

**ANÁLISE DA DINÂMICA DE UM SISTEMA
VIBRANTE NÃO IDEAL DE DOIS GRAUS
DE LIBERDADE**

Luiz Oreste Cauz

Dissertação de Mestrado
Pós-Graduação em Matemática Aplicada
MAP - 097

Análise da Dinâmica de um Sistema Vibrante não Ideal de Dois Graus de Liberdade

Luiz Oreste Cauz ¹

Dissertação apresentada ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto, São Paulo, para a obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada.

Orientador: Prof. Dr. Masayoshi Tsuchida

São José do Rio Preto
2005

¹contato: lcauz@yahoo.com.br

À Deus.
À minha família.
Aos meus amigos.
Dedico

Agradecimentos

À Deus, por tudo.

À minha família que sempre me apoiou.

Em especial ao Prof. Dr. Masayoshi Tsuchida, pela amizade, orientação, incentivo e paciência na elaboração deste trabalho.

Aos meus professores de graduação e pós-graduação.

Aos meus amigos de república e da minha cidade pelos momentos de descontração.

Aos meus amigos pós-graduandos do DCCE, do Departamento de Matemática do IBILCE.

À todas as pessoas e funcionários do IBILCE que, direta ou indiretamente, contribuíram para a elaboração deste trabalho.

Ao CNPq pelo auxílio financeiro.

Resumo

Neste trabalho apresentamos um estudo da dinâmica de um sistema vibrante não ideal, composto por um motor e uma mola, conhecido como vibrador centrífugo. O objetivo deste estudo é mostrar a diferença de comportamento do sistema, quando consideramos molas duras (coeficiente de elasticidade cúbica positivo) ou molas suaves (coeficiente de elasticidade cúbica negativo). Para mola dura foi analisada a estabilidade dos pontos de equilíbrio, e mostrada por meio da teoria de variedade central e do teorema de Bezout a existência da bifurcação de Hopf. Para mola suave, é mostrada a existência de uma órbita heteroclínica conectando dois pontos de sela. Usando o método clássico de Melnikov, é discutida a existência ou não do comportamento caótico para um determinado nível de energia e para certos valores do coeficiente de amortecimento. Toda a análise é acompanhada de simulações numéricas para a confirmação dos resultados.

Palavras-chave: vibrador centrífugo, bifurcação de Hopf, função de Melnikov, efeito Sommerfeld.

Abstract

In this work we present a study of the dynamics of a non-ideal vibrating system, composed by a motor and a spring, which is known as centrifugal vibrator. The purpose of this study is to show the difference of behavior of the system when we consider hard springs (positive coefficient of cubical elasticity) or soft springs (negative coefficient of cubical elasticity). For hard spring the stability of the fixed point was analyzed, and by means of the Central Manifolds Theory and the Bezout theorem the existence of the Hopf Bifurcation is shown. For soft spring, it is shown the existence of a heteroclinic orbit connecting two saddle points. Using the classical Melnikov method it is discussed the existence, or not, of the chaotic behavior for some energy level and certain values of the damping coefficient. All the analysis is followed by numerical simulations to confirm the results.

Keywords: centrifugal vibrator, Hopf bifurcation, Melnikov function, Sommerfeld effect.

Sumário

Lista de Tabelas	viii
Lista de Figuras	xi
1 Introdução	1
1.1 Objetivos do Trabalho	4
1.2 Apresentação dos Capítulos	4
2 Conceitos preliminares: Tópicos de Sistemas Dinâmicos	6
2.1 Sistemas lineares	6
2.2 Classificação do equilíbrio quanto à topologia e à estabilidade	8
2.3 Critério de Routh-Hurwitz	9
2.4 Sistemas não-lineares	10
2.5 Equivalência topológica	11
2.6 Teoremas locais para sistemas não-lineares	12
2.6.1 Teorema de Hartman-Grobman	12
2.6.2 Teorema das variedades hiperbólicas	12
2.7 Teoria da variedade central	13
2.7.1 Teoremas da variedade central	14
2.7.2 Teoremas de Carr	14
2.8 Bifurcações em sistemas dinâmicos de tempo contínuo	16
2.8.1 Bifurcação de Hopf	17
2.9 Mapas e seção de Poincaré	17
2.10 Método de Melnikov	19
2.10.1 Caso autônomo	19
2.10.2 Caso não-autônomo	21
2.11 O mapa de ferradura de Smale	23

2.12	Teorema de Bezout	25
3	O Sistema Mecânico e Algumas Simulações Numéricas.	26
3.1	O Vibrador Centrífugo	26
3.2	Ponto de Equilíbrio do Sistema	29
3.3	Equações de Movimento Usando a Formulação de Hamilton	32
3.4	Resultados Numéricos: Pontos de equilíbrio	34
3.5	Resultados Numéricos: Estudo da ressonância 1:1	43
4	Bifurcação de Hopf no Vibrador Centrífugo Não Ideal	51
4.1	Estudo do Caso Crítico	51
4.2	Estudo de um Caso Particular	54
4.3	Resultados Numéricos	60
4.3.1	Bifurcação de Hopf para um caso particular	60
5	Análise da dinâmica do sistema através do método de Melnikov	64
5.1	Formulação do Problema num Campo Hamiltoniano Perturbado	64
5.2	Resultados Numéricos	73
6	Conclusões	79
A	O Método de Redução de Holmes e Marsden	81
A.1	O Método de Redução	82
B	Teoremas de Wiggins e Shaw	86
	Referências Bibliográficas	90

Lista de Tabelas

3.1	Pontos de equilíbrio	35
3.2	Parâmetros físicos	43
4.1	Autovalores para diferentes valores de B	61

Lista de Figuras

2.1	Variedades de um ponto de sela de um sistema não-linear	13
2.2	Significado geométrico da aplicação de Poincaré P : x_0 é uma órbita periódica, x_0^* é o ponto onde ela intercepta Σ ; x_1 é uma órbita não periódica que corta Σ em $P(x_1') \neq x_1'$	19
2.3	Seções de Poincaré : (a) unidimensional; (b) bidimensional	20
2.4	Caso $\epsilon = 0$: linha tracejada; caso $\epsilon \neq 0$: linha cheia.	21
2.5	Emaranhado homoclínico	22
2.6	Esquema do mapa de ferradura	24
2.7	Iterações de f^{-1} sobre o quadrado D	25
3.1	Vibrador centrífugo	27
3.2	Modelo de torque linear com $A= 0.01$ e condições inicial $(y_1, y_2, y_3, y_4) = (0, 0, 0.001, 0)$. (a) Oscilação da mola; (b) velocidade de vibração da mola; (c) ângulo da massa m ; (d) velocidade angular da massa m	36
3.3	Modelo de torque exponencial, com $A= 0.01$ e condição inicial $(y_1, y_2, y_3, y_4) = (0, 0, 3.001, 0)$. (a) Oscilação da mola; (b) velocidade de vibração da mola; (c) ângulo da massa m ; (d) velocidade angular da massa m	37
3.4	Modelo de torque exponencial, com $A= 0.01$ e condição inicial $(y_1, y_2, y_3, y_4) = (0, 0, 0.001, 0)$. (a) Deslocamento da mola; (b) velocidade de vibração da mola; (c) ângulo da massa m ; (d) velocidade angular da massa m	38
3.5	Comportamento do movimento da massa m para $A= 0.1$. (a) Modelo de torque linear e condição inicial $(y_1, y_2, y_3, y_4) = (0, 0, 0.001, 0)$. (b) Modelo de torque exponencial e condição inicial $(y_1, y_2, y_3, y_4) = (0, 0, 3.001, 0)$	39
3.6	Comportamento do movimento da massa m para $A= 0.2$. (a) Modelo de torque linear e condição inicial $(y_1, y_2, y_3, y_4) = (0, 0, 0.001, 0)$. (b) Modelo de torque exponencial e condição inicial $(y_1, y_2, y_3, y_4) = (0, 0, 3.2, 0)$	39

3.7	Comportamento do movimento da massa m para $A=0.3$. (a) Modelo de torque linear e condição inicial $(y_1, y_2, y_3, y_4) = (0, 0, 3, 0)$. (b) Modelo de torque exponencial e condição inicial $(y_1, y_2, y_3, y_4) = (0, 0, 3.4, 0)$	40
3.8	Modelo de torque linear. $A=0.980665$. Condições iniciais: $(y_1, y_2, y_3, y_4) = (0, 0, 4, 0)$. (a) Deslocamento da mola. (b) velocidade de vibração da mola. (c) Ângulo da massa. (d) Velocidade angular	41
3.9	Modelo de torque linear. $A=1.2$. Condições iniciais: $(y_1, y_2, y_3, y_4) = (0, 0, 4, 0)$. (a) Deslocamento da mola. (b) velocidade de vibração da mola. (c) Ângulo da massa. (d) Velocidade angular	42
3.10	Características de movimento para parâmetro de controle $a = 0.61$. Caso $\dot{\varphi} < \omega$	44
3.11	Características de movimento para parâmetro de controle $a = 0.67$. Caso $\dot{\varphi} \approx \omega$	45
3.12	Características de movimento para parâmetro de controle $a = 0.72$. Caso $\dot{\varphi} > \omega$	46
3.13	Características de movimento para parâmetro de controle $a = 0.679$. Aparecimento de modulações logo após a passagem pela ressonância.	47
3.14	Características de movimento para parâmetro de controle $a = 0.685$. As modulações persistem mais à medida que se afasta da passagem pela ressonância.	48
3.15	Características de movimento para parâmetro de controle $a = 0.69$. As modulações ocorrem praticamente em todo o intervalo de tempo de simulação.	49
3.16	Amplitude máxima de oscilação da mola em função da frequência do rotor. Efeito <i>Sommerfeld</i>	50
4.1	Espaços de fases (y_1, y_2) para diferentes valores de B	61
4.2	Espaços de fases (y_3, y_4) para diferentes valores de B	62
4.3	Diagrama de bifurcação da variável y_1	62
4.4	Ampliação da figura 4.3 em torno da origem.	63
4.5	Função torque para o caso particular $M(y_4) = -By_4$. As retas 1 ($B = 0.00005$) e 2 ($B = 0.00002$) correspondem a $M'(y_4) < 0$, a reta 3 é o caso crítico $M'(y_4) = 0$ e as retas 4 ($B = -0.00002$) e 5 ($B = -0.00005$) referem-se a $M'(y_4) > 0$	63
5.1	Espaço de fases e a variedade invariante \mathcal{M}	70
5.2	Retrato de fases do sistema não perturbado (5.7). Os pontos de sela são $(\pm 3.162, 0)$	75
5.3	Variedade instável do ponto de sela $(-3.162, 0)$. (a) Caso $\epsilon = 0$. (b) Caso $\epsilon = 0.00001$	75
5.4	Função $\Delta(\varphi_0)$ para $\beta = 0.1$ e $s_0 = 0.5$. Os Zeros são simples.	76

5.5	Função $\Delta(\varphi_0)$ para $\beta = 0.1$ e $s_0 = 0.2325$. Os Zeros são duplos.	76
5.6	Função $\Delta(\varphi_0)$ para $\beta = 0.1$ e $s_0 = 0.9636$. Os Zeros são duplos.	77
5.7	Função $\Delta(\varphi_0)$ para $\beta = 0.1$ e $s_0 = 1.0$. Não há zeros.	77
5.8	Função $\Delta(\varphi_0)$ para $\beta = 0.2006780233$ e $s_0 = 0.5203690288$. Os Zeros são duplos.	78
5.9	Função $\Delta(\varphi_0)$ para $\beta = 0.21$ e $s_0 = 0.5$. Não há zeros.	78

Capítulo 1

Introdução

Nesta dissertação, estudamos a dinâmica de um sistema mecânico conhecido como vibrador centrífugo, que foi inicialmente estudado por Kononenko [10] e recentemente por Dantas e Balthazar [3, 4]. Esse sistema é constituído por um motor que gira uma massa desbalanceada, e é sustentado por uma mola e um amortecedor fig(3.1). As equações de movimento são dadas em [10] pelas expressões

$$\begin{cases} m_0\ddot{x} + \beta\dot{x} + cx = mr\dot{\varphi}^2 \cos \varphi + mr\ddot{\varphi}\sin\varphi, \\ I\ddot{\varphi} = M(\dot{\varphi}) + mr\ddot{x}\sin\varphi + mgr\cos\varphi, \end{cases} \quad (1.1)$$

onde $m_0 = m_1 + m$ com m_1 a massa do motor e m a massa excêntrica. Ainda, β é o coeficiente de amortecimento, c é a constante linear da mola, I é o momento de inércia da parte giratória do motor e $M(\dot{\varphi})$ é a diferença entre o torque aplicado ao rotor e o torque de resistência à rotação do rotor. Nos seus estudos, Kononenko considera também que a mola possua uma elasticidade não linear ([10], pág. 66). A variável x representa a oscilação do motor, e φ é o ângulo de rotação da massa m . Das equações (1.1) notamos que as variáveis x e φ estão acopladas, e isso indica que a rotação do motor e a vibração da mola se interagem mutuamente. O efeito da vibração da mola sobre a rotação do motor se deve ao fato da potência do motor ser limitada, e nesse caso dizemos que o sistema dinâmico é não ideal. No caso ideal, o agente perturbador possui potência ilimitada e não é afetado pelo comportamento do sistema dinâmico.

Um dos objetivos de Kononenko é mostrar a interação do sistema oscilante com a fonte de perturbação quando estes estão em condição de ressonância, ou seja, quando a frequência de rotação do motor está muito próxima da frequência natural do sistema. Para isso, Kononenko impôs algumas restrições ao sistema, considerando que a força de amortecimento $\beta\dot{x}$, bem

como o torque resultante $M(\dot{\varphi})$ e os termos $mr\dot{\varphi}^2 \cos \varphi$, $mr\ddot{\varphi} \sin \varphi$, $mr\ddot{x} \sin \varphi$ e $mgr \sin \varphi$ sejam pequenos quando comparados com as outras forças que agem sobre o sistema. Com estas restrições o sistema (1.1) foi reescrito como

$$\begin{cases} \ddot{x} + \omega^2 x = \epsilon(q_2 \dot{\varphi}^2 \cos \varphi + q_2 \ddot{\varphi} \sin \varphi - h\dot{x}), \\ \ddot{\varphi} = \epsilon[M_1(\dot{\varphi}) + q_3 \ddot{x} \sin \varphi], \end{cases} \quad (1.2)$$

onde $\omega^2 = \frac{c}{m_0}$, $\epsilon q_2 = \frac{mr}{m_0}$, $\epsilon q_3 = \frac{mr}{I}$, $\epsilon M_1(\dot{\varphi}) = \frac{M(\dot{\varphi})}{I}$ e $\epsilon h = \frac{\beta}{m_0}$.

Note que se $\epsilon = 0$ em (1.2), então $\varphi = \Omega t + \varphi(0)$ e assim temos a frequência do motor $\frac{d\varphi}{dt} = \Omega = \text{constante}$. O termo $mgr \sin \varphi$ é desconsiderado por Kononenko, pois ele propõe um modelo para estudar os efeitos de ressonância no vibrador centrífugo, e a constante g acarreta uma posição de equilíbrio na variável angular φ .

Pelas restrições impostas temos que $\frac{m}{m_0} \ll 1$, $\frac{m}{I} \ll 1$, $\frac{M(\dot{\varphi})}{I} \ll 1$, $\frac{\beta}{m_0} \ll 1$ e conseqüentemente podemos fazer um estudo do sistema quando $\omega - \dot{\varphi} = \epsilon \alpha_0$. Introduzindo a mudança de variável

$$x = A \cos(\varphi + \Xi), \quad \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\varphi + \Xi), \quad \frac{d\varphi}{dt} = \Theta$$

o sistema (1.2) é reescrito na forma

$$\begin{aligned} \frac{d\Theta}{dt} &= \epsilon[M_1(\Theta) - Aq_3\omega\Theta \cos(\varphi + \Xi)\sin\varphi], \\ \frac{dA}{dt} &= -\frac{\epsilon}{\omega}[q_2\Theta^2 \cos\varphi + A\omega h \sin(\varphi + \Xi)]\sin(\varphi + \Xi) + \epsilon^2 \dots, \\ \frac{d\Xi}{dt} &= \epsilon\left\{\alpha_0 - \frac{1}{A\omega}[q_2\Theta^2 \cos\varphi + A\omega h \sin(\varphi + \Xi)] \cos(\varphi + \Xi)\right\} + \epsilon^2 \dots, \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \Theta. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Para resolver o sistema (1.3) foi usada uma técnica conhecida como método da média de Bogoliubov [10], considerando que as soluções em primeira aproximação das três primeiras equações do sistema (1.3) são dadas na forma

$$\Theta = \Omega + \epsilon U_1(t, \Omega, a, \xi), \quad A = a + \epsilon U_2(t, \Omega, a, \xi), \quad \Xi = \xi + \epsilon U_3(t, \Omega, a, \xi),$$

onde U_i , $i = 1, 2, 3$ são funções periódicas no tempo.

A integração da quarta equação de (1.3) em primeira aproximação tem a forma

$$\varphi = \Omega t + \epsilon \Phi(t).$$

Assim, as três primeiras equações são substituídas por

$$\begin{aligned} \frac{d\Theta}{dt} &= \epsilon [M_1(\Omega) + \frac{1}{2} q_3 a \omega \Omega \text{sen} \xi] \\ \frac{da}{dt} &= -\frac{\epsilon}{2} \left(ha + q_2 \frac{\Omega^2}{\omega} \text{sen} \xi \right) \\ \frac{d\xi}{dt} &= \epsilon \left(\alpha - \frac{q_2 \Omega^2}{2a\omega} \cos \xi \right) \end{aligned} \quad (1.4)$$

onde $\epsilon\alpha = \omega - \Omega$.

Deste modo, sob a condição de regime estacionário do sistema anterior (1.4), pode-se observar a amplitude a , fase de oscilação ξ e a frequência de rotação Θ do motor. Em resumo, Kononenko estabeleceu condições para se estudar a interação entre o sistema oscilante e a fonte de excitação (motor DC) quando estes estão em condição de ressonância ($\dot{\varphi} \approx \omega$).

É importante ressaltar que Kononenko não leva em consideração a aceleração da gravidade g atuando sobre o sistema. Em [3], esta constante toma um papel fundamental na obtenção de um caso particular (bifurcação de Hopf) por meio da eq. (4.26), onde $a_6 = \frac{mgr}{I}$. Resultados de análise da dinâmica do sistema vibrante (vibrador centrífugo) realizados em [3] e [4] serão apresentados nos capítulos (3), (4) e (5). Alguns sistemas similares são estudados em [5] e [16].

Em [5] apresenta-se uma análise de um sistema dinâmico composto por um motor que gira uma massa desbalanceada, e está montado sobre uma mesa que pode oscilar horizontalmente. Esta mesa é acoplada lateralmente por amortecedor e mola. É considerado que a fonte de energia é não ideal. Foi analisada a interação entre a dinâmica da estrutura oscilante e a dinâmica do motor. Este trabalho baseou-se nas características do motor já que na maioria dos trabalhos encontrados na literatura leva-se em conta somente as características das curvas do torque aplicado ao rotor e o torque de resistência à rotação.

Em [16] é apresentado um estudo de um sistema composto por um bloco com um motor e um pêndulo acoplados, e que está suspenso por um amortecedor e uma mola. Neste trabalho é assumido que a característica da curva de torque é linear ($M = u_1 + u_2 \dot{\varphi}$). Um estudo numérico foi realizado tomando u_2 fixo, e u_1 como um parâmetro de controle.

1.1 Objetivos do Trabalho

O objetivo deste trabalho é o estudo numérico da dinâmica do sistema vibrante composto por um motor DC (motor elétrico de corrente contínua) e uma mola com não linearidade cúbica fig.(3.1). A mola sustenta o motor que gira uma pequena massa a uma distância fixa do eixo de rotação. É assumido que esse motor opera com potência limitada, de modo que temos uma influência do comportamento da mola sobre a rotação do motor, caracterizando assim um sistema mecânico não ideal. Este sistema é conhecido como vibrador centrífugo.

Os principais resultados que serão apresentados é devido a [3] e [4], onde é mostrado um estudo analítico sobre a dinâmica do vibrador centrífugo com molas duras e molas com menor rigidez.

Algumas simulações numéricas foram realizadas com o objetivo de constatar estes resultados. Outras simulações também foram realizadas.

1.2 Apresentação dos Capítulos

Esta dissertação foi dividida em 6 capítulos. No capítulo 2 apresentamos alguns tópicos em sistemas dinâmicos, os quais julgamos importantes para a compreensão dos capítulos seguintes. O texto neste capítulo é apresentado de forma introdutória. Não nos preocupamos em enunciar teoremas e definições, e sim discorrer sobre o assunto de maneira informal. Enunciamos apenas alguns teoremas que foram utilizados nos capítulos posteriores.

No capítulo 3 é apresentado o sistema vibrante estudado neste trabalho, bem como suas equações de movimento e algumas simulações numéricas. As equações de movimento são apresentadas de duas formas, uma usando o formalismo de Lagrange [3] e outra usando o formalismo Hamiltoniano [4]. Nas simulações numéricas é mostrada a estabilidade dos pontos de equilíbrio, e alguns resultados sobre o comportamento do sistema quando a mola e o motor estão em condição de ressonância, isto é, quando a frequência de vibração da mola e a frequência do motor estão próximas.

No capítulo 4 apresentamos mais detalhadamente os estudos analíticos feitos por Dantas e Balthazar [3], e contribuimos com o estudo numérico sobre a bifurcação de Hopf.

Procedimento análogo é feito no capítulo 5, onde detalhamos outro trabalho de Dantas e Balthazar. Neste artigo é assumido que o coeficiente de não linearidade da mola seja negativo, e desta forma surge um par de pontos de equilíbrio do tipo sela e uma órbita heteroclínica

conectando esses pontos. Usando um sistema Hamiltoniano perturbado associado à dinâmica do sistema e utilizando-se um método de redução de graus de liberdade [9] e o método de Melnikov [19], os autores mostram a existência de vibrações caóticas no sistema dinâmico.

O capítulo 6 contém as conclusões e as considerações finais sobre o trabalho desenvolvido. Em seguida apresentamos os apêndices que complementam o trabalho e finalmente as referências utilizadas nesta dissertação.

Capítulo 2

Conceitos preliminares: Tópicos de Sistemas Dinâmicos

Apresentamos neste capítulo, de forma introdutória, alguns tópicos de sistemas dinâmicos que são utilizados nesta dissertação. Como não objetivamos uma apresentação detalhada dos conceitos, sempre que possível, não nos preocupamos em enunciar teoremas e definições, mas sim discorrer sobre o assunto de maneira informal. Enunciamos somente alguns dos teoremas que serão usados posteriormente. Estes tópicos e teoremas que são apresentados, são resultados clássicos da teoria de sistemas dinâmicos, e por isso podem ser encontrados facilmente na literatura. Algumas das referências que utilizamos neste capítulo são [1], [2], [6], [8], [13], [14], [17] e [20]. Alguns textos que não foram utilizados neste capítulo mas, que dão suporte para alguns estudos específicos que não foram apresentados, serão referenciados no decorrer do texto.

2.1 Sistemas lineares

Seja o sistema linear

$$\frac{dx}{dt} \stackrel{\text{def}}{=} \dot{x} = Ax \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (2.1)$$

onde A é uma matriz $n \times n$ com coeficientes constantes. Uma solução do sistema (2.1) é uma função vetorial $x(x_0, t)$ que depende do tempo t e da condição inicial

$$x(0) = x_0 \quad (2.2)$$

tais que $x(x_0, t)$ é solução de (2.1) e (2.2).

A solução do sistema linear (2.1) é simplesmente

$$x(x_0, t) = e^{At}x_0, \quad (2.3)$$

onde e^{At} é uma matriz exponencial $n \times n$. Isso pode ser facilmente deduzido do desenvolvimento em série da matriz e^{At} , ou seja

$$e^{At} = [I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \dots + \frac{t^n}{(n)!}A^n + \dots] \quad (2.4)$$

onde I é a matriz unitária. Derivando (2.4) termo a termo em relação a t , temos

$$\frac{d}{dt}e^{At} = [A + tA^2 + \dots + \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}A^n + \dots] = Ae^{At}. \quad (2.5)$$

Portanto, pode-se usar (2.4) e (2.5) para mostrar que (2.3) é solução de (2.1) e (2.2).

A solução geral do sistema linear é a superposição de n soluções linearmente independentes $\{x^1(t), \dots, x^n(t)\}$

$$x(t) = \sum_{j=1}^n c_j x^j(t),$$

onde as n constantes c_j são determinadas pela condição inicial.

Se os autovalores $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ de A forem reais e distintos, então A tem n autovetores linearmente independentes $\{v_1, \dots, v_n\}$. Além disso, podemos diagonalizar A por meio de uma transformação linear. A partir de (2.4), é fácil de ver a matriz e^{At} também será diagonal com autovalores $\{e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}\}$. Deste modo, a solução de cada $x^j(t)$ será

$$x^j(t) = e^{\lambda_j t} v_j.$$

No caso em que A tem autovalores complexos conjugados $\alpha_j \pm i\beta_j$ e autovetores $v^{Re} \pm i v^{Im}$, temos as soluções

$$\begin{aligned} x_{Re}^j &= e^{\alpha_j t} (v^{Re} \cos \beta_j t - v^{Im} \sin \beta_j t), \\ x_{Im}^j &= e^{\alpha_j t} (v^{Re} \sin \beta_j t + v^{Im} \cos \beta_j t), \end{aligned}$$

onde x_{Re}^j e x_{Im}^j são respectivamente a parte real e a parte imaginária de $x^j(t)$.

De maneira simplificada escrevemos

$$x^j(t) = e^{\operatorname{Re}(\lambda_j)t} e^{i\operatorname{Im}(\lambda_j)t} v_j.$$

Como $e^{i\operatorname{Im}(\lambda_j)t}$ é uma função limitada, a estabilidade de $x^j(t)$ vai depender essencialmente de $\operatorname{Re}(\lambda_j)$. Se $\operatorname{Re}(\lambda_j) > 0$, $e^{\operatorname{Re}(\lambda_j)t}$ cresce continuamente com o tempo e $x^j(t) \rightarrow \infty$ quando

$t \rightarrow \infty$. Isso significa que as trajetórias $x^j(t)$ deixam a vizinhança de um ponto de equilíbrio P^* . Inversamente, se $\text{Re}(\lambda_j) < 0$, $x^j(t) \rightarrow P^*$ quando $t \rightarrow \infty$ e nesse caso o ponto de equilíbrio é estável.

As diferentes possibilidades de combinação dos autovalores, que podem ser reais, imaginários puros, todos com parte real positiva, etc..., vão definir não só a estabilidade do ponto de equilíbrio mas também a forma das soluções em sua vizinhança. Isso nos leva a classificar os pontos de equilíbrio de acordo com a sua natureza.

2.2 Classificação do equilíbrio quanto à topologia e à estabilidade

O ponto de equilíbrio de um sistema linear pode ser classificado de acordo com a topologia do seu retrato de fases e de acordo com sua estabilidade. Essa classificação é realizada em função dos autovalores.

Considere o sistema de n equações diferenciais (2.1). O polinômio característico é obtido através de $\det(A - \lambda I) = 0$. Quando todos os autovalores da matriz A tiverem a parte real diferente de zero, o ponto de equilíbrio correspondente P^* é chamado de **hiperbólico**, independente do valor da parte imaginária. Quando pelo menos um autovalor tem a parte real nula, o ponto de equilíbrio é denominado de **não-hiperbólico**.

Os pontos de equilíbrio hiperbólicos podem ser classificados de três formas quanto à estabilidade: **atratores**, **repulsores**, e **selas**.

- Se todos os autovalores de A tem a parte real negativa, o ponto de equilíbrio é chamado de atrator, sendo que neste caso o equilíbrio é assintoticamente estável. Se todos os autovalores de A são complexos, então o atrator é chamado de **foco estável**, se todos os autovalores de A são reais, o atrator é chamado de **nó estável**.
- Se todos os autovalores da matriz A tem a parte real positiva o ponto de equilíbrio é chamado de repulsor ou **fonte**. Se os autovalores são complexos, então a fonte é chamada de **foco instável** e, se todos os autovalores de A são reais, a fonte é chamada de **nó instável**.
- Quando alguns autovalores (mas não todos) têm a parte real positiva e o restante tem a parte real negativa, então o ponto de equilíbrio é chamado de sela.

Quanto à estabilidade de pontos de equilíbrio não-hiperbólicos, pode-se dizer que:

- Um ponto de equilíbrio não-hiperbólico é **instável** se um ou mais autovalores de A tem a parte real positiva.
- Se alguns autovalores da matriz A tem a parte real negativa, enquanto que os outros autovalores tem a parte real nula, o ponto de equilíbrio é chamado de **marginalmente estável**.
- Se todos os autovalores da matriz A são imaginários puros e não-nulos, o ponto de equilíbrio é chamado de **centro**.

2.3 Critério de Routh-Hurwitz

Como foi visto, a estabilidade de um ponto de equilíbrio é estabelecida pelo sinal da parte real de seus autovalores λ_j . Portanto, na determinação da estabilidade não é necessário calcular explicitamente os valores de λ_j , bastando conhecer o sinal das suas partes reais.

Num sistema linear, os autovalores da matriz A são raízes do polinômio característico que é obtido a partir de $\det(A - \lambda I) = 0$. O problema de descobrir se todas as raízes de um polinômio têm parte real negativa, sem calcular explicitamente essas raízes, foi solucionado em 1874 por E.J. Routh (1831 – 1907). Em 1895 A. Hurwitz (1859 – 1919) encontrou, independentemente, uma solução equivalente. Considere um sistema dinâmico composto por n equações diferenciais de primeira ordem. O polinômio característico de grau n deste sistema tem a forma geral

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \quad (2.6)$$

O critério de Hurwitz garante que, se todas as raízes desse polinômio têm parte real negativa, então os coeficientes a_j são positivos. Essa é uma condição necessária mas não suficiente, isto é, o fato dos coeficientes a_j serem positivos não garante que as raízes terão a parte real negativa.

As condições necessárias e suficientes para que todas as raízes do polinômio (2.6) tenham parte real negativa são dadas em termos da matriz de Hurwitz, $H_{n \times n}$, onde H é construída

de seguinte forma

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_2 & a_4 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & a_n \end{bmatrix}.$$

Observe que a diagonal principal dessa matriz contém, sem repetição, os coeficientes a_1, a_2, \dots, a_n .

O critério de Hurwitz estabelece que $\operatorname{Re}(\lambda_j) < 0$ para todo $j = 1, 2, \dots, n$ se são todos positivos os coeficientes a_j e se são positivos os determinantes Δ_j onde

$$\Delta_1 = |a_1|, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ 1 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}, \dots, \quad \Delta_n = |H|.$$

2.4 Sistemas não-lineares

Considere o sistema de equações não-lineares

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad \text{e} \quad f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))^T \quad (2.7)$$

para o qual existe um ponto de equilíbrio \bar{x} , isto é $f(\bar{x}) = 0$. Em geral, o estudo global de sistemas não lineares é muito difícil, então procuramos determinar o comportamento das soluções $x(t)$ na vizinhança de \bar{x} . Assim, podemos linearizar (2.7) em torno de \bar{x} , e deste modo estudar o sistema linear

$$\dot{\xi} = A\xi, \quad \xi \in \mathbb{R}^n$$

onde $A = [\partial f_i / \partial x_j]_{x=\bar{x}}$ é a matriz Jacobiana da função $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x))^T$ e $x = \bar{x} + \xi$, $|\xi| \ll 1$.

Se certas condições são satisfeitas, as novas variáveis ξ descrevem o comportamento das soluções de (2.7) na vizinhança de \bar{x} . Assim, o estudo da estabilidade de um ponto de equilíbrio de um sistema dinâmico não-linear reduz-se ao estudo de um sistema linear

correspondente. Alguns teoremas garantem as condições necessárias e suficientes para que os resultados da aproximação linear sejam válidos, ao menos localmente. Antes de apresentarmos esses teoremas, é necessário introduzir o conceito de equivalência topológica.

2.5 Equivalência topológica

Assuma que a função $h(x) = y$ estabeleça uma relação entre o conjunto x e o conjunto y ; isto é

$$h(x) = y \iff \begin{cases} h_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = y_1 \\ h_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = y_2 \\ \vdots \\ h_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = y_n \end{cases}$$

Suponha que h seja uma função injetora e sobrejetora. Uma função com essas propriedades é invertível, ou seja, existe a função inversa $h^{-1}(y) = x$. Se h é contínua, invertível e sua inversa h^{-1} é contínua, então h é chamada de homeomorfismo, e o domínio x e imagem y são considerados homeomorfos.

Um homeomorfismo é chamado difeomorfismo se $h(x)$ e $h^{-1}(y)$ são diferenciáveis em todos os pontos. Por exemplo, a função $y = h(x) = x^2$ não é injetora para $x \in]-\infty, +\infty[$, portanto, não representa um homeomorfismo. Entretanto, $y = h(x) = x^2$ é injetora para $x \in]0, +\infty[$ e, para esse domínio, constitui um homeomorfismo, já que é também sobrejetora e tem inversa $h^{-1}(y) = \sqrt{y}$ contínua. A função $h(x) = x^3$ é um homeomorfismo para $x \in]-\infty, +\infty[$, mas não é um difeomorfismo, pois sua inversa não é diferenciável na origem. A função $h(x) = e^x$ é injetora, mas não é sobrejetora para $x \in]-\infty, +\infty[$.

Quando os retratos de fases dos sistemas dinâmicos:

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad \text{e} \quad \frac{dy}{dt} = g(x)$$

podem ser relacionados por um homeomorfismo $h(x) = y$ que preserva o sentido do movimento (a orientação) no espaço de fases, então esses sistemas são **topologicamente orbitalmente equivalentes**. Isso significa que as trajetórias de um sistema podem ser continuamente deformadas até se tornarem iguais às trajetórias do outro sistema. Deformações contínuas envolvem esticamentos e alongamentos, mas não cortes ou emendas. Dois retratos de fases que apresentam a mesma estrutura orbital são qualitativamente equivalentes. Conseqüentemente, eles representam comportamentos dinâmicos similares.

2.6 Teoremas locais para sistemas não-lineares

2.6.1 Teorema de Hartman-Grobman

D.M. Grobman, em 1959, e P. Hartman, em 1963, provaram independentemente que, na vizinhança de um ponto de equilíbrio hiperbólico, um sistema não-linear de dimensão n apresenta um comportamento qualitativamente equivalente ao do sistema linear correspondente [14].

Portanto, o teorema de Hartman-Grobman garante que a estabilidade de um ponto de equilíbrio hiperbólico é preservada quando se lineariza o sistema em torno desse ponto, de modo que o retrato de fases, na sua vizinhança, é topologicamente orbitalmente equivalente ao retrato de fases do sistema linear associado. Dois retratos de fases são topologicamente orbitalmente equivalentes quando um é uma versão distorcida do outro. Se o ponto de equilíbrio é não-hiperbólico, ou seja, se há algum autovalor com parte real nula, então a linearização não permite prever sua estabilidade.

2.6.2 Teorema das variedades hiperbólicas

Seja um sistema de equações diferenciais não-lineares $\frac{dx}{dt} = f(x)$, com o campo vetorial f sendo de classe r (f r vezes diferenciável). Seja P^* um ponto de equilíbrio de f e considere a matriz jacobiana calculada nesse ponto, a partir da versão linear. Os autovalores correspondentes a essa matriz podem ser separados em 3 grupos: σ_e , σ_i e σ_c , dependendo do sinal da parte real desses autovalores. As letras e , i , c são, respectivamente, as iniciais de estável, instável e central. Assim

$$\lambda \in \sigma_e \quad \text{se} \quad \text{Re}(\lambda) < 0$$

$$\lambda \in \sigma_i \quad \text{se} \quad \text{Re}(\lambda) > 0$$

$$\lambda \in \sigma_c \quad \text{se} \quad \text{Re}(\lambda) = 0$$

sendo que $\lambda \in \mathbb{C}$. O sub-espço gerado pelos autovetores cujos autovalores pertencem σ_e é chamado de auto-espço estável E^e ; aquele gerado pelos autovetores cujos autovalores pertencem a σ_i é chamado de auto-espço instável E^i , e aquele correspondente a σ_c , de auto-espço central E^c . Note que esses auto-espços referem-se à versão linear do sistema de equações diferenciais.

Se há n_e autovalores com parte real negativa, n_i autovalores com parte real positiva e n_c com parte real nula, então $n_e + n_i + n_c = n$, sendo n a dimensão do sistema. Soluções pertencentes a E^e apresentam decaimento exponencial, soluções pertencentes a E^i exibem crescimento exponencial, e soluções pertencentes a E^c têm estabilidade neutra. O teorema de Hartman-Grobman é válido somente quando $n_c = 0$.

Seja um sistema dinâmico descrito por n equações diferenciais autônomas. Um conjunto S de pontos do espaço de fases n -dimensional é uma variedade invariante local se, para x_0 pertencente a esse conjunto S , a solução $x(t)$ com condição inicial x_0 está em S para $t < T$, com $T > 0$. Se isso é válido para $T \rightarrow \infty$, então S é uma variedade invariante.

O teorema das variedades hiperbólicas, provado de forma completa por A. Kelley em 1967, afirma que existe uma variedade estável W^e tangente em P^* ao auto-espaço E^e . Essa variedade é única e é de classe r . Existe também uma variedade instável W^i , única e de classe r , tangente em P^* ao auto-espaço E^i . A figura (2.1) ilustra esses resultados [14].

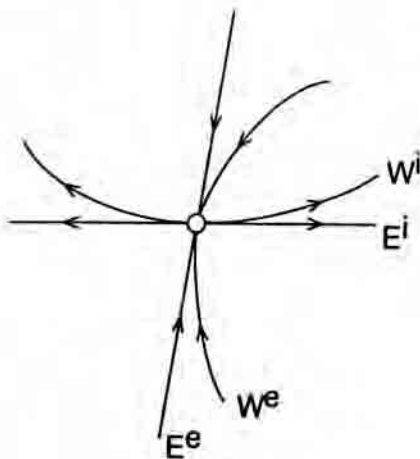


Figura 2.1: Variedades de um ponto de sela de um sistema não-linear

2.7 Teoria da variedade central

O teorema de Hartman-Grobman e o teorema das variedades hiperbólicas estabelecem que, se um ponto de equilíbrio P^* é hiperbólico, então W^e e E^e se tangenciam em P^* , assim como W^i e E^i se tangenciam em P^* e que, na vizinhança desse ponto, o sistema dinâmico não-linear e a versão linearizada são topologicamente orbitalmente equivalentes. O teorema da variedade central estende esses resultados para o caso em que o ponto de equilíbrio apresenta

algum autovalor que é nulo ou tem parte real nula. Mostra-se que o comportamento do sistema dinâmico ao redor de um ponto de equilíbrio não-hiperbólico pode ser reduzido ao estudo do comportamento ao longo de uma variedade central W^c , que é tangente ao sub-espço central E^c no ponto de equilíbrio em questão.

2.7.1 Teoremas da variedade central

Seja um sistema de equações diferenciais não-lineares $\frac{dx}{dt} = f(x)$, com o campo vetorial f sendo de classe r . Seja P^* um ponto de equilíbrio de f e considere a matriz jacobiana calculada nesse ponto, a partir da versão linear. O teorema da variedade central estabelece que se há autovalor da matriz jacobiana $\lambda \in \sigma_c$, então existe uma variedade central W^c tangente ao sub-espço E^c em P^* . Essa variedade, entretanto, é de classe $r - 1$ e não é necessariamente única. Isso dificulta a caracterização do comportamento assintótico em torno de P^* [6, 14].

2.7.2 Teoremas de Carr

Considere que um sistema dinâmico de dimensão n apresente um ponto de equilíbrio. Por conveniência, esse ponto pode ser deslocado para a origem de um novo sistema de coordenadas. A partir daí, encontram-se seus autovalores e descobre-se que o ponto é não-hiperbólico. Então, determinam-se seus autovetores e reescreve-se o sistema original de modo que a parte linear esteja na forma canônica de Jordan. Dessa maneira, o sistema original passa a ser escrito como

$$\begin{aligned} \frac{dx_j}{dt} &= \sum_{i=1}^c A_{ji}x_i + f_j(x, y) \quad j = 1, 2, \dots, c \\ \frac{dy_k}{dt} &= \sum_{i=1}^e B_{ki}y_i + g_k(x, y) \quad k = 1, 2, \dots, e \end{aligned} \quad (2.8)$$

sendo $x = (x_1, x_2, \dots, x_c)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_e)$ e $c + e = n$. Na notação vetorial, escreve-se

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Ax + f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= By + g(x, y) \end{aligned} \quad (2.9)$$

onde A_{ji} são os elementos da matriz A e B_{ki} os elementos da matriz B , e f e g são funções de classe C^2 com $f(0, 0) = g(0, 0) = 0$, $f'(0, 0) = g'(0, 0) = 0$. Além disso, suponha que todos os autovalores de B tenha a parte real negativa, e que todos os autovalores de A tenha a parte real nula.

Uma variedade invariante é definida como uma variedade central, se ela pode ser representada localmente pelas curvas contínuas e diferenciáveis $y_k = h_k(x)$ para $k = 1, 2, \dots, e$. Além disso, as funções $h_k(x)$ devem ser tais que $h_k(0) = 0$ e $(\partial h_k / \partial x_i)|_{x=0} = 0$ para todo i .

Agora, substituindo $y_k = h_k(x)$ na equação (2.8) para dx_j/dt , obtém-se

$$\frac{dx_j}{dt} = \sum_{i=1}^c A_{ji}x_i + f_j(x, h(x)) \quad j = 1, 2, \dots, c. \quad (2.10)$$

J. Carr, em 1981, provou, de maneira completa, três teoremas que possibilitam calcular uma variedade central, ao menos aproximadamente.

Teorema 2.1. *Existe uma variedade central $y = h(x)$, $|x| < \delta$, para o sistema (2.9) sendo que h é C^2*

Esse teorema estabelece a existência de uma variedade central para o sistema original (2.8).

Teorema 2.2. *[8] Se a origem $x = 0$ de (2.10) é localmente assintoticamente estável(instável), então a origem de (2.9) é localmente assintoticamente estável(instável).*

O segundo teorema prova que o sistema original (2.9) e o sistema reduzido (2.10) são equivalentes quanto ao comportamento assintótico das soluções em torno da origem. Se, em um deles, a origem é assintoticamente estável (instável), no outro, a origem também é assintoticamente estável (instável).

Isso possibilita uma redução na dimensão do sistema original, já que se descartam as e equações referentes à variedade estável. A dificuldade de se usar esse teorema é a determinação da variedade central. Agora mostraremos como $h(x)$ pode ser calculada ao menos aproximadamente.

Como $y(t) = h(x(t))$ temos que

$$Dh(x)[Ax + f(x, h(x))] = Bh(x) + g(x, h(x))$$

ou

$$\mathcal{N}(h(x)) = Dh(x)[Ax + f(x, h(x))] - Bh(x) - g(x, h(x)) = 0$$

com $h(0) = Dh(0) = 0$

Teorema 2.3. [8] Se uma função $\phi(x)$, com $\phi(0) = D\phi(0) = 0$, puder ser estabelecida tal que $\mathcal{N}(\phi(x)) = \mathbf{O}(|x|^p)$ para algum $p > 1$ quando $|x| \rightarrow 0$ então segue que

$$h(x) = \phi(x) + \mathbf{O}(|x|^p)$$

quando $|x| \rightarrow 0$.

2.8 Bifurcações em sistemas dinâmicos de tempo contínuo

O termo bifurcação, introduzido por Poincaré em 1885, refere-se a mudança qualitativa do espaço de fases de um sistema dinâmico, conforme algum parâmetro do sistema passa por um valor crítico. A idéia de bifurcação está intimamente ligada ao conceito de *estabilidade estrutural*.

Estabilidade estrutural relaciona-se com a preservação (ou não) da topologia do espaço de fases, quando as equações que originam esse espaço são perturbadas através da variação dos valores dos parâmetros das equações. Assim, um sistema dinâmico é estruturalmente estável, se ele é orbitalmente topologicamente equivalente a uma versão perturbada. Se, no entanto, ao se variar o valor do parâmetro em torno de um valor crítico ocorre uma mudança qualitativa no seu espaço de fases, então o sistema dinâmico é estruturalmente instável, para aquele valor crítico do parâmetro. Essa mudança na topologia do espaço de fases é chamada de *bifurcação*.

Bifurcações em sistemas dinâmicos podem ser classificadas como *bifurcações locais* e *bifurcações globais*.

Bifurcações locais são aquelas que podem ser previstas estudando-se o campo vetorial na vizinhança de um ponto de equilíbrio ou de uma órbita fechada. Normalmente, esse estudo é feito pelo cálculo de autovalores. Bifurcações globais são aquelas que não podem ser deduzidas a partir de uma análise local.

Apresentaremos nesta seção, apenas o teorema da bifurcação de Hopf. Para maiores detalhes sobre teoria de bifurcações, veja as referências citadas no início do capítulo. No final deste capítulo, apresentaremos um estudo sobre quebra de órbitas homoclínicas e heteroclínicas em sistemas bidimensionais, em particular o método clássico de Melnikov. Este assunto será apresentado nesta ordem em virtude de que precisamos primeiramente de conceitos de mapas de Poincaré.

2.8.1 Bifurcação de Hopf

Teorema 2.4. *Suponha que o sistema $\dot{x} = f_\mu(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\mu \in \mathbb{R}$ tenha um ponto de equilíbrio (x_0, μ_0) , no qual as seguintes propriedades são satisfeitas:*

(a) $D_x f_{\mu_0}(x_0)$ tem um par de autovalores puramente imaginários e outros com a parte real diferente de zero. Então (a) implica que existe uma curva de equilíbrio suave $(x(\mu), \mu)$ com $x(\mu_0) = x_0$. Os autovalores $\lambda(\mu)$, $\bar{\lambda}(\mu)$ de $D_x f_{\mu_0}(x(\mu))$ que são imaginários em $\mu = \mu_0$ variam suavemente com μ .

(b) Se, além disso $\frac{d}{d\mu}(Re(\lambda(\mu)))|_{\mu=\mu_0} = d \neq 0$ então existe uma única variedade central tri-dimensional passando por (x_0, μ_0) em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, e um sistema de coordenadas suave (preservando o plano $\mu = \text{const.}$) para o qual a expansão de Taylor até terceira ordem na variedade central é dada por

$$\begin{cases} \dot{u} = (d\mu + k(u^2 + v^2))u - (\omega + c\mu + b(u^2 + v^2))v + \mathbf{O}(4) \\ \dot{v} = (\omega + c\mu + b(u^2 + v^2))u + (d\mu + k(u^2 + v^2))v + \mathbf{O}(4) \end{cases}$$

Se $k \neq 0$, então existe uma superfície de soluções periódicas na variedade central a qual tem tangência quadrática com o auto-espaço de $\lambda(\mu_0)$, $\bar{\lambda}(\mu_0)$ concordando em segunda ordem com o parabolóide $\mu = -(a/b)(u^2 + v^2)$. Se $k < 0$, então estas soluções periódicas são ciclos limite estáveis (bifurcação de Hopf supercrítica), enquanto que se $k > 0$, as soluções periódicas são instáveis (bifurcação de Hopf subcrítica).

Para ver mais detalhes sobre teorema da bifurcação de Hopf consulte [8] e [12].

2.9 Mapas e seção de Poincaré

Denominamos *mapa* um sistema dinâmico que evolui no tempo de uma forma *discreta*. Seja um sistema dinâmico contínuo não-linear e o fluxo ϕ_t a ele associado. Esse fluxo pode dar origem a um mapa

$$x_{i+1} = F_\mu(x_i), \quad (2.11)$$

onde x é um vetor n -dimensional, F_μ é uma função não-linear (μ é o parâmetro de controle), e i representa os passos temporais fixos e discretos, ou passagens sucessivas por uma superfície de seção do fluxo. Se o fluxo ϕ_t é liso (r -vezes continuamente diferenciável) então F é um mapa liso com uma inversa lisa, i.e., um difeomorfismo. A órbita do mapa será então a seqüência de

pontos $(x_i)_{+\infty}^{-\infty}$ definida pela equação (2.11), que é genericamente denominada uma equação de diferenças. Equações de diferenças podem também ser lineares, e nesse caso $x_{i+1} = Bx_i$ e qualquer ponto inicial gera uma única órbita, desde que B não tenha autovalores nulos (caso degenerado).

Uma das maneiras pela qual um fluxo contínuo dá origem a um mapa discreto é pela utilização de seções de Poincaré. A seção de Poincaré é uma maneira de reduzir o estudo de um fluxo num espaço de fases com n dimensões a uma aplicação (difeomorfismo), chamada mapa de Poincaré ou mapa de retorno (“return map”), num espaço de fases com $(n - 1)$ dimensões.

Considere por exemplo a equação

$$\ddot{x} + g(x, \dot{x}) = f(t), \quad (2.12)$$

onde $f(t)$ é uma função periódica de período T . O diagrama de fases de (2.12) é tridimensional, e cada estado é representado por (x, \dot{x}, t) . Nesse caso o *mapa de Poincaré* é obtido simplesmente considerando-se a intersecção da trajetória com o plano (x, \dot{x}) (seção de Poincaré) toda vez que t for igual a um múltiplo de T .

Introduzimos agora o conceito de mapa de Poincaré. Seja o sistema dinâmico autônomo n -dimensional, com soluções periódicas

$$\dot{x} = f(x), \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (2.13)$$

onde $f(x)$ é um campo vetorial não linear. Seja x_0 uma órbita periódica (período T) associada ao fluxo $\phi(t)$ gerado por (2.13). Tomemos uma hipersuperfície $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ de dimensão $(n - 1)$ de tal maneira que o fluxo seja transversal a ela. Seja x_0^* o ponto onde a órbita x_0 intercepta Σ (fig. 2.2) e $U \subseteq \Sigma$ uma vizinhança de x_0^* . Então o mapa de Poincaré $P : U \rightarrow \Sigma$ é definido para um ponto $x'_1 \in U$ por

$$P(x'_1) = \phi(x'_1, \tau),$$

onde $\tau = \tau(x'_1)$ é o tempo necessário para que a órbita $\phi(x_1, t)$ que parte de x'_1 retorne pela primeira vez a Σ . Em geral τ depende de x'_1 , mas $\tau \rightarrow T$ quando $x'_1 \rightarrow x_0^*$. A hipersuperfície Σ é chamada *seção de Poincaré*.

Uma órbita periódica corresponde a um ponto fixo x_0^* da aplicação P , isto é,

$$P(x_0^*) = x_0^*.$$

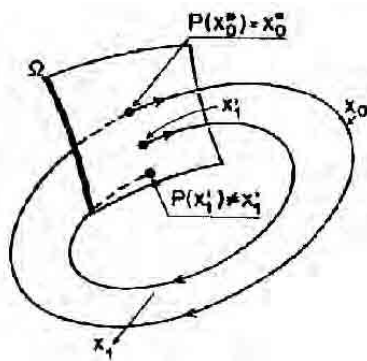


Figura 2.2: Significado geométrico da aplicação de Poincaré P : x_0 é uma órbita periódica, x_0^* é o ponto onde ela intercepta Σ ; x_1 é uma órbita não periódica que corta Σ em $P(x_1') \neq x_1'$.

Em particular, a estabilidade de x_0^* relativamente à aplicação P reflete a estabilidade da órbita periódica x_0 com relação ao fluxo $\phi(t)$. Na fig.(2.2) é representada a órbita periódica x_0 (que passa por x_0^*) e aquela não periódica x_1 . Dessa figura pode-se depreender o significado geométrico de P . P tem valores em Σ , que é $(n - 1)$ dimensional. Mas x só pode variar em Σ ; então P é um mapa $(n - 1)$ dimensional.

Na Fig.(2.3) mostra-se como fluxos em duas e três dimensões dão origem a mapas unidimensionais e bidimensionais. Definido sobre a superfície transversal ao fluxo, o mapa de Poincaré relaciona um ponto do fluxo ao seu primeiro ponto de cruzamento com essa mesma superfície. *O resultado das iterações do mapa de Poincaré é portanto a sequência de pontos nos quais o fluxo intercepta a seção de Poincaré.*

2.10 Método de Melnikov

V. K. Melnikov, em 1963, desenvolveu um método pelo qual se pode provar, analiticamente, a existência de bifurcações homoclínicas ou heteroclínicas em sistemas Hamiltonianos perturbados.

2.10.1 Caso autônomo

Considere um sistema dinâmico autônomo, do tipo

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x) + \epsilon g_1(x), \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x) + \epsilon g_2(x), \end{aligned} \tag{2.14}$$

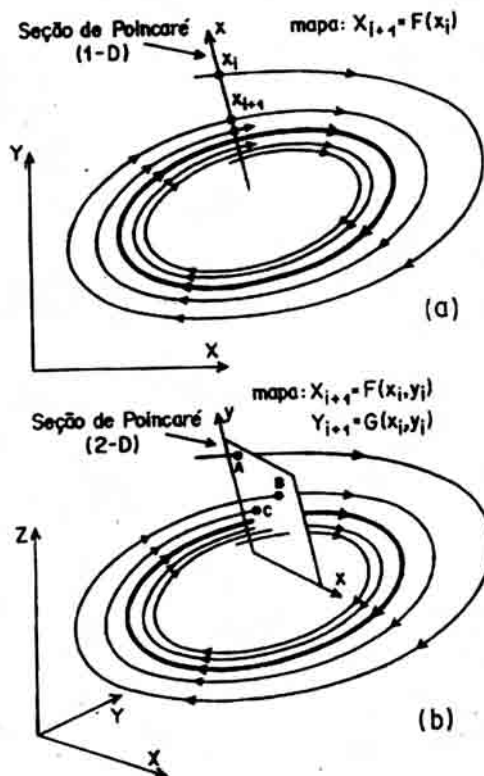


Figura 2.3: Seções de Poincaré : (a) unidimensional; (b) bidimensional

sendo $0 < \epsilon \ll 1$ um parâmetro de valor pequeno. Assuma que o campo vetorial $f \in \mathbb{R}^2$ é Hamiltoniano e que esse campo é perturbado pelo campo vetorial $g \in \mathbb{R}^2$.

Assuma que para qualquer valor de ϵ , o sistema tem um ponto de equilíbrio do tipo sela, e quando $\epsilon = 0$, o sistema (2.14) possui uma órbita homoclínica $x_0(t)$ ligando o ponto de sela a ele mesmo (o caso onde sistema possui uma órbita heteroclínica pode ser tratado de forma similar).

Melnikov provou que, para $\epsilon \neq 0$ a órbita homoclínica somente existe se a função de Melnikov

$$\bar{M} = \int_{-\infty}^{+\infty} [f_1(x)g_2(x) - f_2(x)g_1(x)]|_{x(t)=x_0(t)} dt$$

se anula para alguma combinação de parâmetros do sistema (Na literatura normalmente usa-se M para denotar a função de Melnikov. Escolhemos usar \bar{M} aqui, pois M será usado posteriormente para denotar outra função).

A função de Melnikov relaciona-se com a distância entre as variedades estável e instável de um ponto de sela do sistema perturbado, sendo que essa distância é medida em relação a um ponto P sobre a órbita homoclínica do sistema não-perturbado.

A distância d vale

$$d = \epsilon \frac{\bar{M}}{|f(P)|} + \mathbf{O}(\epsilon^2).$$

Para $\epsilon = 0$, essas variedades são tangentes. Para $\epsilon \neq 0$, as variedades somente se tangenciam se a função de Melnikov se anula para alguma combinação de valores do sistema. Além disso, se $\bar{M} \neq 0$, então a posição das variedades estável e instável em relação à órbita $x_0(t)$ do sistema não-perturbado depende do sinal de \bar{M} . Se $\bar{M} > 0$ a variedade estável está “fora” e a variedade instável está “dentro”, e se $\bar{M} < 0$ ocorre situação inversa (fig. 2.4) [14].

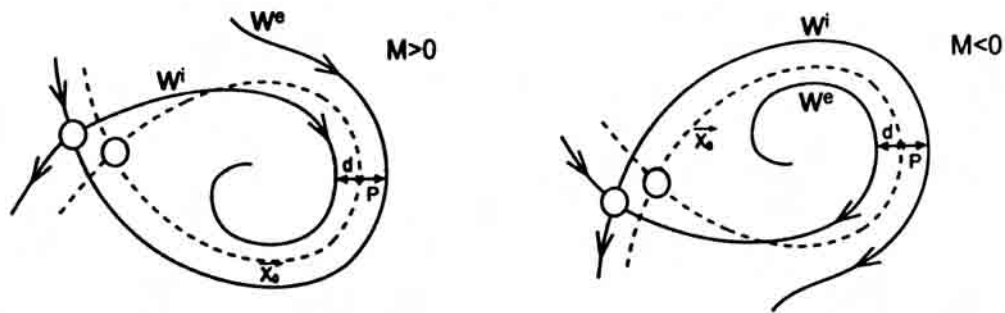


Figura 2.4: Caso $\epsilon = 0$: linha tracejada; caso $\epsilon \neq 0$: linha cheia.

2.10.2 Caso não-autônomo

A quebra de uma órbita homoclínica ou heteroclínica pode resultar em comportamento caótico.

Considere um sistema dinâmico não-autônomo, do tipo

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x) + \epsilon g_1(x, t), \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x) + \epsilon g_2(x, t), \end{aligned} \quad (2.15)$$

no qual $f = (f_1, f_2)$ é um campo Hamiltoniano e $g = (g_1, g_2)$ é um campo perturbativo periódico de período fixo T em t , e $0 < \epsilon \ll 1$. Assuma que f tem um ponto de sela com uma órbita homoclínica associada. Equivalentemente, se $\epsilon \neq 0$ podemos escrever o sistema (2.15) na forma estendida

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(x) + \epsilon g_1(x, \phi), \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(x) + \epsilon g_2(x, \phi), \\ \frac{d\phi}{dt} &= 1. \end{aligned}$$

Assim, no espaço de fase estendido, pode-se analisar o sistema numa secção de Poincaré definida por $\phi = \phi_0$ com $0 \leq \phi_0 < T$. Constrói-se o mapa de Poincaré tomando $x_1(0)$, $x_2(0)$, ϕ_0 como condições iniciais e integrando o sistema de $t = \phi_0$ e $t = \phi_0 + T$.

Para $\epsilon = 0$, as variedades estável e instável do ponto de sela são tangentes. Para $\epsilon \neq 0$, no caso autônomo essas variedades ou são tangentes ou não se tocam. Para $\epsilon \neq 0$, no caso não-autônomo, essas variedades podem se interseccionar transversalmente. Ao estudar o problema da estabilidade do sistema solar, Poincaré percebeu que se elas se interseccionam de maneira não-tangente, então o número dessas intersecções é infinito. A figura (2.5) mostra como essas intersecções ocorrem, e a figura resultante é chamada de **emaranhado homoclínico**. A existência de emaranhado implica caos.



Figura 2.5: Emaranhado homoclínico

Em 1892, 1893 e 1899, foram publicados os 3 volumes do livro *Les Methodes Nouvelles de la Mecanique Celeste* (“Os Novos Métodos da Mecânica Celeste”) de Poincaré. No terceiro livro ele escreveu que não se atreveria a desenhar figura de tal complexidade. Em [1] encontra-se uma citação de Poincaré da obra de sua autoria citada acima no que se refere aos emaranhados homoclínicos. Segue na íntegra:

Que se procure representar tal figura formada por estas duas curvas e suas infinitas intersecções, onde cada uma corresponde a uma solução duplamente assintótica, suas intersecções formando um tipo de trelissa, de tecido, uma rede de malhas infinitamente apertadas; cada uma das curvas não deve jamais se auto-recortar, mas elas têm de dobrar sobre si mesmas de uma maneira muito complexa para voltar a cortar um número infinito de vezes a malha da rede.

A complexidade dessa figura é tão atordoante que eu nem mesmo procuro traça-la. Nada é mais apropriado a nos dar uma idéia da complicação do problema de três corpos e em geral

de todos os problemas da Dinâmica em que não há uma integral uniforme...

O primeiro esboço do emaranhado homoclínico é atribuído a Birkhoff, realizado por volta de 1930.

De acordo com Melnikov, em primeira aproximação em potências de ϵ , a distância entre as variedades estável e instável, associadas ao ponto de sela para o caso $\epsilon \neq 0$, é proporcional à função de Melnikov definida como

$$\bar{M}(\phi_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} [f_1(x)g_2(x, t + \phi_0) - f_2(x)g_1(x, t + \phi_0)]|_{x(t)=x_0(t)} dt$$

onde nota-se agora a dependência da seção de Poincaré. Em sistemas autônomos, todas as seções de Poincaré são idênticas, já que tais sistemas não dependem exclusivamente do tempo.

Seja uma seção de Poincaré particular $\phi_0 = \phi_{01}$. Se para $\bar{M}(\phi_0) = 0$, tem-se $\frac{d\bar{M}(\phi_0)}{d(\phi_0)}|_{\phi_0=\phi_{01}} \neq 0$, então as variedades estável e instável do sistema perturbado se interseccionam transversalmente na seção de Poincaré.

Suponha que para alguma combinação de valores dos parâmetros, as variedades estável e instável se interceptam transversalmente. Como são variedades invariantes, um ponto que pertence a essas curvas deve permanecer nelas indefinidamente. Se o ponto de intersecção não é um ponto de equilíbrio, então a ocorrência de uma intersecção entre as variedades implica a ocorrência de infinitas intersecções. Portanto, se a função \bar{M} se anula numa seção de Poincaré, então essa função tem que se anular em infinitos pontos. Cada um desses pontos é chamado de *ponto homoclínico transversal* [14].

2.11 O mapa de ferradura de Smale

O mapa de ferradura foi concebido por Smale por volta de 1960. Esse mapa¹ consiste em considerar uma aplicação f sobre um quadrado unitário $D \in \mathbb{R}^2$, tal que

$$f : D \rightarrow \mathbb{R}^2$$

onde

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq 1\}.$$

¹Nesta seção consideraremos apenas mapa de ferradura bi-dimensional. Uma versão tri-dimensional pode ser encontrada em [18, 19]

Assumimos que f^{-1} contrai-se na direção horizontal x por um fator menor que $1/2$ e estica-se na direção vertical por um fator maior que 2 e depois dobra. O mapa é definido apenas no quadrado unitário: pontos que abandonam o quadrado são ignorados.

Em particular, considere as faixas horizontais

$$H_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq \frac{1}{\mu}\},$$

$$H_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \text{ e } 1 - \frac{1}{\mu} \leq y \leq 1\},$$

onde μ é uma constante maior que 2 .

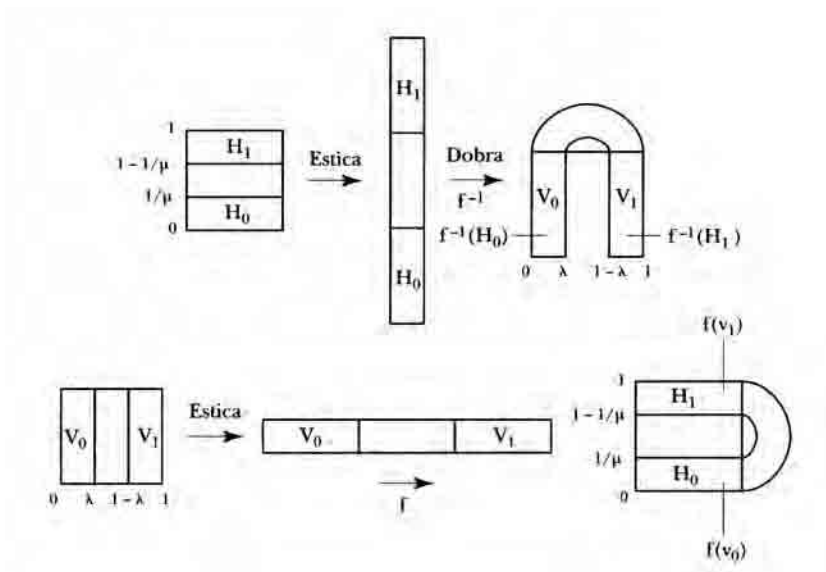


Figura 2.6: Esquema do mapa de ferradura

O mapa de ferradura é definido por

$$f^{-1}(H_0) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

$$f^{-1}(H_1) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & -\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ \mu \end{pmatrix},$$

onde $0 < \lambda < \frac{1}{2}$.

Deste modo, f^{-1} leva as faixas horizontais H_0 e H_1 nas faixas verticais V_0 e V_1 por

$$f^{-1}(H_0) = V_0 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq \lambda, 0 \leq y \leq 1\} \text{ e}$$

$$f^{-1}(H_1) = V_1 = \{(x, y) \mid 1 - \lambda \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}.$$

O mapa f^{-1} e o inverso f estão esquematizados na figura (2.6)

O conjunto invariante Λ do mapa é a coleção de pontos que permanecem em D após todas as iterações de f :

$$\Lambda = \cdots f^{-2}(D) \cap f^{-1}(D) \cap D \cap f(D) \cap f^2(D) \cap \cdots = \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} f^n(D).$$

Esse conjunto consiste de uma intersecção infinita de retângulos horizontais e verticais. A primeira interação de f^{-1} produz dois retângulos V_0 e V_1 , V_0 à esquerda e V_1 à direita. Os retângulos V_0 e V_1 geram quatro retângulos V_{00} , V_{01} , V_{11} e V_{10} , conforme a figura (2.7). Em geral a n -ésima iteração produz 2^n retângulos, de largura λ^n e altura 1. Os iterados por f produzem 2^n faixas horizontais após a n -ésima iteração. Smale provou que o conjunto

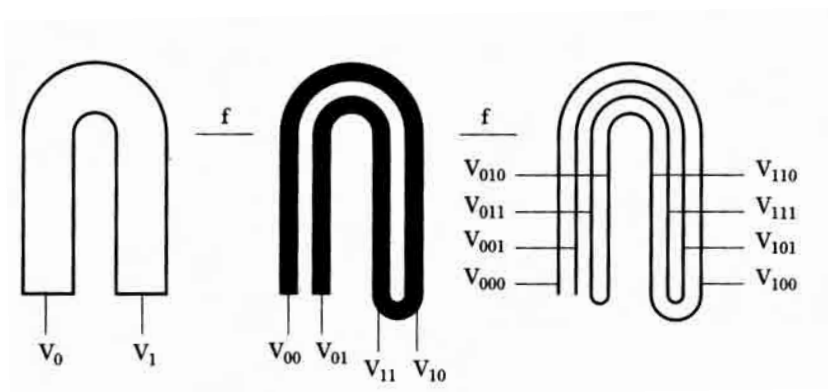


Figura 2.7: Iterações de f^{-1} sobre o quadrado D

dos pontos Λ que permanecem no quadrado D após a ação de f^n e f^{-n} para $n \rightarrow \infty$, isto é, a intersecção das 2^n faixas verticais e 2^n faixas horizontais sobre o quadrado D para $n \rightarrow \infty$, é um conjunto do tipo Cantor [11]. Uma questão interessante é qual a importância do mapa de ferradura de Smale? A resposta vem do *teorema homoclínico de Smale-Birkhoff*, o qual estabelece que a dinâmica na vizinhança de um ponto homoclínico transversal de um difeomorfismo é similar à dinâmica do mapa de ferradura, baseada em esticamentos e dobras.

2.12 Teorema de Bezout

Teorema 2.5. *Duas curvas planas de ordem m e n sem componentes em comum tem exatamente $m.n$ intersecções.*

Capítulo 3

O Sistema Mecânico e Algumas Simulações Numéricas.

O objetivo deste capítulo é apresentar o sistema vibrante, bem como suas equações de movimento e por fim apresentar algumas simulações computacionais. Além disso, apresentaremos as equações de movimento de duas formas. Uma usando as equações de Lagrange, e outra usando o formalismo de Hamilton.

3.1 O Vibrador Centrífugo

Considere um sistema vibrante com dois graus de liberdade composto por um motor DC de massa m_0 com potência limitada, e uma mola com não linearidade cúbica que sustenta o motor. Além disso, esse sistema é excitado por uma pequena massa m desbalanceada, acoplada à parte giratória do motor a uma distância r do eixo de rotação. Devido às características desse sistema, temos influência recíproca no comportamento da mola e do motor, e assim temos um sistema dinâmico não ideal ou simplesmente um problema não ideal. Este sistema mecânico é conhecido como vibrador centrífugo e está mostrado na figura (3.1).

Denotemos por x o deslocamento vertical do motor e por φ o deslocamento angular da pequena massa m .

Neste trabalho assumimos que o motor não tenha movimentos laterais, então se introduzirmos as coordenadas x_1 e z_1 como sendo as posições vertical e horizontal da massa m temos as relações

$$x_1 = x + r \cos \varphi \text{ e } z_1 = r \sin \varphi. \quad (3.1)$$

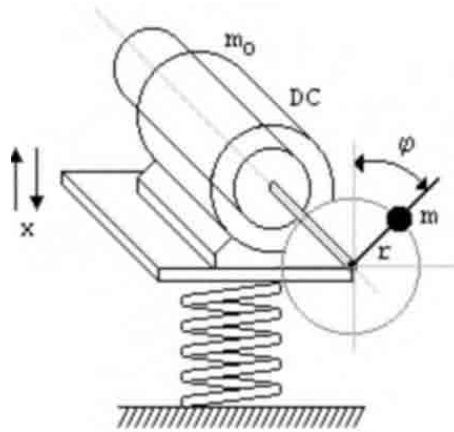


Figura 3.1: Vibrador centrífugo

Usando-se as relações (3.1) obtemos as velocidades generalizadas dadas na forma

$$\dot{x}_1 = \dot{x} - r\dot{\varphi}\sin\varphi \text{ e } \dot{z}_1 = r\dot{\varphi}\cos\varphi. \quad (3.2)$$

Em termos das coordenadas generalizadas, podemos escrever a energia cinética desse sistema na forma

$$T = \frac{1}{2} [m_0\dot{x}^2 + m(\dot{x}_1^2 + \dot{z}_1^2) + J\dot{\varphi}^2], \quad (3.3)$$

onde J é o momento de inércia da parte giratória do motor.

Assim, substituindo as velocidades dadas pelas eqs.(3.2) na eq.(3.3), reescrevemos a energia cinética T em termos do raio r e das variáveis x e φ , ou seja

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \{m_0\dot{x}^2 + m[(\dot{x} - r\dot{\varphi}\sin\varphi)^2 + (r\dot{\varphi}\cos\varphi)^2] + J\dot{\varphi}^2\} \\ &= \frac{1}{2} \{m_1\dot{x}^2 + m(-2\dot{x}r\dot{\varphi}\sin\varphi + r^2\dot{\varphi}^2) + J\dot{\varphi}^2\} \end{aligned}$$

onde $m_1 = m_0 + m$ é a massa do sistema.

A energia potencial do sistema é dada por $V = U - Wc$, onde $U = \frac{1}{2}cx^2 + \frac{1}{4}dx^4$ é a energia de deformação da mola, e $Wc = -mgr\cos\varphi$ denota o trabalho das forças conservativas (peso). O termo $\frac{1}{4}dx^4$ que aparece em U determina uma característica de não linearidade da mola do tipo Duffing, e a constante g em V denota a aceleração da gravidade. Assim a energia potencial V é escrita como

$$V = \frac{1}{2}cx^2 + \frac{1}{4}dx^4 + mgr\cos\varphi.$$

Portanto, depois de obtidas as energias cinética T e potencial V , e usando o formalismo de Lagrange podemos escrever a Lagrangeana L como sendo

$$L = \frac{1}{2} \{m_1\dot{x}^2 + m(-2\dot{x}r\dot{\varphi}\sin\varphi + r^2\dot{\varphi}^2) + J\dot{\varphi}^2\} - \frac{1}{2}cx^2 - \frac{1}{4}dx^4 - mgr\cos\varphi. \quad (3.4)$$

Assim, as equações de movimento de Lagrange (ver [7] ou [13]) ficam

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = -\beta \dot{x}, \quad (3.5)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = M(\dot{\varphi}), \quad (3.6)$$

onde $\beta \dot{x}$ é uma força linear de resistência ao movimento oscilatório, e $M(\dot{\varphi})$ é uma função que define as características do torque resultante gerado pelo motor.

Substituindo a Lagrangeana dada pela eq.(3.4) nas derivadas parciais $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}$, $\frac{\partial L}{\partial x}$, $\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}$ e $\frac{\partial L}{\partial \varphi}$ das eqs.(3.5) e (3.6) obtemos

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m_1 \dot{x} - mr \dot{\varphi} \sin \varphi,$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -cx - dx^3,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = -m \dot{x} r \sin \varphi + (J + mr^2) \dot{\varphi},$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = \frac{1}{2} (-2m \dot{x} r \dot{\varphi} \cos \varphi) + mgr \cos \varphi.$$

Agora, levando estes resultados nas eqs.(3.5) e (3.6), podemos escrever as equações do sistema vibrante na forma

$$m_1 \ddot{x} + \beta \dot{x} + cx + dx^3 = mr \dot{\varphi}^2 \cos \varphi + mr \ddot{\varphi} \sin \varphi, \quad (3.7)$$

$$I \ddot{\varphi} = M(\dot{\varphi}) + mr \ddot{x} \sin \varphi + mgr \sin \varphi, \quad (3.8)$$

onde $mr \dot{\varphi}^2 \cos \varphi$, $mr \ddot{\varphi} \sin \varphi$ e $mr \ddot{x} \sin \varphi$ representam os termos de acoplamento da parte vibratória do sistema com a fonte de energia (motor DC).

As constantes c e d que aparecem na eq.(3.7) são respectivamente os coeficientes de elasticidade linear e não linear da mola. Além disso, denotamos por J o momento de inércia do rotor e mr^2 é o momento de inércia da massa m em rotação. Conseqüentemente o momento de inércia total do sistema é dado por $I = J + mr^2$. Assumimos neste capítulo e no capítulo 4 que todas as constantes que aparecem nas eqs. (3.7) e (3.8) são tomadas estritamente positivas.

3.2 Ponto de Equilíbrio do Sistema

Nesta seção obteremos os pontos de equilíbrio do sistema de eqs.(3.7) e (3.8), reescrevendo-o como um conjunto de quatro equações de primeira ordem. Para isso, introduzindo a mudança de variável $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)^T$ com $y_1 = x$, $y_2 = \dot{x}$, $y_3 = \varphi$, $y_4 = \dot{\varphi}$, as eqs.(3.7) e (3.8) se escrevem

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2, \\ \dot{y}_2 - a_4(\text{sen}y_3)\dot{y}_4 &= a_1y_1 + a_2y_2 + a_3y_1^3 + a_4y_4^2 \cos y_3, \\ \dot{y}_3 &= y_4, \\ \dot{y}_4 - a_5(\text{sen}y_3)\dot{y}_2 &= \frac{M(y_4)}{I} + a_6(\text{sen}y_3), \end{aligned} \quad (3.9)$$

onde $a_1 = \frac{-c}{m_1}$, $a_2 = \frac{-\beta}{m_1}$, $a_3 = \frac{-d}{m_1}$, $a_4 = \frac{mr}{m_1}$, $a_5 = \frac{mr}{I}$ e $a_6 = \frac{mgr}{I}$.

Podemos então reescrever a eq.(3.9) na forma matricial $A_0\dot{\mathbf{y}} = f(\mathbf{y})$ onde

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -a_4(\text{sen}y_3) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -a_5(\text{sen}y_3) & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

e

$$f(\mathbf{y}) = \begin{bmatrix} y_2 \\ a_1y_1 + a_2y_2 + a_3y_1^3 + a_4y_4^2 \cos y_3 \\ y_4 \\ \frac{M(y_4)}{I} + a_6(\text{sen}y_3) \end{bmatrix}.$$

Agora, obtendo a matriz inversa de A_0 , escrevemos as equações do sistema vibrante, eqs.(3.7 e 3.8), como um conjunto de equações de primeira ordem na forma matricial

$$\dot{\mathbf{y}} = A_0^{-1}f(\mathbf{y}), \quad (3.10)$$

sendo

$$A_0^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & 0 & \alpha_1 a_4(\text{sen}y_3) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha_1 a_5(\text{sen}y_3) & 0 & \alpha_1 \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad \alpha_1 = \frac{1}{1 - a_4 a_5 \text{sen}^2 y_3}.$$

Note que $a_4 a_5 = \frac{m^2 r^2}{m_1(J+mr^2)} < \frac{m^2 r^2}{m_1 m r^2} = \frac{m}{m_1} < 1$, então temos que $1 - a_4 a_5 \text{sen}^2 y_3 \neq 0$ para qualquer $y_3 \in \mathbb{R}$, e desta forma A_0^{-1} é uma matriz com coeficientes bem definidos para todo y_3 .

Finalmente reescrevemos a eq.(3.10) na forma

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \\ \dot{y}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ f_1(y_1, y_2, y_3, y_4) \\ y_4 \\ f_2(y_1, y_2, y_3, y_4) \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

onde

$$\begin{aligned} f_1 &= \alpha_1 K_1 + K_2 K_3, & f_2 &= K_4 K_1 + \alpha_1 K_3, & K_1 &= a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_1^3 + a_4 y_4^2 \cos y_3 \\ K_2 &= \alpha_1 a_4 \text{sen} y_3, & K_3 &= \frac{M(y_4)}{I} + a_6 \text{sen} y_3 & \text{e} & K_4 = \alpha_1 a_5 \text{sen} y_3 \end{aligned}$$

Procuramos agora, os pontos de equilíbrio da equação acima, isto é, os pontos $\mathbf{y}^* = (y_1^*, y_2^*, y_3^*, y_4^*)$ que representam as soluções estacionárias $\frac{d\mathbf{y}}{dt} = 0$. Dessa forma temos

$$\begin{aligned} 0 &= y_2, \\ 0 &= \alpha_1(a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_1^3 + a_4 y_4^2 \cos y_3) \\ &\quad + \alpha_1 a_4 \text{sen} y_3 \left(\frac{M(y_4)}{I} + a_6 \text{sen} y_3 \right), \\ 0 &= y_4, \\ 0 &= \alpha_1 a_5 \text{sen} y_3 (a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_1^3 + a_4 y_4^2 \cos y_3) \\ &\quad + \alpha_1 \left(\frac{M(y_4)}{I} + a_6 \text{sen} y_3 \right) \end{aligned}$$

e o ponto de equilíbrio é dado por

$$\begin{cases} y_1 = 0, \\ y_2 = 0, \\ \text{sen} y_3 = \text{sen} \varphi_0 = -\frac{M(0)}{mgr}, \\ y_4 = 0. \end{cases} \quad (3.12)$$

Note que esse ponto de equilíbrio somente existe se o torque inicial $M(0)$ satisfaz a desigualdade $|M(0)| \leq mgr$. Em análise de estabilidade de pontos de equilíbrio faz-se constantemente o uso de transformação de coordenadas a fim de transladar os pontos de equilíbrio para a origem. Com esse objetivo fazemos a transformação de variável $y_3 \rightarrow y_3 + \varphi_0$, e a eq.

(3.11) é reescrita como

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \\ \dot{y}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ g_1(y_1, y_2, y_3, y_4) \\ y_4 \\ g_2(y_1, y_2, y_3, y_4) \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

onde

$$\begin{aligned} g_1 &= \alpha_2 V_1 + V_2 V_3, & g_2 &= V_4 V_1 + \alpha_2 V_3, & V_1 &= a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_1^3 + a_4 y_4^2 \cos(y_3 + \varphi_0), \\ V_2 &= \alpha_2 a_4 \sin(y_3 + \varphi_0), & V_3 &= \frac{M(y_4)}{I} + a_6 \sin(y_3 + \varphi_0) \\ V_4 &= \alpha_2 a_5 \sin(y_3 + \varphi_0) & \text{e } \alpha_2 &= \frac{1}{1 - a_4 a_5 \sin^2(y_3 + \varphi_0)}. \end{aligned}$$

Agora, este sistema possui um único ponto de equilíbrio $(y_1, y_2, y_3, y_4) = (0, 0, 0, 0)$. O estudo analítico de sistemas dinâmicos não lineares é bastante complexo, e portanto limitamos a análise dos mesmos na vizinhança dos pontos de equilíbrio utilizando os sistema linear associado. Assim, expandindo a eq.(3.13) em série de Taylor em torno de $(0, 0, 0, 0)$ obtemos

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \dot{y}_3 \\ \dot{y}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ b_5 & b_6 & b_7 & b_8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} + \mathbf{O}(2), \quad (3.14)$$

onde

$$\begin{aligned} b_1 &= \kappa a_1, & b_2 &= \kappa a_2, & b_3 &= \kappa a_4 a_6 \sin \varphi_0 \cos \varphi_0, & b_4 &= \kappa \frac{a_4 \sin \varphi_0 M'(0)}{I}, \\ b_5 &= \kappa a_1 a_5 \sin \varphi_0, & b_6 &= \kappa a_2 a_5 \sin \varphi_0, & b_7 &= \kappa a_6 \cos \varphi_0, & b_8 &= \kappa \frac{M'(0)}{I}, \\ \kappa &= \frac{1}{1 - a_4 a_5 \sin^2 \varphi_0} \text{ e } \mathbf{O}(2) \text{ representam os termos de grau maior ou igual a 2.} \end{aligned}$$

Temos que o polinômio característico associado à parte linear de (3.14) tem a forma

$$\begin{aligned} p(X) &= \frac{1}{1 - a_4 a_5 \sin^2 \varphi_0} \left((1 - a_4 a_5 \sin^2 \varphi_0) X^4 + \left(-\frac{M'(0)}{I} - a_2 \right) X^3 \right. \\ &+ \left. \left(a_2 \frac{M'(0)}{I} - a_6 \cos \varphi_0 - a_1 \right) X^2 + \left(a_2 a_6 \cos \varphi_0 + a_1 \frac{M'(0)}{I} \right) X \right. \\ &+ \left. a_1 a_6 \cos \varphi_0 \right). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Sabe-se que a estabilidade de um ponto de equilíbrio é estabelecida pelo sinal da parte real dos autovalores da matriz jacobiana associada ao sistema. No entanto, para se determinar a estabilidade de um ponto de equilíbrio não é necessário calcular explicitamente os valores da parte real dos autovalores, mas apenas conhecer o sinal de suas partes reais. O critério

estabelecido por Routh-Hurwitz (ver capítulo 2), estabelece as condições necessárias para que todos os zeros do polinômio característico associado à matriz jacobiana do sistema linearizado tenham a parte real negativa. Da eq.(3.15) temos que $p(0) = \kappa a_1 a_6 \cos \varphi_0$ é positivo se $\cos \varphi_0 < 0$, então não consideraremos o caso $\cos \varphi_0 > 0$, pois isso torna o sistema dinâmico instável.

3.3 Equações de Movimento Usando a Formulação de Hamilton

Nesta seção escreveremos as equações de movimento usando o formalismo Hamiltoniano. Não faremos nenhuma análise sobre estas equações neste capítulo, mas o estudo destas equações será realizado no capítulo 5.

Considere então os momentos P_x e P_φ os quais são definidos em termos das velocidades \dot{x} e $\dot{\varphi}$ pelas relações

$$P_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \quad \text{e} \quad P_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \quad (3.16)$$

onde $L = L(x, \dot{x}, \varphi, \dot{\varphi})$ é Lagrangeana do sistema dada por (3.4). Assumindo que $r = 1$ em (3.7) e (3.8) a função Hamiltoniana (ver [7] ou [13]) do sistema vibrante se escreve como sendo

$$\begin{aligned} H(x, \varphi, P_x, P_\varphi) &= \dot{x}P_x + \dot{\varphi}P_\varphi - \frac{1}{2}(m_1\dot{x}^2 - 2m\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi + I_1\dot{\varphi}^2) \\ &+ \frac{1}{2}cx^2 + \frac{1}{4}dx^4 + mg \cos \varphi, \\ &= \dot{x}P_x + \dot{\varphi}P_\varphi - \frac{1}{2}\dot{x}(m_1\dot{x} - m\dot{\varphi}\sin\varphi) - \frac{1}{2}\dot{\varphi}(I_1\dot{\varphi} - m\dot{x}\sin\varphi) \\ &+ \frac{1}{2}cx^2 + \frac{1}{4}dx^4 + mg \cos \varphi, \end{aligned} \quad (3.17)$$

onde I_1 é o momento de inércia do sistema motor-massa quando $r = 1$ (raio de giração da massa excêntrica).

Usando as definições de momento e a Lagrangeana dadas respectivamente pelas eqs. (3.16) e (3.4) obtemos

$$P_x = m_1\dot{x} - m\dot{\varphi}\sin\varphi \quad \text{e} \quad P_\varphi = I_1\dot{\varphi} - m\dot{x}\sin\varphi. \quad (3.18)$$

Substituindo (3.18) na eq. (3.17) obtemos

$$H(x, \varphi, P_x, P_\varphi) = \frac{\dot{x}P_x + \dot{\varphi}P_\varphi}{2} + \frac{1}{2}cx^2 + \frac{1}{4}dx^4 + mg \cos \varphi. \quad (3.19)$$

Agora, isolando \dot{x} e $\dot{\varphi}$ em (3.18) obtemos

$$\dot{x} = \frac{(m_1 I_1 - m^2 \text{sen}^2 \varphi) P_x + m \text{sen} \varphi (m_1 P_\varphi + m P_x \text{sen} \varphi)}{m_1 (m_1 I_1 - m^2 \text{sen}^2 \varphi)}, \quad (3.20)$$

$$\dot{\varphi} = \frac{m_1 P_\varphi + m P_x \text{sen} \varphi}{m_1 I_1 - m^2 \text{sen}^2 \varphi}. \quad (3.21)$$

Assim, substituindo as eqs.(3.20) e (3.21) na Hamiltoniana (3.19) obtemos

$$\begin{aligned} H(x, \varphi, P_x, P_\varphi) &= \frac{I_1 P_x^2 + 2m(\text{sen} \varphi) P_x P_\varphi + m_1 P_\varphi^2}{2(m_1 I_1 - m^2 \text{sen}^2 \varphi)} + \frac{1}{2} c x^2 + \frac{1}{4} d x^4 \\ &+ mg \cos \varphi. \end{aligned} \quad (3.22)$$

A fim de obter as equações de Hamilton para este problema, consideramos a função Hamiltoniana $H(x, \varphi, P_x, P_\varphi) = P_x \dot{x} + P_\varphi \dot{\varphi} - L(x, \dot{x}, \varphi, \dot{\varphi})$ e assim, diferenciando-a obtemos

$$dH = \frac{\partial H}{\partial P_x} dP_x + \frac{\partial H}{\partial P_\varphi} dP_\varphi + \frac{\partial H}{\partial x} dx + \frac{\partial H}{\partial \varphi} d\varphi, \quad (3.23)$$

$$dH = (dP_x) \dot{x} + P_x (d\dot{x}) + (dP_\varphi) \dot{\varphi} + P_\varphi (d\dot{\varphi}) - dL, \quad (3.24)$$

onde

$$dL = \frac{\partial L}{\partial x} dx + \frac{\partial L}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} d\dot{x} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} d\dot{\varphi}. \quad (3.25)$$

Além disso, usando as equações na forma de Lagrange dadas pelas eqs. (3.5) e (3.6) temos

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \dot{P}_x + \beta \dot{x} \quad \text{e} \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = \dot{P}_\varphi - M(\dot{\varphi}) \quad (3.26)$$

onde

$$\dot{P}_x = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \quad \text{e} \quad \dot{P}_\varphi = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right).$$

Deste modo, comparando as equações (3.23) e (3.24) e usando conjuntamente as equações (3.25) e (3.26) obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial P_x} dP_x + \frac{\partial H}{\partial P_\varphi} dP_\varphi + \frac{\partial H}{\partial x} dx + \frac{\partial H}{\partial \varphi} d\varphi &= (dP_x) \dot{x} + P_x (d\dot{x}) + (dP_\varphi) \dot{\varphi} + P_\varphi (d\dot{\varphi}) \\ - (\dot{P}_x + \beta \dot{x}) dx - (\dot{P}_\varphi - M(\dot{\varphi})) d\varphi - P_x (d\dot{x}) - P_\varphi (d\dot{\varphi}). \end{aligned}$$

Rearranjando os termos da equação anterior adequadamente obtemos

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial H}{\partial P_x} - \dot{x} \right) dP_x + \left(\frac{\partial H}{\partial P_\varphi} - \dot{\varphi} \right) dP_\varphi + \left(\frac{\partial H}{\partial x} + \dot{P}_x + \beta \dot{x} \right) dx \\ + \left(\frac{\partial H}{\partial \varphi} + \dot{P}_\varphi - M(\dot{\varphi}) \right) d\varphi = 0. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Portanto, da equação (3.27) obtemos

$$\begin{cases} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial P_x}, \\ \dot{P}_x &= -\frac{\partial H}{\partial x} - \beta \frac{\partial H}{\partial P_x}, \\ \dot{\varphi} &= \frac{\partial H}{\partial P_\varphi}, \\ \dot{P}_\varphi &= -\frac{\partial H}{\partial \varphi} + M \left(\frac{\partial H}{\partial P_\varphi} \right), \end{cases} \quad (3.28)$$

que são as equações Hamiltonianas de movimento do sistema vibrante (vibrador centrífugo), sendo a Hamiltoniana H dada por (3.22).

3.4 Resultados Numéricos: Pontos de equilíbrio

Nesta seção simularemos as equações de movimento (3.11) adotando os seguintes valores para os parâmetros físicos que aparecem no sistema

- massa do motor: $m_0 = 1,8kg$;
- coeficiente de elasticidade linear da mola: $c = 0,3N/m$;
- coeficiente de elasticidade não-linear da mola: $d = 0,06N/m^3$;
- coeficiente de amortecimento: $\beta = 0,2Ns/m$;
- momento de inércia do rotor: $J = 0,001Kgm^2$;
- excentricidade da massa: $r = 0,5m$;
- massa excêntrica: $m = 0,2kg$;
- aceleração da gravidade: $g = 9,80665m/s^2$.

Para simular estas equações, adotamos primeiramente curvas características do tipo linear ($M(y_4) = A - By_4$), e posteriormente do tipo exponencial ($M(y_4) = Ae^{-By_4}$), onde A e B são constantes positivas. Da análise do ponto de equilíbrio e das características das curvas temos que $\varphi_0 \in [\pi, 2\pi]$. Além disso, no estudo sobre a estabilidade do ponto de equilíbrio, conclui-se que o ponto é estável para $\cos \varphi_0 < 0$. Como o ponto de equilíbrio (3.12) depende de $M(0) = A$, fixando os valores para as constantes que definem as características das curvas, obtemos um conjunto de valores de equilíbrio estáveis (tab.3.1).

Para $M(0) = 0.01$ o sistema apresenta um ponto de equilíbrio estável mostrado na tabela 3.1 e os comportamentos de y_1 (oscilação da mola), y_2 (velocidade de oscilação da mola), y_3 (deslocamento angular da massa m) e y_4 (velocidade angular da massa m) estão mostrados nas figuras (3.2) a (3.4). Na figura (3.2), o modelo de torque $M(y_4)$ é o linear, e apesar de

Tabela 3.1: Pontos de equilíbrio

A	B	y_1	y_2	y_3	y_4
0.01	0.05	0	0	3.151789992	0
0.1	0.05	0	0	3.243741827	0
0.2	0.05	0	0	3.346976795	0
0.3	0.05	0	0	3.452491867	0

adotarmos a condição inicial $(y_1, y_2, y_3, y_4) = (0, 0, 0.001, 0)$ a trajetória é estável. Quando o modelo de torque é o não linear, a trajetória correspondente a essa condição inicial é instável fig.(3.4). Uma trajetória estável só é possível adotando-se uma condição inicial mais próxima do ponto de equilíbrio, como mostra a figura (3.3), onde a condição inicial é $(0, 0, 3.001, 0)$. Uma conclusão imediata dessa simulação é que a bacia de atração do torque não linear é menor que a bacia de atração do torque linear.

Nas figuras (3.5) a (3.7) são omitidos os gráficos de y_1 , y_2 e y_4 , e mostramos apenas o comportamento do deslocamento angular da massa m para $A = 0.1, 0.2$ e 0.3 . Para estes valores de A , as trajetória resultantes são estáveis para o torque linear e não linear.

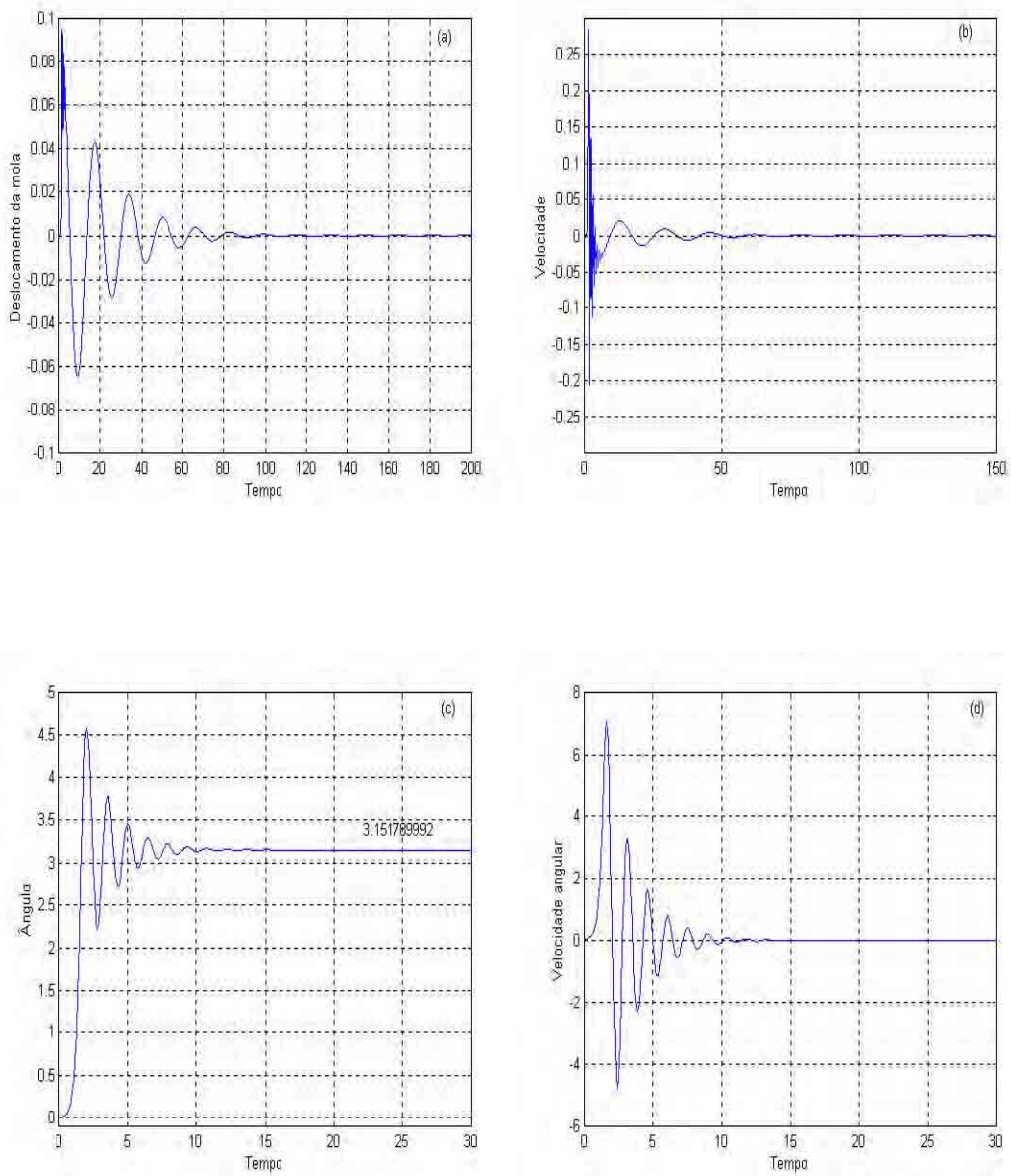


Figura 3.2: Modelo de torque linear com $A= 0.01$ e condições inicial $(y_1, y_2, y_3, y_4) = (0, 0, 0.001, 0)$.
 (a) Oscilação da mola; (b) velocidade de vibração da mola; (c) ângulo da massa m ; (d) velocidade angular da massa m .

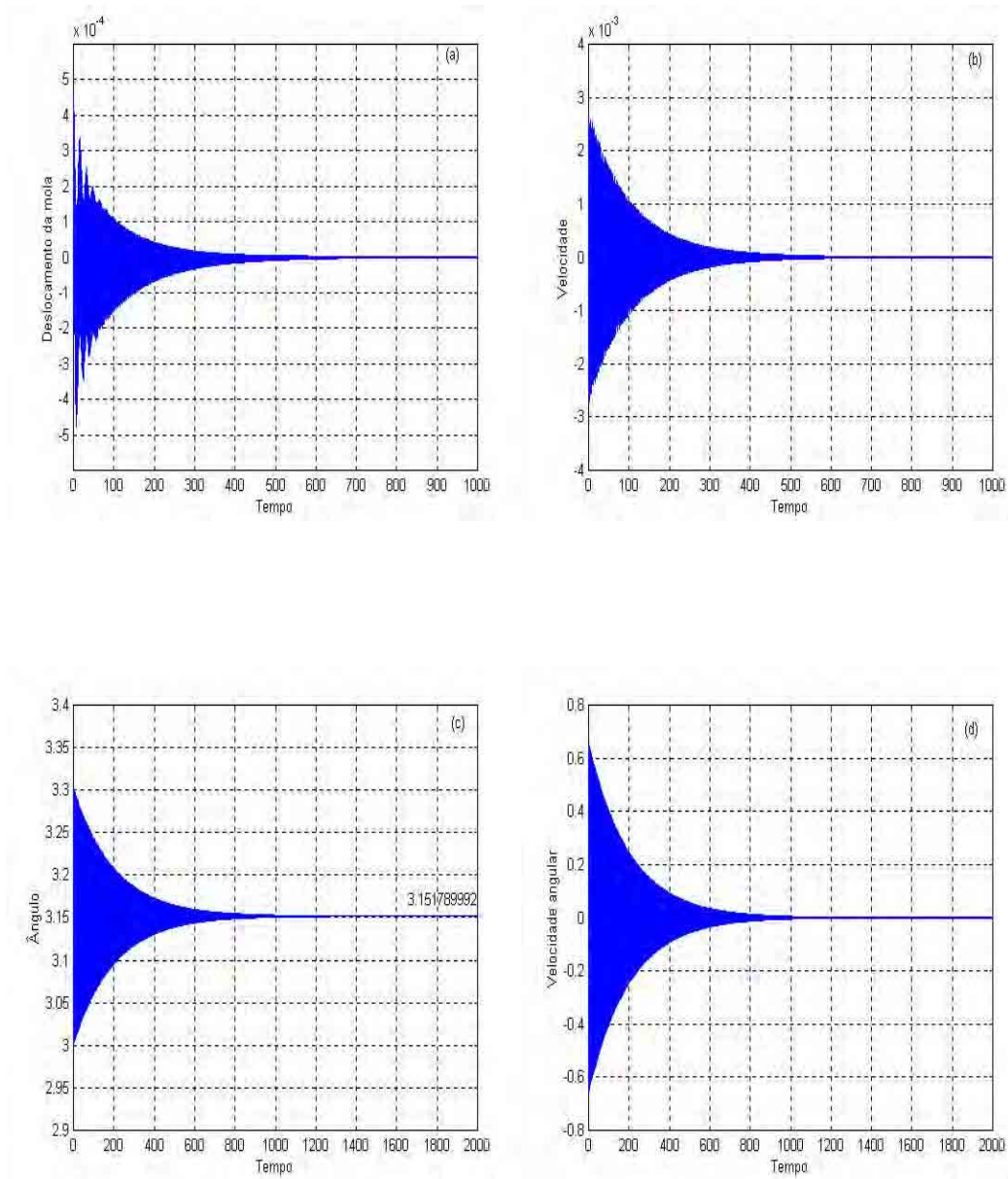


Figura 3.3: Modelo de torque exponencial, com $A= 0.01$ e condição inicial $(y_1, y_2, y_3, y_4) = (0, 0, 3.001, 0)$. (a) Oscilação da mola; (b) velocidade de vibração da mola; (c) ângulo da massa m ; (d) velocidade angular da massa m .

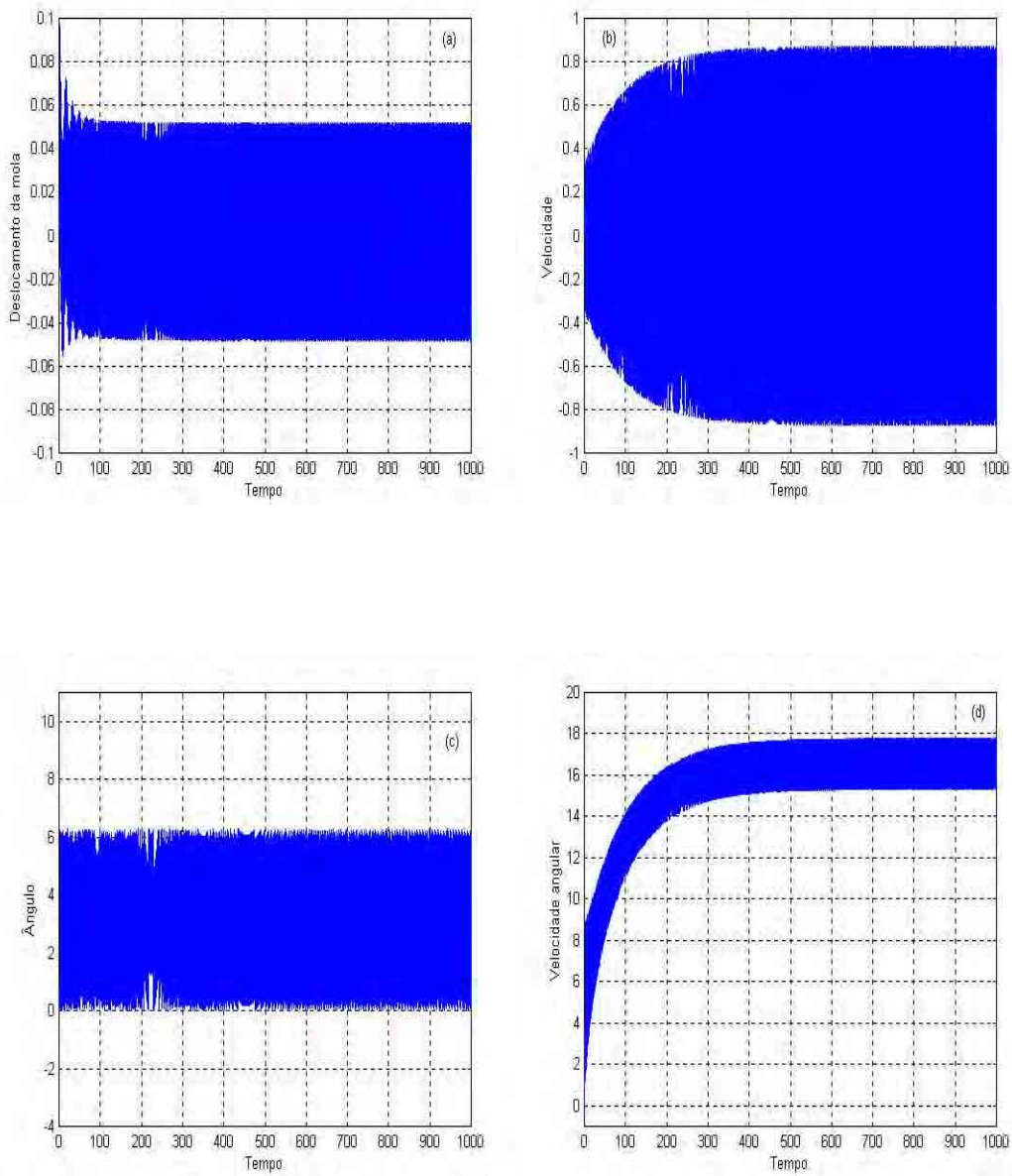


Figura 3.4: Modelo de torque exponencial, com $A = 0.01$ e condição inicial $(y_1, y_2, y_3, y_4) = (0, 0, 0.001, 0)$. (a) Deslocamento da mola; (b) velocidade de vibração da mola; (c) ângulo da massa m ; (d) velocidade angular da massa m .

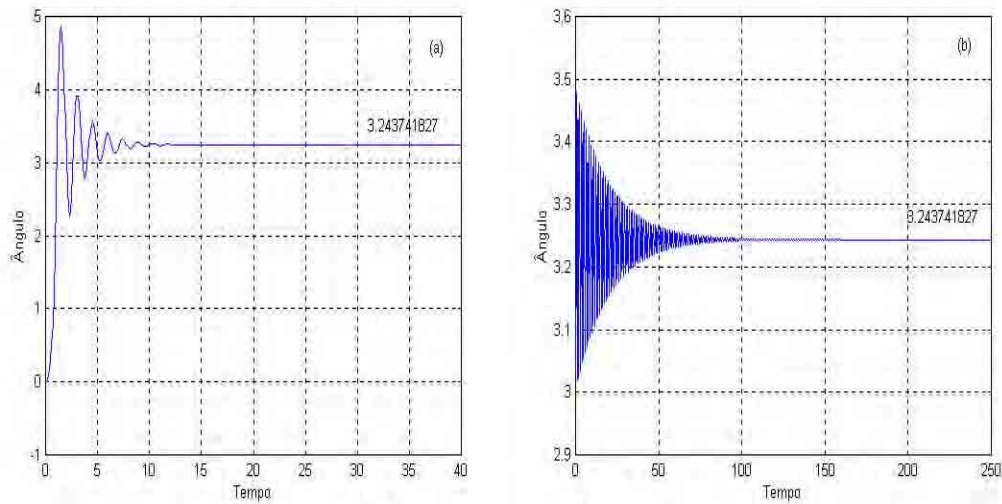


Figura 3.5: Comportamento do movimento da massa m para $A=0.1$. (a) Modelo de torque linear e condição inicial $(y_1, y_2, y_3, y_4) = (0, 0, 0.001, 0)$. (b) Modelo de torque exponencial e condição inicial $(y_1, y_2, y_3, y_4) = (0, 0, 3.001, 0)$.

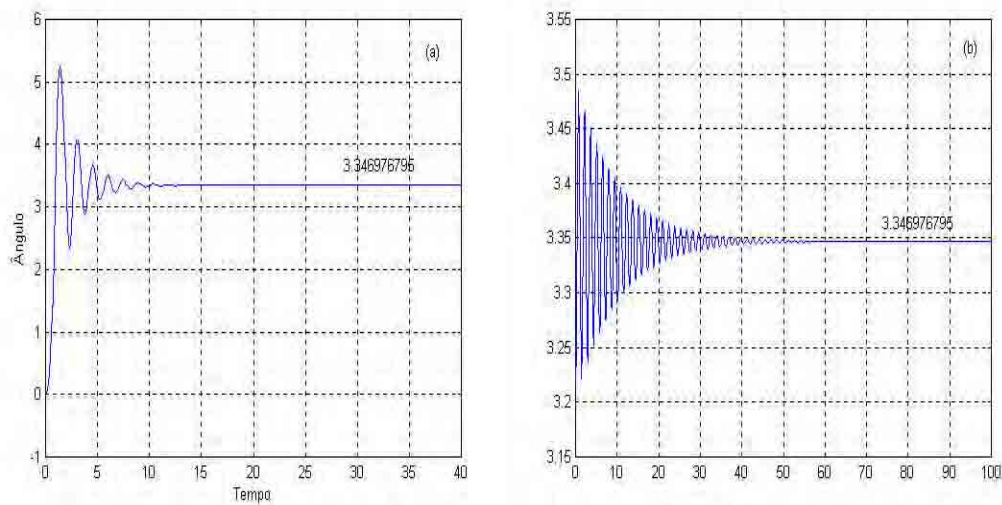


Figura 3.6: Comportamento do movimento da massa m para $A=0.2$. (a) Modelo de torque linear e condição inicial $(y_1, y_2, y_3, y_4) = (0, 0, 0.001, 0)$. (b) Modelo de torque exponencial e condição inicial $(y_1, y_2, y_3, y_4) = (0, 0, 3.2, 0)$.

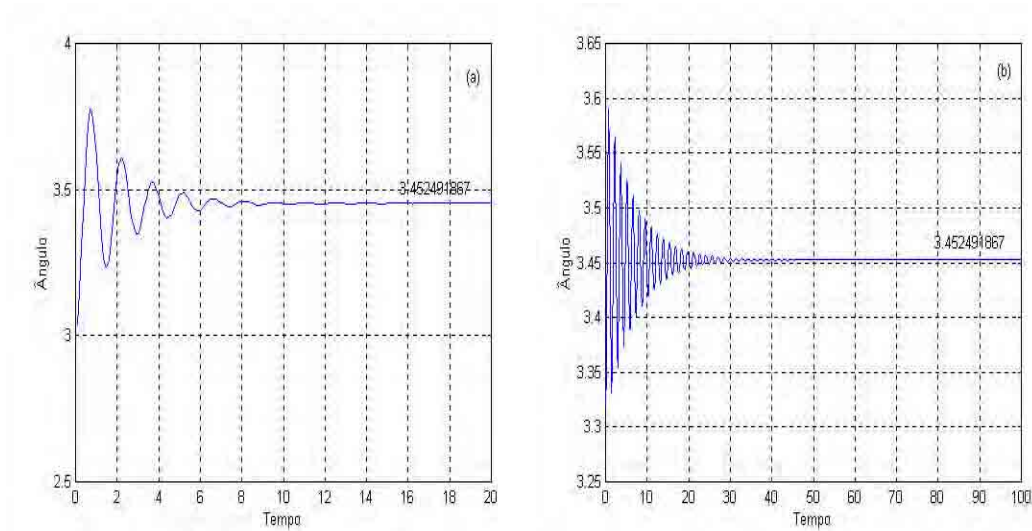


Figura 3.7: Comportamento do movimento da massa m para $A=0.3$. (a) Modelo de torque linear e condição inicial $(y_1, y_2, y_3, y_4) = (0, 0, 3, 0)$. (b) Modelo de torque exponencial e condição inicial $(y_1, y_2, y_3, y_4) = (0, 0, 3.4, 0)$.

O ponto de equilíbrio do sistema dado pela relação (3.12) é estável somente se $|M(0)| \leq mgr$, e quando $|M(0)| = mgr$ o ponto de equilíbrio $(0, 0, \varphi_0, 0)$ torna-se instável. Para constatar isto numericamente fixamos para B o valor dado pela tabela 1, e assumimos para A os valores 0.980665 e 1.2. No caso do valor limite $A = 0.980665$, o ponto de equilíbrio $(0, 0, \varphi_0, 0)$, com $\varphi_0 = \frac{3\pi}{2}$ já torna-se instável conforme podemos ver na fig. (3.8). Nesta figura mostramos os comportamentos de y_i , $i = 1, 2, 3$ e 4 no caso em que o torque é linear. Após a fase de transição ($t \approx 5$ seg), o motor executa movimento circulatório tornando instável o ponto de equilíbrio. Na fig. (3.9) mostramos o comportamento do sistema dinâmico para $A = 1.2$.

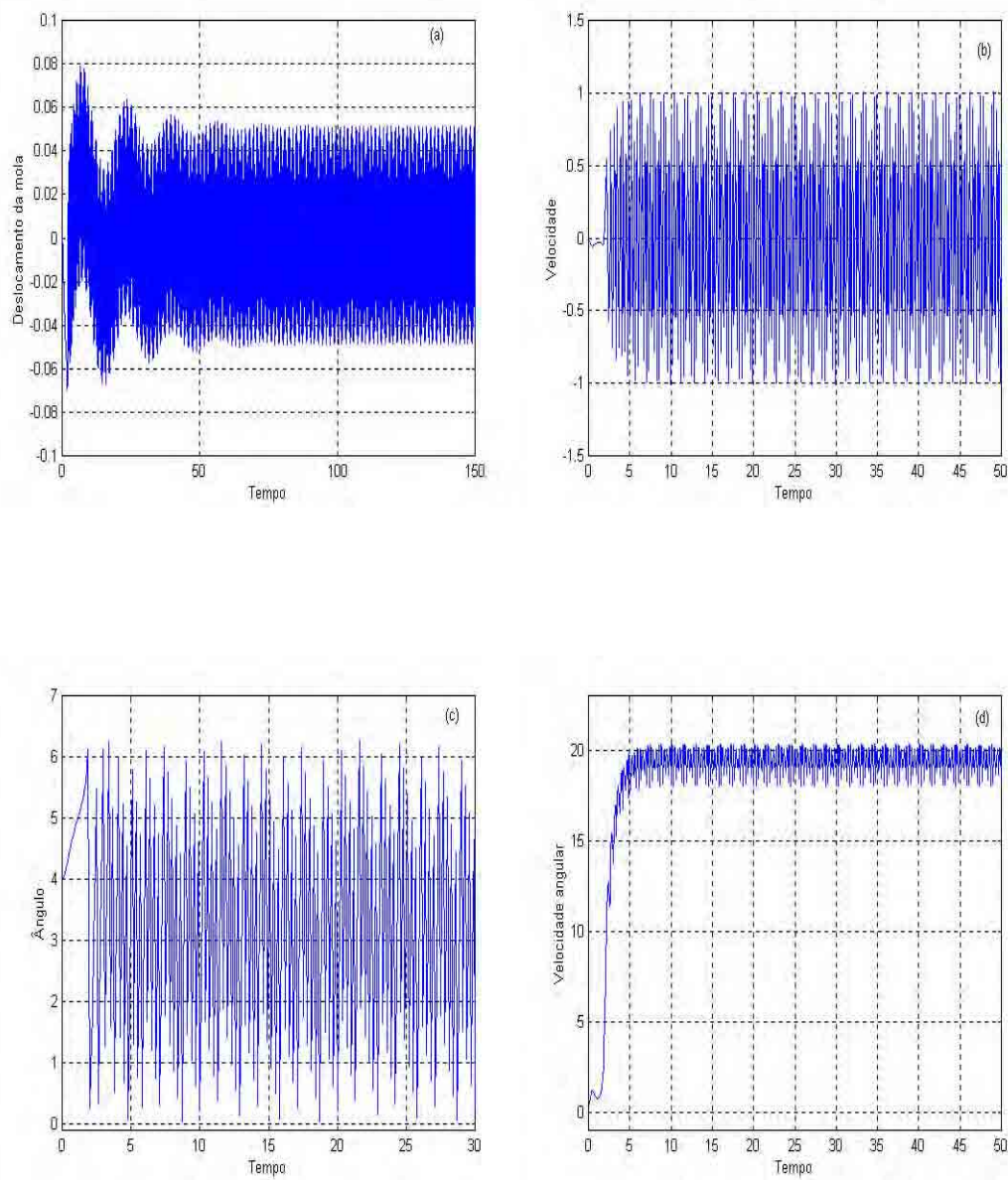


Figura 3.8: Modelo de torque linear. $A = 0.980665$. Condições iniciais: $(y_1, y_2, y_3, y_4) = (0, 0, 4, 0)$.
(a) Deslocamento da mola. (b) velocidade de vibração da mola. (c) Ângulo da massa. (d) Velocidade angular

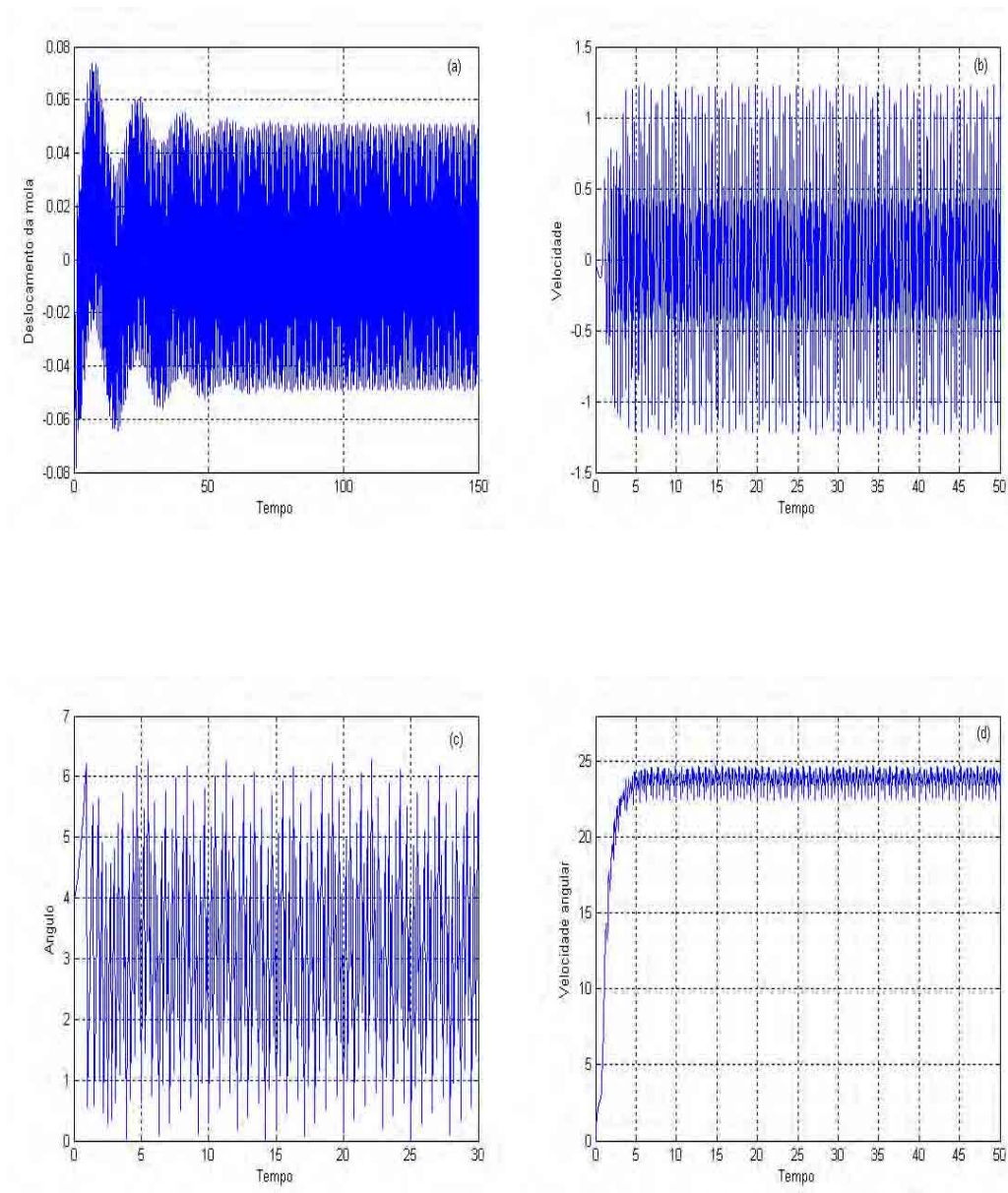


Figura 3.9: Modelo de torque linear. $A= 1.2$. Condições iniciais: $(y_1, y_2, y_3, y_4) = (0, 0, 4, 0)$. (a) Deslocamento da mola. (b) velocidade de vibração da mola. (c) Ângulo da massa. (d) Velocidade angular

3.5 Resultados Numéricos: Estudo da ressonância 1:1

Nesta seção apresentaremos alguns resultados numéricos adotando valores para os parâmetros tais que a mola e o motor estejam em condição de ressonância 1 : 1, ou seja, quando a frequência natural da mola ω e a velocidade de rotação do motor $\dot{\varphi}$ satisfaçam a relação $\dot{\varphi} \approx \omega$. Os valores escolhidos para os parâmetros físicos do sistema estão listados na tabela (3.2).

<i>massa do motor:</i> $m_0 = 1,2kg$;
<i>coeficiente de elasticidade linear da mola:</i> $c = 1,0N/m$;
<i>coeficiente de elasticidade não linear da mola:</i> $d = 0,001N/m^3$;
<i>coeficiente de amortecimento:</i> $\beta = 0,005Ns/m$;
<i>momento de inércia do rotor:</i> $J = 0,000017Kgm^2$;
<i>excentricidade da massa:</i> $r = 0,5m$;
<i>massa excêntrica:</i> $m = 0,1kg$;
<i>aceleração da gravidade:</i> $g = 9,80665m/s^2$.

Tabela 3.2: Parâmetros físicos

Note que com os valores dos parâmetros acima, temos um sistema com mola com característica quase linear. Desta forma, a frequência da mola é aproximadamente $\omega = \sqrt{\frac{c}{m_1}}$ que vale $\omega \approx 0.88$.

Consideramos nestas simulações, curvas características para o torque do tipo linear ($M(y_4) = a - by_4$). Nos resultados que apresentaremos a seguir, fixamos $b = 0.5$ e adotamos a como um parâmetro de controle. Os resultados apresentados nas figuras (3.10), (3.11) e (3.12) correspondem respectivamente aos valores dos parâmetros $a = 0.61$, $a = 0.67$ e $a = 0.72$. Em cada figura é apresentado o histórico no tempo de y_1 , o espaço de fase associado e o histórico no tempo de y_4 . Estas figuras mostram o comportamento do sistema antes da ressonância ($\dot{\varphi} < \omega$) fig.(3.10), na ressonância ($\dot{\varphi} \approx \omega \approx 0.88$) fig (3.11) e depois da passagem pela ressonância ($\dot{\varphi} > \omega$) fig. (3.12).

Nas figuras (3.13) e (3.14) estão mostrados o comportamento do sistema quando está próximo à região de ressonância porém, após a passagem por esta região. Na figura (3.13) foi adotado $a = 0.679$ e na figura (3.14) $a = 0.685$. Observe que na figura (3.13) o histórico no tempo da mola apresenta inicialmente um espécie de “pulso” e depois um aumento de amplitude e, percebe-se neste caso, interferência recíproca entre o comportamento da mola e

o motor.

Na figura (3.14) ocorre o mesmo comportamento, mas a modulação inicial se estende por um período de tempo maior. Este comportamento de modulação constitui o mecanismo que diminui a amplitude de vibração da mola, à medida que afastamos da região de ressonância depois da passagem. A figura (3.15) reforça essa conclusão, onde foi utilizado $a = 69$.

Na figura (3.16) está mostrada a amplitude máxima de oscilação da mola em função da frequência do rotor, quando assumimos valores para o parâmetro a entre 0.56 e 0.85 com variação $\Delta a = 0.01$. Esse é o efeito *Sommerfeld* que motivou os estudos sobre sistemas dinâmicos não ideais.

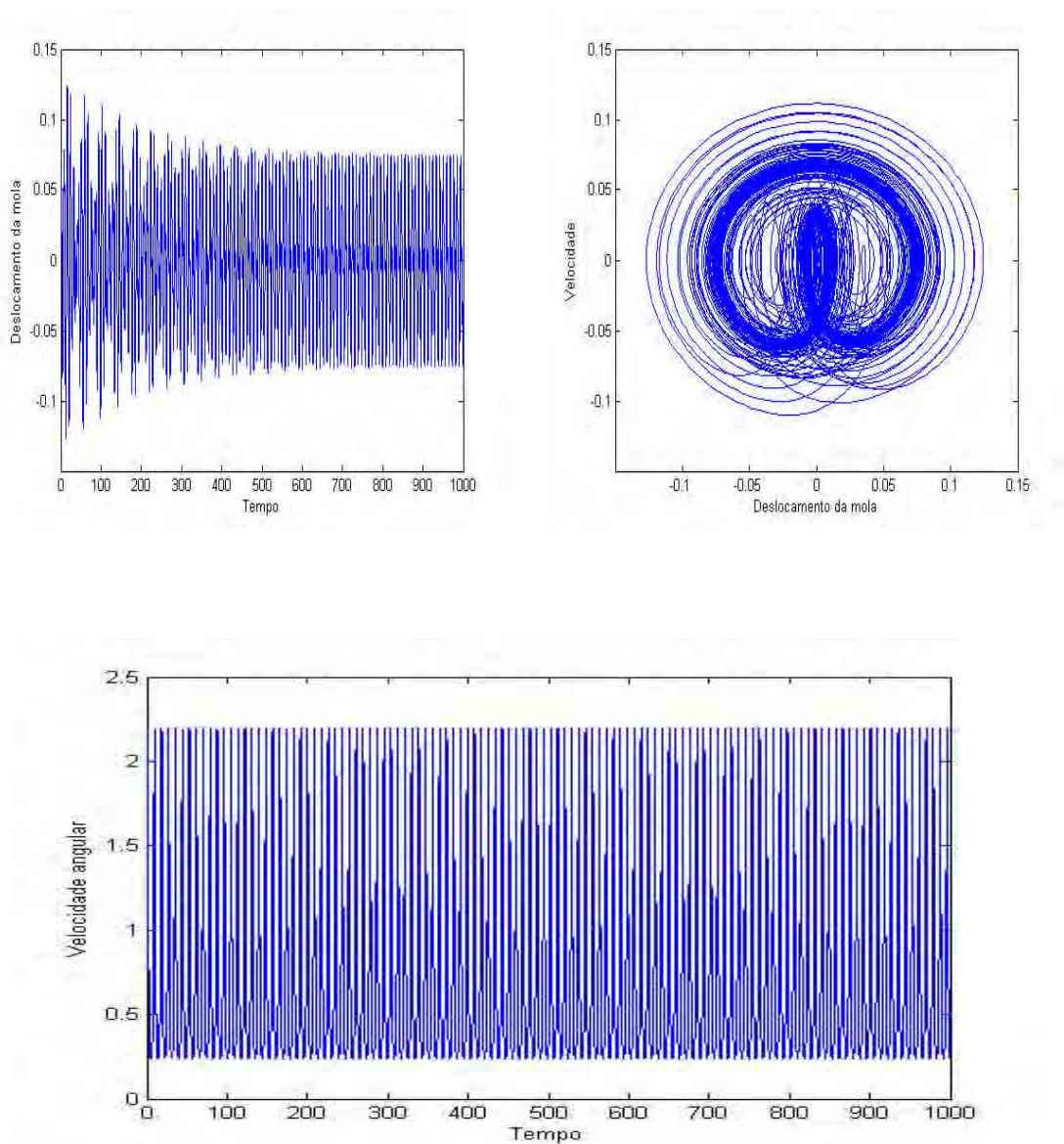


Figura 3.10: Características de movimento para parâmetro de controle $a = 0.61$. Caso $\dot{\varphi} < \omega$

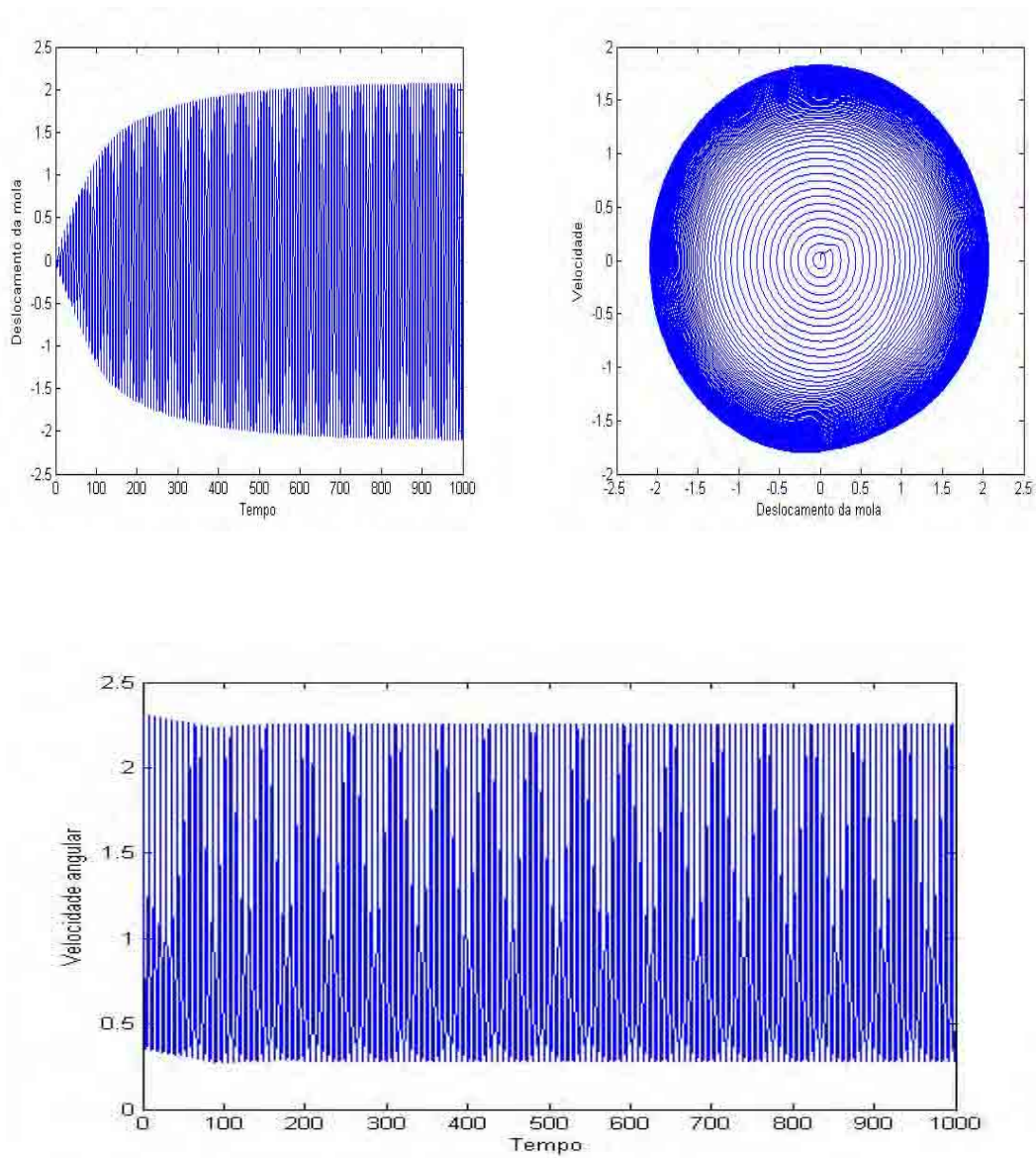


Figura 3.11: Características de movimento para parâmetro de controle $a = 0.67$. Caso $\dot{\varphi} \approx \omega$

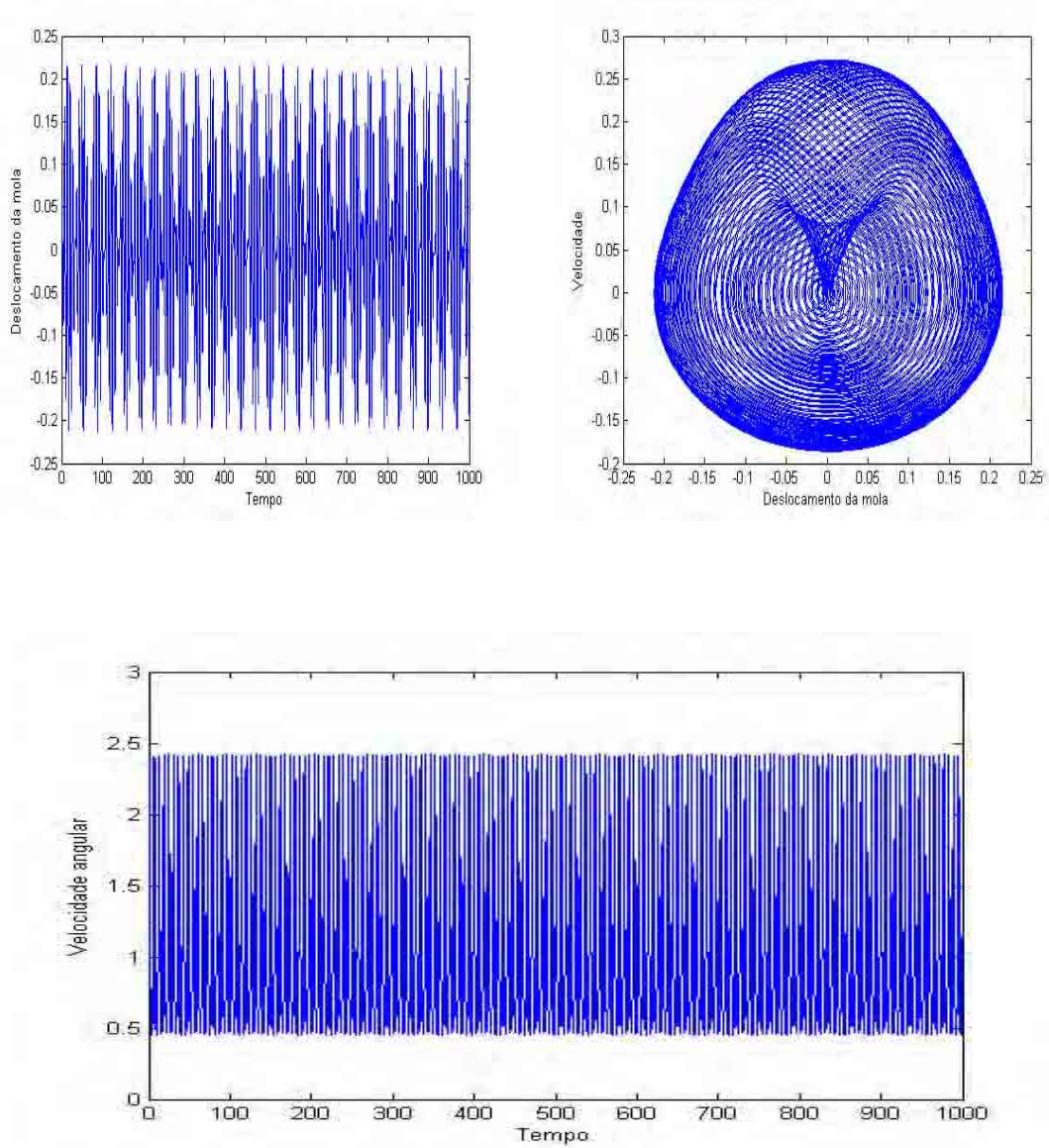


Figura 3.12: Características de movimento para parâmetro de controle $a = 0.72$. Caso $\dot{\varphi} > \omega$

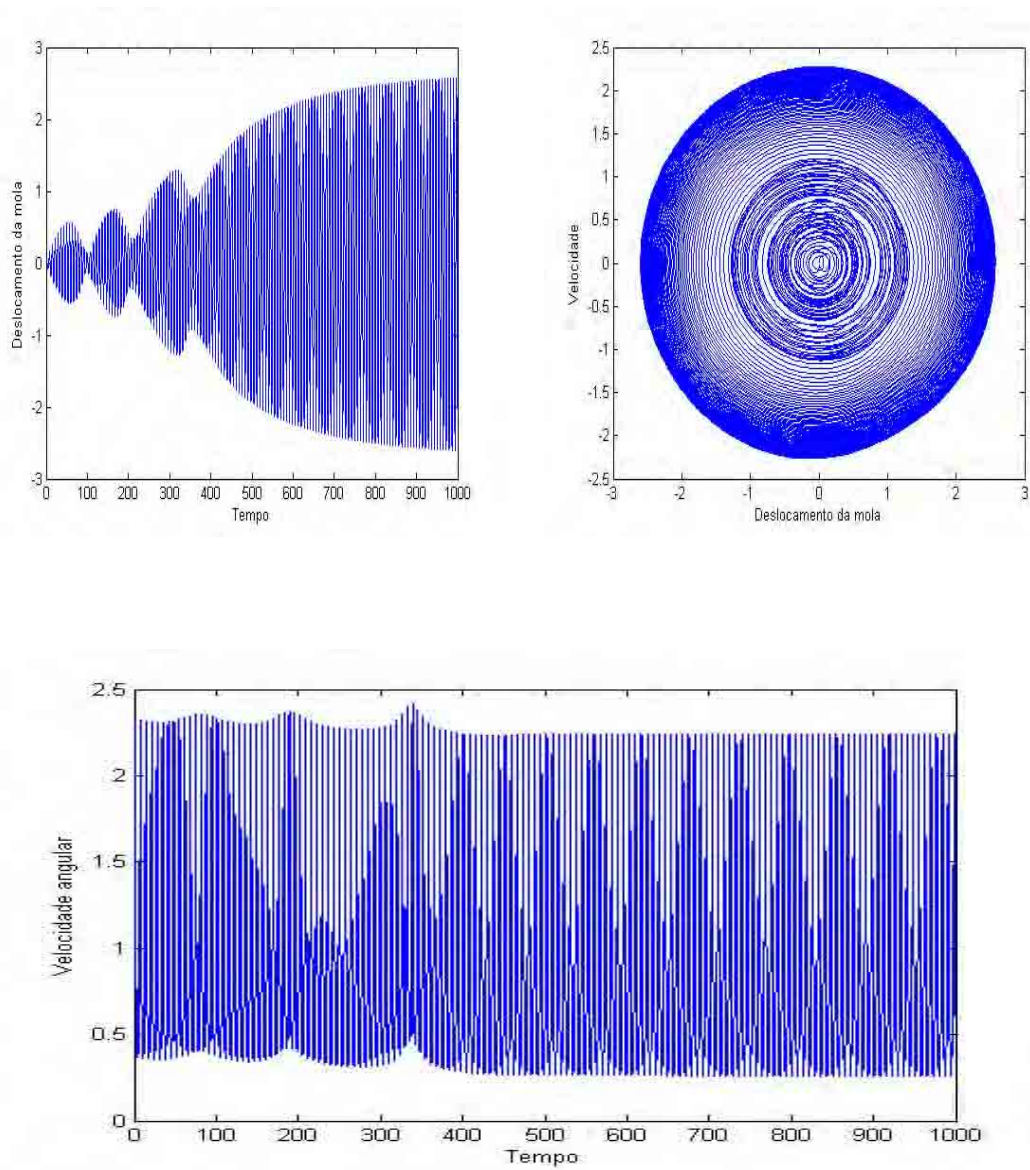


Figura 3.13: Características de movimento para parâmetro de controle $a = 0.679$. Aparecimento de modulações logo após a passagem pela ressonância.

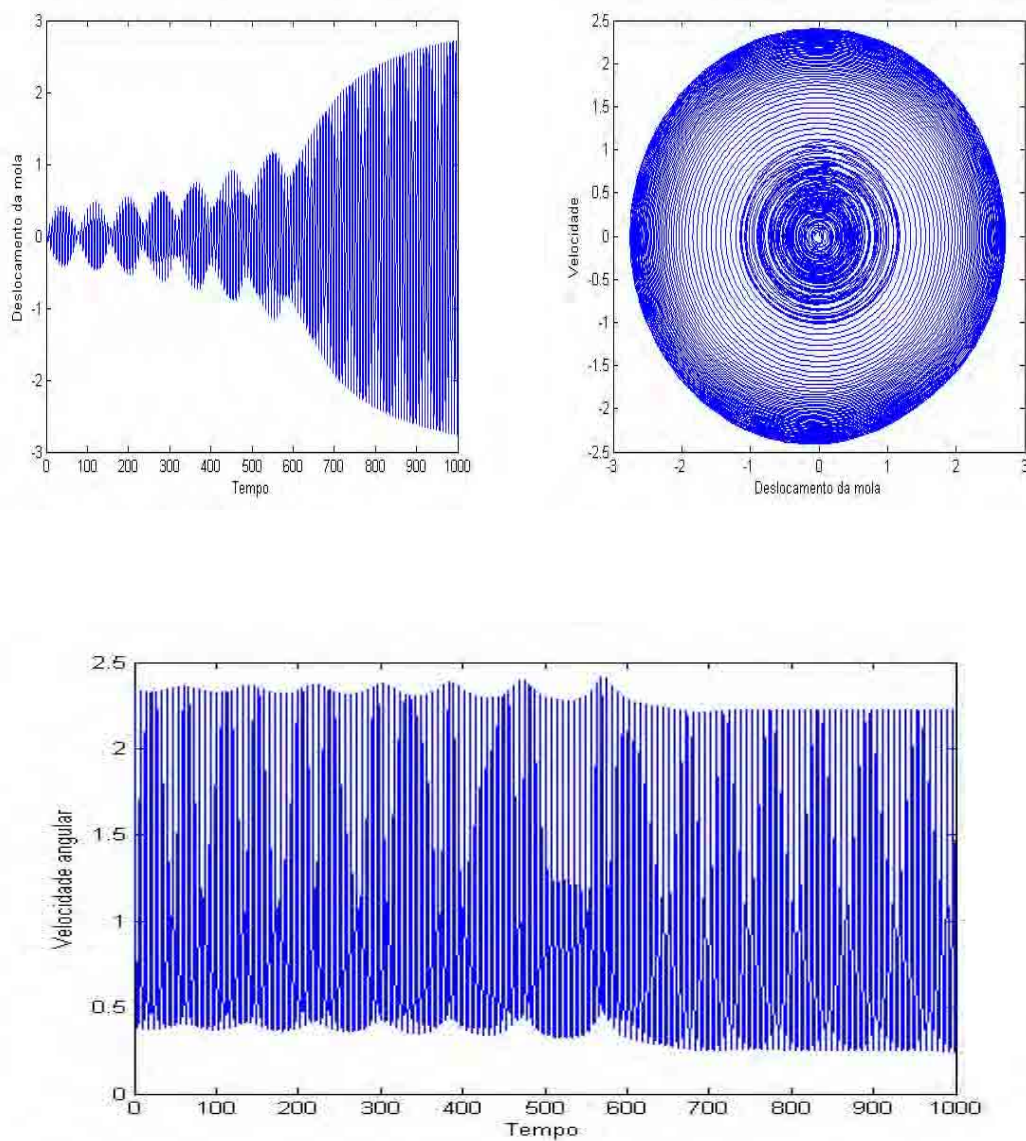


Figura 3.14: Características de movimento para parâmetro de controle $a = 0.685$. As modulações persistem mais à medida que se afasta da passagem pela ressonância.

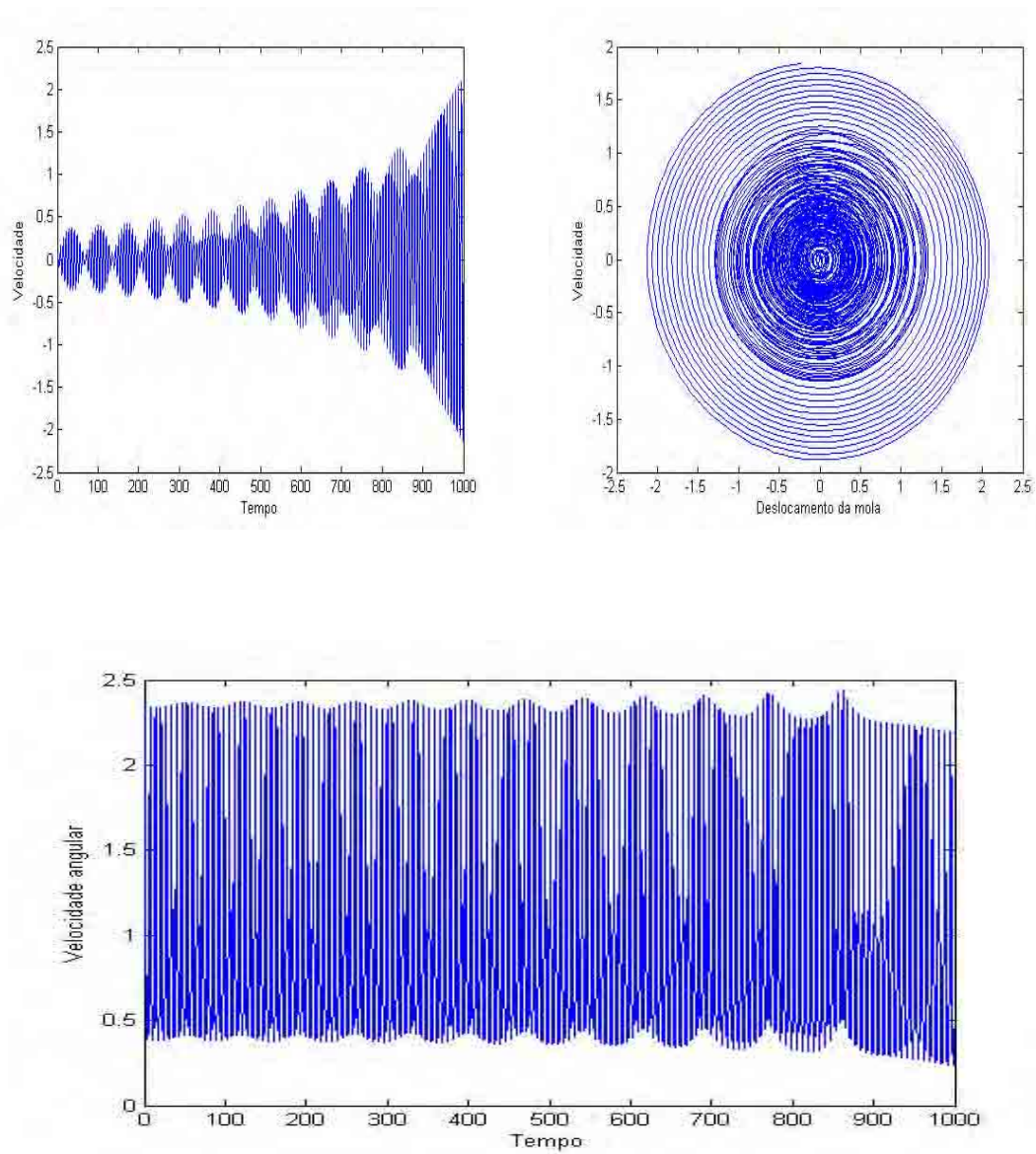


Figura 3.15: Características de movimento para parâmetro de controle $a = 0.69$. As modulações ocorrem praticamente em todo o intervalo de tempo de simulação.

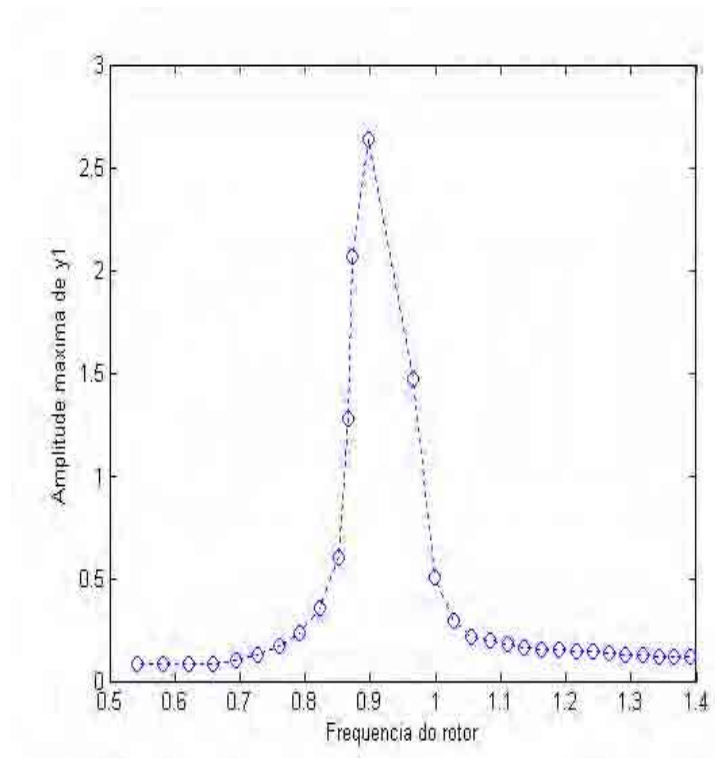


Figura 3.16: Amplitude máxima de oscilação da mola em função da frequência do rotor. Efeito *Sommerfeld*.

Capítulo 4

Bifurcação de Hopf no Vibrador Centrífugo Não Ideal

O propósito deste capítulo é obter as condições fundamentais para o surgimento da bifurcação de Hopf no vibrador centrífugo não ideal, ou seja, estamos interessados em um caso crítico no qual o polinômio (3.15) tenha um par de autovalores puramente imaginários e os outros autovalores com a parte real negativa. Além disso, devemos obter todas as hipóteses do teorema da bifurcação de Hopf descritas no capítulo 2. Em seguida realizamos alguns testes numéricos com o objetivo de constatar este resultado.

4.1 Estudo do Caso Crítico

Concentremo-nos agora, em obter as condições fundamentais para a ocorrência da bifurcação de Hopf na dinâmica do vibrador centrífugo. A condição necessária e suficiente para ocorrência da hipótese (a) do teorema de Hopf (teorema 2.4) para este problema está na existência de números reais t , r e s tais que $t \neq 0$, $r > 0$ e $s > 0$ de forma que o polinômio característico $p(X)$ seja reescrito como

$$p(X) = (X^2 + t^2)(X^2 + rX + s)$$

ou

$$p(X) = X^4 + rX^3 + (s + t^2)X^2 + t^2rX + st^2. \quad (4.1)$$

Note que o polinômio $p(X)$ definido acima tem um par zeros puramente imaginários e os outros com a parte real negativa.

Fazendo

$$\begin{cases} A_1 = \frac{1}{1 - a_4 a_5 \sin^2 \varphi_0} \left(-\frac{M'(0)}{I} - a_2 \right), \\ A_2 = \frac{1}{1 - a_4 a_5 \sin^2 \varphi_0} \left(a_2 \frac{M'(0)}{I} - a_6 \cos \varphi_0 - a_1 \right), \\ A_3 = \frac{1}{1 - a_4 a_5 \sin^2 \varphi_0} \left(a_2 a_6 \cos \varphi_0 + a_1 \frac{M'(0)}{I} \right), \\ A_4 = \frac{1}{1 - a_4 a_5 \sin^2 \varphi_0} a_1 a_6 \cos \varphi_0, \end{cases}$$

podemos reescrever (3.15) como

$$p(X) = X^4 + A_1 X^3 + A_2 X^2 + A_3 X + A_4. \quad (4.2)$$

Agora, se compararmos os coeficientes de (4.1) com os coeficientes de (4.2) obtemos

$$\begin{cases} A_1 > 0, A_2 > 0, A_3 > 0, A_4 > 0, \\ A_1 A_2 A_3 - A_3^2 = A_1^2 A_4. \end{cases} \quad (4.3)$$

Usando a relação (4.3) temos

$$-\frac{M'(0)}{I} - a_2 > 0, \quad a_2 a_6 \cos \varphi_0 + a_1 \frac{M'(0)}{I} > 0 \quad \text{e} \quad a_1 a_6 \cos \varphi_0 > 0.$$

Portanto

$$\begin{cases} M'(0) < -a_2 I, \\ M'(0) < -\frac{a_2 a_6 (\cos \varphi_0) I}{a_1}, \\ \cos \varphi_0 < 0. \end{cases}$$

Além disso, temos também que

$$t = \pm \sqrt{\frac{A_3}{A_1}}, \quad r = A_1, \quad s = A_2 - \frac{A_3}{A_1} = \frac{A_1 A_4}{A_3}. \quad (4.4)$$

Fazendo $\gamma = \frac{M'(0)}{I}$ e $\delta = \cos \varphi_0$ em (4.3) temos

$$\begin{aligned} & - a_4 a_5 a_2^2 a_6^2 \delta^4 - 2 a_1 a_4 a_5 a_2 a_6 \gamma \delta^3 - a_1^2 a_4 a_5 \gamma^2 \delta^2 - a_2 a_1 \gamma^3 - a_2^2 a_6 \gamma^2 \delta + a_2 a_6^2 \gamma \delta^2 \\ & + (-a_2^2 a_1 + a_4 a_5 a_1^2) \gamma^2 + (-2 a_1 a_2 a_6 - a_2^3 a_6 + 2 a_4 a_5 a_1 a_2 a_6) \gamma \delta + a_4 a_5 a_2^2 a_6^2 \delta_2 \\ & + a_2 a_1^2 \gamma = 0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

Seja $P(\gamma, \delta)$ o polinômio do lado esquerdo de (4.5). Este polinômio é irreduzível [4].

Agora, com intuito de obter a condição (b) do teorema da bifurcação de Hopf (teorema 2.4), tomemos um par γ_0 e δ_0 satisfazendo a condição (4.3). Fixando $\delta = \delta_0$ em (3.15) e tomando γ como um parâmetro de controle podemos reescrever $p(X)$ como

$$f(\gamma, X) = X^4 + A_1(\gamma) X^3 + A_2(\gamma) X^2 + A_3(\gamma) X + A_4(\gamma). \quad (4.6)$$

Assim, usando o teorema da função implícita em (4.6) e levando em consideração as relações (4.1), (4.3) e (4.4), concluímos que existe uma curva de zeros de $p(X)$, $g(\gamma) = a(\gamma) + ib(\gamma)$ tal que $a(\gamma_0) = 0$, $b(\gamma_0) = \sqrt{\frac{A_3}{A_1}}$ e $f(\gamma_0, ib(\gamma_0)) = 0$.

Temos também que

$$\frac{\partial f}{\partial X} = 4X^3 + 3A_1(\gamma)X^2 + 2A_2(\gamma) + A_3(\gamma),$$

e então

$$\frac{\partial f}{\partial X}(\gamma_0, ib(\gamma_0)) = 2 \frac{-A_3A_1^2 + i(-2A_3\sqrt{A_3A_1} + A_1A_2\sqrt{A_1A_3})}{A_1^2}. \quad (4.7)$$

Note que $ib(\gamma_0)$ não é zeros duplos de $p(X)$, logo $\frac{\partial f}{\partial X}(\gamma_0, ib(\gamma_0)) \neq 0$ e assim temos

$$\frac{\partial g}{\partial \gamma}(\gamma_0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial \gamma}(\gamma, g(\gamma_0))}{\frac{\partial f}{\partial X}(\gamma, g(\gamma_0))}, \quad (4.8)$$

onde

$$\frac{\partial g}{\partial \gamma}(\gamma_0) = a'(\gamma_0) + ib'(\gamma_0). \quad (4.9)$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \gamma} &= A'_1(\gamma)X^3 + A'_2(\gamma)X^2 + A'_3(\gamma)X + A'_4(\gamma) \\ &= -\kappa X^3 + a_2\kappa X^2 + a_1\kappa X \end{aligned}$$

com $\kappa = \frac{1}{1 - a_4a_5\sin^2\varphi_0}$.

Portanto

$$\frac{\partial f}{\partial \gamma}(\gamma_0, ib(\gamma_0)) = \kappa \frac{-a_2A_3A_1 + i(A_3\sqrt{A_3A_1} + a_1\sqrt{A_3A_1}A_1)}{A_1^2}. \quad (4.10)$$

Agora, substituindo (4.7), (4.9) e (4.10) em (4.8) obtemos

$$a'(\gamma_0) + ib'(\gamma_0) = -\frac{\kappa}{2} \left(\frac{-a_2A_3A_1 + i(A_3\sqrt{A_3A_1} + a_1\sqrt{A_3A_1}A_1)}{-A_3A_1^2 + i(-2A_3\sqrt{A_3A_1} + A_2\sqrt{A_3A_1}A_1)} \right),$$

ou melhor

$$a'(\gamma_0) = -\frac{1}{2}\kappa \frac{1}{| -A_3A_1^2 + i(-2(\sqrt{A_3})^3\sqrt{A_1} + A_2\sqrt{A_3}(\sqrt{A_3})^3)|^2} \times A_1A_3(A_1^2A_3a_2 + a_1A_1^2A_2 + A_1A_2A_3 - 2a_1A_1A_3 - 2A_3^2), \quad (4.11)$$

onde $A_i = A_i(\gamma_0, \delta_0)$, $i = 1, 2, 3, 4$, e γ_0, δ_0 é um par de valores tais que $p(X)$ tem um par de autovalores puramente imaginários e os outros com a parte real negativa.

Note que $a'(\gamma_0) \neq 0$ se e somente se

$$A_1^2 A_3 a_2 + a_1 A_1^2 A_2 + A_1 A_2 A_3 - 2a_1 A_1 A_3 - 2A_3^2 \neq 0. \quad (4.12)$$

A desigualdade (4.12) pode ser expressa como $Q(\gamma, \delta) \neq 0$ com

$$\begin{aligned} Q(\gamma, \delta) = & a_1 \gamma^3 + 3a_2 a_1 \gamma^2 + (-2a_1 a_4 a_5 a_6 \delta^3 + (2a_1^2 a_4 a_5 + a_6^2) \delta^2 + (a_2^2 a_6 \\ & + 2a_1 a_4 a_5 a_6 - 2a_1 a_6) \delta + a_1^2 - 2a_1^2 a_4 a_5 + 2a_1 a_2^2) \gamma - 2a_2 a_4 a_5 a_6^2 \delta^4 \\ & + 2a_1 a_2 a_4 a_5 a_6 \delta^3 + (2a_2 a_4 a_5 a_6^2 - a_2 a_6^2) \delta^2 + (-2a_1 a_2 a_4 a_5 a_6 \\ & + a_2^3 a_6 + 2a_1 a_2 a_6) \delta - a_1^2 a_2. \end{aligned}$$

Observe que $P(0,0) = 0$ e $Q(0,0) = -a_1^2 a_2$. Disto e da irreduzibilidade de $P(\gamma, \delta)$, podemos concluir que o $\text{mdc}\{P(\gamma, \delta), Q(\gamma, \delta)\} = 1$, pois se assim não fosse, poderia existir um polinômio $R(\gamma, \delta)$ de grau menor que o de $Q(\gamma, \delta)$ tal que $Q(\gamma, \delta) = R(\gamma, \delta)P(\gamma, \delta)$, e desta maneira teríamos $Q(0,0) = 0$ (contradição). Então, podemos usar o teorema de Bezout sobre intersecções de curvas algébricas (ver [17]) para concluir que as curvas $P(\gamma, \delta) = 0$ e $Q(\gamma, \delta) = 0$ se interceptam em um conjunto finito de pontos, o qual denotaremos por \mathbb{S} . Desta forma, tomando um par (γ_0, δ_0) tal que $P(\gamma_0, \delta_0) = 0$ e $Q(\gamma_0, \delta_0) \neq 0$, e usando o teorema de Hopf temos o seguinte resultado [3].

Se $M'(0)$ e $\cos \varphi_0$ satisfaz em (4.3) e $(\gamma_0, \delta_0) \notin \mathbb{S}$, então em uma adequada variedade central o sistema (3.13) pode ser reescrito como

$$\begin{cases} \dot{u} = (d\mu + k(u^2 + v^2))u - (\omega + c\mu + b(u^2 + v^2))v + \mathbf{O}(4) \\ \dot{v} = (\omega + c\mu + b(u^2 + v^2))u + (d\mu + k(u^2 + v^2))v + \mathbf{O}(4) \end{cases} \quad (4.13)$$

onde $d = a'(\gamma_0)$ e $\mu = \gamma - \gamma_0$.

Observação 4.1. Todos os coeficientes de (4.13) são funções contínuas de γ_0, δ_0, μ , onde μ varia no intervalo $(-\epsilon, \epsilon)$ cujo tamanho depende de γ_0 e δ_0 .

4.2 Estudo de um Caso Particular

Assumindo que $M(0) = 0$ e $\cos \varphi_0 < 0$, temos pelo ponto de equilíbrio (3.12) e pelo polinômio $P(\gamma, \delta)$ que $\sin \varphi_0 = 0$, $\cos \varphi_0 = -1$ e $\gamma_0 = \frac{M'(0)}{I} = 0$. Estes valores dos parâmetros satisfazem a condição (4.3) e além disso, substituindo-os na equação (4.11) obtemos $a'(\gamma_0) = \frac{1}{2}$.

De agora em diante, o objetivo é mostrar que k que aparece em (4.13) é diferente de zero e deste modo obter a bifurcação de Hopf.

Fixando estes parâmetros no polinômio característico $p(X)$ obtemos

$$p(X) = X^4 - a_2X^3 + (a_6 - a_1)X^2 - a_2a_6X - a_1a_6,$$

que possui os zeros $X_{1,2} = \pm i\sqrt{a_6}$ e $X_{3,4} = \frac{a_2 \pm \sqrt{a_2^2 + 4a_1}}{2}$.

Observe que para estes valores, o polinômio característico tem um par de autovalores puramente imaginários e dois autovalores com a parte real negativa. Portanto, sob estas condições temos as hipóteses fundamentais do teorema de bifurcação de Hopf. Além do mais, temos um ponto de equilíbrio não-hiperbólico, o qual nos permite estudar o sistema por meio de teoria de variedade central (ver capítulo 2).

Assim, expandindo o sistema (3.13) em série de Taylor em torno do ponto de equilíbrio $(0, 0, 0, 0)$, e fixando os valores $M(0) = 0$, $\cos \varphi_0 = -1$, $\gamma_0 = 0$ e $\sin \varphi_0 = 0$, colocamos diretamente a equação (3.13) na forma (2.9), ou seja

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ F_1(y_1, y_2, y_3, y_4) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{0}(4) \end{pmatrix}, \quad (4.14)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_3 \\ \dot{y}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ F_2(y_1, y_2, y_3, y_4) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{0}(4) \end{pmatrix}, \quad (4.15)$$

sendo

$$\begin{aligned} F_1(y_1, y_2, y_3, y_4) &= a_4a_6y_3^2 - a_4y_4^2 + a_3y_1^3 - a_4\frac{M^{(2)}(0)}{2I}y_4^2y_3 + a_1a_4a_5y_1y_3^2 \\ &+ a_2a_4a_5y_2y_3^2 \quad e \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_2(y_1, y_2, y_3, y_4) &= -a_5(a_1y_1 + a_2y_2)y_3 + \frac{M^{(2)}(0)}{2I}y_4^2 + \frac{a_6 - 6a_4a_5a_6}{6}y_3^3 \\ &+ a_5a_4y_3y_4^2 + \frac{M^{(3)}(0)}{6I}y_4^3. \end{aligned}$$

As equações de movimento do sistema dado por (4.14) e (4.15) está numa forma adequada para se usar a teoria de variedade central. Então, sejam $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $p(\cdot, \cdot)$ e $q(\cdot, \cdot)$ funções de classe \mathbf{C}^2 tais que

$$h(y_3, y_4) = \begin{pmatrix} p(y_3, y_4) \\ q(y_3, y_4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

e

$$h(0, 0) = h'(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Agora, substituindo $(y_1, y_2)^T = (h(y_3, y_4))^T$ no sistema (4.15) obtemos

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{y}_3 \\ \dot{y}_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -a_5(a_1 p(y_3, y_4) + a_2 q(y_3, y_4))y_3 \\ + \frac{M^{(2)}(0)}{2I}y_4^2 \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{a_6 - 6a_4a_5a_6}{6}y_3^3 + a_5a_4y_3y_4^2 + \frac{M^{(3)}(0)}{6I}y_4^3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{O}(4) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Pelo segundo teorema de Carr (teorema 2.2), temos que o sistema dado por (4.14) e (4.15) e o sistema (4.16) são equivalentes quanto ao comportamento assintótico em torno da origem, ou seja o sistema bi-dimensional (4.16) contém todas as informações necessárias para se determinar o comportamento dinâmico do sistema dado por (4.14) e (4.15) em torno do ponto de equilíbrio não-hiperbólico em questão.

No entanto, para estudarmos o comportamento de (4.16) precisamos encontrar uma expressão analítica para $p(.,.)$ e $q(.,.)$. O terceiro teorema de Carr (teorema 2.3) mostra como determinar as expressões para variedade central ao menos por uma aproximação polinomial.

Considere funções $v(.,.)$ e $w(.,.)$ definidas em um conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ tal que $v(0, 0) = w(0, 0) = v'(0, 0) = w'(0, 0) = 0$ e o mapa $H[v, w] : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por

$$\begin{aligned} H[v, w](y_3, y_4) &= D[v, w](y_3, y_4) [B(y_3, y_4) + G_1[v, w](y_3, y_4)] \\ &- C[v, w](y_3, y_4) - G_2[v, w](y_3, y_4), \end{aligned} \quad (4.17)$$

onde

$$\begin{aligned} D[v, w](y_3, y_4) &= \begin{pmatrix} v_{y_3} & v_{y_4} \\ w_{y_3} & w_{y_4} \end{pmatrix}, \quad B(y_3, y_4) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}, \\ G_1[v, w](y_3, y_4) &= \begin{pmatrix} 0 \\ a_5a_4y_3y_4^2 + \frac{M^{(3)}(0)}{6I}y_4^3 \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} 0 \\ -a_5(a_1v(y_3, y_4) + a_2w(y_3, y_4))y_3 + \frac{M^{(2)}(0)}{2I}y_4^2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C[v, w](y_3, y_4) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v(y_3, y_4) \\ w(y_3, y_4) \end{pmatrix}, \\
 G_2[v, w](y_3, y_4) &= \begin{pmatrix} 0 \\ a_4 a_6 y_3^2 - a_4 y_4^2 \end{pmatrix} \\
 &+ \begin{pmatrix} 0 \\ \begin{pmatrix} a_3 v(y_3, y_4)^3 - \frac{1}{2} a_4 M^{(2)}(0) y_4^2 y_3 \\ a_1 a_4 a_5 y_3^2 v(y_3, y_4) + a_2 a_4 a_5 y_3^2 w(y_3, y_4) \end{pmatrix} \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Efetuando os cálculos e separando os termos de grau menor ou igual a 2 obtemos

$$H[v, w](y_3, y_4) = \begin{pmatrix} -a_6 y_3 v_{y_4} + y_4 v_{y_3} - w \\ \begin{pmatrix} -a_6 y_3 w_{y_4} + y_4 w_{y_3} - a_1 v \\ -a_2 w - a_4 a_6 y_3^2 + a_4 y_4^2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} + \mathbf{O}(3). \quad (4.18)$$

Considere agora os polinômios

$$\begin{cases} \bar{p}(y_3, y_4) = B_1 y_3^2 + B_2 y_3 y_4 + B_3 y_4^2, \\ \bar{q}(y_3, y_4) = C_1 y_3^2 + C_2 y_3 y_4 + C_3 y_4^2. \end{cases} \quad (4.19)$$

Substituindo (4.19) em (4.18) temos

$$\begin{aligned}
 H[\bar{p}, \bar{q}](y_3, y_4) &= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} -a_6(B_2 y_3 + 2B_3 y_4) + y_1(2B_1 y_3 + B_2 y_4) \\ -C_1 y_3^2 - C_2 y_3 y_4 - C_3 y_4^2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} -a_6 y_3(C_2 y_3 + 2C_3 y_4) + y_4(2C_1 y_3 + C_2 y_4) \\ -a_1(B_1 y_3^2 + B_2 y_3 y_4 + B_3 y_4^2) \\ -a_2(C_1 y_3^2 + C_2 y_3 y_4 + C_3 y_4^2) - a_4 a_6 y_3^2 + a_4 y_4^2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} + \mathbf{O}(3), \\
 &= \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} (-C_1 - a_6 B_2) y_3^2 \\ (-2a_6 B_3 - C_2 + 2B_1) y_3 y_4 \\ (B_2 - C_3) y_4^2 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} (-a_6 C_2 - a_1 B_1 - a_4 a_6 - a_2 C_1) y_3^2 \\ (-a_2 C_2 - 2a_6 C_3 + 2C_1 - a_1 B_2) y_3 y_4 \\ (-a_2 C_3 - a_1 B_3 + C_2 + a_4) y_4^2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} + \mathbf{O}(3). \quad (4.20)
 \end{aligned}$$

Agora, igualando os coeficientes de y_3^2 , y_3y_4 , y_4^2 a zero obtemos

$$\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} -a_4a_6(a_1 + 4a_6) \\ 4a_4a_6a_2 \\ a_4(a_1 + 4a_6) \\ -4a_4a_6^2a_2 \\ -4a_4a_6(a_1 + 4a_6) \\ 4a_4a_6a_2 \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

onde $R = \frac{1}{(a_1 + 4a_6)^2 + 4a_2^2a_6}$.

Portanto, de (4.17) à (4.21) segue que $H[\bar{p}, \bar{q}] = \mathbf{O}(3)$, e podemos usar o terceiro teorema de Carr (teorema 2.3) para obter

$$h(y_3, y_4) = \begin{pmatrix} p(y_3, y_4) \\ q(y_3, y_4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{p}(y_3, y_4) \\ \bar{q}(y_3, y_4) \end{pmatrix} + \mathbf{O}(3). \quad (4.22)$$

Note que em (4.16) $p(y_3, y_4)$ e $q(y_3, y_4)$ são multiplicados por y_3 e, em vista disto foi escolhido os polinômios $\bar{p}(y_3, y_4)$ e $\bar{q}(y_3, y_4)$ de grau 2, pois termos de ordem maior ou igual a 3 em (4.22) serão multiplicados por y_3 , resultando em termos de ordem maior ou igual a 4, os quais não influenciam na dinâmica do sistema.

Fazendo agora, a mudança de variável $y_3 = u$ e $y_4 = \sqrt{a_6}v$ temos

$$\begin{aligned} \dot{y}_3 &= \dot{u}, \\ \dot{y}_4 &= \sqrt{a_6}\dot{v}. \end{aligned}$$

Assim, podemos escrever o sistema (4.16) como

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{a_6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{a_6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \begin{pmatrix} -a_1a_5p(u, \sqrt{a_6})u - a_2a_5p(u, \sqrt{a_6}) \\ + \frac{M^{(3)}(0)}{2I}a_6v^2 + \frac{(a_6 - 6a_6a_4a_5)}{6}u^3 \\ + a_4a_5u\sqrt{a_6}v + \frac{M^{(3)}(0)}{6I}a_6\sqrt{a_6}v^3 \end{pmatrix} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \mathbf{O}(4) \end{pmatrix}. \quad (4.23)$$

Usando-se (4.19) e (4.22) escrevemos a variedade central $h(y_3, y_4)$ nas novas variáveis na forma

$$\begin{cases} p(u, \sqrt{a_6}v) = B_1u^2 + \sqrt{a_6}B_2uv + a_6B_3v^2 + \mathbf{O}(3), \\ q(u, \sqrt{a_6}v) = C_1u^2 + \sqrt{a_6}C_2uv + a_6C_3v^2 + \mathbf{O}(3). \end{cases} \quad (4.24)$$

Agora, fazendo

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{a_6} \end{pmatrix},$$

então

$$N^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{a_6}} \end{pmatrix}.$$

Portanto, substituindo (4.24) em (4.23) e multiplicando ambos os membros por N^{-1} obtemos

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{a_6} \\ -\sqrt{a_6} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \left(-\left(\frac{a_1a_5}{\sqrt{a_6}}B_1 + \frac{a_2a_5}{\sqrt{a_6}}C_1 - \frac{\sqrt{a_6}}{6}(1 - 6a_4a_5) \right) u^3 \right. \\ \left. -(a_1a_5B_2 + a_2a_5C_2)u^2v \right. \\ \left. -(a_1a_5\sqrt{a_6}B_3 + a_2a_5C_3 - a_4a_5\sqrt{a_6})uv^2 \right. \\ \left. + \frac{M^3(0)}{6I}a_6v^3 + \frac{M^2(0)}{2I}\sqrt{a_6}v^2 \right) \\ 0 \\ \mathbf{O}(4) \end{pmatrix}. \quad (4.25)$$

Se um sistema bi-dimensional está na forma

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix},$$

com $f(0) = g(0) = 0$ e $Df(0) = Dg(0) = 0$, então o valor do coeficiente k é dado por

$$k = \frac{1}{16}[f_{xxx} + f_{xyy} + g_{xxy} + g_{yyy}] + \frac{1}{16\omega}[f_{xy}(f_{xx} + f_{yy}) - g_{xy}(g_{xx} + g_{yy}) - f_{xx}g_{xx} + f_{yy}g_{yy}]$$

sendo $f_{xxx} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}$, $f_{xyy} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}$ e assim por diante (ver [8] ou [14]). O valor das derivadas parciais é calculado no ponto de bifurcação. Portanto, de (4.25) obtemos

$$k = \frac{2a_2a_4a_5a_6^2}{(a_1 + 4a_6)^2 + 4a_2^2a_6} + \frac{1}{16I}M^{(3)}(0)a_6, \quad (4.26)$$

e se a eq. (4.26) for diferente de zero, temos a bifurcação de Hopf. Além disso, se $M^{(3)}(0) = 0$ e como $a_2 < 0$, obtemos uma bifurcação de Hopf super-crítica.

Usando o resultado anterior, podemos obter algumas informações sobre o caso $M(0) \neq 0$. Anteriormente fixamos $\delta_0 = -1$ e $\gamma_0 = 0$. Note que $(\gamma_0, \delta_0) = (0, -1)$ satisfaz (4.3) e $(0, -1) \notin \mathcal{S}$. Desde que

$$\frac{\partial P}{\partial \gamma}(0, -1) = a_2((a_1 + a_6)^2 + a_1^2 a_6) \neq 0,$$

então usando o teorema da função implícita segue que existe uma função $\gamma(\delta)$, a qual é definida em uma vizinhança de -1 , e tal que $\gamma(-1) = 0$ e $P(\gamma(\delta), \delta) = 0$. Sobre a continuidade de γ , podemos assumir que $(\gamma(\delta), \delta)$ satisfaz (4.3) e $(0, -1) \notin \mathcal{S}$. Disto e da observação (4.1), obtemos que d e k são funções contínuas de δ e μ . De fato $d = d(\delta, \mu)$ e $k = k(\delta, \mu)$ e sobre os cálculos anteriores segue que

$$d(-1, 0) = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad k(-1, 0) = \frac{2a_2 a_4 a_5 a_6^2}{(a_1 + 4a_6)^2 + 4a_2^2 a_6} + \frac{a_6 M^{(3)}(0)}{16I}.$$

Assim, em uma vizinhança adequada de $(-1, 0)$ temos que $d(\delta, \mu) \neq 0$ e $k(\delta, \mu) \neq 0$ se a relação (4.26) for diferente de zero. Disto, obtemos uma bifurcação de Hopf. Usando (3.12), temos $\delta = \cos \varphi_0 = -(1 - (M(0)/mgr)^2)^{1/2}$ e a existência da bifurcação de Hopf pode ser escrita na seguinte forma (ver [3]).

Se (4.26) for diferente de zero, então para todo $M(0)$ adequadamente pequeno, existe uma bifurcação de Hopf no espaço de fase do sistema dinâmico dado por (3.7) e (3.8).

4.3 Resultados Numéricos

4.3.1 Bifurcação de Hopf para um caso particular

Com o intuito de constatar numericamente a bifurcação de Hopf para o caso particular (seção 4.2), simulamos as equações (3.13) fixando para a constante A o valor $A = 0$, e utilizando vários valores para a constante B . Para os parâmetros físicos do sistema, adotamos os mesmos valores adotados na seção 3.4. Além disso, nesta subseção consideramos que B assume valores negativos. O modelo de torque considerado aqui é o linear já que o torque exponencial para o caso particular $A = 0$ não é adequado.

Inicialmente mostraremos a mudança de sinal na parte real dos autovalores quando B cruza o valor crítico $B_c = 0$ (tab. 4.1).

Tabela 4.1: Autovalores para diferentes valores de B .

$A = 0$ e $B_c = 0$	$A = 0$ e $B = -0.00005$	$A = 0$ e $B = 0.00005$
autovalores	autovalores	autovalores
4.385057068i	0.00049019 + 4.38505704i	-0.00049019 + 4.38505704i
-4.385057068i	0.00049019 - 4.38505704i	-0.00049019 - 4.38505704i
-0.05 + 0.384057287i	-0.05 + 0.38405728i	-0.05 + 0.38405728i
-0.05 - 0.384057287i	-0.05 - 0.38405728i	-0.05 - 0.38405728i

Para mostrar o comportamento do sistema dinâmico para diferentes valores de B , integramos as equações (3.13) e analisamos as soluções estacionárias. Nas figuras (4.1) e (4.2) mostramos respectivamente os espaços de fases (y_1, y_2) e (y_3, y_4) para vários valores do parâmetro B . O diagrama de bifurcação da variável y_1 é mostrado na figura (4.3) e (4.4).

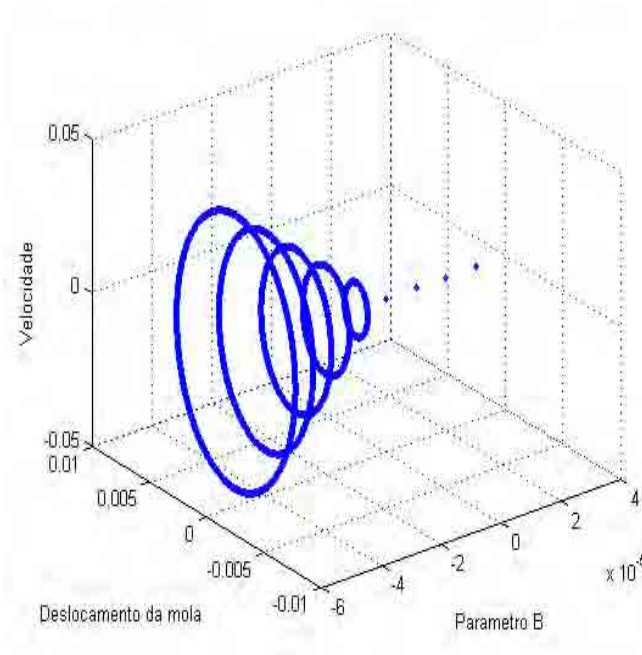


Figura 4.1: Espaços de fases (y_1, y_2) para diferentes valores de B

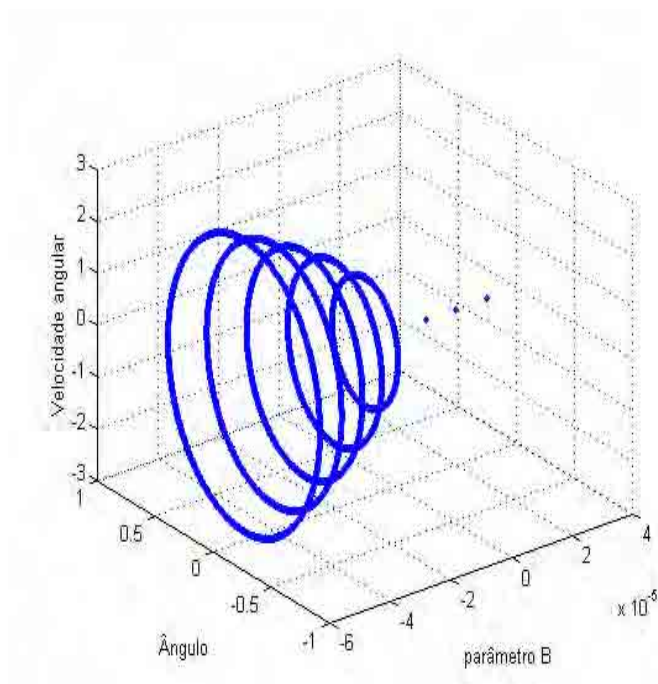


Figura 4.2: Espaços de fases (y_3, y_4) para diferentes valores de B

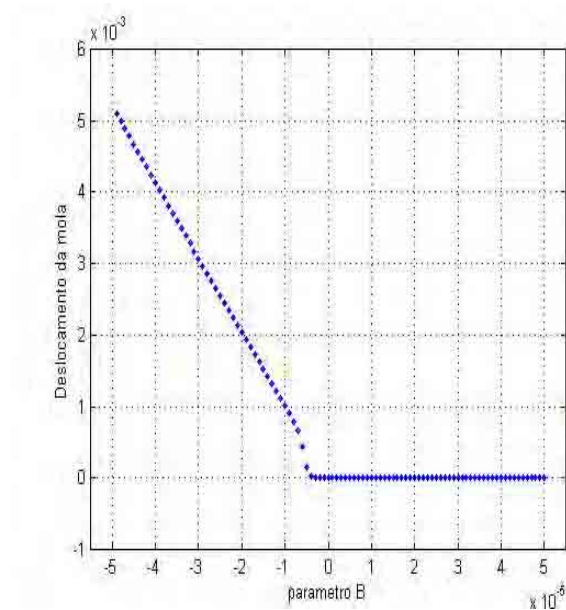


Figura 4.3: Diagrama de bifurcação da variável y_1

O diagrama de bifurcação é o obtido simulando o sistema dinâmico para vários valores do parâmetro B , e notamos que a bifurcação ocorre quando a inclinação da reta $M(y_4) = -By_4$ cruza o valor $M'(y_4) = 0$. Na figura (4.5) estão mostradas retas características para diferentes valores de B . Note, pelo diagrama de bifurcação e pela expressão de $M'(y_4)$ que, quando $B < 0$, temos que $M'(y_4) > 0$ e, neste caso, as trajetórias para cada valor de B são trajetórias

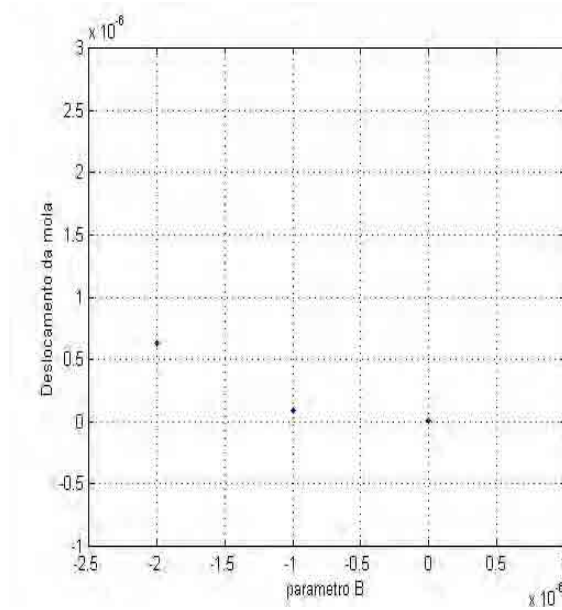


Figura 4.4: Ampliação da figura 4.3 em torno da origem.

periódicas nos retratos de fase de (y_1, y_2) e (y_3, y_4) . Para $B > 0$ temos $M'(y_4) < 0$, e assim essas trajetórias são assintoticamente estáveis.

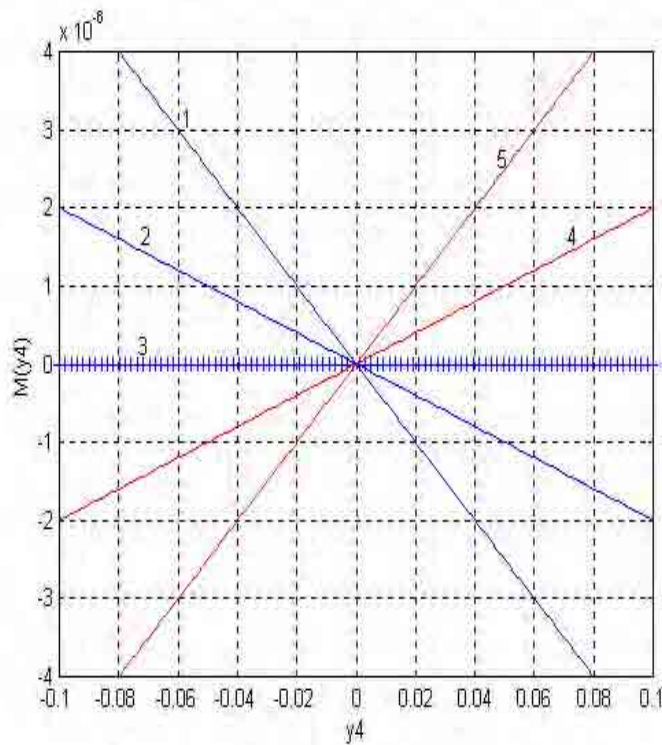


Figura 4.5: Função torque para o caso particular $M(y_4) = -By_4$. As retas 1 ($B = 0.00005$) e 2 ($B = 0.00002$) correspondem a $M'(y_4) < 0$, a reta 3 é o caso crítico $M'(y_4) = 0$ e as retas 4 ($B = -0.00002$) e 5 ($B = -0.00005$) referem-se a $M'(y_4) > 0$.

Capítulo 5

Análise da dinâmica do sistema através do método de Melnikov

Neste capítulo, consideramos um tipo de mola com rigidez menor. Em particular, assumimos que o coeficiente de não-linearidade da mola d seja estritamente negativo. Em vista disto, surge um par de equilíbrio do tipo sela na dinâmica da mola. Um aspecto que será discutido é um possível surgimento de vibrações caóticas nesta estrutura. Para detectar a dinâmica caótica, usaremos o método clássico de Melnikov. A idéia básica desse método, é que se pode provar analiticamente a existência de bifurcações homoclínicas ou heteroclínicas em sistemas Hamiltonianos perturbados. Neste sentido, reescreveremos as equações Hamiltonianas de movimento do vibrador centrífugo eqs.(3.28) usando uma função Hamiltoniana com uma perturbação em primeira potência de ϵ (definiremos ϵ posteriormente). Além disso, usaremos um método de redução de graus de liberdade dado em [9] e aplicaremos a teoria de Melnikov neste sistema reduzido, usando a função de Melnikov assim como ela é dada em [19].

5.1 Formulação do Problema num Campo Hamiltoniano Perturbado

Iniciamos esta seção voltando a atenção para a pequena massa m acoplada à parte giratória do motor. Fisicamente falando, quando o motor entra em rotação, vibrações diferentes na estrutura de sustentação do motor pode ocorrer quando consideramos que o motor gira sem massa ou com a pequena massa m . Desta forma, podemos considerar a massa m como

um agente perturbador na dinâmica de vibração da estrutura. Além do mais, consideraremos perturbações para um pequeno valor da massa m . Assim, assumindo a massa m como um pequeno parâmetro ϵ e fazendo as seguintes mudanças de variáveis

$$x = \frac{q}{\sqrt{m_0}}, \quad P_x = p\sqrt{m_0} \quad \text{e} \quad P_\varphi = K,$$

a função Hamiltoniana (3.22) é reescrita nas novas coordenadas como uma função que depende de q, p, φ, K e do pequeno parâmetro ϵ na forma

$$\begin{aligned} H_\epsilon(q, p, \varphi, K) &= \frac{(J + \epsilon)m_0P^2 + 2\epsilon(\sin\varphi)\sqrt{m_0}pK + (\epsilon + m_0)K^2}{2[(\epsilon + m_0)(J + \epsilon) - \epsilon^2\sin^2\varphi]} \\ &+ \frac{1}{2}c\frac{q^2}{m_0} + \frac{1}{4}d\frac{q^4}{m_0^2} + \epsilon g \cos \varphi. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Agora, expandido H_ϵ em série em torno de $\epsilon = 0$, reescrevemos (5.1) como uma Hamiltoniana com uma perturbação em primeira potência de ϵ na forma

$$H_\epsilon(q, p, \varphi, K) = H_0(q, p, K) + \epsilon H_1(q, p, \varphi, K) + \mathbf{O}(\epsilon^2) \quad (5.2)$$

onde

$$H_0(q, p, K) = F(q, p) + G(K), \quad F(q, p) = \frac{p^2}{2} + \frac{1}{2}\omega^2 q^2 - \frac{1}{4}\omega_1^2 q^4, \quad G(K) = \frac{K^2}{2J},$$

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m_0}}, \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{|d|}{m_0^2}} \quad \text{e} \quad H_1(q, p, \varphi, K) = -\frac{J^2 p^2 - 2\sqrt{m_0}J(\sin\varphi)pK + m_0 K^2}{2m_0 J^2} + g \cos \varphi.$$

Considerando que sejam forças de pequenas intensidades a resistência ao movimento oscilatório $\beta\dot{x}$ e o torque resultante gerado pelo motor $M(\cdot)$, então substituindo β por $\epsilon\beta$ e $M(\cdot)$ por $\epsilon M(\cdot)$ nas equações de movimento (3.28) e usando a Hamiltoniana perturbada (5.2) obtemos

$$\begin{cases} \dot{q} &= \frac{\partial F}{\partial p} + \epsilon \frac{\partial H_1}{\partial p} + \mathbf{O}(\epsilon^2), \\ \dot{p} &= -\frac{\partial F}{\partial q} - \epsilon \left(\frac{\partial H_1}{\partial q} + \frac{\beta p}{m_0} \right) + \mathbf{O}(\epsilon^2), \\ \dot{\varphi} &= \frac{\partial G}{\partial K} + \epsilon \frac{\partial H_1}{\partial K} + \mathbf{O}(\epsilon^2), \\ \dot{K} &= \epsilon \left(-\frac{\partial H_1}{\partial \varphi} + M \left(\frac{K}{J} \right) \right) + \mathbf{O}(\epsilon^2). \end{cases} \quad (5.3)$$

Fazendo $\epsilon = 0$ e usando a equação (5.2) o sistema (5.3) é reescrito como

$$\begin{cases} \dot{q} &= p, \\ \dot{p} &= -\omega^2 q + \omega_1^2 q^3, \\ \dot{\varphi} &= \frac{K}{J}, \\ \dot{K} &= 0. \end{cases} \quad (5.4)$$

Note que em (5.4) as dinâmicas do motor e da mola estão desacopladas. Além disso, a mola possui um par de pontos de equilíbrio $(\pm\omega/\omega_1, 0)$ cujos autovalores da matriz jacobiana associada a esses pontos são $\lambda_{1,2} = \pm\omega\sqrt{2}$, que são reais com sinais opostos e portanto esses pontos são do tipo sela. Tais pontos contém uma órbita heteroclínica conectando esses pontos, no qual a energia do sistema na órbita é conservada e esta órbita é dada por $F(p, q) = \frac{1}{4}\frac{\omega^4}{\omega_1^2}$.

De agora em diante, concentraremos em obter informações sobre a dinâmica do sistema vibrante (5.3) no caso $\epsilon \neq 0$ e suficientemente pequeno. Como tínhamos dito anteriormente, usaremos o método clássico de Melnikov e em vista disto, aplicaremos primeiramente neste sistema o método de redução de graus de liberdade [9] (ver Apêndice A), e avaliaremos a dinâmica do sistema reduzido.

Primeiramente, observe que o sistema (5.3) é semelhante ao sistema (A.15) do Apêndice A, onde a função de energia $z = H_\epsilon(q, p, \varphi, z) = H_0(q, p, z) + \epsilon H_1(q, p, \varphi, z) + \mathbf{O}(\epsilon^2)$ não é mais conservada, ou seja, diferenciando z e usando o sistema (5.3) temos

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \frac{\partial H_\epsilon}{\partial q} \left(\frac{\partial F}{\partial p} + \epsilon \frac{\partial H_1}{\partial p} + \mathbf{O}(\epsilon^2) \right) + \frac{\partial H_\epsilon}{\partial p} \left[-\frac{\partial F}{\partial q} - \left(\frac{\partial H_1}{\partial q} + \frac{\beta}{m_0} p \right) \epsilon + \mathbf{O}(\epsilon^2) \right] \\ &+ \frac{\partial H_\epsilon}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial G}{\partial K} + \epsilon \frac{\partial H_1}{\partial K} + \mathbf{O}(\epsilon^2) \right) + \frac{\partial H_\epsilon}{\partial K} \left[\left(-\frac{\partial H_1}{\partial \varphi} + M \left(\frac{K}{J} \right) \right) \epsilon + \mathbf{O}(\epsilon^2) \right] \\ &= \frac{\partial H_\epsilon}{\partial q} \left(\frac{\partial F}{\partial p} + \epsilon \frac{\partial H_1}{\partial p} + \mathbf{O}(\epsilon^2) \right) + \frac{\partial H_\epsilon}{\partial p} \left(-\frac{\partial F}{\partial q} - \epsilon \frac{\partial H_1}{\partial q} + \mathbf{O}(\epsilon^2) \right) \\ &+ \frac{\partial H_\epsilon}{\partial \varphi} \left(\frac{\partial G}{\partial K} + \epsilon \frac{\partial H_1}{\partial K} + \mathbf{O}(\epsilon^2) \right) + \frac{\partial H_\epsilon}{\partial K} \left(-\epsilon \frac{\partial H_1}{\partial \varphi} + \mathbf{O}(\epsilon^2) \right) \\ &+ \frac{\partial H_\epsilon}{\partial p} \left(-\epsilon \frac{\beta}{m_0} p \right) + \frac{\partial H_\epsilon}{\partial K} \epsilon M \left(\frac{K}{J} \right). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Note que nesta última equação os quatro primeiros termos representam a Hamiltoniana de um sistema conservativo e portanto se anulam. Assim a eq. (5.5) torna-se

$$\dot{z} = \epsilon \left[\frac{\partial H_\epsilon}{\partial K} M \left(\frac{K}{J} \right) - \frac{\partial H_\epsilon}{\partial p} \left(\frac{\beta}{m_0} p \right) \right]$$

Note também que se $\epsilon = 0$, então a energia z é conservada. Agora, aplicaremos o método de redução dado em [9].

Como $\frac{\partial H_\epsilon}{\partial K} = \frac{\partial G}{\partial K} + \epsilon \frac{\partial H_1}{\partial K} + \mathbf{O}(\epsilon^2)$ e $\frac{\partial G}{\partial K} > 0$ para $K > 0$, assim para ϵ suficientemente pequeno temos que $\frac{\partial H_\epsilon}{\partial K} > 0$. Desta forma, podemos resolver H_ϵ implicitamente em K escrevendo K como uma função de q, p, φ e z na forma

$$K = L_\epsilon(q, p, \varphi, z).$$

onde

$$L_\epsilon(q, p, \varphi, z) = L_0(q, p, z) + \epsilon L_1(q, p, \varphi, z) + \mathbf{O}(\epsilon^2).$$

Usando a proposição (A.1) e a Hamiltoniana $H_\epsilon(q, p, \varphi, K) = z$ temos

$$L_0(q, p, z) = G^{-1}(z - F(q, p)) = \sqrt{2J \left[z - \left(\frac{p^2}{2} + \frac{1}{2}\omega^2 q^2 - \frac{1}{4}\omega_1 q^4 \right) \right]},$$

$$L_1(q, p, \varphi, z) = -\frac{H_1(q, p, \varphi, L_0(q, p, z))}{L_0(q, p, z)}.$$

De (5.3) temos que, para $\epsilon = 0$ podemos escrever t em função de φ , e então para ϵ suficientemente pequeno podemos eliminar t invertendo $\varphi = \varphi(t)$. Desta maneira é possível expressar q e p como funções de φ .

Assim, podemos eliminar t de (5.3) pelas relações

$$q' = \frac{dq}{d\varphi} = \frac{\dot{q}}{\dot{\varphi}}, \quad p' = \frac{dp}{d\varphi} = \frac{\dot{p}}{\dot{\varphi}} \quad \text{e} \quad z' = \frac{dz}{d\varphi} = \frac{\dot{H}_\epsilon}{\dot{\varphi}}.$$

Como tínhamos dito anteriormente, o sistema (5.3) é análogo ao sistema (A.15). Portanto, podemos usar o sistema (A.22) para escrever as equações do sistema reduzido na forma

$$\begin{cases} q' = -\frac{\partial L_0}{\partial q} - \epsilon \frac{\partial L_1}{\partial q} + \mathbf{O}(\epsilon^2), \\ p' = \frac{\partial L_0}{\partial p} + \epsilon \left(\frac{\partial L_1}{\partial p} + \frac{J\beta p}{m_0 L_0(q, p, z)} \right) + \mathbf{O}(\epsilon^2), \\ z' = \epsilon \frac{L_0(q, p, z)}{J} \left[M \left(\frac{L_0(q, p, z)}{J} \right) + \frac{\beta}{m_0} \frac{\partial L_0}{\partial p} p \right] + \mathbf{O}(\epsilon^2), \end{cases} \quad (5.6)$$

onde as variáveis p e q são parametrizadas pela variável angular φ .

Tomando $\epsilon = 0$ na equação anterior temos

$$\begin{cases} q' = \frac{Jp}{L_0}, \\ p' = -\frac{J}{L_0}(\omega^2 q - \omega_1^2 q^3), \\ z' = 0. \end{cases} \quad (5.7)$$

Note que o sistema tri-dimensional (5.6) é reduzido a um sistema bi-dimensional (5.7), no qual a energia z é constante e pode ser olhada como um parâmetro em L_0 . Os pontos de equilíbrio dessa equação são $P_1^* = (0, 0)$ e $P_{2,3}^* = (\pm\omega/\omega_1, 0)$. Procuremos agora analisar que estrutura dinâmica apresenta o sistema não perturbado (5.7). A matriz jacobiana do sistema (5.7) é dada por

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial q} \left(-\frac{\partial L_0}{\partial p} \right) & \frac{\partial}{\partial p} \left(-\frac{\partial L_0}{\partial p} \right) \\ \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\partial L_0}{\partial q} \right) & \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial L_0}{\partial q} \right) \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

onde

$$-\frac{\partial L_0}{\partial p} = \frac{Jp}{L_0} \quad \text{e} \quad \frac{\partial L_0}{\partial q} = -\frac{J}{L_0}(\omega^2 q - \omega_1^2 q^3).$$

Assim

$$\frac{\partial}{\partial q} \left(-\frac{\partial L_0}{\partial p} \right) = \frac{J^2 p}{(L_0)^3} (\omega^2 q - \omega_1^2 q^3), \quad (5.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial p} \left(-\frac{\partial L_0}{\partial p} \right) = J \frac{[(L_0)^2 + Jp^2]}{(L_0)^3}, \quad (5.10)$$

$$\frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\partial L_0}{\partial q} \right) = -J \frac{[(\omega^2 - 3\omega_1^2 q^2)L_0 + (J/L_0)(\omega^2 q - \omega_1^2 q^3)^2]}{(L_0)^2}, \quad (5.11)$$

$$\frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial L_0}{\partial q} \right) = -J^2 \frac{(\omega^2 q - \omega_1^2 q^3)p}{(L_0)^3}. \quad (5.12)$$

Usando as equações (5.9), a (5.12), a matriz jacobiana (5.8) avaliada nos pontos $P_{2,3}^*$ torna-se

$$A_{P_{2,3}^*} = \begin{bmatrix} 0 & k_0 \\ 2\omega^2 k_0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.13)$$

onde $k_0 = \frac{J}{\sqrt{2J(z_0 - (\omega^4/4\omega_1^2))}}$.

Portanto, os autovalores da matriz $A_{P_{2,3}^*}$ são $\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{2}\omega k_0$, que são reais com sinais opostos se $z_0 > \frac{\omega^4}{4\omega_1^2}$. Então os pontos de equilíbrio $P_{2,3}^*$ são selas. Uma maneira equivalente de se mostrar que esses pontos são do tipo sela é verificar que o determinante de $A_{P_{2,3}^*}$ é menor que zero.

Sobre as eqs. (5.4) e (5.7) vemos que a estrutura na dinâmica da mola do sistema não-perturbado é preservada sob processo de redução de graus de liberdade. Além disso, vemos que a energia z é conservada e desta forma como $L_0(q, p, z)$ é função de energia, temos que L_0 é constante na órbita e vale $\bar{L}_0 = \sqrt{2J(z_0 - \omega^4/4\omega_1^2)}$. Assim, a dinâmica do sistema (5.7) na órbita é regida por

$$\begin{cases} q' = k_0 p, \\ p' = -k_0(\omega^2 q - \omega_1^2 q^3), \\ z' = 0. \end{cases}$$

onde k_0 é dado como em (5.13).

Portanto, as órbitas heteroclínicas são dadas por

$q(\varphi) = q_0(k_0\varphi)$, $p(\varphi) = p_0(k_0\varphi)$ e $\bar{q}(\varphi) = -q(\varphi)$, $\bar{p}(\varphi) = -p(\varphi)$ onde $(q_0(\varphi), p_0(\varphi))$ é a órbita heteroclínica do sistema

$$\begin{cases} q'_0 &= p_0, \\ p'_0 &= -\omega^2 q_0 + \omega_1^2 q_0^3, \end{cases} \quad (5.14)$$

Note que a equação anterior (5.14) pode ser reescrita como

$$q''_0 + \omega^2 q_0 - \omega_1^2 q_0^3 = 0. \quad (5.15)$$

Para resolver a equação anterior (5.15) faremos a mudança de variável $q_0 = \frac{\omega}{\omega_1} y$. Assim a equação (5.15) é reescrita como

$$y'' + \omega^2 y(1 - y^2) = 0. \quad (5.16)$$

Faremos agora a mudança de variável $y = \tanh(\theta)$ sobre (5.16).

Agora a equação (5.16) é reescrita como

$$\theta'' - [2(\theta')^2 - \omega^2] \tanh(\theta) = 0. \quad (5.17)$$

Uma solução da equação (5.17) é a solução trivial $\theta(\varphi) = 0, \forall \varphi$. Como queremos um solução não-trivial, então observe que na eq.(5.17) se $\theta'' = 0$ temos uma solução, pois assim

$$-[2(\theta')^2 - \omega^2] \tanh(\theta) = 0,$$

onde agora $\theta(\varphi) \neq 0$ para quase todo φ pois $\theta' = \frac{\omega}{\sqrt{2}}$ é uma solução da equação acima. E então uma solução θ é $\theta = \theta(\varphi) = \frac{\omega\varphi}{\sqrt{2}} + \theta(0)$ que depende da condição inicial $\theta(0)$. Logo a solução de q_0 será $q_0(\varphi) = \frac{\omega}{\omega_1} \tanh\left(\frac{\omega\varphi}{\sqrt{2}} + \theta(0)\right)$. Escolhemos como condição inicial $q_0(0)$ o ponto onde a órbita cruza o eixo $p_0 > 0$ que é $q_0(0) = \frac{\omega}{\omega_1} \tanh(\theta(0)) = 0$ a qual implica que $\theta(0) = 0$.

Portanto, temos que

$$q_0(\varphi) = \frac{\omega}{\omega_1} \tanh\left(\frac{\omega\varphi}{\sqrt{2}}\right) \quad (5.18)$$

e conseqüentemente

$$p_0(\varphi) = \frac{\omega^2}{\sqrt{2}\omega_1} \operatorname{sech}^2\left(\frac{\omega\varphi}{\sqrt{2}}\right). \quad (5.19)$$

As eqs. (5.18) e (5.19) representam as órbitas heteroclínicas do sistema (5.14).

Em particular, investigaremos a existência de uma ferradura de Smale¹ na dinâmica do sistema (5.6) usando uma técnica dada em [19]. Considere os pontos de equilíbrio do sistema não perturbado (5.7), ou seja

$$\begin{cases} \frac{Jp}{L_0} = 0, \\ \frac{-J}{L_0}(\omega^2 q - \omega_1^2 q^3) = 0. \end{cases} \quad (5.20)$$

Assim, usando esta relação e o teorema da função implícita podemos escrever este equilíbrio como uma curva de pontos fixos do tipo sela em uma função suave de z . Chamaremos esta curva de \mathcal{M} e denotaremos por

$$\mathcal{M} = \left\{ (q(z), p(z), z) = \gamma(z) \mid (5.20) \text{ seja satisfeita e que } \frac{\partial}{\partial q} \left(-\frac{\partial L_0}{\partial p} \right) \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\partial L_0}{\partial q} \right) - \frac{\partial}{\partial p} \left(-\frac{\partial L_0}{\partial p} \right) \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\partial L_0}{\partial q} \right) < 0 \right\} \quad (5.21)$$

onde a desigualdade em (5.21) é o jacobiano de (5.8) calculado nas selas.

Na verdade, (5.21) é uma variedade invariante de pontos fixos e pode ser reescrita como

$$\mathcal{M} = \{ (\pm\omega/\omega_1, 0, z) = \gamma(z), z > \omega^4/4\omega_1^2 \}.$$

O espaço de fases do sistema não perturbado ($\epsilon = 0$) aparece como na figura (5.1).

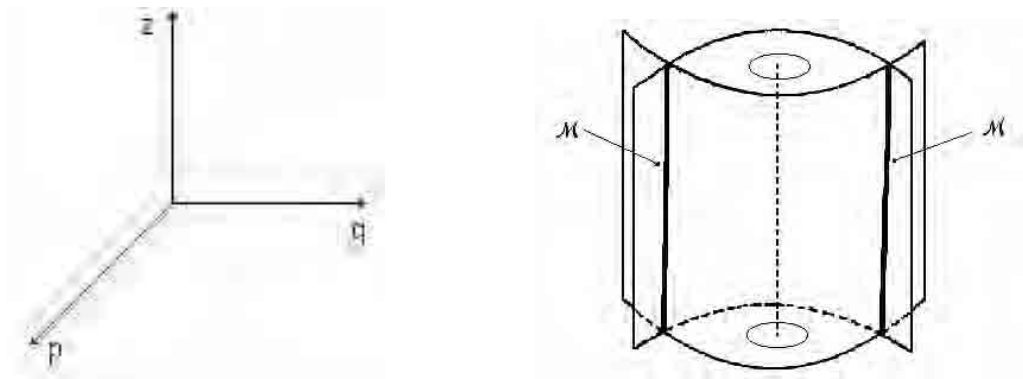


Figura 5.1: Espaço de fases e a variedade invariante \mathcal{M} .

Agora, usando o teorema (B.1) (apêndice B), para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno o sistema perturbado (5.6) tem uma variedade invariante a qual chamaremos de \mathcal{M}_ϵ e denotaremos por

$$\mathcal{M}_\epsilon = \{ \bar{\gamma}(z) = \gamma(z) + \mathbf{O}(\epsilon) \mid z > \omega^4/4\omega_1^2 \}.$$

¹Um estudo detalhado sobre ferradura de Smale pode ser encontrado em [18] e [19].

Observe que o fluxo de (5.6) em \mathcal{M}_ϵ é dado por

$$z' = \sqrt{\frac{2}{J} \left(z - \frac{\omega^4}{4\omega_1^2} \right)} M \left(\sqrt{\frac{2}{J} \left(z - \frac{\omega^4}{4\omega_1^2} \right)} \right) \epsilon + \mathbf{O}(\epsilon^2)$$

Definindo $s_0 = k_0^{-1}$ e usando o teorema (B.2), suponha que exista um z_0 tal que $M(s_0) = 0$ e $M'(s_0) \neq 0$. Então (5.6) tem uma órbita periódica hiperbólica em \mathcal{M}_ϵ na vizinhança de s_0 . Assim, sob estas condições podemos usar a função de Melnikov $\Delta(\varphi_0)$ dada por [19]

$$\begin{aligned} \Delta(\varphi_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} (\nabla H(q(\varphi), p(\varphi), z_0)) \cdot (g_1(q(\varphi), p(\varphi), z_0, \varphi + \varphi_0), \\ &\quad g_2(q(\varphi), p(\varphi), z_0, \varphi + \varphi_0), g_3(q(\varphi), p(\varphi), z_0, \varphi + \varphi_0)) d\varphi \\ &\quad - \frac{\partial H}{\partial z} \left(\frac{\omega}{\omega_1}, 0, z_0 \right) \int_{-\infty}^{\infty} g_3(q(\varphi), p(\varphi), z_0, \varphi + \varphi_0) d\varphi. \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} H &= -L_0, \quad g_1(q, p, \varphi, z) = -\frac{\partial L_1}{\partial p}, \quad g_2(q, p, \varphi, z) = \frac{\partial L_1}{\partial q} + \frac{J\beta p}{m_0 L_0(q, p, z)}, \\ g_3(q, p, \varphi, z) &= \frac{L_0(q, p, z)}{J} \left(M \left(\frac{L_0(q, p, z)}{J} \right) + \frac{\beta}{m_0} \frac{\partial L_0}{\partial p} p \right). \end{aligned}$$

A integração acima não é trivial, e o resultado é [4]

$$\Delta(\varphi_0) = \frac{\pi\sqrt{2}s_0^2}{\omega_1\sqrt{m_0} \sinh\left(\frac{\pi\sqrt{2}s_0}{2\omega}\right)} \cos \varphi_0 + \frac{2\sqrt{2}\beta\omega^3}{3m_0\omega_1^2 s_0}. \quad (5.22)$$

De acordo com Melnikov, em primeira aproximação de ϵ , a distância entre as variedades estável e instável ao ponto de sela no caso $\epsilon \neq 0$ é proporcional à função de Melnikov. Além disso, no caso de sistemas não-autônomos, toda vez que $\Delta(\varphi_0)$ se anula para alguma combinação de valores dos parâmetros, as variedades estável e instável podem interceptar transversalmente ou apenas se tangenciarem.

A seguir, investigaremos a possibilidades de zeros na função de Melnikov. Fazendo $\Delta(\varphi_0) = 0$ temos

$$\cos \varphi_0 = -\frac{2\beta\omega^3 \sinh\left(\frac{\pi s_0}{\sqrt{2}\omega}\right)}{3\sqrt{m_0}\omega_1 s_0^3 \pi}. \quad (5.23)$$

Temos que $-1 \leq \cos \varphi_0 \leq 1$ para todo $\varphi_0 \in \mathbb{R}$ e nos extremos $\cos \varphi_0 = \pm 1$ resulta $\sin \varphi_0 = 0$, e desta forma $\Delta(\varphi_0) = \Delta'(\varphi_0) = 0$, onde φ_0 é obtido fixando valores para os parâmetros em (5.23). Assim, nos extremos do intervalo acima a função de Melnikov $\Delta(\cdot)$ não tem zeros simples.

Portanto, analisaremos o caso $-1 < \cos \varphi_0 < 1$, isto é

$$-1 < -\frac{2\beta\omega^3 \sinh\left(\frac{\pi s_0}{\sqrt{2}\omega}\right)}{3\sqrt{m_0}\omega_1 s_0^3 \pi} < 1.$$

Destas desigualdades obtemos

$$0 < \frac{1}{s_0^3} \sinh\left(\frac{\pi s_0}{\sqrt{2}\omega}\right) < \frac{3\sqrt{m_0}\omega_1 \pi}{2\beta\omega^3} \quad (5.24)$$

e

$$\frac{1}{s_0^3} \sinh\left(\frac{\pi s_0}{\sqrt{2}\omega}\right) > -\frac{3\sqrt{m_0}\omega_1 \pi}{2\beta\omega^3}. \quad (5.25)$$

Vemos que as intersecções dos intervalos definidos por (5.24) e (5.25) resulta no intervalo definido pela desigualdade (5.24).

Assim, $\Delta(\varphi_0)$ tem zeros simples se e somente se

$$\frac{1}{s_0^3} \sinh\left(\frac{\pi s_0}{\sqrt{2}\omega}\right) < \frac{3\sqrt{m_0}\omega_1 \pi}{2\beta\omega^3}. \quad (5.26)$$

Agora, definimos a função $g : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ na forma

$$g(s) = \frac{1}{s^3} \sinh(s).$$

Temos que esta função tem um único valor mínimo $C \approx 0.37102$. Além disso, se $y_0 > C$ então existe dois valores u_{y_0} e v_{y_0} tais que $g(u_{y_0}) = g(v_{y_0}) = y_0$. Assim, $x \in (u_{y_0}, v_{y_0})$ se e somente se $g(x) < y_0$. Usando (5.26) e a função $g(s)$, obtemos que $\Delta(\varphi_0)$ tem zeros simples se e somente se

$$g\left(\frac{\pi s_0}{\sqrt{2}\omega}\right) = \frac{2\sqrt{2}\omega^3}{\pi^3} \frac{1}{s_0^3} \sinh\left(\frac{\pi s_0}{\sqrt{2}\omega}\right) < \frac{3\sqrt{2m_0}\omega_1}{\pi^2\beta} = \frac{D}{\beta} = E. \quad (5.27)$$

Esta última desigualdade fornece algumas informações sobre a função de Melnikov (5.22).

a) Se $0 \leq \beta < \frac{D}{C}$, então $E > C$ e portanto $\Delta(\cdot)$ tem zeros simples se e somente se

$$s_0 \in \left(\frac{\sqrt{2}\omega u_E}{\pi}, \frac{\sqrt{2}\omega v_E}{\pi} \right). \quad (5.28)$$

b) Se $\beta = \frac{D}{C}$, então $C = E$ e portanto $\Delta(\cdot)$ tem zeros se e somente se

$$s_0 = \frac{\sqrt{2}\omega u_E}{\pi} = \frac{\sqrt{2}\omega v_E}{\pi}.$$

Além disso, os zeros não são mais simples.

c) Se $\beta > \frac{D}{C}$, então $E < C$ e portanto $\Delta(\cdot)$ não tem zeros.

A partir das conclusões (a), (b) e (c) podemos obter algumas informações sobre a dinâmica de (5.6).

Se β e s_0 forem escolhidos de forma a satisfazer a condição (a), então pelo teorema (B.3), segue que para ϵ suficientemente pequeno existe intersecção transversal entre as variedades estável e instável do mapa de Poincaré associados ao sistema (5.6). Além do mais, temos hipóteses suficientes para usar o teorema homoclínico de Smale-Birkhoff (ver [8] ou [15]), e assim obtemos uma ferradura de Smale na dinâmica de (5.6). Temos também que, nos extremos do intervalo acima ou seja, $s_0 = \frac{\sqrt{2}\omega u_E}{\pi}$ ou $s_0 = \frac{\sqrt{2}\omega v_E}{\pi}$ a função de Melnikov não tem zeros simples e assim temos tangência homoclínica. Se

$$s_0 \notin \left(\frac{\sqrt{2}\omega u_E}{\pi}, \frac{\sqrt{2}\omega v_E}{\pi} \right)$$

a função de Melnikov não tem zeros e as variedades estável e instável não têm ponto em comum. Assim, se fixarmos um valor para β satisfazendo a condição (a) e tomarmos s_0 como um parâmetro, então uma bifurcação global ocorre quando s_0 cruza os extremos do intervalo $\left(\frac{\sqrt{2}\omega u_E}{\pi}, \frac{\sqrt{2}\omega v_E}{\pi} \right)$.

No caso (b) temos tangência homoclínica, no caso (c) a função de Melnikov $\Delta(\varphi_0)$ não tem zeros e portanto não há intersecção transversal entre as variedades. Neste caso não existe comportamento caótico.

5.2 Resultados Numéricos

Nesta seção, apresentaremos numericamente alguns dos resultados obtidas pelas análises feitas na seção anterior. Destacamos que a obtenção do *emaranhado* no mapa de Poincaré associado ao sistema (5.6) o qual caracteriza o comportamento caótico (movimento hipersensível às condições iniciais) não será mostrado devido a complexidade desta solução. Além disso, temos que a terceira das equações do sistema (5.6) depende do torque gerado pelo motor e em geral este torque é escolhido na forma linear ($M(x) = a - bx$) ou exponencial ($M(x) = ae^{-bx}$). Isto dificulta ainda mais a solução, pois esta equação fica aperiódica e isto impossibilita determinar uma seção de Poincaré.

Mostraremos o retrato de fases no caso $\epsilon = 0$ do sistema reduzido (5.6), e em seguida

mostraremos os casos (a), (b) e (c) apresentados no final da seção 5.1 sobre a função $\Delta(\varphi_0)$. Para isto adotamos valores para os parâmetros $c = 0.3$, $d = -0.06$, $m_0 = 2.0$ e $J = 0.001$.

A figura (5.2) mostra o retrato de fases q versus p de (5.6) para $\epsilon = 0$, e nela observa-se a presença de uma órbita heteroclínica conectando os pontos de sela $(\pm 3.162, 0)$ e centros. A variedade instável do ponto de sela $(-3.162, 0)$ para o caso $\epsilon = 0$ e $\epsilon = 0.00001$ estão mostradas respectivamente nas figuras (5.3a) e (5.3b). Nas figuras (5.4) a (5.9) apresentamos alguns gráficos da função $\Delta(\varphi_0)$ dada pela eq.(5.22), relativos aos casos (a), (b) e (c) discutidos no final da seção anterior.

Nas figuras (5.4), (5.5) e (5.6) fixamos $\beta = 0.1$, e tomamos s_0 como um parâmetro a ser variado. Usando as relações (5.27) e (5.28) e $\beta = 0.1$ obtemos o intervalo $(0.2325, 0.9636)$. A figura (5.4) mostra o oscilograma da função (5.22) quando tomamos $s_0 = 0.5$ e neste caso nota-se a presença de zeros simples. Nas figuras (5.5) e (5.6) mostramos respectivamente para $s_0 = 0.2325$ e $s_0 = 0.9636$, e nestes casos a função $\Delta(\varphi_0)$ tem zeros, mas não são simples. Na figura (5.7) é mostrado o resultado para $s_0 = 1.0$, e neste caso vemos que a função não tem zeros.

Na figura (5.8) é apresentado o resultado referente ao caso (b) e por isso foi tomado $\beta = 0.2006780233$ e $s_0 = 0.5203690288$. Observa-se que neste caso a função $\Delta(\varphi_0)$ tem zeros mas não são simples.

Na figura (5.9) foi tomado $\frac{D}{C} < \beta = 0.21$ e neste caso a função de Melnikov $\Delta(\varphi_0)$ associada à dinâmica de (5.6) não tem zeros.

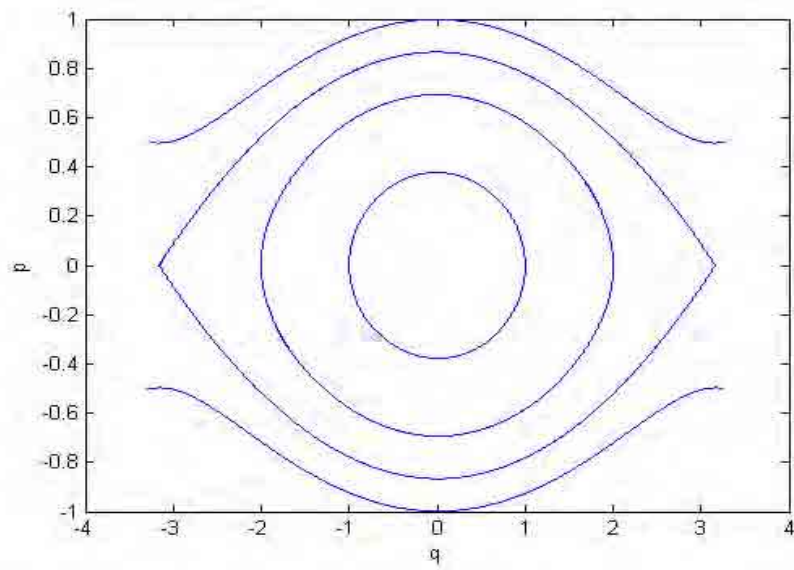


Figura 5.2: Retrato de fases do sistema não perturbado (5.7). Os pontos de sela são $(\pm 3.162, 0)$.

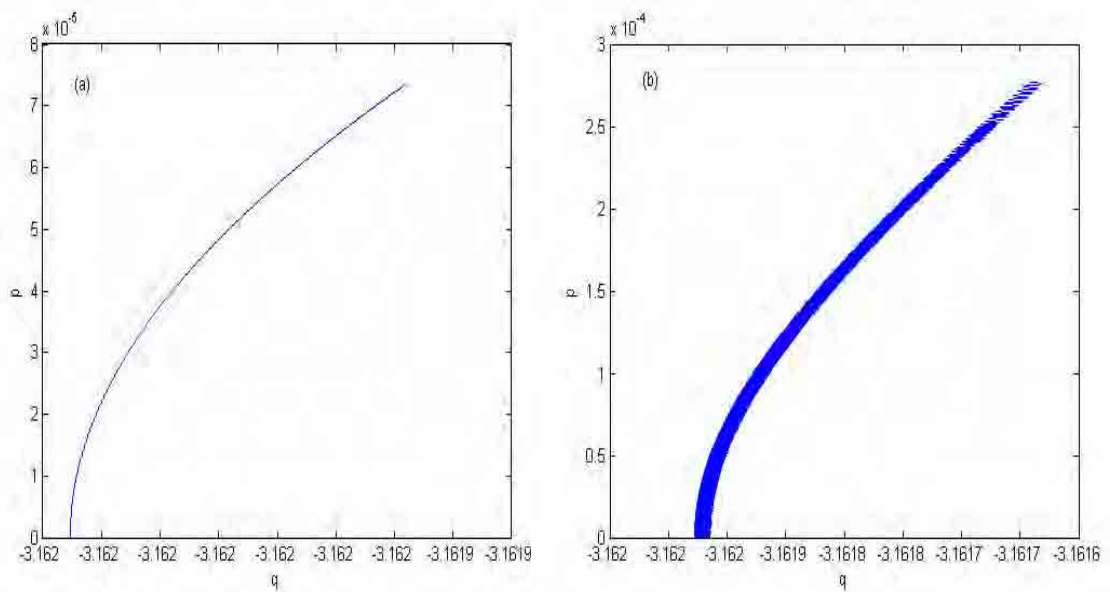


Figura 5.3: Variedade instável do ponto de sela $(-3.162, 0)$. (a) Caso $\epsilon = 0$. (b) Caso $\epsilon = 0.00001$.

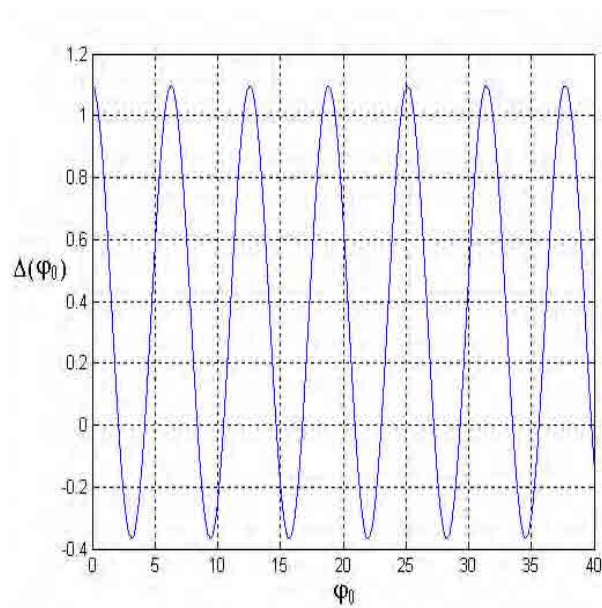


Figura 5.4: Função $\Delta(\varphi_0)$ para $\beta = 0.1$ e $s_0 = 0.5$. Os Zeros são simples.

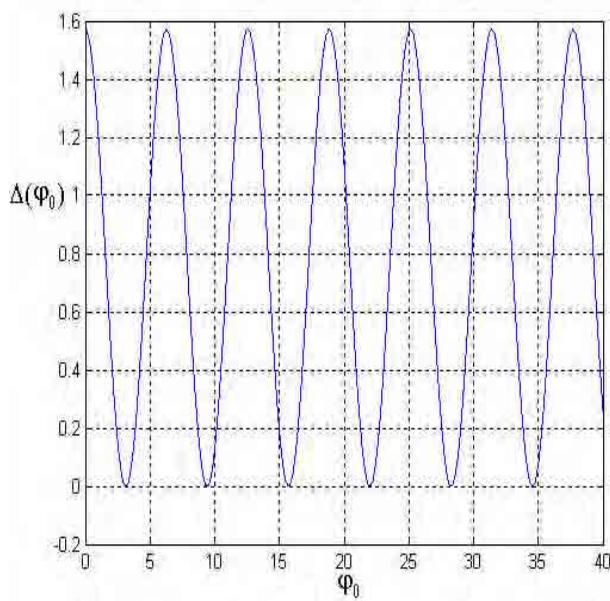


Figura 5.5: Função $\Delta(\varphi_0)$ para $\beta = 0.1$ e $s_0 = 0.2325$. Os Zeros são duplos.

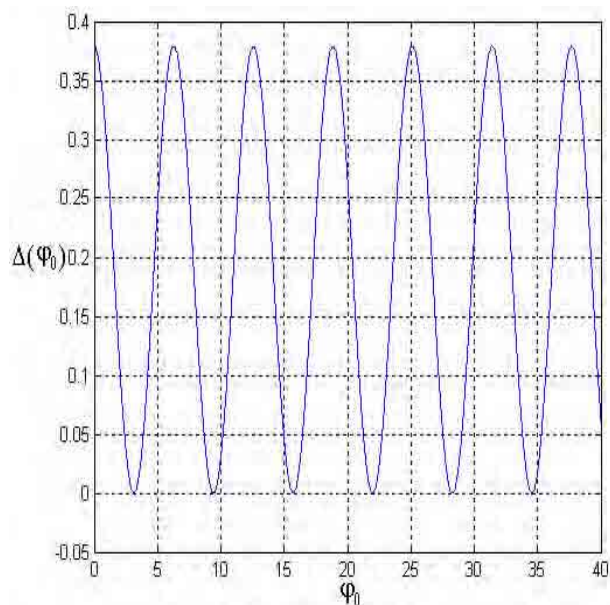


Figura 5.6: Função $\Delta(\varphi_0)$ para $\beta = 0.1$ e $s_0 = 0.9636$. Os Zeros são duplos.

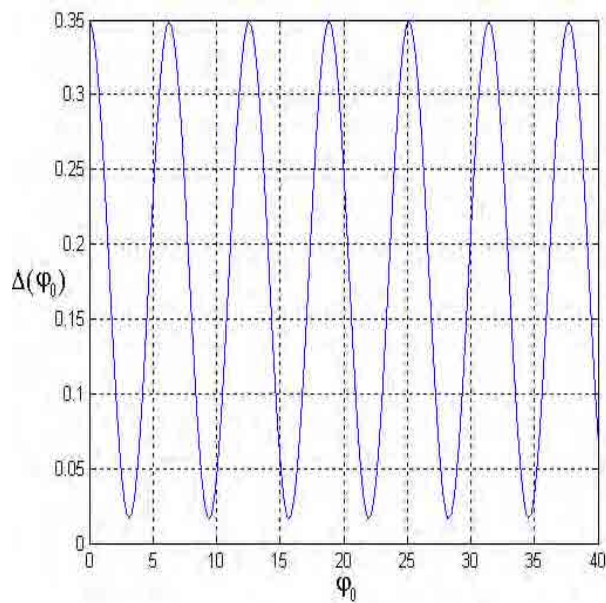


Figura 5.7: Função $\Delta(\varphi_0)$ para $\beta = 0.1$ e $s_0 = 1.0$. Não há zeros.

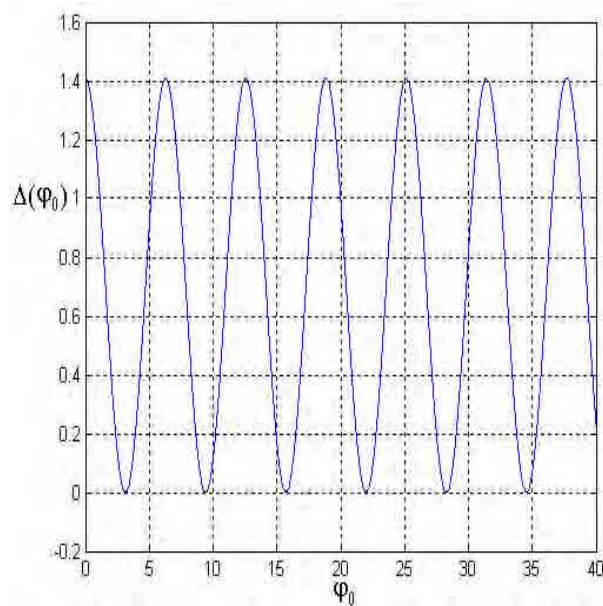


Figura 5.8: Função $\Delta(\varphi_0)$ para $\beta = 0.2006780233$ e $s_0 = 0.5203690288$. Os Zeros são duplos.

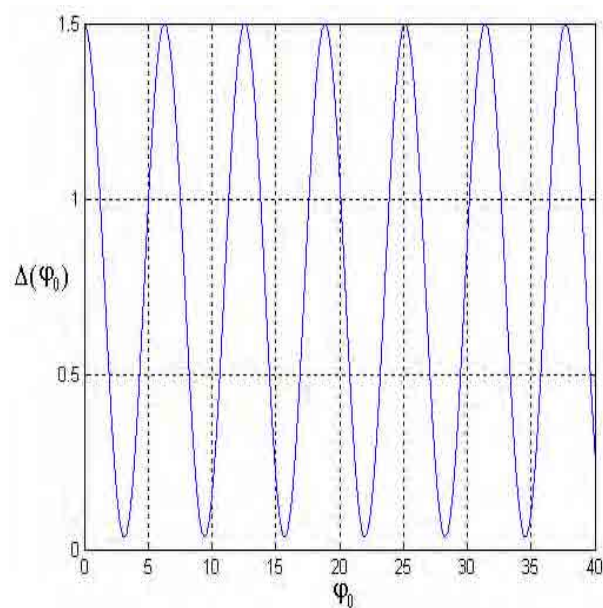


Figura 5.9: Função $\Delta(\varphi_0)$ para $\beta = 0.21$ e $s_0 = 0.5$. Não há zeros.

Capítulo 6

Conclusões

Após a análise dos estudos analíticos, desenvolvidos por Dantas e Balthazar [3, 4], foram obtidos alguns resultados numéricos mediante simulações computacionais do sistema dinâmico estudado nesta dissertação.

Inicialmente as simulações foram feitas com o objetivo de investigar o comportamento do sistema dinâmico na vizinhança do ponto de equilíbrio estável, quando adotamos o modelo linear ou o modelo exponencial para a curva característica do torque resultante gerado pelo motor. Percebe-se entre estes dois casos, uma ligeira diferença na bacia de atração do ponto de equilíbrio, e no comportamento das soluções. Para o modelo de torque linear, a convergência das trajetórias em função do tempo é mais rápida do que quando o modelo de torque é o exponencial. Além disso, uma maior sensibilidade em relação às condições iniciais é sentida quando o torque adotado é o exponencial.

Com respeito aos efeitos da ressonância entre a frequência do motor e da mola, a passagem pela ressonância acarreta um aumento significativo na amplitude máxima de oscilação da mola, que é restabelecida depois da passagem. Este é o já bem conhecido efeito *Sommerfeld* o qual foi bastante comentado por Kononenko [10]. Um comportamento interessante aparece quando a frequência do motor começa a sair da região de ressonância. É observado o aparecimento de modulações de pequena amplitude, e depois uma vibração de maior amplitude. Estas modulações interferem na dinâmica do motor.

Outro conjunto de simulações foi realizado para verificar um caso particular onde há o aparecimento da bifurcação de Hopf no espaço de fase do sistema. As simulações revelam uma mudança na estabilidade do ponto de equilíbrio, e o surgimento de soluções periódicas regulares (bifurcação de Hopf supercrítica). Do ponto de vista físico, para este caso particular

o ponto de equilíbrio angular é $\varphi_0 = \pi$, e quando há mudança de estabilidade, o motor passa a oscilar a massa excêntrica m simetricamente em torno desse ponto como se fosse um pêndulo, e isto provoca uma resposta na mola que passa a vibrar em torno de seu ponto de equilíbrio. Na obtenção deste resultado, observou-se a dependência sobre a característica da função que representa o torque, e concluiu-se que a bifurcação de Hopf ocorre quando a variação inicial do torque líquido $M'(0)$ cruza o valor crítico $M'(0) = 0$. O modelo de torque usado nas simulações foi o linear, pois constatou-se que torque exponencial é inadequado para o estudo deste problema particular.

Por fim, alguns resultados numéricos foram apresentados quando é considerada uma mola com menor rigidez (coeficiente de não linearidade cúbica $d < 0$). Este problema é formulado através de equações Hamiltonianas, e as simulações do caso não perturbado revelam órbitas heteroclínicas (separatrizes) conectando os pontos de sela. No interior dessas órbitas as trajetórias são periódicas (librações), e na região externa temos circulações como no retrato de fases de um pêndulo.

A análise do problema perturbado é feita com a função de Melnikov $\Delta(\varphi_0)$, e o estudo numérico dessa função confirma todos os resultados previstos nos estudos analíticos de Dantas e Balthazar [4]. Essa função admite zeros simples ou duplos, ou não admite zeros dependendo do valor do parâmetro s_0 que representa energia.

Uma continuação do estudo numérico desse problema, seria a tentativa de obter o emaranhado heteroclínico, porém isso é uma tarefa bastante complexa e portanto fica como sugestão para trabalho futuro.

Apêndice A

O Método de Redução de Holmes e Marsden

Considere um sistema Hamiltoniano não perturbado com $n + 1$ graus de liberdade, nas coordenadas canônicas $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$, $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$, x, y na forma

$$H^0(q, p, x, y) = F(q, p) + G(x, y). \quad (\text{A.1})$$

Assuma que G admite variáveis ação-ângulo, ou seja, existe uma mudança de coordenadas canônicas (θ, I) tais que θ seja 2π periódica, $I \geq 0$ e que G torna-se função somente de I . Assim reescrevemos $G = G(I)$ e assumimos que

$$G(0) = 0, \quad \Omega \equiv G'(I) > 0 \quad \text{para} \quad I > 0. \quad (\text{A.2})$$

Note que as relações (A.2) implicam na existência de G^{-1} .

As equações de movimento para (A.1) são

$$\dot{q}_i = \frac{\partial F}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial F}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{A.3})$$

$$\dot{\theta} = \Omega(I), \quad \dot{I} = 0. \quad (\text{A.4})$$

Assuma que (A.3) tenha uma órbita homoclínica unindo um ponto de sela (q_0, p_0) a si mesmo. As equações (A.4) contém uma órbita 2π periódica $\theta(t) = \theta_0 + t\Omega(I_0)$, $I(t) = I_0$. O caso heteroclínico é tratado de forma similar.

Considere agora uma Hamiltoniana perturbada que depende de um pequeno parâmetro ϵ na forma

$$H^\epsilon(q, p, \theta, I) = F(q, p) + G(I) + \epsilon H^1(q, p, \theta, I) + O(\epsilon^2) \quad (\text{A.5})$$

onde H^1 é uma função suave e 2π periódica em θ , e F e G são funções definidas como anteriormente.

Assim as equações de movimento correspondente a H^ϵ são

$$\begin{cases} \dot{q}_i &= \frac{\partial F}{\partial p_i} + \epsilon \frac{\partial H^1}{\partial p_i} + O(\epsilon^2), \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial F}{\partial q_i} - \epsilon \frac{\partial H^1}{\partial q_i} + O(\epsilon^2), \\ \dot{\theta} &= \Omega(I) + \epsilon \frac{\partial H^1}{\partial I} + O(\epsilon^2), \\ \dot{I} &= -\epsilon \frac{\partial H^1}{\partial \theta} + O(\epsilon^2). \end{cases} \quad (\text{A.6})$$

A.1 O Método de Redução

Este método consiste em reduzir o sistema (A.6) de $n + 1$ graus de liberdade para um sistema não autônomo de n graus de liberdade. Sobre (A.6) temos que a energia é conservada, assim consideremos a equação

$$H^\epsilon(q, p, \theta, I) = h \quad (\text{A.7})$$

na qual h é constante.

Como $\frac{\partial H^\epsilon}{\partial I} = \Omega(I) + \epsilon \frac{\partial H^1}{\partial I} + O(\epsilon^2)$, então em um subconjunto compacto do espaço (q, p, θ, I) não contendo $I = 0$, podemos escolher ϵ pequeno tal que $\frac{\partial H^\epsilon}{\partial I} > 0$, desde que $\Omega(I) > 0$ para $I \neq 0$. Em tal região, podemos resolver (A.7) implicitamente em I e assim obter

$$I = L^\epsilon(q, p, \theta, h), \quad (\text{A.8})$$

onde

$$L^\epsilon(q, p, \theta, h) = L^0(q, p, h) + \epsilon L^1(q, p, \theta, h) + O(\epsilon^2). \quad (\text{A.9})$$

Proposição A.1. *Temos que*

$$L^0(q, p, h) = G^{-1}(h - F(q, p)) \quad (\text{A.10})$$

e

$$L^1(q, p, \theta, h) = -\frac{H^1(q, p, \theta, L^0(q, p, h))}{\Omega(L^0(q, p, h))}. \quad (\text{A.11})$$

Depois de eliminado I de H^ϵ , eliminaremos agora a variável conjugada t . Como $\Omega(I) > 0$ e H^ϵ não depende explicitamente do tempo t , então para ϵ pequeno e, por meio de (A.6) temos que θ é uma função crescente de t , e assim podemos eliminar t expressando q e p como funções de θ . Deste modo, podemos reescrever o sistema (A.6) usando as relações $q'_i = \frac{dq_i}{d\theta}$ e $p'_i = \frac{dp_i}{d\theta}$, $i = 1, 2, \dots, n$

$$\begin{cases} q'_i = \frac{\dot{q}_i}{\dot{\theta}} = \frac{\partial H^\epsilon}{\partial p_i} / \frac{\partial H^\epsilon}{\partial I}, \\ p'_i = \frac{\dot{p}_i}{\dot{\theta}} = -\frac{\partial H^\epsilon}{\partial q_i} / \frac{\partial H^\epsilon}{\partial I}, \\ h' = 0. \end{cases} \quad (\text{A.12})$$

Diferenciando implicitamente $H^\epsilon(q, p, \theta, L^\epsilon) = h$ temos

$$\begin{cases} \frac{\partial L^\epsilon}{\partial q_i} = -\frac{\partial H^\epsilon}{\partial q_i} / \frac{\partial H^\epsilon}{\partial I}, \\ \frac{\partial L^\epsilon}{\partial p_i} = -\frac{\partial H^\epsilon}{\partial p_i} / \frac{\partial H^\epsilon}{\partial I}. \end{cases} \quad (\text{A.13})$$

Substituindo (A.13) em (A.12) obtemos

$$\begin{cases} q'_i = -\frac{\partial L^0}{\partial p_i} - \epsilon \frac{\partial L^1}{\partial p_i} + \mathbf{O}(\epsilon^2), \\ p'_i = \frac{\partial L^0}{\partial q_i} + \epsilon \frac{\partial L^1}{\partial q_i} + \mathbf{O}(\epsilon^2), \\ h' = 0. \end{cases} \quad (\text{A.14})$$

Considere agora perturbações sob as quais a energia H^ϵ não é mais conservada. Além disso, restringiremos ao estudo de um sistema de dois graus de liberdade. Deste modo, suponha um sistema Hamiltoniano com dois graus de liberdade modificado para incluir termos dissipativos, ou seja

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial F}{\partial p} + \epsilon \frac{\partial H^1}{\partial p} + \epsilon \gamma_1 f_1 + O(\epsilon^2), \\ \dot{p} = -\frac{\partial F}{\partial q} - \epsilon \frac{\partial H^1}{\partial q} + \epsilon \gamma_2 f_2 + O(\epsilon^2), \\ \dot{\theta} = \Omega(I) + \epsilon \frac{\partial H^1}{\partial I} + \epsilon \delta_1 g_1 + O(\epsilon^2), \\ \dot{I} = -\epsilon \frac{\partial H^1}{\partial \theta} + \epsilon \delta_2 g_2 + O(\epsilon^2). \end{cases} \quad (\text{A.15})$$

Aqui f_i e g_i são funções de (q, p, I, θ) e 2π periódicas em θ , e γ_i e δ_i são parâmetros de dissipação. A função energia $H = H^\epsilon(q, p, \theta, I) = F(q, p) + G(I) + \epsilon H^1(q, p, \theta, I) + O(\epsilon^2)$ não é mais conservada, ou seja

$$\dot{H} = \frac{\partial H^\epsilon}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial H^\epsilon}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial H^\epsilon}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial H^\epsilon}{\partial I} \dot{I},$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\partial H^\epsilon}{\partial q} \left(\frac{\partial F}{\partial p} + \epsilon \frac{\partial H^1}{\partial p} + \epsilon \gamma_1 f_1 + O(\epsilon^2) \right) \\
 &+ \frac{\partial H^\epsilon}{\partial p} \left(-\frac{\partial F}{\partial q} - \epsilon \frac{\partial H^1}{\partial q} + \epsilon \gamma_2 f_2 + O(\epsilon^2) \right) \\
 &+ \frac{\partial H^\epsilon}{\partial \theta} \left(\Omega(I) + \epsilon \frac{\partial H^1}{\partial I} + \epsilon \delta_1 g_1 + O(\epsilon^2) \right) \\
 &+ \frac{\partial H^\epsilon}{\partial I} \left(-\epsilon \frac{\partial H^1}{\partial \theta} + \epsilon \delta_2 g_2 + O(\epsilon^2) \right), \\
 &= \epsilon \left(\frac{\partial F}{\partial q} \gamma_1 f_1 + \frac{\partial F}{\partial p} \gamma_2 f_2 + \Omega(I) \delta_2 g_2 \right) + \mathbf{O}(\epsilon^2). \tag{A.16}
 \end{aligned}$$

Note que se $\gamma_i = \delta_i = 0$, então (A.16) é conservada e assim o sistema (A.15) torna-se o sistema (A.6).

Do mesmo modo como feito anteriormente, eliminemos I reescrevendo-a como função de q, p, θ e H na forma

$$I = L^0(q, p, H) + \epsilon L^1(q, p, \theta, H) + O(\epsilon^2). \tag{A.17}$$

mas lembrando que H é variável com o tempo.

Como antes, temos que

$$L^0(q, p, H) = G^{-1}(H - F(q, p)), \tag{A.18}$$

$$L^1(q, p, \theta, H) = -\frac{H^1(q, p, \theta, L^0(q, p, H))}{\Omega(L^0(q, p, H))}, \tag{A.19}$$

$$q' = \frac{\dot{q}}{\dot{\theta}}, \quad p' = \frac{\dot{p}}{\dot{\theta}}, \tag{A.20}$$

e sobre a equação implícita $H^\epsilon(q, p, \theta, L^\epsilon) = H$ obtemos

$$\begin{cases} \frac{\partial L^\epsilon}{\partial q} = -\frac{\partial H^\epsilon}{\partial q} / \frac{\partial H^\epsilon}{\partial I}, \\ \frac{\partial L^\epsilon}{\partial p} = -\frac{\partial H^\epsilon}{\partial p} / \frac{\partial H^\epsilon}{\partial I}. \end{cases} \tag{A.21}$$

Usando a segunda equação do sistema (A.21) e o sistema (A.15) temos

$$\begin{aligned}
 &\frac{\partial H^\epsilon}{\partial p} + \frac{\partial H^\epsilon}{\partial I} \frac{\partial L^\epsilon}{\partial p} = 0, \\
 &(\dot{q} - \epsilon \gamma_1 f_1) + (\dot{\theta} - \epsilon \delta_1 g_1) \frac{\partial L^\epsilon}{\partial p} = 0, \\
 &q' = -\frac{\partial L^\epsilon}{\partial p} + \frac{\epsilon \gamma_1}{\dot{\theta}} f_1 + \frac{\epsilon \delta_1 g_1}{\dot{\theta}} \frac{\partial L^\epsilon}{\partial p}, \\
 &= -\frac{\partial L^\epsilon}{\partial p} + \epsilon \left(\frac{\gamma_1}{\Omega(L^0)} f_1 + \mathbf{O}(\epsilon) \right) + \epsilon \left(\frac{\delta_1 g_1}{\Omega(L^0)} + \mathbf{O}(\epsilon) \right) \frac{\partial L^\epsilon}{\partial p}, \\
 &= -\frac{\partial L^0}{\partial p} - \epsilon \left(\frac{\partial L^1}{\partial p} - \frac{\gamma_1 f_1}{\Omega(L^0)} - \frac{\partial L^0}{\partial p} \frac{\delta_1 g_1}{\Omega(L^0)} \right) + \mathbf{O}(\epsilon^2).
 \end{aligned}$$

De maneira similar podemos obter p' e H' . Portanto podemos usar (A.15) a (A.21) para escrever o seguinte sistema tridimensional, onde q , p e H são parametrizadas pela variável θ na forma

$$\begin{cases} q' = -\frac{\partial L^0}{\partial p} - \epsilon \left(\frac{\partial L^1}{\partial p} - \frac{\gamma_1 f_1}{\Omega(L^0)} - \frac{\partial L^0}{\partial p} \frac{\delta_1 g_1}{\Omega(L^0)} \right) + \mathbf{O}(\epsilon^2), \\ p' = \frac{\partial L^0}{\partial q} + \epsilon \left(\frac{\partial L^1}{\partial q} - \frac{\gamma_2 f_2}{\Omega(L^0)} - \frac{\partial L^0}{\partial q} \frac{\delta_1 g_1}{\Omega(L^0)} \right) + \mathbf{O}(\epsilon^2), \\ H' = \epsilon \Omega(L^0) \left(-\frac{\partial L^0}{\partial q} \gamma_1 f_1 - \frac{\partial L^0}{\partial p} \gamma_2 f_2 + \delta_2 g_2 \right) + \mathbf{O}(\epsilon^2). \end{cases} \quad (\text{A.22})$$

Apêndice B

Teoremas de Wiggins e Shaw

Neste apêndice apresentaremos três teoremas que são encontrados em [19], e através dos quais podemos detectar analiticamente interseções transversais de variedades estável e instável que é tipicamente uma condição necessária para existência de movimento caótico.

Primeiramente considere o sistema dinâmico

$$\begin{cases} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial y}(x, y, z) + \epsilon g_1(x, y, z, t; \mu), \\ \dot{y} &= -\frac{\partial H}{\partial x}(x, y, z) + \epsilon g_2(x, y, z, t; \mu), \\ \dot{z} &= \epsilon g_3(x, y, z, t; \mu), \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

onde ϵ é considerado pequeno, H é uma função Hamiltoniana, $\mu \in \mathbb{R}^p$ é um vetor de parâmetros, g_i , $i = 1, 2, 3$, são funções periódicas de período fixo T , e o lado direito é de classe C^r ($r \geq 2$).

O objetivo do estudo a seguir é determinar que comportamento dinâmico apresenta o sistema (B.1) quando tomamos ϵ suficientemente pequeno.

Para isso, faremos inicialmente algumas considerações sobre o sistema (B.1) quando assumimos que $\epsilon = 0$ (sistema não perturbado). Fazendo $\epsilon = 0$ em (B.1) temos

$$\begin{cases} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial y}(x, y, z), \\ \dot{y} &= -\frac{\partial H}{\partial x}(x, y, z), \\ \dot{z} &= 0. \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

Note que em (B.2) z é constante e pode ser considerado como um parâmetro.

Faremos agora a seguinte hipótese sobre (B.2). Suponha que existe um intervalo aberto $J \subset \mathbb{R}$ tal que para todo $z \in J$, o sistema (B.2) tem um ponto fixo hiperbólico $p(z)$ com uma

órbita homoclínica $q^z(t)$ conectando $p(z)$ a si mesmo, isto é

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} q^z(t) = p(z).$$

Temos que os pontos fixos do sistema (B.2) são dados pela solução de

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial y}(x, y, z) = 0, \\ -\frac{\partial H}{\partial x}(x, y, z) = 0. \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

Assim, usando (B.3) e o teorema da função implícita, então no espaço de fase (x, y, z) podemos escrever a curva de pontos fixos como uma função suave de z , a qual denotaremos por

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \{(x(z), y(z), z) = \gamma(z) \mid \begin{cases} \frac{\partial H}{\partial y}(x, y, z) = 0 \\ -\frac{\partial H}{\partial x}(x, y, z) = 0 \end{cases} \\ &\text{com } \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial H}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial H}{\partial x} \right) \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial H}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial H}{\partial x} \right) < 0 \quad \forall z \in J\}. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

Como já foi dito anteriormente, queremos determinar que estrutura dinâmica apresenta o sistema (B.1) para ϵ suficientemente pequeno. Para alcançar esse objetivo, enunciaremos três teoremas a seguir.

Teorema B.1. *Existe $\epsilon_0 > 0$ tal que, para $0 < \epsilon < \epsilon_0 \ll 1$ o sistema perturbado (B.1) tem uma variedade invariante unidimensional normalmente hiperbólica*

$$\mathcal{M}_\epsilon = \{\tilde{\gamma}(z, t; \epsilon) = \gamma(z) + \mathbf{O}(\epsilon) \mid z \in J\} \quad (\text{B.5})$$

onde $\tilde{\gamma}(z, t; \epsilon)$ é T periódica em t e é uma função suave como $\gamma(z)$. Além disso, \mathcal{M}_ϵ tem variedades locais estável e instável denotadas por $W_{loc}^e(\mathcal{M}_\epsilon)$ e $W_{loc}^i(\mathcal{M}_\epsilon)$, respectivamente, as quais são C^r ϵ -próximas às variedades $W_{loc}^e(\mathcal{M})$ e $W_{loc}^i(\mathcal{M})$, respectivamente. (obs.: uma variedade W_1 é C^r ϵ -próximas a outra variedade W_2 se $\|W_1^k - W_2^k\| < \epsilon$ para $k = 0, 1, \dots, r$.)

Este teorema diz que as variedades locais estável e instável do sistema perturbado permanecem na vizinhança das variedades locais estável e instável do sistema não perturbado.

Num próximo passo, queremos obter informações sobre a dinâmica em \mathcal{M}_ϵ . Usando a expressão para a variedade perturbada dada por (B.5) temos

$$\dot{z} = \epsilon g_3(\gamma(z), t) + \mathbf{O}(\epsilon^2). \quad (\text{B.6})$$

A equação acima está numa forma adequada para se usar o método da média (ver [8] para maiores detalhes). Então, considerando a equação

$$\dot{z} = \overline{\epsilon g_3(\gamma(z))}, \quad \text{onde} \quad \overline{g_3(\gamma(z))} = \frac{1}{T} \int_0^T g_3(\gamma(z), t) dt \quad (\text{B.7})$$

segue o seguinte teorema.

Teorema B.2. *Suponha que exista $z_0 \in J$ tal que*

$$\overline{g_3(\gamma(z_0))} = 0, \quad (\text{B.8})$$

$$\frac{d}{dz} \overline{g_3(\gamma(z_0))} \neq 0, \quad (\text{B.9})$$

então $\gamma(z_0, t; \epsilon) = \gamma(z_0) + \mathbf{O}(\epsilon)$ é uma órbita periódica hiperbólica em \mathcal{M}_ϵ com período T . Além disso, a órbita restrita a \mathcal{M}_ϵ é estável para $\frac{d}{dz} \overline{g_3(\gamma(z_0))} < 0$ e instável para $\frac{d}{dz} \overline{g_3(\gamma(z_0))} > 0$.

O próximo passo é aplicar os teoremas (B.1) e (B.2) para obter transversalidade homoclínica de órbitas. Como o sistema perturbado é não-autônomo, é conveniente trabalhar com o mapa de Poincaré. Introduzindo o tempo como uma nova variável dependente, a equação (B.1) é reescrita como

$$\begin{cases} \dot{x} &= \frac{\partial H}{\partial y}(x, y, z) + \epsilon g_1(x, y, z, t), \\ \dot{y} &= -\frac{\partial H}{\partial x}(x, y, z) + \epsilon g_2(x, y, z, t), \\ \dot{z} &= \epsilon g_3(x, y, z, t), \\ \dot{t} &= 1, \end{cases} \quad (\text{B.10})$$

onde o sistema (B.10) é autônomo com o espaço de fase $\mathbb{R}^3 \times S^1$ onde S^1 é o círculo de comprimento T e representa a dependência periódica da função perturbadora. Definimos a seguinte seção de Poincaré em relação ao campo vetorial não-perturbado

$$\Sigma = \{(x, y, z, t) | t = t_0 \in (0, T)\} \quad (\text{B.11})$$

e o mapa de Poincaré

$$P : \Sigma \rightarrow \Sigma, \quad \text{ou} \quad (x(t_0), y(t_0), z(t_0)) \rightarrow (x(t_0 + T), y(t_0 + T), z(t_0 + T)).$$

Considerando satisfeitas as hipóteses dos teoremas (B.1) e (B.2), as intersecções das variedades no mapa de Poincaré podem ser estudadas através da função de Melnikov

$$M(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \nabla H(q_0^{z_0}(t)) \bullet g(q_0^{z_0}(t), t + t_0) dt \\ - \frac{\partial H}{\partial z}(\gamma(z_0)) \int_{-\infty}^{\infty} g_3(q_0^{z_0}(t), t + t_0) dt,$$

onde $\nabla H = \left(\frac{\partial H}{\partial x}, \frac{\partial H}{\partial y}, \frac{\partial H}{\partial z} \right)$, $g = (g_1, g_2, g_3)$ e z_0 é escolhido via teorema (B.2).

Assim, enunciaremos o seguinte teorema:

Teorema B.3. *Suponha que existe um ponto \bar{t}_0 tal que*

$$M(\bar{t}_0) = 0, \tag{B.12}$$

$$\frac{\partial M}{\partial t_0}(\bar{t}_0) \neq 0, \tag{B.13}$$

então para ϵ suficientemente pequeno, próximo deste ponto $W^e(\tilde{\gamma}(z_0, t_0; \epsilon))$ e $W^i(\tilde{\gamma}(z_0, t_0; \epsilon))$ se interceptam transversalmente.

Referências Bibliográficas

- [1] ALMEIDA A. M. O. *Sistemas Hamiltonianos: Caos e Quantização*. Campinas, Editora da Unicamp, 1995.
- [2] CARR J.; AL-AMOOD N. Rate of Decay in Critical Cases I: Finite-Dimensional Problems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, v. 75, p. 242–250, 1980.
- [3] DANTAS M. J. H.; BALTHAZAR J. M. On the Appearance of a Hopf Bifurcation in a Non-ideal Mechanical Problem. *Mechanics Researchs Communications*, v. 30, p. 493–503, 2003.
- [4] DANTAS M. J. H.; BALTHAZAR J. M. A Comment on a non-Ideal Centrifugal Vibrator Machine Behavior with Soft and Hard Springs. Aceito em *International Journal of Bifurcation and Chaos*.
- [5] DE MATTOS M. C.; BALTHAZAR J. M. Dynamics of an Armature Controlled DC Motor Mounted on an Elasticaxlly supported Table. *XV Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica*, Águas de Lindóia, São Paulo, 1999.
- [6] FILDER-FERRARA N.; DO-PRADO C. P. C. *Caos: Uma Introdução*. São Paulo, Editora Edgard Blücher Ltda, 1995.
- [7] GOLDSTEIN H.; POOLE C.; SAFKO J. *Classical Mechanics, 3rd ed.*. San Francisco, Addison Wesley, 2002.
- [8] GUCKENHEIMER J.; HOLMES P. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. New York, Springer-Verlag, 1983.
- [9] HOLMES P. J.; MARSDEN J. E. Horseshoes in Pertubations of Hamiltonian Systems with Two Degrees of Freedon. *Communications in Mathematical Physics*, v. 82, p. 523–544, 1982.

-
- [10] KONONENKO V. O. *Vibrating Systems with a Limited Power Supply*. London, Iliffe Books Ltd, 1969.
- [11] LIMA E. L. *Curso de análise vol. 1; 11 ed.* Rio de Janeiro, Projeto Euclides, IMPA, 2004.
- [12] MARSDEN J. E.; McCracken M. *The Hopf Bifurcation and its Applications*. New York, Springer-Verlag, 1976.
- [13] MEIROVITCH L. *Methods of Analytical Dynamics*. New York, McGraw-Hill, 1970.
- [14] MONTEIRO L. H. A. *Sistemas Dinâmicos*. São Paulo, Editora Livraria da Física, 2002.
- [15] PARKER T. S.; CHUA L. O. *Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems*. New York, Springer-Verlag, 1989.
- [16] SADO D.; KOT M. The Chaotic Vibration of an Autoparametrical System with Non-Ideal Source Power. *7th Conference on Dynamical Systems Theory and Applications*, Łódź, p. 689–696, 2003.
- [17] WALKER R. J. *Algebraic Curves*. Princeton, Princeton University Press, 1950.
- [18] WIGGINS S. *Global Bifurcations and Chaos*. New York, Springer-Verlag, 1988.
- [19] WIGGINS S.; SHAW S. W. Chaos and Three-Dimensional Horseshoes in Slowly Varying Oscillators. *ASME Journal of Applied Mechanics*, v. 55, p. 959–968, 1988.
- [20] WRESZINSKI W. F. *Mecânica Clássica Moderna*. São Paulo, Editora da Universidade de São Paulo, 1997.