



**Contribuições para o Problema de Corte  
de Estoque Bidimensional na  
Indústria Moveleira**

**Gabriela Perez Mosquera**

Dissertação de Mestrado  
Pós-Graduação em Matemática Aplicada

# Contribuições para o Problema de Corte de Estoque Bidimensional na Indústria Moveleira

**Gabriela Perez Mosquera**

Dissertação apresentada no Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto, São Paulo, para a obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada.

Orientador: Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Maria do Socorro Nogueira Rangel

São José do Rio Preto  
Maio de 2007

Aos meus avós maternos, Eloy (*in memoriam*) e Dida, e paternos, Paco e Paca  
(*in memoriam*).

Aos meus pais Daniel e Lúcia Helena.

À minha irmã Bárbara.

*Dedico.*

# Agradecimentos

A Deus, em primeiro lugar, por todas as bênçãos e oportunidades.

À minha professora orientadora Socorro Rangel, pela orientação, dedicação, críticas (sempre construtivas!) e conselhos. Muito obrigada por ter sido mais que orientadora. Por ter sido, principalmente, amiga. Por me dar força quando eu precisei e pela compreensão demonstrada.

Aos meus pais e à minha irmã, por serem meus melhores amigos e confidentes. Pelo amor, educação e dedicação incondicionais. Por sempre acreditarem em mim. Por me mostrarem que podemos tudo quando acreditamos que podemos. E por serem inesquecíveis sempre!

Aos meus amigos da graduação e da pós-graduação pelos momentos difíceis de estudos e pelos momentos de descontração que, com certeza, são indispensáveis nesta fase de dedicação aos estudos.

Um agradecimento especial ao meu namorado Fernando Rodrigo Rafaeli e aos amigos Cristiane Pendeza, Daniele Lozano, Fausto Hideki Oda, Flávio Molina, Josimeire Maximiano, Marcela Cristiani Ferreira, Rodrigo Chela e Silvia Grandi por compartilharem comigo dos momentos difíceis e felizes também e por toda amizade, carinho e consideração demonstradas.

Ao pessoal da Fábrica de Móveis Luapa (Luiz Antonio, Paulo, Antônio, Jarbas e Bárbara) por estarem sempre dispostos a nos receber e nos ajudar.

A todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho.

Aos professores e/ou pesquisadores Alan Zinober, Altamir Figueiredo, Daniel Katsu-

rayama, Gleb Belov, Horácio Yanasse, Luiz Leduíno, Olaf Diegel, Susanne Heipcke, Yaodong Cui, Zeger Degraeve e Zoe Wells meu muito obrigada pela atenção e ajuda prestada com toda consideração.

Ao CNPq pelo apoio e auxílio financeiro.

"A imaginação é mais poderosa do que o conhecimento. Ela amplia a visão, dilata a mente, desafia o impossível. Sem a imaginação o pensamento estagna."

"Um raciocínio lógico leva você de A a B. A imaginação leva você a qualquer lugar que você quiser."

Albert Einstein

# Resumo

Neste trabalho, estudamos o Problema de Corte de Estoque Bidimensional aplicado à indústria de móveis. Para realizar este estudo, visitamos uma empresa característica do noroeste paulista com o intuito de observarmos a prática da empresa e desenvolver métodos de solução para aumentar sua produtividade. O critério de otimização considerado é a redução do número de ciclos da serra. Três métodos de solução foram propostos para a resolução do problema. O primeiro utiliza um modelo matemático que contém restrições que garantem que o número de objetos cortados de acordo com um determinado padrão de corte seja um múltiplo da capacidade da serra. Duas heurísticas, baseadas na heurística de repetição exaustiva de padrões de corte, são propostas para atender exatamente às demandas e reduzir o número de ciclos da serra na indústria de móveis visitada. Os estudos computacionais realizados, mostraram que as estratégias propostas obtêm resultados próximos aos da empresa e, em alguns casos, melhores.

**Palavras-chave:** Corte e Empacotamento; Corte de Estoque Bidimensional; Geração de Colunas; Padrões de Corte Guilhotinados 2-estágios; Ciclos da Serra; Indústria de Móveis.

# Abstract

In this work we have studied the Two-dimensional Cutting Stock Problem applied to a furniture industry. In order to carry out this study, we have visited a characteristic company at the Northwest region of the state of São Paulo in order to observe the industry practice and develop solution methods to increase its productivity. The goal is minimize the number of saw cycles. We propose three solution methods to solve the problem. The first one is a mathematical model which imposes that the number of objects to be cut according to a given cutting pattern is a "multiple" of the saw capacity. Two heuristics based on the sequential heuristic procedure are proposed to fulfil the demands and to reduce the number of saw cycles. By the computational tests results, we can conclude that these solution methods provide similar results to the industry's practice and, in some cases, better ones.

**Keywords:** Cutting and Packing; Two-dimensional Cutting Stock; Column Generation; 2-stage Guillotine Cutting Patterns; Saw Cycles; Furniture Industry.



# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>1 Problemas de Corte e Empacotamento</b>	<b>3</b>
1.1 Breve Histórico . . . . .	3
1.2 Classificação dos Problemas de Corte e Empacotamento . . . . .	5
1.3 Modelos Matemáticos . . . . .	7
1.4 Métodos de Solução para o Problema de Corte e Empacotamento . . . . .	16
1.4.1 Princípio de Decomposição de Dantzig-Wolfe . . . . .	16
1.4.2 Método Simplex com Geração de Colunas . . . . .	19
1.5 Geração de Padrões de Corte Bidimensionais . . . . .	23
1.5.1 Caso Irrestrito . . . . .	27
1.5.2 Caso Restrito . . . . .	29
<b>2 Problemas de Corte de Estoque na Indústria Moveleira</b>	<b>32</b>
2.1 Panorama da Indústria de Móveis no Brasil . . . . .	32
2.2 Uma Fábrica Característica . . . . .	36
2.2.1 Linha de Produção da Fábrica . . . . .	37
2.2.2 Planejamento da Produção . . . . .	38
2.2.3 Padrões de Corte Utilizados pela Fábrica . . . . .	45
<b>3 Estratégias Para Redução de Ciclos da Serra</b>	<b>50</b>
3.1 Trabalhos da Literatura Relacionados ao Problema . . . . .	50
3.2 Ciclos da Serra x Número de <i>Setups</i> . . . . .	52
3.3 Modelo de Multiplicidade . . . . .	54
3.4 Heurísticas para Reduzir o Número de Ciclos da Serra . . . . .	55
3.4.1 Heurística de Haessler . . . . .	55

3.4.2	Heurística de Yanasse, Harris e Zinober . . . . .	59
3.4.3	Heurísticas Propostas . . . . .	62
<b>4</b>	<b>Estudo Computacional</b>	<b>79</b>
4.1	Descrição dos Exemplos . . . . .	79
4.2	Resultados e Análise do Estudo Computacional . . . . .	83
<b>5</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>101</b>
<b>A</b>	<b>Comentários Adicionais sobre as Heurísticas Propostas</b>	<b>104</b>
<b>B</b>	<b>Tabelas de Itens dos Produtos da Luapa</b>	<b>105</b>
<b>C</b>	<b>Perda por Sobra de Material</b>	<b>108</b>
<b>D</b>	<b>Trechos do Código do Programa na Linguagem Mosel do Xpress</b>	<b>110</b>
	<b>Lista de Figuras</b>	<b>125</b>
	<b>Lista de Tabelas</b>	<b>127</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>129</b>

# Introdução

Inúmeras indústrias têm seus processos de produção atrelados ao corte de matéria-prima. Nestas indústrias a matéria-prima está disponível em tamanhos grandes padronizados, que são estocados para, mais tarde, serem cortados em itens menores, de tamanhos variados e não padronizados, para atender à demanda interna e/ou externa da indústria. Portanto, surge a necessidade de planejar o corte da matéria-prima a fim de minimizar os efeitos negativos decorrentes do processo, como por exemplo o desperdício de material. Este problema é conhecido na literatura como o Problema de Corte.

Problemas de Empacotamento consistem em alocar ou armazenar uma determinada quantidade de peças pequenas em espaços grandes, como *containers*, pátetes, caixas, etc., buscando aproveitar ao máximo o espaço disponível. É fácil ver que a idéia de cortar peças pequenas de objetos grandes é equivalente à idéia de alocá-las em espaços maiores [3]. A Figura 1 a seguir, ilustra tal equivalência.

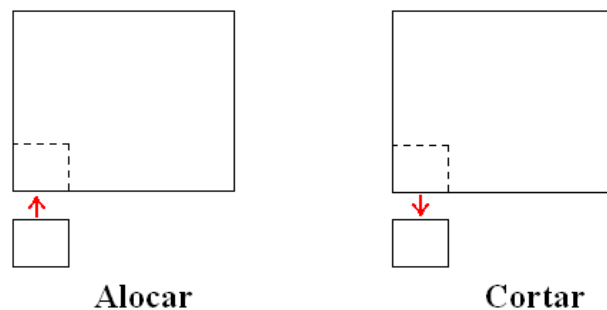


Figura 1: Equivalência entre Corte e Empacotamento

Por essa equivalência, os dois problemas têm sido estudados atualmente de forma conjunta e são chamados de **Problemas de Corte e Empacotamento (PCE)**. Diversos casos particulares deste problema são discutidos na literatura, por exemplo, Problema de Corte de Estoque, *Trim Loss*, Problema de Empacotamento de *bins* ou faixas, Problema de Carregamento de pátetes ou *containers* entre outros [20].

O interesse pelos Problemas de Corte e Empacotamento é devido à sua grande aplicabilidade em problemas práticos, especialmente em indústrias metalúrgicas, moveleiras, vidraceiras, etc. Por menores que pareçam, as melhorias nos processos de corte podem gerar

economias significativas, principalmente se a produção é feita em grande escala, e representar uma vantagem decisiva na competição com outras indústrias do setor.

O enfoque deste trabalho está voltado para o planejamento dos cortes de painéis de *MDF* (*Medium-Density Fiberboard* ou Painel de Média Densidade - o aglomerado de madeira mais sofisticado tecnologicamente) que são utilizados como matéria-prima na produção de móveis de madeira numa indústria característica do pólo moveleiro de Votuporanga/SP, a Fábrica de Móveis Luapa. Nosso objetivo é obter uma solução para o Problema de Corte de Estoque Bidimensional da fábrica usando estratégias que visam, além de atender à demanda dos itens com o menor número de objetos possível, minimizar o número de ciclos da serra necessário para cortar os objetos solicitados. As estratégias propostas para obter baixos índices de ciclos da serra incluem duas heurísticas baseadas na idéia de Haessler [31] de construir padrões de corte em seqüência e empregá-los exaustivamente. O procedimento heurístico, pode ser considerado uma variação do método desenvolvido por Yanasse *et al* [72], onde as demandas do problema inicial são ajustadas por um fator que determina "novas" demandas, definindo um problema auxiliar para o qual, serão gerados padrões de corte restritos inicialmente contendo apenas itens com demandas altas.

No decorrer do texto, expomos conceitos e conteúdos que julgamos necessários para o bom entendimento do trabalho, da seguinte maneira. No Capítulo 1 apresentamos um breve histórico do problema aplicado ao planejamento de produção, sua classificação com relação à dimensão da matéria-prima a ser cortada e os principais conceitos, modelos e métodos de resolução e de geração de padrões de corte para o Problema de Corte de Estoque Bidimensional. O Capítulo 2 é dedicado à indústria de móveis. Apresentamos algumas características das indústrias moveleiras no Brasil e do pólo moveleiro de Votuporanga/SP, descrevemos a linha de produção da empresa visitada, com ênfase na utilização da máquina seccionadora e destacamos as principais preferências da indústria com relação aos padrões de corte utilizados. No Capítulo 3, discutimos a relação entre o número de ciclos da serra e o número de padrões de corte distintos, apresentamos uma idéia da heurística proposta por Haessler em [31] e da heurística proposta por Yanasse *et al* em [72]. Ainda neste capítulo, apresentamos as heurísticas e o modelo propostos. Os resultados do estudo computacional realizado aplicando o modelo e as heurísticas na solução de exemplares gerados com os dados da empresa visitada são apresentados no Capítulo 4. Finalmente, no Capítulo 5, são apresentadas as considerações finais e propostas para a continuidade deste trabalho.

# Capítulo 1

## Problemas de Corte e Empacotamento

### 1.1 Breve Histórico

A classe dos Problemas de Corte e Empacotamento vem sendo estudada há muitas décadas, desde o trabalho pioneiro do matemático e economista soviético Leonid Vitaliyevich Kantorovich publicado em 1939 [35], onde o autor apresenta modelos matemáticos de programação linear para o planejamento e organização da produção, além de métodos de solução para os problemas apresentados. Dentre os diversos problemas abordados neste trabalho, está o Problema de Corte de Estoque Unidimensional. Devido à Guerra Fria, este trabalho ficou desconhecido para o Ocidente até 1959 e foi publicado em inglês apenas em 1960. No referido trabalho, a maioria dos problemas para organização e planejamento da produção estão relacionados especificamente ao sistema econômico soviético da época e não à economia da sociedade capitalista. Este fato é mencionado pelo autor que acrescenta que a utilização máxima dos equipamentos não é considerada, mesmo porque a maior parte das empresas trabalha com apenas metade de sua capacidade total.

O estudo da programação linear tem raízes nos trabalhos de Fourier sobre inequações lineares, publicados em 1826, mas a programação linear ganhou grande impulso quando, durante a 2ª Grande Guerra, um grupo formado por Dantzig, Wood e seus associados no Departamento da Força Aérea dos Estados Unidos, foi convocado para pesquisar a viabilidade de aplicar a Matemática e técnicas relacionadas para resolver problemas de planejamento e programação militar [44]. Em 1947, Dantzig divulgou a ferramenta desenvolvida pelo grupo: o Método Simplex. Em pouco tempo a programação linear foi aplicada a diversas áreas do conhecimento e os avanços computacionais também contribuíram para o aumento na utilização

dessa ferramenta, permitindo resolver problemas de escalas maiores.

Devido à importância e aplicabilidade dos Problemas de Corte e Empacotamento nas indústrias, muitos pesquisadores em todo o mundo, têm concentrado esforços no desenvolvimento de métodos para sua resolução.

Na década de 60 muitos trabalhos importantes foram publicados. Os métodos de solução e as modelagens de maior repercussão foram os publicados por Gilmore e Gomory ([25], [26] e [27]). Em 1961, Gilmore e Gomory [25] formularam o Problema de Corte de Estoque Unidimensional e propuseram um método de geração de colunas para a solução da relaxação linear do problema, que pela primeira vez, resolveu problemas de grande porte para o caso unidimensional. Atualmente, os melhores métodos para aproximação de soluções são baseados nessa relaxação e muitas heurísticas são desenvolvidas para se obter uma solução inteira a partir da solução aproximada.

Dois anos mais tarde, os métodos descritos em [25] são estendidos e adaptados para um problema específico do Problema de Corte de Estoque Unidimensional num estudo de caso no corte do papel, acrescentando restrições como, por exemplo, limites para o número de facas na máquina [26], e em 1965, para a solução do Problema de Corte de Estoque Bidimensional [27], com algumas restrições que, do ponto de vista da prática da indústria, são essenciais, tais como o corte guilhotinado, estagiado e irrestrito.

Em 1975, Haessler em [31] apresenta um método heurístico computacionalmente eficiente para resolver o Problema de Corte de Estoque Unidimensional, penalizando a troca de padrões de corte para diminuir o número de padrões de corte distintos na solução e considerando tolerâncias no atendimento à demanda dos itens - prática comum nas indústrias. Outros trabalhos que tratam o problema de minimização do número de padrões de corte distintos, no caso unidimensional, são Foerster e Wäscher [24], Vanderbeck [68], Yanasse e Limeira [73], Salles Neto [61], entre outros.

Destacamos alguns livros específicos sobre Problemas de Corte e Empacotamento como de Martello e Toth [41] (mais especificamente, Problema da Mochila) e de Dyckhoff e Finke [21] e livros que dedicam capítulos ao tema como de Lasdon [37] e Chvátal [14], além de artigos de revisão como de Hinxman [33], Dyckhoff [20] e Morabito e Arenales [45], entre outros.

## 1.2 Classificação dos Problemas de Corte e Empacotamento

Os Problemas de Corte e Empacotamento podem ser classificados com relação às dimensões que são relevantes durante o processo de corte ou empacotamento. Na tipologia de Dyckhoff [20], a seguinte associação é feita: por causa do papel fundamental desempenhado pelos padrões de corte e sua natureza de combinações geométricas (combinar itens sobre objetos), pode-se dizer que os Problemas de Corte e Empacotamento são "problemas de combinações geométricas" e podem ser divididos em problemas com dimensões espaciais e não-espaciais. Outros aspectos são levados em conta na tipologia de Dyckhoff, como o tipo de alocação, sortimento dos objetos e sortimento dos itens, mas não entraremos em detalhes. No caso dos problemas com dimensões espaciais, os objetos e itens podem ter uma, duas ou as três dimensões do Espaço Euclidiano relevantes para o processo de corte. Descrevemos agora as características destes problemas e daremos exemplos de aplicações.

### Unidimensional

Suponha que um objeto (bobina, barra, etc.) deve ser cortado ao longo de seu comprimento para a produção de itens de comprimentos menores pré-determinados. Cada item tem um "valor de utilidade" associado. Itens cujos comprimentos não foram especificados são considerados perdas, com valor de utilidade nulo. O Problema de Corte de Estoque Unidimensional é um problema de otimização combinatória, que busca obter os itens de tamanhos especificados a partir do corte de objetos em estoque de tal forma que se obtenha o maior valor de utilidade total, dado pela soma dos valores de utilidade dos itens produzidos. A Figura 1.1 mostra o corte de uma bobina grande em bobinas menores. Exemplos de aplicação: Corte de bobinas de aço [34] e [40], bobinas de papel [25] e [26], etc.

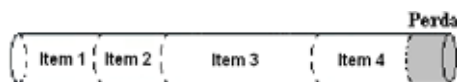


Figura 1.1: Corte Unidimensional

### Bidimensional

O Problema de Corte de Estoque Bidimensional, da mesma forma como o unidimensional, é o problema de se obter um conjunto de itens menores, com dimensões diversas pré-definidas, que serão obtidos do corte de objetos maiores, em estoque, com dimensões de-

terminadas. Neste caso, o comprimento e a largura serão levados em conta durante o processo de corte dos objetos. A Figura 1.2 mostra o corte de um objeto retangular. Observe que as dificuldades aumentam consideravelmente para gerar uma combinação dos itens sobre o objeto, sem sobrepô-los. Exemplos de aplicação: Corte de painéis de madeira e/ou compensados na indústria de móveis [12] e [22], placas de vidro [55], entre outros.

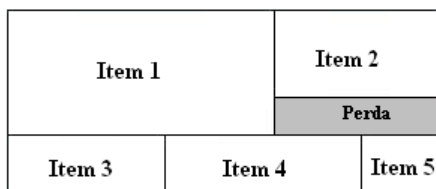


Figura 1.2: Corte Bidimensional

### Tridimensional

Um Problema de Corte de Estoque é dito tridimensional quando as três dimensões do objeto (largura, comprimento e altura) são relevantes durante o corte. Neste caso, o empacotamento de itens menores num espaço maior têm maior aplicabilidade prática do que o corte de objetos grandes em itens menores, e tratam, basicamente, da alocação de itens espaciais dentro de objetos maiores buscando minimizar, por exemplo, os espaços ociosos dentro do objeto maior. A Figura 1.3 ilustra a alocação de itens em três dimensões. Exemplos de aplicação: Carregamento de *containers* ou *pallets* [49], corte de blocos de espuma para a fabricação de travesseiros e colchões, etc.

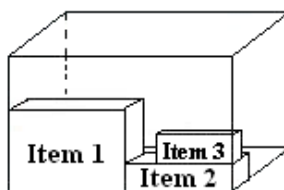


Figura 1.3: Corte Tridimensional

Ainda sob o aspecto geométrico, há os problemas do tipo 1,5–dimensional, que são essencialmente bidimensionais, mas com uma das dimensões variável. Este tipo de problema se aplica ao corte de peças de vestuário, por exemplo, onde o objeto a ser cortado é um rolo de tecido com largura fixa e comprimento suficientemente grande para cortar as peças. Outros problemas podem ainda ser classificados como 2,5–dimensional, que são essencialmente tridimensionais, com uma das dimensões variável. Como exemplo destes, podem-se tomar os de



carregamento de caixas abertas, que têm a base fixa e altura indeterminada, ou um *container* suficientemente alto para acomodar um volume de carga. Problemas que possuem uma das dimensões variáveis são, de maneira geral, denominados  $n, 5$ -dimensionais.

Além desses problemas já comentados, podem aparecer também os problemas multi-dimensionais, que podem estar associados ao Problema de Alocação de Tarefas [49]. Tais problemas fazem parte dos problemas de dimensões não-espaciais na associação de Dyckhoff e podem ser considerados problemas abstratos, pois as dimensões levadas em consideração não são dimensões físicas ou palpáveis. Exemplos deste tipo de problema são: o problema do carregamento de veículos, a programação de rotas de veículos, navios e aviões, a alocação de memória de computador, entre outros. Nestes problemas, os objetos e itens têm uma métrica diferente, isto é, ao invés de terem comprimento, largura e altura, podem ter dimensões como tempo, peso, memória e etc, que são não-espaciais.

O trabalho de Dyckhoff [20] foi, sem dúvida, um marco na pesquisa dos Problemas de Corte e Empacotamento. Foi neste trabalho que as características e a estrutura básica comum destes problemas foi destacada e, com isso, houve a integração dessas duas áreas de pesquisa e os dois problemas começaram a ser estudados juntos, pois até então eram tratados separadamente. Contudo, o número de publicações na área dos Problemas de Corte e Empacotamento cresceu consideravelmente nas últimas duas décadas e, por isso, algumas deficiências da tipologia de Dyckhoff se tornaram evidentes como, por exemplo, o fato de que a classificação de um problema pode não ser única. Wäscher *et al* [71] apresentam uma nova tipologia parcialmente baseada nas idéias de Dyckhoff introduzindo novos critérios que definem diferentes categorias de problemas. Os critérios definidos são tipo de designação (minimização do consumo - *input minimization* - e maximização da produção - *output maximization*), forma dos itens (circulares, retangulares, etc.) dentre os outros tais como na tipologia de Dyckhoff.

### 1.3 Modelos Matemáticos

Há diversas maneiras de formular um Problema de Corte e Empacotamento e vários fatores que podem ser considerados nos dados ou nas restrições como, por exemplo, o número de tipos de objetos em estoque, a quantidade de objetos disponível (quantidade limitada ou não), capacidade de máquina (limitada ou não), tempo de produção, tipo de corte permitido, entre outros. Nesta seção, apresentamos modelos para o Problema de Corte de Estoque

Unidimensional, dentre eles o modelo de programação linear introduzido por Kantorovich e apresentado em [11], e a formulação dada por Gilmore e Gomory em [25] para o mesmo problema. Em seguida, destacamos alguns modelos matemáticos para o caso bidimensional, que julgamos importantes e que serão estudados com mais detalhes no desenvolvimento do texto.

### Definição do Problema de Corte Unidimensional

O Problema de Corte Unidimensional pode ser definido da seguinte forma. Considere que temos em estoque uma quantidade suficientemente grande de barras (objetos) de comprimento  $L$  e uma solicitação de  $m$  barras menores (itens) de comprimentos  $l_i, i = 1, \dots, m$ . A produção de cada item deve atender a uma demanda  $b_i, i = 1, \dots, m$ . O problema, então, consiste em cortar os itens, a partir dos objetos em estoque, atendendo à demanda de tal forma que se otimize alguma função objetivo como, por exemplo, maximizar uma função lucro, minimizar uma função custo ou o número de objetos cortados, entre outros. De maneira geral, podemos formular um Problema de Corte de Estoque com o seguinte modelo:

$$\begin{aligned} \text{Min } Z &= c \cdot x \\ \text{s.a.: } & A \cdot x = b \\ & x \in \mathbb{Z}_+^n, \end{aligned}$$

em que  $c \in \mathbb{R}_+^n$  é o vetor custo do corte dos objetos,  $b \in \mathbb{Z}_+^m$  é o vetor de demandas dos  $m$  itens e  $A \in \mathbb{R}_+^{m \times n}$  é a matriz de restrições do problema. A função objetivo (1.1) deste modelo é minimizar o custo de corte dos objetos de tal forma que as demandas dos itens sejam atendidas, o que é garantido pelo conjunto de restrições (1.1). As restrições (1.1) define o domínio das variáveis de decisão.

A formulação mais simples para o Problema de Corte Unidimensional, conhecido como **Problema da Mochila**, é dado por:

$$\text{Max } Z = v_1x_1 + v_2x_2 + \dots + v_mx_m \quad (1.1)$$

$$\text{s.a.: } l_1x_1 + l_2x_2 + \dots + l_mx_m \leq L \quad (1.2)$$

$$x_i \in \mathbb{Z}_+, i = 1, \dots, m, \quad (1.3)$$

em que  $v_i$  é o valor de utilidade do item  $i$ . Neste caso, apenas um objeto está disponível e o critério de otimização é maximizar o valor de utilidade total dos itens. A restrição (1.2) é chamada **restrição física do objeto**, que limita a quantidade de itens cortados da barra.

Cada uma das soluções possíveis para a restrição física do objeto, define uma maneira de se cortar o objeto.

**Definição 1.1.** *Cada uma das maneiras como os itens podem ser cortados do objeto é chamada de **padrão de corte**. A um padrão de corte podemos associar um vetor  $m$ -dimensional que contabiliza os itens nele contidos:  $A_j = (a_{1j}, \dots, a_{mj})$  sendo  $a_{ij}$  o número de vezes que o item  $i$  aparece no padrão de corte  $j$ . Um vetor  $m$ -dimensional  $(a_{1j}, \dots, a_{mj})$  representa um padrão de corte  $j$  se, e somente se, satisfizer a restrição física do objeto 1.2.*

A Figura 1.4, mostra alguns exemplos de padrões de corte para um objeto e 3 itens quaisquer. A área hachurada em cada padrão de corte é a sua respectiva **perda total**, calculada para cada padrão de corte  $j$ , por

$$P_j = \left( L - \sum_{i=1}^m l_i a_{ij} \right). \quad (1.4)$$

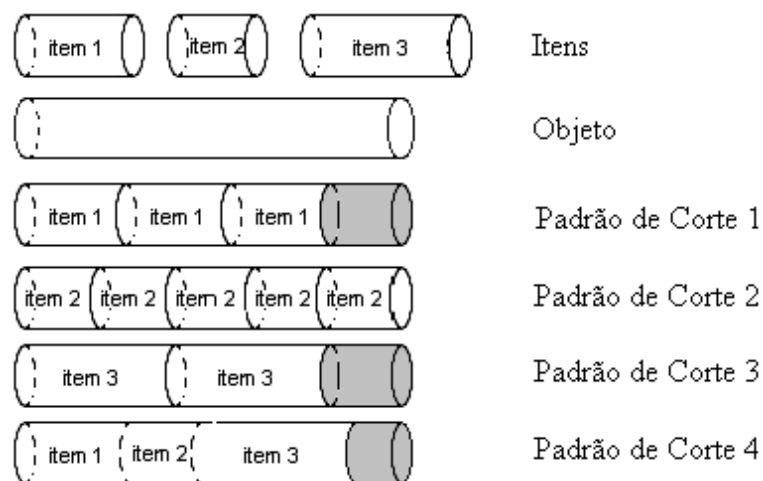


Figura 1.4: Exemplos de Padrões de Corte Unidimensionais

Para os padrões de corte da Figura 1.4 temos os seguintes vetores associados:

$$A_1 = (3, 0, 0); \quad A_2 = (0, 5, 0); \quad A_3 = (0, 0, 2); \quad A_4 = (1, 1, 1).$$

**Definição 1.2.** *Padrões de corte que têm o mesmo vetor associado são chamados de **equivalentes**. Os padrões de corte que possuem apenas um tipo de item são chamados de **padrões de corte homogêneos**, ou seja, tais padrões de corte têm apenas uma das  $m$  coordenadas não-nula ( $A_j = (0, \dots, a_{ij}, \dots, 0)$ ). Quando o número de vezes que o item aparece no padrão de corte homogêneo é o maior possível, é chamado de **padrão de corte homogêneo maximal***

[15]. Os padrões de corte 1, 2 e 3 na Figura 1.4 são exemplos de padrões de corte homogêneos maximais, com

$$a_{ij} = \begin{cases} \left\lfloor \frac{L}{l_i} \right\rfloor, & \text{se } i = j; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (1.5)$$

Após definirmos os conceitos de padrões de corte, temos condições de apresentar o primeiro modelo matemático da literatura para o Problema de Corte de Estoque Unidimensional dado por Kantorovich e apresentado em [11], cujo objetivo é minimizar o número de padrões de corte distintos usados e é modelado da seguinte forma:

$$(PKan) \quad \text{Min } Z_{Kan} = \sum_{j=1}^K y_j \quad (1.6)$$

$$\text{s.a.:} \quad \sum_{j=1}^K x_{ij} \geq b_i, \quad i = 1, \dots, m \quad (1.7)$$

$$\sum_{i=1}^m l_i x_{ij} \leq L y_j, \quad j = 1, \dots, K \quad (1.8)$$

$$x_{ij} \in \mathbb{Z}_+, \quad y_j \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, K. \quad (1.9)$$

onde  $K$  é um limitante superior conhecido para o número de padrões de corte necessários,  $x_{ij}$  é o número de vezes que o item  $i$  aparece no padrão de corte  $j$  e  $y_j = 1$ , se o padrão de corte  $j$  é usado e,  $y_j = 0$ , caso contrário.

O conjunto de restrições (1.7) garante o atendimento à demanda dos itens, permitindo excedentes na produção. Já o conjunto de restrições (1.8) chamadas de **restrição de setup** indica que, se o padrão de corte  $j$  for usado ( $y_j = 1$ ) então a combinação dos itens que nele aparecem deve ser compatível com o comprimento do objeto, ou seja, a restrição (1.8) se reduz à restrição física do objeto (1.2). O último conjunto de restrições (1.9) define o domínio das variáveis.

Um limite inferior para solução ótima de problemas de minimização pode ser obtida pela resolução da sua relaxação linear, isto é, as restrições (1.9) são substituídas por  $0 \leq y_j \leq 1$ ,  $x_{ij} \geq 0$ , para  $i = 1, \dots, m$ ,  $j = 1, \dots, K$ , no modelo PKan. Martello e Toth [41] mostraram que o limite inferior dado pela relaxação linear deste problema é muito fraco. Ademais, o modelo apresenta muita simetria, ou seja, diferentes combinações de padrões de corte na solução podem gerar soluções equivalentes, o que geralmente acarreta um esforço maior na busca por uma solução ótima [6]. A Figura 1.5 ilustra uma solução simétrica num Problema de Corte Unidimensional. É fácil notar que os padrões de corte da Figura 1.5 são equivalentes e, por

isso, podem ser vistos como o mesmo padrão de corte.



Figura 1.5: Exemplo de Solução Simétrica no Caso Unidimensional

No modelo PKan,  $K$  é um limitante superior para o número de total de padrões de corte distintos e cada padrão de corte é determinado durante a resolução do problema. Porém, o número de padrões de corte possíveis pode chegar à ordem de milhões ou bilhões, já que o número de itens nas indústrias pode ser da ordem de dezenas ou centenas e, é fácil ver que, o número de possíveis combinações de itens que satisfaçam à inequação (1.2) é extremamente grande. Portanto, outra forma de modelar o problema é sugerida por Gilmore e Gomory [25]. Considerando que os  $n$  padrões de corte possíveis sejam conhecidos *a priori*, o problema é formulado como:

$$(PGG) \quad \text{Min } Z_{GG} = \sum_{j=1}^n x_j \quad (1.10)$$

$$\text{s.a.:} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \geq b_i, \quad i = 1, \dots, m \quad (1.11)$$

$$x_j \in \mathbb{Z}_+, \quad j = 1, \dots, n, \quad (1.12)$$

onde  $a_{ij}$  é o número de vezes que o item  $i$  aparece no padrão de corte  $j$  e  $x_j$  é a variável do problema que define quantos objetos são cortados de acordo com o padrão de corte  $j$ . A restrição (1.11) garante o atendimento à demanda dos itens e permite excesso de produção. Este modelo de Gilmore e Gomory, apesar de também apresentar simetrias na solução, possui uma importante propriedade que implica numa relaxação linear forte. O seguinte resultado de Scheithauer e Terno em [63] garante tal afirmação.

**Conjectura:** *Modified Integer Round-Up Property (MIRUP):*

*O GAP entre o valor ótimo  $Z^*$  do problema inteiro PGG e o valor ótimo  $Z_L^*$  da relaxação linear associada é sempre menor ou igual a 2.*

De fato, não há exemplos conhecidos com um GAP maior ou igual a  $\frac{7}{6}$  (Scheithauer e Rietz [62]). Além disso, a grande maioria dos exemplos apresentam um GAP menor que 1. Tais exemplos possuem a propriedade *Integer Round-Up Property (IRUP)*. Exemplos cujos GAP's são maiores ou iguais a 1 são as chamadas instâncias **non-IRUP**.

A diferença primordial entre os problemas unidimensional e bidimensional está, não no padrão de corte em si, mas em como construí-lo. Por isso, o modelo PGG de Gilmore e Gomory pode ser usado para modelar também o problema no caso bidimensional, já que considera-se que os padrões de corte são conhecidos *a priori*, ou seja, já foram construídos.

A construção de padrões de corte bidimensionais não é trivial como no caso unidimensional, que um padrão de corte é determinado apenas tomando as possíveis soluções da inequação de restrição física do objeto (1.2). Há muitos outros fatores que devem ser levados em conta na obtenção de um padrão de corte bidimensional como, por exemplo, a permissão de rotacionar os itens, o tipo de corte que será efetuado (guilhotinado ou não-guilhotinado) e o número de estágios. A seguir, definimos o Problema de Corte de Estoque Bidimensional, relacionando e associando os conceitos definidos para o caso unidimensional e apresentamos algumas formulações matemáticas para o novo problema.

### Definição do Problema de Corte de Estoque Bidimensional

O Problema de Corte Bidimensional pode ser definido da maneira descrita a seguir. Considere que temos em estoque uma quantidade suficientemente grande de objetos de tamanhos definidos e uma solicitação de  $m$  itens menores com dimensões definidas. A produção de cada item deve atender a uma demanda  $b_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ . O problema consiste em produzir os itens, a partir do corte dos objetos em estoque, atendendo à demanda de tal maneira que se otimize alguma função objetivo como, por exemplo, minimizar uma função perda, minimizar o número de objetos cortados, entre outros. No caso deste trabalho, os objetos em estoque são retangulares com dimensões  $L \times W$  (comprimento e largura) e que os itens a serem produzidos também são retangulares de dimensões  $l_i \times w_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ .

Considerando que conhecemos os  $n$  possíveis padrões de corte bidimensionais e que o objetivo seja minimizar a perda de matéria-prima, então o Problema de Corte de Estoque Bidimensional pode ser formulado como segue [58]:

$$(P) \quad \text{Min } Z_P = \sum_{j=1}^n P_j x_j \quad (1.13)$$

$$\text{s.a.:} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, \dots, m \quad (1.14)$$

$$x_j \in \mathbb{Z}_+, \quad j = 1, \dots, n. \quad (1.15)$$

onde  $P_j$  é a **perda total** gerada pelo padrão de corte bidimensional  $j$ , dada por

$$P_j = \left( L * W - \sum_{i=1}^m (w_i * l_i) a_{ij} \right), \quad (1.16)$$

e a restrição (1.14) garante o exato atendimento da demanda dos itens.

Após algumas manipulações algébricas é possível mostrar que o objetivo de minimizar a perda de material (1.13) é equivalente a minimizar o número de objetos cortados (1.10) quando a demanda deve ser atendida exatamente (1.14) e há em estoque apenas um tipo de objeto. Esta afirmação é válida tanto no caso unidimensional ([61] e [57]) como no bidimensional, que vamos mostrar.

**Proposição 1.1.** *Um vetor  $x$  é solução ótima do problema  $P$  se, e somente se,  $x$  é solução ótima do problema  $P^1$  dado por:*

$$(P^1) \quad \text{Min } Z_{P^1} = \sum_{j=1}^n x_j \quad (1.17)$$

$$\text{s.a.:} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, \dots, m \quad (1.18)$$

$$x_j \in \mathbb{Z}_+, \quad j = 1, \dots, n. \quad (1.19)$$

**Demonstração:** Temos que  $P_j = \left( L * W - \sum_{i=1}^m (w_i * l_i) a_{ij} \right)$ . Substituindo  $P_j$  na função objetivo (1.13) e aplicando a regra distributiva para  $x_j$ , resulta em:

$$\sum_{j=1}^n P_j x_j = \sum_{j=1}^n \left( L * W - \sum_{i=1}^m (w_i * l_i) a_{ij} \right) x_j = \sum_{j=1}^n \left( (L * W) x_j - \sum_{i=1}^m (w_i * l_i) a_{ij} x_j \right).$$

Separando os termos e reescrevendo as somas, temos:

$$\sum_{j=1}^n P_j x_j = (L * W) \sum_{j=1}^n x_j - \sum_{i=1}^m (w_i * l_i) \underbrace{\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j}_{b_i}.$$

Pela restrição (1.14) de  $P$ , temos que  $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Assim, substituindo

$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$  por  $b_i$ , obtemos:

$$\sum_{j=1}^n P_j x_j = (L * W) \sum_{j=1}^n x_j - \sum_{i=1}^m (w_i * l_i) b_i.$$

Desta última igualdade podemos concluir que:

$$\text{Min} \left( \sum_{j=1}^n P_j x_j \right) \Leftrightarrow \text{Min} \left( (L * W) \sum_{j=1}^n x_j - \sum_{i=1}^m (w_i * l_i) b_i \right) \Leftrightarrow \text{Min} \left( \sum_{j=1}^n x_j \right),$$

pois  $(L * W)$  e  $\sum_{i=1}^m (w_i * l_i) b_i$  são constantes e não têm influência na resolução do problema.

Portanto, minimizar a perda de material é equivalente a minimizar o número total de objetos cortados quando temos apenas um tipo de objeto em estoque e a demanda deve ser atendida exatamente. ■

Os modelos apresentados,  $P$  e  $P^1$ , para o Problema de Corte de Estoque Bidimensional são exatamente os mesmos para o caso unidimensional, a menos da fórmula para a perda, que no caso unidimensional é dada por (1.4), e o processo de obtenção das colunas.

De maneira análoga ao caso unidimensional, é fácil obter padrões de corte homogêneos maximais bidimensionais. Basta calcular  $a_{ij}$  por:

$$a_{ij} = \begin{cases} \left\lfloor \frac{L}{l_j} \right\rfloor * \left\lfloor \frac{W}{w_j} \right\rfloor, & \text{se } i = j; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (1.20)$$

onde  $L$  e  $l_j$  são os comprimentos do objeto e do item  $j$ , respectivamente,  $W$  é a largura do objeto e  $w_j$  é a largura do item  $j$ . Um exemplo de padrão de corte homogêneo maximal no caso bidimensional, para um item  $j$  qualquer, é mostrado na Figura 1.6 seguinte.

Item j	Item j	
Item j	Item j	

Figura 1.6: Exemplo de Padrão de Corte Homogêneo Maximal Bidimensional

Com relação à simetria na solução do problema, um exemplo para o caso bidimensional é mostrado na Figura 1.7. Observe que, obter soluções simétricas implica em obter padrões de corte equivalentes, pois diz-se que há simetria quando é possível obter soluções equivalentes utilizando conjuntos de padrões de corte diferentes (cujas colunas associadas são iguais).

Item 1		Item 2	
		Perda	
Item 3	Item 4	Item 5	

Item 3	Item 4	Item 5
Item 1		Item 2
		Perda

Figura 1.7: Exemplo de Solução Simétrica no Caso Bidimensional



Todos os modelos aqui apresentados, tanto para o caso unidimensional quanto para o caso bidimensional, consideram que há em estoque apenas um tipo de objeto em quantidade suficiente para atender à demanda. No nosso trabalho, adotamos as mesmas condições, pois a empresa visitada trabalha com placas de tamanhos iguais ( $2750 \times 1830$  - largura  $\times$  comprimento, diferindo apenas nas espessuras) e sem restrição do estoque. Assim, para resolver o Problema de Corte de Estoque na referida empresa, o modelo (1.17)-(1.19), é suficiente, uma vez que apenas a largura e o comprimento do objeto são relevantes na construção dos padrões de corte que farão parte do modelo. Não obstante, há empresas nas quais os objetos utilizados como matéria-prima têm dimensões variadas. Nos trabalhos [15] e [76], encontramos problemas que consideram esta nova situação para o Problema de Corte de Estoque Bidimensional. Algumas adaptações são necessárias no modelo  $\mathbf{P}^1$  (1.17)-(1.19) para simular estas novas condições. Um modelo que representa esta situação, inclui limitantes para a quantidade de objetos em estoque, e é formulado como [48]:

$$\text{Min } Z = \sum_{j=1}^{n_1} c_1 x_{j1} + \sum_{j=1}^{n_2} c_2 x_{j2} + \dots + \sum_{j=1}^{n_N} c_N x_{jN} \quad (1.21)$$

$$\text{s.a.: } \sum_{j=1}^{n_1} A_j^1 x_{j1} + \sum_{j=1}^{n_2} A_j^2 x_{j2} + \dots + \sum_{j=1}^{n_N} A_j^N x_{jN} = b \quad (1.22)$$

$$\sum_{j=1}^{n_1} x_{j1} \leq e_1 \quad (1.23)$$

$$\sum_{j=1}^{n_2} x_{j2} \leq e_2 \quad (1.24)$$

...

$$\sum_{j=1}^{n_N} x_{jN} \leq e_N \quad (1.25)$$

$$x_{jk} \in \mathbb{N}, \quad j = 1, \dots, n_k, \quad k = 1, \dots, N, \quad (1.26)$$

sendo  $N$  : número de tipos diferentes de objetos;

$e_k$  : quantidade disponível de objetos do tipo  $k$  no estoque,  $k = 1, \dots, N$ ;

$n_k$  : número de padrões de corte possíveis para o objeto do tipo  $k$ ,  $k = 1, \dots, N$ ;

$c_k$  : custo unitário do objeto do tipo  $k$ ,  $k = 1, \dots, N$ ;

$A_j^k$  : padrão de corte  $j$  associado ao objeto do tipo  $k$ ,  $k = 1, \dots, N$ ,  $j = 1, \dots, n_k$ ;

$x_{jk}$  : número de vezes que o objeto do tipo  $k$  é cortado segundo o padrão de corte  $j$ ,  
 $k = 1, \dots, N$ ,  $j = 1, \dots, n_k$ ;

$b$  : vetor demanda dos itens.

No modelo (1.21)-(1.26), o conjunto de restrições (1.22) garante o exato atendimento da demanda dos itens e a restrição (1.23) impede que o objeto do tipo 1 seja usado um número maior de vezes do que há em estoque. As restrições de (1.24) até (1.25) são equivalentes à (1.23), para o tipo de objeto  $k$ ,  $k = 2, \dots, N$ . A restrição (1.26) é a restrição de integralidade das variáveis. A função objetivo a ser minimizada (1.21) é o custo total dos objetos cortados. Note que, da mesma forma como na construção do modelo  $\mathbf{P}^1$  (1.17)-(1.19), admite-se que todos os padrões de corte possíveis são conhecidos *a priori* para todos os tipos de objetos em estoque.

## 1.4 Métodos de Solução para o Problema de Corte e Empacotamento

Já observamos na seção anterior que os Problemas de Corte de Estoque têm associados um número muito alto de padrões de corte possíveis. Isto implica numa dificuldade para a modelagem explícita (com todos os padrões de corte possíveis) e resolução direta do problema. Por conta da importância de tais problemas para a prática das indústrias, muitos estudos se concentraram em contornar este inconveniente, que impossibilita a resolução direta (com todos os padrões de corte possíveis explícitos) do problema por métodos exatos como o Método Simplex, no que diz respeito à capacidade de memória computacional.

A resolução de problemas de grande porte (problemas com grande número de variáveis e restrições) se tornou possível e ganhou avanços significativos na década de 60 com a publicação do Princípio de Decomposição de Dantzig-Wolfe [18]. A partir desta técnica, Gilmore e Gomory desenvolveram o Método de Geração de Colunas para o caso unidimensional [25] e, mais tarde, para o caso bidimensional [27] levando em conta restrições da própria indústria. Desde então, este método tem sido usado em outros procedimentos, ampliando a possibilidade de resolução de problemas de grande porte, em particular, dos Problemas de Corte Bidimensionais.

### 1.4.1 Princípio de Decomposição de Dantzig-Wolfe

O Princípio de Decomposição de Dantzig-Wolfe é um procedimento sistemático para resolver problemas de grande porte, mas é mais indicado para problemas lineares que contêm restrições com uma estrutura especial, chamada *estrutura p-bloco angular*,  $p > 1$ . Um modelo

com estrutura  $p$ -bloco angular é da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 \text{Min } Z &= c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_px_p \\
 \text{s.a.: } &\tilde{A}_1x_1 + \tilde{A}_2x_2 + \dots + \tilde{A}_px_p = b_0 \\
 &A_1x_1 = b_1 \\
 &A_2x_2 = b_2 \\
 &\vdots \\
 &A_px_p = b_p \\
 &x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, p, \quad p > 1
 \end{aligned} \tag{1.27}$$

onde a restrição  $\tilde{A}_1x_1 + \tilde{A}_2x_2 + \dots + \tilde{A}_px_p = b_0$  é chamada de **restrição de acoplamento** e cada uma das outras restrições formam conjuntos independentes entre si. Qualquer problema de programação linear pode ser considerado com tal estrutura, tomando  $p = 1$ .

As restrições são divididas em dois conjuntos: restrições gerais (restrição de acoplamento) e restrições com a estrutura especial (caso exista no problema). A estratégia é "particionar" problemas de grande porte em dois novos problemas de mais fácil resolução (do ponto de vista de complexidade computacional) que serão resolvidos separadamente. Um dos problemas é o chamado Problema Mestre, que é equivalente ao problema original e possui um número reduzido de restrições (as restrições gerais), mas com o número de colunas muito maior. O Problema Mestre é resolvido, com apenas um conjunto de colunas explícito (Problema Mestre Restrito), usando a geração de colunas através do chamado subproblema ou problema *pricing*, que é um problema derivado da decomposição sobre as restrições especiais.

Para apresentarmos o Princípio de Decomposição de Dantzig-Wolfe, consideremos, sem perda de generalidade, o seguinte modelo geral de programação linear:

$$\begin{aligned}
 \text{Min } Z &= c^T x \\
 \text{s.a.: } Ax &= b \\
 x &\geq 0
 \end{aligned} \tag{1.28}$$

Podemos considerar que este problema tenha uma estrutura  $p$ -bloco angular com  $p = 1$ . Particionando os conjuntos de restrições do modelo (1.28) em restrição de acoplamento e restrições especiais, temos:

$$\begin{aligned}
 \text{Min } Z &= c^T x \\
 \text{s.a.: } \tilde{A}_0x &= b_0, \quad m_0 \text{ restrições} \\
 A_1x &= b_1, \quad m_1 \text{ restrições} \\
 x &\geq 0
 \end{aligned} \tag{1.29}$$

onde as  $m_0$  primeiras restrições são as restrições de acoplamento.

Por simplicidade, podemos assumir que o poliedro

$$X = \{x \mid A_1 x = b_1, x \geq 0\} \quad (1.30)$$

é limitado (esta condição pode ser relaxada [12]) e reformular o modelo (1.29) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \text{Min } Z &= c^T x \\ \text{s.a.: } \tilde{A}_0 x &= b_0 \\ x &\in X \end{aligned}$$

Como  $X$  é convexo, qualquer ponto do conjunto  $X$  pode ser escrito como combinação convexa de seus pontos extremos [8], ou seja:

$$x = \sum_{j=1}^t \lambda^j x^j \quad (1.31)$$

$$\sum_{j=1}^t \lambda^j = 1, \quad (1.32)$$

$$\lambda^j \geq 0, \quad \forall j = 1, \dots, t, \quad (1.33)$$

em que  $x^1, x^2, \dots, x^t$  são os pontos extremos do poliedro  $X$  e a equação (1.32) é chamada de **restrição de convexidade** [11].

A idéia para resolver o problema (1.29) é encontrar uma solução de (1.30) que satisfaça à restrição de acoplamento  $\tilde{A}_0 x = b_0$  e que minimize a função  $Z$ . Para isto, substituímos as equações (1.31), (1.32) e (1.33) no problema (1.29) e simplificamos:

$$\tilde{A}_0 x = b_0 \Leftrightarrow \tilde{A}_0 \left( \sum_{j=1}^t \lambda^j x^j \right) = b_0 \Leftrightarrow \sum_{j=1}^t \left( \tilde{A}_0 x^j \right) \lambda^j = b_0,$$

$$Z = c^T x \Leftrightarrow Z = c^T \left( \sum_{j=1}^t \lambda^j x^j \right) \Leftrightarrow Z = \sum_{j=1}^t (c^T \lambda^j) x^j.$$

Assim, o problema (1.29) é equivalente a:

$$\text{Min } Z = \sum_{j=1}^t (c^T \lambda^j) x^j \quad (1.34)$$

$$\text{s.a.: } \sum_{j=1}^t \left( \tilde{A}_0 x^j \right) \lambda^j = b_0 \quad (1.35)$$

$$\sum_{j=1}^t \lambda^j = 1 \quad (1.36)$$

$$\lambda^j \geq 0, \quad j = 1, \dots, t, \quad (1.37)$$

O problema (1.34)-(1.37) é o chamado **Problema Mestre** e é equivalente ao problema (1.29). Observe que este modelo tem  $m_0 + 1$  restrições (menos do que o problema (1.29), que tem  $m_0 + m_1$  restrições) e tantas colunas quanto o número de pontos extremos ( $t$ ) do poliedro  $X$ , que pode ser da ordem de milhões. Portanto, para resolver este problema sem explicitar todas as colunas, podemos utilizar a técnica de geração de colunas.

Através desse procedimento de decomposição é possível mostrar que os modelos de Kantorovich (1.6)-(1.9) e de Gilmore e Gomory (1.10)-(1.12) são equivalentes. Basta aplicar a Decomposição de Dantzig-Wolfe no modelo PKan de Kantorovich para obter o modelo de Gilmore e Gomory PGG [67].

### 1.4.2 Método Simplex com Geração de Colunas

Um dos fatores que torna a resolução dos Problemas de Corte difícil, além da quantidade numerosa de colunas que podem existir, é a condição de integralidade sobre as variáveis de decisão. Por esta razão, um método de resolução é relaxar a condição de integralidade das variáveis do problema original, admitindo que estas possam atingir valores reais, não-negativos, e resolver a relaxação linear do problema por geração de colunas. Considere, então, o seguinte modelo de programação linear (relaxação linear do problema (1.28)):

$$\text{Min } Z_L = \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (1.38)$$

$$\text{s.a.: } \sum_{j=1}^n A_j x_j = b \quad (1.39)$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n \quad (1.40)$$

onde  $A_j, b \in \mathbb{R}^m$ ,  $j = 1, \dots, n$ , com  $n \gg m$ , ou seja, o número de colunas é muito maior do que o número de linhas.

Para dar início ao Método Simplex, é necessária uma solução básica viável inicial, ou seja, uma solução não-negativa cuja matriz básica associada é não-singular (invertível). Para os Problemas de Corte, encontrar uma solução básica inicial é muito simples. Basta tomarmos a matriz básica formada pelos  $m$  padrões de corte homogêneos maximais e calcular a solução associada a esta base. Assim, a base inicial é a seguinte:

$$B = [A_1 \dots A_m] = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_{mm} \end{bmatrix},$$

onde  $a_{ij}$  é dado por (1.5), no caso unidimensional e, por (1.20) para o caso bidimensional.

A solução básica viável inicial, associada à base  $B$ , é

$$x_B = B^{-1}b$$

e, considerando que  $c_B$  seja o vetor de coeficientes das variáveis básicas na função objetivo, a solução dual associada, ou o vetor dos **multiplicadores simplex**, é dada por

$$\pi^T = c_B^T B^{-1}.$$

Para decidirmos que variável deve entrar na base, caso exista alguma candidata, devemos calcular os **custos relativos** das variáveis não-básicas dados por

$$\hat{c}_j = c_j - \pi^T A_j, \quad j \in \{\text{Conjunto das variáveis não-básicas}\},$$

sendo  $c_j$  o custo da variável não-básica  $j$  na função objetivo. Observe que há  $m$  variáveis básicas e, portanto, existem  $(n - m)$  variáveis não-básicas que é um número muito grande, uma vez que  $n \gg m$ . Desta forma, é praticamente impossível calcular os custos relativos de todas as variáveis não-básicas. Então a idéia é gerar a variável não-básica (coluna), utilizando o critério de Dantzig [5], que procura a coluna com o menor custo relativo para entrar na base, já que o objetivo é minimizar  $Z_L$ . A geração da coluna é feita através de um problema auxiliar, chamado de subproblema ou problema *pricing out*, dado por:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & (c_j - \pi^T A_j) \\ \text{s.a.:} \quad & A_j \text{ corresponde a um padrão de corte.} \end{aligned} \tag{1.41}$$

Considerando que os valores de  $c_j$ ,  $j = 1, \dots, n$ , são constantes, podemos omití-los da função objetivo do subproblema e, desenvolvendo a multiplicação  $\pi^T A_j$ , podemos reescrevê-lo como segue:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & z_{subp} = \sum_{i=1}^m \pi_i a_{ij} \\ \text{s.a.:} \quad & A_j = (a_{1j}, \dots, a_{mj}) \text{ corresponde a um padrão de corte.} \end{aligned} \tag{1.42}$$

No caso do Problema de Corte de Estoque Unidimensional, quando a restrição do subproblema é apenas a restrição física do objeto (1.2), então o subproblema corresponde ao Problema da Mochila (1.1)-(1.3), sendo que os multiplicadores simplex fazem o papel dos valores de utilidade dos itens.

Suponha que a  $k$ -ésima coluna seja gerada,  $A_k = (a_{1k}, \dots, a_{mk})$ , com custo relativo  $\hat{c}_k = c_k - \pi^T A_k$ . Se  $\hat{c}_k = c_k - \pi^T A_k < 0$ , então a coluna  $k$  entra na base, o valor de  $Z_L$

é melhorado (diminuído) e o Método Simplex segue da forma convencional até a próxima iteração. Em cada iteração, uma coluna é gerada no passo em que se decide se há, ou não, uma variável candidata a entrar na base. O processo da geração de colunas continua até que a coluna  $\kappa$  gerada tenha custo relativo não-negativo, ou seja,  $\widehat{c}_\kappa = c_\kappa - \pi^T A_\kappa \geq 0$ , pois neste caso, a coluna não será candidata a entrar na base, uma vez que o valor da função objetivo será aumentado (ou inalterado) se somarmos a ela um número não-negativo. Portanto, este é o teste de otimalidade para o Método Simplex com Geração de Colunas. Note que a vantagem deste procedimento de geração de colunas é que não há necessidade de armazenar todas as colunas do problema, mas sim, apenas as mais interessantes em cada passo do método.

É importante ressaltar que este método de solução é aplicado à relaxação linear do problema, o que pode resultar em soluções fracionárias. Portanto, o fato de resolver o problema linear através do Método de Geração de Colunas não implica, necessariamente, numa solução ótima para o problema original (inteiro). Assim, depois de resolvido o problema linear, um novo problema pode surgir: encontrar uma solução inteira para o problema original a partir da solução da relaxação linear, se esta não for inteira. A seguir, citamos alguns procedimentos para encontrar uma solução viável para o problema inteiro.

Na descrição do Método de Geração de Colunas, consideramos o problema (1.38)-(1.40), ou seja, com apenas um tipo de objeto em estoque. Assim, o problema de minimização das perdas de material dos objetos (1.38)-(1.40) é equivalente ao problema de minimizar o número de objetos cortados ( $\mathbf{P}^1$  (1.17)-(1.19)). Levando este fato em consideração, os custos podem ser considerados unitários e omitidos da formulação do problema (1.38)-(1.40), resultando na relaxação do problema  $\mathbf{P}^1$  (1.17)-(1.19), dado por:

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{P}_L^1) \quad \text{Min } Z_{\mathbf{P}_L^1} &= \sum_{j=1}^n x_j \\
 \text{s.a.:} \quad &\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, \dots, m \\
 &x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n,
 \end{aligned}$$

Partindo da solução obtida com o Método de Geração de Colunas, uma maneira de se obter uma solução viável inteira para o problema é através de heurísticas de arredondamento. Seja, então,  $\bar{x} \in \mathbb{R}_+^m$  uma aproximação inteira, para a solução ótima  $x^*$  da relaxação linear do problema, fazendo:

$$\bar{x}^T = (\lfloor x_1^* \rfloor, \dots, \lfloor x_m^* \rfloor).$$

Se esta solução inteira ainda for inviável para o problema inteiro  $\mathbf{P}^1$  (1.17)-(1.19), ou seja, se  $\sum_{j=1}^n a_{ij}\bar{x}_j < b_i$  para algum  $i = 1, \dots, m$ , então, o seguinte problema é resolvido:

$$\text{Min } Z_R = \sum_{j=1}^n x_j \quad (1.43)$$

$$\text{s.a.: } \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = r_i, \quad i = 1, \dots, m \quad (1.44)$$

$$x_j \in \mathbb{Z}_+, \quad j = 1, \dots, n \quad (1.45)$$

onde  $r_i = b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}\bar{x}_j$ ,  $i = 1, \dots, m$ , é a demanda residual que não foi atendida pelo truncamento da solução ótima  $x^*$  do problema relaxado  $\mathbf{P}_L^1$ . O problema (1.43)-(1.45) é chamado de **Problema Residual**.

O Problema Residual (1.43)-(1.45) pode ser resolvido com a utilização de heurísticas residuais. A idéia básica destas heurísticas é: resolva o problema original relaxado; obtenha uma solução inteira aproximada; resolva o problema residual relaxado resultante; obtenha uma solução inteira aproximada e assim por diante. Heurísticas residuais podem ser encontradas em [70], [34] e [57] (para o caso unidimensional) e [15] (para o caso bidimensional).

Gilmore e Gomory propuseram, após encontrar uma solução ótima para o  $\mathbf{P}_L^1$ , tomar os tetos das soluções fracionárias, ou seja, fazer  $\bar{x}_i = \lceil x_i^* \rceil$ ,  $i = 1, \dots, m$ , para se obter uma solução inteira aproximada. Entretanto, este procedimento pode resultar numa solução que extrapola a demanda dos itens.

Devido à dificuldade associada em encontrar soluções ótimas para os problemas inteiros, métodos de solução exatos têm sido muito estudados e têm dado bons resultados. Baseada na Decomposição de Dantzig-Wolfe, o Método de Geração de Colunas é uma das ferramentas mais importantes para se obter soluções aproximadas de problemas de programação inteira até os dias de hoje. Exemplos de métodos derivados da geração de colunas são *Branch-and-Price*, que combina o método *Branch-and-Bound* com a geração de colunas ([4], [69], [67] e [10], para o caso unidimensional) e o método *Branch-and-Cut-and-Price* que combina o método *Branch-and-Bound* com a geração de colunas e com o Método de Planos de Corte ([6] e [7], para os casos unidimensional e bidimensional).

Apesar do Método de Geração de Colunas ser muito eficiente, este procedimento tem problemas de estabilização e pode ter uma convergência lenta para a solução ótima do problema relaxado. No início do processo o valor da função objetivo decresce rapidamente mas, à medida que a solução se aproxima da ótima, este decréscimo é cada vez menor. Isto ocorre



por causa de degenerações primais e pelas excessivas oscilações das variáveis duais [2]. Este comportamento é típico na geração de colunas e é conhecido como "tail" ("cauda") por causa do esboço do gráfico de (Valor da função objetivo  $\times$  Número de Iterações). A Figura 1.8 é relativa à resolução de um Problema de Corte de Estoque Unidimensional para objetos (barras) de comprimento 500 *cm* e 45 itens de vários comprimentos (veja referência [39]).



Figura 1.8: Convergência Lenta do Método de Geração de Colunas - *tail* [39]

Na resolução do problema relativo à Figura 1.8, foi observado pelos autores que na iteração de número 170 o valor da função objetivo era de 1733 e na iteração em que a solução ótima foi encontrada, iteração 331, o valor da função objetivo era 1726. Note que, em 161 iterações, a função objetivo teve um decréscimo de apenas 7 unidades. Isto exemplifica a lentidão da convergência do método.

## 1.5 Geração de Padrões de Corte Bidimensionais

No desenvolvimento do Método Simplex com Geração de Colunas, a resolução do sub-problema (1.42) resulta na geração de um padrão de corte, que pode ser feita de acordo com diferentes exigências, restrições (além das restrições físicas do objeto) e objetivos. A seguir, destacamos algumas restrições que podem ser impostas na geração dos padrões de corte para a resolução do Problema de Corte de Estoque Bidimensional.

### Tipos de Padrões de Corte Bidimensionais

**Definição 1.3.** Um corte é dito *guilhotinado ortogonal* ou simplesmente *guilhotinado* quando é feito paralelamente a um dos lados do objeto retangular e o divide em dois novos retângulos. Um padrão de corte composto apenas por cortes guilhotinados é chamado de *pa-*

**drão de corte guilhotinado.** A Figura 1.9 abaixo mostra um padrão de corte guilhotinado e um não-guilhotinado.

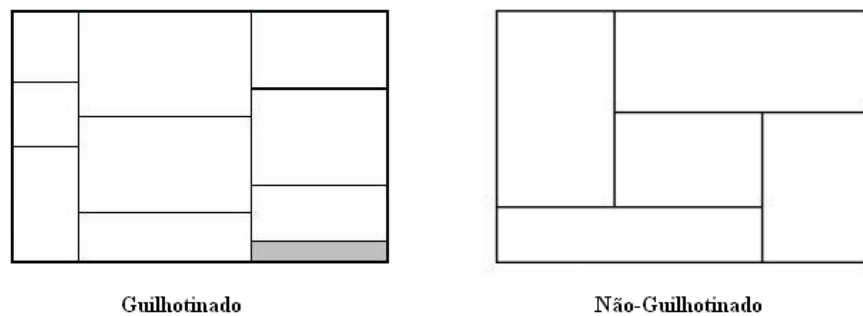


Figura 1.9: Exemplo de Padrão de Corte Guilhotinado e Não-Guilhotinado

Para os Problemas de Corte, os padrões de corte guilhotinados são mais importantes pelo uso freqüente nas indústrias e os padrões de corte não-guilhotinados têm sua maior aplicação nos Problemas de Empacotamento [46]. Os padrões de corte guilhotinados podem ser classificados de acordo com o número de estágios de corte para a obtenção dos itens que nele aparecem. O número de estágios de um padrão de corte é determinado pela quantidade de vezes que o objeto (ou a serra) deve ser rotacionado para realizar todos os cortes necessários até que todos os itens do padrão de corte sejam obtidos.

**Definição 1.4.** Chamamos de **padrão de corte guilhotinado 2-estágios** os padrões de corte guilhotinados que necessitam ser rotacionados apenas uma vez para que todos os itens sejam cortados. De forma geral, o número de estágios  $k$  é dado por  $k = R + 1$ , em que  $R$  é o número de vezes que o objeto deve ser rotacionado de  $90^\circ$  para que todos os itens sejam cortados. A Figura 1.10 abaixo mostra um padrão de corte guilhotinado 2-estágios.

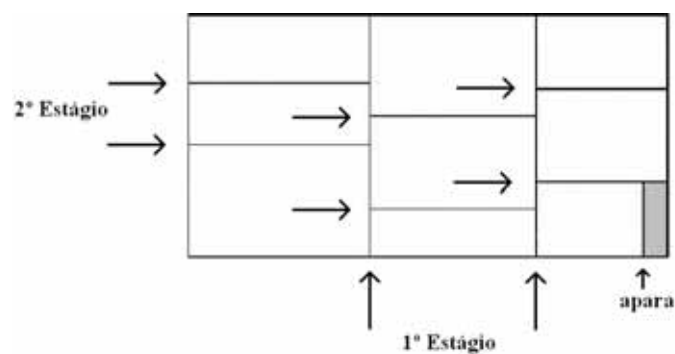


Figura 1.10: Padrão de Corte Guilhotinado 2-estágios

Na Figura 1.10, o primeiro estágio de cortes é feito paralelamente à largura do objeto e o segundo estágio de corte é feito ao longo dos comprimentos dos objetos resultantes do primeiro estágio. Note que o último corte a ser realizado, indicado na figura por "apara", não é considerado um estágio de corte, pois geralmente esses cortes finais menores são feitos em máquinas secundárias. Padrões de corte que apresentam "aparas" são chamados de **padrões de corte não-exatos** e, os que não necessitam deste corte adicional são chamados de **padrões de corte exatos**.

Nosso maior interesse está nos padrões de corte guilhotinados 2-estágios, pois é de maior importância nas indústrias de móveis estudadas. A preferência dessas empresas por padrões de corte guilhotinados se deve ao fato de a máquina seccionadora ser restrita a realizar apenas cortes guilhotinados. Já com relação ao número de estágios, os padrões de corte em 2-estágios são de mais fácil manuseio e mais rápidos de serem cortados. Padrões de corte guilhotinados 3-estágios são, esporadicamente, aceitos na prática se o estágio adicional reduzir significativamente a perda de material.

**Definição 1.5.** *Um caso particular de padrão de corte 2-estágios é o chamado **padrão de corte guilhotinado 1-grupo** ou **padrão de corte tabuleiro**, em que os cortes do segundo estágio são realizados simultaneamente nas faixas resultantes do primeiro estágio [27]. Quando um padrão de corte é formado pela combinação de padrões de corte tabuleiros, este é chamado de **padrão de corte guilhotinado n-grupo** [27] ou **padrão de corte tabuleiro composto** [59]. A Figura 1.11 abaixo mostra um exemplo de cada um dos padrões de corte definidos.*

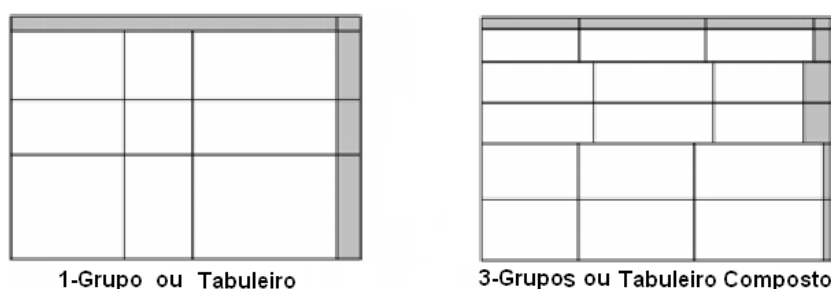


Figura 1.11: Padrões de Corte 1-Grupo (ou Tabuleiro) e 3-Grupos (ou Tabuleiro Composto)

O fato de os padrões de corte tabuleiros possibilitarem o corte simultâneo das faixas no segundo estágio, implica na economia de tempo de máquina. Apesar desta vantagem sobre o padrão de corte n-grupos, este último é mais viável com relação às perdas, que são bem menores [59].

### Orientação dos Itens

Uma estratégia muito adotada pela indústria, no intuito de se obter padrões de corte com perdas pequenas, é admitir que os itens possam ser rotacionados de  $90^\circ$  antes de incluí-los nos padrões de corte. Porém, este procedimento é permitido se os objetos a serem cortados forem lisos, sem veios ou estampas. Por exemplo, em casos onde a matéria-prima utilizada é madeira nativa ou compensado laminado, a rotação dos itens poderá não ser permitida, pois este procedimento terá reflexo direto na qualidade do item cortado, uma vez que estes materiais "impõem" uma direção de corte.

Quando os itens não podem ser rotacionados dizemos que os itens têm **orientação fixa** (ver Figura 1.12a) e, caso contrário, dizemos que os itens têm **rotação permitida** (ver Figura 1.12b). No caso de rotação permitida dos itens, se o problema original tem  $m$  itens, na geração dos padrões de corte passa a ter, no máximo, o dobro do número de itens, pois há situações em que um item ou outro não possa ser incluído no padrão de corte depois de rotacionado: quando  $l_i > W$  ou  $w_i > L$ .

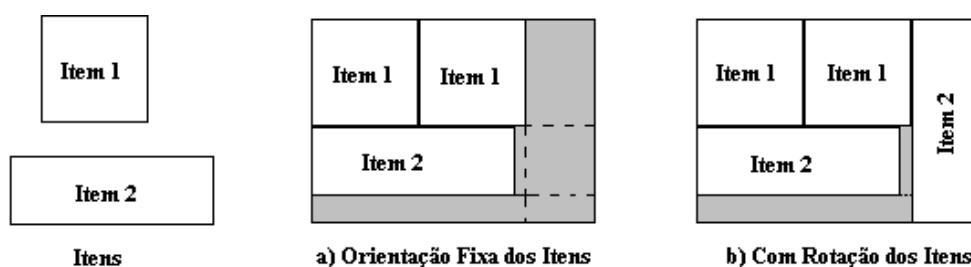


Figura 1.12: Orientação dos Itens

No exemplo dos padrões de corte da Figura 1.12, é fácil observar que o padrão de corte com rotação dos itens gera uma perda menor do que o padrão de corte com orientação fixa dos itens. É importante destacar que, na implementação do problema com rotação dos itens, devemos nos atentar ao controle do atendimento à demanda, pois um determinado item e seu par rotacionado atendem à mesma demanda.

Uma vez que o número de padrões de corte num Problema de Corte é muito alto, impor algumas regras para evitar padrões de corte desnecessários é interessante. Morabito e Arenales em [47] fazem uso das regras propostas pelos autores de [13] para evitar padrões de corte equivalentes, e descrevem limitantes e heurísticas para reduzir a busca por uma solução ótima. Todas estas considerações adicionais implicam em adaptações no subproblema (1.41) da geração de colunas.

No nosso trabalho, exigimos que os padrões de corte gerados sejam do tipo guilhotinado 2-estágios pela preferência e restrição da máquina de corte da empresa visitada. Para gerar padrões com tais características, utilizamos o Método de Gilmore e Gomory. Neste método, o padrão de corte é construído em duas etapas, descrita a seguir.

**Etapa 1:** Se considerarmos que o primeiro estágio de cortes é feito ao longo do comprimento  $L$  do objeto, então determinamos as faixas  $L \times w_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , com os melhores padrões de corte para cada uma, ou seja, temos  $m$  problemas unidimensionais a resolver (onde  $m$  é o número de itens).

**Etapa 2:** Determinamos a melhor combinação das faixas geradas na Etapa 1, sobre o objeto de comprimento  $L$  e largura  $W$ , ao longo da largura deste, ou seja, determinamos quantas vezes cada faixa é cortada do objeto.

A construção dos padrão de corte pode ser restrita, ou não, às demandas dos itens. Assim, os padrões de corte podem ser classificados em restritos ou irrestritos com relação à demanda. A seguir, detalhamos a distinção entre construção de padrões de corte guilhotinados 2-estágios irrestritos e restritos.

### 1.5.1 Caso Irrestrito

Consideremos os objetos e itens como já definidos na Seção 1.3 para um Problema de Corte Bidimensional qualquer. Supomos que devemos construir faixas  $L \times w_k$  na primeira etapa. Observe que na faixa  $L \times w_k$  só podem ser inseridos itens cujas larguras não sejam maiores que  $w_k$ . Por isto, consideremos o seguinte conjunto:

$$W_k = \{i \text{ tais que: } w_i \leq w_k\}, \quad (1.46)$$

ou seja, o conjunto  $W_k$  é o conjunto dos itens  $i$  cujas larguras são menores, ou iguais, à largura do item  $k$ . Além disso, para diminuirmos o número de faixas possíveis, podemos construir apenas faixas com larguras diferentes, já que para  $w_k = w_{k'}$  as faixas  $L \times w_k$  e  $L \times w_{k'}$  são as mesmas. Então, suponhamos que existem  $M$ , com  $M \leq m$ , itens com larguras diferentes, assim, devemos construir  $M$  faixas. Sem perda de generalidade, podemos supor que os  $M$  itens com larguras diferentes sejam os  $M$  primeiros.

**Etapa 1:** Determinar os valores  $y_i^k$ , número de itens do tipo  $i$  na faixa  $k$ , de forma a maximizar o valor de utilidade total dos itens. Então, para  $k = 1, \dots, M$ , resolva o seguinte Problema da Mochila:

$$\begin{aligned} \text{Max } V_k &= \sum_{i \in W_k} \pi_i y_i^k \\ \text{s.a.: } &\sum_{i \in W_k} l_i y_i^k \leq L \\ &y_i^k \in \mathbb{Z}_+, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (1.47)$$

O valor ótimo  $V_k^*$  da função objetivo do problema  $k$  é o valor de utilidade da faixa resultante do problema.

Tendo resolvido o problema (1.47) acima para cada item, temos em mãos as melhores faixas para compor o padrão de corte bidimensional.

**Etapa 2:** Determinar quantas vezes a faixa  $k$ , de largura  $w_k$ , é usada no padrão de corte bidimensional. Então, mais um Problema da Mochila é resolvido:

$$\begin{aligned} \text{Max } V &= \sum_{k=1}^M V_k Y_k \\ \text{s.a.: } &\sum_{k=1}^M w_k Y_k \leq W \\ &Y_k \in \mathbb{Z}_+, \quad k = 1, \dots, M, \end{aligned} \quad (1.48)$$

onde  $Y_k$  é o número de vezes que a faixa  $k$  aparece no padrão de corte bidimensional.

Desta forma, o padrão de corte bidimensional,  $A_j$ , gerado pelo procedimento, após resolver  $M + 1$  Problemas da Mochila, é dado por:

$$\mathbf{A}_j = \begin{pmatrix} a_{1j} = \sum_{k=1}^M y_1^k Y_k \\ a_{2j} = \sum_{k=1}^M y_2^k Y_k \\ \vdots \\ a_{mj} = \sum_{k=1}^M y_m^k Y_k \end{pmatrix}$$

ou seja, o número de vezes que o item  $i$  aparece no padrão de corte  $j$ , dado por  $a_{ij}$ , é o número de vezes que o item  $i$  aparece na faixa  $k$  vezes a quantidade de vezes que a faixa  $k$  aparece no padrão de corte.

Note que a definição do conjunto  $W_k$  permite que padrões de corte não-exatos sejam gerados. Se o objetivo for gerar apenas padrões de corte exatos, então o conjunto  $W_k$  deve ser definido por:

$$W_k = \{i \text{ tais que: } w_i = w_k\}.$$

### 1.5.2 Caso Restrito

No caso da geração de padrões de corte restritos, além das restrições físicas do objeto e dos tipos de corte que são realizados, é preciso considerar que o número de itens nos padrões de corte é restrito às suas demandas e, conseqüentemente, a Etapa 2 da construção do padrão de corte depende da Etapa 1. Esta dependência entre as etapas de construção é um fator complicante na determinação de um padrão de corte restrito [56].

Gramani [28], desenvolveu um procedimento heurístico de construção de padrões de corte guilhotinados 2-estágios, que consiste de uma extensão do Método de Gilmore e Gomory, denominada **heurística de decomposição**. A construção é análoga ao caso irrestrito, mas os  $M + 1$  problemas a serem resolvidos são restritos com relação à demanda. O procedimento consiste no seguinte.

**Etapa 1:** Determinar os valores  $y_i^k$ , de forma a maximizar o valor de utilidade total dos itens.

Então, para  $k = 1, \dots, M$ , resolva o seguinte Problema da Mochila Restrita:

$$\begin{aligned} \text{Max } V_k &= \sum_{i \in W_k} \pi_i y_i^k \\ \text{s.a.: } &\sum_{i \in W_k} l_i y_i^k \leq L \\ &0 \leq y_i^k \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m, \end{aligned} \tag{1.49}$$

onde  $b_i$  é a demanda do item  $i$ ,  $i = 1, \dots, m$ .

**Etapa 2:** Determinar quantas vezes a faixa  $k$ , de largura  $w_k$ , é usada no padrão de corte bidimensional. Então, mais um Problema da Mochila Restrita é resolvido:

$$\begin{aligned} \text{Max } V &= \sum_{k=1}^M V_k Y_k \\ \text{s.a.: } &\sum_{k=1}^M w_k Y_k \leq W \\ &\sum_{k=1}^M y_i^k Y_k \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m \\ &Y_k \in \mathbb{Z}_+, \quad k = 1, \dots, M, \end{aligned} \tag{1.50}$$

Nesta situação, a restrição de demanda aparece na forma de limitantes superiores para as variáveis do modelo (1.49) e, no modelo (1.50), aparece como um novo conjunto de restrições. Devido a estas novas restrições, o problema (1.50) não é de fácil resolução como no caso anterior [56], por isso, a autora propõe relaxar a condição de integralidade das variáveis do problema e substituir os dois grupos de restrições por uma única, que consiste de uma combinação das anteriores. O modelo resultante é resolvido por um procedimento heurístico.

### Geração de Padrões de Corte Bidimensionais na Literatura

Visto que a geração de padrões de corte tem importância fundamental na resolução do Problema de Corte de Estoque, muitos trabalhos da literatura tratam de modelos matemáticos para gerar padrões de corte bidimensionais, com as mais diversas imposições, ou restrições, sobre eles. Por exemplo, Katsurayama e Yanasse [36], propõem um algoritmo para gerar padrões de corte tabuleiros exatos que contenham uma combinação de itens previamente determinada. Outros tipos de restrições aos padrões de corte bidimensionais podem ser levadas em consideração na sua construção, como em [74], que Yanasse e Morabito apresentam modelos lineares e não-lineares para gerar padrões de corte guilhotinados 1-grupo, para os casos exato e não-exato, restrito e irrestrito às demandas. Um dos modelos lineares apresentados neste trabalho é uma linearização do modelo proposto por Gramani em [28] para gerar padrões de corte guilhotinados 2-estágios restrito. Modelos lineares, derivados dos modelos apresentados em [74] para gerar padrões de corte 1-grupo, são propostos em [75], também por Yanasse e Morabito, para gerar padrões de corte guilhotinados 2-grupo e 3-grupo, restrito e irrestrito. Lodi e Monaci apresentam em [38] dois modelos lineares para a geração restrita de padrões de corte guilhotinado 2-estágios e consideram algumas restrições para evitar soluções simétricas que restringe bastante o número de padrões de corte possíveis.

Um tipo de padrão de corte bidimensional interessante que surgiu para melhorar o aproveitamento de material em fábricas chinesas que produzem estatores e rotores de motores elétricos, é o padrão de corte do tipo *T-shape*. Algumas fábricas na China que produzem estas peças usam este tipo de padrão de corte para cortar itens circulares de placas retangulares. Um exemplo de padrão de corte tipo *T-shape* é mostrado na Figura 1.13 [17].

Cui [16], propõe um algoritmo exato, baseado no Método *Branch-and-Bound* combinado com técnicas de programação dinâmica para gerar padrões de corte restritos do tipo *T-shape* homogêneos, onde apenas faixas homogêneas são permitidas.



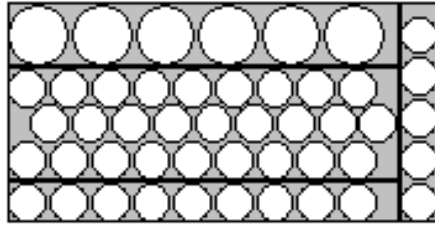


Figura 1.13: Padrão de Corte Bidimensional do tipo *T-shape* para itens circulares [17]

Dentre as formulações apresentadas por Yanasse e Morabito [75], há um modelo para gerar padrões de corte deste mesmo tipo, mas para itens retangulares, para os casos restrito e irrestrito. A Figura 1.14 abaixo mostra um exemplo de padrão de corte do tipo *T-shape* para o corte de itens retangulares.

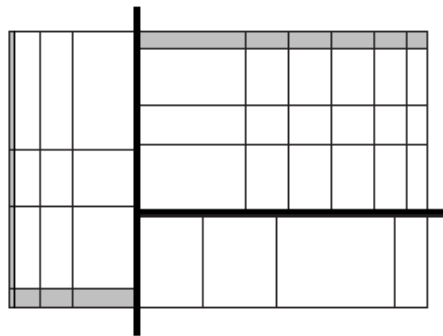


Figura 1.14: Padrão de Corte Bidimensional do tipo *T-shape* para itens retangulares

Nos trabalhos [22], [23] e [59] são propostas duas heurísticas para gerar padrões de corte do tipo n-grupos (tabuleiro composto) irrestrito para resolver o Problema de Corte de Estoque Bidimensional usando dados de uma empresa de móveis. Cada heurística proposta faz uso de geradores de padrões de corte diferentes. A heurística que fornece melhores resultados se utiliza do Método de Gilmore e Gomory para gerar padrões de corte do tipo tabuleiro, e faz diversas combinações de faixas para construir padrões tabuleiro compostos. Denominamos tal heurística por Heurística TC.

No próximo capítulo serão apresentados aspectos gerais das indústrias de móveis no Brasil. Detalhamos o processo de produção de uma empresa de móveis que visitamos, e mostramos as preferências desta com relação aos padrões de corte utilizados e como os Problemas de Corte de Estoque ganham importância para a prática das indústrias.

# Capítulo 2

## Problemas de Corte de Estoque na Indústria Moveleira

O objetivo deste capítulo é apresentar a importância dos Problemas de Corte e Empacotamento na prática das indústrias moveleiras. Para isto, apresentamos uma visão geral da situação da indústria moveleira no Brasil, suas características e a organização do setor pelo território nacional e, além disso, detalhamos a linha de produção da empresa que tomamos como "laboratório" para nossa pesquisa, com enfoque no corte da matéria-prima. Analisamos as características dos padrões de corte adotados pela empresa e os aspectos determinantes da produtividade de um padrão de corte sob o ponto de vista da prática da mesma. A empresa visitada está localizada no pólo moveleiro de Votuporanga, no noroeste paulista. Formado em 90% por micro e pequenas empresas, este está entre os 10 maiores e mais importantes pólos moveleiros do país. Nesta região, os produtos fabricados são, essencialmente, móveis residenciais.

### 2.1 Panorama da Indústria de Móveis no Brasil

Segundo a Associação Brasileira das Indústrias do Mobiliário (ABIMÓVEL), existem no Brasil mais de 16.104 empresas do setor moveleiro (em sua maioria, de capital nacional), que empregam por volta de 206.352 trabalhadores, sendo que 83% desses estabelecimentos se encontram nas regiões Sul e Sudeste, com 86% dos empregados [1]. Estas empresas podem ser classificadas, com relação à matéria-prima utilizada, em:

- móveis de madeira;

- móveis de vime e junco;
- móveis de metal e plástico,

de acordo com o Censo Industrial do IBGE de 1985 (o último publicado pela instituição). Os móveis de madeira, por sua vez, podem ser subdivididos em: móveis residenciais, móveis de escritório, armários embutidos e outros. Dentre estes, os móveis para uso residencial são os de maior importância nesse segmento, com 77,5% do total das empresas e 73,5% do total da mão-de-obra empregada. Dentre os móveis de madeira residenciais, temos ainda dois grandes grupos: móveis retilíneos e móveis torneados. Os móveis retilíneos são confeccionados com painéis derivados da madeira, suas faces são lisas e sem detalhes complexos de acabamento; os móveis torneados são confeccionados com painéis derivados da madeira em conjunto com madeira maciça ou apenas madeira maciça, sendo caracterizados por móveis mais sofisticados.

Mundialmente, o setor das indústrias de móveis de madeira é constituído, predominantemente, por micro e pequenas empresas (MPE's). No Brasil a situação não é diferente. As micro e pequenas empresas somam 96% de todas as empresas de móveis do país e, além disso, este setor é responsável por uma movimentação de parte significativa do comércio mundial, sendo que os móveis de madeira formam 78,9% do mercado total de móveis [53]. A classificação das empresas por porte, no Brasil e no mundo, em geral leva em conta critérios quantitativos, como o número de empregados ou faturamento anual bruto [42]. Uma maneira de fazer tal classificação para a indústria, é da seguinte forma:

- **Microempresa:** Até 19 empregados;
- **Pequena empresa:** De 20 a 99 empregados;
- **Média empresa:** De 100 a 499 empregados;
- **Grande empresa** Acima de 500 empregados.

De modo geral, de todas as empresas formais no Brasil, 99,2% eram micro e pequenas empresas, responsáveis por 57,2% dos empregos e 26% da massa salarial, em 2002 [51]. No caso da indústria de móveis, a situação é semelhante: em 2001, haviam 13.166 fábricas de móveis de madeira, sendo 78,55% (ou seja, 10.432 empresas) micro-empresas, pouco mais de 10% (1.329 empresas) individuais com nenhum empregado com carteira assinada e 9,84% (1.296 estabelecimentos) formavam pequenas empresas. O restante, ou seja, 1,61% das empresas, tinham mais de 100 empregados.

No Brasil, as fábricas de móveis de madeira se encontram bastante dispersas por todo o território nacional, porém, se agrupam em pólos moveleiros e se concentram, principalmente, nas regiões Sul e Sudeste, já que os pólos pioneiros estavam em São Paulo (capital, Santo André, São Bernardo do Campo e São Caetano) na década de 50, no Rio Grande do Sul na década de 60 e em Santa Catarina na década de 70 [50]. Em 2001, 85,53% dessas indústrias se encontravam nessas regiões; apenas no estado de São Paulo eram 24,4%, mas esse número já chegou a 31% em 1994. Na Tabela 2.1, estão todos os pólos moveleiros no Brasil, separados por estado [43].

<b>ESTADOS</b>	<b>CIDADES</b>
<b>Amazonas</b>	Manaus
<b>Bahia</b>	Salvador
<b>Ceará</b>	Fortaleza
<b>Espírito Santo</b>	Colatina, Linhares e Vitória
<b>Maranhão</b>	Imperatriz
<b>Minas Gerais</b>	Bom Despacho, Carmo do Cajuru, Martinho Campos, Ubá Uberaba e Uberlândia
<b>Paraná</b>	Arapongas, Cascavel, Curitiba, Francisco Beltrão e Londrina
<b>Pernambuco</b>	Recife
<b>Rio Grande do Sul</b>	Bento Gonçalves, Canela, Caxias do Sul, Erechim, Gramado Lagoa Vermelha, Passo Fundo, Restinga Seca e Santa Maria
<b>Santa Catarina</b>	Chapecó, Coronel Freitas, Otacílio Costa, Pinhalzinho Rio Negrinho, São Bento do Sul e São Lourenço do Oeste
<b>São Paulo</b>	Bálsamo, Itatiba, Jaci, Mirassol, Neves Paulista São Bernardo do Campo, <b>Votuporanga</b>

Tabela 2.1: Pólos Moveleiros no Brasil

Nossos estudos foram realizados na Fábrica de Móveis Luapa - fábrica integrante do pólo moveleiro de Voruporanga/SP, que abriga, aproximadamente, 241 empresas de móveis, dentre as quais, 107 estão no município de Votuporanga [65]. Localizada a 520km da capital, na região noroeste do estado (Figura 2.1), Votuporanga, que em tupi-guarani significa "brisas-suaves" ou "bons ares", foi fundada em 1937 e conta hoje com aproximadamente 82.526 habitantes (IBGE-2005).



Figura 2.1: Localidade da cidade de Votuporanga

Esta área era rica em mata nativa com várias espécies de madeira de lei (cedro, aroeira, etc.), o que contribuiu para o surgimento das primeiras serrarias e, mais tarde, das primeiras fábricas de móveis. Isto também resultou na comercialização da madeira nas décadas de 40 e 50, fase que ficou conhecida como "ciclo da madeira". Na década de 80, tardiamente, a cidade tomou certo impulso industrial, através do setor Moveleiro, de Implementos Rodoviários e de Metalurgia. Hoje, além da Indústria e dos Serviços, destaca-se a vocação educacional do município, que possui diversas instituições de ensino nos mais diferentes âmbitos.

Com relação à matéria prima utilizada na indústria moveleira, a madeira maciça tem sido substituída por materiais derivados desta, produzidos a partir de madeira de reflorestamento (pinus ou eucalipto), com crescente uso do eucalipto, já que este é melhor do que o pinus, com relação à umidade. A utilização de painéis a base de madeira permite manter muitas das vantagens da madeira sólida, além de ter controle sobre as dimensões dos painéis (não mais restritas às dimensões das árvores), ter a possibilidade de corrigir defeitos da anatomia da árvore como medulas e nós e pode-se, ainda, melhorar a resistência dos painéis ao fogo e à deterioração. Há quatro tipos de painéis a base de madeira para a produção de móveis: compensados laminados, compensados sarrafeados, aglomerados e o *MDF* (*Medium Density Fiberboard*, ou painéis de média densidade) [65].

- Compensados Laminados: são feitos com lâminas de madeira coladas e prensadas para formar chapas com espessuras de 4 a 20mm e apresentam uma boa resistência mecânica;
- Compensados Sarrafeados: as lâminas internas são coladas em um sentido e a chapa externa é prensada em sentido contrário, deixando a chapa mais resistente;
- Aglomerados: são feitos com partículas aglutinadas com adesivo sintético, uma espécie de cola. Estes têm pouca durabilidade e nenhuma resistência à umidade;

• *MDF* (*Medium Density Fiberboard*): são os painéis derivados de madeira mais avançados tecnologicamente. O *MDF* é um aglomerado sofisticado, fabricado a partir da aglutinação de fibras de madeira com resinas sintéticas e ação conjunta de temperatura e pressão (BNDES, 2000). É um produto mais resistente e com textura mais uniforme que os compensados e aglomerados. Suas propriedades são muito próximas às da madeira sólida e, em alguns aspectos, superiores, pois são resistentes à umidade e a cupim. Além disso, os painéis são homogêneos, podem ser cortados, furados e usinados (trabalhados, entalhados e torneados) sem que estes "esfarelem".

Por todas as vantagens apresentadas pelos painéis de *MDF*, seu emprego vem crescendo de forma acentuada nas indústrias brasileiras e, embora este tipo de painel seja mais barato do que a madeira maciça, seu custo ainda é alto e contribui, em média, com 52,3% no preço do produto final, no caso da Luapa. Portanto, o investimento em máquinas e o melhor aproveitamento de material durante o corte (que exige um melhor planejamento na elaboração dos padrões de corte) são fundamentais para as empresas.

## 2.2 Uma Fábrica Característica

Os móveis produzidos na empresa Luapa, são residenciais (dormitórios) de madeira, retilíneos, em seis tipos de móveis: armários (de 3, 4 e 5 portas), cômodas, criados e camas. Todos são disponíveis em quatro cores (mogno, cerejeira, marfim e tabaco). Os armários são os principais produtos da empresa, próximo a 50% de toda a produção mensal. A produção é feita por lotes e varia de acordo com os pedidos e com o estoque disponível no momento. A programação da produção é passada para os operadores da máquina seccionadora a cada semana, mas pode variar dependendo dos pedidos registrados ao longo da semana. Cada lote tem tamanho fixo e é relativo a apenas um tipo de produto. Existe um conjunto de padrões de corte que serão usados para produzir os itens que o constituem.

A Tabela 2.2 traz os tamanhos dos lotes para cada produto, juntamente com as demandas médias mensais. A principal matéria-prima utilizada para a produção dos móveis é o *MDF*. Os painéis de aglomerados também são utilizados, mas apenas em alguns produtos. Apesar de os painéis de aglomerados serem mais baratos que os outros painéis, a preferência é dada ao *MDF* pela qualidade e pelas vantagens que têm sobre os outros. Por isso, daremos ênfase ao corte de painéis de *MDF*, que é diferente do corte do aglomerado, uma vez que o tempo de

corde do aglomerado é bem superior ao do *MDF* por ser menos maleável. Esta característica dos painéis de aglomerados gera mais uma desvantagem com relação ao *MDF*, que é um maior desgaste da serra.

Produto	Demanda Mensal	Dimensão do Lote
Armários	1000	3 Portas - 60
		4 Portas - 45
		5 Portas - 40
Cômodas	200	160
Criado	300	300
Camas	600	160

Tabela 2.2: Tamanhos dos lotes e demandas médias mensais

O objetivo das visitas realizadas à empresa foi, além de acompanhar o rotineiro planejamento da produção e a real utilização da máquina seccionadora, observar o que é levado em consideração durante o processo de corte, de que forma é tomada a decisão de que padrões de corte usar e em que quantidade, entre outros. Nas próximas seções, detalhamos a linha de produção e a prática da empresa, o planejamento semanal da produção, a máquina seccionadora e sua utilização.

### 2.2.1 Linha de Produção da Fábrica

De maneira geral, os processos de produção nas pequenas e médias empresas de Votuporanga são bastante próximos, diferindo apenas na tecnologia das máquinas ou em estágios específicos de algum produto - segundo Cavali [12], que visitou outras empresas da região além da Fábrica de Móveis Luapa. Basicamente, a linha de produção de uma empresa pode ser esquematizada como na Figura 2.2 [12].

A primeira etapa do processo de produção de um móvel é o corte da matéria-prima (seção Cortes Retangulares - Figura 2.2), onde os painéis retangulares são cortados em itens retangulares menores - na máquina seccionadora principal - e onde também são feitas as "aparar" - nas máquinas de corte secundárias menores. Depois de serem cortados, os itens seguem para a usinagem, onde recebem detalhes em sua superfície ou têm suas bordas arredondadas, por meio de serras e ferramentas específicas. Nesta fase são realizadas as furações e a colagem ou colocação de bordas e seguem para a seção de pintura para serem envernizados e pintados.

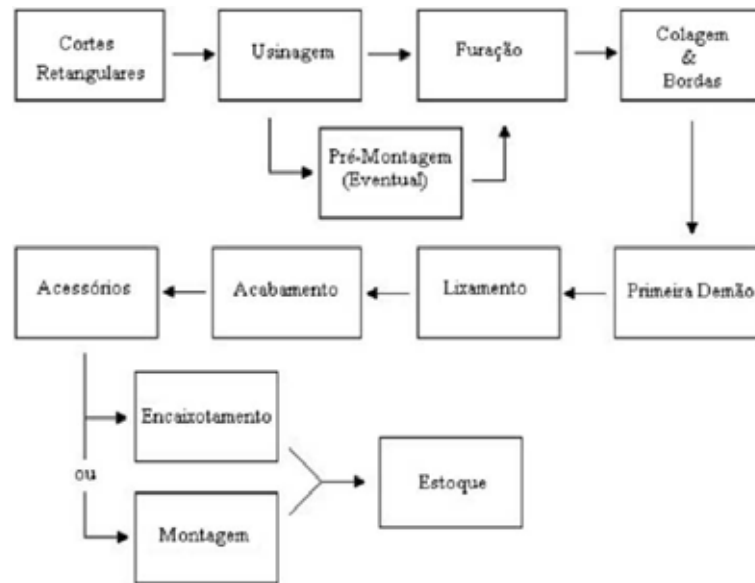


Figura 2.2: Esboço da Linha de Produção da Fábrica de Móveis Luapa [12]

Posteriormente, recebem os acessórios (puxadores das portas e gavetas, fechaduras, etc.) e são levados ao estoque e encaixotados junto com os outros componentes do produto final, prontos para serem expedidos. Eventualmente, alguns itens são cortados dos painéis e, antes de serem "aparados", são colados (seção Colagem & Bordas - Figura 2.2) e voltam para a seção de corte para receberem o último ajuste.

A Luapa possui em torno de 10 máquinas, na maioria máquinas manuais, mas nosso interesse é apenas na máquina seccionadora principal que realiza a maior parte dos cortes efetuados na matéria-prima, e é considerada um "gargalo" da produção se o planejamento dos cortes, e da produção, não for conveniente e satisfatório. Por isso, é importante estarmos atentos, principalmente, à seção dos cortes para buscarmos a redução dos custos envolvidos e tentar minimizar as conseqüências negativas que podem surgir com uma determinada tomada de decisão. Detalharemos esta discussão na próxima seção.

### 2.2.2 Planejamento da Produção

O planejamento da produção na Fábrica de Móveis Luapa é feito semanalmente, com os tamanhos de lotes fixos (Tabela 2.2) e é baseado na média de vendas dos três meses anteriores. Com o resumo de pedidos que chegam durante toda a semana, é possível determinar o que será produzido e em que seqüência os produtos serão fabricados. A seqüência de produção é determinada com o seguinte critério: o produto de maior "deficit" no estoque, com respeito



à demanda, é o primeiro a ser produzido. Para determinar se há produtos em "deficit" no estoque é feita uma conta simples da seguinte maneira: calcula-se um valor  $p_k$ , para cada um dos produtos  $k$  que estão na folha de pedidos, dado por  $p_k = \text{estoque}_k - \text{demanda}_k$ , onde  $\text{estoque}_k$  é o número de produtos do tipo  $k$  em estoque e  $\text{demanda}_k$  é o número de produtos do tipo  $k$  requisitados pelos clientes. Se

- $p_k < 0$ , o pedido do produto  $k$  é maior do que a quantidade em estoque do mesmo,
- $p_k = 0$ , o pedido é exatamente a quantidade em estoque do produto  $k$ ,
- $p_k > 0$ , o estoque do produto  $k$  é maior do que seu pedido.

Desta forma, os valores de  $p_k$ , que representam um determinado produto  $k$ , são dispostos em ordem crescente e a seqüência da produção é definida por esta ordem, ou seja, os itens do produto  $k$ , cujo valor  $p_k$  é o menor dos valores, são os primeiros a serem produzidos. Mesmo os produtos com valores de  $p_k$  nulos, ou positivos, são produzidos para não ficarem com baixo (ou nenhum) estoque.

Na fabricação de um móvel, vários itens devem ser produzidos para compô-lo. Cada item tem suas especificações definidas, como: largura, comprimento, espessura, tipo de material, etc.. Isto significa que nem todos os itens serão cortados do mesmo tipo de objeto. Na empresa em questão, os itens obtidos com os painéis de *MDF* são cortados separadamente de acordo com a espessura do objeto, porém as dimensões dos painéis são as mesmas para todas as espessuras. Logo, para resolver um Problema de Corte de Estoque decidindo quais padrões de corte usar na produção dos itens requisitados, devemos resolver o problema  $\mathbf{P}^1$  (1.17)-(1.19), apresentado na Seção 1.3, para cada espessura diferente necessária (no máximo seis).

Depois de determinados os produtos a fabricar e a seqüência da produção, as chamadas "ordens de produção" (que são fichas com os dados dos itens a serem cortados) são passadas para os operadores da máquina seccionadora. Cada ficha é relativa a um produto que será fabricado e nela estão impressos o tamanho do lote, a cor do produto e os itens necessários para compô-lo, com as respectivas dimensões e quantidades por unidade do produto.

Para melhor entendimento do processo dos cortes na empresa visitada, detalhamos, a seguir, a seção Cortes Retangulares (Figura 2.2), para esclarecer os detalhes sobre a máquina de corte e a maneira como esta é utilizada pelos operadores.

### Máquina Seccionadora

A mesa da máquina seccionadora é composta por 3 "braços" com uma régua em cada

um, e pode-se colocar dois batentes em cada uma das régua, como mostra a Figura 2.3, que apresenta uma idéia do que seria a máquina vista de cima.

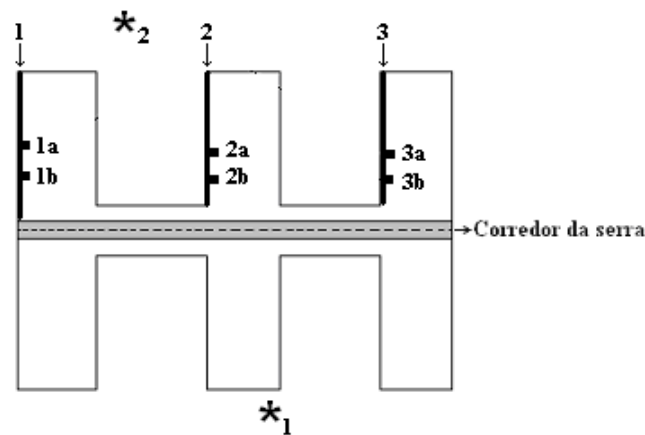


Figura 2.3: Esboço da máquina seccionadora vista de cima

### Legenda da Figura 2.3:

- 1, 2 e 3 : régua dos braços esquerdo, do meio e direito da mesa, respectivamente;
- 1<sub>a</sub> e 1<sub>b</sub> : batentes do braço esquerdo da mesa;
- 2<sub>a</sub> e 2<sub>b</sub> : batentes do braço do meio da mesa;
- 3<sub>a</sub> e 3<sub>b</sub> : batentes do braço direito da mesa;
- \*<sub>1</sub> e \*<sub>2</sub> : locais de posicionamento dos operadores da máquina.

O número de batentes permite viabilizar o corte de duas larguras de faixas distintas e dois comprimentos distintos num mesmo *setup*. Os batentes utilizados para determinar as larguras das faixas que serão produzidas são os dois batentes dos braços do meio e do direito da mesa da máquina (2<sub>a</sub> e 3<sub>a</sub> para uma largura e 2<sub>b</sub> e 3<sub>b</sub> para outra largura, mais estreita). Os dois batentes do braço esquerdo da máquina (1<sub>a</sub> e 1<sub>b</sub>) são utilizados para determinar os comprimentos dos itens que serão produzidos de cada faixa.

Sobre o corredor da serra há um braço mecânico, que é acionado por um dos operadores quando os objetos estão devidamente posicionados e prontos para serem cortados. Nesse momento, o braço mecânico abaixa, fixando os objetos sobre a mesa para estes não deslizarem e saírem do lugar quando a serra os atingir.

A máquina é munida de duas serras: uma pequena, com aproximadamente 4mm de altura, e a serra principal, com 60mm de altura, que determina a capacidade total  $CpT$  da serra. A serra menor, que vem à frente, serve para fazer um corte preliminar (uma pequena fenda na base da pilha dos objetos), diminuindo o desgaste da serra principal e evitando que

esta danifique a borda dos objetos empilhados. A serra principal é que efetua o corte do objeto. A Figura 2.4 ilustra uma pilha de objetos sobre a mesa da máquina e as duas serras que se aproximam dela para cortá-la.

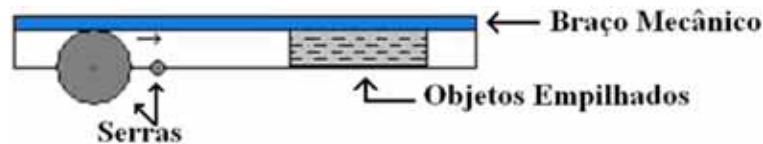


Figura 2.4: Serras da máquina de corte

Após as serras percorrerem todo o corredor para cortar os objetos, o braço mecânico sobe automaticamente (ou por intermédio de um dos operadores, que pode interromper o trajeto da serra através de um botão) e libera os objetos para que os operadores possam retirá-los ou rotacioná-los para o próximo estágio de cortes.

Outro recurso utilizado pelos operadores da máquina, para economizar tempo, é a realização simultânea dos estágios de corte. Mais uma vez, o fato de os padrões de corte serem do tipo guilhotinados 2-estágios e o agrupamento dos itens é o que facilita essa prática. Para ilustrar tal procedimento, suponha que o padrão de corte utilizado seja aquele da Figura 2.7b) (itens agrupados). A Figura 2.5 mostra o objeto em duas situações:

- a) o objeto inteiro, antes de ser cortado,
- b) e o primeiro corte do primeiro estágio sobre o objeto.

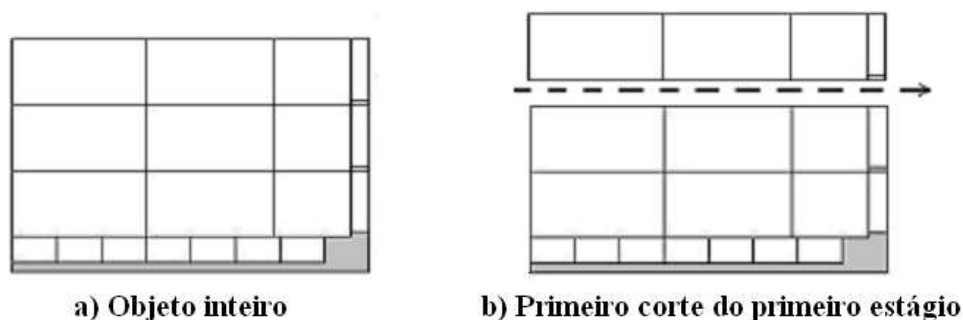


Figura 2.5: Primeiro Corte do Primeiro Estágio

Para efetuar o primeiro corte do primeiro estágio (Figura 2.5b)) a pilha de objetos é apoiada aos dois batentes mais distantes da serra que estão sobre as régulas dos braços do meio e da direita na mesa da máquina ( $2_a$  e  $3_a$  na Figura 2.3). A Figura 2.6, continuação da Figura 2.5, mostra a faixa obtida no primeiro corte do primeiro estágio, depois de rotacionada, sendo cortada. A faixa é apoiada no batente mais distante da serra que está sobre o braço

esquerdo da máquina ( $1_a$  na Figura 2.3). Como os dois primeiros itens cortados da faixa são iguais (Figura 2.6a) e Figura 2.6b)), eles são produzidos apoiando a faixa no mesmo batente ( $1_a$  na Figura 2.3) e o terceiro item, que é menor, é obtido apoiando-se a faixa no segundo batente do braço esquerdo ( $1_b$ ). Neste momento, o objeto restante do corte da faixa é posicionado novamente onde fora apoiado para o primeiro corte do primeiro estágio (batentes  $2_a$  e  $3_a$ ) e o corte da nova faixa é efetuado juntamente com o corte que separa os dois últimos itens da primeira faixa (Figura 2.6c)).



Figura 2.6: Primeiro e Segundo Estágios de Cortes Simultâneos

O último item resultante do último corte sobre a faixa, é encaminhado mais tarde para as máquinas menores, junto com os demais, para fazer a "apara" e os outros para serem recortados. A nova faixa produzida é rotacionada e o processo se repete igualmente. Note que, para produzir a última faixa, o objeto restante deve estar apoiado nos batentes  $2_b$  e  $3_b$ , pois esta faixa é mais estreita do que as outras. Em geral, esta última faixa é armazenada para ser cortada após os cortes de todos objetos com este padrão, pois um novo *setup* é realizado para o corte dos itens dessas faixas mais estreitas.

Enquanto os cortes são feitos, os itens produzidos são contados e, afim de evitar excessos, o último ciclo de cortes de um determinado objeto pode ser feito com folga na capacidade. Os itens que vão sendo produzidos são retirados por um dos operadores e alocados numa esteira, que está localizada próxima à máquina, e será utilizada como transporte de um setor de produção para outro.

O fato de, na maior parte dos casos, o último ciclo da serra ser realizado com folga na capacidade, pode ser visto como vantagem no seguinte sentido. Suponha que objetos de 15mm estejam sendo cortados e que, no último ciclo da serra, sejam cortados apenas 2 objetos para não exceder à demanda (folga de capacidade da serra, pois é possível cortar até 4 objetos

de 15mm). Assim, após o término do primeiro estágio de cortes, as duas últimas faixas que devem ser rotacionadas, são empilhadas (completando a capacidade total) e cortadas simultaneamente. Se as duas faixas (com larguras diferentes ou não) forem cortadas em itens de mesmo comprimento, a pilha toda é apoiada a um batente ( $1_a$  ou  $1_b$ ) e o corte é efetuado. Se as faixas forem cortadas em itens de comprimentos distintos, então, a pilha que está em baixo (com dois objetos) é apoiada ao batente  $1_a$  e a outra que está em cima é apoiada ao batente  $1_b$ . É possível fazer isto por que o batente mais próximo da serra,  $1_b$ , usado para cortar os comprimentos, pode ser levantado, mesmo estando fixo à régua.

### Etapa de Cortes Retangulares

Nesta etapa da produção, os operadores da máquina seccionadora estão com as "ordens de produção" em mãos. A máquina é então preparada para dar início aos cortes da matéria-prima. Quando é possível, os batentes são previamente ajustados para todos os cortes que serão realizados. Eventualmente, são realizados dois ou três *setups* para completar o corte de um determinado padrão de corte. A máquina seccionadora é a primeira máquina que recebe a matéria-prima e, para evitar que esta se torne um "gargalo" da produção, a indústria faz uso do seguinte recurso: os itens com dimensões muito pequenas em relação às dimensões do objeto são agrupados, formando "novos" itens com dimensões maiores, como mostra a Figura 2.7 e, além disso, a empresa procura construir padrões de corte com baixa diversidade de itens.

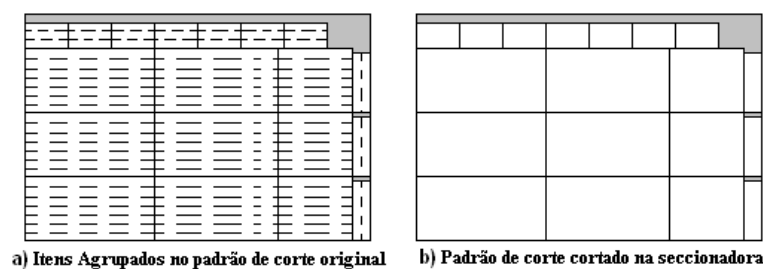


Figura 2.7: Padrões de Corte com Itens Agrupados

O padrão de corte da Figura 2.7a) representa o padrão de corte original, com todos os itens originais que devem ser produzidos e o da Figura 2.7b) é o padrão de corte que será passado para os operadores da máquina seccionadora. Observe que este artifício faz reduzir significativamente o tempo de processamento da máquina, colaborando para a dinâmica da produção. Os "novos" itens, depois de cortados, são passados para os operadores das máquinas

de corte secundárias que os cortam nos itens originais demandados. A grande maioria dos itens segue essa ordem de corte, com exceção de apenas dois - lateral e porta do camiseiro do armário - que já saem na medida certa, uma vez que estes são considerados itens de dimensões grandes. A vantagem do agrupamento dos itens nos padrões de corte somada ao fato de estes possuírem poucos tipos de itens e ao fato de serem, em sua grande maioria 2-estágios, contribui para diminuir o número de *setups* por padrão de corte.

Além da ordem de produção feita por produto com maior "deficit" no estoque, outro tipo de seqüenciamento é estabelecido antes de os painéis começarem a ser cortados. Esta nova ordem é determinada pela espessura dos objetos a fim de diminuir a possibilidade de algumas máquinas ficarem ociosas. Os objetos podem ter espessuras de 3mm, 9mm, 12mm, 15mm, 20mm ou 25mm. A ordem pré-estabelecida pelos operadores de acordo com a espessura dos objetos é: 15mm, 12mm, 20mm, 25mm, 9mm, 3mm. Esta ordenação leva em conta todo o trajeto que cada item terá a partir da seção de cortes. Os itens cortados dos objetos cujas espessuras estão entre 12mm e 25mm resultam em portas, frentes de gavetas, molduras e outros componentes que deverão passar pela maior parte das seções da produção (furação, colagem, usinagem, etc.) e por isso são cortados antes dos outros. Já os itens cortados dos objetos de 3mm e 9mm resultam em prateleiras, divisórias e travessas. Estes são itens que seguirão diretamente para a seção de pintura ou, até mesmo, para a embalagem, por isso são deixados para serem cortados enquanto as outras máquinas da fábrica estão ocupadas com os itens das outras espessuras.

No caso da Luapa, a máquina de corte principal é capaz de cortar objetos de até 60mm de espessura, mas nenhum dos objetos utilizados como matéria-prima tem tal dimensão. Assim, para que a máquina não seja subutilizada, os operadores a carregam com a maior pilha de objetos possível, sem extrapolar a altura de 60mm, para cortá-los simultaneamente. O conjunto de todas as operações necessárias para cortar um, ou mais objetos, segundo um mesmo padrão de corte, incluindo o ato de carregar a máquina seccionadora com um determinado número de objetos e cortá-los simultaneamente, até que todos os itens sejam obtidos, é denominado por **ciclo da serra** [72]. Para determinar o maior número de objetos de uma dada espessura que pode ser cortado num único ciclo da serra, que denotamos por  $Cap$ , basta fazer a seguinte divisão:

$$Cap = \left\lfloor \frac{CpT}{esp} \right\rfloor, \quad (2.1)$$

onde  $CpT$  é a capacidade total da máquina, que é de 60mm, e  $esp$  é a espessura do objeto

em questão. O número de ciclos da serra  $Y_j$  necessário para cortar objetos de acordo com o mesmo padrão de corte  $j$ , depende do número de objetos que serão cortados segundo o padrão de corte  $j$ , dado por  $x_j$ , e da capacidade  $Cap$  da máquina para a espessura do objeto em questão e é calculado por:

$$Y_j = \left\lceil \frac{x_j}{Cap} \right\rceil. \quad (2.2)$$

Observe que, com a prática de cortar objetos simultaneamente diminuimos o tempo de máquina, pois o tempo que seria gasto para cortar um único objeto é utilizado para cortar uma pilha de  $Cap$  objetos, economizando energia e reduzindo custos operacionais, além de reduzir o número de ciclos da serra de maneira significativa, uma vez que, na pior das hipóteses, seria necessário um ciclo para o corte de cada padrão. Por exemplo, se 25 objetos de 3mm precisassem ser cortados, seriam realizados no máximo 25 ciclos da serra, porém, cortando os objetos simultaneamente, bastariam apenas 2 ciclos: 1 ciclo com 20 objetos, usando a capacidade total da máquina, e 1 ciclo com 5 objetos, com folga de capacidade. Apesar desta divisão parecer ser a ideal, na prática, a divisão é feita de forma diferente. Neste caso, os operadores da máquina cortam 15 objetos em um ciclo e 10 em outro, com folga de capacidade em ambos os ciclos. Com esta divisão o número de ciclos da serra não se altera e, segundo os operadores, é mais conveniente em termos operacionais, pois eles consideram que 5 objetos de espessura 3mm (somando uma altura de 15mm) é pouco e preferem pilhas maiores. Por isso, este tipo de divisão é feito quando o número de objetos restantes a serem cortados de acordo com um padrão de corte está entre  $Cap$  e  $2 * Cap$ , sem aumentar o número de ciclos da serra.

### 2.2.3 Padrões de Corte Utilizados pela Fábrica

A qualidade dos padrões de corte está diretamente relacionada com as restrições que estes devem satisfazer, como restrições do equipamento ou os critérios de produção. Um fator determinante na produtividade de um padrão de corte é o número de estágios. É fácil notar que, geralmente, quanto maior o número de estágios, maior é o aproveitamento do material. Este fato pode ser observado no exemplo dado na Figura 2.8.

Apesar de apresentarem menores índices de perda de material, os padrões de corte com maior número de estágios são descartados pela indústria, pois demandam grande tempo de máquina, além de necessitarem um maior número de *setups*. Por isso, os padrões de corte adotados pela maioria das empresas, inclusive pela Luapa, são os padrões de corte guilhotinados 2-estágios por serem mais práticos, fáceis de manusear e mais rápidos de serem cortados.

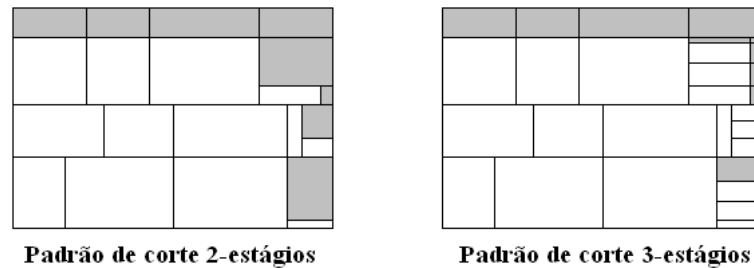


Figura 2.8: Padrões de Corte 2-estágios e 3-estágios

Porém, em padrões de corte com uma perda muito grande, um estágio adicional é permitido.

### Geração dos Padrões de Corte

Na Fábrica de Móveis Luapa, os padrões de corte são gerados *a priori* quando necessário, por exemplo com a mudança do tamanho do objeto, novos padrões de corte são gerados. A geração dos padrões de corte é feita por tentativa e erro, com a preocupação de utilizar o menor número de objetos possível para atender à demanda, gerar a menor diversidade de padrões possível com a menor diversidade de itens por padrão de corte e, principalmente, obter a menor perda possível, respeitando a restrição da máquina a padrões de corte guilhotinados. De modo geral, espera-se que quanto menor o número de objetos utilizados, menor o número de padrões de corte diferentes, mas nem sempre isto é verdade.

Uma preocupação importante da empresa durante a montagem dos padrões de corte é a obtenção de padrões de corte que possam ser cortados repetidas vezes, a fim de utilizar a capacidade da máquina seccionadora de forma mais proveitosa, além de reduzir o número de ciclos da serra.

Durante o processo da geração dos padrões de corte, a demanda dos itens também é levada em conta e "atualizada" cada vez que um padrão de corte é definido, isto é, o número de itens que aparecem no padrão que acabou de ser montado é descontado da demanda original, e os próximos padrões são gerados com base na demanda restante dos itens. Em geral, cada produto tem um conjunto de padrões de corte que serão utilizados para a produção de seus itens, por exemplo, os padrões de corte utilizados para o corte dos itens do armário são diferentes dos padrões de corte usados para cortar os itens da cômoda. Apesar disso, em caso de sobra de material, os itens de produtos diferentes podem ser mesclados no mesmo padrão, mas isso é feito (ao final do processo) apenas quando alguns padrões geram sobras compatíveis com os tamanhos dos itens do outro produto, visando o melhor aproveitamento do objeto.



Depois que os padrões de corte estão todos prontos para a produção de um determinado móvel, os esquemas são passados para os operadores da máquina seccionadora e estes serão sempre utilizados para cortar os itens daquele produto, a não ser que novos itens sejam adicionados ou que os painéis em estoque sejam substituídos por painéis de tamanhos diferentes.

Devemos chamar a atenção para uma imposição importante que provem da máquina de corte e que deve ser levada em consideração durante a construção dos padrões de corte: a espessura da serra. Inevitavelmente, quando a serra percorre o objeto durante o corte, um desgaste é provocado por sua espessura - que é de  $4mm$  no caso da Luapa. Para que a espessura da serra seja considerada, basta somarmos o seu valor às larguras e comprimentos dos objetos e dos itens [48]. Daremos um exemplo para mostrar a importância de se considerar o desgaste causado pela serra.

**Exemplo 2.2.1.** *Suponha que temos em estoque um objeto de dimensões  $L \times W = 275mm \times 150mm$  e dois itens cujas dimensões são  $l_1 \times w_1 = 100mm \times 50mm$  e  $l_2 \times w_2 = 90mm \times 30mm$ , mostrados na Figura 2.9.*

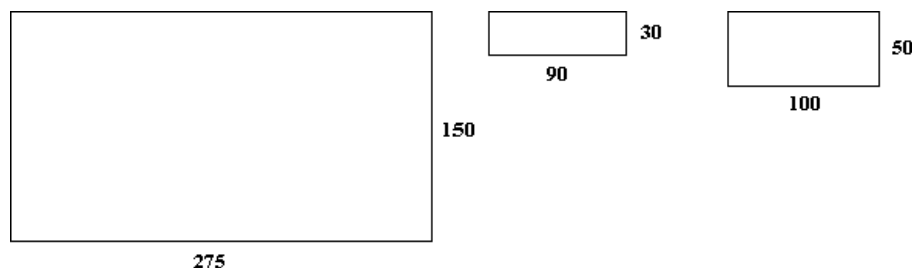


Figura 2.9: Exemplo - Objeto e itens

Considerando que a espessura da serra seja de  $4mm$ , devemos somá-la às dimensões do objeto e dos itens. Obtemos:  $L \times W = 279 \times 154$ ,  $l_1 \times w_1 = 104 \times 54$  e  $l_2 \times w_2 = 94 \times 34$ .

Assim, é possível construir o padrão de corte da Figura 2.10 seguinte:

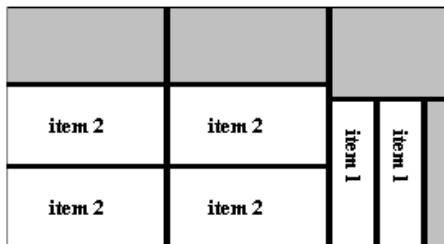


Figura 2.10: Padrão de corte viável para a prática

mas não é possível construir o seguinte:

item 2	item 2	item 1	item 1	
item 2	item 2			
item 2	item 2			

Figura 2.11: Padrão de corte inviável para a prática

Desconsiderando o desgaste da serra, é possível montar o padrão de corte da Figura 2.11, em que o **item 2** cabe exatamente 3 vezes nas duas faixas dispostas ao longo da largura do objeto, pois  $3 * 50\text{mm} = 150\text{mm}$ . Agora, levando em consideração a espessura da serra, o padrão de corte ilustrado na Figura 2.11 não é viável, uma vez que  $3 * 54\text{mm} = 162\text{mm}$  que é maior do que  $154\text{mm}$  da largura do objeto recalculada.

Portanto, o desgaste provocado pela serra deve ser considerado para construir os padrões de corte utilizados na prática de indústrias cujas máquinas de corte possuem objetos cortantes de dimensão relevante, como é o caso da indústria de móveis.

De acordo com o exemplo anterior, foi possível observar que é imprescindível levar em consideração o desgaste provocado pela serra durante a elaboração de padrões de corte. De maneira geral, suponha que o desgaste provocado pela serra seja denotado por  $\delta$ , então os tamanhos do objeto e dos itens devem ser ajustados, respectivamente, para [48]:

$$(L + \delta) \times (W + \delta) \quad \text{e} \quad (l_i + \delta) \times (w_i + \delta), \quad i = 1, \dots, m. \quad (2.3)$$

No entanto, considerar o desgaste provocado pela serra na determinação da eficiência dos padrões de corte pode gerar erros na análise [22]. Por exemplo, um padrão de corte que contem muitas faixas mas gera uma pequena sobra de material pode ser considerado ineficiente se comparado com outro padrão de corte que possua poucas faixas e que tenha uma sobra maior de material. Isto pode ocorrer devido ao desgaste da serra, pois um padrão de corte com muitas faixas recebe mais cortes e, por isso, o desgaste da serra é maior. Assim, considerando as novas dimensões dos objetos e dos itens, a perda total dada por 1.16 pode ser substituída por:

$$PS_j = (L + \delta)(W + \delta) - \sum_{i=1}^m (a_{ij}(l_i + \delta)(w_i + \delta)), \quad (2.4)$$

denominada **perda por sobra**<sup>1</sup>, já que o desgaste da serra é inevitável. Observe que este cálculo inclui a espessura da serra como parte dos itens e seu desgaste não é contabilizado como sobra.

No próximo capítulo discutiremos algumas estratégias estudadas e propostas para atender à demanda dos itens com o menor número de padrões de corte distintos e o menor número de ciclos da serra.

---

<sup>1</sup>Esta fórmula não calcula exatamente a perda por sobra de material, pois o desgaste provocado pela serra é contabilizado apenas na individualização do item. A perda por desgaste da serra associada ao corte guilhotinado não é totalmente contabilizada. A fórmula correta para a perda por sobra de material é dada no Apêndice C, e uma aproximada por ser vista em [60].

# Capítulo 3

## Estratégias Para Redução de Ciclos da Serra

O critério de otimização usual em Problemas de Corte de Estoque é a minimização da perda de material ou, equivalentemente (Proposição 1.1, quando há apenas um tipo de objeto em estoque e a demanda deve ser atendida exatamente), do número de objetos cortados. Mas na prática, nem sempre este critério contempla as necessidades da indústria. Por exemplo, se há uma demanda muito grande a ser atendida num curto espaço de tempo, a troca de padrões de corte ganha significativa importância, já que é necessário ajustar a máquina para cada troca, o que leva tempo e trabalho. Por isso, outros critérios podem ser mais adequados, como por exemplo, reduzir o número de padrões de corte diferentes que serão usados para atender à demanda dos itens. O tempo necessário para realizar os ajustes de batentes, de ferramentas e da máquina seccionadora para um novo padrão de corte é o que chamamos de tempo de *setup* ou tempo de preparo da máquina. Neste capítulo, discutimos o Problema de Corte de Estoque considerando como critério de otimização, além de minimizar as perdas, minimizar o número de padrões de corte distintos (*setups*). O número de ciclos da serra está diretamente relacionado com o número de padrões de corte diferentes na solução final do problema.

### 3.1 Trabalhos da Literatura Relacionados ao Problema

Um modelo para o problema de minimizar o número de *setups* e o número de objetos cortados, pode ser dado por [3]:

$$\begin{aligned}
\text{Min } Z &= c_1 \cdot \sum_{j=1}^n x_j + c_2 \cdot \sum_{j=1}^n \delta(x_j) \\
\text{s.a.: } &\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i, \quad i = 1, \dots, m \\
&x_j \in \mathbb{Z}_+, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n,
\end{aligned} \tag{3.1}$$

onde  $c_1$  é o custo de cada objeto em estoque,  $c_2$  é o custo de *setup* e  $\delta(x_j) = \begin{cases} 1, & \text{se } x_j > 0; \\ 0, & \text{se } x_j = 0. \end{cases}$

O problema (3.1) tem dois objetivos conflitantes: minimizar o número de objetos cortados e minimizar o número de padrões de corte distintos. A grande dificuldade de se resolver o problema a partir da formulação (3.1) vem da descontinuidade e não-linearidade da função objetivo. Uma linearização do problema (3.1) pode ser feita com a utilização de uma variável binária para controlar o uso ou não de um determinado padrão de corte. Esta variável é conhecida como variável de *setup*. O modelo (3.1) linearizado pode ser formulado como segue (e.g. [23]):

$$\text{Min } Z = c_1 \sum_{j=1}^n x_j + c_2 \cdot \sum_{j=1}^n y_j \tag{3.2}$$

$$\text{s.a.: } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, \dots, m \tag{3.3}$$

$$x_j \leq M y_j, \quad j = 1, \dots, n \tag{3.4}$$

$$x_j \in \mathbb{Z}_+, \quad y_j \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n, \tag{3.5}$$

onde  $M$  é um número suficientemente grande. Neste modelo, as variáveis que contabilizam os objetos cortados segundo um padrão de corte,  $x_j$ , e as variáveis de *setup*,  $y_j$ , podem ser relaxadas.

Na literatura há relativamente poucos trabalhos que tratam deste problema. Podemos citar trabalhos como o de Haessler [31], que apresenta um procedimento heurístico seqüencial para resolver tal problema, que detalharemos na Seção 3.4 (Subseção 3.4.1); de Vanderbeck em [68], que resolve o problema através do algoritmo exato *Branch-and-Cut-and-Price*, em que o problema *price* é não-linear e pode ser decomposto em múltiplos Problemas da Mochila Inteira Restrita. O modelo quadrático proposto por Vanderbeck em [68] (chamado de formulação compacta) é linearizado e decomposto através do procedimento de Dantzig-Wolfe (Subseção 1.4.1 do Capítulo 1). Foerster e Wäscher em [24] desenvolveram um método de redução de

padrões de corte através de combinações, também chamado de procedimento pós-otimização (KOMBI) e baseia-se na substituição de padrões de corte que podem ser combinados, formando novos padrões de corte. Outros trabalhos que tratam deste problema no caso unidimensional, são Diegel *et al* [19], que analisam a viabilidade e os custos de fazer os padrões de corte que são usados poucas vezes serem usados um número maior de vezes a fim de diminuir o número de *setups* de máquina. Yanasse e Limeira [73], propõem um procedimento "híbrido" para reduzir o número de padrões de corte distintos. Para isto, padrões de corte são gerados, inicialmente, com uma perda limitada para atender à demanda de pelo menos dois itens, usando esses padrões de corte o maior número de vezes possível, sem exceder às demandas. O problema residual é resolvido e a partir da solução obtida, aplica-se técnicas de busca local. Umetani *et al* [66] propõem um método de solução baseado em meta-heurísticas e incorpora uma técnica adaptada de geração de padrões de corte. O Problema de Corte considerado é unidimensional e o número de padrões de corte distintos é restrito a um dado limite.

Como conseqüência do novo objetivo traçado, é de se esperar que ao diminuir o número de padrões de cortes distintos, o número de vezes que cada padrão de corte é usado deve aumentar em relação à solução obtida minimizando apenas o número de objetos. Desta forma, é possível obter padrões de corte que serão empregados no corte de um número maior de objetos, fazendo com que estes possam ser cortados simultaneamente. Lembramos que o corte de vários objetos simultaneamente, implica na redução do tempo de máquina, na diminuição dos custos operacionais, e o melhor aproveitamento da capacidade de corte da máquina, além de contribuir para a redução do número de ciclos da serra. Apesar da grande dificuldade atrelada a estes problemas, eles são mais realistas e merecem atenção especial.

Na próxima seção mostramos as relações entre o número de ciclos da serra e o número de *setups* realizados no processo de atendimento à demanda e o interesse em reduzir o número de ciclos da serra na solução de um problema.

## 3.2 Ciclos da Serra x Número de *Setups*

O custo operacional de uma máquina de corte está diretamente relacionado com o número de ciclos da serra. Se o número de padrões de corte diferentes é reduzido na solução final, então alguns padrões de corte estão sendo cortados repetidas vezes, e podem ser cortados simultaneamente, diminuindo assim o número de ciclos da serra e economizando energia elé-

trica. Assim, uma maneira de buscar reduzir o número de ciclos da serra é diminuir o número de padrões de corte distintos. Os exemplos a seguir, mostram a relação entre o número de ciclos da serra e o número de *setups*.

**Exemplo 3.2.1. a-)** *Suponha uma máquina capaz de cortar 2 objetos simultaneamente e considere a seguinte solução final para um Problema de Corte de Estoque qualquer, que minimiza o número de objetos cortados e atende à demanda  $b = (3, 8, 14)$ :*

$$A_1 = (2, 0, 2)$$

$$A_2 = (0, 8, 4)$$

$$A_3 = (1, 0, 8),$$

com  $x_1 = x_2 = x_3 = 1$  e 1 ciclo da serra para cada padrão de corte. Portanto, temos 3 objetos, com 3 padrões de corte em 3 ciclos da serra.

Considere agora a solução alternativa:

$$\tilde{A}_1 = (1, 2, 0)$$

$$\tilde{A}_2 = (1, 3, 7),$$

com  $\tilde{x}_1 = 1$  e  $\tilde{x}_2 = 2$ . Temos 3 objetos, 2 padrões de corte e 2 ciclos da serra.

Observe que o número de objetos utilizados se mantém, o número de padrões de corte é reduzido de 3 para 2 e o número de ciclos da serra também é reduzido de 3 para 2. Neste exemplo, o número de ciclos da serra é igual ao número de setups e decresce da mesma quantidade que os setups, mas em geral, o número de ciclos da serra é maior do que o número de setups, pois para um certo padrão de corte (um setup) podemos ter vários ciclos da serra, dependendo da quantidade de vezes que este padrão de corte for usado.

**b-)** *Um exemplo onde a redução do número de setups não implica na redução do número de ciclos da serra pode ser dado considerando-se o mesmo caso anterior, mas com o dobro da demandas anteriores,  $b' = (6, 16, 28)$ , e as mesmas soluções:*

$$A'_1 = (2, 0, 2)$$

$$A'_2 = (0, 8, 4)$$

$$A'_3 = (1, 0, 8),$$

com  $x_1 = x_2 = x_3 = 2$  e 1 ciclo da serra para cada padrão de corte. Portanto, temos 6 objetos, com 3 padrões de corte em 3 ciclos da serra.

E a solução:

$$\tilde{A}'_1 = (1, 2, 0)$$

$$\tilde{A}'_2 = (1, 3, 7),$$

com  $\tilde{x}'_1 = 2$  em 1 ciclo da serra e  $\tilde{x}'_2 = 4$  em 2 ciclos da serra. Temos 6 objetos, 2 padrões de corte e 3 ciclos da serra, ou seja, o número de ciclos da serra não diminuiu com a redução do número de setups.

Este fato pode ser explicado pelo fato de que, no Exemplo 3.2.1a-), na primeira solução apresentada, com os padrões de corte  $A_1$ ,  $A_2$  e  $A_3$ , os ciclos da serra foram utilizados com folga de capacidade para todos os padrões, enquanto que no Exemplo 3.2.1b-), os ciclos eram todos completos para os padrões de corte  $A'_1$ ,  $A'_2$  e  $A'_3$ . Assim, mesmo diminuindo o número de padrões de corte para 2 no Exemplo 3.2.1b-), um novo ciclo da serra se faz necessário para qualquer objeto adicional, já que os dois primeiros ciclos já estão completos.

Para tentar melhores resultados, pode ser mais interessante se, na solução final, obtivermos padrões de corte que possam ser cortados um número múltiplo da capacidade da serra, isto é, se a máquina tem capacidade para cortar 3 objetos ao mesmo tempo, então seria interessante que os padrões de corte fossem usados 3, 6, 9 vezes, e assim por diante. Se, na solução final, algum padrão de corte tiver que ser usado 10 vezes (4 ciclos, com o último incompleto), seria preferível cortar 9 (e não atender toda a demanda) ou até 12 (com excedentes de produção). Quanto mais padrões de corte puderem ser cortados simultaneamente, menor será o número de ciclos da serra.

Nas próximas seções, apresentamos estratégias para minimizar o número de ciclos da serra no Problema de Corte de Estoque Bidimensional.

### 3.3 Modelo de Multiplicidade

Um resultado favorável para se obter um número baixo de ciclos da serra é quando o número de vezes que os objetos são cortados de acordo com um padrão de corte é um múltiplo da capacidade da serra [72]. Uma estratégia para reduzir o número de ciclos da serra é formular um modelo, a partir do modelo (3.2)-(3.5), em que a constante  $M$  é substituída por um valor que representa a capacidade da serra e a inequação (3.4) é substituída por uma equação. Isto é, para garantir que se um padrão de corte for usado, então ele deve ser usado um número de vezes que seja um múltiplo da capacidade da serra, a restrição (3.4) é substituída por

$$x_j = Cap y_j, \quad (3.6)$$

onde  $x_j$  é o número de objetos cortados de acordo com  $j$ -ésimo padrão de corte e  $y_j$  é o número de ciclos da serra necessário para cortar os  $x_j$  objetos. Esta nova restrição permite o



total aproveitamento da capacidade da serra em todos os ciclos realizados evitando-se assim ciclos incompletos.

O Modelo de Multiplicidade é formulado de maneira similar ao modelo (3.2)-(3.5), considerando  $c_1 = c_2 = 1$  e substituindo a restrição (3.4) pela restrição (3.6) [52]:

$$\text{Min } Z = \sum_{j=1}^n (x_j + y_j) \quad (3.7)$$

$$\text{s.a.: } \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1, \dots, m \quad (3.8)$$

$$x_j = \text{Cap } y_j, \quad j = 1, \dots, n \quad (3.9)$$

$$x_j, y_j \in \mathbb{Z}_+, j = 1, \dots, n, \quad (3.10)$$

Não é difícil perceber que este problema tem fortes possibilidades de ser inviável devido à restrição de igualdade para a demanda. Este fato foi realmente constatado nos testes computacionais que foram realizados. Então, um segundo modelo foi testado, apenas trocando o sinal de igualdade da restrição (3.8) para "maior ou igual", o que significa que permitimos a produção de excedentes. Observe que consideramos na função objetivo do modelo a soma do número de objetos cortados e do número de ciclos da serra, mas omitindo a variável  $y$  da função objetivo, a solução do problema será a mesma. Entretanto, mantivemos esta soma para enfatizar que o objetivo do modelo é, não só obter uma solução com o menor número de objetos possível, mas também com o menor número possível de ciclos da serra. Mais detalhes sobre a resolução deste modelo serão apresentados na Seção 4.2 do Capítulo 4.

## 3.4 Heurísticas para Reduzir o Número de Ciclos da Serra

Nesta seção apresentamos duas heurísticas da literatura que embasam os métodos propostos neste trabalho: o método de Haessler [31] para resolver o problema de minimizar o número de *setups* no caso unidimensional; e em seguida, descrevemos a heurística desenvolvida por Yanasse *et al* em [72], da qual foram extraídas as principais características para construirmos os métodos propostos neste trabalho.

### 3.4.1 Heurística de Haessler

A heurística proposta por Haessler [31] para resolver o problema de minimização do número de *setups*, no Problema de Corte de Estoque Unidimensional, é baseada na construção

de padrões de corte em seqüência (*Sequential Heuristic Procedure - SHP*), escolhendo padrões de corte que podem ser usados um número alto de vezes. O método busca padrões de corte que satisfaçam algumas exigências pré-definidas, que são atualizadas em cada iteração, até que todas as demandas tenham sido atendidas. Estas exigências dependem, basicamente, do número de itens que ainda devem ser produzidos.

O procedimento se inicia pela análise dos itens demandados e ainda não produzidos para a definição de dois parâmetros que descrevem a situação corrente do problema. O primeiro parâmetro é uma estimativa do número de objetos necessários para satisfazer os pedidos restantes. Este número é dado por

$$Est = \frac{\sum_i r_i \cdot l_i}{L}, \quad (3.11)$$

onde  $L$  é o comprimento do objeto,  $l_i$  é o comprimento do item  $i$  e  $r_i$  é a demanda remanescente do item  $i$ .

O segundo parâmetro é um número médio de itens que deve ser obtido de cada objeto, isto é:

$$Nm = \frac{\sum_i r_i}{Est}, \quad (3.12)$$

o número de itens a ser produzido dividido pelo número estimado de objetos necessários.

Os parâmetros  $Est$  e  $Nm$  são usados na determinação dos parâmetros de aspiração (ou as exigências pré-definidas) para os próximos padrões de corte que serão aceitos para compor a solução final.

As características que são levadas em conta na construção dos parâmetros de aspiração são a perda de material, número de itens no padrão de corte e o número de objetos que devem ser cortados sem que haja excedente de produção. Os parâmetros de aspiração são:

- **MAXTL:** maior perda de material permitida. Seu valor é dado como uma porcentagem do comprimento  $L$  do objeto, entre 0,6% e 3% de  $L$ . Perdas maiores são permitidas à medida que o número de objetos necessários para atender à demanda diminui;
- **MAXR:** O maior número de itens permitido por padrão de corte. Geralmente é definido como a capacidade máxima de corte da máquina, com relação ao número de facas;
- **MINR:** O menor número permitido de itens por padrão de corte, dado por uma unidade a menos que o número médio de itens por padrão de corte, calculado de acordo com (3.12);

- **MINU:** O menor número de objetos a ser processado de acordo com um determinado padrão de corte. Seu valor é uma porcentagem do número  $Est$  de objetos estimados,  $\alpha Est$ , em que  $\alpha \in [0.5, 0.9]$ .

A busca para determinar se há algum padrão de corte viável que reúna todas as características desejadas, é feita da seguinte maneira. Seja um padrão de corte  $j$  contendo elementos inteiros não-negativos  $a_{ij}$ , então os critérios para a aceitação de um padrão de corte são:

1.  $L - \sum_i a_{ij} l_i \leq \text{MAXTL}$ ;
2.  $\text{MINR} \leq \sum_i a_{ij} \leq \text{MAXR}$ ;
3.  $ub_{ij} \leq \frac{r_i}{\text{MINU}}$ , para todo  $a_{ij} > 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ .

Ou seja,

1. a perda no padrão de corte não deve ultrapassar a perda máxima permitida;
2. o número de itens no padrão de corte está entre os limites inferior e superior estabelecidos;
3. o número de vezes que um item aparece no padrão de corte é limitado por  $ub_{ij}$  de tal forma que o padrão de corte possa ser cortado pelo menos as MINU vezes desejadas, sem que haja excedente, ou seja, buscamos um padrão de corte  $j$  tal que  $x_j \geq \text{MINU}$  não exceda à demanda.

Para dar início à busca pelos padrões de corte que satisfaçam aos critérios desejados, o vetor de demandas dos itens é ordenado de forma decrescente, para que a geração dos padrões de corte seja feita em ordem lexicográfica decrescente com relação às demandas. Suponha que  $\tilde{r}$  seja o vetor cujas coordenadas são as demandas dos itens já ordenadas. A ordem lexicográfica decrescente, na qual os padrões de corte são gerados, pode ser feita de acordo com o procedimento detalhado a seguir:

- i-*) O item 1 do vetor  $\tilde{r}$ , que tem a maior demanda, é incluído no padrão de corte tantas vezes quanto for possível (até que não caiba mais no objeto ou até atingir o limite superior  $ub_{ij}$  definido em **3.**). Em seguida, o item 2 é incluído no padrão de corte o maior número de vezes possível (com as mesmas condições do item 1) e, quando não puder mais ser incluído, segue-se para o terceiro item, e assim por diante até o  $m$ -ésimo item. Seja  $(a_1^1, a_2^1, \dots, a_m^1)$  o vetor associado ao primeiro padrão de corte gerado, que contém o maior número possível de itens de cada tipo;

- ii-*) Para gerar o segundo padrão de corte  $(a_1^2, a_2^2, \dots, a_m^2)$ , atribua à sua primeira coordenada  $a_1^2$  o valor de  $a_1^1$ , e à segunda coordenada  $a_2^2$  o valor  $a_2^1 - 1$ . Os próximos itens são incluídos o maior número de vezes possível, seguindo a ordem decrescente das demandas, como feito no item *i-*). Seja, então,  $(a_1^2, a_2^2, a_3^2, \dots, a_m^2) = (a_1^1, a_2^1 - 1, a_3^2, \dots, a_m^2)$  o segundo padrão de corte gerado;
- iii-*) O próximo padrão de corte é construído mantendo-se iguais a primeira e segunda coordenadas do padrão de corte anterior  $(a_1^2$  e  $a_2^2)$  e subtraindo, da terceira coordenada  $a_3^2$ , uma unidade. Os outros itens são incluídos tantas vezes quantas eles couberem (ou quando atingirem seus respectivos limites superiores) - sempre seguindo a ordem decrescente das demandas. Assim, o terceiro padrão de corte gerado é  $(a_1^3, a_2^3, a_3^3, \dots, a_m^3) = (a_1^2, a_2^2, a_3^2 - 1, a_4^3, \dots, a_m^3) = (a_1^1, a_2^1 - 1, a_3^2 - 1, a_4^3, \dots, a_m^3)$ . A construção dos próximos padrões de corte segue a mesma idéia, até que se obtenha um padrão de corte que satisfaça aos critérios de aspiração (MAXTL, MAXR, MINR e  $a_{ij} \leq \frac{r_i}{MINU}$ , para todo  $a_{ij} > 0$ ,  $i = 1, \dots, m$ ).

Desta forma, o item de maior demanda atual necessariamente aparece no padrão de corte gerado. Se este padrão de corte satisfaz aos parâmetros de aspiração, então ele é aceito e usado o maior número de vezes possível (no mínimo MINU). Se a busca pelo padrão de corte com as características impostas falhou, o parâmetro MINU é relaxado (faz-se  $MINU = MINU - 1$ ) e a busca recomeça. Como os limites superiores para os itens  $ub_{ij}$  depende do valor de MINU, novos padrões de corte são gerados, de acordo com o procedimento anterior.

A redução do valor de MINU (que é o menor número de objetos que devem ser cortados de acordo com o padrão de corte) amplia o espaço de padrões de corte que podem ser gerados uma vez que os limitantes superiores para os itens ( $ub_{ij}$ ) nos padrões de corte aumenta com a redução de MINU, permitindo mais itens nos padrões de corte. Quando o valor de MINU é unitário, um padrão gerado é necessariamente aceito. Este fato garante que o processo será realizado num número finito de iterações e que as demandas serão atendidas com certeza.

A heurística SHP rende bons resultados para problemas como (3.1) no caso unidimensional e não é caro computacionalmente. Por isso, em muitos trabalhos da literatura (Belov [6], Salles Neto [61], Umetani *et al* [66], Yanasse e Limeira [73] e outros) este método é utilizado para gerar uma solução inicial e também como base para comparar resultados.

### 3.4.2 Heurística de Yanasse, Harris e Zinober

A heurística desenvolvida por Yanasse, Harris e Zinober [72] é utilizada na resolução do Problema de Corte de Estoque para o caso Bidimensional. A função objetivo considerada é minimizar a soma do número de objetos cortados e o número de ciclos da serra. A heurística proposta no referido artigo busca balancear as perdas de material e o tempo de uso da máquina.

A idéia da heurística é simples e segue o mesmo princípio da heurística de Haessler descrita na subseção anterior. Como queremos ter o menor número de ciclos da serra e o menor número de objetos usados possível, a estratégia é definir, inicialmente, padrões de corte contendo apenas itens com demandas altas, para que estes possam ser repetidos muitas vezes. Esta estratégia para construir padrões de corte é mantida enquanto as perdas obtidas nos padrões de corte forem aceitáveis. Em cada passo do algoritmo, o número de vezes que o padrão de corte gerado será usado é conhecido antes mesmo da construção destes e, à medida que este número diminui, a condição de eficiência dos padrões de corte é relaxada. A seguir, descrevemos o procedimento com maiores detalhes.

#### Descrição do Algoritmo - Algoritmo 1

Seja  $P_0$  um Problema de Corte de Estoque Bidimensional. A partir do problema  $P_0$  é definido um problema auxiliar  $P_1$ , com os mesmos itens de  $P_0$ , mas com as demandas ajustadas por um fator  $F_0$ , da seguinte maneira. Se o problema original  $P_0$  tem  $m$  tipos de itens com demandas  $b_1, \dots, b_m$ , respectivamente, então as demandas dos itens do problema auxiliar  $P_1$  serão determinadas pela divisão inteira das demandas originais por  $F_0$ , ou seja, a demanda do item  $i$  no problema  $P_1$  é definida por  $\tilde{b}_i = \left\lfloor \frac{b_i}{F_0} \right\rfloor$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Assim, qualquer padrão de corte viável para o problema  $P_1$  inteiro é viável para o problema  $P_0$  inteiro e, além disso, poderá ser usado até  $F_0$  vezes sem que haja excesso de produção. Padrões de corte são gerados para o problema auxiliar  $P_1$  e, se algum padrão de corte é "bom" o suficiente, este será aceito e fará parte da solução final do problema original  $P_0$ , sendo utilizado  $F_0$  vezes.

#### Definição do Fator $F_0$

A definição do fator de ajuste da demanda  $F_0$  é baseada nas três maiores demandas do problema  $P_0$  e na capacidade de corte da máquina ( $Cap$ ) com relação à espessura do objeto em questão. Sejam, então,  $max_1$ ,  $max_2$  e  $max_3$  a maior, a segunda maior e a terceira maior

demandas, respectivamente, do problema original  $P_0$  e:

$$\bullet \quad dmax_1 \text{ o menor múltiplo de } Cap \text{ que é maior ou igual a } \frac{max_1}{2}; \quad (3.13)$$

$$\bullet \quad dmax_2 \text{ o maior múltiplo de } Cap \text{ que é menor ou igual a } max_2; \quad (3.14)$$

$$\bullet \quad dmax_3 \text{ o maior múltiplo de } Cap \text{ que é menor ou igual a } max_3. \quad (3.15)$$

O primeiro valor de  $F_0$  é  $dmax_1$ , então o item que tem a maior demanda no problema  $P_0$  terá sua demanda igual a 1 no problema  $P_1$ .

**Afirmção 3.1.** *Caso  $max_1$  seja um múltiplo de  $2 * Cap$ , a demanda do item no problema auxiliar será  $2^1$ .*

Após a determinação do primeiro valor de  $F_0$ ,  $dmax_1$ , e da construção do problema  $P_1$ , gera-se um padrão de corte para o problema  $P_1$ . Se o padrão de corte gerado for aceito, então ele será empregado em  $F_0$  objetos, a demanda dos itens originais é atualizada e o próximo valor de  $F_0$  é dado por  $dmax_2$ , do novo problema  $P_0$  atualizado. Se o padrão de corte não for aceito, o próximo valor de  $F_0$  será:

$$F_0 = \begin{cases} dmax_3, & \text{se } F_0 > Cap \text{ e } F_0 > dmax_3; \\ F_0 - Cap, & \text{se } F_0 > Cap \text{ e } F_0 \leq dmax_3. \end{cases}$$

Este procedimento para a determinação de  $F_0$  é realizado até que  $F_0$  alcance o valor de  $Cap$ . Neste caso, os próximos valores de  $F_0$  serão reduzidos de uma em uma unidade, ou seja, neste ponto, ciclos incompletos são aceitos. Note que, independente do padrão de corte ter sido aceito ou não, o valor de  $F_0$  é atualizado, ou seja, em cada iteração do procedimento, o valor de  $F_0$  é diferente. Este processo é repetido até que todas as demandas tenham sido atendidas exatamente.

A estratégia utilizada pela heurística faz com que os primeiros padrões de corte gerados, com altos valores de  $F_0$ , sejam compostos apenas por itens com as maiores demandas e, como os valores de  $F_0$  também são altos, é desejável que estes padrões sejam eficientes, já que vão ser usados muitas vezes.

À medida que o valor de  $F_0$  diminui, os padrões de corte "aceitáveis" não precisam ser tão eficientes e em cada passo do processo, uma variável determina se um padrão de corte pode ou não ser aceito, dependendo do valor de  $F_0$ . É esta variável que nos indica se o padrão de corte é "bom" o suficiente ou não.

<sup>1</sup>A demonstração desta afirmação é feita no Apêndice A.

### Definição de um "Bom" Padrão de Corte

O critério para decidir se um padrão de corte é "bom" ou não deve levar em consideração a quantidade  $F_0$  do objetos que serão cortados de acordo com o mesmo. Um padrão de corte que é utilizado muitas vezes pode produzir uma solução ruim se ele tiver uma perda muito alta. Por outro lado, um padrão de corte "ruim" pode ser aceito se ele não for usado muitas vezes, pois sua contribuição para a solução final será mínima.

Portanto, foi incorporada no algoritmo a condição de que se um padrão de corte for repetido muitas vezes ele deve ter uma eficiência alta. Se o tamanho da pilha de objetos for grande (valor de  $F_0$  alto), então o padrão de corte que foi gerado com esse valor de  $F_0$  é aceito apenas se sua eficiência for maior ou igual a um "valor de corte".

No trabalho [72], os "valores de corte" (*cutoff*) foram definidos a partir de uma eficiência de referência pré-definido *effref* e dependente do valor de  $F_0$ , da seguinte forma:

$$cutoff = effref * co\_fator, \quad (3.16)$$

onde *co\_fator*<sup>2</sup> é um fator de correção e é determinado por:

$$co\_fator = 1, \text{ se } F_0 \geq Cap; \quad (3.17)$$

$$co\_fator = (Cap + 1 - F_0) * 0,02, \text{ se } 1 < F_0 < Cap; \quad (3.18)$$

$$co\_fator = 0, \text{ se } F_0 = 1. \quad (3.19)$$

Quando o valor de  $F_0$  é igual a 1, qualquer padrão de corte gerado é aceito mesmo que tenha uma eficiência baixa. Caso contrário, não conseguiríamos atender a todas as demandas dos itens ao final do processo.

É importante observar que os padrões de corte serão gerados de forma restrita (Subseção 1.5.2, Seção 1.5 do Capítulo 1), com relação às demandas do problema auxiliar  $P_1$  definido pelo atual valor do fator  $F_0$ . O problema  $P_1$  não é resolvido até a otimalidade, apenas geram-se padrões de corte viáveis para o problema original através do problema auxiliar.

Além disso, os autores de [72] testaram alguns valores de *effref* dados pelos melhores resultados previamente conhecidos do problema. Os testes com diferentes valores de *effref* mostraram que as soluções finais são sensíveis ao valor deste parâmetro.

---

<sup>2</sup>Em contato *a posteriori* com um dos autores do trabalho [72], foi observada a existência de um erro tipográfico na expressão de *co\_fator* (*correctionfactor*) quando  $1 < F_0 < Cap$ . A expressão correta é  $co\_fator = 1 - (Cap + 1 - F_0) * 0,02$ .

### 3.4.3 Heurísticas Propostas

Nesta seção, descrevemos os algoritmos propostos, baseados nas principais características da heurística de Yanasse *et al* [72], descrita na subseção anterior. A primeira variação do método original, que chamamos de **Algoritmo 2**, é descrita a seguir e, logo em seguida, apresentamos a segunda variação, que chamamos de **Algoritmo 3**. Destacamos que, na construção dos padrões de corte utilizados pelos algoritmos, o desgaste provocado pela serra foi levado em consideração.

#### Algoritmo 2 - Pré-seleção

No Algoritmo 2,  $m$  padrões de corte homogêneos maximais são inicialmente construídos ((1.20) Seção 1.3). Uma pré-seleção desses padrões de corte é feita antes da definição do primeiro problema  $P_1$ . A base inicial para a solução do problema  $P_1$  é formada por estes  $m$  padrões de corte homogêneos.

Dentre os padrões de corte homogêneos maximais, escolhemos aqueles que tenham uma eficiência superior ou igual ao valor de referência  $effref = 90\%$  (valor escolhido arbitrariamente). Os padrões de corte aceitos são usados o maior número de vezes possível. As demandas dos itens são atualizadas e o processo é desenvolvido como na heurística original. Se o uso de algum padrão de corte homogêneo é suficiente para atender exatamente à demanda de algum item, então este item é excluído do problema. Desta forma, diminuimos o tamanho do problema e o número de Problemas da Mochila Restritos a serem resolvidos na geração dos padrões de corte, já que um problema deste tipo deve ser resolvido para cada um dos itens.

O motivo pelo qual decidimos fazer a pré-seleção é que, alguns dos padrões de corte homogêneos têm uma alta eficiência e, muitas vezes, acabam não sendo gerados no Algoritmo 1, porque a geração dos padrões de corte é restrita às demandas auxiliares  $\tilde{b}$ .

A razão para considerarmos  $effref = 90\%$  na pré-seleção dos padrões de corte homogêneos maximais é que, durante o processo de solução, a eficiência de referência é  $effref = 80\%$  (escolhido de forma arbitrária) e, além disso, as eficiências dos padrões de corte são relaxadas em cada passo, podendo gerar padrões de corte com eficiências ruins.

A seguir, detalhamos o pseudo-código do **Algoritmo 2** com as principais considerações em cada passo e, ao final deste, apresentamos um exemplo para ilustrar a sua aplicação na resolução do Problema de Corte de Estoque Bidimensional. Para a apresentação do método, considere o problema  $\mathbf{P}^1$  (1.17)-(1.19) como o problema original  $P_0$ .



## Pseudo-código do Algoritmo 2

---

### *Início*

#### Inicialização

**Passo 1:** Leitura dos dados de entrada:  $L$  (comprimento do objeto),  $W$  (largura do objeto),  $m$  (número de itens),  $l_i$  (comprimento do item  $i$ ),  $w_i$  (largura do item  $i$ ),  $b_i$  (demanda do item  $i$ ),  $esp$  (espessura do objeto) e  $Serra$  (espessura da serra). Defina as demandas residuais como  $r_i = b_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ .

→ **Passo 1a:** Construir os padrões de corte bidimensionais homogêneos maximais (1.20) para cada um dos  $m$  itens. Construa a matriz básica inicial  $B$  com estes padrões de corte.

Se  $Ef(A_i) > 90$  para algum  $i = 1, \dots, m$ , então  $x_i = \left\lfloor \frac{r_i}{a_{ii}} \right\rfloor$ , com  $a_{ii}$  sendo o número de vezes que o item  $i$  aparece no padrão de corte homogêneo maximal  $A_i$  e  $Ef(A_i)$  é a sua eficiência.

→ **Passo 1b:** Atualizar as demandas.

Se  $r_i = 0$  para algum item  $i$ , então o item  $i$  é excluído do problema. Atualize a matriz básica  $B$ .

Se  $r_i = 0$  para todo item  $i$ , então a solução foi encontrada. **PARE. Fim do processo.** Senão, determinar as três maiores demandas atualizadas do problema  $P_0$ ,  $max_1$ ,  $max_2$  e  $max_3$ , respectivamente, e calcular os valores de  $dmax_1$ ,  $dmax_2$  e  $dmax_3$  de acordo com (3.13), (3.14) e (3.15), respectivamente.

- Faça  $F_0 = dmax_1$ .

#### Iteração k

**Passo 2:** Calcule  $\tilde{b}_i = \left\lfloor \frac{r_i}{F_0} \right\rfloor$  para  $i = 1, \dots, m$ .

**Passo 3:** Construa o Problema Auxiliar  $P_1$ :

$$(P_1) \quad \begin{aligned} \text{Min } Z &= \sum_{j=1}^n x_j \\ \text{s.a.: } & Bx = \tilde{b} \\ & x \in \mathbb{Z}_+^m, B \in \mathbb{Z}^{m \times n} \end{aligned}$$

em que  $B$  é matriz de padrões de corte para o Problema Auxiliar Mestre Restrito  $P_1$  (e é atualizada de acordo com os padrões de corte gerados) e  $n$  é o número de padrões de corte distintos gerados até então.

**Passo 4:** Gere um padrão de corte<sup>3</sup>  $A_p = (a_{1p}, \dots, a_{mp})$  para o problema  $P_1$ , (e.g. pelo Método de Gilmore e Gomory) restrito às demandas  $\tilde{b}_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Calcule a eficiência  $Ef(A_p)$  do padrão de corte obtido  $A_p$ , que pode ser dada, em porcentagem, por:

$$Ef(A_p) = 100 \frac{A\_U_p}{A\_Obj},$$

em que  $A\_U_p$  é a área total ocupada pelo padrão de corte  $A_p$  e  $A\_Obj$  é a área do objeto a ser cortado.

**Passo 5:** Calcule o valor do fator de correção para o corrente valor de  $F_0$ :

$$co\_fator = \begin{cases} 0, & \text{se } F_0 = 1; \\ 1, & \text{se } F_0 \geq Cap; \\ (Cap + 1 - F_0) * 0,02, & \text{se } 1 < F_0 < Cap. \end{cases}$$

e o valor de corte  $cutoff = effref * co\_fator$ , com  $effref = 80$ .

- Se  $Ef(A_p) > cutoff$ , siga para o **Passo 6**.
- Se  $Ef(A_p) \leq cutoff$ , vá para o **Passo 7**.

**Passo 6:**  $Ef(A_p) > cutoff \Rightarrow$  o padrão de corte é aceito.

Faça  $x_p = F_0$ .

Atualize as demandas do problema  $P_0$ , fazendo:

$$r_i = r_i - a_{pi} * F_0, \quad i = 1, \dots, m, \quad (3.20)$$

com  $a_{pi}$  sendo o número de vezes que o item  $i$  aparece no padrão de corte gerado  $A_p$ .

**TESTE DE PARADA:**

- Se  $r_i = 0$ , para todo item  $i = 1, \dots, m$ , então pare. **Fim do processo.**
- Se não, calcule os novos valores para  $max_1$ ,  $max_2$ ,  $max_3$  e recalcular os valores de  $dmax_1$ ,  $dmax_2$  e  $dmax_3$  do problema  $P_0$  atualizado.

Faça  $F_0 = dmax_2$ .

Atualize a matriz  $B$ , incluindo o padrão de corte aceito.

---

<sup>3</sup>O código que utilizamos para simular a geração de padrões de corte bidimensionais foi baseado no código dado por Heipcke [32] para o caso unidimensional.

Volte ao **Passo 2**.

**Passo 7:**  $Ef(A_p) \leq cutoff \Rightarrow$  o padrão de corte não é aceito. Atualize o valor de  $F_0$ .

$$F_0 = \begin{cases} dmax_3, & \text{se } F_0 > Cap \text{ e } F_0 > dmax_3; \\ F_0 - Cap, & \text{se } F_0 > Cap \text{ e } F_0 \leq dmax_3; \\ F_0 - 1, & \text{se } F_0 \leq Cap. \end{cases}$$

Volte ao **Passo 2**.

**Fim**

---

O Exemplo 3.4.1 ilustra a utilização do Algoritmo 2.

**Exemplo 3.4.1. Passo 1:** *Leitura dos dados.*

$$\text{Dados:} \begin{cases} L \times W = 2750 \times 1830 \text{ (mm}^2\text{)}, \text{ comprimento e largura do objeto;} \\ m = 3, \text{ número de itens;} \\ l = (430\text{mm}, 500\text{mm}, 1050\text{mm}), \text{ vetor comprimento dos itens;} \\ w = (60\text{mm}, 60\text{mm}, 60\text{mm}), \text{ vetor largura dos itens;} \\ b = (80, 160, 160), \text{ vetor demanda dos itens;} \\ \delta = 4 \text{ (mm)}, \text{ desgaste provocado pela serra;} \\ esp = 25 \text{ (mm)}, \text{ espessura do objeto.} \end{cases}$$

É importante lembrar que devemos acrescentar o desgaste  $\delta$  provocado pela serra à largura e ao comprimento dos itens e do objeto (ver (2.3) na Subseção 2.2.3) para a construção de padrões de corte viáveis para a indústria de móveis.

→ **Passo 1a:**

Construção dos padrões de corte homogêneos maximais (1.20):

$$A_1 = \begin{pmatrix} 168 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 140 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 56 \end{pmatrix}, \text{ com as respectivas eficiências:}$$

$Ef(A_1) = 86,1282\%$ ,  $Ef(A_2) = 83,4575\%$  e  $Ef(A_3) = 70,1043\%$ .

Como nenhum padrão de corte homogêneo maximal tem eficiência superior, ou igual, a

90%, então, nenhum deles é aceito.

→ **Passo 1b:** Determinar as três maiores demandas. Neste caso temos apenas 3 itens:

$$\max_1 = 160, \max_2 = 160, \max_3 = 80.$$

Como  $CpT = 60\text{mm}$  e  $\text{esp} = 25\text{mm}$ , então  $Cap = 2$ . Assim:

$$d\max_1 = 80, d\max_2 = 160, d\max_3 = 80 \text{ (ver (3.13), (3.14) e (3.15))}.$$

Atribua o valor de  $d\max_1$  para  $F_0 \Rightarrow F_0 = 80$ .

### Iteração 1

**Passo 2:** Calcular as demandas do problema auxiliar  $P_1$ , fazendo:

$$\tilde{b}_1 = \left\lfloor \frac{b_1}{F_0} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{80}{80} \right\rfloor = 1;$$

$$\tilde{b}_2 = \left\lfloor \frac{b_2}{F_0} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{160}{80} \right\rfloor = 2;$$

$$\tilde{b}_3 = \left\lfloor \frac{b_3}{F_0} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{160}{80} \right\rfloor = 2.$$

**Passo 3:** Problema Auxiliar  $P_1$ :

$$\begin{aligned} (P_1) \quad \quad \quad \text{Min } Z &= \sum_{j=1}^3 x_j \\ \text{s.a.:} \quad 160x_1 &= 1 \\ &140x_2 = 2 \\ &56x_3 = 2 \\ x &\in \mathbb{R}_+^3 \end{aligned}$$

A solução ótima da relaxação linear do Problema Auxiliar é  $x^* = \left( \frac{1}{160}, \frac{1}{70}, \frac{1}{28} \right)$  e a solução ótima dual associada é  $\pi^* = (0.00595238, 0.00714286, 0.0178571)$ .

**Passo 4:** Gerar um padrão de corte.

**Etapa 1:** Resolva um Problema da Mochila Restrito (1.49) para cada item:

$$\begin{aligned}
 \text{Max } V_i &= \sum_{j=1}^3 \pi_j^* y_j^i \\
 \text{s.a.:} \quad & 434 * y_1^i + 504 * y_2^i + 1054 * y_3^i \leq 2754 \\
 & y_1^i \leq 1 \\
 & y_2^i \leq 2 \\
 & y_3^i \leq 2 \\
 & y^i \in \mathbb{Z}_+^3,
 \end{aligned}$$

sendo  $y_j^i$  é o número de itens do tipo  $j$  na faixa de largura  $w_i$ .

Como neste exemplo todos os itens têm as mesmas larguras ( $w_i = 60\text{mm}$ ,  $i = 1, 2, 3$ ), então os três Problemas da Mochila que devem ser resolvidos são exatamente os mesmos e, conseqüentemente, geram a mesma faixa solução, que é a seguinte:

$$y^i = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ e o valor da função objetivo é } V_i = 0.0428571, \text{ para } i = 1, 2, 3.$$

**Etapa 2:** Agora devemos resolver mais um Problema da Mochila Restrito (1.50) para decidir quantas vezes cada uma das faixas geradas será utilizada no padrão de corte bidimensional. O problema se reduz a uma variável, já que as faixas são todas iguais, mas vamos modelá-lo de maneira completa:

$$\begin{aligned}
 \text{Max } V &= 0,0428571 * \sum_{j=1}^3 Y_j \\
 \text{s.a.:} \quad & 64 * Y_1 + 64 * Y_2 + 64 * Y_3 \leq 1834 \\
 & Y_1 + Y_2 + Y_3 \leq 2 \\
 & 2 * Y_1 + 2 * Y_2 + 2 * Y_3 \leq 2 \\
 & Y \in \mathbb{Z}_+^3,
 \end{aligned}$$

em que  $Y_i$  é o número de vezes que a faixa  $i$  aparece no padrão de corte bidimensional. Note que neste modelo há apenas três restrições, e não quatro como deveria. Isto acontece porque em todas as faixas obtidas dos Problemas da Mochila anteriores a primeira coordenada é nula, por isso, a restrição que seria relativa ao primeiro item é excluída do problema.

A solução ótima desse problema é  $Y^* = (1, 0, 0)$ , ou seja, a faixa 1 aparece apenas uma vez no padrão de corte, o que significa que o padrão de corte gerado é o seguinte:

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ com eficiência } Ef(A_4) = 3.09985\%.$$

**Passo 5:** Calcular o valor de  $co\_fator$  para o atual valor de  $F_0$ :

$$co\_fator = \begin{cases} 0, & \text{se } F_0 = 1; \\ 1, & \text{se } F_0 \geq Cap; \\ (Cap + 1 - F_0) * 0,02, & \text{se } 1 < F_0 < Cap. \end{cases}$$

Temos que  $F_0 = 80$ , ou seja,  $F_0 > Cap = 2$  e então  $co\_fator = 1$ . Logo,  $cutoff = 80\%$ , ou seja, para que o padrão de corte seja aceito é necessário que sua eficiência seja maior que  $80\%$ , o que não procede. Assim, seguimos direto para o **Passo 7**.

**Passo 7:** O padrão de corte não é aceito, então, atualizemos o valor de  $F_0$ .

$$F_0 = \begin{cases} dmax_3, & \text{se } F_0 > Cap \text{ e } F_0 > dmax_3; \\ F_0 - Cap, & \text{se } F_0 > Cap \text{ e } F_0 \leq dmax_3; \\ F_0 - 1, & \text{se } F_0 \leq Cap. \end{cases}$$

Como  $F_0 > Cap = 2$  e  $F_0 = 80$  não é estritamente maior que  $dmax_3 = 80$ , então o novo valor de  $F_0$  é:  $F_0 = F_0 - Cap = 80 - 2 = 78$ . Então, retornamos ao **Passo 2** e repetimos o procedimento.

...

#### Iteração 40

As demandas atuais ainda são as mesmas, pois nenhum padrão de corte foi aceito até então, e  $F_0 = 2$ .

$$\mathbf{Passo 2:} \quad \tilde{b}_1 = \left\lfloor \frac{80}{2} \right\rfloor = 40; \quad \tilde{b}_2 = \left\lfloor \frac{160}{2} \right\rfloor = 80; \quad \tilde{b}_3 = \left\lfloor \frac{160}{2} \right\rfloor = 80.$$

**Passo 3:** O Problema Auxiliar  $P_1$  é:

$$\begin{aligned} \text{Min } Z &= \sum_{j=1}^{13} x_j \\ \text{s.a.:} \quad & \sum_{j=1}^{13} a_{1j}x_j = 40 \\ & \sum_{j=1}^{13} a_{2j}x_j = 80 \\ & \sum_{j=1}^{13} a_{3j}x_j = 80 \\ & x_j \in \mathbb{Z}_+, \quad j = 1, \dots, 13. \end{aligned}$$

onde 13 é o número total de padrões de corte distintos gerados até então, e  $a_{ij}$  é o número de itens do tipo  $i$  no padrão de corte  $j$ , para cada  $i = 1, 2, 3$ .

A solução ótima da relaxação linear do Problema Auxiliar é  $x_1^* = 0.238095$ ,  $x_2^* = 0.571429$  e  $x_3^* = 1.42857$ . A solução dual associada é  $\pi_1^* = 0.00595238$ ,  $\pi_2^* = 0.00714286$  e  $\pi_3^* = 0.0178571$ .

**Passo 4:** Resolver os Problemas da Mochila Restritos para cada item:

$$\begin{aligned} \text{Max } V_i &= \sum_{j=1}^3 \pi_j^* y_j^i \\ \text{s.a.:} \quad & 434 * y_1^i + 504 * y_2^i + 1054 * y_3^i \leq 2754 \\ & y_1^i \leq 40 \\ & y_2^i \leq 80 \\ & y_3^i \leq 80 \\ & y^i \in \mathbb{Z}_+^3, \end{aligned}$$

e a faixa resultante é a seguinte:

$$y^i = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ e o valor da função objetivo é } V_i = 0,0428571.$$

O último Problema da Mochila Restrito a ser resolvido é:

$$\begin{aligned} \text{Max } V &= 0,0428571 \sum_{j=1}^3 Y_j \\ \text{s.a.:} \quad & 64 * Y_1 + 64 * Y_2 + 64 * Y_3 \leq 1834 \\ & Y_1 + Y_2 + Y_3 \leq 80 \\ & 2 * Y_1 + 2 * Y_2 + 2 * Y_3 \leq 80 \\ & Y \in \mathbb{Z}_+^3. \end{aligned}$$

A solução ótima desse problema é  $Y^* = (28, 0, 0)$ , ou seja, a faixa 1 aparece 28 vezes no padrão de corte. Então, o padrão de corte gerado é:

$$A_{14} = \begin{pmatrix} 0 \\ 28 \\ 56 \end{pmatrix} \text{ com eficiência } Ef(A_{14}) = 86,7958\%.$$

**Passo 5:** Calcular o valor de  $co\_fator$  para o atual valor de  $F_0$ :

$$co\_fator = \begin{cases} 0, & \text{se } F_0 = 1; \\ 1, & \text{se } F_0 \geq Cap; \\ (Cap + 1 - F_0) * 0,02, & \text{se } 1 < F_0 < Cap. \end{cases}$$

Temos que  $F_0 = 2$ , ou seja,  $F_0 = Cap = 2$  e então  $co\_fator = 1$ . Logo,  $cutoff = 80\%$  e  $Ef(A_{14}) = 86,7958\% > 80\%$ . Assim, seguimos para o **Passo 6**.

**Passo 6:** O padrão de corte é aceito, então  $x_{14} = F_0 = 2$ .

Demandas atualizadas:

$$r = \begin{pmatrix} 80 \\ 160 \\ 160 \end{pmatrix} - F_0 * A_{14} = \begin{pmatrix} 80 \\ 160 \\ 160 \end{pmatrix} - 2 * \begin{pmatrix} 0 \\ 28 \\ 56 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 \\ 104 \\ 48 \end{pmatrix}$$

TESTE DE PARADA:  $r_i = 0$ , para todo item  $i = 1, 2, 3$ ? Não.

Então, recalcular os valores para  $max_1$ ,  $max_2$ ,  $max_3$ ,  $dmax_1$ ,  $dmax_2$  e  $dmax_3$  do problema  $P_0$  atualizado. Assim,

$$max_1 = 104, \quad max_2 = 80, \quad max_3 = 48, \quad dmax_1 = 52, \quad dmax_2 = 80, \quad dmax_3 = 48.$$

Faça  $F_0 = dmax_2 = 80$  e retorne ao **Passo 2**.

Repetimos o procedimento até que a demanda seja totalmente atendida.

A solução obtida pelo Algoritmo 2 após 91 iterações é:

$$A_{14} = \begin{pmatrix} 0 \\ 28 \\ 56 \end{pmatrix} \text{ 2 vezes em 1 ciclo e } Ef(A_{14}) = 86,7958\%;$$

$$A_{24} = \begin{pmatrix} 0 \\ 24 \\ 48 \end{pmatrix} \text{ 1 vez em 1 ciclo e } Ef(A_{24}) = 74.3964\%;$$

$$A_{25} = \begin{pmatrix} 80 \\ 80 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ 1 vez em 1 ciclo e } Ef(A_{25}) = 88.7034\%;$$



Total de Objetos Cortados: 4;

Número de Padrões Utilizados: 3;

Número Total de Ciclos Necessários: 3.

### Algoritmo 3

As diferenças entre esta nova heurística (**Algoritmo 3**) e os outros dois algoritmos anteriores estão na restrição da geração dos padrões de corte com relação à demanda dos itens, no número de vezes que cada padrão de corte será utilizado e na função que relaxa a eficiência dos padrões de corte à medida que o valor de  $F_0$  diminui.

Nos dois métodos já apresentados, os Problemas da Mochila são restritos às demandas  $\tilde{b}_i$  do Problema Auxiliar  $P_1$ . O fator  $F_0$  impõe que os primeiros padrões de corte gerados possuam apenas itens de demandas altas, além de ser exatamente o número de vezes que o padrão de corte gerado será usado.

No **Algoritmo 3**, o fator de ajuste de demanda  $F_0$  desempenhará uma única função, mas não menos importante. O papel do fator  $F_0$  continua sendo o de obrigar que apenas os itens de maiores demandas apareçam nos primeiros padrões de corte gerados, mas o número de vezes que cada padrão de corte é usado agora é o maior número possível. Além disso, os Problemas da Mochila que são resolvidos para gerar os padrões de corte são restritos às demandas remanescentes  $r_i$  dos itens, ou seja, às demandas restantes do problema original  $P_0$  e não mais às demandas auxiliares  $\tilde{b}_i$ . Isto faz com que o tempo de solução seja menor e, os padrões de corte gerados logo no início do processo estejam mais próximos de serem aceitos, pois as demandas do problema auxiliar são muito pequenas e os padrões de corte não podem conter um número de itens maior que a demanda deste, no caso dos algoritmos anteriores.

Com relação à função de relaxação da eficiência dos padrões de corte (cálculo do "valor de corte"  $cutoff$  (3.16)) lembremos que, nos algoritmos anteriores, a decisão de aceitar ou não um padrão de corte gerado depende de dois parâmetros: a eficiência de referência ( $effref = 80$ ) e o valor do fator de correção  $co\_fator$  (3.18). Este último depende do valor de  $F_0$ . No caso do valor de  $F_0$  ser muito alto ( $F_0 \geq Cap$ ), o valor de correção  $co\_fator$  é unitário pois assim, o "valor de corte"  $cutoff$  é exatamente igual à eficiência de referência, isto é, o padrão de corte será aceito apenas se tiver uma eficiência maior do que 80%. Se o valor de  $F_0$  for exatamente 1, então  $co\_fator = 0$  obriga que o padrão gerado seja aceito (certamente este terá eficiência positiva), garantindo assim, que as demandas sejam todas atendidas ao final do processo. Já

no caso em que o valor de  $F_0$  é estritamente maior que 1 e estritamente menor que  $Cap$ , a eficiência do padrão de corte a ser aceito passa a ser uma função do valor de  $F_0$  (3.18). Uma vez que  $Cap$  é fixo, a função  $co\_fator$  depende, exclusivamente, do valor de  $F_0$  e, mais ainda, é uma função decrescente de  $F_0$ . A função  $cutoff$  (3.16) também é uma função decrescente de  $F_0$ , visto que  $ef_{ref}$  é constante.

Antes de modificá-la e, para justificar a mudança, analisemos os gráficos da função (3.16) com relação a  $F_0$  para cada valor fixo possível de  $Cap$ , 3, 4, 5, 6 e 20mm (Subseção 2.2.2) e com  $2 \leq F_0 \leq 19$ , pois este é o maior intervalo para  $F_0$  onde a função  $co\_fator$  será avaliada. Para  $Cap = 2$  a análise não faz sentido, pois a função nem será calculada neste caso, já que  $F_0 = Cap - 1 = 1$  e o valor de  $co\_fator$  vai direto para 0 (ver (3.19)).

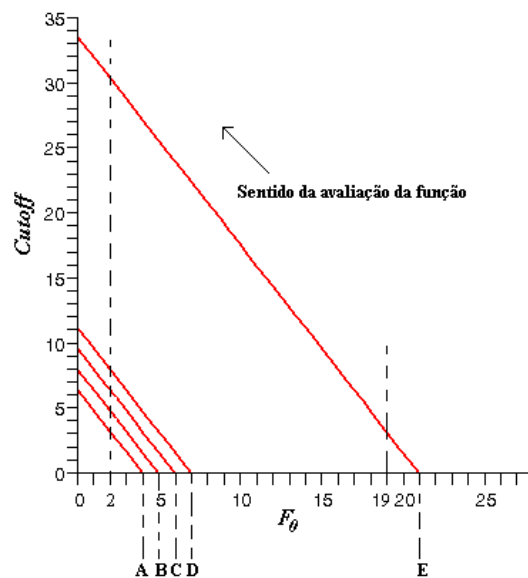


Figura 3.1: Gráficos da função  $cutoff$  para os possíveis valores de  $Cap$

A Figura 3.1 mostra simultaneamente as funções  $cutoff$  de  $F_0$ , para  $Cap$  fixo em 3, 4, 5, 6 e 20mm, representadas por A, B, C, D e E, respectivamente. Os gráficos da Figura 3.1 mostram que a função  $cutoff$  é decrescente com relação a  $F_0$  e é crescente com relação a  $Cap$ .

Porém, no processo de solução dos **Algoritmos 1 e 2**, os primeiros valores de  $F_0$  são altos e, cada vez que a demanda é atualizada, o valor de  $F_0$  diminui (flecha da Figura 3.1 do sentido da avaliação da função durante o processo), ou seja, as eficiências exigidas começam muito relaxadas e melhoram quando  $F_0$  diminui, o que não é satisfatório. Isto implica que, quando  $F_0$  atinge o maior valor para o qual a função  $co\_fator$  é calculada (ou seja,  $F_0 = Cap - 1$ , sendo que  $F_0 \in \{2, 3, \dots, Cap - 1\}$ ), a função  $co\_fator$  atinge seu menor valor possível, pois a função  $co\_fator$  é decrescente de  $F_0$ . Portanto, o menor valor atingido pela função  $co\_fator$

é  $co\_fator = 0,04$ , independente de  $Cap$ , quando  $F_0 = Cap - 1$ , pois

$$co\_fator = (Cap + 1 - F_0) * 0,02 = (Cap + 1 - (Cap - 1)) * 0,02 = 0,04. \quad (3.21)$$

Calculando o valor da função  $cutoff$ , temos:

$$cutoff = effref * co\_fator = 0,04 * 80 = 3,2, \quad (3.22)$$

o que significa que para o padrão de corte ser aceito basta que este tenha uma eficiência superior a 3,2%, o que é muito ruim. Os valores de  $cutoff$  se tornam melhores com o decréscimo de  $F_0$ , mas ainda assim os valores não são muito bons. Na Tabela 3.1 apresentamos os intervalos de eficiências exigidas aos padrões de corte aceitos quando a função  $co\_fator$ , dada em (3.18), é usada para a definição do valor de  $cutoff$ . Fizemos os cálculos dos intervalos de  $cutoff$  para  $2 \leq F_0 \leq 19$ , para todos os valores de  $Cap$ .

Capacidade ( $Cap$ )	Intervalos de $cutoff$	
	$F_0 = Cap - 1$	$F_0=2$
3	3,2%	3,2%
4	3,2%	4,8%
5	3,2%	6,4%
6	3,2%	8,0%
20	3,2%	30,4%

Tabela 3.1: Tabela dos intervalos da função  $cutoff$  para cada  $Cap$

A maior eficiência exigida com a utilização da função  $co\_fator$  definida em (3.18) é de 30,4%, quando  $Cap = 20$ , que é muito baixa. Por isso, é necessário encontrar uma outra função  $co\_fator$  para a qual os valores das eficiências exigidas sejam melhores do que os obtidos com a atual função.

Já observamos da Figura 3.1 que o valor de  $cutoff$  é diretamente proporcional ao valor de  $Cap$ , ou seja, crescente com relação a  $Cap$ . Sendo assim, a função  $co\_fator$  também é uma função crescente de  $Cap$ . Mas, em cada problema resolvido pelo método, o valor de  $Cap$  é fixo e o valor de  $F_0$  varia em função das demandas. Então uma idéia para melhorar esses valores de eficiências é converter a função  $co\_fator$  numa função crescente de  $F_0$  e transformar a constante multiplicadora 0,02 numa função ( $fun$ ) de  $Cap$ . Isto é, em cada problema a constante multiplicadora da função  $co\_fator$  será dependente de  $Cap$ .

Para fazer a função crescente com relação a  $F_0$ , basta trocar seu coeficiente de  $-1$  por  $1$  e, para substituir a constante  $0,02$  por uma função de  $Cap$ , usamos interpolação polinomial (de  $Cap$  e  $fun$ ) com 3 nós [9], que implicará numa função quadrática, dada por:

$$fun = 0,0008973214284 * Cap^2 - 0,02747321428 * Cap + 0,2155357143. \quad (3.23)$$

Desta forma, a nova função de relaxação das eficiências dos padrões de corte é:

$$co\_fator' = (Cap + 1 + F_0) * fun \quad (3.24)$$

e a função  $cutoff' = effref * co\_fator'$ .

Com a nova função de relaxação das eficiências dos padrões de corte os limitantes melhoram. A Figura 3.2 mostra os gráficos de  $cutoff'$  com relação a  $F_0$ , construídos para os valores possíveis de  $Cap$ , como na Figura 3.1.

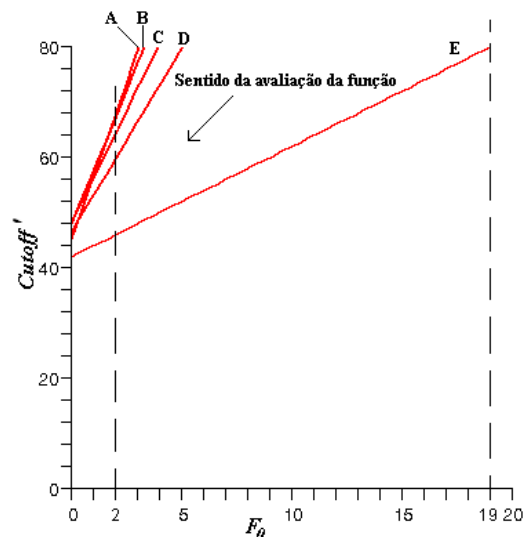


Figura 3.2: Gráficos da função  $cutoff'$  para os possíveis valores de  $Cap$

A Figura 3.2 confirma que a nova função  $cutoff'$  é crescente com relação a  $F_0$ , para todos os valores de  $Cap$ . As funções  $cutoff'$  de  $F_0$  representadas na Figura 3.2 por A, B, C, D e E, são as funções para  $Cap$  igual a 3, 4, 5, 6 e 20, respectivamente. Observe na Figura 3.2 que, para qualquer valor de  $Cap$ , a menor eficiência exigida é maior de 40%, que é superior à maior eficiência alcançada com a função  $cutoff$  obtida com (3.16).

O fato dos gráficos da Figura 3.2 serem bastante inclinados, nos leva a crer que, no desenvolvimento do processo de solução do problema, os valores de  $cutoff'$  decrescem gradativamente com a redução dos valores de  $F_0$  (que são sempre inteiros), mantendo eficiências próximas da desejada, 80%, pelo menos no início do método.

Outra observação importante com relação às inclinações dos gráficos na Figura 3.2 é que, os gráficos são mais inclinados para os menores valores de  $Cap$ . Esta conclusão nos dá mais algumas informações sobre como as eficiências "aceitáveis" se comportarão durante o andamento do método. A taxa de crescimento (ou decrescimento) de uma determinada função é dada pela inclinação de seu gráfico, ou seja, é dada pela primeira derivada da função com relação à sua variável [30] (que neste caso é  $F_0$ ). Derivando as cinco funções  $cutoff'$  (para cada  $Cap$  fixo) com relação a  $F_0$ , obtemos as taxas de variação das eficiências em cada passo do algoritmo. A Tabela 3.2 mostra os valores aproximados de quanto as eficiências diminuem em cada iteração, dependendo dos valores de  $Cap$ .

Capacidade ( $Cap$ )	Variação da eficiência
3	11,3%
4	9,6%
5	8,0%
6	6,6%
20	2,0%

Tabela 3.2: Taxa de variação da eficiência dos padrões de corte aceitáveis, para cada  $Cap$

Como o esperado pelo comportamento dos gráficos na Figura 3.2, para os menores valores de  $Cap$  as taxas de variação são maiores, o que é ilustrado pela maior inclinação no gráfico (Figura 3.2). Este evento pode ser interpretado da seguinte maneira: Quanto maior  $Cap$ , maior o número de vezes que esperamos que um padrão de corte deva ser empregado (queremos que sejam usados um número múltiplo de  $Cap$ ). Sendo assim, a quantidade de vezes que cada padrão é utilizado é grande e o ideal é que tenham uma eficiência alta, justificando as pequenas variações de uma iteração a outra. Já no caso de  $Cap$  ser, por exemplo 3, a função será calculada apenas quando  $F_0 = 2$ , então a condição de eficiência alta pode ser mais relaxada do que no caso anterior.

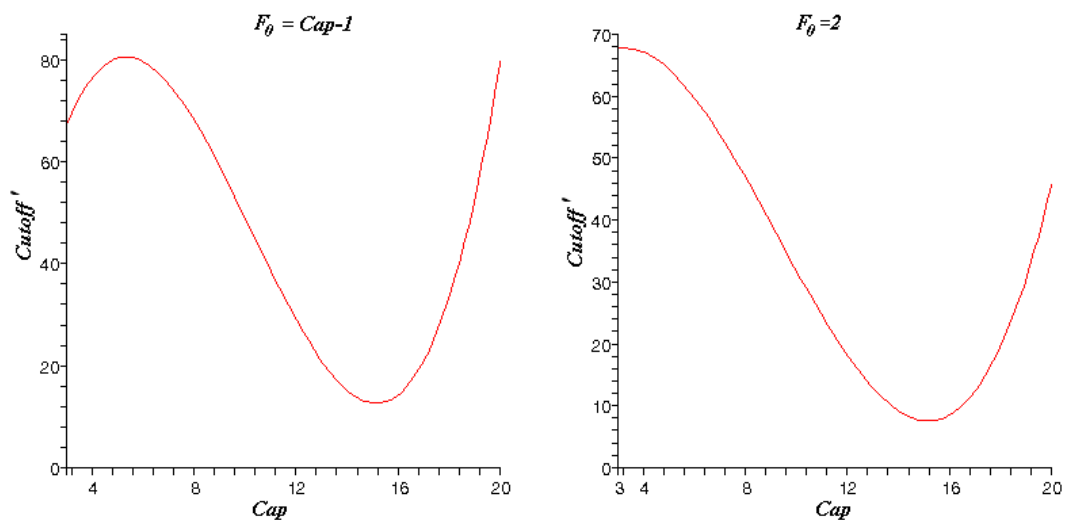
Da mesma forma como para a função  $cutoff$ , calculamos os intervalos dentro dos quais os valores de  $cutoff'$  variam, para cada valor fixo de  $Cap$ . Estes valores são apresentados na Tabela 3.3.

Como foi observado da Figura 3.2 e constatado pela Tabela 3.3, o crescimento de  $Cap$  não implica, necessariamente, no crescimento de  $cutoff'$ . Esta mudança se deve ao fato de  $cutoff'$  ser uma função cúbica de  $Cap$  e não linear como a função  $cutoff$ . A Figura 3.3

Capacidade ( $Cap$ )	Intervalos de $cutoff'$	
	$F_0 = Cap - 1$	$F_0 = 2$
3	67,68%	67,68%
4	76,80%	67,20%
5	80,00%	64,00%
6	79,68%	59,76%
20	80,00%	46,00%

Tabela 3.3: Tabela dos intervalos da função  $cutoff'$  para cada  $Cap$ 

seguinte mostra o comportamento da função  $cutoff'$  com relação a  $Cap$  para  $F_0 = Cap - 1$  e  $F_0 = 2$ . A Figura 3.3 mostra que a função  $cutoff'$  não é decrescente com relação a  $Cap$  quando  $F_0 = 2$  e  $F_0 = Cap - 1$ .

Figura 3.3: Comportamento da função  $cutoff'$  com relação a  $Cap$  para  $F_0 = Cap - 1$  e  $F_0 = 2$ 

Voltando ao **Algoritmo 3**, a principal diferença entre este e os **Algoritmos 1** e **2**, está na função usada para a relaxação das eficiências dos padrões de corte,  $cutoff'$ , e o número de vezes que cada padrão de corte é aceito. No **Algoritmo 3**, os padrões de corte aceitos são usados o maior número de vezes possível. A seguir, descrevemos o trecho do pseudo-código do **Algoritmo 3** onde este difere do **Algoritmo 2**.

### Trecho do Pseudo-código do Algoritmo 3

---

→ **Passo 1**: Leitura dos dados de entrada:  $L, W, m, l_i, w_i, b_i, esp, Serra$  e cálculo de  $fun$ . Determinar  $max_1, max_2$  e  $max_3$  e calcular  $dmax_1, dmax_2$  e  $dmax_3$ .

→ **Passo 4:** Gere um padrão de corte  $A_p = (a_{1p}, \dots, a_{mp})$  para o problema  $P_1$ , restrito às demandas  $r_i$ ,  $i = 1, \dots, m$  originais remanescentes. Calcule a eficiência  $Ef(A_p)$  do padrão de corte obtido  $A_p$ .

→ **Passo 5:** Calcule os valores do fator de correção:

$$co\_fator' = \begin{cases} 0, & \text{se } F_0 = 1; \\ 1, & \text{se } F_0 \geq Cap; \\ (Cap + 1 + F_0) * fun, & \text{se } 1 < F_0 < Cap. \end{cases}$$

e do valor de corte  $cutoff' = effref * co\_fator'$ , com  $effref = 80$  e  $fun = 0,0008973214284 * Cap^2 - 0,02747321428 * Cap + 0,2155357143$ .

- Se  $Ef(A_p) > cutoff'$ , siga para o **Passo 6**.
- Se  $Ef(A_p) \leq cutoff'$ , vá para o **Passo 7**.

Considere novamente o exemplo 3.4.1. A solução obtida pelo **Algoritmo 3**, após 27 iterações, é a seguinte:

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 28 \\ 56 \end{pmatrix} \text{ 2 vezes em 1 ciclo e } Ef(A_4) = 86,7958\%;$$

$$A_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 24 \\ 48 \end{pmatrix} \text{ 1 vez em 1 ciclo e } Ef(A_6) = 74,3964\%;$$

$$A_7 = \begin{pmatrix} 80 \\ 80 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ 1 vez em 1 ciclo e } Ef(A_7) = 88,7034\%;$$

Total de Objetos Cortados: 4;

Número de Padrões Utilizados: 3;

Número Total de Ciclos Necessários: 3.

Observe que as soluções geradas pelos dois algoritmos são exatamente as mesmas, no que diz respeito ao número de ciclos da serra, de objetos cortados, eficiências e até mesmo com relação aos padrões de corte. Mas o número de iterações do **Algoritmo 3** é menor que do **Algoritmo 2** e, além disso, é possível observar que os "bons" padrões de corte do **Algoritmo 3** foram gerados muito antes do que os mesmos no **Algoritmo 2** (basta ver os índices dos padrões de corte). A semelhança das soluções encontradas se deve ao pequeno número de itens no problema. Esta vantagem do **Algoritmo 3** sobre o outro é que implica num menor tempo de processamento e menor esforço computacional, além de favorecer a geração de "bons" padrões de corte no início do processo.

No próximo capítulo apresentamos os resultados do estudo computacional realizado com os **Algoritmos 2 e 3** e com o Modelo de multiplicidade (Seção 3.3) na resolução do Problema de Corte de Estoque Bidimensional.



# Capítulo 4

## Estudo Computacional

Neste capítulo, apresentamos os resultados obtidos com os testes computacionais realizados com o Modelo de Multiplicidade (Seção 3.3) e um outro estudo entre os Algoritmos 2 e 3 (Subseção 3.4.3). Exibimos um estudo comparativo entre o Modelo de Multiplicidade, a Heurística TC [59] e os procedimentos adotados pela indústria visitada, e entre o Algoritmo 3, o Modelo de Multiplicidade e o método da indústria. Os testes foram realizados em um computador Pentium IV (3.00GHz) com 1Gb de memória RAM. O *software* utilizado foi o Xpress<sup>MP</sup> (Dash Optimization, 2004), sob a plataforma Windows XP - versão 2002, com a linguagem de programação Mosel, que está agregada ao *software*. O "*solver*" é o Xpress-Optimizer, que tem como método "*default*" para resolver problemas inteiros, o Método *Branch-and-Cut*. O Mosel possibilita a interação entre o modelo e o "*solver*", o que torna possível a implementação da técnica de geração de colunas. Os exemplares utilizados neste estudo foram gerados a partir de dados gentilmente cedidos pela Fábrica de Móveis Luapa.

### 4.1 Descrição dos Exemplares

A Fábrica de Móveis Luapa (Seção 2.2) produz móveis de madeira para dormitórios que incluem armários de 5 portas, criados e cômodas. Cada um destes produtos corresponde a um conjunto de exemplares, definidos pelas espessuras dos objetos requisitados para compor o produto em questão. Um Problema de Corte de Estoque deve ser resolvido para cada espessura de objeto. A Tabela 4.1 a seguir, traz os nomes de referência que usamos para identificar os produtos relacionados a cada conjunto de exemplares, as espessuras dos objetos requisitados, o tipo de lote (simples ou duplo) e o número de exemplares de cada conjunto.

Nomes	Produto e Tipo de Lote	Espessuras (em <i>mm</i> )	Nº de Exemp.
A5P	Armário de 5 Portas - Lote Simples	3, 9, 12, 15, 20 e 25	6
Cmd	Cômoda - Lote Simples	3, 9, 12 e 15	4
Crđ	Criado - Lote Simples	3, 12 e 15	3
2A5P	Armário de 5 P. - Lote Duplo Homog.	3, 9, 12, 15, 20 e 25	6
2Cmd	Cômoda - Lote Duplo Homog.	3, 9, 12 e 15	4
2Crđ	Criado - Lote Duplo Homog.	3, 12 e 15	3
A5P_Cmd	Armário de 5 Portas e Cômoda - Lote Duplo Heterog.	3, 9, 12, 15, 20 e 25	6
A5P_Crđ	Armário de 5 Portas e Criado - Lote Duplo Heterog.	3, 9, 12, 15, 20 e 25	6
Cmd_Crđ	Côm. e Criado - Lote Duplo Heterog.	3, 9, 12 e 15	4

Tabela 4.1: Conjuntos de Exemplos, Tipos de Lotes, Espessuras Demandadas

Observe na Tabela 4.1 que o número total de exemplos é 42 (incluindo lotes simples, lotes duplos homogêneos e lotes duplos heterogêneos). A notação utilizada para os exemplos, a partir dos nomes de referências listados na Tabela 4.1, é da seguinte forma: "Conjunto" – "Espessura". Exemplos:

**Lote Simples** - O exemplar A5P-15 é formado pelo conjunto de itens que devem ser obtidos do corte de objetos de 15 $mm$  de espessura, e que serão usados para a produção de um lote simples do armário de 5 portas;

**Lote Duplo Homogêneo** - O exemplar 2A5P-12 é o conjunto de itens a serem cortados de objetos de 12 $mm$  de espessura, que serão usados para a produção do lote duplo homogêneo do armário de 5 portas;

**Lote Duplo Heterogêneo** - O exemplar A5P\_Cmd-09 é o conjunto dos itens que devem ser produzidos pelo corte dos objetos com 09 $mm$  de espessura, que serão usados para a produção de um lote simples do armário de 5 portas junto com um lote simples da cômoda.

Nas tabelas 4.2, 4.3 e 4.4 são apresentados os componentes dos produtos mencionados (armário de 5 portas, cômoda e criado, respectivamente), cujos itens encontram-se agrupados de acordo com as espessuras dos objetos. Cada bloco, nas referidas tabelas, representa um

exemplar, onde aparecem as seguintes informações: índices dos itens ( $i$ ), demanda dos itens ( $b_i$ ), comprimento ( $l_i$ ) e largura ( $w_i$ ) dos itens. As tabelas com os dados completos dos produtos estão no Apêndice B. Os objetos a serem cortados têm dimensões  $L = 2750mm$  e  $W = 1830mm$ . As demandas são relativas a um lote simples de cada produto cujos tamanhos são exibidos na Tabela 2.2.

Item $i$	Comprimento $l_i$	Largura $w_i$	Demanda $b_i$
<b>A5P-03</b>			
1	2500	565	240
2	647	453	160
3	710	454	80
4	454	454	80
5	1080	454	200
6	530	454	200
7	1050	500	40
8	483	215	80
<b>A5P-09</b>			
1	510	450	40
<b>A5P-12</b>			
1	454	180	320
2	635	180	160
<b>A5P-15</b>			
1	1049	452	200
2	499	452	200
3	452	429	80
4	1050	535	80
5	535	500	80
6	535	430	80
7	700	212	160
<b>A5P-20</b>			
1	2500	60	480
2	445	60	480
3	445	40	1040
4	490	60	40
5	500	60	120
6	1050	60	200
7	430	60	120
8	440	60	160
9	1060	60	80
<b>A5P-25</b>			
1	430	60	80
2	500	60	160
3	1050	60	160

Tabela 4.2: Componentes do Armário de 5 Portas

Item $i$	Comprimento $l_i$	Largura $w_i$	Demanda $b_i$
<b>Cmd-03</b>			
1	710	535	320
2	1062	530	320
3	647	453	960
<b>Cmd-09</b>			
1	630	50	480
2	433	50	320
3	295	50	480
<b>Cmd-12</b>			
1	440	65	320
2	635	50	160
3	454	180	960
4	635	180	480
5	454	135	640
6	635	135	320
<b>Cmd-15</b>			
1	970	570	320
2	700	75	160
3	700	212	480
4	700	163	320

Tabela 4.3: Componentes da Cômada

Os conjuntos de exemplares dos lotes duplos homogêneos são determinados simplesmente pela união dos conjuntos de dois lotes simples de um mesmo produto, de acordo com as respectivas espessuras, ou seja, basta dobrar a demanda dos itens de cada exemplar do lote simples.

Item $i$	Comprimento $l_i$	Largura $w_i$	Demanda $b_i$
<b>Crd-03</b>			
1	388	377	900
2	410	383	600
3	445	213	1200
<b>Crd-12</b>			
1	390	110	1800
2	370	110	900
<b>Crd-15</b>			
1	600	440	600
2	450	132	900

Tabela 4.4: Componentes do Criado

No lote duplo heterogêneo, os itens de diferentes produtos são mesclados. Por exemplo, o exemplar A5P\_Crd-15 é formado por todos os itens do exemplar A5P-15 e por todos os itens do exemplar Crd-15. Como, neste caso, não há itens em comum (tabelas B.1 e B.2

no Apêndice B), o número de itens deste exemplar é definido pela soma do número de itens de cada exemplar. Se houver itens em comum, como acontece com A5P\_Cmd-03 (fundo de gaveta - item 2 do A5P-03 na Tabela 4.2 e item 3 do Cmd-03 na Tabela 4.3), as demandas dos itens são somadas. Assim sendo, a Tabela 4.5, traz apenas os nomes dos conjuntos de exemplares de lotes duplos heterogêneos e o número de itens distintos em cada um deles.

Espessura do objeto - <i>esp</i>	Número de itens - <i>m</i>		
	A5P_Cmd	A5P_Crd	Cmd_Crd
03	10	11	6
09	4	1*	3*
12	6	4	8
15	10	9	6
20	9*	9*	-
25	3*	3*	-

Tabela 4.5: Número de itens nos exemplares de lotes duplos heterogêneos

(\*) Note que o número de itens no exemplar Cmd\_Crd-09 (marcado com asterisco na Tabela 4.5) é o mesmo para o exemplar Cmd-09. Isto porque os objetos de espessura  $9mm$  não são requisitados para a produção do criado, apenas da cômoda. O mesmo evento ocorre nos outros exemplares marcados com asterisco na Tabela 4.5 - a espessura do objeto é necessária para a produção de apenas um dos produtos do lote duplo heterogêneo. Assim, não levaremos em consideração os resultados destes exemplares na análise dos resultados dos lotes duplos heterogêneos.

## 4.2 Resultados e Análise do Estudo Computacional

Inicialmente, apresentamos os resultados obtidos da aplicação do Modelo de Multiplicidade comparados com os resultados obtidos com a Heurística TC [59] e com o método industrial. Mais adiante, os resultados das heurísticas propostas são comparados entre si (com orientação fixa dos itens e depois com rotação permitida) e, finalmente, comparamos os resultados obtidos com o Modelo de Multiplicidade, com as heurísticas propostas e a indústria. Devemos chamar a atenção para o fato de que os padrões de corte usados na resolução do Modelo de Multiplicidade são os mesmo padrões de corte construídos pela Heurística TC (gerados *a priori*) e usados para compor a matriz de restrições das demandas dos itens de

forma explícita no Modelo de Multiplicidade. Além disso, tanto o Modelo de Multiplicidade quanto a Heurística TC e a indústria, admitem que itens sejam produzidos em excesso.

### Testes com o Modelo de Multiplicidade

Nas tabelas de 4.6 a 4.8, são apresentados os resultados obtidos pela Heurística TC, pela indústria e pelo Modelo de Multiplicidade na resolução do Problema de Corte de Estoque Bidimensional, considerando a rotação dos itens. Exibimos o número de objetos cortados (**Obj**), o número de padrões de corte utilizados (**N<sub>P</sub>**), o percentual de perda média por sobra de material (**P<sub>S</sub>**), calculada por (2.4) e o número de ciclos da serra (**C<sub>s</sub>**) necessários para atender às demandas dos itens em cada método analisado. Os resultados da Heurística TC e da indústria que aparecem neste capítulo foram extraídos de [22]<sup>1</sup>. A Tabela 4.6 mostra os resultados considerando um lote simples de cada produto, na Tabela 4.7 são exibidos os resultados para a produção do lote duplo homogêneo e a Tabela 4.8 expõe os resultados para a produção do lote duplo heterogêneo. Nessas três tabelas, os números em negrito indicam a estratégia com melhor resultado para o exemplar em questão com relação aos números de ciclos da serra.

Exemplar	Heurística TC				Indústria				Modelo de Multiplicidade			
	N <sub>P</sub>	Obj	P <sub>S</sub>	C <sub>s</sub>	N <sub>P</sub>	Obj	P <sub>S</sub>	C <sub>s</sub>	N <sub>P</sub>	Obj	P <sub>S</sub>	C <sub>s</sub>
A5P-03	9	133	6,0%	14	7	134	6,6%	12	5	160	6,9%	<b>8</b>
A5P-09	1	2	2,0%	1	1	2	1,8%	1	1	6	2,0%	1
A5P-12	2	10	2,1%	3	2	10,5	3,3%	3	2	10	2,7%	<b>2</b>
A5P-15	9	57	4,0%	17	6	57	2,6%	17	8	76	3,2%	<b>15</b>
A5P-20	10	30	3,1%	15	8	32	3,0%	14	7	33	3,9%	<b>11</b>
A5P-25	2	4	2,0%	3	3	4,5	3,2%	4	2	6	1,9%	<b>3</b>
Cmd-03	2	124	5,8%	7	2	124	5,8%	7	6	140	5,8%	7
Cmd-09	3	7	1,5%	3	1	6,5	3,3%	<b>2</b>	1	12	5,6%	<b>2</b>
Cmd-12	8	45	0,7%	13	6	46	2,8%	13	7	45	1,2%	<b>9</b>
Cmd-15	3	64	4,3%	18	3	63,5	4,4%	18	6	68	5,2%	<b>16</b>
Crđ-03	3	73	5,5%	5	2	74	5,0%	5	4	80	6,3%	<b>4</b>
Crđ-12	3	24	1,4%	6	2	24	1,3%	6	3	25	1,7%	<b>5</b>
Crđ-15	2	45	3,7%	12	2	45,5	4,9%	12	2	48	3,7%	12

Tabela 4.6: Heurística TC × Indústria × Modelo de Multiplicidade - Lote Simples

<sup>1</sup>Em [22], a perda por sobra de material foi calculada pela fórmula (2.4), por isso, as perdas do Modelo de Multiplicidade também foram.

Os resultados para os exemplares do lote simples (Tabela 4.6) mostram que os menores números de ciclos da serra, são obtidos com o Modelo de Multiplicidade, como era esperado, devido à restrição de multiplicidade (3.9). Neste quesito, o Modelo de Multiplicidade melhora em até 6 unidades a resposta da Heurística TC (A5P-03) e em até 4 unidades a resposta da indústria (no mesmo exemplar). Note que para alguns exemplares, como o Cmd-15, a redução do número de ciclos da serra não significa redução do número de padrões de corte. Com relação ao número de objetos cortados, também como o esperado com a restrição de multiplicidade, o Modelo de Multiplicidade obteve o pior desempenho, utilizando, em média, 7 objetos a mais do que os outros dois métodos. No que diz respeito ao número de padrões de corte empregados, as três estratégias tiveram desempenhos semelhantes, mas a vantagem foi da indústria, que chega a diminuir em 3 unidades a resposta dada pelo Modelo de Multiplicidade (Cmd-15) que, por sua vez, melhora em, no máximo, 2 unidades a resposta da indústria (A5P-03) e em até 4 unidades a resposta da Heurística TC (no mesmo exemplar). As perdas médias obtidas pelos três métodos são próximas, mas a Heurística TC apresenta, na maioria dos exemplares, os menores índices de perda, seguida pela indústria. As perdas geradas pelo Modelo de Multiplicidade, em sua grande maioria, atendem à exigência da indústria de aceitar perdas de até 6% do material cortado. Os exemplares para os quais o Modelo de Multiplicidade não gerou nenhum excedente de produção somam apenas 2 dentre 13 exemplares (Cmd-03 e Crd-12). O fato do Modelo de Multiplicidade gerar muitos excedentes de produção já era previsto devido à restrição de multiplicidade (3.9). Mas, um fato interessante observado nestes dois exemplares é o seguinte: resolvendo o exemplar Cmd-03 admitindo a produção de itens em excesso, o número de padrões de corte necessários cai para 2, mantendo em 7 o número de ciclos da serra, ou seja, para conseguir atender às demandas dos itens exatamente, mais padrões de corte são requisitados. No caso do exemplar Crd-12, o que ocorre é o contrário - o número de padrões de corte aumenta para 4, mantendo em 5 o número de ciclos da serra.

O comportamento dos métodos na produção do lote duplo homogêneo (Tabela 4.7) foi semelhante na produção do lote simples: a maior vantagem do Modelo de Multiplicidade ocorre apenas no que diz respeito ao número de ciclos da serra, melhorando em até 6 unidades os ciclos da Heurística TC (2A5P-20) e, em 5 unidades, os ciclos da indústria (mesmo exemplar). O Modelo de Multiplicidade piorou as perdas da indústria em até 2,3% (2Crd-03) e da Heurística TC em até 1,8% (no mesmo exemplar). Os índices de perdas médias gerados pelo Modelo de Multiplicidade continuam aceitáveis pela indústria, ou seja, abaixo dos 6% na maioria dos

Exemplar	Heurística TC				Indústria				Modelo de Multiplicidade			
	N <sub>P</sub>	Obj	P <sub>S</sub>	C <sub>s</sub>	N <sub>P</sub>	Obj	P <sub>S</sub>	C <sub>s</sub>	N <sub>P</sub>	Obj	P <sub>S</sub>	C <sub>s</sub>
2A5P-03	13	255	6,2%	22	7	268	6,6%	16	6	280	7,3%	<b>14</b>
2A5P-09	1	4	2,0%	1	1	4	1,8%	1	1	6	2,0%	1
2A5P-12	2	20	2,1%	5	2	21	3,3%	5	1	20	2,2%	<b>4</b>
2A5P-15	7	113	4,1%	31	6	114	2,6%	31	12	116	3,3%	<b>29</b>
2A5P-20	14	59	3,0%	26	8	64	2,7%	25	9	60	3,9%	<b>20</b>
2A5P-25	3	8	2,6%	5	3	9	3,2%	5	4	8	3,1%	<b>4</b>
2Cmd-03	2	248	5,8%	<b>13</b>	2	248	5,8%	14	7	260	5,8%	<b>13</b>
2Cmd-09	5	13	1,6%	5	1	13	3,3%	<b>3</b>	2	18	2,1%	<b>3</b>
2Cmd-12	8	89	0,7%	21	6	103	1,3%	21	10	90	1,3%	<b>18</b>
2Cmd-15	3	127	4,3%	<b>33</b>	3	127	4,5%	<b>33</b>	2	128	4,3%	<b>32</b>
2Crd-03	3	146	5,5%	9	2	148	5,0%	<b>8</b>	5	160	7,3%	<b>8</b>
2Crd-12	3	48	1,3%	11	2	48	1,3%	11	3	50	2,0%	<b>10</b>
2Crd-15	2	89	3,7%	23	2	91	4,9%	23	2	92	3,7%	23

Tabela 4.7: Heurística TC × Indústria × Modelo de Multiplicidade - Lote Duplo Homogêneo

exemplares. No que diz respeito ao número de objetos cortados, o Modelo de Multiplicidade foi melhor que a indústria em 4 exemplares e, em um deles, melhorou sua resposta em 13 unidades (2Cmd-12), mas a vantagem continua sendo da Heurística TC. Com relação ao número de padrões de corte distintos, a indústria continua melhor na maior parte dos exemplares e o Modelo de Multiplicidade melhora sua resposta em apenas 1 objeto e a da Heurística TC em até 7 unidades (2A5P-03). Novamente, em apenas 2 exemplares (2Cmd-03 e 2Crd-12) dos 13, o Modelo de Multiplicidade atendeu exatamente às demandas dos itens. Repare que, estes dois exemplares, com metade das demandas, são os mesmos para os quais o Modelo de Multiplicidade não gerou excedentes no lote simples. Os padrões de corte utilizados nos exemplares Cmd-03 e Crd-12 são diferentes dos utilizados nos exemplares 2Cmd-03 e 2Crd-12. Além disso, se itens em excesso forem admitidos, o número de padrões de corte necessários para resolver o exemplar 2Cmd-03 cai para 2, com o mesmo número de ciclos da serra. No caso do exemplar 2Crd-12, o números de padrões de corte aumenta para 4 e o número de ciclos da serra se mantém o mesmo.

Nos lotes duplos heterogêneos (Tabela 4.8), os métodos mantêm os mesmos comportamentos na maioria dos critérios de comparação como no lote duplo homogêneo, mas as diferenças entre um método e outro aumentaram, deixando mais evidentes as vantagens de



Exemplar	Heurística TC				Indústria				Modelo de Multiplicidade			
	N <sub>P</sub>	Obj	P <sub>S</sub>	C <sub>s</sub>	N <sub>P</sub>	Obj	P <sub>S</sub>	C <sub>s</sub>	N <sub>P</sub>	Obj	P <sub>S</sub>	C <sub>s</sub>
A5P_Cmd-03	12	257	5,0%	21	9	258	6,2%	23	8	280	6,4%	<b>14</b>
A5P_Cmd-09	4	9	1,5%	4	2	8,5	2,9%	3	2	12	9,8%	<b>2</b>
A5P_Cmd-12	9	54	0,9%	16	8	56,5	1,8%	16	6	55	2,0%	<b>11</b>
A5P_Cmd-15	11	124	5,8%	38	9	121	3,6%	34	10	128	8,0%	<b>32</b>
A5P_Crd-03	17	199	4,5%	22	9	208	6,1%	16	8	220	7,6%	<b>11</b>
A5P_Crd-12	7	34	1,5%	10	4	34,5	1,9%	9	7	35	2,0%	<b>7</b>
A5P_Crd-15	12	99	3,0%	31	8	103	3,6%	29	13	100	4,5%	<b>25</b>
Cmd_Crd-03	6	196	3,5%	13	4	198	5,5%	12	5	200	5,4%	<b>10</b>
Cmd_Crd-12	10	69	0,7%	20	8	70	1,4%	19	12	70	1,5%	<b>14</b>
Cmd_Crd-15	5	109	2,9%	29	5	108	4,6%	30	6	112	4,8%	<b>28</b>

Tabela 4.8: Heurística TC × Indústria × Modelo de Multiplicidade - Lote Duplo Heterogêneo

um sobre o outro. Por exemplo, nas perdas médias, a Heurística TC continua gerando os menores índices de perda, e a melhora com relação ao Modelo de Multiplicidade pode chegar a 8,3% (A5P\_Cmd-09), enquanto que no lote duplo homogêneo sua vantagem era de apenas 1,8% (2Crd-03). As perdas geradas pelo Modelo de Multiplicidade são aceitáveis em sua maioria, mas o número de exemplares para os quais as perdas ultrapassam o limite de 6% passou de 2 (nos lotes simples e duplo homogêneo) para 4, sendo que o limite foi extrapolado de até 3,8% (A5P\_Cmd-09). Com respeito ao número de padrões de corte, o Modelo de Multiplicidade obteve melhores resultados que as outras duas estratégias em apenas 3, dos 10 exemplares, e diminui em, no máximo, em 2 unidades a resposta dada pela indústria (A5P\_Cmd-12) e, em até 9 padrões de corte o resultado da Heurística TC (A5P\_Crd-03). Da mesma maneira como nos lotes simples e duplo homogêneo, os menores números de ciclos da serra foram obtidos com o Modelo de Multiplicidade. A diferença com relação à indústria, chega a 9 ciclos da serra a menos no Modelo de Multiplicidade (A5P\_Cmd-03) e, comparando com a Heurística TC, chega a 11 unidades a menos (A5P\_Crd-03). Estas maiores diferenças nos resultados podem ter sido causadas pelo aumento da demanda dos itens, além do aumento do número de itens, por se tratar do lote duplo heterogêneo.

De maneira geral, no que diz respeito ao número de ciclos da serra, a resposta dada pelo Modelo de Multiplicidade é melhor do que as outras duas em 77%. Nos piores casos, o número de ciclos no resultado do Modelo de Multiplicidade se iguala ao da heurística, da empresa ou de ambas. Portanto o resultado é bastante promissor. Com relação às perdas médias, os

melhores resultados são obtidos com a Heurística TC na maior parte dos exemplares, porém os índices gerados pelo Modelo de Multiplicidade são aceitáveis pela indústria em 83% dos resultados. Nos exemplares do lote duplo heterogêneo, as perdas geradas pelo Modelo de Multiplicidade foram as piores, mas ainda aceitáveis.

Uma das principais desvantagens do Modelo de Multiplicidade em relação aos outros métodos, oriunda do fato de que um certo padrão de corte ser usado implica no uso de um número múltiplo da capacidade da serra, é a geração de muitos excedentes de produção. Outro reflexo negativo da restrição de multiplicidade é com relação ao número de objetos cortados. Já com relação ao número de padrões de corte distintos, o Modelo de Multiplicidade é melhor que os outros dois em 30% dos exemplares. Em 44% dos exemplares, o resultado do Modelo de Multiplicidade se iguala a um dos outros dois métodos ou a ambos. Outra contribuição negativa da restrição de multiplicidade é o aumento da dificuldade de resolução do problema através do Modelo de Multiplicidade. Isto implica num tempo computacional muito maior para resolver o Modelo de Multiplicidade do que para resolver o Problema de Corte de Estoque usual (com excedentes permitidos (1.10)-(1.12)) na Heurística TC. Para a solução de exemplares com mais de 6 itens, o tempo gasto pelo Modelo de Multiplicidade varia entre 40s e 40min (para o lote simples) e entre 1,5min e 40min (para os lotes duplos - homogêneo e heterogêneo), enquanto que o maior tempo necessário pela Heurística TC em todos os tipos de lotes é de 2min.

A Tabela 4.9 a seguir, mostra um resumo dos resultados apresentados nas tabelas 4.6, 4.7 e 4.8. Para cada tipo de lote, marcamos com "X" a melhor estratégia em cada critério considerado (coluna).

<b>Tipo de Lote</b>	<b>N<sub>P</sub></b>	<b>Obj</b>	<b>P<sub>S</sub></b>	<b>C<sub>s</sub></b>	<b>Método de Solução</b>
<b>Simple</b>				X	<b>Modelo de Multiplicidade</b>
		X	X		<b>Heurística TC</b>
	X				<b>Indústria</b>
<b>Duplo Homogêneo</b>				X	<b>Modelo de Multiplicidade</b>
		X	X		<b>Heurística TC</b>
	X				<b>Indústria</b>
<b>Duplo Heterogêneo</b>				X	<b>Modelo de Multiplicidade</b>
		X	X		<b>Heurística TC</b>
	X				<b>Indústria</b>

Tabela 4.9: Resumo do Desempenho da Heurística TC, Indústria e Modelo de Multiplicidade

É fácil observar na Tabela 4.9 que, o comportamento dos métodos de solução é similar em todos os tipos de lotes. Com relação ao número de ciclos da serra, o Modelo de Multiplicidade tem o melhor desempenho sempre. A Heurística TC obtém, em todos os tipos de lote, os melhores resultados para as perdas médias e número de objetos cortados. A indústria, por sua vez, utiliza menos padrões de corte do que as outras duas estratégias.

### Testes com as Heurísticas - Orientação dos itens fixa

Nas tabelas de 4.10 a 4.12, são apresentados os resultados das heurísticas propostas (Algoritmos 2 e 3, descritos na Subseção 3.4.3), para a resolução do Problema de Corte de Estoque Bidimensional com o objetivo de minimizar o número de objetos cortados e o número de ciclos da serra, considerando a orientação fixa dos itens. Os resultados de tais métodos para o lote simples dos produtos estão mostrados na Tabela 4.10. A Tabela 4.11 exhibe os resultados para a produção do lote duplo homogêneo e a Tabela 4.12 mostra os resultados para a produção do lote duplo heterogêneo. Os números de ciclos da serra em negrito indicam o melhor método neste quesito para o exemplar em questão. Estas heurísticas atendem exatamente às demandas dos itens. Uma observação a ser feita aqui é que, nas próximas tabelas, as perdas médias apresentadas são as totais ( $\mathbf{P_T}$ ), calculadas por (1.16).

Exemplar	Algoritmo 2				Algoritmo 3				Número de itens
	$N_P$	Obj	$P_T$	$C_s$	$N_P$	Obj	$P_T$	$C_s$	
A5P-03	6	179	32,2%	<b>10</b>	8	140	13,7%	11	8
A5P-09	1	2	8,7%	1	1	2	8,7%	1	1
A5P-12	4	14	36,4%	4	4	11	19,3%	4	2
A5P-15	6	64	17,5%	<b>17</b>	10	58	9,4%	19	7
A5P-20	15	44	37,6%	20	10	32	16,8%	<b>16</b>	9
A5P-25	4	5	32,4%	4	3	4	15,5%	<b>3</b>	3
Cmd-03	7	190	38,4%	10	4	149	21,8%	<b>9</b>	3
Cmd-09	4	16	63,1%	4	4	7	16,5%	4	3
Cmd-12	4	50	14,4%	<b>11</b>	9	48	11,1%	14	6
Cmd-15	10	79	25,8%	24	5	77	24,1%	<b>23</b>	4
Crd-03	4	80	15,0%	5	4	83	18,3%	5	3
Crd-12	4	31	26,2%	7	3	27	16,0%	7	2
Crd-15	4	51	17,0%	14	3	49	14,0%	14	2

Tabela 4.10: Algoritmo 2  $\times$  Algoritmo 3 - Lotes Simples

A Tabela 4.10, mostra que, com relação ao número de ciclos da serra, para 6 exemplares de 13, os resultados são os mesmos nos dois algoritmos. O Algoritmo 3 é melhor que o Algoritmo 2 em 4 casos, com até 4 ciclos a menos que o resultado dado pelo Algoritmo 2 (A5P-20), e perde em 3 exemplares por até 3 ciclos da serra (Cmd-12). No que diz respeito ao número de objetos cortados, o Algoritmo 3 é o melhor na grande maioria dos exemplares (11 deles). Porém, o Algoritmo 3 demanda, no máximo, 3 objetos a mais que o Algoritmo 2 (Crd-03), enquanto que o Algoritmo 3 chega a diminuir em até 41 objetos a solução do Algoritmo 2 (Cmd-03). Os resultados para o número de padrões de corte diferentes são melhores também no Algoritmo 3. Este é melhor que o Algoritmo 2 em 6 dos 13 exemplares e, em outros 4 exemplares, os resultados são iguais para as duas heurísticas neste quesito. A maior diferença no número de padrões de corte empregados no Algoritmo 3, com relação ao Algoritmo 2, é de 5 padrões de corte a menos (A5P-20 e Cmd-15). Outra vantagem do Algoritmo 3 em relação ao Algoritmo 2 é com respeito às perdas médias geradas. Neste critério de comparação, o Algoritmo 3 obtém menores índices de perda em 11 exemplares, chegando a melhorar a resposta do Algoritmo 2 em até 46,6% (Cmd-09).

Exemplar	Algoritmo 2				Algoritmo 3				Número de itens
	N <sub>P</sub>	Obj	P <sub>T</sub>	C <sub>s</sub>	N <sub>P</sub>	Obj	P <sub>T</sub>	C <sub>s</sub>	
2A5P-03	7	338	28,9%	18	9	280	13,7%	<b>17</b>	8
2A5P-09	1	4	8,7%	1	1	4	8,7%	1	1
2A5P-12	6	28	36,6%	7	4	21	15,8%	7	2
2A5P-15	8	123	14,9%	<b>32</b>	11	116	10,5%	35	7
2A5P-20	15	73	27,3%	29	12	63	15,9%	<b>28</b>	9
2A5P-25	4	9	24,7%	6	4	8	15,8%	6	3
2Cmd-03	6	323	27,6%	17	4	298	22,2%	17	3
2Cmd-09	5	22	46,7%	<b>5</b>	6	15	22,7%	7	3
2Cmd-12	4	96	11,0%	<b>20</b>	11	95	10,3%	26	6
2Cmd-15	8	154	24,3%	42	6	153	24,6%	42	4
2Crd-03	4	160	15,2%	9	4	165	18,1%	<b>8</b>	3
2Crd-12	4	59	23,0%	13	3	54	16,2%	13	2
2Crd-15	3	99	14,9%	26	3	99	15,8%	26	2

Tabela 4.11: Algoritmo 2 × Algoritmo 3 - Lotes Duplo Homogêneo

Observando a Tabela 4.11, notamos que, com respeito ao número de ciclos da serra, o desempenho dos algoritmos foi próximo. Seus resultados são iguais em 7 exemplares dos 13

testados, e nos 6 exemplares restantes, o Algoritmo 3 é melhor em 3 e pior em 3. Porém, o Algoritmo 3 melhora em apenas 1 unidade os ciclos da serra do Algoritmo 2, e piora em até 6 unidades o resultado do outro (2Cmd-12). Em relação ao número de objetos cortados, o Algoritmo 3 obtém os melhores resultados em 10 dos 13 exemplares e, em outros 2 exemplares, os resultados são os mesmos para os dois algoritmos. Isto porque em um destes dois exemplares, há apenas um item a ser cortado. Além disso, o Algoritmo 3 reduz em até 58 unidades o número de objetos utilizados no Algoritmo 2 (2A5P-03). Já os números de padrões de corte distintos são menores no Algoritmo 3 em 5 exemplares, chega a diminuir em até 3 padrões de corte a resposta dada pelo Algoritmo 2 (2A5P-20) e perde em 4 exemplares, piorando em até 7 unidades a resposta do Algoritmo 2 (2Cmd-12). Os índices de perda são menores nos resultados do Algoritmo 3 em 9 dos 13 exemplares, melhorando em até 24% o resultado do Algoritmo 2 (2Cmd-09). Neste quesito, o Algoritmo 3 é pior em 3 exemplares, e piora em apenas 2,9% a resposta do Algoritmo 2 (2Crd-03).

Exemplar	Algoritmo 2				Algoritmo 3				Número de itens
	N <sub>P</sub>	Obj	P <sub>T</sub>	C <sub>s</sub>	N <sub>P</sub>	Obj	P <sub>T</sub>	C <sub>s</sub>	
A5P_Cmd-03	7	299	20,4%	<b>16</b>	12	296	18,1%	21	10
A5P_Cmd-09	5	18	57,0%	5	5	9	15,3%	5	4
A5P_Cmd-12	6	64	19,1%	<b>14</b>	8	57	9,8%	15	6
A5P_Cmd-15	6	132	16,3%	<b>34</b>	13	134	18,2%	41	10
A5P_Crd-03	9	277	31,6%	<b>15</b>	12	220	14,8%	16	11
A5P_Crd-12	6	44	27,9%	10	7	38	17,2%	<b>9</b>	4
A5P_Crd-15	9	115	17,9%	<b>30</b>	15	107	12,5%	36	9
Cmd_Crd-03	5	220	16,0%	<b>11</b>	6	227	18,6%	15	6
Cmd_Crd-12	8	83	20,7%	<b>18</b>	10	73	10,1%	20	8
Cmd_Crd-15	6	120	16,7%	<b>31</b>	8	122	18,2%	36	6

Tabela 4.12: Algoritmo 2 × Algoritmo 3 - Lotes Duplo Heterogêneo

Em relação ao lote duplo heterogêneo, Tabela 4.12, temos que os números de ciclos da serra gerados pelo Algoritmo 3 são piores que os do Algoritmo 2 em 8 dos 10 exemplares e melhores em apenas 1 deles (A5P\_Crd-12). Já no quesito número de objetos cortados, o Algoritmo 3 é melhor que o Algoritmo 2, como nos outros tipos de lote. Em 7 dos 10 exemplares, o Algoritmo 3 obtém os menores números, chegando a melhorar em até 57 unidades o resultado do Algoritmo 2 (A5P\_Crd-03) e, em 3 dos casos, o Algoritmo 3 é pior, com 7 unidades a mais que o Algoritmo 2 (Cmd\_Crd-03). Os menores números de padrões de corte

distintos são gerados pelo Algoritmo 2 em 9 exemplares, melhorando em até 7 unidades o resultado do Algoritmo 3 (A5P\_Cmd-15). Como nos resultados dos outros lotes, as melhores respostas, em relação às perdas médias, são dadas pelo Algoritmo 3 na maioria dos exemplares, somando 7 deles. A redução dos índices de perda com relação à outra heurística chega a 41,7% (A5P\_Cmd-09).

Analisando as tabelas 4.10, 4.11 e 4.12 de forma conjunta, observamos que, com relação ao número de ciclos da serra, o Algoritmo 3 é melhor do que o Algoritmo 2 em 33% dos exemplares e, em 38% deles, o Algoritmo 3 é pior. Já com relação ao número de objetos cortados, o Algoritmo 3 é melhor que o Algoritmo 2 em 91% dos casos. O número de padrões de corte distintos empregados pelas heurísticas empatam em 27% dos exemplares. Cada método é melhor em exatamente metade dos casos restantes. As melhoras nas perdas médias de material nos resultados do Algoritmo 3 são incontestáveis, sendo melhores que o Algoritmo 2 em 89% dos exemplares. Esta melhora se deve à troca da função que relaxa a eficiência dos padrões de corte a cada passo do algoritmo (ver discussão na Subseção 3.4.3). Porém, um empate em 2 dos 36 exemplares é inevitável, já que estes possuem apenas 1 tipo de item a ser cortado (A5P-09 e 2A5P-09). Além disso, a maior vantagem obtida pelo Algoritmo 2 nas perdas médias, foi de apenas 3,3% (exemplar Crd-03) enquanto que o Algoritmo 3 melhora em mais de 40% as perdas geradas pelo Algoritmo 2.

Os tempos computacionais para resolver o problema através dessas heurísticas é muito pequeno para ser levado em consideração nestes exemplares. Com exceção dos exemplares A5P-20 e 2A5P-20, os tempos necessários não chegam aos 15s. Porém, nestes dois exemplares citados, os tempos foram bem maiores, 13 min e 4 min respectivamente. O que provocou esse aumento no tempo de processamento foram os Problemas da Mochila Restritos (1.50) que determinam a combinação das faixas geradas sobre o objeto. Isto por que estes exemplares são uns dos que possuem maior número de itens, 8, e com larguras muito menores do que a do objeto (60mm, com exceção de um, com 40mm de largura). Por isso, há muitas combinações possíveis. Somando esta dificuldade ao fato do problema ser restrito, determinar uma solução ótima se torna uma tarefa muito difícil. Note que o aumento da demanda dos itens resultou na redução do tempo de resolução do problema.

A Tabela 4.13, mostra um resumo do desempenho dos métodos propostos, em que "X" indica o método que obteve o melhor resultado naquele critério de avaliação e no respectivo tipo de lote. Observando essa tabela é fácil ver que, na produção do lote simples, o Algoritmo

3 é o melhor método de solução em todos os aspectos. Já na produção dos lotes duplos, tanto no homogêneo como no heterogêneo, o Algoritmo 3 supera o Algoritmo 2 no que diz respeito às perdas geradas e ao número de objetos cortados, e é inferior ao mesmo, no que se refere ao número de ciclos da serra e ao número de padrões de corte distintos. Note que a redução do número de padrões de corte nos resultados do Algoritmo 2 implicou na redução do número de ciclos da serra nos seus resultados.

<b>Tipo de Lote</b>	<b>N<sub>P</sub></b>	<b>Obj</b>	<b>P<sub>T</sub></b>	<b>C<sub>s</sub></b>	<b>Heurísticas</b>
<b>Simples</b>					<b>Algoritmo 2</b>
	X	X	X	X	<b>Algoritmo 3</b>
<b>Duplo Homogêneo</b>	X			X	<b>Algoritmo 2</b>
		X	X		<b>Algoritmo 3</b>
<b>Duplo Heterogêneo</b>	X			X	<b>Algoritmo 2</b>
		X	X		<b>Algoritmo 3</b>

Tabela 4.13: Resumo do Desempenho do Algoritmo 2 e do Algoritmo 3

### Testes com as Heurísticas - Rotação de itens permitida

Após incluir a permissão de rotacionar os itens no Algoritmo 3 (que renomeamos como Algoritmo 3 Rot), comparamos os resultados obtidos deste "novo" procedimento com os resultados do Algoritmo 2 e do Algoritmo 3 sem a rotação dos itens. As tabelas 4.14, 4.15 e 4.16, trazem os resultados mencionados acima para um conjunto menor de exemplares, apenas 16 dos 36 anteriores. Seguindo a mesma ordem que as outras exposições, a primeira tabela a ser apresentada (Tabela 4.14) é relativa à produção do lote simples e, as outras duas tabelas (Tabela 4.15 e Tabela 4.16) são relativas aos lotes duplos, homogêneo e heterogêneo, respectivamente. Uma vez que os Algoritmos 2 e 3 foram comparados entre si nas tabelas apresentadas anteriormente (tabelas 4.10, 4.11 e 4.12), a ênfase da análise é voltada para o Algoritmo 3 Rot, observando em quais quesitos este "novo" método melhorou os resultados obtidos com os outros dois algoritmos.

Para os resultados mostrados na Tabela 4.14, podemos observar que, em relação ao número de ciclos da serra, o Algoritmo 3 Rot é melhor que as outras duas heurísticas em apenas 1 exemplar (A5P-12) e, em outro (A5P-25), o Algoritmo 3 Rot é igual ao Algoritmo 3 e melhor que o Algoritmo 2. Já nos outros critérios, o Algoritmo 3 Rot é sempre melhor que os outros dois algoritmos. Com relação ao número de objetos cortados, o Algoritmo 3 Rot

Exemplar	Algoritmo 2				Algoritmo 3				Algoritmo 3 Rot				Nº de itens
	N <sub>P</sub>	Obj	P <sub>T</sub>	C <sub>s</sub>	N <sub>P</sub>	Obj	P <sub>T</sub>	C <sub>s</sub>	N <sub>P</sub>	Obj	P <sub>T</sub>	C <sub>s</sub>	
A5P-03	6	179	32,2%	10	8	140	13,7%	11	8	138	12,4%	12	8
A5P-12	4	14	36,4%	4	4	11	19,3%	4	3	10	11,6%	3	2
A5P-25	4	5	32,4%	4	3	4	15,5%	3	3	4	15,5%	3	3
Cmd-12	4	50	14,4%	11	9	48	11,1%	14	7	46	7,4%	14	6
Crd-03	4	80	15,0%	5	4	83	18,3%	5	3	83	11,7%	5	3
Crd-12	4	31	26,2%	7	3	27	16,0%	7	3	25	9,5%	7	2

Tabela 4.14: Algoritmo 2 × Algoritmo 3 × Algoritmo 3 Rot - Lotes Simples

melhora em, no máximo, 2 unidades a resposta dada pelo Algoritmo 3 (A5P-03, Cmd-12 e Crd-12) e, em até 41 unidades, o resultado dado pelo Algoritmo 2 (A5P-03). Em 2 exemplares, os números de padrões de corte são menores no Algoritmo 3 Rot do que nos outros dois, são menores em 3 exemplares comparando apenas com o Algoritmo 3, e em 4, comparando apenas com o Algoritmo 2. As perdas médias geradas pelo Algoritmo 3 Rot são sempre menores do que as geradas pelos outros dois métodos com exceção de um único exemplar, onde o resultado do Algoritmo 3 Rot empata com o Algoritmo 3 (A5P-25). A vantagem do Algoritmo 3 Rot sobre o Algoritmo 3, com relação às perdas, é de até 7,7% (A5P-12) e de até 24,8% sobre o Algoritmo 2 (no mesmo exemplar).

Exemplar	Algoritmo 2				Algoritmo 3				Algoritmo 3 Rot				Nº de itens
	N <sub>P</sub>	Obj	P <sub>T</sub>	C <sub>s</sub>	N <sub>P</sub>	Obj	P <sub>T</sub>	C <sub>s</sub>	N <sub>P</sub>	Obj	P <sub>T</sub>	C <sub>s</sub>	
2A5P-03	7	338	28,9%	18	9	280	13,7%	17	10	276	12,4%	19	8
2A5P-15	8	123	14,9%	32	11	116	10,5%	35	13	118	11,6%	37	7
2A5P-25	4	9	24,7%	6	4	8	15,8%	6	5	8	15,8%	6	3
2Cmd-12	4	96	11,0%	20	11	95	10,3%	26	8	92	7,1%	23	6
2Cmd-15	8	154	24,3%	42	6	153	24,6%	42	8	139	16,6%	40	4
2Crd-03	4	160	15,2%	9	4	165	18,1%	8	4	157	13,9%	9	3

Tabela 4.15: Algoritmo 2 × Algoritmo 3 × Algoritmo 3 Rot - Lotes Duplo Homogêneo

Observando os resultados na produção do lote duplo homogêneo (Tabela 4.15) notamos que, com relação ao número de ciclos da serra, o Algoritmo 3 Rot é melhor que o Algoritmo 3 em 2 exemplares e igual em 1. Comparando com o Algoritmo 2, eles empatam em 2 exemplares e o Algoritmo 3 Rot é melhor em 1 exemplar. No quesito número de objetos cortados, o Algoritmo 3 Rot tem melhor desempenho, sendo que, em 4 dos 6 exemplares, este é melhor que as outras duas heurísticas e apenas empata com o resultado do Algoritmo 3 em 1



exemplar. Além disso, o Algoritmo 3 Rot diminui o número de objetos do Algoritmo 3 em até 14 unidades (2A5P-03) e, em até 62 unidades, do Algoritmo 2 (no mesmo exemplar). No que diz respeito às perdas médias geradas, o Algoritmo 3 Rot continua sendo o melhor método, empatando em apenas 1 exemplar com o resultado do Algoritmo 3 e sendo sempre melhor que o Algoritmo 2. Neste aspecto, o Algoritmo 3 Rot melhora em até 8% as perdas dadas pelo Algoritmo 3 (2Cmd-15) e, em até 16,5%, as perdas geradas pelo Algoritmo 2 (2A5P-03). Podemos notar que o comportamento dos algoritmos apresenta uma pequena mudança com relação à produção do lote simples, no sentido de que as vantagens do Algoritmo 3 Rot sobre os outros métodos são menores em alguns aspectos, como nas perdas médias e no número de padrões de corte utilizados. Em outros aspectos, as vantagens do Algoritmo 3 Rot ficam menos freqüentes, mas mais incisivas, como por exemplo, no número de objetos cortados, comparando com Algoritmo 2.

Exemplar	Algoritmo 2				Algoritmo 3				Algoritmo 3 Rot				Nº de itens
	N <sub>P</sub>	Obj	P <sub>T</sub>	C <sub>s</sub>	N <sub>P</sub>	Obj	P <sub>T</sub>	C <sub>s</sub>	N <sub>P</sub>	Obj	P <sub>T</sub>	C <sub>s</sub>	
A5P_Cmd-12	6	64	19,1%	14	8	57	9,8%	15	8	56	7,8%	17	6
A5P_Crd-03	9	277	31,6%	15	12	220	14,8%	16	11	205	13,0%	17	11
A5P_Crd-12	6	44	27,9%	10	7	38	17,2%	9	6	35	9,5%	10	4
Cmd_Crd-12	8	83	20,7%	18	10	73	10,1%	20	10	71	7,6%	21	8

Tabela 4.16: Algoritmo 2 × Algoritmo 3 × Algoritmo 3 Rot - Lotes Duplo Heterogêneo

Na Tabela 4.16, podemos observar que, com relação ao número de ciclos da serra, o Algoritmo 3 Rot apenas empata com o Algoritmo 2 em 1 dos 4 exemplares (A5P\_Crd-12). Com relação ao número de objetos cortados, o Algoritmo 3 Rot é melhor que os outros dois algoritmos em todos os exemplares. O Algoritmo 3 Rot melhora em até 15 objetos o resultado do Algoritmo 3 (A5P\_Crd-03) e, em até 72 objetos, a resposta do Algoritmo 2 (no mesmo exemplar). Os números de padrões de corte distintos obtidos com o Algoritmo 3 Rot são apenas menores que com o Algoritmo 3 em 2 dos 4 exemplares. Ainda sobre os resultados na produção do lote duplo heterogêneo, podemos identificar um pequeno aumento na vantagem do Algoritmo 3 Rot sobre os outros em alguns aspectos, comparando com a produção do lote duplo homogêneo, como no número de objetos cortados. Neste quesito, as maiores vantagens do Algoritmo 3 Rot sobre os outros dois métodos ocorreram em exemplares com os maiores números de itens, por exemplo, A5P-03, 2A5P-03 e A5P\_Crd-03.

Analisando as tabelas 4.14, 4.15 e 4.16 em conjunto, é possível observar que, com relação

ao número de ciclos da serra, em 13% dos testes, os resultados do Algoritmo 3 Rot são melhores que as outras duas heurísticas e, em 19% deles, os resultados são os mesmos nas três. Em relação ao número de objetos cortados, o Algoritmo 3 Rot apresenta uma grande vantagem sobre as outras heurísticas. Em 81% dos resultados este algoritmo obteve os menores números. Comparando apenas com o Algoritmo 2, o Algoritmo 3 Rot foi sempre melhor e, com relação ao Algoritmo 3, empatou em 25% dos casos e ficou pior em apenas 1 exemplar. Como era esperado, as perdas médias obtidas com o Algoritmo 3 Rot são bem menores do que com as outras heurísticas. Com relação ao Algoritmo 2, as perdas médias do Algoritmo 3 Rot são sempre menores e, com relação ao Algoritmo 3, o Algoritmo 3 Rot esteve melhor em 88% dos exemplares. Já com respeito ao número de padrões de corte distintos, o Algoritmo 3 Rot é melhor do que os outros dois em 13% dos exemplares. Em 50% deles, o Algoritmo 3 Rot é melhor que o Algoritmo 3 e é melhor que o Algoritmo 2 em 37% dos exemplares. Os tempos computacionais para a resolução do Problema de Corte de Estoque através do Algoritmo 3 Rot foram similares aos dos outros dois algoritmos mesmo depois de incluir a rotação dos itens.

A Tabela 4.17 mostra o melhor desempenho de cada método em cada um dos aspectos levados em consideração e o tipo de lote. Observe que nesta tabela, o desempenho do Algoritmo 3 não é exibido. Isto porque, nos aspectos que a vantagem era do Algoritmo 3, o Algoritmo 3 Rot o superou. Nos outros, a vantagem do Algoritmo 2 se manteve, ou seja, para os 16 exemplares testados, os melhores resultados variaram entre os resultados do Algoritmo 2 e do Algoritmo 3 Rot.

Tipo de Lote	$N_P$	Obj	$P_T$	$C_s$	Heurísticas
Simples				X	Algoritmo 2
	X	X	X		Algoritmo 3 Rot
Duplo Homogêneo	X			X	Algoritmo 2
		X	X		Algoritmo 3 Rot
Duplo Heterogêneo	X			X	Algoritmo 2
		X	X		Algoritmo 3 Rot

Tabela 4.17: Resumo do Desempenho das Estratégias de Solução

Da Tabela 4.17, podemos concluir que o Algoritmo 2 obtém os melhores números de ciclos da serra em todos os tipos de lote, para os 16 exemplares testados. No que diz respeito

ao número de objetos cortados e às perdas médias geradas, o Algoritmo 3 Rot esteve melhor em todos os casos. Já em relação ao número de padrões de corte distintos, o Algoritmo 3 Rot obteve melhores resultados na produção do lote simples e o Algoritmo 2, na produção dos lotes duplos (homogêneo e heterogêneo).

### Comparação - Heurísticas $\times$ Modelo de Multiplicidade

A seguir, na Tabela 4.18 mostramos os resultados obtidos com o Algoritmos 3, Algoritmo 3 Rot, Modelo de Multiplicidade e a indústria. Na tabela, são apresentadas as perdas totais médias (**Perda**) e os números de ciclos da serra (**Ciclos**) para os mesmos 16 exemplares que foram testados com o Algoritmo 3 Rot. Neste caso, o Algoritmo 3 está sendo levado em consideração porque, apesar de o Algoritmo 2 ter gerado melhores números de ciclos da serra para estes exemplares, as perdas geradas pelo Algoritmo 3 são muito menores do que as do Algoritmo 2.

Exemplar	Modelo de Mult		Algoritmo 3		Algoritmo 3 Rot		Indústria	
	Perda	Ciclos	Perda	Ciclos	Perda	Ciclos	Perda	Ciclos
A5P-03	7,7%	8	13,7%	11	12,4%	12	7,4%	12
A5P-12	5,2%	2	19,3%	4	11,6%	3	5,8%	3
A5P-25	8,2%	3	15,5%	3	15,2%	3	9,4%	4
Cmd-12	4,3%	9	11,1%	14	7,4%	14	5,8%	13
Crd-03	8,1%	4	18,3%	5	11,7%	5	6,9%	5
Crd-12	5,4%	5	16,0%	7	9,5%	7	6,6%	6
2A5P-03	8,0%	14	13,7%	17	12,4%	19	7,4%	16
2A5P-15	4,6%	29	10,5%	35	11,6%	37	4,0%	31
2A5P-25	9,4%	4	15,8%	6	15,8%	6	9,4%	5
2Cmd-12	4,3%	18	10,3%	26	7,1%	23	4,0%	21
2Cmd-15	5,8%	32	24,6%	42	16,6%	40	6,0%	33
2Crd-03	9,0%	8	18,1%	8	13,9%	9	6,9%	8
A5P_Cmd-12	4,0%	11	9,8%	15	7,8%	17	4,8%	16
A5P_Crd-03	8,7%	11	14,8%	16	13,0%	17	7,2%	16
A5P_Crd-12	5,5%	7	17,2%	9	9,5%	10	5,5%	9
Cmd_Crd-12	4,8%	14	10,1%	20	7,6%	21	4,8%	19

Tabela 4.18: Modelo de Multiplicidade  $\times$  Algoritmo 3  $\times$  Algoritmo 3 Rot  $\times$  Indústria

Para os algoritmos propostos, Algoritmo 3 e Algoritmo 3 Rot, os índices de perdas são sempre piores do que no Modelo de Multiplicidade e na indústria. Entretanto, alguma

vantagem sobre a indústria aparece nos resultados dos algoritmos em relação aos números de ciclos da serra, mas não sobre o Modelo de Multiplicidade, pois como já concluímos das tabelas 4.6, 4.7 e 4.8, no pior desempenho do Modelo de Multiplicidade, este se iguala à indústria. As respostas dadas pelo Algoritmo 3 para o número de ciclos da serra, foram melhores que as da indústria em 31% dos exemplares e empataram em 25% deles. Já o Algoritmo 3 Rot, é melhor que a indústria em 19% dos resultados e, em outros 19%, os resultados são iguais. Ou seja, o Algoritmo 3 se aproximou mais dos resultados da indústria para os números de ciclos da serra. No que diz respeito às perdas geradas, a indústria também é sempre melhor que os algoritmos propostos. Este fato já era esperado, uma vez que as eficiências dos padrões de corte aceitáveis são relaxadas em cada passo do algoritmo, mas neste critério, o Algoritmo 3 Rot é melhor que o Algoritmo 3, como já foi constatado (tabelas 4.14, 4.15 e 4.16).

Destacamos aqui que, em geral, os padrões de corte usados para atender às demandas dos itens na produção dos lotes simples dos produtos, são diferentes dos padrões de corte utilizados nos lotes duplos (não basta dobrar o número de vezes que cada padrão de corte é empregado). Entretanto, em exemplares que contêm apenas um tipo de item, como é o caso do A5P-09, os padrões de corte na solução das heurísticas são os mesmos no lote simples e no lote duplo homogêneo.

As vantagens e bons resultados apresentados pela indústria, nas soluções dos exemplares, pode ser explicada por alguns dos fatores que são levados em conta durante a construção dos padrões de corte utilizados por ela. As principais considerações feitas são:

- Demandas dos itens - os itens de maiores demandas são os primeiros a serem incluídos nos padrões de corte;
- Número de padrões de corte - atender às demandas dos itens com a menor diversidade possível de padrões de corte;
- Número de ciclos da serra - utilizar a capacidade total da máquina de corte, tanto quanto for possível;
- Perda de material - os padrões de corte construídos são do tipo tabuleiro compostos e, sabemos que este tipo de padrão de corte gera menos perdas que os padrões de corte tabuleiro (ver discussão na Seção 1.5). Ademais, eventualmente, padrões de corte guilhotinados 3-estágios são admitidos.

- Inclusão de itens não demandados - itens utilizados em larga escala para a confecção das estruturas dos móveis (por exemplo os pinázios) são adicionados em alguns padrões de corte para melhorar o aproveitamento do objeto e estocados para serem usados mais tarde.

As semelhanças entre os procedimentos utilizados nas heurísticas propostas e os da indústria, como por exemplo, construir os padrões de corte levando em consideração as demandas dos itens, repetir o uso dos padrões de corte muitas vezes, etc., não são suficientes para que os algoritmos melhorem os resultados apresentados por ela. Isto por que, além dos fatores listados anteriormente, a indústria também se utiliza de um outro recurso que não foi considerado. Este recurso é a utilização do "1/2" padrão de corte, que pode ser visto nas tabelas de resultados já apresentadas (tabelas 4.6 e 4.8). Esta estratégia, contribui, não só para a redução de itens excedentes, mas também na redução da perda de matéria-prima. Observe que utilizar "1/2" padrão de corte não implica, necessariamente, em utilizar meio objeto [59]. A Figura 4.1 a seguir mostra um mesmo padrão de corte aplicado a dois objetos distintos. As linhas tracejadas representam os possíveis cortes para obter "1/2" objeto (Figura 4.1a-) e para obter "1/2" padrão de corte (Figura 4.1b-)), que podem ser feitos ao longo da largura ou do comprimento do objeto. Além disso, é possível notar que, se aplicarmos o corte na metade do objeto (Figura 4.1a-)), podemos contribuir para o aumento da perda e/ou sobra de material e, no caso da Figura 4.1b-) a questão é: quais serão as faixas aproveitadas e as faixas armazenada? Ou seja, o que considerar como "1/2" padrão de corte?

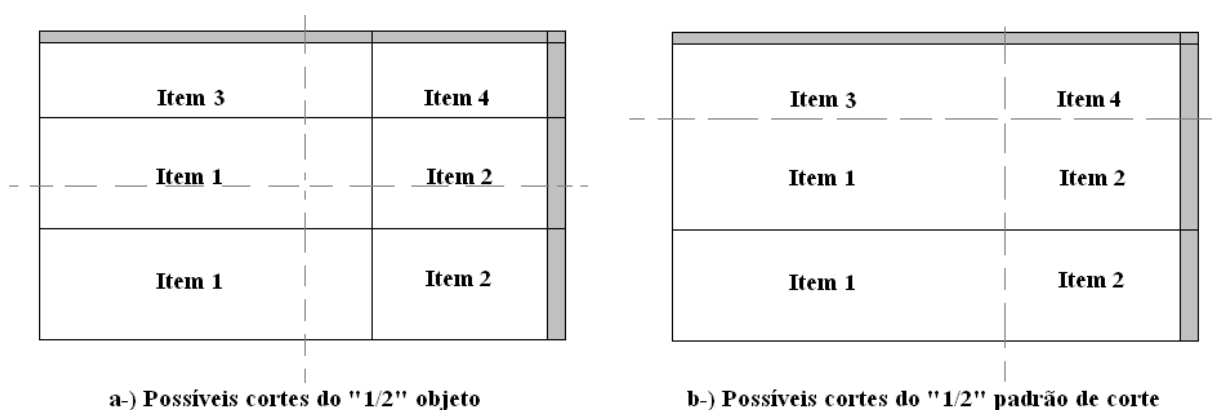


Figura 4.1: "1/2" Objeto  $\times$  "1/2" Padrão de Corte

A indústria busca efetuar os cortes próximos da metade do objeto, pois assim, ela evita que retalhos de tamanhos variados sejam estocados, dificultando seu controle. Por este mesmo motivo, ela não considera a utilização de diferentes frações dos padrões de corte.

Os procedimentos heurísticos sempre procuram por uma solução inteira para o Problema de Corte de Estoque e, mesmo que admitissem soluções fracionárias, isto não seria suficiente para considerar o "1/2" padrão de corte, pois seria necessária uma análise detalhada do padrão de corte para verificar a viabilidade de se efetuar um corte deste tipo. Por exemplo, na Figura 4.1, uma questão seria: o corte será realizado ao longo do comprimento ou da largura do objeto? E dependendo dos itens, se o corte se afastasse muito da metade do objeto, alguns itens seriam eliminados, podendo gerar mais perdas de material. Além disso, como decidir quais itens eliminar?

Apesar dessas possíveis dificuldades, a idéia de considerar a possibilidade de cortar "1/2" padrão de corte nos métodos de solução, parece interessante, principalmente, no que diz respeito a excedentes de produção e a perdas de material.

# Capítulo 5

## Considerações Finais

Neste trabalho, apresentamos os principais conceitos teóricos dos Problemas de Corte de Estoque e sua importância no contexto do planejamento de produção em indústrias de móveis. Discutimos a relação entre o número de ciclos da serra e o número de padrões de corte distintos na solução do Problema de Corte de Estoque em detalhes, que foi comprovada pelo estudo computacional realizado. Para resolver o Problema de Corte de Estoque Bidimensional, utilizando o menor número possível de objetos e de ciclos da serra, propomos um modelo matemático (Modelo de Multiplicidade - Seção 3.3) e duas heurísticas (Algoritmo 2 e Algoritmo 3 - Subseção 3.4.3). O Modelo de Multiplicidade, com restrição sobre o número de vezes que cada objeto é cortado de acordo com um determinado padrão de corte, utiliza os padrões de corte gerados pela Heurística TC proposta em [59]. O Modelo de Multiplicidade mostrou-se muito eficiente na redução do número de ciclos da serra. Obteve os menores números em todos os exemplares testados, sendo que nos exemplares de pior desempenho, seu resultado se igualou ao resultado obtido com a prática industrial e/ou com a Heurística TC. Porém, as desvantagens da inclusão da restrição de multiplicidade também são evidentes: grande número de objetos utilizados; muitos itens em excesso e tempo computacional alto. Além disso, foi possível observar, que quanto maior o número de itens e/ou as demandas dos itens, maiores são os tempos de resolução do problema com o Modelo de Multiplicidade.

Quanto às heurísticas, o Algoritmo 3 Rot (Algoritmo 3 incluindo a rotação dos itens), de forma geral, obteve os melhores resultados dentre os algoritmos propostos, principalmente em relação às perdas médias e o número de objetos cortados. A rotação de itens permite acrescentar mais itens no padrão de corte (demandando menos objetos) e, conseqüentemente, aproveitar melhor o espaço nos objetos (gerando perdas menores). O Algoritmo 2 foi o que

teve o pior desempenho nos dois critérios citados. O Algoritmo 3 é um método intermediário: melhor que o Algoritmo 2 e pior que o Algoritmo 3 Rot nestes dois quesitos. Ainda com as menores perdas dentre as heurísticas, o Algoritmo 3 Rot perde para o Modelo de Multiplicidade e para a indústria em todos os testes, devido às relaxações das eficiências feitas no processo de aceitação ou não dos padrões de corte.

Os menores números de padrões de corte distintos e de ciclos da serra dentre os resultados das heurísticas, foram gerados com a aplicação do Algoritmo 2, apesar de demandar muito mais objetos que os outros dois algoritmos. Este fato pode ser explicado pelo fato de que, no Algoritmo 2, os padrões de corte utilizados são empregados num número de objetos múltiplo da capacidade da serra tanto quanto for possível (dado pelo fator  $F_0$  de ajuste da demanda - Subseção 3.4.2), como na heurística original proposta por Yanasse *et al* [72]. Nos outros dois algoritmos, Algoritmo 3 e Algoritmo 3 Rot, os padrões de corte são empregados no maior número de objetos possível, que pode ser, ou não, um múltiplo da capacidade da serra. Os resultados mostraram que o fato de um padrão de corte ser utilizado um número múltiplo da capacidade da serra, garante a redução significativa do número de ciclos da serra.

As principais vantagens das heurísticas propostas sobre o Modelo de Multiplicidade são: atendimento exato das demandas dos itens e baixos tempos de processamento. Enquanto o Modelo de Multiplicidade gera grandes quantidades de excedentes de produção (por causa da combinação da restrição de multiplicidade com a restrição de atendimento à demanda), as heurísticas atendem exatamente às quantidades requisitadas. Além disso, para muitos exemplares, o Modelo de Multiplicidade gastou por volta de 40 min para resolver o problema enquanto que, o maior tempo necessário para resolver o problema com as heurísticas, não chegou a 15min, nem mesmo após a permissão da rotação de itens (Algoritmo 3 Rot).

Entretanto, no exemplo 3.4.1 foi mostrado como os padrões de corte aceitáveis "demostram" para serem gerados no Algoritmo 2, com relação ao Algoritmo 3, por causa dos padrões de corte serem gerados considerando as demandas auxiliares. Estamos chamando a atenção para este fato porque, apesar de os tempos serem muito pequenos, em problemas com um grande número de itens, estes tempos podem ser muito grandes e, neste caso, as pequenas diferenças que aparecem aqui podem se tornar um critério de fundamental importância na escolha do melhor método de solução.

Contudo, apesar de o Modelo de Multiplicidade e as heurísticas apresentarem bons resultados em diferentes aspectos, outras considerações podem ser feitas para estender o problema



---

ou, até mesmo, para melhorar os resultados aqui obtidos. Propomos os seguintes passos futuros

- Combinar a geração dos padrões de corte da Heurística TC ([22], [23] e [59]) com os princípios das heurísticas aqui propostas ou utilizar o *pool* dos padrões de corte gerados por ela de maneira explícita e "gerar" os padrões de corte para o Problema  $P_1$  considerando apenas este *pool* de padrões;
- Observar, efetivamente, a maneira como os padrões de corte são construídos na empresa e tentar desenvolver métodos heurísticos para a geração de padrões de corte que se aproximem ainda mais daqueles utilizados por ela;
- Desenvolver estudos sobre o Problema de Dimensionamento de Lotes acoplado ao Problema de Corte de Estoque ([29], [64]). Os tamanhos dos lotes utilizados podem influenciar na minimização da perda de material. A decisão acoplada permite uma melhor avaliação da utilização da matéria-prima;
- Estudar a possibilidade de incluir o seqüenciamento dos padrões de corte no Problema de Corte de Estoque ([54]) a fim de fazer melhor uso da máquina de corte reduzindo o número de setups e de ciclos da serra.
- Realizar estudos computacionais com a função de relaxação das eficiências dos padrões de corte da maneira como foi originalmente proposta em [72].

# Apêndice A

## Comentários Adicionais sobre as Heurísticas Propostas

Aqui apresentamos a demonstração que foi omitida da Afirmação 3.1 no Capítulo 3.

**Afirmação A.1.** *Se  $max_1$  é um múltiplo de  $2 * Cap$  então a demanda do item no problema  $P_1$  é 2.*

**Demonstração:** Suponha que  $max_1$  seja um múltiplo de  $2 * Cap$ . Então,  $max_1$  é par e pode ser escrito na forma  $2 * Cap * n$ , para algum  $n \in \mathbb{N}^*$ . Para definirmos  $dmax_1$ , temos que encontrar um múltiplo de  $Cap$  que seja maior ou igual a  $\frac{max_1}{2}$  (ver 3.13). Mas  $max_1 = 2 * Cap * n$ , então

$$\frac{max_1}{2} = \frac{2 * Cap * n}{2} = n * Cap.$$

Portanto, um múltiplo de  $Cap$  que seja maior ou igual a  $\frac{max_1}{2}$  é o próprio  $n * Cap$ . Logo,  $dmax_1 = n * Cap$ .

Como o primeiro valor de  $F_0 = dmax_1$ , então a demanda de maior valor no problema original,  $max_1$ , tem o seguinte valor no problema auxiliar ( $\tilde{b}_{max}$ ):

$$\tilde{b}_{max} = \left\lfloor \frac{max_1}{F_0} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{max_1}{dmax_1} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2 * n * Cap}{n * Cap} \right\rfloor = 2.$$

Logo, a demanda auxiliar do item de maior demanda original é 2. ■

# Apêndice B

## Tabelas de Itens dos Produtos da Luapa

Exibimos aqui, os conjuntos completos dos dados utilizados no estudo computacional descrito no Capítulo 4. Todas as tabelas mostradas aqui trazem o nome do item (**Item**), a quantidade (**Qtd**) necessária para compor uma unidade do produto, seu comprimento ( $l_i$ ), e largura ( $w_i$ ) respectivas.

Nas tabelas B.1, B.2 e B.3 encontram-se os componentes do criado, do armário de 5 portas e da cômoda, respectivamente. Os objetos a serem cortados têm dimensões  $L \times W = 2750 \times 1830$ . Nestas tabelas os itens são apresentados separados pela espessura dos objetos de onde estes serão cortados.

<b>Crd-03</b>	<b>Item</b>	<b>Qtd</b>	$l_i$	$w_i$
1	Fundo da gaveta	3	388	377
2	Lateral	2	410	383
3	1/2 Contra fundo	4	445	213
<b>Crd-12</b>				
1	Lateral da gaveta	6	390	110
2	Contra fundo gav. med	3	370	110
<b>Crd-15</b>				
1	Tampo e base	2	600	440
2	Frente gaveta	3	450	132

Tabela B.1: Componentes do Criado

<b>A5P-03</b>	<b>Item</b>	<b>Qtd</b>	<b><math>l_i</math></b>	<b><math>w_i</math></b>
1	Tampo da base	6	2500	565
2	Fundo da gaveta	4	647	453
3	Contra fundo do gaveteiro grd	2	710	454
4	Contra fundo do gaveteiro pqn	2	454	454
5	Contra fundo camiseiro	5	1080	454
6	Contra fundo maleiro	5	530	454
7	Divisória do camiseiro	1	1050	500
8	1/2 Lateral sapateira	2	483	215
<b>A5P-09</b>				
1	Prateleira do calceiro	1	510	450
<b>A5P-12</b>				
1	Lateral da gaveta	8	454	180
2	Contra fundo gaveta	4	635	180
<b>A5P-15</b>				
1	Porta do camiseiro	5	1049	452
2	Porta do maleiro	5	499	452
3	Porta do gaveteiro	2	452	429
4	Lateral do camiseiro	2	1050	535
5	Lateral do maleiro	2	535	500
6	Lateral do gaveteiro	2	535	430
7	Frente do gavetão	4	700	212
<b>A5P-20</b>				
1	Molduras tras. e diant. base	12	2500	60
2	Lateral da base	12	445	60
3	Travessa da base	26	445	40
4	Travessa da corredeira	1	490	60
5	Sarrafo tras. do maleiro	3	500	60
6	Sarrafo tras. do camiseiro	5	1050	60
7	Sarrafo tras. do gaveteiro	3	430	60
8	Pinázio grosso (20-1)	4	440	60
9	Pinázio grosso (20-2)	2	1060	60
<b>A5P-25</b>				
1	Pinázio grosso (25-1)	2	430	60
2	Pinázio grosso (25-2)	4	500	60
3	Pinázio grosso (25-3)	4	1050	60

Tabela B.2: Componentes do Armário de 5 Portas

<b>Cmd-03</b>	<b>Item</b>	<b>Qtd</b>	<b><math>l_i</math></b>	<b><math>w_i</math></b>
1	Contra fundo	2	710	535
2	Lateral	2	1062	530
3	Fundo da gaveta	6	647	453
<b>Cmd-09</b>				
1	Travessa colméia grd	3	630	50
2	Travessa colméia med	2	433	50
3	Travessa colméia pqn	3	295	50
<b>Cmd-12</b>				
1	Lateral gav. multiuso	2	440	65
2	Contra fundo gav. multiuso	1	635	50
3	Lateral gaveta grd	6	454	180
4	Contra fundo gav grd	3	635	180
5	Lateral gav med	4	454	135
6	Contra fundo gav med	2	635	135
<b>Cmd-15</b>				
1	Tampo e base	2	970	570
2	Frente gav multiuso	1	700	75
3	Frente gav grd	3	700	212
4	Frente gav med	2	700	163

Tabela B.3: Componentes da Cômoda

# Apêndice C

## Perda por Sobra de Material

Apresentamos aqui a correção feita na fórmula (2.4) dada para calcular a perda por sobra de material nos padrões de corte. A falha apresentada pela fórmula (2.4) é a seguinte. Considere o seguinte padrão de corte:

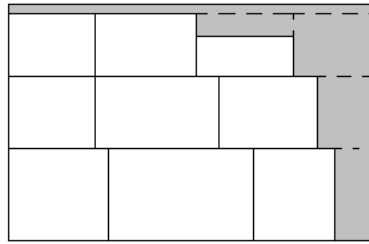


Figura C.1: Desgastes não contabilizados pela fórmula (2.4)

Note na Figura C.1 que as linhas tracejadas não são contabilizadas como perda por desgaste da serra usando a fórmula (2.4), pois não são adjacentes a nenhum item cortado. Partindo deste fato, construímos outra fórmula que calcula exatamente o desgaste provocado pela serra. Assim, podemos descontar o resultado obtido por esta nova fórmula da perda total de material e chegar à perda por sobra de material, como é o desejado.

Considerando que as dimensões do objeto cortados sejam  $L$  e  $W$  (comprimento e largura, respectivamente), que os itens tenham dimensões  $l_i$  e  $w_i$  (comprimento e largura, respectivamente, sendo  $m$  itens) e que a espessura da serra seja  $\delta$ , então a perda por desgaste da serra  $P_\delta$  é dada por:

$$P_\delta = \underbrace{\delta \cdot L \cdot N_{Tf}}_1 + \underbrace{\delta \cdot \sum_{k=1}^m n f_k \cdot \alpha_{ik} \cdot w_k}_2 + \underbrace{\delta \cdot \sum_{k=1}^m n f_k \cdot l_i \cdot \left\lceil \frac{w_k - w_i}{w_k} \right\rceil}_3, \quad (\text{C.1})$$

sendo  $N_{Tf}$  o número total de faixas no padrão de corte,  $nf_k$  o número de faixas do tipo  $k$  no padrão de corte e  $\alpha_{ik}$  é o número de itens do tipo  $i$  na faixa  $k$ .

Na fórmula (C.1), a parcela 1 calcula o desgaste provocado pela serra ao atravessar o objeto ao longo de seu comprimento (corte guilhotinado). A parcela 2 calcula o desgaste da serra ao atravessar a largura de cada faixa tantas vezes quantos são os itens contidos nela. A última parcela da fórmula é calculada apenas se a largura do item é estritamente menor que a largura da faixa em que se encontra tal item (padrão de corte não-exato). Seu valor é o desgaste da serra para realizar a apara do item, como a que aparece no padrão de corte da Figura C.1.

Simplificando a fórmula (C.1) e considerando que a perda por sobra é dada pela diferença entre a perda total e a perda pela serra ( $P_S = P_T - P_\delta$ ), a nova fórmula para a perda por sobra de material é dada pela seguinte expressão:

$$P_S = \left( L.W - \sum_{i=1}^m a_{ij}.l_i.w_i \right) - \left\{ N_{Tf}.L.\delta + \sum_{k=1}^m nf_k \left[ \sum_{i=1}^m \alpha_{ik}.\delta. \left( w_k + l_i. \left\lceil \frac{w_k - w_i}{w_k} \right\rceil \right) \right] \right\}, \quad (C.2)$$

em que  $a_i$  é o número total de itens no padrão de corte  $j$ .

É possível observar que esta fórmula está restrita a padrões de corte guilhotinados 2-estágios. Além disso, da forma como é apresentada em (C.2), ela é válida apenas para padrões de corte cujo primeiro estágio é feito ao longo de seu comprimento  $L$ . Não obstante, caso o primeiro estágio de cortes seja feito ao longo da largura  $W$  do objeto, a fórmula é análoga.

# Apêndice D

## Trechos do Código do Programa na Linguagem Mosel do Xpress

Aqui exibimos os trechos principais da implementação, no Xpress-Mosel, do Algoritmo 3 (descrito na Subseção 3.4.3) para a resolução do Problema de Corte de Estoque Bidimensional com menor número possível de ciclos da serra.

---

```
model "Cycles"
```

---

### **! Bibliotecas**

---

```
uses "mmsystem",  
     "mmive",  
     "mmxprs",    ! pacote p/ resolver prob. de otimiz.  
     "mmodbc"    ! pacote para ler o arquivo
```

---

### **! Declaração das sub-rotinas utilizadas**

---

```
forward procedure  Le_Dados    ! Leitura dos dados  
forward procedure  Max_Dem    ! Det. as 3 maiores demandas e os parâmetros  
                                ! de ajuste da demanda  
forward procedure  P_Homo     ! Construção dos padrões de corte hom. max.  
forward procedure  Ac_PadrH   ! Pré-seleção dos padrões de corte hom. max.  
forward procedure  Ac_Padr    ! Decisão de aceitar ou não o padrão de corte  
forward procedure  Prob_Sur   ! Problema auxiliar (surrogate)  
forward procedure  Mochila1   ! Determinação das faixas ótimas  
forward procedure  Mochila2   ! Determinação dos padrão bidim. ótimo
```

---



**! Declaração das funções utilizadas**


---

```
forward function colgen ! Gera padrões de corte para os prob. auxiliares
```

---

**! Declaração das variáveis globais**


---

```
declarations
```

```

    nr_Itens: integer    ! número de itens original
  nr_Padroes: integer    ! número total de padrões gerados
    Itens: range        ! Range dos itens originais
    Itens1: range       ! Range dos itens após a pré-seleção
  Padroes: range       ! Range dos padrões gerados
NmArqDados: string     ! Nome do Arq. de dados a ser lido
  NmArqSol: string     ! Nome do Arq. de saída
    fun: real          ! Auxiliar na função relaxação dos padrões de corte
  It_Width: array(range) of integer    ! Larguras dos itens
  It_Length: array(range) of integer    ! Comprimentos dos itens
It_Demand: array(range) of integer     ! Demanda dos itens
  Dem_Rest: array(range) of integer     ! Demanda residual
    L: integer    ! Comprimento do objeto
    W: integer    ! Largura do objeto
  Serra: integer ! Desgaste da serra
  CpT: integer   ! Capacidade Total da seccionadora
  esp: integer   ! Espessura do objeto
  Cap: integer   ! Espessura para a espessura esp
  Aceitos: set of integer          ! Conjunto dos padrões aceitos
    A: integer          ! Auxiliar para padrões aceitos
    N: array(range) of integer    ! Num. de vezes que o padrão é usado
  dmax1: integer    ! parâmetro para ajuste da demanda (vide (3.13))
  dmax2: integer    ! parâmetro para ajuste da demanda (vide (3.14))
  dmax3: integer    ! parâmetro para ajuste da demanda (vide (3.15))
    F0: integer     ! Fator de ajuste da demanda
  Dem_Sur: array(range) of integer ! Demanda auxiliar
    ZS: linctr      ! Função objetivo do problema auxiliar inicial
  pat: array(range) of mpvar    ! Variáveis do problema auxiliar
    P: array(range,range) of integer ! Itens nos padrões de corte

```

```
end-declarations
```

---

**! Início do processo**


---

```

Le_Dados
P_Homo
Max_Dem      ! Det. as 3 maiores demandas e calc. dmax1, dmax2 e dmax3

F0:=dmax1

forall(i in Itens1)do
    Dem_Sur(i):=floor(Dem_Rest(i)/F0)      ! Cálculo das demandas auxiliares
end-do

ZS := sum(p in Padroes)( pat(p) ) ! Define a função objetivo

forall(i in Itens1)do      ! Restrições do problema auxiliar inicial
    dem(i):= sum(p in Padroes)(pat(p)*P(p,i)) = Dem_Sur(i)
end-do

! Subrotina para gerar os padrões de corte para o problema auxiliar
objval:=colgen      ! A função retorna o valor da função objetivo
                ! do último problema auxiliar resolvido

! Escrever resultado no arquivo de saída
fopen(NmArqSol,F_APPEND)
    writeln("Total de Objetos Cortados: ", NT)
    writeln("Número de Padrões Utilizados: ", getsize(Aceitos))
    writeln("Número Total de Ciclos Necessários: ", sum(j in Padroes)C(j))
fclose(F_APPEND)

```

---

**! Fim do processo**

\*\*\*\*\*

Descrição das sub-rotinas utilizadas.

**! Leitura dos dados**


---

```

procedure Le_Dados
    write("Informe o nome do Arquivo de Dados sem extensão: ")
    fflush
    readln(NmArqDados)

    NmArqDados := NmArqDados+".dat"
    NmArqSol := NmArqDados-".dat"+" .sol"

```

```

initializations from NmArqDados ! Leitura dos demais dados
    nr_Itens; L; W; CpT; esp; Serra;
end-initializations
Cap:=floor(CpT/esp) ! Em número de objetos
! Auxiliar de relaxação de ef.

fun:=0.0008973214284*Cap2-0.02747321428*Cap+0.2155357143
initializations from NmArqDados ! Leitura dos dados de item
    [It_Lenght,It_Width,It_Demand,It_Weighth] as "vt_Itens"
end-initializations

! Gravação em arquivo dos itens lidos
fopen(NmArqSol,F_OUTPUT)
    writeln("Arquivo: ",NmArqDados)
    writeln("Relação de Itens - Originais")
    forall(i in Itens)
        writeln("Item ",strfmt(i,2)," : ",strfmt(It_Width(i),4),"x ",
            strfmt(It_Lenght(i),4), " - ", strfmt(It_Demand(i),4))
    fclose(F_OUTPUT)
end-procedure

```

---

### **! Construção dos padrões de corte homogêneos maximais**

---

```

procedure P_Homo
    forall(i in Itens)do          ! Determinar as faixas homogêneas
        xh(i):=floor(Li/li(i))
    end-do

    forall(i in Itens)do        ! Determinar os padrões homogêneos
        yh(i):=floor(Wi/wi(i))
    end-do

    ! Montar a matriz dos padrões homogêneos maximais
    forall(j in Itens)do
        forall(i in Itens)do
            P(i,j):=0
            if(j=i)then
                P(i,j):=xh(i)*yh(i)
            end-if
        end-forall
    end-forall
end-procedure

```

```

        end-if
    end-do
end-do
! Cálculo da eficiência e perdas (em %) dos padrões homogêneos
! A_Obj: área do objeto
! A_U(j): área de utilização do padrão homogêneo j
forall(j in Itens)do
    perda(j):=100*(A_Obj-A_U(j))/A_Obj
    Eff(j):=100-perda(j)
end-do

Ac_PadrH      ! Aceitar ou não os padrões de corte homog.
end-procedure

```

---

### **! Decidir se aceita ou não os padrões de corte homogêneos maximais**

---

```

procedure Ac_PadrH
    Hom:={}      ! Inicializando o conjunto dos homogêneos aceitáveis
    forall(j in Itens)do
        if(Ef(j)>90)then      ! Se sua eficiência é maior que 90%,
            Hom+={j}        ! então é aceitável.
        end-if
    end-do

    ! Aceitar os padrões homogêneos o maior número de vezes
    forall(k in Hom)do      ! Enquanto tiver homogêneo aceitável
        N(k):=floor(Dem_Rest(k)/P(k,k))
        C(k):=ceil(N(k)/Cap)    ! Número de ciclos para o padrão k

        fopen(NmArqSol,F_APPEND) ! Escrever no arquivo de
        if(N(k)>EPS)then      ! saída os padrões aceitos
            NP+=1
            writeln("Padrão homogêneo maximal ",k,"aceito!")
            write("Usado ",N(k),"vezes em ",C(k),"ciclo(s).")
            writeln("Perda(",k,"): ",perda(k),"/ Efic.(",k,"): ",Ef(k))
            forall(i in Itens)
                writeln("P(",k," ",i,"): ",P(k,i))
            end-forall
        end-if
    end-forall
end-procedure

```

```
        end-if
        fclose(F_APPEND)
    end-do
    if(N(k)>EPS)then          ! Se o padrão foi aceito então, atualize as demandas.
        forall(i in Itens)do
            Dem_Rest(i)-=integer(N(k)*P(k,i))
        end-do
        Aceitos+=k          ! Inclua o padrão no conjunto dos padrões aceitos
    end-if

    ! Determinar quantos itens ainda têm demanda positiva (>ESP=10-6)
    nr_Items1:=0
    j:=0
    forall(i in Itens)do
        if(Dem_Rest(i)>EPS)then
            j+=1
            R(j):=i
            nr_Items1+=1
        end-if
    end-do

    ! Reorganizar os itens com seus respectivos dados (e dos padrões também),
    ! caso algum item tenha sua demanda já atendida
    if(nr_Items1>EPS)then
        Items1:=1..nr_Items1
        nr_Padros:=nr_Items1
        Padros:=1..nr_Padros
        forall(i in Itens)do
            l(i):=It_Lenght(i)
            w(i):=It_Width(i)
            aux(i):=Dem_Rest(i)
            Aux(i):=A_It(i)    ! área dos itens
            Ph(i,i):=P(i,i)
            It_Lenght(i):=0
            It_Width(i):=0
        end-do
    end-if
```

```

        Dem_Rest(i):=0
        P(i,i):=0
        A_It(i):=0
    end-do
    forall(i in 1..j)do
        It_Lenght(i):=l(R(i))
        It_Width(i):=w(R(i))
        Dem_Rest(i):=aux(R(i))
        P(i,i):=Ph(R(i),R(i))
        A_It(i):=Aux(R(i))
        A_U(i):=A_It(i)*P(i,i) ! Área do objeto utilizada pelo padrão
        perda(i):=100*(A_Obj-A_U(i))/A_Obj
        Eff(i):=100-perda(i)
    end-do
end-if
end-procedure

```

---

**! Determinar as 3 maiores demandas e os valores de dmax1, dmax2 e dmax3**

```

procedure Max_Dem
    forall(i in Itens)do ! Maior Demanda
        if(max1<=Dem_Rest(i))then
            max1:=Dem_Rest(i)
            ind1:=i
        end-if
    end-do

    forall(i in Itens)do ! Segunda maior demanda
        if(max2<=Dem_Rest(i))then
            if(ind1<>i)then
                max2:=Dem_Rest(i)
                ind2:=i
            end-if
        end-if
    end-do
end-procedure

```

```

forall(i in Itens)do ! Terceira maior demanda
  if(max3<=Dem_Rest(i))then
    if(ind1<>i and ind2<>i)then
      max3:=Dem_Rest(i)
      ind3:=i
    end-if
  end-if
end-do

! Determinar dmax2, dmax3, dmax3 (vide (3.13), (3.14) e (3.15))
Max:=0
while(Max<max1/2)do
  Max+=Cap
end-do
dmax1:=Max

Max:=0
while(Max<=max2)do
  Max+=Cap
end-do
dmax2:=Max-Cap

Max:=0
while(Max<=max3)do
  Max+=Cap
end-do
dmax3:=Max-Cap

end-procedure

```

---

### **! Problema da Mochila1 - geração das faixas ótimas**

---

```

procedure Mochila1
  declarations
    Y1: array(Itens1) of mpar ! Número de itens que aparecem na faixa
    Z1: linctr ! "Valor de utilidade" da faixa
  end-declarations

```

```

forall(i in Itens1)do
  Y1(i) is_integer
  Y1(i)<=Dem_Rest(i)      ! Restrito às demandas residuais
end-do

! Definição da função objetivo
Z1:=sum (i in Itens1)(Pi1(i)*Y1(i))
! Restrição física de comprimento do objeto
Rest1:=sum(i in Itens1)(l1(i)*Y1(i))<=L1

! Resolve o problema
maximize(Z1)

! Armazenar o valor da função objetivo na solução ótima e das soluções ótimas
z1(k):=getobjval
forall(kk in Itens1)do
  y1(k,kk):=getsol(Y1(kk))
end-do

```

---

### **! Problema da Mochila2 - geração do padrão bidimensional**

---

```

procedure Mochila2
  declarations
    Y2: array(Itens1) of mpvar      ! Número de itens que aparecem na faixa
    Z2: linctr      ! "Valor de utilidade" da faixa
  end-declarations

  ! Restrição de integralidade das variáveis
  forall(i in Itens1)do
    Y2(i) is_integer

  ! Definição da função objetivo
  Z2:=sum (i in Itens1)(V(i)*Y2(i))
  ! Restrição Física para a largura do objeto
  Rest2:=sum(i in Itens1)(w2(i)*Y2(i))<=W2

  ! Restrição para o número de itens com relação às demandas residuais
  forall(i in Itens1)do
    Rest2a(i):=sum(j in Itens1)y1(j,i)*Y2(j)<=Dem_Rest(i)
  end-do
end-procedure

```



```

! Resolve o problema
maximize(Z2)

! Armazenar o valor da função objetivo na solução ótima e das soluções ótimas
z2:=getobjval
forall(kk in Itens1)do
  y2(kk):=getsol(Y2(kk))
end-do

```

---

### **! Processo da geração dos padrões de corte para o problema auxiliar**

```

function colgen
  declarations
    Pi: array(Itens1) of real ! variáveis duais do problema auxiliar
    vi: array(Itens1) of real ! variável auxiliar usada para a geração das faixas
  end-declarations

  setparam("XPRS_presolve",0) ! desliga o presolver
  setparam("XPRS_cutstrategy",0) ! desliga planos de corte

  ! Inicializa o número total de padrões
  npatt:=getsize(Padroes)

  ! Carregar o problema definido anteriormente
  loadprob(Z)

  while(cabe<EPS)do ! Enqto os itens restantes não couberem no objeto, faça
    minimize(XPRS_LIN,Z) ! Resolve a Relaxação Linear do problema auxiliar
    savebasis(1) ! Salva a Base Ótima

    forall(i in Itens1)do ! Armazena a solução ótima dual
      Pi(i):=getdual(Rest(i))
    end-do

    forall(i in Itens1)do
      cont:=0 ! Contador de Problemas da Mochila não vazios
      forall(j in Itens1)do
        if(It_Width(j)<=It_Width(i))then
          vi(j):=Pi(j) ! Determinar os coef. da fç. obj. do Problema da Mochila

```

```
else
  vi(j):=0
end-if
if(vi(j)>EPS)then
  cont+=1      ! Contador para decidir se resolve o Problema da Mochila
end-if
end-do

if(cont>EPS)then
  Mochila1      ! Problema da Mochila para gerar faixas - só resolve se
end-if      ! algum coef. da sua fç. obj. for estritamente positivo
end-do

Mochila2      ! Problema da Mochila para combinar as faixas geradas

forall(i in Itens1)do
  xbest(i):=sum(j in Itens1)integer(y2(j)*y1(j,i))      ! Padrão Bidimensional gerado

nr_Padros+=1      ! Incrementar o número de padrões de corte gerados
Padros:=1..nr_Padros
npatt:=getsize(Padros)

! Armazenar a solução num padrão P(j,i)
forall(i in Itens1)do
  P(npatt,i):=xbest(i)

forall(i in Itens1)do      ! Recarregando o conjunto de restrições
  Rest(i):= sum(p in Padros)(pat(p)*P(p,i)) = Dem_Sur(i)

create(pat(npatt))      ! Criando uma nova variável para o padrão recém-gerado
pat(npatt) is_integer

! Incluir a nova variável no conjunto de restrições e na função objetivo
Z+=pat(npatt)
forall(i in Itens1)do
  Rest(i)+=xbest(i)*pat(npatt)

loadprob(Z)      ! Recarrega o problema
loadbasis(1)      ! Recarrega a base
```

```

minimize(XPRS_LIN,Z)                ! Resolve a Relaxação Linear
savebasis(1)                        ! Salva a Base Ótima

A_U(npatt):=sum(i in Itens1)A_It(i)*P(npatt,i)    ! Cálculo da área utilizada pelo padrão

! Cálculo da eficiência e das perdas (em porcentagem) de cada padrão gerado
perda(npatt):=100*(A_Obj-A_U(npatt))/A_Obj
Eff(npatt):=100-perda(npatt)
writeln("EFF(",npatt,"): ", Eff(npatt))

! Aceitar ou não o padrão de corte gerado
Ac_Padr

! Verificar se os itens restantes cabem num único padrão de corte
Sum:=0
cabe:=0
forall(i in Itens1)do
  if(Dem_Rest(i)>EPS)then
    Sum+=It_Lenght(i)*It_Width(i)*Dem_Rest(i)
  end-if
end-do
if(Sum<=A_Obj)then
  cabe:=1
end-if

! Atualizar as demandas do problema auxiliar
forall(i in Itens1)do
  Dem_Sur(i):=floor(Dem_Rest(i)/F0)
! Recarregando o conjunto de restrições
forall(i in Itens1)do
  Rest(i):= sum(p in Padroes)(pat(p)*P(p,i)) = Dem_Sur(i)
end-do                ! Fim da geração de colunas
end-do                ! Fim do processo

! Se existe algum item para incluir no último padrão de corte,
if(Sum>EPS)then      ! então construir um padrão com os itens restantes.
  npatt+=1

```

```

nr_Padros:=npatt
Padros:=1..nr_Padros
forall(i in Itens1)do
    P(npatt,i):=Dem_Rest(i)

! Cálculo da eficiência do último padrão de corte
A_U(npatt):=sum(i in Itens1)A_It(i)*P(npatt,i)
perda(npatt):=100*(A_Obj-A_U(npatt))/A_Obj
Eff(npatt):=100*A_U(npatt)/A_Obj
NT+=1
returned:=NT ! Armazena o valor da solução atual, que é n. total de padrões usados
NP+=1
C(npatt):=1
end-if    ! Fim da construção do último padrão de corte
end-function

```

---

### **! Processo de decisão de aceitar ou não os padrões de corte gerados**

```

procedure Ac_Padr

declarations
    cutoff: real ! Parâmetro para a decisão de corte
    co_fator: real ! Fator de correção
    effref: real ! Referência de eficiência
    m: array(range) of integer ! Auxiliar para o número de ciclos e de padrões
end-declarations

if(F0>=Cap)then    ! Determinação do Fator de correção
    co_fator:= 1
elif(F0>1 and F0<Cap)then
    co_fator:=(Cap+1+F0)*fun
elif(F0=1)then
    co_fator:=0
end-if

! Cálculo do cutoff value
cutoff:=effref*co_fator

```

```
! Verificar se algum padrão é aceitável
A:=0
if(Ef>cutoff)then ! Se a eficiência do padrão gerado (npatt) for aceitável
    A:=npatt
    Aceitos+=A ! Inclua o padrão no conjunto de aceitos
end-if

! Se algum padrão foi aceito, então
if(A>EPS)then
    ! Incrementa o número de padrões utilizados
    NP+=1
    s:=0
    forall(i in Itens1)do
        if(P(A,i)>EPS)then
            s+=1
            m(s):=floor(Dem_Rest(i)/P(A,i)) ! Utilize no maior número de objetos
        end-if
    end-do
    N(A):=min(i in 1..s)m(i) ! Número de objetos cortados segundo o padrão gerado

    ! Incrementa o número de objetos cortados
    NT+=N(A)
    ! Cálculo do número de ciclos da serra para o padrão
    C(A):=ceil(N(A)/Cap)

    ! Atualiza a Demanda dos itens
    forall(i in Itens1)do
        Dem_Rest(i)-=N(A)*P(A,i)
    end-do

    ! Buscar as novas maiores demandas
    Max_Dem
    ! Atualizar o valor de F0!!!
    F0:=dmax2
else
    ! Se nenhum padrão de corte foi aceito, então
```

```
! Atualizar o valor de F0
if(F0>Cap)then
  if(F0>dmax3)then
    F0:=dmax3
  else
    F0=Cap
  end-if
else
  F0=1
end-if
end-if
writeln("Voltar à geração de colunas.")
end-procedure
```

---

```
end-model    ! Fim do modelo
```

---

# Lista de Figuras

1	Equivalência entre Corte e Empacotamento . . . . .	1
1.1	Corte Unidimensional . . . . .	5
1.2	Corte Bidimensional . . . . .	6
1.3	Corte Tridimensional . . . . .	6
1.4	Exemplos de Padrões de Corte Unidimensionais . . . . .	9
1.5	Exemplo de Solução Simétrica no Caso Unidimensional . . . . .	11
1.6	Exemplo de Padrão de Corte Homogêneo Maximal Bidimensional . . . . .	14
1.7	Exemplo de Solução Simétrica no Caso Bidimensional . . . . .	14
1.8	Convergência Lenta do Método de Geração de Colunas - <i>tail</i> [39] . . . . .	23
1.9	Exemplo de Padrão de Corte Guilhotinado e Não-Guilhotinado . . . . .	24
1.10	Padrão de Corte Guilhotinado 2-estágios . . . . .	24
1.11	Padrões de Corte 1-Grupo (ou Tabuleiro) e 3-Grupos (ou Tabuleiro Composto) . . . . .	25
1.12	Orientação dos Itens . . . . .	26
1.13	Padrão de Corte Bidimensional do tipo <i>T-shape</i> para itens circulares [17] . . . . .	31
1.14	Padrão de Corte Bidimensional do tipo <i>T-shape</i> para itens retangulares . . . . .	31
2.1	Localidade da cidade de Votuporanga . . . . .	35
2.2	Esboço da Linha de Produção da Fábrica de Móveis Luapa [12] . . . . .	38
2.3	Esboço da máquina seccionadora vista de cima . . . . .	40
2.4	Serras da máquina de corte . . . . .	41
2.5	Primeiro Corte do Primeiro Estágio . . . . .	41
2.6	Primeiro e Segundo Estágios de Cortes Simultâneos . . . . .	42
2.7	Padrões de Corte com Itens Agrupados . . . . .	43
2.8	Padrões de Corte 2-estágios e 3-estágios . . . . .	46
2.9	Exemplo - Objeto e itens . . . . .	47
2.10	Padrão de corte viável para a prática . . . . .	47
2.11	Padrão de corte inviável para a prática . . . . .	48

3.1	Gráficos da função <i>cutoff</i> para os possíveis valores de <i>Cap</i> . . . . .	72
3.2	Gráficos da função <i>cutoff'</i> para os possíveis valores de <i>Cap</i> . . . . .	74
3.3	Comportamento da função <i>cutoff'</i> com relação a <i>Cap</i> para $F_0 = Cap - 1$ e $F_0 = 2$ . . .	76
4.1	"1/2" Objeto $\times$ "1/2" Padrão de Corte . . . . .	99
C.1	Desgastes não contabilizados pela fórmula (2.4) . . . . .	108



# Lista de Tabelas

2.1	Pólos Moveleiros no Brasil . . . . .	34
2.2	Tamanhos dos lotes e demandas médias mensais . . . . .	37
3.1	Tabela dos intervalos da função <i>cutoff</i> para cada <i>Cap</i> . . . . .	73
3.2	Taxa de variação da eficiência dos padrões de corte aceitáveis, para cada <i>Cap</i> . . . . .	75
3.3	Tabela dos intervalos da função <i>cutoff'</i> para cada <i>Cap</i> . . . . .	76
4.1	Conjuntos de Exemplos, Tipos de Lotes, Espessuras Demandadas . . . . .	80
4.2	Componentes do Armário de 5 Portas . . . . .	81
4.3	Componentes da Cômoda . . . . .	82
4.4	Componentes do Criado . . . . .	82
4.5	Número de itens nos exemplares de lotes duplos heterogêneos . . . . .	83
4.6	Heurística TC × Indústria × Modelo de Multiplicidade - Lote Simples . . . . .	84
4.7	Heurística TC × Indústria × Modelo de Multiplicidade - Lote Duplo Homogêneo . . . . .	86
4.8	Heurística TC × Indústria × Modelo de Multiplicidade - Lote Duplo Heterogêneo . . . . .	87
4.9	Resumo do Desempenho da Heurística TC, Indústria e Modelo de Multiplicidade . . . . .	88
4.10	Algoritmo 2 × Algoritmo 3 - Lotes Simples . . . . .	89
4.11	Algoritmo 2 × Algoritmo 3 - Lotes Duplo Homogêneo . . . . .	90
4.12	Algoritmo 2 × Algoritmo 3 - Lotes Duplo Heterogêneo . . . . .	91
4.13	Resumo do Desempenho do Algoritmo 2 e do Algoritmo 3 . . . . .	93
4.14	Algoritmo 2 × Algoritmo 3 × Algoritmo 3 Rot - Lotes Simples . . . . .	94
4.15	Algoritmo 2 × Algoritmo 3 × Algoritmo 3 Rot - Lotes Duplo Homogêneo . . . . .	94
4.16	Algoritmo 2 × Algoritmo 3 × Algoritmo 3 Rot - Lotes Duplo Heterogêneo . . . . .	95
4.17	Resumo do Desempenho das Estratégias de Solução . . . . .	96
4.18	Modelo de Multiplicidade × Algoritmo 3 × Algoritmo 3 Rot × Indústria . . . . .	97
B.1	Componentes do Criado . . . . .	105
B.2	Componentes do Armário de 5 Portas . . . . .	106

B.3 Componentes da Cômoda . . . . .	107
-------------------------------------	-----

# Referências Bibliográficas

- [1] ABIMÓVEL. *Panorama do Setor Moveleiro no Brasil: Informações Gerais*. Associação Brasileira das Indústrias do Mobiliário, Dezembro 2006.
- [2] ALVEZ, C., E CARVALHO, J. M. V. Accelerating column generation for the single and variable sized bin-packing problem. In *Anais do V Optimization (2004)*, V Optimization.
- [3] ARENALES, M. N. E MORABITO, R., E YANASSE, H. H. Problemas de corte e empacotamento. In *Livro-texto de Mini-curso do XXXVI SBPO (2004)*, XXXVI SBPO - Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional.
- [4] BARNHART, C.; JOHNSON, E. L., NEMHAUSER, G. L., SAVELSBERGH, M. W. P., E VANCE, P. H. Branch-and-price: Column generation for solving huge integer programs. *Operations Research* 46 (1994), 316–329.
- [5] BAZARAA, M. S., JARVIS, J. J., E HANIF, D. S. *Linear Programming and Network Flows*, 2 ed. New York: John Wiley & Sons, 1990.
- [6] BELOV, G. *Problems, Models and Algorithms in One- and Two-Dimensional Cutting*. Tese de Doutorado, Dresden University of Technology, 2004.
- [7] BELOV, G. E SCHEITHAUER, G. A branch-and-cut-and-price algorithm for one-dimensional stock cutting and two-dimensional two-stage cutting. *European Journal of Operational Research* 171 (2006), 85–106.
- [8] BERTASIMAS, D. E TSITSIKLIS, J. N. *Introduction to Linear Optimization*. Belmont: Athena Scientific, 1997.
- [9] CARPENTIER, M. P. J. *Análise numérica*, Fevereiro 1993.
- [10] CARVALHO, J. M. V. Exact solution of bin-packing problems using column generation and branch-and-bound. *Operations Research* 86 (1999), 629–659.

- [11] CARVALHO, J. M. V. LP models for bin packing and cutting stock problems. *European Journal of Operational Research* 141 (2002), 253–273.
- [12] CAVALI, R. Problemas de corte e empacotamento na indústria de móveis: Um estudo de caso. Dissertação de Mestrado, IBILCE-UNESP, 2004.
- [13] CHRISTOFIDES, N., E WHITLOCK, C. An algorithm for two-dimensional cutting problems. *Operations Research* 25, 1 (1977), 30–44.
- [14] CHVÁTAL, V. *Linear Programming*. W.H. Freeman, 1983.
- [15] CINTRA, G. F. *Algoritmos para Problemas de Corte de Guilhotina Bidimensional*. Tese de Doutorado, IME-USP, 2004.
- [16] CUI, Y. An exact algorithm for generating homogenous T-shape cutting patterns. *Computers and Operations Research* 32 (2005), 143–152.
- [17] CUI, Y. Generating optimal T-shape cutting patterns for circular blanks. *Computers and Operations Research* 32 (2005), 143–152.
- [18] DANTZIG, G. B. E WOLFE, P. The decomposition algorithm for linear programming. *Operations Research* 8 (1960), 101–111.
- [19] DIEGEL, A.; MILLER, G., MONTOCCHIO, E., VAN SCHALKWYK, S., E DIEGEL, O. Enforcing minimum run length in the cutting stock problem. *European Journal of Operational Research*, 171 (2006), 708–721.
- [20] DYCKHOFF, H. A typology of cutting and packing problems. *European Journal of Operational Research* 44, 2 (1990), 145–159.
- [21] DYCKHOFF, H., E FINKE, U. *Cutting and Packing in Production and Distribution: A Typology and Bibliography*. Springer-Verlag Co, 1992.
- [22] FIGUEIREDO, A. Análise de produtividade de padrões de corte na indústria de móveis. Dissertação de Mestrado, IBILCE-UNESP, 2006.
- [23] FIGUEIREDO, A., E RANGEL, S. Aplicação de modelos 2-estágios e 1-grupo na geração de padrões de corte na indústria moveleira. In *Anais do XXVIII CNMAC* (2005), XXVIII CNMAC - Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional.
- [24] FOERSTER, H. E WÄSCHER, G. Pattern reduction in one-dimensional cutting stock problems. *International Journal of Production Research* 38, 7 (2000), 1657–1676.

- [25] GILMORE, P. C. E GOMORY, R. E. A linear programming approach to the cutting-stock problem. *Operations Research* 9 (1961), 849–859.
- [26] GILMORE, P. C. E GOMORY, R. E. A linear programming approach to the cutting-stock problem - Parte II. *Operations Research* 11 (1963), 863–888.
- [27] GILMORE, P. C. E GOMORY, R. E. Multistage cutting stock problems of two and more dimensions. *Operations Research* 14 (1965), 1045–1074.
- [28] GRAMANI, M. C. N. O problema de corte bidimensional guilhotinado em 2-estágios e restrito. Dissertação de Mestrado, USP, 1997.
- [29] GRAMANI, M. C. N. E FRANÇA, P. M. The combined cutting stock and lot-sizing problem in industrial processes. *European Journal of Operational Research* 174, 1 (2006), 509–521.
- [30] GUIDORIZZI, H. L. *Um Curso de Cálculo*, 5 ed., vol. 1. LTC, 2001.
- [31] HAESSLER, R. W. Controlling cutting pattern changes in one-dimensional trim problems. *Operations Research* 23, 3 (1975), 483–493.
- [32] HEIPCKE, S. Column generation for a cutting stock problem, 2001. Disponível em [http://www.dashoptimization.com/home/cgi-bin/example.pl?id=mosel\\_solv\\_1](http://www.dashoptimization.com/home/cgi-bin/example.pl?id=mosel_solv_1), Último acesso: 28/03/2007.
- [33] HINXMAN, A. I. The trim-loss and assortment problems: A survey. *European Journal of Operational Research* 5 (1980), 8–18.
- [34] HOTO, R. S. V. *O Problema da Mochila Compartimentada Aplicado no Corte de Bobinas de Aço*. Tese de Doutorado, COPPE-UFRJ, 2001.
- [35] KANTOROVICH, L. V. Mathematical methods of organizing and planning production (traduzido de um trabalho em russo datado de 1939). *Management Science* 6 (1960), 366–422.
- [36] KATSURAYAMA, D. M. E YANASSE, H. H. Um algoritmo para geração de padrões tabuleiros exatos a partir de uma combinação dada de itens. In *Anais do XXXVI SBPO* (2004), XXXVI SBPO - Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional.
- [37] LASDON, L. S. *Optimization Theory for Large Systems*. MacMillan Company, 1970.
- [38] LODI, A. E MONACI, M. Integer linear programming models for 2-staged two-dimensional knapsack problems. *Mathematical Programming* 94 (2003), 257–278.

- [39] LOPEZ, M. A. L. P., E ARENALES, M. N. Estabilização da geração de colunas aplicada no problema de corte unidimensional de tamanhos variados. In *Livro de Resumos: IX Oficina Nacional de Problemas de Corte e Empacotamento* (2005), IX Oficina Nacional de Problemas de Corte e Empacotamento.
- [40] MARQUES, F. P. O problema da mochila compartimentada. Dissertação de Mestrado, ICMC-USP, 2000.
- [41] MARTELLO, S., E TOTH, P. *Knapsack Problems: Algorithms and Computer Implementations*. John Wiley & Sons, 1990.
- [42] MINISTÉRIO DO DESENVOLVIMENTO, INDÚSTRIA E COMÉRCIO EXTERIOR. A micro-empresa e empresa de pequeno porte. Disponível em <http://www.desenvolvimento.gov.br/sitio/sdp/proAcao/micEmpPequeno/micEmpPequeno.php>. Último acesso: 14/02/2007.
- [43] PORTAL MOVELEIRO. Pólos moveleiros. Disponível em [http://www.portalmoveleiro.com.br/polos/polos\\_abertura.html](http://www.portalmoveleiro.com.br/polos/polos_abertura.html). Último acesso: 14/02/2007.
- [44] MENEZES, M. A. F. Programação Linear, Março 2006. Em elaboração. LabPL UCG - Universidade Católica de Goiás. Último acesso: 13/12/2006.
- [45] MORABITO, R. E ARENALES, M. N. Um exame dos problemas de corte e empacotamento. *Pesquisa Operacional* 12, 1 (1992), 1–20.
- [46] MORABITO, R. E ARENALES, M. N. An AND/OR-graph approach to the solution of two-dimensional non-guillotine cutting problems. *European Journal of Operational Research* 84 (1995), 599–617.
- [47] MORABITO, R. E ARENALES, M. N. Staged and constrained two-dimensional guillotine cutting problems: An AND/OR-graph approach. *European Journal of Operational Research* 94 (1996), 548–560.
- [48] MORABITO, R. E ARENALES, M. N. Optimizing the cutting of stock plates in a furniture company. *International Journal of Production Research* 38, 12 (2000), 2725–2742.
- [49] MORABITO, R. *Uma Abordagem em Grafo-E/OU para o Problema de Empacotamento: Aplicação ao Carregamento de Paletes e Contêineres*. Tese de Doutorado, EESC, USP, 1992.
- [50] MORAES, M. A. F. D. Estudo da competitividade de cadeias integradas no brasil: Impactos das zonas de livre comércio. Relatório técnico, UNICAMP, 2002.

- [51] MORAIS, J. M., VITORINO, C. A., E ALVES, M. A. P. *Boletim Estatístico de Micro e Pequenas Empresas*. Serviço Brasileiro de Apoio às Micro e Pequenas Empresas - SEBRAE, 2005.
- [52] MOSQUERA, G. P., E RANGEL, S. Análise de padrões de corte para redução de ciclos da serra. In *Anais do XXIX CNMAC* (2006), XXIX Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional.
- [53] PAULA, O. L. F. Desenvolvimento de PCP para micro e pequenas empresas utilizando como base o PERT-CPM. Dissertação de Mestrado, UFSC, 2001.
- [54] PILEGGI, G. C. F. *Abordagens para Otimização Integrada dos Problemas de Geração e Seqüenciamento de Padrões de Corte*. Tese de Doutorado, ICMC-USP, 2002.
- [55] PINTO, M. J. O problema de corte de estoque inteiro. Dissertação de Mestrado, ICMC-USP, 1999.
- [56] PINTO, M. J. *Algumas Contribuições à Resolução do Problema de Corte Integrado ao Problema de Seqüenciamento dos Padrões*. Tese de Doutorado, INPE, 2004.
- [57] POLDI, K. C. Algumas extensões do problema de corte de estoque. Dissertação de Mestrado, ICMC-USP, 2003.
- [58] RANGEL, S. O problema de corte bidimensional. Dissertação de Mestrado, IMECC-UNICAMP, 1989.
- [59] RANGEL, S., E FIGUEIREDO, A. Geração de padrões de corte produtivos para a indústria de móveis. In *Anais do XXXVIII SBPO* (2006), XXXVIII SBPO - Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, pp. 1626–1636.
- [60] RANGEL, S., E FIGUEIREDO, A. O problema de corte de estoque em indústrias de móveis de pequeno e médio porte. *Submetido para Pesquisa Operacional* (2007).
- [61] SALLES NETO, L. L. *Modelo Não-Linear para Minimizar o Número de Objetos Processados e o Setup num Problema de Corte Unidimensional*. Tese de Doutorado, UNICAMP, 2005.
- [62] SCHEITHAUER, G. E REITZ, J. Tighter bounds for the GAP and non-IRUP constructions in the one-dimensional cutting stock problem. *Optimization* 51 (2002), 927–963.
- [63] SCHEITHAUER, G. E TERNO, J. The modified integer Round-up property of the one-dimensional cutting stock problem. *European Journal of Operational Research* 84 (1995), 562–571.

- [64] SILVA, C. T. L., E ARENALES, M. N. Problemas de dimensionamento de lotes e corte de estoque acoplados na indústria de móveis. In *Anais do XXXIX SBPO (A ser publicado no Anais)* (2007), XXXIX SBPO - Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional.
- [65] SILVA, E. M., E SANTOS, F. C. A. Análise do alinhamento da estratégia de produção com a estratégia competitiva na indústria moveleira. *Revista Produção* 15, 2 (2005), 286–299.
- [66] UMETANI, S., YAGIURA, M., E IBARAKI, T. One-dimensional cutting stock problem to minimize the number of different patterns. *European Journal of Operational Research* 146 (2003), 388–402.
- [67] VANCE, P. H. Branch-and-price algorithms for the one-dimensional cutting stock problem. *Computational Optimization and Applications*, 9 (1998), 211–228.
- [68] VANDERBECK, F. Exact algorithm for minimizing the number os setups in the one-dimensional cutting stock problem. *Operations Research, work paper version* 48 (2000), 915–926.
- [69] VANDERBECK, F. E WOLSEY, L. A. An exact algorithm for IP column generation. *Operations Research Letters* 19 (1996), 151–159.
- [70] WÄSCHER, G., E GAU, T. Heuristics for the integer one-dimensional cutting stock problem: A computational study. *Operations Research Spektrum* 18 (1996), 131–144.
- [71] WÄSCHER, G., HAUßNER, H., E SCHUMANN. An improved typology of cutting and packing problems. *To appear in European Journal of Operational Research* (2006).
- [72] YANASSE, H. H., HARRIS, R. G., E ZINOBER, A. S. I. Uma heurística para redução do número de ciclos da serra no corte de chapas. In *Anais do XIII ENEGEP* (1993), vol. 2, XIII ENEGEP/ I Congresso Latino Americano de Engenharia Industrial, pp. 879–885.
- [73] YANASSE, H. H., E LIMEIRA, M. S. A hybrid heuristic to reduce the number of different patterns in cutting stock problems. *Computers and Operations Research* 33 (2006), 2744–2756.
- [74] YANASSE, H. H., E MORABITO, R. Linear models for 1-group two-dimensional guillotine cutting problems. *International Journal of Production Research* (2006), 1–21.
- [75] YANASSE, H. H., E MORABITO, R. A note on linear models for 2-group and 3-group two-dimensional guillotine cutting problems. *International Journal of Production Research* (2006), 1–18.
- [76] YANASSE, H. H., ZINOBER, A., E HARRIS, R. Two-dimensional cutting stock with multiple stock sizes. *Journal of the Operational Research Society* 42, 8 (1991), 673–683.



# Índice Remissivo

*Setup*, 50

Variável de, 51

Autores

Arenales, 4

Belov, 58

Chvátal, 4

Dantzig, 3

Dyckhoff, 4, 5, 7

Finke, 4

Foerster, 4

Gilmore, 4, 8, 11, 12

Gomory, 4, 8, 11, 12

Haessler, 4, 59

Harris, 59

Hinxman, 4

Kantorovich, 3, 8, 10

Lasdon, 4

Limeira, 4, 58

Martello, 4, 10

Morabito, 4

Salles Neto, 58

Toth, 4, 10

Umetani, 58

Wäscher, 4

Yanasse, 4, 58, 59

Zinober, 59

Ciclos da Serra, 44

número de, 45

Decomposição

de Dantzig-Wolfe, 16

Estrutura P-Bloco Angular, 16

Heurística, de, 29

Heurística

Algoritmo 1, 59

Descrição, 59

Algoritmo 2

Descrição, 62

Pseudo-código, 63

Algoritmo 3

Descrição, 71

Pseudo-código, 76

de Haessler

Descrição, 55

Heurística TC, 31

Indústria Moveleira, 32

Matérias-Primas, 35

Pólo de Votuporanga, 34

Pólos Moveleiros, 34

Método

*Branch-and-Bound*, 22, 30

*Branch-and-Cut-and-Price*, 22, 51

*Branch-and-Cut*, 79

*Branch-and-Price*, 22

de Gilmore e Gomory, 27, 31, 64

Planos de Corte, 22

Simplex com Geração de Colunas, 19

Custos Relativos, 20  
 Multiplicadores Simplex, 20  
 Problema Mestre, 19  
 Subproblema, 20  
 Modelo de Multiplicidade, 54  
 Padrão de Corte, 9  
   Equivalente, 9  
   Exato, 25, 29, 30  
   Guilhotinado, 24  
     1-grupo, 25, 30  
     2-estágios, 24, 27  
     n-grupo, 25  
   Homogêneo, 9  
     Homogêneo Maximal, 9, 62  
   Não-Exato, 25, 29  
   T-shape, 30  
   Tabuleiro, 25, 31  
     Tabuleiro Composto, 25, 31  
 Perda  
   por Sobra, 49  
   Total  
     Caso Bidimensional, 13  
     Caso Unidimensional, 9  
 Problema  
   *Pricing*, 20  
   Corte Bidimensional, 5, 12, 59  
     na Indústria de Móveis, 32  
   Corte Tridimensional, 6  
   Corte Unidimensional, 5, 8  
     de Gilmore e Gomory, 11  
     de Kantorovich, 10  
   da Mochila, 8, 20  
   Mestre, 19  
   Residual, 22  
   Restrição  
     de Acoplamento, 17  
     de Convexidade, 18  
     Física, 8  
   Valor de Utilidade, 5, 20