

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente

Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional

# Zeros de Polinômios Ortogonais Gerados por uma Medida Perturbada

Tatiane Tambarussi

Orientador: Prof. Dr. Fernando Rodrigo Rafaeli

Presidente Prudente, Fevereiro de 2013

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Faculdade de Ciências e Tecnologia de Presidente Prudente

Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional

# Zeros de Polinômios Ortogonais Gerados por uma Medida Perturbada

Tatiane Tambarussi

Orientador: Prof. Dr. Fernando Rodrigo Rafaeli

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional da Faculdade de Ciências e Tecnologia da UNESP para obtenção do título de Mestre em Matemática Aplicada e Computacional.

Presidente Prudente, Fevereiro de 2013

## FICHA CATALOGRÁFICA

T158z Tambarussi, Tatiane.  
Zeros de Polinômios Ortogonais Gerados por uma Medida Perturbada /  
Tatiane Tambarussi. - Presidente Prudente : [s.n], 2013  
viii, 65 f.

Orientador: Fernando Rodrigo Rafaeli  
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de  
Biotecnologia, Letras e Ciências Exatas.

Inclui bibliografia

1. Polinômios Ortogonais. 2.. 3. Matemática. 4. Polinômios I. Rafaeli,  
Fernando Rodrigo. II. Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Ciências  
e Tecnologia. III. Título.

**BANCA EXAMINADORA**

*Fernando R. Rafaeli*

\_\_\_\_\_  
**PROF. DR. FERNANDO RODRIGO RAFAELI**  
ORIENTADOR

*Marisa S. Costa*

\_\_\_\_\_  
**PROFA. DRA. MARISA DE SOUZA COSTA**  
UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

*Regina Litz Lamblém*

\_\_\_\_\_  
**PROFA. DRA. REGINA LITZ LAMBLÉM**  
UNIVERSIDADE ESTADUAL DO MATO GROSSO DO SUL

*Tatiane Tambarussi*

\_\_\_\_\_  
**TATIANE TAMBARUSSI**

PRESIDENTE PRUDENTE (SP), 21 DE FEVEREIRO DE 2013

RESULTADO: APROVADA

*Dedico este trabalho a Deus  
e à minha família.*

---

# Agradecimentos

Agradeço à Deus por todos os dias voltar suas bênçãos sobre mim, dando-me força e persistência para continuar. Obrigada pela graça de viver em sua graça.

Agradeço aos meus pais Redivilson e Rosangela, aos meus irmãos Denis e Elder, as minhas cunhadas Cidinha e Izabella e aos meus sobrinhos Carlos Henrique, Mariana e Maria Rita que sempre compreenderam o meu desejo de estudar, alegrando os meus dias de descanso, apenas, pelo fato de estarem ao meu lado em todos os momentos. Obrigada, vocês são muito importantes.

Agradeço ao meu namorado Diego, que desde o primeiro dia que nos conhecemos me ajudou e incentivou com sua compreensão, amizade, amor e acima de tudo com seu exemplo de vida. Diego, eu te amo.

A Cristiane Bender, que foi minha família em Campo Mourão, Presidente Prudente e São José do Rio Preto. Essa família foi crescendo, porque Deus é nosso amigo. Obrigada, por ter feito parte de toda essa história comigo. Sua presença é importante mas, na distância você não deixou a desejar. Miguinha você é minha irmãzinha.

Em se tratando de irmandade não poderia deixar de agradecer as grandes irmãs Chaenne, Larissa, Letícia, Patrícia e Vanderléa, que desempenharam lindamente o papel de companheiras prontas para o que der e vier.

Agradeço a todos os amigos do PosMAC e do DCCE, em especial: Álvaro, Camila, Clóvis, Fernanda, Gislaine, Heron, José, Juliano, Lilian, Lívia, Mariane, Marília, Marisa, Marluce, Michelli, Mirela, Pedro, Regina, Reginaldo, Tamires, Vanessa e Yen, que fizeram com que o caminho fosse feliz, mesmo quando não parecia ser.

Agradeço ao meu professor orientador e amigo Fernando Rodrigo Rafaeli, que não mediu esforços em compartilhar toda sua experiência e conhecimento na área. Obrigada pela paciência com minhas dificuldades.

Agradeço ao grupo de pesquisa de polinômios ortogonais de São José do Rio Preto, aos professores e alunos que nos acolheram com carinho.

Agradeço ao programa de Pós Graduação, a todos os professores que contribuíram direta ou indiretamente para o nosso amadurecimento matemático, a todos os funcionários da Pós em especial a Erynat e a Ivonete.

Por fim, agradeço a CAPES pelo auxílio financeiro disponibilizado para o desenvolvimento da pesquisa.

*“Quem a Deus tem nada lhe falta.*

*Só Deus basta.”*

*Santa Teresa de Ávila*

---

# Resumo

Este trabalho apresenta um estudo sobre famílias de polinômios ortogonais geradas por medidas perturbadas por polinômios de graus um e dois e, também, pela função delta de Dirac. Um destaque especial foi dado ao estudo do comportamento dos zeros desses polinômios. Para finalizar apresentamos exemplos envolvendo as medidas clássicas relacionadas com os polinômios de Jacobi e Laguerre.

*Palavras-chave:* Polinômios ortogonais, Zeros, Medidas.



# Abstract

---

This work presents a study of families of orthogonal polynomials generated by measures perturbed by polynomials of degree one and two, and also by the Dirac delta functional. A special emphasis was given to the study of the behavior of the zeros of these polynomials. We also furnish examples involving the classic Jacobi and Laguerre measures.

*Keywords:* Orthogonal polynomials, Zeros, Measures.

---

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>9</b>
<b>2</b>	<b>Polinômios Ortogonais</b>	<b>11</b>
2.1	Propriedades básicas . . . . .	11
2.2	Existência de uma sequência de polinômios ortogonais . . . . .	17
2.3	Polinômios núcleo . . . . .	20
2.4	Zeros de polinômios ortogonais . . . . .	21
<b>3</b>	<b>Polinômios Ortogonais Clássicos</b>	<b>24</b>
3.1	Polinômios de Jacobi . . . . .	25
3.2	Polinômios de Laguerre . . . . .	27
3.3	Polinômios de Hermite . . . . .	28
<b>4</b>	<b>Alguns Resultados Técnicos</b>	<b>30</b>
<b>5</b>	<b>Polinômios Ortogonais Gerados por uma Medida Perturbada</b>	<b>35</b>
5.1	Perturbação de uma medida por um polinômio de grau 1 . . . . .	35
5.2	Perturbação de uma medida por um polinômio de grau 2 . . . . .	40
5.3	Perturbação de Uvarov . . . . .	46
<b>6</b>	<b>Aplicações</b>	<b>51</b>
6.1	Polinômios tipo Jacobi . . . . .	51
6.1.1	Propriedades dos polinômios $p_n^{(\alpha,\beta)}(\lambda, 1; x)$ . . . . .	51
6.1.2	Propriedades dos polinômios $p_n^{(\alpha,\beta)}(\lambda, -1; x)$ . . . . .	58
6.2	Polinômios tipo Laguerre . . . . .	65
<b>7</b>	<b>Conclusão</b>	<b>72</b>
	<b>Referências</b>	<b>73</b>

# Introdução

Apresentamos neste trabalho o estudo desenvolvido na dissertação intitulada por “Zeros de polinômios ortogonais gerados por uma medida perturbada”. Os polinômios ortogonais estão associados à uma medida  $d\phi(x)$ , onde,  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função não decrescente, com infinitos pontos de aumento em  $(a, b)$ ,  $-\infty \leq a < b \leq \infty$  tal que os momentos

$$\mu_n = \int_a^b x^n d\phi(x), \quad n = 0, 1, \dots$$

existem e são finitos. Então  $d\phi(x)$  é chamada distribuição ou medida positiva em  $(a, b)$ . Quando  $\phi$  é absolutamente contínua dizemos que  $d\phi(x) = w(x)d(x)$ ,  $w(x)$  é chamada função peso. A partir desta medida, estudaremos as seguintes variações obtidas por perturbações através de polinômios de grau um, dois e também a conhecida perturbação de Uvarov, que serão denotadas respectivamente por

$$d\phi_1 = (x - c)d\phi(x), \quad d\phi_2 = (x - c)^2 d\phi(x) \quad \text{e} \quad d\phi_\lambda = d\phi(x) + \lambda\delta(x - c), \quad c \notin (a, b).$$

Os polinômios ortogonais vêm sendo amplamente estudados devido a inúmeras aplicações nos campos da Matemática, Física e Engenharias. A primeira contribuição que revelou a importância de estudar a teoria de polinômios ortogonais foi um resultado de Gauss em 1812, que afirma que a única fórmula de quadratura da forma

$$\int_a^b f(x)w(x)d(x) \approx \sum_{k=1}^n A_k f(x_k),$$

que é exata para polinômios de grau  $2n - 1$ , tem como nós  $x_{n,k}$ ,  $k = 1, \dots, n$ , zeros do polinômio ortogonal em  $(a, b)$ , com relação a função peso  $w(x)$ . Por isso há um grande interesse na localização e comportamento dos zeros desses polinômios.

---

Neste trabalho definiremos inicialmente conceitos e propriedades básicas de Polinômios Ortogonais e um tipo especial de polinômio chamado Polinômio Núcleo. Apresentaremos também algumas propriedades fundamentais sobre os zeros destes polinômios. No Capítulo 3 estudaremos os polinômios ortogonais clássicos, Jacobi, Laguerre e Hermite, os quais possuem caracterizações específicas e interessantes.

No quarto capítulo apresentaremos alguns resultados técnicos que utilizaremos no desenvolvimento da dissertação. Inicialmente demonstraremos um resultado de Obrechhoff [11] sobre o entrelaçamento de zeros de uma combinação linear de dois polinômios. Feito isso, forneceremos duas extensões, a primeira dada por Bracciali, Dimitrov e Ranga [2], tratando sobre a monotonicidade desses zeros, e a segunda dada por Dimitrov, Mello e Rafaeli [5], que mostra o comportamento assintótico dos zeros dessa combinação.

No Capítulo 5 estudaremos os polinômios ortogonais que surgem quando perturbamos uma medida através da multiplicação por uma função polinomial ou adicionando o funcional delta de Dirac, conhecidos como Polinômios de Christoffel e Perturbação de Uvarov, respectivamente. Neste mesmo capítulo analisaremos o comportamento dos zeros dessas novas famílias de polinômios ortogonais com relação a medida perturbada e obteremos resultados sobre a monotonicidade e assintoticidade desses zeros.

Por fim aplicaremos a perturbação de Uvarov à medida clássica de Jacobi e Laguerre, com o intuito de exemplificar os resultados obtidos no capítulo anterior.

# Polinômios Ortogonais

Neste capítulo apresentaremos as definições e propriedades básicas dos polinômios ortogonais, importantes para o desenvolvimento deste trabalho, baseadas principalmente em Chihara [3] e Szegő [14].

## 2.1 Propriedades básicas

As funções definidas por expressões polinomiais são chamadas funções polinomiais. Então, toda função determinada por

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$$

e definida para todo  $x$  real é chamada função polinomial de grau  $n$ , em que  $n \in \mathbb{N}$  e  $a_n \neq 0$ . Polinômio é o nome dado a expressão que define a função polinomial.

Denotaremos por  $\Pi_n$  o espaço vetorial dos polinômios de grau no máximo  $n$ ,

$$\Pi_n := \{p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n; a_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, 2, \dots, n\},$$

e por  $\Pi$  o espaço vetorial de todos os polinômios, ou seja,

$$\Pi := \bigcup_{k=0}^{\infty} \Pi_k.$$

Consideremos o produto interno dado por

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)d\phi(x), \quad (2.1)$$

onde  $f, g \in C[a, b]$ , sendo  $C[a, b]$  o conjunto das funções contínuas em  $[a, b]$ , e  $\phi(x)$  é uma função real, não-decrescente, não-constante, limitada e com infinitos pontos de aumento em  $(a, b)$ , finito ou não.

**Definição 2.1** *O suporte de uma função não-decrescente  $\phi(x)$  é o conjunto dos seus pontos de aumento, ou seja,*

$$\text{supp}(\phi) = \{x; \phi(x + \gamma) - \phi(x - \gamma) > 0; \forall \gamma > 0\}.$$

**Definição 2.2** *Sejam  $(a, b)$  um intervalo real,  $-\infty \leq a < b \leq \infty$  e  $\phi(x)$  uma função real limitada, não decrescente e com infinitos pontos de aumento em  $(a, b)$ . Se os momentos definidos por*

$$\mu_r = \int_a^b x^r d\phi(x) \quad (2.2)$$

*existem para  $r = 0, 1, 2, \dots$ , então  $d\phi(x)$  é chamada distribuição (medida positiva) em  $(a, b)$ .*

Quando  $d\phi(x) = w(x)dx$ , onde  $w(x)$  é uma função contínua, não negativa, mas não identicamente nula em  $(a, b)$ , chamamos  $w(x)$  de função peso.

Dessa forma temos a seguinte definição para uma sequência de polinômios ortogonais:

**Definição 2.3 (Sequência de Polinômios Ortogonais)** *Dizemos que a sequência de polinômios denotada por  $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  é uma sequência de polinômios ortogonais com relação à medida  $d\phi(x)$  positiva no intervalo  $(a, b)$  se*

$$\begin{aligned} (i) \quad & P_n(x) \text{ é de grau exatamente } n, \text{ com } n \geq 0. \\ (ii) \quad & \langle P_n, P_m \rangle = \int_a^b P_n(x) P_m(x) d\phi(x) = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ \rho_n > 0, & n = m. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.3)$$

No caso em que  $\rho_n = 1$ , a sequência é chamada de sequência de polinômios ortonormais e é denotada por  $\{Q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ , ou seja,

$$\langle Q_n, Q_m \rangle = \int_a^b Q_n(x) Q_m(x) d\phi(x) = \delta_{mn} \rho_n,$$

onde o símbolo  $\delta_{mn}$  denota o delta de Kronecker, e é definido da seguinte maneira:

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n; \\ 1, & \text{se } m = n. \end{cases}$$

Inicialmente, podemos construir uma sequência de polinômios ortogonais com relação ao produto interno (2.1), através do método de Gram Schmidt. Para isso, tomemos a

base canônica para os polinômios, ou seja,  $b_k(x) = x^k$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , e calculemos  $P_k(x)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , da seguinte forma:

$$P_0(x) = b_0(x) = 1$$

e, para  $k = 1, 2, 3, \dots$ ,

$$P_k(x) = x^k + \alpha_{k,0}P_0(x) + \alpha_{k,1}P_1(x) + \dots + \alpha_{k,k-1}P_{k-1}(x),$$

onde

$$\alpha_{k,i} = -\frac{\langle x^k, P_i \rangle}{\langle P_i, P_i \rangle}, i = 0, 1, \dots, k-1.$$

Podemos tomar outras bases  $\{b_k(x)\}$  desde que cada polinômio  $b_k(x)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , seja de grau exatamente  $k$ .

**Notação:** A fim de esclarecer como iremos nos referir aos polinômios e seus coeficientes, denotaremos os coeficientes dos polinômios  $P_n(x)$  por  $a_{n,k}$ ,  $k = 0, 1, \dots, n$ . Logo,

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_{n,k}x^k, \quad a_{n,n} \neq 0.$$

Destaquemos algumas propriedades dos polinômios ortogonais.

**Teorema 2.1 (Independência linear)** *Seja  $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  uma sequência de polinômios ortogonais. Toda subsequência finita  $P_0(x), P_1(x), \dots, P_m(x)$  de polinômios é linearmente independente.*

**Demonstração:** Seja  $\sum_{j=0}^m a_j P_j(x) = 0$ , onde  $a_j \in \mathbb{R}, j = 0, 1, \dots, m$ . Fazendo o produto interno por  $P_k(x)$ ,  $0 \leq k \leq m$ , obtemos

$$\sum_{j=0}^m a_j \langle P_j(x), P_k(x) \rangle = 0. \quad (2.4)$$

Usando a definição (2.3), pois por hipótese  $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  é uma sequência de polinômios ortogonais, temos

$$\begin{aligned} 0 = \sum_{j=0}^m a_j \langle P_j, P_k \rangle &= a_0 \langle P_0, P_k \rangle + \dots + a_k \langle P_k, P_k \rangle + \dots + a_m \langle P_m, P_k \rangle \\ &= a_k \langle P_k, P_k \rangle. \end{aligned}$$

Como  $\langle P_k, P_k \rangle > 0$ , então a única possibilidade é  $a_k = 0$ ,  $k = 0, 1, \dots, m$ .

Portanto, o conjunto  $\{P_0(x), P_1(x), \dots, P_m(x)\}$  é linearmente independente. ■

**Teorema 2.2 (Base do espaço  $\Pi_n$ )** *Seja  $R_n(x)$  um polinômio de grau menor ou igual a  $n$  e  $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  uma sequência de polinômios ortogonais. Então  $R_n(x)$  pode ser unica-*

mente representado por

$$R_n(x) = a_0P_0(x) + a_1P_1(x) + \dots + a_nP_n(x),$$

com coeficientes  $a_0, a_1, \dots, a_n$  reais.

**Demonstração:** Sabemos que para um dado conjunto ser base de um espaço, precisa satisfazer duas condições:

- (i) Ser linearmente independente;
- (ii) Gerar o espaço.

Como, pelo Teorema 2.1  $P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x)$  são  $n + 1$  elementos linearmente independentes de  $\Pi_n$ , e o espaço vetorial dos polinômios de grau no máximo  $n$  tem dimensão  $n + 1$ , então  $P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x)$  formam uma base para  $\Pi_n$ . Dessa forma,  $R_n(x)$  pode ser unicamente representado como uma combinação linear de  $P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x)$ . ■

**Teorema 2.3** *As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (a)  $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  é uma sequência de polinômios ortogonais com relação à medida  $d\phi(x)$  em  $(a, b)$ ;
- (b)  $\langle P_n, \pi \rangle = 0$ , para todo polinômio  $\pi(x)$  de grau menor do que  $n$  e  $\langle P_n, \pi \rangle \neq 0$  para todo polinômio  $\pi(x)$  de grau exatamente  $n$ ;
- (c)  $\langle x^m, P_n \rangle = 0$ , para todo monômio de grau menor do que  $n$  e  $\langle x^n, P_n \rangle \neq 0$ , para todo monômio de grau exatamente  $n$ .

**Demonstração:** Para demonstrar estas equivalências consideraremos  $m$  e  $n$  graus dos polinômios, analisemos dois casos (i)  $m < n$  (para o caso  $m > n$  segue o mesmo raciocínio) e (ii)  $m = n$ .

(a)  $\Rightarrow$  (b) Como  $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  é uma sequência de polinômios ortogonais, pelo Teorema 2.2,  $P_0(x), P_1(x), \dots, P_{n-1}(x)$  formam uma base para  $\Pi_{n-1}$ . Além disso, por definição temos

$$\langle P_n, P_m \rangle = \int_a^b P_n(x)P_m(x)d\phi(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } n \neq m; \\ \rho_n \neq 0, & \text{se } n = m. \end{cases}$$

- (i) Assim, para  $\pi(x) \in \Pi_{n-1}$  escrevemos  $\pi(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k P_k(x)$ . Logo

$$\langle P_n, \pi \rangle = \left\langle P_n, \sum_{k=0}^{n-1} a_k P_k \right\rangle = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \underbrace{\langle P_n, P_k \rangle}_{=0, k \neq n} \stackrel{(a)}{=} 0.$$



(ii) Suponhamos agora  $\pi(x)$  polinômio de grau exatamente  $n$ , então podemos escrever  $\pi(x) = \sum_{k=0}^n a_k P_k(x)$ , onde  $a_n \neq 0$ . Assim,

$$\langle P_n, \pi \rangle = \left\langle P_n, \sum_{k=0}^n a_k P_k \right\rangle = \sum_{k=0}^n a_k \underbrace{\langle P_n, P_k \rangle}_{\neq 0, k=n} = a_n \rho_n \neq 0.$$

(b)  $\Rightarrow$  (c)

(i) Temos por hipótese que  $\langle P_n, \pi \rangle = 0$  para todo polinômio  $\pi(x)$  de grau menor que  $n$ . Assim,  $\langle x^m, P_n \rangle = 0$ , se  $m < n$ .

(ii) Para  $m = n$ , temos  $\pi(x) = x^n \in \Pi_n$ , logo  $x^n = \sum_{k=0}^n a_k P_k$ ,  $a_n \neq 0$ ,

$$\langle x^n, P_n \rangle = \sum_{k=0}^n a_k \underbrace{\langle P_n, P_k \rangle}_{=0, k < n} \stackrel{(b)}{=} a_n \langle P_n, P_n \rangle \neq 0.$$

(c)  $\Rightarrow$  (a)

(i) Consideremos  $m < n$ . Seja  $P_m(x) = \sum_{k=0}^m a_{m,k} x^k$ ,  $a_{m,m} \neq 0$ , então

$$\langle P_m, P_n \rangle = \sum_{k=0}^m a_{m,k} \underbrace{\langle x^k, P_n \rangle}_{=0, k < n} \stackrel{(c)}{=} 0.$$

(ii) Seja  $m = n$ , então

$$\langle P_n, P_n \rangle = \sum_{k=0}^n a_{n,k} \underbrace{\langle x^k, P_n \rangle}_{=0, k < n} \stackrel{(c)}{=} a_{n,n} \langle x^n, P_n \rangle \neq 0. \quad \blacksquare$$

**Teorema 2.4** *Quaisquer duas seqüências de polinômios ortogonais com mesma função peso diferem apenas de uma constante multiplicativa. Em outras palavras, se  $\{Q_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$  e  $\{P_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$  são duas seqüências de polinômios ortogonais em  $[a, b]$  com relação à medida  $d\phi(x)$ , então*

$$Q_n(x) = c_{n,n} P_n(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

**Demonstração:** Escrevemos  $Q_n(x) \in \{Q_j(x)\}_{j=0}^{\infty}$  como  $Q_n(x) = \sum_{k=0}^n c_{k,n} P_k(x)$ , pois  $\{P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x)\}$  formam uma base para o espaço dos polinômios de grau menor ou igual que  $n$ . Assim, pela ortogonalidade de ambas as seqüências, temos

$$0 = \langle Q_m, Q_n \rangle = c_{m,n} \langle Q_m, P_m \rangle, \quad m < n.$$

Logo  $c_{m,n} = 0$  para  $m < n$ , pois  $\langle Q_m, P_m \rangle \neq 0$ . Portanto  $Q_n(x) = c_{n,n} P_n(x)$ . O valor de  $c_{n,n}$  é dado através da relação

$$\langle Q_n, Q_n \rangle = c_{n,n} \langle Q_n, P_n \rangle.$$

De fato,

$$c_{n,n} = \frac{\langle Q_n, Q_n \rangle}{\langle Q_n, P_n \rangle}. \quad \blacksquare$$

Uma importante característica dos polinômios ortogonais é a relação que mostraremos no teorema a seguir, onde três polinômios consecutivos estão conectados através de uma relação conhecida por “relação de recorrência de três termos”.

**Teorema 2.5 (Relação de recorrência de três termos)** *Toda sequência de polinômios ortogonais  $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  satisfaz uma relação de recorrência de três termos da seguinte forma*

$$P_{n+1}(x) = (\gamma_{n+1}x - \beta_{n+1})P_n(x) - \alpha_{n+1}P_{n-1}(x), \quad n \geq 0, \quad (2.5)$$

onde as condições iniciais  $P_{-1}(x) = 0$  e  $P_0(x) = 1$  com  $\alpha_{n+1}, \beta_{n+1}, \gamma_{n+1} \in \mathbb{R}$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  e

$$\gamma_{n+1} = \frac{a_{n+1,n+1}}{a_{n,n}} \neq 0, \quad \beta_{n+1} = \gamma_{n+1} \frac{\langle xP_n, P_n \rangle}{\langle P_n, P_n \rangle}, \quad \alpha_{n+1} = \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} \frac{\langle P_n, P_n \rangle}{\langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle} \neq 0.$$

**Demonstração:** Como  $xP_n(x) \in \Pi_{n+1}$ , pelo Teorema 2.2 podemos escrever  $xP_n(x)$  como combinação linear de  $P_0(x), P_1(x), \dots, P_{n+1}(x)$ , onde  $P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k P_k(x)$ , ou seja,

$$xP_n(x) = b_0P_0(x) + b_1P_1(x) + \dots + b_nP_n(x) + b_{n+1}P_{n+1}(x). \quad (2.6)$$

Por um lado, fazendo o produto interno de  $xP_n$ , com  $P_j(x)$ , onde  $j = 0, 1, \dots, n+1$ , obtemos

$$\langle xP_n, P_j \rangle = b_j \langle P_j, P_j \rangle. \quad (2.7)$$

Por outro lado,

$$\langle xP_n, P_j \rangle = \int_a^b xP_n(x)P_j(x)d\phi(x) = \langle P_n, xP_j \rangle = 0, \quad j = 0, 1, \dots, n-2. \quad (2.8)$$

De (2.7) e (2.8), obtemos

$$xP_n(x) = b_{n-1}P_{n-1}(x) + b_nP_n(x) + b_{n+1}P_{n+1}(x).$$

Assim,

$$P_{n+1}(x) = \frac{1}{b_{n+1}}xP_n(x) - \frac{b_{n-1}}{b_{n+1}}P_{n-1}(x) - \frac{b_n}{b_{n+1}}P_n(x),$$

ou seja,

$$P_{n+1}(x) = (\gamma_{n+1}x - \beta_{n+1})P_n(x) - \alpha_{n+1}P_{n-1}(x),$$

com

$$\gamma_{n+1} = \frac{1}{b_{n+1}}, \quad \beta_{n+1} = \frac{b_n}{b_{n+1}} \text{ e } \alpha_{n+1} = \frac{b_{n-1}}{b_{n+1}}.$$

Igualando o termo de maior grau em (2.6), obtemos  $a_{n,n} = b_{n+1}a_{n+1,n+1}$  e isto implica que

$$b_{n+1} = \frac{a_{n,n}}{a_{n+1,n+1}}.$$

Dessa forma,

$$\gamma_{n+1} = \frac{a_{n+1,n+1}}{a_{n,n}} \neq 0.$$

Calculando o produto interno  $\langle P_{n+1}(x), P_n(x) \rangle$  em (2.5) encontramos

$$\beta_{n+1} = \gamma_{n+1} \frac{\langle xP_n, P_n \rangle}{\langle P_n, P_n \rangle}.$$

Do mesmo modo obtemos

$$\alpha_{n+1} = \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} \frac{\langle P_n, P_n \rangle}{\langle P_{n-1}, P_{n-1} \rangle}. \quad \blacksquare$$

Para construirmos uma sequência de polinômios ortogonais mônicos,  $\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ , com relação a  $d\phi(x)$ , na qual o coeficiente do termo de maior grau é igual a 1, basta dividirmos cada polinômio  $P_n(x)$  pelo correspondente coeficiente do termo de maior grau, ou seja,

$$p_n(x) = \frac{P_n(x)}{a_{n,n}}, \quad n \geq 1.$$

Segue disso a relação de recorrência de três termos para os polinômios ortogonais mônicos

$$p_{n+1}(x) = (x - \beta_{n+1})p_n(x) - \alpha_{n+1}p_{n-1}(x), \quad n \geq 0 \quad (2.9)$$

onde

$$\alpha_{n+1} = \frac{\langle p_n, p_n \rangle}{\langle p_{n-1}, p_{n-1} \rangle}, \quad \beta_{n+1} = \frac{\langle xp_n, p_n \rangle}{\langle p_n, p_n \rangle},$$

com as condições iniciais sendo  $p_0(x) = 1$  e  $p_{-1}(x) = 0$ .

Podemos construir também uma sequência de polinômios ortonormais  $\{Q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  a partir dos polinômios ortogonais  $P_n(x)$ , dividindo cada  $P_n(x)$  por sua norma, que é dada por  $\|P_n\| = \sqrt{\langle P_n, P_n \rangle}$ ,  $n \geq 1$ . Assim,

$$Q_n(x) = \frac{P_n(x)}{\|P_n(x)\|}, \quad n \geq 1.$$

## 2.2 Existência de uma sequência de polinômios ortogonais

Afim de discutirmos sobre a existência de uma sequência de polinômios ortogonais apresentaremos a seguinte definição:



Substituindo os momentos no sistema linear pela sua definição, obtemos

$$\begin{cases} a_{n,0} \int_a^b x^0 d\phi(x) + \dots + a_{n,n} \int_a^b x^n d\phi(x) = 0 \\ a_{n,0} \int_a^b x d\phi(x) + \dots + a_{n,n} \int_a^b x^{n+1} d\phi(x) = 0 \\ \vdots \\ a_{n,0} \int_a^b x^n d\phi(x) + \dots + a_{n,n} \int_a^b x^{2n} d\phi(x) = 0 \end{cases}$$

Multiplicando, respectivamente, por  $a_{n,0}, a_{n,1}, \dots, a_{n,n}$  as equações do sistema e somando-as, temos

$$\begin{aligned} & a_{n,0}^2 \int_a^b d\phi(x) + a_{n,1}^2 \int_a^b x^2 d\phi(x) + \dots + a_{n,n}^2 \int_a^b x^{2n} d\phi(x) \\ & + 2a_{n,0}a_{n,1} \int_a^b x d\phi(x) + \dots + 2a_{n,0}a_{n,n} \int_a^b x^n d\phi(x) \\ & + 2a_{n,1}a_{n,n} \int_a^b x^{n+1} d\phi(x) + \dots = 0, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_a^b (a_{n,0} + a_{n,1}x + \dots + a_{n,n}x^n)^2 d\phi(x) = 0.$$

Se  $Q(x) = \sum_{k=0}^n a_{n,k}x^k$ , então temos

$$\int_a^b [Q(x)]^2 d\phi(x) = \langle Q(x), Q(x) \rangle = 0 \iff Q(x) = 0,$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$ , isto é,  $a_{n,0} = a_{n,1} = \dots = a_{n,n} = 0$ . ■

Estamos, agora, em condições de demonstrar a existência de uma sequência de polinômios ortogonais.

**Teorema 2.7** *Os determinantes de Hankel  $\Delta_n$  são diferentes de zero para  $n = 0, 1, 2, \dots$  se, e somente se, existe uma única sequência de polinômios ortogonais no intervalo  $(a, b)$  relativamente à medida  $d\phi(x)$ .*

**Demonstração:** Antes de comermos a argumentar sobre a demonstração faremos algumas considerações que facilitarão o desenvolvimento da mesma. Seja  $P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_{n,k}x^k$ ,  $a_{n,n} \neq 0$ . Se  $P_n(x)$  pertence a alguma sequência de polinômios ortogonais, sabemos que

$$\langle x^m, P_n \rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } m < n, \\ \tilde{\rho}_n \neq 0, & \text{se } m = n. \end{cases}$$

Observe que

$$\begin{aligned}
\langle x^m, P_n \rangle &= \int_a^b x^m (a_{n,n}x^n + a_{n,n-1}x^{n-1} + \dots + a_{n,1}x + a_{n,0}) d\phi(x) \\
&= a_{n,n} \int_a^b x^{m+n} d\phi(x) + a_{n,n-1} \int_a^b x^{m+n-1} d\phi(x) + \dots \\
&\quad + a_{n,1} \int_a^b x^{m+1} d\phi(x) + a_{n,0} \int_a^b x^m d\phi(x) \\
&= a_{n,n}\mu_{m+n} + a_{n,n-1}\mu_{m+n-1} + \dots + a_{n,1}\mu_{m+1} + a_{n,0}\mu_m.
\end{aligned}$$

Logo, fazendo  $m = 0, 1, \dots, n$ , obtemos, respectivamente,

$$\begin{cases} a_{n,n}\mu_n + \dots + a_{n,1}\mu_1 + a_{n,0}\mu_0 = 0, \\ a_{n,n}\mu_{n+1} + \dots + a_{n,1}\mu_2 + a_{n,0}\mu_1 = 0, \\ \vdots \\ a_{n,n}\mu_{2n} + \dots + a_{n,1}\mu_{n+1} + a_{n,0}\mu_n = \tilde{\rho}_n \neq 0. \end{cases}$$

Este último sistema linear pode ser representado na forma matricial

$$\begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \dots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \dots & \mu_{2n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n,0} \\ a_{n,1} \\ \vdots \\ a_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \tilde{\rho}_n \neq 0 \end{pmatrix}.$$

( $\Rightarrow$ ) Supondo que os determinantes de Hankel são diferentes de zero, a solução do sistema acima é única, e assim, existe uma única sequência de polinômios ortogonais onde  $\langle x^m, P_n \rangle = \delta_{m,n} \tilde{\rho}_n$ .

( $\Leftarrow$ ) Reciprocamente, supondo que existe uma única sequência de polinômios ortogonais, então existem únicos  $a_{n,0}, a_{n,1}, \dots, a_{n,n}$ , com  $a_{n,n} \neq 0$ , que satisfazem o sistema linear acima. Portanto, os determinantes de Hankel de ordem  $n+1$ ,  $n \geq 0$ , são diferentes de zero. ■

## 2.3 Polinômios núcleo

Os polinômios núcleo são definidos por

$$K_n(x, y) = \sum_{k=0}^n \frac{p_k(x)p_k(y)}{\|p_k\|^2},$$

onde  $p_k$ ,  $k = 0, \dots, n$ , são polinômios ortogonais mônicos com relação à medida  $d\phi$  no intervalo  $(a, b)$ .

Eles também podem ser dados pela importante identidade de Christoffel-Darboux, como veremos a seguir.

**Teorema 2.8 (Identidade de Christoffel-Darboux)** *Seja  $\{p_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  uma sequência de polinômios ortogonais na forma mônica. Então,*

$$K_n(x, y) = \sum_{k=0}^n \frac{p_k(x)p_k(y)}{\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_{k+1}} = \frac{p_{n+1}(x)p_n(y) - p_n(x)p_{n+1}(y)}{(\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_{n+1})(x - y)} \quad (2.11)$$

onde  $\alpha_{k+1} = \frac{\langle p_k, p_k \rangle}{\langle p_{k-1}, p_{k-1} \rangle}$  e ainda  $\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_{k+1} = \|p_k\|^2$ .

**Demonstração:** Pela relação (2.9) temos, para  $m \geq 0$ , as seguintes identidades:

$$\begin{aligned} xp_m(x)p_m(y) &= p_{m+1}(x)p_m(y) + \beta_{m+1}p_m(x)p_m(y) \\ &\quad + \alpha_{m+1}p_{m-1}(x)p_m(y), \\ yp_m(y)p_m(x) &= p_{m+1}(y)p_m(x) + \beta_{m+1}p_m(y)p_m(x) \\ &\quad + \alpha_{m+1}p_{m-1}(y)p_m(x). \end{aligned}$$

Subtraindo a segunda equação da primeira, obtemos

$$\begin{aligned} (x - y)p_m(x)p_m(y) &= p_{m+1}(x)p_m(y) - p_{m+1}(y)p_m(x) \\ &\quad - \alpha_{m+1}[p_m(x)p_{m-1}(y) - p_m(y)p_{m-1}(x)]. \end{aligned}$$

Agora, se denotarmos o lado direito de (2.11) por  $F_n(x, y)$  e dividirmos a última equação por  $(\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_{m+1})(x - y)$ , obtemos

$$\frac{p_m(x)p_m(x)}{\alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_{m+1}} = F_m(x, y) - F_{m-1}(x, y), \quad m \geq 0.$$

Por fim, somando-se a última expressão com  $m$  variando de 0 até  $n$  (e observando que  $F_{-1}(x, y) = 0$ ), obtemos o resultado desejado. ■

Fazendo  $y \rightarrow x$  em (2.11), obtemos a forma confluyente desta identidade,

$$K_n(x, x) = \sum_{k=0}^n \frac{[p_k(x)]^2}{\|p_k\|^2} = [p_n(x)(p_{n+1}(x))' - p_{n+1}(x)(p_n(x))'] > 0, \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2.12)$$

## 2.4 Zeros de polinômios ortogonais

Um zero de um polinômio  $P(x)$  é um número real  $\xi$  tal que  $P(\xi) = 0$ . Os zeros dos polinômios ortogonais possuem algumas particularidades que trataremos nesta seção.

**Teorema 2.9** *Seja  $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  uma sequência de polinômios ortogonais associados à medida  $d\phi(x)$  no intervalo  $(a, b)$ . Então todos os zeros de  $P_n(x)$  são reais, distintos e estão em  $(a, b)$ .*

**Demonstração:** Suponha que existam  $k$  zeros  $z_{n,1}, \dots, z_{n,k}$  de  $P_n(x)$  fora do intervalo  $(a, b)$ , inclusive os zeros complexos. Como todo polinômio de grau  $n$  tem  $n$  zeros em  $\mathbb{C}$ , podemos escrever  $P_n(x) = (x - x_{n,1})(x - x_{n,2}) \dots (x - x_{n,n})$  com  $x_{n,1}, \dots, x_{n,n}$  seus  $n$  zeros. Logo,  $P_n(x)/(x - z_{n,1})(x - z_{n,2}) \dots (x - z_{n,k})$  é um polinômio de grau  $n - k$  com todos os zeros em  $(a, b)$ .

Se  $k > 0$ , então pela ortogonalidade

$$\int_a^b P_n(x) \frac{P_n(x)}{(x - z_{n,1})(x - z_{n,2}) \dots (x - z_{n,k})} d\phi(x) = 0.$$

Mas, como  $P_n^2(x)/(x - z_{n,1})(x - z_{n,2}) \dots (x - z_{n,k})$  não muda de sinal em  $(a, b)$ , essa integral não poderá se anular. Logo  $k = 0$ , o que significa que todos os zeros de  $P_n(x)$  estão em  $(a, b)$  e portanto são reais.

Se  $z_{n,k}$  é um zero de  $P_n(x)$  de multiplicidade maior que 1, então  $P_n(x)/(x - z_{n,k})^2$  é um polinômio de grau  $n - 2$  e pela ortogonalidade,

$$\int_a^b P_n(x) \frac{P_n(x)}{(x - z_{n,k})^2} d\phi(x) = 0. \quad (2.13)$$

Por outro lado, notemos que

$$\int_a^b \frac{P_n^2(x)}{(x - z_{n,k})^2} d\phi(x) > 0$$

pois o polinômio  $P_n^2(x)/(x - z_{n,k})^2$ , é não negativo em  $(a, b)$ , então, essa integral não pode se anular. Logo todos os zeros de  $(a, b)$  são simples. ■

**Teorema 2.10** *Seja  $\{P_n(x)\}_{n=0}^\infty$  uma sequência de polinômios ortogonais com  $x_{n,1} < x_{n,2} < \dots < x_{n,n}$  os zeros de  $P_n(x)$  e  $x_{n+1,1} < x_{n+1,2} < \dots < x_{n+1,n} < x_{n+1,n+1}$  os zeros de  $P_{n+1}(x)$  com  $n \geq 1$ , arranjados em ordem crescente. Então,*

$$x_{n+1,1} < x_{n,1} < x_{n+1,2} < x_{n,2} < \dots < x_{n+1,n} < x_{n,n} < x_{n+1,n+1}. \quad (2.14)$$

*Em outras palavras, os zeros de  $P_n(x)$  se entrelaçam com os zeros de  $P_{n+1}(x)$ .*

**Demonstração:** Aplicando os zeros de  $P_{n+1}(x)$  na forma confluyente da Identidade de Christoffel-Darboux temos

$$P'_{n+1}(x_{n+1,k})P_n(x_{n+1,k}) > 0, \quad k = 1, \dots, n + 1. \quad (2.15)$$

Como os zeros de  $P_{n+1}(x)$  são reais e distintos, então, pelo Teorema de Rolle, a derivada de  $P_{n+1}(x)$  tem um zero em cada intervalo  $(x_{n+1,k}, x_{n+1,k-1})$ ,  $k = 2, \dots, n + 1$ . Daí  $P'_{n+1}(x_{n+1,k})$  e  $P'_{n+1}(x_{n+1,k-1})$  tem sinais opostos.



---

Como (2.15) é positiva então  $P_n(x_{n+1,k})$  e  $P_n(x_{n+1,k-1})$  também devem ter sinais opostos, pois tem o mesmo sinal de  $P'_{n+1}(x)$  nesses pontos. Então, pelo Teorema do Valor Médio,  $P_n(x)$  tem um zero em cada intervalo  $(x_{n+1,k-1}, x_{n+1,k})$ ,  $k = 2, \dots, n+1$ . ■

## Polinômios Ortogonais Clássicos

Existem algumas formas para caracterizar um polinômio ortogonal em clássico. Os polinômios clássicos que são de variáveis contínuas, são habitualmente chamados de polinômios de Jacobi, Hermite e de Laguerre. Informações sobre esses polinômios podem ser encontradas em Chihara [3] e Szegő [14]. Já os polinômios de variáveis discretas são chamados de polinômios de Bessel (este caso não será abordado) mas, os livros Chihara [3] e Ismail [8] são referências sobre esse assunto. Neste trabalho, abrangearemos duas formas, de caracterizar um polinômio em clássico uma na qual a função peso deve satisfazer uma equação diferencial e outra conhecida como fórmula de Rodrigues. Originalmente, a fórmula de Rodrigues foi estabelecida pelo matemático Olinde Rodrigues para os Polinômios de Legendre e generalizada depois para os outros polinômios.

**Definição 3.1** *Os polinômios ortogonais com relação ao produto interno (2.1) no intervalo  $(a, b)$ , são chamados polinômios ortogonais clássicos, se a função peso correspondente  $w(x)$  satisfaz a seguinte equação diferencial*

$$\frac{d}{dx} [M(x)w(x)] = N(x)w(x), \quad (3.1)$$

onde

$$M(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & \text{se } (a, b) = (-1, 1) \\ x, & \text{se } (a, b) = (0, \infty) \\ 1, & \text{se } (a, b) = (-\infty, +\infty) \end{cases}$$

e  $N(x)$  é um polinômio de grau 1.

A definição abaixo apresenta a fórmula de Rodrigues, um resultado fundamental, que associa a cada família de polinômios ortogonais clássicos, uma fórmula.

**Definição 3.2** *Uma sequência de polinômios ortogonais é caracterizada como clássica se admite a seguinte representação*

$$P_n(x) = \frac{k_n}{w(x)} \frac{d^n}{dx^n} [\sigma^n(x)w(x)], \quad n = 0, 1, \dots, \quad (3.2)$$

dita fórmula de Rodrigues, sendo  $\sigma(x)$  um polinômio de grau menor ou igual à 2,  $k_n$  uma constante e  $w(x)$  é a função peso.

A função peso que satisfaz (3.1) caracteriza os polinômios ortogonais de variáveis contínuas em clássicos que são os polinômios de Jacobi (incluindo os casos especiais chamados Legendre, Chebyshev e Gegenbauer), Laguerre e Hermite. Estes polinômios possuem inúmeras propriedades, mas apresentaremos nesta seção as mais importantes delas que podem ser encontradas em [3], [8] e [14].

### 3.1 Polinômios de Jacobi

Os polinômios de Jacobi denotados por  $P_n^{(\alpha, \beta)}$  em que  $\alpha$  e  $\beta$  são parâmetros que são restritos a  $\alpha > -1$  e  $\beta > -1$ . No entanto, muitas identidades e outras propriedades formais destes polinômios são válidas sob menos condições restritivas. Estes polinômios são ortogonais no intervalo  $(-1, 1)$  com relação à função peso

$$w(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta, \quad \alpha > -1, \quad \beta > -1,$$

onde  $w(x)$  satisfaz a equação diferencial (3.1), com

$$M(x) = 1 - x^2 \quad \text{e} \quad N(x) = \beta - \alpha - x(\alpha + \beta + 2).$$

Estes polinômios podem ser definidos pela fórmula de Rodrigues que é dada por

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \frac{(-1)^n \Gamma(n + \alpha + \beta)}{\Gamma(2n + \alpha + \beta)} (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x)^{n+\alpha} (1+x)^{n+\beta}],$$

onde  $k_n = (-1)^n \Gamma(n + \alpha + \beta) / \Gamma(2n + \alpha + \beta)$  e  $\sigma^n(x) = (1-x)^n (1+x)^n$ .

Eles também podem ser dados pela forma explícita

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \binom{2n + \alpha + \beta}{n}^{-1} \sum_{m=0}^n \binom{n + \alpha}{n - m} \binom{n + \beta}{m} (x-1)^m (x+1)^{n-m}, \quad (3.3)$$

onde

$$\binom{a}{b} = \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(b+1)\Gamma(a-b+1)}.$$

Os polinômios de Jacobi podem, ainda, ser obtidos através da relação de recorrência de três termos onde

$$P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x) = \left( \gamma_{n+1}^{(\alpha,\beta)} x - \beta_{n+1}^{(\alpha,\beta)} \right) P_n^{(\alpha,\beta)}(x) - \alpha_{n+1}^{(\alpha,\beta)} P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(x), \quad n \geq 1,$$

onde

$$\begin{aligned} \gamma_{n+1}^{(\alpha,\beta)} &= \frac{(\alpha + \beta + 2n + 1)(\alpha + \beta + 2n + 2)}{2(n + 1)(\alpha + \beta + n + 1)} \\ \alpha_{n+1}^{(\alpha,\beta)} &= \frac{4n(n + \alpha)(n + \beta)(n + \alpha + \beta)}{(2n + \alpha + \beta - 1)(2n + \alpha + \beta)^2(2n + \alpha + \beta + 1)}, \\ \beta_{n+1}^{(\alpha,\beta)} &= \frac{\beta^2 - \alpha^2}{(2n + \alpha + \beta + 2)(2n + \alpha + \beta)}, \end{aligned}$$

$$P_0^{(\alpha,\beta)}(x) = 1 \text{ e } P_{-1}^{(\alpha,\beta)}(x) = 0.$$

Segue daí que os três primeiros polinômios de Jacobi são:

$$\begin{aligned} P_0^{(\alpha,\beta)}(x) &= 1; \\ P_1^{(\alpha,\beta)}(x) &= \frac{1}{2} [(\alpha + \beta + 2)x + \alpha - \beta]; \\ P_2^{(\alpha,\beta)}(x) &= \frac{1}{8} [(\alpha + \beta)^2 + 7(\alpha + \beta) + 12] x^2 + 2(\alpha - \beta)(\alpha + \beta + 3)x \\ &\quad + (\alpha - \beta)^2 - (\alpha + \beta) - 4. \end{aligned}$$

Os polinômios de Jacobi são ortogonais no intervalo  $[-1, 1]$  com relação a função peso  $w(x) = (1 - x)^\alpha (1 + x)^\beta$ , ou seja,

$$\begin{aligned} \langle P_n^{(\alpha,\beta)}, P_m^{(\alpha,\beta)} \rangle &= \int_{-1}^1 P_n^{(\alpha,\beta)}(x) P_m^{(\alpha,\beta)}(x) (1 - x)^\alpha (1 + x)^\beta dx \\ &= \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n \\ \frac{2^{\alpha+\beta+1} \Gamma(n + \alpha + 1) \Gamma(n + \beta + 1)}{(2n + \alpha + \beta + 1) n! \Gamma(n + \alpha + \beta + 1)} \neq 0, & \text{se } m = n. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.4)$$

O coeficiente do termo de maior grau do polinômio de Jacobi  $a_{n,n}$  é dado por

$$a_{n,n} = \frac{1}{2^n n!} \frac{\Gamma(\alpha + \beta + 2n + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + n + 1)}. \quad (3.5)$$

Estes polinômios satisfazem a seguinte relação diferencial

$$[P_n^{(\alpha,\beta)}(x)]' = \frac{1}{2} (n + \alpha + \beta + 1) P_{n-1}^{(\alpha+1, \beta+1)}(x). \quad (3.6)$$

Essa relação diferencial para os polinômios de Jacobi mônicos reduz-se à

$$[P_n^{(\alpha,\beta)}(x)]' = nP_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x). \quad (3.7)$$

Os casos especiais dos polinômios de Jacobi são:

- i) os polinômios de Legendre,  $P_n$ , com  $\alpha = \beta = 0$ ;
- ii) os polinômios de Chebyshev de primeira espécie,  $T_n$ , com  $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$ ;
- iii) os polinômios de Chebyshev de segunda espécie,  $U_n$ , com  $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ ;
- iv) os polinômios de Gegenbauer também conhecidos como polinômios Ultrasféricos,  $G_n^{(\lambda)}$ , com  $\alpha = \beta = \lambda - \frac{1}{2}$ .

## 3.2 Polinômios de Laguerre

Os polinômios de Laguerre são denotados por  $L_n^{(\alpha)}$ , com  $\alpha > -1$ . Esses polinômios são ortogonais no intervalo  $(0, \infty)$  com relação à função peso

$$w(x) = x^\alpha e^{-x}, \quad \alpha > -1,$$

onde  $w(x)$  satisfaz a equação diferencial (3.1), com

$$M(x) = x \quad \text{e} \quad N(x) = \alpha + 1 - x.$$

Eles podem ser definidos pela fórmula de Rodrigues que é dada por

$$L_n^{(\alpha)}(x) = (-1)^n x^{-\alpha} e^x \frac{d^n}{dx^n} [x^{n+\alpha} e^{-x}]$$

com  $k_n = (-1)^n$  e  $\sigma^n(x) = x^n$ , e podem ser dados de forma explícita por

$$L_n^{(\alpha)}(x) = (-1)^n n! \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^m}{m!} \binom{n+\alpha}{n-m} x^m. \quad (3.8)$$

A relação de ortogonalidade desses polinômios é a seguinte

$$\langle L_n^\alpha, L_m^\alpha \rangle = \int_0^\infty L_n^\alpha(x) L_m^\alpha(x) x^\alpha e^{-x} dx = \begin{cases} 0, & \text{se } n \neq m; \\ n! \Gamma(\alpha + n + 1), & \text{se } m = n. \end{cases} \quad (3.9)$$

Estes polinômios também podem ser obtidos através da relação de recorrência de três termos

$$nL_n^{(\alpha)}(x) = (x - 2n + \alpha + 1) L_{n-1}^{(\alpha)}(x) - (n + \alpha - 1) L_{n-2}^{(\alpha)}(x), \quad (3.10)$$

onde  $n \geq 1$ ,  $L_0^{(\alpha)}(x) = 1$  e  $L_{-1}^{(\alpha)}(x) = 0$ .

Dessa forma temos que os quatro primeiros polinômios de Laguerre são

$$\begin{aligned} L_0^\alpha(x) &= 1; \\ L_1^\alpha(x) &= x - \alpha - 1; \\ L_2^\alpha(x) &= \frac{x^2}{2} + (-\alpha - 2)x + \frac{1}{2}(\alpha^2 + 3\alpha + 2); \\ L_3^\alpha(x) &= \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2}(\alpha + 3)x^2 + \left(-\frac{\alpha^2}{2} - \frac{5}{2}\alpha - 3\right)x + \frac{\alpha^3}{6} + \alpha^2 + \frac{11}{6}\alpha + 1. \end{aligned}$$

O coeficiente do termo de maior grau  $a_{n,n} = (-1)^n/n!$ . Logo os polinômios de Laguerre como definidos acima satisfazem a seguinte relação diferencial

$$[L_n^{(\alpha)}(x)]' = -L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x). \quad (3.11)$$

Quando os polinômios de Laguerre são mônicos, a relação diferencial seguinte é verificada

$$[L_n^{(\alpha)}(x)]' = nL_{n-1}^{(\alpha+1)}(x). \quad (3.12)$$

### 3.3 Polinômios de Hermite

Os polinômios de Hermite denotados por  $H_n$  são ortogonais no intervalo  $(-\infty, \infty)$  com relação à função peso

$$w(x) = e^{-x^2},$$

onde  $w(x)$  satisfaz a equação diferencial (3.1), com

$$M(x) = 1 \quad \text{e} \quad N(x) = -2x.$$

Eles podem ser definidos pela fórmula de Rodrigues, que é dada por

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} [e^{-x^2}]$$

com  $k_n = (-1)^n$  e  $\sigma^n(x) = e^{-x^2}$  e quando estão na forma mônica são dados de forma explícita por

$$H_n(x) = \sum_{m=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^m n! x^{n-2m}}{4^m m! (n-2m)!}, \quad (3.13)$$

onde  $\lfloor n/2 \rfloor$  denota o maior inteiro menor ou igual a  $n/2$ .

A relação de ortogonalidade desses polinômios é a seguinte:

$$\langle H_n, H_m \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x) H_m(x) e^{-x^2} dx = \begin{cases} 0, & \text{se } m \neq n; \\ \pi^{\frac{1}{2}} n! 2^n, & \text{se } m = n. \end{cases}$$

Estes polinômios, também, podem ser obtidos através da relação de recorrência de três termos

$$H_n(x) = 2xH_{n-1}(x) - 2(n-1)H_{n-2}(x), \quad n \geq 1, \quad (3.14)$$

com  $H_0(x) = 1$  e  $H_{-1}(x) = 0$ . Dessa forma temos que os quatro primeiros polinômios de Hermite são:

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1; \\ H_1(x) &= 2x; \\ H_2(x) &= 4x^2 - 2; \\ H_3(x) &= 8x^3 - 12x. \end{aligned}$$

Os polinômios de Hermite satisfazem ainda, a seguinte relação diferencial

$$H'_n(x) = 2nH_{n-1}(x).$$

## Alguns Resultados Técnicos

**Teorema 4.1 (Teorema de Obrechhoff)** *Sejam  $h_n(x) = (x - x_1) \dots (x - x_n)$  e  $g_n(x) = (x - \xi_1) \dots (x - \xi_n)$  polinômios mônicos com coeficientes reais e com zeros que se entrelaçam ( $h_n$  e  $g_n$  podem ter o coeficiente do termo de maior grau diferente de 1 desde que tenha o mesmo sinal).*

(i) *Se  $\xi_1 < x_1 < \xi_2 < x_2 < \dots < \xi_n < x_n$ , então para todo  $\lambda > 0$  o polinômio*

$$f(x) = h_n(x) + \lambda g_n(x)$$

*tem  $n$  zeros reais  $\eta_1 < \dots < \eta_n$  que se entrelaçam com os zeros de  $h_n(x)$  e  $g_n(x)$  da seguinte forma:*

$$\xi_1 < \eta_1 < x_1 < \xi_2 < \eta_2 < x_2 < \dots < \xi_n < \eta_n < x_n.$$

(ii) *Se  $x_1 < \xi_1 < x_2 < \xi_2 < \dots < x_n < \xi_n$ , então para todo  $\lambda > 0$  o polinômio*

$$f(x) = h_n(x) + \lambda g_n(x)$$

*tem  $n$  zeros reais  $\eta_1 < \dots < \eta_n$  que se entrelaçam com os zeros de  $h_n(x)$  e  $g_n(x)$  da seguinte forma:*

$$x_1 < \eta_1 < \xi_1 < x_2 < \eta_2 < \xi_2 < \dots < x_n < \eta_n < \xi_n.$$

**Demonstração:** Demonstraremos apenas o item (i), visto que, o (ii) segue o mesmo raciocínio. Sabemos da hipótese que  $x_k$  e  $\xi_k, k = 1, 2, \dots, n$ , são os zeros de  $h_n(x)$  e  $g_n(x)$ , respectivamente, e que eles se entrelaçam. Podemos analisar  $f(x)$  nos zeros de  $h_n$ .

$$f(x_k) = h_n(x_k) + \lambda g_n(x_k) = \lambda g_n(x_k). \quad (4.1)$$



Analisando os sinais de (4.1) obtemos

$$\text{sinal}(f(x_k)) = \text{sinal}(\lambda g_n(x_k)) = \text{sinal}(g_n(x_k)) = (-1)^{n-k}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Portanto, existem  $n - 1$  zeros de  $f(x)$  em cada um dos intervalos  $(x_{k-1}, x_k)$ ,  $k = 2, \dots, n$ . Falta localizar um zero de  $f(x)$ . Observemos que o sinal de  $f(x_1) < 0$  se  $n$  for par, e  $f(x_1) > 0$  se  $n$  for ímpar.

Por outro lado,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \begin{cases} +\infty, & n \text{ par}, \\ -\infty, & n \text{ ímpar}. \end{cases}$$

Analisemos os dois casos:

- Se  $n$  é par, então, como  $f(x_1) < 0$  e  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ , concluímos que há um zero de  $f(x)$  a esquerda de  $x_1$ .
- Se  $n$  é ímpar, então,  $f(x_1) > 0$  e  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ , concluímos que há um zero de  $f(x)$  a esquerda de  $x_1$ .

Portanto temos o seguinte entrelaçamento

$$\eta_1 < x_1 < \eta_2 < x_2 < \dots < \eta_n < x_n. \quad (4.2)$$

Agora, analisemos  $f(x)$  nos zeros de  $g_n$ . Temos

$$f(\xi_k) = h_n(\xi_k) + \lambda g_n(\xi_k) = h_n(\xi_k).$$

Daí

$$\text{sinal}(f(\xi_k)) = \text{sinal}(h_n(\xi_k)) = (-1)^{n-k+1}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Logo, em cada intervalo  $(\xi_{k-1}, \xi_k)$ ,  $k = 2, \dots, n$ , há um zero de  $f(x)$ , ou seja, encontramos  $n - 1$  zeros de  $f(x)$ . Observemos que  $f(\xi_n) < 0$  e  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$ . Assim temos um zero de  $f(x)$  depois de  $\xi_n$ . Portanto temos o seguinte entrelaçamento

$$\xi_1 < \eta_1 < \xi_2 < \eta_2 < \dots < \xi_n < \eta_n. \quad (4.3)$$

Combinando (4.2), (4.3) e o entrelaçamento enunciado na hipótese pelo item (i) concluímos que

$$\xi_1 < \eta_1 < x_1 < \dots < \xi_n < \eta_n < x_n. \quad \blacksquare$$

Observe que  $f(x)$  depende de  $\lambda$ , ou seja, os zeros de  $f(x)$  são funções que dependem de  $\lambda$ . Uma questão natural é analisar o comportamento desses zeros com relação a esse parâmetro. Um primeiro resultado nessa direção foi obtido por Bracciali, Dimitrov e Ranga [2]. Eles provaram que os zeros são funções monótonas de  $\lambda$ .

**Teorema 4.2 (Bracciali, Dimitrov, Ranga)** *Sejam  $h_n(x) = (x - x_1) \dots (x - x_n)$  e  $g_n(x) = (x - \xi_1) \dots (x - \xi_n)$  polinômios mônicos com coeficientes reais e com zeros que se entrelaçam.*

- (i) *Para todo  $\lambda > 0$  o polinômio  $f(x) = h_n(x) + \lambda g_n(x)$  tem  $n$  zeros reais  $\eta_1 < \dots < \eta_n$  que se entrelaçam com os zeros de  $h_n(x)$  e  $g_n(x)$ , como no Teorema 4.1 (i). Além disso, cada  $\eta_k = \eta_k(\lambda)$  é uma função decrescente de  $\lambda$ , para todo  $k = 1, 2, \dots, n$ .*
- (ii) *Para todo  $\lambda > 0$  o polinômio  $f(x) = h_n(x) + \lambda g_n(x)$  tem  $n$  zeros reais  $\eta_1 < \dots < \eta_n$  que se entrelaçam com os zeros de  $h_n(x)$  e  $g_n(x)$  como no Teorema 4.1 (ii). Além disso, cada  $\eta_k = \eta_k(\lambda)$  é uma função crescente de  $\lambda$ , para todo  $k = 1, 2, \dots, n$ .*

**Demonstração:** Mostraremos apenas o item (i) devido (ii) ser análogo. Para provar a monotonicidade dos zeros de  $f(x)$  com relação a  $\lambda$ , definimos o polinômio  $f_\epsilon(x)$  por

$$f_\epsilon(x) = h_n(x) + (\lambda + \epsilon)g_n(x), \quad \epsilon \geq 0,$$

e denotamos os seus zeros por  $\eta_1(\epsilon) < \dots < \eta_n(\epsilon)$ . Notemos que  $\eta_k(0) = \eta_k$ .

Avaliando agora  $f_\epsilon(x)$  nos zeros de  $f(x)$ , temos

$$\begin{aligned} f_\epsilon(\eta_k) &= h_n(\eta_k) + (\lambda + \epsilon)g_n(\eta_k) \\ &= h_n(\eta_k) + \lambda g_n(\eta_k) + \epsilon g_n(\eta_k) \\ &= f(\eta_k) + \epsilon g_n(\eta_k) \\ &= 0 + \epsilon g_n(\eta_k) \\ &= \epsilon g_n(\eta_k). \end{aligned}$$

Assim,

$$\text{sinal}(f_\epsilon(\eta_k)) = \text{sinal}(g_n(\eta_k)) = (-1)^{n-k}.$$

Então  $f_\epsilon(x)$  possui um zero em cada intervalo  $(\eta_k, \eta_{k+1})$ ,  $k = 1, \dots, n - 1$ .

Agora temos

- $f(\eta_1) < 0$  e  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ , para  $n$  par.
- $f(\eta_1) > 0$  e  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ , para  $n$  ímpar.

Portanto, um zero de  $f_\epsilon(x)$  está a esquerda de  $\eta_1$ , logo

$$\eta_1(\epsilon) < \eta_1 < \eta_2(\epsilon) < \eta_2 < \dots < \eta_n(\epsilon) < \eta_n.$$

Isto mostra que os zeros são funções decrescentes de  $\lambda$ . ■

Um segundo resultado sobre o comportamento dos zeros de combinações de polinômios, onde seus zeros se entrelaçam de acordo com o Teorema 4.1 e esses zeros são funções

monótonas de  $\lambda$  como no Teorema 4.2, refere-se ao comportamento assintótico dos zeros do polinômio  $f(x)$ , ou seja, de como esses zeros se comportam quando  $\lambda$  assume valores muito grandes, esse resultado foi provado por Dimitrov, Mello e Rafaeli em [5].

**Teorema 4.3 (Dimitrov, Mello, Rafaeli)** *Sejam  $h_n(x) = (x - x_1) \dots (x - x_n)$  e  $g_n(x) = (x - \xi_1) \dots (x - \xi_n)$  polinômios com coeficientes reais e com zeros que se entrelaçam.*

(i) *Como para todo  $\lambda > 0$  o polinômio  $f(x) = h_n(x) + \lambda g_n(x)$  tem  $n$  zeros reais  $\eta_1 < \dots < \eta_n$  que se entrelaçam com os zeros de  $h_n(x)$  e  $g_n(x)$  e cada  $\eta_k = \eta_k(\lambda)$  é uma função decrescente de  $\lambda$ , para todo  $k = 1, 2, \dots, n$ , como no Teorema 4.1 e 4.2 item (i), então*

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \eta_k = \xi_k \text{ e } \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda [\xi_k - \eta_k] = \frac{h_n(\xi_k)}{g'_n(\xi_k)}.$$

(ii) *Como para todo  $\lambda > 0$  o polinômio  $f(x) = h_n(x) + \lambda g_n(x)$  tem  $n$  zeros reais  $\eta_1 < \dots < \eta_n$  que se entrelaçam com os zeros de  $h_n(x)$  e  $g_n(x)$  e cada  $\eta_k = \eta_k(\lambda)$  é uma função crescente de  $\lambda$ , para todo  $k = 1, 2, \dots, n$ , como no Teorema 4.1 e 4.2, item (ii) então*

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \eta_k = \xi_k \text{ e } \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda [\eta_k - \xi_k] = \frac{h_n(\xi_k)}{g'_n(\xi_k)}.$$

**Demonstração:** Vamos estabelecer os limites descritos em (i), para isso definimos  $q(x)$  como

$$q(x) := \frac{h_n(x)}{\lambda} + g_n(x).$$

Note que  $f(x)$  e  $q(x)$  possuem os mesmos zeros para qualquer que seja  $\lambda$ . Fazendo  $\lambda$  tender ao infinito obtemos

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} q(x) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \left( \frac{h_n(x)}{\lambda} + g_n(x) \right) = g_n(x).$$

Isso significa que, pelo Teorema de Hurwitz (ver [14], pag. 22), os zeros de  $q(x)$  convergem aos zeros de  $g_n(x)$ , ou seja,  $\eta_k \rightarrow \xi_k$  quando  $\lambda \rightarrow \infty$ .

Como  $g_n(x)$  é um polinômio, pelo Teorema do Valor Médio, existe um ponto  $\theta_k \in (\xi_k, \eta_k)$  tal que

$$\frac{\lambda g_n(\eta_k) - \lambda g_n(\xi_k)}{\eta_k - \xi_k} = \lambda g'(\theta_k).$$

Segue que

$$\lambda [\eta_k - \xi_k] = \frac{\lambda g_n(\eta_k) - \lambda g_n(\xi_k)}{g'(\theta_k)} = \frac{\lambda g_n(\eta_k)}{g'(\theta_k)} = \frac{-h_n(\eta_k)}{g'(\theta_k)}.$$

Logo

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda [\eta_k - \xi_k] = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{-h_n(\eta_k)}{g'(\theta_k)} = \frac{-h_n(\xi_k)}{g'(\xi_k)},$$

---

pois  $\eta_k \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} \xi_k$  e isto implica  $\theta_k \xrightarrow{\lambda \rightarrow \infty} \xi_k$ , já que  $\theta_k \in (\xi_k, \eta_k)$ .

Do mesmo modo prova-se (ii). ■

# Polinômios Ortogonais Gerados por uma Medida Perturbada

Neste capítulo apresentaremos alguns resultados sobre três famílias de polinômios ortogonais que são obtidas através de diferentes perturbações na medida  $d\phi(x)$ . A primeira medida que abordaremos vamos chamar de  $d\phi_1(x)$  que encontramos em Chihara [3], a segunda medida  $d\phi_2$  pode ser vista em Szegő [14]. A terceira é a medida  $d\phi_\lambda$ , conhecida como perturbação de Uvarov, pode ser vista em Huertas, Marcellán e Rafaeli [6] uma abordagem sobre o comportamento dos zeros de  $d\phi_2$  e  $d\phi_\lambda$  é proposta neste mesmo artigo.

## 5.1 Perturbação de uma medida por um polinômio de grau 1

Até agora consideramos  $\{p_n\}_{n=0}^\infty$  uma sequência de polinômios ortogonais mônicos com relação a medida de  $d\phi(x)$ . Consideremos uma nova medida  $d\phi_1(x)$  a qual é obtida multiplicando  $d\phi(x)$  por um polinômio de grau 1, para garantir a positividade da medida vamos considerar o módulo do polinômio  $|x-c|$ , pois a positividade depende da localização do ponto  $c$ . Logo definimos

$$d\phi_1(x) = |x - c|d\phi(x), \quad (5.1)$$

onde  $c \notin (a, b)$ . Os polinômios que são ortogonais com relação a  $d\phi_1(x)$  são chamados de polinômios de Christoffel o qual denotamos por  $\{q_n(c; x)\}_{n=0}^\infty$ , ou seja,

$$\langle q_n(c; x), q_m(c; x) \rangle_{\phi_1} = \int_a^b q_n(c; x)q_m(c; x)d\phi_1(x) = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \tilde{\rho}_n, & n = m. \end{cases} \quad (5.2)$$

O primeiro resultado que apresentamos para os polinômios ortogonais com relação a medida  $d\phi_1(x)$ , é uma representação para  $q_n(c; x)$  em função de  $p_{n+1}(x)$  e  $p_n(x)$ .

**Teorema 5.1** *Seja  $\{q_n(c; x)\}_{n=0}^{\infty}$  a sequência de polinômios ortogonais mônicos com relação a medida  $d\phi_1(x) = |x - c|d\phi(x)$ . Então*

$$\begin{aligned} q_n(c; x) &= \frac{1}{x - c} \left[ p_{n+1}(x) - \frac{p_{n+1}(c)}{p_n(c)} p_n(x) \right] \\ &= \frac{\|p_n\|_{\phi}^2}{p_n(c)} K_n(c, x) \end{aligned} \quad (5.3)$$

onde  $K_n(c, x)$  é o polinômio núcleo como definido em (2.11).

**Demonstração:** Como  $q_n(c; x)$  é um polinômio mônico de grau exatamente  $n$ , então  $(x - c)q_n(c; x) \in \Pi_{n+1}$ . Logo, podemos representá-lo da seguinte forma:

$$(x - c)q_n(c; x) = \sum_{k=0}^{n+1} a_k p_k(x) = p_{n+1}(x) + \sum_{k=0}^n a_k p_k(x). \quad (5.4)$$

Observe que  $a_{n+1} = 1$  pois  $(x - c)q_n(c; x)$  é mônico.

Fazendo o produto interno de  $q_n(c; x)$  com  $x^j$ , temos

$$\langle q_n(c; x), x^j \rangle_{\phi_1} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, n - 1. \quad (5.5)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \langle q_n(c; x), x^j \rangle_{\phi_1} &= \left\langle \frac{1}{x - c} \left[ p_{n+1}(x) + \sum_{k=0}^n a_k p_k(x) \right], x^j \right\rangle_{\phi_1} = \\ &= \int_a^b \frac{1}{x - c} [p_{n+1}(x) + \sum_{k=0}^n a_k p_k(x)] x^j (x - c) d\phi(x) \\ &= \int_a^b p_{n+1}(x) \cdot x^j d\phi(x) + \int_a^b \sum_{k=0}^n a_k p_k(x) \cdot x^j d\phi(x). \end{aligned}$$

Logo, para  $j = 0$  obtemos

$$\begin{aligned} 0 = \langle q_n(c; x), x^0 \rangle_{\phi_1} &= \int_a^b p_{n+1}(x) x^0 d\phi(x) + \int_a^b \sum_{k=0}^n a_k p_k(x) \cdot x^0 d\phi(x) \\ &= 0 + a_0 \underbrace{\langle p_0, 1 \rangle}_{\langle p_0, p_0 \rangle}, \end{aligned}$$

de onde segue que  $a_0 = 0$ . Assim,  $(x - c)q_n(c; x) = p_{n+1}(x) + \sum_{k=1}^n a_k p_k(x)$ . Agora, para  $j = 1$  vemos que

$$\begin{aligned} 0 = \langle q_n(c; x), x^1 \rangle_{\phi_1} &= \int_a^b p_{n+1}(x) x^1 d\phi(x) + \int_a^b \sum_{k=1}^n a_k p_k(x) \cdot x^1 d\phi(x) \\ &= 0 + a_1 \underbrace{\langle p_1, x \rangle}_{=\langle p_1, p_1 \rangle}, \end{aligned}$$

ou seja,  $a_1 = 0$ . Fazendo este processo até  $j = n - 1$ , concluímos que,  $a_0 = a_1 = \dots = a_{n-1} = 0$ . Portanto, (5.4) se reduz a

$$(x - c)q_n(c; x) = p_{n+1}(x) + a_n p_n(x). \quad (5.6)$$

Avaliando (5.6) em  $x = c$  temos  $0 = p_{n+1}(c) + a_n p_n(c)$ , ou seja,

$$a_n = -\frac{p_{n+1}(c)}{p_n(c)}.$$

Portanto,

$$q_n(c; x) = \frac{1}{x - c} \left[ p_{n+1}(x) - \frac{p_{n+1}(c)}{p_n(c)} p_n(x) \right].$$

Por outro lado, da identidade de Christoffel-Darboux (2.11) temos

$$\begin{aligned} K_n(x, y) &= \sum_{k=0}^n \frac{p_k(x)p_k(y)}{\|p_k\|^2} = \frac{p_{n+1}(x)p_n(y) - p_n(x)p_{n+1}(y)}{\|p_k\|^2 (x - y)} \\ &= \frac{p_n(y)}{\|p_k\|^2} \frac{p_{n+1}(x) - \frac{p_{n+1}(y)}{p_n(y)} p_n(x)}{x - y}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{\|p_k\|^2}{p_n(y)} K_n(x, y) = \frac{1}{x - y} \left[ p_{n+1}(x) - \frac{p_{n+1}(y)}{p_n(y)} p_n(x) \right].$$

Obtemos então que

$$q_n(c; x) = \frac{\|p_n\|^2}{p_n(c)} K_n(c, x),$$

ou seja,  $q_n(c; x)$  é o polinômio núcleo na forma mônica. ■

Como  $d\phi_1(x) = |x - c|d\phi(x)$  com  $c \notin (a, b)$ , é uma medida positiva com suporte em  $(a, b)$ , então todos os zeros de  $q_n(c; x)$  são reais distintos e estão em  $(a, b)$ . O próximo resultado mostra que os zeros de  $q_n(c; x)$  se entrelaçam com os zeros de  $p_n(x)$  e  $p_{n+1}(x)$  simultaneamente.

**Teorema 5.2** *Os zeros de  $q_n(c; x)$  se entrelaçam com os zeros de  $p_n(x)$  e  $p_{n+1}(x)$ . Em outras palavras, sejam  $z_{n,1}(c), \dots, z_{n,n}(c)$  os zeros de  $q_n(c; x)$ .*

(i) *Se  $c \leq a$ , então*

$$x_{n+1,1} < x_{n,1} < z_{n,1} < x_{n+1,2} < \dots < x_{n,n} < z_{n,n} < x_{n+1,n+1}.$$

(ii) *Se  $c \geq b$ , então*

$$x_{n+1,1} < z_{n,1} < x_{n,1} < x_{n+1,2} < \dots < z_{n,n} < x_{n,n} < x_{n+1,n+1}.$$

**Demonstração:** Para provarmos o entrelaçamento dos zeros de  $q_n(c; x)$  com os zeros de  $p_n(x)$  e  $p_{n+1}(x)$  tomemos a representação dos polinômios  $q_n(c; x)$ , ou seja,

$$q_n(c; x) = \frac{1}{x - c} \left[ p_{n+1}(x) - \frac{p_{n+1}(c)}{p_n(c)} p_n(x) \right].$$

Aplicando  $q_n(c; x)$  nos zeros de  $p_n(x)$  e nos de  $p_{n+1}(x)$ , obtemos

$$\begin{aligned} q_n(c; x_{n,j}) &= \frac{1}{x - c} \left[ p_{n+1}(x_{n,j}) - \underbrace{\frac{p_{n+1}(c)}{p_n(c)} p_n(x_{n,j})}_{=0} \right] \\ &= \frac{p_{n+1}(x_{n,j})}{x_{n,j} - c}. \end{aligned} \tag{5.7}$$

e

$$q_n(c; x_{n+1,k}) = -\frac{p_{n+1}(c)}{p_n(c)} \frac{p_n(x_{n+1,k})}{x_{n+1,k} - c}. \tag{5.8}$$

Agora temos duas situações a considerar: se  $c$  está a esquerda do intervalo  $(a, b)$  ou se  $c$  está a direita do intervalo  $(a, b)$ .

Primeiro, se  $c \leq a$  em (5.7), temos

$$\text{ sinal } [q_n(c; x_{n,j})] = (-1)^{n-j+1}, \quad j = 1, \dots, n. \tag{5.9}$$

De fato, como os zeros de  $p_n(x)$  e  $p_{n+1}(x)$  se entrelaçam da seguinte maneira  $x_{n+1,i} < x_{n,i} < x_{n+1,i+1}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , então  $\text{ sinal } [p_{n+1}(x_{n,j})] = (-1)^{n-j+1}$ . Além disso, como  $x_{n,k} \in (a, b)$  e  $c \leq a$ , então  $(x_{n,j} - c) > 0$  de onde segue que

$$\text{ sinal } [q_n(c; x_{n,j})] = \text{ sinal } \left[ \frac{p_{n+1}(x_{n,j})}{(x_{n,j} - c)} \right] = (-1)^{n-j+1}. \tag{5.10}$$



Observemos que  $q_n(c; x_{n,n}) < 0$ , independente de  $n$  ser, par ou ímpar. Por outro lado,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} q_n(c; x) = \begin{cases} +\infty, & n \text{ par}; \\ +\infty, & n \text{ ímpar}. \end{cases} \quad (5.11)$$

Então  $q_n(c; x_{n,n}) < 0$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} q_n(c; x) = +\infty$ . Portanto, de qualquer forma existe um zero de  $q_n(c; x)$  à direita de  $x_{n,n}$ . Daí temos o seguinte entrelaçamento dos zeros de  $q_n(c; x)$  com  $p_n(x)$

$$x_{n,1} < z_{n,1} < \cdots < x_{n,n} < z_{n,n}. \quad (5.12)$$

Analisemos, agora, o caso em que  $c \geq b$ . Temos que sinal  $[p_{n+1}(x_{n,j})] = (-1)^{n-j+1}$ , mas como  $c \geq b$ , então  $(x_{n,j} - c) < 0$ , o que implica em:

$$\text{sinal } [q_n(c; x_{n,j})] = \text{sinal } \left[ \frac{p_{n+1}(x_{n,j})}{(x_{n,j} - c)} \right] = (-1)^{n-j}. \quad (5.13)$$

Logo, em cada intervalo  $(x_{n,j-1}, x_{n,j})$ ,  $j = 2, \dots, n$ , encontramos um zero de  $q_n(c; x)$ . Observemos que ao analisarmos  $q_n(c; x_{n,1})$ , temos

- se  $n$  é par  $q_n(c; x_{n,1}) < 0$  e que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} q_n(c; x) = +\infty$ ;
- se  $n$  é ímpar  $q_n(c; x_{n,1}) > 0$  e que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} q_n(c; x) = -\infty$ .

Em ambos os casos, temos que  $q_n(c; x_{n,1})$  muda de sinal, ou seja, existe um zero de  $q_n(c; x)$  a esquerda de  $x_{n,1}$ , o que resulta no seguinte entrelaçamento entre os zeros de  $q_n(c; x)$  e  $p_n(x)$

$$z_{n,1} < x_{n,1} < z_{n,2} < x_{n,2} < \cdots < z_{n,n} < x_{n,n}. \quad (5.14)$$

Resta-nos investigar o comportamento dos zeros de  $p_{n+1}(x)$  quando  $c \leq a$ , para isto tomemos a equação (5.8) e observemos que

$$\text{sinal } [q_n(c; x_{n+1,k})] = (-1)^{n-k+1}, \quad (5.15)$$

pelos mesmos argumentos descritos acima temos que  $\text{sinal}[p_n(x_{n+1,k})] = (-1)^{n-k}$ , e que  $(x_{n+1,k} - c) > 0$ . Basta verificarmos o sinal de  $p_{n+1}(c)/p_n(c)$ .

Sabemos que  $p_n$  é um polinômio mônico, logo, temos que, se  $n$  é par  $p_n(c) > 0$  e se  $n$  é ímpar  $p_n(c) < 0$ , então o quociente  $p_{n+1}(c)/p_n(c) < 0$  para todo  $n$ .

Consequentemente temos

$$\text{sinal } [q_n(c; x_{n+1,k})] = \text{sinal } \left[ -\frac{p_{n+1}(c)}{p_n(c)} \frac{p_n(x_{n+1,k})}{x_{n+1,k} - c} \right] = (-1)^{n-k+1}. \quad (5.16)$$

Notemos que  $q_n(c; x_{n+1,n}) < 0$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} q_n(c; x) = +\infty$ , então, existe um zero  $q_n(c; x)$  à direita de  $x_{n+1,n}$ .

Disto segue que

$$x_{n+1,1} < z_{n,1} < x_{n+1,2} < \cdots < x_{n+1,n} < z_{n,n} < x_{n+1,n+1}. \quad (5.17)$$

O entrelaçamento entre os zeros de um polinômio de grau  $n + 1$  e os zeros de um polinômio de grau  $n$  é único, logo, para  $c \geq b$  a equação (5.17) se mantém visto que  $p_{n+1}(x)$  tem grau  $n + 1$  e  $q_n(c; x)$  tem grau  $n$ .

Combinando (5.12) e (5.17) e o entrelaçamento já provado no Teorema 2.10, obtemos se  $c \leq a$

$$x_{n+1,1} < x_{n,1} < z_{n,1} < x_{n+1,2} < \cdots < x_{n+1,n} < x_{n,n} < z_{n,n} < x_{n+1,n+1}. \quad (5.18)$$

Da mesma maneira para o caso em que  $z, c \geq b$  combinamos (5.14), (5.17) e o Teorema 2.10 segue,

$$x_{n+1,1} < z_{n,1} < x_{n,1} < x_{n+1,2} < \cdots < x_{n+1,n} < z_{n,n} < x_{n,n} < x_{n+1,n+1}. \quad (5.19)$$

■

## 5.2 Perturbação de uma medida por um polinômio de grau 2

Como vimos, os polinômios  $q_n(c; x)$  são polinômios núcleo na forma mônica. Nesta seção vamos definir os polinômios que são ortogonais com relação a  $d\phi_2(x)$ . Uma representação para esses polinômios pode ser dada em função de  $q_n(c; x)$  e  $q_{n+1}(c; x)$ , outra representação é dada em função de  $p_n(x)$  e  $p_{n+1}(x)$ . Veremos que isso pode ser feito porque estamos perturbando a medida  $d\phi_1(x)$  multiplicando por um polinômio de grau 1, ou ainda perturbando  $d\phi(x)$  multiplicando por um polinômio de grau 2. Consideremos então a nova medida  $d\phi_2(x)$  a qual é definida por

$$d\phi_2(x) = |x - c|d\phi_1(x) = (x - c)^2d\phi(x). \quad (5.20)$$

Os polinômios ortogonais com relação a medida  $d\phi_2(x)$  são também chamados de polinômios de Christoffel. Vamos denotá-los por  $\{r_n(c; x)\}_{n=0}^{\infty}$ , ou seja,

$$\langle r_n, r_m \rangle_{\phi_2} = \int_a^b r_n(c; x) r_m(c; x) d\phi_2(x) = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \tilde{\rho}_n, & n = m. \end{cases} \quad (5.21)$$

O teorema a seguir apresenta uma representação para estes polinômios.

**Teorema 5.3** *Seja  $\{r_n(c; x)\}_{n=0}^{\infty}$  a sequência de polinômios ortogonais mônicos com relação a medida  $d\phi_2 = |x - c|d\phi_1 = (x - c)^2d\phi$ . Então*

$$\begin{aligned} r_n(c; x) &= \frac{1}{x - c} \left[ q_{n+1}(c; x) - \frac{q_{n+1}(c; c)}{q_n(c; c)} q_n(c; x) \right] \\ &= \frac{1}{(x - c)^2} [p_{n+2}(x) - d_n p_{n+1}(x) + e_n p_n(x)] \end{aligned} \quad (5.22)$$

em que

$$d_n = \frac{p_{n+2}(c)}{p_{n+1}(c)} + \frac{q_{n+1}(c; c)}{q_n(c; c)} = \frac{p_{n+2}(c) + p_n(c)e_n}{p_{n+1}(c)} \quad (5.23)$$

e

$$e_n = \frac{q_{n+1}(c; c)}{q_n(c; c)} \frac{p_{n+1}(c)}{p_n(c)} = \frac{\|p_{n+1}\|_{\phi}^2}{\|p_n\|_{\phi}^2} \frac{K_{n+1}(c; c)}{K_n(c; c)} > 0.$$

**Demonstração:** Como  $(x - c)^2 r_n(c; x)$  é um polinômio mônico de grau exatamente  $n + 2$ , podemos representá-lo da seguinte forma:

$$(x - c)^2 r_n(c; x) = \sum_{k=0}^{n+2} a_k p_k(x) = p_{n+2}(x) + \sum_{k=0}^{n+1} a_k p_k(x). \quad (5.24)$$

Da relação de ortogonalidade temos

$$\langle r_n(c; x), x^j \rangle_{\phi_2} = 0, \quad j = 0, 1, \dots, n - 1. \quad (5.25)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{(x - c)^2} \left[ p_{n+2}(x) + \sum_{k=0}^{n+1} a_k p_k(x) \right], x^j \right\rangle_{\phi_2} &= \\ &= \int_a^b \frac{1}{(x - c)^2} \left[ p_{n+2}(x) + \sum_{k=0}^{n+1} a_k p_k(x) \right] x^j (x - c)^2 d\phi \\ &= \int_a^b p_{n+2}(x) \cdot x^j d\phi + \int_a^b \sum_{k=0}^{n+1} a_k p_k(x) \cdot x^j d\phi. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Fazendo  $j = 0$ , obtemos

$$\begin{aligned} 0 = \langle r_n(c; x), x^0 \rangle_{\phi_2} &= \int_a^b p_{n+2}(x) \cdot x^0 d\phi + \int_a^b \sum_{k=0}^{n+1} a_k p_k(x) \cdot x^0 d\phi \\ &= 0 + a_0 \underbrace{\langle p_0, 1 \rangle}_{\langle p_0, p_0 \rangle} \end{aligned}$$

de onde segue que  $a_0 = 0$ . Assim  $(x - c)^2 r_n(c; x) = p_{n+2}(x) + \sum_{k=1}^{n+1} a_k p_k(x)$ . Para  $j = 1$ , vemos que

$$\begin{aligned} 0 = \langle r_n(c; x), x^1 \rangle_{\phi_2} &= \int_a^b p_{n+2}(x) \cdot x^1 d\phi + \int_a^b \sum_{k=1}^{n+1} a_k p_k(x) \cdot x^1 d\phi \\ &= 0 + a_1 \underbrace{\langle p_1, x \rangle}_{\langle p_1, p_1 \rangle}, \end{aligned}$$

ou seja,  $a_1 = 0$ . Repetindo este processo até  $j = n - 1$ , concluimos que,  $a_0 = a_1 = \dots = a_{n-1} = 0$ . Portanto, obtemos que (5.24) se reduz a

$$(x - c)^2 r_n(c; x) = p_{n+2}(x) + a_{n+1} p_{n+1}(x) + a_n p_n(x) \quad (5.27)$$

Queremos encontrar  $a_n$  e  $a_{n+1}$ . Para isto fazemos  $x = c$  em (5.27), e portanto,

$$\begin{aligned} 0 &= p_{n+2}(c) + a_{n+1} p_{n+1}(c) + a_n p_n(c) \\ a_{n+1} &= \frac{-p_{n+2}(c) - a_n p_n(c)}{p_{n+1}(c)}. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Substituindo (5.28) em (5.27) temos

$$\begin{aligned} (c - c)^2 r_n(c; c) &= p_{n+2}(c) + \left[ \frac{-p_{n+2}(c) - a_n p_n(c)}{p_{n+1}(c)} \right] p_{n+1}(c) + a_n p_n(c) \\ 0 &= p_{n+2}(c) - \frac{p_{n+2}(c) p_{n+1}(c) - a_n p_n(c) p_{n+1}(c)}{p_{n+1}(c)} + a_n p_n(c) \\ a_n \left[ p_n(c) - \frac{p_n(c)}{p_{n+1}(c)} p_{n+1}(c) \right] &= -p_{n+2}(c) + \frac{p_{n+2}(c)}{p_{n+1}(c)} p_{n+1}(c). \end{aligned}$$

Logo, isolando  $a_n$ , segue

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{-p_{n+2}(c) + \frac{p_{n+2}(c)}{p_{n+1}(c)}p_{n+1}(c)}{p_n(c) - \frac{p_n(c)}{p_{n+1}(c)}p_{n+1}(c)} \\
 &= -q_{n+1}(c; c) \frac{p_{n+1}(c)}{p_n(c)p_{n+1}(c) - p_n(c)p_{n+1}(c)} \frac{p_n(c)}{p_{n+1}(c)} \frac{p_{n+1}(c)}{p_n(c)} \\
 &= \frac{q_{n+1}(c; c) p_{n+1}(c)}{q_n(c; c) p_n(c)}.
 \end{aligned}$$

Assim,

$$a_n = \frac{\frac{\|p_{n+1}\|^2}{p_{n+1}(c)} K_{n+1}(c, c) p_{n+1}(c)}{\frac{\|p_n\|^2}{p_n(c)} K_n(c, c) p_n(c)} = \frac{\|p_{n+1}\|^2 K_{n+1}(c, c)}{\|p_n\|^2 K_n(c, c)} > 0. \quad (5.29)$$

Portanto,

$$r_n(c, x) = \frac{1}{(x-c)^2} [p_{n+2}(x) - d_n p_{n+1}(x) + e_n p_n(x)]$$

onde,  $d_n = -a_{n+1}$  e  $e_n = a_n$ . ■

A partir da representação obtida para estes polinômios em função de  $p_{n+2}(x)$ ,  $p_{n+1}(x)$  e  $p_n(x)$ , conseguimos adequa-lá afim de escrever a mesma representação com relação a apenas dois destes polinômios, ou seja, definimos um polinômio ortogonal com relação a medida  $d\phi_2(x)$  em função de outros dois polinômios ortogonais com relação a medida  $d\phi(x)$ . Como  $d\phi(x)$  foi modificada de forma a obter  $d\phi_2(x)$  observaremos que essa perturbação nos proporciona uma nova família de polinômios ortogonais e ainda, relações entre os zeros dessas famílias.

**Teorema 5.4** *Sejam  $y_{n,1}(c), \dots, y_{n,n}(c)$  os zeros de  $r_n(c; x)$ .*

(i) *Se  $c \leq a$ , então*

$$x_{n+1,1} < x_{n,1} < y_{n,1} < x_{n+1,2} < \dots < x_{n,n} < y_{n,n} < x_{n+1,n+1}.$$

(ii) *Se  $c \geq b$ , então*

$$x_{n+1,1} < y_{n,1} < x_{n,1} < x_{n+1,2} < \dots < y_{n,n} < x_{n,n} < x_{n+1,n+1}.$$

**Demonstração:** Sabendo que  $r_n(c; x)$  são polinômios ortogonais mônicos com relação a medida  $d\phi_2$ , provemos o entrelaçamento de seus zeros com os zeros dos polinômios  $p_n(x)$

e  $p_{n+1}(x)$  ortogonais com relação a  $d\phi(x)$ . Para isso usaremos a relação de recorrência de três termos para os polinômios mônicos que é

$$p_{n+1}(x) = (x - \beta_n)p_n(x) - \alpha_n p_{n-1}(x),$$

onde,  $\beta_n = \frac{\langle xp_n, p_n \rangle}{\|p_n\|^2}$ ,  $n \geq 0$ , e  $\alpha_n = \frac{\|p_n\|^2}{\|p_{n-1}\|^2} > 0$ ,  $n \geq 1$ .

Daí, escrevemos

$$p_{n+2}(x) = (x - \beta_{n+1})p_{n+1}(x) - \alpha_{n+1}p_n(x) \quad (5.30)$$

e substituindo em (5.22), obtemos

$$r_n(c, x) = \frac{1}{(x - c)^2} [(x - \beta_{n+1} - d_n)p_{n+1}(x) + (e_n - \alpha_{n+1})p_n(x)]. \quad (5.31)$$

É fácil ver que  $(e_n - \alpha_{n+1}) > 0$  pois

$$(e_n - \alpha_{n+1}) = \frac{\|p_{n+1}\|_\phi^2 K_{n+1}(c, c)}{\|p_n\|_\phi^2 K_n(c, c)} - \frac{\|p_{n+1}\|_\phi^2}{\|p_n\|_\phi^2} \quad (5.32)$$

$$= \frac{\|p_{n+1}\|_\phi^2}{\|p_n\|_\phi^2} \left( \frac{K_{n+1}(c, c)}{K_n(c, c)} - 1 \right) > 0. \quad (5.33)$$

Assim, substituindo em  $r_n(c; x)$  os zeros de  $p_{n+1}(x)$ , temos

$$r_n(c, x_{n+1, k}) = \frac{1}{(x_{n+1, k} - c)^2} [(e_n - \alpha_{n+1})p_n(x_{n+1, k})]. \quad (5.34)$$

Como  $\text{sinal}[p_n(x_{n+1, k})] = (-1)^{n-k+1}$ , então,

$$\begin{aligned} \text{sinal}[r_n(c, x_{n+1, k})] &= \text{sinal} \left[ \underbrace{\frac{1}{(x_{n+1, k} - c)^2}}_{>0} \underbrace{\text{sinal}[(e_n - \alpha_{n+1})]}_{>0} \underbrace{\text{sinal}[p_n(x_{n+1, k})]}_{=(-1)^{n-k+1}} \right] \\ &= (-1)^{n-k+1} \end{aligned} \quad (5.35)$$

Assim, concluímos que, existem  $n$  zeros de  $r_n(c; x)$ , nos intervalos  $(x_{n+1, k}, x_{n+1, k+1})$ , onde  $k = 1, \dots, n$ , resultando no seguinte entrelaçamento

$$x_{n+1, 1} < y_{n, 1} < x_{n+1, 2} < y_{n, 2} < \dots < x_{n+1, n} < y_{n, n} < x_{n+1, n+1}. \quad (5.36)$$

Em outras palavras, os zeros de  $r_n(c; x)$  e  $p_{n+1}(x)$  se entrelaçam. Por outro lado, fazendo  $x = c$  em

$$(x - c)^2 r_n(c; x) = (x - \beta_{n+1} - d_n)p_{n+1}(x) + (e_n - \alpha_{n+1})p_n(x) \quad (5.37)$$

obtemos

$$\begin{aligned} (c-c)^2 r_n(c; c) &= [(c - \beta_{n+1} - d_n)p_{n+1}(c) + (e_n - \alpha_{n+1})p_n(c)] \\ 0 &= (c - \beta_{n+1} - d_n)p_{n+1}(c) + (e_n - \alpha_{n+1})p_n(c) \\ (\beta_{n+1} + d_n - c)p_{n+1}(c) &= (e_n - \alpha_{n+1})p_n(c). \end{aligned}$$

Então,

$$(\beta_{n+1} + d_n - c) = (e_n - \alpha_{n+1}) \frac{p_n(c)}{p_{n+1}(c)}. \quad (5.38)$$

Temos que  $(e_n - \alpha_{n+1}) > 0$  mas, quando  $c \leq a$  o quociente  $[p_n(c)/p_{n+1}(c)] < 0$  e quando  $c \geq b$ , temos  $[p_n(c)/p_{n+1}(c)] > 0$ .

Como estamos analisando primeiro o caso em que  $c \leq a$ , quando tivermos  $x_{n,j}$  ao invés de  $c$ , temos  $c < x_{n,j}$  logo,

$$(\beta_{n+1} + d_n - x_{n,j}) < (\beta_{n+1} + d_n - c) = \left[ (e_n - \alpha_{n+1}) \frac{p_n(c)}{p_{n+1}(c)} \right] < 0. \quad (5.39)$$

Ao aplicarmos os zeros de  $p_n(x)$  em  $r_n(c; x)$ , obtemos

$$r_n(c; x_{n,j}) = \frac{1}{(x_{n,j} - c)^2} [(x_{n,j} - \beta_{n+1} - d_n)p_{n+1}(x_{n,j})] \quad (5.40)$$

Sabemos por (5.39) que  $(\beta_{n+1} + d_n - x_{n,j}) < 0$ , logo  $(x_{n,j} - \beta_{n+1} - d_n) > 0$  e que o sinal  $[p_{n+1}(x_{n,j})] = (-1)^{n-j+1}$ . Portanto, temos

$$\text{sinal}[r_n(c, x_{n,j})] = \text{sinal} \left\{ \frac{1}{(x_{n,j} - c)^2} [(x_{n,j} - \beta_{n+1} - d_n)p_{n+1}(x_{n,j})] \right\} = (-1)^{n-j+1}. \quad (5.41)$$

Tomando  $r_n(c, x_{n,n})$ , notemos:

- se  $n$  é par, então  $r_n(c, x_{n,n}) < 0$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} r_n(c; x) = +\infty$ ;
- se  $n$  é ímpar, então  $r_n(c, x_{n,n}) < 0$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} r_n(c; x) = +\infty$ .

Concluimos com esses dois casos, que existe um zero de  $r_n(c; x)$  a direita de  $x_{n,n}$ , e disto segue o entrelaçamento,

$$x_{n,1} < y_{n,1} < x_{n,2} < y_{n,2} < \cdots < x_{n,n} < y_{n,n}. \quad (5.42)$$

Combinando (5.36), (5.42) e o Teorema 2.10 obtemos

$$x_{n+1,1} < x_{n,1} < y_{n,1} < x_{n+1,2} < x_{n,2} < y_{n,2} < \cdots < x_{n+1,n} < x_{n,n} < y_{n,n} < x_{n+1,n+1}.$$

Para  $c \geq b$  demonstra-se analogamente, observando apenas que o sinal de (5.38), mantém-se  $(e_n - \alpha_{n+1}) > 0$  mas, como  $c \geq b$ , temos que  $[p_n(c)/p_{n+1}(c)] > 0$ , agora com  $x_{n,j}$  ao invés de  $c$  temos  $c > x_{n,j}$  logo,

$$(\beta_{n+1} + d_n - x_{n,j}) > (\beta_{n+1} + d_n - c) = \left[ (e_n - \alpha_{n+1}) \frac{p_n(c)}{p_{n+1}(c)} \right] > 0. \quad (5.43)$$

Como já sabemos por (5.43) que  $(\beta_{n+1} + d_n - x_{n,j}) > 0$ , logo,  $(x_{n,j} - \beta_{n+1} - d_n) < 0$  e que o sinal  $[p_{n+1}(x_{n,j})] = (-1)^{n-j+1}$ , temos

$$\text{sinal}[r_n(c, x_{n,j})] = \text{sinal} \left\{ \frac{1}{(x_{n,j} - c)^2} [(x_{n,j} - \beta_{n+1} - d_n) p_{n+1}(x_{n,j})] \right\} = (-1)^{n-j}. \quad (5.44)$$

Tomando  $r_n(c, x_{n,1})$ , notemos

- se  $n$  é par, então  $r_n(c, x_{n,1}) < 0$  e  $\lim_{x \rightarrow -\infty} r_n(c; x) = +\infty$ ,
- se  $n$  é ímpar, então  $r_n(c, x_{n,1}) > 0$  e  $\lim_{x \rightarrow -\infty} r_n(c; x) = -\infty$ .

Concluimos com esses dois casos, que existe um zero de  $r_n(c; x)$  a esquerda de  $x_{n,1}$ , disto segue o entrelaçamento,

$$y_{n,1} < x_{n,1} < y_{n,2} < x_{n,2} < \cdots < y_{n,n} < x_{n,n}. \quad (5.45)$$

Combinando (5.36), (5.45) e o Teorema 2.10 obtemos

$$x_{n+1,1} < y_{n,1} < x_{n,1} < x_{n+1,2} < y_{n,2} < x_{n,2} < \cdots < x_{n+1,n} < y_{n,n} < x_{n,n} < x_{n+1,n+1}. \quad \blacksquare$$

### 5.3 Perturbação de Uvarov

Nesta seção estudaremos o comportamento dos zeros das sequências de polinômios ortogonais com respeito a medida  $d\phi_\lambda(x) = d\phi(x) + \lambda\delta(x-c)$ , conhecida como perturbação de Uvarov, onde  $d\phi(x)$  é uma medida positiva com suporte finito ou infinito no intervalo  $(a, b)$ ,  $\delta(x-c)$  é o funcional Delta de Dirac no ponto  $c$ , em que  $c \notin (a, b)$  e  $\lambda$  é um número real não negativo. Logo, os polinômios  $p_n(\lambda, c; x)$  que descreveremos nesta seção são ortogonais com relação ao produto interno

$$\langle p, q \rangle_\lambda = \int_a^b p(x)q(x)d\phi(x) + \lambda p(c)q(c). \quad (5.46)$$



**Teorema 5.5 (Fórmula de conexão)** *Os polinômios  $\hat{p}_n(\lambda, c; x)$ , com a normalização  $\hat{p}_n(\lambda, c; x) = \kappa_n p_n(\lambda, c; x)$ , onde  $p_n(x)$  é mônico, pode ser representado como*

$$\hat{p}_n(\lambda, c; x) = p_n(x) + \lambda B_n(x - c)r_{n-1}(c; x), \quad (5.47)$$

onde

$$B_n = \frac{-p_n(c)}{\langle x - c, r_{n-1} \rangle_\phi} = K_{n-1}(c, c) > 0 \quad (5.48)$$

e  $\kappa_n = 1 + \lambda K_{n-1}(c, c)$ .

**Demonstração:** Para provar a ortogonalidade de  $\hat{p}_n(\lambda, c; x)$ , vamos utilizar a base  $1, (x - c), (x - c)^2, \dots, (x - c)^n$  do espaço  $\Pi_n$ .

Observemos que

$$\langle 1, \hat{p}_n(\lambda, c, x) \rangle_\lambda = 0,$$

se, e somente se,

$$\langle 1, p_n \rangle_\phi + \lambda B_n \langle 1, (x - c)r_{n-1} \rangle_\phi + \lambda p_n(c) = 0.$$

Como  $\langle 1, p_n \rangle = 0$ , resulta que

$$B_n = \frac{-p_n(c)}{\langle 1, (x - c)r_{n-1} \rangle_\phi}.$$

Ainda temos

$$\begin{aligned} \langle (x - c), r_n(c; x) \rangle_\phi &= \int_a^b (x - c)r_n(c; x)d\phi(x) \\ &= \int_a^b (x - c)\frac{1}{(x - c)} \left[ q_n(c; x) - \frac{q_n(c; c)}{q_{n-1}(c; c)}q_{n-1}(c; x) \right] d\phi(x) \\ &= \int_a^b q_n(c; x)d\phi(x) - \frac{q_n(c; c)}{q_{n-1}(c; c)} \int_a^b q_{n-1}(c; x)d\phi(x). \end{aligned}$$

Como  $q_n(c; x) = \frac{\|p_n\|_\phi^2}{p_n(c)}K_n(c, x)$  temos

$$\begin{aligned}
& \langle (x - c), r_n(c; x) \rangle_\phi = \\
&= \frac{\|p_n\|_\phi^2}{p_n(c)} \int_a^b K_n(c, x) d\phi(x) - \frac{\|p_n\|_\phi^2}{p_n(c)} \frac{K_n(c, c)}{K_{n-1}(c, c)} \frac{p_{n-1}(c)}{\|p_{n-1}\|_\phi^2} \frac{\|p_{n-1}\|_\phi^2}{p_{n-1}(c)} \int_a^b K_{n-1}(c, x) d\phi(x) \\
&= \frac{\|p_n\|_\phi^2}{p_n(c)} \left( 1 - \frac{K_n(c, c)}{K_{n-1}(c, c)} \right).
\end{aligned}$$

Assim,

$$B_n = \frac{-p_n(c)}{\langle x - c, r_n(c; x) \rangle} = \frac{p_n^2(c)}{\|p_n\|_\phi^2} \left( \frac{K_n(c, c)}{K_{n-1}(c, c)} - 1 \right) = K_{n-1}(c, c) > 0.$$

Para finalizar

$$\begin{aligned}
\langle (x - c), \hat{p}_n(\lambda, c, x) \rangle_\lambda &= \langle (x - c), p_n \rangle_\phi + \lambda B_n \langle 1, (x - c)r_{n-1} \rangle_{\phi_2} = 0 \\
&\vdots \\
\langle (x - c)^{n-1}, \hat{p}_n(\lambda, c, x) \rangle_\lambda &= \langle (x - c)^{n-1}, p_n \rangle_\phi + \lambda B_n \langle (x - c)^{n-2}, r_{n-1} \rangle_{\phi_2} = 0 \\
\langle (x - c)^n, \hat{p}_n(\lambda, c, x) \rangle_\lambda &= \langle (x - c)^n, p_n \rangle_\phi + \lambda B_n \langle (x - c)^{n-1}, r_{n-1} \rangle_{\phi_2} = 0 \\
&= \|p_n\|_\phi^2 + \lambda B_n \|r_{n-1}\|_{\phi_2}^2 > 0. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

O teorema a seguir aborda o entrelaçamento dos zeros  $\{w_{n,k}\}_{k=1}^n$  dos polinômios  $\hat{p}_n(\lambda, c, x)$  com os zeros de  $r_n(c; x)$  e  $p_n(x)$ , obtendo condições para resultados complementares.

**Teorema 5.6** *Seja  $\lambda > 0$  e  $\{y_{n,k}\}_{k=1}^n$  os zeros dos polinômios  $r_n(c; x)$  ortogonais com respeito ao produto interno (5.21).*

(i) *Se  $c \leq a$ , então*

$$c < w_{n,1} < x_{n,1} < y_{n-1,1} < x_{n,2} < \cdots < y_{n-1,n-1} < w_{n,n} < x_{n,n}. \quad (5.49)$$

*Além disso, cada  $w_{n,k}$  é uma função decrescente de  $\lambda$  e, para cada  $k = 1, 2, \dots, n - 1$ ,*

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} w_{n,1} = c, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} w_{n,k+1} = y_{n-1,k},$$

*bem como*

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda [w_{n,1} - c] = \frac{-p_n(c)}{K_{n-1}(c, c)r_{n-1}(c)} \quad (5.50)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda [w_{n,k+1} - y_{n-1,k}] = \frac{-p_n(y_{n-1,k})}{K_{n-1}(c, c)(y_{n-1,k} - c)r'_{n-1}(y_{n-1,k})}. \quad (5.51)$$

(ii) Se  $c \geq b$ , então

$$x_{n,1} < w_{n,1} < y_{n-1,1} < \cdots < x_{n,n-1} < w_{n,n-1} < y_{n-1,n-1} < x_{n,n} < w_{n,n} < c. \quad (5.52)$$

Além disso, cada  $w_{n,k}$  é uma função crescente de  $\lambda$  e, para cada  $k = 1, 2, \dots, n-1$ ,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} w_{n,n} = c, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} w_{n,k} = y_{n-1,k},$$

bem como

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda [c - w_{n,n}] = \frac{p_n(c)}{K_{n-1}(c, c)r_{n-1}(c)} \quad (5.53)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda [y_{n-1,k} - w_{n,k}] = \frac{p_n(y_{n-1,k})}{K_{n-1}(c, c)(y_{n-1,k} - c)r'_{n-1}(y_{n-1,k})}. \quad (5.54)$$

**Demonstração:** Usando a fórmula de conexão vamos provar que os zeros de  $\hat{p}_n(\lambda, c; x)$  se entrelaçam com os zeros de  $p_n(x)$  e  $r_n(c; x)$ . Primeiro provemos o entrelaçamento entre os zeros de  $\hat{p}_n(\lambda, c; x)$  e  $p_n(x)$ . Substituindo em  $\hat{p}_n(\lambda, c; x)$  os zeros de  $r_{n-1}(c; x)$  obtemos

$$\hat{p}_n(\lambda, c; y_{n-1,k}) = p_n(y_{n-1,k}).$$

Como  $p_n(x)$  é mônico e neste trabalho já demonstramos o entrelaçamento dos zeros de  $r_{n-1}(c; x)$  com um polinômio mônico de grau  $n$  em (5.42)

$$\text{sinal} [\hat{p}_n(\lambda, c; y_{n-1,k})] = \text{sinal} [p_n(y_{n-1,k})] = (-1)^{n-k}. \quad (5.55)$$

Logo, existe um zero de  $\hat{p}_n(\lambda, c; y_{n,k})$  em cada intervalo  $(y_{n-1,k-1}, y_{n-1,k})$  com  $k = 2, \dots, n-1$ . Ainda temos que localizar um zero de  $\hat{p}_n(\lambda, c; x)$ . Tomemos  $y_{n-1,n-1}$  e analisemos  $\hat{p}_n(\lambda, c; y_{n-1,1}) < 0$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} = +\infty$ ,

Concluimos que, existe um zero de  $\hat{p}_n(\lambda, c; x)$  a direita de  $y_{n-1,n-1}$ , o que nos fornece o seguinte entrelaçamento

$$w_{n,1} < y_{n-1,1} < w_{n,2} < y_{n-1,2} < \cdots < y_{n-1,n-1} < w_{n,n}. \quad (5.56)$$

Aplicando agora os zeros de  $p_n(x)$  a  $\hat{p}_n(\lambda, c; x)$ , temos

$$\hat{p}_n(\lambda, c; x_{n,k}) = \lambda B_n(x_{n,k} - c)r_{n-1}(c; x_{n,k}). \quad (5.57)$$

Sabemos que  $\lambda$  é um número real positivo,  $B_n > 0$ ,  $\text{sinal}[r_{n-1}(c; x_{n,k})] = (-1)^{n-k-1}$  e  $(x_{n,k} - c) > 0$ , pois neste caso  $c \leq a$ . Consequentemente

$$\begin{aligned} \text{sinal}[\hat{p}_n(\lambda, c, x_{n,k})] &= \text{sinal}[\lambda B_n(x_{n,k} - c)] \text{sinal}[r_{n-1}(c, x_{n,k})] \\ &= (-1)^{n-k-1}. \end{aligned} \quad (5.58)$$

Portanto, em cada intervalo  $(x_{n,k}, x_{n,k-1})$  com  $k = 1, \dots, n-1$ , temos um zero de  $\hat{p}_n(\lambda, c; x)$ . Ainda temos um zero à investigar. Tomando  $x_{n,n}$  temos

- se  $n$  é par, então  $\hat{p}_n(\lambda, c; x_{n,n}) < 0$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \hat{p}_n(\lambda, c; x) = +\infty$ ,
- se  $n$  é ímpar, então  $\hat{p}_n(\lambda, c; x_{n,n}) < 0$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \hat{p}_n(\lambda, c; x) = +\infty$ .

Podemos concluir que nos dois casos existe um zero de  $\hat{p}_n(\lambda, c; x)$  a esquerda de  $x_{n,n}$  implicando no entrelaçamento abaixo

$$x_{n,1} < w_{n,1} < x_{n,2} < w_{n,2} < \dots < x_{n,n} < w_{n,n}. \quad (5.59)$$

De (5.56) e (5.59), obtemos que os zeros de  $p_n(x)$  e  $r_{n-1}(c, x)$  se entrelaçam com os zeros de  $\hat{p}_n(\lambda, c; x)$  quando  $c \leq a$  (da mesma forma é feito para  $c \geq b$ ),

$$c < w_{n,1} < x_{n,1} < y_{n-1,1} < x_{n,2} < \dots < y_{n-1,n-1} < w_{n,n} < x_{n,n}.$$

Completando assim, as hipóteses necessárias para aplicação do Teorema 4.3, donde obtemos,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} w_{n,1} = c, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} w_{n,k+1} = y_{n-1,k}.$$

Observamos que quando  $\lambda \rightarrow \infty$ , os zeros de  $\hat{p}_n(\lambda, c; x)$  convergem para os zeros de  $(x - c)r_{n-1}(c; x)$ . Além disso, a convergência é da ordem  $O(\frac{1}{\lambda})$ . De fato, temos

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda[w_{n,1} - c] = \frac{-p_n(c)}{K_{n-1}(c, c)r_{n-1}(c)} \quad (5.60)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda[w_{n,k+1} - y_{n-1,k}] = \frac{-p_n(y_{n-1,k})}{K_{n-1}(c, c)(y_{n-1,k} - c)r'_{n-1}(y_{n-1,k})}. \quad (5.61)$$

■

# Aplicações

Neste capítulo, vamos considerar alguns casos particulares da perturbação de Uvarov. No artigo de Huertas, Marcellán e Rafaeli [6] foi proposto a modificação das medidas clássicas de Jacobi e de Laguerre através da perturbação de Uvarov.

## 6.1 Polinômios tipo Jacobi

Vimos no Capítulo 2, que a sequência de polinômios mônicos de Jacobi  $\{p_n^{(\alpha,\beta)}(x)\}$ , é ortogonal com relação á medida  $d\phi_{\alpha,\beta}(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx$ . Consideremos as seguintes perturbações na medida  $d\phi_{\alpha,\beta}(x)$ :

$$d\phi(\lambda, 1; x) = d\phi_{\alpha,\beta}(x) + \lambda\delta(x-1), \quad (6.1)$$

$$d\phi(\lambda, -1; x) = d\phi_{\alpha,\beta}(x) + \lambda\delta(x+1). \quad (6.2)$$

A partir, das medidas introduzidas em (6.2) e (6.1), obtemos duas novas famílias de polinômios ortogonais mônicos as quais, denotaremos por  $\{p_n^{(\alpha,\beta)}(\lambda, 1; x)\}$  e  $\{p_n^{(\alpha,\beta)}(\lambda, -1; x)\}$ , respectivamente. Esses polinômios são conhecidos na literatura como polinômios ortogonais do tipo Jacobi ou polinômios ortogonais de Jacobi-Koornwinder. De fato eles apareceram pela primeira vez no trabalho de Koornwinder [9].

### 6.1.1 Propriedades dos polinômios $p_n^{(\alpha,\beta)}(\lambda, 1; x)$

Com a normalização  $\hat{p}_n^{(\alpha,\beta)}(\lambda, c; x) = \kappa_n p_n^{(\alpha,\beta)}(\lambda, c; x)$  introduzida no Teorema 5.5, onde  $\kappa_n = 1 + \lambda K_{n-1}(c, c)$  e  $p_n^{(\alpha,\beta)}(\lambda, c; x)$  é um polinômio do tipo Jacobi mônico, obtemos a fórmula de conexão para os polinômios  $\hat{p}_n^{(\alpha,\beta)}(\lambda, 1; x)$ :

$$\hat{p}_n^{(\alpha,\beta)}(\lambda, 1; x) = p_n^{(\alpha,\beta)}(x) + \lambda K_{n-1}(1, 1)(x-1)p_{n-1}^{(\alpha+2,\beta)}(x). \quad (6.3)$$

Inicialmente calculemos

$$K_{n-1}(1, 1) = \frac{1}{\|p_k\|^2} p_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(1) [p_n^{(\alpha, \beta)}(1)]' - p_n^{(\alpha, \beta)}(1) [p_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(1)]'. \quad (6.4)$$

Observe que, esta é a fórmula confluyente da Identidade de Christoffel Darboux aplicada no ponto  $x = 1$ . Para escrevermos (6.4) de maneira conveniente, afim de facilitar nossos cálculos, usaremos (3.4) e (3.7) para obter

$$K_{n-1}(1, 1) = \frac{[\Gamma(\alpha + \beta + 2n - 1)]^2 (\alpha + \beta + 2n - 1)}{2^{2n+\alpha+\beta-1} (n-1)! \Gamma(\alpha + \beta + n) \Gamma(\alpha + n) \Gamma(\beta + n)} \times \\ \left[ \frac{2^{n-1} \Gamma(\alpha + \beta + n) \Gamma(\alpha + n)}{\Gamma(\alpha + 1) \Gamma(\alpha + \beta + 2n - 1)} \binom{n}{n} \frac{2^{n-1} \Gamma(\alpha + \beta + n + 2) \Gamma(\alpha + n + 1)}{\Gamma(\alpha + 2) \Gamma(\alpha + \beta + 2n + 1)} - \right. \\ \left. + \frac{2^n \Gamma(\alpha + \beta + n + 1) \Gamma(\alpha + n + 1)}{\Gamma(\alpha + 1) \Gamma(\alpha + \beta + 2n + 1)} (n-1) \frac{2^{n-2} \Gamma(\alpha + \beta + n + 1) \Gamma(\alpha + n)}{\Gamma(\alpha + 2) \Gamma(\alpha + \beta + 2n - 1)} \right].$$

Colocando alguns termos em evidência e utilizando as propriedades da função Gama,  $\Gamma(x) = (x+1)!$  e  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ , obtemos após algumas simplificações

$$K_{n-1}(1, 1) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta + n + 1) \Gamma(\alpha + n + 1)}{2^{\alpha+\beta+1} \Gamma(n) \Gamma(\beta + n) \Gamma(\alpha + 1) \Gamma(\alpha + 2)}. \quad (6.5)$$

Podemos agora analisar o comportamento dos zeros dos polinômios tipo Jacobi com relação a perturbação de Uvarov quando  $c = 1$ .

**Teorema 6.1** *Sejam  $\alpha, \beta > -1$  e sejam  $x_{n,k}(\alpha, \beta)$  e  $x_{n,k}(\alpha, \beta; \lambda) := x_{n,k}(\alpha, \beta; 1, \lambda)$ ,  $k = 1, \dots, n$ , os zeros de  $p_n^{(\alpha, \beta)}(x)$  e  $p_n^{(\alpha, \beta)}(\lambda, 1; x)$ , respectivamente. Então vale a seguinte propriedade de entrelaçamento:*

$$x_{n,1}(\alpha, \beta) < x_{n,1}(\alpha, \beta; \lambda) < x_{n-1,1}(\alpha + 2, \beta) < x_{n,2}(\alpha, \beta) < x_{n,2}(\alpha, \beta; \lambda) < \dots < \\ < x_{n,n-1}(\alpha, \beta) < x_{n,n-1}(\alpha, \beta; \lambda) < x_{n-1,n-1}(\alpha + 2, \beta) < x_{n,n}(\alpha, \beta) < x_{n,n}(\alpha, \beta; \lambda) < 1,$$

Além disso, cada  $x_{n,k}(\alpha, \beta; \lambda)$  é uma função crescente de  $\lambda$  e, para  $k = 1, \dots, n-1$ ,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} x_{n,n}(\alpha, \beta; \lambda) = 1, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} x_{n,k}(\alpha, \beta; \lambda) = x_{n-1,k}(\alpha + 2, \beta), \quad (6.6)$$

e,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda [1 - x_{n,n}(\alpha, \beta; \lambda)] = g_n(\alpha, \beta), \quad (6.7)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda [x_{n-1,k}(\alpha + 2, \beta) - x_{n,k}(\alpha, \beta; \lambda)] = \frac{[1 + x_{n-1,k}(\alpha + 2, \beta)] g_n(\alpha, \beta)}{2(\alpha + 2)}, \quad (6.8)$$

onde

$$g_n(\alpha, \beta) = \frac{2^{\alpha+\beta+2} \Gamma(n) \Gamma(\alpha+2) \Gamma(\alpha+3) \Gamma(n+\beta)}{\Gamma(n+\alpha+2) \Gamma(n+\alpha+\beta+2)}. \quad (6.9)$$

**Demonstração:** Como no Teorema 5.6 foi demonstrado o entrelaçamento entre os zeros de  $p_n^{(\alpha, \beta)}(x)$  e  $(x-1)p_{n-1}^{(\alpha+2, \beta)}(x)$ , falta provar que os zeros de  $\hat{p}_n^{(\alpha, \beta)}(\lambda, 1; x)$  se entrelaçam simultaneamente com os zeros de  $(x-1)p_{n-1}^{(\alpha+2, \beta)}(x)$  e  $p_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ , ou seja,  $x_{n,1}(\alpha, \beta) < x_{n,1}(\alpha, \beta; \lambda) < x_{n-1,1}(\alpha+2, \beta) < \dots < x_{n-1,n-1}(\alpha+2, \beta) < x_{n,n}(\alpha, \beta) < x_{n,n}(\alpha, \beta; \lambda)$ . Para isso, tomemos a fórmula de conexão (6.3). Substituindo  $x$  pelos zeros de  $(x-1)p_{n-1}^{(\alpha+2, \beta)}(x)$  obtemos

$$\begin{aligned} \text{sinal} \left[ \hat{p}_n^{(\alpha, \beta)}(\lambda, 1; x_{n-1,k}(\alpha+2, \beta)) \right] &= \text{sinal} \left[ p_n^{(\alpha, \beta)}(x_{n-1,k}(\alpha+2, \beta)) \right] \quad (6.10) \\ &= (-1)^{n-k}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \text{sinal} \left[ \hat{p}_n^{(\alpha, \beta)}(\lambda, 1; 1) \right] &= \text{sinal} \left[ p_n^{(\alpha, \beta)}(1) \right] \quad (6.11) \\ &= (-1)^n. \end{aligned}$$

Assim, localizamos  $n-1$  zeros de  $\hat{p}_n^{(\alpha, \beta)}(\lambda, 1, x)$ , em outras palavras, em cada intervalo  $(x_{n-1,k-1}(\alpha+2, \beta), x_{n-1,k}(\alpha+2, \beta))$ , com  $k = 2, \dots, n-1$ , e  $(x_{n-1,n-1}(\alpha+2, \beta), 1)$  encontramos um zero de  $\hat{p}_n^{(\alpha, \beta)}(\lambda, 1; x)$ . Resta-nos localizar um zero, de  $\hat{p}_n^{(\alpha, \beta)}(\lambda, 1; x_{n-1,k}(\alpha+2, \beta))$ . Vejamos

- se  $n$  é par, então  $\hat{p}_n^{(\alpha, \beta)}(\lambda, 1; x_{n-1,1}(\alpha+2, \beta)) < 0$  e  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \hat{p}_n^{(\alpha, \beta)}(\lambda, 1; x) = +\infty$ ,
- se  $n$  é ímpar, então  $\hat{p}_n^{(\alpha, \beta)}(\lambda, 1; x_{n-1,1}(\alpha+2, \beta)) > 0$  e  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \hat{p}_n^{(\alpha, \beta)}(\lambda, 1; x) = -\infty$ .

Portanto, nos dois casos temos um zero de  $\hat{p}_n^{(\alpha, \beta)}(\lambda, 1; x)$  à esquerda de  $x_{n-1,1}(\alpha+2, \beta)$ . Com isso obtemos o seguinte entrelaçamento com os zeros de  $\hat{p}_n^{(\alpha, \beta)}(\lambda, 1; x)$  e  $p_{n-1}^{(\alpha+2, \beta)}(x)$ :

$$\begin{aligned} x_{n,1}(\alpha, \beta, \lambda) &< x_{n-1,1}(\alpha+2, \beta) < x_{n,2}(\alpha, \beta, \lambda) < x_{n-1,2}(\alpha+2, \beta) < \dots < \\ &< x_{n,n-1}(\alpha, \beta, \lambda) < x_{n-1,n-1}(\alpha+2, \beta) < x_{n,n}(\alpha, \beta, \lambda). \quad (6.12) \end{aligned}$$

Por outro lado, ao aplicarmos os zeros de  $p_n^{(\alpha, \beta)}(x)$  em (6.3), obtemos

$$\hat{p}_n^{(\alpha, \beta)}(\lambda, 1; x_{n,j}(\alpha, \beta)) = \lambda K_{n-1}(1, 1) (x_{n,j}(\alpha, \beta) - 1) p_{n-1}^{(\alpha+2, \beta)}(x_{n,j}(\alpha, \beta)), \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Como  $\lambda$  é um número real não negativo,  $K_{n-1}(1, 1) > 0$ ,  $(x_{n,j}(\alpha, \beta) - 1) < 0$  e ainda sinal  $\left[ p_{n-1}^{(\alpha+2, \beta)}(x_{n,j}(\alpha, \beta)) \right] = (-1)^{n-j}$ , então,

$$\begin{aligned} \text{sinal} \left[ \hat{p}_n^{(\alpha, \beta)}(\lambda, 1; x_{n,j}(\alpha, \beta)) \right] &= \text{sinal} \left[ \lambda K_{n-1}(1, 1) (x_{n,j}(\alpha, \beta) - 1) p_{n-1}^{(\alpha+2, \beta)}(x_{n,j}(\alpha, \beta)) \right] \\ &= (-1)^{n-j+1}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Isso significa que, em cada intervalo  $(x_{n,j-1}(\alpha, \beta), x_{n,j}(\alpha, \beta))$ ,  $j = 2, \dots, n$  encontramos um zero de  $\hat{p}_n^{(\alpha, \beta)}(\lambda, 1; x)$ , ou seja, localizamos  $n - 1$  zeros desse polinômio de grau  $n$ . Observamos  $\hat{p}_n^{(\alpha, \beta)}(\lambda, 1; x_{n,n}(\alpha, \beta)) < 0$  e que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \hat{p}_n^{(\alpha, \beta)}(\lambda, 1; x) = +\infty$ . Disto resulta que, existe um zero de  $\hat{p}_n^{(\alpha, \beta)}(\lambda, 1; x)$  à direita de  $x_{n,n}(\alpha, \beta)$ , o que nos leva ao seguinte entrelaçamento

$$\begin{aligned} x_{n,1}(\alpha, \beta) &< x_{n,1}(\alpha, \beta, \lambda) < x_{n,2}(\alpha, \beta) < x_{n,2}(\alpha, \beta, \lambda) < \dots < x_{n,n-1}(\alpha, \beta) < \\ &< x_{n,n-1}(\alpha, \beta, \lambda) < x_{n,n}(\alpha, \beta) < x_{n,n}(\alpha, \beta, \lambda). \end{aligned} \quad (6.13)$$

Combinando (6.12), (6.13) e o entrelaçamento provado entre  $p_n^{(\alpha, \beta)}(x)$  e  $(x - 1)p_{n-1}^{(\alpha+2, \beta)}(x)$  (caso  $c \leq b$  no Teorema 5.6), obtemos

$$\begin{aligned} x_{n,1}(\alpha, \beta) &< x_{n,1}(\alpha, \beta; \lambda) < x_{n-1,1}(\alpha + 2, \beta) < x_{n,2}(\alpha, \beta) < x_{n,2}(\alpha, \beta; \lambda) < \dots < \\ &< x_{n,n-1}(\alpha, \beta) < x_{n,n-1}(\alpha, \beta; \lambda) < x_{n-1,n-1}(\alpha + 2, \beta) < x_{n,n}(\alpha, \beta) < x_{n,n}(\alpha, \beta; \lambda) < 1. \end{aligned}$$

Vamos mostrar, agora, as relações de limites no Teorema 6.1. Utilizando o Teorema 5.6 e fazendo alguns cálculos obtemos o limite

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda [1 - x_{n,n}(\alpha, \beta; \lambda)] = \frac{-p_n^{(\alpha, \beta)}(1)}{K_{n-1}(1, 1) p_{n-1}^{(\alpha+2, \beta)}(1)}. \quad (6.14)$$

Sabemos que o polinômio de Jacobi mônico aplicado no ponto  $x = 1$  é

$$p_n^{(\alpha, \beta)}(1) = \frac{2^n \Gamma(\alpha + \beta + n + 1) \Gamma(\alpha + n + 1)}{\Gamma(\alpha + 1) \Gamma(\alpha + \beta + 2n + 1)}. \quad (6.15)$$

Substituindo (6.15) e (6.5) em (6.14), obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda [1 - x_{n,n}(\alpha, \beta; \lambda)] &= \frac{-p_n^{(\alpha, \beta)}(1)}{K_{n-1}(1, 1) p_{n-1}^{(\alpha+2, \beta)}(1)} \\ &= \frac{2^n \Gamma(\alpha + \beta + n + 1) \Gamma(\alpha + n + 1)}{\Gamma(\alpha + 1) \Gamma(\alpha + \beta + 2n + 1)} \\ &= \frac{2^{n-1} \Gamma(\alpha + n + 1) \Gamma(\alpha + \beta + n + 1) \Gamma(\alpha + \beta + n + 2) \Gamma(\alpha + n + 2)}{2^{\alpha+\beta+1} \Gamma(n) \Gamma(\alpha + 1) \Gamma(\alpha + 2) \Gamma(\beta + n) \Gamma(\alpha + 3) \Gamma(\alpha + \beta + 2n + 1)} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{2^{\alpha+\beta+2} \Gamma(n) \Gamma(\alpha+2) \Gamma(\alpha+3) \Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+2) \Gamma(\alpha+n+2)} \\
&= g_n(\alpha, \beta).
\end{aligned}$$

Através do Teorema 5.6, encontramos

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda [x_{n-1,k}(\alpha+2, \beta) - x_{n,k}(\alpha, \beta; \lambda)] = \frac{-p_n^{(\alpha, \beta)}(x_{n-1,k}(\alpha+2, \beta))}{K_{n-1}(1, 1)(x_{n-1,k}(\alpha+2, \beta) - 1) \left[ p_{n-1}^{(\alpha+2, \beta)}(x) \right]' \Big|_{x=x_{n-1,k}(\alpha+2, \beta)}}. \quad (6.16)$$

Utilizando a representação provada por Dimitrov, Mello e Rafaeli em [5],

$$\frac{(n+\beta)}{2n} (x-1) P_{n-1}^{(\alpha+2, \beta)}(x) = P_n^{(\alpha, \beta)}(x) - \frac{(\alpha+1)}{n(n+\alpha+\beta+1)} (1+x) [P_n^{(\alpha, \beta)}(x)]', \quad (6.17)$$

e fazendo apenas a normalização, visto que neste caso os polinômios são mônicos, temos

$$\frac{n+\beta}{(n+\alpha+\beta+1)} (x-1) p_{n-1}^{(\alpha+2, \beta)}(x) = p_n^{(\alpha, \beta)}(x) - \frac{\alpha+1}{n(n+\alpha+\beta+1)} (1+x) [p_n^{(\alpha, \beta)}(x)]'. \quad (6.18)$$

Para encontrar uma nova representação para

$$(x_{n-1,k}(\alpha+2, \beta) - 1) \left[ p_{n-1}^{(\alpha+2, \beta)}(x) \right]' \Big|_{x=x_{n-1,k}(\alpha+2, \beta)}$$

derivamos a equação (6.18):

$$\begin{aligned}
&\frac{n+\beta}{(n+\alpha+\beta+1)} p_{n-1}^{(\alpha+2, \beta)}(x) + \frac{n+\beta}{(n+\alpha+\beta+1)} (x-1) \left[ p_{n-1}^{(\alpha+2, \beta)}(x) \right]' = \\
&\left[ 1 - \frac{\alpha+1}{n(n+\alpha+\beta+1)} \right] \left[ p_n^{(\alpha, \beta)}(x) \right]' + \frac{\alpha+1}{n(n+\alpha+\beta+1)} (1+x) \left[ p_n^{(\alpha, \beta)}(x) \right]'' .
\end{aligned} \quad (6.19)$$

Trocando  $x$  pelos zeros de  $p_{n-1}^{(\alpha+2, \beta)}(x)$  em (6.19), obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{n+\beta}{(n+\alpha+\beta+1)} (x_{n-1,k}(\alpha+2, \beta) - 1) \left[ p_{n-1}^{(\alpha+2, \beta)}(x) \right]' \Big|_{x=x_{n-1,k}(\alpha+2, \beta)} = \\
&\left[ 1 - \frac{\alpha+1}{n(n+\alpha+\beta+1)} \right] \left[ p_n^{(\alpha, \beta)}(x) \right]' \Big|_{x=x_{n-1,k}(\alpha+2, \beta)} + \\
&+ \frac{\alpha+1}{n(n+\alpha+\beta+1)} (1+x) \left[ p_n^{(\alpha, \beta)}(x) \right]'' \Big|_{x=x_{n-1,k}(\alpha+2, \beta)}.
\end{aligned} \quad (6.20)$$

Substituindo os zeros de  $p_{n-1}^{(\alpha+2,\beta)}(x)$  em (6.18), e isolando  $\left[ p_n^{(\alpha,\beta)}(x) \right]' \Big|_{x=x_{n-1,k}(\alpha+2,\beta)}$  encontramos

$$\left[ p_n^{(\alpha,\beta)}(x) \right]' \Big|_{x=x_{n-1,k}(\alpha+2,\beta)} = \frac{n(n+\alpha+\beta+1)}{(\alpha+1)(1+x_{n-1,k}(\alpha+2,\beta))} p_n(x_{n-1,k}(\alpha+2,\beta)). \quad (6.21)$$

A equação diferencial de Jacobi é

$$(1-x^2) \left[ p_n^{(\alpha,\beta)} \right]'' + [\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)x] \left[ p_n^{(\alpha,\beta)} \right]' + n(n+\alpha+\beta+1) \left[ p_n^{(\alpha,\beta)} \right] = 0. \quad (6.22)$$

Substituindo na equação diferencial de Jacobi o termo  $\left[ p_n^{(\alpha,\beta)}(x) \right]'$  encontrado em (6.21), obtemos  $\left[ p_n^{(\alpha,\beta)}(x) \right]''$  em função de  $\left[ p_n^{(\alpha,\beta)}(x) \right]$  como segue

$$\left[ p_n^{(\alpha,\beta)}(x) \right]'' = -\frac{n(n+\alpha+\beta+1)(\beta+1)}{(\alpha+1)(1+x)^2} p_n^{(\alpha,\beta)}(x_{n-1,k}(\alpha+2,\beta)). \quad (6.23)$$

Desta maneira substituímos (6.21) e (6.23) em (6.20)

$$\begin{aligned} \frac{n+b}{(n+\alpha+\beta+1)} (x-1) \left[ p_{n-1}^{(\alpha+2,\beta)}(x) \right]' \Big|_{x=x_{n-1,k}(\alpha+2,\beta)} = \\ \left[ 1 - \frac{\alpha+1}{n(n+\alpha+\beta+1)} \right] \frac{n(n+\alpha+\beta+1)}{(\alpha+1)(1+x)} \left[ p_n(x_{n-1,k}(\alpha+2,\beta)) \right] + \\ + \frac{(\alpha+1)(\beta+1)(1+x)}{n(n+\alpha+\beta+1)(\alpha+1)} \frac{n(n+\alpha+\beta+1)}{(1+x^2)} \left[ p_n(x_{n-1,k}(\alpha+2,\beta)) \right]. \end{aligned}$$

Após alguns cálculos simples, segue que

$$\begin{aligned} (x_{n-1,k}(\alpha+2,\beta) - 1) \left[ p_{n-1}^{(\alpha+2,\beta)}(x) \right]' \Big|_{x=x_{n-1,k}(\alpha+2,\beta)} = \\ \frac{(\alpha+n+1)(n+\alpha+\beta+1)}{(1+x)(\alpha+1)} p_n(x_{n-1,k}(\alpha+2,\beta)). \end{aligned} \quad (6.24)$$

Retomando ao limite (6.16), e substituindo em (6.24), temos

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda [x_{n-1,k}(\alpha+2,\beta) - x_{n,k}(\alpha,\beta;\lambda)] = \\ = \frac{p_n^{(\alpha,\beta)}(x_{n-1,k}(\alpha+2,\beta))}{\frac{\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\alpha+\beta+n+1)(\alpha+n+1)(\alpha+\beta+n+1) \left[ p_n^{\alpha,\beta}(x_{n-1,k}(\alpha+2,\beta)) \right]}{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(n)\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\beta+n)(1+x)(1+\alpha)}}. \end{aligned}$$

Fazendo alguns cálculos e utilizando (6.9) segue o resultado desejado,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda [x_{n-1,k}(\alpha + 2, \beta) - x_{n,k}(\alpha, \beta; \lambda)] = \frac{[1 + x_{n-1,k}(\alpha + 2, \beta)] g_n(\alpha, \beta)}{2(\alpha + 2)}. \quad \blacksquare$$

Para ilustrar o resultado do Teorema 6.1, observamos o gráfico do polinômio  $\hat{p}_3^{(1,1)}(\lambda + \epsilon, 1; x)$ , fixando  $\lambda = 0$  para alguns valores de  $\epsilon > 0$ , observamos a monotonicidade dos zeros de  $\hat{p}_3^{(1,1)}(\lambda + \epsilon, 1; x)$  com relação a  $\lambda$ .

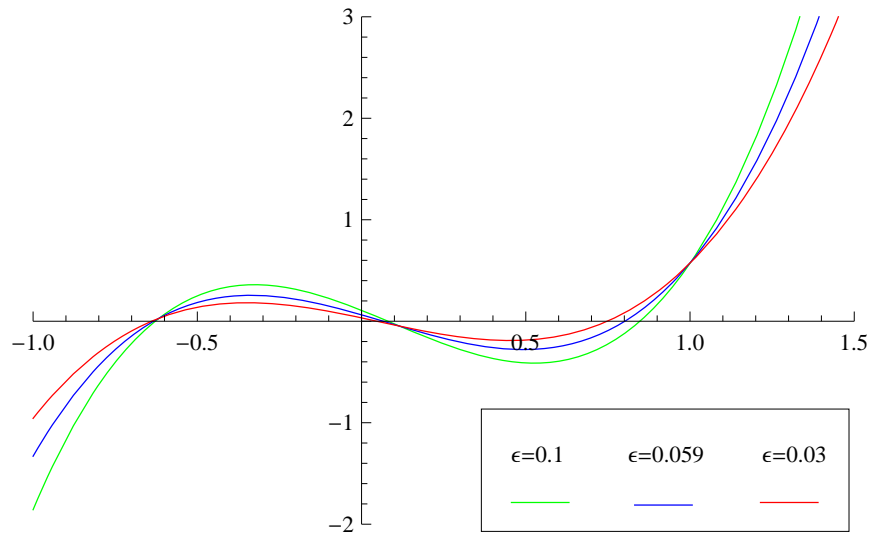


Figura 6.1: Gráfico de  $\hat{p}_3^{(1,1)}(\lambda + \epsilon, 1; x)$

Na Tabela 6.1 apresentamos os zeros de  $\hat{p}_3^{(1,1)}(\lambda, 1; x)$  para alguns valores de  $\lambda$ . Notamos que todos os zeros desse polinômio crescem quando  $\lambda$  cresce, além disso, observamos que o último zero converge para 1 e os outros convergem para os zeros de  $\hat{p}_2^{(3,1)}(x)$  que são  $x_{2,1} = -0.615963$  e  $x_{2,2} = 0.115963$ .

$\lambda$	$x_{3,1}(1, 1, \lambda)$	$x_{3,2}(1, 1, \lambda)$	$x_{3,3}(1, 1, \lambda)$
0	-0,654654	0	0,654654
1	-0,617598	0,111189	0,975159
10	-0,616132	0,115468	0,997353
100	-0,61598	0,115913	0,999734
1000	-0,615964	0,115958	0,999973

Tabela 6.1: Zeros de  $\hat{p}_3^{(1,1)}(\lambda, 1; x)$

Ilustramos agora este resultado para um polinômio de grau par,  $\hat{p}_4^{(1,1)}(\lambda + \epsilon, 1; x)$ , fixando  $\lambda = 0$  para alguns valores de  $\epsilon > 0$ . Observamos a monotonicidade dos zeros de  $\hat{p}_4^{(1,1)}(\lambda + \epsilon, 1; x)$  com relação a  $\lambda$ , tomamos  $\alpha = \beta = 1$  apenas para uma melhor visualização gráfica.

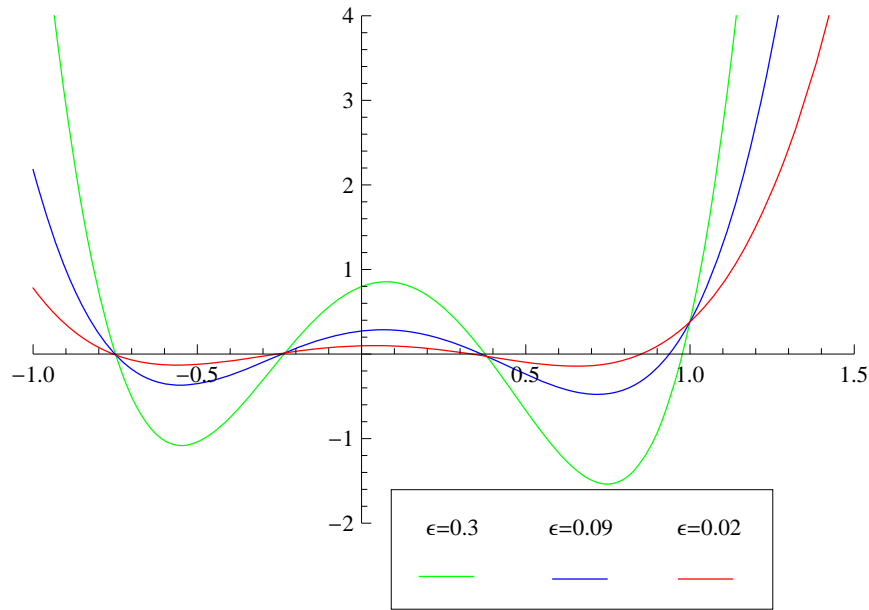


Figura 6.2: Gráfico de  $\hat{p}_4^{(1,1)}(\lambda + \epsilon, 1; x)$

Na Tabela 6.2 apresentamos os zeros de  $\hat{p}_4^{(1,1)}(\lambda, 1; x)$  para alguns valores de  $\lambda$ . Notamos que todos os zeros desse polinômio são crescentes quando  $\lambda$  cresce, além disso, observamos que o último zero converge para 1, e os outros convergem para os zeros de  $\hat{p}_3^{(3,1)}(x)$  que são  $x_{3,1} = -0.748218$ ,  $x_{3,2} = -0.23345$  e  $x = 0.381668$ .

$\lambda$	$x_{4,1}(2, 3, \lambda)$	$x_{4,2}(2, 3, \lambda)$	$x_{4,3}(2, 3, \lambda)$	$x_{4,4}(2, 3, \lambda)$
0	-0.765055	-0.285232	0.285232	0.765055
1	-0.748532	-0.234406	0.379942	0.992607
10	-0.74825	-0.233547	0.381493	0.99924
100	-0.748221	-0.23346	0.381651	0.999924
1000	-0.748218	-0.233451	0.381667	0.999992

Tabela 6.2: Zeros de  $\hat{p}_4^{(1,1)}(\lambda, 1; x)$

### 6.1.2 Propriedades dos polinômios $p_n^{(\alpha, \beta)}(\lambda, -1; x)$

Analogamente, a fórmula de conexão para  $\hat{p}_n^{(\alpha, \beta)}(\lambda, -1; x)$  é dada da seguinte maneira

$$\hat{p}_n^{(\alpha, \beta)}(\lambda, -1; x) = p_n^{(\alpha, \beta)}(x) + \lambda K_{n-1}(-1, -1)(x+1)p_{n-1}^{(\alpha, \beta+2)}(x). \quad (6.25)$$

Assim, calculamos

$$K_{n-1}(-1, -1) = \frac{1}{\|p_k\|^2} p_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(-1) [p_n^{(\alpha, \beta)}(-1)]' - p_n^{(\alpha, \beta)}(-1) [p_{n-1}^{(\alpha, \beta)}(-1)]'$$

com o intuito de facilitar os cálculos, usaremos (3.4) e (3.7), para obtermos

$$K_{n-1}(-1, -1) = \frac{[\Gamma(\alpha + \beta + 2n - 1)]^2 (\alpha + \beta + 2n - 1)}{2^{2n+\alpha+\beta-1} (n-1)! \Gamma(\alpha + \beta + n) \Gamma(\alpha + n) \Gamma(\beta + n)} \times$$

$$\left[ \frac{2^{n-1} (-1)^{n-1} \Gamma(\alpha + \beta + n) \Gamma(\beta + n)}{\Gamma(\beta + 1) \Gamma(\alpha + \beta + 2n - 1)} (n) \frac{2^{n-1} (-1)^{n-1} \Gamma(\alpha + \beta + n + 2) \Gamma(\beta + n + 1)}{\Gamma(\beta + 2) \Gamma(\alpha + \beta + 2n + 1)} + \right.$$

$$\left. + \frac{2^n (-1)^n \Gamma(\alpha + \beta + n + 1) \Gamma(\beta + n + 1)}{\Gamma(\beta + 1) \Gamma(\alpha + \beta + 2n + 1)} (n-1) \frac{2^{n-2} (-1)^{n-2} \Gamma(\alpha + \beta + n + 1) \Gamma(\beta + n)}{\Gamma(\beta + 2) \Gamma(\alpha + \beta + 2n - 1)} \right].$$

Fazendo algumas simplificações, segue que,

$$K_{n-1}(-1, -1) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta + n + 1) \Gamma(\beta + n + 1)}{2^{\alpha+\beta+1} \Gamma(n) \Gamma(\alpha + n) \Gamma(\beta + 1) \Gamma(\beta + 2)}. \quad (6.26)$$

Feito isto, temos condições para de fato analisar o comportamento dos zeros dos polinômios tipo Jacobi, quando adicionamos à medida  $d\phi_{\alpha,\beta}$  o termo  $\lambda\delta(x+1)$ .

**Teorema 6.2** *Sejam  $\alpha, \beta > -1$  e sejam  $x_{n,k}(\alpha, \beta)$  e  $x_{n,k}(\alpha, \beta; \lambda) := x_{n,k}(\alpha, \beta; -1, \lambda)$ ,  $k = 1, \dots, n$ , os zeros de  $p_n^{(\alpha,\beta)}(x)$  e  $p_n^{(\alpha,\beta)}(\lambda, -1; x)$ , respectivamente. Então vale a seguinte propriedade de entrelaçamento:*

$$-1 < x_{n,1}(\alpha, \beta; \lambda) < x_{n,1}(\alpha, \beta) < x_{n-1,1}(\alpha, \beta + 2) < x_{n,2}(\alpha, \beta; \lambda) < x_{n,2}(\alpha, \beta) < \dots$$

$$< x_{n-1,n-1}(\alpha, \beta + 2) < x_{n,n}(\alpha, \beta; \lambda) < x_{n,n}(\alpha, \beta),$$

Além disso, cada  $x_{n,k}(\alpha, \beta; \lambda)$  é uma função decrescente de  $\lambda$  e, para  $k = 1, \dots, n-1$ ,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} x_{n,1}(\alpha, \beta; \lambda) = -1, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} x_{n,k+1}(\alpha, \beta; \lambda) = x_{n-1,k}(\alpha, \beta + 2), \quad (6.27)$$

e,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda [x_{n,1}(\alpha, \beta; \lambda) + 1] = h_n(\alpha, \beta)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda [x_{n,k+1}(\alpha, \beta; \lambda) - x_{n-1,k}(\alpha, \beta + 2)] = \frac{[1 - x_{n-1,k}(\alpha, \beta + 2)] h_n(\alpha, \beta)}{2(\beta + 2)}, \quad (6.28)$$

onde

$$h_n(\alpha, \beta) = \frac{2^{\alpha+\beta+2} \Gamma(n) \Gamma(\beta + 2) \Gamma(\beta + 3) \Gamma(n + \alpha)}{\Gamma(n + \beta + 2) \Gamma(n + \alpha + \beta + 2)}. \quad (6.29)$$

**Demonstração:** No Teorema 5.6, foi demonstrado o entrelaçamento entre os zeros de  $p_n^{(\alpha,\beta)}(x)$  e  $(x+1)p_{n-1}^{(\alpha,\beta+2)}(x)$ , falta provar  $x_{n,1}(\alpha, \beta; \lambda) < x_{n,1}(\alpha, \beta) < x_{n-1,1}(\alpha, \beta + 2) < \dots < x_{n-1,n-1}(\alpha, \beta + 2) < x_{n,n}(\alpha, \beta; \lambda) < x_{n,n}(\alpha, \beta)$ , isto é, que os zeros de  $\hat{p}_n^{(\alpha,\beta)}(\lambda, -1; x)$  se entrelaçam ao mesmo tempo com os zeros de  $(x+1)p_{n-1}^{(\alpha,\beta+2)}(x)$  e  $p_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ . Para isso tomemos a fórmula de conexão (6.25). Substituindo  $x$  pelos zeros de  $(x+1)p_{n-1}^{(\alpha,\beta+2)}(x)$

obtemos

$$\begin{aligned} \text{sinal} \left[ \hat{p}_n^{(\alpha, \beta)}(\lambda, -1; x_{n-1, k}(\alpha, \beta + 2)) \right] &= \text{sinal} \left[ p_n^{(\alpha, \beta)}(x_{n-1, k}(\alpha, \beta + 2)) \right] \quad (6.30) \\ &= (-1)^{n-k}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \text{sinal} \left[ \hat{p}_n^{(\alpha, \beta)}(\lambda, -1; -1) \right] &= \text{sinal} \left[ p_n^{(\alpha, \beta)}(-1) \right] \quad (6.31) \\ &= (-1)^n. \end{aligned}$$

Assim, localizamos  $n-1$  zeros de  $\hat{p}_n^{(\alpha, \beta)}(\lambda, -1; x)$ , em outras palavras, em cada intervalo  $(x_{n-1, k-1}(\alpha, \beta + 2), x_{n-1, k}(\alpha, \beta + 2))$ , com  $k = 2, \dots, n-1$  e  $(-1, x_{n-1, 1}(\alpha, \beta + 2))$  encontramos um zero de  $\hat{p}_n^{(\alpha, \beta)}(\lambda, 1; x)$ . Resta-nos localizar um zero, para isso tomemos  $\hat{p}_n^{(\alpha, \beta)}(\lambda, -1; x_{n-1, n-1}(\alpha, \beta + 2))$ , como,  $\hat{p}_n^{(\alpha, \beta)}(\lambda, -1; x_{n-1, n-1}(\alpha, \beta + 2)) < 0$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \hat{p}_n^{(\alpha, \beta)}(\lambda, -1; x) = +\infty$ . Concluimos que, existe um zero de  $\hat{p}_n^{(\alpha, \beta)}(\lambda, -1; x)$  à direita de  $x_{n-1, n-1}(\alpha, \beta + 2)$ . Donde obtemos o seguinte entrelaçamento para os zeros de  $\hat{p}_n^{(\alpha, \beta)}(\lambda, -1; x)$  e  $p_{n-1}^{(\alpha, \beta+2)}(x)$ ,

$$\begin{aligned} x_{n, 1}(\alpha, \beta, \lambda) &< x_{n-1, 1}(\alpha, \beta + 2) < x_{n, 2}(\alpha, \beta, \lambda) < x_{n-1, 2}(\alpha, \beta + 2) < \dots < \\ &< x_{n, n-1}(\alpha, \beta, \lambda) < x_{n-1, n-1}(\alpha, \beta + 2) < x_{n, n}(\alpha, \beta, \lambda). \quad (6.32) \end{aligned}$$

Aplicando, agora, os zeros de  $p_n^{(\alpha, \beta)}(x)$  em (6.25), temos

$$\hat{p}_n^{(\alpha, \beta)}(\lambda, -1; x_{n, j}(\alpha, \beta)) = \lambda K_{n-1}(-1, -1)(x_{n, j}(\alpha, \beta) + 1) p_{n-1}^{(\alpha, \beta+2)}(x_{n, j}(\alpha, \beta)),$$

para  $j = 1, \dots, n$ .

Como  $\lambda$  é um número não negativo,  $K_{n-1}(-1, -1) > 0$ ,  $(x_{n, j}(\alpha, \beta) + 1) > 0$  e ainda  $\text{sinal} \left[ p_{n-1}^{(\alpha, \beta+2)}(x_{n, j}(\alpha, \beta)) \right] = (-1)^{n-j}$ , segue que

$$\begin{aligned} \text{sinal} \left[ \hat{p}_n^{(\alpha, \beta)}(\lambda, -1; x_{n, j}(\alpha, \beta)) \right] &= \\ &= \text{sinal} \left[ \lambda K_{n-1}(-1, -1)(x_{n, j}(\alpha, \beta) + 1) p_{n-1}^{(\alpha, \beta+2)}(x_{n, j}(\alpha, \beta)) \right] \\ &= (-1)^{n-j}, \quad j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Em cada intervalo  $(x_{n, j-1}(\alpha, \beta), x_{n, j}(\alpha, \beta))$ ,  $j = 2, \dots, n$  encontramos um zero de  $\hat{p}_n^{(\alpha, \beta)}(\lambda, -1; x)$ , o que significa que encontramos  $n-1$  zeros.

Tomando  $\hat{p}_n^{(\alpha, \beta)}(\lambda, -1; x_{n, n}(\alpha, \beta))$ , temos que

- se  $n$  é par,  $\hat{p}_n^{(\alpha, \beta)}(\lambda, -1; x_{n, 1}(\alpha, \beta)) < 0$  e  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \hat{p}_n^{(\alpha, \beta)}(\lambda, -1; x(\alpha, \beta)) = +\infty$ ;
- se  $n$  é ímpar,  $\hat{p}_n^{(\alpha, \beta)}(\lambda, -1; x_{n, 1}(\alpha, \beta)) > 0$  e  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \hat{p}_n^{(\alpha, \beta)}(\lambda, -1; x(\alpha, \beta)) = -\infty$ .

Concluimos então, que existe um zero de  $\hat{p}_n^{(\alpha, \beta)}(\lambda, -1; x)$  à esquerda de  $x_{n,1}(\alpha, \beta)$ , o que resulta, no seguinte entrelaçamento entre os zeros de  $p_n^{(\alpha, \beta)}(x)$  e  $\hat{p}_n^{(\alpha, \beta)}(\lambda, -1; x)$

$$\begin{aligned} x_{n,1}(\alpha, \beta, \lambda) &< x_{n,1}(\alpha, \beta) < x_{n,2}(\alpha, \beta, \lambda) < x_{n,2}(\alpha, \beta) < \cdots < \\ &< x_{n,n-1}(\alpha, \beta, \lambda) < x_{n,n-1}(\alpha, \beta) < x_{n,n}(\alpha, \beta, \lambda) < x_{n,n}(\alpha, \beta). \end{aligned} \quad (6.33)$$

Combinando (6.32), (6.33) e o entrelaçamento obtido no Teorema 5.6 quando  $c \leq a$  temos

$$\begin{aligned} -1 < x_{n,1}(\alpha, \beta; \lambda) < x_{n,1}(\alpha, \beta) < x_{n-1}(\alpha, \beta + 2) < x_{n,2}(\alpha, \beta; \lambda) < x_{n,2}(\alpha, \beta) < \cdots \\ &< x_{n-1,n-1}(\alpha, \beta + 2) < x_{n,n}(\alpha, \beta; \lambda) < x_{n,n}(\alpha, \beta). \end{aligned}$$

Vamos mostrar, agora, as relações de limite do Teorema 6.2, através do Teorema 5.6 e fazendo alguns cálculos chegaremos aos limites decritos em (6.27) e (6.28). Seja

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda [x_{n,1}(\alpha, \beta; \lambda) + 1] = \frac{-p_n^{(\alpha, \beta)}(-1)}{K_{n-1}(-1, -1) p_{n-1}^{(\alpha, \beta+2)}(-1)}.$$

Sabemos que o polinômio de Jacobi mônico aplicado no ponto  $x = -1$  é

$$p_n^{\alpha, \beta}(-1) = \frac{(-1)^n 2^n \Gamma(\alpha + \beta + n + 1) \Gamma(\beta + n + 1)}{\Gamma(\beta + 1) \Gamma(\alpha + \beta + 2n + 1)}. \quad (6.34)$$

Em (6.26) encontramos  $K_{n-1}(-1, -1)$ , bastando agora calcular

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda [x_{n,1}(\alpha, \beta; \lambda) + 1] &= \frac{-p_n^{(\alpha, \beta)}(-1)}{K_{n-1}(-1, -1) p_{n-1}^{(\alpha, \beta+2)}(-1)} \\ &= \frac{2^n (-1)^n \Gamma(\alpha + \beta + n + 1) \Gamma(\beta + n + 1)}{\Gamma(\beta + 1) \Gamma(\alpha + \beta + 2n + 1)} \\ &= \frac{2^{n-1} (-1)^{n-1} \Gamma(\beta + n + 1) \Gamma(\alpha + \beta + n + 1) \Gamma(\alpha + \beta + n + 2) \Gamma(\beta + n + 2)}{2^{\alpha+\beta+1} \Gamma(n) \Gamma(\beta + 1) \Gamma(\beta + 2) \Gamma(\alpha + n) \Gamma(\beta + 3) \Gamma(\alpha + \beta + 2n + 1)} \\ &= \frac{2^{\alpha+\beta+2} \Gamma(n) \Gamma(\beta + 2) \Gamma(\beta + 3) \Gamma(\alpha + n)}{\Gamma(\alpha + \beta + n + 2) \Gamma(\beta + n + 2)} \\ &= h_n(\alpha, \beta). \end{aligned}$$

Seguindo o mesmo raciocínio, temos

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda [x_{n,k+1}(\alpha, \beta; \lambda) x_{n-1,k}(\alpha, \beta + 2)] &= \\ &= \frac{-p_n^{(\alpha, \beta)}(x_{n-1,k}(\alpha, \beta + 2))}{K_{n-1}(-1, -1) (x_{n-1,k}(\alpha, \beta + 2)) \left[ p_{n-1}^{(\alpha, \beta+2)}(x) \right]' \Big|_{x=x_{n-1,k}(\alpha, \beta+2)}}. \end{aligned} \quad (6.35)$$

Vamos adotar novamente (6.17), onde adequamos para o nosso propósito em (6.18). Além disso, para este caso usamos  $P_n^{(\alpha,\beta)}(-x) = (-1)^n P_n^{(\beta,\alpha)}(x)$ , chamada relação de simetria para os polinômios de Jacobi, estabelecemos

$$p_n^{(\alpha+2,\beta)}(-x) = (-1)^n p_n^{(\beta,\alpha+2)}(x), \quad (6.36)$$

trocando  $\alpha$  por  $\beta$  em (6.36) e (6.18), obtemos

$$\frac{n + \alpha}{(n + \alpha + \beta + 1)} (1 + x) p_{n-1}^{(\alpha,\beta+2)}(x) = p_n^{(\alpha,\beta)}(x) - \frac{\beta + 1}{n(n + \alpha + \beta + 1)} (x - 1) [p_n^{(\alpha,\beta)}(x)]'. \quad (6.37)$$

Partindo desta equação, construiremos uma forma simples de escrever

$$(1 + x_{n-1,k}(\alpha, \beta + 2)) \left[ p_{n-1}^{(\alpha,\beta+2)}(x) \right]' \Big|_{x=x_{n-1,k}(\alpha,\beta+2)}.$$

Para isso, derivamos (6.37), logo

$$\begin{aligned} & \frac{n + \alpha}{(n + \alpha + \beta + 1)} p_{n-1}^{(\alpha,\beta+2)}(x) + \frac{n + \alpha}{(n + \alpha + \beta + 1)} (1 + x) \left[ p_{n-1}^{(\alpha,\beta+2)}(x) \right]' = \\ & \left[ p_n^{(\alpha,\beta)}(x) \right]' - \frac{\beta + 1}{n(n + \alpha + \beta + 1)} \left[ p_n^{(\alpha,\beta)}(x) \right]' - \frac{\beta + 1}{n(n + \alpha + \beta + 1)} (x - 1) \left[ p_n^{(\alpha,\beta)}(x) \right]'' . \end{aligned} \quad (6.38)$$

Substituindo, os zeros de  $p_{n-1}^{(\alpha,\beta+2)}(x_{n-1,k}(\alpha, \beta + 2))$  em (6.38), obtemos

$$\left[ p_n^{(\alpha,\beta)}(x) \right]' \Big|_{x=x_{n-1,k}(\alpha,\beta+2)} = \frac{n(n + \alpha + \beta + 1)}{(\beta + 1)(x - 1)} p_n(x_{n-1,k}(\alpha, \beta + 2)). \quad (6.39)$$

Aplicando (6.39) na equação diferencial de Jacobi, e fazendo alguns cálculos, temos

$$\begin{aligned} & \left[ p_n^{(\alpha,\beta)}(x) \right]'' \Big|_{x=x_{n-1,k}(\alpha,\beta+2)} = \\ & - \frac{n(n + \alpha + \beta + 1)(-\alpha - 1)}{(\beta + 1)(x_{n-1,k}(\alpha, \beta + 2) - 1)(1 - x_{n-1,k}(\alpha, \beta + 2))} p_n^{(\alpha,\beta)}(x_{n-1,k}(\alpha, \beta + 2)). \end{aligned}$$

Feito isso podemos retomar a equação (6.38) substituindo (6.39) e (6.40) de tal forma que,

$$\begin{aligned} & (1 + x_{n-1,k}(\alpha, \beta + 2)) \left[ p_{n-1}^{(\alpha,\beta+2)}(x) \right]' \Big|_{x=x_{n-1,k}(\alpha,\beta+2)} = \\ & \frac{(n + \beta + 1)(n + \beta + \alpha + 1)}{(\beta + 1)(x_{n-1,k}(\alpha, \beta + 2) - 1)} p_n(x_{n-1,k}(\alpha, \beta + 2)). \end{aligned} \quad (6.40)$$



Enfim, substituindo (6.40) em (6.35),

$$\begin{aligned}
& \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda [x_{n,k+1}(\alpha, \beta; \lambda) x_{n-1,k}(\alpha, \beta + 2)] = \\
&= \frac{-p_n^{(\alpha, \beta)}(x_{n-1,k}(\alpha, \beta + 2))}{K_{n-1}(-1, -1)(x_{n-1,k}(\alpha, \beta + 2)) \left[ p_{n-1}^{(\alpha, \beta + 2)}(x) \right]' \Big|_{x=x_{n-1,k}(\alpha, \beta + 2)}} \\
&= \frac{p_n^{(\alpha, \beta)}(x_{n-1,k}(\alpha, \beta + 2))}{\frac{\Gamma(n + \beta + 1) \Gamma(n + \alpha + \beta + 1) [-(n + \beta + 1)(n + \alpha + \beta + 1)] p_n^{(\alpha, \beta)}(x_{n-1,k}(\alpha, \beta))}{2^{\alpha + \beta + 1} \Gamma(n) \Gamma(\beta + 1) \Gamma(\beta + 2) \Gamma(n + \alpha) (\beta + 1) (1 - x_{n-1,k}(\alpha, \beta + 2))}}
\end{aligned}$$

segue daí o limite desejado,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda [x_{n,k+1}(\alpha, \beta; \lambda) x_{n-1,k}(\alpha, \beta + 2)] = \frac{(x_{n-1,k}(\alpha, \beta + 2)) h_n}{2(\beta + 2)}. \quad \blacksquare$$

Para ilustrar o resultado do Teorema 6.2, o gráfico do polinômio  $\hat{p}_3^{(0,3)}(\lambda + \epsilon, -1; x)$ , fixando  $\lambda = 0$  e para valores de  $\epsilon > 0$ , notamos o comportamento monótono dos zeros de  $\hat{p}_3^{(0,3)}(\lambda + \epsilon, 1; x)$  com relação a  $\lambda$ .

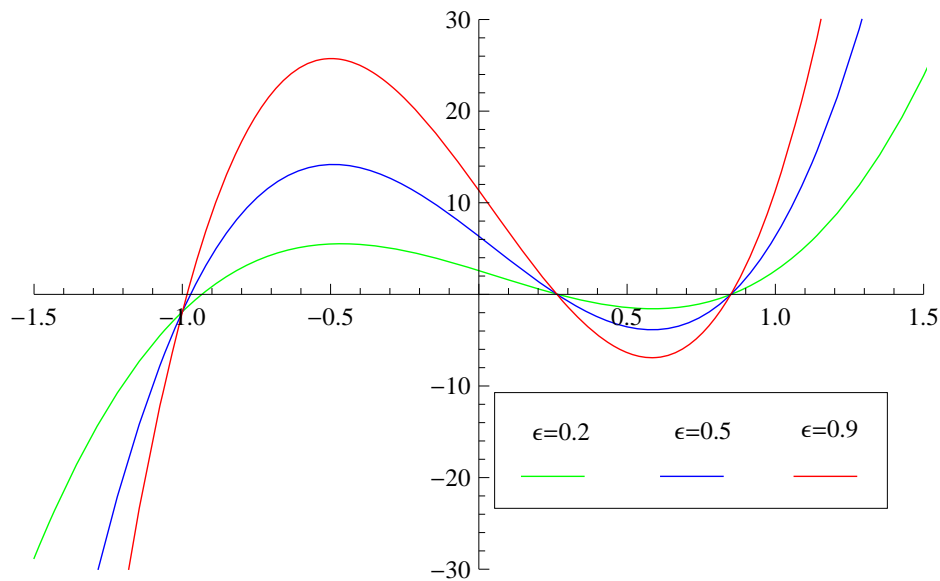


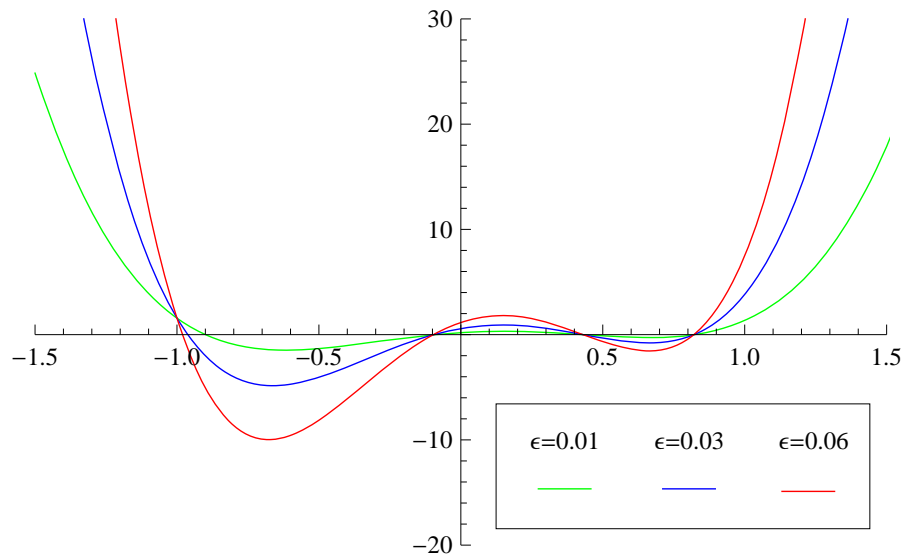
Figura 6.3: Gráfico de  $\hat{p}_3^{(0,3)}(\lambda + \epsilon, -1; x)$ .

Na Tabela 6.3, apresentamos os zeros de  $\hat{p}_3^{(0,3)}(\lambda, -1; x)$  para alguns valores de  $\lambda$ . Notamos que todos os zeros desse polinômio decrescem quando  $\lambda$  cresce, além disso, observamos que o primeiro zero converge para -1, e os outros convergem para os zeros de  $\hat{p}_2^{(0,5)}(x)$  que são  $x_{2,1} = -0.261583$  e  $x_{2,2} = 0.849528$ .

$\lambda$	$x_{3,1}(0, 3, \lambda)$	$x_{3,2}(0, 3, \lambda)$	$x_{3,3}(0, 3, \lambda)$
0	-0,273471	0,397623	0,875848
1	-0,985755	0,262648	0,849745
10	-0,998551	0,26169	0,84955
100	-0,99985	0,261594	0,84953
1000	-0,999985	0,261584	0,849528

Tabela 6.3: Zeros de  $\hat{p}_3^{(0,3)}(\lambda, -1; x)$ 

Ilustramos, agora, o gráfico de um polinômio de grau par,  $\hat{p}_4^{(1,4)}(\lambda + \epsilon, -1; x)$ , fixando  $\lambda = 0$  e para valores de  $\epsilon > 0$ , notamos o comportamento monótono dos zeros de  $\hat{p}_4^{(1,4)}(\lambda + \epsilon, -1; x)$  com relação a  $\lambda$ .

Figura 6.4: Gráfico de  $\hat{p}_4^{(1,4)}(\lambda + \epsilon, -1; x)$ 

Na Tabela 6.4, apresentamos os zeros de  $\hat{p}_4^{(1,4)}(\lambda, -1; x)$  para alguns valores de  $\lambda$ . Notamos que todos os zeros desse polinômio são decrescentes quando  $\lambda$  cresce, além disso, observamos que o primeiro zero converge para -1, e os outros convergem para os zeros de  $\hat{p}_3^{(1,6)}(x)$  que são  $x_{3,1} = -0.0986717$ ,  $x_{3,2} = 0.431726$  e  $x_{3,3} = 0.820792$ .

$\lambda$	$x_{4,1}(1, 4, \lambda)$	$x_{4,2}(1, 4, \lambda)$	$x_{4,3}(1, 4, \lambda)$	$x_{4,4}(1, 4, \lambda)$
0	-0,45191	-0,0370207	0,497091	0,840875
1	-0,998793	-0,098561	0,431784	0,82081
10	-0,999879	-0,0986606	0,431732	0,820793
100	-0,999988	-0,0986706	0,431727	0,820792
1000	-0,999999	-0,0986716	0,431726	0,820792

Tabela 6.4: Convergência de  $\hat{p}_4^{(1,4)}(\lambda, -1; x)$  quando  $\lambda \rightarrow \infty$ .

## 6.2 Polinômios tipo Laguerre

Seja  $\{p_n^{(\alpha)}(x)\}_{n=0}^{\infty}$  uma sequência de polinômios mônicos de Laguerre que são ortogonais com relação à medida  $d\phi_{\alpha}(x) = x^{\alpha}e^{-x}dx$ ,  $\alpha > -1$ . Vamos considerar a perturbação de Uvarov em  $d\phi_{\alpha}(x)$  com  $c = 0$ , ou seja,

$$d\phi(\lambda, 0; x) = d\phi_{\alpha}(x) + \lambda\delta(x), \lambda \geq 0. \quad (6.41)$$

Assim, obtemos uma nova família de polinômios  $\{p_n^{(\alpha)}(\lambda, 0; x)\}$  ortogonais com relação a medida  $d\phi(\lambda, 0; x)$ , conhecidos como polinômios tipo Laguerre ou Laguerre Koornwinder. Fazemos a normalização introduzida no Teorema 5.5, em que  $\hat{p}_n^{(\alpha)}(\lambda, 0; x) = \kappa_n p_n^{(\alpha)}(\lambda, 0; x)$  e  $\kappa_n = 1 + \lambda K_{n-1}(0, 0)$ , e dessa maneira, a fórmula de conexão para os polinômios  $\hat{p}_n^{(\alpha)}(\lambda, 0; x)$  é dada por

$$\hat{p}_n^{(\alpha)}(\lambda, 0; x) = p_n^{(\alpha)}(x) + \lambda K_{n-1}(0, 0) x p_{n-1}^{(\alpha+2)}(x). \quad (6.42)$$

Inicialmente, calculamos

$$K_{n-1}(0, 0) = \frac{1}{\|p_{n-1}\|^2} p_{n-1}^{(\alpha)}(0) [p_n^{(\alpha)}(0)]' - p_n^{(\alpha)}(0) [p_{n-1}^{(\alpha)}(0)]'. \quad (6.43)$$

É conhecido que esta é a fórmula confluyente da Identidade de Christoffel Darboux aplicada no ponto  $x = 0$ . Afim de facilitar nossos cálculos vamos escrever (6.43) de maneira apropriada utilizando (3.9) e (3.12)

$$K_{n-1}(0, 0) = \frac{1}{(n-1)! \Gamma(\alpha+n)} \left[ \frac{(n-1)! \Gamma(n+\alpha)}{(-1)^{n-1} \Gamma(\alpha+1) \Gamma(n)} \binom{n}{n} \frac{(n-1)! \Gamma(n+\alpha+1)}{(-1)^{n-1} \Gamma(\alpha+2) \Gamma(n)} - \frac{n! \Gamma(n+\alpha+1)}{(-1)^n \Gamma(\alpha+1) \Gamma(n+1)} \binom{n-1}{n-1} \frac{(n-2)! \Gamma(n+\alpha)}{(-1)^{n-2} \Gamma(\alpha+2) \Gamma(n-1)} \right].$$

Colocando alguns termos em evidência e utilizando  $\Gamma(x) = (x+1)!$  propriedade da função Gama, após algumas simplificações obtemos

$$K_{n-1}(0,0) = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+2)\Gamma(n)}. \quad (6.44)$$

Com isso podemos analisar o comportamento dos zeros dos polinômios tipo Laguerre com relação a perturbação de Uvarov quando  $c = 0$ .

**Teorema 6.3** *Seja  $x_{n,k}(\alpha)$  e  $x_{n,k}(\alpha, \lambda) := x_{n,k}(\alpha; 0, \lambda)$ , com  $k = 1, \dots, n$  para todo  $\alpha > -1$ , os zeros de  $p_n^{(\alpha)}(x)$  e  $p_n^{(\alpha)}(\lambda, 0; x)$ , respectivamente. Então, vale a seguinte propriedade de entrelaçamento:*

$$0 < x_{n,1}(\alpha; \lambda) < x_{n,1}(\alpha) < x_{n-1,1}(\alpha+2) < x_{n,2}(\alpha; \lambda) < x_{n,2}(\alpha) < \dots < \\ < x_{n-1,n-1}(\alpha+2) < x_{n,n}(\alpha; \lambda) < x_{n,n}(\alpha).$$

Além disso, cada  $x_{n,k}(\alpha; \lambda)$  é função decrescente de  $\lambda$  e, para  $k = 1, \dots, n-1$ ,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} x_{n,1}(\alpha; \lambda) = 0, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} x_{n,k+1}(\alpha; \lambda) = x_{n-1,k}(\alpha+2) \quad (6.45)$$

e,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda x_{n,1}(\alpha; \lambda) = g_n(\alpha), \quad (6.46)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda [x_{n,k+1}(\alpha; \lambda) - x_{n-1,k}(\alpha+2)] = \frac{g_n(\alpha)}{\alpha+2}, \quad (6.47)$$

onde

$$g_n = \frac{\Gamma(n)\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\alpha+3)}{\Gamma(n+\alpha+2)}. \quad (6.48)$$

**Demonstração:** Como no Teorema 5.6 foi demonstrado o entrelaçamento dos zeros de  $p_n^{(\alpha)}(x)$  e  $xp_{n-1}^{(\alpha+2)}(x)$ , falta provar que os zeros de  $\hat{p}_n^{(\alpha)}(\lambda; x)$  se entrelaçam ao mesmo tempo com os zeros de  $xp_{n-1}^{(\alpha)}(x)$  e  $p_n^{(\alpha)}(x)$ , ou seja,  $0 < x_{n,1}(\alpha; \lambda) < x_{n,1}(\alpha) < x_{n-1,1}(\alpha+2) < \dots < x_{n-1,n-1}(\alpha+2) < x_{n,n}(\alpha; \lambda) < x_{n,n}(\alpha)$ .

Para isso, tomemos a fórmula de conexão (6.42), substituindo  $x$  pelos zeros de  $xp_{n-1}^{(\alpha)}(x)$  obtemos

$$\hat{p}_n^{(\alpha)}(\lambda; x_{n-1,k}(\alpha+2)) = p_n^{(\alpha)}(x_{n-1,k}(\alpha+2))$$

e,

$$\hat{p}_n^{(\alpha)}(\lambda; 0) = p_n^{(\alpha)}(0)$$

isso implica em

$$\begin{aligned} \text{sinal } [\hat{p}_n^{(\alpha)}(\lambda; x_{n-1,k}(\alpha+2))] &= \text{sinal } [p_n^{(\alpha)}(x_{n-1,k}(\alpha+2))] \\ &= (-1)^{n-k}, \quad k = 1, \dots, n-1 \end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned} \text{sinal } [\hat{p}_n^{(\alpha)}(\lambda; 0)] &= \text{sinal } [p_n^{(\alpha)}(0)] \\ &= (-1)^n. \end{aligned}$$

Com isso, localizamos  $n-1$  zeros de  $\hat{p}_n^{(\alpha)}(\lambda; x)$ , ou seja, em cada intervalo  $(x_{n-1,k-1}(\alpha+2), x_{n-1,k}(\alpha+2))$ , com  $k = 2, \dots, (n-1)$  e  $(0, x_{n-1,1}(\alpha+2))$ , encontramos um zero de  $\hat{p}_n^{(\alpha)}(\lambda; x)$ . Então,  $\hat{p}_n^{(\alpha)}(\lambda; x_{n-1,n-1}(\alpha+2)) < 0$  e  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \hat{p}_n^{(\alpha)}(\lambda; x) = +\infty$ . Logo, existe um zero de  $\hat{p}_n^{(\alpha)}(\lambda; x)$  à direita de  $x_{n-1,n-1}(\alpha+2)$ . Assim, chegamos ao seguinte entrelaçamento para os zeros de  $\hat{p}_n^{(\alpha)}(\lambda; x)$  e  $xp_{n-1}^{(\alpha)}(x)$

$$0 < x_{n,1}(\alpha; \lambda) < x_{n-1,1}(\alpha+2) < \dots < x_{n-1,n-1}(\alpha+2) < x_{n,n}(\alpha; \lambda) \quad (6.49)$$

Por outro lado, ao aplicarmos os zeros de  $p_n^{(\alpha)}(x)$  em (6.42), obtemos

$$\hat{p}_n^{(\alpha)}(\lambda; x_{n,j}(\alpha)) = \lambda K_{n-1}(0, 0)(x_{n,j}(\alpha)) p_{n-1}^{(\alpha+2)}(x_{n,j}(\alpha)), \quad j = 1, \dots, n.$$

disto segue, que

$$\begin{aligned} \text{sinal } [\hat{p}_n^{(\alpha)}(\lambda; x_{n,j}(\alpha))] &= \text{sinal } [\lambda K_{n-1}(0, 0)(x_{n,j}(\alpha)) p_{n-1}^{(\alpha+2)}(x_{n,j}(\alpha))] \\ &= (-1)^{n-j}, \quad j = 1, \dots, n, \end{aligned}$$

pois,  $\lambda \geq 0$ ,  $K_{n-1}(0, 0) > 0$  e o sinal  $[(x_{n,j}(\alpha)) p_{n-1}^{(\alpha+2)}(x_{n,j}(\alpha))] = (-1)^{n-j}$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Isso significa que em cada intervalo  $(x_{n,j-1}(\alpha), x_{n,j}(\alpha))$ ,  $j = 2, \dots, n$ , encontramos um zero de  $\hat{p}_n^{(\alpha)}(\lambda; x)$ , ou seja, localizamos  $n-1$  zeros mas, como  $\hat{p}_n^{(\alpha)}(\lambda; x)$  é de grau  $n$  temos ainda um zero a analisar. Observamos que

- se  $n$  é par,  $\hat{p}_n^{(\alpha)}(\lambda; x_{n,1}(\alpha)) < 0$  e que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \hat{p}_n^{(\alpha)}(\lambda; x) = +\infty$ ;
- se  $n$  é ímpar,  $\hat{p}_n^{(\alpha)}(\lambda; x_{n,1}(\alpha)) > 0$  e que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \hat{p}_n^{(\alpha)}(\lambda; x) = -\infty$ .

Donde segue que em ambos os casos, há uma mudança de sinal, logo existe um zero de  $\hat{p}_n^{(\alpha)}(\lambda; x)$  à esquerda de  $x_{n,1}(\alpha)$ , o que nos leva ao seguinte entrelaçamento

$$x_{n,1}(\alpha; \lambda) < x_{n,1}(\alpha) < x_{n,2}(\alpha; \lambda) < x_{n,2}(\alpha) < \dots < x_{n,n}(\lambda; \alpha) < x_{n,n}(\alpha). \quad (6.50)$$

Combinando (6.49), (6.50) e o entrelaçamento entre  $p_n^{(\alpha)}(x)$  e  $xp_{n-1}^{(\alpha)}$  (caso  $c \leq a$ ) no Teorema 5.6, obtemos

$$0 < x_{n,1}(\alpha; \lambda) < x_{n,1}(\alpha) < x_{n-1,1}(\alpha + 2) < x_{n,2}(\alpha; \lambda) < x_{n,2}(\alpha) < \cdots < \\ < x_{n-1,n-1}(\alpha + 2) < x_{n,n}(\alpha; \lambda) < x_{n,n}(\alpha).$$

Agora, vamos mostrar as relações de limites (6.46). Utilizando o Teorema 5.6 temos

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda [x_{n,1}(\alpha; \lambda)] = \frac{-p_n^{(\alpha)}(0)}{K_{n-1}(0,0)p_{n-1}^{(\alpha+2)}(0)}. \quad (6.51)$$

Sabemos que o polinômio de Laguerre mônico aplicado no ponto  $x = 0$  é

$$p_n^{(\alpha)}(0) = \frac{n! \Gamma(n + \alpha + 1)}{(-1)^n \Gamma(\alpha + 1) \Gamma(n + 1)}. \quad (6.52)$$

Substituindo (6.43) e (6.52) em (6.51), fazendo algumas simplificações, temos

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda [x_{n,1}(\alpha; \lambda)] &= \frac{-\frac{n! \Gamma(n + \alpha + 1)}{(-1)^n \Gamma(\alpha + 1) \Gamma(n + 1)}}{\frac{\Gamma(n + \alpha + 1)}{\Gamma(n) \Gamma(\alpha + 1) \Gamma(\alpha + 2)} \frac{(n-1)! \Gamma(n + \alpha + 2)}{(-1)^{n-1} \Gamma(\alpha + 3) \Gamma(n)}} \\ &= \frac{\Gamma(\alpha + 2) \Gamma(\alpha + 3) \Gamma(n)}{\Gamma(n + \alpha + 2)} \\ &= g_n(\alpha) \end{aligned}$$

obtendo assim, um dos limites desejados. Novamente aplicando o Teorema 5.6 encontramos para o limite abaixo

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda [x_{n,k+1}(\alpha; \lambda) - x_{n-1,k}(\alpha + 2)] = \frac{-p_n^{(\alpha)}(x_{n-1,k}(\alpha + 2))}{K_{n-1}(0,0)x_{n-1,k}(\alpha + 2) [p_{n-1}^{(\alpha+2)}(x)]' \Big|_{x=x_{n-1,k}(\alpha+2)}}. \quad (6.53)$$

Utilizando a representação provada por Dimitrov, Marcellán e Rafaeli em [4], onde escreve-se

$$-\frac{1}{n} \binom{n + \alpha}{n - 1} xp_{n-1}^{(\alpha+2)}(x) = \binom{n + \alpha}{n - 1} p_n^{(\alpha)}(x) + \binom{n + \alpha}{n} [p_n^{(\alpha)}(x)]' \quad (6.54)$$

e fazendo apenas a normalização, porque, neste caso os polinômios de Laguerre são mônicos, temos

$$xp_{n-1}^{(\alpha+2)}(x) = p_n^{(\alpha)}(x) + \frac{\alpha + 1}{n} [p_n^{(\alpha)}]' \quad (6.55)$$

Para encontrar uma nova representação para

$$x_{n-1,k}(\alpha+2) \left[ p_{n-1}^{(\alpha+2)}(x) \right]' \Big|_{x=x_{n-1,k}(\alpha+2)}$$

vamos substituir os zeros de  $x p_{n-1}^{(\alpha+2)}(x)$  em (6.55) e isolando  $\left[ p_n^{(\alpha)}(x) \right]'$ , encontramos

$$\left[ p_n^{(\alpha)}(x) \right]' \Big|_{x=x_{n-1,k}(\alpha+2)} = -\frac{n}{\alpha+1} p_n^{(\alpha)}(x_{n-1,k}(\alpha+2)). \quad (6.56)$$

Derivando a equação (6.55)

$$p_{n-1}^{(\alpha+2)}(x) + x \left[ p_{n-1}^{(\alpha+2)}(x) \right]' = \left[ p_n^{(\alpha)}(x) \right]' + \frac{(\alpha+1)}{n} \left[ p_n^{(\alpha)}(x) \right]'' . \quad (6.57)$$

Trocando  $x$  pelos zeros de  $p_{n-1}^{(\alpha+2)}(x)$  obtemos

$$\begin{aligned} x_{n-1,k}(\alpha+2) \left[ p_{n-1}^{(\alpha+2)}(x) \right]' \Big|_{x=x_{n-1,k}(\alpha+2)} &= -n \left[ p_n^{(\alpha)}(x) \right]' \Big|_{x=x_{n-1,k}(\alpha+2)} + \\ &+ (\alpha+1) \left[ p_n^{(\alpha)}(x) \right]'' \Big|_{x=x_{n-1,k}(\alpha+2)}. \end{aligned} \quad (6.58)$$

A equação diferencial de Laguerre é

$$x \left[ p_n^{(\alpha)}(x) \right]'' + (\alpha+1-x) \left[ p_n^{(\alpha)}(x) \right]' + n p_n^{(\alpha)}(x) = 0. \quad (6.59)$$

Substituindo na equação diferencial de Laguerre o termo  $\left[ p_n^{(\alpha)}(x) \right]'$  encontrado em (6.56), obtemos  $\left[ p_n^{(\alpha)}(x) \right]''$  em função de  $p_n^{(\alpha)}(x)$ , como segue

$$\left[ p_n^{(\alpha)}(x) \right]'' = \frac{-n}{\alpha+1} p_n^{(\alpha)}(x). \quad (6.60)$$

Desta maneira substituindo (6.56) e (6.60) em (6.57), temos

$$x_{n-1,k}(\alpha+2) \left[ p_{n-1}^{(\alpha+2)}(x) \right]' = \frac{-n}{\alpha+1} p_n^{(\alpha)}(x) + \frac{\alpha+1}{n} \left[ \frac{-n}{\alpha+1} \right] p_n^{(\alpha)}(x). \quad (6.61)$$

Após alguns cálculos simples, segue que

$$x_{n-1,k}(\alpha+2) \left[ p_{n-1}^{(\alpha+2)}(x) \right]' = \frac{-(n+\alpha+1)}{\alpha+1} p_n^{(\alpha)}(x). \quad (6.62)$$

Retomando o limite (6.53), e substituindo (6.62)

$$\begin{aligned}
 \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda [x_{n,k+1}(\alpha; \lambda) - x_{n-1,k}(\alpha + 2)] &= \frac{-p_n^{(\alpha)}(x_{n-1,k}(\alpha + 2))}{K_{n-1}(0,0) x_{n-1,k}(\alpha + 2) [p_{n-1}^{\alpha+2}(x)]' \Big|_{x=x_{n-1,k}(\alpha+2)}} \\
 &= \frac{-p_n^{(\alpha)}(x_{n-1,k}(\alpha + 2))}{\frac{\Gamma(\alpha + n + 1)}{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\alpha + 2)\Gamma(n)} \left[ -(n + \alpha + 1) p_n^{(\alpha)}(x_{n-1,k}(\alpha + 2)) \right]}{\alpha + 1} \\
 &= \frac{g_n}{\alpha + 2}. \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

Para ilustrar o resultado do Teorema 6.3, o gráfico do polinômio  $\hat{p}_3^{(2)}(\lambda + \epsilon, 0; x)$ , fixando  $\lambda = 0$  e para valores de  $\epsilon > 0$ , notamos o comportamento monótono dos zeros de  $\hat{p}_3^{(2)}(\lambda + \epsilon, 0; x)$  com relação a  $\lambda$ .

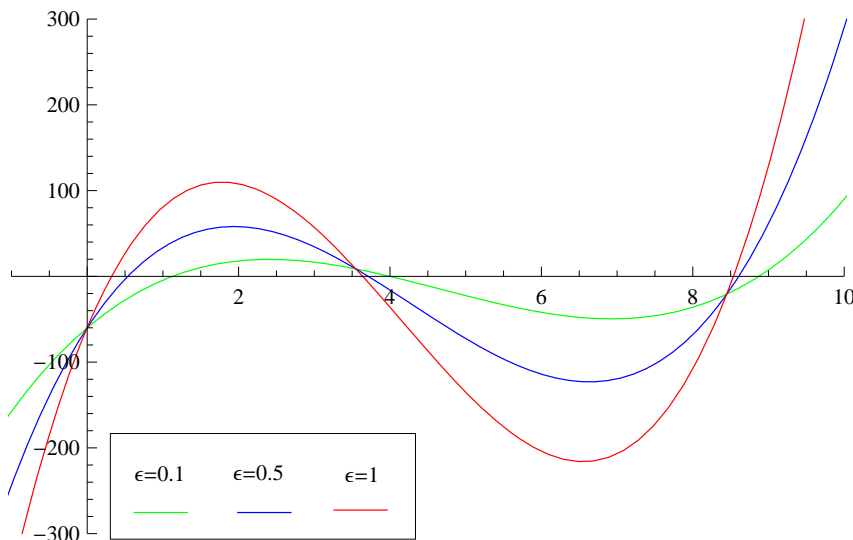


Figura 6.5: Gráfico de  $\hat{p}_3^{(2)}(\lambda + \epsilon, 0; x)$ .

Na Tabela 6.5, apresentamos os zeros de  $\hat{p}_3^{(2)}(\lambda, 0; x)$ , para alguns valores de  $\lambda$ . Notamos que todos os zeros desse polinômio decrescem quando  $\lambda$  cresce, além disso, observamos que o primeiro zero converge para 0 e os outros convergem para os zeros de  $\hat{p}_2^{(4)}(x)$  que são  $x_{2,1} = 3.55051$  e  $x_{2,2} = 8.44949$ .

$\lambda$	$x_{3,1}(2, \lambda)$	$x_{3,2}(2, \lambda)$	$x_{3,3}(2, \lambda)$
0	0,887364	3,86467	8,74797
1	0,321731	3,64053	8,53774
10	0,0390611	3,5604	8,45936
100	0,00399042	3,55151	8,45049
1000	0,000399904	3,55061	8,44959

Tabela 6.5: Zeros de  $\hat{p}_3^{(2)}(\lambda, 0; x)$



Ilustramos agora o gráfico de um polinômio de grau par,  $\hat{p}_4^{(5)}(\lambda + \epsilon, 0; x)$ , fixando  $\lambda = 0$  e para valores de  $\epsilon > 0$ , onde notamos o comportamento monótono dos zeros de  $\hat{p}_4^{(5)}(\lambda + \epsilon, 0; x)$  com relação a  $\lambda$ .

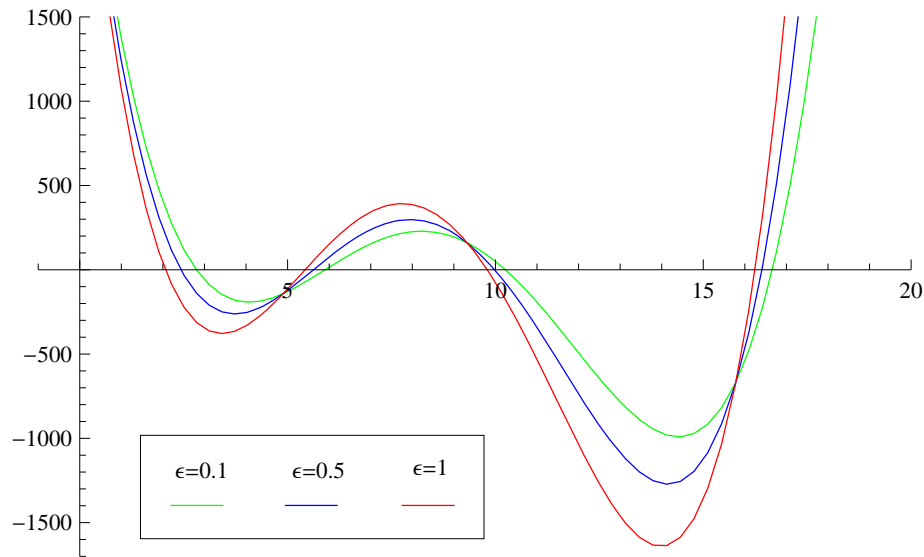


Figura 6.6: Gráfico de  $\hat{p}_4^{(5)}(\lambda + \epsilon, 0; x)$

Na Tabela 6.6, apresentamos os zeros de  $\hat{p}_4^{(5)}(\lambda, 0; x)$ , para alguns valores de  $\lambda$ . Notamos que todos os zeros desse polinômio são decrescentes quando  $\lambda$  cresce, além disso, observamos que o primeiro zero converge para 0 e os outros convergem para os zeros de  $\hat{p}_3^{(7)}(x)$  que são  $x_{3,1} = 4.89275$ ,  $x_{3,2} = 9.32299$  e  $x_{3,3} = 15.7843$ .

$\lambda$	$x_{4,1}(5, \lambda)$	$x_{4,2}(5, \lambda)$	$x_{4,3}(5, \lambda)$	$x_{4,4}(5, \lambda)$
0	2,91079	6,0	10,3341	16,7551
1	2,06065	5,42054	9,80311	16,2451
10	0,509447	4,97439	9,40284	15,8633
100	0,0589664	4,90128	9,3315	15,7928
1000	0,00598952	4,89361	9,32385	15,7851

Tabela 6.6: Convergência de  $\hat{p}_4^{(5)}(\lambda, 0; x)$  quando  $\lambda \rightarrow \infty$ .

## Conclusão

Neste trabalho, estudamos as famílias de polinômios ortogonais  $\{q_n(c; x)\}_{n \geq 0}$  e  $\{r_n(c; x)\}_{n \geq 0}$  geradas a partir das medidas

$$d\phi_1(x) = |x - c|d\phi(x) \quad \text{e} \quad d\phi_2(x) = (x - c)^2 d\phi(x).$$

Esses polinômios são chamados polinômios de Christoffel. Mostramos a relação entre os zeros dessas duas famílias, obtendo inicialmente o entrelaçamento entre os zeros de  $q_n(c; x)$  com os zeros de  $p_n(x)$  e  $p_{n+1}(x)$  e, posteriormente provamos o entrelaçamento dos zeros de  $r_n(c; x)$  com os zeros de  $p_n(x)$  e  $p_{n+1}(x)$ .

Além dos polinômios de Christoffel abordamos sequências de polinômios ortogonais geradas por uma medida da forma

$$d\phi_\lambda(x) = d\phi(x) + \lambda\delta(x - c),$$

medida na qual adicionamos o termo  $\lambda\delta(x - c)$ , onde  $\lambda \geq 0$  e  $\delta(x - c)$  é o funcional delta de Dirac no ponto  $c$ , dizemos que essa medida foi perturbada e tal modificação é denominada perturbação de Uvarov. Fornecemos uma representação para esses polinômios  $\{p_n(\lambda, c; x)\}_{n \geq 0}$ , através de uma combinação linear de polinômios conhecidos e estudamos várias propriedades dos zeros desses polinômios.

Finalizando, exemplificamos os resultados obtidos considerando duas medidas específicas, a medida clássica de Jacobi e Laguerre. Fazendo isso obtivemos uma sequência de polinômios tipo Jacobi e outra tipo Laguerre, onde pode-se observar com maior facilidade, o comportamento monotônico e assintótico dos polinômios gerados por tal perturbação.

---

# Referências Bibliográficas

- [1] ANDREWS, G. E., ASKEY, R., ROY, R., “*Special Functions*”, Encyclopedia of Mathematics and Applications, Cambridge University Press, 1999.
- [2] BRACCIALI, C. F., DIMITROV, D. K., RANGA, A. S. “*Chain sequences and symmetric generalized orthogonal polynomials*”, J. Comput. Appl. Math. 143 (2002) 95–106.
- [3] CHIHARA, T. S., “*An Introduction to Orthogonal Polynomials*”, Mathematics and its Applications Series, Gordon and Breach, New York, 1978.
- [4] DIMITROV, D. K., MARCELLÁN, F., RAFAELI, F. R. “*Monotonicity of zeros of Laguerre-Sobolev type orthogonal polynomials*”, J. Math. Anal. Appl. (2010) 80-89.
- [5] DIMITROV, D. K., MELLO, M. V., RAFAELI, F. R. “*Monotonicity of zeros of Jacobi-Sobolev type orthogonal polynomials*”, J. Comput. Appl. Numer. Math. (2010) 263-276.
- [6] HUERTAS, E. J., MARCELLÁN, F., RAFAELI, F. R., “*Zeros of orthogonal polynomials generated by canonical perturbations of measures*”, J. Comput. Appl. Math. 218 (2012) 7109-7127.
- [7] HUERTAS, E. J., “*Analytic Properties of Krall-type and Sobolev-type Orthogonal Polynomials*”, Ph.D. Thesis, Universidad Carlos III de Madrid, Leganés, 2012.
- [8] ISMAIL, M. E. H., “*Classical and Quantum Orthogonal Polynomials in one Variable*”, Vol. 98 of Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, Cambridge, 2005. With two chapters by Walter Van Assche, With a foreword by Richard A. Askey.
- [9] KOORNWINDER, T. H. “*Orthogonal polynomials with weight function  $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta + M\delta(x+1) + N\delta(x-1)$* ”, Canad. Math. Bull. 27 (1984) 205-214.
- [10] MELLO, M. V., “*Zeros de Polinômios Ortogonais de Sobolev-Jacobi e Sobolev-Laguerre*”, Dissertação de Mestrado, UNESP, São José do Rio Preto, SP, 2008.
- [11] OBRECHKOFF, N., “*Zeros of Polynomials*”, Acad. G. Bonchev, Bulgaria, Sofia, 2003.
- [12] RAFAELI, F. R., “*Teorema de Sturm e Zeros de Polinômios Ortogonais*”, Dissertação de Mestrado, UNESP, São José do Rio Preto, SP, 2007.
- [13] RAFAELI, F. R., “*Zeros de Polinômios Ortogonais na Reta Real*”, Tese de doutorado, IMECC, UNICAMP, Campinas, SP, 2010.
- [14] SZEGŐ, G., “*Orthogonal polynomials*”, American Math. Society, Colloq. Publ., New York, 23, 1939.
- [15] STIELTJES, T. J. “*Sur les polynômes de Jacobi*”, C. R. Math. Acad. Sci. Paris 100 (1885) 620–622.