



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Câmpus de Rio Claro

Estudo de estabilidade e bifurcações em sistemas não-lineares

Vinicius Gorla Proto

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação - Mestrado Profissional em Matemática Universitária como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre.

Orientador:

Prof. Adj. Ricardo Egydio de Carvalho

2013

Sumário

1	Introdução	3
2	Sistemas dinâmicos	6
2.1	Retrato de fase	7
2.2	Estabilidade	9
2.2.1	Pontos fixos	9
2.2.2	Ciclo Limite	16
2.3	Estabilidade estrutural: bifurcações	17
3	Mapas	23
3.1	Seções de Poincaré	23
3.2	Estabilidade	23
3.3	Estabilidade estrutural	27
4	O mapa logístico	28
4.1	Introdução	28
4.2	Análise do mapa	29
4.3	Expoentes de Lyapunov	41
5	Crises	44
5.1	Crise de fusão	46
5.2	Crise interior	49
5.3	Crise de fronteira	51
6	Conclusão	53

Capítulo 1

Introdução

Sistemas dinâmicos são sistemas que evoluem com o tempo e são compostos por equações diferenciais (tempo contínuo) ou equações de diferenças (tempo discreto). Sistemas de equações de diferenças são mais comumente chamados de mapas. Para sistemas lineares, podemos encontrar soluções gerais analíticas. Para sistemas não-lineares, a realidade é quase sempre oposta e recorreremos aos métodos numéricos, mas quando estamos interessados na estabilidade destes sistemas, mesmo os métodos numéricos podem não fornecer as respostas tão facilmente.

Os estudos em sistemas dinâmicos atualmente espalham braços por muitas disciplinas como física, matemática, química e biologia, mas seu nascimento se deu no século XVII quando Isaac Newton tentava resolver problemas de mecânica celeste. Munido das leis de movimento e da gravitação universal, explicou as leis de Kepler e resolveu o problema que consistia em determinar, para tempos futuros, a posição e a velocidade de dois corpos (a Terra e o Sol).

Posteriormente, muitos matemáticos se envolveram numa tentativa de estrapolar o método analítico de Newton para o caso de três corpos (Sol, Terra e Lua, por exemplo) mas um estranho e súbito aumento na complexidade do problema fez com que o progresso desta ciência ficasse estático por séculos.

Foi quando, no final do século XIX, Henri Poincaré enfrentou o problema de uma maneira diferente da abordagem quantitativa de Newton ao se preocupar com questões a respeito da estabilidade do sistema solar, por exemplo. Com estas preocupações qualitativas, Poincaré desenvolveu uma poderosa abordagem geométrica que inaugurou uma nova era nos estudos em sistemas dinâmicos e por esse motivo, é considerado o pai desta ciência. Poincaré também foi o primeiro a se deparar com comportamentos aperiódicos que apresentavam dependência sensível às condições iniciais (DCI), que futuramente seriam chamados de caóticos.

Somente na metade do século XX, com o surgimento dos primeiros computadores, tornou-se possível tentar entender o efeito do caos nos sistemas dinâmicos. Foi quando o meteorologista Edward Lorenz tentava prever o clima realizando simulações computacionais e ao reinserir condições iniciais desprezando algumas casas decimais, isto é, condições iniciais próximas, ele teve uma surpresa ao obter resultados muito diferentes dos anteriores. Lorenz encontrou sistemas mais simples, de apenas três dimensões, que também exibiam tal comportamento. De fato, é possível mostrar que este é o

menor número de dimensões para que observemos o caos. Com isso, ele também mostrou que havia uma estrutura no caos, ao representar em um espaço tridimensional as soluções deste sistema, elas tomavam a forma de uma borboleta com a evolução do tempo e após uma palestra ministrada por ele no encontro anual da *American Association for the Advancement of Science* em dezembro de 1972 intitulada “*Predictability: does the flap of a butterfly’s wings in Brazil set off a tornado in Texas?*” o termo “efeito borboleta” tornou-se um sinônimo de caos.

Na prática, a DCI acaba com a previsibilidade dos sistemas pois quando dizemos que duas condições iniciais são muito próximas, podemos estar nos referindo a duas condições iniciais que, na prática, são a mesma devido a imprecisões na coleta dos dados. No caso da previsão do tempo, por exemplo, uma das variáveis é a velocidade do vento e suponha que usemos um dispositivo que a mede com precisão de até quatro casas decimais e obtemos um valor, digamos, $2,0000\text{ m/s}$. Suponha agora que cálculos computacionais revelem resultados muito diferentes para $v_0 = 2,00001$ e para $v'_0 = 2,00004$, que são condições iniciais muito próximas e o mais importante: na prática, não sabemos qual delas é a real devido à imprecisão do dispositivo utilizado e portanto não sabemos qual dos resultados, que são muito diferentes, estamos procurando. A DCI pode ser mensurada a partir dos expoentes de Lyapunov, que quantificam a previsibilidade de um sistema.

Voltando à nossa linha do tempo, alguns anos depois, em 1976, Robert May publica em seu artigo “*Simple Mathematical Models with Very Complicated Dynamics*” um modelo envolvido em dinâmica populacional, o mapa logístico, e mostra que em mapas com apenas uma dimensão já podemos observar comportamento caótico. Outra aplicação dos mapas é o estudo de um sistema dinâmico contínuo a partir das seções de Poincaré do seu espaço de fase.

O mapa logístico é talvez o protótipo mais conhecido na literatura que apresenta dinâmica caótica, o qual é dado pela equação $x_{n+1} = \mu x_n(1 - x_n)$, com $x \in [0, 1]$ e μ sendo o parâmetro de controle. A dinâmica governada por este mapa apresenta pontos fixos, bifurcações, atratores periódicos e caóticos, e crises. Para cada valor inicial x_0 obtém-se uma sequência de valores para x , que descrevem uma trajetória ou órbita. Dependendo do valor do parâmetro μ a dinâmica pode convergir para um ponto, um conjunto finito de pontos ou visitar toda a região acessível para x .

Finalmente, em 1978 o físico matemático Mitchell Feigenbaum apresenta o mais surpreendente dos resultados: existe uma certa universalidade na transição ordem-caos, um padrão respeitado por uma classe inteira de mapas.

Neste sentido, o presente texto trata de sistemas dinâmicos e utiliza o mapa logístico como modelo central para explorar os conceitos envolvidos como bifurcações, caos e crises.

No capítulo 2, é feita uma introdução aos sistemas de equações diferenciais (tempo contínuo), em particular, as ordinárias, nas quais as funções envolvidas tem apenas uma variável independente (usualmente, o tempo). Serão definidas a linearidade de um sistema e sua ordem. Também serão explorados os conceitos de ponto fixo, que é uma solução de equilíbrio para o sistema. Veremos que sua classificação quanto à estabilidade é feita via autovalores para sistemas lineares, como recorrentemente encontramos na literatura, e uma linearização local é proposta para estudo da estabilidade de pontos fixos de sistemas não lineares. O retrato de fase do sistema é uma ferramenta útil na análise geométrica

da estabilidade e também será introduzido neste capítulo. Será apresentado o conceito de ciclo limite, que são soluções de equilíbrio representadas por lugares geométricos unidimensionais no retrato de fase.

Sempre que uma função é controlada por um parâmetro μ e conforme este varia, muda a quantidade e/ou a estabilidade dos pontos fixos do sistema definido por tal função, dizemos que estão ocorrendo bifurcações neste sistema. Na seção 2.3 serão exibidas alguns tipos de bifurcações, entre elas a bifurcação do tipo garfo, que será fundamental na transição ordem-caos do mapa logístico. O diagrama de bifurcações é muito útil para entender o comportamento dinâmico de um sistema e também será introduzido nesta seção.

No capítulo 3, voltamos as atenções aos sistemas dinâmicos com tempo discreto, chamados mapas. Neles, entendemos como o estudo de mapas pode ajudar a entender o comportamento de um sistema dinâmico em tempo contínuo através das seções de Poincaré. Além disso serão feitas as adaptações necessárias nas notações e definições do capítulo 2 e uma nova e poderosa ferramenta, o diagrama de teia, é apresentada para uma abordagem geométrica da estabilidade dos pontos fixos. A figura (3.4) mostra as analogias e as diferentes nomenclaturas usuais para as bifurcações em sistemas contínuos e discretos.

No capítulo 4 é apresentado, de fato, o mapa logístico, que é um sistema unidimensional com domínio no intervalo $[0, 1]$ originalmente utilizado nos estudos em dinâmica populacional. São feitas abordagens analíticas, via diagrama de teia e até gráficas para encontrarmos pontos fixos e $m - \text{ciclos}$, que são atratores periódicos, na tentativa de esboçarmos um diagrama de bifurcações do sistema, mas tais métodos são insuficientes pois a cada bifurcação a complexidade aumenta exponencialmente e logo um método computacional faz-se necessário. Um algoritmo é proposto para a obtenção do diagrama de bifurcações do mapa logístico e com o resultado obtido, podemos perceber que ocorre uma série de duplicações de período (o análogo discreto do tipo garfo) e chamamos este fenômeno de cascata *flip* ou cascata de duplicações de período. Vemos também que a sequência dos valores do parâmetro μ para os quais acontecem as duplicações converge para um valor $\mu_\infty \approx 3,57$ de modo que para $\mu > \mu_\infty$ verificamos a existência de ciclos ruidosos, que vão se fundindo até que para $\mu_c \approx 3,68$ o sistema apresenta um comportamento completamente caótico entremeado por janelas de periodicidade. A maior delas ocorre para $\mu \approx 3,84$. A região dos valores visitados por x vai aumentando conforme $\mu \rightarrow 4$ até que para $\mu = 4$ tal região ocupa todo o intervalo de definição do mapa. Os expoentes de Lyapunov são apresentados como ferramenta na identificação de caos por mensurar a DCI e é exibido um diagrama de expoentes, que quando confrontado com o diagrama de bifurcações do mapa, deixa clara a relação entre ambos.

No capítulo 5 identificamos uma crise como sendo a colisão entre um atrator caótico e os ramos instáveis gerados em uma bifurcação. As crises foram primeiramente caracterizadas por Celso Grebogi[6] e de acordo com Ananthkrishnan[1], hoje reconhecemos três tipos de crises e todos estão presentes no mapa logístico. O objetivo deste trabalho é entender suas causas e efeitos e veremos que toda crise está associada a uma bifurcação e o tipo desta determina a classificação da crise. Observamos, também, um padrão que rege as crises do sistema e uma maneira computacionalmente simples de identificá-las.

Capítulo 2

Sistemas dinâmicos

Uma equação diferencial é uma equação em que a variável dependente é uma função e tem-se o problema de determiná-la de modo a satisfazer alguma relação com suas derivadas. Em particular, uma equação diferencial é ordinária - e podemos nos referir apenas por EDO - quando tais funções forem reais com apenas uma variável real. Neste texto, usaremos x para variáveis dependentes e t para as independentes uma vez que EDOs são frequentemente utilizadas para modelarmos problemas físicos em função do tempo.

Em geral, uma EDO de ordem n tem a forma:

$$x^{(n)} = f\left(t, x, x^{(1)}, \dots, x^{(n-1)}\right),$$

onde $x^{(n)}$ é a n -ésima derivada de $x = x(t)$ em relação a t e afim de simplificar as notações, usaremos \dot{x} e \ddot{x} para as derivadas de primeira e segunda ordens.

Se f não depender explicitamente de t , a EDO é autônoma e caso contrário é não-autônoma. Dizemos que a EDO é linear se f for linear nas variáveis $x, x^{(1)}, \dots, x^{(n-1)}$ ou então ela é não-linear.

Uma EDO autônoma de ordem $n \geq 2$ pode ser transformada em um sistema de n equações de primeira ordem ($n = 1$) como no exemplo que segue:

Considere a EDO de segunda ordem

$$ml^2\ddot{\theta} + mgl \sin \theta = 0,$$

que descreve o movimento de um pêndulo simples, onde $\theta = \theta(t)$ é o ângulo entre o eixo do pêndulo e a vertical, l é o comprimento da haste rígida de massa desprezível e m é a massa fixada na extremidade móvel como na figura (2.1).

Fazendo $\dot{\theta} = \varphi$ temos o sistema de duas equações de primeira ordem

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= \varphi \\ \dot{\varphi} &= \ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta.\end{aligned}\tag{2.1}$$

As classificações quanto à linearidade para sistemas são análogas às que apresentamos para equações.

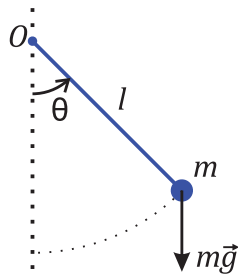


Figura 2.1: Pêndulo simples.

Observamos que uma EDO não-autônoma de ordem $n \geq 2$ pode ser transformada em um sistema autônomo introduzindo-se uma nova variável com a consequência de adicionarmos uma dimensão ao sistema, por exemplo, na equação do oscilador hamônico amortecido:

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t),$$

basta fazer $\dot{x} = y$ e $z = t$ para obter o sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= \frac{F_0}{m} \cos(\omega z) - \gamma y - \omega_0^2 x \\ \dot{z} &= 1. \end{aligned}$$

Note que a equação não-autônoma de segunda ordem ($n = 2$) gerou um sistema autônomo tridimensional ($n + 1 = 3$) de equações de primeira ordem.

Frequentemente denotaremos um sistema autônomo de n EDOs de primeira ordem

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

por $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, onde $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\dot{\mathbf{x}} = (\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n)$ e $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_n(\mathbf{x}))$.

2.1 Retrato de fase

Em geral, resolver analiticamente um sistema de EDOs não é possível (principalmente os não lineares) ou a solução é tão complicada que torna inviável sua interpretação.

Existem algumas técnicas para entender o comportamento qualitativo das soluções sem nem mesmo conhecê-las e o objetivo desta seção é apresentar uma delas: o retrato de fase. Façamos isso através de um exemplo. Para tanto, retomemos o sistema (2.1), originado da equação do pêndulo simples.

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \varphi \\ \dot{\varphi} = \ddot{\theta} &= -\frac{g}{l} \sin \theta. \end{aligned}$$

Intuitivamente, esperamos quatro tipos fundamentais de soluções:

1. O pêndulo pode ficar parado, com $\theta = 0$.
2. O pêndulo pode ser “equilibrado” na posição vertical com $\theta = \pi$.
3. O pêndulo pode ser iniciado com uma velocidade $\dot{\theta}$ baixa e fazer o tradicional movimento de vai e vem em torno do eixo vertical.
4. O pêndulo pode ser iniciado com uma velocidade $\dot{\theta}$ alta e girar em torno do ponto de apoio.

Consideremos o *espaço de fase* bidimensional - *plano de fase* - $(\theta, \dot{\theta})$. O *diagrama de fase* ou *retrato de fase* é constituído pelas trajetórias obtidas analisando a variação

$$\frac{d\theta}{d\dot{\theta}} = \frac{\frac{d\theta}{dt}}{\frac{d\dot{\theta}}{dt}} = \frac{\dot{\theta}}{\ddot{\theta}} = \frac{\dot{\theta}}{-\frac{g}{l} \sin \theta} \Rightarrow -\frac{g}{l} \sin \theta \dot{\theta} = \dot{\theta} \dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta}^2 - \frac{2g}{l} \cos \theta = C ,$$

onde C é uma constante. Note que a integral foi calculada em relação à variável t .

Para cada valor da constante C , obtemos uma curva $h_c(\theta, \dot{\theta})$ diferente no plano de fase.

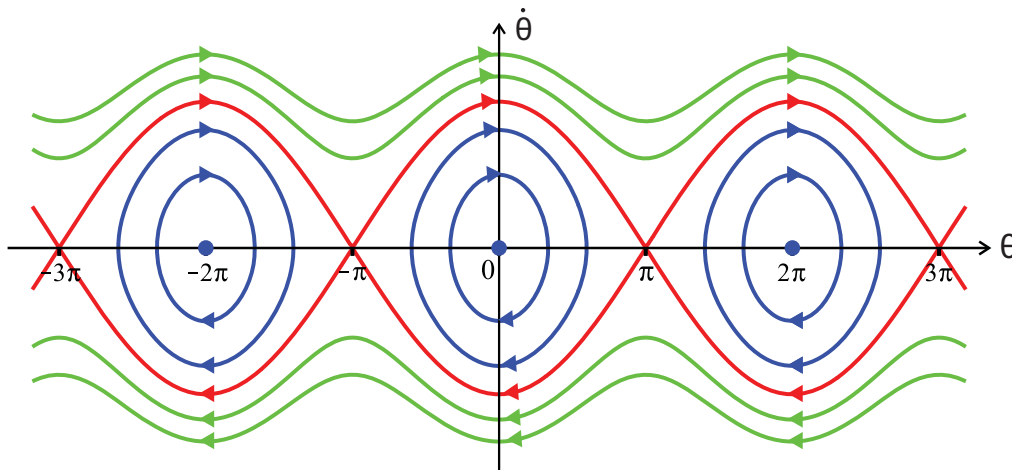


Figura 2.2: Retrato de fase para a equação do pêndulo - sistema (2.1).

Um dado par de valores $(\theta, \dot{\theta})$ é um *estado do sistema*. O retrato de fase mostra como esse estado evolui à medida que o tempo passa. As curvas da figura (2.2) são chamadas *trajetórias de fase* ou *linhas de fluxo* e representam a evolução do estado em que o sistema se encontra para cada possível solução. A constante C está relacionada com a energia total do sistema, que suporemos constante (e neste caso o sistema é dito *conservativo*). As setas indicam o sentido da evolução temporal e podemos determiná-las observando que quando $\dot{\theta}$ é positivo (negativo), θ cresce (decrece) com o tempo. Todas as características da dinâmica do pêndulo simples, assim como todas as soluções que previmos anteriormente estão presentes no retrato de fase.

A origem do plano de fase corresponde à solução trivial em que o pêndulo está parado ($\dot{\theta} = 0$) na vertical ($\theta = 0$) e abaixo do ponto de apoio. Este ponto é chamado de *ponto de equilíbrio* do sistema.

Os pontos em que as trajetórias intersectam o eixo horizontal também são pontos de equilíbrio pois representam a solução em que o pêndulo fica parado ($\dot{\theta} = 0$) na vertical ($\theta = \pi$), mas agora acima do ponto de apoio.

As trajetórias fechadas correspondem às possíveis soluções periódicas da equação representando o movimento de vai e vem do pêndulo.

Finalmente, as trajetórias onduladas representam as soluções em que o pêndulo gira em torno do ponto de apoio (θ só aumenta). Note que em todas elas, $\dot{\theta}$ é grande (e dizemos que as trajetórias tem grande *amplitude*), como havíamos previsto.

As curvas que separam o retrato de fase em regiões onde as soluções tem comportamentos qualitativamente diferentes são ditas *separatrizes*. São as curvas destacadas em vermelho na figura (2.2), obtidas com $C = 2g/l$.

2.2 Estabilidade

Neste texto apresentaremos dois tipos de estabilidade. Um deles se refere aos tipos de equilíbrio presentes no sistema e o outro, chamado de estabilidade estrutural, trata da robustez do retrato de fase do mesmo. O objetivo desta seção é abordar o primeiro deles.

2.2.1 Pontos fixos

Sejam f e g funções de classe C^2 e o sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= g(x, y).\end{aligned}\tag{2.2}$$

Chamamos de *ponto fixo*, ou ainda *ponto de equilíbrio* ou *ponto crítico* do sistema, todo ponto $P^* = (x^*, y^*)$ tal que

$$f(x^*, y^*) = g(x^*, y^*) = 0.\tag{2.3}$$

Note que a condição (2.3) remete à $\dot{x} = \dot{y} = 0$, ou seja, os pontos fixos do sistema correspondem às soluções constantes (também chamadas de soluções de equilíbrio) e são representados pelas trajetórias pontuais do retrato de fase como os pontos $(k\pi, 0), k \in \mathbb{Z}$ da figura (2.2).

Podemos classificar um ponto fixo quanto à sua estabilidade. Dizemos que P^* é *assintoticamente estável* se toda solução suficientemente próxima de P^* tende a P^* se o tempo aumenta. Seria esse o caso da origem do plano de fase de um sistema originado da equação de um pêndulo com algum tipo de amortecimento: Mesmo que o pêndulo fosse tirado da situação (solução) de equilíbrio representada pela origem do plano de fase ($\theta = 0, \dot{\theta} = 0$), esta nova solução tenderia à origem conforme o aumento do tempo, isto é, devido ao amortecimento o pêndulo voltaria à situação de equilíbrio. Pontos fixos assintoticamente estáveis são também chamados de *sorvedouros* ou *atratores*. O conjunto de todas as soluções que convergem para um atrator compõem sua *bacia de atração*.

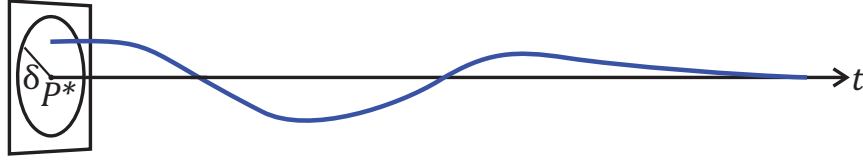


Figura 2.3: Ponto fixo assintoticamente estável: soluções suficientemente próximas tendem a ficar cada vez mais próximas com o passar do tempo.

Por outro lado, dizemos que P^* é apenas *estável* se soluções próximas a P^* , permanecem próximas a P^* com o aumento do tempo. É o caso das soluções representadas por todos os pontos $(2k\pi, 0), k \in \mathbb{Z}$ da figura (2.2): Note que as soluções próximas à estas são representadas por curvas fechadas, ou seja, permanecem próximas. Estes pontos também são referidos por pontos fixos de *estabilidade neutra* ou ainda *estabilidade de Lyapunov*.

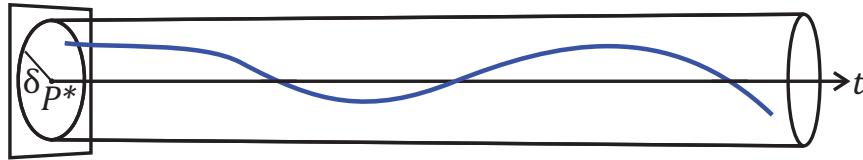


Figura 2.4: Ponto fixo estável: soluções inicialmente próximas permanecem próximas com o passar do tempo.

Finalmente, dizemos que P^* é *instável* se soluções próximas podem se distanciar com o passar do tempo. Por exemplo, as soluções representadas pelos pontos $(\theta = (2k + 1)\pi, \dot{\theta} = 0), k \in \mathbb{Z}$ da figura (2.2): com o pêndulo equilibrado na posição vertical e acima do ponto de apoio, uma leve perturbação pode fazer com que o mesmo jamais volte àquele estado. Por este motivo, também chamamos tais pontos de *repulsores*.

Apresentemos, enfim, as definições formais de ponto fixo e estabilidade para um sistema autônomo n -dimensional

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (2.4)$$

onde $\dot{\mathbf{x}} = [x_1 \dots x_n]^t$, $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = [f_1(x_1, \dots, x_n) \dots f_n(x_1, \dots, x_n)]^t$ e as f_i são todas de classe C^2 .

A seguir, a notação $\|\mathbf{x}\|$ será usada para indicar o comprimento do vetor \mathbf{x} .

Definição 2.1. Considere o sistema autônomo n -dimensional (2.4). Dizemos que um ponto \mathbf{x}^* é um **ponto fixo** se satisfizer $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$.

Definição 2.2. Dizemos que um ponto fixo \mathbf{x}^* de (2.4) é **estável** se para um dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que toda solução $\mathbf{x} = \phi(t)$ de (2.4) que satisfaz $\|\phi(0) - \mathbf{x}^*\| < \delta$ existe para todo $t > 0$ e $\|\phi(t) - \mathbf{x}^*\| < \varepsilon, \forall t > 0$.

Definição 2.3. Um ponto fixo \mathbf{x}^* de (2.4) é **assintoticamente estável** se for estável e se existir $\delta_0 > 0$, com $0 < \delta_0 < \delta$ tal que se uma solução $\phi(t)$ satisfaz $\|\phi(0) - \mathbf{x}^*\| < \delta_0$, então

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t) = \mathbf{x}^*.$$

Definição 2.4. Um ponto fixo \mathbf{x}^* de (2.4) é **instável** se não for estável.

É importante ressaltar aqui o caráter local destas definições. Apesar da existência de atratores globais, o objeto de estudo geralmente é a vizinhança de um ponto fixo.

Classificação dos pontos fixos para o caso bidimensional

Começemos classificando os pontos fixos de um sistema linear.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{x}, \end{aligned}$$

onde \mathbf{J} é a matriz Jacobiana do sistema (2.4). Claramente, a origem é um ponto de equilíbrio deste sistema e a solução geral é

$$\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t} \mathbf{v},$$

em que \mathbf{v} é um vetor constante.

Substituindo-a no sistema (2.4) obtemos

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}\mathbf{x} \Rightarrow \lambda e^{\lambda t} \mathbf{v} = \mathbf{J}e^{\lambda t} \mathbf{v} \Rightarrow \lambda \mathbf{v} = \mathbf{J}\mathbf{v},$$

ou seja,

$$(\mathbf{J} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{v} = 0, \tag{2.5}$$

onde \mathbf{I} é a matriz identidade. Para que o sistema homogêneo (2.5) tenha solução diferente da trivial, é preciso que o determinante da matriz dos coeficientes seja nulo, ou seja,

$$\det(\mathbf{J} - \lambda \mathbf{I}) = 0. \tag{2.6}$$

As condições (2.5) e (2.6) acima significam que λ é um autovalor da matriz \mathbf{J} e \mathbf{v} é o autovetor associado.

A equação (2.6) chama-se *equação característica* do sistema e possui n soluções complexas da forma $\lambda_i = \Re(\lambda_i) + i\Im(\lambda_i)$, onde $\Re(\lambda_i)$ e $\Im(\lambda_i)$ representam as partes real e imaginária de λ_i . Uma solução qualquer de $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}\mathbf{x}$ é dada pela combinação linear

$$\mathbf{x}(t) = \sum_i c_i e^{\Re(\lambda_i)t} \cdot e^{i\Im(\lambda_i)t} \mathbf{v}_i,$$

onde cada \mathbf{v}_i é o autovetor associado à cada λ_i . Mas como o termo que depende de $\Im(\lambda_i)$ é limitado, são os termos dependentes de $\Re(\lambda_i)$ que determinarão o comportamento da solução para $t \rightarrow \infty$. Por exemplo, se todos os $\Re(\lambda_i)$ forem negativos, a origem será assintoticamente estável, já se todos forem nulos a origem será apenas estável. Se apenas um dos $\Re(\lambda_i)$ for positivo a origem é instável.

A quantidade de combinações possíveis para a análise feita acima cresce drasticamente com o aumento de n , por este motivo analisemos o caso $n = 2$, no qual qualquer solução de $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}\mathbf{x}$ pode ser escrita como

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2.$$

1. λ_1 e λ_2 reais distintos com $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$.

Se $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$, P^* é assintoticamente estável já que $\mathbf{x}(t) \rightarrow (0,0), t \rightarrow \infty$. À medida que o tempo aumenta, o termo $c_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2$ domina e a solução $\mathbf{x}(t)$ se aproxima da direção de \mathbf{v}_2 , portanto o retrato de fase é composto por curvas tangentes à \mathbf{v}_2 e paralelas à \mathbf{v}_1 , exceto por uma delas, que coincide com a assíntota de \mathbf{v}_1 , pois representa a solução na qual $c_2 = 0$. De fato, sendo $c_2 \neq 0$ e escrevendo a solução geral na forma $\mathbf{x}(t) = e^{\lambda_2 t} [c_1 e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2]$, vemos que para $t \rightarrow \infty$ o termo $c_1 e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} \mathbf{v}_1$ é desprezível se comparado com $c_2 \mathbf{v}_2$, já que $\lambda_1 - \lambda_2 < 0$.

Neste caso, o ponto de equilíbrio P^* assintoticamente estável é denominado *nó*.

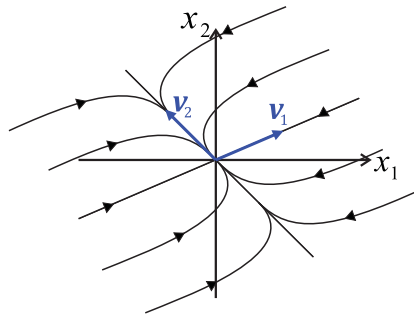


Figura 2.5: *Nó estável*. O nó instável teria as flechas invertidas.

Analogamente, se $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$, P^* é instável e a única diferença no retrato de fase é o sentido das flechas.

2. λ_1 e λ_2 reais com $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$.

Esta situação exige que consideremos dois casos: ou existem dois autovetores linearmente independentes associados à λ , ou existe apenas um.

Caso existam dois, uma solução qualquer tem a forma $\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda t} \mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda t} \mathbf{v}_2 = (c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2) e^{\lambda t}$ e cada solução (determinada por cada possível par de valores c_1 e c_2) converge para a origem considerando $\lambda < 0$ (e diverge para $\lambda > 0$) sobre a assíntota de $c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2$. Logo, o retrato de fase é um feixe de retas que passam pela origem e por isso a origem é assintoticamente estável (instável) e chama-se *ponto estrela* ou *nó próprio*.

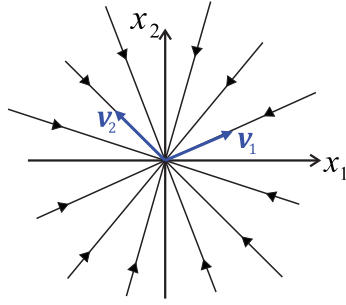


Figura 2.6: *Nó próprio* ou *ponto estrela* para $\lambda < 0$. Se $\lambda > 0$, as flechas invertem o sentido.

Para o caso em que só existe um autovetor \mathbf{v} associado à λ , devemos considerar o autovetor generalizado \mathbf{u} e qualquer solução tem a forma $\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda t} \mathbf{v} + c_2 (t e^{\lambda t} \mathbf{v} + e^{\lambda t} \mathbf{u})$. O termo dominante aqui é $c_2 t e^{\lambda t} \mathbf{v}$. Assim, a solução tende à origem se $\lambda < 0$ (e diverge caso contrário) tangenciando a direção de \mathbf{v} se $t \rightarrow \infty$ e torna-se paralelo ao mesmo se $t \rightarrow -\infty$. Neste caso denominamos a origem um *nó impróprio* ou *nó degenerado* e é assintoticamente estável para $\lambda < 0$ (e instável para $\lambda > 0$).

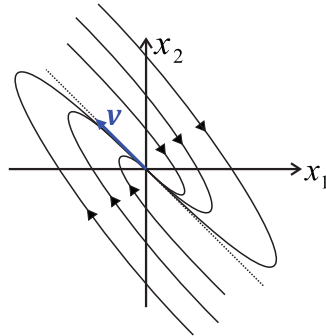


Figura 2.7: *Nó impróprio* ou *nó degenerado* estável.

3. λ_1 e λ_2 reais com $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$.

Suponha, sem perda de generalidade, $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$. Sendo assim, o termo dominante é $c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}$ e o único jeito da solução convergir para a origem é se $c_1 = 0$ e neste caso a solução é representada no retrato de fase por uma reta sobre \mathbf{v}_2 . Para $c_2 = 0$, a diferença é que a reta coincide com a suporte de \mathbf{v}_1 e que agora a solução diverge. Qualquer outro par de valores c_1 e c_2 geram uma solução divergente por conta do termo dominante com $\lambda_1 > 0$ e que são representadas no retrato de fase por curvas assintóticas à \mathbf{v}_1 para $t \rightarrow \infty$ e à \mathbf{v}_2 para $t \rightarrow -\infty$. Por este motivo, a origem é instável e recebe o nome *ponto de sela*.

4. λ_1 e λ_2 complexos conjugados. Neste caso, consideremos $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ e $\mathbf{v}_{1,2} = \mathbf{a} \pm \mathbf{b}i$.

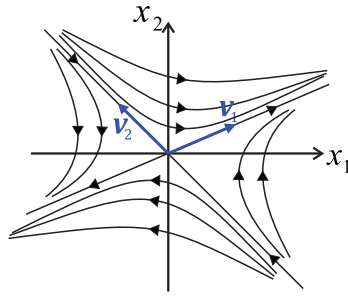


Figura 2.8: *Ponto de sela.*

Pode-se demonstrar que qualquer solução tem a forma

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\alpha t} (\mathbf{a} \cos \beta t - \mathbf{b} \sin \beta t) + c_2 e^{\alpha t} (\mathbf{a} \sin \beta t + \mathbf{b} \cos \beta t).$$

Diante disso, vemos que se $\alpha = 0$, então toda solução será periódica e, por isso, representadas por curvas fechadas no retrato de fase. Neste caso, a origem é estável, mas não assintoticamente, e a chamamos de *centro*.

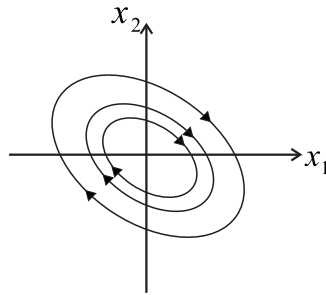


Figura 2.9: *Centro*

Por outro lado, se $\alpha < 0$ ($\alpha > 0$), então a solução converge (diverge) para a origem com o passar do tempo e por isso ela é assintoticamente estável (instável) mas a parte trigonométrica, que é limitada e portanto não interfere na convergência, mantém a característica circular das trajetórias no retrato de fase, ou seja, as soluções são representadas por espirais e a origem é um *ponto espiral* ou ainda *foco* ou *sorvedouro*.

Finalmente, observamos que nos casos em que $\Re(\lambda) = 0$ chamamos os pontos fixos de *elípticos* ou *degenerados*.

Existe, na literatura, uma outra referência¹ em relação às nomenclaturas de alguns pontos fixos. Os *nós* (assintoticamente estáveis ou instáveis) podem ser chamados de *nodos* e nestes casos, a denominação “nó” pode ser utilizada para fazer menção aos *centros*, que são estáveis (porém não assintoticamente).

¹ALMEIDA, A. M. O. Sistemas Hamiltonianos: Caos e Quantização, Unicamp, 1987.

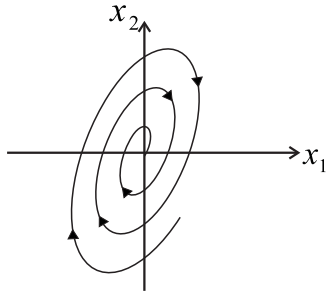


Figura 2.10: *Foco* para $\alpha < 0$. No caso $\alpha > 0$ o sentido das flechas é invertido.

Em resumo, apresentamos o seguinte diagrama - figura (2.11) - no qual $\Delta = \tau^2 - 4\delta$, onde τ e δ são, respectivamente, o traço e o determinante da matriz Jacobiana do sistema de ordem 2:

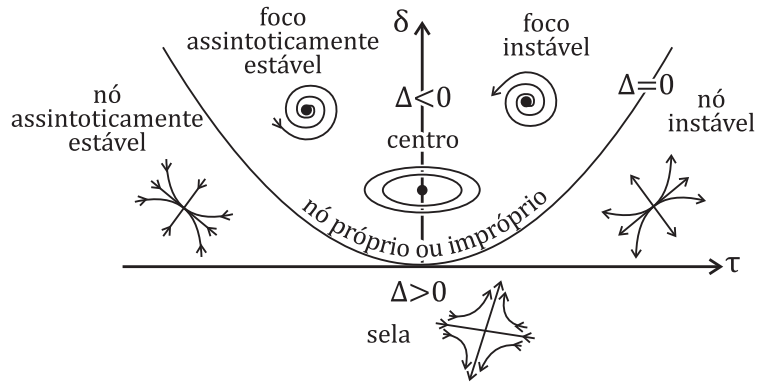


Figura 2.11: Diagrama da classificação do ponto fixo $(0, 0)$, onde $\delta = \det(\mathbf{J})$ e $\tau = \tau(\mathbf{J})$ é o traço da matriz \mathbf{J} .

Passaremos agora para o caso em que o sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ não é necessariamente linear. A idéia aqui é usar as classificações já discutidas para entender o comportamento do retrato de fase na vizinhança de cada ponto fixo através do estudo do sistema linearizado nestas regiões. No desenvolvimento a seguir, consideraremos o caso bidimensional apenas para simplificar as notações pois a menos disso, a situação é análoga.

Considere o sistema (2.2)

$$\dot{x} = f(x, y),$$

$$\dot{y} = g(x, y),$$

onde f e g são de classe C^2 e para o qual existe um ponto fixo $P^* = (x^*, y^*)$, isto é,

$$f(x^*, y^*) = g(x^*, y^*) = 0,$$

e considere a mudança de variáveis

$$u = x - x^* \quad \text{e} \quad v = y - y^*.$$

Considere a expansão em série de Taylor da solução em torno do ponto fixo

$$\begin{aligned}
\dot{u} &= \dot{x} \\
&= f(x^* + u, y^* + v) \\
&= f(x^*, y^*) + \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*)u + \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*)v + O(u^2, v^2, uv) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*)u + \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*)v + O(u^2, v^2, uv).
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\dot{v} = \frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*)u + \frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*)v + O(u^2, v^2, uv).$$

Como queremos analisar uma vizinhança de P^* , podemos tomar u e v suficientemente pequenos para que possamos desprezar o termo quadrático $O(u^2, v^2, uv)$. De onde podemos escrever

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x^*, y^*) & \frac{\partial f}{\partial y}(x^*, y^*) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x^*, y^*) & \frac{\partial g}{\partial y}(x^*, y^*) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

Ou seja, o problema de investigar o comportamento de soluções na vizinhança de P^* , que é um ponto fixo do sistema não linear (2.2) nas variáveis x e y torna-se o de classificar a origem como ponto fixo de um sistema linear, a saber, o sistema (2.7) nas variáveis u e v . É possível demonstrar² que a classificação de um ponto fixo hiperbólico não é afetada pela linearização. Todos os pontos fixos *marginais* ou *de borda* como os elípticos (aqueles em que $\Re(\lambda) = 0$), os nós próprios e impróprios ($\Delta = 0$ na figura 2.11) e os *pontos fixos não-isolados* (sobre a reta $\delta = 0$ na figura 2.11) são estruturalmente instáveis e os resultados obtidos pela linearização podem não ser verdadeiros no sistema não-linear.

2.2.2 Ciclo Limite

Até aqui, vimos que um sistema bidimensional pode admitir uma solução estacionária, representada por um ponto (0-dimensional) no retrato de fase, o qual chamamos de ponto fixo, e as trajetórias próximas a este podem se aproximar ou se afastar com o passar do tempo. Sabemos também que estes sistemas podem admitir soluções periódicas, representadas por uma curva fechada no retrato de fase. A novidade desta seção é que estas curvas (unidimensionais) podem atrair ou repelir trajetórias próximas. A palavra “ponto” da nomenclatura “ponto fixo” pode passar a falsa impressão de que necessariamente trata-se de um conjunto unitário e, por isso usaremos, sempre que necessário, o termo atrator (ou repulsor) para uma dimensão qualquer. Atratores unidimensionais são chamados ciclos limites.

Um cuidado que devemos tomar aqui é não confundir um ciclo limite com uma solução periódica qualquer: ambos são representados por curvas fechadas no retrato de fase, mas no caso dos ciclos limite as trajetórias próximas são todas espirais e seus sentidos (aproximando ou afastando do ciclo) dependem da estabilidade dos mesmos. Veja que não aparecem ciclos limites na figura (2.2).

²O Teorema de Grobman-Hartman pode ser encontrado com detalhes de sua demonstração e aplicações em [11].

Um exemplo clássico da presença de ciclo limite é a equação de *van der Pol*, que é muito utilizada em problemas físicos envolvendo eletricidade

$$\ddot{x} - \mu(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0,$$

que pode ser transformada no sistema

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= \mu(1 - x^2)y - x. \end{aligned} \tag{2.8}$$

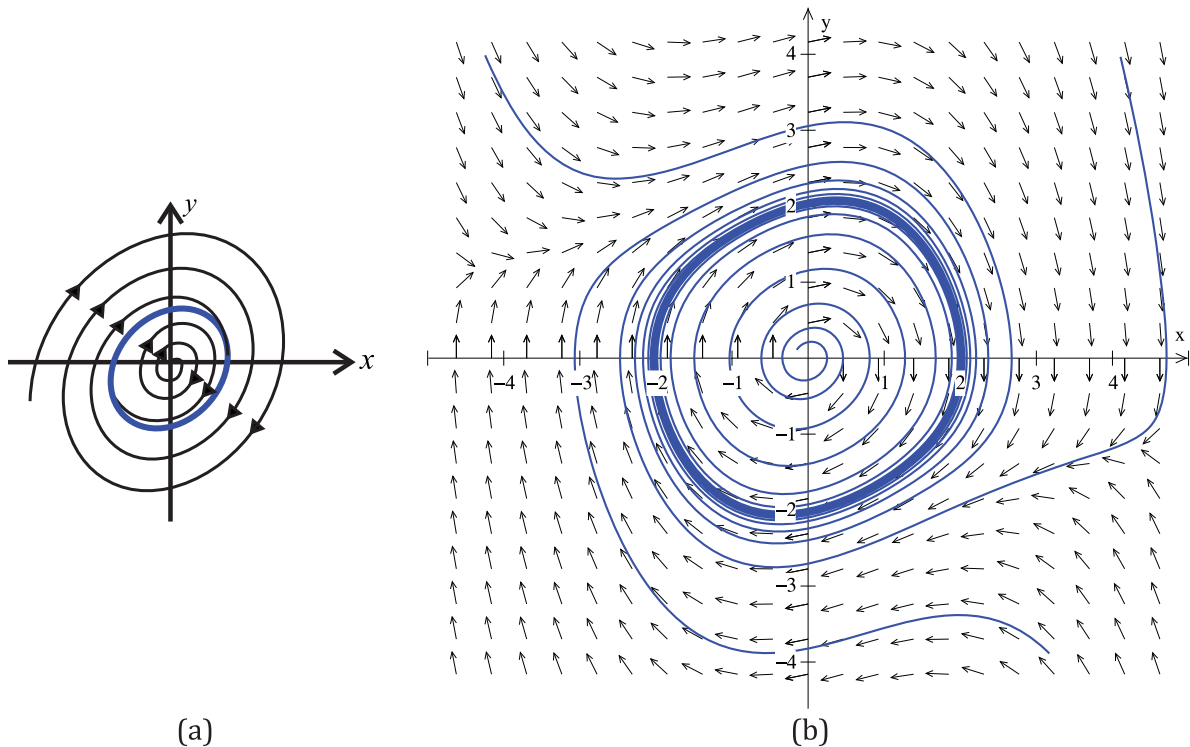


Figura 2.12: (a) Ciclo limite estável. Para o caso instável o sentido das flechas é invertido. (b) Retrato de fase para a equação de van der Pol - sistema (2.8) gerado por computador (software livre Winplot - versão 1.52) para $\mu = 0,2$. A curva mais espessa é um ciclo limite.

As classificações para um ciclo limite podem ser: *estável* se trajetórias inicialmente próximas ficam cada vez mais próximas; *instável* se trajetórias inicialmente próximas se afastam; ou *meio estáveis*, quando as trajetórias interiores (exteriores) são atraídas e as exteriores (interiores) são repelidas.

2.3 Estabilidade estrutural: bifurcações

O outro conceito de estabilidade, chamado *estabilidade estrutural*, não deve ser confundido com o primeiro, que classifica os pontos fixos de acordo com o comportamento das trajetórias de fase na vizinhança de um dado ponto fixo do sistema.

Dizemos que um sistema é *estruturalmente estável* se uma pequena perturbação nas equações que o definem não muda qualitativamente o retrato de fase. Por exemplo, no sistema (2.1)

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= \varphi \\ \dot{\varphi} &= -\frac{g}{l} \sin \theta,\end{aligned}$$

originado da equação do pêndulo simples, g e l são parâmetros de controle e a pergunta é: se adicionarmos perturbações às equações que definem este sistema, o retrato de fase continua qualitativamente como o da figura (2.2)? Se a resposta for afirmativa, diremos que o sistema (2.1) é estruturalmente estável.

Quando perturbamos de alguma maneira as equações de um sistema, seja variando um parâmetro ou adicionando um termo, podemos alterar tanto a posição dos atratores quanto suas características qualitativas. Por exemplo, se existe um determinado valor de $g = g_c$ para o qual o sistema (2.1) apresenta retratos de fase qualitativamente diferentes para $g < g_c$ e para $g > g_c$, dizemos que houve uma *bifurcação do sistema* e g_c é um *ponto de bifurcação*.

Um conceito parecido com o de ponto de bifurcação é o de *ponto de retorno*[4], que é o valor do parâmetro a partir do qual passa a (ou deixa de) existir solução para uma determinada equação. Por exemplo, o ponto $(x = 0, \mu = 0)$ é um ponto de retorno para a equação escalar $x^2 = \mu$: para $\mu < 0$ não existe solução e para $\mu \geq 0$ passa a existir.

Exibiremos agora alguns tipos de bifurcações envolvendo o aparecimento (ou desaparecimento) de pontos fixos (atratores 0-dimensionais) ou a mudança de suas características qualitativas: estabilidade, classificação ou até mesmo sua dimensão.

Durante as discussões, consideremos o sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f_\mu(x, y) \\ \dot{y} &= g_\mu(x, y),\end{aligned}$$

onde f_μ e g_μ são funções controladas por um parâmetro μ e μ_c será o ponto de bifurcação. Sempre que analisarmos $\mu < \mu_c$ e depois $\mu > \mu_c$, considere que a situação poderia ser invertida, o importante é notar que a mudança de comportamento ocorre em $\mu = \mu_c$.

1. Bifurcação sela-nó

Ocorre quando o sistema não tem nenhum ponto fixo para $\mu < \mu_c$, mas para $\mu = \mu_c$ aparece um ponto fixo elíptico e para $\mu > \mu_c$ temos dois pontos fixos: um nó e um ponto de sela.

Por exemplo, considere o sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \mu - x^2 \\ \dot{y} &= -y,\end{aligned}$$

O retrato de fase (gerado por computador³) mostra que para $\mu < 0$ não existem pontos fixos, para $\mu = 0$ existe um ponto fixo elíptico e para $\mu > 0$ temos dois pontos fixos: um nó

³Para todos os retratos de fase gerados por computador neste trabalho foram utilizados o software livre Winplot (versão 1.52).

assintoticamente estável e um ponto de sela, que é instável. Por isso $\mu_c = 0$ é o ponto de bifurcação, que neste caso coincide com o ponto de retorno, mas nem sempre isso será verdade. Estes resultados podem ser obtidos analiticamente resolvendo $\dot{x} = 0$ e $\dot{y} = 0$ para encontrar os pontos fixos e, em seguida, linearizando o sistema em torno de cada um deles, como sugerido ao final da seção 2.2.1. A análise numérica só será necessária para o ponto fixo elíptico que aparece em $\mu = 0$, pois como sabemos, a referida técnica da linearização em torno dos pontos fixos nada garante nesse caso.

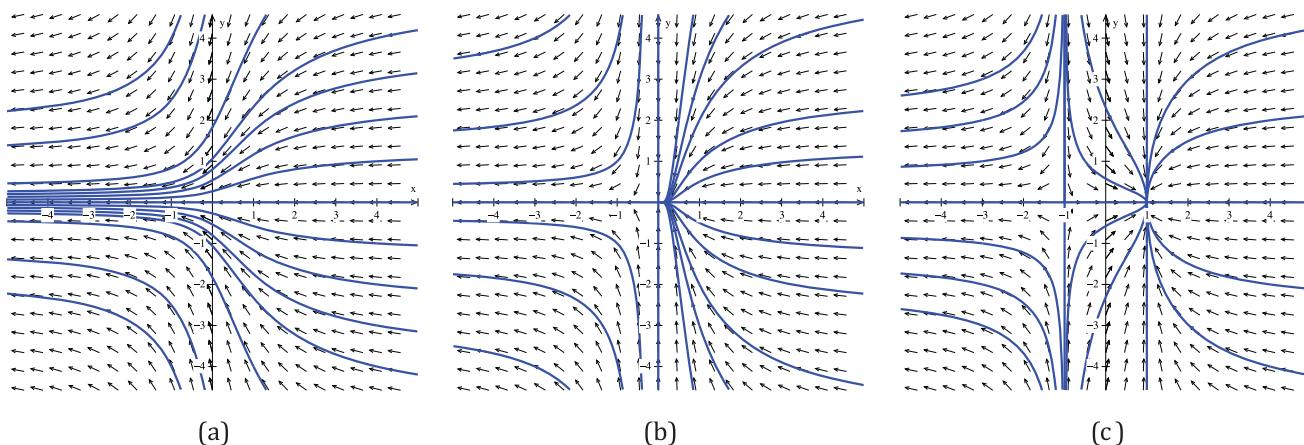


Figura 2.13: Bifurcação sela-nó: (a) $\mu = -1$, (b) $\mu_c = 0$ e (c) $\mu = 1$.

Quando tratamos de bifurcações, é usual e muito ilustrativo esboçarmos um diagrama dos pontos fixos em função dos valores de μ . Veja a figura (2.14), a qual chamamos de *diagrama de bifurcações*.

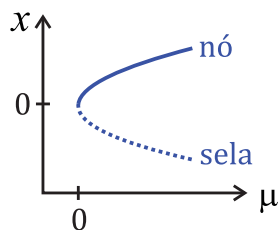


Figura 2.14: Diagrama de uma bifurcação do tipo sela-nó.

Neste tipo de representação, traços contínuos indicam a presença de pontos fixos estáveis enquanto que os pontilhados representam os instáveis.

2. Bifurcação transcritical

Quando ocorre este tipo de bifurcação, dois pontos fixos existem no sistema para $\mu < \mu_c$ e vão se aproximando um do outro conforme $\mu \rightarrow \mu_c$ até colapsarem em um só ponto fixo elíptico em $\mu = \mu_c$, depois se separam novamente em dois para $\mu > \mu_c$ e se afastam um do outro conforme μ se afasta de μ_c .

Por exemplo, veja na figura (2.15), os retratos de fase do sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \mu x - x^2 \\ \dot{y} &= -y.\end{aligned}$$

Para $\mu < 0$, existem dois pontos fixos: a origem, nó estável, e o ponto de sela $(\mu, 0)$. Para $\mu = 0$, apenas a origem é ponto fixo, mas agora elíptico e para $\mu > 0$ temos novamente os dois pontos fixos $(0, 0)$ e $(\mu, 0)$, mas com as estabilidades alteradas.

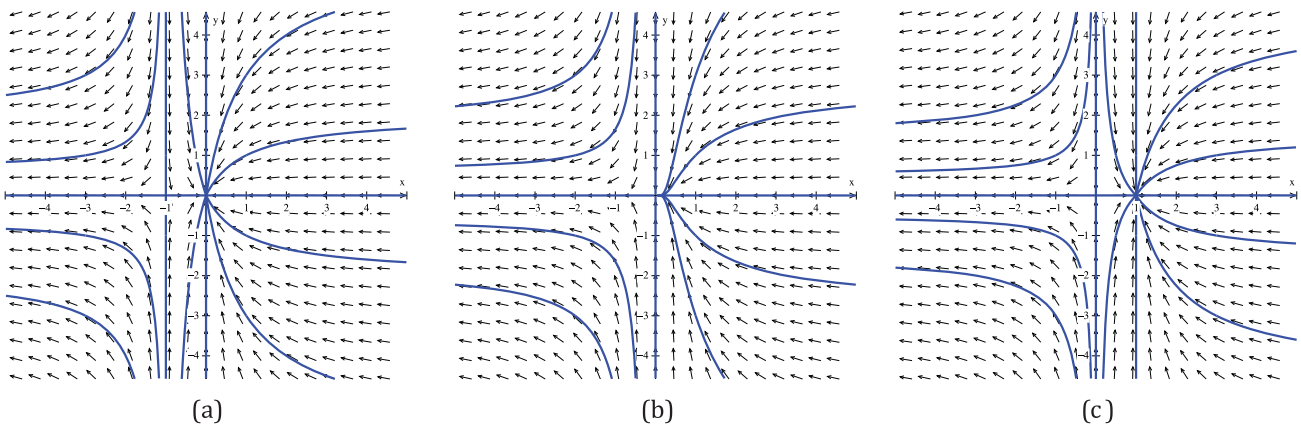


Figura 2.15: Bifurcação transcritical: (a) $\mu = -1$, (b) $\mu_c = 0$ e (c) $\mu = 1$.

A figura (2.16) mostra o diagrama de bifurcações para o tipo transcritical.

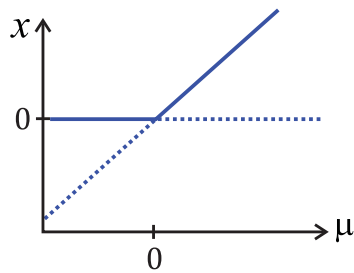


Figura 2.16: Bifurcação transcritical.

3. Bifurcação do tipo garfo

Este tipo de bifurcação pode ser dividido em dois subtipos que ocorrem com frequência em problemas que apresentam alguma simetria e por isso os pontos fixos aparecem (e desaparecem) aos pares.

(a) Bifurcação supercrítica do tipo garfo

É o caso em que existe um ponto fixo estável para $\mu \leq \mu_c$ e então, para $\mu > \mu_c$, torna-se instável e nasce um par de pontos fixos estáveis.

Por exemplo, considere o sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \mu x - x^3 \\ \dot{y} &= -y.\end{aligned}$$

cujos retratos de fase para $\mu < \mu_c$, $\mu = \mu_c$ e $\mu > \mu_c$ são apresentados na figura (2.17).

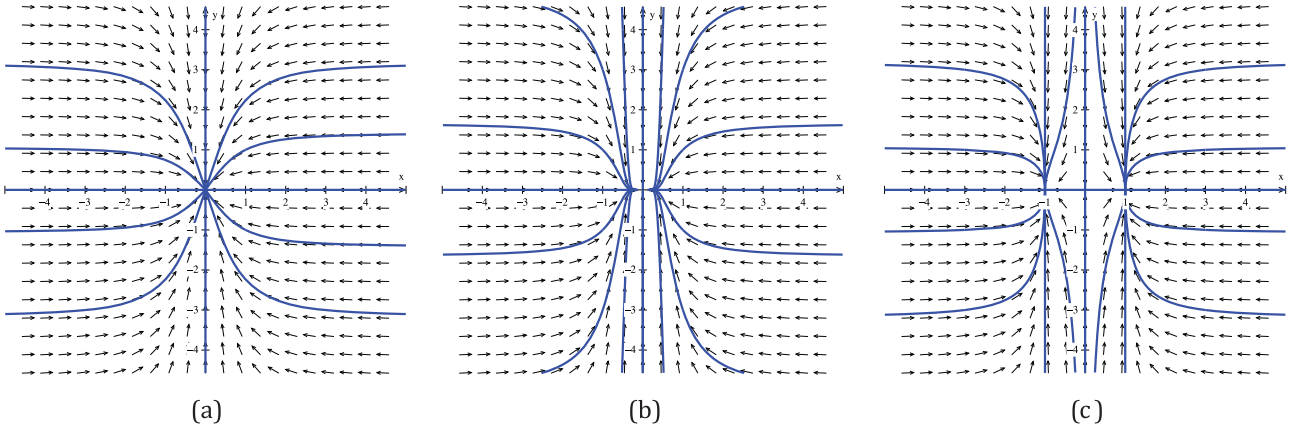


Figura 2.17: Bifurcação supercrítica do tipo garfo: (a) $\mu = -1$, (b) $\mu = 0$ e (c) $\mu = 1$.

(b) Bifurcação subcrítica do tipo garfo

Este caso é bem parecido com o anterior. A diferença é que agora dois pontos fixos instáveis colidem com um estável no ponto de bifurcação e a partir daí, existe apenas um ponto fixo, a saber, instável. Compare os diagramas de bifurcações na figura (2.18).

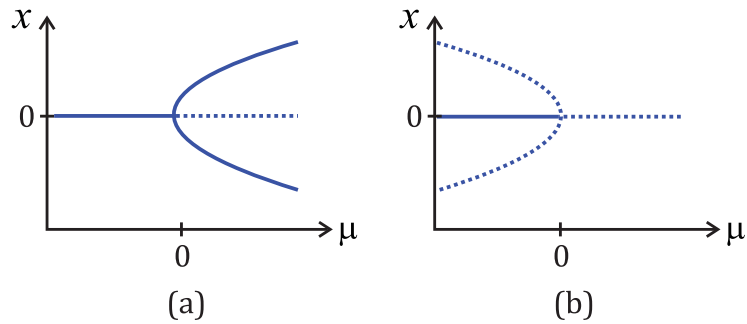


Figura 2.18: (a) Bifurcação supercrítica do tipo garfo e (b) Bifurcação subcrítica do tipo garfo.

4. Bifurcação de Hopf

A *bifurcação de Hopf* é a única dentre as comentadas aqui que trata do aparecimento de um

ciclo limite em um sistema onde só haviam pontos fixos. Como exemplo, considere o sistema

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y + x(\mu - x^2 - y^2) \\ \dot{y} &= x + y(\mu - x^2 - y^2)\end{aligned}$$

e seus retratos de fase - figura (2.19) - para três valores de μ : o crítico, um menor e um maior.

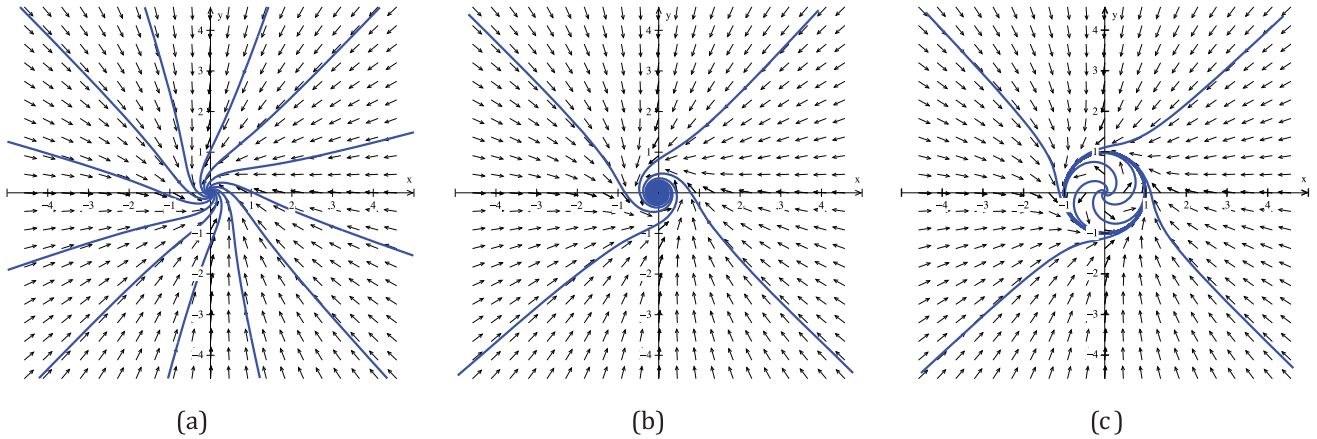


Figura 2.19: Bifurcação de Hopf: (a) $\mu = -1$, (b) $\mu_c = 0$ e (c) $\mu = 1$.

Neste caso, passou-se de equilíbrio estável a ciclo limite estável. Outra característica da bifurcação de Hopf é que a matriz Jacobiana calculada no ponto fixo tem um par de autovalores imaginários puros. Observamos que ela também se apresenta na forma subcrítica na qual, como na bifurcação subcrítica do tipo garfo, ocorre perda de estabilidade no ponto de bifurcação.

Capítulo 3

Mapas

Alguns fenômenos naturais são melhor modelados por um sistema com tempo discreto, como por exemplo, na dinâmica populacional é útil pensar que cada valor do tempo t corresponde a uma geração e por isso não têm interpretação os valores não naturais de t . O mesmo ocorre nos modelos envolvendo sinais digitais, Economia e em muitos outros casos. Equações diferenciais com tempo discreto são chamadas de *equações de diferenças* e um sistema de tais equações é dito *mapa*.

Outra grande importância do estudo de mapas, é que um sistema dinâmico pode ser analisado através de uma *seção de Poincaré* de seu espaço de fase. O método, que veremos a seguir, transforma o problema de estudar a estabilidade de um sistema de EDOs em estudar um mapa com a vantagem de diminuirmos uma unidade na dimensão do espaço de fase, além de que mapas são mais facilmente programáveis para se obter resultados numéricos.

3.1 Seções de Poincaré

Considere o sistema autônomo n -dimensional $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ e seja S uma hipersuperfície $(n - 1)$ -dimensional que seja transversal às trajetórias no espaço de fase, ou seja, nenhuma trajetória está contida em S . O mapa de Poincaré é a aplicação $P : S \rightarrow S$ que mapeia os pontos de interseção de S com uma trajetória qualquer, isto é, se $(\mathbf{x}_i)_{i \in \mathbb{N}}$ é a sequência de tais pontos a partir de uma interseção qualquer que assume a posição \mathbf{x}_0 , o mapa de Poincaré é dado por $\mathbf{x}_{k+1} = P(\mathbf{x}_k)$. Chamaremos estas sequências de *órbitas*.

A relação entre uma seção de Poincaré e a estabilidade de um sistema dinâmico começa aqui: um ponto fixo \mathbf{x}^* de P implica na existência de uma trajetória fechada no espaço de fase do sistema $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ e a análise de sua estabilidade pode ser feita através do estudo da convergência das órbitas na vizinhança de \mathbf{x}^* em S , isto é, da estabilidade de \mathbf{x}^* enquanto ponto fixo do mapa $\mathbf{x}_{k+1} = P(\mathbf{x}_k)$.

3.2 Estabilidade

Nesta seção introduziremos uma técnica para o estudo da estabilidade de um mapa e para tanto consideraremos um mapa unidimensional. Ao final, generalizaremos (sem demonstrar) a técnica para

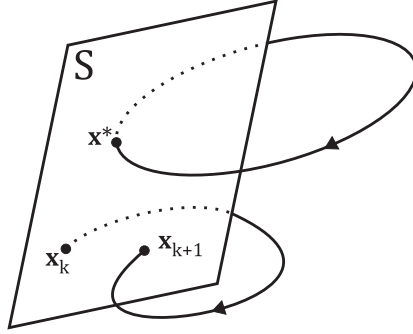


Figura 3.1: Interpretação geométrica de uma seção de Poincaré para $n = 3$.

um sistema de dimensão qualquer.

Considere o mapa unidimensional

$$x_{n+1} = f(x_n). \quad (3.1)$$

Definição 3.1. Um ponto fixo do mapa (3.1) é um ponto x^* tal que $f(x^*) = x^*$.

Como já dito, a estabilidade de x^* pode ser determinada analisando a sequência de sucessivas iterações a partir de um ponto x_0 próximo de x^* . Caso $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ se aproxime (se afaste) de x^* , dizemos que x^* é assintoticamente estável (instável). Comumente nos referimos aos pontos fixos assintoticamente estáveis por atratores e aos instáveis por repulsores.

Seja x_0 próximo de x^* , isto é,

$$x_0 = x^* + \varepsilon_0,$$

onde ε_0 é um incremento infinitesimal. Queremos saber se

$$x_1 = f(x_0) = f(x^* + \varepsilon_0) = x^* + \varepsilon_1$$

está mais próximo ou mais distante de x^* do que x_0 , isto é, queremos saber se ε_1 é maior ou menor que ε_0 . Para tanto, consideremos a expansão em série de Taylor em torno de x^* ,

$$x^* + \varepsilon_{i+1} = x_{i+1} = f(x_i) = f(x^* + \varepsilon_i) = f(x^*) + f'(x^*)\varepsilon_i + O(\varepsilon_i^2) = x^* + f'(x^*)\varepsilon_i, \quad (3.2)$$

onde consideramos que $f(x^*) = x^*$ e negligenciamos os termos de ordem superior. Note que aqui, f' é a derivada da função f em relação a x e não a t , como poderia se supor. Logo, obtemos o mapa linearizado

$$\varepsilon_{i+1} = \lambda \varepsilon_i,$$

com o autovalor, ou *multiplicador* $\lambda = f'(x^*)$.

Claramente, $|\varepsilon_{i+1}| < |\varepsilon_i|$ se $-1 < \lambda < 1$ e diremos que x^* é assintoticamente estável. Se $0 < \lambda < 1$ as distâncias entre as iterações (x_0, x_1, \dots) diminuem monotonicamente, já se $-1 < \lambda < 0$, os valores $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots$ alternam de sinal e a aproximação ao ponto fixo chama-se “*flip*”. Caso $|\lambda| > 1$, x^* é instável e se $|\lambda| = 1$, é necessário considerar os termos de ordem superior na aproximação (3.2) para obter alguma conclusão sobre a estabilidade de x^* . Observe que (3.2) é exata caso f seja linear em x . A seguir, daremos a versão n -dimensional destas conclusões.

Teorema 3.2. *Sejam λ_i os autovalores da linearização de um mapa $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{f}(\mathbf{x}^k)$ em torno do ponto fixo \mathbf{x}^* , ou seja, λ_i são os autovalores da matriz jacobina da função $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$ em relação ao vetor $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ aplicada em $\mathbf{x}^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$,*

$$\mathbf{J}^* = \left[\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right]_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*}.$$

A estabilidade do ponto fixo \mathbf{x}^ é dada por: (a) se $|\lambda_i| < 1$ para todo i , então \mathbf{x}^* é estável; (b) se $|\lambda_i| > 1$ para algum i (mas não para todos), então \mathbf{x}^* é um ponto de sela hiperbólico (instável), e se $|\lambda_i| > 1$ para todo i , então \mathbf{x}^* é um nó (instável).*

Além de pontos fixos - órbitas que se reduzem à um único ponto - os mapas também admitem órbitas periódicas, que são aquelas que se reduzem a um conjunto finito de pontos.

Definição 3.3. *Um ponto \mathbf{x}^* é dito periódico de período m (ou m -periódico) do mapa $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ se for um ponto fixo da m -ésima composição do mapa*

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{f}^m(\mathbf{x}^*),$$

de modo que os pontos $\{\mathbf{x}^, \mathbf{f}(\mathbf{x}^*), \mathbf{f}^2(\mathbf{x}^*), \dots, \mathbf{f}^{m-1}(\mathbf{x}^*)\}$ são todos distintos. Este conjunto é chamado de atrator (ou repulsor, dependendo da estabilidade) de período m ou apenas de m -ciclo.*

Em outras palavras, um m -ciclo é um conjunto de m pontos m -periódicos $\{\mathbf{x}_1^*, \mathbf{x}_2^*, \dots, \mathbf{x}_m^*\}$ tais que

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{i+1}^* &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_i^*), \quad (i = 1, 2, \dots, m-1), \\ \mathbf{x}_1^* &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_m^*). \end{aligned}$$

Assim como para os pontos fixos, analisaremos também a estabilidade de um m -ciclo. Para tanto, retomaremos as notações unidimensionais. Um m -ciclo $\{x_1^*, x_2^*, \dots, x_m^*\}$ é assintoticamente estável se, dada uma condição inicial suficientemente próxima a um dos pontos, digamos x_1^* , as iterações subsequentes aproximam-se, alternadamente, dos pontos periódicos. Cada um desses m pontos são pontos fixos do mapa m vezes iterado $f^m(x)$, ou seja, $x_i^* = f^m(x_i)$, $i = 1, \dots, m$, e é claro que a análise da estabilidade do m -ciclo resume-se à estabilidade de qualquer um de seus pontos. Assim, consideremos x_1^* e calculemos $\lambda_m = \left. \frac{df^m(x)}{dx} \right|_{x=x_1^*}$:

$$\lambda_m = \left. \frac{df^m(x)}{dx} \right|_{x=x_1^*} = \left. \frac{d(f \circ f^{m-1})(x)}{dx} \right|_{x=x_1^*} = \left. \frac{df(f^{m-1}(x))}{dx} \right|_{x=x_1^*} = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=f^{m-1}(x_1^*)} \cdot \left. \frac{df^{m-1}(x)}{dx} \right|_{x=x_1^*}.$$

Considerando que $f^{m-1}(x_1^*) = x_{m-1}^*$ e repetindo o processo por mais $m-1$ vezes, temos

$$\lambda_m = \left. \frac{df^m(x)}{dx} \right|_{x=x_1^*} = \prod_{i=0}^{m-1} \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_i^*}, \quad (3.3)$$

e as conclusões seguem as mesmas para o caso de pontos fixos.

Uma técnica muito útil para encontrar e analisar a estabilidade de pontos fixos em um mapa unidimensional é o *diagrama de teia*. O recurso permite realizar iterações graficamente e consiste

em traçarmos em um mesmo plano cartesiano, a função $y = f(x)$ que define o mapa $x_{i+1} = f(x_i)$ e a bissetriz $y = x$. Qualquer ponto de interseção entre estas duas curvas representa claramente a existência de um ponto fixo e sua estabilidade, como já sabemos, é descrita pelo comportamento de órbitas inicialmente próximas. Graficamente, escolhemos um ponto $(x_0, f(x_0))$ próximo ao ponto $(x^*, f(x^*) = x^*)$ e traçamos um segmento de reta horizontal em direção à bissetriz até ocorrer o encontro. Em seguida, traçamos outro segmento, agora vertical, em direção ao gráfico de f . Dado o novo encontro, está determinado o ponto $(x_1, f(x_1))$, onde $x_1 = f(x_0)$, e o processo se repete. As abscissas dos pontos obtidos definem uma órbita com a qual podemos analisar a estabilidade de x^* . Na figura (3.2) vemos um exemplo de ponto fixo assintoticamente estável \tilde{x}^* (atrator) e um instável x^* (repulsor).

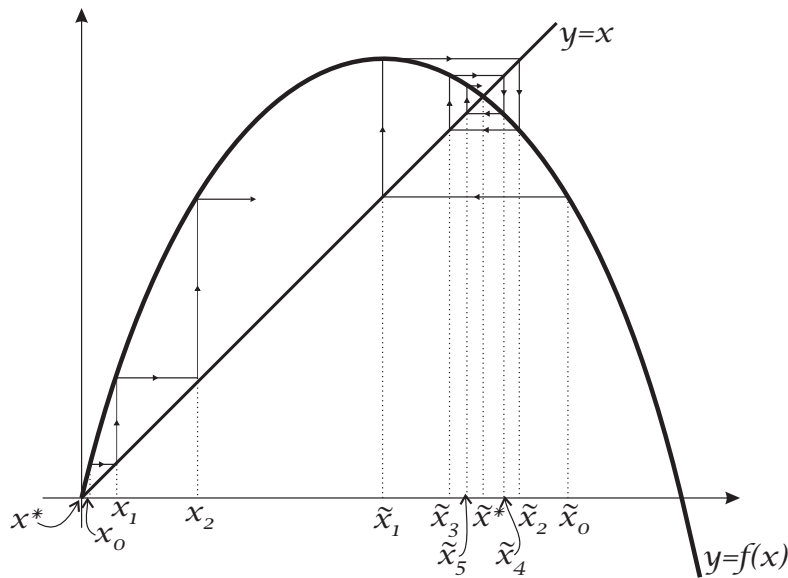


Figura 3.2: O ponto x^* é instável e o ponto \tilde{x}^* é assintoticamente estável.

O diagrama de teia também pode ser utilizado para encontrar um m -ciclo. Veja na figura (3.3), que no caso do 2-ciclo, existe um atrator periódico que atrai órbitas próximas e o ponto fixo representado pela interseção da bissetriz com a parábola é instável.

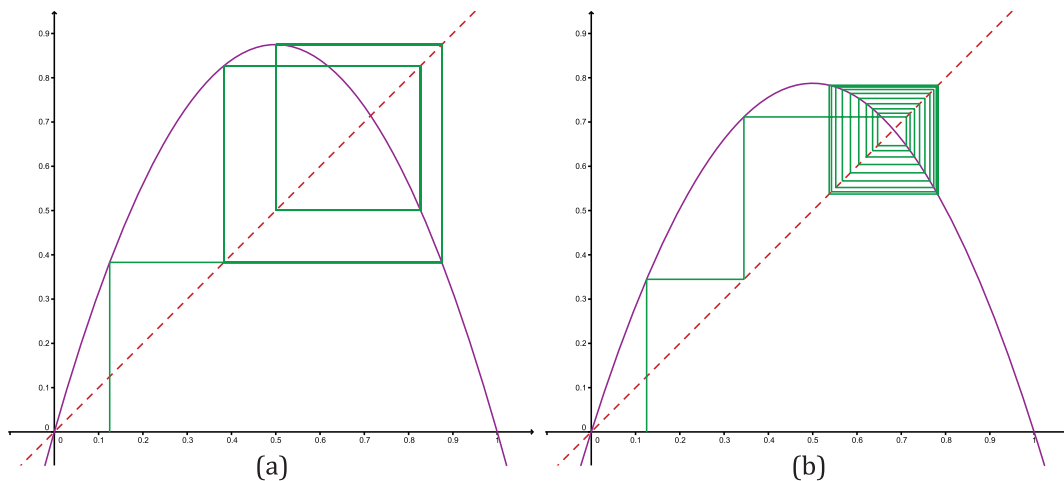


Figura 3.3: (a) 4-ciclo e (b) 2-ciclo.

3.3 Estabilidade estrutural

O conceito de estabilidade estrutural apresentado para sistemas dinâmicos com tempo contínuo continua tendo sentido para mapas. Se um mapa depende de um ou mais coeficientes, à medida que estes variam, os pontos fixos ou órbitas descrevem trajetórias no espaço de fase. Toda vez que ocorre uma mudança qualitativa do retrato de fase temos uma bifurcação.

As classificações dessas bifurcações seguem o padrão apresentado no caso contínuo. A figura (3.4) mostra as analogias e as diferentes nomenclaturas usuais para sistemas contínuos e discretos.

Sistemas contínuos	Sistemas discretos	Característica no diagrama de bifurcações
Sela-nó (<i>fold</i>)	Tangente Pode aparecer na forma inversa (figura da direita)	
Transcrítica	Transcrítica	
Tipo garfo Apresenta-se na forma subcrítica ou supercrítica	Duplicação de período (<i>flip</i>) (figura da direita)	

Figura 3.4: Analogias e as diferentes nomenclaturas usuais para sistemas contínuos e discretos.

Capítulo 4

O mapa logístico

4.1 Introdução

Em 1798 o economista britânico Thomas Malthus publica seu primeiro artigo sobre dinâmica populacional e observa que muitas populações biológicas crescem a uma taxa proporcional à população lançando o famoso modelo Malthusiano,

$$\frac{dP}{dt} = (N - M)P,$$

onde P é a população e N e M são, respectivamente, a taxa de natalidade e mortalidade. Note que o modelo é linear e no entanto sugere um (de)crecimento exponencial da população. De fato, este sistema (unidimensional) possui solução geral

$$P(t) = P_0 e^{(N-M)t},$$

onde $P_0 = P(0)$.

É claro que este modelo não descreve apropriadamente o comportamento de populações em tempos longos e uma alternativa proposta pelo matemático belga Pierre Verhulst em 1838 era de que a mortalidade seria proporcional ao quadrado da população e o modelo tomaria a forma

$$\frac{dP}{dt} = (N - MP)P, \tag{4.1}$$

que é conhecido como equação de Verhulst ou *equação logística*. O modelo não pôde ser testado na época por conta dos dados imprecisos do censo, mas em 1930 foi comprovado experimentalmente por Raymond Pearl para uma população de moscas.

O modelo logístico de Verhulst sugere que não haverá variação da população P , ou seja, $\frac{dP}{dt} = 0$ para $P = 0$, o que é trivial, e para $P = \frac{N}{M} \equiv K$. O número K é conhecido como capacidade de sustentação do meio. Assim, a equação (4.1) se escreve

$$\frac{dP}{dt} = N \left(1 - \frac{P}{K}\right) P. \tag{4.2}$$

O que Robert May fez, em 1976, foi partir da forma discreta da equação logística

$$P_{n+1} = N \left(1 - \frac{P_n}{K} \right) P_n$$

e escrever $x_n = \frac{P_n}{K} \in [0, 1]$. Assim, dividindo ambos os membros da equação acima por K , obtemos a seguinte forma canônica da equação (4.1):

$$x_{n+1} = N(1 - x_n)x_n.$$

Portanto, o mapa logístico é o mapa $x_{n+1} = f(x_n)$, onde $f \equiv f_\mu$ é uma função controlada pelo parâmetro μ , com

$$f(x) = f_\mu(x) = \mu x(1 - x). \quad (4.3)$$

4.2 Análise do mapa

Nossa primeira preocupação é a respeito do conjunto de valores no qual o parâmetro μ pode variar. Graficamente é fácil perceber que a função (4.3) só mapeia o intervalo $[0, 1]$ para $0 \leq \mu \leq 4$. Veja a figura (4.1).

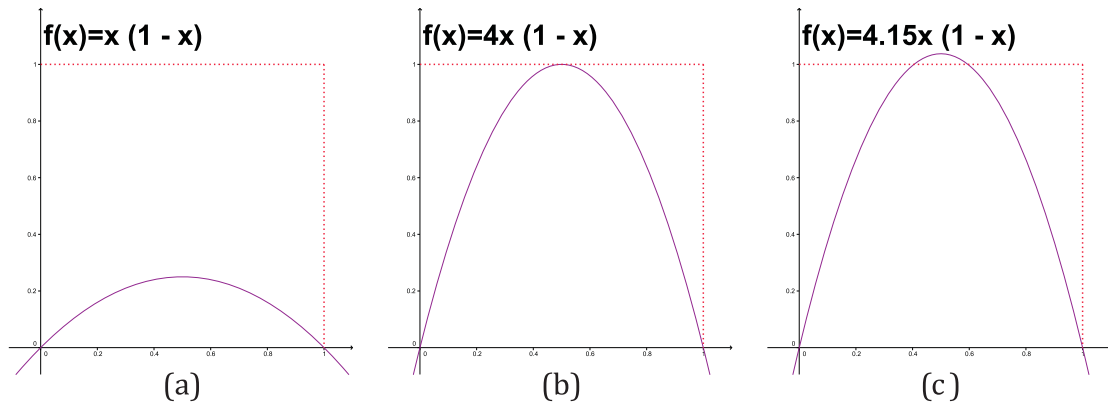


Figura 4.1: Para valores $\mu \notin [0, 4]$, a função definida em (4.3) não mapeia o intervalo $[0, 1]$

Pontos fixos são facilmente previstos ao sobrepôr, em um mesmo sistema de coordenadas, o gráfico da função $f(x)$ que define o mapa logístico e a bissetriz $y = x$. Como vimos anteriormente, o diagrama de teia pode nos auxiliar no estudo da estabilidade destes pontos. A figura (4.2) sugere a existência de dois pontos fixos, um repulsor x_a^* e um atrator x_b^* .

A existência dos dois pontos fixos pode ser constatada analiticamente. Partindo da definição de ponto fixo (definição 3.1) temos

$$x^* = f(x^*) \Leftrightarrow x^* = \mu x^*(1 - x^*) \Leftrightarrow x^*(\mu - 1 - \mu x^*) = 0 \Leftrightarrow x_a^* = 0 \text{ ou } x_b^* = 1 - \frac{1}{\mu}.$$

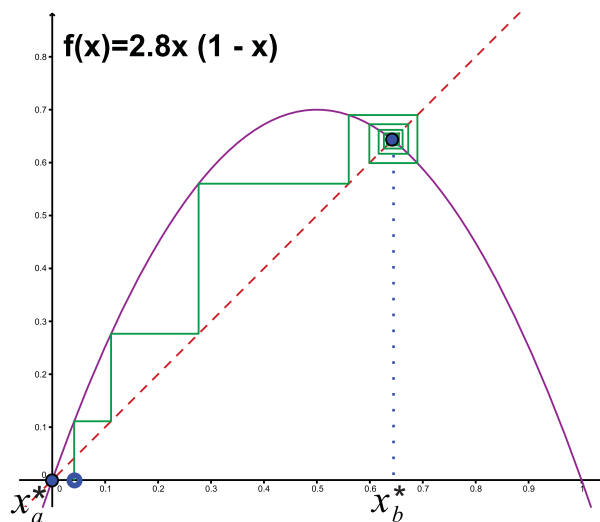


Figura 4.2: Existem dois pontos fixos x_a^* (repulsor) e x_b^* (atrator).

É claro que x_b^* existe apenas para valores convenientes de μ para os quais x_b^* está no intervalo de definição do mapa, ou seja, $x_b^* \in [0, 1]$. Sendo assim,

$$0 \leq x_b^* \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq 1 - \frac{1}{\mu} \leq 1 \Leftrightarrow \mu \geq 1.$$

Esta restrição também pode ser observada graficamente, veja a figura (4.3). Note que na parte (b) é possível ver o ponto fixo x_b^* fora do intervalo de definição do mapa.

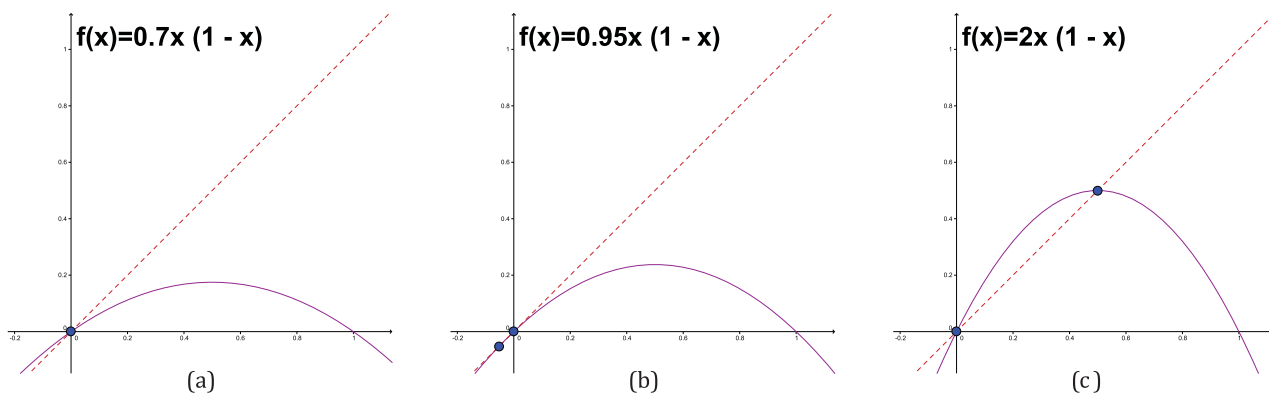


Figura 4.3: (a) Para $\mu < 1$ o gráfico de f intersecta a bissetriz dentro de seu intervalo de definição em apenas um ponto, já para (c) $\mu > 1$, os dois pontos fixos ficam evidentes.

Além da mudança do número de pontos fixos, o valor do parâmetro $\mu = 1$ marca também a mudança na estabilidade dos mesmos. Veja a figura (4.4).

Esta característica da bifurcação também pode ser verificada analiticamente (teorema 3.2) lembrando que a estabilidade de um ponto fixo está relacionada com $\lambda = f'(x^*)$. Logo, como $\mu > 0$

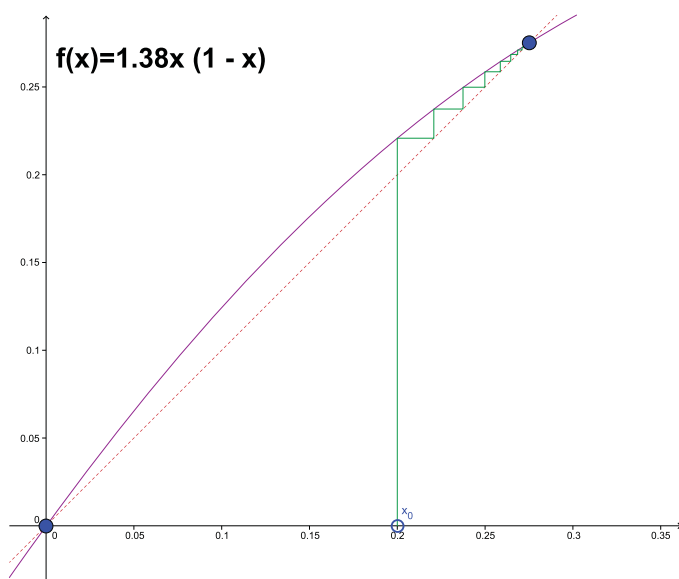
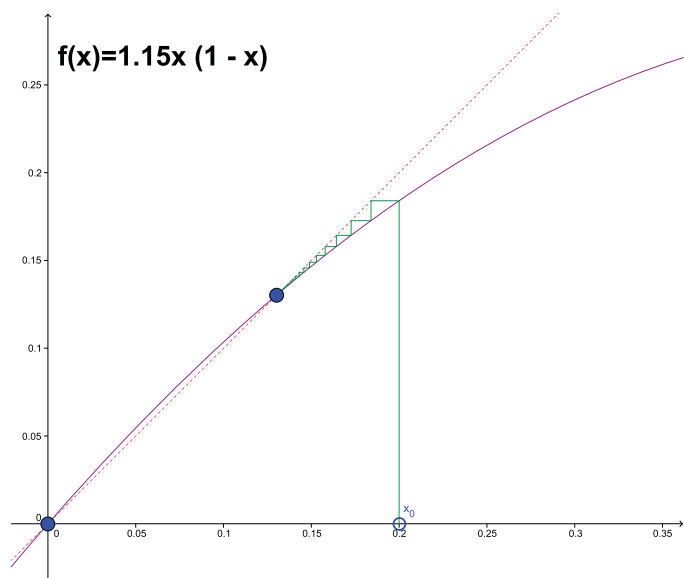
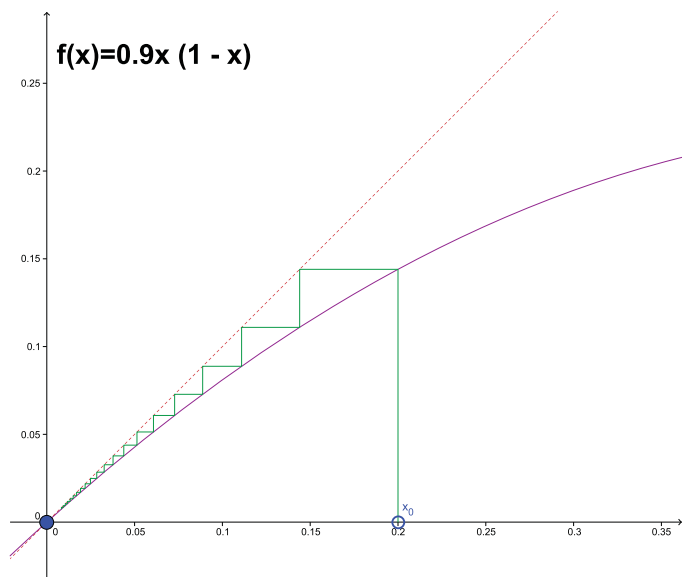


Figura 4.4: O valor do parâmetro $\mu = 1$ é um ponto de bifurcação do sistema.

e

$$f'(x_a^*) = \mu [(1-x) - x]_{x=x_a^*=0} = \mu [1-2x]_{x=0} = \mu,$$

a condição $-1 < \lambda < 1$, implica que x_a^* seja estável, apenas para $\mu \in [0, 1]$.

Já para o outro ponto fixo, tem-se

$$f'(x_b^*) = \mu [1-2x]_{x=x_b^*=1-\frac{1}{\mu}} = 2 - \mu.$$

Assim, $-1 < \lambda < 1$ para $1 < \mu < 3$.

Com o que temos até aqui, se traçássemos um diagrama de bifurcações do mapa logístico, ele teria uma bifurcação transcritical em $(x=0, \mu=1)$ como na figura (4.5), na qual os traços contínuos representam estabilidade (assintótica) enquanto que os pontilhados representam instabilidade.

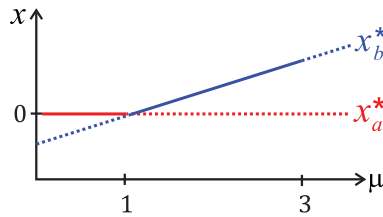


Figura 4.5: O mapa logístico apresenta uma bifurcação transcritical em seu diagrama de bifurcações.

Também estamos interessados em atratores de dimensões maiores, os m -ciclos. Começemos pelo caso mais simples, o 2-ciclo.

Como já vimos, um 2-ciclo é um conjunto $\{x_1^*, x_2^*\}$ cujos elementos são 2-periódicos, ou seja, são pontos fixos da segunda composição da função f que define o mapa, desde que já não sejam pontos fixos de f . Assim,

$$\begin{aligned} x^* = f^2(x^*) &\Leftrightarrow x^* = \mu f(x^*)(1 - f(x^*)) \\ &= \mu \mu x^*(1 - x^*)(1 - \mu x^*(1 - x^*)) \\ &= \mu^2(-\mu x^{*4} + 2\mu x^{*3} - (1 + \mu)x^{*2} + x^*). \end{aligned}$$

Ou seja, procuramos as raízes do polinômio $p(x) = \mu^2(-\mu x^4 + 2\mu x^3 - (1 + \mu)x^2 + x^*) - x^* = 0$. É claro que os pontos fixos $x_a^* = 0$ e $x_b^* = 1 - \frac{1}{\mu}$ são raízes de p , assim,

$$p(x) = (x - x_a^*)(x - x_b^*)q(x),$$

com $q(x) = -(\mu^2 x^2 - \mu x(1 + \mu) + 1 + \mu)$, cujas raízes são os pontos x_1^* e x_2^* que estamos procurando. A saber,

$$x_{1,2}^* = \frac{1}{2\mu} \left(\mu + 1 \pm \sqrt{\mu^2 - 2\mu - 3} \right).$$

No entanto, devemos observar que tais soluções não existem (não são reais) para quaisquer valores de μ , ou seja, o 2-ciclo só existe para os valores de μ nos quais o discriminante da equação $q(x) = 0$ é estritamente positivo. Logo,

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow \mu^2(1 + \mu)^2 - 4\mu^2(1 + \mu) > 0 \Leftrightarrow \mu^2 - 2\mu - 3 > 0 \Leftrightarrow \mu < -1 \text{ ou } \mu > 3,$$

mas como $\mu \in [0, 1]$ concluímos que o 2-ciclo $\{x_1^*, x_2^*\}$ determinado existe apenas para $\mu > 3$.

Diante do exposto temos que $\mu = 3$ é uma nova bifurcação mas antes de classificá-la devemos estudar a estabilidade do 2-ciclo $\{x_1^*, x_2^*\}$. Para tanto, analisemos, segundo a condição (3.3), $\lambda_m = \prod_{i=0}^{m-1} \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_i^*}$.

$$\begin{aligned} \lambda_2 &= f'(x_1^*)f'(x_2^*) \\ &= \mu(1 - 2x_1^*)\mu(1 - 2x_2^*) \\ &= \mu^2(1 - 2(x_1^* + x_2^*) + 4x_1^*x_2^*) \\ &= -\mu^2 + 2\mu + 4, \end{aligned}$$

observando que $(x_1^* + x_2^*)$ e $(x_1^*x_2^*)$ são, respectivamente, a soma e o produto das raízes de $q(x)$. Sendo assim,

$$|\lambda_2| < 1 \Leftrightarrow |-\mu^2 + 2\mu + 4| < 1 \Leftrightarrow \mu \in [1 - \sqrt{6}, -1] \cup [3, 1 + \sqrt{6}].$$

Considerando que $\mu \in [0, 1]$, concluímos que o 2-ciclo $\{x_1^*, x_2^*\}$ é assintoticamente estável para $3 < \mu < 1 + \sqrt{6}$, o que indica que a bifurcação em $\mu = 3$ é do tipo duplicação de período e o diagrama de bifurcações do mapa logístico deve ser qualitativamente como o da figura (4.6).

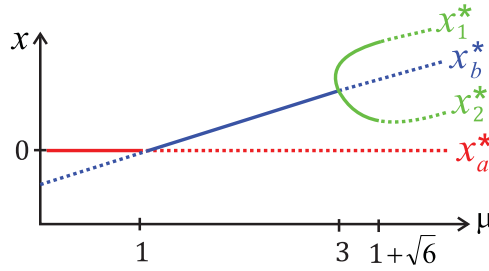


Figura 4.6: Além da bifurcação transcítica em $\mu = 1$, o diagrama de bifurcações do mapa logístico apresenta uma duplicação de período em $\mu = 3$.

O 2-ciclo também pode ser constatado graficamente como sendo as interseções do gráfico de $f^2(x)$ com a reta $y = x$ que não coincidem com as do gráfico de f e sua estabilidade pode ser verificada pelo diagrama de teia como mostra a figura (4.7.b). Observe que na parte (a) fica claro que para $\mu < 3$ o 2-ciclo não existe e que x_b^* é um atrator, enquanto que na parte (b) verificamos que x_b^* passa a ser instável.

Uma outra característica da bifurcação de duplicação de período é que, sendo μ_c o valor do parâmetro onde ela ocorre e x_b^* o m -ciclo que terá seu período duplicado para $2m$, então

$$(f_{\mu_c}^m)'(x_b^*) = -1 \quad \text{e} \quad (f_{\mu_c}^{2m})'(x_b^*) = +1.$$

Note que $x_b^* = \frac{\mu-1}{\mu}$ é um ponto fixo ($m = 1$) e terá seu período duplicado em $\mu_c = 3$. Ainda,

$$f'_{\mu_c}(x_b^*) = \mu_c(1 - 2x_b^*) = 3 \left(1 - 2 \frac{3-1}{3} \right) = -1,$$

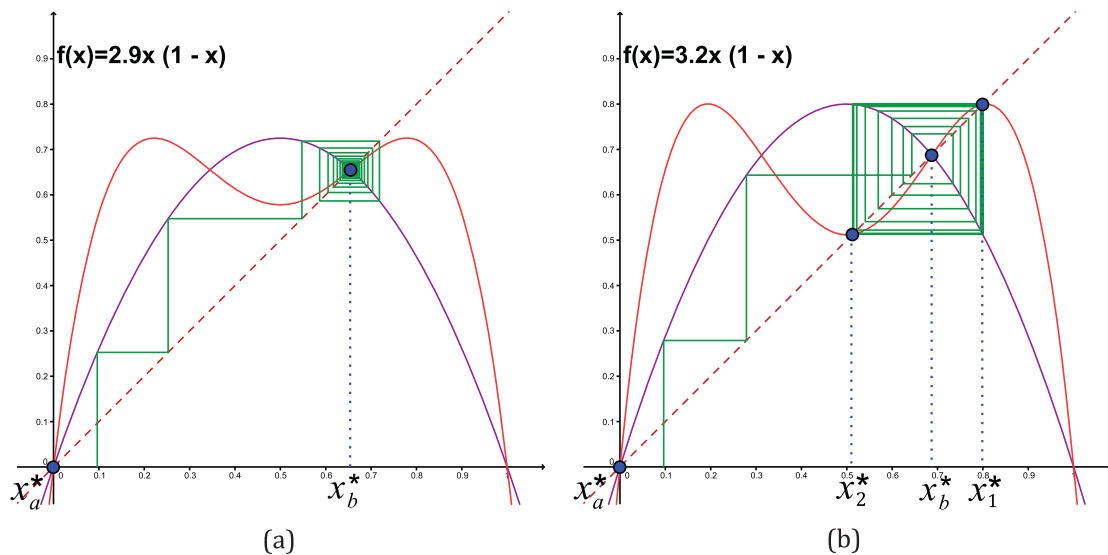


Figura 4.7: As interseções do gráfico de f^2 com a reta $y = x$ sugerem um possível 2-ciclo, mas aquelas que coincidem com as interseções de f com a reta devem ser desprezadas.

e

$$f_{\mu_c}^2(x_b^*) = -\mu_c^2(2x_b^* - 1)(2\mu_c(x_b^* - 1)x_b + 1) = 1.$$

A figura (4.8) ilustra o desenvolvimento anterior.

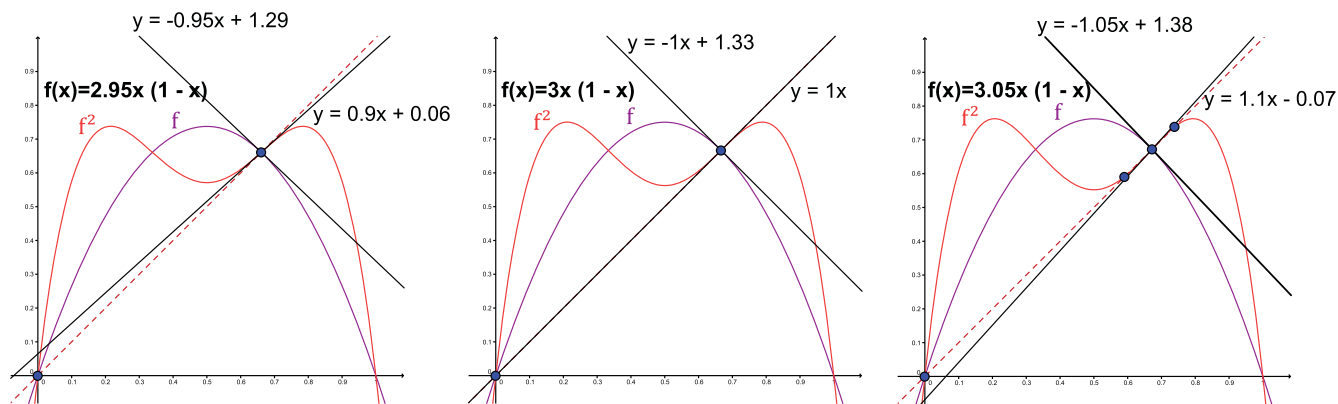


Figura 4.8: Na duplicação de período, para o valor μ_c no qual ocorre a bifurcação, temos $(f_{\mu_c}^m)'(x_b^*) = -1$ e $(f_{\mu_c}^{2m})'(x_b^*) = +1$, onde x_b^* é o m -ciclo que terá seu período duplicado.

A busca analítica por m -ciclos torna-se infrutífera a partir deste ponto sem que fixemos o valor do parâmetro μ , pois até mesmo os *softwares* matemáticos retornam soluções implícitas para as equações $f^m(x) = x$, com $m > 2$.

Prosseguindo com o objetivo de reunir mais informações a respeito do mapa logístico e esboçar seu diagrama de bifurcações, uma outra maneira de encontrar m -ciclos (lembre-se de que um ponto fixo é um ciclo de período unitário) é analisar em um sistema (μ, x) as curvas dadas implicitamente pelas equações $f^m(x) = x$. A figura (4.9) mostra os casos $m = 1, 2, 3$ e 4 .

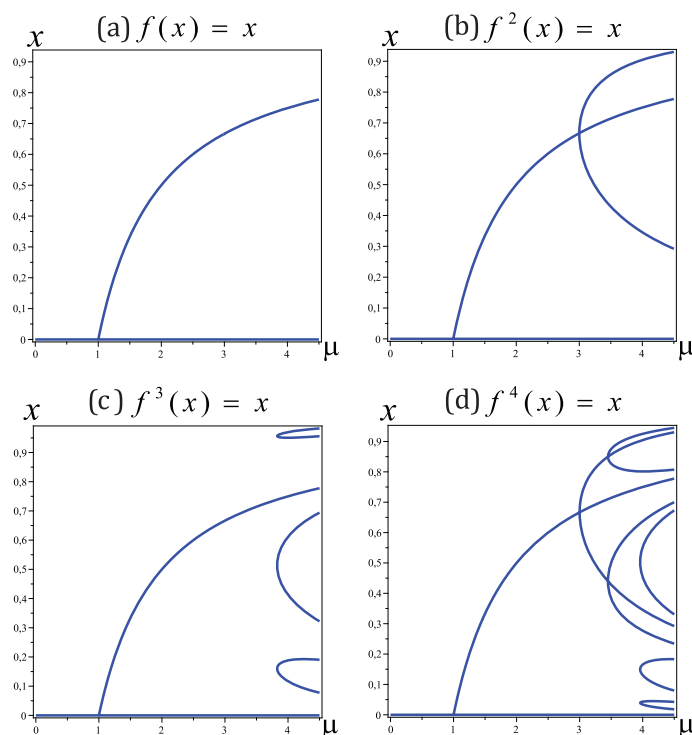


Figura 4.9: Gráficos das curvas dadas implicitamente pelas equações $f^m(x) = x$, para $m = 1, \dots, 4$.

Apesar de este método também se tornar rapidamente inviável pelo fato de que os graus dos polinômios que definem as equações $f^m(x) = x$ crescem exponencialmente a cada composição, ele permite fazer interessantes observações, como por exemplo, o fato de que todo ponto fixo pode ser confundido com um m -ciclo (na verdade, todo p -ciclo pode ser confundido com um m -ciclo, desde que p divida m). Como já observamos, é claro que uma solução de $f(x) = x$ será também solução de $f^m(x) = x$. De fato, por indução temos,

$$f(x^*) = x^* \Rightarrow f^2(x^*) = f(f(x^*)) = f(x^*) = x^* \Rightarrow \dots \Rightarrow f^m(x^*) = x^*,$$

que justifica o fato de que na figura (4.9), a curva que representa a equação $f^m(x) = x$ contém a que representa $f^p(x) = x$ sempre que p divide m .

A figura (4.9) não exibe traços contínuos e pontilhados para mostrar a estabilidade dos ramos, mas ficam claras as bifurcações. Como já previmos, na parte (a) fica evidente uma bifurcação em $\mu = 1$ na qual antes ($\mu < 1$) só havia uma solução $x_a^* = 0$ para a equação $f(x) = x$, ou seja, um único ponto fixo, e depois ($\mu > 1$) existem duas, x_a^* e x_b^* . Na parte (b) vemos que ocorre a duplicação de período em $\mu = 3$. Veja que na parte (c) a bifurcação transcritical em $\mu = 1$ aparece mas a duplicação de período em $\mu = 3$ não. Isso porque 1 divide 3, mas 2 não divide 3. Ainda na parte (c) vemos um novo tipo de bifurcação para algum valor $3, 5 < \mu < 4$, que claramente não é uma transcritical e nem uma duplicação de período. Este tipo de bifurcação chama-se tangente e é o análogo discreto da sela-nó (ver figura 3.4). A figura (4.10) explica porque ela recebe este nome e mostra também a existência de

um 3-ciclo. Note que a curva da parte (d) da figura (4.9) contém a curva da parte (b), isso porque 2 divide 4, mas não contém a da parte (c), já que 3 não divide 4.

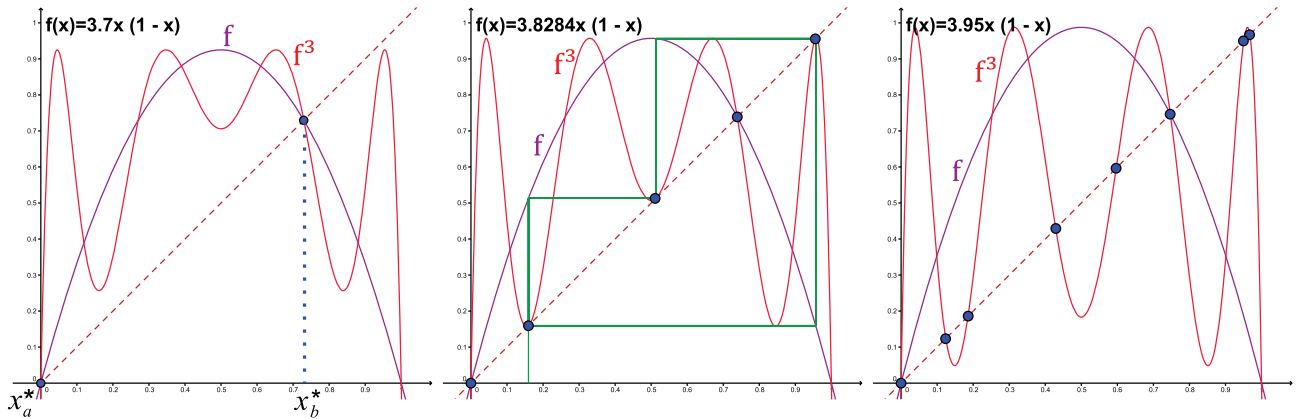


Figura 4.10: Em $\mu \approx 3,8284$ o mapa logístico apresenta uma bifurcação tangente e um 3-ciclo.

Por não verificarmos analiticamente esta conclusão não podemos testar a estabilidade do 3-ciclo como fizemos com o 2-ciclo anteriormente (ver figura 4.6). Para continuar com as investigações partiremos para uma abordagem computacional do diagrama de bifurcações do mapa logístico. O método com menos restrições consiste em programar o seguinte algoritmo para a construção da sequência $x_{n+1} = f(x_n) = \mu x_n(1 - x_n)$ (neste caso em linguagem FORTRAN, mas qualquer outra pode ser utilizada bem como softwares matemáticos como o Maple, Mathematica, Matlab entre outros).

1. Fixe um valor para $\mu \in [0, 4]$,
2. Fixe um valor para x ,
3. $x \longrightarrow f(x) = \mu x(1 - x)$,
4. Imprima o ponto (μ, x) ,
5. Repita 3 e 4 o suficiente para que ocorra a convergência, se houver,
6. Recomece com outro valor de μ .

A figura (4.9) sugere que a dinâmica do mapa logístico deve ser bastante complicada para valores de $\mu \in [3, 5; 4]$, assim como a figura (4.11) mostra como a sequência dos x_n é, pelo menos aparentemente, aperiódica para $\mu = 3,9$. Sendo assim, começaremos tentando verificar numericamente as conclusões que temos até o momento.

A figura (4.12) foi gerada utilizando o algoritmo para $\mu \in [0; 3,4]$ com uma variação de 0,0005 entre os valores de μ , $x_0 = 0,9$ e foram impressas no gráfico 100 iterações do mapa para cada valor de μ .

Note que, como esperávamos, para $\mu < 1$ as iterações se acumulam em $x_a^* = 0$, que é um ponto fixo estável (atrator), e que para $\mu \in [1, 3]$ a acumulação ocorre no outro atrator x_b^* . Observe também

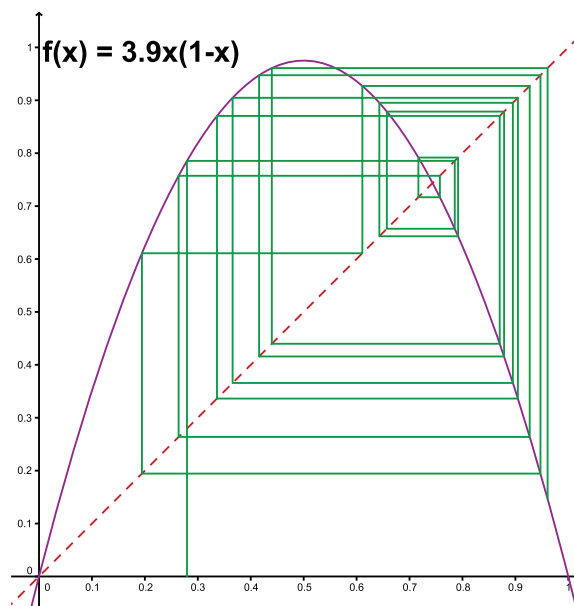


Figura 4.11: Para valores de $\mu \in [3, 5; 4]$ o mapa parece apresentar um comportamento aperiódico.

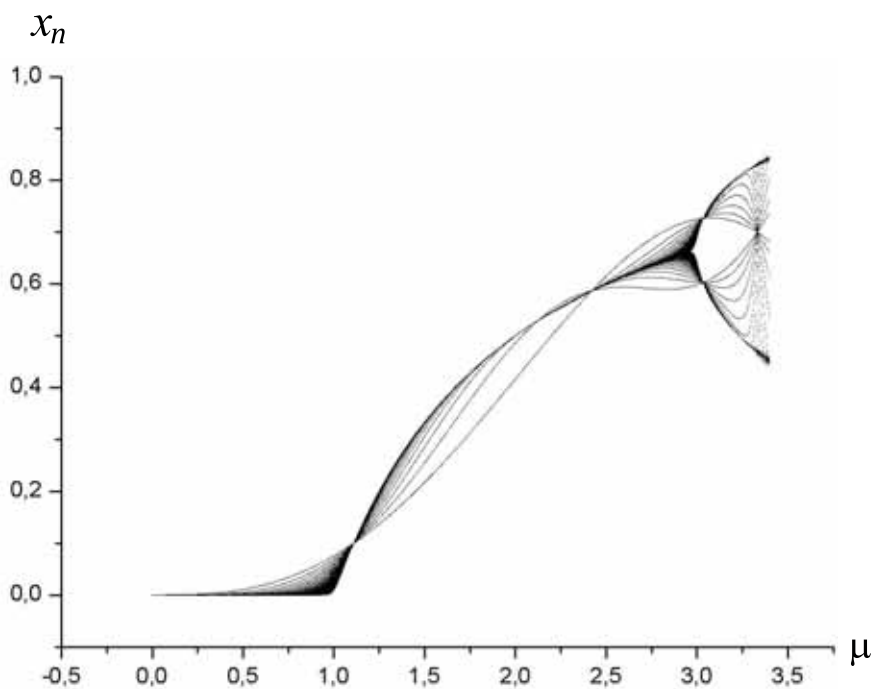


Figura 4.12: Resultado da implementação do algoritmo com 100 iterações para cada valor de $\mu \in [0; 3, 4]$ com variação de 0,0005 entre eles.

que $x = 0$ não deixa de ser um ponto fixo do sistema para $\mu > 1$, mas apenas perde a estabilidade (portanto agora o chamamos repulsor) e a ausência desta informação (assim como a da perda da estabilidade de x_b^* para $\mu > 3$) no diagrama será discutida adiante. Também é possível constatar o 2-ciclo estável que existe para $\mu \in [3, 1 + \sqrt{6}]$.

Embora seja possível verificar que as acumulações ocorreram exatamente onde previmos, as primeiras

iterações deixam o diagrama com um aspecto confuso. Na literatura elas são chamadas de transientes e para evitá-las basta considerar apenas a partir de um certo valor para n e dizemos que estamos utilizando apenas os valores assintóticos da variável x .

Voltando à discussão anterior sobre a falta das informações a respeito das perdas de estabilidade, basta analisar o algoritmo para perceber que apenas os atratores ficarão evidentes, mas se dermos uma condição inicial exatamente sobre um ponto fixo (ou sobre algum elemento de um m -ciclo), as iterações permanecerão constantes (ou alternando entre os elementos do m -ciclo), seja ele estável ou não. Veja a figura (4.13), que foi gerada com $\mu \in [0, 4]$ com variação de 0,001 entre cada valor e com $x_0 = 0$.

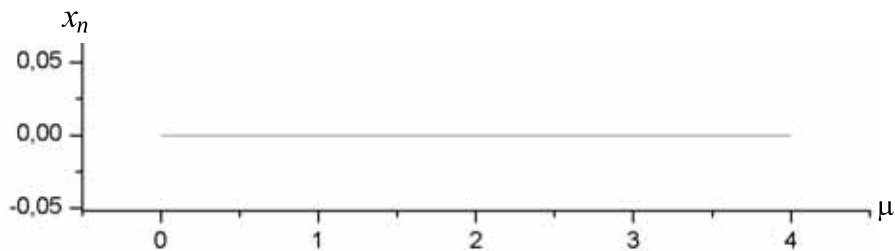


Figura 4.13: Se a condição inicial for dada sobre um ponto fixo, mesmo que seja instável (repulsor), as iterações permanecem sobre ele.

Um cuidado que temos que tomar na hora de interpretar os resultados obtidos numericamente é de considerar os erros provenientes de aproximações. Por exemplo, para gerar a figura (4.14) foram usados valores de $\mu \in [1; 3, 4]$ com variação de 0,0001 entre cada um. As primeiras 300 iterações foram desprezadas para anular o efeito dos transientes e as próximas 200 foram utilizadas. Para cada escolha de μ , a condição inicial escolhida era $x_0 = \frac{\mu-1}{\mu}$ e por isso esperávamos que apesar da perda da estabilidade de x_b^* , as iterações permanecessem sobre o ramo correspondente mesmo para $\mu > 3$. Ao invés disso, vemos, juntamente com o ramo correspondente a x_b^* , o garfo que sugere o 2-ciclo. Isso é resultado das aproximações no cálculo de $x_0 = \frac{\mu-1}{\mu}$ pois para $\mu > 3$, o ponto fixo x_b^* é instável e mesmo um pequeno distanciamento do valor real de $\frac{\mu-1}{\mu}$ provocado pela aproximação faz com que as iterações converjam para o ponto fixo estável presente no sistema, no caso, o 2-ciclo.

Feitas as ressalvas do método, vamos, de fato, utilizá-lo para traçar um diagrama de bifurcações do mapa logístico para $\mu \in [0, 4]$. A figura (4.15) foi gerada com uma variação de 0,001 a cada valor de μ (e dizemos que o passo utilizado foi de 0,001) e $x_0 = 0,3$. Podemos constatar experimentalmente que o valor escolhido para x_0 não altera qualitativamente o diagrama e por isso negligenciaremos este detalhe adiante. As primeiras 100 iterações foram desprezadas e as próximas 100 foram utilizadas e consideraremos, daqui para frente, que o mesmo foi adotado para todas as figuras sempre que nada for comentado.

Para $\mu \in [0; 3, 4]$ a única novidade é que sem os transientes a leitura fica menos confusa e para $\mu \in [3, 4; 4]$ já podemos confirmar, como suspeitávamos, que a dinâmica do mapa fica bastante complicada. Nesta região, a figura (4.15) deixa a desejar pela falta de detalhes e sendo assim, vejamos a figura (4.16.a), a qual foi gerada com um passo de 0,0001. Ela mostra uma pequena parte do 2-ciclo originado da primeira duplicação de período em $\mu = 3$ e podemos notar uma sequência de tais bifurcações até que a partir de um valor $\mu_\infty = 3,5699456$ o atrator parece ser aperiódico, ou pelo menos ter um

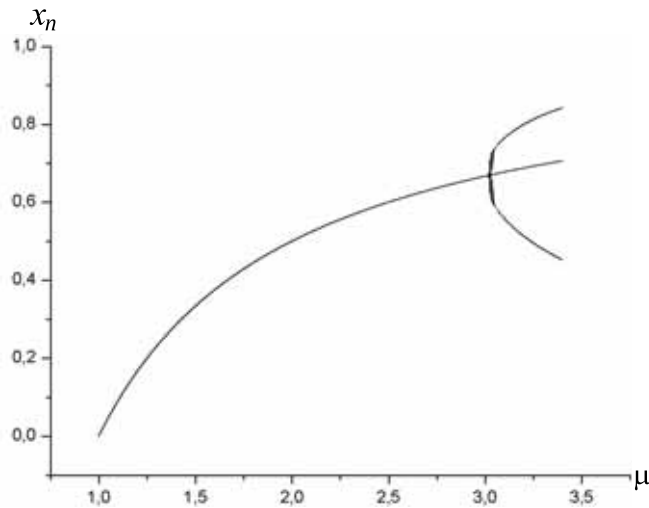


Figura 4.14: Mesmo tentando colocar $x_0 = x_b^*$ para $\mu > 3$, os erros de aproximação fazem com que as iterações sejam levemente desviadas do ramo correspondente, que é instável e por isso repele ainda mais as próximas iterações, que acumulam-se no 2-ciclo estável.

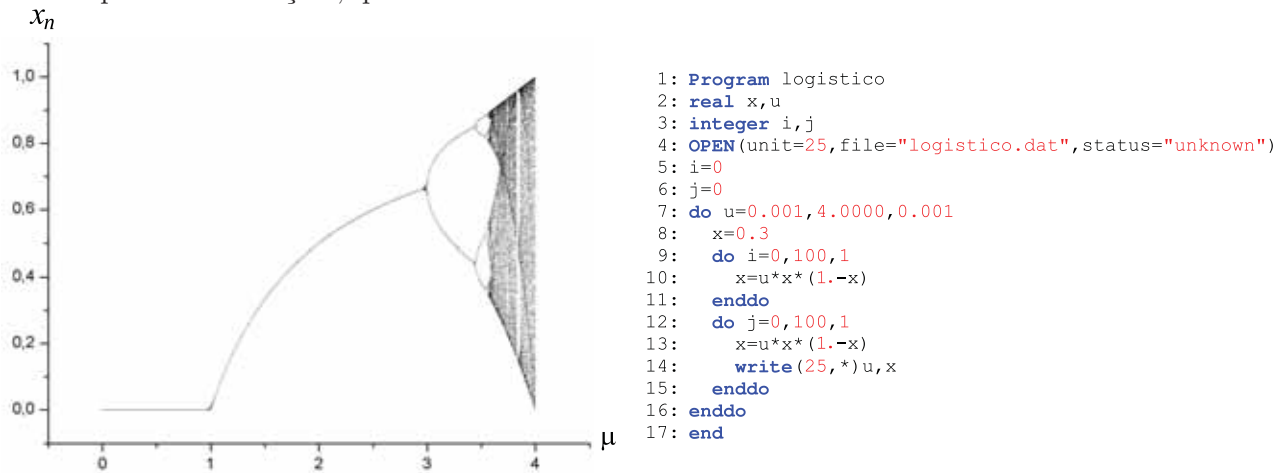


Figura 4.15: O diagrama de bifurcações do mapa logístico e o algoritmo utilizado.

período muito grande.

A figura (4.16.b) mostra uma aproximação ainda maior do diagrama de bifurcações do mapa logístico. Observamos que para isso, o algoritmo foi utilizado com passo de 0,000001 e as primeiras 6000 iterações foram desprezadas. Outra característica do diagrama que pode ser percebida nesta figura é a auto afinidade¹ (note que a região da parte (b) está destacada na parte (a)).

Um importante resultado, atribuído a Feigenbaum[5], é que a sequência (μ_n) das bifurcações (referida na literatura por cascata de duplicação de período), que é claramente convergente, satisfaz

$$\lim_{1 \ll n < \infty} \frac{\mu_n - \mu_{n-1}}{\mu_{n+1} - \mu_n} \equiv \delta \approx 4,6692016091029\dots,$$

e o mais impressionante é que o limite δ , chamado número de Feigenbaum, é o mesmo para qualquer

¹Uma estrutura é dita auto afim quando uma fração da mesma apresenta as mesmas características que o todo.

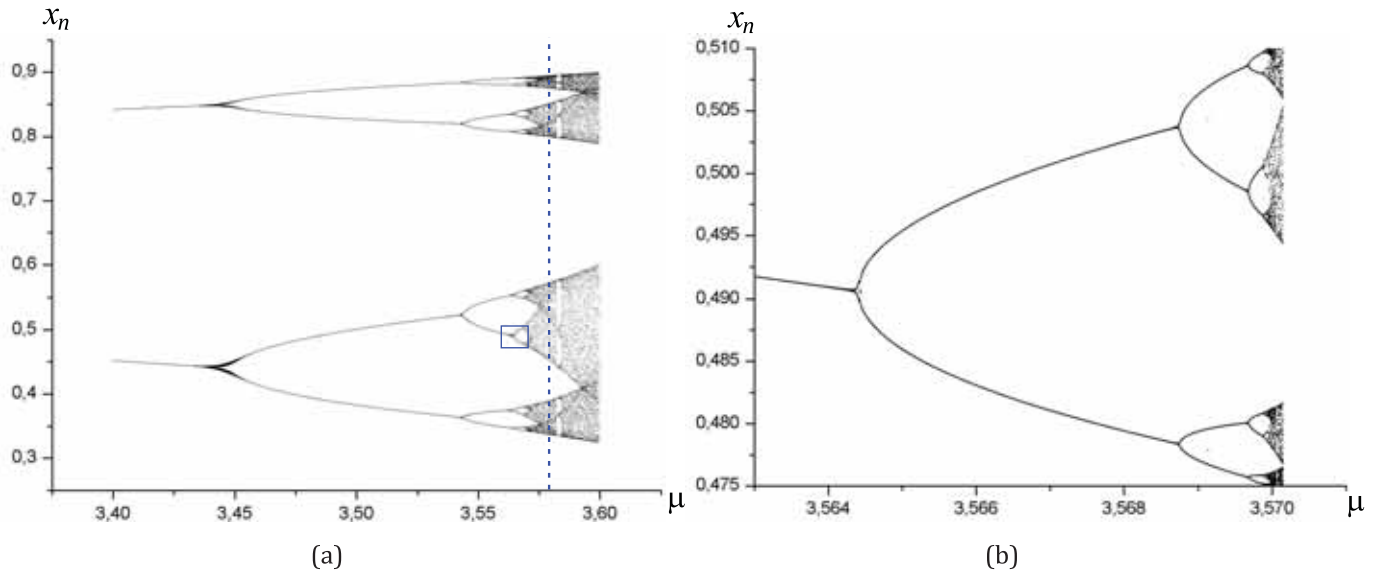


Figura 4.16: O diagrama de bifurcações do mapa logístico.

mapa unimodal (mapas continuamente diferenciáveis que mapeiam o intervalo $[0, 1]$, apresentam um único máximo em $x = 0,5$ e são monotônicos tanto em $[0; 0,5]$ quanto em $[0,5; 1]$). Em seu livro *Nonlinear Dynamics and Chaos*, S. H. Strogatz sugere que esta constante está para a duplicação de período assim como π está para os círculos, ressaltando a universalidade da mesma.

Passaremos a discussão à região do diagrama onde os ramos estáveis dos m -ciclos dão lugar a uma grande nuvem de pontos para $\mu > \mu_\infty$. Nestas regiões a dinâmica do mapa apresenta um comportamento caótico. Apesar de não darmos uma definição rigorosa de caos, observamos que para que ele se caracterize, é necessário que exista uma dependência sensível às condições iniciais (DCI) mas este aspecto será tratado adiante. É importante salientar que o oposto de determinístico é probabilístico. Um comportamento caótico pode ser observado em um sistema determinístico e quando isso ocorre não é garantida a previsibilidade do comportamento futuro do sistema.

Na figura (4.16.a), está destacada a seção em $\mu \approx 3,58$ para o qual, os valores assintóticos de x visitam periodicamente quatro regiões distintas do intervalo $[0, 1]$ como um ciclo, mas a cada vez que uma região é visitada, não sabemos qual dos seus pontos será atingido. Por este aspecto caótico, nos referimos a tais atratores por *ciclos ruidosos*. À medida que μ aumenta, estas regiões vão se fundindo e cada vez menos regiões (cada vez maiores) vão compondo o diagrama até que a partir de um valor $\mu_c \approx 3,68$ do parâmetro, existe apenas uma grande região e acaba por completo a previsibilidade das futuras iterações.

A sequência de fusões nos ciclos ruidosos terminando em uma única grande região fica evidente na figura (4.17.a) assim como as *janelas de periodicidade*, que são as faixas claras em meio às regiões caóticas. Nelas, a auto afinidade do mapa sugere a nova cascata de duplicações de período que leva o sistema ao caos novamente. Para a maior delas, em $\mu \approx 3,83$, a diferença é que após uma bifurcação tangente, o sistema apresente um 3-ciclo e por isso, a cada duplicação, o período passa a $3 \cdot 2^m$ e não a 2^m como antes.

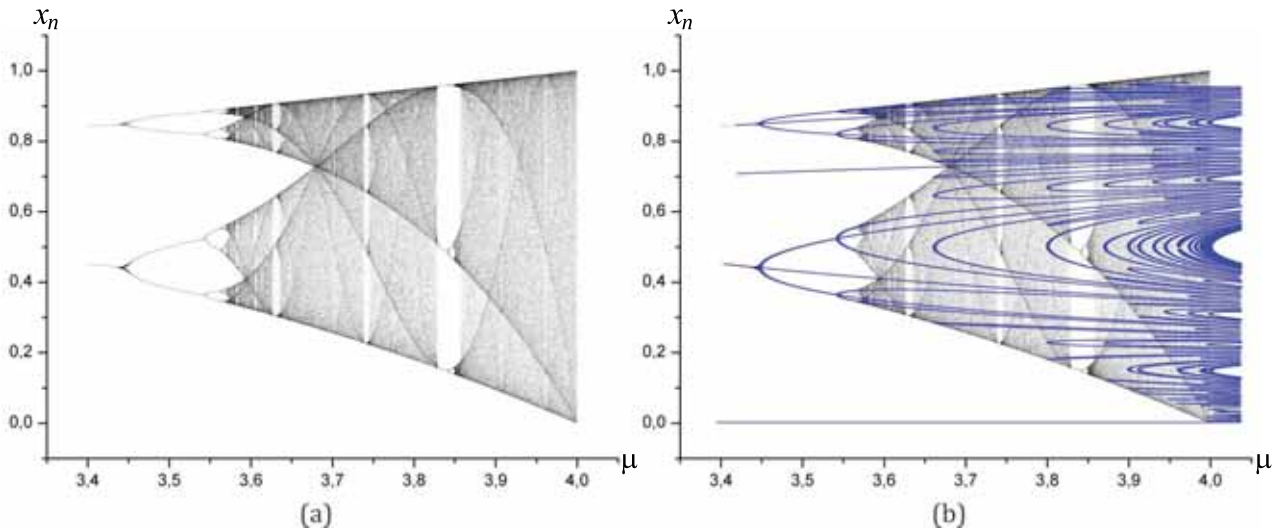


Figura 4.17: Mesmo para $\mu > \mu_\infty$ existem infinitos pontos fixos de diferentes periodicidades, e infinitos m -ciclos. Existem também incontáveis pontos x_0 que levam a trajetórias aperiódicas (porém limitadas).

A figura (4.17.b) foi gerada sobrepondo a parte (a) ao gráfico da curva dada implicitamente pela equação $f^8(x) = x$. Nela, é possível perceber, como Robert M. May afirma em seu artigo *Simple Mathematical Models With Very Complicated Dynamics* (1976), “...[para $\mu > \mu_\infty$] there are an infinite number of fixed points with different periodicities, and an infinite number of different periodic cycles. There are also an uncountable number of initial points x_0 which give totally aperiodic (although bounded) trajectories; no matter how long the time series generated by $f(x)$ is run out, the pattern never repeats.” Robert M. May (1976). Em uma tradução livre: mesmo para $\mu > \mu_\infty$ existem infinitos pontos fixos de diferentes periodicidades, e infinitos m -ciclos. Existem também incontáveis pontos x_0 que levam a trajetórias aperiódicas (porém limitadas).

A fusão das regiões caóticas citada anteriormente bem como o retorno abrupto do caos após uma janela de periodicidade e até mesmo a limitação $\mu < 4$ são efeitos das *crises*, que podem ser melhor visualizadas na figura (4.18) e serão exploradas mais adiante.

4.3 Expoentes de Lyapunov

Diante do exposto até aqui, a pergunta que surge é como podemos afirmar, com certeza, que existe comportamento caótico no sistema? E a resposta repousa na dependência sensível às condições iniciais (DCI), que implica que duas condições iniciais infinitesimalmente próximas podem se afastar exponencialmente conforme as iterações vão sendo calculadas. A seguir tentaremos quantificar esta dependência. Sejam $x_0, y_0 = x_0 + \delta_0$ e δ_n de tal maneira que $y_n - x_n = \delta_n$. Definimos o expoente de Lyapunov para a órbita iniciando em x_0 como sendo o valor λ tal que $|\delta_n| \rightarrow |\delta_0|e^{n\lambda}$ quando $n \rightarrow \infty$. Mas é claro que esta definição não favorece os cálculos computacionais e assim devemos tentar escrever o expoente λ em termos mais convenientes. Note que as igualdades abaixo são válidas apenas no limite

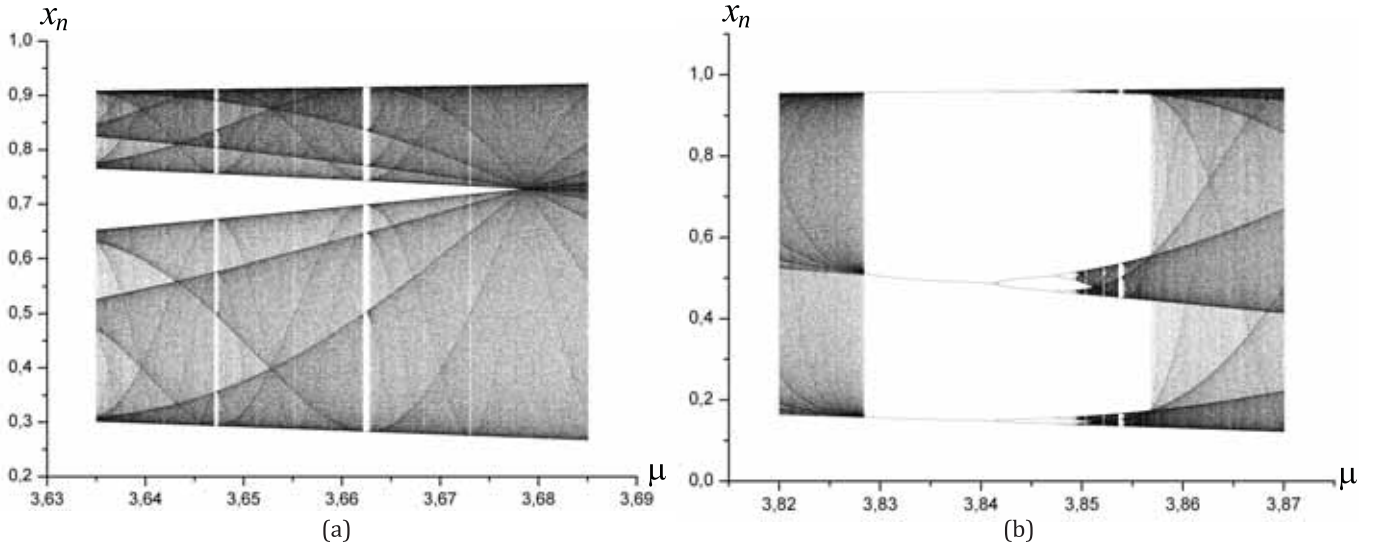


Figura 4.18: O efeito de algumas crises. Em (a) vemos a fusão dos intervalos disjuntos de um ciclo ruidoso em uma única região caótica e em (b), a maior janela de periodicidade. Apesar da cascata de duplicações de período, o ciclo ruidoso de período 3 subitamente dá lugar uma única região caótica em $\mu \approx 3,858$.

$n \rightarrow \infty$, embora este será calculado apenas ao final.

$$e^{n\lambda} = \frac{|\delta_n|}{|\delta_0|} \Rightarrow n\lambda = \ln \left| \frac{\delta_n}{\delta_0} \right|,$$

e assim

$$\lambda = \frac{1}{n} \ln \left| \frac{\delta_n}{\delta_0} \right| = \frac{1}{n} \ln \left| \frac{y_n - x_n}{\delta_0} \right| = \frac{1}{n} \ln \left| \frac{f^n(y_0) - f^n(x_0)}{\delta_0} \right| = \frac{1}{n} \ln \left| \frac{f^n(x_0 + \delta_0) - f^n(x_0)}{\delta_0} \right|.$$

Fazendo $\delta_0 \rightarrow 0$ a fim de que as condições iniciais x_0 e y_0 sejam infinitesimalmente próximas, temos

$$\lambda = \frac{1}{n} \ln |(f^n)'(x_0)|,$$

mas sabemos (equação 3.3) que

$$(f^m)'(x_0) = \prod_{i=0}^{m-1} f'(x_i),$$

e assim,

$$\lambda = \frac{1}{n} \ln \left| \prod_{i=0}^{n-1} f'(x_i) \right| = \frac{1}{n} \ln \prod_{i=0}^{n-1} |f'(x_i)| = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)|.$$

Finalmente, o expoente de Lyapunov para uma órbita começando em x_0 (e para um valor de μ fixo) é dado por

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)|.$$

A expressão acima é mais facilmente programável e o diagrama da figura (4.19) foi obtida através de um algoritmo que desprezou as primeiras 300 iterações do mapa e utilizou as próximas 1000 para o

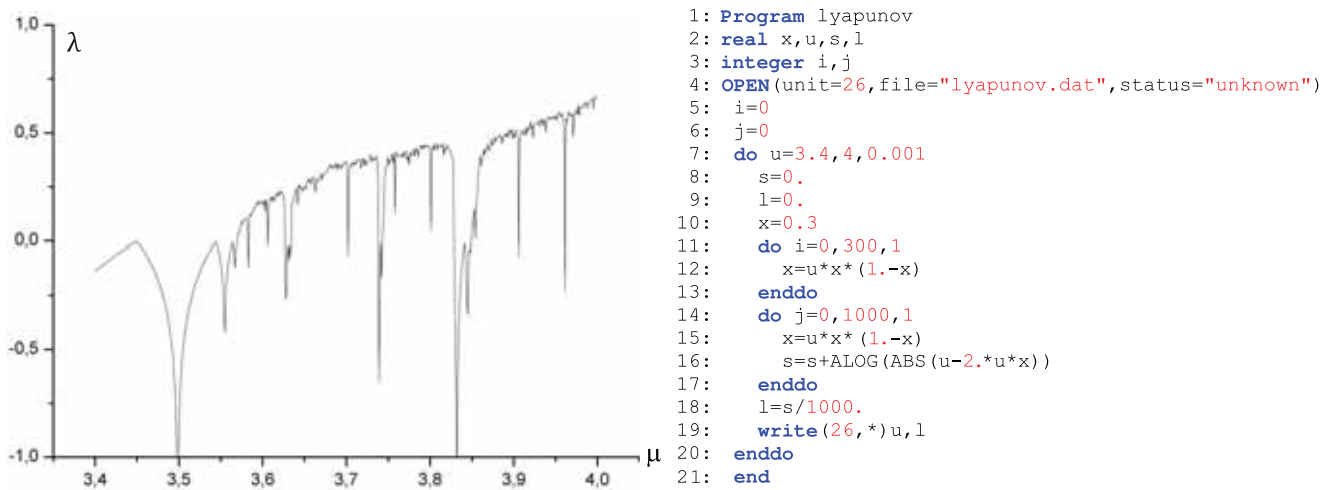


Figura 4.19: Diagrama dos expoentes de Lyapunov para o mapa logístico e o algoritmo utilizado.

cálculo do expoente λ para cada valor de μ , cujo passo utilizado foi de 0,001 e foram utilizados todos os pares (μ, λ) para a confecção do diagrama. O valor da condição inicial x_0 foi escolhido igual a 0,3.

Note que da maneira como são definidos os expoentes de Lyapunov, o valor λ mede a taxa exponencial de expansão das distâncias entre as iterações do mapa $(x_n$ e $y_n)$, dadas duas condições iniciais muito próximas $(x_0$ e $y_0)$. Sendo assim, $\lambda > 0$ implica DCI e assim, a existência de um atrator caótico. Outra propriedade dos expoentes de Lyapunov é que $\lambda = 0$ nos valores de μ onde ocorrem as bifurcações. A figura (4.20) permite observar todas estas propriedades. Note que mesmo para os valores de μ para os quais o sistema apresenta ciclos ruidosos, temos $\lambda > 0$, com exceção apenas nas janelas de periodicidade.

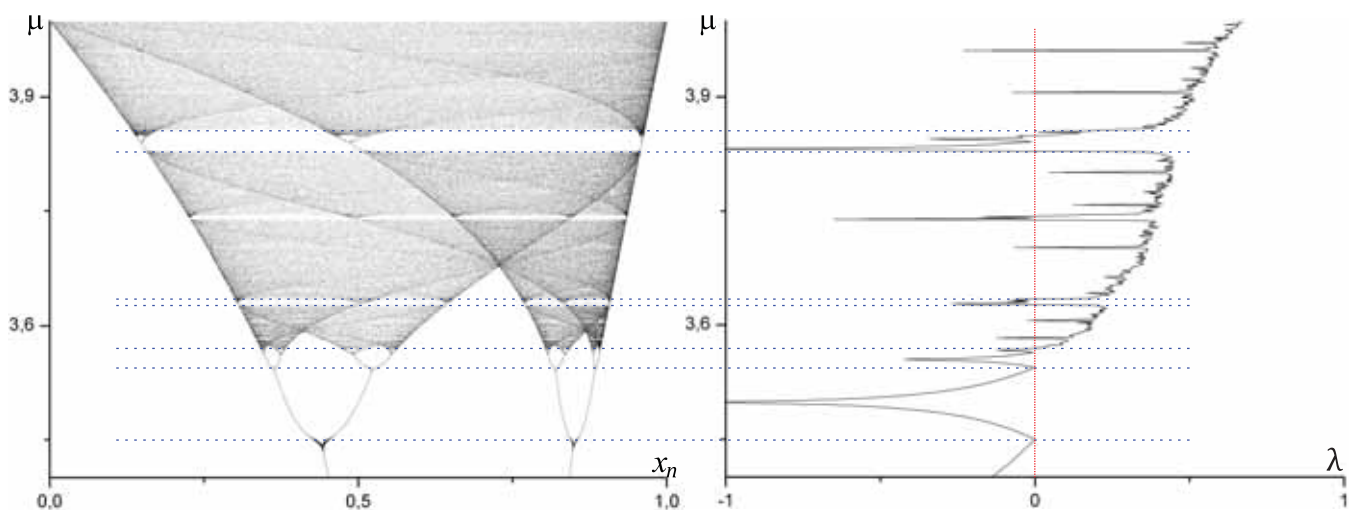


Figura 4.20: Os expoentes de Lyapunov se anulam nos pontos de bifurcação e são positivos para os valores de μ nos quais o sistema apresenta comportamento caótico.

Capítulo 5

Crises

Como já discutido, o mapa logístico segue uma rota para o caos conhecida como *cenário de Feigenbaum via duplicação de período* mas ainda nos questionamos sobre o que acontece com o atrator caótico depois que ele nasce. Ele continua a existir indefinidamente ou com a variação do parâmetro de controle o sistema pode voltar a apresentar ordem? Ele pode aumentar ou diminuir de tamanho?

É claro que algumas destas perguntas podem ser facilmente respondidas ao analisarmos os diagramas gerados numericamente no capítulo anterior, mas neste iremos nos dedicar exclusivamente às já citadas crises. Elas foram primeiramente caracterizadas por Celso Grebogi [6] e de acordo com Ananthkrishnan[1], hoje reconhecemos três tipos de crises e todos estão presentes no mapa logístico. São eles:

1. **Crise de fusão:** intervalos disjuntos de um ciclo ruidoso se fundem fazendo com que seu período caia pela metade e o atrator aumenta de tamanho suavemente como na figura (5.1). Note que antes da crise, já não existia ordem no sistema, porém o intervalo inferior mapeia o superior e vice-versa. Após a crise acaba por completo a previsibilidade do sistema.

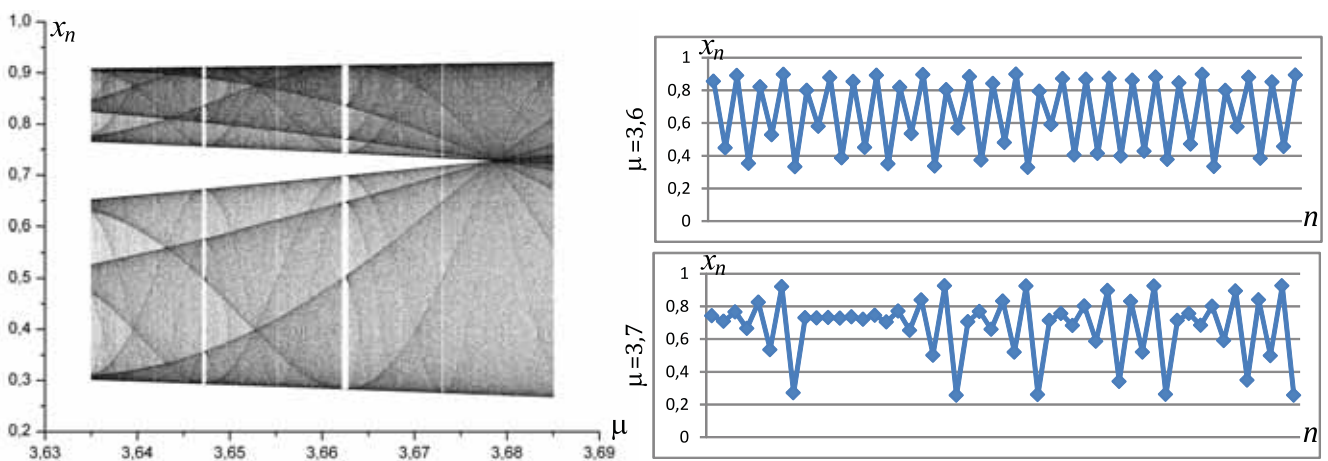


Figura 5.1: Para $\mu = 3,6$ o atrator é um ciclo ruidoso de período 2 e para $\mu = 3,7$ um único intervalo é visitado pelas iterações. A crise de fusão ocorre em $\mu \approx 3,68$.

2. **Crise interior:** Aumento abrupto do tamanho do atrator como na figura (5.2). Note que como

na crise de fusão, um ciclo ruidoso deu lugar a um atrator composto por um único intervalo, mas agora o período não foi apenas reduzido à metade e o aumento no tamanho do atrator não é suave.

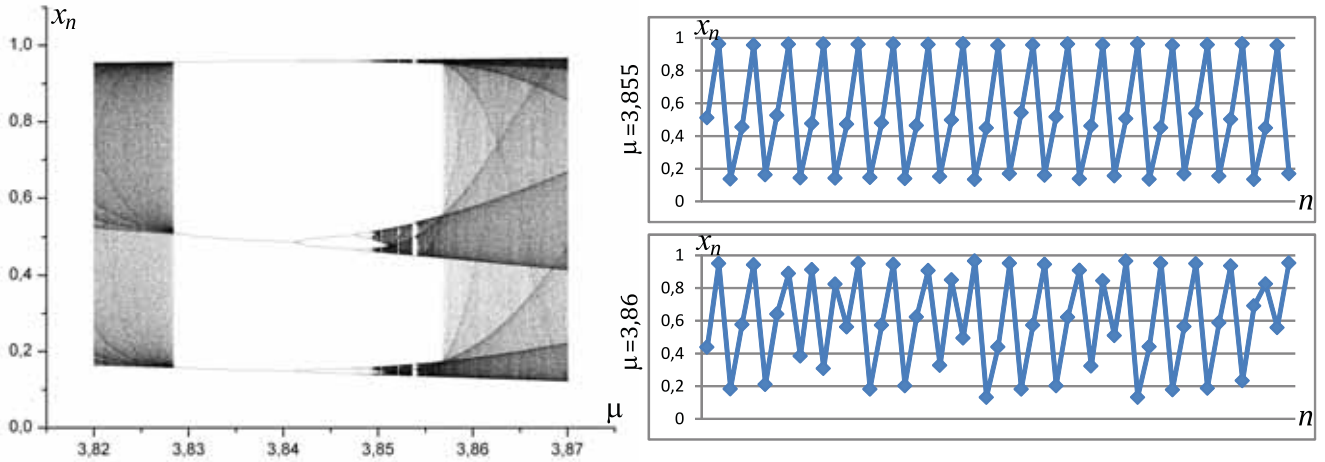


Figura 5.2: Para $\mu = 3,855$ o atrator é um ciclo ruidoso de período 3 e para $\mu = 3,86$ um único intervalo é visitado pelas iterações além de que o tamanho do atrator aumenta abruptamente. A crise interior ocorre em $\mu \approx 3,858$.

3. Crise de fronteira (ou exterior): súbita extinção do atrator caótico.

Antes de prosseguirmos com o estudo dos diferentes tipos de crises voltemos nossa atenção para as curvas mais escuras imersas nas regiões caóticas do diagrama de bifurcações do mapa logístico. Estas curvas são a chave para entendermos o padrão que rege as crises e estão relacionadas com as iterações do ponto $x_0 = 0,5$. De fato, na região caótica elas coincidem exatamente com as $f^i(0,5)$ e são uma aproximação das mesmas na região periódica do diagrama como podemos perceber na figura (5.3). É claro que aqui estamos considerando os valores de $f^i(0,5)$ em função do parâmetro μ . Veremos nas seções seguintes que as crises ocorrem nas interseções destas curvas.

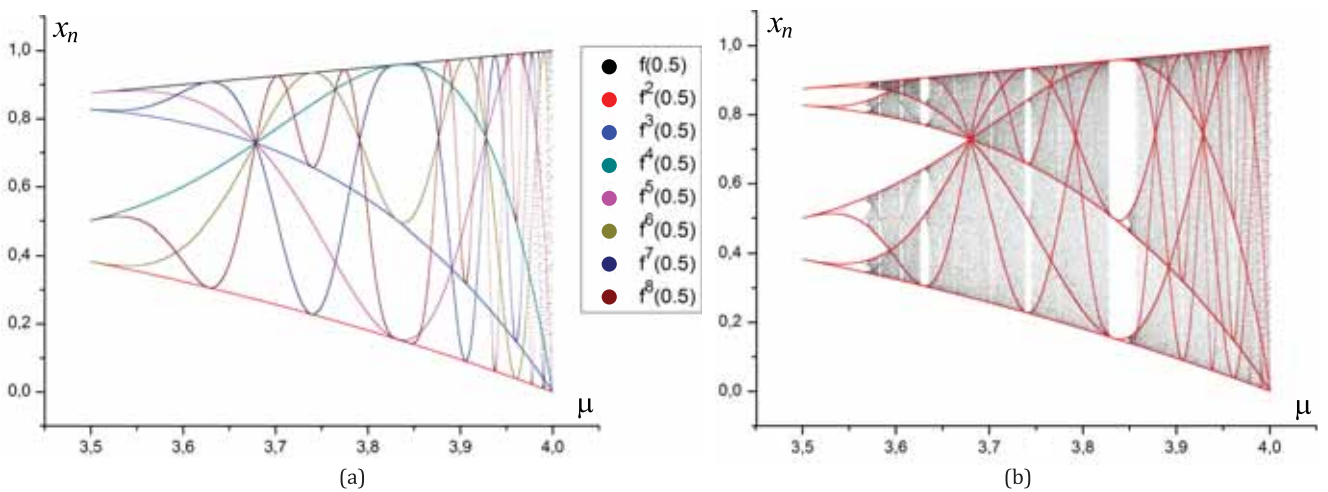


Figura 5.3: (a) As oito primeiras iterações de $x_0 = 0,5$ e em (b) temos uma sobreposição das mesmas com o diagrama de bifurcações do mapa logístico ao fundo.

5.1 Crise de fusão

Uma crise de fusão ocorre sempre que intervalos disjuntos de um ciclo ruidoso se fundem fazendo com que seu período seja dividido ao meio e o atrator caótico aumenta de tamanho suavemente. Na figura (5.4.a) vemos uma seqüência de tais crises entre o valor $\mu_\infty \approx 3,57$ e a mais notável delas em $\mu \approx 3,68$ onde um ciclo ruidoso de período 2 dá lugar um atrator caótico composto por apenas um grande intervalo. Um outro exemplo é a que ocorre em $\mu \approx 3,593$ onde um ciclo ruidoso de período 4 dá lugar a um de período 2 e note que a cada crise de fusão o tamanho do atrator caótico aumenta suavemente.

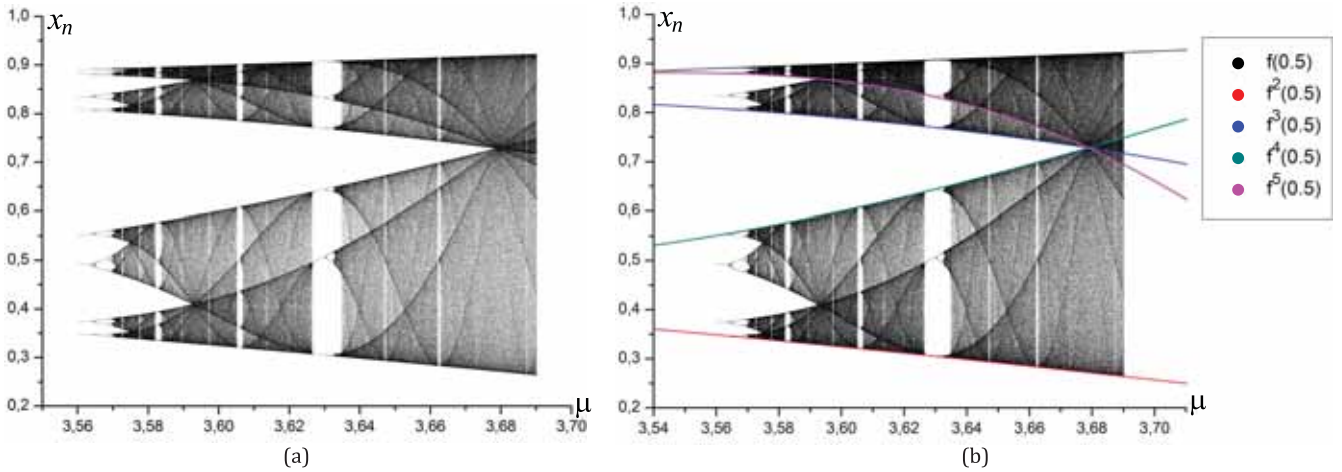


Figura 5.4: (a) Algumas crises de fusão. A mais notável ocorre em $\mu \approx 3,68$ e (b) nesta crise temos a interseção de todas as iterações de $x_0 = 0,5$ a partir da terceira.

Na figura (5.4.b) podemos notar que, na crise de fusão em $\mu \approx 3,68$, todas as $f^i(0,5), i \geq 3$ se intersectam naquele ponto. Notemos que sempre que $f^n(0,5)$ e $f^{n+1}(0,5)$ se cruzam, todas as seguintes também o farão.

De fato, seja $f^n(0,5) = p = f^{n+1}(0,5)$. Como $f^{n+1}(0,5) = f(f^n(0,5))$, temos que $p = f(p)$, ou seja,

$$0,5 \mapsto f(0,5) \mapsto \dots \mapsto f^n(0,5) = p \mapsto f^{n+1}(0,5) = p \mapsto f^{n+2}(0,5) = f(f^{n+1}(0,5)) = f(p) = p \mapsto \dots$$

Da conclusão $f(p) = p$ obtida anteriormente segue que p é um ponto fixo (1-ciclo) do mapa e vemos que $|f'(p)| > 1$, ou seja, pelo critério de estabilidade (teorema 3.2) esperamos que órbitas iniciando em pontos próximos a p se afastem dele. No entanto, não é o que acontece com a órbita iniciando em $x_0 = 0,5$ como podemos observar na figura (5.5.a). Chamamos estas órbitas de *eventualmente periódicas*¹, neste caso, de período 1 pois converge para o ponto fixo p .

Na figura (5.5.b) vemos a origem do ponto fixo instável p . Ele é o ponto x_b^* da figura (4.6), isto é, o ramo instável proveniente da duplicação de período que ocorre em $\mu = 3$. As outras crises de fusão

¹Esta denominação é uma tradução livre da utilizada por Ananthkrishnan[1] - *eventually periodic orbits*.

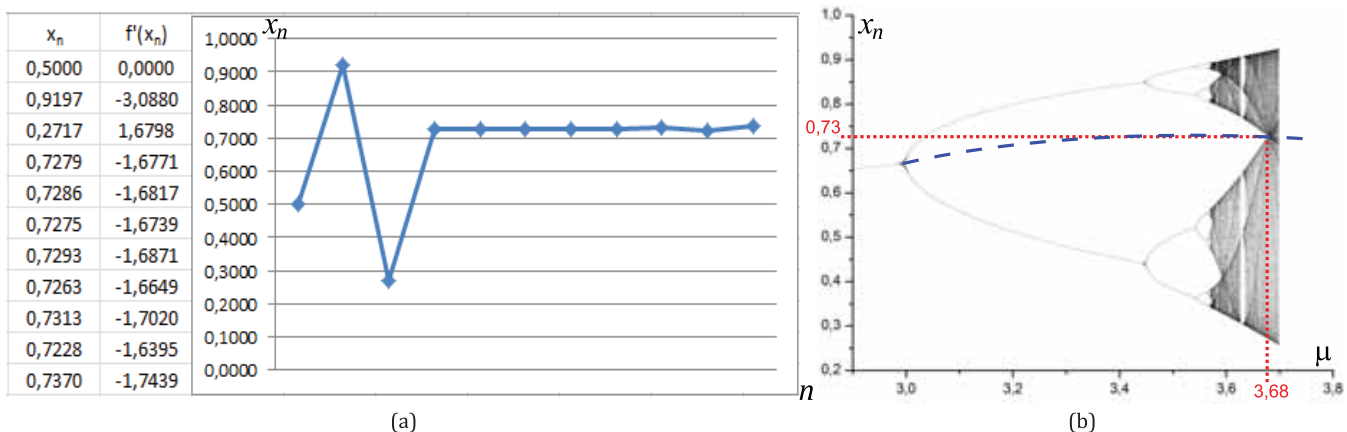


Figura 5.5: Em (a) vemos a órbita que inicia em $x_0 = 0,5$ para $\mu = 3,6788$ e o critério de estabilidade não sendo satisfeito embora as iterações converjam para $p \approx 0,73$. Esta é uma órbita eventualmente periódica de período 1. Em (b) vemos a origem do ponto fixo instável p .

também são causadas pela colisão entre os ciclos ruidosos e os ramos instáveis gerados nas duplicações de período.

Comparando as figuras (5.4.b) e (5.5.a) percebemos que elas são redundantes pois a primeira mostra que todas as $f^i(0,5)$ se intersectam na crise para $i \geq 3$, o que implica que, a partir da terceira, todas as iterações de $x_0 = 0,5$ coincidem com p , que é justamente a interpretação da figura (5.5.a).

Vejamus um outro exemplo: desta vez exploraremos a crise de fusão que ocorre em $\mu = 3,593$, na qual um ciclo ruidoso de período 4 tem seu período reduzido à metade. A figura (5.6.a) mostra as duplicações de período que originaram os ramos instáveis causadores da crise e em (5.6.b) vemos que para $i = 1, 2, 3, 4$ as $f^i(0,5)$ não passam pela crise, mas a exceção destes, para i ímpar, todas as $f^i(0,5)$ se intersectam na fusão dos dois intervalos superiores do atrator e, para i par, na dos inferiores.

Assim, podemos esperar a existência de uma órbita eventualmente periódica de período 2 que converge para o 2-ciclo instável $\{0,41; 0,87\}$ após a quarta iteração do ponto $x_0 = 0,5$. A figura (5.7) confirma esta previsão. Lembremos que a análise da estabilidade de um m -ciclo envolve um produto (expressão 3.3).

Aparentemente, um padrão rege os valores de i para os quais as $f^i(0,5)$ se intersectam em uma crise de fusão e, para formalizá-lo, usaremos alguns termos e conceitos da álgebra elementar. Sejam a e b inteiros, dizemos que a divide b , e escrevemos $a \mid b$, se existe um inteiro c tal que $b = ac$. Dizemos que a é congruo a b módulo m , m inteiro positivo, se $m \mid (a - b)$ e neste caso escrevemos $a \equiv b \pmod{m}$.

Notemos que na crise de fusão em $\mu \approx 3,68$ (figura 5.5) um ciclo ruidoso de período 2 deu lugar a um de “período 1”, observamos a existência de uma órbita eventualmente periódica de período 1 que convergiu para um ponto fixo (1-ciclo). Além disso, os inteiros i tais que as $f^i(0,5)$ se intersectam na crise são, dois a dois, “congruos módulo 1”. As utilizações das aspas aqui destacam situações extremas no contexto pois na primeira, o período 1 deteriora o ciclo ruidoso transformando-o em um atrator caótico sem nenhuma previsibilidade, nem mesmo aquela de intervalos que observamos nos outros

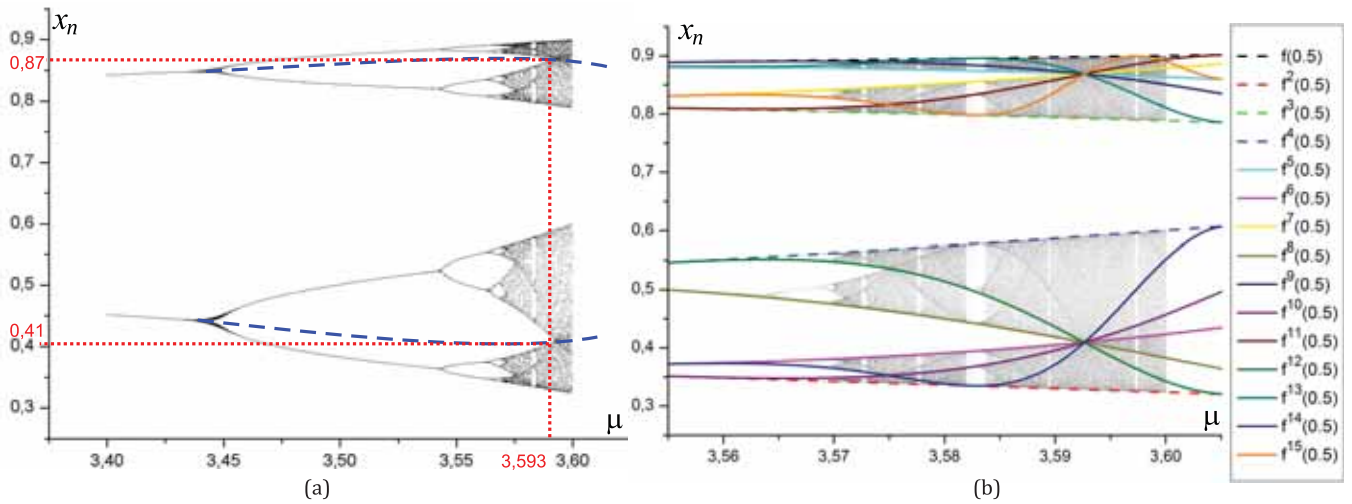


Figura 5.6: Em (a) vemos os ramos instáveis causadores da crise e em (b) vemos como as $f^i(0, 5)$ influenciam esta crise de fusão.

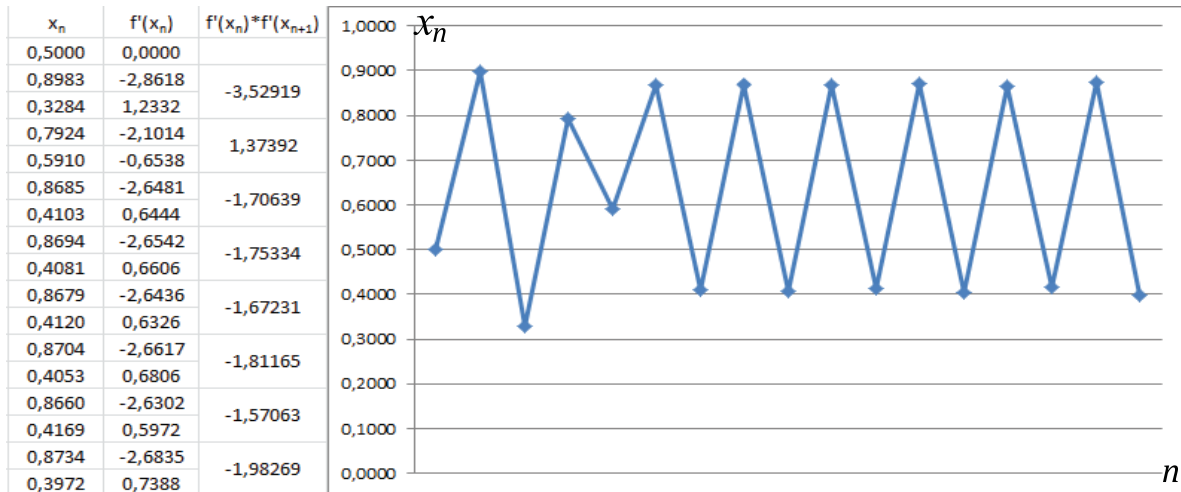


Figura 5.7: Como já esperávamos ao analisar a figura (5.6.b), para $\mu = 3, 593$ vemos a existência de uma órbita eventualmente periódica de período 2 que converge para um 2-ciclo, mesmo este não satisfazendo o critério de estabilidade.

ciclos ruidosos. Na segunda, é claro que para qualquer par de inteiros a e b tem-se $a \equiv b \pmod{1}$.

Na crise de fusão em $\mu \approx 3, 593$ um ciclo ruidoso de período 4 deu lugar a um de período 2 (seus 4 intervalos disjuntos fundiram-se dois a dois), observamos uma órbita eventualmente periódica de período 2 pois converge para um 2-ciclo. Além disso, os inteiros i tais que as $f^i(0, 5)$ se intersectam em cada fusão desta crise, são (dois a dois) côngruos módulo 2.

Veja na figura (5.8) que existe uma crise de fusão para $\mu \approx 3, 575$ e embora sua escala não permita concluir, o período do ciclo ruidoso passa de 8 para 4 observando que os inteiros i para os quais as $f^i(0, 5)$ se intersectam em cada uma das quatro fusões desta crise são (dois a dois) côngruos módulo

4, a saber, $f^9(0, 5)$ com $f^{13}(0, 5)$ e $f^{11}(0, 5)$ com $f^{15}(0, 5)$ (são as interseções visíveis na figura).

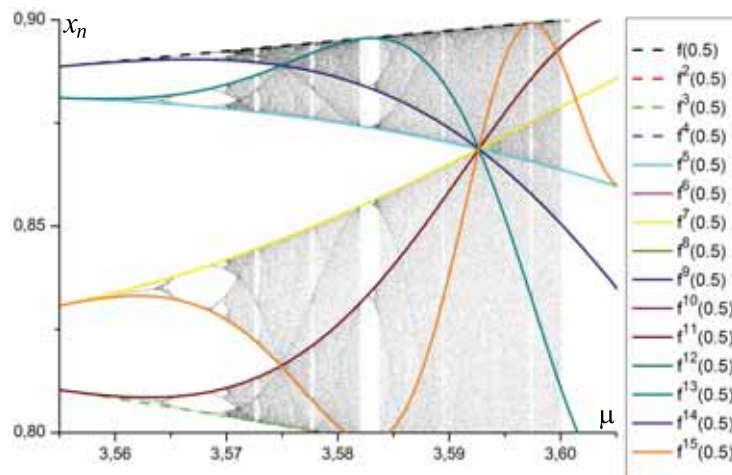


Figura 5.8: Uma ampliação da figura (5.6).

E o padrão que parece reger estas interseções é o seguinte: em uma crise de fusão, o período do ciclo ruidoso passa de $2m$ para m e as $f^i(0, 5)$ se intersectam de modo que os inteiros i são, dois a dois, cômruos módulo m .

5.2 Crise interior

Uma crise interior ocorre em cada janela de periodicidade quando um ciclo ruidoso de qualquer período dá lugar a um de período 1, isto é, uma única região passa a ser visitada aperiódicamente pelas iterações x_n , e o tamanho do atrator aumenta abruptamente. Nestas situações, diremos que o ciclo ruidoso *deteriorou*. As janelas de periodicidade do mapa são criadas por bifurcações tangentes e a crise ocorre na colisão de seus ramos instáveis com o ciclo ruidoso, como ilustra a figura (5.9).

A figura (5.10.a) é uma sobreposição da figura (5.2) com as quinze primeiras $f^i(0, 5)$. Nela podemos perceber o mesmo padrão observado na crise de fusão: um ciclo ruidoso de período 3 será deteriorado e os inteiros i para os quais as $f^i(0, 5)$ se intersectam nesta crise interior são, dois a dois, cômruos módulo 3. Nas partes (b), (c) e (d) da figura (5.10) temos as ampliações em cada intervalo do ciclo ruidoso na crise.

Note que nesta crise interior, para o intervalo superior, as $f^i(0, 5)$ que se intersectam são tais que $i \in \{4, 7, 10, 13\}$. Para o do meio temos $i \in \{6, 9, 12, 15\}$ e para o inferior, $i \in \{5, 8, 11, 14\}$ e a congruência módulo 3 fica evidente.

Aparentemente, o padrão que se observa nos valores de i tais que as $f^i(0, 5)$ se intersectam em uma crise interior é que se o ciclo ruidoso que será deteriorado tiver período m então os i serão cômruos módulo m .

Na figura (5.10.a) estão destacados os valores de $\mu \approx 3, 851$ e $\mu \approx 3, 854$. No primeiro vemos uma crise de fusão onde o período do ciclo ruidoso cai de 6 para 3. Veja nas ampliações (5.10.b-d) que,

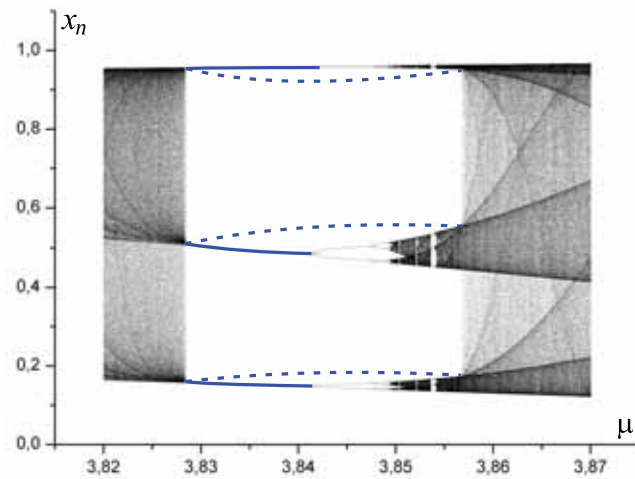


Figura 5.9: A crise interior é dada pela colisão do ciclo ruidoso com o ramo instável da bifurcação tangente que gerou a janela de periodicidade.

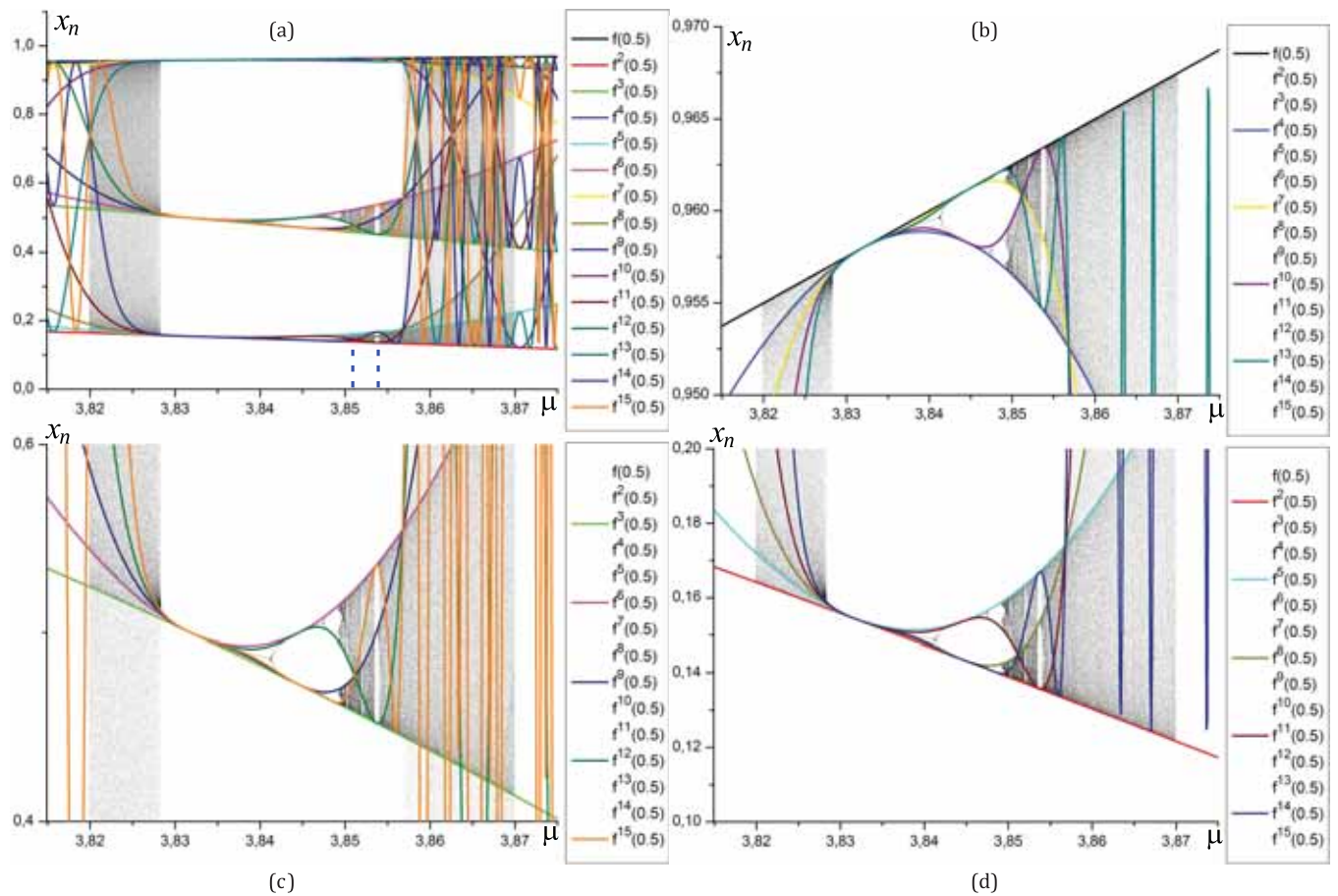


Figura 5.10: (a) A maior janela de periodicidade do mapa e as primeiras quinze $f^i(0, 5)$ e as ampliações no intervalo superior (b), do meio (c) e inferior (d) do ciclo ruidoso de período 3.

como esperávamos, os interiores i tais que $f^i(0, 5)$ se intersectam nesta crise são cômputos módulo 3. Em $\mu \approx 3,854$ vemos outra crise interior e mesmo as ampliações não sendo suficientes, podemos concluir que trata-se da deterioração de um ciclo ruidoso de período 9 pois inteiros i agora são cômputos módulo 9, a saber, f^4 com f^{13} e f^1 com f^{10} na figura (b), f^6 com f^{15} e f^3 com f^{12} na figura (c) e ainda, f^5 com f^{14} e f^2 com f^{11} na figura (d).

Analisar o valor de m na congruência para descobrir o período de um ciclo ruidoso envolvido em uma crise pode ser um método bastante útil, pois além de simples, é facilmente programável no aspecto precisão. Por exemplo, a figura (5.8), apesar de bastante ampliada, mostra uma janela de periodicidade, e conseqüentemente uma crise interior, muito estreita em $\mu \approx 3,597$ e é muito fácil perceber que o período do ciclo ruidoso deteriorado é 14, uma vez que vemos $f^1(0, 5)$ intersectar $f^{15}(0, 5)$ e $1 \equiv 15 \pmod{14}$. Por outro lado, se tentarmos constatar este fato usando o algoritmo da figura (4.15) já nos aproximamos do limite de precisão dos equipamentos e softwares utilizados. A figura (5.11) foi gerada com um passo de 10^{-6} , as primeiras $2 \cdot 10^3$ iterações foram desprezadas e as próximas 10^5 foram utilizadas pois verificou-se experimentalmente que o número de pontos era insuficiente para uma figura representativa e por isso o passo teria que ser refinado, porém o software utilizado não retornou resultados com passo de 10^{-7} . Comparando estes valores com os utilizados no capítulo 4 podemos esperar prejuízos no tempo reservado para as simulações.

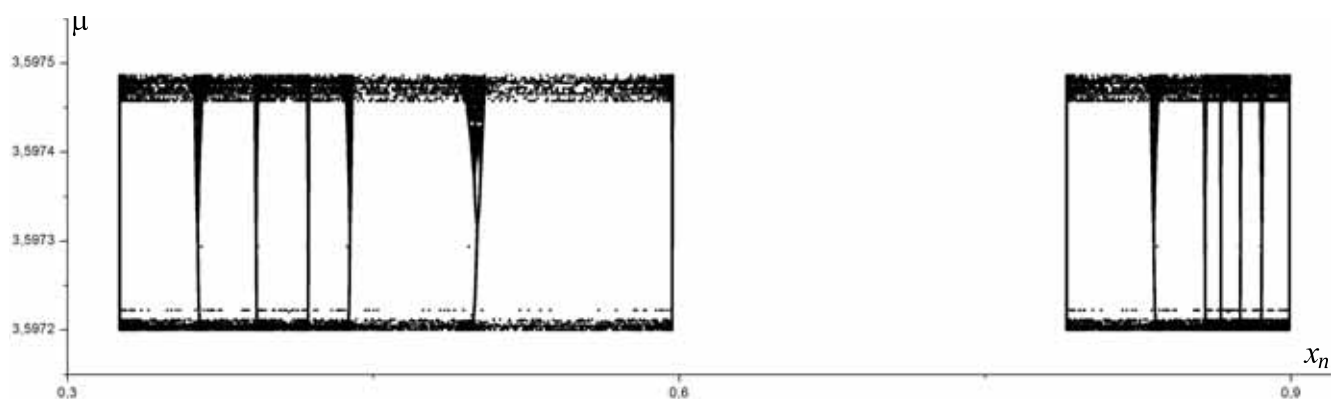


Figura 5.11: O ciclo ruidoso que é deteriorado na crise interior em $\mu \approx 3,597$ tem período 14. Observe que nesta figura o eixo vertical é o dos μ .

5.3 Crise de fronteira

O único exemplo de crise de fronteira (ou crise exterior) no mapa logístico ocorre em $\mu = 4$ na qual o atrator caótico subitamente deixa de existir. Para $\mu < 3$ o mapa apresenta apenas os dois pontos fixos $x_a^* = 0$ e $x_b^* = 1 - \frac{1}{\mu}$ e após a bifurcação transcítica em $\mu = 1$, x_a^* torna-se instável e sua colisão com o atrator caótico em $\mu = 4$ causa a crise de fronteira como mostra a figura (5.12.a). Por atrator caótico aqui, nos referimos a um ciclo ruidoso de período 1 e desta maneira, para que se mantenha o mesmo padrão observado nas outras crises, esperamos que as $f^i(0, 5)$ se intersectem de modo que os

inteiros i sejam cômugros modulo 1, o que pode ser comprovado na figura (5.12.b) na qual vemos uma órbita eventualmente periódica de período 1 pois converge para o ponto fixo (1-ciclo) instável $x_a^* = 0$. Note que com exceção da primeira ($i = 1$), todas as $f^i(0, 5)$ intersectam-se na crise de fronteira.

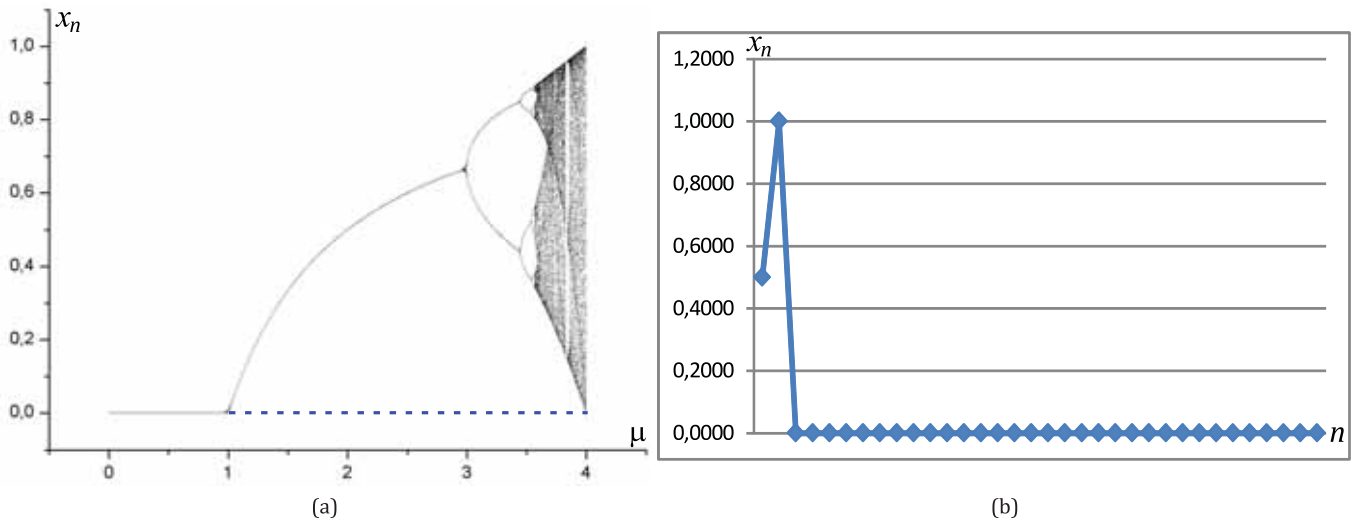


Figura 5.12: (a) O ramo instável da bifurcação transcritical colide com o atrator caótico causando a crise de fronteira em $\mu = 4$ e (b) uma órbita eventualmente periódica de período 1.

Finalmente observamos que m -ciclos instáveis continuam a existir para $\mu > 4$ e apenas as órbitas iniciando fora deles é que divergem (veja a figura 5.13). No entanto, como na figura (4.14), é computacionalmente impossível de seguir órbitas iniciando em ciclos instáveis utilizando o algoritmo da figura (4.15).

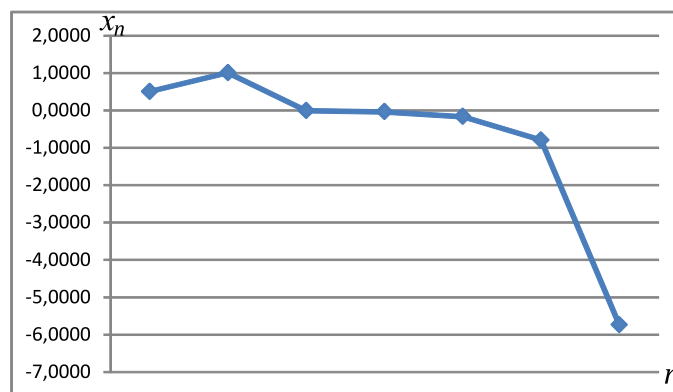


Figura 5.13: Para $\mu > 4$ as órbitas que não se iniciam sobre m -ciclos instáveis divergem.

Capítulo 6

Conclusão

Foi alcançado o objetivo central deste trabalho de identificar o funcionamento das crises por meio do estudo da dinâmica do mapa logístico $x_{n+1} = \mu x(1 - x)$. A figura (4.17.a) mostra o diagrama de bifurcações do mapa para $\mu \in [3, 4; 4]$. Nela, podemos perceber algumas curvas mais escuras imersas nas regiões onde o mapa apresenta comportamento caótico. Experimentalmente, verificamos que estas curvas representam as iterações do valor inicial $x_0 = 0,5$, isto é, tais curvas são os gráficos dos valores $f^i(0,5)$ em função de μ onde f^i é a i -ésima composição da função $f(x) = \mu x(1 - x)$ que define o mapa e as crises ocorrem nas interseções destas curvas.

Antes de apresentar o comportamento caótico o mapa passa por várias bifurcações e cada uma delas gera ramos instáveis (veja figura 3.4). Cada vez que um desses ramos colide com o atrator caótico ocorre uma crise e sua classificação depende do tipo de bifurcação que gerou o ramo, mas este não é o único padrão que rege as crises. Nas crises de fusão, em que um ciclo ruidoso terá seu período reduzido à metade, e nas interiores, em que um ciclo ruidoso terá seu período reduzido à 1, podemos determinar o período do ciclo ruidoso que será afetado pela crise identificando o conjunto dos i tais que as $f^i(0,5)$ se intersectam nela.

Finalmente, destacamos que o referido método de determinação do período do ciclo ruidoso afetado por uma crise mostrou-se muito útil pois apesar de simples, é melhor programável no aspecto precisão. Veja, por exemplo, que para gerar a figura (5.11) o limite de precisão do algoritmo da figura (4.15) foi atingido mas o período do ciclo ruidoso deteriorado pode ser facilmente determinado observando na figura (5.8), que é muito menos ampliada, que nesta crise ocorre a interseção de $f^1(0,5)$ com $f^{15}(0,5)$ e, portanto, tal período é 14.

Referências Bibliográficas

- [1] ANANTHKRISHNAN, N.; SAHAI, T. *Crises: Critical Junctures in a Life of a Chaotic Attractor*. Indian Academy of Sciences - Resonance, p.19-33, 2001.
- [2] BAPTISTA, M. S.; CALDAS, I. L. *Dynamics of the Kicked Logistic Map*. Chaos, Solitons & Fractals Vol.7 (1996) p325.
- [3] BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.
- [4] FIELDLER-FERRARA, N.; PRADO, C. P. C. *Caos: uma introdução*. 1. ed. São Paulo: Edigard Blucher, 1994.
- [5] FEIGENBAUM, M. J. *Quantitative Universality for a Class of Nonlinear Transformations*. Journal of Stat. Phys. 19, No1, 1978.
- [6] GREBOGI, C.; OTT, E.; YORKE, J. A. *Chaotic Attractor in Crisis*. Physical Review Letters, v.48, n.22, p.1507-1510, 1982.
- [7] MAY, R. M. *Simple Mathematical Models with Very Complicated Dynamics*. Nature, v.261, p.459-474, 1976.
- [8] OTT, E. Crises. Disponível em: <http://www.scholarpedia.org/article/Crises>. Acesso em 15 de janeiro de 2013
- [9] STROGATZ, S. H. *Nonlinear dynamics and chaos*. Nova Iorque: Perseus Books, 1994.
- [10] VIANA, R. L. *Introdução à dinâmica não-linear e caos*. Curitiba: UFPR, 2011.
- [11] VIDARTE, J. H. B., *Linearização suave de pontos fixos hiperbólicos*. USP - São Carlos. 2010.
- [12] VILLATE, J. E. *Introdução aos Sistemas Dinâmicos: Uma abordagem prática com Maxima* Versão 1.2, do 27 de Fevereiro de 2007.