Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Campus de Rio Claro

Sistemas dinâmicos e equações diferenciais ordinárias

Mariana Frassetto Malvezzi

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação - Mestrado Profissional em Matemática Universitária como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre

Orientadora
Profa. Dra. Suzete Maria Silva Afonso

Co-orientador
Prof. Dr. Ricardo Parreira da Silva

2013

517.38 Malvezzi, Mariana Frassetto
M262s Sistemas dinâmicos e equações diferenciais ordinárias/ Mariana Frassetto Malvezzi - Rio Claro: [s.n.], 2013.
81 f.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas.
Orientadora: Suzete Maria Silva Afonso
Co-orientador: Ricardo Parreira da Silva

1. sistemas dinâmicos. 2. equações diferenciais ordinárias. 3. quase periodicidade. 4. recorrência. 5. estabilidade de Lyapunov. I. Título

Ficha Catalográfica elaborada pela STATI - Biblioteca da UNESP
Campus de Rio Claro/SP

Aos meus pais.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, acima de tudo. Agradeço por Ele ter me abençoado por gostar de estudar matemática, por me iluminar em minhas escolhas e por me fazer perseverar neste caminho, chegando onde cheguei.

Agradeço aos meus pais, Antonio Gabriel e Maria Inês, por confiarem em meu trabalho, pelo apoio, compreensão e esforços sem medida para poder alcançar meus objetivos.

Agradeço a minha irmã Gabriela por ter dividido comigo momentos alegres de descontração e pela companhia durante os estudos.

Agradeço ao meu namorado Paulo, que sempre esteve ao meu lado, pelo incentivo e otimismo em minhas atividades.

Agradeço a minha orientadora professora Suzete pelo comprometimento, pela paciência, pelo conhecimento compartilhado e por ter me norteado em meio às dúvidas. Agradeço-a também pela amizade construída.

Agradeço aos demais professores que colaboraram com minha formação, em especial ao professor Ricardo Parreira da Silva pela coorientação. E, agradeço a todos os amigos que fiz durante este período. São pessoas muito especiais com as quais dividi excelentes momentos.

"Hoje me sinto mais forte, mais feliz quem sabe.
Só levo a certeza de que muito pouco eu sei ou nada sei."
(Almir Sater e Renato Teixeira)

Resumo

O objetivo deste trabalho é apresentar a teoria de sistemas dinâmicos em espaços topológicos uniformes. Como uma aplicação, mostraremos a construção de um fluxo para equações diferenciais ordinárias não autônomas e, utilizando a teoria de dinâmica topológica abordada, daremos enfoque ao estudo de estabilidade de soluções e à investigação de condições que garantem a existência de soluções periódicas ou quase periódicas.

Palavras-chave: sistemas dinâmicos, equações diferenciais ordinárias, quase periodicidade, recorrência, estabilidade de Lyapunov.

Abstract

The purpose of this work is to present the theory of dynamical systems in uniform topological spaces. As an application, we will show the construction of a flow for nonautonomous ordinary differential equations and, by using the theory of topological dynamics discussed, we will focus on the study of stability of solutions and on the investigation for conditions that guarantee the existence of periodic or almost periodic solutions.

Keywords: dynamical systems, ordinary differential equations, almost periodicity, recurrence, Lyapunov stability.

Sumário

Introdução

O estudo de fenômenos que apresentam uma evolução determinística ao longo do tempo pode ser feito através da teoria de sistemas dinâmicos. Tais fenômenos são encontrados em várias áreas da ciência, tais como física, economia, ecologia, meteorologia, dentre outras.

A lei de evolução pode assumir diversas formas; iterações, equações diferenciais, transformações ou fluxos estocásticos. Esta lei nos permite prever a evolução de um sistema, sobretudo a longo prazo.

Neste trabalho, apresentamos a teoria básica de sistemas dinâmicos em espaços topológicos uniformes, exibimos exemplos de sistemas dinâmicos e dedicamos uma atenção especial a um determinado sistema dinâmico para equações diferenciais ordinárias não autônomas. No que segue, explicamos como o trabalho está dividido.

Dedicamos o Capítulo 1 a um resumo sobre a teoria de espaços topológicos uniformes. No Capítulo 2, definimos um sistema dinâmico, também denominado fluxo, num espaço topológico uniforme e discutimos algumas de suas propriedades. Além disso, apresentamos outros conceitos, dentre os quais destacamos: semifluxo, movimento, trajetória, conjuntos limite, conjunto minimal e atrator.

Exemplos de fluxos e semifluxos são abordados no Capítulo 3. No Capítulo 4, apresentamos a construção de um sistema dinâmico para equações diferenciais não autônomas e introduzimos o conceito de equação limite.

A fim de estudarmos movimentos quase periódicos, destinamos o Capítulo 5 ao estudo de funções quase periódicas com imagem em um espaço topológico uniforme.

No Capítulo 6, tratamos de movimentos recorrentes e movimentos quase periódicos, e introduzimos o conceito de estabilidade de Poisson.

No Capítulo 7, um breve estudo sobre a estrutura dos conjuntos ω-limite é realizado. O Capítulo 8 é dedicado às aplicações da teoria de sistema dinâmicos à teoria de equações diferencias ordinárias. Neste capítulo, estudamos a estabilidade de soluções de equações diferenciais ordinárias e investigamos condições para garantir a existência de soluções periódicas e quase periódicas de equações diferenciais ordinárias.

Ao final do trabalho, incluímos um sucinto apêndice com conceitos e resultados de equações diferenciais ordinárias que foram importantes ao longo do mesmo, para a comodidade do leitor.

As principais referências para este trabalho são [3], [4] e [5].

1 Espaços uniformes

Neste capítulo, faremos uma breve e resumida exposição de conceitos e propriedades da teoria de espaços uniformes que serão necessários para o desenvolvimento da teoria de sistemas dinâmicos, foco principal do presente trabalho.

Para um estudo aprofundado da teoria de espaços uniformes, recomendamos a leitura do livro intitulado *General Topology* de J. L. Kelley, [2].

1.1 Sequências generalizadas

Definição 1.1. *Um* ***conjunto direto*** $(A, \geq)$ *é definido por um conjunto não vazio* A *munido da ordem* $\geq$*, que satisfaz as seguintes condições :*

(i) (Transitividade) Se a, b *e* c *pertencerem ao conjunto* A *e* $a \geq b$ *e* $b \geq c$*, então* $a \geq c$*;*

(ii) (Reflexividade) Se a *pertence ao conjunto* A*, então* $a \geq a$*;*

(iii) (Limitante superior). Para todo par b *e* c *em* A*, existe* a *em* A *tal que* $a \geq b$ *e* $a \geq c$*.*

No que segue, denotaremos o conjunto direto $(A, \geq)$ por A.

Definição 1.2. *(i) Uma* ***sequência (generalizada)*** *é uma função* f *definida em um conjunto direto* A *com imagem em outro conjunto.*

O valor de uma sequência generalizada f *em um ponto* a *pertencente ao conjunto* A *é denotado por* f_a*.*

(ii) Uma sequência generalizada f ***estará em*** $\boldsymbol{X}$ *se a imagem de* f *estiver em* X*, isto é,* $f_a \in X$ *sempre que* $a \in A$*.*

(iii) Se existir $b \in A$ *tal que* $f_a \in U$ *sempre que* $a \geq b$*, diremos que a sequência generalizada está* ***eventualmente em*** U*, onde* $U \subset X$*.*

(iv) Seja $f : A \to X$ *uma sequência generalizada, onde* X *é um espaço topológico. Diremos que* f ***converge*** *para um ponto* x *em* X *se a sequência estiver eventualmente em toda vizinhança de* x*. Neste caso, escrevemos* $f_a \to x$ *ou* $\lim\limits_{a} f_a = x$*.*

Em [2], J. L. Kelley usa o termo *rede* para se referir a uma sequência generalizada.

O conceito de convergência de sequências generalizadas é de grande valia, pois nos fornece uma forma conveniente de descrever a topologia em um conjunto X. Em [2], Capítulo II, uma discussão detalhada dessa relação é apresentada. A propriedade abaixo sintetiza a relação entre convergência de sequências generalizadas e topologias.

Proposição 1.1. *Sejam X um espaço topológico e $U \subset X$. Um ponto x pertencerá ao fecho de U, denotado por $\overline{U}$, se e somente se existir uma sequência generalizada $\{x_a\}$ em U que converge para x.*

Um tipo especial de divergência será usado, com frequência, nos próximos capítulos. Este segue abaixo.

Definição 1.3. *Seja $t : A \to \mathbb{R}$ (ou $t : A \to \mathbb{Z}$) uma sequência. Diremos que $t_a \to +\infty$ se, para todo inteiro N, existir um índice b em A tal que $t_a \geq N$ sempre que $a \geq b$.*

Precisaremos do conceito de subsequência (generalizada). E para introduzirmos este conceito, precisamos da noção de subconjunto cofinal de um conjunto direto.

Definição 1.4. *(i) Diremos que B é um **subconjunto cofinal** de A se B for um conjunto direto com a mesma ordem de A e para cada $a \in A$ existir $b \in B$ com $b \geq a$.*

*(ii) Se $f : A \to X$ for uma sequência e B for um subconjunto cofinal de A, então a restrição de f à $B, f : B \to X$, será denominada **subsequência (generalizada)**.*

1.2 Limites iterados

Definição 1.5. *Sejam A_1 e A_2 dois conjuntos diretos e $A = A_1 \times A_2$ o produto cartesiano. Se definirmos a ordem $(a_1, a_2) \geq (b_1, b_2)$ sempre que $a_1 \geq b_1$ e $a_2 \geq b_2$, o conjunto A será um conjunto direto. Munido desta relação de ordem, o conjunto A é denominado **conjunto produto direto**.*

Em geral, se tivermos uma família $(A_x, \geq_x)$ em que x está em algum conjunto indexado X, poderemos definir uma ordem no produto cartesiano $A = \times_x A_x$, dizendo que $a \geq b$ sempre que para cada componente tivermos $a_x \geq_x b_x$, com $x \in X$.

Proposição 1.2. *Seja D um conjunto direto. Para cada $n \in D$, seja A_n um conjunto direto, e seja $A = \times_n A_n$ o conjunto produto direto gerado por $\{A_n : n \in D\}$. Consideremos $B = D \times A$ o conjunto produto direto gerado por D e A. Definamos R em B por*

$$R : (n, a) \to (n, a_n) \in D \times A_n.$$

Para cada $n \in D$, seja $S(n, \cdot) = S(n, a_n)$ uma sequência definida em A_n com imagem em um espaço topológico fixo X. Então, $S \circ R$ converge para $\lim_n \lim_{a_n} S(n, a_n)$ sempre que esse limite iterado existir.

1.3 Topologias uniformes

Definição 1.6. *Um* ***sistema de vizinhanças uniforme*** *para um conjunto X é definido por $(X; A, \geq; V)$, em que X é um conjunto, $(A, \geq)$ é um conjunto direto e para cada $a \in A$ e $x \in X, V_a(x)$ é um subconjunto de X sujeito às seguintes condições:*

(i) $x \in V_a(x)$*;*

(ii) $V_a(x) \subset V_b(x)$ *sempre que* $a \geq b$*;*

(iii) (Condição de simetria) $y \in V_a(x)$ *se, e somente se,* $x \in V_a(y)$*;*

(iv) (Condição de uniformidade) Para cada $a \in A$ existe um $b \in A$ tal que $z \in V_a(x)$ sempre que $z \in V_b(y)$ e $y \in V_b(x)$.

É importante observar que, na condição de uniformidade, a escolha de b depende somente de a.

Por aplicações sucessivas da condição de uniformidade, podemos estabelecer o seguinte resultado.

Proposição 1.3. *Sejam $a \in A$ e $n \geq 1$ um número inteiro. Então, existe um elemento b em A tal que*

$$x_i \in V_b(x_{i+1}), i = 1, \ldots, n \Rightarrow x_1 \in V_a(x_{n+1}).$$

Definição 1.7. *(i) Um sistema de vizinhanças uniforme para um conjunto X gera uma topologia da forma usual. Isto é, um conjunto $U \subset X$ é denominado* ***aberto*** *se para todo x em U existir uma vizinhança $V_a(x) \subset U$. Um conjunto $U \subset X$ é* ***fechado*** *se o seu complementar $X - U$ for aberto.*

(ii) Essa topologia é chamada ***topologia uniforme*** *(gerada por A e V).*

(iii) O conjunto X com essa topologia é denominado ***espaço uniforme****.*

Podemos denotar o conjunto X munido da topologia uniforme por X, (X, A), (X, A, V) ou $(X; A, \geq; V)$.

Não existe perda de generalidade em assumir que os conjuntos $V_a(x)$ sejam abertos na topologia uniforme. De fato, se definirmos $V_a^0(x)$ como sendo o maior conjunto aberto em $V_a(x)$, então $(X; A, \geq; V^0)$ será um sistema de vizinhanças uniforme para X e a topologia gerada por A e V^0 coincidirá com a topologia gerada por A e V.

Um espaço topológico X será um espaço de Hausdorff (isto é, um espaço topológico no qual dois pontos distintos possuem vizinhanças disjuntas) se, e somente se, toda sequência em X tiver no máximo um ponto limite. Para um espaço uniforme (X, A, V) essa afirmação é equivalente a dizer que, para dois pontos distintos x e y em X, existe um índice a em A tal que $V_a(x) \cap V_a(y) = \emptyset$.

No que segue, vamos assumir que o espaço uniforme (X, A, V) é um espaço de Hausdorff.

Então, vamos considerar que, em adição às quatro condições da definição 1.6, um sistema de vizinhanças uniforme deverá satisfazer:

(v) Cada $V_a(x)$ é aberto;

(vi) Se x e y forem pontos distintos em X, então existirá a em A tal que $V_a(x) \cap V_a(y) = \emptyset$.

Para uma prova do resultado abaixo, veja [2].

Proposição 1.4. *Seja (X, A, V) um espaço uniforme. Então, para todo a em A, existe b em A tal que $\overline{V_b(x)} \subset V_a(x)$ para todo x em X.*

Definição 1.8. *(i) Um conjunto será denominado* ***compacto*** *se ele for compacto no sentido de Heine-Borel.*

(ii) Um conjunto U em X será denominado ***condicionalmente compacto*** *(ou* ***pré-compacto****) se o seu fecho $\overline{U}$ for compacto.*

Note que um conjunto $U \subset X$ será compacto se, e somente se, toda sequência generalizada em U tiver uma subsequência convergente em U.

Definição 1.9. *(i) Uma sequência $\{x_n\}$ em um espaço uniforme (X, A, V) será denominada* ***sequência de Cauchy*** *se, para todo a em A, existir um índice N tal que $x_n \in V_a(x_m)$ para quaisquer $n, m \geq N$.*

(ii) Um espaço uniforme (X, A, V) será denominado ***completo*** *se toda sequência de Cauchy em X for convergente.*

Definição 1.10. *Um conjunto $U \subset X$ será denominado* ***totalmente limitado*** *em (X, A, V) se, para todo a em A, existir uma coleção finita $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ em U tal que*

$$U \subset \cup_i^n V_a(x_i).$$

Note que um espaço uniforme será compacto se, e somente se, for totalmente limitado e completo.

Definição 1.11. *(i) Seja $f : X \to Y$ uma função onde (X, A, V) e (Y, A', V') são espaços uniformes. Então, f será* ***uniformemente contínua*** *se para todo índice a' em A' existir b em A tal que $f(x) \in V'_{a'}(f(z))$ sempre que $x \in V_b(z)$, para qualquer $z \in X$.*

*(ii) Uma sequência $\{f_n\}$ de funções f_n definidas em um conjunto D tomando valores em um espaço uniforme X **convergirá uniformemente** para uma função f se para todo a em A existir um índice N tal que $f_n(y) \in V_a(f(y))$ para todo $n \geq N$ e todo $y \in D$.*

A próxima proposição é um refinamento da Proposição 1.1.

Proposição 1.5. *Sejam (X, A, V) um espaço uniforme e $U \subset X$. Um ponto x pertencerá ao fecho $\overline{U}$ se, e somente se, existir uma sequência generalizada $\{x_a\}$ definida em A com imagem em U tal que $x_a \to x$.*

Proposição 1.6. *Sejam (X, A, V) um espaço uniforme e $\{x_n\}$ uma sequência em X com $x_n \to x$. Então, para qualquer $a \in A$, temos a propriedade: se $y \in V_a(x)$, então existirá um índice N tal que $y \in V_a(x_n)$ para $n \geq N$.*

Demonstração: Seja $y \in V_a(x)$. Como a vizinhança $V_a(y)$ é aberta e $x \in V_a(y)$, existe $U \subset V_a(y), U$ aberto, tal que $x \in U$.

Como x_n converge para x, existe N tal que $x_n \in U$ para todo $n \geq N$. Daí,

$$x_n \in V_a(y), \quad n \geq N,$$

e então,

$$y \in V_a(x_n), \quad n \geq N.$$

■

Finalizaremos este capítulo definindo um espaço topológico linear.

1.4 Espaços topológicos lineares

Nesta seção, X denotará um espaço linear.

Definição 1.12. *Diremos que um sistema de vizinhanças uniforme $(X; A, \geq; V)$ fornece uma **estrutura linear uniforme** no espaço X se, em adição às seis propriedades da seção anterior, as próximas três também forem satisfeitas:*

(vii) $V_a(x) = x + V_a(0)$ para todo $a \in A$, $x \in X$;

(viii) Para todo a em A existe b em A tal que se $x, y \in V_b(0)$ então $x + y \in V_a(0)$;

(ix) Se $x \in V_a(0)$, então $-x \in V_a(0)$.

Exemplo 1.1. Sejam X um espaço com uma métrica d e $A = \{a \in \mathbb{R} : a > 0\}$ com a ordem usual. Definimos $V_a(x)$, para $a \in A$ e $x \in X$, por

$$V_a(x) = \{y \in X : d(x, y) < 1/a\}.$$

Dessa forma, $(X; A, \geq; V)$ é um sistema de vizinhança para X e a topologia uniforme é a topologia gerada pela métrica d.

Para provarmos a afirmação acima, verificaremos que $(X; A, \geq; V)$ satisfaz as quatro condições da Definição 1.6.

Com efeito:

(i) $x \in V_a(x)$, pois $d(x,x) = 0 < 1/a,\ a \in A$.

(ii) Sejam $a, b \in A$ tais que $a \geq b$. Então, $1/a \leq 1/b$. Assim, para $y \in V_a(x)$ temos

$$d(x,y) < 1/a \leq 1/b \Rightarrow y \in V_b(x).$$

$\therefore V_a(x) \subset V_b(x)$.

(iii) Seja $y \in V_a(x)$. Portanto, $d(x,y) < 1/a$. Mas, $d(x,y) = d(y,x)$. Assim,

$$d(x,y) < 1/a \Leftrightarrow d(y,x) < 1/a \Leftrightarrow x \in V_a(y).$$

$\therefore y \in V_a(x) \Leftrightarrow x \in V_a(y)$.

(iv) Dado $a \in A$, tomemos $b = 2a$. Se

$$z \in V_b(y) \quad \text{e} \quad y \in V_b(x),$$

então

$$d(y,z) < 1/b \quad \text{e} \quad d(x,y) < 1/b.$$

Então, como d é uma métrica (sendo assim, satisfaz a desigualdade triangular), obtemos

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) < \frac{1}{b} + \frac{1}{b} = \frac{2}{b} = \frac{2}{2a} = \frac{1}{a}.$$

$\therefore z \in V_a(x)$.

Observação 1.1. Considerando $X = \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, e d uma métrica qualquer em $\mathbb{R}^n$, concluímos que $(\mathbb{R}^n; A, \geq; V)$ é um espaço topológico uniforme. Este fato será utilizado em capítulos posteriores.

2 Sistemas dinâmicos

Neste capítulo, definiremos o conceito de um sistema dinâmico, ou fluxo, e discutiremos algumas de suas propriedades. Para isso, consideraremos que X é um espaço uniforme com a topologia de Hausdorff, gerado pelo conjunto direto $(A, \geq)$ e por uma correspondência V.

2.1 Fluxos e semifluxos

Definição 2.1. *Seja T um grupo topológico. Um* ***sistema dinâmico (fluxo)*** *em X é uma aplicação*

$$\pi : X \times T \to X$$

que satisfaz as condições:

(i)(propriedade da identidade) $\pi(x, 0) = x$, para $x \in X$;

(ii)(propriedade de grupo) $\pi(\pi(x,t), s) = \pi(x, t+s)$, para $x \in X$ e $t, s \in T$;

(iii) π é contínua.

Estamos interessados no grupo dos números reais ($\mathbb{R}$) e no grupo dos números inteiros ($\mathbb{Z}$), com suas topologias usuais. Quando $T = \mathbb{R}$, diremos que um sistema dinâmico π é um **fluxo contínuo** e quando $T = \mathbb{Z}$, diremos que é um **fluxo discreto**.

Seja π um fluxo em X. Para $x \in X$ e $t \in T$, defina $\pi_t(x) = \pi(x, t)$.

Proposição 2.1. *Para cada $t \in T$, a aplicação π_t é um homeomorfismo de X em X.*

Demonstração: Mostremos, primeiramente, que π_t é injetora. Sejam x_1, x_2 pertencentes a X tais que $\pi_t(x_1) = \pi_t(x_2)$. Então,

$$x_1 = \pi(\pi(x_1, t), -t) = \pi(\pi(x_2, t), -t) = x_2.$$

Dado $y \in X$, seja $x = \pi(y, -t)$. Então,

$$\pi(x, t) = \pi(\pi(y, -t), t) = \pi(y, 0) = y.$$

Portanto, π_t é sobrejetora.

A propriedade de grupo implica que $(\pi_t)^{-1} = \pi_{-t}$. Portanto, π_t e $(\pi_t)^{-1}$ são contínuas. ■

A próxima proposição caracteriza fluxos discretos em termos de homeomorfismo:

Proposição 2.2. *Uma condição necessária e suficiente para que a aplicação $\pi : X \times \mathbb{Z} \to X$ seja um fluxo discreto é que exista um homeomorfismo $F : X \to X$ tal que*

$$\pi(x, n) = F^n(x), \qquad n \in \mathbb{Z},$$

em que $F^n(x) = F^{n-1}(F(x))$ e F^0 é definida como sendo a função identidade.

Demonstração: ($\Rightarrow$) Defina $F : X \to X$ pondo $F(x) = \pi(x, 1)$ para todo $x \in X$. Mostremos que F é um homeomorfismo.

De fato:

• F é injetora:

Se $F(x_1) = F(x_2)$, então

$$\pi(\pi(x_1, 1), -1) = \pi(\pi(x_2, 1), -1)$$

$$\pi(x_1, 1-1) = \pi(x_2, 1-1)$$

$$\pi(x_1, 0) = \pi(x_2, 0)$$

$$x_1 = x_2.$$

• F é sobrejetora:

Dado $y \in X$, tomemos $x = \pi(y, -1)$. Assim,

$$F(x) = \pi(x, 1) = \pi(\pi(y, -1), 1) = \pi(y, 0) = y.$$

• F^{-1} é contínua:

Temos $F^{-1}(x) = \pi(x, -1)$, pois

$$F^{-1}(F(x)) = \pi(\pi(x, 1), -1) = \pi(x, 0) = x,$$

e

$$F(F^{-1}(x)) = \pi(\pi(x, -1), 1) = \pi(x, 0) = x.$$

Além disso, F^{-1} é contínua, pois a aplicação $\pi(\cdot, -1)$ é contínua, visto que π é um fluxo.

E mais,

$$\begin{aligned}
\pi(x,n) &= \pi(\pi(x,n-1),1) \\
&= F(\pi(x,n-1)) \\
&= F(\pi(x,n-2),1) \\
&= F(F(\pi(x,n-2))) \\
&= F(F(\dots F(\pi(x,n-n)))) \\
&= F^{n-2}(F(F(x))) \\
&= F^{n}(x).
\end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Consideremos, agora, $\pi(x,n) = F^n(x), n \in \mathbb{Z},\ x \in X$, e provemos que π é um fluxo discreto. De fato, para $x \in X$ e $n, m \in \mathbb{Z}$, temos

(i) $\pi(x,0) = F^0(x) = x$;

(ii) $\pi(\pi(x,n),m) = \pi(F^n(x),m) = F^m(F^n(x)) = F^{m+n}(x) = \pi(x,n+m)$;

(iii) π é uma aplicação contínua, pois é composta de funções contínuas.

■

Neste caso, o homeomorfismo F é **gerado** pelo fluxo contínuo π.

Concluímos assim, que o estudo de fluxos discretos é equivalente ao estudo de homeomorfismos e suas iteradas.

Se $T = \mathbb{R}$ ou $T = \mathbb{Z}$, definiremos $T^+ = \{t \in T : t \geq 0\}$. Dessa forma, T^+ é um semigrupo.

Definição 2.2. *Um **semifluxo** é uma aplicação $\pi : X \times T^+ \to X$, que satisfaz as seguintes condições:*

(i) $\pi(x,0) = x$, para $x \in X$;

(ii) $\pi(\pi(x,t),s) = \pi(x,t+s)$, para $x \in X$ e $t,s \in T^+$;

(iii) π é contínua.

Observe que, restringindo a variável t ao conjunto T^+, qualquer fluxo origina um semifluxo. Mas, o contrário não vale. E se π for um semifluxo, a aplicação inversa π^{-1} não estará definida. Por isso, reescrevemos a proposição anterior da seguinte forma:

Proposição 2.3. *Uma condição necessária e suficiente para que a aplicação $\pi : X \times T^+ \to X$ seja um semifluxo é que exista uma aplicação contínua $F : X \to X$ (não necessariamente sobrejetora) tal que*

$$\pi(x,n) = F^n(x), \qquad n \in I^+.$$

Dessa forma, o estudo de semifluxos discretos é equivalente ao estudo de aplicações contínuas e suas iteradas.

Considere a equação diferencial

$$x' = f(x) \tag{2.1}$$

no espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$ em que f é uma função de classe C^1. Então, pelo Teorema de Existência e Unicidade (veja Apêndice, Teorema 9.2), existe uma única solução $\phi(x,t)$ de (2.1) que satisfaz $\phi(x,0) = x$.

Podemos definir um fluxo contínuo π em $\mathbb{R}^n$ fazendo $\pi(x,t) = \phi(x,t)$, no caso em que cada solução $\phi(x,t)$ de (2.1) pode ser estendida para todo tempo t. Todavia, é sabido que esta propriedade de existência global (veja Apêndice, Definição 9.4) não é compartilhada por todas as equações diferenciais.

Parece ser mais apropriado modificar a definição de um fluxo de forma que a trajetória $\pi(x,t)$ não tenha que ser definida para todo tempo t. Eis, então, uma explicação para a próxima seção.

2.2 Definição modificada de um fluxo

Definição 2.3. *Seja X um espaço topológico. Para cada ponto $x \in X$, seja $I_x = (\alpha_x, \beta_x)$ um intervalo aberto em T, contendo o zero. Consideremos que os intervalos I_x têm a seguinte propriedade de continuidade: se $x_n \to x$ em X, então $I_x \subset \liminf I_{x_n}$. Seja $D \subset X \times T$ definido por*

$$D = \{(x,t) \in X \times T : t \in I_x\}.$$

*Uma aplicação $\pi : D \to X$ será denominada **fluxo local** em X se as seguintes propriedades forem satisfeitas:*

(i) $\pi(x,0) = x$, para todo $x \in X$;

(ii) Se $t \in I_x$ e $s \in I_{\pi(x,t)}$, então $(t+s) \in I_x$ e $\pi(\pi(x,t),s) = \pi(x,t+s)$;

(iii) π é contínua;

(iv) Cada intervalo I_x é maximal no sentido de que, ou $I_x = T$ ou o conjunto

$$\{\pi(x,t) : 0 \leq t < \beta_x\}$$

não é condicionalmente compacto se $\beta_x < +\infty$, ou o conjunto

$$\{\pi(x,t) : \alpha_x < t \leq 0\}$$

não é condicionalmente compacto se $-\infty < \alpha_x$;

(v) Os intervalos I_x são semicontínuos inferiormente em x, ou seja, se $x_n \to x$, então $I_x \subset \liminf I_{x_n}$.

Da propriedade maximal, se $E \subset D$ e $\pi : E \to X$ for um fluxo local, então $E = D$.

De fato, sendo $\pi : D \to X$ um fluxo local, esta aplicação tem a propriedade maximal, ou seja, dado $x \in X$ tal que $(x,t) \in D$, ou $I_x = T$ ou $\{\pi(x,t) : t \in I_x\}$ não será condicionalmente compacto.

Agora, considere

$$\pi : E \to X, \qquad \text{onde } E = \{(x,t) \in D;\, t \in J_x \subseteq I_x\}.$$

Se $\pi : E \to X$ for um fluxo, então J_x será maximal. Dessa forma, ou $J_x = T$ ou $\{\pi(x,t) : t \in J_x\}$ não é condicionalmente compacto.

Se $J_x = T$ então $I_x = T$ e, portanto, $E = D$.

Suponha, agora, que $J_x \neq I_x$. Como $\{\pi(x,t) : t \in J_x\}$ não é condicionalmente compacto, não podemos estender π para I_x. Eis uma contradição, pois π está definido em I_x. Logo, devemos ter $J_x = I_x$.

Vimos, assim, que não há razão em distinguir fluxo local de um fluxo. Por isso, omitiremos o termo "local", a seguir. Entretanto, os fluxos que satisfazem $I_x = T$, para qualquer $x \in X$, serão denominados **fluxos globais**.

Proposição 2.4. *Seja π um fluxo em X. Se $\{x_n\}$ for uma sequência em X tal que $x_n \to x$, então a sequência de funções $\{\pi(x_n,t)\}$ convergirá para $\pi(x,t)$ e a convergência será uniforme em conjuntos compactos de I_x.*

Demonstração: Seja K um subconjunto compacto de I_x. Pela semicontinuidade inferior de I_x, existe um índice m tal que $K \subset I_{x_n}$ para $n \geq m$.

A convergência uniforme em K significa que, para toda vizinhança $V_a(.)$, $a \in A$, existe um índice p tal que $\pi(x_n,t) \in V_a(\pi(x,t))$ para todo $n \geq p$ e todo $t \in K$. Provaremos esta propriedade por redução ao absurdo.

Suponha, então, que exista uma vizinhança $V_a(.)$ tal que, para todo índice $n \geq m$, existe $t_n \in K$ de forma que

$$\pi(x_n,t_n) \notin V_a(\pi(x,t_n)). \tag{2.2}$$

Como K é compacto, a sequência $\{t_n\}$ determinada acima possui uma subsequência convergente, a qual denotaremos também por $\{t_n\}$, por simplicidade de notação. Digamos que $t_n \to t_0$. Daí, $\pi(x,t_n) \to \pi(x,t_0)$, visto que a aplicação π é contínua. Com $a \in A$ dado em (2.2), escolha $b \in A$ de forma que

$$\pi(x,t_0) \in V_b(\pi(x,t_n)) \text{ e } z \in V_b(\pi(x,t_0)) \Rightarrow z \in V_a(\pi(x,t_n)), \tag{2.3}$$

pela Proposição 1.3.

Segue, novamente, da continuidade de π que $\pi(x_n, t_n) \to \pi(x, t_0)$. O que significa que podemos encontrar um índice N tal que

$$z = \pi(x_n, t_n) \in V_b(\pi(x, t_0))$$

para $n \geq N$.

Aplicando (2.3), temos $\pi(x_n, t_n) \in V_a(\pi(x, t_n))$, o que contradiz (2.2). ∎

Seja π um fluxo em X e seja $x \in X$ fixo. A função $\pi(x, .)$ é denominada **movimento através de x**. A **trajetória através de x** é o conjunto

$$\gamma(x) = \{\pi(x, t) : t \in I_x\},$$

também denominado de **órbita** de x. A **semitrajetória positiva** e a **semitrajetória negativa** são definidas por

$$\gamma^+(x) = \{\pi(x, t) : 0 \leq t < \beta_x\} \quad e \quad \gamma^-(x) = \{\pi(x, t) : \alpha_x < t \leq 0\},$$

respectivamente. O **fecho** da órbita de x é definido por

$$H(x) = \overline{\gamma(x)},$$

e o **fecho da órbita positiva e negativa** de x são definidos por

$$H^+(x) = \overline{\gamma^+(x)} \text{ e } H^-(x) = \overline{\gamma^-(x)},$$

respectivamente.

Um conjunto $E \subset X$ será denominado **invariante** se $\gamma(x) \subset E$, sempre que $x \in E$. Diremos que o conjunto E é **positivamente invariante** ou **negativamente invariante** se $\gamma^+(x) \subset E$ ou $\gamma^-(x) \subset E$, respectivamente.

Proposição 2.5. *O fecho de um conjunto invariante é um conjunto invariante.*

Demonstração: Seja E um conjunto invariante e seja $y \in \overline{E}$. Queremos mostrar que $\gamma(y) \subset \overline{E}$, isto é, $\pi(y, t) \in \overline{E}$, para cada $t \in I_y$.

Como $y \in \overline{E}$, existe uma sequência $\{y_n\} \subset E$ tal que $y_n \to y$. Se $t \in I_y$, então, pela propriedade de semicontinuidade inferior do intervalo I_y, existe um índice m tal que $t \in I_{y_n}$ para $n \geq m$.

Pela continuidade de π, temos $\pi(y_n, t) \to \pi(y, t)$. Como E é invariante, a subsequência $\{\pi(y_n, t) : n \geq m\} \subset E$, logo $\pi(y, t) \in \overline{E}$. ∎

Usando o mesmo argumento, concluímos que o fecho de um conjunto positivamente invariante é positivamente invariante, e o fecho de um conjunto negativamente invariante é negativamente invariante.

2.3 Conjuntos limite e trajetórias compactas

Definição 2.4. *Seja π um fluxo em X. Definimos os conjuntos*

$$LB^+ = \{x \in X : \beta_x = +\infty\}$$

$$LB^- = \{x \in X : \alpha_x = -\infty\}$$

$$LB = LB^- \cap LB^+,$$

sendo $I_x = (\alpha_x, \beta_x)$.

Note que, se LB for não vazio, como $LB \times T$ está contido em D, que é o domínio de definição de π, a aplicação π restrita à $LB \times T$ será um fluxo global em LB.

Se $x \in LB^+$, definiremos o conjunto ω-limite por

$$\Omega_x = \cap_{t \geq 0} H^+(\pi(x,t)).$$

Analogamente, se $x \in LB^-$, definiremos o conjunto α -limite por

$$A_x = \cap_{t \leq 0} H^-(\pi(x,t)).$$

Proposição 2.6. *Os conjuntos-limites são descritos equivalentemente por*

$$\Omega_x = \{y \in X : y = \lim_{n\to\infty} \pi(x,t_n) \text{ para alguma sequência } \{t_n\} \text{ com } t_n \to +\infty\} \text{ e}$$

$$A_x = \{y \in X : y = \lim_{n\to\infty} \pi(x,t_n) \text{ para alguma sequência } \{t_n\} \text{ com } t_n \to -\infty\}.$$

Demonstração: Provaremos a igualdade do conjunto ω -limite. A demonstração da igualdade do conjunto α-limite é análoga.

($\Leftarrow$) Se $y = \lim_{n\to\infty} \pi(x,t_n)$, para alguma sequência $\{t_n\}$ com $t_n \to +\infty$, então

$$y \in \overline{\gamma^+(x)} = H^+(x).$$

Contudo, dado $\tau \geq 0$,

$$y = \lim_{n\to\infty} \pi(x,t_n) = \lim_{n\to\infty} \pi(\pi(x,\tau), -\tau + t_n)$$

em que $(-\tau + t_n) \to +\infty$.

Daí, para todo $\tau \geq 0$,

$$y \in H^+(\pi(x,\tau))$$

e, portanto, $y \in \Omega_x$.

($\Rightarrow$) Agora, se y pertencer ao conjunto ω - limite, então para $\tau \geq 0$,

$$y \in \overline{\gamma^+(\pi(x,\tau))}.$$

Segue, da Proposição 1.5, que existe uma sequência $\{x_a\}$, definida em A, com imagem em $\gamma^+(\pi(x,\tau))$ tal que $x_a \to y$. Digamos que

$$x_a = \pi(x, \tau + t_a),$$

para $t_a \geq 0$.

Definimos com a ordem usual em T^+, o produto ordenado em $T^+ \times A$, isto é, $(\tau, a) \geq (\sigma, b)$ sempre que $\tau \geq \sigma$ e $a \geq b$.

Seja t uma sequência em $T^+ \times A$ com imagem em T^+ definida da seguinte forma:

$$t : n = (\tau, a) \to \tau + t_a = t_n.$$

Seja $N \in \mathbb{Z}$ e fixe $(\sigma, b) \in T^+ \times A$ com $\sigma \geq N$.

Se $n = (\tau, a)$ e $n \geq (\sigma, b)$, então

$$t_n = \tau + t_a \geq \sigma + t_a \geq \sigma \geq N.$$

Portanto, $t_n \to +\infty$.

Agora, como $y = \lim x_a$, temos

$$y = \lim \pi(x, \tau + t_a) = \lim \pi(x, t_n),$$

com $t_n \to +\infty$.

Por conseguinte, $y \in \{y \in X : y = \lim_{n\to\infty} \pi(x, t_n)$ para alguma sequência $\{t_n\}$ com $t_n \to +\infty\}$. ∎

Teorema 2.1. *Os conjuntos α e ω-limite são fechados e invariantes.*

Demonstração: Consideremos o conjunto ω-limite, Ω_x. Como Ω_x está definido como a interseção de uma família de conjuntos fechados, então Ω_x é fechado.

Se y pertencer ao conjunto ω-limite, existirá uma sequência $\{t_n\}$ com $t_n \to +\infty$ tal que $x_n = \pi(x, t_n) \to y$, pela proposição anterior. Pela continuidade de π, para qualquer t em I_y, temos $\pi(\pi(x, t_n), t) \to \pi(y, t)$.

Contudo, $\pi(\pi(x, t_n), t) = \pi(x, t_n + t)$, daí $\pi(x, t_n + t) \to \pi(y, t)$. Como $(t + t_n) \to +\infty$, segue que $\pi(y, t)$ pertence ao conjunto $\omega-$ limite. Logo, Ω_x é invariante.

Para provarmos que o conjunto α-limite é fechado e invariante, procedemos de forma similar. ∎

Os conjuntos limites podem ser vazios. No entanto, queremos encontrar uma condição suficiente para que estes conjuntos sejam não vazios. Para isso, introduziremos um novo conceito.

Definição 2.5. *A órbita de x será denominada* ***compacta*** *se o conjunto $\gamma(x)$ estiver contido em um conjunto compacto, isto é, $\pi(x,t)$ será compacto se $\overline{\gamma(x)}$ for um conjunto compacto.*

Analogamente, a órbita positiva será ***positivamente compacta*** *se o conjunto $\gamma^+(x)$ estiver contido em um conjunto compacto, isto é, se $\overline{\gamma^+(x)}$ for um conjunto compacto.*

A ***compacidade negativa*** *é definida de forma análoga.*

Pela maximalidade de I_x, vemos que se $\pi(x,t)$ for positivamente compacto, então x pertencerá ao conjunto LB^+. De forma similar, se $\pi(x,t)$ for negativamente compacto (compacto), então x pertencerá ao conjunto $LB^-(LB)$.

O próximo teorema estabelece a relação entre movimentos positivamente compactos e os seus conjuntos ω-limites.

Teorema 2.2. *Seja $\pi(x,t)$ um movimento positivamente compacto. Então, Ω_x é não vazio, compacto e invariante. E mais, para todo y em Ω_x, temos $I_y = T$. Além disso, se o grupo T for o conjunto dos números reais, então o conjunto Ω_x será conexo.*

Demonstração: Já vimos que Ω_x é invariante e que, se $\pi(x,t)$ for positivamente compacto, então $H^+(x)$ será um conjunto compacto em X, pela definição.

Sejam $\tau \geq 0$ e $y \in H^+(\pi(x,\tau)) = \overline{\gamma^+(\pi(x,\tau))}$.

Então, existe uma sequência $\{y_k\} \subset \gamma^+(\pi(x,\tau))$ tal que $y = \lim y_k$. Como $y_k \in \gamma^+(\pi(x,\tau)$ para todo $k \in \mathbb{N}$, podemos dizer que $y_k = \pi(x, \tau + t_k)$.

Desse modo,

$$y = \lim \pi(x, \tau + t_k).$$

Portanto, $y \in \overline{\gamma^+(x)}$.

Desta forma, para $\tau \geq 0, H^+(\pi(x,\tau)) \subset H^+(x)$. Logo, $H^+(\pi(x,\tau))$ é um conjunto compacto em X, para todo $\tau \geq 0$.

Afirmação: A família de conjuntos $\{H^+(x,\tau); \tau \geq 0\}$ é decrescente.

A prova desta afirmação será feita por indução.

Seja $\tau_0 = 0$ e considere $\tau_1 > \tau_0$. Vimos acima que

$$H^+(\pi(x,\tau_1)) \subset H^+(x) = H^+(\pi(x,0)).$$

Suponha que, para $\tau_n > \tau_{n-1} > \cdots > \tau_1 > \tau_0$,

$$H^+(\pi(x,\tau_n)) \subset \cdots \subset H^+(\pi(x,\tau_1)) \subset H^+(\pi(x,\tau_0)).$$

Seja $\tau_{n+1} > \tau_n$.

Tome $z \in H^+(\pi(x,\tau_{n+1})) = \overline{\gamma^+(\pi(x,\tau_{n+1}))}$. Então,

$$z = \lim z_k, \quad \{z_k\} \subset \gamma^+(\pi(x,\tau_{n+1})).$$

Podemos dizer que $z_k = \pi(x, \tau_{n+1} + t_k)$, com $t_k \geq 0$.

Considere $\tau_{n+1} = \tau_n + r_n, r_n > 0$. Assim,

$$z_k = \pi(x, \tau_{n+1} + t_k) = \pi(x, \tau_n + r_n + t_k) = \pi(\pi(x, \tau_n), r_n + t_k).$$

Portanto,

$$\{z_k\} \subset \gamma^+(\pi(x, \tau_n))$$

e então

$$z \in \overline{\gamma^+(\pi(x, \tau_n))} = H^+(\pi(x, \tau_n)).$$

Dessa forma,

$$H^+(\pi(x, \tau_{n+1})) \subset H^+(\pi(x, \tau_n)).$$

Como $\{H^+(x, \tau), \tau \geq 0\}$ é uma família decrescente de conjuntos não vazios e compactos, segue que a interseção $\cap_{t \geq 0} H^+(\pi(x, t))$ é um conjunto não vazio e compacto, ou seja, Ω_x é um conjunto compacto e não vazio.

Se $y \in \Omega_x$, então $\pi(y, t)$ estará em um conjunto compacto Ω_x, para todo t em I_y. Daí, pela maximalidade de I_y, temos $I_y = T$.

Agora, suponha que $T = \mathbb{R}$ e que Ω_x não seja conexo. Então, existem conjuntos abertos A e B, disjuntos e não vazios, tais que $\Omega_x \subset (A \cup B)$. Daí, podemos encontrar sequências $\{t_n\}$ e $\{s_n\}$ tais que

$$0 < s_1 < t_1 < \cdots < s_n < t_n < s_{n+1} < \ldots, s_n \to \infty, t_n \to \infty$$

de forma que

$$\pi(x, s_n) \in A \;\; e \;\; \pi(x, t_n) \in B.$$

Como o caminho $\pi(x, [s_n, t_n])$ é conexo, existe um ponto $t_n^* \in [s_n, t_n]$ tal que $\pi(x, t_n^*) \notin A \cup B$. Da compacidade de Ω_x, segue que a sequência $\{\pi(x, t_n^*)\}$ contém uma subsequência convergente. Denotaremos esta subsequência por $\{\pi(x, t_n^*)\}$, por simplicidade de notação, e diremos que $\pi(x, t_n^*) \to y$.

O ponto limite y está no conjunto fechado $X - (A \cup B)$ e como $t_n^* \to +\infty$, temos $y \in \Omega_x$, o que gera uma contradição. Portanto, Ω_x é conexo. ∎

Corolário 2.1. *Seja π um fluxo em X. Se existir uma trajetória positivamente compacta, então o conjunto LB será não vazio.*

Demonstração: Segue do teorema precedente que Ω_x é não vazio e está no conjunto LB. ∎

2.4 Conjuntos minimais

Definição 2.6. *Um conjunto $E \subset X$ é denominado* ***conjunto minimal*** *se for não vazio, fechado e invariante e se não contiver subconjunto próprio com essas três propriedades.*

Definição 2.7. *Um ponto x em X é denominado **ponto de equilíbrio** para o fluxo π se $\pi(x,t) = x$, para todo $t \in T$.*

Consideremos x um ponto de equilíbrio. Então, $E = \{x\}$ é um conjunto minimal, pois:

- $E \neq \emptyset$;
- E é fechado, pois é conjunto unitário num espaço de Hausdorff;
- E é invariante, pois $\pi(x,t) = x, x \in E$, para todo $t \in T$;
- Os subconjuntos de E são ele próprio e o conjunto vazio. Logo, não existe subconjunto de E que satisfaça as três propriedades de conjunto minimal.

Definição 2.8. *Um ponto x é denominado **ponto periódico**, e a trajetória $\gamma(x)$ é chamada **periódica**, se existir $\tau > 0$ tal que $\pi(x, \tau + t) = \pi(x,t)$ para todo $t \in T$.*

Neste caso, diremos que a trajetória $\gamma(x)$ é τ-periódica. O número τ é um período da trajetória $\gamma(x)$.

Se x for um ponto periódico, então $E = \gamma(x)$ será um conjunto minimal.

De fato, $E \neq \emptyset$, uma vez que se $x \in E$ e $x = \pi(x,0), 0 \in I_x$. Além disso, E é invariante, pois a aplicação $\pi(x,\cdot)$ está definida para todo $t \in T$, uma vez que x é um ponto periódico. Agora, para que E seja fechado, a igualdade $\overline{\gamma(x)} = \gamma(x)$ deverá ser verdadeira. É sabido que $\gamma(x) \subset \overline{\gamma(x)}$. Resta-nos mostrar que $\overline{\gamma(x)} \subset \gamma(x)$.

Tome $y \in \overline{\gamma(x)}$. Então, existe uma sequência $\{y_n\} \subset \gamma(x)$ tal que $y_n \to y$. Podemos dizer que $y_n = \pi(x, t_n), t_n \in T$. Para cada n, existem $t_n^* \in [0, \tau)$ e k_n inteiro tal que

$$t_n = t_n^* + k_n \tau.$$

Como (t_n^*) é limitada, pois $(t_n^*) \subset [0,\tau)$, (t_n^*) admite uma subsequência convergente $(t_{n_k}^*)$. Digamos que $t_{n_k}^* \to t^*$.

Note que

$$\begin{aligned} y_n = \pi(x, t_n) &= \pi(x, t_n^* + k_n \tau) \\ &= \pi(\pi(x, k_n\tau), t_n^*) \\ &= \pi(x, t_n^*) \end{aligned}$$

e $y_n \to y$.

Como $t_{n_k}^* \to t^*$, temos

$$\pi(x, t_{n_k}^*) \to \pi(x, t^*).$$

Portanto, $y = \pi(x, t^*)$ e $y \in \gamma(x)$.

No decorrer da demonstração da propriedade seguinte, resultados sobre ínfimo de um conjunto serão utilizados e enunciados, como o leitor poderá verificar. Como o nosso enfoque, agora, são as propriedades de sistemas dinâmicos, julgamos por bem omitir a prova de tais resultados, visto que são considerados exercícios básicos da teoria de Análise na Reta. Cabe informar que, para a veracidade da propriedade que segue, consideraremos $T = \mathbb{R}$.

Proposição 2.7. *Sejam x um ponto periódico e $A = \{\tau > 0 : \pi(x, \tau) = x\}$. Considere $\sigma = inf A$. Então, x é um ponto de equilíbrio se, e somente se, $\sigma = 0$. E mais, se $\sigma > 0$, qualquer período τ da trajetória $\pi(x, t)$ será um múltiplo inteiro de σ.*

Demonstração: Inicialmente, mostraremos que x é um ponto de equilíbrio se, e somente se, $\sigma = 0$.

($\Rightarrow$) Suponha que x é um ponto de equilíbrio. Suponha que $\sigma \neq 0$, ou seja, $\sigma > 0$.

Tome $0 < t' < \sigma$. Como x é ponto de equilíbrio,

$$\pi(x, t') = x.$$

Daí, $t' \in A$. Mas isso é um absurdo, pois σ é o ínfimo do conjunto A.

($\Leftarrow$) Usaremos o seguinte resultado: Seja $G \neq \{0\}$ um subgrupo aditivo de T. Se $\inf(G \cap T_+) = 0$, então G será denso em T.

Consideremos $G = \{\tau \in T : \pi(x, \tau) = x\}$. Por hipótese, x é um ponto periódico, isso nos garante que $G \neq \{0\}$.

Afirmação 1: G é um subgrupo aditivo de T. Com efeito,

- $0 \in G$, pois $\pi(x, 0) = x$;
- Dados $t_1, t_2 \in G$, então $t_1 + t_2 \in G$, já que

$$\pi(x, t_1 + t_2) = \pi(\pi(x, t_1), t_2) = \pi(x, t_2) = x.$$

- Se $t \in G$, então $-t \in G$, pois

$$\pi(x, -t) = \pi(\pi(x, t), -t) = \pi(x, t - t) = \pi(x, 0) = x.$$

Afirmação 2: G é fechado em T. De fato, se $\{\tau_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset G$ e $\tau_n \longrightarrow \tau$ então $\tau \in G$, pois

$$\pi(x, t+\tau) = \pi\Big(x, t+\lim_n \tau_n\Big) = \pi\Big(x, \lim_n (t+\tau_n)\Big) = \lim_n \pi(x, t+\tau_n) = \lim_n \pi(x, t) = \pi(x, t).$$

Note que $G \cap T_+ = A$. Além disso, $\inf A = 0$, por hipótese. Portanto, pelo resultado mencionado acima, G é denso em T, isto é, $\overline{G} = T$. Como G é fechado, concluímos que $G = T$, ou seja,

$$\{\tau \in T : \pi(x, \tau) = x\} = T,$$

o que equivale a dizer que x é um ponto de equilíbrio.

Para provar a segunda parte, consideremos x um ponto periódico e $\sigma = inf A > 0$. Devemos mostrar que se τ for um período de $\pi(x,t)$, então

$$\tau = k\sigma, \ k \in \mathbb{Z}.$$

1. Vamos mostrar que $\sigma \in A$. Para isso, utilizaremos o seguinte resultado: Seja $G \subset \mathbb{R}$ um subgrupo aditivo e seja G^+ o conjunto dos números positivos contidos em G. Se $\inf G^+ > 0$, então $\inf G^+ \in G^+$.

   Novamente, considere $G = \{\tau \in \mathbb{R} : \pi(x,\tau) = x\}$. Vimos, na primeira parte, que G é um subgrupo aditivo. Por hipótese, $\inf G^+ = \inf A = \sigma > 0$. Portanto, pelo resultado supracitado, $\sigma \in A$, ou seja, $\pi(x,\sigma) = x$.

2. Afirmamos que $\pi(x,k\sigma) = x$, para todo $k \in \mathbb{Z}$.

   De fato, para $k = 1$, temos: $\pi(x,\sigma) = x$, por 1. Suponha que $\pi(x,k\sigma) = x$, para algum $k \in \mathbb{N}$. Então,

   $$\pi(x,(k+1)\sigma) = \pi(\pi(x,k\sigma),\sigma) = \pi(x,\sigma) = x.$$

   Agora, se $k \in \mathbb{Z}_-$, então $-k \in \mathbb{Z}_+$. Daí,

   $$\pi(x,k\sigma) = \pi(\pi(x,-k\sigma),k\sigma) = \pi(x,-k\sigma+k\sigma) = \pi(x,0) = x.$$

Suponha que τ não seja um múltiplo inteiro de σ. Desse modo,

$$\tau = k\sigma + r, 0 < r < \sigma, k \in \mathbb{Z}.$$

Como τ é um período de $\pi(x,t)$, temos

$$\pi(x,t+\tau) = \pi(x,t), \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Em particular, para $t = 0$, temos:

$$\pi(x,\tau) = \pi(x,0) = x.$$

Daí, $\pi(x,k\sigma + r) = x$.
Aplicando 2., concluímos que

$$x = \pi(x,k\sigma+r) = \pi(\pi(x,k\sigma),r) = \pi(x,r).$$

Logo, $r \in A \ e \ r < \sigma = \inf(A)$, o que é absurdo. ■

A demonstração do próximo resultado é uma simples aplicação do Lema de Zorn. Recordamos que, através do Lema de Zorn, pode-se concluir que se X for um conjunto não vazio e parcialmente ordenado e toda cadeia em X tiver um limitante inferior, então X terá um elemento minimal. A demonstração do Lema de Zorn, bem como o seu preciso enunciado, pode ser encontrada em [2].

Teorema 2.3. *Se um fluxo π admitir um conjunto não vazio, compacto e invariante, então ele terá um conjunto compacto minimal. Em particular, se existir uma trajetória positivamente compacta $\pi(x,t)$, o conjunto limite Ω_x conterá um conjunto compacto minimal.*

Demonstração: Seja $E' = \{E\}$ a coleção de todos os conjuntos não vazios, compactos e invariantes. Ordene E' pela relação de inclusão de conjuntos. Se E_α for uma cadeia em E', isto é, $E_\alpha \subset E_\beta$ sempre que $\beta \leqslant \alpha$ (os índices denotam números ordinais), então a interseção $E = \cap_\alpha E_\alpha$ será um elemento de E'. Portanto, toda cadeia em E' tem um limitante inferior, a saber, o conjunto E, fato este que nos permite concluir que E' tem um elemento minimal E_0. Sendo assim, E_0 é um conjunto minimal para o fluxo π.

Se aplicarmos o mesmo argumento para a coleção $F' = \{E \cap \Omega_x : E \in E'\}$, quando $\pi(x,t)$ for uma trajetória positivamente compacta, concluiremos que o conjunto minimal E_0 pode ser escolhido como um subconjunto de Ω_x. ∎

2.5 Semifluxos e atratores

Definição 2.9. *Definimos um* ***semifluxo*** *pelas mesmas propriedades que definem um fluxo, mas agora restringindo t ao semigrupo T^+. Em outras palavras, os intervalos I_x agora são da forma $I_x = [0, \beta_x)$, em que $\beta_x > 0$.*

As observações feitas para fluxos também são válidas para semifluxos, feitas as modificações adequadas, já que os conjuntos $\gamma^-(x)$ *e* LB^- não estão definidos em semifluxos.

Definição 2.10. *Seja π um fluxo em um espaço uniforme X e seja M um subconjunto fechado invariante de X. Assuma que a restrição de π a M seja um fluxo global. M será um* ***atrator*** *se existir um conjunto aberto U_0 tal que $M \subset U_0$ e, para cada $x \in U_0$,*

(i) $\pi(x,t) \in U_0$ *para todo* $t \geq 0$*;*

(ii) $\pi(x,t) \to M$ *quando* $t \to \infty$*, isto é, para toda vizinhança aberta V de M, existe um τ tal que $\pi(x,t) \in V$ para todo $t \geq \tau$.*

Um atrator M será denominado ***estável*** *se para toda vizinhança U de M existir uma vizinhança V de M tal que $\pi(V,t) \subset U$ para todo $t \geq 0$. Se M for um atrator, denotaremos por $A(M)$ o maior conjunto aberto satisfazendo (i) e (ii). O conjunto $A(M)$ é denominado* ***região de atração*** *de M.*

Teorema 2.4. *Seja M um atrator compacto para um fluxo π em um espaço uniforme X. Se $x \in X$ tiver a propriedade $\gamma^+(x) \cap A(M) \neq \emptyset$, então $\Omega_x \subset M$. E se o espaço X for localmente compacto, então Ω_x será não vazio.*

Demonstração: Dado $x \in X$, suponha que $\gamma^+(x) \cap A(M) \neq \emptyset$. Seja então $y = \pi(x, \tau) \in A(M)$ para algum $\tau \geq 0$. Portanto $\pi(y, t) = \pi(x, t+\tau) \to M$ quando $t \to \infty$. Note que, se $z \in \Omega_x = \Omega_y$, então $z = \lim \pi(x, \tau + t_n)$ para alguma sequência $\{t_n\}$ com $t_n \to \infty$.

Como a sequência $\{\pi(x, \tau + t_n)\}$ está eventualmente em toda vizinhança de z e eventualmente em toda vizinhança de M, segue da propriedade de Hausdorff que $z \in M$.

Se X for localmente compacto, existirá uma vizinhança V condicionalmente compacta de M tal que $M \subset V \subset \overline{V} \subset A(M)$. Segue de (ii) que $\pi(x, t) \in \overline{V}$ para $t \geq \tau$, daí $\pi(x, t)$ será positivamente compacto. Então, Ω_x é não vazio pelo Teorema 2.2. ■

3 Exemplos de fluxos e semifluxos

Neste capítulo, apresentaremos exemplos de fluxos e semifluxos, que serão de grande valia para as aplicações da teoria de sistemas dinâmicos às equações diferenciais ordinárias.

3.1 Equações diferenciais autônomas

Seja $v : W \to \mathbb{R}^n$ um campo de vetores de classe C^1 em um conjunto aberto $W \subset \mathbb{R}^n$.

Para cada $x \in W$, considere o problema de valor inicial (PVI)

$$\begin{cases} x' = & v(x) \\ x(0) = & x. \end{cases} \tag{3.1}$$

Seja $\phi(x,t)$ a única solução do PVI (3.1) (sendo assim, $\phi(x,0) = x$) e considere $I_x = (\alpha_x, \beta_x)$ o intervalo de definição dessa solução. Cabe mencionar que a unicidade de solução local para qualquer problema de valor inicial envolvendo a equação $x' = v(x)$ é garantida pela condição $v \in C^1$ (veja Teorema 9.2 do Apêndice).

Defina $D = \{(x,t) \in W \times \mathbb{R} : t \in I_x\}$ e $\pi : D \to W$ pondo $\pi(x,t) = \phi(x,t)$.

Afirmação: π é um fluxo em W.

Com efeito,

(i) $\pi(x,0) = \phi(x,0) = x$, para todo $x \in W$.

(ii) Vejamos que $\pi(\pi(x,\tau),t) = \pi(x,t+\tau), \tau \in I_x$ e $t \in I_{\pi(x,\tau)}$.

Sejam $\tau \in I_x$ e $t \in I_{\pi(x,\tau)}$. Note que

$$\pi(\pi(x,\tau),t) = \phi(\phi(x,\tau),t) \text{ e } \pi(x,t+\tau) = \phi(x,t+\tau).$$

Sejam

$$\psi_1(t) = \phi(\phi(x,\tau),t) \text{ e } \psi_2(t) = \phi(x,t+\tau).$$

Veja que ψ_1 e ψ_2 são soluções do PVI

$$\begin{cases} x' = & v(x) \\ x(0) = & \phi(x,\tau). \end{cases}$$

Portanto, segue da unicidade de solução que, $\psi_1(t) = \psi_2(t)$, ou seja,

$$\phi(\phi(x,\tau),t) = \phi(x,t+\tau).$$

Logo,

$$\pi(\pi(x,\tau),t) = \pi(x,t+\tau).$$

(iii) Como $v \in C^1$, $\pi(x,t)$ é contínua (veja Teorema 9.2 do Apêndice).

3.2 Equações diferenciais não autônomas

Seja $v : W \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ um campo vetorial de classe C^1, onde $W \subset \mathbb{R}^n$ é um subconjunto aberto.

Considere, para $(x,t) \in W \times \mathbb{R}$, o PVI:

$$\begin{cases} x' = & v(x,t) \\ x(0) = & x_0. \end{cases} \tag{3.2}$$

Seja $\phi(x_0,t_0,t)$ a solução de (3.2), assim, $\phi(x_0,t_0,0) = x_0$. Temos a unicidade de $\phi(x_0,t_0,t)$ num intervalo $I_{(x_0,t_0)}$, pois $v \in C^1$.

Vamos definir

$$J_{(x_0,t_0)} = \{t : t_0 + t \in I_{(x_0,t_0)}\}$$

e considerar $X = W \times \mathbb{R}$.

Definimos também,

$$\pi(p,t) = (\phi(x_p,t_p,t_p+t), t_p+t)$$

em que $p = (x_p,t_p) \in X$.

A aplicação π é um fluxo em X definido em $X \times J_p$. De fato, dado $p = (x_p,t_p) \in X$, temos

$$\begin{aligned} \pi(p,0) &= (\phi(x_p,t_p,t_p+0), t_p+0) \\ &= (\phi(x_p,t_p,t_p), t_p) \\ &= (x_p,t_p) \\ &= p. \end{aligned}$$

Verifiquemos agora que $\pi(p,\tau+t) = \pi(\pi(p,\tau),t), \tau \in J_p$ e $t \in I_{\pi(p,\tau)}$.

Note que

$$\pi(\pi(p,\tau),t) = \phi((\phi(x_p,t_p,t_p+\tau), t_p+\tau, t_p+\tau+t), t_p+\tau+t)$$

e

$$\pi(p,t+\tau) = (\phi(x_p,t_p,t_p+t+\tau), t_p+t+\tau).$$

Fazendo

$$\psi_1(t) = (\phi(x_p, t_p, t_p + \tau), t_p + \tau, t_p + \tau + t)$$

e

$$\psi_2(t) = \phi(x_p, t_p, t_p + t + \tau),$$

observamos que ψ_1 e ψ_2 são soluções do PVI:

$$\begin{cases} x' = & v(x,t) \\ x(0) = & \phi(x_p, t_p, t_p + \tau). \end{cases}$$

Portanto, da unicidade de solução local (veja Apêndice, Teorema 9.2),

$$\psi_1(t) = \psi_2(t).$$

Logo,

$$\pi(\pi(p,\tau),t) = (\psi_1(t), t_p + \tau + t) \text{ e } \pi(p, \tau + t) = (\psi_2(t), t_p + \tau + t).$$

$$\therefore \pi(\pi(p,\tau),t) = \pi(p, \tau + t).$$

E π é uma aplicação contínua, pois as soluções da equação $x' = v(x,t)$ são contínuas (veja Apêndice, Teorema 9.2).

3.3 Funções contínuas

Seja $C = C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ o espaço das funções contínuas definidas em $\mathbb{R}$ tomando valores em $\mathbb{R}^n$. Suponha que C tenha a topologia da convergência uniforme em conjuntos compactos. Ou seja, uma sequência $\{f_k\}$ em C convergirá para uma função limite f se, para todo conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}$, a sequência de restrições $\{f_k|_K\}$ convergir para $f|_K$ uniformemente.

Vamos mostrar que essa topologia é metrizável.

Consideremos $I_n = [-n, n]$, $|\cdot|$ uma norma em $\mathbb{R}^n$ e definiremos

$$\sigma_n(f,g) = \sup\{|f(\theta) - g(\theta)| : \theta \in I_n\},$$

$$\rho_n(f,g) = \min\{1, \sigma_n(f,g)\},$$

$$\rho(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \rho_n(f,g), \quad f, g \in C.$$

Afirmações:

I) ρ é uma métrica em C;

II) $\rho(f_k, f) \to 0 \Leftrightarrow \{f_k\}$ converge uniformemente para f em cada subconjunto compacto de $\mathbb{R}$.

Para mostrar que ρ é uma métrica em C, devemos mostrar que, para $f, g, h \in C$, as seguintes propriedades são válidas:

1. $\rho(f, f) = 0$;
2. $\rho(f, g) = 0 \Leftrightarrow f = g$;
3. $\rho(f, g) \leq \rho(f, h) + \rho(h, g)$;
4. $\rho(f, g) = \rho(g, f)$.

É fácil ver que

(i) $\sigma_n(f, g) = \sigma_n(g, f)$;

(ii) $\sigma_n(f, f) = 0$;

(iii) $\sigma_n(f, g) \leq \sigma_n(f, h) + \sigma_n(h, g)$.

Assim, σ_n é uma pseudo-métrica.

Analogamente, ρ_n satisfaz $(i), (ii)$ e (iii). Além disso, ρ_n e σ_n são equivalentes, isso significa que, para qualquer sequência $\{f_k\}$ em C e para qualquer $f \in C$, temos

$$\rho_n(f_k, f) \to 0 \Leftrightarrow \sigma_n(f_k, f) \to 0.$$

De fato,

$$\begin{aligned} \rho_n(f_k, f) \to 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \min\{1, \sigma_n(f, g)\} \to 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \sigma_n(f_k, f) \to 0. \end{aligned}$$

Veja que

$$|\rho(f, g)| = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} |\rho_n(f, g)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}$$

e que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ é convergente.

Como a série $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$ é convergente, a série dada por ρ é absolutamente convergente para cada par $f, g \in C$. Segue, então, que ρ satisfaz as condições $1), 3)$ e $4)$ acima.

Basta-nos provar que $\rho(f, g) = 0$ implica $f = g$. Mas,

$$\begin{aligned} \rho(f, g) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \rho_n(f, g) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \rho_n(f, g) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \sigma_n(f, g) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \sup\{|f(\theta) - g(\theta)| : \theta \in I_n\} = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad f(\theta) = g(\theta), \theta \in I_n. \end{aligned}$$

Como $\cup I_n = \mathbb{R}$, segue que $f \equiv g$.

Portanto, ρ é uma métrica em C.

Mostremos a afirmação II):

($\Rightarrow$) Seja $K \subset \mathbb{R}$ um conjunto compacto. Então, para algum $n \in \mathbb{Z}$, temos $K \subset I_n$.

Se $\rho(f_k, f) \to 0$ para alguma sequência $\{f_k\}$, então $\rho_n(f_k, f) \to 0$, o que implica que $\sigma_n(f_k, f) \to 0$.

Portanto, $\{f_k\}$ converge uniformemente para f nos conjuntos compactos I_n e K.

($\Leftarrow$) Suponha, agora, que $\{f_k\}$ convirja para f na topologia da convergência uniforme em conjuntos compactos.

Queremos mostrar que, para todo $\varepsilon > 0$, existe um índice L tal que $\rho(f_k, f) < 2\varepsilon$, sempre que $k \geq L$.

Seja $\varepsilon > 0$ dado. Escolhemos N tal que

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-n} \leq \varepsilon.$$

Como $\{f_k\}$ converge uniformemente para f em conjuntos compactos, $\{f_k\}$ converge uniformemente em I_N. Então, tomemos um índice L tal que as pseudo-métricas $\sigma_1(f_k, f), \sigma_2(f_k, f), \cdots, \sigma_N(f_k, f)$ sejam pequenas, sempre que $k \geq L$.

Podemos escolher L de forma que

$$\sum_{n=1}^{N} 2^{-n} \rho_n(f_k, f) \leq \varepsilon, \quad k \geq L.$$

Assim,

$$\rho(f_k, f) \leq \sum_{n=1}^{N} 2^{-n} \rho_n(f_k, f) + \sum_{n=N+1}^{\infty} 2^{-n} \leq 2\varepsilon, \quad k \geq L.$$

Portanto, a topologia gerada por ρ coincide com a topologia da convergência uniforme em conjuntos compactos.

Definição 3.1. *Definimos a aplicação* $\pi : C \times \mathbb{R} \to C$ *por*

$$\pi(f, t) = f_t,$$

com $(f, t) \in C \times \mathbb{R}$, *onde* $f_t(\theta) = f(t + \theta), \theta \in \mathbb{R}$.

O próximo resultado garante que a aplicação definida acima é um fluxo em C.

Teorema 3.1. *A aplicação* $\pi(f, t) = f_t$ *define um fluxo contínuo em* $C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$.

Demonstração: Temos $\pi(f, 0) = f_0$ e, para $\theta \in \mathbb{R}$,

$$f_0(\theta) = f(0 + \theta) = f(\theta).$$

Portanto, $\pi(f, 0) = f$.

A propriedade de grupo também é satisfeita por π, pois $\pi(\pi(f,t),s) = \pi(f_t,s) = f_{t+s} = \pi(f,t+s)$.

Resta-nos provar que π é contínua.

Consideremos a sequência $\{f^{(k)}\} \subset C$, cujo limite é f e seja τ_k uma sequência em $\mathbb{R}$ tal que $\tau_k \to 0$.

Queremos provar que

$$\pi(f^{(k)}, t+\tau_k) \to \pi(f,t), \forall t \in \mathbb{R}$$

Suponha, sem perda de generalidade, que $|\tau_k| \leq 1$. E considere $K \subset \mathbb{R}, K_1$, conjuntos compactos, com K_1 definido por

$$K_1 = \{\theta + \tau : \theta \in K, |\tau| \leq 1\}.$$

Sejam $t \in \mathbb{R}$ fixo e $\varepsilon > 0$ dado. Escolhemos o índice N_1 tal que

$$|f_t^{(k)}(\theta') - f_t(\theta')| \leq \varepsilon, \quad (\theta' \in K_1, k \geq N_1)$$

e escolhemos $\delta > 0$ pela continuidade uniforme de f_t em K tal que

$$|f_t(\theta+\tau) - f_t(\theta)| \leq \varepsilon, \quad (\theta \in K, |\tau| \leq \delta).$$

Escolhemos o índice N_2 tal que $|\tau_k| \leq \delta$, sempre que $k \geq N_2$ e seja $N = \max\{N_1, N_2\}$.

Então, para $k \geq N$ e $\theta \in K$, temos

$$|f_t^{(k)}(\theta+\tau_k) - f_t(\theta)| \leq |f_t^{(k)}(\theta+\tau_k) - f_t(\theta+\tau_k)| + |f_t(\theta+\tau_k) - f_t(\theta)| \leq 2\varepsilon,$$

o que estabelece a continuidade de π. ■

O sistema dinâmico descrito acima é, algumas vezes, denominado **sistema dinâmico Bebutov**.

O próximo teorema é uma aplicação direta do Teorema de Ascoli, que afirma que um conjunto $\mathcal{A}$ em C será condicionalmente compacto se, e somente se:

(i) $\mathcal{A}$ for limitado, isto é, para qualquer θ em $\mathbb{R}$, existe um compacto K em $\mathbb{R}^n$ tal que $f(\theta)$ pertence a K para qualquer f em $\mathcal{A}$ e,

(ii) $\mathcal{A}$ for equicontínuo, isto é, para qualquer θ em $\mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\varepsilon, \theta) > 0$ tal que $|f(\theta) - f(\theta')| \leq \varepsilon$ para qualquer $f \in \mathcal{A}$, sempre que $|\theta - \theta'| \leq \delta$.

Teorema 3.2. *No sistema dinâmico Bebutov, a trajetória f_t será compacta se, e somente se, f for limitada e uniformemente contínua.*

Demonstração: Note que f_t será compacta se, e somente se, o conjunto $\gamma(f)$ for condicionalmente compacto.

Suponha que $\gamma(f)$ seja condicionalmente compacto. Então, $\gamma(f)$ é um conjunto limitado e, para $\theta = 0$ em particular, existe um compacto K tal que $f_t(0) = f(t) \in K$

para todo t em $\mathbb{R}$. Equivalentemente, existe $B > 0$ tal que $|f_t(0)| = |f(t)| \leq B$ para todo t em $\mathbb{R}$. Então, f é limitada.

Como $\gamma(f)$ é equicontínuo em 0, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $|\theta - 0| < \delta$, então

$$|f_t(\theta) - f_t(0)| = |f(t+\theta) - f(t)| < \varepsilon.$$

Portanto, f é uniformemente contínua.

Suponha agora que f seja limitada e uniformemente contínua. Pela continuidade uniforme da f, dados $\varepsilon > 0$ e $t \in \mathbb{R}$, existe $\delta > 0$ tal que, se $|(t+\theta) - (t+\theta')| < \delta$, então

$$|f(t+\theta) - f(t+\theta')| < \varepsilon.$$

Como $|f(t+\theta) - f(t+\theta')| = |f_t(\theta) - f_t(\theta')|$, concluímos que $\gamma(f)$ é equicontínuo. Logo, pelo Teorema de Ascoli, a trajetória f_t é compacta. ∎

Os argumentos utilizados na prova do teorema anterior podem ser adaptados para provar o próximo resultado.

Teorema 3.3. *Um movimento f_t no sistema dinâmico Bebutov será positivamente compacto se, e somente se, f for limitada e uniformemente contínua em $\mathbb{R}^+$.*

4 Equações diferenciais não autônomas

Neste capítulo, vamos exibir a construção de um sistema dinâmico distinto do apresentado na seção 3.2, para equações diferenciais ordinárias não autônomas.

4.1 Construção básica

Definição 4.1. *Seja W um conjunto aberto em $\mathbb{R}^n$ e $f \in C(W \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. Diremos que a equação diferencial*

$$x' = f(x,t) \tag{4.1}$$

*é **admissível** se as soluções de* (4.1) *forem únicas.*

Isso significa que para todo ponto (x_0, t_0) em $W \times \mathbb{R}$ existe precisamente uma solução ϕ de (4.1) *que satisfaz $\phi(t_0) = x_0$.*

Sejam $\phi(x, f, t)$ a solução de (4.1) que satisfaz $\phi(x, f, 0) = x$, $I_{(x,f)}$ o intervalo maximal de definição da solução $\phi(x, f, t)$ e $\gamma(f)$ a trajetória de f em $C(W \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, ou seja, o conjunto $\{f_t : t \in I_{(x,f)}\}$. Definindo

$$D = \{(x, g; t) \in W \times \gamma(f) \times \mathbb{R} : t \in I_{(x,g)}\},$$

vamos mostrar que a aplicação $\pi : D \to W \times \gamma(f)$ dada por

$$\pi(x, g, t) = (\phi(x, g, t), g_t), \tag{4.2}$$

definirá um fluxo em $W \times \gamma(f)$, se f for admissível.

Teorema 4.1. *Se $f \in C(W \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ for admissível, então a aplicação π dada por* (4.2) *definirá um fluxo contínuo em $W \times \gamma(f)$.*

Demonstração: Verifiquemos, primeiramente, a propriedade de identidade:

$$\begin{aligned} \pi(x, g, 0) &= (\phi(x, g, 0), g_0) \\ &= (x, \pi(g, 0)) \\ &= (x, g), \quad \text{para todo } (x, g) \in W \times \gamma(f). \end{aligned}$$

Vejamos que $\pi(\pi(x,g,\tau),\sigma) = \pi(x,g,\tau+\sigma)$, para $(x,g) \in W \times \gamma(f)$, $\tau \in I_{(x,g)}$ e $\sigma \in I_{\pi(x,g;\tau)}$.

Temos:

$$\begin{aligned} \pi(\pi(x,g,\tau),\sigma) &= \pi(\phi(x,g,\tau),g_\tau,\sigma) \\ &= (\phi(\phi(x,g,\tau),g_\tau,\sigma),(g_\sigma)_\tau) \\ &= (\phi(\phi(x,g,\tau),g_\tau,\sigma),g_{\sigma+\tau}). \end{aligned}$$

Fazendo

$$\phi(\tau) = \phi(x,g,\tau),$$

$$\psi(\sigma) = \phi(\phi(\tau),g_\tau,\sigma) \text{ e}$$

$$\xi(\sigma) = \phi(x,g,\sigma+\tau),$$

vemos que ϕ é a solução de $x' = g(x,t)$ que satisfaz $\phi(0) = x$. Além disso, vemos que ψ é a solução de

$$x' = g_\tau(x,\tau) = g(x,\tau+\sigma) \tag{4.3}$$

que satisfaz $\psi(0) = (\phi(\tau),g_\tau,0) = \phi(\tau)$.

Contudo, ξ também é uma solução de (4.3) que satisfaz $\xi(0) = \phi(x,g,\tau) = \phi(\tau)$.

Daí, pela unicidade de solução, temos

$$\xi(\sigma) = \phi(\tau+\sigma) = \psi(\sigma), \quad \forall \sigma \in I_{\pi(x,g,t)}.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} \pi(\pi(x,g,\tau),\sigma) &= \pi(\phi(\tau),g_\tau,\sigma) \\ &= (\psi(\sigma),g_{\tau+\sigma}) \\ &= (\phi(\tau+\sigma),g_{\tau+\sigma}) \\ &= \pi(x,g,\tau+\sigma). \end{aligned}$$

A continuidade de π e a maximalidade dos intervalos $I_{(x,f)}$ seguem do Lema de Kamke:

Lema 4.1 (Kamke)**.** *Seja A a coleção de todas as funções admissíveis f em $C(W \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. Então, a função solução $\phi(x,f,t)$ será contínua no subconjunto de $W \times A \times \mathbb{R}$, para o qual está definida. Em outras palavras, se $\{f_n\}$ for uma sequência de funções admissíveis em $C(W \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ com limite f em $C(W \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, onde f é admissível, $\{x_n\}$ for uma sequência em W com limite x e $\{\tau_n\}$ for uma sequência em $I_{(x_n,f_n)}$ com limite τ, então $\tau \in I_{(x,f)}$ e*

$$\phi(x_n,f_n,\tau_n) \to \phi(x,f,\tau).$$

Como $f \in C(W \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ e f é admissível por hipótese, então $f \in A$.

Logo, pelo Lema 4.1, $\phi(x,g,\tau)$ é contínua em $W \times A \times \mathbb{R}$, onde está definida. ∎

Uma demonstração do Lema 4.1 pode ser encontrada em [5], página 189.

4.2 O problema de extensão

O fluxo construído na seção anterior não tem uma estrutura completa devido ao fato de $\gamma(f)$ não ser, em geral, fechado.

Podemos nos perguntar então, se o fluxo π em $W \times \gamma(f)$ pode ser estendido para um fluxo em $W \times H(f)$, onde $H(f)$ é o fecho da trajetória de f em $C(W \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. Tal extensão poderia ser dada por

$$\pi(x, g, t) = (\phi(x, g, t), g_t), \tag{4.4}$$

para $x \in W, g \in H(f)$ e $t \in I_{(x,g)}$.

A relação (4.4) definirá um fluxo em $W \times H(f)$, se toda função g em $H(f)$ for admissível.

Definição 4.2. *Diremos que uma função f em $C(W \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ é **regular** ou que f satisfaz a **condição forte de unicidade**, se as soluções de $x' = g(x,t)$ forem únicas para toda g em $H(f)$.*

Teorema 4.2. *Seja f uma função regular em $C(W \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. Então, a aplicação π dada por* (4.4) *define um fluxo contínuo em $W \times H(f)$.*

Demonstração: A demonstração deste resultado é análoga à demonstração do Teorema 4.1 da seção anterior. ∎

4.3 Soluções compactas

Definição 4.3. *Seja f uma função regular em $C(W \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. Para $(x, g) \in W \times H(f)$, seja $I_{(x,g)} = (\alpha, \beta)$ o intervalo maximal de definição da solução $\phi(x, g, t)$. Diremos que $\phi(x, g, t)$ é **positivamente compacta** se o conjunto*

$$\{\phi(x, g, t) : 0 \leq t < \beta\}$$

estiver contido em um subconjunto compacto de W.

***Compacidade negativa e compacidade** são definidas de forma semelhante.*

Como $I_{(x,g)}$ é maximal, segue que $\beta = +\infty$ sempre que $I_{(x,g)}$ for positivamente compacto. Se esta solução for compacta, então $I_{(x,g)} = \mathbb{R}$.

O próximo resultado estabelece uma relação entre a solução $\phi(x, g, t)$ e sua trajetória $\pi(x, g, t)$.

Lema 4.2. *Seja f uma função regular em $C(W \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$.*

(A) Se uma trajetória $\pi(x, g, t)$ em $W \times H(f)$ for positivamente compacta (compacta), então a trajetória g_t em $H(f)$ e a solução correspondente $\phi(x, g, t)$ também o serão;

(B) Suponha que a trajetória f_t em $H(f)$ seja positivamente compacta (compacta). Então, a solução $\phi(x, f, t)$ será positivamente compacta (compacta) se, e somente se, sua trajetória correspondente $\pi(x, f, t)$ for positivamente compacta (compacta).

Demonstração:

(A) Suponha que $\pi(x, g, t) = (\phi(x, g, t), g_t)$ em $W \times H(f)$ seja positivamente compacta. Então, existem A um subconjunto de W, A compacto e um subconjunto B de $H(f)$ também compacto tal que $\phi(x, g, t) \in A$ e $g_t \in B$, para todo $t \geq 0$.

Logo, $\phi(x, g, t)$ que é a solução, será positivamente compacta, bem como g_t, trajetória de g em $H(f)$.

(B) ($\Leftarrow$) Como a trajetória $\pi(x, g, t) = (\phi(x, f, t), f_t)$ em $W \times H(f)$ é positivamente compacta, cada componente de $\pi(x, g, t)$ deve ser positivamente compacta. Por hipótese, $f_t \in H(f)$ o é, e portanto $\phi(x, f, t)$ também é positivamente compacta.

($\Rightarrow$) Segue facilmente.

■

Consideremos as projeções naturais em $W \times H(f)$, dadas por

$$P : W \times H(f) \to W \text{ e } Q : W \times H(f) \to H(f),$$

em que $P(x, g) = x$ e $Q(x, g) = g$.

Claramente, P e Q são aplicações contínuas.

Vemos que Q aplica o fluxo π dado pela equação (4.4) no fluxo g_t em $H(f)$.

A projeção P é de grande interesse quando queremos comparar as soluções $\phi(x, g, t)$ e as trajetórias $\pi(x, g, t)$. Por exemplo, notemos que a trajetória $\pi(x, g, t)$ estará definida para todo tempo $t \geq 0$ se, e somente se, a solução $\phi(x, g, t)$ estiver definida para todo $t \geq 0$. Neste caso, o conjunto ω-limite $\Omega_{(x,g)}$ estará definido, apesar de poder ser vazio.

Definição 4.4. *Definimos o* ***conjunto limite positivo*** *da solução $\phi(x, g, t)$ por*

$$L^+_{(x,g)} = P(\Omega_{(x,g)}).$$

Se a trajetória f_t em $H(f)$ for positivamente compacta, então o conjunto limite positivo L^+ poderá ser caracterizado da seguinte forma:

Lema 4.3. *Seja f uma função regular em $C(W \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ e consideremos a trajetória f_t positivamente compacta. Então, um ponto y pertencerá ao conjunto limite positivo $L^+_{(x,f)}$ da solução $\phi(x, f, t)$ se, e somente se, existir uma sequência $\{\tau_n\}$ em $\mathbb{R}$ com*

$$\tau_n \to \infty \quad e \quad \pi(x, f, \tau_n) \to y. \tag{4.5}$$

Demonstração: Primeiramente, note que um ponto (y, g) está em $\Omega_{(x,f)}$ se, e somente se, existir uma sequência $\{\tau_n\}$ em $\mathbb{R}$ tal que

$$\tau_n \to \infty \text{ e } \pi(x, f, \tau_n) \to (y, g),$$

implicando que

$$\phi(x, f, \tau_n) \to y \quad \text{e} \quad f_{\tau_n} \to g. \tag{4.6}$$

($\Rightarrow$) Se $y \in L^+_{(x,f)}$, então existirá uma função g em $H(f)$ tal que $(y, g) \in \Omega_{(x,f)}$. Daí, existirá uma sequência $\{\tau_n\}$ em $\mathbb{R}$ satisfazendo (4.5) .

($\Leftarrow$) Como a trajetória f_t é positivamente compacta, podemos encontrar uma subsequência de $\{f_{\tau_n}\}$ tal que $f_{\tau_n} \to g$, com $\tau_n \to \infty$. Daí, $\phi(x, f, \tau_n) \to y$ e, por conseguinte, $(y, g) \in \Omega_{(x,f)}$ e $y \in L^+_{(x,f)}$. ∎

Teorema 4.3. *Seja f uma função regular em $C(W \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, f_t uma trajetória positivamente compacta e $\phi(x, f, t)$ uma solução positivamente compacta de $x' = f(x, t)$. Então:*

(i) O conjunto ω-limite $\Omega_{(x,f)}$ em $W \times H(f)$ é não vazio, compacto e invariante;

(ii) O conjunto limite positivo $L^+_{(x,f)}$ é não vazio e compacto em W;

(iii) Se (y, g) pertencer a $\Omega_{(x,f)}$, então a solução $\phi(y, g, t)$ será compacta;

(iv) Se $y \in L^+_{(x,f)}$, então existirá uma função g em $H(f)$ tal que $\phi(y, g, t) \in L^+_{(x,f)}$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Demonstração:

(i) A demonstração deste item segue imediatamente do Lema 4.2 e do Teorema 2.2.

(ii) Como $\Omega_{(x,f)} \neq \emptyset$ em W por (i) e P é contínua, então $L^+_{(x,f)}$ é não vazio e compacto em W.

(iii) Se (y, g) pertencer a $\Omega_{(x,f)}$, então $\pi(y, g, t)$ também pertencerá a $\Omega_{(x,f)}$ para todo $t \in \mathbb{R}$, pelo item (i). Logo, $(\phi(y, g, t), g_t) \in \Omega_{(x,f)}$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e, portanto, $\phi(y, g, t)$ é uma solução compacta.

(iv) Seja $y \in L^+_{(x,f)}$. Então existe g em $H(f)$ tal que $(y, g) \in \Omega_{(x,f)}$. Assim, $\pi(y, g, t) = (\phi(y, g, t), g_t) \in \Omega_{(x,f)}$ para todo $t \in \mathbb{R}$, pelo item (i), e dessa forma, $\phi(y, g, t) \in L^+_{(x,f)}$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

∎

4.4 Equações limite

Para a próxima definição, precisamos lembrar que a aplicação $(f,t) \mapsto f_t$ define um fluxo contínuo em $C(W \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$.

Definição 4.5. *Seja Ω_f o conjunto ω-limite da trajetória f_t. Definimos o* ***conjunto de equações limite*** *para*

$$x' = f(x,t)$$

como sendo o conjunto de todas as equações diferenciais da forma

$$x' = f^*(x,t), \qquad (f^* \in \Omega_f).$$

O próximo resultado é uma consequência do Teorema 2.2.

Proposição 4.1. *Seja f_t uma trajetória positivamente compacta em $C(W \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. Então, o conjunto de equações limite para f é um subconjunto não vazio, compacto e conexo de $H(f)$.*

O Teorema 4.3 nos permite obter informações sobre a solução limite $\phi(y,g,t)$. Esta é uma solução de $y' = g(y,t)$, a qual é uma equação limite para $x' = f(x,t)$. Este fato segue da observação que a projeção

$$Q : W \times H(f) \to H(f)$$

aplica $\Omega_{(x,f)}$ em Ω_f.

Teorema 4.4. *Seja f uma função regular em $C(W \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ e suponha que a solução $\phi(x,f,t)$ esteja definida para todo $t \geq 0$. Se (y,g) pertencer ao conjunto $\Omega_{(x,f)}$, então existirá uma sequência $\{\tau_n\}$ com $\tau_n \to \infty$ e $\phi(x,f,\tau_n + t) \to \phi(y,g,t)$ uniformemente para t em subconjuntos compactos de $I_{(y,g)}$, que é o intervalo maximal de definição de $\phi(y,g,t)$.*

Demonstração: A demonstração segue da Proposição 2.4, da Proposição 2.6, e do Teorema 4.2. ∎

5 Funções quase periódicas

Este capítulo destinar-se-á a discussão de algumas propriedades de funções quase periódicas com imagem em um espaço uniforme. Um caso especial ocorrerá quando X for um espaço linear e o sistema de vizinhanças uniforme definir uma estrutura linear em X, o que significa que as vizinhanças V_a satisfarão: $V_a(x) = x + V_a(0)$.

Os números (i) a (ix) serão usados para se referirem às nove propriedades de um sistema de vizinhanças uniforme definidas no Capítulo 1.

5.1 Definição de quase periodicidade

Definição 5.1. *Um subconjunto E do grupo T será denominado* ***relativamente denso*** *se existir um número $l > 0$ tal que todo intervalo de T de comprimento l contenha pelo menos um ponto de E.*

A esse número l chamamos ***número do intervalo de inclusão*** *de E.*

Seguem alguns exemplos de conjuntos relativamente densos em $\mathbb{R}$.

Exemplo 5.1. a) Consideremos o conjunto $\{n\tau : n \in \mathbb{Z}, \tau > 0\} \subset \mathbb{R}$.

Podemos reescrevê-lo da forma $\{\cdots, -\tau, 0, \tau, 2\tau, \cdots\}$ e tomar $l = 2\tau$. Assim, todo intervalo de $\mathbb{R}$ de comprimento 2τ conterá pelo menos um ponto do conjunto em questão.

b) Seja $E = \{\pm\sqrt{n} : n \in \mathbb{Z}^+\}$ um subconjunto de $\mathbb{R}$.

Tomando $l = 1$, E é um conjunto relativamente denso.

Seja $f : T \to X$ uma função contínua. Para qualquer índice $a \in A$, definimos

$$E(a, f) = \{\tau \in T : f(t) \in V_a(f(t + \tau)), \forall t \in T\}. \tag{5.1}$$

Pela propriedade simétrica (iii) da vizinhança V_a, temos ainda

$$E(a, f) = \{\tau \in T : f(t + \tau) \in V_a(f(t)), \forall t \in T\}. \tag{5.2}$$

Definição 5.2. *Diremos que f é* ***quase periódica*** *se ela for contínua e se, para todo $a \in A$, o conjunto $E(a, f)$ for relativamente denso em T.*

Se $f : T \to X$ for contínua e periódica, isto é, se $f(\tau + t) = f(t)$ para todo $t \in T$ e algum $\tau > 0$, então f será quase periódica. Com efeito, f é contínua por hipótese e, tomando $l = \tau$, vemos que todo intervalo de tamanho l contém um ponto de $E(a, f)$.

Se X for um espaço linear normado, com norma $\|\cdot\|$, e as vizinhanças V forem geradas pela norma como segue

$$V_a(x) = \{y \in X : \|x - y\| < a^{-1}\},$$

onde o conjunto direto $(A, \geq)$ é o conjunto dos números reais positivos com a ordem usual, então (5.1) poderá ser escrito como

$$E(a, f) = \{\tau \in T : \|f(t + \tau) - f(t)\| < a^{-1}, \forall t \in T\}. \tag{5.3}$$

5.2 Propriedades de funções quase periódicas

Teorema 5.1. *Seja $\{f_n\}$ uma sequência (generalizada) de funções quase periódicas definidas em T com imagem em X. Suponha que f_n convirja uniformemente para uma função limite f. Então, f é quase periódica.*

Demonstração: Devemos provar que:

(i) f é contínua;

(ii) $E(a, f)$ é relativamente denso em T, para qualquer $a \in A$.

Com efeito:

(i) Como a sequência $\{f_n\}$ converge uniformemente para f e cada f_n é contínua, f é contínua.

(ii) Seja $a \in A$. Vamos mostrar que existe $b \in A$ e um índice N tal que

$$E(a, f) \supset E(b, f_N).$$

Isso provará que $E(a, f)$ é relativamente denso.

Inicialmente, escolhemos $b \in A$, pela Proposição 1.3, de forma que tenhamos

$$x_i \in V_b(x_{i+1}),\ i = 1, 2, 3 \Rightarrow x_1 \in V_a(x_4). \tag{5.4}$$

Como f_n converge uniformemente para f, podemos encontrar um N tal que

$$f_n(t) \in V_b(f(t)), \quad t \in T, \tag{5.5}$$

para todo $n \geq N$.

Em particular,

$$f_N(t) \in V_b(f(t)), \quad t \in T. \tag{5.6}$$

Usando a simetria de V_b, obtemos

$$f(t) \in V_b(f_N(t)), \quad t \in T. \tag{5.7}$$

Tomemos $\tau \in E(b, f_N)$. Por (5.6), temos

$$f_N(t+\tau) \in V_b(f(t+\tau)), \quad t \in T, \tag{5.8}$$

uma vez que (5.6) vale para todo $t \in T$.

Além disso, como $\tau \in E(b, f_N)$, então

$$f_N(t+\tau) \in V_b(f_N(t)),\ t \in T, \tag{5.9}$$

e equivalentemente $f_N(t) \in V_b(f_N(t+\tau))$.

Consideremos

$$x_1 = f(t),\ x_2 = f_N(t),\ x_3 = f_N(t+\tau) \ \text{ e } \ x_4 = f(t+\tau). \tag{5.10}$$

Por (5.7), $x_1 \in V_b(x_2)$.

Por (5.9), $x_2 \in V_b(x_3)$.

Por (5.8), $x_3 \in V_b(x_4)$.

Logo, por (5.4), concluímos que

$$x_1 \in V_a(x_4),$$

ou seja,

$$f(t) \in V_a(f(t+\tau)),$$

para todo $t \in T$ e, portanto, $\tau \in E(a, f)$.

$\blacksquare$

Teorema 5.2. *Sejam X e Y dois espaços uniformes e $g : X \to Y$ uniformemente contínua. Se $f : T \to X$ for quase periódica, então a composição $g \circ f : T \to Y$ será quase periódica.*

Demonstração: Sejam A e A' os conjuntos de índices para uniformidade de X e Y, respectivamente.

Se $a' \in A'$, pela continuidade uniforme de g, escolha $a \in A$ tal que se $x' \in V_a(x)$, para qualquer $x \in X$, então

$$g(x') \in V_{a'}(g(x)).$$

Seja $\tau \in E(a,f)$. Então

$$f(t) \in V_a(f(t+\tau)), \quad \forall t \in T,$$

o que implica

$$g(f(t)) \in V_{a'}(g(f(t+\tau))), \quad \forall t \in T.$$

Daí,

$$E(a,f) \subset E(a, g \circ f),$$

o que nos permite concluir que $E(a, g\circ f)$ é relativamente denso, já que $E(a,f)$ o é. ∎

Teorema 5.3. *Seja $f : T \to X$ quase periódica. Então, f é uniformemente contínua.*

Demonstração: Seja $a \in A$ e escolha $b \in A$, pela Proposição 1.3, tal que

$$x_i \in V_b(x_{i+1}),\ i = 1,2,3 \quad \Rightarrow \quad x_1 \in V_a(x_4). \tag{5.11}$$

Seja $l > 0$ um número do intervalo de inclusão para $E(b,f)$. Como f é contínua em $[0, l+1]$, f é uniformemente contínua nesse intervalo. Agora escolha $\delta > 0$ tal que se $t_1, t_2 \in [0, l+1]$ e $|t_1 - t_2| < \delta$, então

$$f(t_1) \in V_b(f(t_2)). \tag{5.12}$$

Diminuindo o δ escolhido acima, se necessário, como $E(b,f)$ é relativamente denso, podemos tomar τ em $E(b,f)$ de forma que $t+\tau$ e $s+\tau$ pertençam ao intervalo $[0, l+1]$, para $t, s \in T$ com $|t-s| < \delta$. Agora, a fim de mostrarmos que f é uniformemente contínua em T, mostraremos que $f(t) \in V_a(f(s))$.

Como $\tau \in E(b,f)$, temos

$$f(r+\tau) \in V_b(f(r)), \tag{5.13}$$

para todo r em T. Em particular,

$$f(t+\tau) \in V_b(f(t)) \tag{5.14}$$

e

$$f(s+\tau) \in V_b(f(s)). \tag{5.15}$$

Consideremos

$$x_1 = f(t),\ x_2 = f(t+\tau),\ x_3 = f(s+\tau) \ \text{ e } \ x_4 = f(s). \tag{5.16}$$

Por (5.14) e pela simetria da vizinhança V_b, $x_1 \in V_b(x_2)$.

Por (5.12), $x_2 \in V_b(x_3)$.

Por (5.15), $x_3 \in V_b(x_4)$.

Logo, por (5.11), concluímos que

$$x_1 \in V_a(x_4),$$

ou seja,

$$f(t) \in V_a(f(s)),$$

como queríamos demonstrar. ∎

5.3 Caracterização de quase periodicidade

Nesta seção, daremos uma caracterização de quase periodicidade feita por Besicovitch.

Definição 5.3. *Uma função $f : T \to X$ será dita **normal** se ela for contínua e se, para toda sequência $\{\tau_n\}$ em T, existir uma subsequência $\{\tau'_n\}$ tal que a sequência de funções $f_{\tau'_n}$ seja uma sequência de Cauchy uniforme.*

Ressaltando que $f_{\tau'_n}$ será uma sequência de Cauchy uniforme se, para todo $a \in A$, existir um índice N tal que

$$f(t + \tau'_n) \in V_a(f(t + \tau'_m)),$$

para $t \in T$ e $n, m \geq N$.

Em um espaço uniforme completo, o conceito de normalidade pode ser reformulado conforme a próxima proposição.

Proposição 5.1. *Seja X um espaço uniforme completo. Uma função contínua $f : T \to X$ será normal se, e somente se, para toda sequência $\{\tau_n\}$ em T, existir uma subsequência $\{\tau'_n\}$ tal que a sequência de funções $\{f_{\tau'_n}\}$ seja uniformemente convergente.*

Teorema 5.4 (Teorema de Besicovitch)**.** *Seja $f : T \to X$. A função f será normal se, e somente se, f for quase periódica.*

Demonstração: Primeiramente, vamos supor que f seja quase periódica. Sejam $\{\tau_n\}$ uma sequência em T e $a \in A$. Escolhemos $b \in A$, pela Proposição 1.3, tal que

$$x_i \in V_b(x_{i+1}), i = 1, 2, 3 \quad \Rightarrow x_1 \in V_a(x_4). \tag{5.17}$$

Seja $l > 0$ o número do intervalo de inclusão para o conjunto relativamente denso $E(b, f)$. Então, qualquer $\tau_n \in T$ pode ser escrito como

$$\tau_n = \rho_n + \sigma_n,$$

onde $\sigma_n \in E(b, f)$ e $0 \leq \rho_n \leq l$.

Seja ρ um ponto de acumulação para a sequência $\{\rho_n\}$. Pelo Teorema 5.3, f é uniformemente contínua. Então, escolhemos $\delta > 0$ tal que $f(t) \in V_b(f(s))$ sempre que $|t - s| \leq 2\delta$. Como ρ é um ponto de acumulação de $\{\rho_n\}$, o conjunto de todos τ_n com ρ_n tal que $|\rho_n - \rho| \leq \delta$ forma uma subsequência, a qual denotaremos por $\{\tau'_n\}$.

Afirmamos que

$$f(t + \tau'_n) \in V_a(f(t + \tau'_m)),$$

para todo t em T.

De fato, dado $t \in T$, consideremos

$$x_1 = f(t + \tau'_n), \;\; x_2 = f(t + \rho'_n), \;\; x_3 = f(t + \rho'_m) \;\; e \;\; x_4 = f(t + \tau'_m).$$

Como $\sigma'_n \in E(b, f)$, temos

$$f(t + \tau'_n) = f(t + \rho'_n + \sigma'_n) \in V_b(f(t + \rho'_n)), \tag{5.18}$$

ou seja,

$$x_1 \in V_b(f(x_2)). \tag{5.19}$$

Observe que $|t + \rho'_n - (t + \rho'_m)| \leq 2\delta$. Portanto, pela continuidade uniforme da função f, obtemos

$$f(t + \rho'_n) \in V_b(f(t + \rho'_m)),$$

isto é,

$$x_2 \in V_b(f(x_3)). \tag{5.20}$$

Finalmente, como $\sigma'_m \in E(b, f)$, obtemos

$$f(t + \rho'_m) \in V_b(f(t + \tau'_m)),$$

como em (5.18), o que equivale a

$$x_3 \in V_b(f(x_4)). \tag{5.21}$$

Logo, por (5.19), (5.20), (5.21) e (5.17), temos $x_1 \in V_b(f(x_4))$, ou seja, $f(t + \tau'_n) \in V_a(f(t + \tau'_m))$. Com isso, concluímos que f é normal.

Agora, vamos supor que f é normal.

Se f não for quase periódica, então existirá $a \in A$ tal que $E(a, f)$ não é relativamente denso.

Sejam $\tau_1 > 0$ e (a_2, b_2) um intervalo de tamanho maior do que $2|\tau_1|$ tal que

$$(a_2, b_2) \cap E(a, f) = \emptyset,$$

e seja τ_2 o centro do intervalo (a_2, b_2). Então, $\tau_2 - \tau_1 \in (a_2, b_2)$ e $\tau_2 - \tau_1 \notin E(a, f)$.

Definimos, agora, um intervalo (a_3, b_3) de tamanho maior do que $2(|\tau_1| + |\tau_2|)$ com

$$(a_3, b_3) \cap E(a, f) = \emptyset,$$

e consideramos τ_3 o centro de (a_3, b_3). Então, nem $\tau_3 - \tau_1$ e nem $\tau_3 - \tau_2$ estão em $E(a, f)$.

De forma análoga, definimos $\tau_4, \tau_5, \ldots$ tal que $\tau_i - \tau_j \notin E(a, f)$, para quaisquer $i, j \geq 1$. Isso significa que

$$f(t + \tau_i - \tau_j) \notin V_a(f(t)) \qquad (i \neq j)$$

para algum t, ou equivalentemente

$$f(t' + \tau_i) \notin V_a(f(t' + \tau_j)) \qquad (i \neq j)$$

para algum t'.

Mas, isso implica que nenhuma subsequência de $\{f_{\tau_i}\}$ será uniformemente de Cauchy. Eis uma contradição. ■

Corolário 5.1. *Seja $f : T \to X$ uma função quase periódica. Então, a imagem de f, $f(T)$, é um conjunto totalmente limitado em X. Em particular, se X for completo, então $f(T)$ estará contido em um conjunto compacto.*

Demonstração: Usaremos o fato de que um conjunto $A \subset X$ é totalmente limitado se toda sequência (generalizada) $\{x_n\}$ em A tiver uma subsequência que é uma sequência de Cauchy.

Seja $\{f(\tau_n)\}$ uma sequência arbitrária em $f(T)$, onde $\{\tau_n\} \subset T$. Como f é normal, podemos encontrar uma subsequência $\{\tau'_n\}$ tal que a sequência de transladadas $\{f_{\tau'_n}\}$ seja uniformemente de Cauchy, o que implica que $\{f_{\tau'_n}(0)\} = \{f(\tau'_n)\}$ é uma sequência de Cauchy. ■

5.4 Funções quase periódicas em espaços lineares

Nesta seção, apresentaremos, de forma breve, propriedades de funções quase periódicas em espaços lineares que têm uma estrutura linear uniforme.

Uma prova para o resultado auxiliar, que segue abaixo, pode ser encontrada em [5], página 78.

Lema 5.1. *Sejam $f : T \to X$ e $g : T \to Y$ funções quase periódicas, onde (X, A, V) e (Y, B, V) são espaços lineares com estruturas lineares uniformes. Então, o conjunto*

$$E(a, f) \cap E(b, g)$$

é relativamente denso em T para quaisquer $a \in A$ e $b \in B$.

Para o próximo resultado, é preciso observar que se X e Y forem espaços lineares uniformes com topologias uniformes geradas por vizinhanças V_a e V_b ($a \in A$ e $b \in B$), respectivamente, então o produto $X \times Y$ será um espaço linear uniforme com a topologia gerada por $V_{(a,b)}$, onde $V_{(a,b)} = V_a \times V_b$. O conjunto de índices para $X \times Y$ é $A \times B$ com a ordem usual do produto.

Teorema 5.5. *Sejam $f : T \to X$ e $g : T \to Y$ funções contínuas e defina $h : T \to X \times Y$ por $h(t) = (f(t), g(t))$ para $t \in T$. Suponha que X e Y sejam espaços lineares uniformes. Então, h será quase periódica se, e somente se, f e g forem quase periódicas.*

Demonstração: Para iniciarmos a prova, notemos que as projeções naturais $P : X \times Y \to X$ e $Q : X \times Y \to Y$ são uniformemente contínuas, e que $f = P \circ h$ e $g = Q \circ h$. Se h for quase periódica, então f e g serão quase periódicas pelo Teorema 5.2.

Para provar a recíproca, veja que, dado qualquer $(a, b) \in A \times B$,

$$E(a, f) \cap E(b, g) \subset E((a, b), h).$$

Pelo Lema 5.1, o conjunto $E(a, f) \cap E(b, g)$ é relativamente denso. Então, o conjunto $E((a, b), h)$ também é relativamente denso e, portanto, h é quase periódica. ■

Teorema 5.6. *Sejam $f : T \to X$ e $g : T \to X$ funções quase periódicas, onde (X, A, V) é um espaço linear uniforme. Então $f + g$ é quase periódica.*

Demonstração: Seja $a \in A$ e escolha $b \in A$ tal que $a \leq b$ e $x + y \in V_a(0)$ sempre que $x, y \in V_b(0)$ (veja a propriedade $(viii)$, Capítulo 1).

Segue, pois, que

$$E(b, f) \cap E(b, g) \subset E(a, f + g).$$

Pelo Lema 5.1, o conjunto $E(b, f) \cap E(b, g)$ é relativamente denso, o que implica que $E(a, f + g)$ é relativamente denso. Daí, $f + g$ é quase periódica. ■

6 Movimentos recorrentes e movimentos quase periódicos

Neste momento, retornamos ao estudo dos sistemas dinâmicos ou fluxos em um espaço uniforme (X, A, V). Um dos nossos objetivos aqui é provar o Teorema de Recorrência de Birkhoff, que caracteriza os conjuntos compactos minimais.

Os conceitos de movimento Poisson estável, movimento recorrente e movimento quase periódico serão fundamentais ao longo deste capítulo.

6.1 Estabilidade de Poisson

Definição 6.1. *Sejam X um espaço uniforme e π um fluxo em X. Um movimento $\pi(x, t)$ será denominado* ***positivamente Poisson estável*** *(P^+ estável) se estiver definido para todo t em T^+ e se, para toda vizinhança U de x, existir uma sequência $\{t_n\} \subset T$ com $t_n \to +\infty, n \in A$ e $\pi(x, t_n) \in U$.*

Um movimento $\pi(x, t)$ será denominado ***negativamente Poisson estável*** *(P^- estável) se estiver definido para todo t em T^- e se, para toda vizinhança U de x, existir uma sequência $\{t_n\} \subset T$ com $t_n \to -\infty, n \in A$ e $\pi(x, t_n) \in U$.*

Um movimento $\pi(x, t)$ será denominado ***Poisson estável*** *(P estável) se for positiva e negativamente Poisson estável.*

Um ponto x em X será denominado ***positivamente Poisson estável ou negativamente Poisson estável ou Poisson estável*** *se o movimento correspondente $\pi(x, t)$ for positivamente Poisson estável ou negativamente Poisson estável ou Poisson estável, respectivamente.*

Lema 6.1. *Seja x um ponto em X que é P^+ estável. Então, todo ponto y em $\gamma^+(x)$ é P^+ estável.*

Demonstração: Tomemos $y \in \gamma^+(x)$. Então $y = \pi(x, \tau)$, para algum $\tau > 0$.

Como o movimento $\pi(x, t)$ está definido para todo $t \geq 0$, o mesmo ocorre com o movimento $\pi(y, t)(= \pi(x, t + \tau))$, já que $\tau > 0$.

Considere $U_\tau = \pi(U, \tau)$, onde U é uma vizinhança arbitrária de x. Veja que $y \in \pi(U, \tau)$, pois $y = \pi(x, \tau)$ e $x \in U$. Portanto, U_τ é uma vizinhança de y. Como x é P^+

estável, $\pi(x, t_n) \in U$, para alguma sequência $\{t_n\}$, com $t_n \to +\infty$.

Note que $t_n + \tau \to \infty$. Além disso, $\pi(\pi(x, t_n), \tau) \in U_\tau$, uma vez que $\pi(x, t_n) \in U$.

Assim, dada uma vizinhança U_τ de y, existe uma sequência $\{\tau_n\}$, com $\tau_n = t_n + \tau \to \infty$ e $\pi(x, t_n + \tau) \in U_\tau$. Com isso, concluímos que y é P^+ estável. ■

Observação 6.1. Valem, também, os seguintes resultados:

I. Se x for um ponto P^- estável em X, então todo ponto y em $\gamma^-(x)$ será P^- estável.

II. Se x for um ponto P estável em X, então todo ponto y em $\gamma(x)$ será P estável.

As demonstrações destas afirmações seguem de forma análoga à demonstração do Lema 6.1.

Teorema 6.1. *(A) As afirmações seguintes são equivalentes:*

1. *x é P^+ estável;*
2. *$x \in \Omega_x$;*
3. *$\Omega_x = H(x) = \overline{\gamma(x)}$.*

(B) As afirmações seguintes são equivalentes:

1. *x é P^- estável;*
2. *$x \in A_x$;*
3. *$A_x = H(x)$.*

(C) O ponto x será P estável se, e somente se, $A_x = \Omega_x = H(x)$.

Demonstração: A afirmação (C) segue de (A) e (B). Provaremos a afirmação (A).

$1 \Rightarrow 2$: Suponhamos que x é P^+ estável. Seja $V_a(x)$, $a \in A$, a família de vizinhanças (abertas) uniformes de x em X. Então, $\{x\} = \cap V_a(x)$. Para cada $a \in A$, seja $\{t_{na}\}$ uma sequência generalizada com $\pi(x, t_{na}) \in V_a(x)$ e $t_{na} \to +\infty$. Observamos que o índice n pertence a algum conjunto direto N_a, que depende de a, e o limite $t_{na} \to +\infty$ é tomado em referência a ordem de N_a.

Agora, consideremos o conjunto produto direto $D = A \times \prod_a N_a$ com a ordem usual (veja a Seção 1.2). Pela Proposição 1.2, $t_{na} \to +\infty$ em relação a ordem em D. Como $\pi(x, t_{na}) \to x$, concluímos que $x \in \Omega_x$.

$2 \Rightarrow 3$: Suponhamos que $x \in \Omega_x$. Como Ω_x é invariante, temos $\gamma(x) \subset \Omega_x$. Além disso, $H(x) = \overline{\gamma(x)} \subset \Omega_x$, já que Ω_x é fechado. Por outro lado, segue da definição de Ω_x que $\Omega_x \subset H(x)$. Portanto, $\Omega_x = H(x)$.

$3 \Rightarrow 1$: Agora, suponhamos que $\Omega_x = H(x)$. Sendo assim, $x \in \Omega_x$. Então, pela Proposição 2.6, existe uma sequência generalizada $\{t_n\}$, com $t_n \to \infty$, tal que $\pi(x, t_n) \to x$. Portanto, dada qualquer vizinhança U de x, existe uma subsequência $\{t'_n\}$ de $\{t_n\}$ tal que $\pi(x, t'_n) \in U$, com $t'_n \to \infty$, o que implica que x é P^+ estável.

Observemos que a prova da afirmação (B) requer apenas uma modificação trivial da prova de (A). ∎

Observação 6.2. Todo ponto periódico $x, x \in X$ é P estável.

De fato, sejam x um ponto periódico em X com período $\tau > 0$ e $y \in \overline{\gamma(x)}$. Então,

$$y = \lim \pi(x, t_n),$$

para alguma sequência generalizada $\{t_n\} \in T$.

Vejamos que

$$\begin{aligned} y = \lim \pi(x, t_n) &= \lim \pi(x, t_n + \tau) \\ &= \lim \pi(x, t_n + 2\tau) \\ &= \lim \pi(x, t_n + k\tau), \end{aligned}$$

para $k \in \mathbb{N}$.

Então, y é limite da sequência $\pi(x, t_n + k\tau)$, com $t_n + k\tau \to +\infty$, quando $k \to +\infty$. Portanto, $y \in \Omega_x$. Pelo Teorema 6.1, x é P^+ estável.

Também temos

$$\begin{aligned} y = \lim \pi(x, t_n) &= \lim \pi(x, t_n - \tau) \\ &= \lim \pi(x, t_n - 2\tau) \\ &= \lim \pi(x, t_n - k\tau), \end{aligned}$$

para $k \in \mathbb{N}$.

Dessa forma, y é limite da sequência $\pi(x, t_n - k\tau)$, com $t_n - k\tau \to -\infty$, quando $k \to +\infty$. Portanto, $y \in A_x$. Pelo Teorema 6.1, x é P^- estável.

Como x é P^+ estável e P^- estável, concluímos que x é P estável.

O próximo resultado nos diz o que podemos concluir sobre pontos que são P^+ estáveis, mas não são periódicos.

Teorema 6.2. *Sejam X um espaço uniforme completo e x um ponto em X que é P^+ estável. Se x não for um ponto periódico, então*

$$\overline{H(x) - \gamma(x)} = H(x) = \Omega_x,$$

ou seja, o conjunto de pontos em $H(x) - \gamma(x)$ será denso em Ω_x.

A demonstração do Teorema 6.2 é muito extensa e, por isso, optamos por não apresentá-la no presente trabalho. Porém, informamos ao leitor interessado que a mesma pode ser verificada em [5], Capítulo VI.

Corolário 6.1. *Seja $\pi(x,t)$ um movimento P^+ estável em um espaço uniforme completo X. Então, $\pi(x,t)$ será periódico se, e somente se, $H(x) = \gamma(x)$.*

Demonstração: Suponhamos que $\pi(x,t)$ é um movimento periódico com período $\tau > 0$. Então,

$$\gamma(x) = \pi(x, [0, \tau]).$$

Como $\pi(x, .)$ é uma função contínua e o intervalo $[0, \tau]$ é compacto, $\gamma(x)$ é compacto (e portanto fechado). Então $H(x) = \overline{\gamma(x)} = \gamma(x)$.

Supondo que $H(x) = \gamma(x)$ e usando a contrapositiva do Teorema 6.2, concluímos que $\pi(x,t)$ é periódico. ∎

6.2 Recorrência

Definição 6.2. *Sejam X um espaço uniforme e π um fluxo em X. Um movimento $\pi(x,t)$ será denominado **recorrente** se estiver definido para todo t em T e se, para toda vizinhança U de x, o conjunto*

$$\{\tau \in T : \pi(x, \tau) \in U\}$$

for relativamente denso em T.

*Um ponto x em X será denominado **recorrente** se o movimento correspondente $\pi(x,t)$ for recorrente.*

Prosseguindo de forma análoga ao Lema 6.1, obtemos o seguinte resultado.

Lema 6.2. *Seja x um ponto recorrente em X. Então, todo ponto y em $\gamma(x)$ será recorrente.*

Agora, veremos a caracterização de conjuntos compactos minimais segundo Birkhoff.

Teorema 6.3 (Teorema de Recorrência de Birkhoff)**.** *Um conjunto E em X será compacto minimal se, e somente se, $E = H(x)$ for compacto para algum ponto recorrente $x \in X$.*

Demonstração: Sejam E um conjunto compacto e minimal e $x \in E$. Suponhamos que x não seja recorrente, ou seja, que o movimento $\pi(x,t)$ não seja recorrente (observe que o movimento $\pi(x,t)$ é obviamente compacto). Então, existem uma vizinhança não vazia U de x e uma sequência de intervalos $I_n = [t_n - T_n, t_n + T_n]$, com $T_n \to \infty$, tais que $\pi(x, I_n) \cap U = \emptyset$.

Como E é um conjunto compacto, a sequência $\{x_n\}$, onde $x_n = \pi(x, t_n)$, admite uma subsequência convergente, a qual denotaremos por $\{x_n\}$, por simplicidade de notação. Digamos que $x_n \to y$.

Afirmação: $\gamma(y) \subset E - U$.

De fato, se $t \in T$, então

$$\pi(x_n, t) \to \pi(y, t).$$

Escolhemos uma subsequência de $\{T_n\}$ a ser denotada também por $\{T_n\}$ tal que $|t| < T_n$.

Então,

$$\pi(x_n, t) \in \pi(x, I_n) \subset E - U.$$

Como $E - U$ é fechado,

$$\pi(y, t) \in E - U.$$

Sendo t arbitrário, concluímos que

$$\gamma(y) \subset E - U.$$

Consequentemente,

$$H(y) = \overline{\gamma(y)} \subset \overline{E - U} = E - U.$$

Então, $H(y)$ é um subconjunto próprio de E, não vazio, fechado e invariante. Todavia, isso contradiz a minimalidade de E. Logo, x é recorrente e $E = H(x)$.

Agora, consideremos que $\pi(x, t)$ seja um movimento compacto e recorrente. Então, $H(x)$ é compacto. Para mostrar que E é minimal, primeiramente notemos que, $E = H(x)$ será minimal se, e somente se, $E = H(y)$ para qualquer $y \in E$. É claro que, dado $y \in E$, $H(y) \subset H(x)$. Como $\gamma(x)$ é denso em $H(x)$, é suficiente mostrar que

$$x \in H(y). \tag{6.1}$$

A fim de provar (6.1), mostraremos que para toda vizinhança U de x existe um ponto s em T tal que $\pi(y, s) \in U$.

Dada uma vizinhança U de x, escolha uma vizinhança V de x tal que $V \subset \overline{V} \subset U$.

Seja $l > 0$ um número do intervalo de inclusão para o conjunto relativamente denso $\{\tau \in T : \pi(x, \tau) \in V\}$.

Como $y \in H(x)$, existe uma sequência $\{t_n\} \subset T$ tal que

$$x_n = \pi(x, t_n) \to y.$$

Como x é um ponto recorrente, existe s_n, $0 \leq s_n \leq l$, tal que $\pi(x_n, s_n) \in V$.

Sendo a sequência $\{s_n\}$ limitada, $\{s_n\}$ possui uma subsequência convergente, a qual denotaremos também por $\{s_n\}$. Digamos que $s_n \to s$.

Como a aplicação π é contínua, temos

$$\pi(x_n, s_n) \to \pi(y, s).$$

Assim,

$$\pi(y, s) \in \overline{V} \subset U,$$

concluindo o desejado. ∎

É de grande valia observar que, com este resultado, concluímos que todo movimento compacto num conjunto minimal é necessariamente recorrente.

6.3 Movimentos quase periódicos

Nesta seção, vamos considerar X um espaço uniforme completo.

Definição 6.3. *Sejam (X, A, V) um espaço uniforme e π um fluxo em X. O movimento $\pi(x,t)$ será denominado* ***quase periódico*** *se a função $\pi(x,\cdot) : T \to X$ for quase periódica. Neste caso, o ponto x será denominado* ***ponto quase periódico****.*

Lembramos, do Capítulo 5, que uma trajetória é quase periódica se, e somente se o conjunto

$$\{\tau \in T : \pi(x, t+\tau) \in V_a(\pi(x,t)), \forall t \in T\}$$

for relativamente denso em T, para todo índice a em A.

Pela definição 6.2, segue que toda trajetória quase periódica é recorrente. Além disso, do Corolário 5.1, todo movimento quase periódico $\pi(x,t)$ é compacto. E, pelo Teorema de Recorrência de Birkhoff (Teorema 6.3), o fecho $H(x)$ é um conjunto compacto e minimal.

Definição 6.4. *Se um conjunto compacto e minimal E for o fecho de um ponto quase periódico, então E será denominado* ***quase periódico minimal****.*

Se E for o fecho de um ponto periódico, E será denominado ***minimal periódico****.*

Lema 6.3. *Seja E um conjunto quase periódico minimal para um fluxo π em um espaço completo X. Então, todo ponto $y \in E$ é um ponto quase periódico.*

Demonstração: Seja $E = H(x)$, onde x é um ponto quase periódico, e sejam $y \in H(x)$ e $\{t_n\}$ uma sequência em T tal que $\pi(x,t_n) \to y$. Então, dado $t \in T$, pelo Teorema de Besicovitch (Teorema 5.4), existe uma subsequência de $\{\pi(x, t_n + t)\}$ uniformemente convergente para $\pi(y,t)$, pela continuidade de π.

Como $\pi(y,t)$ é o limite uniforme de funções quase periódicas, segue que $\pi(y,t)$ é uma função quase periódica, pelo Teorema 5.1. ■

Dado $x \in X$, usaremos a notação $\pi_t(x) = \pi(x,t)$ e consideraremos que o movimento $\pi(x,t)$ esteja definido para todo t em T, isto é, que π seja um fluxo global. Sabemos, através da Proposição 2.1, que a aplicação π_t é um homeomorfismo de X em X para todo t em T. Portanto π_t é um elemento do espaço $C(X,X)$ de funções contínuas de X em X. Se E for um conjunto invariante em E, restringindo π_t a E, segue que $\pi_t \in C(E,E)$.

Definição 6.5. *O fluxo π será denominado* ***equicontínuo*** *se a família de aplicações $\{\pi_t : t \in T\}$ for equicontínua. Ou seja, se para todo índice a e todo $x \in X$, existir um índice b tal que se $y \in V_b(x)$, então*

$$\pi_t(y) \in V_a(\pi_t(x)), \qquad t \in T.$$

Se b puder ser escolhido independentemente de x, então o fluxo π será ***uniformemente equicontínuo****.*

Diremos que o fluxo é ***equicontínuo*** *em E, E um conjunto invariante em X, se a família de aplicações $\{\pi_t : t \in T\}$ for equicontínua em $C(E,E)$.*

É fácil demonstrar que se π for um fluxo equicontínuo em um espaço uniforme compacto X, então π será uniformemente equicontínuo.

Teorema 6.4. *Seja E um conjunto compacto e minimal em X. O conjunto E será quase periódico minimal se, e somente se, o fluxo π for equicontínuo em E.*

Demonstração: Suponhamos, primeiramente, que E seja um conjunto quase periódico minimal. Pelo Teorema de Recorrência de Birkhoff, segue que $E = H(x)$, onde x é um ponto quase periódico. Vamos mostrar que π é um fluxo equicontínuo na trajetória $\gamma(x)$.

Seja a um índice qualquer e escolhamos b pela Proposição 1.3 tal que

$$x_i \in V_b(x_{i+1}) \Rightarrow x_1 \in V_a(x_4), \quad i = 1, 2, 3. \tag{6.2}$$

Seja $l > 0$ um número do intervalo de inclusão para o conjunto relativamente denso $E(b, \pi(x,\cdot))$. Como π é uniformemente contínuo no conjunto compacto $E \times [0, l]$, existe um índice c tal que

$$\pi(y,t) \in V_b(\pi(z,t)), \quad 0 \le t \le l, \tag{6.3}$$

sempre que $y \in V_c(z)$, $y, z \in E$.

Para mostrar que π é equicontínuo em $\gamma(x)$, dados $\pi(x,t_1), \pi(x,t_2) \in \gamma(x)$, é suficiente provar que

$$\pi(x,t_1) \in V_c(\pi(x,t_2)) \Rightarrow \pi(x,t_1+t) \in V_a(x,t_2+t), \quad t \in T. \tag{6.4}$$

Fixemos t em T e consideremos que $\pi(x,t_1) \in V_c(\pi(x,t_2))$. Existe τ em $E(b,\pi(x,\cdot))$ tal que $0 \le \tau + t \le l$. Da definição de $E(b,\pi(x,\cdot))$, segue que

$$\pi(x, \tau + t_i + t) \in V_b(\pi(x, t_i + t)), \quad i = 1, 2.$$

Por (6.3), temos

$$\pi(x, \tau + t_1 + t) \in V_b(\pi(x, t_2 + \tau + t)).$$

Fazendo $x_1 = \pi(x, t_1 + t), x_2 = \pi(x, t_1 + \tau + t), x_3 = \pi(x, t_2 + \tau + t)$ e $x_4 = \pi(x, t_2 + t)$, segue de (6.2) que $x_1 \in V_a(x_4)$, ou seja,

$$\pi(x, t_1 + t) \in V_a(\pi(t_2 + t)),$$

concluindo que π é equicontínuo em $\gamma(x)$.

Para mostrar que π é equicontínuo em E, consideramos o índice $a \in A$ dado e escolhemos b como em (6.2). Usando a equicontinuidade de π em $\gamma(x)$, podemos escolher um índice c tal que

$$\pi(x, t_1) \in V_c(\pi(x, t_2)) \Rightarrow \pi(x, t_1 + t) \in V_a(x, t_2 + t), \quad t \in T. \tag{6.5}$$

Escolhemos agora um índice d tal que

$$x_i \in V_d(x_{i+1}) \Rightarrow x_1 \in V_c(x_4), \quad i = 1, 2, 3. \tag{6.6}$$

Vamos mostrar que se y e z forem pontos em E, com $y \in V_d(z)$, então

$$\pi(y, t) \in V_a(\pi(z, t)), \quad t \in T.$$

Como $\overline{\gamma(x)} = E$, podemos encontrar sequências $\{t_n\}$ e $\{s_n\}$ em T tais que $\pi(x, s_n) \to y$ e $\pi(x, t_n) \to z$. Sem perda de generalidade, podemos admitir que $\pi(x, s_n) \in V_d(y)$ e $\pi(x, t_n) \in V_d(z)$. Como $y \in V_d(z)$, segue que $\pi(x, s_n) \in V_c(\pi(x, t_n))$. Então,

$$\pi(x, s_n + t) \in V_b(\pi(x, t_n + t)),$$

para todo n e todo $t \in T$. Pelo Lema 6.3, segue que $\pi(x, s_n + t)$ e $\pi(x, t_n + t)$ convergem uniformemente para $\pi(y, t)$ e para $\pi(z, t)$, respectivamente, para qualquer $t \in T$.

Agora escolha um índice N tal que

$$\pi(x, s_n + t) \in V_b(\pi(y, t)) \text{ e } \pi(x, t_n + t) \in V_b(\pi(z, t)), \tag{6.7}$$

para $n \geq N$ e $t \in T$.

Em particular,

$$\pi(x, s_N + t) \in V_b(\pi(y, t)) \text{ e } \pi(x, t_N + t) \in V_b(\pi(z, t)), \quad t \in T.$$

Fazendo $x_1 = \pi(y, t), x_2 = \pi(x, s_N + t), x_3 = \pi(x, t_N + t)$ e $x_4 = \pi(z, t)$, temos $x_1 \in V_b(x_2), x_2 \in V_b(x_3)$ e $x_3 \in V_b(x_4)$ e, portanto, $x_1 \in V_a(x_4)$, ou seja,

$$\pi(y, t) \in V_a(\pi(z, t)), \quad t \in T.$$

Suponha agora que π seja equicontínuo em E. Como E é compacto e minimal, segue do Teorema de Recorrência de Birkhoff que toda trajetória em E é recorrente. Daí, para qualquer x em E e qualquer índice b, o conjunto $\{\tau : \pi(x, \tau) \in V_b(x)\}$ é relativamente denso em T.

Seja a um índice qualquer e escolhamos b pela equicontinuidade de π. Temos assim

$$\{\tau : \pi(x, \tau) \in V_b(x)\} \subset \{\tau : \pi(x, \tau + t) \in V_a(\pi(x, t)), t \in T\},$$

donde o conjunto $\{\tau : \pi(x, \tau + t) \in V_a(\pi(x, t)), t \in T\}$ é relativamente denso, o que prova que $\pi(x, t)$ é um movimento quase periódico e $E = H(x)$ é quase periódico minimal. ∎

Abaixo, veremos uma versão mais fraca do teorema precedente. Para isso, necessitamos do seguinte conceito.

Definição 6.6. *Diremos que um fluxo π em X é* ***positivamente equicontínuo*** *se para todo índice a e todo $x \in X$ existir um índice b tal que $\pi(x,t) \in V_a(\pi(y,t))$ para todo $t \geq 0$, sempre que $x \in V_b(y)$.*

A equicontinuidade negativa em um subconjunto invariante é definida de forma análoga, assim como a uniformidade.

Teorema 6.5. *Seja E um conjunto compacto e minimal em X. O conjunto E será quase periódico minimal se, e somente se, o fluxo π for positivamente equicontínuo em E.*

Demonstração: Pelo Teorema 6.4, se E for quase periódico minimal, então π será positivamente equicontínuo em E. Resta-nos, então, provar a recíproca. Como E é compacto e minimal, $E = H(x)$, onde x é um ponto recorrente (veja o Teorema de Recorrência de Birkhoff). Devemos mostrar que x é quase periódico.

Dado a, escolhemos b pela Proposição 1.4 tal que, para todo $y \in X$, tenhamos

$$V_b(y) \subset \overline{V_b(y)} \subset V_a(y). \tag{6.8}$$

Da equicontinuidade postiva, escolha c tal que se $y \in V_c(z)$, então

$$\pi(y,t) \in V_b(\pi(z,t)), \qquad t \geq 0.$$

Como x é recorrente, o conjunto

$$B = \{\tau \in T : \pi(x,\tau) \in V_c(x)\}$$

é relativamente denso em T.

Segue da equicontinuidade que, para $t \geq 0$ e $\tau \in B$,

$$\pi(\pi(x,t),\tau) = \pi(\pi(x,\tau),t) \in V_b(\pi(x,t)). \tag{6.9}$$

Seja $\tau \in B$. Afirmamos que $\tau \in \{\tau \in T : \pi(y,\tau) \in \overline{V_b(y)}, \forall y \in E\}$. De fato, se $y \in \gamma^+(x)$, segue de (6.9) que

$$\pi(y,\tau) \in V_b(y) \subset \overline{V_b(y)} \subset V_a(y).$$

Daí,

$$B \subset \{\tau \in T : \pi(y,\tau) \in \overline{V_b(y)}, \forall y \in E\}.$$

Além disso, tomando $y = \pi(x,t)$, com t arbitrário, e usando (6.8), vemos que

$$B \subset \{\tau \in T : \pi(x,\tau + t) \in V_a(\pi(x,t)), \forall t \in T\}.$$

Como B é relativamente denso em T, concluímos que o conjunto $\{\tau \in T : \pi(x,\tau+t) \in V_a(\pi(x,t)), \forall t \in T\}$ é também relativamente denso em T. Logo, $\pi(x,t)$ é um movimento quase periódico. ∎

Definição 6.7. *Diremos que um fluxo π é* ***distal*** *em um conjunto invariante E se, para qualquer par de pontos distintos x e y em E, existir um índice $a \in A$ tal que*

$$\pi(x,t) \notin V_a(\pi(y,t)), \quad \text{para todo } t \in T.$$

Lema 6.4. *Se um fluxo π for equicontínuo em um conjunto invariante E, então π será distal em E. Em particular, um fluxo em um conjunto quase periódico minimal é distal.*

Demonstração: Suponha que π não seja distal. Então, existem dois pontos distintos x e y e uma sequência $\{t_n\}$ em T tal que para todo índice $b \in A$ existe um índice N com

$$\pi(x,t_n) \in V_b(\pi(y,t_n)), \quad \text{para } n \geq N. \tag{6.10}$$

Escolha um índice $a \in A$ tal que

$$x \notin V_a(y). \tag{6.11}$$

Para este a, escolha b pela equicontinuidade de π de forma que

$$\pi(\hat{x},t) \in V_a(\pi(\hat{y},t)),$$

para todo t em T, sempre que $\hat{x} \in V_b(\hat{y})$.

Seja N para o qual (6.10) vale. Temos, portanto,

$$\pi(x,t_N) \in V_b(\pi(y,t_N)).$$

Daí,

$$x = \pi(\pi(x,t_N),-t_N) \in V_a(\pi(\pi(y,t_N),-t_N)))$$

e

$$V_a(\pi(\pi(y,t_N),-t_N))) = V_a(\pi(y,0)) = V_a(y).$$

Portanto,

$$x \in V_a(y),$$

o que contradiz (6.11).

Logo, π é distal. ∎

Veremos, a seguir, o conceito de estabilidade de Lyapunov.

Definição 6.8. *Diremos que um movimento $\pi(x,t)$ é* ***Lyapunov estável*** *(com respeito a um conjunto D) se $\pi(x,t)$ estiver definido para todo t em T e se para todo índice $a \in A$ existir um índice $b \in A$ tal que*

$$\pi(y,t) \in V_a(\pi(x,t)), \quad t \in T, \tag{6.12}$$

sempre que $y \in D$ e $y \in V_b(x)$.

O movimento $\pi(x,t)$ será ***uniformemente Lyapunov estável*** *(com respeito a um conjunto D), se estiver definido para todo t em T e se para todo índice $a \in A$ existir um índice $b \in A$ tal que*

$$\pi(y,t) \in V_a(\pi(\hat{x},t)), \quad t \in T, \tag{6.13}$$

sempre que $y \in D, \hat{x} \in \gamma(x)$ e $y \in V_b(\hat{x})$.

O movimento $\pi(x,t)$ será ***positivamente Lyapunov estável*** *se $\pi(x,t)$ estiver definido para t em T^+ e a relação (6.12) for satisfeita para t em T^+.*

O movimento $\pi(x,t)$ será ***positivamente uniformemente Lyapunov estável*** *se $\pi(x,t)$ estiver definido para t em T^+, se a relação (6.13) for satisfeita para t em T^+ e $\hat{x} \in \gamma^+(x)$.*

Estabilidades negativas são definidas de forma análoga.

O próximo teorema mostra que o conceito de equicontinuidade está relacionado ao conceito de estabilidade de Lyapunov.

Teorema 6.6. *O movimento $\pi(x,t)$ será uniformemente Lyapunov estável com respeito a $\gamma(x)$ se, e somente se, o fluxo π for equicontínuo em $\gamma(x)$.*

Demonstração: ($\Rightarrow$) Seja $a \in A$ um índice qualquer. Por hipótese, existe um índice $b \in A$ tal que

$$y \in \gamma(x), \hat{x} \in \gamma(x) \text{ e } y \in V_b(\hat{x}) \Rightarrow \pi(y,t) \in V_a(\pi(\hat{x},t)), \;\; t \in T. \tag{6.14}$$

A relação (6.14) nos mostra que π é equicontínuo em $\gamma(x)$ (veja a Definição 6.5).

($\Leftarrow$) Agora, para todo índice $a \in A$, existe um índice $b \in A$ tal que

$$w \in \gamma(x), z \in \gamma(x) \text{ e } w \in V_b(z) \Rightarrow \pi(w,t) \in V_a(\pi(z,t)), \;\; t \in T. \tag{6.15}$$

Claramente, a relação (6.15) comprova que o movimento π é uniformemente Lyapunov estável (veja a Definição 6.8). ∎

7 A estrutura dos conjuntos ω-limite

Sejam π um fluxo em um espaço uniforme X e $\pi(x,t)$ um movimento positivamente compacto. Sabemos, pelo Teorema 2.2, que o conjunto ω-limite Ω_x é não vazio, compacto e invariante. Neste breve capítulo, buscaremos condições para que

(i) Ω_x seja um conjunto quase periódico minimal, ou

(ii) Ω_x seja um conjunto periódico minimal.

No próximo capítulo, aplicaremos os resultados expostos aqui para demonstrar a existência de soluções quase periódicas ou periódicas de equações diferenciais ordinárias.

7.1 Caso quase periódico minimal

O próximo resultado apresenta uma condição suficiente, embora não necessária, para que Ω_x seja um conjunto quase periódico minimal.

Teorema 7.1. *Seja $\pi(x,t)$ um movimento positivamente compacto e suponha que $\pi(x,t)$ seja positivamente uniformemente Lyapunov estável com respeito a Ω_x. Então, Ω_x é um conjunto quase periódico minimal.*

Demonstração: Como $\pi(x,t)$ é um movimento positivamente compacto, o conjunto Ω_x é não-vazio, fechado e invariante. Para concluirmos que Ω_x é um conjunto minimal, mostraremos que para todo par de pontos y e z em Ω_x e todo índice a em A, existe um τ em T tal que $\pi(y,\tau) \in V_a(z)$ [1].

Seja $a \in A$. Escolhemos um índice b tal que

$$x_i \in V_b(x_{i+1}) \Rightarrow x_1 \in V_a(x_3), \quad i = 1, 2. \tag{7.1}$$

[1]Se existisse um subconjunto próprio B de Ω_x não-vazio, compacto e invariante, o conjunto $\Omega_x \setminus B$ seria aberto em Ω_x. Então, dado $w \in \Omega_x \setminus B$, existiria um índice d tal que $V_d(w) \subset \Omega_x \setminus B$. Mostrando que para todo par de pontos y e z em Ω_x e todo índice a em A, existe um τ em T tal que $\pi(y,\tau) \in V_a(z)$, contradizemos a invariância de B. Com efeito, dados $w' \in B$ e $w \in \Omega_x \setminus B$, existiria $\tau \in T$ tal que $\pi(w',\tau) \in V_d(w) \subset \Omega_x \setminus B$.

Com b escolhido, escolhemos c pela estabilidade de Lypaunov tal que se $y \in \Omega_x$ e $y \in V_c(\pi(x,\sigma))$, para $\sigma \geq 0$, então

$$\pi(y,t) \in V_b(\pi(x,\sigma+t)), \quad t \geq 0. \tag{7.2}$$

Sejam $\{s_n\}$ e $\{t_n\}$ sequências em T^+ tais que $s_n \to \infty, t_n \to \infty$ e

$$x_n = \pi(x,s_n) \to y, \;\; \hat{x}_n = \pi(x,t_n) \to z.$$

Fixemos um índice m tal que $x_m = \pi(x,s_m) \in V_c(y)$, ou $y \in V_c(x_m)$. Então

$$\hat{x}_n = \pi(x,t_n) = \pi(x_m, t_n - s_m), \tag{7.3}$$

para todo n. Como $t_n \to \infty$, existe N_1 tal que $t_n - s_m \geq 0$ para todo $n \geq N_1$. De (7.2) e (7.3) segue que

$$\pi(y, t_n - s_m) \in V_b(\hat{x}_n), \quad n \geq N_1. \tag{7.4}$$

Como $\hat{x}_n \to z$, podemos escolher um índice N tal que $N \geq N_1$ e $\hat{x}_n \in V_b(z)$, para $n \geq N$. Para $\tau = t_N - s_m$, temos $\pi(y,\tau) \in V_b(\hat{x}_N)$, por (7.4). Então, fazendo $x_1 = \pi(y,\tau), x_2 = \hat{x}_N$ e $x_3 = z$, temos $x_1 \in V_a(x_3)$, ou seja, $\pi(y,\tau) \in V_a(z)$, como queríamos demonstrar.

Agora, para provar que Ω_x é quase periódico minimal, vamos mostrar que π é positivamente equicontínuo em Ω_x e aplicar o Teorema 6.5.

Seja a um índice qualquer e escolhemos b e c de forma que (7.1) e (7.2) ocorram, respectivamente. Agora, escolhemos um índice d tal que $d \geq c$ e

$$x_i \in V_d(x_{i+1}) \Rightarrow x_1 \in V_c(x_3), \;\; i = 1,2. \tag{7.5}$$

Sejam y e z pontos quaisquer em Ω_x com $y \in V_d(z)$. Como $y \in \Omega_x$, existe uma sequência $\{t_n\} \subset T^+$ tal que $t_n \to \infty$ e $\pi(x,t_n) \to y$. Então, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\pi(x,t_n) \in V_d(y)$ para $n \geq n_0$. Tomando $N > n_0$, temos $x_1 = \pi(x,t_N) \in V_d(y) \subset V_c(y)$. Fazendo $x_2 = y$ e $x_3 = z$, temos $x_1 \in V_c(x_3)$, por (7.5), ou seja, $x_1 \in V_c(z)$.

Segue de (7.2) que

$$\pi(x_1,t) \in V_b(\pi(y,t)) \quad \text{e} \quad \pi(x_1,t) \in V_b(\pi(z,t)),$$

para todo $t \geq 0$. Fazendo $\overline{x}_1 = \pi(y,t), \overline{x}_2 = \pi(x_1,t)$ e $\overline{x}_3 = \pi(z,t), \; t \geq 0$, segue de (7.1) que $\overline{x}_1 \in V_a(\overline{x}_3)$, ou seja,

$$\pi(y,t) \in V_a(\pi(z,t)), \;\; t \geq 0,$$

o que mostra que o movimento π é positivamente equicontínuo em Ω_x e completa a prova. ∎

7.2 Caso periódico minimal

A fim de mostrar que um conjunto ω-limite é periódico minimal, definiremos a seguir uma forma mais forte de estabilidade que nos será necessária.

Definição 7.1. *Dizemos que o movimento $\pi(x,t)$ é* ***assintoticamente estável com respeito a D*** *se:*

(i) $\pi(x,t)$ for positivamente uniformemente Lyapunov estável com respeito a D;

(ii) Existir um índice a tal que, para qualquer $y \in V_a(\gamma^+(x))$, exista um τ em T com a seguinte propriedade: para todo índice b, existe $K \geq 0$ tal que

$$\pi(y,t) \in V_b(\pi(x,\tau+t)), \quad t \geq K. \tag{7.6}$$

A propriedade (ii) acima pode ser escrita da seguinte forma: seja $A(x)$ a **região de atração** para $\gamma^+(x)$, isto é, $A(x)$ consiste de todos os pontos y em X para os quais existe um τ em T tal que (7.6) ocorra. Equivalentemente, $D \cap V_a(\gamma^+(x)) \subset A(x)$.

Note que se D for fechado

$$D \cap V_a(\gamma^+(x)) = D \cap V_a(H^+(x)),$$

onde $H^+(x) = \overline{\gamma^+(x)}$. Note também que se $\pi(x,t)$ for assintoticamente estável com respeito ao conjunto fechado Ω_x, então para algum índice a, teremos

$$\Omega_x \subset (\Omega_x \cap V_a(H^+(x))) \subset A(x). \tag{7.7}$$

Teorema 7.2. *Seja $\pi(x,t)$ um movimento positivamente compacto e suponha que $\pi(x,t)$ seja assintoticamente estável com respeito a Ω_x. Então, Ω_x é um conjunto periódico minimal.*

Demonstração: Afirmamos que para quaisquer dois pontos $y, z \in \Omega_x$ existe $\rho \in T$ tal que, para todo índice b, existe $K \geq 0$ tal que $\pi(z,t) \in V_b(\pi(y,\rho+t))$ para todo $t \geq K$. Para provarmos esta afirmação notemos que, em (7.7), ocorre $\Omega_x \subset A(x)$. Assim, para $y, z \in \Omega_x$, temos $y, z \in A(x)$. Portanto, existem $\sigma, \tau \in T$ tais que, para qualquer índice c, existe $K \geq 0$ tal que

$$\pi(y,t) \in V_c(\pi(x,\sigma+t)), \quad t \geq K \tag{7.8}$$

e

$$\pi(z,t) \in V_c(\pi(x,\tau+t)), \quad t \geq K. \tag{7.9}$$

Tomemos $t \geq \max\{K, K-\tau+\sigma\}$. De (7.8) segue que

$$\pi(x,\tau+\sigma-\tau+t) \in V_c(\pi(y,\tau-\sigma+t)),$$

ou seja,

$$\pi(x, \tau + t) \in V_c(\pi(y, \tau - \sigma + t)). \tag{7.10}$$

E de (7.9) segue que

$$\pi(z, t) \in V_c(\pi(x, \tau + t)). \tag{7.11}$$

Se o índice c for escolhido de forma que

$$x_i \in V_c(x_{i+1}),\ i = 1, 2 \Rightarrow x_1 \in V_b(x_3), \tag{7.12}$$

por (7.10) e (7.11), concluiremos que

$$\pi(z, t) \in V_b(\pi(y, \tau - \sigma + t)), \tag{7.13}$$

para $t \geq \max\{K, K + \sigma - \tau\}$, considerando $x_1 = \pi(z, t), x_2 = \pi(x, \tau + t)$ e $x_3 = \pi(y, \tau - \sigma + t)$.

Como o movimento $\pi(x, t)$ é uniformemente positivamente Lyapunov estável com respeito a Ω_x (por hipótese), segue do Teorema 7.1 que Ω_x é quase periódico minimal. Consequentemente, o Lema 6.4 implica que o fluxo π é distal em Ω_x.

Afirmamos agora que existe algum $y \in \Omega_x$ tal que

$$\Omega_x = \gamma(y). \tag{7.14}$$

Suponhamos que não seja verdade. Então, para qualquer $y \in \Omega_x$, existe $z \in \Omega_x$ tal que $z \notin \gamma(y)$. Dessa forma, $z \neq \pi(y, \tau - \sigma)$. Aplicando (7.13), obtemos

$$\pi(z, t) \in V_b(\pi(\pi(y, \tau - \sigma), t),\ \ t \geq \max\{K, K + \sigma - \tau\},$$

o que contradiz o fato de π ser distal em Ω_x.

Como $H(y) = \Omega_x = \gamma(y)$, para algum $y \in \Omega_x$, segue do Corolário 6.1 que o movimento $\pi(x, t)$ é periódico e, por conseguinte, que Ω_x é um conjunto minimal periódico.

■

8 Aplicações a equações diferenciais

Ao longo deste capítulo estudaremos soluções $\phi(x, f, t)$ de equações diferenciais $x' = f(x, t)$, onde $f \in C(W \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ e f satisfaz a condição de unicidade forte.

Voltaremos a nossa atenção para o fluxo π construído no Capítulo IV (veja (4.2)) e vamos comparar a solução $\phi(x, f, t)$ com o movimento $\pi(x, f, t)$. Analisaremos a estabilidade de soluções e discutiremos condições para a existência de soluções periódicas e quase periódicas. Levaremos em conta que a topologia da convergência uniforme em conjuntos compactos em $C(W \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ é metrizável.

8.1 A solução $\phi(x, f, t)$ e o movimento $\pi(x, f, t)$

Considere a equação diferencial $x' = f(x, t)$, onde $f \in C(W \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ e f satisfaz a condição de unicidade forte, isto é, f é regular. Conforme foi visto no Capítulo 4, a aplicação

$$\pi(x, f, t) = (\phi(x, f, t), f_t)$$

define um fluxo em $W \times H(f)$. Sejam

$$P : W \times H(f) \to W \text{ e } Q : W \times H(f) \to H(f)$$

as projeções definidas no Capítulo 4, Seção 4.3.

Definição 8.1. *Diremos que a solução $\phi(x, f, t)$ de $x' = f(x, t)$ é* ***positivamente Poisson estável*** *se, para toda vizinhança U de x em W, o conjunto*

$$\{\tau \in T : \tau \geq 0 \text{ e } \phi(x, f, \tau) \in U\}$$

for ilimitado em T.

Estabilidade negativa de Poisson *é definida de forma análoga com $\tau \leq 0$.*

A solução ϕ será ***Poisson estável*** *se for positiva e negativamente Poisson estável.*

Definição 8.2. *A solução $\phi(x, f, t)$ será dita* ***recorrente*** *se, para toda vizinhança U de x, o conjunto*

$$\{\tau \in T : \phi(x, f, \tau) \in U\}$$

for relativamente denso em T.

O próximo lema é facilmente verificado.

Lema 8.1. *Seja f uma função regular em $C(W \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. Se um movimento $\pi(x, g, t)$ em $W \times H(f)$ tiver a Propriedade X, então o movimento g_t em $H(f)$ e a solução correspondente $\phi(x, g, t)$ em W também terão a Propriedade X, onde X pode ser: estabilidade de Poisson, recorrência, quase periodicidade ou periodicidade.*

Observemos que a recíproca do lema precedente não é verdadeira para a periodicidade, pois g_t e $\phi(x, g, t)$ podem ser periódicas com períodos diferentes.

Lema 8.2. *Seja f uma função regular em $C(W \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. Se o movimento f_t for quase periódico em $H(f)$ e a solução $\phi(x, f, t)$ for quase periódica, então o movimento $\pi(x, f, t)$ será quase periódico.*

Demonstração: Este resultado é uma aplicação direta do Teorema 5.5, considerando $h(t) = \pi(x, f, t)$, $f(t) = \phi(x, f, t)$ e $g(t) = f_t$. ■

8.2 Estrutura de equações limite

Nesta seção, aplicaremos as conclusões do Capítulo 7 ao estudo do conjunto de equações limite para $x' = f(x, t)$, em que $f \in C(W \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$.

Definição 8.3. *Suponha que f_t seja um movimento positivamente compacto em $C(W \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ e seja Ω_f o seu conjunto ω-limite. A função f será dita:*

- ***assintoticamente autônoma*** *se Ω_f consistir de um único ponto;*
- ***assintoticamente periódica*** *se Ω_f for um conjunto periódico minimal;*
- ***assintoticamente quase periódica*** *se Ω_f for um conjunto quase periódico minimal;*
- ***assintoticamente recorrente*** *se Ω_f for um conjunto minimal (compacto);*
- ***assintoticamente Poisson estável*** *se existir uma função g em Ω_f tal que $H(g) = \Omega_f$.*

Vamos caracterizar as funções f em $C(W \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ que são assintoticamente autônomas. Para isso, precisaremos do seguinte lema.

Lema 8.3. *Seja $h \in C(W \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ e suponha que $h(x, t)$ convirja uniformemente para 0 em conjuntos compactos de W, quando $t \to \infty$. Então, $h_t \to 0$ quando $t \to \infty$ no fluxo em $C(W \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$.*

Demonstração: A fim de provar que $h_t \to 0$ quando $t \to \infty$, vamos mostrar que, para todo par de compactos $K \subset W, I \subset \mathbb{R}$ e todo $\varepsilon > 0$, existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $|h_t(x,s)| \leq \varepsilon$, sempre que $x \in K$, $s \in I$ e $t \geq t_0$. Então, sejam $K \subset W, I \subset \mathbb{R}$ conjuntos compactos e $\varepsilon > 0$. Caso seja necessário, podemos estender o conjunto I de forma que I seja o intervalo $[-a,a], a > 0$.

Como $h(x,t) \to 0$, quando $t \to \infty$, podemos encontrar τ tal que

$$|h(x,t)| \leq \varepsilon, \quad \text{sempre que } x \in K \text{ e } t \geq \tau. \tag{8.1}$$

Tomemos $t_0 = \tau + a$. Note que

$$t \geq t_0 \quad \text{e} \quad s \in I \quad \Rightarrow \quad s + t \geq -a + \tau + a \quad \Rightarrow \quad s + t \geq \tau. \tag{8.2}$$

Portanto, por (8.1) e (8.2), concluímos que

$$|h_t(x,s)| = |h(x,s+t)| \leq \varepsilon,$$

sempre que $x \in K$, $s \in I$ e $t \geq t_0$, como queríamos demonstrar. ■

Teorema 8.1. *Seja $f \in C(W \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ e suponha que o movimento f_t seja positivamente compacto. Então, f será assintoticamente autônoma se, e somente se, existirem funções g e h em $C(W \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ tais que*

(i) $f = g + h$,

(ii) g é autônoma, isto é, g depende somente de x em W.

(iii) $h(x,t) \to 0$ quando $t \to \infty$, uniformemente em conjuntos compactos de W.

Demonstração: ($\Leftarrow$) Como f_t é um movimento positivamente compacto, o conjunto Ω_f é não vazio (veja Teorema 2.2). Seja $\phi \in \Omega_f$. Então, existe uma sequência $\{t_n\} \subset \mathbb{R}$ tal que $t_n \to \infty$ e $f_{t_n} \to \phi$ quando $n \to \infty$.

Mas, como h tem a propriedade (iii), segue que

$$f_{t_n} = g + h_{t_n} \to g, \quad n \to \infty,$$

pelo Lema 8.3. Pela unicidade de limite, temos $\phi = g$. Sendo assim, $\Omega_f = \{g\}$ e, portanto, f é assintoticamente autônoma.

($\Rightarrow$) Suponha que f seja assintoticamente autônoma. Então $\Omega_f = \{g\}$, onde g é uma função autônoma.

Defina $h = f - g$. Afirmamos que h satisfaz (iii).

Com efeito, como $\Omega_f = \{g\}$, para toda sequência $\{t_n\}$, com $t_n \to \infty$, e para todo par de conjuntos compactos $K \subset W$ e $I \subset \mathbb{R}$, temos a convergência uniforme

$$f_{t_n}(x,t) = f(x, t_n + t) \to g(x), \tag{8.3}$$

para $x \in K$ e $t \in I$.

Sejam K um subconjunto compacto de W, $I = [0, 1]$ e $t_n = n$. Então, por (8.3), para todo $\varepsilon > 0$, existe N tal que para $n \geq N$, temos

$$\begin{aligned}\sup_{x \in K, t \geq N} |h(x,t)| &= \sup_{x \in K, t \geq N} |f(x,t) - g(x)| \\ &= \sup_{x \in K, t \in I} |f(x, n+t) - g(x)| \leq \varepsilon.\end{aligned}$$

Dessa forma h tem a propriedade (iii). ■

Teorema 8.2. *Sejam f, g e h funções em $C(W \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, onde $f = g + h$ e f_t é um movimento positivamente compacto. Suponha que $h(x,t)$ convirja uniformemente para 0 quando $t \to \infty$, em conjuntos compactos de W. Então, as seguintes afirmações são verdadeiras:*

(A) $\Omega_g \neq \emptyset$ e $\Omega_f = \Omega_g$;

(B) Se o movimento g_t for Poisson estável, o movimento f_t será assintoticamente Poisson estável e $\Omega_f = H(g)$;

(C) Se o movimento g_t for periódico, o movimento f_t será assintoticamente periódico e $\Omega_f = H(g)$;

Demonstração: (A) Como f_t é positivamente compacto, $\Omega_f \neq \emptyset$, pelo Teorema 2.2. Tomemos $\phi \in \Omega_f$. Existe, pois, uma sequência $\{t_n\} \subset \mathbb{R}$ tal que $t_n \to \infty$ e $f_{t_n} \to \phi$.

Note que

$$f_{t_n} = g_{t_n} + h_{t_n}.$$

Como $t_n \to \infty$ segue que $h_{t_n} \to 0$, pelo Lema 8.3. Sendo assim,

$$g_{t_n} = f_{t_n} - h_{t_n} \to \phi.$$

Dessa forma, $\phi \in \Omega_g$, permitindo-nos concluir que $\Omega_g \neq \emptyset$ e $\Omega_f \subset \Omega_g$.

Vamos mostrar que $\Omega_g \subset \Omega_f$ para nos certificarmos de que $\Omega_f = \Omega_g$. Tomemos $\psi \in \Omega_g$. Então, existe uma sequência $\{t_n\} \subset \mathbb{R}$ tal que $t_n \to \infty$ e $g_{t_n} \to \psi$.

Sabemos, pelo Lema 8.3, que $h_{t_n} \to 0$, pois $t_n \to \infty$. Portanto,

$$f_{t_n} = g_{t_n} + h_{t_n} \to \psi,$$

donde concluímos que $\psi \in \Omega_f$ e $\Omega_g \subset \Omega_f$.

(B) Suponhamos que o movimento g_t seja Poisson estável. Pelo Teorema 6.1, temos $\Omega_g = H(g)$. Por (A), sabemos que $\Omega_f = \Omega_g$. Então $\Omega_f = H(g)$ e, por conseguinte, o movimento f_t é assintoticamente Poisson estável.

(C) Suponhamos que o movimento g_t seja periódico. Como foi visto na Observação 6.2, g_t é Poisson estável. Por (B), temos $\Omega_f = H(g)$. Daí, o movimento f_t é assintoticamente periódico. ∎

Sob as hipóteses do teorema anterior, também é possível mostrar que se o movimento g_t for quase periódico ou recorrente, o movimento f_t será assintoticamente quase periódico ou assintoticamente recorrente, respectivamente. Em todos os casos teremos $\Omega_f = H(g)$.

8.3 Estabilidade

Nesta seção, mostraremos que soluções de equações limite herdam as propriedades de estabilidade de soluções da equação dada.

No que segue, suporemos que a origem 0 pertença à W.

Lema 8.4. *(A) Seja f uma função regular em $C(W \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ com $f(0,t) = 0$ para todo $t \geq 0$. Então, para toda função g em Ω_f, temos $g(0,t) = 0$ para todo t.*

(B) Seja α uma função não-negativa definida no conjunto $\{(r,t) : 0 \leq r \leq a, 0 \leq t < \infty\}$, não-decrescente na primeira variável. Seja f uma função regular em $C(W \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ e suponha que

$$|\phi(x, f_\tau, t)| \leq \alpha(|x|, t), \quad |x| \leq a,\ 0 \leq \tau, 0 \leq t. \tag{8.4}$$

Então, para toda função g em Ω_f, temos

$$|\phi(x, g, t)| \leq \alpha(|x|, t), \quad |x| \leq a,\ t \geq 0. \tag{8.5}$$

Demonstração: (A) Seja $g \in \Omega_f$. Então, existe uma sequência $\{t_n\}$ tal que $t_n \to \infty$ e

$$g(x,t) = \lim_{t_n \to \infty} f_{t_n}(x,t), \quad \text{para quaisquer } (x,t) \in W \times \mathbb{R}.$$

Daí, dado $t \in \mathbb{R}$,

$$g(0,t) = \lim_{t_n \to \infty} f_{t_n}(0,t) = \lim_{t_n \to \infty} 0 = 0.$$

Portanto,

$$g(0,t) = 0, \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.$$

(B) Sejam $\varepsilon > 0$ e I um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^+$. Para toda $g \in \Omega_f$, existe uma vizinhança U de $g, U \subset C(W \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, tal que para $h \in U$ e h admissível,

$$|\phi(x, g, t) - \phi(x, h, t)| \leq \varepsilon, \ \ |x| \leq a,\ t \in I, \tag{8.6}$$

pelo Lema 4.1.

Mas, para $g \in \Omega_f$, existe uma sequência $\{t_n\}$ tal que $t_n \to \infty$ e $g = \lim f_{t_n}$. Sendo assim, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $t_N \geq 0$ e $f_{t_N} \in U$.

Chamando $t_N = \tau$, por (8.6) e (8.4), temos

$$\begin{aligned}|\phi(x, g, t)| &\leq |\phi(x, g, t) - \phi(x, f_\tau, t)| + |\phi(x, f_\tau, t)| \\ &\leq \varepsilon + \alpha(|x|, t),\end{aligned}$$

para $|x| \leq a$ e $t \in I$. Fazendo $\varepsilon \to 0$, concluímos que

$$|\phi(x, g, t)| \leq \alpha(|x|, t), \quad |x| \leq a, \ t \in I.$$

■

Definição 8.4. *Seja f uma função admissível em $C(W \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ e suponha que $f(0,t) = 0$, para todo $t \geq 0$. A solução nula $\phi(0, f, t) = 0$ será dita:*

(i) ***Estável*** *se*

$$|\phi(x, f, t)| \leq \alpha(|x|), \quad |x| \leq a, \ 0 \leq t,$$

onde α é uma função não negativa, contínua e não-decrescente, definida em $[0, a]$ com $\alpha(0) = 0$;

(ii) ***Uniformemente estável*** *se*

$$|\phi(x, f_\tau, t)| \leq \alpha(|x|), \quad |x| \leq a, \ 0 \leq \tau, \ 0 \leq t, \tag{8.7}$$

onde α é como em (i);

(iii) ***Assintoticamente estável*** *se for estável e $\phi(x, f_\tau, t) \to 0$ quando $t \to \infty$, sempre que $|x| \leq a$ e $\tau \geq 0$;*

(iv) ***Uniformemente assintoticamente estável*** *se*

$$|\phi(x, f_\tau, t)| \leq \alpha(|x|)\sigma(t), \quad |x| \leq a, \ 0 \leq \tau, \ 0 \leq t, \tag{8.8}$$

onde α é como em (i) e σ é uma função positiva, contínua e não-crescente definida para $t \geq 0$ com $\sigma(t) \to 0$, quando $t \to \infty$;

(v) ***Exponencialmente estável*** *se valer* (8.8) *com $\sigma(t) = \exp(-kt), k > 0$.*

Utilizando o mesmo procedimento usado para provar o Lema 8.4, podemos demonstrar o próximo teorema.

Teorema 8.3. *Seja f uma função regular em $C(W \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ e suponha que $f(0,t) = 0$, para todo $t \geq 0$. Se a solução nula de $x' = f(x,t)$ for uniformemente estável {uniformemente assintoticamente estável, exponencialmente estável}, então a solução nula de toda equação limite $x' = g(x,t), g \in \Omega_f$, será uniformemente estável {uniformemente assintoticamente estável, exponencialmente estável}.*

Observação 8.1. O conceito de estabilidade de uma solução arbitrária pode ser definido através de uma técnica usual. Diremos que uma solução $\phi(t)$ de $x' = f(x,t)$ é estável {uniformemente estável, uniformemente assintoticamente estável, exponencialmente estável} se a solução nula de

$$x' = F(x,t) = f(x + \phi(t), t) - f(\phi(t), t) \tag{8.9}$$

for estável {uniformemente estável, uniformemente assintoticamente estável, exponencialmente estável}. Contudo, se o domínio da função F não contiver uma região da forma $W' \times \mathbb{R}^+$, onde W' é uma vizinhança da origem, a técnica não poderá ser aplicada. Mas, se a solução $\phi(t)$ for positivamente compacta, este problema não ocorrerá.[1]

O último teorema tem a seguinte generalização.

Teorema 8.4. *Seja f uma função regular em $C(W \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. Se existir uma solução positivamente compacta $\phi(x, f, t)$ de $x' = f(x,t)$ que seja uniformemente estável {uniformemente assintoticamente estável, exponencialmente estável}, então toda equação limite $x' = g(x,t), g \in \Omega_f$, terá uma solução compacta $\phi(y, g, t)$ que é uniformemente estável {uniformemente assintoticamente estável, exponencialmente estável}.*

Demonstração: Se $g \in \Omega_f$, podemos encontrar uma sequência $\{t_n\} \subset \mathbb{R}$ tal que $t_n \to \infty$ e $f_{t_n} \to g$.

Por hipótese, existe uma solução positivamente compacta $\phi(x, f, t)$ de $x' = f(x,t)$. Extraindo uma subsequência, se necessário, vamos considerar $\{\phi(x, f, t_n)\}$ uma sequência convergente em W. Digamos que $\phi(x, f, t_n) \to y$.

Do Teorema 4.4 segue a convergência uniforme

$$\phi(x, f, t_n + t) \to \phi(y, g, t) \tag{8.10}$$

em subconjuntos compactos de $I_{(y,g)}$, que é o intervalo maximal de definição de $\phi(y, g, t)$.

Como $\phi(x, f, t)$ está em um compacto $K \subset W$, para todo $t \geq 0$, por (8.10), concluímos que $\phi(y, g, t) \in K$ para todo t em $I_{(y,g)}$. Ou seja, $\phi(y, g, t)$ é uma solução compacta da equação limite $x' = g(x,t)$, que satisfaz $x(0) = y$.

Seja

$$x' = F(x,t) = f(x + \phi(t), t) - f(\phi(t), t),$$

onde $\phi(t) = \phi(x, f, t)$.

[1]Se a solução $\phi(t)$ for positivamente compacta, existirá um conjunto compacto $B \subset W$ tal que $\phi(t) \in B$ para todo $t \geq 0$. Como W é um conjunto aberto e, portanto, $\mathbb{R}^n \setminus W$ é um conjunto fechado, temos dist $(B, \mathbb{R}^n \setminus W) = r > 0$. Se $|x| < \frac{r}{2}$ então dist $(\phi(t) + x, \phi(t)) < \frac{r}{2} < r$ para todo $t \geq 0$, implicando que $\phi(t) + x \in W$ para todo $t \geq 0$. Neste caso, o domínio da função F contém uma região da forma $W' \times \mathbb{R}^+$, onde W' é uma vizinhança da origem, a saber $W' = \{x \in W; |x| < \frac{r}{2}\}$.

Para a sequência $\{t_n\}$, temos

$$\begin{aligned} F_{t_n}(x,t) &= f(x+\phi(t+t_n), t+t_n) - f(\phi(t+t_n), t+t_n) \\ &= f_{t_n}(x+\phi(t+t_n), t) - f_{t_n}(\phi(t+t_n), t) \\ &\to g(x+\phi(y,g,t), t) - g(\phi(y,g,t), t) = G(x,t). \end{aligned}$$

Então, a solução $\phi(y,g,t)$ de $x' = g(x,t)$ será uniformemente estável {uniformemente assintoticamente estável, exponencialmente estável} se, e somente se, a solução nula de $x' = G(x,t)$ for uniformemente estável {uniformemente assintoticamente estável, exponencialmente estável}. O resultado segue do Teorema 8.3 e da Observação 8.1.

■

Teorema 8.5. *Seja f uma função regular em $C(W\times\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. Suponha que o movimento f_t seja positivamente compacto e que $f(0,t) = 0$ para todo $t \geq 0$. Suponha ainda que:*

(i) A solução nula de $x' = f(x,t)$ seja uniformemente estável e,

(ii) A solução nula de toda equação limite seja assintoticamente estável e que exista uma constante $b > 0$ tal que se $|x| < b$ e $g \in \Omega_f$, então $|\phi(x,g,t)| \to 0$ quando $t \to \infty$.

Então, a solução nula da equação $x' = f(x,t)$ é assintoticamente estável.

Demonstração: Seja α uma função não-negativa, contínua e não-decrescente definida em $[0,a]$, com $\alpha(0) = 0$, satisfazendo

$$|\phi(x, f_\tau, t)| \leq \alpha(|x|), \quad |x| \leq a, \ 0 \leq \tau, \ 0 \leq t. \tag{8.11}$$

A função α existe, pois a solução nula de $x' = f(x,t)$ é uniformemente estável. Então, pelo Lema 8.4, temos

$$|\phi(x,g,t)| \leq \alpha(|x|), \quad |x| \leq a, \ 0 \leq t, \tag{8.12}$$

para todo $g \in \Omega_f$.

Agora, restrinja o fluxo π em $W \times H(f)$ ao subespaço invariante $W \times \Omega_f$ e seja $M = \{0\} \times \Omega_f$. Como o movimento f_t é positivamente compacto, M é um conjunto compacto e invariante no fluxo π. Vamos mostrar que M é um atrator estável no fluxo π em $W \times \Omega_f$.

Para isso, observemos que M é um conjunto estável. De fato, seja $\varepsilon > 0$ e U_ε uma vizinhança de M dada por

$$U_\varepsilon = \{(x,g) \in W \times \Omega_f : |x| < \varepsilon\}$$

Pela continuidade da função α, escolha $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$0 \leq r < \delta \Rightarrow \alpha(r) < \varepsilon,$$

e considere a vizinhança $U_\delta = \{(x,h) \in W \times \Omega_f : |x| < \delta\}$.

Tomemos $(x,h) \in U_\delta$. Dado $t \geq 0$, temos

$$\pi(x,h,t) = (\phi(x,h,t), h_t),$$

com $h_t \in \Omega_f$ (Ω_f é invariante) e $|\phi(x,h,t)| \leq \alpha(|x|) < \varepsilon$, por (8.12), já que $|x| < \delta$. Daí, $\pi(x,h,t) \in U_\varepsilon$, para todo $t \geq 0$. Como (x,h) foi tomado arbitrariamente em U_δ, concluímos que $\pi(U_\delta, t) \subset U_\varepsilon$, para todo $t \geq 0$. Portanto, M é estável.

Para mostrar que M é um atrator, consideremos $(x,g) \in U_b$, onde b é dado pela hipótese (ii). Então,

$$\pi(x,g,t) = (\phi(x,g,t), g_t) \to \{0\} \times \Omega_f = M,$$

quando $t \to \infty$.

Seja $A(M)$ a região de atração de M, isto é,

$$A(M) = \{(x,g) \in W \times \Omega_f : \pi(x,g,t) \to M, t \to \infty\}.$$

Como a vizinhança aberta U_b está em $A(M)$, vemos que M é um atrator.

Agora, consideremos a solução $\phi(x,f,t)$ de $x' = f(x,t)$, onde $x \in W$ é tal que $|x| \leq a$ e $\alpha(|x|) \leq b$. Como $|x| \leq a$, a solução $\phi(x,f,t)$ é positivamente compacta (por (8.11)) e o conjunto ω-limite $\Omega = \Omega_{(x,f)}$ é não vazio, compacto e invariante em $W \times \Omega_f$. Ainda, como $|\phi(x,f,t)| \leq \alpha(|x|) \leq b$, o conjunto Ω está em $A(M)$. Segue, portanto, do Teorema 2.4, que $\Omega \subset M$. Daí, o conjunto limite positivo satisfaz $L^+_{(x,f)} = P(\Omega) = \{0\}$, ou seja, $\phi(x,f,t) \to 0$ quando $t \to \infty$. ∎

Apresentamos agora um outro tipo de estabilidade que será usado na próxima seção. Esta estabilidade aparece em problemas de perturbação onde comparamos a solução da equação perturbada

$$x' = f(x,t) + h(x,t) = g(x,t)$$

com a solução da equação não perturbada

$$x' = f(x,t).$$

Nestes problemas, a função h é geralmente "pequena" e não interessa somente uma única equação perturbada, mas sim uma classe $\mathcal{G}$ de equações perturbadas.

Definição 8.5. *Suponha que f seja uma função admissível em $C(W \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ e $\mathcal{G}$ um conjunto de funções admissíveis g em $C(W \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$. Diremos que uma solução $\phi(x,f,t)$ de $x' = f(x,t)$ é **estável com respeito a $\mathcal{G}$** se existir uma função contínua real $\alpha(r,s)$ definida para $0 \leq r < a_1, 0 \leq s < a_2$, crescente em cada variável separadamente tal que $\alpha(0,0) = 0$ e*

$$|\phi(x,f,\tau+t) - \phi(y,g,t)| \leq \alpha(|\phi(x,f,\tau) - y|, \rho(f_\tau, g)), \tag{8.13}$$

para todo $t \geq 0, \tau \geq 0, g \in \mathcal{G}$, onde ρ uma métrica em $C(W \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ que gera a topologia de convergência uniforme em conjuntos compactos.

Esta estabilidade significa que se y estiver "perto de $\phi(x, f, \tau)$" e g estiver "perto de f_τ", então as soluções $\phi(x, f, \tau + t)$ e $\phi(y, g, t)$ permanecerão próximas para todo $t \geq 0$.

Note que se a solução $\phi(x, f, \tau)$ de $x' = f(x, t)$ for estável com respeito a $\mathcal{G}$, então para todo $\tau \geq 0$, a solução

$$\phi(\phi(x, f, \tau), f_\tau, t) = \phi(x, f, \tau + t) \tag{8.14}$$

de $x' = f_\tau(x, t)$ será estável com respeito a $\mathcal{G}$.

Teorema 8.6. *Seja $f \in C(W \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ uma função regular tal que $f(0, t) = 0$ para todo $t \geq 0$ e seja $\phi(x, f, t)$ uma solução positivamente compacta de $x' = f(x, t)$ estável com respeito ao conjunto $\mathcal{G}$. Se (x^*, f^*) pertencer a $\Omega_{(x,f)}$, então a solução compacta $\phi(x^*, f^*, t)$ da equação limite $x' = f^*(x, t)$ será estável com respeito a $\mathcal{G}$. E ainda, se $\alpha(r, s)$ satisfizer* (8.13) *para $\phi(x, f, t)$, então a mesma função $\alpha(r, s)$ poderá ser usada para $\phi(x^*, f^*, t)$.*

Demonstração: Pela Observação 8.1, podemos supor que $\phi(x, f, t) = 0$, para todo $t \geq 0$. Como $\phi(x, f, t) = 0$ é estável com relação a $\mathcal{G}$, segue de (8.13) que

$$|\phi(y, g, t)| \leq \alpha(|y|, \rho(f_\tau, g)),$$

$t \geq 0$ e $g \in \mathcal{G}$. Vamos mostrar que a solução nula de toda equação limite é estável com respeito a $\mathcal{G}$. De fato, se $f^* \in \Omega_f$, então existe uma sequência $\{\tau_n\}$ tal que $\tau_n \to \infty$ e $f_{\tau_n} \to f^*$.

Pela continuidade de ρ e de α, segue que

$$\rho(f_{\tau_n}, g) \to \rho(f^*, g) \quad \text{e} \quad \alpha(|y|, \rho(f_{\tau_n}, g)) \to \alpha(|y|, \rho(f^*, g)).$$

Daí, como $|\phi(y, g, t)| \leq \alpha(|y|, \rho(f_{\tau_n}, g))$ (veja (8.14)), segue que

$$|\phi(y, g, t)| \leq \alpha(|y|, \rho(f^*, g)),$$

para $t \geq 0, g \in \mathcal{G}$ e $f^* \in \Omega_f$, o que completa a prova. ∎

8.4 Existência de soluções periódicas e quase periódicas

Nesta seção, vamos aplicar os resultados do Capítulo 7 a fim de garantir a existência de soluções quase periódicas e periódicas para uma equação diferencial

$$x' = f(x, t). \tag{8.15}$$

Os resultados serão formulados, essencialmente, em termos das equações limite de (8.15).

Teorema 8.7. *Seja f uma função regular em $C(W \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ e suponha que algum movimento $\pi(x, f, t)$ em $W \times H(f)$ seja positivamente compacto e positivamente uniformemente Lyapunov estável com respeito a $\Omega_{(x,f)}$. Então, f é assintoticamente quase periódica e o conjunto ω-limite $\Omega_{(x,f)}$ é um conjunto quase periódico minimal. Em particular, toda equação limite terá uma solução quase periódica. Se supusermos que $f \in \Omega_f$ então a equação $x' = f(x, t)$ terá uma solução quase periódica.*

Demonstração: Do Teorema 7.1 segue que $\Omega_{(x,f)}$ é um conjunto quase periódico minimal. Então, $\Omega_{(x,f)} = H((y, g))$, em que (y, g) é um ponto quase periódico em $\Omega_{(x,f)}$. Como o movimento $\pi(x, f, t)$ é positivamente compacto, $\Omega_{(x,f)}$ é compacto. Além disso, $\Omega_{(x,f)}$ é invariante. Daí, $\pi(y, g, t)$ é um movimento compacto e, portanto, a solução $\phi(y, g, t)$ é compacta e o movimento g_t é compacto.

Mostraremos que a função f é assintoticamente quase periódica.

Note que

$$\Omega_{(x,f)} = H((y, g)) = \overline{\gamma((y, g))} = \overline{\{(\phi(y, g, t), g_t); t \in \mathbb{R}\}}$$

e

$$\overline{\{(\phi(y, g, t), g_t); t \in \mathbb{R}\}} \subset \overline{\{\phi(y, g, t); t \in \mathbb{R}\}} \times \overline{\{g_t; t \in \mathbb{R}\}}.$$

Sendo $Q : W \times H(f) \to H(f)$ a projeção contínua dada por $Q(w, h) = h$, para todo $(w, h) \in W \times H(f)$, temos

$$Q(\Omega_{(x,f)}) \subset Q(\overline{\{\phi(y, g, t); t \in \mathbb{R}\}} \times H(g)) \Rightarrow \Omega_f \subset H(g).$$

Pelo Lema 8.1, g é um ponto quase periódico e, portanto, g_t é um movimento recorrente. Assim, pelo Teorema 6.3, $H(g)$ é um conjunto compacto minimal, visto que g_t é um movimento compacto.

Como $\Omega_f \subset H(g)$ e Ω_f é um conjunto não-vazio, fechado e invariante, segue da minimalidade de $H(g)$ que $\Omega_f = H(g)$. Portanto, f é assintoticamente quase periódica.

Seja $x' = f^*(x, t)$ uma equação limite para $x' = f(x, t)$, onde $f^* \in \Omega_f$.

Como f^* pertence ao conjunto Ω_f, existe uma sequência $\{t_n\} \subset \mathbb{R}$ tal que $t_n \to +\infty$ e $f_{t_n} \to f^*$. Além disso, como o movimento $\pi(x, f, t)$ é positivamente compacto, a solução $\phi(x, f, t)$ é positivamente compacta. Portanto, a sequência $\{\phi(x, f, t_n)\}$ tem uma subsequência convergente, a qual denotaremos por $\{\phi(x, f, t_n)\}$, por simplicidade de notação. Digamos que $\phi(x, f, t_n) \to \hat{x}$. Então, $(\hat{x}, f^*) \in \Omega_{(x,f)}$. Como $\Omega_{(x,f)} = H((y, g))$ e (y, g) é um ponto quase periódico, segue que $(\hat{x}, f^*)$ é também um ponto quase periódico, ou seja, o movimento $\pi(\hat{x}, f^*, t)$ é quase periódico. Pelo Lema 8.1, concluímos que a solução $\phi(\hat{x}, f^*, t)$ da equação limite $x' = f^*(x, t)$ é quase periódica.

Se supusermos que $f \in \Omega_f$, concluiremos, de forma análoga, que a equação $x' = f(x, t)$ tem uma solução periódica. ∎

O próximo teorema nos fornece uma condição suficiente para a existência de soluções quase periódicas.

Teorema 8.8. *Seja f uma função regular em $C(W \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ assintoticamente quase periódica. Seja $\phi(x, f, t)$ uma solução positivamente compacta de $x' = f(x,t)$ que é estável com respeito a Ω_f. Então, todo movimento $\pi(y, g, t)$ no conjunto ω-limite $\Omega_{(x,f)}$ é compacto e uniformemente positivamente Lyapunov estável com respeito a $\Omega_{(x,f)}$. Em particular, $\Omega_{(x,f)}$ contém um conjunto quase periódico minimal. Além disso, toda equação limite de $x' = f(x,t)$ tem uma solução quase periódica. E se supusermos que f seja quase periódica em t, a equação $x' = f(x,t)$ terá uma solução quase periódica.*

Demonstração: Seja α de forma que (8.13) seja satisfeita. Do Teorema 8.6 segue que a mesma função α "funciona" para toda função g em Ω_f. Isto é,

$$|\phi(x^*, f^*, t) - \phi(y, g, t)| \leq \alpha(|x^* - y|, \rho(f^*, g)), \quad t \geq 0, \tag{8.16}$$

para $f^* \in \Omega_f$, onde $(x^*, f^*) \in \Omega_{(x,f)}$. Como não há restrição para y em (8.16), notamos que (8.16) vale sempre que (y, g) estiver em $\Omega_{(x,f)}$.

Seja $\varepsilon > 0$. Pelo Teorema 6.4, como Ω_f é um conjunto quase periódico minimal, f_t é equicontínuo em Ω_f. Assim, existe $\delta > 0$ tal que

$$f^*, g \in \Omega_f, \ \rho(f^*, g) < \delta \Rightarrow \rho(f_t^*, g_t) \leq \varepsilon, \quad \text{para todo } t. \tag{8.17}$$

Como α é uma função contínua, δ pode ser escolhido de forma que (8.16) implique em

$$|\phi(x^*, f^*, t) - \phi(y, g, t)| \leq \varepsilon, \quad t \geq 0,$$

se (x^*, f^*) e (y, g) estiverem em $\Omega_{(x,f)}$ e

$$|x^* - y| + \rho(f^*, g) \leq \delta. \tag{8.18}$$

De (8.17) e (8.18) segue que

$$|\phi(x^*, f^*, t) - \phi(y, g, t)| + \rho(f_t^*, g_t) \leq 2\varepsilon, \quad t \geq 0.$$

Em outras palavras, o movimento $\pi(x^*, f^*, t)$ é uniformemente positivamente Lyapunov estável com respeito a $\Omega_{(x,f)}$ (veja Teorema 6.6) e, assim, $\Omega_{(x,f)}$ contém um conjunto quase periódico minimal (veja Teorema 7.1). As afirmações restantes do teorema seguem facilmente. ∎

Agora, para finalizarmos o trabalho, voltaremos a nossa atenção para a questão de existência de soluções periódicas. Tomando como base o estudo realizado no Capítulo 7, não nos surpreende que um tipo forte de estabilidade seja necessário aqui. Nossa principal ferramenta será o Teorema 7.2, o qual nos fornece uma condição suficiente para que um conjunto ω-limite seja periódico minimal.

Teorema 8.9. *Seja $f \in C(W \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ uma função regular e seja $\pi(x, f, t)$ um movimento positivamente compacto e assintoticamente estável em relação ao conjunto $\Omega_{(x,f)}$. Então, f é assintoticamente periódica. Se (x^*, f^*) pertencer ao conjunto $\Omega_{(x,f)}$, então f_t^* será um movimento periódico e a solução $\phi(x^*, f^*, t)$ será periódica. Além disso, os períodos de f_t^* e de $\phi(x^*, f^*, t)$ serão iguais.*

Demonstração: Pelo Teorema 7.2, sabemos que $\Omega_{(x,f)}$ é um conjunto periódico minimal. Isso significa que $\Omega_{(x,f)} = H((y,g))$, onde (y,g) é um ponto periódico em $\Omega_{(x,f)}$. Com argumentos análogos aos utilizados na demonstração do teorema anterior, concluímos que f é assintoticamente periódica.

Seja $(x^*, f^*) \in \Omega_{(x,f)} = H((y,g))$. Então, existe uma sequência $\{t_n\} \subset \mathbb{R}$ tal que $\pi(y, g, t_n) \to (x^*, f^*)$.

Pela continuidade da aplicação π, temos

$$\pi(y, g, t_n + t) \to \pi(x^*, f^*, t), \quad \text{para todo } t.$$

Suponhamos que $\pi(y, g, t)$ seja um movimento periódico com período τ. Observemos que

$$\pi(y, g, t_n + t + \tau) \to \pi(x^*, f^*, t + \tau), \quad \text{para todo } t.$$

Contudo,

$$\pi(y, g, t_n + t + \tau) = \pi(y, g, t_n + t), \quad \text{para todo } t.$$

Portanto, pela unicidade dos limites, temos

$$\pi(x^*, f^*, t) = \pi(x^*, f^*, t + \tau), \quad \text{para todo } t.$$

Então, o movimento $\pi(x^*, f^*, t)$ é periódico com período τ. Do Lema 8.1 segue que a solução $\phi(x^*, f^*, t)$ é periódica com período τ, assim como o movimento f_t^* também o é, o que completa a prova. ∎

9 Apêndice: Equações diferenciais ordinárias

Neste capítulo complementar, relembraremos alguns conceitos básicos de equações diferenciais ordinárias e exibiremos resultados que foram utilizados no trabalho.

Informamos ao leitor que a referência para este capítulo é o clássico livro de equações diferenciais ordinárias de J. Hale, [1].

9.1 Noções básicas

Sejam t um escalar real e D um conjunto aberto em $\mathbb{R}^{n+1}$. Consideraremos os elementos de D escritos sob a forma (x,t). Seja $f : D \to \mathbb{R}^n$ uma função e seja $x' = dx/dt$.

Definição 9.1. *Diremos que a equação*

$$x'(t) = f(x(t),t), \qquad ou \qquad x' = f(x,t) \tag{9.1}$$

é uma equação diferencial ordinária sobre D.

Agora, apresentaremos o conceito de solução da equação (9.1).

Definição 9.2. *Uma solução da equação* (9.1) *é uma função diferenciável ϕ definida num intervalo $I \subset \mathbb{R}$ tal que $(\phi(t),t) \in D$ e $\phi(t)$ satisfaz a equação* (9.1)*, para $t \in I$.*

Dados $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $t_0 \in \mathbb{R}$, diremos que $\phi(x_0,t_0,t)$, ou simplesmente $\phi(x_0,t)$, é uma solução da equação (9.1) com valor inicial x_0 em t_0, ou uma solução passando por (x_0,t_0), se existir $A > 0$ tal que $\phi(x_0,t_0,t)$ é uma solução da equação (9.1) sobre $[t_0,t_0+A)$ e $\phi(x_0,t_0,t_0) = x_0$.

Um problema de valor inicial x_0 em t_0 consiste em encontrar um intervalo I contendo t_0 e uma solução ϕ de (9.1) que satisfaz $\phi(x_0,t_0,t_0) = x_0$.

Definição 9.3. *Se ϕ for uma solução de* (9.1) *em um intervalo $I = (\alpha,\beta)$ diremos que $\widetilde{\phi}$ será uma continuação de ϕ à direita, se existir um $b > \beta$ tal que $\widetilde{\phi}$ está definida em (α,b) e $\widetilde{\phi}$ coincidir com ϕ em (α,β) e satisfizer a equação* (9.1) *em (α,b). Uma* *solução ϕ será não continuável à direita, se tal continuação não existir, ou seja, se o intervalo (α, β) for o intervalo maximal de existência da solução ϕ.*

De forma similar, definimos continuação à esquerda de uma solução da equação (9.1).

Diremos que $\widetilde{\phi}$ é uma continuação de ϕ se ela for uma continuação de ϕ à direita e à esquerda.

Definição 9.4. *Diremos que uma solução ϕ de* (9.1) *tem a propriedade de existência global se ela estiver definida em toda reta ou admitir uma continuação $\widetilde{\phi}$ definida em toda reta.*

9.2 Resultados

Com as notações e terminologias da seção anterior, enunciaremos resultados sobre existência e unicidade de solução de uma equação diferencial ordinária, os quais estão presentes em [1].

Lema 9.1 ([1], Lema 1.1)**.** *Sejam $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $t_0 \in \mathbb{R}$. Se f for uma função contínua, então encontrar uma solução da equação* (9.1) *passando por (x_0, t_0) será equivalente a resolver a equação integral*

$$x(t_0) = x_0$$

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(x(s), s)ds, \qquad t \geq t_0.$$

O próximo teorema, devido ao matemático italiano Giuseppe Peano, trata da existência local de uma solução da equação diferencial ordinária (9.1). A prova deste resultado é decorrente do Teorema do Ponto Fixo de Schauder e pode ser encontrada em [1], página 15.

Teorema 9.1 (Existência local - [1], Teorema 1.1)**.** *Suponha que D seja um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^{n+1}$ e $f : D \to \mathbb{R}^n$ seja uma função contínua. Se $(x_0, t_0) \in D$, então existirá uma solução local de* (9.1) *por (x_0, t_0).*

Finalizamos esta seção exibindo um resultado que garante a existência de uma única solução local de (9.1) passando por (x_0, t_0).

Teorema 9.2 (Unicidade - [1], Teorema 2.1)**.** *Sejam $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$ um aberto e $(x_0, t_0) \in D$. Se $f : D \to \mathbb{R}^n$ for contínua e $f(x, t)$ for localmente Lipschtziana com relação a x em D, então existirá uma única solução de* (9.1) *passando por (x_0, t_0). Além disso, o domínio E em $\mathbb{R}^{n+2}$ de definição da função $\phi(x_0, t_0, t)$ é aberto e $\phi(x_0, t_0, t)$ é contínua em E.*

Note que, se considerarmos f uma função de classe C^1, o Teorema 9.2 será válido, pois toda função de classe C^1 é contínua e localmente Lipschitziana.

Referências

[1] J. K. Hale, *Ordinary differential equations*. John Wiley & Sons, Inc. 1969.

[2] J. L. Kelley, *General Topology*, Van Nostrand, Princeton, N. J., 1955.

[3] G. R. Sell, Nonautonomous differential equations and topological dynamics. I. The basic theory, *Transactions of the American Mathematical Society*, 127 (2), 1967, 241 - 262.

[4] G. R. Sell, Nonautonomous differential equations and topological dynamics. II. Limiting equations, *Transactions of the American Mathematical Society*, 127 (2), 1967, 263 - 283.

[5] G. R. Sell, *Topological dynamics and ordinary differential equations*. Van Nostrand Reinhold Mathematical Studies, No. 33. Van Nostrand Reinhold Co., London, 1971.