 + u_6^2 + u_7^2 + u_8^2} + \vec{u}\left(\frac{\operatorname{sen}\sqrt{u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2 + u_6^2 + u_7^2 + u_8^2}}{\sqrt{u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2 + u_6^2 + u_7^2 + u_8^2}}\right)\right\}$$

$$\vec{u} = u_2 i + u_3 j + u_4 k + u_5(kl) + u_6(jl) + u_7(il) + u_8(l) \qquad z = u_1 + \vec{u}$$

tem a propriedade $T\left(e^z\right) = e^z$.

Pode- se definir tanto para quatérnios, o operador octoniônico da forma:

$$Sf = \frac{1}{2}\left(\Gamma f - \overline{\Gamma} f\right) =$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)(2)\left\{\left(-\frac{\partial f_2}{\partial u_2} - \frac{\partial f_3}{\partial u_3} - \frac{\partial f_4}{\partial u_4} - \frac{\partial f_5}{\partial u_5} - \frac{\partial f_6}{\partial u_6} - \frac{\partial f_7}{\partial u_7} - \frac{\partial f_8}{\partial u_8}\right) + \right. \tag{3.2.1}$$

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial u_2} + \frac{\partial f_4}{\partial u_3} - \frac{\partial f_3}{\partial u_4} + \frac{\partial f_6}{\partial u_5} - \frac{\partial f_5}{\partial u_6} + \frac{\partial f_8}{\partial u_7} - \frac{\partial f_7}{\partial u_8}\right) i + \tag{3.2.2}$$

$$\left(-\frac{\partial f_5}{\partial u_2}+\frac{\partial f_1}{\partial u_3}+\frac{\partial f_2}{\partial u_4}+\frac{\partial f_7}{\partial u_5}-\frac{\partial f_8}{\partial u_6}-\frac{\partial f_5}{\partial u_7}+\frac{\partial f_6}{\partial u_8}\right)j+ \tag{3.2.3}$$

$$\left(\frac{\partial f_3}{\partial u_2}-\frac{\partial f_2}{\partial u_3}+\frac{\partial f_1}{\partial u_4}-\frac{\partial f_8}{\partial u_5}-\frac{\partial f_7}{\partial u_6}+\frac{\partial f_6}{\partial u_7}+\frac{\partial f_5}{\partial u_8}\right)k+ \tag{3.2.4}$$

$$\left(-\frac{\partial f_6}{\partial u_2}-\frac{\partial f_7}{\partial u_3}+\frac{\partial f_8}{\partial u_4}+\frac{\partial f_1}{\partial u_5}+\frac{\partial f_2}{\partial u_6}+\frac{\partial f_3}{\partial u_7}-\frac{\partial f_4}{\partial u_8}\right)kl+ \tag{3.2.5}$$

$$\left(\frac{\partial f_5}{\partial u_2}+\frac{\partial f_8}{\partial u_3}+\frac{\partial f_7}{\partial u_4}-\frac{\partial f_2}{\partial u_5}+\frac{\partial f_1}{\partial u_6}-\frac{\partial f_4}{\partial u_7}-\frac{\partial f_3}{\partial u_8}\right)jl+ \tag{3.2.6}$$

$$\left(-\frac{\partial f_8}{\partial u_2}+\frac{\partial f_5}{\partial u_3}-\frac{\partial f_6}{\partial u_4}-\frac{\partial f_3}{\partial u_5}+\frac{\partial f_4}{\partial u_6}+\frac{\partial f_1}{\partial u_7}-\frac{\partial f_2}{\partial u_8}\right)il+ \tag{3.2.7}$$

$$\left.\left(-\frac{\partial f_7}{\partial u_2}+\frac{\partial f_6}{\partial u_3}+\frac{\partial f_5}{\partial u_4}-\frac{\partial f_4}{\partial u_5}-\frac{\partial f_3}{\partial u_6}+\frac{\partial f_2}{\partial u_7}-\frac{\partial f_1}{\partial u_8}\right)l\right\}. \tag{3.2.8}$$

Então usando $f=e^z$, encontramos as seguintes relações:

$$(3.2.1)=\ 2e^{u_1}\left(-\cos\sqrt{u_2^2+u_3^2+u_4^2+u_5^2+u_6^2+u_7^2+u_8^2}-\frac{6\,\mathrm{sen}\sqrt{u_2^2+u_3^2+u_4^2+u_5^2+u_6^2+u_7^2+u_8^2}}{\sqrt{u_2^2+u_3^2+u_4^2+u_5^2+u_6^2+u_7^2+u_8^2}}\right)$$

$$(3.2.2)\ =-e^{u_1}\left(\frac{u_2\,\mathrm{sen}\sqrt{u_2^2+u_3^2+u_4^2+u_5^2+u_6^2+u_7^2+u_8^2}}{\sqrt{u_2^2+u_3^2+u_4^2+u_5^2+u_6^2+u_7^2+u_8^2}}\right)i$$

$$(3.2.3)\ =-e^{u_1}\left(\frac{u_3\,\mathrm{sen}\sqrt{u_2^2+u_3^2+u_4^2+u_5^2+u_6^2+u_7^2+u_8^2}}{\sqrt{u_2^2+u_3^2+u_4^2+u_5^2+u_6^2+u_7^2+u_8^2}}\right)j$$

$$(3.2.4)\ = -e^{u_1}\left(\frac{u_4 \operatorname{sen}\sqrt{u_2^2+u_3^2+u_4^2+u_5^2+u_6^2+u_7^2+u_8^2}}{\sqrt{u_2^2+u_3^2+u_4^2+u_5^2+u_6^2+u_7^2+u_8^2}}\right)k$$

$$(3.2.5)\ = -e^{u_1}\left(\frac{u_5 \operatorname{sen}\sqrt{u_2^2+u_3^2+u_4^2+u_5^2+u_6^2+u_7^2+u_8^2}}{\sqrt{u_2^2+u_3^2+u_4^2+u_5^2+u_6^2+u_7^2+u_8^2}}\right)kl$$

$$(3.2.6)\ = -e^{u_1}\left(\frac{u_6 \operatorname{sen}\sqrt{u_2^2+u_3^2+u_4^2+u_5^2+u_6^2+u_7^2+u_8^2}}{\sqrt{u_2^2+u_3^2+u_4^2+u_5^2+u_6^2+u_7^2+u_8^2}}\right)jl$$

$$(3.2.7)\ = -e^{u_1}\left(\frac{u_7 \operatorname{sen}\sqrt{u_2^2+u_3^2+u_4^2+u_5^2+u_6^2+u_7^2+u_8^2}}{\sqrt{u_2^2+u_3^2+u_4^2+u_5^2+u_6^2+u_7^2+u_8^2}}\right)il$$

$$(3.2.8)\ = -e^{u_1}\left(\frac{u_8 \operatorname{sen}\sqrt{u_2^2+u_3^2+u_4^2+u_5^2+u_6^2+u_7^2+u_8^2}}{\sqrt{u_2^2+u_3^2+u_4^2+u_5^2+u_6^2+u_7^2+u_8^2}}\right)l$$

O que conduz à conclusão:

$$Sf = Se^{z} = e^{u_1}\left(-\cos\sqrt{u_2^2+u_3^2+u_4^2+u_5^2+u_6^2+u_7^2+u_8^2} - \frac{6\operatorname{sen}\sqrt{u_2^2+u_3^2+u_4^2+u_5^2+u_6^2+u_7^2+u_8^2}}{\sqrt{u_2^2+u_3^2+u_4^2+u_5^2+u_6^2+u_7^2+u_8^2}}\right) -$$

$$e^{u_1}\left(\frac{u_2 \operatorname{sen}\sqrt{u_2^2+u_3^2+u_4^2+u_5^2+u_6^2+u_7^2+u_8^2}}{\sqrt{u_2^2+u_3^2+u_4^2+u_5^2+u_6^2+u_7^2+u_8^2}}\right)i - \ldots - e^{u_1}\left(\frac{u_8 \operatorname{sen}\sqrt{u_2^2+u_3^2+u_4^2+u_5^2+u_6^2+u_7^2+u_8^2}}{\sqrt{u_2^2+u_3^2+u_4^2+u_5^2+u_6^2+u_7^2+u_8^2}}\right)l =$$

$$-e^{u_1}\cos\sqrt{u_2^2+u_3^2+u_4^2+u_5^2+u_6^2+u_7^2+u_8^2}-\frac{e^{u_1}\operatorname{sen}\sqrt{u_2^2+u_3^2+u_4^2+u_5^2+u_6^2+u_7^2+u_8^2}\,\vec{u}}{\sqrt{u_2^2+u_3^2+u_4^2+u_5^2+u_6^2+u_7^2+u_8^2}}-$$

$$\frac{6e^{u_1}\operatorname{sen}\sqrt{u_2^2+u_3^2+u_4^2+u_5^2+u_6^2+u_7^2+u_8^2}}{\sqrt{u_2^2+u_3^2+u_4^2+u_5^2+u_6^2+u_7^2+u_8^2}}=$$

$$-e^z-3A,$$

$$A=\frac{2e^{u_1}\operatorname{sen}\sqrt{u_2^2+u_3^2+u_4^2+u_5^2+u_6^2+u_7^2+u_8^2}}{\sqrt{u_2^2+u_3^2+u_4^2+u_5^2+u_6^2+u_7^2+u_8^2}}$$

Portanto $Se^z=-e^z-3A$.

Todos estes resultados obtidos para equações com operadores de números octoniônicos podem ser encontrados detalhadamente na dissertação de Pendeza [20], como já mencionado anteriormente.

Conclusão

É uma tarefa difícil a partir dos trabalhos de Moivre ter em um curto espaço uma vista geral e generalização de suas fórmulas. Podemos citar apenas brevemente, algumas das contribuições de Moivre em relevantes campos, tais como:

(i) a introdução da probabilidade na matemática (a matematização da possibilidade dentro da área de jogos de possibilidade)

(ii) A solução de Moivre para o movimento aleatório de partículas entre duas paredes.

(iii) a fórmula do número de Tetrabonacci

(iv) a teoria do ponto fixo (o índice de um campo V do vetor em um distribuidor compacto M é relacionado com o índice de um campo do vetor em uma parte do limite).

Dentro do contexto da teoria dos quatérnios, Murnaghan [19] mostrou que o teorema de Moivre pode também ser considerado como um ingrediente básico, da própria fundação da álgebra dos quatérnios.

Mostrou-se recentemente que algumas propriedades da teoria bidimensional das variáveis complexas, tais como as relações de Cauchy-Riemann e de mapeamentos conformes, podem ser estendidos aos quatérnios.

Neste trabalho, seguindo um desejo para estabelecer similaridades entre os complexos e a análise de hipercomplexos, e motivados em explorar idéias de Murnaghan, nós mostramos uma analogia da relação complexa clássica de Moivre para quatérnios gerais, apresentado as ligações com os operadores da teoria de Fueter e de funções transcendentais. Outras conexões e propriedades possíveis das contribuições de Moivre, no contexto do hipercomplexo, estão sendo investigadas no âmbito do grupo de problemas não lineares e sistemas complexos (UNESP – Campus de São José do Rio Preto).

Referências Bibliográficas

[1] Ávila, G.S.S, *Funções de uma variável complexa,* Impa – RJ (1974).

[2] Borges, M.F., Godoy, A., Machado, J.M., *Quaternionic factors and Robertson-Walker metrics,* International Journal of Applied Mathematics, 12: (3) (2003), 279-288.

[3] Cho, E., *De Moivre Formula for Quaternions*, Apll. Math. Lett., 11: (6) (1998), 33-35.

[4] Churchill, R.V., *Complex Variables and Applications,*

[5] Coxeter, H.S.M., *The binary polyhedral groups, and other generalizations of quaternion group*, Duke Math.J.,7: (1940), 367-379.

[6] Eilenberg, S., Niven, I., *The "Fundamental Theorem of Algebra" for quaternions*, Bull. Amer. Math. Society, 50: (1944), 246-248.

[7] Fueter, R., *Die Funktionentheorie der Differential-gleichungen* $\Delta\Phi = 0$ *und* $\Delta\Delta = 0$ *mit vier reelen Variablen,* Comment. Math. Helv., 7 (1935), 307-330

[8] Garcia, Arnaldo e Lequain , Yves, *Álgebra: um corpo de introdução,* Impa- RJ (1988).

[9] Hauser, Arthur A. Jr. *Variáveis Complexas com Aplicações à Física*, Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda- RJ (1972).

[10] Lam, T.Y., *Handbook of Álgebra*, vol. 3, North-Holland, Amsterdam, (2003), 429-454.

[11] Leite,F.S., Vitória, J., *Generalizacion of the De Moivre formula for quaternions and octonions*; Math. Studies in honor of Prof. Luis Albuquerque (in Portuguese), Univ. de Coimbra, Coimbra, Portugal, (1994), 121-133.

[12] Machado, J.M, Borges, M.F., *Complexified Fueter operators in classical and quantum electrodynamics*, Communications in Applied Analysis , Atlanta-EUA, v. 9, n. 1, p. 213-226, 2005.

[13] Machado, J.M, Borges, M.F., *Hypercomplex Functions and Conformal Mappings*, International Journal of Applied Mathematics, 9: (1) (2002), 27-38.

[14] Machado, J.M, Borges, M.F., *New remarks on the differentiability of hypercomplex functions*, International Journal of Applied Mathematics, 8: (1) (2002), 85-101.

[15] Machado, J.M, Borges, M.F., *Quaternioc Differential Operators and Fueter Analyticity*, International Journal of Pure and Applied Mathematics, 3: (1) (2002), 63-70.

[16] Machado, J.M, Borges, M.F., *Quaternion Functions and four dimensional Riemannian metrics, Communications in Applied Analysis*, 9: (1) (2005).

[17] Machado, J.M, Borges, M.F., *Quaternion Transcendent Functions and Fueter Operators*, a ser submetido para publicação.

[18] Medeiros, L.A.J., *Introdução às funções complexas*, Editora McGraw-Hill do Brasil, Ltda - SP,RJ (1972).

[19] Murnaghan, F.D., *An elementary presentation of the theory of quaternions*, Scripta Math., 10: (1944), 37-49.

[20] Pendeza, C.A., *Álgebras não associativas octoniônicas e relações extensivas do tipo "De Moivre"* , Dissertação de mestrado em matemática aplicada, Unesp (IBILCE), São José do Rio Preto, 2006.

[21] Soares, M.G.,*Cálculo em uma variável complexa*, Impa – RJ (2003).

[22] Spiegel, M.R. *Complex Variables with an introduction to conformal mapping and its application*, Editora McGraw-Hill (1964).