

**Propostas de Solução para o Problema de
Corte de Estoque Bidimensional de uma
Fábrica de Móveis de Pequeno Porte**

Ana Paula Faccio

Dissertação de Mestrado
Pós-Graduação em Matemática Aplicada

Propostas de Solução para o Problema de Corte de Estoque Bidimensional de uma Fábrica de Móveis de Pequeno Porte

Ana Paula Faccio ¹

Dissertação a ser apresentada no Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de São José do Rio Preto, São Paulo, para a obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada.

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Maria do Socorro N. Rangel

São José do Rio Preto

2008

¹contato: apfaccio@yahoo.com.br

ANA PAULA FACCIÓ

Propostas de Solução para o Problema de Corte de Estoque Bidimensional
de uma Fábrica de Móveis de Pequeno Porte

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, *campus* de São José do Rio Preto.

BANCA EXAMINADORA

Prof^a. Dr^a. Maria do Socorro N. Rangel
Livre Docente
UNESP - São José do Rio Preto

Prof. Dr. Robinson Samuel Vieira Hoto
Professor Adjunto
UEL - Londrina

Prof. Dr. Silvio Alexandre Araujo
Professor Assistente Doutor
UNESP - São José do Rio Preto

São José do Rio Preto, 27 de fevereiro de 2008.

Aos meus pais

e irmão

Dedico

Agradecimentos

A Deus por estar sempre presente, me guiando e iluminando.

Aos meus pais, Clemente e Maria, e ao meu irmão e cunhada, Saulo e Raiza, pelo amor, carinho, paciência, presença e apoio incondicional em todos os anos de minha vida. Principalmente por terem sempre vibrado com minhas conquistas e me incentivado para que este sonho se tornasse realidade.

A toda a minha família pelo incentivo e carinho durante todos esses anos.

Em especial, agradeço à Prof^a. Dr^a. Maria do Socorro N. Rangel, pela valiosa orientação, amizade, dedicação, paciência e incentivo durante o desenvolvimento desta pesquisa.

Aos meus professores de graduação e pós-graduação pelo conhecimento transmitido. Em especial, ao Prof. Ivan José Coser pela amizade e incentivo.

Aos meus amigos que fizeram e fazem parte da minha vida, mesmo os mais distantes, pelo apoio, incentivo e paciência. Em particular, aos meus amigos e colegas do mestrado, com quem pude compartilhar muitos conhecimentos e amizades, em especial à amiga Gabi que nunca mediu esforços para me auxiliar. E a todos irmãozinhos de república (Mi, Vivi, André e Karlinha) e pensionato (Vanessa Marmota e Júlia) que sempre estiveram presentes tanto nas horas de trabalho como nas de descontração, sempre dispostos a ajudar e aguentar minhas reclamações.

A todos integrantes da Fábrica de Móveis Luapa (em especial ao Luiz Antonio, Paulo, Danilo, Jeová e Jarbas) por estarem sempre dispostos a nos receber e nos ajudar a realizar este trabalho.

Ao Prof. Dr. Horácio Yanasse e Prof. Dr. Reinaldo Morabito por terem cedidos os exemplares utilizados nos testes computacionais.

Ao Getúlio, Marcos, Olga, Carina e a todos os outros funcionários do IBILCE que, direta ou indiretamente, contribuíram com a realização deste trabalho.

Ao CNPQ pela credibilidade e apoio financeiro.

E finalmente a todas as pessoas que, direta ou indiretamente, colaboraram na elaboração deste trabalho, sintam-se agradecidos também...

"Nenhum problema pode ser resolvido pelo mesmo estado de consciência que o criou. É preciso ir mais longe. Eu penso 99 vezes e nada descubro. Deixo de pensar, mergulho num grande silêncio e a verdade me é revelada"

Albert Einstein.

Resumo

Neste trabalho, estudamos o problema de corte de estoque bidimensional aplicado ao corte da matéria-prima de uma fábrica de móveis. Este problema NP-difícil aparece em diversos outros processos industriais que incluem o corte de objetos retangulares grandes em itens retangulares menores que estão sendo requisitados. Analisamos a eficiência de alguns modelos lineares inteiros para problemas de corte guilhotinados bidimensionais propostos na literatura. Além disto, apresentamos resultados computacionais para o problema de corte de estoque de uma fábrica de móveis de pequeno porte, localizada no noroeste do estado de São Paulo. O estudo computacional realizado mostrou que as estratégias propostas fornecem resultados aceitáveis pela fábrica.

Palavras-Chave: corte de estoque bidimensional; cortes guilhotinados; padrões de cortes n-grupos; geração de colunas; indústria moveleira.

Abstract

In this work we study the two-dimensional cutting stock problem applied to the cutting of raw material in the furniture industry. This NP-hard problem appears in several other industrial processes that include cutting rectangular objects in smaller rectangular items that are being requested. We analyze the efficiency of some integer linear models for two-dimensional guillotine cutting problem proposed in the literature. We also present computational results for the cutting stock problem of a small furniture factory, located in the northwest of the state of São Paulo. The computational results show that the proposed strategies give results accepted by the factory.

Keywords: two-dimensional cutting stock; guillotine cutting; n-group cutting pattern; column generation; furniture industry.

Sumário

Introdução	1
1 Problemas de Corte e Empacotamento	3
1.1 Classificação dos Problemas de Corte e Empacotamento	4
1.2 O Problema de Corte de Estoque	10
1.3 Padrões de Cortes Bidimensionais	13
2 Técnicas de Resolução	24
2.1 Breve Histórico	24
2.2 Princípio de Decomposição de <i>Dantzig-Wolfe</i>	26
2.3 Método Simplex com Geração de Colunas	31
2.4 Métodos de Enumeração Implícita	36
3 Modelagem Matemática do Problema de Corte Guilhotinado Bidimensional	39
3.1 Modelo para gerar Padrões de Corte 1-grupo	39
3.2 Modelo para gerar Padrões de Corte 2-grupos	44
3.3 Modelo para gerar Padrões de Corte 3i-grupos	46
3.4 Padrões de Corte do Tipo “ <i>T</i> ”	48
3.4.1 Modelo para gerar Padrões de Corte 3t-grupos	49
3.4.2 Padrões de Corte do Tipo “ <i>T</i> ” Homogêneos	51
4 Problemas de Corte de Estoque na Indústria de Móveis	64
4.1 Panorama da Indústria de Móveis no Mundo	64
4.2 Panorama da Indústria de Móveis no Brasil	65
4.2.1 Pólo Moveleiro de Votuporanga	67

4.3	Uma Indústria Característica	68
4.3.1	A Linha de Produção	68
4.3.2	Planejamento da Produção	69
4.3.3	Corte da Matéria-prima	71
4.3.4	Análise dos Padrões de Corte	76
5	Estudo Computacional	81
5.1	Exemplares da Literatura	82
5.2	Exemplares de uma Fábrica Característica	85
6	Considerações Finais	100
A	Exemplares da Fábrica de Móveis Característica	102
B	Construção de um Padrão de Corte gerado com o Modelo 1-grupo	105
C	Geração de Colunas na sintaxe do Xpress-Mosel	107
	Lista de Figuras	117
	Lista de Tabelas	119
	Referências Bibliográficas	121

Introdução

A representação da realidade é uma necessidade da sociedade moderna, seja pela impossibilidade de lidar diretamente com esta, seja por aspectos econômicos, ou ainda por sua complexidade. Assim, busca-se a representação da realidade por meio de modelos que sejam bem estruturados e o mais representativos possível [69].

Atualmente, as indústrias enfrentam o desafio de melhorar sua competitividade e para isto, buscam produzir mais, com melhor qualidade e menor custo. Um dos fatores predominantes para a redução do custo de produção é o melhor aproveitamento da matéria-prima. O melhor aproveitamento do espaço, ou o menor desperdício da matéria-prima sugere redução de custos, resultando num lucro maior para a empresa.

Os estudos propostos nesta dissertação buscam por uma iteração da teoria com a prática, e são baseados em dados de uma indústria de móveis de pequeno porte, a Fábrica de Móveis Luapa, localizada no pólo moveleiro de Votuporanga, no noroeste do estado de São Paulo. Nesta indústria, predomina a produção de móveis residenciais retilíneos e o *MDF* (*Medium Density Fiberboard*) é utilizado como matéria-prima principal. Para a produção dos móveis, painéis retangulares de tamanho padrão (objetos) são cortados em retângulos menores (itens) e após passarem por outras fases (*e.g.* furação, pintura), originam os itens que irão compor o produto final. Este problema aparece na literatura como problema de corte de estoque bidimensional [34, 53] e tem tido grande importância nas últimas décadas devido sua abrangência e aplicabilidade nos mais diversos ramos industriais e comerciais (metalúrgicas, vidraçaria, entre outros).

O enfoque deste trabalho está voltado para a geração de padrões de cortes especiais e para a resolução do problema de corte de estoque bidimensional da fábrica de móveis em questão utilizando estratégias que visam atender à demanda dos itens com o menor número de objetos possível (ou minimizar a perda da matéria-prima).

No decorrer desta dissertação, expomos conceitos e conteúdos que julgamos necessários para o bom entendimento do trabalho. No Capítulo 1 discutimos a tipologia dos problemas de corte e empacotamento e apresentamos as principais definições relacionadas ao problema de corte bidimensional. Algumas técnicas de resolução para o problema de

cutte de estoque bidimensional são apresentadas no Capítulo 2. Em especial, a técnica de geração de colunas, a qual foi utilizada na construção dos algoritmos propostos para os testes do Capítulo 5.

O Capítulo 3 é dedicado a apresentar modelos matemáticos encontrados na literatura para gerar padrões de corte guilhotinados bidimensionais com algumas características particulares. No Capítulo 4 apresentamos um panorama geral da indústria de móveis, especificamente do pólo moveleiro de Votuporanga, onde está localizada a fábrica que utilizamos em nossos estudos. Ainda neste capítulo, apresentamos o processo de fabricação de um móvel, o planejamento da produção e os padrões de corte adotados pela mesma. No Capítulo 5 apresentamos e discutimos os resultados dos testes realizados para resolver o problema de corte e o problema de corte de estoque bidimensional, utilizando dados cedidos pela fábrica de móveis em questão. As considerações finais do trabalho e as perspectivas para trabalhos futuros são apresentadas no Capítulo 6.

Capítulo 1

Problemas de Corte e Empacotamento

No ambiente de produção de algumas indústrias, freqüentemente é necessário cortar painéis grandes (objetos) em partes menores (itens). Este problema é conhecido como problema de corte (*cutting problem*). É importante que os cortes sejam planejados, pois assim os efeitos negativos, tais como o desperdício de matéria-prima, podem ser minimizados, diminuindo os custos de produção. Este tipo de problema é de grande interesse prático e teórico e surge em muitas aplicações, tais como: corte de tecido [64], de bobinas de alumínio [40], de chapas de madeira [53], entre outras. Também na indústria ocorre o problema de empacotamento (*packing problem*), que consiste em alocar, de uma forma econômica, uma coleção de itens dentro do objeto.

Empacotar itens (por exemplo, caixas) em objetos maiores (por exemplo, páletes) e cortar objetos (por exemplo, couro) para produzir itens menores (por exemplo, carteiras) são problemas que apresentam uma estrutura lógica similar. Por isto, problemas de alocar ou cortar itens são referenciados na literatura simplesmente como problemas de corte e empacotamento.

Os problemas de corte e empacotamento vêm sendo estudados desde os trabalhos pioneiros de Leonid Vitaliyevich Kantorovich [46], onde são apresentados modelos matemáticos de programação linear e métodos de solução para o planejamento e organização da produção, e de Gilmore e Gomory [32, 33] que propuseram uma técnica de geração de colunas para obtenção de uma solução aproximada para os problemas de corte.

1.1 Classificação dos Problemas de Corte e Empacotamento

Dada a grande diversidade de tipos de problemas que ocorrem na prática, bem como o crescente interesse de pesquisadores pelo assunto, Harald Dyckhoff sugeriu em 1990 [26] uma maneira de sistematizá-los. Apesar de serem completamente diferentes do ponto de vista prático, os problemas de corte e empacotamento são abordados matematicamente, com as mesmas formulações e estratégias de resolução.

Dyckhoff juntamente com Finke, perceberam mais tarde que esta classificação dos problemas de corte e empacotamento estava incompleta para a descrição dos problemas. Assim, em 1992 [27] apresentaram um livro que reúne uma extensa bibliografia de diversos problemas da área, além de relacionar critérios associados à estrutura lógica e real dos problemas de corte e empacotamento, cujo objetivo não é o de simplesmente classificar os problemas, mas, estabelecer relações entre eles.

Devido ao crescente número de publicações na área de corte e empacotamento nas últimas duas décadas, recentemente, em 2007, Wäscher *et al.* [77] apresentaram modificações na tipologia de Dyckhoff [26]. Além disto, introduziram uma nova categoria que define problemas diferentes dos apresentados anteriormente. A nova tipologia é baseada nas idéias originais de Dyckhoff [26], porém é bem mais abrangente e precisa, permitindo que cada problema tenha uma única representação.

As quatro principais características propostas no trabalho de Dyckhoff [26] para classificar problemas de corte são: dimensão, tipo de alocação, sortimento de objetos e sortimento de itens.

- **Dimensão**

É uma das características mais importantes e está relacionada com o número de dimensões relevantes no processo de corte. Um problema de corte em relação à sua dimensão pode ser classificado em:

- Unidimensional, representado com o algarismo (1).

O problema é unidimensional quando apenas uma das dimensões é relevante no processo de corte. Ocorre por exemplo no processo de corte de barras de aço com a mesma seção transversal, em bobinas de papel. A Figura 1.1 ilustra este tipo de problema.

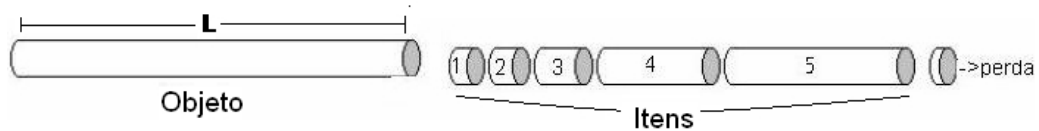


Figura 1.1: Problema unidimensional.

- Bidimensional, representado com o algarismo (2).

O problema é bidimensional quando duas dimensões são relevantes no processo de corte. Resolver este tipo de problema consiste em combinar geometricamente os itens ao longo do comprimento e da largura do objeto (Figura 1.2). Este problema ocorre por exemplo, no corte de chapas retangulares de madeira, de chapas de aço, de placas de vidro, *etc.*

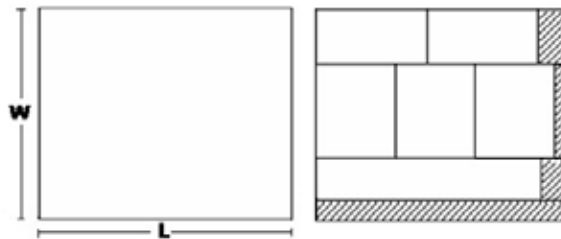


Figura 1.2: Problema bidimensional.

- Tridimensional, representado com o algarismo (3).

O problema é tridimensional quando três dimensões são relevantes no processo de corte. Exemplo: corte de blocos de espumas para fabricação de colchões, travesseiros, *etc.* Mas, o maior número de aplicações práticas são na solução do problema de empacotamento. Por exemplo, o carregamento de contêiner (Figura 1.3).

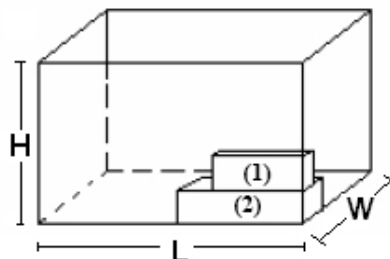


Figura 1.3: Problema tridimensional.

- N-dimensional ($N > 3$), representado por (N).

O problema é N-dimensional quando são relevantes mais de três dimensões.

Por exemplo, o investimento no mercado financeiro em vários períodos.

- $N \frac{1}{2}$ -dimensional, representado por ($N \frac{1}{2}$).

Esta dimensão foi apresentada por Haessler em 1978 [38]. Problemas em que $N+1$ dimensões são relevantes e uma delas é variável são denominadas de $N \frac{1}{2}$ -dimensionais. Por exemplo, o corte de bobina de aço onde uma dimensão não é suficiente na definição do padrão, mas duas dimensões vão além da necessidade, ou seja, uma das dimensões pode ser considerada ilimitada. Na Figura 1.4 a largura W da bobina é fixa e y_{jk} é o comprimento k a ser cortado no objeto j . Visto deste modo, o problema não é unidimensional e nem bidimensional, mas mais que uma dimensão é relevante. Neste caso trata-se de um problema $1 \frac{1}{2}$ dimensional. Uma revisão dos problemas de corte em suas várias dimensões foi feita em 1980 por Hinxman [43].

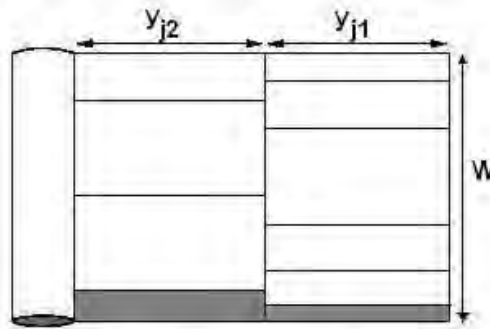


Figura 1.4: Problema $N \frac{1}{2}$ dimensional.

- **Tipo de alocação** - seleção dos objetos e itens

Os itens a serem produzidos são combinados respeitando restrições associadas aos objetos. Itens e objetos podem ser selecionados de acordo com as seguintes possibilidades de combinação:

- Todos os objetos e uma seleção de itens, representado por (B).

Neste caso, a quantidade de objetos existentes em estoque não é suficiente para atender todos os itens demandados e, com isto, alguns itens não são selecionados. Exemplos: problema da mochila [51].

- Uma seleção de objetos e todos os itens, representado por (V).

Neste caso a quantidade de objetos existentes em estoque é suficiente para atender todos os itens demandados e, assim alguns objetos não são selecionados.

Exemplos: problema de corte de estoque [34].

- **Sortimento dos objetos**

Característica que relaciona o aspecto dos objetos:

- Um objeto, representado por (O). Exemplo: problema da mochila (clássico) [51];
- Objetos com tamanhos idênticos, representado por (I). Exemplo: problema do *bin-packing* (clássico);
- Objetos com tamanhos diferentes, representado por (D). Exemplo: problema do *bin-packing* bidimensional.

- **Sortimento dos itens**

Característica que relaciona o aspecto dos itens:

- Poucos itens com tamanhos diferentes, representado por (F). Exemplo: problema do carregamento de veículos;
- Muitos itens com muitos tamanhos diferentes, representado por (M). Exemplo: problema de empacotamento (clássico);
- Muitos itens com poucos tamanhos diferentes, representado por (R). Exemplo: problema de corte de estoque bidimensional;
- Tamanhos iguais, representado por (C). Exemplo: problema do carregamento de pátete do produtor.

A classificação dos problemas de corte e empacotamento pode ser representada através da quádrupla: dimensionalidade / seleção de itens e objetos / sortimento de objetos / sortimento de itens. Por exemplo, o problema classificado como 2 / V / I / R é o problema de corte de estoque bidimensional (2), onde um conjunto de objetos deve ser selecionado para atender a produção de todos os itens (V), os objetos são de tamanhos iguais (I) e existem muitos itens de poucos tamanhos diferentes (R).

A tipologia de Wäscher *et al.* [77] baseia-se em 5 critérios para classificar os problemas de corte e empacotamento. Estes são, dimensão, tipo de designação, sortimento dos itens, sortimento dos objetos e forma dos itens.

- **Dimensão**

Do mesmo modo que Dyckhoff, Wäscher *et al.* consideram uma, duas e três dimensões relevantes e eventualmente mais de 3 dimensões.

- **Tipo de designação (ou de alocação)**

Wäscher *et al.* referem aos problemas como, de maximização de saída (*output maximisation*) correspondente ao tipo "B" de Dyckhoff ou de minimização de entrada (*input minimisation*) correspondente ao tipo "V" de Dyckhoff.

- **Sortimento dos itens**

- Itens idênticos - Esta categoria corresponde ao tipo "C" da classificação de sortimento dos itens de Dyckhoff.
- Sortimento fracamente heterogêneo - Neste caso os itens podem ser agrupados em classes de itens idênticos. A demanda de cada item é relativamente grande podendo ser limitada. Esta categoria corresponde ao tipo "R" de Dyckhoff.
- Sortimento fortemente heterogêneo - Este conjunto de itens se caracteriza pelo fato de que poucos itens são idênticos. Se isto ocorre, os itens são tratados como elementos individuais. Conseqüentemente, a demanda de cada item é igual a um. Esta categoria corresponde ao tipo "M" e "F" de Dyckhoff.

- **Sortimento dos objetos**

- Um objeto - Neste caso o conjunto de objetos consiste de apenas 1 elemento, onde as dimensões do objeto podem ser fixas ou, uma ou mais dimensões serem variáveis (Dyckhoff tipo "O").
- Vários objetos - São considerados apenas objetos de dimensões fixas. De modo análogo ao sortimento de itens, os objetos serão classificados como idênticos, fracamente e fortemente heterogêneos. Diferenciando-se da tipologia de Dyckhoff, que apenas classifica os problemas considerando objetos com tamanhos idênticos (Dyckhoff tipo "I") e com tamanhos diferentes (Dyckhoff tipo "D").

- **Forma dos itens**

Em problemas onde duas ou três dimensões são relevantes, para a definição de

problemas do tipo refinado (definido a seguir) precisaremos distinguir se os itens são regulares (itens convexos) ou irregulares.

Wäscher *et al.* classificam ainda os problemas de corte e empacotamento em três tipos: básico, intermediário e refinado.

- Problemas do tipo básico

São obtidos pela combinação dos critérios de sortimento de itens e tipo de designação. Em mais detalhes são caracterizados por:

- Maximização de saída - Estes problemas tem em comum o fato de que o estoque dos objetos é limitado, assim nem sempre é possível produzir todos os itens fornecidos. Devemos buscar a maximização dos itens produzidos. Os problemas de empacotamento de itens idênticos (*identical item packing problem*), de alocação (*placement problem*) e da mochila (*Knapsack problem*) são considerados do tipo básico de maximização de saída.
- Minimização de entrada - estes problemas se caracterizam pelo fato de ter uma grande quantidade de objetos em estoque, sendo suficiente para produzir todos os itens. Assim, devemos buscar a minimização do número de objetos utilizados. Os problemas de dimensão aberta (*open dimension problem*), de corte de estoque (*cutting stock*) e *bin Packing* são considerados do tipo básico de minimização de entrada.

- Problemas do tipo intermediário

Para definir problemas mais homogêneos Wäscher *et al.* [77] adicionam o critério de sortimento dos itens na classificação de problemas do tipo básico.

- Problemas do tipo refinado

Considera além dos critérios da classificação dos problemas do tipo intermediário os critérios de dimensionalidade e da forma dos itens.

Apresentamos nas Tabelas 1.1 e 1.2 o esquema da classificação básica de Wäscher *et al.*

O problema de corte de estoque bidimensional é classificado por Dyckhoff [26] como: 2/V/I/R e por Wäscher *et al.* [77] como: bidimensional, maximização de saída, sortimento dos itens fracamente heterogêneo e sortimento dos objetos - vários objetos.

<i>Problema de Corte e Empacotamento</i>			
Tipo de Atribuição	Maximização de saída		
	Todas dimensões fixas		
Tipos de itens	Idênticos	Fracamente Heterogêneos	Fortemente Heterogêneos
Tipos de problemas	Problemas de Empacotamento	Problema de Alocação	Problema da Mochila

Tabela 1.1: Problemas do tipo básico de maximização de saída.

<i>Problema de Corte e Empacotamento</i>			
Tipo de Atribuição	Minimização de entrada		
	Dimensão(ões) variáveis	Todas dimensões fixas	
Tipos de itens	Arbitrários	Fracamente Heterogêneos	Fortemente Heterogêneos
Tipos de problemas	Problemas de Dimensão Aberta	Problema de Corte de Estoque	Problema de Empacotamento de Containers

Tabela 1.2: Problemas do tipo básico de minimização de entrada.

1.2 O Problema de Corte de Estoque

Os problemas de corte de estoque começaram a ser estudados por volta de 1940, embora as principais pesquisas tenham surgido apenas nos anos 60 [61]. As modelagens e métodos de resolução que obtiveram maior repercussão na literatura foram publicados por Gilmore e Gomory [32, 33, 34].

Um problema de corte de estoque unidimensional pode ser assim enunciado: considere que temos em estoque um número suficientemente grande de objetos (barras, bobinas, *etc*) de um determinado comprimento L e um conjunto de pedidos de itens menores de comprimento l_i , ($i = 1, \dots, m$). Cada item deve ser produzido para atender a demanda b_i , ($i = 1, \dots, m$). O problema consiste em produzir os itens a partir do corte dos objetos em estoque de modo a atender a demanda, otimizando uma determinada função, por exemplo, minimizando o número total de objetos a serem cortados, minimizando a perda,

ou ainda maximizando os lucros. A Figura 1.5 mostra um exemplo de problema de corte de estoque unidimensional.

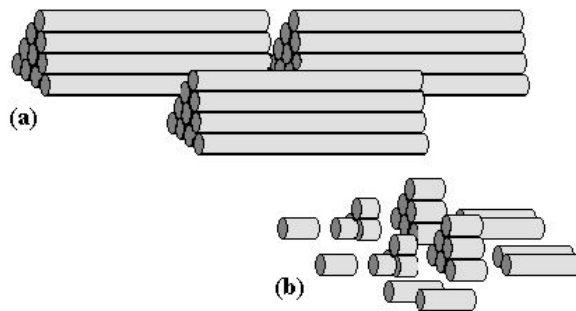


Figura 1.5: Problema de corte de estoque unidimensional: a) objetos em estoque, b) itens demandados.

O problema de corte de estoque bidimensional pode ser definido de maneira similar: considere um estoque com um número suficientemente grande de objetos (placas de madeira, de vidro, *etc*) de um determinado comprimento L e largura W , e um conjunto de pedidos de itens menores de comprimento l_i , ($i = 1, \dots, m$) e largura w_i , ($i = 1, \dots, m$). Cada item deve ser produzido para atender a demanda b_i , ($i = 1, \dots, m$). O problema consiste em produzir os itens a partir do corte dos objetos em estoque de modo a atender a demanda, otimizando uma determinada função, por exemplo, minimizando o número total de objetos a serem cortados, minimizando a perda, *etc*. A Figura 1.6 mostra um exemplo de problema de corte de estoque bidimensional.

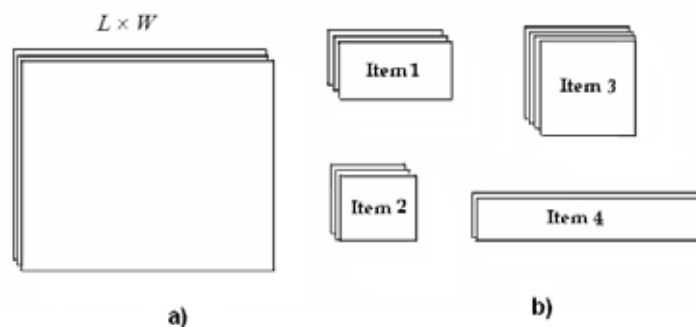


Figura 1.6: Problema de corte de estoque bidimensional: a) objetos em estoque, b) itens demandados.

De maneira geral, podemos formular um problema de corte de estoque como um problema de programação linear inteira. Para isto vamos definir formalmente um padrão de corte.

Definição 1.1. Cada combinação geométrica dos itens dentro do objeto é chamada de padrão de corte.

A Figura 1.7 representa um exemplo de padrão de corte unidimensional.

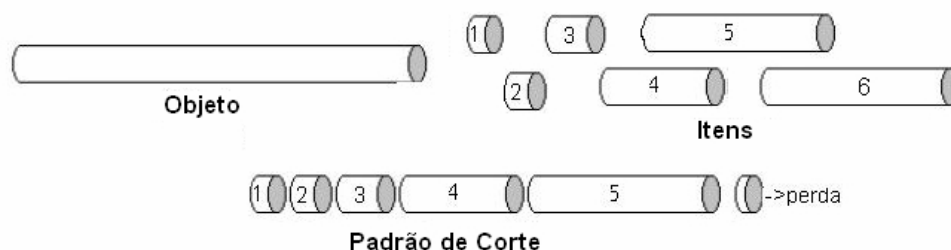


Figura 1.7: Padrão de corte unidimensional.

Para contabilizar os itens produzidos em um determinado padrão de corte podemos associar um vetor m -dimensional $[a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}]^T$, em que, a_{ij} é o número de itens i no padrão j . Considere o exemplo da Figura 1.7, onde temos 6 itens diferentes para produzir e apenas um tipo de objeto. O vetor correspondente a este padrão de corte é dado por $[1, 1, 1, 1, 1, 0]^T$. A parte do objeto cortado, cujas dimensões não foram pré-definidas (vide Figura 1.7) são denominadas sobras (perdas). Tais sobras, referem-se a partes da matéria-prima de boa qualidade que se tornam inúteis devido às suas dimensões.

A Figura 1.8 representa um padrão de corte bidimensional. Por exemplo, um vetor que contabiliza os 4 itens produzidos no padrão de corte da Figura 1.8 é dado por $[2, 3, 0, 1]$ e a parte hachurada é considerada perda.

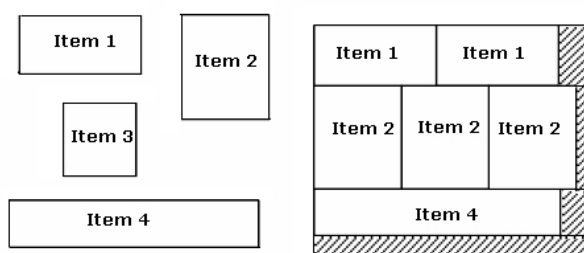


Figura 1.8: Padrão de corte bidimensional.

Considere conhecidos $j = 1, 2, \dots, n$ padrões de corte (uni ou bidimensionais), o problema de corte de estoque pode então ser formulado como [32]:

$$\text{Min } c^T x \quad (1.2.1)$$

$$\text{s.a.: } Ax = b \quad (1.2.2)$$

$$x \in \mathbb{Z}_+^n; \quad (1.2.3)$$

onde, $c \in \mathbb{R}_+^n$ é o vetor custo dos objetos, x_j é o número de vezes que o padrão de corte j é utilizado, $b \in \mathbb{Z}_+^m$ é o vetor de demandas dos m itens e $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é a matriz de restrições do problema. A função objetivo (1.2.1) minimiza o custo total dos objetos, as restrições (1.2.2) garantem que as demandas dos itens sejam atendidas e as restrições (1.2.3) definem o domínio das variáveis de decisão. Uma das dificuldades encontradas na solução do problema ((1.2.1) - (1.2.3)) é o número alto de padrões de corte ($m \ll n$). Esta dificuldade discutida no Capítulo 2, pode ser contornada usando o método de geração de colunas (padrão de corte).

Nesta dissertação, focalizamos a geração de padrões de corte bidimensionais (colunas), com algumas características particulares. Algumas definições importantes para a geração destes padrões são apresentadas a seguir.

1.3 Padrões de Cortes Bidimensionais

Um padrão de corte apresenta diversas características que podem ser determinantes na avaliação de sua qualidade. Dentre elas destacamos: tipo de item, tipo de corte, número de estágios, rotação dos itens e tempo de corte.

Padrão de Corte Homogêneo

A escolha dos itens que irão compor um padrão de corte sugere diferentes conceitos, como por exemplo, o de padrão de corte homogêneo.

Definição 1.2. *Um padrão de corte que produza apenas um tipo de item é chamado padrão de corte homogêneo.*

Em outras palavras, um padrão de corte é homogêneo se o vetor associado tem apenas uma coordenada não-nula: $[0, \dots, a_{ij}, \dots, 0]^T$, $a_{ij} \neq 0$. Quando o número de vezes que o item aparece no padrão de corte é o maior possível, então este é chamado de padrão de corte

homogêneo maximal [17] (vide Figura 1.9). Em problemas de corte de estoque com m tipos de itens demandados, sempre existem m padrões de corte homogêneos maximais (únicos). Os m padrões bidimensionais, são dados por colunas do tipo $a_j = [0, \dots, a_{ij}, \dots, 0]^T$, $i = j$, onde $a_{ij} = \lfloor \frac{L}{l_i} \rfloor \lfloor \frac{W}{w_i} \rfloor$ (para o caso unidimensional, por $a_{ij} = \lfloor \frac{L}{l_i} \rfloor$). Note que os vetores associados aos m padrões homogêneos definem uma matriz diagonal.

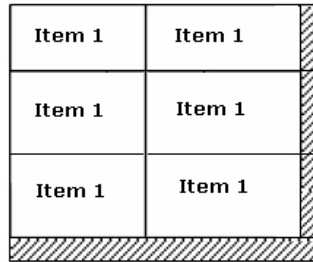


Figura 1.9: Padrão de corte homogêneo maximal.

Padrão de Corte Guilhotinado e Não Guilhotinado

Neste trabalho, nos restringimos aos padrões guilhotinados ortogonais, devido as restrições da máquina de corte (seccionadora) usada na indústria estudada.

Definição 1.3. *Um corte é dito guilhotinado ortogonal ou simplesmente guilhotinado, quando é feito paralelamente a um dos lados do objeto retangular e o divide em dois novos retângulos. Um padrão de corte composto apenas por cortes guilhotinados é chamado de padrão de corte guilhotinado.*

A Figura 1.10 ilustra um exemplo de padrão de corte guilhotinado e um não guilhotinado e a Figura 1.11 ilustra um exemplo de padrão de corte guilhotinado ortogonal e um não ortogonal.

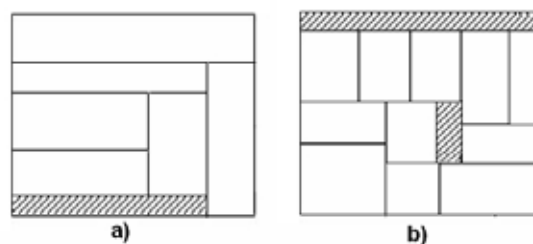


Figura 1.10: Padrão de corte: a) guilhotinado, b) não guilhotinado.

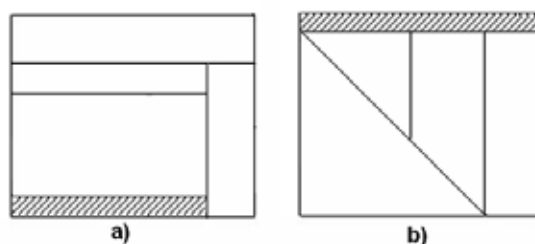


Figura 1.11: Padrão de corte guilhotinado: a) ortogonal, b) não ortogonal.

Número de Estágios

Uma restrição bastante freqüente imposta no processo de corte das indústrias é a limitação do número de estágios de corte.

Definição 1.4. *O número de estágios de um padrão de corte mede a quantidade de mudanças na direção do corte.*

A Figura 1.12 ilustra um padrão de corte, onde são necessários duas mudanças de direção do corte, caracterizando um padrão de corte em três estágios. No primeiro estágio, o corte guilhotinado longitudinal resulta em um conjunto de faixas. No segundo estágio, são feitos os cortes guilhotinados transversais em cada faixa. A cada mudança na direção do corte (rotação 90°) para a realização do padrão de corte, acrescentamos uma unidade ao número de estágios. Note que os cortes de dois estágios consecutivos são sempre perpendiculares entre si.

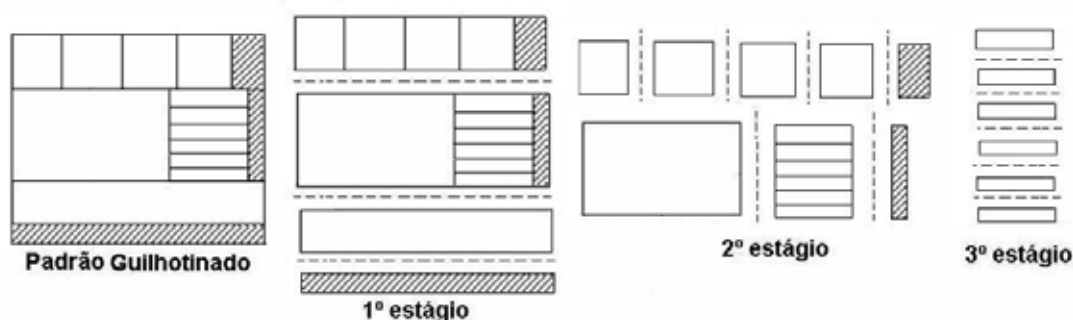


Figura 1.12: Padrão de corte guilhotinado três estágios.

Nosso maior interesse está nos padrões de corte guilhotinados ortogonais 2-estágios, pois estes são mais fáceis de manusear, mais rápidos de serem cortados e são a preferência da indústria de móveis estudada. Na prática, a indústria esporadicamente admite padrões

de corte guilhotinados 3-estágios, que são aceitos apenas quando reduzem significativamente a perda da matéria-prima.

Geração dos Padrões de Cortes 2-estágios - Gilmore e Gomory

Existem várias formas de gerar padrões de corte guilhotinados estagiados bidimensionais. Um método muito usado para gerar padrões em 2-estágios é o método de Gilmore e Gomory [34], onde o padrão de corte é construído em duas etapas. Na primeira etapa o objeto (L, W) é dividido em faixas ao longo do comprimento L (primeiro estágio). A segunda etapa consiste em cortar verticalmente as faixas a fim de produzir os itens (segundo estágio).

Considere um objeto de medida (L, W) , a ser cortado em $M = \{1, 2, 3, \dots, m\}$ itens. Cada item $i = \{1, \dots, m\}$ possui dimensão de comprimento l_i , largura w_i e demanda b_i .

Suponha inicialmente, que todos os itens a serem produzidos estejam ordenados em ordem não-decrescente de largura, isto é:

$$w_1 \leq w_2 \leq w_3 \leq \dots \leq w_m.$$

Queremos inicialmente determinar quais as melhores faixas $(L, w_1), (L, w_2), \dots, (L, w_m)$ para cortar no padrão de corte. Observe que na faixa (L, w_i) são cortados somente itens cujas larguras não excedam a w_i . Por isto, consideremos o seguinte conjunto:

$$W_k = \{i \text{ tal que } w_i \leq w_k\},$$

ou seja, o conjunto W_k é o conjunto dos itens i cujas larguras são menores, ou iguais, à largura do item k . As faixas são definidas apenas para larguras diferentes, pois se $w_k = w_j$ então as faixas (L, w_k) e (L, w_j) são iguais. Seja r o número de larguras diferentes, e assumamos por simplicidade que as r primeiras larguras são as diferentes.

Cada faixa deve ser cortada para a produção dos itens demandados. E isto deve ser feito de modo a obter o maior valor de utilidade, ou seja, cada faixa deve ser aproveitada da melhor maneira possível [5]. Assim, o primeiro estágio consiste em resolver r problemas da mochila (um para cada faixa (L, w_k) , $k = 1, \dots, r$ de largura diferente):

$$\begin{aligned} V_k = \text{Max} \quad & \sum_{i \in W_k} \pi_i y_{ik} \\ \text{s.a.:} \quad & \sum_{i \in W_k} l_i y_{ik} \leq L \\ & y_{ik} \in \mathbb{Z}_+; \quad i = 1, \dots, m; \end{aligned}$$

em que:

y_{ik} é a quantidade de itens i na faixa (L, w_k) ;

π_i é o valor da utilidade do item i ;

V_k é o valor de utilidade da faixa k .

Após, resolvido os r problemas da mochila, teremos as melhores faixas para compor o padrão bidimensional. A seguir, é necessário determinar quantas vezes cada faixa k de largura w_k será utilizada no padrão, respeitando a largura W do objeto (segundo estágio), ou seja, temos então de resolver mais um problema da mochila:

$$\begin{aligned} V &= \text{Max} \quad V_1x_1 + \dots + V_r x_r \\ \text{s.a.:} \quad & w_1x_1 + \dots + w_r x_r \leq W \\ & x_k \in \mathbb{Z}_+; \quad k = 1, \dots, r; \end{aligned}$$

onde, x_k é a quantidade de faixas (L, w_k) no padrão j , $k = 1, \dots, r$. O vetor que contabiliza os itens do padrão de corte j obtido pelo procedimento acima, é dado por:

$$a_j = \begin{pmatrix} a_{1j} = \sum_{k=1}^r y_{1k}x_k \\ a_{2j} = \sum_{k=1}^r y_{2k}x_k \\ \dots \\ a_{mj} = \sum_{k=1}^r y_{mk}x_k \end{pmatrix}$$

onde, a_{ij} é a quantidade de itens i ($i = 1, \dots, m$) nas r faixas do padrão j . Neste método, gerar um padrão de corte corresponde a resolver $r+1$ problemas da mochila. Note que os r primeiros problemas da mochila podem ser resolvidos simultaneamente por programação dinâmica [62].

Problema Restrito e Irrestrito

Uma restrição natural que deve ser considerada é a capacidade física do objeto, ou seja, um padrão de corte não pode conter uma quantidade de itens, cuja a soma de suas áreas é maior que a área do objeto.

Seja a_{ij} o número de vezes que o item i aparece no padrão de corte j . Para o padrão de corte ser viável temos que impor,

$$a_{ij} \leq \left\lfloor \frac{L}{l_i} \right\rfloor \left\lfloor \frac{W}{w_i} \right\rfloor,$$

ou seja, a quantidade de itens i produzidos no padrão j deve ser menor ou igual a quantidade de itens i que podem ser cortados no objeto (L, W) .

Porém, existem problemas, cuja demanda b_i de alguns itens é estritamente menor que $\lfloor \frac{L}{l_i} \rfloor \lfloor \frac{W}{w_i} \rfloor$. Estes problemas são chamados de problemas restritos. Caso contrário, se a demanda é maior ou igual a $\lfloor \frac{L}{l_i} \rfloor \lfloor \frac{W}{w_i} \rfloor$, então o problema é dito irrestrito [56].

Rotação dos itens

Em diversas situações práticas é permitido que os itens sofram rotações ortogonais, ou seja, de 90 graus. Por simplicidade, chamaremos estas rotações ortogonais simplesmente de rotações. Quando os itens não podem ser rotacionados dizemos que os itens têm orientação fixa e, caso contrário, dizemos que os itens têm rotação permitida.

No caso de rotação permitida dos itens (vide Figura 1.13 b)), se o problema original tem m itens, o problema geração de padrões de corte passa a ter, no máximo, o dobro do número de itens ($2m$), pois há situações ($l_i > W$ ou $w_i > L$), onde alguns itens não podem ser incluídos no padrão de corte depois de rotacionados. Note, que a rotação dos itens pode permitir um melhor aproveitamento da matéria-prima. Por exemplo, na Figura 1.13 o padrão de corte com rotação dos itens permitida b), gera uma perda menor que a do padrão com orientação fixa dos itens a).

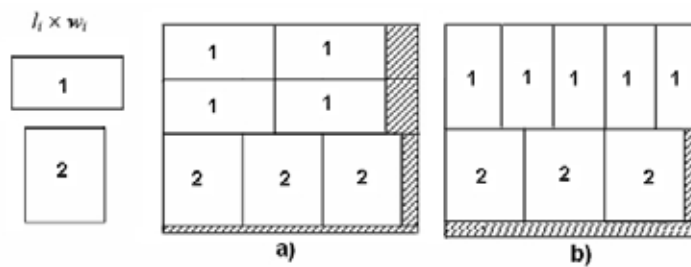


Figura 1.13: Padrão de corte: a) com orientação fixa, b) com rotação permitida.

Observe que quando aceitamos a rotação dos itens, para o caso de m itens, a restrição (1.2.2) do problema de corte de estoque será dada por:

$$Ax = \sum_{i=1}^m (a_{ij} + a_{i+mj}) = b_i,$$

onde o item $i + m$ é o item i rotacionado.

Padrões de Corte n-grupos

Abordaremos neste estudo uma classe especial de padrões de corte, os padrões n-grupos [34].

Definição 1.5. *Os padrões n-grupos, se caracterizam pelo fato que, as faixas resultantes do primeiro estágio são divididas em n grupos, de modo que todas as faixas de um mesmo grupo podem ser cortadas simultaneamente no segundo estágio.*

A Figura 1.14 ilustra dois exemplos de padrões de corte n-grupo, em a) o padrão 1-grupo (ou padrão tabuleiro) e em b) o 2-grupos. Os padrões n-grupos podem ser classificados em: exato e não-exato.

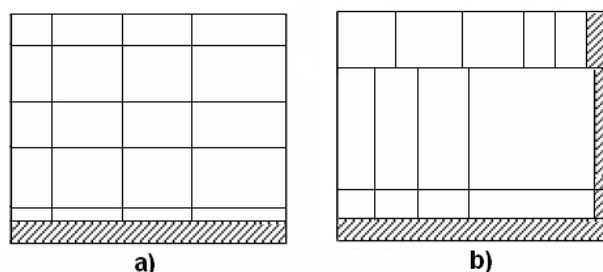


Figura 1.14: Padrão de corte: a) 1-grupo, b) 2-grupos.

Definição 1.6. *Um padrão de corte é não-exato (vide Figura 1.15 b)) quando ao menos um item necessitar de ajuste (apara), caso contrário, este padrão é chamado exato (vide Figura 1.15 a)).*

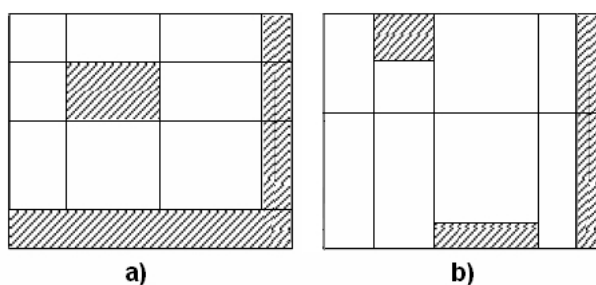


Figura 1.15: Padrão de corte 1-grupo: a) caso exato, b) não-exato.

Redução de Padrões de Corte Irrelevantes

Regras para diminuir o número de padrões de cortes irrelevantes podem ser extremamente úteis. Christofides e Whitlock [15], apresentaram algumas regras para evitar

a construção de padrões de cortes equivalentes. A utilização dos efeitos de simetria, ordenação e de corte normal reduzem consideravelmente o número de padrões de corte possíveis.

Padrão Simétrico

Definição 1.7. Dizemos que um padrão de corte é simétrico a outro, quando é possível obter soluções equivalentes (vetores associados aos padrões de cortes iguais) utilizando conjuntos de padrões de corte diferentes.

Dois padrões bidimensionais simétricos são ilustrados na Figura 1.16. O vetor associado a este padrão de corte é $(2, 3, 0, 1)^T$.

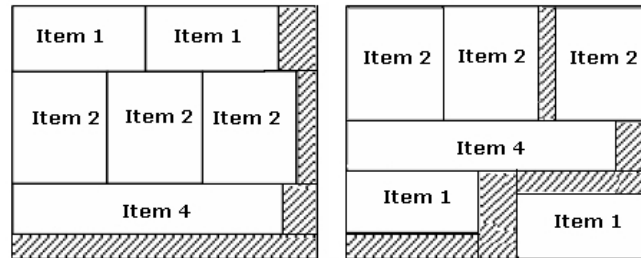


Figura 1.16: Padrões de corte simétricos - Caso bidimensional.

Efeito de Simetria

Considere um objeto (L, W) . Se aplicarmos um corte vertical na posição l_1 , obtemos dois subobjetos de dimensão (l_1, W) e $(L - l_1, W)$ (vide Figura 1.17).

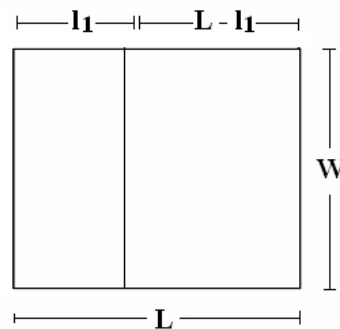


Figura 1.17: Efeito de simetria.

Observe que estes subobjetos $((l_1, W)$ e $(L - l_1, W))$ poderiam ter sido obtidos com um corte em $L - l_1$. Para evitarmos esta duplicação, basta impor a condição $l_1 \leq \lfloor \frac{L}{2} \rfloor$,

reduzindo o número de possibilidades de cortes pela metade [13]. Em Lodi e Monaci [50] são apresentados dois modelos lineares para a geração restrita de padrões de corte guilhotinado 2-estágios. Nestes modelos são considerados algumas restrições que evitam soluções simétricas, e reduzem assim o número de padrões de corte possíveis.

Efeito de Ordenação

Suponha que seja aplicado um corte vertical no objeto de dimensões (L, W) na posição l_1 , produzindo dois subobjetos de dimensões (l_1, W) e $(L - l_1, W)$ (vide Figura 1.17). E em seguida seja efetuado um corte l_2 , $\left(l_2 < l_1 \leq \frac{L - l_1}{2}\right)$ na direção vertical do objeto $(L - l_1, W)$, obtemos os subobjetos: (l_1, W) , (l_2, W) e $(L - l_1 - l_2, W)$, ver Figura 1.18. Estes três subobjetos poderiam ter sido produzidos se considerássemos primeiro o corte l_2 em (L, W) e depois o corte l_1 em $(L - l_2, W)$. Para evitar este tipo de duplicação basta introduzir um ordenação nos cortes tal que se um objeto é cortado na posição l_1 , então todos os cortes seguintes devem ser maiores ou iguais a l_1 [62].

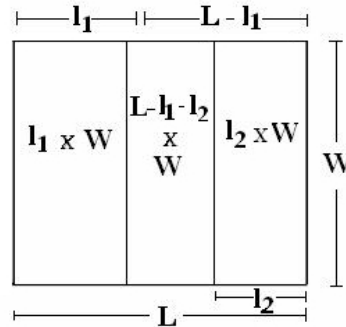


Figura 1.18: Efeito de ordenação.

Corte Normal ou Canônico

Se um objeto (L, W) é cortado verticalmente na posição \bar{l}_1 , então, no padrão de corte final deve haver uma combinação de itens i , $(i = 1, \dots, m)$, tais que a soma total de seus comprimentos seja exatamente \bar{l}_1 . Caso isto não ocorra, um corte na posição \bar{l}_2 menor ou igual a \bar{l}_1 , pode ser feito levando ao mesmo modelo de corte final (vide Figura 1.19).

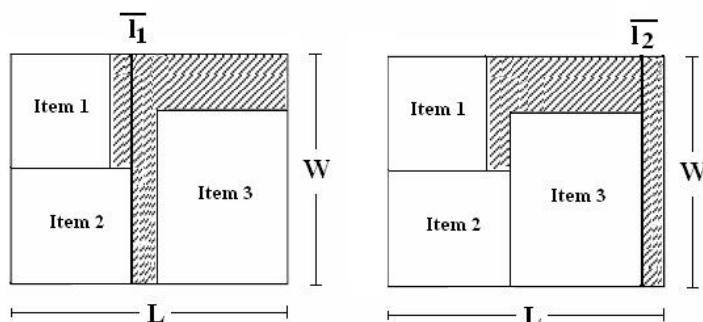


Figura 1.19: Corte normal.

Trabalhos da Literatura

Foram encontrados poucos trabalhos na literatura apresentando modelos matemáticos e procedimentos para gerar padrões guilhotinados n -estágios. Gilmore e Gomory [34] e Beasley [10] apresentaram formulações baseadas em programação dinâmica para o caso irrestrito e, posteriormente, Christofides e Hadjiconstantinou [14] as estenderam para o caso restrito. Morabito e Arenales [56] apresentaram um algoritmo de enumeração implícita, baseado numa busca em grafo E/OU, para o problema estagiado e para o restrito. Em Riehme *et al.* [65], foi estudado um problema bidimensional com cortes guilhotinados em 2-estágios e com grande variação na demanda (alguns itens com demanda alta, enquanto outros com demanda baixa). Lodi e Monaci apresentam em [50] dois modelos lineares para a geração de padrões de corte guilhotinado 2-estágios e consideram algumas restrições para evitar soluções simétricas que restringe bastante o número de padrões de corte possíveis. Morabito e Arenales [53] apresentaram um modelo quadrático inteiro para gerar padrões tabuleiros e detalharam uma heurística para obtenção destes padrões. Katsurayama e Yanasse [49], propõem um algoritmo para gerar padrões de corte tabuleiros exatos que contenham uma combinação de itens previamente determinada.

Estudos relacionados ao problema de corte e empacotamento em indústrias moveleiras podem ser encontrados em [28, 58, 54]. Em Figueiredo e Rangel [28] foi proposto uma heurística para gerar padrões n -grupos, denominados padrões tabuleiros compostos. Resultados computacionais com dados da mesma indústria de móveis estudada no presente trabalho, mostraram que a utilização de padrões tabuleiros compostos resulta em índices de perda melhores do que os índices que vinham sendo obtidos pela indústria. Um estudo para esta mesma indústria foi relatado em [58]. Neste foram propostos três métodos

de soluções para a resolução do problema de corte de estoque, cuja o critério considerado era a redução do número de ciclos da serra. Morabito e Belluzzo [54] apresentaram abordagens para gerar padrões de corte bidimensionais que minimizam os desperdícios de matéria-prima em um estudo direcionado a uma outra indústria. Formulação matemática de modelos para gerar padrões 2-estágios n -grupos ($n \geq 1$) são discutidas em Yanasse e Morabito [80, 81]. Estes modelos são estudados nos Capítulos 5, usando dados da literatura e de uma fábrica de móveis. Outros estudos relacionados podem ser encontrados em [34, 31, 78, 12, 41, 55, 53, 42, 74, 20].

Capítulo 2

Técnicas de Resolução

O problema de corte de estoque é de grande importância para a prática das indústrias, por isto muitos estudos se concentram em torno da sua resolução. Segundo Morabito e Silveira [57] este problema têm sido abordado na literatura principalmente por programação linear combinada com o método de geração de colunas [34], e heurística gulosa de aspiração [43]. A técnica de geração de colunas, juntamente com outras técnicas, que serão detalhadas neste capítulo serviram de base para os testes computacionais descritos no Capítulo 5.

2.1 Breve Histórico

Os estudos da programação linear contínua tem raízes nos trabalhos de Fourier sobre inequações lineares, publicados em 1826. Na segunda Guerra Mundial a programação linear contínua ganhou grande impulso, com Dantzig, Wood e seus associados que estudavam a viabilidade de aplicar a matemática e técnicas relacionadas para resolver problemas de planejamento e programação militar [52]. Em 1947, Dantzig divulgou a ferramenta desenvolvida pelo grupo: o Método Simplex, para resolver problemas de programação linear contínua. Em pouco tempo, a programação linear foi aplicada a diversas áreas do conhecimento, e com a contribuição dos avanços computacionais, hoje é possível resolver problemas de grande porte.

Em 1979, Khachiyan mostrou que um método de otimização não-linear, que não era amplamente conhecido, podia ser adaptado para resolver problemas de programação linear em tempo polinomial. Este método ficou conhecido como método dos elipsóides (primeiro algoritmo de tempo polinomial). Em 1984, Karmakar desenvolveu um novo

algoritmo polinomial de ponto interior para resolver problemas de programação linear de grande porte. Apesar do algoritmo de ponto interior ser de tempo polinomial, o algoritmo Simplex (de tempo não polinomial) continuar sendo muito empregado, em parte porque ele geralmente, é mais eficiente para a solução de uma grande quantidade de problemas e também em função de sua utilização na solução de problemas de programação linear inteira.

Em uma indústria de móveis, o custo da matéria-prima constituem componentes importantes na formação do custo final dos produtos, e qualquer redução de custos é sempre bem vinda. Porém, o problema de corte é um problema de otimização combinatória, que pode ser facilmente formulado e compreendido, mas esconde atrás de sua aparente simplicidade a sua real complexidade, pois trata-se de um problema NP-Difícil. Durante muitos anos, pesquisadores tentaram independentemente desenvolver algoritmos rápidos para vários problemas de diversos tipos, sem sucesso. Esta dificuldade pode ser melhor compreendida após os trabalhos de Cook [18] e Karp [47], que sistematizaram a base da teoria da NP -completude.

O primeiro modelo matemático de otimização inteira para o problema de corte de estoque unidimensional foi proposto por Kantorovich [46]. Sejam L o comprimento do objeto e l_i , b_i o comprimento e a demanda do item i , $i = 1, \dots, m$ e n o número de padrões de corte. O modelo de otimização inteira é dado por:

$$\text{Min } f(x)_K = \sum_{j=1}^n y_j \quad (2.1.1)$$

$$\text{s.a.:} \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} \geq b_i, \quad i = 1, \dots, m \quad (2.1.2)$$

$$\sum_{i=1}^m l_i x_{ij} \leq L y_j, \quad j = 1, \dots, n \quad (2.1.3)$$

$$x_{ij} \in \mathbb{Z}_+; \quad y_j \in \{0, 1\}; \quad i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n; \quad (2.1.4)$$

onde, x_{ij} é o número de itens i no padrão j ; $y_j = 1$, se o padrão de corte j é usado e, $y_j = 0$, caso contrário. A função objetivo (2.1.1) minimiza o número de padrões de corte distintos utilizados. O conjunto de restrições (2.1.2) garante o atendimento à demanda dos itens, as restrições (2.1.3) garantem que se o padrão de corte j for utilizado ($y_j = 1$)

então a combinação dos itens que aparecem neste padrão não deve exceder o comprimento do objeto.

Observe que se considerarmos problemas de grande porte (problemas com grande número de variáveis ou restrições), o número de itens (m) pode ser da ordem de algumas dezenas, enquanto o número de padrões de corte (n) da ordem de vários milhões, dificultando a resolução direta do problema. A resolução deste problema tornou-se possível e ganhou avanços significativos na década de 60 com a publicação do Princípio de Decomposição de *Dantzig-Wolfe*. A partir desta técnica, Gilmore e Gomory [32] publicaram trabalhos sobre o método de geração de colunas para o caso unidimensional e, mais tarde, para o caso bidimensional [34].

2.2 Princípio de Decomposição de *Dantzig-Wolfe*

O princípio de decomposição de *Dantzig-Wolfe*, é um procedimento para resolver problemas de grande porte de programação linear. Sendo mais indicado para problemas que apresentam restrições com uma estrutura especial. A idéia é aproveitar a estrutura especial da matriz de restrições do problema, criando um problema equivalente com grande redução no número de restrições, entretanto, com um aumento no número de variáveis.

Para apresentarmos o princípio de Decomposição de *Dantzig-Wolfe* [22], consideremos o modelo geral de programação linear contínua com n variáveis como segue:

$$\begin{aligned} \text{Min } & c^T x & (2.2.5) \\ \text{s.a.: } & Ax = b \\ & x \geq 0. \end{aligned}$$

Em problemas de grande porte é freqüente aparecer conjuntos de restrições independentes entre si que formam dentro da matriz A , um ou vários blocos independentes (estrutura angular em blocos). Uma matriz tem estrutura angular em blocos, quando as $m = \sum_{i=0}^n m_i$ restrições são dadas por:

$$\begin{aligned} \text{Min } & c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \\ \text{s.a.: } & A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_n x_n = b_0 \quad m_0 \text{ restrições} \\ & B_1 x_1 = b_1 \quad m_1 \text{ restrições} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl}
B_2 x_2 & = & b_2 \quad m_2 \text{ restrições} \\
& \ddots & \vdots \quad \quad \quad \vdots \\
& & B_n x_n = b_n \quad m_n \text{ restrições} \\
x_1 \geq 0, & x_2 \geq 0, & \dots, \quad x_n \geq 0 \quad , \quad n > 1.
\end{array}$$

onde, parte das restrições formam conjuntos independentes entre si. Observe, que qualquer problema de programação linear pode ser considerado com tal estrutura, basta tomarmos $n = 1$. Estes blocos normalmente são ligados por um conjunto de restrições que envolvem todas as variáveis ($\widehat{A}x = \widehat{b} \Rightarrow A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots + A_n x_n = b_0$, com m_0 restrições), as quais são chamadas de restrições de acoplamento, as demais, $B_j x_j = b_j, \forall j = 1, \dots, n$; chamaremos de restrições gerais.

Por simplicidade, considere o problema (2.2.5) com estrutura n -bloco angular, $n = 1$. Particionando o conjunto de restrições, em restrições de acoplamento e gerais, temos:

$$\begin{array}{ll}
\text{Min} & c^T x \\
\text{s.a.} & \widehat{A}x = \widehat{b} \quad m_0 \text{ restrições} \\
& B_1 x = b_1 \quad m_1 \text{ restrições} \\
& x \geq 0.
\end{array} \tag{2.2.6}$$

E utilizando a decomposição de *Dantzig-Wolfe*, podemos dividir este problema em dois subproblemas distintos, obtendo um problema principal, onde apenas ficam as m_0 restrições $\widehat{A}x = \widehat{b}$. As m_1 restrições, $B_1 x_1 = b_1$ são tratadas implicitamente (subproblema).

A vantagem de fazer isto está em ficar com um problema principal mais simples e, eventualmente, aproveitar características da estrutura do subproblema para resolver de forma mais eficiente o problema. O subproblema é resolvido alternadamente com o problema principal até se obter uma solução ótima do problema principal. Ao retirar parte das restrições ($B_1 x_1 = b_1$) do problema linear, e tratá-las à parte em um problema auxiliar, reduzimos consideravelmente o número de restrições do problema principal, que passa a conter um número exponencial de variáveis, como veremos a seguir. Por simplicidade, consideremos:

$$X = \{x | B_1 x_1 = b_1, x \geq 0\},$$

o qual, é um polítopo, esta suposição pode ser relaxada mais tarde [13]. Deste forma,

reescrevemos o problema (2.2.6) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \text{Min } & c^T x & (2.2.7) \\ \text{s.a.: } & \widehat{A}x = \widehat{b} \\ & x \in X. \end{aligned}$$

Um politopo (poliedro) pode ser descrito a partir do conjunto de seus pontos extremos.

Definição 2.1. Dado um conjunto $X \subseteq \mathbb{R}^n$ e um ponto $x \in \mathbb{R}^n$. Dizemos que x é uma combinação convexa de pontos de X se existe um conjunto finito de pontos $\{x^k\}_{k=1}^K$ em X e $\lambda \in \mathbb{R}_+^K$ tal que $\sum_{k=1}^K \lambda^k = 1$, e $x = \sum_{k=1}^K \lambda^k x^k$. O envoltório convexo de X , denotado por $\text{conv}(X)$, é o conjunto de todos os pontos que são combinações convexas de pontos em X .

Assim, podemos escrever as variáveis do problema (2.2.7) como combinações convexas dos pontos extremos de X , tornando a formulação mais restritiva, por considerar o envoltório convexo do conjunto X implicitamente. Seja x um ponto de X , escrevendo-o como combinação convexa de seus pontos extremos, temos:

$$x = \sum_{k=1}^K \lambda^k x^k, \quad (2.2.8)$$

$$\sum_{k=1}^K \lambda^k = 1 \quad \text{e} \quad (2.2.9)$$

$$\lambda^k \geq 0, \quad \forall k = 1, \dots, K; \quad (2.2.10)$$

em que, x^1, x^2, \dots, x^K são os pontos extremos de X . Substituindo as equações (2.2.8), (2.2.9) e (2.2.10) no problema (2.2.7), temos:

$$\widehat{A}x = \widehat{b} \Leftrightarrow \widehat{A} \left(\sum_{k=1}^K \lambda^k x^k \right) = \widehat{b} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^K (\widehat{A}x^k) \lambda^k = \widehat{b} \quad \text{e}$$

$$Z = c^T x \Leftrightarrow Z = c^T \left(\sum_{k=1}^K \lambda^k x^k \right) \Leftrightarrow Z = \sum_{k=1}^K (c^T \lambda^k) x^k.$$

Ou seja, obtemos um novo problema (problema mestre) em termos da variável λ^k :

$$\begin{aligned} \text{Min } Z &= \sum_{k=1}^K (c^T \lambda^k) x^k & (2.2.11) \\ \text{s.a.: } & \sum_{k=1}^K (\widehat{A}x^k) \lambda^k = \widehat{b} \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^K \lambda^k = 1$$

$$\lambda^k \geq 0; \quad k = 1, \dots, K.$$

Note que o número de pontos extremos de um poliedro (politopo) é exponencialmente grande quando se trata de um problema de grande porte, não sendo prático fazer a sua enumeração. De fato, nem sempre é necessária a enumeração explícita de todos os pontos para determinar a solução ótima. Esta enumeração pode ser feita utilizando por exemplo, a técnica de geração de colunas. Um problema mestre é construído com um subconjunto de m_0 restrições do problema original. O problema mestre é resolvido pelo método simplex. As variáveis duais associadas são utilizadas para gerar uma nova coluna ($\widehat{A}x^k$). Se o custo reduzido desta nova coluna for negativo, a coluna é acrescentada ao problema mestre, caso contrário, o processo termina.

Se a decomposição *Dantzig-Wolfe* for aplicada ao modelo de Kantorovich ((2.1.1)-(2.1.4)), obtemos o modelo de Gilmore e Gomory, enunciado no Capítulo 1.

Se as restrições

$$X = \{x_{ij} \mid \sum_{i=1}^m l_i x_{ij} \leq Ly_j, \quad x_{ij} \in \mathbb{Z}_+, \quad i = 1, \dots, m \text{ e } j = 1, \dots, n\}$$
 são removidas do

modelo de Kantorovich, obtemos:

$$\text{Min} \quad \sum_{j=1}^n y_j \tag{2.2.12}$$

$$\text{s.a.:} \quad \sum_{j=1}^n x_{ij} \geq b_i, \quad i = 1, \dots, m$$

$$x_{ij} \in \mathbb{Z}_+; \quad y_j \in \{0, 1\}; \quad i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n.$$

Escrevendo as variáveis x_{ij} como combinação convexa dos K pontos extremos, $x^k = (x_{1j}^k, \dots, x_{mj}^k)$, $k = 1, \dots, K$ pertencentes ao conjunto X :

$$x_{ij} = \sum_{k=1}^K \lambda_j^k x_{ij}^k, \quad \forall i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n;$$

$$\sum_{k=1}^K \lambda_j^k = 1, \quad \forall j = 1, \dots, n;$$

$$\lambda_j^k \geq 0, \quad \forall j = 1, \dots, n; \quad k = 1, \dots, K.$$

E substituindo em (2.2.12), obtemos:

$$\text{Min} \sum_{j=1}^n y_j \quad (2.2.13)$$

$$\text{s.a.:} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^K \lambda_j^k x_{ij}^k \geq b_i, \quad \forall i = 1, \dots, m$$

$$\sum_{k=1}^K \lambda_j^k = 1, \quad \forall j = 1, \dots, n;$$

$$\sum_{k=1}^K \lambda_j^k x_{ij}^k \text{ inteiro, } \lambda_j^k \geq 0, \quad y_j \in \{0, 1\}, \quad j = 1, \dots, n; \quad k = 1, \dots, K; \quad i = 1, \dots, m.$$

O padrão j é definido por $x_{ij} = \sum_{k=1}^K \lambda_j^k x_{ij}^k, \forall j = 1, \dots, n; i = 1, \dots, m$. Então, se $y_j = 1$, ou seja, o padrão de corte j esta sendo usado, teremos para um ou mais k , $\lambda_j^k \neq 0$. Observe que λ_j^k determinará quantas vezes o padrão de corte j esta sendo utilizado. E como o número de objetos é justamente o número de padrões utilizados, podemos substituir $\sum_{j=1}^n y_j$

por $\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^K \lambda_j^k$ na formulação (2.2.13), ou seja,

$$\text{Min} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^K \lambda_j^k \quad (2.2.14)$$

$$\text{s.a.:} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^K \lambda_j^k x_{ij}^k \geq b_i, \quad \forall i = 1, \dots, m;$$

$$\sum_{k=1}^K \lambda_j^k = 1, \quad \forall j = 1, \dots, n$$

$$\sum_{k=1}^K \lambda_j^k x_{ij}^k \text{ inteiro, } \lambda_j^k \geq 0, \quad \forall j = 1, \dots, n; \quad k = 1, \dots, K; \quad i = 1, \dots, m.$$

A formulação (2.2.14) pode ser simplificada. Se supormos que as colunas $(x_{1j}^k, \dots, x_{mj}^k), k = 1, \dots, K'$ são soluções viáveis conhecidas para o conjunto X . Desta forma, obtemos um problema equivalente ao problema original, mas definido em termos de λ_j^k , que passa a ser a variável. Se considerarmos λ_j^k binário, observe que podemos desconsiderar a restrição de convexidade, $\sum_{k=1}^K \lambda_j^k = 1, \forall j = 1, \dots, n$ e de integralidade, $\sum_{k=1}^K \lambda_j^k x_{ij}^k$ inteiro, sem eliminar

nenhuma solução inteira viável. Assim, a formulação (2.2.14) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \sum_{k=1}^{K'} \sum_{j=1}^n \lambda_j^k \\ \text{s.a.:} \quad & \sum_{k=1}^{K'} \sum_{j=1}^n x_{ij}^k \lambda_j^k \geq b_i, \quad \forall i = 1, \dots, m \\ & \lambda_j^k \in \{0, 1\}; \quad j = 1, \dots, n; \quad k = 1, \dots, K'. \end{aligned}$$

Sem perda de generalidade, considere a coluna x_j^k denotada por x^k para todo k que representa uma solução viável ($k = 1, \dots, K'$) e a variável λ_j^k binária pode ser substituída por λ^k , que é o número de objetos cortados com o padrão de corte k . Assim, obtemos a formulação:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \sum_{k=1}^{K'} \lambda^k \tag{2.2.15} \\ \text{s.a.:} \quad & \sum_{k=1}^{K'} x_i^k \lambda^k \geq b_i, \quad \forall i = 1, \dots, m \\ & \lambda^k \in \mathbb{Z}_+; \quad k = 1, \dots, K'. \end{aligned}$$

que é a formulação do problema de corte de estoque de Gilmore e Gomory [32], dada por ((1.2.1) - (1.2.3)) no Capítulo 1.

2.3 Método Simplex com Geração de Colunas

Na prática, quando o número de variáveis (colunas) n é muito maior que o número de restrições (linhas) m , é muito trabalhoso no método simplex determinar uma nova coluna para entrar na base. No entanto, Barnhart *et al.* [7], sugere várias razões para utilizar formulações com um grande número de variáveis. São elas:

- Uma formulação com um grande número de variáveis pode apresentar limitantes melhores que uma formulação compacta;
- Uma formulação com um grande número de variáveis pode eliminar simetrias que são prejudiciais ao desempenho do algoritmo *Branch and Bound*;

- A decomposição do problema em um problema mestre e subproblemas pode apresentar interpretações naturais para o problema decomposto, incorporando informações importantes;
- E principalmente, uma formulação com um grande número de variáveis talvez seja a única escolha.

Gilmore e Gomory [32] propuseram a técnica de geração de colunas para a solução do problema de corte de estoque. O método consiste em gerar uma coluna j em cada iteração do método simplex. Para isto, faremos uma descrição dos passos do Primal-Simplex. Seja a relaxação linear do problema ((1.2.1) - (1.2.3)) dada por:

$$\begin{aligned} \text{Min } f(x) &= \sum_{j=1}^n c_j x_j & (2.3.16) \\ \text{s.a.:} & \sum_{j=1}^n a_j x_j \geq b \\ & x_j \geq 0; \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Suponha sem perda de generalidade, que o posto de A é m . A solução geral do problema (2.3.16) pode ser descrita da seguinte maneira. Admita a partição básica nas colunas de A , $A = [B \ N]$. A matriz $B \in \mathbb{R}^{m \times m}$ é chamada de matriz básica e é formada por m colunas linearmente independentes da matriz A . A matriz N é chamada de matriz não-básica. Esta partição nas colunas de A definem também uma partição nos vetores, $x = (x_B, x_N)^T$ e $c = (c_B, c_N)^T$. As variáveis x_B são chamadas de básicas e x_N de não-básicas, e c_B e c_N representam os custos associados a estas variáveis respectivamente.

No caso do problema de corte a partição básica inicial pode ser dada por uma matriz básica inicial B (diagonal), utilizando os m padrões de corte homogêneos maximais. Cada padrão, produz uma coluna do tipo: $a_j = [0, \dots, a_{ij}, \dots, 0]$, $i = j$, onde, $a_{ij} = \left\lfloor \frac{L}{l_i} \right\rfloor \left\lceil \frac{W}{w_i} \right\rceil$. Assim, a matriz B é dada por:

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{mm} \end{bmatrix}$$

Observe que, B é não-singular, pois todas as colunas de B são linearmente independente, ou seja, $\text{posto}(B) = m$.

Aplicando as partições $x = (x_B, x_N)^T$ e $c = (c_B, c_N)^T$ ao problema (2.3.16), obtemos:

$$f(x) = c^T x = c_B^T x_B + c_N^T x_N \quad e \quad (2.3.17)$$

$$Ax = Bx_B + Nx_N = b \Rightarrow x_B = B^{-1}b - B^{-1}Nx_N, \quad (2.3.18)$$

com x_B e $x_N \geq 0$. Uma solução básica particular é dada quando $x_N^0 = 0$ e $x_B^0 = B^{-1}b$. Se $x_B^0 \geq 0$, então a solução básica é viável. Reescrevendo a função (2.3.17) com o valor associado dado em (2.3.18), obtemos:

$$\begin{aligned} f(x) &= c_B^T x_B + c_N^T x_N & (2.3.19) \\ &= c_B^T (B^{-1}b - B^{-1}Nx_N) + c_N^T x_N \\ &= c_B^T B^{-1}b + (c_N^T - c_B^T B^{-1}N)x_N. \end{aligned}$$

Observe que, $f(x^0) = c_B^T B^{-1}b = c_B^T x_B^0$ é o valor da função objetivo para uma solução básica particular x_B^0 . O vetor π dado por $\pi^T = c_B^T B^{-1}$, é o vetor das variáveis duais associadas, também chamado de vetor multiplicador simplex. Assim, de (2.3.19) temos:

$$\begin{aligned} f(x) &= c_B^T B^{-1}b + (c_N^T - c_B^T B^{-1}N)x_N \\ &= \pi^T b + c_N^T x_N - \pi^T N x_N \\ &= f(x^0) + (c_N^T - \pi^T N)x_N \\ &= f(x^0) + \sum_{j \in N} (c_j - \pi^T a_j)x_j. \end{aligned}$$

O próximo passo do simplex é decidir que coluna entra na base. Para isto, é necessário calcular os custos relativos das variáveis não-básicas, que são determinados por $c_j - \pi^T a_j, j \in N$. A candidata a entrar na base é uma das variáveis que possui o custo relativo negativo. Se não existir tal variável, então a solução encontrada (x_j) é ótima.

Porém, observe que há m variáveis básicas e $(n - m)$ variáveis não-básicas, um número muito grande, quando $n \gg m$. Por isto, é praticamente impossível calcular os custos relativos de todas as variáveis não-básicas em problemas de grande porte. A idéia, então, é gerar a variável não-básica (coluna), utilizando a regra de Dantzig, que procura a coluna com o menor custo relativo para entrar na base. Queremos encontrar uma coluna a_k tal que, $c_k - \pi^T a_k = \min\{c_j - \pi^T a_j, j = 1, \dots, n\}$. Esta coluna pode ser obtida resolvendo o subproblema:

$$f(a_k) = \text{Min} \quad (c_j - \pi^T a_j) \quad (2.3.20)$$

$$\text{s.a.:} \quad a_j \text{ é um padrão de corte bidimensional.} \quad (2.3.21)$$

Observe que no caso do problema de corte de estoque com função objetivo $f(x) = x_1 + x_2 + \dots + x_n$, a função (2.3.20) é reescrita como:

$$f(a_k) = \min(1 - \pi^T a_j) = 1 + \min(-\pi^T a_j) = 1 + \max(\pi^T a_j).$$

Logo, resolver o subproblema ((2.3.20)-(2.3.21)) corresponde a resolver:

$$f(a_k) = \text{Max } (\pi^T a_j) \quad (2.3.22)$$

s.a.: a_j é um padrão de corte bidimensional.

Teste de Otimalidade:

$$f(x) = f(x^0) + \sum_{j \in N} (c_j - \pi^T a_j) x_j.$$

- Se $\bar{c} = 1 - f(a_k) \geq 0$, a solução básica atual é ótima.
- Senão, $\bar{c} = 1 - f(a_k) < 0$, a coluna (padrão de corte) a_k entra na base, melhorando o valor de $f(x)$. A coluna a sair da base segue os passos usuais do método simplex.

A estratégia simplex é definida como uma alteração da solução básica, através da perturbação de apenas uma variável não básica x_N . Como queremos minimizar $f(x)$ e $x_j \geq 0, \forall j \in N$, a variável x_k a ser perturbada deve ser tal que $c_j - \pi^T a_j < 0$. Sendo $x_k = \epsilon > 0$ e $x_j = 0, \forall j \in N - \{k\}$, o valor da função objetivo é dado por:

$$f(x) = f(x^0) + \sum_{j \in N} (c_j - \pi^T a_j) x_j = f(x^0) + (c_k - \pi^T a_k) \epsilon = f(x^0) + \bar{c}_k \epsilon.$$

E as variáveis básicas são alteradas para:

$$\begin{aligned} x_B &= B^{-1}b - B^{-1}N x_N \\ &= B^{-1}b - B^{-1}N[0, \dots, \epsilon, \dots, 0]^T \\ &= B^{-1}b - B^{-1}a_k \epsilon \\ x_B &= x_B^0 - y \epsilon \text{ e} \\ x_N &= \epsilon e_k. \end{aligned}$$

onde, $y = B^{-1}a_k$, $e_k = (0, \dots, 1, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^{n-m}$, com 1 na k -ésima componente e $x_N = (0, \dots, \epsilon, \dots, 0)$ com ϵ na k -ésima componente. O vetor $(y, e_k)^T$ define uma perturbação da solução básica e é chamado de direção simplex. Impondo que $x_B \geq 0$ temos, $\epsilon \leq \frac{x_B^0}{y}$,

para todo $y > 0$. E assim, podemos determinar o maior valor (ϵ) possível para a direção encontrada:

$$\epsilon = \frac{-x_{Bs}}{y_s} = \min \left\{ \frac{-x_{Bi}^0}{y_i}, y_i < 0, i = 1, \dots, m. \right\},$$

em que, x_{Bi}^0 é a i -ésima componente de x_B^0 . Para esta escolha de ϵ , a s -ésima componente de x_B se anula, enquanto apenas uma variável de x_N é positiva $x_k = \epsilon \geq 0$. Isto implica, em uma nova partição básica. Considere uma nova base, substituindo a coluna a_k obtida no subproblema (2.3.22) na posição da s -ésima coluna da matriz B . Repetimos este processo até que não haja coluna candidata a entrar na base, ou seja, enquanto a solução básica dual é inviável. Em cada iteração, uma coluna é gerada no passo em que se decide se há, ou não, uma candidata a entrar na base. O processo simplex com geração de colunas continua até que a coluna gerada tenha custo relativo não negativo, $c_j - \pi^T a_j \geq 0$, ou seja, a solução é ótima. Em Chvátal [16] e Bazaraa *et al.* [9] o algoritmo simplex é apresentado em detalhes.

A Figura 2.1 mostra o esboço do algoritmo simplex com geração de colunas para o problema de minimização (2.3.16).

Apesar do método de geração de colunas ser muito eficiente, este procedimento pode ter uma convergência lenta para a solução ótima do problema mestre. Nas primeiras iterações o valor da função objetivo decresce rapidamente, mas, a medida que a solução se aproxima da ótima, este decréscimo é cada vez menor. Este comportamento é típico da geração de colunas (*tailing off*) e ocorre por causa de degenerações primais e pelas excessivas oscilações das variáveis duais [3]. Em [25], du Merle *et al.* apresentam um esquema de estabilização que combina a técnica da perturbação com a das penalidades exatas, e que resulta numa redução muito significativa do número de colunas geradas quando aplicado a diversos problemas de otimização.

A vantagem do método simplex com geração de colunas é que não há a necessidade de armazenar todas as colunas do problema, mas, sim as mais interessantes em cada passo do método. É importante ressaltar que este método de solução é aplicado na relaxação linear do problema, o que pode resultar em soluções fracionárias. Portanto, o fato de resolver o problema linear através do método de geração de colunas não implica, necessariamente, uma solução ótima para o problema original (inteiro no caso do problema de corte e empacotamento). Assim, depois de resolvido o problema linear, surge um novo problema: encontrar uma solução inteira para o problema original a partir da solução da relaxação

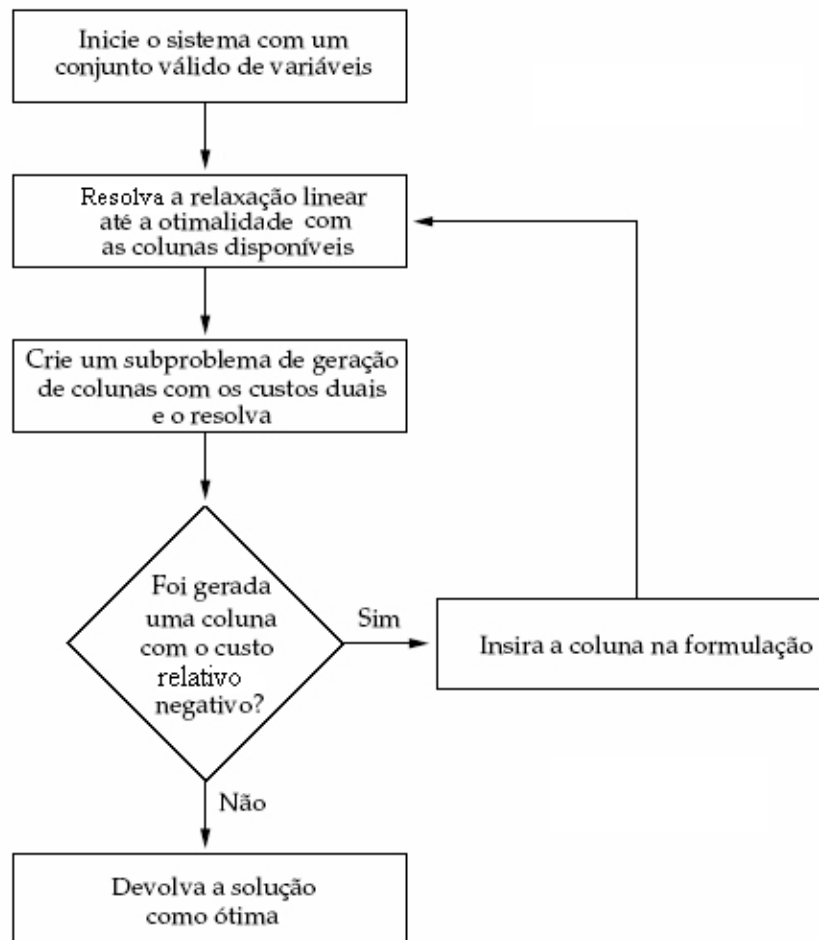


Figura 2.1: Esboço do método simplex com geração de colunas para um problema de minimização [4].

linear.

2.4 Métodos de Enumeração Implícita

A técnica *Branch and Bound* tem sido muito utilizada para encontrar a solução ótima de problemas de otimização inteira. Este método baseia-se na idéia de desenvolver uma enumeração inteligente dos pontos candidatos à solução ótima inteira. O termo *Branch* refere-se ao fato do método efetuar partições no espaço das soluções e o termo *Bound* ressalta que a prova da otimalidade da solução utiliza-se de limites calculados ao longo da enumeração. A motivação deste método parte do princípio que enumerar todas as soluções viáveis não é uma boa alternativa na maioria dos problemas, já que muitas vezes o número de soluções viáveis é muito grande [35]. Este algoritmo busca por uma solução

ótima através da análise de somente uma pequena parte do número total de possíveis soluções. O algoritmo trabalha particionando o espaço de soluções viáveis, até que uma solução ótima seja alcançada [63]. Segundo Avriel [6], a técnica *Branch and Bound* tem duas qualidades importantes, primeiro, pode ser aplicada em problemas de programação inteira mista, essencialmente da mesma maneira que pode ser aplicada a problemas de programação inteira pura. Segundo, o método gera uma sucessão de soluções inteiras viáveis, garantindo a melhor solução à mão como uma candidata a ótima.

Outra técnica muito utilizada de programação inteira é método *Branch and Cut*, que combina os métodos *Branch and Bound* com os planos de corte. O algoritmo *Branch and Cut* é semelhante ao algoritmo *Branch and Bound*, com a inclusão de inequações válidas em cada nó, afim de obter melhores limitantes, podendo vir a reduzir o número de nós da árvore *Branch and Bound* [76].

Além destes métodos exatos para problemas de programação linear, pesquisas nos últimos anos tem levado a algoritmos que combinam o método *Branch and Bound* com geração de colunas, obtendo o algoritmo *Branch and Price*. Este método é similar ao método *Branch and Cut*, com a diferença básica de que, no primeiro, faz-se uma geração de colunas ao invés de geração de linhas (restrições violadas dadas pelos planos de corte). O *Branch and Price* consiste em fazer a ramificação e gerar novas colunas a cada nó. Este método é muito eficiente, mas, esbarra em uma dificuldade crucial. Segundo Vanderbeck [73], o problema perde sua "estrutura" quando algumas restrições (*e.g.* restrição de partição) são adicionadas no problema mestre, o que pode desestruturar o subproblema usado para a geração de colunas, ou seja, pode destruir a estrutura que é explorada ou necessária para resolução eficiente destes subproblemas.

O algoritmo de *Branch and Price* têm sido muito utilizado em diversos tipos de problemas, por exemplo, de empacotamento unidimensional [72], de corte unidimensional [71], de roteamento [24], de escalonamento de tripulação [8], de atribuição generalizada [67]. Barnhart *et al.* [7] propõem o uso do algoritmo *Branch and Price* para solucionar problemas inteiros de grande porte e fazem uma revisão de alguns trabalhos similares propostos na literatura.

Recentemente, o *Branch and Price* foi combinado com o método dos planos de cortes, obtendo o algoritmo *Branch and Cut and Price*, [45]. Neste método é considerado não só a inserção de colunas, mas também de planos de cortes (linhas), com o intuito de se apro-

ximar mais do envoltório convexo do problema. Embora este método possa proporcionar um problema linear com relaxações fortes, o processo de geração de colunas com planos de corte não é trivial, pois a geração de colunas pode se tornar muito difícil depois da adição de restrições uma vez que estas podem destruir a estrutura do problema associado a geração de colunas. Em Belov e Scheithauer [11] este método é apresentado em detalhes. Para maior clareza dos métodos citados nesta seção veja, por exemplo, [44, 76, 75, 2].

Capítulo 3

Modelagem Matemática do Problema de Corte Guilhotinado Bidimensional

Pelos diversos fatores econômicos e exigências do mercado as empresas estão sempre buscando maior eficiência em sua produção. Por outro lado, o meio acadêmico está constantemente criando e investigando teorias que possam resolver problemas nos mais variados contextos. A resolução do problema de corte bidimensional na indústria moveleira, pode estar sujeito a várias considerações, tais como: o objetivo a ser alcançado, imposições da máquina de corte, produtividade, características dos objetos a serem cortados, entre outros.

A Fábrica de Móveis Luapa utiliza no geral padrões de corte 2-estágios. Porém, Rangel e Figueiredo [28] observaram uma tendência nesta empresa de trabalhar com padrões até 3-estágios, pois estes padrões apresentam um melhor aproveitamento da matéria-prima. A seguir, apresentaremos modelos matemáticos da literatura, Yanasse e Morabito [81], para a geração de padrões de corte 1-grupo, 2-grupos, 3i-grupos e 3t-grupos, para os casos exato e não-exato, restrito e irrestrito às demandas, que podem ser úteis para gerar padrões de corte para o corte de matéria-prima em indústrias de móveis.

3.1 Modelo para gerar Padrões de Corte 1-grupo

Descrevemos a seguir o modelo não linear 1-grupo para gerar padrões não-exato conforme apresentado por Yanasse e Morabito [80].

Supondo conhecidos:

m - número de itens;

L, W - comprimento e largura do objeto respectivamente;

l_i - comprimento do item i , $i = 1, \dots, m$;

w_i - largura do item i , $i = 1, \dots, m$;

b_i - demanda do item i , $i = 1, \dots, m$;

v_{ijk} - o valor do item i , $i = 1, \dots, m$ incluído em um retângulo de comprimento j , $j = 1, \dots, J$ e largura k , $k = 1, \dots, K$;

J - a quantidade de comprimentos diferentes l_i , $i = 1, \dots, m$;

K - a quantidade de larguras diferentes w_i , $i = 1, \dots, m$;

M - número suficientemente grande;

Queremos determinar:

λ_j = número de vezes que o comprimento l_j ($j = 1, \dots, J$) é cortado ao longo de L ;

μ_k = número de vezes que a largura w_k ($k = 1, \dots, K$) é cortada ao longo de W ;

a_{ijk} = número de retângulos (l_j, w_k) que contém itens do tipo i .

O modelo não linear 1-grupo para gerar um padrão de corte restrito é dado por:

$$\text{Max} \quad \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K v_{ijk} a_{ijk} \quad (3.1.1)$$

$$\text{s.a.:} \quad \sum_{j=1}^J l_j \lambda_j \leq L \quad (3.1.2)$$

$$\sum_{k=1}^K w_k \mu_k \leq W \quad (3.1.3)$$

$$\sum_{i=1}^m a_{ijk} \leq \lambda_j \mu_k, \quad \forall j = 1, \dots, J; k = 1, \dots, K \quad (3.1.4)$$

$$\sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K a_{ijk} \leq b_i, \quad \forall i = 1, \dots, m \quad (3.1.5)$$

$$\lambda_j, \mu_k, a_{ijk} \in \mathbb{Z}_+; \quad i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, J; k = 1, \dots, K. \quad (3.1.6)$$

onde, a função objetivo (3.1.1) maximiza o valor total dos itens cortados no padrão; as restrições (3.1.2) e (3.1.3) impõem que o comprimento e a largura dos retângulos não excedam o comprimento e largura do objeto, respectivamente; na restrição (3.1.4) o termo

$\lambda_j \mu_k$ corresponde ao número de retângulos (l_j, w_k) no padrão. Esta restrição limita o total de itens de todos os tipos cortados no padrão; a restrição (3.1.5) garante um padrão de corte restrito, isto é, limita pela demanda a quantidade de itens do tipo i produzidos no objeto e a restrição (3.1.6) diz respeito à não negatividade e integralidade das variáveis.

Para obter um padrão de corte não-exato o valor de cada item é calculado por:

$$v_{ijk} = \begin{cases} v_i, & \text{se } l_i \leq l_j \text{ e } w_i \leq w_k; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

E para o caso exato por:

$$v_{ijk} = \begin{cases} v_i, & \text{se } l_i = l_j \text{ e } w_i = w_k; \\ 0, & \text{caso contrário;} \end{cases}$$

onde v_i é o valor do item i .

Observe que no caso não-exato, algumas vezes é necessário fazer aparas nos itens $(l_i < l_j \text{ ou } w_i < w_k)$. Como mostra a Figura 3.1.

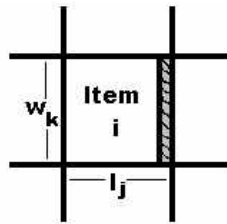


Figura 3.1: Item com aparas - padrão de corte não-exato.

Para o problema da determinação de padrão 1-grupo, Yanasse e Morabito [80] apresentam uma formulação linear. A formulação é derivada do método proposto por Harjunkoski *et al.* [39], que utiliza representações binárias para reescrever a restrição não linear do modelo sob uma forma linear. A restrição (3.1.4) do modelo 1-grupo, não linear, pode ser linearizada de modo a simplificar a resolução do problema.

Seja $\lambda_j = \sum_{s=1}^{s_j} 2^{s-1} \beta_{js}$, onde $\beta_{js} \in \{0, 1\}$ e s_j o número de dígitos necessários para representar o número $\left\lfloor \frac{L}{l_j} \right\rfloor$ na notação binária, isto é, $2^{s_j-1} \leq \left\lfloor \frac{L}{l_j} \right\rfloor < 2^{s_j}$.

Para maior clareza do significado de s_j , tomemos um exemplo. Sejam $L = 11$ e $l_j = 2$, então:

$$2^{s_j-1} \leq \left\lfloor \frac{L}{l_j} \right\rfloor < 2^{s_j} \implies 2^{s_j-1} \leq \left\lfloor \frac{11}{2} \right\rfloor < 2^{s_j} \implies$$

$$4 = 2^2 \leq 5 < 2^3 = 8.$$

Assim, $s_j = 3$ e $\lambda_j = 5$. Note que o número 5, representado em notação decimal, é dado em notação binária por 101 (vide Figura 3.2).

$$\begin{array}{r} 5 \mid 2 \\ 1 \ 2 \mid 2 \\ \quad 0 \ 1 \mid 2 \\ \quad \quad \uparrow \\ \quad \quad 1 \ 0 \end{array} \quad (5)_{10} = (101)_2$$

Figura 3.2: Transformação de decimal para binário.

Substituindo $\lambda_j = 5$ e $s_j = 3$ em $\lambda_j = \sum_{s=1}^{s_j} 2^{s-1} \beta_{js}$ temos,

$$5 = \sum_{s=1}^3 2^{s-1} \beta_{js} = 2^0 * \beta_{j1} + 2^1 * \beta_{j2} + 2^2 * \beta_{j3}$$

Suponha, $\beta_{j1} = 1$, $\beta_{j2} = 0$ e $\beta_{j3} = 1$. Logo,

$$5 = 1 * 1 + 2 * 0 + 4 * 1.$$

Portanto, β_{js} é o valor dos dígitos binários ("bits") da decomposição de λ_j um número decimal em um número binário, dado por $\lambda_j = 5$, o número de vezes que o comprimento 2 pode ser cortado ao longo de 11 .

Substituindo $\lambda_j = \sum_{s=1}^{s_j} 2^{s-1} \beta_{js}$ na restrição (3.1.4), temos:

$$\sum_{i=1}^m a_{ijk} \leq \lambda_j \mu_k = \sum_{s=1}^{s_j} 2^{s-1} \beta_{js} \mu_k, \quad \forall j, k.$$

Seja $f_{jks} = \beta_{js} \mu_k$. Se $\beta_{js} = 1$, então $f_{jks} = \mu_k$ e se $\beta_{js} = 0$, então $f_{jks} = 0$. A linearização é obtida impondo restrições ao valor de f_{jks} :

$$f_{jks} \leq \mu_k, \quad (3.1.7)$$

$$f_{jks} \geq \mu_k - M(1 - \beta_{js}), \quad (3.1.8)$$

$$f_{jks} \leq M\beta_{js}. \quad (3.1.9)$$

Se $\beta_{js} = 0$, as inequações (3.1.8) e (3.1.9) garantem que $f_{jks} = 0$. Se $\beta_{js} = 1$, pela inequação (3.1.8) temos, $f_{jks} \geq \mu_k$. Porém, a inequação (3.1.7), $f_{jks} \leq \mu_k$, implicando

$f_{jks} = \mu_k$. Logo, podemos substituir a restrição (3.1.4) por:

$$\sum_{i=1}^m a_{ijk} \leq \sum_{s=1}^{s_j} 2^{s-1} f_{jks},$$

$$f_{jks} \leq \mu_k,$$

$$f_{jks} \geq \mu_k - M * (1 - \beta_{js}),$$

$$f_{jks} \leq M\beta_{js}.$$

O modelo linear inteiro para gerar padrões 1-grupo é então:

Modelo 1-grupo

$$Max \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K v_{ijk} a_{ijk} \quad (3.1.10)$$

$$s.a.: \sum_{j=1}^J l_j \sum_{s=1}^{s_j} 2^{s-1} \beta_{js} \leq L \quad (3.1.11)$$

$$\sum_{k=1}^K w_k \mu_k \leq W \quad (3.1.12)$$

$$\sum_{i=1}^m a_{ijk} \leq \sum_{s=1}^{s_j} 2^{s-1} f_{jks}, \forall j = 1, \dots, J; k = 1, \dots, K \quad (3.1.13)$$

$$f_{jks} \leq \mu_k, \forall j = 1, \dots, J; k = 1, \dots, K; s = 1, \dots, s_j \quad (3.1.14)$$

$$f_{jks} \geq \mu_k - M(1 - \beta_{js}), \forall j = 1, \dots, J; k = 1, \dots, K; s = 1, \dots, s_j \quad (3.1.15)$$

$$f_{jks} \leq M\beta_{js}, \forall j = 1, \dots, J; k = 1, \dots, K; s = 1, \dots, s_j \quad (3.1.16)$$

$$\sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K a_{ijk} \leq b_i, \forall i = 1, \dots, m \quad (3.1.17)$$

$$\beta_{js} \in \{0, 1\}; \mu_k, a_{ijk} \in \mathbb{Z}_+, f_{jks} \geq 0,$$

$$i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, J; k = 1, \dots, K; s = 1, \dots, s_j. \quad (3.1.18)$$

Note que, a função objetivo (3.1.10) e as restrições (3.1.11), (3.1.12) e (3.1.17) são as mesmas que aparecem no modelo não linear 1-grupo ((3.1.1) - (3.1.6)). Apenas, a restrição (3.1.4) foi substituída pelas restrições ((3.1.13) - (3.1.16)).

3.2 Modelo para gerar Padrões de Corte 2-grupos

Para compreender melhor o padrão gerado pelo modelo 2-grupos proposto em [81] e mostrado a seguir, considere a Figura 3.3. Observe que no objeto (L, W) temos um padrão de corte 2-grupos. Note que após aplicado o corte vertical na posição L_1 , $(0 < L_1 \leq L)$, obtemos dois padrões de corte 1-grupo, um no subobjeto (L_1, W) e outro no subobjeto $(L - L_1, W)$.

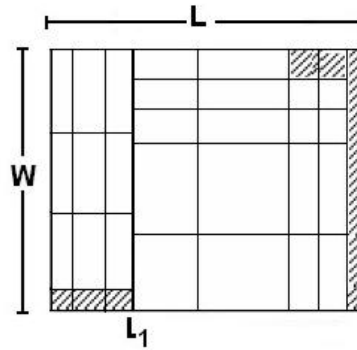


Figura 3.3: Padrão 2-grupos, corte inicial na vertical.

Considere L_1 uma variável e imponha que o padrão de corte em cada subobjeto é limitado por um padrão 1-grupo. Para gerar o padrão 2-grupos, foi utilizado o modelo 1-grupo ((3.1.10) - (3.1.18)) aplicado em cada subobjeto h , $h = 1, 2$. Sendo que para $h = 1$ temos o subobjeto (L_1, W) e para $h = 2$ o subobjeto $(L_2 = L - L_1, W)$. Para generalizar este procedimento, sejam as variáveis:

μ_{kh} = quantidade de vezes que a largura w_k é cortada ao longo de W no subobjeto h ;

β_{jsh} = o valor dos dígitos binários da decomposição do número de vezes que o comprimento l_j é cortado ao longo do subobjeto h , um número decimal, em um número binário;

a_{ijkh} = quantidade de retângulos (l_j, w_k) contendo o item do tipo i , no subobjeto h ;

L_h = comprimento do subobjeto h .

A formulação do modelo para gerar padrões de corte guilhotinados bidimensionais 2-grupos é dada por:

Modelo 2-grupos (vertical)

$$\text{Max} \sum_{h=1}^2 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K v_{ijk} a_{ijkh} \quad (3.2.19)$$

$$\text{s.a.: } \sum_{j=1}^J l_j \sum_{s=1}^{s_j} 2^{s-1} \beta_{jsh} \leq L_h, \forall h = 1, 2 \quad (3.2.20)$$

$$\sum_{k=1}^K w_k \mu_{kh} \leq W, \forall h = 1, 2 \quad (3.2.21)$$

$$\sum_{i=1}^m a_{ijkh} \leq \sum_{s=1}^{s_j} 2^{s-1} f_{jks h}, \forall j = 1, \dots, J; k = 1, \dots, K; h = 1, 2 \quad (3.2.22)$$

$$f_{jks h} \leq \mu_{kh}, \forall j = 1, \dots, J; k = 1, \dots, K; s = 1, \dots, s_j; h = 1, 2 \quad (3.2.23)$$

$$f_{jks h} \geq \mu_{kh} - M(1 - \beta_{jsh}), \forall j = 1, \dots, J; k = 1, \dots, K; s = 1, \dots, s_j; h = 1, 2 \quad (3.2.24)$$

$$f_{jks h} \leq M\beta_{jsh}, \forall j = 1, \dots, J; k = 1, \dots, K; s = 1, \dots, s_j; h = 1, 2 \quad (3.2.25)$$

$$\sum_{h=1}^2 \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K a_{ijkh} \leq b_i, \forall i = 1, \dots, m \quad (3.2.26)$$

$$0 \leq L_1 \leq \frac{L}{2} \quad (3.2.27)$$

$$L_2 = L - L_1 \quad (3.2.28)$$

$$\beta_{jsh} \in \{0, 1\}; \mu_{kh}, a_{ijkh} \geq 0, \in \mathbb{Z}, f_{jks} \geq 0, \\ i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, J; k = 1, \dots, K; s = 1, \dots, s_j; h = 1, 2. \quad (3.2.29)$$

A função objetivo (3.2.19), maximiza o valor total dos itens cortados no padrão. As restrições (3.2.20) e (3.2.21) impõem que, o comprimento e a largura dos itens não excedam o comprimento e largura do subobjeto, respectivamente. A restrição (3.2.22) limita a quantidade de itens de todos os tipos cortados no padrão do subobjeto h . As restrições (3.2.26) limitam pela demanda a quantidade de itens do tipo i produzidos no objeto. A restrição (3.2.27) é imposta pela simetria (vide Capítulo 2). E a restrição (3.2.28) limita os cortes verticais, em Yanasse e Morabito [81] esta restrição é considerada implicitamente.

Observe que, as restrições (3.2.20) - (3.2.26) correspondem as restrições (3.1.11) - (3.1.17) do modelo 1-grupo aplicadas em cada subobjeto h . O modelo 2-grupos ((3.2.19)-(3.2.29)) pode ser facilmente reescrito para o caso do corte inicial ser na horizontal do objeto (L, W) . Para isto, basta aplicar um corte horizontal W_1 , $0 < W_1 \leq W$ no objeto

(L, W) , o qual resultará em dois subobjetos, (L, W_1) e $(L, W_2 = W - W_1)$. Além disto, ao invés de tomar L_h como variável, considere W_h , e defina a restrição imposta pela simetria por $0 \leq W_1 \leq \frac{W}{2}$. Outra maneira mais simples, é resolver o modelo 2-grupos vertical simplesmente redefinindo as dimensões do objeto para (W, L) e as dimensões de cada item para (w_i, l_i) , $i = 1, \dots, m$.

3.3 Modelo para gerar Padrões de Corte 3i-grupos

Um padrão de corte 3-grupos, caso particular do padrão 2-estágios, se caracteriza pelo fato de no primeiro estágio, as faixas resultantes serem divididas em 3 grupos, de modo que todas as faixas de um mesmo grupo são cortadas simultaneamente no segundo estágio. A notação 3i-grupos é utilizada devido aos cortes feitos no objeto serem do tipo "i", ou seja, ou os cortes principais são na vertical ou na horizontal do objeto. Em outras palavras o corte do tipo "i" significa que, as 3 regiões (subobjetos) do padrão de corte 3-grupos são obtidos apenas com um estágio. O padrão gerado pelo modelo 3i-grupos, proposto em [81], pode ser compreendido melhor se observarmos a Figura 3.4. Inicialmente são aplicados dois cortes principais na vertical (L_1 e L_2) do objeto (L, W) . Note que, L_1 e L_2 , $0 < L_1 \leq L_2 \leq L$, dividem o plano (L, W) em três subobjetos, (L_1, W) , (L_2, W) e $(L - L_1 - L_2, W)$, e que para cada um destes subobjetos é gerado um padrão 1-grupo.

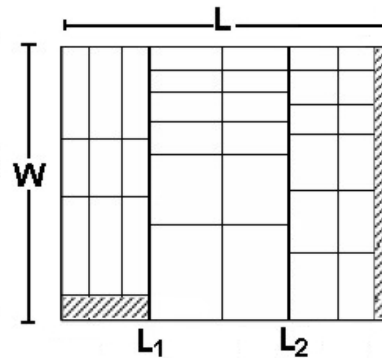


Figura 3.4: Padrão 3i-grupos, cortes iniciais na vertical.

O modelo 3i-grupos é análogo ao modelo 2-grupos dado anteriormente. Porém, no caso 3i-grupos, $h = 1, 2, 3$. Assim, sejam L_1 , L_2 e $L - L_1 - L_2$, os comprimentos dos subobjetos 1, 2 e 3 respectivamente, e imponha que o padrão de corte em cada subobjeto h é limitado ao padrão 1-grupo. Para gerar o padrão 3i-grupos, o modelo 1-grupo ((3.1.10)-(3.1.18))

é aplicado em cada subobjeto h , $h = 1, 2, 3$. Para $h = 1$ o subobjeto (L_1, W) , $h = 2$ o subobjeto é (L_2, W) e $h = 3$ o subobjeto é $(L_3 = L - L_1 - L_2, W)$.

A formulação do modelo para gerar padrões de corte guilhotinados bidimensionais 3i-grupos é dada por:

Modelo 3i-grupos (vertical)

$$Max \sum_{h=1}^3 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K v_{ijk} a_{ijkh} \quad (3.3.30)$$

$$s.a.: \sum_{j=1}^J l_j \sum_{s=1}^{s_j} 2^{s-1} \beta_{jsh} \leq L_h, \quad \forall h = 1, 2, 3 \quad (3.3.31)$$

$$\sum_{k=1}^K w_k \mu_{kh} \leq W, \quad \forall h = 1, 2, 3 \quad (3.3.32)$$

$$\sum_{i=1}^m a_{ijkh} \leq \sum_{s=1}^{s_j} 2^{s-1} f_{jks}, \quad \forall j = 1, \dots, J; k = 1, \dots, K; h = 1, 2, 3 \quad (3.3.33)$$

$$f_{jks} \leq \mu_{kh}, \quad \forall j = 1, \dots, J; k = 1, \dots, K; s = 1, \dots, s_j; h = 1, 2, 3 \quad (3.3.34)$$

$$f_{jks} \geq \mu_{kh} - M(1 - \beta_{jsh}), \quad \forall j = 1, \dots, J; k = 1, \dots, K; s = 1, \dots, s_j; h = 1, 2, 3 \quad (3.3.35)$$

$$f_{jks} \leq M\beta_{jsh}, \quad \forall j = 1, \dots, J; k = 1, \dots, K; s = 1, \dots, s_j; h = 1, 2, 3 \quad (3.3.36)$$

$$\sum_{h=1}^3 \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K a_{ijkh} \leq b_i, \quad \forall i = 1, \dots, m \quad (3.3.37)$$

$$0 \leq L_1 \leq \frac{L}{2} \quad (3.3.38)$$

$$L_2 \leq L - L_1 - L_2 \quad (3.3.39)$$

$$L_3 = L - L_1 - L_2 \quad (3.3.40)$$

$$\beta_{jsh} \in \{0, 1\}; \mu_{kh}, a_{ijkh} \geq 0, \in \mathbb{Z}, f_{jks} \geq 0,$$

$$i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, J; k = 1, \dots, K; s = 1, \dots, s_j; h = 1, 2, 3. \quad (3.3.41)$$

O significado das restrições (3.3.38), (3.3.39) e (3.3.40) é similar as restrições (3.2.27) e (3.2.28) do modelo 2-grupos, as quais servem para limitar os cortes verticais. Em

Yanasse e Morabito [81], a restrição (3.3.40) é considerada implicitamente. Esta restrição é referente a capacidade do objeto. As restrições (3.3.38) e (3.3.39) são impostas pela simetria (vide Capítulo 1). Similar ao modelo 2-grupos, o modelo 3i-grupos ((3.3.30) - (3.3.41)) pode ser facilmente reescrito para o caso em que os corte iniciais são aplicados na horizontal. Para isto, basta redefinir as dimensões do objeto para (W, L) e as dimensões de cada item para (w_i, l_i) , $i = 1, \dots, m$.

3.4 Padrões de Corte do Tipo “T”

Cui [19, 20] apresenta uma classe especial de padrões de corte bidimensionais para produzir itens circulares (vide Figura 3.5 a)) ou retangulares (vide Figura 3.5 b)). Estes padrões recebem o nome de tipo “T”, devido os cortes aplicados no padrão serem semelhantes a um “T”.

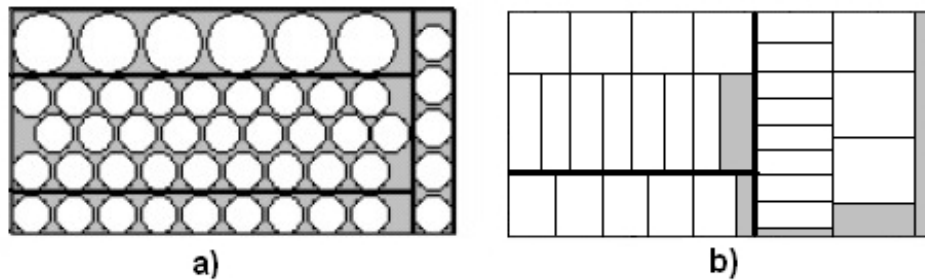


Figura 3.5: Padrão do tipo “T” com itens: a) circulares, b) retangulares.

Os padrões do tipo “T” podem ainda serem formados por subpadrões 1-grupo, chamados por Yanasse e Morabito [81] de padrões 3t-grupos. Um padrão 3t-grupos pode ser um padrão 2-estágios ou 3-estágios, e se caracteriza pelo fato de nos dois primeiros (ou no primeiro) estágios as faixas resultantes serem divididas em 3 grupos, de modo que todas as faixas de um mesmo grupo são cortadas simultaneamente no segundo e terceiro estágio. Para compreendermos melhor o padrão gerado pelo modelo 3t-grupos observemos a Figura 3.6. Inicialmente, é aplicado um corte vertical, L_1 , $0 < L_1 \leq L$, que divide o objeto (L, W) , em dois subobjetos (L_1, W) e $(L - L_1, W)$, e em seguida um corte na horizontal W_2 , $0 < W_2 \leq W$ é efetuado, dividindo o objeto $(L - L_1, W)$ em dois subobjetos $(L - L_1, W_2)$ e $(L - L_1, W - W_2)$. Note que em cada um dos subobjetos há sempre um padrão 1-grupo.

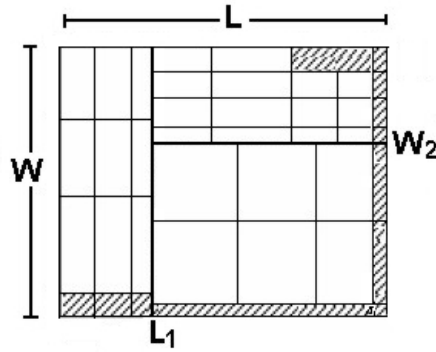


Figura 3.6: Padrão 3t-grupos.

Nas próximas subseções detalharemos procedimentos para gerar padrões de corte do tipo “T”: 3t-grupos [81] e homogêneos [20].

3.4.1 Modelo para gerar Padrões de Corte 3t-grupos

Yanasse e Morabito [81] propõem um modelo de otimização inteira mista para gerar um padrão de corte 3t-grupos. Considere L_1 e W_2 , variáveis, e imponha que o padrão de corte em cada subobjeto h seja limitado a um ser um padrão 1-grupo. O modelo 1-grupo ((3.1.10) - (3.1.18)) é então usado em cada subobjeto h , $h = 1, 2, 3$. Sendo que para $h = 1$ o subobjeto é $(L_1, W_1 = W)$, $h = 2$ o subobjeto é $(L_2 = L - L_1, W_2)$ e $h = 3$ o subobjeto é $(L_3 = L - L_1, W_3 = W - W_2)$.

Defina as variáveis:

μ_{kh} = quantidade de vezes que a largura w_k é cortada ao longo de W no subobjeto h ;

a_{ijkh} = quantidade de retângulos $l_j \times w_k$ restritos no item do tipo i no subobjeto h ;

β_{jsh} = o valor dos dígitos binários da decomposição do número de vezes que o comprimento l_j é cortado ao longo do subobjeto h , um número decimal, em um número binário;

L_h = comprimento do subobjeto h ;

W_h = largura do subobjeto h .

O modelo para gerar padrões de corte guilhotinados bidimensionais 3t-grupos é então dado por:

Modelo 3t-grupos (vertical)

$$\text{Max} \quad \sum_{h=1}^3 \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K v_{ijk} a_{ijkh} \quad (3.4.42)$$

$$\text{s.a.:} \quad \sum_{j=1}^J l_j \sum_{s=1}^{s_j} 2^{s-1} \beta_{jsh} \leq L_h, \quad \forall h = 1, 2, 3 \quad (3.4.43)$$

$$\sum_{k=1}^K w_k \mu_{kh} \leq W_h, \quad \forall h = 1, 2, 3 \quad (3.4.44)$$

$$\sum_{i=1}^m a_{ijkh} \leq \sum_{s=1}^{s_j} 2^{s-1} f_{jksh}, \quad \forall j = 1, \dots, J; k = 1, \dots, K; h = 1, 2, 3 \quad (3.4.45)$$

$$f_{jksh} \leq \mu_{kh}, \quad \forall j = 1, \dots, J; k = 1, \dots, K; s = 1, \dots, s_j; h = 1, 2, 3 \quad (3.4.46)$$

$$f_{jksh} \geq \mu_{kh} - M(1 - \beta_{jsh}), \quad \forall j = 1, \dots, J; k = 1, \dots, K; s = 1, \dots, s_j; h = 1, 2, 3 \quad (3.4.47)$$

$$f_{jksh} \leq M\beta_{jsh}, \quad \forall j = 1, \dots, J; k = 1, \dots, K; s = 1, \dots, s_j; h = 1, 2, 3 \quad (3.4.48)$$

$$\sum_{h=1}^3 \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K a_{ijkh} \leq b_i, \quad \forall i = 1, \dots, m \quad (3.4.49)$$

$$0 \leq W_2 \leq \frac{W_1}{2} \quad (3.4.50)$$

$$L_2 = L - L_1 \quad (3.4.51)$$

$$L_2 = L_3 \quad (3.4.52)$$

$$W_1 = W \quad (3.4.53)$$

$$W_3 = W_1 - W_2 \quad (3.4.54)$$

$$\beta_{jsh} \in \{0, 1\}; \mu_{kh}, a_{ijkh} \in \mathbb{Z}_+; f_{jks} \geq 0;$$

$$i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, J; k = 1, \dots, K; s = 1, \dots, s_j; h = 1, 2, 3. \quad (3.4.55)$$

Em Yanasse e Morabito [81], as restrições (3.4.51), (3.4.52), (3.4.53) e (3.4.54) são consideradas implicitamente e limitam os valores de W_1 , W_3 e L_2 . A restrição (3.4.50) é imposta pela simetria. Observe, que as restrições (3.4.43) - (3.4.49) correspondem as restrições (3.1.11) - (3.1.17) do modelo 1-grupo, mas aplicadas a cada subobjeto $h = 1, 2, 3$. Similar aos modelos n-grupos apresentados nas Seções 3.1 - 3.3, o modelo 3t-grupos pode

ser facilmente reescrito para o caso em que o corte inicial é na horizontal do objeto (L, W). Para isto, basta redefinir as dimensões do objeto para (W, L) e as dimensões de cada item para (w_i, l_i) , $i = 1, \dots, m$.

3.4.2 Padrões de Corte do Tipo “T” Homogêneos

Em determinados ambientes de produção de cortes o uso de padrões homogêneos pode ser fundamental para simplificar o processo de corte [48]. Os padrões de corte do tipo “T” homogêneos apresentados por Cui em [20] são construídos de uma forma diferente dos padrões homogêneos definidos no Capítulo 1. Estes padrões possuem vários tipos de itens, porém todas as faixas são compostas por apenas um tipo de item (faixas homogêneas). Para a construção dos padrões do tipo “T”, Cui [20] define 2 segmentos, X e Y , tais que o segmento X é o conjunto de faixas dispostas horizontalmente e o segmento Y é o conjunto de faixas dispostas verticalmente. Os padrões do tipo “T” homogêneos podem ser classificados como sendo do tipo TX ou do tipo TY . Um padrão é do tipo TX (vide Figura 3.7 a)) se o corte principal é feito na direção vertical e é do tipo TY (vide Figura 3.7 b)) se o corte principal é feito na direção horizontal.

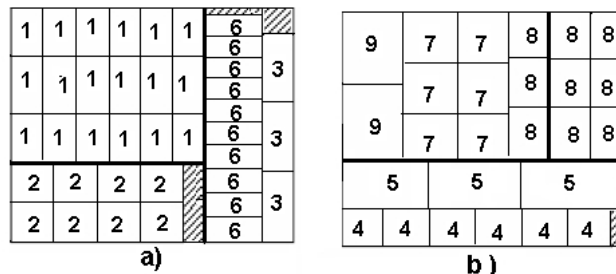


Figura 3.7: Padrão do tipo “T” homogêneos: a) TX , b) TY .

Algoritmo para gerar Padrões de Corte do Tipo “T” Homogêneo

Cui [20] define quatro passos para a construção do padrão do tipo “T” homogêneo. São eles:

Passo 1 - Inicialmente são geradas todas as possíveis faixas horizontais e verticais. Para o item do tipo i são geradas no máximo $g_{X_i} = \min(b_i, \lfloor \frac{L}{l_i} \rfloor)$ faixas horizontais de largura w_i . A faixa k contém k itens e seu valor é dado por kc_i , $1 \leq k \leq g_{X_i}$. De forma

similar, são geradas no máximo $g_{Yi} = \min(b_i, \lfloor \frac{W}{w_i} \rfloor)$ faixas verticais de largura l_i . A faixa k contém k itens e seu valor é dado por kc_i , $1 \leq k \leq g_{Yi}$, onde c_i é o valor do item i .

Passo 2 - O segundo passo é obter os possíveis segmentos X a partir das faixas horizontais geradas no Passo 1. Um segmento X é gerado da seguinte maneira: considere duas faixas horizontais dadas por $A = (l_A, w_A)$ e $B = (l_B, w_B)$. Um segmento X , definido por $C = (l_C, w_C)$ é obtido a partir da combinação de A e B , de tal forma que:

$$l_c = \max\{l_A, l_B\},$$

$$w_c = w_A + w_B,$$

$$l_c \leq L, w_c \leq W.$$

Além disto, o número de itens em C (conjunto de faixas horizontais) não deve exceder as demandas. Por exemplo, o segmento X da Figura 3.8 b) é obtido por duas faixas horizontais (vide Figura 3.8 a)).

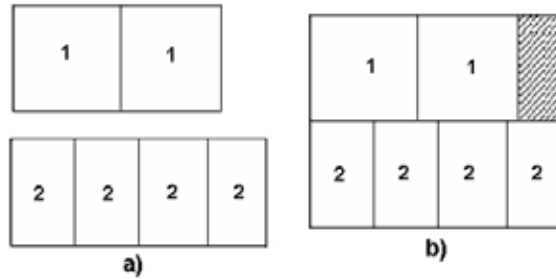


Figura 3.8: a) Faixas X , b) Segmento X .

Passo 3 - O terceiro passo é obter os possíveis segmentos Y a partir das faixas verticais geradas no Passo 1. Um segmento Y é gerado da seguinte maneira: considere duas faixas verticais dadas por $D = (l_D, w_D)$ e $E = (l_E, w_E)$. Um segmento Y , definido por $F = (l_F, w_F)$ é obtido a partir da combinação de D e E , de tal forma que:

$$l_F = l_D + l_E,$$

$$w_F = \max\{w_D, w_E\},$$

$$l_F \leq L, w_F \leq W.$$

Além disto, o número de itens em F (conjunto de faixas verticais) não deve exceder as demandas. Por exemplo, o segmento Y da Figura 3.9 b) é obtido por duas faixas verticais (vide Figura 3.9 a)).

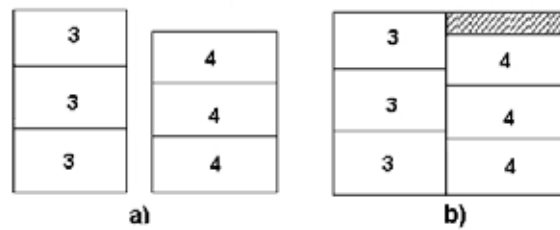


Figura 3.9: a) Faixas Y , b) Segmento Y .

Passo 4 - O quarto passo é obter os padrões do tipo "T" homogêneos restrito, unindo os segmentos X e Y gerados no Passo 2 e 3. Um padrão do tipo "T" homogêneo é gerado da seguinte maneira: considere o segmento X dado por $C = (l_C, w_C)$ e o segmento Y dado por $F = (l_F, w_F)$. Um padrão do tipo "T" homogêneo é definido por $G = (l_G, w_G)$ é obtido a partir da combinação de C e F , de tal forma que:

$$l_G = \max\{l_C, l_F\},$$

$$w_G = w_C + w_F,$$

$$l_G \leq L, w_G \leq W.$$

Além disto, o número de itens em G (conjunto de faixas horizontais e verticais) não deve exceder as demandas. Por exemplo, o padrão do tipo "T" homogêneo gerado pelo segmento X (Passo 2) e segmento Y (Passo 3) é dado na Figura 3.10.

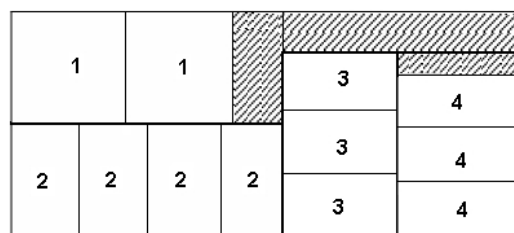


Figura 3.10: Padrão do tipo "T" homogêneo.

Baseado nos Passos 1 a 4, Cui [20], propõe um algoritmo exato baseado no método *Branch and Bound* combinado com técnicas de programação dinâmica, para gerar padrões do tipo "T" homogêneos.

Considerações iniciais

Assuma, que $p_{max} = \max_i \left\{ \frac{c_i}{l_i w_i} \right\}$ é o valor máximo da área dos itens. Na explicação do algoritmo denotaremos faixas, segmentos ou ambos por "blocos". Sejam, V^* o melhor valor do padrão do tipo "T" obtido até o momento e $LS(R)$ o limite superior do valor de um padrão que contém o bloco R . Os conjuntos "Abrir", "FecharX", "FecharY" armazenam blocos. Ou seja, o conjunto "FecharX" armazena as faixas X e os segmentos X e o conjunto "FecharY" as faixas Y e os segmentos Y .

Comprimento Normal

O comprimento normal do segmento é dado pelos múltiplos do comprimento de um item. Ou seja, o comprimento normal relacionado ao i -ésimo item é dado por:

$$x_{ik} = kl_i,$$

para todo $k = 1, 2, \dots, \min(b_i, \lfloor \frac{L}{l_i} \rfloor)$, $i = 1, \dots, m$.

Seja P o conjunto dos comprimentos normais, incluindo 0 e L . Os elementos deste conjunto P , estão ordenados em ordem crescente, ou seja, $P = \{p_1, \dots, p_M\}$, onde $p_i < p_{i+1}$, $i = 1, \dots, M - 1$.

Propriedade 3.1. *O valor ótimo do segmento $X(x, y)$ é igual ao do segmento $X(p(x), y)$, onde $p(x)$ é o maior comprimento normal, não maior que x .*

Limitantes

É possível calcular limitantes para o valor ótimo do padrão de corte, resolvendo por programação dinâmica o problema da mochila que maximiza o valor total dos diferentes tipos de faixas homogêneas horizontais/verticais a serem inseridas nas áreas disponíveis.

A idéia de utilizar os limitantes parte do seguinte princípio: primeiro estabelecemos um limite superior para o padrão associado ao segmento X . Observe que todos os possíveis segmentos X podem ser gerados a partir das combinações das possíveis faixas X . Porém, algumas destas combinações podem não aparecer na solução ótima. Para diminuir o número de segmentos considerados explicitamente, é necessário utilizar um bom limitante superior. Para isto, considere $R = l_R w_R$ um segmento X qualquer, conhecido, cujo valor é $val(R)$. As faixas X que mais tarde são combinadas com R , possuem comprimentos menores ou iguais a l_R , para que apenas segmentos normais X possam ser considerados. Desta maneira, dividimos um objeto em 3 regiões como na Figura 3.11, onde $a = W - w_R$ e $b = L - l_R$. Quando o último padrão do tipo "T" for gerado, na região A haverá apenas faixas X , e na B apenas faixas Y .

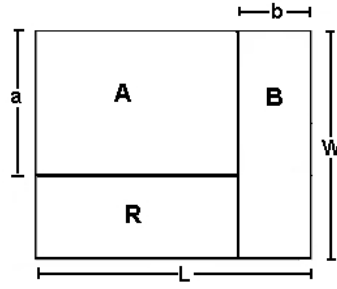


Figura 3.11: Limite superior para o padrão contendo o Segmento $X - R$.

Um limitante superior para o padrão da Figura 3.11, associado ao segmento X é dado por:

$$LS(X(R)) = val(R) + F_X(l_R, a) + E_Y(b), \quad (3.4.56)$$

onde, $F_X(l_R, a)$ é um limite superior irrestrito do valor total dos itens inclusos no segmento X (l_R, a) e $E_Y(b)$ é um limite superior restrito do valor total dos itens inclusos no segmento Y (b, W).

Inicialmente, estimamos o limitante superior irrestrito para o segmento X . Para isto, seja $F_X(x, y)$ o maior valor do segmento $X(x, y)$ dado pelo seguinte problema da mochila irrestrito:

$$\begin{aligned} \text{Max } F_X(x, y) &= \sum_{i=1}^m u(i, x) z_i & (3.4.57) \\ \text{s.a.:} & \sum_{i=1}^m w_i z_i \leq y \end{aligned}$$

$$z_i \in \mathbb{Z}^+; i = 1, \dots, m; x \in P; 0 \leq y \leq W;$$

em que:

$$0 \leq y \leq W \text{ e } x \in P;$$

$u(i, x)$ é o valor da faixa $X(x, w_i)$, dado por $\min(b_i, \lfloor \frac{x}{w_i} \rfloor) c_i$ ($i = 1, \dots, m$);

z_i é o número de faixas $X(x, w_i)$ que aparecem no segmento $X(x, y)$.

No passo seguinte, estimamos um limitante superior restrito para o segmento Y . Para isto, considere as n possíveis faixas Y , construídas pelo Passo 1. O maior valor restrito para o segmento $Y(x, W)$, $E_Y(x)$ é calculado pelo seguinte problema da mochila restrito:

$$\begin{aligned}
\text{Max } E_Y(x) &= \sum_{i=1}^n t_i z_i & (3.4.58) \\
\text{s.a.:} & \sum_{i=1}^n s_i z_i \leq x \\
& \sum_{i=1}^n z_i \delta_{ik} \leq b_k, \quad k = 1, \dots, m.
\end{aligned}$$

em que:

$$0 \leq x \leq L;$$

$S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ é o conjunto das possíveis larguras das faixas Y ;

$T = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ é o conjunto dos valores das possíveis faixas Y ;

z_i é o número de faixas i ($i = 1, \dots, m$) inclusas no segmento Y ;

δ_{ik} ($k = 1, \dots, m; i = 1, \dots, n$), é o número de itens do tipo k na faixa i . Para um i específico existe um único $j \in \mathbb{Z}$, tal que $\delta_{ik} > 0$, para todo $k = j > 0$ e $\delta_{ik} = 0$, para todo $k \neq j$.

De modo análogo, estabeleceremos um limite superior associado ao segmento Y . Para isto, considere, $R = l_R w_R$ um segmento Y qualquer conhecido, cujo valor é $val(R)$. Algumas faixas Y são combinadas com R , resultando no segmento Y , que combinado com um segmento X gera um padrão do tipo “T”. Neste caso, o padrão contendo R pode ser dividido em duas regiões, T e R , como mostra a Figura 3.12. Note que na região $T = (L - l_R, W)$ podemos ter um padrão do tipo “T”.

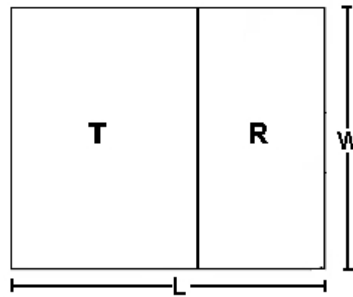


Figura 3.12: Limite superior para o padrão contendo o Segmento $Y - R$.

Seja $F_T(x)$, o limite superior do padrão do tipo “T” no objeto parcial (x, W) , dado por:

$$F_T(x) = \max_{0 \leq z \leq x} [F_X(z, W) + E_Y(x - z)], \quad (3.4.59)$$

onde, $F_X(z, W)$ é o valor do segmento $X(z, W)$ determinado da resolução do modelo (3.4.57) e $E_Y(x - z)$ é o valor do segmento $Y(x - z, W)$ obtido da resolução do modelo (3.4.58). Logo, pela Propriedade 3.1, a equação (3.4.59) é reescrita por:

$$F_T(x) = \max_{z \in P, z \leq x} [F_X(z, W) + E_Y(x - z)]. \quad (3.4.60)$$

Portanto, um limitante superior para o padrão da Figura 3.12 associado ao segmento Y , é dado por:

$$LS(Y(R)) = \text{val}(R) + F_T(L - l_R). \quad (3.4.61)$$

Nas outras etapas do algoritmo, quando o limite superior para o padrão contendo o segmento R for inferior ou igual ao valor do melhor padrão obtido até o momento, o segmento R pode ser descartado. Observe que se partirmos de um bom limite inferior inicial podemos reduzir o trabalho da procura pelo melhor padrão. Este limitante é detalhado a seguir.

Utilizando o mesmo conjunto de faixas do modelo (3.4.57), calculamos $E_X(x)$, ($x \in P$), o maior valor da solução restrita para o segmento $X(x, W)$, dado pelo seguinte problema da mochila restrito,

$$\text{Max } E_X(x) = \sum_{i=1}^m u(i, x) z_i \quad (3.4.62)$$

$$\text{s.a.:} \quad \sum_{i=1}^m w_i z_i \leq y$$

$$z_i \delta_i \leq b_i$$

$$z_i \in \mathbb{Z}_+; i = 1, \dots, m; x \in P;$$

em que:

z_i é a quantidade de faixas i ($i= 1, \dots, m$), no segmento X ;

δ_i é a quantidade de itens i na faixa i , $i = 1, \dots, m$.

Seja, $Q = \{x/x \in P; \eta_X(i, x) + \eta_Y(i, L - x) \leq b_i, i = 1, \dots, m\}$, onde, $\eta_X(i, x)$ a quantidade de itens i incluídos na solução restrita para o segmento $X(x, W)$, obtida pelo problema (3.4.62) e $\eta_Y(i, L - x)$ a quantidade de itens i incluídos na solução ótima restrita do segmento $Y(L - x, W)$, obtida pelo problema (3.4.58). Assim, considere V_0 o limitante inicial, dado por:

$$V_0 = \max_{x \in Q} [E_X(x) + E_Y(L - x)]. \quad (3.4.63)$$

Algoritmo

As etapas básicas do algoritmo são dadas por:

Etapa 1 - {Cálculo dos limitantes}

Resolva o problema (3.4.57) para obter $F_X(x, y)$ ($x \in P$ e $0 \leq y \leq W$) e o problema (3.4.58) para obter $E_Y(x)$ ($0 \leq x \leq L$). A partir destas soluções, usando a equação (3.4.60) obtêm-se o limitante superior $F_T(x)$. Depois, resolva o problema (3.4.62) para obter $E_X(x)$ ($x \in P$) e calcula-se o limitante inferior V_0 , usando a equação (3.4.63).

Etapa 2 - {Construção de Faixas}

Seja $V^* = V_0$. Se $V^* = F_T(L)$, ou seja, o limite superior da utilização do padrão do tipo "T" é igual ao limite inferior, então passe a Etapa 8. Senão, construa as possíveis faixas X e Y pelo Passo 1 e adicione-as no conjunto "Abrir", atribuindo para cada faixa um limite superior, dado por $p_{max}LW$.

Etapa 3 - {Análise do melhor bloco}

Se "Abrir" = \emptyset , então passe a Etapa 8. Senão, retire um bloco R_A que tem o maior $LS(R_A)$. Se $LS(R_A) \leq V^*$, então passe a Etapa 8, caso contrário, passe a Etapa 4.

Etapa 4 - {Diferenciação entre bloco horizontal e vertical}

Se, R_A é um bloco X, então transfira R_A de "Abrir" para "FecharX" e passe a Etapa 5. Caso contrário, transfira R_A de "Abrir" para "FecharY" e passe a Etapa 6.

Etapa 5 - {Construção dos blocos verticais}

Considere um por um os blocos de "FecharX" até $LS(R_A) \leq V^*$, ou até todos os blocos serem considerados. Quando terminar passe a Etapa 7. Para cada bloco R_B de "FecharX": Se, $LS(R_B) \leq V^*$, então passe a Etapa 6. Senão, construa o bloco X - R_C entre R_A e R_B pelo Passo 2 e determine $LS(R_C) = val(R_C) + F_X(l_{R_C}, a) + E_Y(b)$, onde $a = W - w_{R_C}$ e $b = L - l_{R_C}$ (equação (3.4.56)). Se, $LS(R_C) \leq V^*$, então descarte R_C . Caso contrário, adicione R_C em "Abrir" e atualize $V^* = \max[V^*, val(R_C)]$.

Etapa 6 - {Construção dos blocos horizontais}

Considere um por um os blocos de "FecharY" até $LS(R_A) \leq V^*$, ou até todos os blocos serem considerados. Quando terminar passe a Etapa 7. Para cada bloco R_B de "FecharY": Se, $LS(R_B) \leq V^*$, então passe a Etapa 7. Senão, construa o bloco X - R_C entre R_A e R_B pelo Passo 3. E determine, $LS(R_C) = val(R_C) + F_T(L - l_{R_C})$ (equação (3.4.61)). Se, $LS(R_C) \leq V^*$, então descarte R_C . Caso contrário, adicione R_C em "Abrir" e atualize $V^* = \max[V^*, val(R_C)]$.

Etapa 7 - {Construção dos padrões do tipo "T" homogêneos}

Para todo bloco R_A de "Abrir". Se, $LS(R_A) \leq V^*$, então volte a Etapa 3. Caso contrário, se R_A é bloco de X , então "Fechar" = "FecharY", senão "Fechar" = "FecharX". Após a separação dos blocos, considere um por um os blocos de "Fechar" até $LS(R_A) \leq V^*$ ou até todos os blocos serem considerados. Para cada bloco (R_B) retirado de "Fechar", se, $LS(R_B) \leq V^*$, então descarte R_B . Caso contrário, construa o padrão do tipo "T", R_C entre R_A e R_B pelo Passo 4. E atualize $V^* = \max[V^*, val(R_C)]$.

Etapa 8 - {Otimidade}

Saída V^* . PARE.

Exemplo

Para ilustrar a construção de um padrão do tipo "T" homogêneo considere os dados dos itens da tabela abaixo e um objeto de dimensões $L = 100$ e $W = 100$.

Item i	l_i	w_i	b_i	$c_i = l_i w_i$
1	33	14	14	462
2	20	38	38	760
3	15	43	43	645

O conjunto dos comprimentos normais é dado por:

$$P = \{0, 15, 20, 30, 33, 40, 45, 60, 66, 80, 99, 100\}.$$

Para cada item i são geradas no máximo $g_{X_i} = \min\left(b_i, \lfloor \frac{L}{l_i} \rfloor\right)$ faixas horizontais (X) de largura w_i , ou seja, foram geradas 3 faixas de largura w_1 , 4 de largura w_2 e 4 de largura w_3 . Na Figura 3.13 estão representadas todas as faixas X possíveis. Uma faixa com k itens possui valor, kc_i , ou seja, o valor da faixa a), é 462, b) 924, c) 1386, d) 760, e) 1520, f) 2280, g) 3040, h) 645, i) 1290, j) 1935, k) 2580.

Analogamente são geradas no máximo $g_{Y_i} = \min\left(b_i, \lfloor \frac{W}{w_i} \rfloor\right)$ faixas verticais (Y) de largura l_i , ou seja, foram geradas 7 faixas de largura l_1 , 2 de largura l_2 e 2 de largura l_3 . Ao todo, foram geradas onze faixas, cuja o valor de cada uma é calculado do mesmo modo que das faixas X .

Etapa 1 - Para estimar um limitante superior para o segmento X , resolvemos o modelo (3.4.57) irrestrito para todo $x \in P$ e y de 0 á $W = 100$. Por exemplo, quando $x = 99$ e $y = 67$ temos duas faixas com item 1 e uma com item 2 e o valor de $F_X(99, 67)$ é 5812.

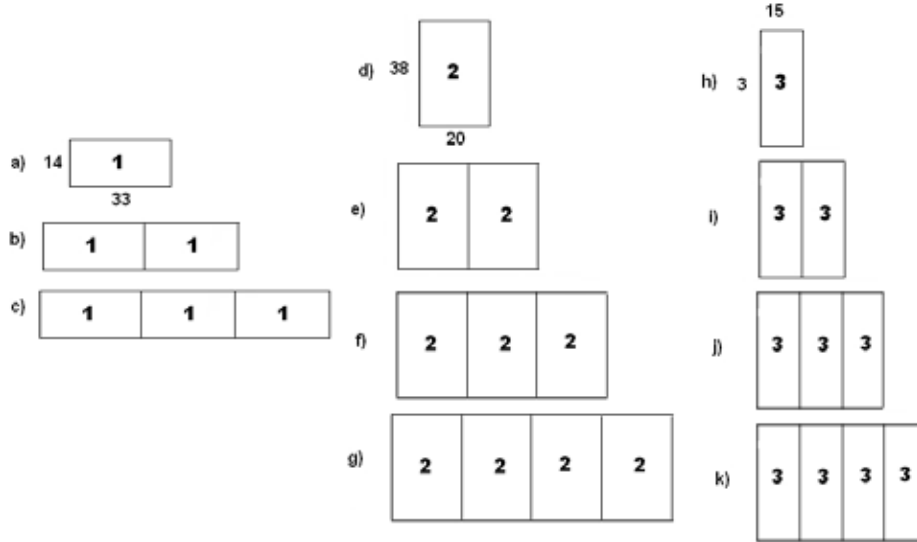


Figura 3.13: Possíveis faixas horizontais.

Para encontrar uma estimativa para o segmento Y , resolvemos o modelo (3.4.58) para todo x de 0 á $L = 100$. Para isto, considere as 11 faixas verticais possíveis, $S = \{33, 33, 33, 33, 33, 33, 33, 20, 20, 15, 15\}$ e $T = \{1c_1, 2c_1, 3c_1, 4c_1, 5c_1, 6c_1, 7c_1, 1c_2, 2c_2, 1c_3, 2c_3\} = \{462, 924, 1386, 1848, 2310, 2772, 3234, 760, 1520, 645, 1290\}$. E ainda, $\delta_{1,1} = 1$, $\delta_{2,1} = 2$, $\delta_{3,1} = 3$, $\delta_{4,1} = 4$, $\delta_{5,1} = 5$, $\delta_{6,1} = 6$, $\delta_{7,1} = 7$ e $\delta_{k,1} = 0$ para todo $k = 8, \dots, 11$; $\delta_{8,2} = 1$, $\delta_{9,2} = 2$ e $\delta_{k,2} = 0$ para todo $k = 1, \dots, 7, 10, 11$ e $\delta_{10,3} = 1$, $\delta_{11,3} = 2$ e $\delta_{k,3} = 0$ para todo $k = 1, \dots, 9$. Por exemplo, na solução do problema (3.4.58), quando $x = 99$, obtemos uma faixa de sete itens 1, duas faixas com dois itens 2 cada, e uma faixa com dois itens 3, sendo o valor de $E_Y(99)$, 7564.

O limite superior do padrão do tipo “T” no objeto parcial $(x, 100)$, $0 \leq x \leq L$ é encontrado pela equação (3.4.60). Por exemplo, quando $x = 100$, $F_T(100) = 9702$, implicando em z receber todos os valores do conjunto P . Utilizando as mesmas 11 faixas do modelo (3.4.57), resolvemos o modelo (3.4.62) com $x \in P$, resultando na solução restrita para o segmento $(x, W = 100)$. Por exemplo, quando $x = 99$, o segmento é composto por uma faixa com largura w_1 , outra com largura w_2 , e ainda uma terceira faixa com largura w_3 , sendo o valor de $E_X(99) = 7006$.

O conjunto $Q = \{x/x \in P; \eta_X(i, x) + \eta_Y(i, L - x) \leq b_i, i = 1, 2, 3\} = \{0, 99, 100\}$ garante que a quantidade de itens i no padrão não ultrapasse as demandas dos itens.

Assim, o limitante inferior é dado por,

$$\begin{aligned} V_0 &= \max_{x \in Q} [(E_X(0) + E_Y(100)), (E_X(99) + E_Y(1)), (E_X(100) + E_Y(0))], \\ &= \max(7564, 7006, 7006), \\ &= 7564. \end{aligned}$$

Etapa 2 - Temos, $V^* = V_0 = 7564$. Como $V^* \neq F_T(100) = 9702$ construímos as possíveis faixas X e Y (vide Figura 3.13). Adicionamos estas faixas ao conjunto "Abrir" e calculamos um limite superior para cada uma, dado por $p_{max}LW = p_{max}10000 = 10000$, pois para todo item i , $\frac{c_i}{l_i w_i} = 1$.

Etapa 3 - Note que "Abrir" $\neq \emptyset$ e todos os blocos tem valor 10000, ou seja, nenhum bloco tem valor menor que $V^* = 7564$.

Etapa 4 - Separamos as faixas X das faixas Y . As 11 faixas X são adicionadas no conjunto "Fechar X" e as 11 faixas Y no conjunto "Fechar Y".

Etapa 5 - Consideremos uma por uma das faixas X do conjunto "Fechar X". Como todas estas faixas possuem limitantes superiores maiores que V^* , construímos blocos X entre uma faixa R_A e outra R_B (Passo 2). Ao todo são 67 diferentes blocos X . Na Figura 3.14 estão representados três exemplos de blocos X .

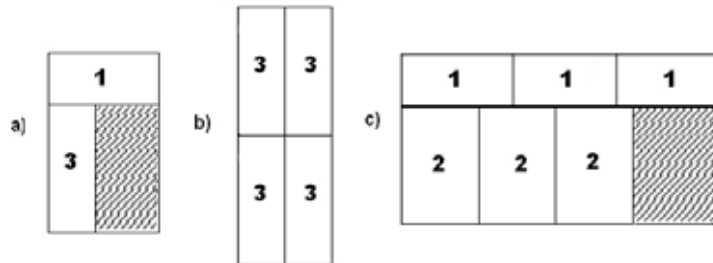


Figura 3.14: Possíveis blocos X .

Determinamos o limite superior (equação (3.4.56)) de cada bloco gerado. Nesta etapa nenhum bloco foi descartado, todos foram adicionados em "Abrir". Por exemplo, os limitantes superiores dos blocos $X - R_C$ da Figura 3.14 em a) é 9306, b) é 8624 e em c) é 9541 dado pela equação (3.4.56). Após considerar todos os blocos de "Fechar X", atualizamos V^* , que continua sendo 7564, pois o maior valor encontrado para o bloco R_C foi 6480 dado pela junção da faixa X com quatro itens 2 e a com quatro itens 3.

Etapa 6 - Esta etapa é feita de forma análoga a Etapa 5, porém considerando uma por uma das faixas Y do conjunto "Fechar Y". Como todas estas faixas possuem limitantes

superiores maiores que V^* , podemos construir blocos Y entre uma faixa $Y - R_A$ e outra R_B , gerando todos os possíveis blocos de acordo com o Passo 3. Isto resulta em 64 possíveis e diferentes blocos Y . Na Figura 3.15, estão representados três blocos Y possíveis.

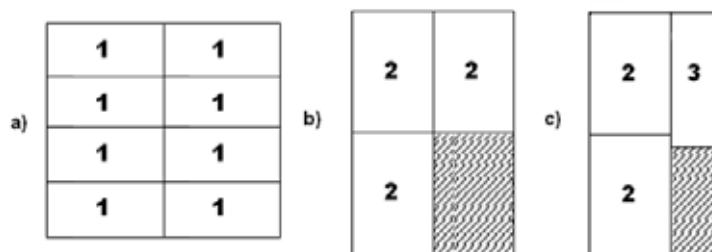


Figura 3.15: Possíveis blocos Y .

Determinamos o limite superior (equação (3.4.61)) de cada bloco gerado e adicionarmos os blocos em "Abrir". Por exemplo, o limitante superior do bloco $Y - R_C$ da Figura 3.15 em a) é 7198, b) é 8662 e c) é 8204. Observe que estes, foram adicionados no conjunto "Abrir". Após, considerar todos os blocos de "Fechar Y ", atualizamos V^* , que continua sendo 7564, pois o maior valor encontrado para o bloco R_C foi 5194, dado pela junção da faixa Y com sete itens 1 e a faixa Y com dois itens 2.

Etapa 7 - Nesta etapa alguns blocos voltam à Etapa 3, pois $LS(R_C) \leq V^*$. Por exemplo, o bloco Y a) da Figura 3.14.

As Etapas 3 à 7 são realizadas repetidamente, cada vez que um bloco é selecionado de "Abrir". Se este é um bloco X , construções verticais são feitas entre eles e cada bloco de "Fechar X " para formar novos segmentos X (Etapa 5), que é combinado com cada bloco Y de "Fechar Y " para formar novos padrões do tipo "T" (Etapa 7). Se este é um bloco Y , construções horizontais são feitas entre eles e cada bloco de "Fechar Y " para formar novos segmentos Y (Passo 6), que é combinado com cada bloco X de "Fechar X " para formar novos padrões do tipo "T" (Etapa 7). Os blocos X e Y gerados nas Etapas 5 e 6 são adicionados em "Abrir" para analisar se estes tem limites superiores maiores que o valor do melhor padrão obtido até o momento. O processo da busca pelo melhor padrão termina quando o conjunto "Abrir" está vazio, ou o maior valor dos limites superiores dos blocos em "Abrir" não é maior que o valor do melhor padrão obtido até o momento (Etapa 4). O padrão ótimo do exemplo é ilustrado na Figura 3.16. O segmento X é composto por quatro faixas horizontais de itens 1 e uma de itens 2 e o segmento Y por

duas faixas verticais de itens 3.



Figura 3.16: Padrão de corte ótimo.

As etapas indicadas por Cui [20] podem resultar em elevado tempo computacional, caso a busca pela solução ótima seja feita de forma exaustiva. Os resultados dos testes computacionais realizados por Cui [20] mostraram que o algoritmo é eficiente tanto no tempo computacional como no índice de perda de material. Porém, o problema explorado limita-se à obtenção de padrões que apresentam, no máximo, 2 segmentos contendo faixas compostas de itens do mesmo tipo.

Padrões do tipo “T” surgiram com o intuito de melhorar o aproveitamento da matéria-prima [19]. Estes padrões podem ser muito úteis na indústria de móveis, pois além de poder utilizar de maneira satisfatória a matéria-prima, estes facilitariam a seqüência dos cortes feitos no objeto pelos operadores da máquina de corte. A seqüência de cortes feita para cortar um padrões de corte no objeto é detalhado no Capítulo 4 - Subseção 4.3.3.

Capítulo 4

Problemas de Corte de Estoque na Indústria de Móveis

Nosso interesse pelo problema de corte de estoque é em parte explicado por sua grande aplicação e importância na prática das indústrias. Pequenas melhorias nos processos que envolvem o corte de matéria-prima podem levar a ganhos substanciais, dependendo da escala de produção e representar uma vantagem decisiva na competição com outras empresas do setor [53]. Neste capítulo, serão apresentados aspectos gerais das indústrias moveleiras, detalhamos também algumas características do processo de corte de matéria-prima de uma fábrica de móveis.

4.1 Panorama da Indústria de Móveis no Mundo

A indústria mundial de móveis é uma indústria tradicional, constituída predominantemente por pequenas empresas, que, até os anos 50, visavam atender quase que exclusivamente ao mercado interno dos seus respectivos países. A partir dos anos 50, as indústrias dinamarquesas de móveis passaram a se voltar para o mercado externo, sendo a pioneira neste comércio. Entretanto, o comércio internacional de móveis somente se ampliou de forma significativa a partir dos anos 70, sob a liderança da Itália. Atualmente os principais segmentos do comércio internacional de móveis são: móveis de madeira, com 35,5% do total, e cadeiras e assentos, com 28,8% do total exportado [1]. Os países europeus juntamente com EUA, Canadá e Japão foram responsáveis por aproximadamente 85% das importações mundiais de móveis. O principal país importador de móveis é os EUA (21%), respondendo por um quinto das importações mundiais. A Europa participa com

mais de 60% das exportações mundiais de móveis [1].

4.2 Panorama da Indústria de Móveis no Brasil

A industrialização dos móveis brasileiros teve suas origens em 1875 pela produção de artesãos, na maioria italianos [66]. Estas empresas se caracterizavam por uma estrutura familiar, formadas por pequenas oficinas de produção artesanal, geradas pelo grande aumento do fluxo imigratório no final do século XIX e início do século XX. Até poucos anos atrás os móveis eram produzidos com madeira maciça e quase sempre sob medida. A partir de 1936, houve um desenvolvimento significativo das empresas moveleiras no Brasil, mas foi somente na década de 1950 que se consolidaram os principais pólos moveleiros, organizados nas regiões da Grande São Paulo, SP; Bento Gonçalves, RS; São Bento do Sul, SC; Araçatuba, PR; Mirassol e Votuporanga em SP; e Ubá, em Minas Gerais. Como podemos perceber este setor encontra-se geograficamente disperso por todo o território nacional, produzindo todos os tipos de móveis. Dentre estes, 60% referem-se a móveis residenciais, 25% a móveis de escritório e 15% a móveis institucionais, escolares, médico-hospitalares, móveis para restaurantes, hotéis e similares. Além disso, são empresas familiares, tradicionais e na grande maioria de capital inteiramente nacional.

As empresas de móveis podem ser classificadas de acordo com o número de seus funcionários, e estão assim distribuídas:

- Micro - até 19 empregados;
- Pequenas - de 20 a 99 empregados;
- Médias - de 100 a 499 empregados.

Empresas com número de empregados acima destes valores, são consideradas grandes. As pequenas e microempresas em geral, são marcenarias que se concentram na produção de móveis residenciais de madeira sob encomenda. Na maior parte dos casos, são empresas desatualizadas tecnologicamente e com baixa produtividade [1].

Atualmente, o Brasil é o maior produtor de móveis da América do Sul. Esta indústria moveleira é formada por mais de 16.104 empresas divididas em micro, pequenas e médias, que empregam aproximadamente 206.352 trabalhadores, sendo que 83% desses estabelecimentos se encontram nas regiões Sul e Sudeste, com 86% dos empregados. Além disto,

os estados do Rio Grande do Sul, Santa Catarina e São Paulo representam cerca de 70% da indústria moveleira no país [1].

Nos últimos anos o Brasil tem apresentado altas taxas mundiais de desmatamento [59]. Cerca de 80 % da madeira tropical consumida no Brasil provém de exploração predatória. O Brasil possui possibilidades de desenvolver florestas, remanejá-las e mantê-las. Exemplos de madeiras alternativas que podem ser plantadas são o Pínus e o eucalipto, que já são utilizadas na fabricação de um bom móvel. Além disto, novas matérias-primas foram e estão sendo trazidas pelas inovações ocorridas nas indústrias química e petroquímica (materiais compostos, plásticos mais resistentes, novas tintas, etc.), como foi o caso do *MDF* (*Medium Density Fiberboard*) [66]. O Brasil, com sua grande fonte de matéria-prima, mão de obra disponível e uma indústria adequada, reúne o que chamaríamos de talento natural para a fabricação do mobiliário. Segundo Silva e Santos [68] existem quatro tipos de matérias-primas derivadas da madeira mais utilizados para a fabricação de móveis, são elas:

- Compensado laminado - é um painel constituído de um conjunto de lâminas coladas. As lâminas são, usualmente, coladas simetricamente a partir do centro ou miolo do painel, aos pares em ambos os lados.
- Compensado sarrafeado - o miolo do painel é formado de diversos sarrafos de madeira dispostos um ao lado do outro, colados e prensados na vertical, fazendo um miolo bem compacto e resistente.
- *MDP* (*Medium Density Particleboard* ou Painel de Partículas de Média Densidade) - antigamente chamado de aglomerado, é um produto ecologicamente correto que não utiliza madeiras de matas nativas (*e.g.* Amazônia e Mata Atlântica) em sua fabricação, mas sim, madeiras provenientes de florestas plantadas, ecologicamente sustentáveis. No Brasil, as espécies mais comuns utilizadas para produção do *MDP's* são o pínus e o eucalipto.
- *MDF* (*Medium Density Fiberboard* ou Painel de Média Densidade) - é um painel produzido pela aglutinação de fibras de madeira, aglutinadas com resina sintética termofixa sob a ação simultânea de pressão e calor, resultando em um painel com composição homogênea em toda a sua superfície como em seu interior. Possui grande resistência e estabilidade, por isto é possível obter-se excelentes acabamentos nos

móveis. Destaca-se pela possibilidade de ser pintado, podendo ser cortado, lixado, perfurado, colado, pregado, parafusado, encaixado, proporcionando sempre um excelente acabamento tanto com equipamentos industriais quanto com ferramentas convencionais para madeira.

Os móveis a base de madeira podem ser classificados em dois tipos: retilíneos e torneados [28]. Os móveis retilíneos são lisos, com desenhos simples de linhas retas e cuja matéria-prima principal constitui-se de painéis (*MDP's*, compensados e *MDF's*), os demais móveis que possuem muitos detalhes de acabamento, misturando formas retas e curvas podem ser chamados de móveis torneados. A forma de produção desses produtos pode ser sob encomenda ou seriada (distribuição comercial, via varejista e representantes).

4.2.1 Pólo Moveleiro de Votuporanga

A cidade de Votuporanga (em tupi-guarani: *Votu* = brisa, ar; *Poranga* = suave), fundada em 1937, está situada a 520 km da capital São Paulo, no noroeste do Estado. Essa área era uma rica mata nativa que possuía várias espécies de madeira (cedro, aroeira, etc). Isto resultou na comercialização da madeira nas décadas de 40 e 50, fase que recebeu o nome de "ciclo da madeira". O ciclo da madeira originou-se com a derrubada das árvores que constituíam a mata nativa para o preparo da terra e desenvolvimento da agricultura. As primeiras serrarias e, conseqüentemente, a confecção de todo tipo de mobiliário de madeira, dentre eles mobiliário de casa, móveis para escritórios, instalações para igrejas, escolas, clubes, restaurantes, campo, indústrias e comércio em geral, surgiram como subproduto da atividade agrícola [70].

O início da formação do pólo moveleiro de Votuporanga se deu por volta de 1994 [68]. Nesta época a região possuía aproximadamente 75 empresas e empregava 3159 trabalhadores. Em 2001 houve um aumento para 241 empresas e cerca de 8083 funcionários. E atualmente temos em Votuporanga aproximadamente 350 empresas gerando 6 mil empregos [1]. No estado de São Paulo estão presentes todos os segmentos desta indústria, sendo que os pólos do noroeste paulista, Votuporanga e Mirassol se concentram na fabricação de móveis residenciais.

Iniciativas como a criação de centro cooperativo em Votuporanga, levaram ao crescimento deste pólo moveleiro, chegando na década de 90 ao segundo maior pólo moveleiro do país, sendo o primeiro pólo o de Bento Gonçalves (RS) [13].

Paralelo aos estudos teóricos, a experiência prática em especial é uma chave para o desempenho eficiente de um bom trabalho. Devido a isto foram realizadas várias visitas a uma fábrica de móveis de Votuporanga, com o intuito de acompanhar a produção, se familiarizar, analisar os imprevistos que surgem na prática e observar de que modo a matéria-prima principal é cortada. Outras informações referentes a esta indústria, podem ser obtidas em [13, 28, 58].

4.3 Uma Indústria Característica

A empresa visitada, a Fábrica de Móveis Luapa, está localizada no pólo moveleiro de Votuporanga. Nesta região, os produtos fabricados são, essencialmente, móveis residenciais. A indústria em questão produz ao todo 25 famílias de móveis residenciais (no geral de dormitório) de madeira, retilíneos e de estilo tradicional, em cinco cores (cerejeira, marfim, mógno, tabaco e tabaco/branco), utilizando as matérias-primas de *MDF* e *MDP*. Os móveis produzidos são: armário 3, 4, 5 e 6 portas; criado; cômoda; *rack*; penteadeira; cabeceira e cama. Sendo que os armários são os principais produtos da empresa, aproximadamente 50% da produção mensal da fábrica.

Durante a fase de pesquisa (26/11/07 á 7/12/07), nos deparamos com algumas dificuldades. Por exemplo, conseguir informações atualizadas e coerentes sobre o panorama da indústria moveleira, e coletar dados na fábrica visitada, por esta não ter muitos de seus dados sistematizados. Ainda assim, foi possível coletar e aproveitar dados de qualidade, obtendo bons critérios para avaliar um padrão de corte. As próximas subseções apresentaremos a linha de produção e detalharemos o setor de corte da fábrica.

4.3.1 A Linha de Produção

Basicamente a linha de produção nas pequenas e médias indústrias de móveis residenciais de Votuporanga seguem o esquema apresentado na Figura 4.1.

O primeiro setor por onde passa a matéria-prima, são as máquinas de corte, nestas os objetos são cortados em itens que irão compor o móvel. Depois de serem cortados os itens seguem para a usinagem, onde recebem detalhes em sua superfície ou têm suas bordas aparadas ou modeladas. Desta fase, fazem parte também o setor de furação, onde são feito os furos nos itens para o encaixe e montagem do móvel, e o setor cola e borda, onde são coladas as bordas nos itens para deixa-los com um acabamento melhor. Em

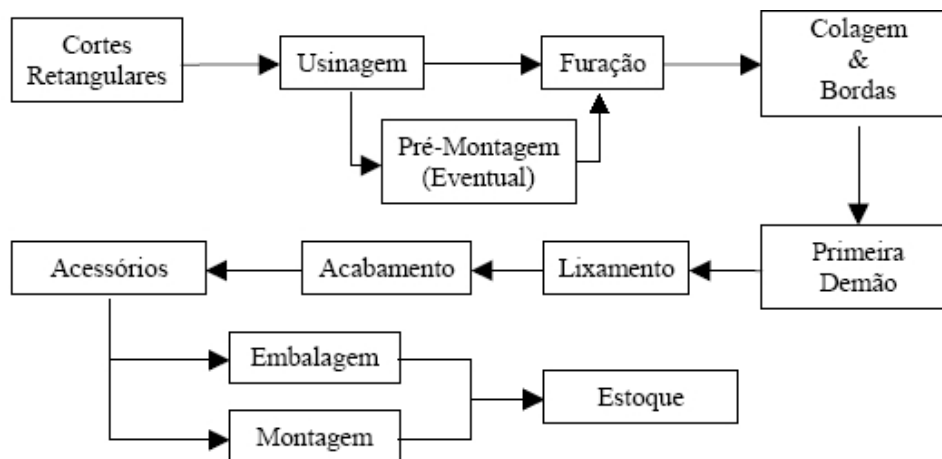


Figura 4.1: Linha de produção da Fábrica de Móveis Luapa [13].

seguida alguns itens passam para o setor da primeira demão, onde são preparados para a pintura. Neste setor os itens passam por um processo de lixamento, prensa, entre outros. Posteriormente, os itens passam para o setor da pintura (acabamento), onde recebem as cores preestabelecidas. Depois, vão para o setor de montagem, onde recebem uma última vistoria e os acessórios (puxadores, fechaduras, entre outros) e por fim vão para a estocagem, onde são embalados e armazenados.

Em todo o processo, a Luapa possui aproximadamente 37 máquinas, na maioria manuais, sendo 4 as principais (seccionadora, furadeira automática, cola e borda e UV - pintura). Nosso interesse principal é no setor de corte, em especial na máquina seccionadora, por esta ser a principal máquina de corte do setor. É nesta máquina que são feitos os primeiros e principais cortes na matéria-prima. Além disto, é considerada pela empresa, juntamente com a furadeira, um "gargalo" na produção.

4.3.2 Planejamento da Produção

O planejamento da produção na fábrica de móveis Luapa é feito semanalmente, podendo sofrer alterações no decorrer da semana, e é baseado na média de venda dos três meses anteriores. A produção é feita por lotes que variam de acordo com os pedidos e o estoque disponível no momento. Os tamanhos destes lotes são fixos para cada produto, e dependendo das suas demandas, a quantidade de produtos fabricados é sempre um múltiplo do tamanho fixado.

Para cada produto da Luapa, há um conjunto de padrões de corte determinado, ou

seja, cada produto é fabricado a partir de um conjunto preestabelecido de padrões de corte. Estes padrões são gerados quando necessários, geralmente na criação de um novo produto.

O conjunto de padrões de corte que a Luapa utiliza atualmente foram gerados por tentativa e erro, considerando um objeto de dimensões $(L, W) = (2750mm, 1830mm)$ (sempre dadas em milímetros), com a preocupação de utilizar o menor número de objetos possível para atender à demanda de um lote, gerando a menor diversidade de padrões possível com a menor diversidade de itens por padrão de corte e, principalmente, obter a menor perda possível, respeitando a restrição da máquina a cortes guilhotinados ortogonais. Porém, as dimensões do objeto (matéria-prima) variam conforme o fornecedor, por exemplo, nas primeiras visitas realizadas na fábrica os objetos utilizados eram apenas de dimensão $(2750, 1830)$. Nas visitas seguintes, encontramos objetos de dimensões $(2750, 1850)$, $(2750, 2200)$, $(3000, 1900)$ e $(2750, 1910)$. Por isto, na prática, é necessário que os operadores da máquina de corte façam alguns ajustes nos padrões de cortes preestabelecidos.

Recentemente, a empresa adquiriu um software, chamado "Corte Certo", que auxilia na geração dos padrões de corte. Inicialmente os padrões são gerados por este software, e depois analisados e ajustados pelo gerente de produção e sua equipe. O conjunto de novos padrões gerados por este software ainda está em fase de teste, por isto não estão sendo utilizados na prática.

A seqüência de produção é determinada pelo produto de maior "deficit" no estoque relativo à demanda. Por exemplo, suponha que seja feito um pedido de cômoda marfim cujo estoque não é suficiente para atender a demanda. Suponha também que não há em estoque nenhum armário 5 portas tabaco, e este não está sendo requisitado por nenhum cliente no período de planejamento. Então, a prioridade é dada à produção da cômoda e depois a do armário. A reposição do estoque dos produtos varia bastante, por exemplo, há produtos que necessitam de reposição a cada semana e outros a cada 3 ou 4 meses. Por isto, não é viável para a indústria fazer estoque dos itens. A decisão do que produzir é direcionada apenas para a primeira máquina de corte (seccionadora), o resto da produção segue o fluxo da fábrica (Figura 4.1). Em média um produto leva 5 dias para ficar pronto, alguns demorando mais e outros menos.

Um produto em geral é composto por itens de diversas espessuras de matéria-prima.

São utilizados pela fábrica, painéis de *MDF* de espessuras *3mm*, *9mm*, *12mm*, *15mm*, *18mm*, *20mm* e *25mm* e painéis de *MDP* de *9mm*, *12mm*, *15mm*, *18mm*, *20mm* e *25mm*. Neste trabalho é irrelevante o tipo de matéria-prima considerado, porém para a comparação com a prática esta consideração se faz necessária. Por isto consideremos apenas os móveis de *MDF*, por serem mais requisitados e de melhor qualidade.

Os painéis de *MDF* de espessura ("bitola") *18mm* são usados apenas na fabricação de camas, que geralmente são produzidas de uma a duas vezes no mês. Por este fato não iremos considerar este produto em nosso trabalho. Conseqüentemente desconsideraremos a espessura de *18mm*.

Os itens que compõem o produto final são cortados separadamente de acordo com cada espessura. A ordem de corte destas espessuras é pré-estabelecida pelos operadores da máquina de corte. Esta seqüência (*15mm*, *12mm*, *20mm*, *25mm*, *9mm* e *3mm*) se dá devido ao trajeto que os itens percorrem pela linha de produção (Figura 4.1). Por exemplo, as espessuras de três milímetros, geralmente fundo de guarda-roupa, de criado e da cômoda, são produzidos depois das demais espessuras, pois depois do corte seguem direto para o setor de pintura ou até mesmo para o setor de embalagem.

A seguir detalharemos o processo de corte, que requer uma atenção especial, pois deste dependem o custo dos produtos e a velocidade de produção.

4.3.3 Corte da Matéria-prima

Na fábrica de Móveis Luapa, o processo de corte é dividido em dois setores. No primeiro, corte primário, os objetos são cortados nos itens que irão compor o móvel e no segundo, corte secundário, é feito a aparta das sobras. Neste trabalho vamos nos ater ao setor de corte primário.

No setor de corte primário, o objeto é cortado, utilizando uma máquina seccionadora. Atualmente, existem no mercado seccionadoras automáticas, que são aquelas onde a energia provém de uma fonte externa, geralmente estas máquinas estão diretamente ligadas a um computador que fornece as informações necessárias para os cortes que serão realizados, utilizando, desta forma, menos operários no processo de corte. Contudo, em nosso estudo tomamos por base a seccionadora da fábrica de móveis Luapa, que é uma seccionadora simples, ou seja, nesta máquina são necessários no mínimo dois operadores, pois é necessário carregar a máquina com a matéria-prima, rotacionar o objeto e as faixas

a serem cortadas. Esta seccionadora permite somente o corte guilhotinado ortogonal.

Os operadores da seccionadora recebem todo começo de semana fichas com as "ordens de produção". Cada uma destas fichas contém dados de um determinado item a ser produzido: as dimensões do item, o tamanho do lote, a cor do produto e a seqüência na linha de produção (Figura 4.1) que o item terá de passar até estar pronto para compor, juntamente com outros itens, um produto final. Por exemplo, suponha que temos uma ordem de produção para produzir portas de camiseiro. Os dados contidos na ficha são:

- a quantidade a ser produzida, 160 itens;
- as dimensões do item, (610mm; 218mm);
- os setores que o item passará na fábrica: seccionadora, furação, cola e borda, lixamento, pintura e estocagem;
- e a cor, mógno.

Através das fichas é possível obter um controle de todos os itens (produtos) produzidos em um dia ou em uma semana.

Seccionadora

A seccionadora da Fábrica de Móveis Luapa é composta por um conjunto de mesas com uma serra circular que se move por toda a extensão da mesa, como mostra a Figura 4.2.

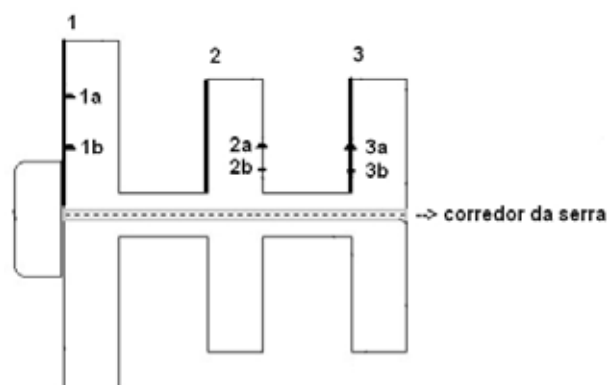


Figura 4.2: Seccionadora da Fábrica de Móveis Luapa [58].

Observe na Figura 4.2 que em 1, 2 e 3 estão fixas réguas; em 1a e 1b, 2a e 2b, 3a e 3b estão os batentes. Os batentes são calços metálicos instalados sobre as réguas (1, 2 e 3),

fixos nas mesas de trabalho. Os batentes 2a e 3a ou 2b e 3b determinam a largura da faixa que será cortado o objeto, sendo possível fazer o ajuste para o corte de até duas larguras distintas, sem ser necessário reajustar os batentes. Já, os batentes 1a e 1b, são utilizados para o corte de itens das faixas obtidas anteriormente do objeto, sendo possível cortar até dois itens distintos sem ser necessário reajustar estes batentes. Para mais detalhes ver [28].

O processo de corte é dado por um conjunto de ações (ajuste de batentes, carregamento dos objetos na máquina, ajuste dos objetos, cortes, manuseio do material) necessárias para a manipulação dos objetos e para a obtenção dos itens. Todo o processo de carga da matéria-prima e controle de cortes é feito de forma manual, geralmente por dois operadores. Recai sobre ela grande carga de trabalho, e por isto a seccionadora é vista na fábrica como um "gargalo" da produção. Porém, observamos em nossas visitas que esta é muitas vezes subutilizada, servindo apenas para picar faixas.

Ciclo da Serra

A máquina de corte possui uma capacidade máxima, para cortar até "60mm" de espessura por vez de objeto. Porém, nenhum dos objetos utilizados tem tal espessura. Assim, para que a máquina não seja subutilizada, é feito uma pilha de objetos de altura máxima, que são cortados simultaneamente. O número máximo de objetos de uma dada espessura que podem ser cortados na máquina simultaneamente (Cap) é dado por [58]:

$$Cap = \frac{CpT}{esp},$$

onde, CpT é a capacidade total da máquina e esp é a espessura do objeto a ser cortado. Na prática o corte de objetos simultaneamente, pode resultar em diminuição significativa de custos, como por exemplo, a diminuição do tempo de trabalho da máquina.

Definição 4.1. *Ao conjunto de todas as operações necessárias para cortar um, ou mais objetos, segundo um mesmo padrão de corte, até que todos os itens sejam obtidos dá-se o nome de ciclo da serra.*

Esta definição é dada em [79]. Note que o custo operacional de uma máquina de corte está diretamente relacionado com o número de ciclos da serra. Por exemplo, se 15 objetos de 12mm são cortados usando um mesmo padrão, na pior das hipóteses poderíamos cortar os objetos um por um, o que gastaria muito tempo e energia. Mas, sendo a CpT

da máquina de $60mm$, podemos fazer três ciclos da serra, onde serão cortados 5 objetos de cada vez. No caso da matéria-prima *MDF* é possível aproveitar totalmente a capacidade da serra em cada ciclo, porém para o *MDP* não, por ser mais frágil e fácil de ser deformado. Para solucionar este problema, a fábrica utiliza um objeto a menos da capacidade total da máquina. Por exemplo, se considerarmos a espessura do objeto de $15mm$, ao invés de serem cortados 4 objetos por ciclo da serra, são cortados apenas 3, reduzindo em 25% a produção.

O sucesso no corte da matéria-prima está fortemente ligado à eficácia dos padrões de cortes utilizados e ao modo como os cortes são executados. A seguir citaremos alguns recursos utilizados pela fábrica no processo de corte dos objetos.

Número de Estágios

A preferência da Luapa é dada aos padrões de corte guilhotinados em 2-estágios, principalmente pela facilidade de corte destes padrões. Os operadores da seccionadora reduzem o tempo de ciclo da serra, executando simultaneamente cortes de estágios diferentes. Por exemplo, as etapas de corte que os operadores fazem para cortar um padrão 3-estágios na seccionadora são ilustrados na Figura 4.3.

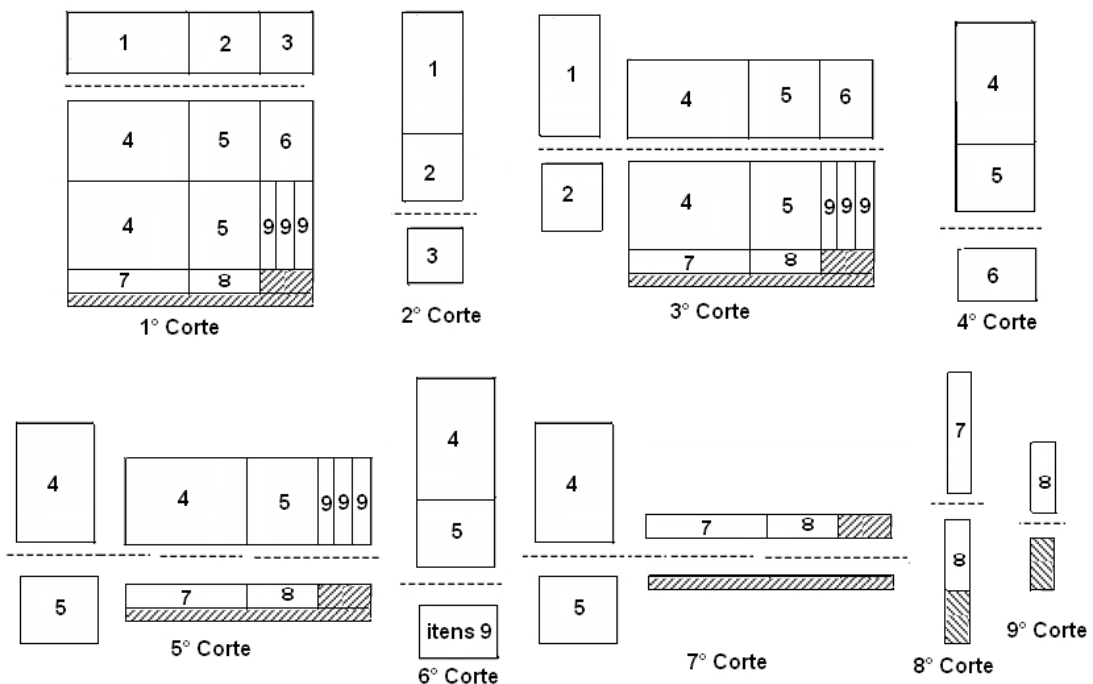


Figura 4.3: Sequência de cortes de um padrão de corte 3-estágios.

O primeiro corte é feito no sentido horizontal para a obtenção da faixa 1. Esta faixa é rotacionada e o segundo corte é feito para a obtenção do item 3. Observe, no terceiro corte, que ao mesmo tempo em que a 2ª faixa é cortada, os itens 1 e 2 da 1ª faixa também o são. Ou seja, o último item resultante do último corte sobre a faixa é cortado juntamente com a próxima faixa. De forma análoga acontece no quinto e sétimo corte. Note também, que os itens de número nove do padrão não foram cortados, estes itens são considerados pequenos pela fábrica. Estes itens foram agrupados e serão cortados no setor de cortes secundário. No 9º corte, foi cortado a aparta do item 8, caso este item tivesse dimensões menores, este corte seria feito também no setor secundário.

É fácil notar que se tivéssemos muitas faixas de larguras distintas ou com grande diversidade de itens, teríamos mais ajustes dos batentes (*setups*), aumentando o tempo do ciclo da serra. Ao aumentarmos os estágios de um padrão, aumentamos também o tempo de produção. Devido a isto, trabalharemos com padrões até 3-estágios, que são aceitáveis pela indústria, de modo a obter "bons" padrões e aumentar a velocidade de produção.

Agrupamento de Itens

Para tentar evitar que a seccionadora se torne um "gargalo da produção" a fábrica agrupa itens pequenos. Suponha que temos um padrão de corte compostos por itens de dimensões pequenas, como na Figura 4.4 a). Observe que este padrão exige vários ajustes na seccionadora para poder ser cortado, o que pode vir a elevar muito o tempo do ciclo da serra. Note também na Figura 4.4 b) que alguns itens da Figura 4.4 a) foram agrupados formando itens maiores. Este novo padrão de corte, é mais simples e ágil de ser cortado pela seccionadora. Os itens menores serão cortados no setor de corte secundário.

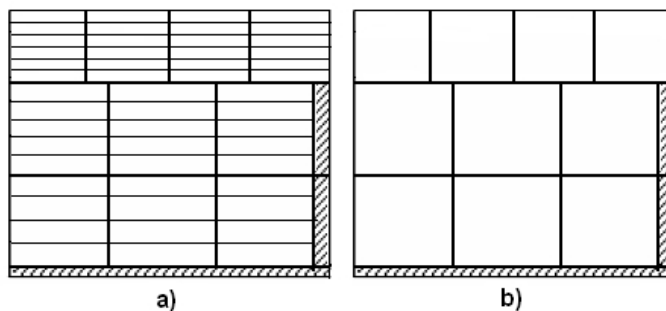


Figura 4.4: Padrões de Corte: a) itens não agrupados, b) itens agrupados.

É notável que cortar padrões mais simples e com baixa diversidade de itens, podem reduzir consideravelmente o número de *setups* em cada ciclo da serra. Mas, note que quanto maior a diversidade de itens, maior é a possibilidade de encontrar uma combinação de itens que melhor aproveite um objeto. Nesta indústria em questão, a fabricação de diferentes produtos em um dia não é desejável, pois para isto acontecer seria necessário fazer estoque dos itens, ficando parada a circulação do investimento. Porém, alguns produtos distintos podem ser produzidos juntos, por exemplo, guarda-roupa e cômoda, guarda-roupa e criado, e criado e cômoda. Outros não, como por exemplo a cama, por não ter as dimensões dos seus itens parecidas com as dos outros produtos. Na próxima subseção analisaremos os padrões da indústria considerando a perda da matéria-prima e os tempos de corte.

4.3.4 Análise dos Padrões de Corte

Selecionar os padrões de corte que serão utilizados na prática, em geral não é algo simples, é preciso levar em consideração vários fatores, como por exemplo, a perda da matéria-prima, a carteira de pedidos, os prazos de entrega, a capacidade de produção da fábrica, o número de funcionários, etc. A indústria analisa dois aspectos para avaliar a qualidade de um padrão: o índice de perda da matéria-prima e o tempo de corte. No primeiro, busca-se trabalhar com padrões de corte que apresentam os menores índices de perda possíveis. E no segundo, a preferência é por padrões de corte que necessitem de poucos manuseios do objeto e ajustes.

Perda da matéria-prima

Um dos fatores primordiais na avaliação de um padrão de corte é, sem dúvida, o seu percentual de perda.

O valor da perda pode ser dado por:

$$P_j = LW - \sum_{i=1}^m (a_{ij} l_i w_i), j = 1, \dots, n; \quad (4.3.1)$$

onde, P_j é o percentual da perda do padrão j e a_{ij} quantidade de itens i no padrão j .

A perda devido ao desgaste da serra em certos tipos de matéria-prima, é inevitável e precisa ser levada em conta quando queremos avaliar o custo de produção [30]. Na empresa em questão, o desgaste da serra é de $4mm$. Caso desconsideremos a espessura da

serra, os padrões de cortes produzidos podem ser impossíveis de serem reproduzidos na prática. Por exemplo, suponha que a dimensão do objeto é $(L, W) = (240, 210)$, dos itens $(l_1, w_1) = (60, 55)$ e $(l_2, w_2) = (75, 70)$ e a espessura da serra, $4mm$. O padrão de corte ilustrado na Figura 4.5 torna-se inviável para a prática, pois os cortes verticais feitos na primeira faixa para obter os itens 1 geram uma perda ocasionada pela serra de $12mm$ que somado aos comprimentos dos itens ($240mm$) excedem o comprimento do objeto.

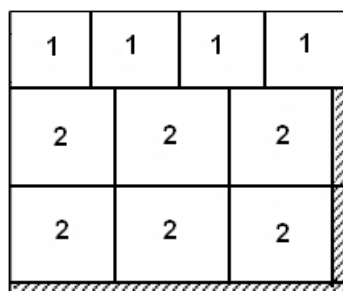


Figura 4.5: Perda do padrão de corte.

Para que a espessura da serra seja considerada em um padrão de corte, basta somarmos o seu valor aos comprimentos e larguras dos itens e do objeto [53]. Porém, a perda calculada pela expressão (4.3.1) desconsidera que parte dela é devido ao desgaste da serra (ver Figura 4.6).

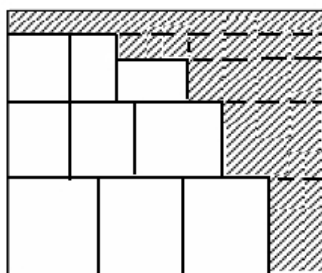


Figura 4.6: Desgaste não contabilizado pela fórmula (4.3.1).

Uma fórmula para calcular exatamente a perda provocada pelo desgaste da serra num padrão de corte guilhotinado 2-estágios é dada em [58]. Considere no primeiro estágio são feitos cortes ao longo do comprimento L . Então, a perda total, considerando o desgaste da serra é dado por:

$$P_j = \left[(L+\delta)(W+\delta) - \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} l_i w_i \right) \right] - \left\{ \delta N_{Tf} L + \delta \sum_{k=1}^m n f_k \left[\sum_{i=1}^m \alpha_{ik} \left(w_k + l_i \left[\frac{w_k - w_i}{w_k} \right] \right) \right] \right\}; \quad (4.3.2)$$

onde, a_{ij} é a quantidade de itens i no padrão j , N_{Tf} é o número de faixas no padrão de corte, $n f_k$ é o número de faixas do tipo k no padrão de corte e α_{ik} é o número de itens do tipo i na faixa k .

Quando analisamos a eficiência de um padrão de corte qualquer, usando a perda calculada pela expressão (4.3.1), a perda gerada pelo desgaste da serra pode significar uma distorção, pois padrões compostos por muitos itens de dimensões pequenas irão sempre apresentar um alto percentual de perda [28]. Por exemplo, na indústria em questão, quando é cortado um padrão composto de laterais da gaveta de um criado, de dimensões $(390mm, 110mm)$, considerados itens pequenos, a perda mínima é maior que 10% da matéria-prima, pois esta é ocasionada apenas pelo desgaste da serra.

Para sanar este problema, podemos calcular um valor estimado da perda de material, se incluirmos na fórmula (4.3.1) o desgaste provocado pela espessura da serra apenas nos itens, ou seja [30]:

$$\bar{P}_j = \max \left\{ 0, LW - \sum_{i=1}^m [a_{ij} (l_i + \delta)(w_i + \delta)] \right\}, j = 1, \dots, n. \quad (4.3.3)$$

Esta fórmula não considera o desgaste da serra associado ao corte guilhotinado, mas apenas o desgaste da serra associado a cada item, permitindo uma avaliação da qualidade do padrão de corte melhor do que a dada pela fórmula (4.3.1).

Uma outra parte do objeto, que também se torna perda, são os retalhos, isto é, itens não demandados de matéria-prima de boa qualidade que se tornam inúteis, devido às suas dimensões resultarem muito pequenas para uso prático. Na literatura há alguns estudos que tratam do reaproveitamento de perda, *eg.* [?]. Para a indústria em questão, retalhos da matéria-prima que possuem as dimensões (comprimento e largura) menores que $7cm$ são consideradas perdas. Retalhos que apresentam dimensões um pouco maiores, podem ser aproveitadas na confecção de pinázios (itens que compõem a estrutura dos produtos) ou colados com outros retalhos para a produção de alguns itens. São coladas apenas as combinações de retalhos que resultam nas espessuras de $9mm$, $12mm$, $15mm$ e $18mm$ e cujas dimensões permitem formar um item demandado.

Para reduzir a produção de itens excedentes, a indústria utiliza o " $\frac{1}{2}$ padrão de corte" [30]. Este nada mais é do que a utilização de aproximadamente metade de um objeto. Um exemplo de $\frac{1}{2}$ padrão é dado na Figura 4.7. Observe, em b) que o objeto é cortado parcialmente, ou seja, são cortadas apenas as duas primeiras faixas do padrão de corte de a). Nos modelos propostos neste trabalho de geração de padrões de corte (Capítulo 3), não são considerados os " $\frac{1}{2}$ objetos", apenas o objeto inteiro.

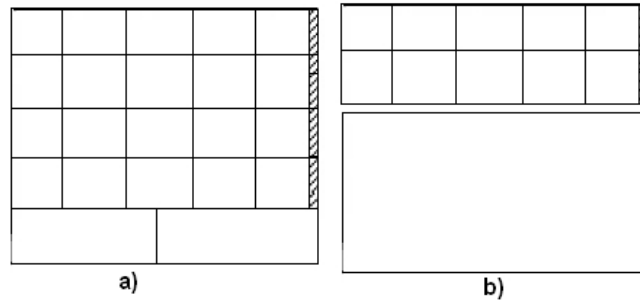


Figura 4.7: $\frac{1}{2}$ padrão de corte.

A preocupação da escolha do melhor padrão de corte, em partes se dá, devido a matéria-prima representar para a empresa 54% do custo da produção do móvel. Atualmente, a perda total de matéria-prima na indústria está em torno de 5 a 7%. Além do custo ocasionado pela perda gerada no corte da matéria-prima, existem outros custos que poderiam ser considerados juntamente com o corte do objeto. Na prática os custos de estoque e de preparação da máquina (*setups*) são tratados separadamente. Um estudo deste aspecto do problema pode ser visto em [37].

Tempo de corte

Minimizar a perda da matéria-prima ou o custo de produção tem sido os dois objetivos mais frequentes em ambientes de produção de cortes. Em alguns destes ambientes, nem sempre a solução de menor perda na matéria-prima implica em uma solução mais econômica para a empresa. O tempo de corte da matéria-prima nas indústrias requer uma atenção especial por parte dos produtores, pois desta etapa dependem o custo dos produtos e a velocidade de produção.

Dependendo das características das máquinas que cortam os objetos, alguns padrões de corte são cortados mais rápidos que outros. Padrões mais complexos geralmente utilizam

um número maior de estágios, e desta forma exigem um número maior de rotações no objeto aumentando o tempo de corte da matéria-prima. Se houver uma grande demanda de itens de um padrão mais complexo a ser atendida, o equipamento pode tornar-se um "gargalo" na produção, limitando, portanto, o lucro da empresa. Mas por outro lado, padrões mais complexos geram menos perda da matéria-prima. Por exemplo, o fato dos padrões de corte 1-grupo possibilitarem o corte simultâneo das faixas no segundo estágio, implica na economia de tempo de máquina, porém, não significa que este tipo de padrão leva vantagem sobre os padrões de corte n-grupos ($n \geq 2$), pois estes possuem na maioria das vezes perdas bem menores [29].

Há casos em que os padrões de corte mais simples podem ser desejáveis para reduzir o tempo de corte dos objetos. O uso de padrões de corte bidimensionais mais simples para melhorar a produtividade no corte da matéria-prima (objeto de madeira) foi analisado em Morabito e Arenales [53].

Na Fábrica de Móveis Luapa, em geral, os padrões utilizados são padrões guilhotinados em 2 e 3 estágios. Estes padrões possuem características particulares, em geral as faixas tem apenas duas larguras distintas e a quantidade de itens diferentes por faixas também é limitado por dois itens, esta preferência é justificada pelo alto tempo de ajuste dos batentes [28].

Capítulo 5

Estudo Computacional

Neste capítulo apresentamos os resultados do estudo computacional realizado com a finalidade de analisar o desempenho dos modelos de otimização apresentados no Capítulo 3, usados na geração de padrões de corte para o problema de corte de estoque bidimensional. O estudo foi realizado em duas etapas: a primeira direcionada a comparar os modelos para resolver o problema de corte bidimensional e a segunda para resolver o problema de corte de estoque.

Os testes foram realizados em um computador Pentium IV (3.00GHz) com 1Gb de memória RAM. O *software* utilizado foi o Xpress^{MP} [23], sob a plataforma Windows XP, que inclui a linguagem de modelagem Mosel. O *solver*, Xpress-Optimizer, resolve problemas de programação linear, inteira e quadrática, utilizando um algoritmo *Branch and Cut*. O Mosel permite uma interação entre o modelo e o *solver*, o que possibilita a implementação do método de geração de colunas.

O tempo máximo de execução do *solver* foi limitado em uma hora (3600 segundos) para o problema de corte e para o problema mestre do problema de corte de estoque. Além disto, limitamos o subproblema para gerar o padrão de corte (coluna) do problema de corte em 100 segundos. Note que os tempos mostrados nas tabelas dos resultados dos problemas de corte e dos problemas de corte de estoque são superiores ao tempo máximo. Isto ocorre porque o tempo exibido pelo Xpress (comando *MAXTIME*) inclui o tempo utilizado em outras tarefas realizadas simultaneamente pelo sistema operacional.

5.1 Exemplos da Literatura

Para avaliar a dificuldade dos modelos propostos no Capítulo 3, foram usados 10 exemplos do problema de corte bidimensional utilizados em Yanasse e Morabito [80] e gentilmente cedidos pelos autores. São dados gerados aleatoriamente, considerando as dimensões do objeto $(L, W) = (100, 100)$ e $m = 10$ itens de dimensões (l_i, w_i) gerados uniformemente nos intervalos $[0, 1L; 0, 5L]$ e $[0, 1W; 0, 5W]$ respectivamente. As demandas b_i foram geradas uniformemente no intervalo $\left[1, \frac{L}{l_i} \frac{W}{w_i}\right]$.

Resultado para o Problema de Corte Bidimensional

Na série de testes realizados para resolver os problemas de corte bidimensional com dados da literatura, consideramos o valor dos itens dados por sua respectiva área (ou seja, $v_i = l_i w_i$). Assumimos também que a orientação dos itens é fixa.

Na Tabela 5.1 são apresentados os resultados para os problemas de corte bidimensionais obtidos utilizando os modelos verticais n-grupos para o caso exato e não-exato, 1-grupo ((3.1.10) - (3.1.18)), 2-grupos ((3.2.19) - (3.2.29)), 3i-grupos ((3.3.30) - (3.3.41)) e 3t-grupos ((3.4.42) - (3.4.55)). Nesta tabela estão registradas: a solução (**Sol**(%)) que corresponde a área de utilização do objeto em porcentagem, o gap (**Gap**(%))¹ e o tempo de processamento (**Temp**(s)) de cada exemplar (**Ex**), dado em segundos. São apresentados, a média (**M**) e o desvio padrão (σ) dos resultados obtidos para os dez exemplos.

No caso exato, podemos observar que os modelos n-grupos obtiveram solução ótima para a grande maioria dos exemplos. Os exemplos dos modelos 1-grupo e 2-grupos foram resolvidos dentro do tempo máximo pré-estabelecido. Apenas o exemplo 8 do modelo 3i-grupos e os exemplos 1 e 8 do modelo 3t-grupos não foram resolvidos. As melhores soluções foram obtidas para os exemplos do modelo 3t-grupos, utilizando de 94,16% a 100% do objeto (matéria-prima). Enquanto as soluções obtidas com o modelo 1-grupo utilizam de 68,80% a 92,16% do objeto. Porém, os tempos de solução dos exemplos do modelo 3t-grupos são bem superiores aos dos demais modelos. Observe que em termos da dificuldade de resolução, os modelos podem ser ordenados em ordem crescente como: 1-grupo, 2-grupos, 3i-grupos e 3t-grupos.

Nos exemplos dos modelos n-grupos ($n \geq 2$) para o caso não-exato, no geral, não foi

¹Gap = $\frac{\text{limite superior} - \text{limite inferior}}{\text{limite superior}}$

Ex	MODELO 1-GRUPO						MODELO 2-GRUPOS					
	Exato			não-exato			Exato			não-exato		
	Sol (%)	Gap (%)	Temp (s)	Sol (%)	Gap (%)	Temp (s)	Sol (%)	Gap (%)	Temp (s)	Sol (%)	Gap (%)	Temp (s)
1	87,30	0	4,50	96,30	0	136,60	96,50	0	156,70	97,50	48,61	3685,00
2	66,15	0	0,50	89,85	0	86,40	88,74	0	1,30	87,99	64,91	3644,00
3	92,00	0	0,80	92,40	0	78,90	96,76	0	2,30	96,76	0	1923,80
4	68,80	0	0,50	91,08	0	27,60	94,64	0	0,70	94,64	0	1509,90
5	84,70	0	0,70	81,57	74,88	3697,00	97,20	0	4,60	93,92	75,86	3628,50
6	91,00	0	0,50	96,46	0	226,50	94,90	0	2,90	97,40	69,14	3877,60
7	72,00	0	1,60	87,93	0	199,50	87,45	0	1,40	94,14	46,19	3721,50
8	92,16	0	1,30	82,13	74,85	3656,00	97,76	0	60,90	88,53	75,49	3632,10
9	81,78	0	0,70	89,85	0	38,90	88,45	0	1,60	95,44	17,63	3750,60
10	80,84	0	0,80	92,80	0	79,90	94,96	0	2,20	89,74	80,15	3680,10
M	81,67	0	1,19	90,04	14,97	822,73	93,74	0	23,46	93,61	47,80	3305,31
σ	9,19	0	1,16	4,83	29,95	1428,20	3,76	0	47,76	3,41	29,72	802,60

Ex	MODELO 3i-GRUPOS						MODELO 3t-GRUPOS					
	Exato			não-exato			Exato			não-exato		
	Sol (%)	Gap (%)	Temp (s)	Sol (%)	Gap (%)	Temp (s)	Sol (%)	Gap (%)	Temp (s)	Sol (%)	Gap (%)	Temp (s)
1	97,00	0	2182,30	96,50	64,62	3718,40	100,00	16,60	3782,70	98,30	67,95	3652,00
2	91,08	0	2,60	83,67	77,32	3629,80	97,74	0	9,30	89,92	77,00	3624,20
3	99,16	0	3,80	98,16	18,80	3751,80	96,76	0	78,80	92,00	80,04	3620,10
4	94,64	0	1,40	94,64	0	3250,90	96,18	0	9,30	94,23	65,49	3633,80
5	98,52	0	13,60	89,90	78,98	3623,00	99,80	0	173,70	77,10	83,25	3621,20
6	94,90	0	9,50	98,48	69,87	3751,30	98,74	0	1085,40	84,92	86,10	3629,80
7	92,90	0	1,70	92,91	58,81	3779,70	97,20	0	11,60	90,10	78,41	3632,80
8	97,76	13,00	3780,70	94,01	73,97	3627,20	99,60	40,90	3731,30	87,53	75,76	3625,70
9	93,92	0	2,10	95,44	29,58	3738,70	94,74	0	18,40	94,56	64,80	3651,00
10	94,96	0	9,20	84,08	82,93	3640,20	99,68	0	69,70	87,67	82,20	3625,50
M	95,48	1,3	600,69	92,78	55,49	3651,10	98,04	5,75	897,02	89,63	76,10	3631,61
σ	2,45	3,9	1242,90	5,04	27,42	145,26	1,71	12,70	1463,04	5,60	7,19	10,81

Tabela 5.1: Modelos n-grupos verticais na resolução do problema de corte para o caso exato e não-exato, exemplos da literatura.

possível obter a solução ótima no tempo máximo pré-determinado, além disto o gap variou de 0% a 86,1% e a área de utilização do objeto variou de 77,10% a 98,30%. O tempo de processamento dos exemplos dos modelos não-exatos foram muito superiores aos do caso exato. Os exemplos resolvidos com o modelo 1-grupo exigiram esforço computacional muito menor quando comparado aos outros modelos n-grupos ($n \geq 2$). Porém, a solução foi pior. No geral, quanto maior a dificuldade do modelo n-grupo, maior o tempo e melhor a solução do exemplar.

O *solver* do Xpress fornece uma série de algoritmos para simplificar um problema antes

do processo de otimização (pré-processamento [23]). As técnicas de pré-processamento visam detectar e remover restrições redundantes, calcular limites para as variáveis, entre outros, reduzindo o tamanho da matriz de restrições. Em alguns casos, pode até ser determinado nesta fase a inviabilidade ou a solução ótima do problema. Em muitos casos este processo pode melhorar significativamente o desempenho do *solver*. O *presolver* é incluído no *default* (configuração padrão) do XPRESS, podendo ser desativado.

Consideremos o exemplar 8 para análise da utilidade do *presolver* na solução dos modelos n-grupos para o caso exato e não-exato. Na Tabela 5.2, estão registrados os seguintes dados: número de linhas (**Linhas**), número de colunas (**Colunas**) e quantidade de elementos não nulos (**El. não nulos**) relacionados a matriz do problema original (**Matriz Original**) e após a aplicação do procedimento *presolver* no exemplar do modelo exato (**Presolver - Exato**) e do não-exato (**Presolver - não-exato**).

Dados	MODELO 1-GRUPO			MODELO 2-GRUPOS		
	Matriz Original	Presolver-Exato	Presolver-não-exato	Matriz Original	Presolver-Exato	Presolver-não-exato
Linhas	952	865	938	1896	1430	1566
Colunas	1318	336	640	2638	563	1171
El. não nulos	4278	2081	2878	8561	3446	4962

Dados	MODELO 3i-GRUPOS			MODELO 3t-GRUPOS		
	Matriz Original	Presolver-Exato	Presolver-não-exato	Matriz Original	Presolver-Exato	Presolver-não-exato
Linhas	2839	1777	1957	2841	2590	2794
Colunas	3957	708	1463	3960	1010	1922
El. não nulos	12844	4290	6168	12848	6263	8639

Tabela 5.2: Análise do procedimento *presolver* no exemplar 8.

No geral, o número de linhas, colunas e elementos não nulos foram reduzidos consideravelmente no exemplar 8 dos modelos n-grupos após a aplicação do procedimento *presolver*, principalmente para o caso exato. No modelo 1-grupo exato foram eliminadas 366 linhas, 982 colunas e 2197 elementos não nulos, e para o caso não-exato foram eliminadas 14 linhas, 678 colunas e 1400 elementos não nulos, bem inferior as reduções do exato. Este fato também é visível para os demais modelos. Neste exemplar o modelo 2-grupos exato 466 linhas foram eliminadas de um total de 1896 do problema original e no modelo 3t-grupos exato foram eliminadas 2841 de um total de 6585.

5.2 Exemplos de uma Fábrica Característica

Os exemplos utilizados nesta seção foram baseados nos dados gentilmente cedidos pela Fábrica de Móveis Luapa. Usamos dados de três produtos da fábrica: armário 5 portas (A5p), cômoda (Cmd) e criado (Crd). Nas Tabelas 5.3, 5.4 e 5.5 apresentamos os componentes (itens) destes produtos agrupados de acordo com a espessura do objeto. Cada bloco, nas referidas tabelas, representa um exemplo, onde exibimos as seguintes informações: índices (\mathbf{i}), comprimento (\mathbf{l}_i), largura (\mathbf{w}_i) e demanda (\mathbf{b}_i) dos itens respectivamente. Para todas as espessuras foi considerado um objeto com dimensões $(L, W) = (2750mm, 1830mm)$. As demandas das Tabelas 5.3, 5.4 e 5.5 são relativas a um lote simples de cada produto. Este lote simples nada mais é do que a produção de uma quantidade fixa de apenas um tipo de produto, ou seja, a produção de quarenta armários 5 portas, 160 cômodas e 300 criados.

Os exemplos de lote simples (Tabelas 5.3, 5.4 e 5.5) foram nomeados de acordo com: "Produto" - "Espessura". Por exemplo, A5p-25 são os itens que devem ser obtidos do corte de objetos de 25mm de espessura correspondentes a um lote simples do armário 5 portas, Cmd-12 são os itens que devem ser obtidos do corte de objetos de 12mm de espessura correspondentes a um lote simples da cômoda e Crd-03 são os itens que devem ser obtidos do corte de objetos de 03mm de espessura correspondentes a um lote simples do criado.

Produto - esp	Item i	Comprimento l_i	Largura w_i	Demanda b_i
A5p-03	1	2500	565	240
	2	647	453	160
	3	710	454	80
	4	454	454	80
	5	1080	454	200
	6	530	454	200
	7	1050	500	40
	8	483	215	80
A5p-09	1	510	450	40
A5p-12	1	454	180	320
	2	635	180	160

Produto - esp	Item i	Comprimento l_i	Largura w_i	Demanda b_i
A5p-15	1	1049	452	200
	2	499	452	200
	3	452	429	80
	4	1050	535	80
	5	535	500	80
	6	535	430	80
	7	700	212	160
A5p-20	1	2500	60	480
	2	445	60	480
	3	445	40	1040
	4	490	60	40
	5	500	60	120
	6	1050	60	200
	7	430	60	120
	8	440	60	160
	9	1060	60	80
A5p-25	1	430	60	80
	2	500	60	160
	3	1050	60	160

Tabela 5.3: Componentes do armário de 5 portas.

Produto - esp	Item i	Comprimento l_i	Largura w_i	Demanda b_i
Cmd-03	1	710	535	320
	2	1062	530	320
	3	647	453	960
Cmd-09	1	630	50	480
	2	433	50	320
	3	295	50	480
Cmd-12	1	440	65	320
	2	635	50	160
	3	454	180	960
	4	635	180	480
	5	454	135	640
	6	635	135	320

Produto - esp	Item i	Comprimento l_i	Largura w_i	Demanda b_i
Cmd-15	1	970	570	320
	2	700	75	160
	3	700	212	480
	4	700	163	320

Tabela 5.4: Componentes da cômoda.

Produto - esp	Item i	Comprimento l_i	Largura w_i	Demanda b_i
Crd-03	1	388	377	900
	2	410	383	600
	3	445	213	1200
Crd-12	1	390	110	1800
	2	370	110	900
Crd-15	1	600	440	600
	2	450	132	900

Tabela 5.5: Componentes do criado.

Na tentativa de reduzir o tempo gasto com *setups* da máquina de corte a fábrica estudada tem como alternativa a programação de lotes duplos, ou seja, lotes derivados da junção de dois lotes simples. Estes podem ser: homogêneos ou heterogêneos. Os lotes duplos homogêneos são determinados pela união de dois lotes simples de um mesmo produto (as demandas dos itens são duplicadas), agrupados de acordo com cada espessura. E os lotes duplos heterogêneos, são determinados pela união de dois lotes simples de produtos diferentes (itens de diferentes produtos são mesclados), agrupados de acordo com cada espessura.

Os testes desta seção são referentes aos lotes simples dos produtos listados nas Tabelas 5.3, 5.4 e 5.5 e aos lotes duplos heterogêneos (combinações dos produtos, A5p e Cmd, A5p e Crd, e Cmd e Crd). Como mostramos na Tabela 5.6. Nesta tabela estão registrados os produtos, o tipo de lote, quantidade de produtos produzidos em um lote e as espessuras utilizadas na composição de um produto.

A notação utilizada para identificar os exemplares de lotes duplos heterogêneos é dada por: "Produto1"_"Produto2" - "Espessura". Por exemplo, A5p_Cmd-15 corresponde aos itens que devem ser obtidos do corte de objetos de 15mm de espessura para o lote

Produtos	Tipo de Lote	Quant. dos Produtos (un.)	Espessuras (<i>mm</i>)
A5P	Simple	40	3, 9, 12, 15, 20 e 25
Cmd	Simple	160	3, 9, 12 e 15
Crd	Simple	300	3, 12 e 15
A5P_Cmd	Duplo	40+160	3, 9, 12, 15, 20 e 25
A5P_Crd	Duplo	40+300	3, 9, 12, 15, 20 e 25
Cmd_Crd	Duplo	160+300	3, 9, 12 e 15

Tabela 5.6: Conjuntos de Exemplos da Fábrica

duplo heterogêneo do armário 5 portas e da cômoda. Caso os exemplos do lote duplo tenha itens de mesma espessura em comum (A5p_Cmd-03), o número de itens deste exemplar passa a ser definido pela soma do número de itens de cada produto, e a demanda pela soma das demandas de cada produto.

Observe que o exemplar A5p_Crd-09 é formado apenas com os itens do exemplar A5p-09, pois não há itens de 09mm que compõem o produto criado. Ou seja, esta espessura de objeto é utilizada para a produção de apenas um dos produtos do lote duplo heterogêneo. Note que este fato ocorre em vários outros exemplos (A5p_Cmd-20, A5p_Cmd-25, A5p_Crd-20, A5p_Crd-25 e Cmd_Crd-09). Os resultados destes exemplos não foram levados em consideração na análise dos resultados dos lotes duplos heterogêneos.

As tabelas com os dados completos dos produtos (A5p, Cmd e Crd) estão expostas no Apêndice A. Estes conjuntos de dados formam uma base para a análise do desempenho dos modelos propostos no Capítulo 3, utilizados para resolver o problema de corte bidimensional e o problema de corte de estoque, para cada espessura do objeto de um ou mais produtos.

Resultado para o Problema de Corte Bidimensional

Na série de testes realizados para resolver os problemas de corte bidimensional com dados da fábrica característica, consideramos o valor dos itens dados por sua respectiva área (ou seja, $v_i = l_i w_i$) e o desgaste da serra de 4mm. Assumimos também que a orientação dos itens é fixa.

Os resultados do problema de corte bidimensional para os exemplos de lote simples

(Tabelas 5.3, 5.4 e 5.5) obtidos com os modelos n-grupos verticais (Capítulo 3) para o caso exato e não-exato são exibidos na Tabela 5.7. Nesta tabela estão registradas a solução (**Sol(%)**) que corresponde a área de utilização do objeto em porcentagem e o tempo de processamento (**Temp(s)**) de cada exemplar, dado em segundos. São apresentados, a média (**Média**) e o desvio padrão (σ) dos resultados obtidos para os exemplares.

Na resolução dos exemplares de lote simples para o caso exato a porcentagem de utilização do objeto nos exemplares do modelo 1-grupo variou de 76,65% a 99,67% enquanto nos demais modelos variou de 90,10% a 99,72%. Se analisarmos em detalhes as soluções dos modelos 2, 3i e 3t-grupos, notaremos que alguns exemplares obtiveram melhoras significativas na solução (Cmd-12), porém o tempo de processamento foi maior.

Na resolução dos exemplares de lote simples para o caso não-exato a porcentagem da área de utilização dos exemplares do modelo 1-grupo variou de 78,75% a 99,72% e de 90,10% a 99,72% para os demais modelos. Porém, ao analisarmos em mais detalhes notaremos melhoras e pioras significativas nas soluções (A5p-15 e Cmd-12). O tempo de processamento dos exemplares dos modelos não-exatos são superiores aos dos exatos. Observe que em alguns exemplares a diferença de solução é considerável, por exemplo, a solução de A5p-20 do modelo 1-grupo e do 2-grupos. Devido os tempos de processamento dos exemplares dos modelos não-exatos serem superiores aos do exato, algumas soluções foram melhores nos modelos 1-grupo e 2-grupos, ao invés de serem nos modelos 3i-grupos e 3t-grupos, como aconteceu para os exemplares da literatura (veja, por exemplo, o exemplar Cmd-12). Em vários exemplares foi observado que a solução encontrada para o caso exato é a mesma encontrada para o não-exato (Crd-03, A5p-25), apenas em alguns casos o não-exato obtém melhoras significativas (A5p-20 e Cmd-15). Nos exemplares A5p-09, A5p-12, Crd-12 e Crd-15 todos modelos obtiveram a mesma solução. Para Crd-03 e A5p-25 os modelos n-grupos apresentaram melhoras nas soluções apenas quando o modelo 3t-grupos foi usado. Se compararmos o modelo 1-grupo com o 3t-grupos notaremos que alguns exemplares apresentam boas melhoras na solução, por exemplo, Cmd-15. O modelo 3t-grupos foi o que obteve as melhores soluções, porém seus tempos são superiores aos dos demais modelos que também apresentam boas soluções, exibindo na maioria das vezes soluções que aproveitam acima de 90% do objeto. Referente aos tempos, os exemplares dos modelos não-exatos apresentam tempos muito superiores ao do exato.

Exemplar		MODELO 1-GRUPO				MODELO 2-GRUPOS			
		Exato		não-exato		Exato		não-exato	
		Sol (%)	Temp (s)	Sol (%)	Temp (s)	Sol (%)	Temp (s)	Sol (%)	Temp (s)
A5p-	03	99,67	0,60	99,72	26,60	99,72	3,60	99,72*	4370,30
	09	92,40	0	92,40	0	92,40	0,10	92,40	0,20
	12	90,10	0,10	90,10	0,10	90,10	0,20	90,10	0,20
	15	96,36	0,50	96,36	3,30	96,74	2,50	97,11*	4036,10
	20	97,96*	3837,00	99,04*	3956,10	97,76*	3908,10	98,68*	3996,50
	25	92,67	0,20	92,67	0,20	92,67	6,60	92,67	8,50
Cmd-	03	94,24	0	94,24	0,10	94,24	0,10	94,24	0,40
	09	96,67	0,20	96,67	0,20	96,67	0,80	96,67	1,00
	12	98,31	4,80	99,29	9,70	98,31*	3775,10	99,29*	4019,40
	15	76,65	0,90	78,75	0,30	91,96	1,10	94,17	1,80
Crd-	03	92,59	0,10	92,59	0,20	92,59	0,10	92,59	1,90
	12	98,88	0,10	98,88	0,10	98,88	0,20	98,88	0,30
	15	93,23	0	93,25	0,10	96,23	0,10	96,23	0,20
Média		93,48	295,73	93,74	307,46	94,75	592,2	94,22	1264,37
σ		5,72	1022,28	5,38	1053,30	2,96	1385,80	3,00	1896,05

Exemplar		MODELO 3i-GRUPOS				MODELO 3t-GRUPOS			
		Exato		não-exato		Exato		não-exato	
		Sol (%)	Temp (s)	Sol (%)	Temp (s)	Sol (%)	Temp (s)	Sol (%)	Temp (s)
A5p-	03	99,72	99,50	99,72	4231,80	99,72*	3868,10	99,72*	3847,60
	09	92,40	0,20	92,40	0,10	92,40	0,50	92,40	0,80
	12	90,10	0,50	90,10	0,40	90,10	9,60	90,10	10,90
	15	97,85	11,30	97,85*	4017,20	97,26	63,60	97,11*	3915,50
	20	98,96*	3849,90	98,96*	3799,40	98,60*	3802,70	99,20*	3809,60
	25	92,67	4,50	92,67	40,10	96,02	1968,80	96,02*	3898,20
Cmd-	03	94,24	0,10	94,24	0,50	94,24	0,40	94,24	10,20
	09	96,67	8,00	96,67	2,60	96,67*	4173,10	96,67*	4128,80
	12	98,31*	3854,80	99,14*	3919,50	98,95*	3986,50	99,20*	4292,60
	15	91,96	256	94,17	3,50	94,17	7,70	94,17	852,40
Crd-	03	92,59	0,10	92,59	4,10	96,82	1,00	96,82	63,20
	12	98,88	0,50	98,88	0,50	98,88	12,8	98,88	20,30
	15	96,23	0,30	96,23	0,30	96,23	0,30	96,23	0,70
Média		94,85	621,98	94,77	1232,31	95,12	1376,55	94,69	1911,6
σ		3,11	1379,18	3,04	3,04	1841,91	1796,94	2,75	1932,40

Os exemplares identificados com * não obtiveram solução ótima no tempo máximo estipulado.

Tabela 5.7: Modelos n-grupos verticais na resolução do problema de corte para o caso exato e não-exato, exemplar da indústria, lote simples.

Os resultados obtidos para o lote duplo heterogêneo são mostrados na Tabela 5.8. Ao compararmos os exemplares dos modelos exatos 1-grupo e 2-grupos observamos melhoras significativas na área de utilização do objeto.

Exemplar Produto - esp		MODELO 1-GRUPO				MODELO 2-GRUPOS			
		Exato		não-exato		Exato		não-exato	
		Sol (%)	Temp (s)	Sol (%)	Temp (s)	Sol (%)	Temp (s)	Sol (%)	Temp (s)
A5p_Cmd-	3	99,67	1,10	99,72	235,30	99,72	14,50	99,72*	3831,00
	9	96,67	0,20	96,67	0,40	97,64	5,00	97,64	15,00
	12	98,31	4,90	99,29	9,40	98,31*	4517,30	99,05*	3808,30
	15	96,36	1,20	96,36	352,60	98,21	5,80	98,57*	3897,60
A5p_Crd-	3	99,67	1,10	99,72	1222,60	99,72	45,60	98,86*	3776,80
	12	98,88	0,50	98,88	1,20	98,88	2,80	98,88*	3875,80
	15	96,36	0,70	98,25	447,20	97,29	11,80	97,81*	3848,70
Cmd_Crd-	3	94,24	0,10	94,34	2,60	94,34	0,20	96,70	100,40
	12	98,88	7,80	99,29	208,50	98,88*	4195,10	98,88*	4192,30
	15	95,35	0,30	95,35	6,50	97,88	4,10	97,84*	3949,70
Média		97,44	1,79	97,79	248,63	98,09	880,22	98,39	3129,56
σ		1,80	2,40	1,86	360,54	1,47	1739,53	0,84	1539,93

Exemplar Produto - esp		MODELO 3i-GRUPOS				MODELO 3t-GRUPOS			
		Exato		não-exato		Exato		não-exato	
		Sol (%)	Temp (s)	Sol (%)	Temp (s)	Sol (%)	Temp (s)	Sol (%)	Temp (s)
A5p_Cmd-	3	99,72	165,00	99,72*	3861,60	99,72*	3990,00	99,72*	3797,30
	9	97,64	4,00	97,64	476,10	97,64*	4116,40	98,57*	3809,00
	12	98,31*	4166,50	99,29*	3963,40	98,73*	4107,50	99,29*	3975,00
	15	99,32	84,00	99,25*	3881,40	98,21	1739,10	97,64*	4077,10
A5p_Crd-	3	99,72	1310,90	99,72*	3808,00	99,72*	3910,80	99,67*	3770,60
	12	98,88	32,40	98,88*	4313,60	99,49*	4071,80	98,88*	4070,20
	15	98,08	72,00	97,81*	3859,50	98,25	138,80	98,25*	3800,80
Cmd_Crd-	3	94,34	0,60	96,70*	4336,10	98,63	2,60	98,63*	4197,00
	12	99,20*	3858,8	98,99*	3901,10	98,95*	3893,10	99,43*	3875,40
	15	97,88	256,00	97,88*	3859,90	97,88	1024,90	97,88*	3850,80
Média		98,31	995,02	98,59	3626,07	98,72	2699,5	98,80	3922,32
σ		1,50	1554,80	0,97	1065,43	0,71	1672,95	0,69	140,58

Os exemplares identificados com * não obtiveram solução ótima no tempo máximo estipulado.

Tabela 5.8: Modelos n-grupos verticais na resolução do problema de corte para o caso exato e não-exato, exemplar da indústria, lote duplo.

Porém, quando comparamos as soluções do modelo 2-grupos com o 3i-grupos apenas os exemplares A5p_Cmd-15, A5p_Crd-15 e Cmd_Crd-12 obtêm melhoras. Ao compa-

rarmos os exemplares dos modelo 3i-grupos com o 3t-grupos algumas soluções obtém boas melhoras (A5p_Cmd-12, A5p_Crd-12, A5p_Crd-15 e Cmd_Crd-03), porém outras pioram (A5p_Cmd-15 e Cmd_Crd-12). Mas, no geral há melhora na solução dos exemplares a medida que $n \geq 1$ (n-grupos) cresce. O modelo 3t-grupos foi o que obteve as melhores soluções.

No caso não-exato não foi obtida a solução ótima para praticamente todos os exemplares dos modelos 2, 3i e 3t-grupos no tempo máximo. Quando comparamos estes modelos, algumas soluções (A5p_Crd-15 e A5p_Cmd-15) pioram a medida que aumenta a dificuldade do modelo (em ordem crescente 1-grupo, 2-grupos, 3i-grupos e 3t-grupos). No geral, os exemplares do modelo 3t-grupos foram os que obtiveram as melhores áreas de utilização do objeto, aproveitando de 97,64% a 99,72%. Porém, nos demais modelos a área de utilização do objeto foi de 94,24% a 99,72%.

A Figura 5.1 ilustra os padrões de corte gerados do exemplar Cmd_Crd-03 com o modelo 2-grupos exato e não-exato. Note que a área de utilização do objeto para o caso não-exato é maior que para o caso exato, quando o exemplar é resolvido até a otimalidade.

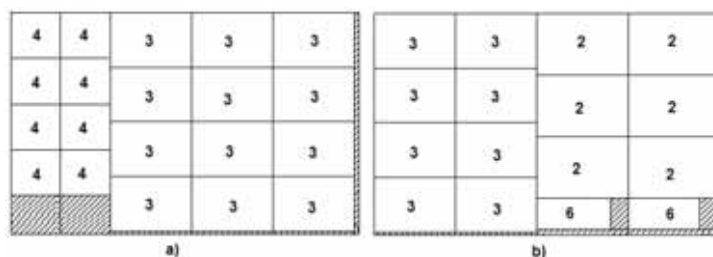


Figura 5.1: Padrão de corte do exemplar Cmd_Crd-03, caso: a) exato, b) não-exato.

De modo geral, as soluções dos exemplares dos modelos n-grupos para o caso exato e não-exato (Tabelas 5.7 e 5.8) foram satisfatórias. Como esperado, os exemplares com poucos itens são mais fáceis de serem resolvidos e quase todos os exemplares dos modelos n-grupos apresentam bons resultados em relação a área de utilização. As soluções obtidas com os exemplares dos modelos n-grupos ($n \geq 2$) utilizam mais de 90% da área do objeto. O tempo computacional dos exemplares para o caso não-exato foram muito alto, inviabilizando este tipo de método de solução em um ambiente industrial (prática). Por isto, optamos apenas pelos modelos n-grupos verticais exatos na geração de colunas para o problema de corte de estoque bidimensional.

Resultados para o Problema de Corte de Estoque Bidimensional

O problema de corte de estoque bidimensional (ver modelo ((1.2.1) - (1.2.3)) - Capítulo 1) foi resolvido utilizando o método de geração de colunas e os modelos n-grupos verticais exatos (1-grupo ((3.1.10) - (3.1.18)), 2-grupos ((3.2.19) - (3.2.29)), 3i-grupos ((3.3.30) - (3.3.41)) e 3t-grupos ((3.4.42) - (3.4.55))) foram utilizados no subproblema para gerar o padrão de corte (coluna). Assumimos que os itens podem ser rotacionados, e definimos o tempo máximo para o processamento de cada exemplar de 3600 segundos para a solução do problema mestre e de 100 segundos para solução do subproblema de gerar o padrão de corte. Um problema de corte de estoque deve ser resolvido para cada espessura de objeto.

Apresentamos na Tabela 5.9 os resultados obtidos para os exemplares do lote simples (Tabelas 5.3, 5.4 e 5.5). Nesta tabela estão registrados o número de padrões de cortes utilizados (**Nr Pad**), o número de objetos cortados (**Nr Obj**), o percentual de perda de matéria-prima calculada pela fórmula (4.3.3) (**Perda**), número de iterações do problema mestre (**Nr It**) e o tempo de processamento (**Temp(s)**) de cada exemplar. Para obter um valor inteiro para o número de objetos cortados, foi tomado o teto ² da solução fracionária obtida para o problema mestre, isto é, $x_j = \lceil x_j \rceil$. Isto foi possível, pois consideramos o problema irrestrito, ou seja, aceitamos a produção de itens excedentes.

Analisando a quantidade de padrões utilizados, verificamos que esta quantidade nos exemplares varia em apenas um número a mais ou a menos (A5p-03, A5p-20, Cmd-03, Cmd-15) e nos demais permanece igual. Os exemplares dos modelos 3i e 3t-grupos exibiram um desempenho ligeiramente melhor na quantidade de padrões utilizados que os demais modelos. Ao analisarmos o consumo de objetos numa comparação dos exemplares do modelo 1-grupo com os demais modelos, observamos que os exemplares do modelo 1-grupo apresentaram, no geral, um desempenho pior (excessão para os exemplares A5p-03, A5p-20 e Crd-15). Na comparação dos exemplares dos modelos 2, 3i e 3t-grupos, notamos que o modelo 3t-grupos apresentou um desempenho ligeiramente melhor. Quando analisamos a produção total dos itens, esta diferença torna-se mais significativa (Tabela 5.10).

Relativo ao número de iterações e tempo (Tabela 5.9), note que o modelo 1-grupo utiliza o menor número de iterações resolvendo os exemplares num tempo menor que os demais modelos, porém, com soluções piores. O modelo 3t-grupos é o segundo a

² $\lceil x_j \rceil$ é o menor inteiro maior ou igual a x_j

Exemplar (Produto - esp)		MODELO 1-GRUPO					MODELO 2-GRUPOS				
		Nr Pad	Nr Obj	Perda	Nr It	Temp(s)	Nr Pad	Nr Obj	Perda	Nr It	Temp(s)
A5p-	03	8	139	5,80	4	337,81	8	142	6,93	4	315,38
	09	1	2	3,65	1	0,17	1	2	3,65	1	2,77
	12	2	11	4,48	2	0,55	2	11	2,13	4	52,00
	15	7	61	5,14	5	152,59	7	59	3,36	17	1.786,16
	20	8	35	4,51	11	1.147,86	9	36	4,44	2	222,89
	25	3	5	3,65	2	15,11	3	5	1,49	4	423,66
Cmd-	03	3	146	9,70	1	0,17	2	124	2,67	4	239,34
	09	3	7	1,60	6	275,77	3	8	0,62	4	426,52
	12	6	49	1,98	10	1.062,59	6	47	0,27	13	1.353,45
	15	4	85	14,68	7	326,70	4	66	3,14	14	1.466,08
Crd-	03	3	80	6,12	1	0,16	3	77	4,73	6	640,78
	12	2	25	0,91	2	0,56	2	25	0,39	4	132,47
	15	2	36	1,59	1	0,14	2	46	0,89	3	10,66

Exemplar (Produto - esp)		MODELO 3i-GRUPOS					MODELO 3t-GRUPOS				
		Nr Pad	Nr Obj	Perda	Nr It	Temp(s)	Nr Pad	Nr Obj	Perda	Nr It	Temp(s)
A5p-	03	8	145	7,38	2	218,44	7	140	5,09	5	527,43
	09	1	2	3,65	1	21,38	1	2	3,65	1	2,03
	12	2	11	2,13	4	434,06	2	11	2,13	4	434,06
	15	7	60	2,92	13	1.404,19	7	61	3,89	9	950,58
	20	9	37	4,40	3	387,38	9	36	5,49	1	113,20
	25	3	6	1,93	9	958,19	3	5	1,47	5	525,36
Cmd-	03	2	124	2,67	2	212,71	2	124	2,67	2	212,71
	09	3	8	0,64	6	641,08	3	7	0,59	5	530,13
	12	6	48	0,46	14	1.474,97	6	46	0,27	11	1.158,17
	15	4	65	2,54	16	1.682,54	4	66	3,33	6	626,00
Crd-	03	3	77	4,81	6	639,14	3	77	4,66	6	641,36
	12	2	25	0,39	4	423,08	2	25	0,39	5	449,75
	15	2	46	0,89	3	92,79	2	46	0,89	3	20,49

Tabela 5.9: Modelos n-grupos verticais na resolução do problema de corte de estoque, lote simples.

exibir menor número de iterações e o modelo 2-grupos a apresentar melhores tempos de processamento dos exemplares.

Na solução de vários exemplares o modelo 1-grupo não apresenta soluções aceitáveis para a indústria, por exemplo Cmd-15 apresenta índice de perda de 14,68%. A única exceção foi no exemplar A5p-03, onde este modelo foi o que melhor se sobressaiu. Quanto aos outros três modelos as perdas geradas em sua grande maioria atendem as exigências da indústria (perdas de até 6%). Apenas o exemplar A5p-03 possui perda superior a 6% obtida com os modelo 2 e 3i-grupos. Na análise da comparação individual dos modelos n-grupos, podemos notar que as soluções dos modelos 2-grupos e 3t-grupos apresentaram

um desempenho melhor que os demais modelos, principalmente nos exemplares A5p-25, Cmd-09, Cmd-12 e Crd-03.

Na Tabela 5.10, apresentamos um resumo da produção do lote simples. Nela são exibidos o número total de padrões de cortes utilizados (**Nr Pad**), o número total de objetos cortados (**Nr Obj**) e o percentual de perda de matéria-prima (**Perda(%)**). A perda é calculada com base nos valores médios de cada exemplar dado pela Tabela 5.9. Observe que para o produto A5p a solução do modelo 1-grupo foi a que utilizou o menor número de objetos, apenas 253, enquanto os demais modelos de 255 a 261. Note ainda que as perdas nas soluções deste modelo para os produtos Cmd e Crd são superiores a dos demais modelos, isto acontece por aceitarmos a produção de itens excedentes. Quanto ao número de diferentes padrões as soluções dos modelos 1 e 3t-grupos são as que apresentam a menor quantidade de padrões distintos, porém, os demais modelos apresentam apenas um padrão a mais. Ao tratarmos do produto Cmd, observe que na solução do modelo 1-grupo são necessários 287 objetos para atender a demanda do lote, enquanto que para o modelo 2 e 3i-grupos são necessários 245 e para o 3t-grupos 243, uma redução considerável. Note ainda que o modelo 3i-grupo utiliza um padrão a menos que o modelo 2 e 3t-grupos e além disto, exibe o menor índice de perda (2,14%), podendo ser o mais viável para a indústria. No caso do produto Crd observe que todos os modelos utilizaram 7 diferentes tipos de padrões de corte, porém, o número de objetos e a perda variaram.

Exemplar Produto	MODELO 1-GRUPO			MODELO 2-GRUPOS		
	Nr Pad	Nr Obj	Perda(%)	Nr Pad	Nr Obj	Perda(%)
A5p	29	253	5,41	30	255	6,03
Cmd	16	287	5,73	15	245	1,25
Crd	7	141	4,04	7	148	2,80
Total	52	681	5,36	52	648	2,73

Exemplar Produto	MODELO 3i-GRUPOS			MODELO 3t-GRUPOS		
	Nr Pad	Nr Obj	Perda(%)	Nr Pad	Nr Obj	Perda(%)
A5p	30	261	5,56	29	255	4,65
Cmd	14	245	2,14	15	243	2,34
Crd	7	148	2,85	7	148	2,77
Total	51	654	3,67	51	646	3,35

Tabela 5.10: Resumo do aproveitamento de material por lote simples de produto.

Para a produção do lote simples, tanto na análise individual (Tabela 5.9) como na

conjunta (Tabela 5.10) os modelos que exibiram as melhores soluções foram o 2-grupos e o 3t-grupos. De acordo com estes resultados, podemos concluir que se a indústria preferir uma quantidade menor de objetos e de padrões distintos, ao invés de um aproveitamento melhor da matéria-prima, então o modelo 3t-grupos é o mais apropriado, caso contrário o modelo 2-grupos é a melhor escolha.

Na Figura 5.2 ilustramos os padrões gerados com os modelos n-grupos. Observe que os padrões homogêneos maximais, que compõem a matriz básica inicial, não foram aceitos em nenhum caso. Outro fato interessante é que os padrões não se repetem, na comparação de um modelo com outro.

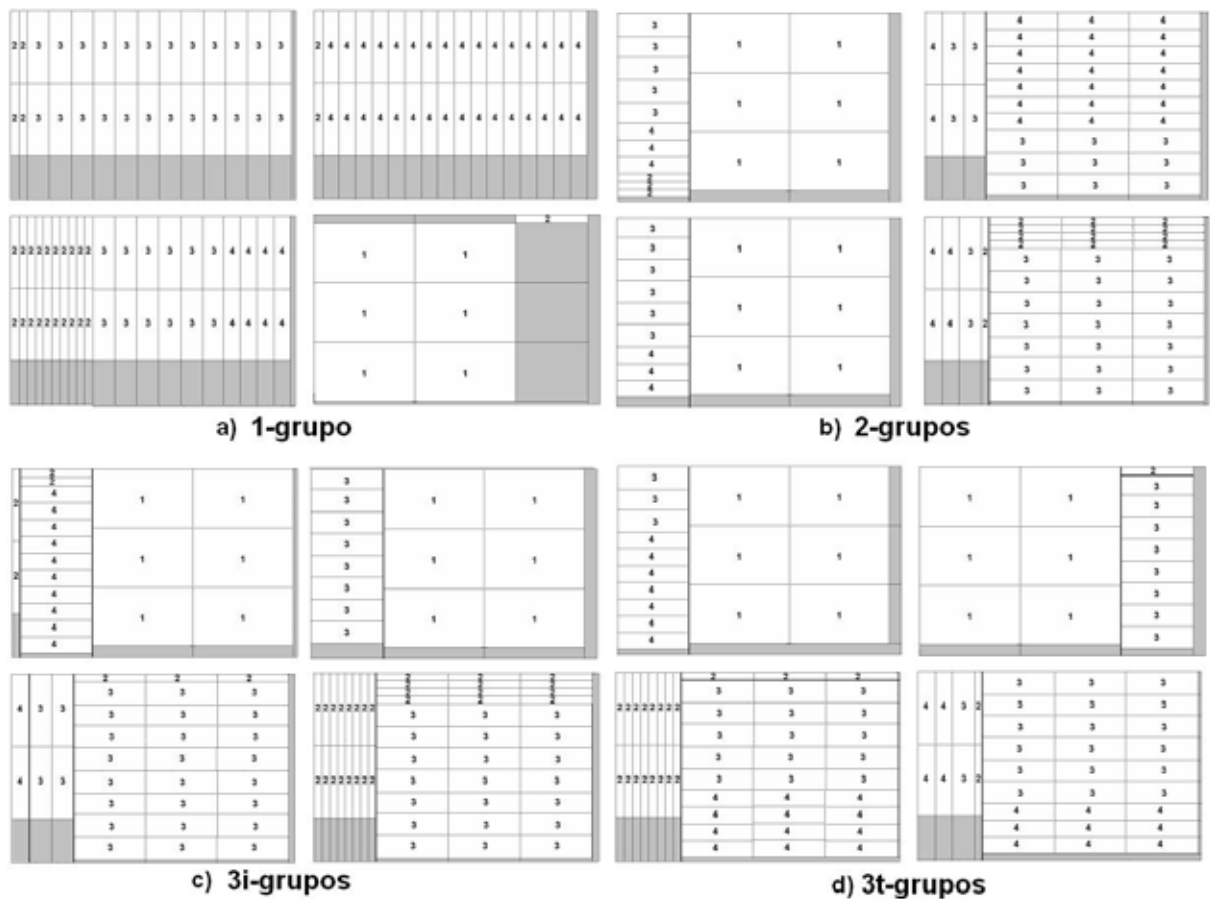


Figura 5.2: Padrões de cortes gerados com os modelos n-grupos.

Na Tabela 5.11 são exibidos os resultados para a produção do lote duplo heterogêneo. Se concentrarmos nossa análise ao número de padrões utilizados, no geral, podemos ver uma pequena vantagem na solução do modelo 3t-grupos sobre as demais (por exemplo em A5p_Crd-15 e Cmd_Crd-15). A utilização de um número maior de padrões pode acarretar em um aumento da carga de trabalho, pois aumentamos a possibilidade de um

padrão ser utilizado para cortar poucos objetos, o que torna pouco produtivo o uso da máquina seccionadora. Observando o número de objetos cortados, note que com exceção de alguns exemplares (A5p_Cmd-03, Cmd_Crd-15 e A5p_Cmd-12), a solução do modelo 2-grupos foi melhor que a do modelo 3t-grupos. Observamos ainda que a solução do modelo 2-grupos apresenta, em geral, os menores índices de perda, inferiores a 4,49%. Na solução dos outros modelos n-grupos (n=1, 3i e 3t), alguns exemplares (A5p_Cmd-03, A5p_Cmd-15, Cmd_Crd-03 e A5p_Crd-03) apresentaram perdas que não são aceitáveis pela indústria (acima dos 6% de perda).

Exemplar		MODELO 1-GRUPO					MODELO 2-GRUPOS				
		Nr Pad	Nr Obj	Perda	Nr It	Temp(s)	Nr Pad	Nr Obj	Perda	Nr It	Temp(s)
A5p_Cmd-	03	10	277	6,61	5	497,69	9	261	3,32	14	1529,74
	09	4	9	2,06	4	277,28	4	9	0,63	5	527,80
	12	6	59	1,97	8	852,31	6	57	0,40	12	1254,45
	15	10	146	10,70	10	1042,91	9	127	4,49	17	1822,92
A5p_Crd-	03	11	219	5,95	3	201,72	11	212	4,14	11	1293,92
	12	4	36	2,00	3	14,11	4	36	1,22	5	525,94
	15	9	107	3,68	5	309,00	9	105	2,91	9	988,22
Cmd_Crd-	03	6	225	8,22	2	1,20	5	202	3,60	6	624,67
	12	8	74	1,71	9	945,47	8	73	0,65	9	949,83
	15	6	131	10,05	6	573,16	6	114	3,65	6	631,52

Exemplar		MODELO 3i-GRUPOS					MODELO 3t-GRUPOS				
		Nr Pad	Nr Obj	Perda	Nr It	Temp(s)	Nr Pad	Nr Obj	Perda	Nr It	Temp(s)
A5p_Cmd-	03	10	279	7,00	6	710,68	9	256	4,90	6	681,44
	09	4	11	0,78	6	629,45	4	10	0,83	5	526,52
	12	6	57	0,32	11	1152,98	6	57	0,30	15	1571,34
	15	9	153	12,63	2	226,99	10	151	12,03	5	556,91
A5p_Crd-	03	11	227	7,13	2	327,14	11	227	7,09	2	268,45
	12	4	36	2,46	4	416,51	4	37	1,96	8	845,63
	15	9	113	5,48	4	484,67	8	115	6,54	2	252,97
Cmd_Crd-	03	6	226	8,43	1	103,6	5	207	4,36	4	413,31
	12	8	74	1,17	11	1209,93	8	74	1,31	10	1072,52
	15	6	111	2,82	7	740,467	5	113	3,20	5	529,67

Tabela 5.11: Modelos n-grupos verticais na resolução do problema de corte de estoque, lote duplo.

Dois outros aspectos que foram analisados em nossos testes, é o número de iterações e o tempo de processamento. Na solução dos exemplares do modelo 2-grupos foram necessárias mais iterações, com tempo de no máximo 35 minutos para resolver cada problema de corte de estoque. Note que quanto maior o número de iterações, maior é o tempo de processamento e em alguns casos melhor é a solução. Na solução do exemplar A5p_Cmd-15

do modelo 2-grupos foi necessário o maior número de iterações (17) e tempo de processamento (1822,92 segundos), porém foi a melhor solução. Os melhores tempos foram apresentados para os exemplares do modelo 1-grupo, porém, as soluções na maioria dos exemplares foram as piores. Na análise individual dos modelos n-grupos, podemos dizer que no geral, o modelo 2-grupos foi o que exibiu a solução mais ideal, sendo superior as encontradas pelos outros modelos.

Na Tabela 5.12, apresentamos um resumo da produção total dos lotes duplos. Observe o exemplar A5p_Cmd, note que a solução do modelo 2-grupos foi a que apresentou o menor número de padrões distintos, porém as dos modelos 3i-grupos e 3t-grupos apresentaram apenas um padrão a mais. Além disto, esta solução utiliza o menor número de objetos do estoque (454), enquanto a quantidade utilizada pelas soluções das demais modelos variam de 474 a 500 objetos. O modelo 2-grupos foi o único que exibiu perda aceitável pela indústria. No exemplar A5p_Crd, o modelo 3t-grupos utilizou 23 padrões diferentes enquanto os demais modelos utilizaram 24. Porém, o número de objetos a serem cortados foi 379, bem superior aos demais modelos que variaram de 353 a 376. Com relação as perdas, a solução do modelo 2-grupos foi a que se sobressaiu, com perda de 3,48%. Em relação a Cmd_Crd, a solução do modelo 3t-grupos utilizou 18 padrões de cortes distintos e 394 objetos, enquanto o modelo 2-grupos utilizou 19 padrões distintos e 389 objetos. As soluções dos modelos 2-grupos e o 3t-grupos foram as que aproveitaram melhor a matéria-prima.

Exemplar Produto1_Produto2	MODELO 1-GRUPO			MODELO 2-GRUPOS		
	Nr Pad	Nr Obj	Perda(%)	Nr Pad	Nr Obj	Perda(%)
A5p_Cmd	30	491	7,19	28	454	3,23
A5p_Crd	24	362	4,89	24	353	3,48
Cmd_Crd	20	430	7,66	19	389	3,06
Total	74	1283	6,70	71	1196	3,00

Exemplar Produto1_Produto2	MODELO 3i-GRUPOS			MODELO 3t-GRUPOS		
	Nr Pad	Nr Obj	Perda(%)	Nr Pad	Nr Obj	Perda(%)
A5p_Cmd	29	500	7,82	29	474	6,53
A5p_Crd	24	376	6,19	23	379	6,42
Cmd_Crd	20	411	5,61	18	394	3,45
Total	73	1287	6,64	70	1247	5,52

Tabela 5.12: Resumo do aproveitamento de material por lote duplo de produto.

Considerando todos os exemplares da Tabela 5.12 no que diz respeito ao número de objetos cortados, o modelo 2-grupos utilizou o menor número de objetos do estoque (1196). Ao analisarmos o número de padrões distintos, o modelo 3t-grupo utilizou o menor número de padrões distintos, porém, o modelo 2-grupo utilizou apenas um padrão a mais que o modelo 3t-grupos e além disto, apresentou um melhor aproveitamento da matéria-prima, exibindo perda de 3%. Na produção do lote duplo tanto na análise individual (Tabela 5.8) como em conjunta (Tabela 5.12) o modelo que apresentou as melhores soluções foi o 2-grupos.

De modo geral, o comportamento dos modelos n-grupos verticais na produção do lote simples (Tabela 5.7) foi semelhante a produção do lote duplo heterogêneo (Tabela 5.8). Para os dois tipos de lotes o modelo 2-grupos se sobressaiu muito bem em comparação com os demais modelos. E ainda, na produção do lote duplo obtemos ótimos resultados com o modelo 3t-grupos.

Contudo, apesar dos modelos n-grupos ($n > 1$) apresentarem bons resultados, observe que os tempos de processamento dos exemplares analisados anteriormente, em geral, são altos. Este fato provavelmente se agrava em problemas com um grande número de itens, pois estes tempos podem ser muito maiores, exigindo que o planejamento dos padrões de corte seja feito com maior antecedência.

Capítulo 6

Considerações Finais

Neste trabalho, apresentamos os principais conceitos teóricos do problema de corte de estoque e sua importância no contexto do planejamento de produção nas indústrias de móveis. Concentramos nossos esforços na resolução do problema de corte bidimensional, já que é um importante problema na indústria em questão. Como contribuição deste trabalho, testamos computacionalmente modelos lineares da literatura para a geração de padrões de corte 1-grupo, 2-grupos e 3-grupos, incluindo o caso exato e não-exato.

Embora fácil de descrever, o problema de corte bidimensional é difícil de ser modelado e resolvido. Este problema está classificado como um problema NP-difícil o que limita o uso de métodos exatos para encontrar a solução para instâncias grandes. O problema de corte de estoque foi resolvido utilizando o método de geração de colunas, tendo como subproblema os modelos n-grupos verticais de Yanasse e Morabito [81].

Nos resultados apresentados para o problema de corte pode-se destacar que em termos da dificuldade de resolução do problema de corte os modelos podem ser ordenados em ordem crescente como: 1-grupo, 2-grupos, 3i-grupos e 3t-grupos. No geral, há melhora na solução dos exemplares a medida que $n \geq 1$ (n-grupos) cresce. O modelo 3t-grupos foi o que obteve as melhores soluções, porém, o tempo de resolução dos exemplares deste modelo foi superior aos dos demais modelos que também apresentam boas soluções. Para a maioria dos exemplares o aproveitamento do objeto foi superior a 90%. O tempo de processamento dos exemplares dos modelos não-exatos foram muito superiores aos do caso exato, inviabilizando a utilização dos modelos não-exatos para a geração de colunas, usada na resolução do problema de corte de estoque.

Na resolução do problema de corte de estoque o modelo que obteve as melhores soluções

na produção do lote simples foi o 2-grupos e na produção de lote duplo foram os modelos 2-grupos e 3t-grupos. Considerando a análise da produção total do lote simples e do lote duplo notamos no geral, que as perdas nos padrões de corte gerados através destes modelos ficaram abaixo da porcentagem aceita pela indústria (6%).

Algumas considerações podem ser feitas para estender o problema ou, até mesmo, para melhorar os resultados aqui obtidos. Propomos os seguintes trabalhos futuros:

- Estudar a eficácia de limites superiores e inferiores, estratégias de *branching* e inequações válidas na resolução dos modelos propostos para a geração de padrão de corte [81].
- Implementar a proposta dada por Cui [21] apresentada no Capítulo 4 e compará-la com os resultados obtidos com os modelos n-grupos verticais [81];
- Estudar a possibilidade de incluir o seqüenciamento dos padrões de corte no problema de corte de estoque [60], a fim de, fazer melhor uso da máquina de corte, reduzindo o número de *setups* e de ciclos da serra.
- Estender as heurísticas desenvolvidas para o problema de corte unidimensional com reaproveitamento de sobras da matéria-prima dado em [?] para o caso bidimensional.
- Acoplar o problema de dimensionamento de lotes ao problema de corte de estoque [36], para permitir uma melhor avaliação da utilização da matéria-prima.

Apêndice A

Exemplares da Fábrica de Móveis

Característica

Apresentamos aqui o conjunto dos dados cedidos pela fábrica de móveis Luapa utilizados no estudo computacional descrito no Capítulo 5. Nas tabelas a seguir os itens são mostrados separados pela espessura dos objetos, juntamente com o nome do item (Item), a quantidade (Qtd) necessária para compor uma unidade do produto, o comprimento (l_i) e a largura (w_i) do item respectivamente. Nas Tabelas A.3, A.1 e A.2 são mostrados respectivamente, os componentes do armário de 5 portas, da cômoda e do criado.

Produto		Item	Qtd	l_i	w_i
A5P-03	1	Tampo da base	6	2500	565
	2	Fundo das gavetas	4	647	453
	3	Contra fundo do gaveteiro grande	2	710	454
	4	Contra fundo do gaveteiro pequeno	2	454	454
	5	Contra fundo camiseiro	5	1080	454
	6	Contra fundo maleiro	5	530	454
	7	Divisória do camiseiro	1	1050	500
	8	1/2 Lateral sapateira	2	483	215
A5P-09	1	Prateleira do calceiro	1	510	450
A5P-12	1	Lateral da gaveta	8	454	180
	2	Contra fundo gaveta	4	635	180

Produto	Item		Qtd	l_i	w_i
A5P-15	1	Porta do camiseiro	5	1049	452
	2	Porta do maleiro	5	499	452
	3	Porta do gaveteiro	2	452	429
	4	Lateral do camiseiro	2	1050	535
	5	Lateral do maleiro	2	535	500
	6	Lateral do gaveteiro	2	535	430
	7	Frente do gavetão	4	700	212
A5P-20	1	Molduras tras. e diant. base	12	2500	60
	2	Lateral da base	12	445	60
	3	Travessa da base	26	445	40
	4	Travessa da corredeira	1	490	60
	5	Sarrafo tras. do maleiro	3	500	60
	6	Sarrafo tras. do camiseiro	5	1050	60
	7	Sarrafo tras. do gaveteiro	3	430	60
	8	Pinázio grosso (20-1)	4	440	60
	9	Pinázio grosso (20-2)	2	1060	60
A5P-25	1	Pinázio grosso (25-1)	2	430	60
	2	Pinázio grosso (25-2)	4	500	60
	3	Pinázio grosso (25-3)	4	1050	60

Tabela A.1: Componentes do armário de 5 portas

Produto	Item		Qtd	l_i	w_i
Cmd-03	1	Contra fundo	2	710	535
	2	Lateral	2	1062	530
	3	Fundo das gavetas	6	647	453
Cmd-09	1	Travessa colméia grande	3	630	50
	2	Travessa colméia média	2	433	50
	3	Travessa colméia pequena	3	295	50
Cmd-12	1	Lateral gaveta multiuso	2	440	65
	2	Contra fundo gaveta multiuso	1	635	50
	3	Lateral gaveta grande	6	454	180
	4	Contra fundo gaveta grande	3	635	180
	5	Lateral gaveta média	4	454	135
	6	Contra fundo gaveta média	2	635	135

Produto	Item		Qtd	l_i	w_i
Cmd-15	1	Tampo e base	2	970	570
	2	Frente gaveta multiuso	1	700	75
	3	Frente gaveta grande	3	700	212
	4	Frente gaveta média	2	700	163

Tabela A.2: Componentes da cômoda

Produto	Item		Qtd	l_i	w_i
Crd-03	1	Fundo das gavetas	3	388	377
	2	Lateral	2	410	383
	3	1/2 Contra fundo	4	445	213
Crd-12	1	Lateral da gaveta	6	390	110
	2	Contra fundo gaveta média	3	370	110
Crd-15	1	Tampo e base	2	600	440
	2	Frente gaveta	3	450	132

Tabela A.3: Componentes do criado

Apêndice B

Construção de um Padrão de Corte gerado com o Modelo 1-grupo

Apresentamos aqui a construção detalhada de um padrão de corte gerado com o modelo linear 1-grupo vertical ((3.1.10) - (3.1.18)) descrito no Capítulo 4. Seja a dimensão comprimento do objeto dado por $L = 2750$ e da largura por $W = 1830$. Na tabela a seguir são mostrados o comprimento (l_i), a largura (w_i) e a demanda (b_i) dos itens respectivamente.

Item	l_i	w_i	b_i
1	974	574	320
2	704	79	160
3	704	216	480
4	704	167	320

Consideramos que os itens podem ser rotacionados e que os índices J e K são a quantidade de comprimentos e de larguras dos itens respectivamente, ou seja, o índice $J = 8$ e $K = 8$. Note que estes índices são descritos no Capítulo 4 com sendo os comprimentos e as larguras distintas dos itens. Este fato foi também considerado nos testes do Capítulo 5. O número de dígitos necessários para representar o número $\left\lfloor \frac{L}{l_j} \right\rfloor$ na notação binária é dado pelo conjunto $s = \{s_j | \forall j = 1, \dots, 8\} = \{2, 2, 2, 2, 3, 6, 4, 5\}$. E as variáveis do problema ((3.1.10) - (3.1.18)) são dadas por:

a_{ijk} - número de retângulos (l_j, w_k) que contém o item i ;

μ_k - número de vezes que a largura k é usada no padrão de corte;

$$\lambda_j = \sum_{s=1}^{s_j} 2^{s-1} \beta_{js} - \text{número de vezes que o comprimento } j \text{ é usado no padrão de corte.}$$

Sejam as soluções do exemplar do modelo 1-grupo dadas por: $a_{111}=6$, $a_{242}=1$, $\mu_1=3$, $\mu_2=1$, $\beta_{12}=1$ e $\beta_{31}=1$. Onde $a_{111}=6$ é o número de retângulos $(l_1, w_1) = (974, 574)$ que contém o item 1, $(974, 574)$ e $a_{242}=1$ é o número de retângulos $(l_4, w_2) = (704, 79)$ que contém o item 2, $(704, 79)$. As larguras das faixas são dadas por: $\mu_1 = 3$, ou seja, três faixas de larguras $w_1 = 574$ no objeto (L, W) e $\mu_2=1$, isto é, uma faixa de largura $w_2 = 79$ no objeto.

De $\lambda_j = \sum_{s=1}^{s_j} 2^{s-1} \beta_{js}$ e considerando o $\beta_{12}=1$ e $\beta_{31}=1$ temos: $\lambda_1 = \sum_{s=1}^2 2^{s-1} \beta_{1s} = 2^0 \beta_{11} + 2^1 \beta_{12} = 2$, ou seja, temos duas faixas de comprimento $l_1=974$ no objeto. De forma análoga, temos que $\lambda_3 = \sum_{s=1}^2 2^{s-1} \beta_{3s} = 2^0 \beta_{31} + 2^1 \beta_{32} = 1$, isto é, teremos uma faixa de comprimento $l_3=704$ no objeto.

O padrão de corte gerado com o modelo 1-grupo para este exemplar é ilustrado na Figura B.1.

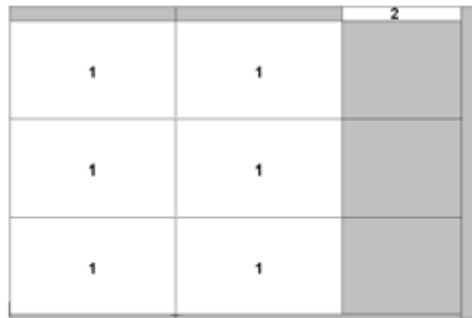


Figura B.1: Padrão de corte gerado com o modelo 1-grupo.

Apêndice C

Geração de Colunas na sintaxe do Xpress-Mosel

Aqui exibimos trechos do código para resolver o problema de corte de estoque com geração de colunas na sintaxe da linguagem de modelagem Xpress-Mosel [23]. Foi incluído o código para o modelo 2-grupos, extraído de Yanasse e Morabito [81]. Para resolver o problema de corte de estoque usando os demais modelos n-grupos apresentados no Capítulo 3, basta substituir a subrotina "Processo de geração dos padrões de corte".

```
model "Gera_Coluna"
```

! Bibliotecas

```
uses "mmsystem",  
     "mmive",  
     "mmxprs",    ! pacote p/ resolver problemas de otimização  
     "mmodbc"    ! pacote para ler o arquivo
```

! Declaração das subrotinas utilizadas

```
forward procedure Le_Dados  ! Leitura dos dados a partir de um arquivo  
forward procedure P_Homo   ! Construção dos padrões de corte homogêneos maximais  
forward procedure Rot_Item ! Construção dos itens rotacionados  
forward procedure Padrao   ! Determinação dos padrão bidimensionais
```

! Declaração das funções utilizadas

```
forward function colgen ! Gera padrões de corte para o problema mestre
```

! Declaração das variáveis globais

 declarations

```

    Z:  linctr    ! função objetivo do problema mestre
    A:  real      ! guarda o valor da função objetivo do subproblema
objval: real      ! recebe o valor final da função objetivo
    rest: array(range) of linctr    ! restrições
    w:  array(range) of integer     ! larguras dos itens
    l:  array(range) of integer     ! comprimentos dos itens
    b:  array(range) of integer     ! demanda dos itens
    L:  integer    ! comprimento do objeto
    W:  integer    ! largura do objeto
    Serra: integer    ! desgaste da serra
    esp: integer    ! espessura do objeto
    M :  real      ! número suficientemente grande
    EPS: real      ! número suficientemente pequeno
    H:  1..2      ! quantidade de subobjetos no padrão
nr_Itens: integer    ! número de itens sem rotação
Nr_Itens: integer    ! número de itens com rotação
    item: range    ! range dos itens sem rotação
    Item: range    ! range dos itens com rotação
nr_Padros: integer    ! número total de padrões gerados
    Padros: range  ! range dos padrões gerados
    Par: array(range) of integer    ! par rotacional do item i
    rot: integer
NmArqDados: string    ! nome do arquivo de dados a ser lido
NmArqSol:  string     ! nome do arquivo de saída
    A_It_s: array(range) of real    ! área de cada item
    A_Obj:  real        ! área do objeto
    A_U_s: array(range) of real     ! área de utilização do padrão de corte
    pat: array(range) of mpar       ! variáveis da geração de colunas
    Pat_H: array(range,range) of integer ! padrão homogêneo p/ cada item
    Pa: array(range,range) of integer ! padrão da geração de colunas
    solpat: array(range) of real     ! sol. das relaxações na geração de colunas
    npatt: integer    ! número total de padrões

```

```

        prob:  basis
end-declarations


---


! Início do processo


---


Le_Dados      !faz a leitura dos dados
P_Homo        !Gera os padrões homogêneos
MAXTIME:=-100    !Define o tempo para gerar coluna
Z := sum(p in Padroes)( pat(p) ) ! Define a função objetivo
forall(i in item)do    ! Restrições do problema mestre inicial
    rest(i):= sum(p in Padroes)(Pa(p,i)*pat(p)) >= b(i)
end-do

! Subrotina para gerar os padrões de corte para o problema auxiliar
objval:=colgen(Z,rest,b)    ! A função retorna o valor da função objetivo
                            ! do problema auxiliar resolvido

! Escrever resultado no arquivo de saída
fopen(NmArqSol,F_APPEND)
    writeln("Solução....Nr Obj....Perda")
    forall(p in Padroes)do
        if(solpat(p)>EPS)then
            writeln("Padrão",strfmt(p,2), ,strfmt(ceil(solpat(p)),4), ,strfmt(perda(p),4))
        end-if
    end-do
    writeln("Número de Iterações: ",nr_Padroes - Nr_Itens)
    writeln("Número de objetos cortados: ", ZFinal)
fclose(F_APPEND)


---


! Fim do processo
*****
Descrição das sub-rotinas utilizadas.


---


! Leitura dos dados


---


procedure  Le_Dados
    write("Informe o nome do Arquivo de Dados sem extensão: ")
    fflush
    readln(NmArqDados)

```

```
write("Com rotação: 1 / Sem rotação: 0. ")
flush
readln(rot)

NmArqDados := NmArqDados+".dat"
NmArqSol := NmArqDados+".dat"+".sol"
initializations from NmArqDados ! Leitura dos demais dados
    nr_Itens; L; W; M; Serra; esp;
end-initializations
item:= 1..nr_Itens
Nr_Itens:= 2*nr_Itens
Item:= 1..Nr_Itens
nr_Padros:=Nr_Itens
Padros:=1..nr_Padros
initializations from NmArqDados ! Leitura dos dados de item
    l; w; b;
end-initializations
if(rot>EPS)then ! Rotação ou não dos itens
    Rot_Item
end-if
! Gravação em arquivo dos itens lidos
fopen(NmArqSol,F_OUTPUT)
    writeln("Arquivo: ",NmArqDados)
    writeln("Relação de Itens - Originais")
    forall(i in Itens)
        writeln("Item ",strfmt(i,2),": ",strfmt(l(i),4), , strfmt(w(i),4), ,strfmt(b(i),4))
        writeln("Relação de Itens - Rotacionados")
        forall(i in Item)
            writeln("Item ",strfmt(i,2),": ",strfmt(l(i),4), , strfmt(w(i),4), , strfmt(b(i),4))
    fclose(F_OUTPUT)

end-procedure
```

! Construção dos padrões de corte homogêneos maximais

```

procedure P_Homo
  forall(i in Itens)do      ! Determinar as faixas homogêneas
    xh(i):=floor(Li/li(i))
  end-do
  forall(i in Itens)do      ! Determinar os padrões homogêneos
    yh(i):=floor(Wi/wi(i))
  end-do
  ! Montar a matriz dos padrões homogêneos maximais
  forall(j in Itens)do
    forall(i in Itens)do
      P(i,j):=0
      if(j=i)then
        P(i,j):=xh(i)*yh(i)
      end-if
    end-do
  end-do
  ! Cálculo das perdas (em %) dos padrões homogêneos
  ! A_Obj: área do objeto
  ! A_U_s(j): área de utilização do padrão homo. com serra nos itens
  forall(j in Item)do
    if (A_Obj - A_U_s(j)>0)then
      perda(j):= (A_Obj - A_U_s(j))/100000
    end-if
  end-do
end-procedure

```

! Rotaciona os itens se solicitado

```

procedure Rot_Item
  writeln("Rotação dos itens!")
  writeln("Número de itens atual é: ", Nr_Items)
  writeln("Número de itens original é: ", nr_Items)
  if(rot>EPS)then      ! Cria os itens com dimensões invertidas
    forall(j in 1..nr_Items)do

```

```

        Par(j):= j+nr_Itens
        Par(j+nr_Itens):=j
        w(Par(j)):=l(j)
        l(Par(j)):=w(j)
        b(Par(j)):=b(j)
    end-do
end-if

forall(i in item)do
    if(w(Par(i))> W)then
        b(Par(i)):=0
    end-if
end-do

end-procedure

```

! Processo da geração dos padrões de corte para o problema auxiliar

```

function colgen
    declarations
        Pi: array(item) of real ! variáveis duais do problema auxiliar
    end-declarations
    setparam("XPRS_presolve",0) ! desliga o presolver
    setparam("XPRS_cutstrategy",0) ! desliga planos de corte
    ! Inicializa o número total de padrões
    npatt:=getsize(Padroes)
    ! Carregar o problema definido anteriormente
    loadprob(Z)
    while(control<EPS)do ! Enqto os itens restantes não couberem no objeto, faça
        nt+=1 ! Incrementa o contador de iterações
        minimize(XPRS_LIN,Z1) ! Resolve a Relaxação Linear do problema auxiliar
        savebasis(prob) ! Salva a Base Ótima
        forall(j in Padroes)do ! Armazena a solução ótima primal
            solpat(j):= getsol(pat(j))
        end-do
        forall(i in item)do ! Armazena a solução ótima dual
            Pi(i):=getdual(restricao(i))

```

```

        Pi(Par(i)):= Pi(i)
    end-do
    padrao(Pi,sj) ! Chamar a Subrotina que gera o padrão de corte
    if(gettime > 3600)then
        break
    end-if
    if (A>1)then !teste de ótimo
        control:=0 ! o padrão de corte é candidato a entrar na base
    else
        control:= 1
    end-if
    forall(i in item) ! Recarregando o conjunto de restrições
        restricao(i):= sum(p in Padroes)(pat(p)* Pa(p,i))>= B(i)
    ! Adicionando a nova variável na função objetivo
    Z1:=sum(p in Padroes)pat(p)
! Incluir a nova variável no conjunto de restrições
    forall(i in item)
        restricao(i)+=Pa(npatt,i)*pat(npatt)
    loadprob(Z1) ! Recarrega o problema
    loadbasis(prob) ! Recarrega a base
    minimize(XPRS_LIN,Z1) ! Resolve a relaxação linear
    savebasis(prob) ! Salva a base ótima
    ! Cálculo da área utilizada pelo padrão
    A_U(npatt):=sum(i in item)A_It(i)*Pa(npatt,i)
    !Cálculo das perdas (em porcentagem) de cada padrão gerado
    if (A_Obj - A_U_s(npatt)>0)then
        perda(npatt):= (A_Obj - A_U_s(npatt))/100000
    end-if
end-do ! Fim do processo (While)
end-function

```

! Processo de geração dos padrões de corte - Modelo 2-grupos

!Para a geração do padrão 1grupo, ou 3i-grupos ou ainda 3t-grupos, basta substituir aqui
!os modelos dados por Yanasse e Morabito em [81] apresentados no Capítulo 4.

```
procedure padrao (vi: array (range) of real, Sj: array (range) of integer)
```

```
  declarations
```

```
    aux: real
```

```
    teste: integer
```

```
    a: array(range, range, range,range) of mpvar
```

```
    u: array(range,range) of mpvar
```

```
    f : array(range,range,range,range) of mpvar
```

```
    beta : array(range,range,range) of mpvar
```

```
    Lobj: array(range) of mpvar
```

```
    z: lincv
```

```
  end-declarations
```

```
  forall(i in Item, j in Item, k in Item)do
```

```
    if(l(i)<=l(j) and w(i)<=w(k))then
```

```
      v(i,j,k):=vi(i)
```

```
    else
```

```
      v(i,j,k):=0
```

```
    end-if
```

```
  end-do
```

```
  forall(j in Item)do  !calculo do sj
```

```
    teste:=0;
```

```
    while(teste=0)do
```

```
      Sj(j)+=1
```

```
      aux:= floor (L/l(j)) - 2 ^ (Sj(j))
```

```
      if (aux < 0)then
```

```
        teste:=1
```

```
      end-if
```

```
    end-do
```

```
  end-do
```

```
  !Função Objetivo
```

```
  z:= sum(h in H, i in Item, j in Item, k in Item)(v(i,j,k)*a(i,j,k,h)) ! - Lobj(1)/L
```

```
  !Conjunto de restrições
```

```
  restricao1:= sum(j in Item)(l(j)*(sum(s in 1..Sj(j))((2 s) / 2) * beta(j,s,1))) <= Lobj(1)
```

```
  restricao2:= sum(j in Item)(l(j)*(sum(s in 1..Sj(j))((2 s) / 2)*beta(j,s,2))) <= L - Lobj(1)
```

```

forall(h in H)
    restricao3(h):= sum(k in Item)(w(k)* u(k,h)) <= W
forall(j in Item,k in Item,h in H)do
    restricao4(j,k,h):= sum(i in Item)(a(i,j,k,h)) <= sum(s in 1..Sj(j))(2s)/2 * f(j,k,s,h)
end-do
forall(j in Item,k in Item,h in H)do
    forall(s in 1..Sj(j))do
        restricao5(j,k,s,h):= f(j,k,s,h) <= u(k,h)
    end-do
end-do
forall(j in Item,k in Item,h in H)do
    forall(s in 1..Sj(j))do
        restricao6(j,k,s,h):= f(j,k,s,h) >= u(k,h) - M*(1- beta(j,s,h))
    end-do
end-do
forall(j in Item,k in Item,h in H)do
    forall(s in 1..Sj(j))do
        restricao7(j,k,s,h):= f(j,k,s,h) <= M * beta(j,s,h)
    end-do
end-do
forall(i in Item)
    restricao8(i):= sum(h in H,j in Item, k in Item)(a(i,j,k,h)) <= b(i)
restricao9:= Lobj(1) <= L/2

setparam("XPRS_MAXTIME",MAXTIME);
maximize(z)
!Escrevendo as soluções do subproblema
A:= getobjval
writeln("Func Obj Subproblema: ",A )
forall(i in Item, j in Item, k in Item, h in H)do
    if(getsol(a(i,j,k,h))>EPS)then
        writeln("a(",i," ",j," ",k," ",h,"): ",getsol(a(i,j,k,h)))
    end-if
end-do

```

```
npatt+=1
forall(I in item)
    Pa(npatt,I):=sum(k in Item, j in Item, h in H)(integer(getsol(a(I,j,k,h))+
        getsol(a(I+nr_Itens,
j,k,h))))
end-procedure


---


end-model    ! Fim do modelo
```

Lista de Figuras

1.1	Problema unidimensional.	5
1.2	Problema bidimensional.	5
1.3	Problema tridimensional.	5
1.4	Problema $N\frac{1}{2}$ dimensional.	6
1.5	Problema de corte de estoque unidimensional: a) objetos em estoque, b) itens demandados.	11
1.6	Problema de corte de estoque bidimensional: a) objetos em estoque, b) itens demandados.	11
1.7	Padrão de corte unidimensional.	12
1.8	Padrão de corte bidimensional.	12
1.9	Padrão de corte homogêneo maximal.	14
1.10	Padrão de corte: a) guilhotinado, b) não guilhotinado.	14
1.11	Padrão de corte guilhotinado: a) ortogonal, b) não ortogonal.	15
1.12	Padrão de corte guilhotinado três estágios.	15
1.13	Padrão de corte: a) com orientação fixa, b) com rotação permitida.	18
1.14	Padrão de corte: a) 1-grupo, b) 2-grupos.	19
1.15	Padrão de corte 1-grupo: a) caso exato, b) não-exato.	19
1.16	Padrões de corte simétricos - Caso bidimensional.	20
1.17	Efeito de simetria.	20
1.18	Efeito de ordenação.	21
1.19	Corte normal.	22
2.1	Esboço do método simplex com geração de colunas para um problema de minimização [4].	36
3.1	Item com apara - padrão de corte não-exato.	41
3.2	Transformação de decimal para binário.	42
3.3	Padrão 2-grupos, corte inicial na vertical.	44

3.4	Padrão 3i-grupos, cortes iniciais na vertical.	46
3.5	Padrão do tipo “T” com itens: a) circulares, b) retangulares.	48
3.6	Padrão 3t-grupos.	49
3.7	Padrão do tipo “T” homogêneos: a) TX , b) TY	51
3.8	a) Faixas X , b) Segmento X	52
3.9	a) Faixas Y , b) Segmento Y	53
3.10	Padrão do tipo “T” homogêneo.	53
3.11	Limite superior para o padrão contendo o Segmento $X - R$	55
3.12	Limite superior para o padrão contendo o Segmento $Y - R$	56
3.13	Possíveis faixas horizontais.	60
3.14	Possíveis blocos X	61
3.15	Possíveis blocos Y	62
3.16	Padrão de corte ótimo.	63
4.1	Linha de produção da Fábrica de Móveis Luapa [13].	69
4.2	Seccionadora da Fábrica de Móveis Luapa [58].	72
4.3	Seqüencia de cortes de um padrão de corte 3-estágios.	74
4.4	Padrões de Corte: a) itens não agrupados, b) itens agrupados.	75
4.5	Perda do padrão de corte.	77
4.6	Desgaste não contabilizado pela fórmula (4.3.1).	77
4.7	$\frac{1}{2}$ padrão de corte.	79
5.1	Padrão de corte do exemplar Cmd_Crd-03, caso: a)exato, b) não-exato.	92
5.2	Padrões de cortes gerados com os modelos n-grupos.	96
B.1	Padrão de corte gerado com o modelo 1-grupo.	106

Lista de Tabelas

1.1	Problemas do tipo básico de maximização de saída.	10
1.2	Problemas do tipo básico de minimização de entrada.	10
5.1	Modelos n-grupos verticais na resolução do problema de corte para o caso exato e não-exato, exemplares da literatura.	83
5.2	Análise do procedimento <i>presolver</i> no exemplar 8.	84
5.3	Componentes do armário de 5 portas.	86
5.4	Componentes da cômoda.	87
5.5	Componentes do criado.	87
5.6	Conjuntos de Exemplares da Fábrica	88
5.7	Modelos n-grupos verticais na resolução do problema de corte para o caso exato e não-exato, exemplar da indústria, lote simples.	90
5.8	Modelos n-grupos verticais na resolução do problema de corte para o caso exato e não-exato, exemplar da indústria, lote duplo.	91
5.9	Modelos n-grupos verticais na resolução do problema de corte de estoque, lote simples.	94
5.10	Resumo do aproveitamento de material por lote simples de produto.	95
5.11	Modelos n-grupos verticais na resolução do problema de corte de estoque, lote duplo.	97
5.12	Resumo do aproveitamento de material por lote duplo de produto.	98
A.1	Componentes do armário de 5 portas	103
A.2	Componentes da cômoda	104
A.3	Componentes do criado	104

Referências Bibliográficas

- [1] ABIMÓVEL. *Panorama do Setor Moveleiro no Brasil: Informações Gerais*. SEBRAE, 2006.
- [2] ALVELOS, F. P. P. D. C. E. *Branch and Price and Multicommodity Flows*. PhD thesis, Universidade do Minho - Escola de Engenharia, 2005.
- [3] ALVEZ, C., AND CARVALHO, J. M. V. Accelerating column generation for the single and variable sized bin-packing problem. In *Anais do V Optimization (2004)*, V Optimization.
- [4] ANDRADE, C. E. Um algoritmo exato para o problema de empacotamento bidimensional em faixas. Master's thesis, UNICAMP - Universidade Estadual de Campinas, 2006.
- [5] ARENALES, M. N. E MORABITO, R., AND YANASSE, H. H. Problemas de corte e empacotamento. In *Livro-texto de Mini-curso do XXXVI SBPO (2004)*, XXXVI SBPO - Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional.
- [6] AVRIEL, M., AND GOLANY, B. *Mathematical Programming for Industrial Engineers*. Marcel Dekker, Inc., New York, 1996.
- [7] BARNHART, C., JOHNSON, E. L., NEMHAUSER, G. L., SAVELSBERGH, M. W. P., AND VANCE, P. H. Branch and price: column generation for solving huge integer programs. *European Journal Operations Research* 46, 3 (1998), 316–329.
- [8] BARNHART, C., JOHNSON, E. L., NEMHAUSER, G. L., AND VANCE, P. H. Airline crew scheduling: A new formulation and decomposition algorithm. *Operations Research* 45 (1997), 188–200.
- [9] BAZARAA, M. S., JARVIS, J. J., AND SHERALI, H. F. *Linear Programming and Network Flows*. JohnWiley and Sons, New York, 1990.
- [10] BEASLEY, J. E. Algorithms for unconstrained two-dimensional guillotine cutting. *Journal of the Operational Research Society* 36 (1985), 297–306.

- [11] BELOV, G., AND SCHEITHAUER, G. A branch and cut and price algorithm for one dimensional stock cutting and two-dimensional two-stage cutting. *Operations Research* 171 (2006), 85–106.
- [12] CARNIERI, C., GUILLERMO, A., AND GAVINHO, L. solutions procedures for cutting lumber into furniture parts. *European Journal Operations Research* 73 (1994), 495–501.
- [13] CAVALI, R. Problemas de corte e empacotamento na indústria de móveis: Um estudo de caso. Master's thesis, Pós-Graduação em Matemática Aplicada - UNESP, São José do Rio Preto/SP, 2004.
- [14] CHRISTOFIDES, N., AND HADJICINSTABTINOU, E. An exact algorithm for orthogonal 2-D cutting problems using guillotine cuts. *European Journal Operations Research* 83 (1995), 21–38.
- [15] CHRISTOFIDES, N., AND WHITLOCK, C. An algorithm for two-dimensional cutting problem. *Operations Research* 25, 1 (1977), 30–44.
- [16] CHVÁTAL, V. *Linear Programming*. W. H. Freeman and Company, New York, 1983.
- [17] CINTRA, G. F. *Algoritmos para Problemas de Corte de Guilhotina Bidimensional*. PhD thesis, Pós-Graduação em Ciência da Computação - USP, São Paulo/SP, 2004.
- [18] COOK, S. A. The complexity of theorem-proving procedures. In *STOC '71: Proceedings of the third annual ACM symposium on Theory of computing* (New York, NY, USA, 1971), ACM Press, pp. 151–158.
- [19] CUI, Y. Generating optimal T-shape cutting patterns for circular blanks. *Computers and Operations Research* 32 (2005), 143–152.
- [20] CUI, Y. An exact algorithm for generating homogenous t-shape cutting patterns. *Computers and OR* 34, 4 (2007), 1107–1120.
- [21] CUI, Y., HE, D., AND SONG, X. Generating optimal two-section cutting patterns for rectangular blanks. *Comput. Oper. Res.* 33, 6 (2006), 1505–1520.
- [22] DANTZIG, G. *Linear programming and extensions*. Princeton University Press (1963).
- [23] DASH-OPTIMIZATION. Modeling with xpress-mp. Disponível em <www.dashoptimization.com>. Último acesso em: 03/11/2007.

- [24] DESROSIERS, J., DUMAS, Y., SOLOMON, M. M., AND SOUMIS, F. Time constrained routing and scheduling. *Handbooks in Operations Research and Management Sciences: Network Routing 8* (1994), 35–139.
- [25] DU MERLE, O., VILLENEUVE, D., AND DESROSIERS, J. AND HANSEN, P. Stabilized column generation. *Discrete Mathematics 194* (1999), 229–237.
- [26] DYCKHOFF, H. A typology of cutting and packing problems. *European Journal of Operational Research* (1990).
- [27] DYCKHOFF, H., AND FINKE, U. *Cutting and Packing in Production and Distribution: Typology and Bibliography*. Springer-Verlag Co, Heidelberg, 1992.
- [28] FIGUEIREDO, A. Analise de produtividade dos padrões de corte na indústria de móveis. Master's thesis, Pós-Graduação em Matemática Aplicada - UNESP, São José do Rio Preto/SP, 2006.
- [29] FIGUEIREDO, A., AND RANGEL, S. Geração de padrões de corte produtivos para a indústria de móveis. In *Anais do XXXVIII SBPO* (2006), XXXVIII SBPO - Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, pp. 1626–1636.
- [30] FIGUEIREDO, A., AND RANGEL, S. O problema de corte de estoque em indústrias de móveis de pequeno e médio porte. *Submetido para publicação* (2007).
- [31] FORONDA, S., AND CARINO, H. A heuristic approach to the lumber allocation and manufacturing in hardwood dimension and furniture manufacturing. *European Journal Operations Research 54* (1991), 151–162.
- [32] GILMORE, P. C., AND GOMORY, R. E. A linear programming approach to the cutting-stock problem. *Operations Research*, 9 (1961), 849–859.
- [33] GILMORE, P. C., AND GOMORY, R. E. A linear programming approach to the cutting-stock problem - part ii. *Operations Research*, 11 (1963), 863–888.
- [34] GILMORE, P. C., AND GOMORY, R. E. Multistage cutting stock problems of two and more dimensional. *Operations Research*, 14 (1965), 1045–1074.
- [35] GOLDBARG, M.C. E LIMA, H. *Otimização Combinatória e Programação Linear*. Editora Campus, 2000.

- [36] GRAMANI, M. C. N., AND FRANÇA, P. M. The combined cutting stock and lot-sizing problem in industrial processes. *European Journal of Operational Research* 174 (2006), 509–521.
- [37] GRANDI, S. G., ARAUJO, S. A., AND RANGEL, M. Modelagem do problema integrado de dimensionamento de lotes e corte de estoque numa indústria moveleira. SBPO - Simposio Brasileiro de Pesquisa Operacional, 2007.
- [38] HAESSLER, R. W. A procedure for solving the 1.5 - dimensional coil slitting problem. *AIIE Transactions* 10 (1978), 70–75.
- [39] HARJUNKOSKI, I., PORN, R., WESTERLUND, T., AND SKIFVARS, H. Different strategies for solving bilinear integer non-linear programming problems with convex transformations. *Computers Chem. Eng.* 21 (1997), 487–492.
- [40] HELMBERG, C. Cutting aluminum coils with highlength variables. *Operational Research* 57 (1995), 175 – 189.
- [41] HIFI, M. The dh/kd algorithm: A hibrid approach for unconstrained two-dimensional cutting problem. *European Journal Operations Research* 97 (1997), 41–52.
- [42] HIFI, M., AND ROCAIROL, C. Approximate and exact algorithms for constrained (un)weighted two-dimensional two-staged cutting stock problem. *Journal Combin. Optim.* 5 (2001), 465–494.
- [43] HINXMAN, A. I. The trim loss and assortment problems: A survey. *European Journal of Operational Research* 5 (1980), 8–18.
- [44] HOFFMAN, K., AND PADBERG, M. Lp-based combinatorial problem solving. *Annals of Operations Research* 4 (1985), 145–194.
- [45] JÜNGER, M., AND THIENEL, S. The abacus system for branch-and-cut-and-price algorithms in integer programming and combinatorial optimization. *Software: Practice and Experience* (2000), 1325–1352.
- [46] KANTOROVICH, L. V. Mathematical methods of organizing and planning production (traduzido de um trabalho em russo datado de 1939). *Management Science* 6 (1960), 366–422.
- [47] KARP, R. Reducibility among combinatorial problems. In *Complexity of Computer Computations*, R. Miller and J. Thatcher, Eds. Plenum Press, New York, 1972.

- [48] KATSURAYAMA, D. *Algoritmos Enumerativos para Geração de Padrões Tabuleiros*. PhD thesis, INPE - Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, 2006.
- [49] KATSURAYAMA, D. M., AND YANASSE, H. H. Um algoritmo para geração de padrões tabuleiros exatos a partir de uma combinação dada de itens. In *Anais do XXXVI SBPO* (2004), XXXVI SBPO - Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional.
- [50] LODI, A. E MONACI, M. Integer linear programming models for 2-staged two-dimensional knapsack problems. *Mathematical Programming* 94 (2003), 257–278.
- [51] MARTELLO, S., AND TOTH, P. *Knapsack Problems: Algorithms and Computer Implementations*. John Wiley & Sons, 1990.
- [52] MENEZES, M. A. F. Programação linear, 2006. Em elaboração. LabPL UCG - Universidade Católica de Goiás. Último acesso: 01/08/2007.
- [53] MORABITO, R., AND ARENALES, M. Optimizing the cutting of stock plates in a furniture company. *International Journal of Productions Research* 38, 12 (2000), 2725–2742.
- [54] MORABITO, R., AND BELLUZZO, L. Optimising the cutting of wood fibre plates in the hardboard industry. *European Journal Operations Research* 183 (2007), 1405–1407.
- [55] MORABITO, R., AND GARCIA, V. The cutting stock problem in a hardboard industry: A case study. *Computers Operations Research* 25 (1998), 469–485.
- [56] MORABITO, R., AND N., A. M. Stage and constrained two-dimensional guillotine cutting problems: An and/or-graph approach. *International Journal of Production Research* 94 (1996), 548–560.
- [57] MORABITO, R., AND SILVEIRA, J. R. Um método heurístico baseado em programação dinâmica para o problema de corte bidimensional guilhotinado restrito. *Gestão e Produção* 9, 1 (2002), 78–92.
- [58] MOSQUERA, G. P. Contribuições para o problema de corte de estoque bidimensional na indústria moveleira. Master's thesis, Pós-Graduação em Matemática Aplicada - UNESP, São José do Rio Preto/SP, 2007.
- [59] OR-LIBRARY. Greenpeace. Disponível em <www.greenpeace.org/brasil/amazonia/noticias/brasil-campe-o-mundial-em-des>. Último acesso em: 27/11/2007.
- [60] PILEGGI, G. C. F. *Abordagens para Otimização Integrada dos Problemas de Geração e Seqüenciamento de Padrões de Corte*. PhD thesis, ICMC-USP, 2002.

- [61] POLDI, K. C. Algumas extensões do problema de corte de estoque. Master's thesis, Universidade Federal Paulista - USP, São Carlos/SP, 2003.
- [62] RANGEL, S. O problema do corte bidimensional. Master's thesis, Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação - UNICAMP, Campinas/SP, 1990.
- [63] RENDER, B., AND STAIR, R. M. J. *Quantitative Analysis for Management*, 6^a ed. Prentice-Hall, New Jersey, 1997.
- [64] RICHTER, K. Solving sequential interval cutting problems via dynamic programming. *European Journal of Operational Research* 57 (1992), 332 – 338.
- [65] RIEHME, J., SCHEITHAUER, G., AND TERNO, J. The solution of two - stage guillotine cutting stock problems having extremely varying order demands. *European Journal of Operational Research* 91 (1996), 543–552.
- [66] SANTI, M. Contribuição aos estudos sobre as origens da produção seriada do mobiliário no brasil: a experiência móveis cimo s/a. Master's thesis, Faculdade de Arquitetura e Urbanismo, Universidade de São Paulo, São Paulo/SP, 2006.
- [67] SAVELSBERGH, M. W. P. A branch and price algorithm for the generalized assignment problem. *Operations Research* 6 (1997), 831–841.
- [68] SILVA, E. M., AND SANTOS, F. C. A. Análise do alinhamento da estratégia de produção com a estratégia competitiva na indústria moveleira. *Revista Produção*, 2 (2005).
- [69] SOUSA, R. S. Estudos em otimização linear. Master's thesis, USP - Universidade Estadual de São Paulo, 2000.
- [70] STIPP, M. Cluster industrial: o pólo moveleiro de VotuporangaSP(1962- 2001). Master's thesis, Universidade Estadual Paulista, Araraquara, 2002.
- [71] VANCE, P. H. Branch and price algorithms for the one-dimensional cutting stock problem. *Computational Optimization and Applications*, (1998).
- [72] VANCE, P. H., BARNHART, C., JOHNSON, E. L., AND NEMHAUSER, G. L. Solving binary cutting stock problems by column generation and branch and bound. *Comput. Optim. Appl.* 3, 2 (1994), 111–130.
- [73] VANDERBECK, F. Computational study of a column generation algorithm for bin packing and cutting stock problems. *Mathematical Programming Series* (1999), 565–594.

- [74] VIANNA, A. G., ARENALES, M. N., AND GRAMANI, M. C. Two-stage and constrained two-dimensional guillotine cutting problems. Tech. rep., USP - São Carlos, 2002.
- [75] WOLSEY, L. A. *Integer Programming*. Wiley, New York, 1998.
- [76] WOLSEY, L. A., AND NEMHAUSER, G. L. *Integer and Combinatorial Optimization*. Wiley Interscience, New York, 1999.
- [77] WÄSCHER, G., HAUBNER, H., AND SCHUMANN, H. An improved typology of cutting and packing problems. *European Journal of Operational Research* (2007).
- [78] YANASSE, H., ZINOBER, A., AND HARRIS, R. Two-dimensional cutting stock with multiple stock sizes. *Journal Operations Research Society* 42 (1991), 673–683.
- [79] YANASSE, H. H., HARRIS, R. G., AND ZINOBER, A. S. I. Uma heurística para redução do número de ciclos da serra no corte de chapas. In *Anais do XIII ENEGEP* (1993), vol. 2, XIII ENEGEP/ I Congresso Latino Americano de Engenharia Industrial, pp. 879–885.
- [80] YANASSE, H. H., AND MORABITO, R. Linear models for one-group two-dimensional guillotine cutting problems. *International Journal of Production Research* (2006), 1–18.
- [81] YANASSE, H. H., AND MORABITO, R. A note on linear models for two-group and three-group two-dimensional guillotine cutting problems. *International Journal of Production Research* (2006).

Índice Remissivo

Autores

Dyckhoff, 4
Gilmore e Gomory, 3, 10, 16, 19, 26, 31, 32
Harjunkski, 41
Hinxman, 6, 24
Kantorovich, 25
Morabito, 39, 44, 46, 48
Wäscher, 4, 9
Yanasse, 39, 44, 46, 48, 73

Indústria Moveleira, 25, 64

Pólo de Votuporanga, 67
Pólos Moveleiros, 65

Método

Branch and Bound, 36
Branch and Cut and Price, 37
Branch and Cut, 37
Branch and Price, 37
Decomposição de *Dantzig-Wolfe*, 26
Simplex com Geração de Colunas, 31

Modelo

1-grupo, 39
2-grupo, 44
3T-grupo, 49
3i-grupo, 46

Padrão de Corte

Exato, 19, 39
Guilhotinado, 14
Homogêneo, 13, 48

Homogêneo Maximal, 14

n-estágios, 15

n-grupos, 19

Não-Exato, 19, 39

Simétrico, 20

Tipo “ T !”, 48

Tipo “T” Homogêneo, 48, 51

Perda

da Matéria-Prima, 12, 76, 78

Desgaste da Serra, 76, 78

Problema

de Corte Unidimensional, 4, 11

Corte e Empacotamento, 4

da Mochila, 54–57

de Corte Bidimensional, 5, 11

de Corte de Estoque, 7, 9–11, 24, 31

de Corte Unidimensional, 25

Mestre, 28

N-Dimensional, 6

Tridimensional, 5

Restrição

Acoplamento, 27

Física, 48, 50