



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Campus de Rio Claro

Geometria e Topologia das Superfícies através de Recorte e Colagem

Patrícia Casagrande Malaguetta

Dissertação apresentada ao Programa de
Pós-Graduação – Mestrado Profissional em
Matemática Universitária do Departamento
de Matemática como requisito parcial para a
obtenção do grau de Mestre

Orientadora
Profa. Dra. Elíris Cristina Rizzioli

2010

514 Malaguetta, Patrícia Casagrande
M236g Geometria e Topologia das Superfícies através de Recorte e Colagem/ Patrícia Casagrande Malaguetta- Rio Claro: [s.n.], 2010.
56 f.,il.,figs.,fots.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas.

Orientadora: Elíris Cristina Rizzioli

1. Topologia. 2. Superfícies Compactas. 3. Somas Conexas de Superfícies. I. Título

TERMO DE APROVAÇÃO

Patrícia Casagrande Malaguetta

GEOMETRIA E TOPOLOGIA DAS SUPERFÍCIES ATRAVÉS DE RECORTE
E COLAGEM

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática Universitária do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, pela seguinte banca examinadora:

Profa. Dra. Elíris Cristina Rizzioli
Orientadora

Prof. Dr. João Carlos V. Sampaio - Depto de Matemática- UFSCar-São Carlos

Prof. Dr. João Peres Vieira - Depto de Matemática- UNESP-Rio Claro

Rio Claro, 25 de Outubro de 2010

Ao meu marido que soube tão bem compreender os meus momentos de ausência em função deste trabalho, e pelo seu apoio irrestrito. Aos meus pais pela oportunidade de estudo, bem como seu prosseguimento.

Agradecimentos

Agradeço a Deus pelo dom de estudar, de persistir e de buscar novos conhecimentos.

Aos meus pais que me deram a vida e me ensinaram a vivê-la com dignidade, pelo amor, carinho, educação, dedicação, e pelo estudo que me proporcionaram.

Ao meu marido pela compreensão da minha ausência por estar estudando e me dedicando a este trabalho; também pelo respeito, incentivo, força e por acrescentar razão e beleza aos meus dias.

A minha professora orientadora pelo auxílio, disponibilidade de tempo e material, sempre com uma simpatia contagiante.

A todos os meus colegas do mestrado, pelo apoio e pela ajuda respeitosa em todos os momentos difíceis, mas em especial a Juliana Mauri que, além de me ajudar por todo esse tempo nos estudos para as provas, foi amiga em todos os instantes que precisei e me incentivou a ter ânimo para alcançar esta conquista.

A toda minha família, por respeitarem a minha ausência, a minha sogra pelo apoio e ajuda na construção do material didático, pelas idéias, e por ouvir minhas apresentações, mesmo sem entendê-las em sua totalidade.

E a todos aqueles que, de alguma forma, doaram um pouco de si para que a conclusão deste trabalho se tornasse possível.

A imaginação é mais importante que a ciência, porque a ciência é limitada, ao passo que a imaginação abrange o mundo inteiro.

Resumo

O presente projeto trata a topologia de superfícies fechadas através de ideias topológicas intuitivas. Mostramos que toda superfície fechada e orientável é topologicamente uma Esfera ou um Toro, ou ainda uma soma conexa de dois ou mais Toros; e também que toda superfície fechada e não-orientável é topologicamente um Plano Projetivo ou uma soma conexa de dois ou mais Planos Projetivos. Desta forma, obtemos uma classificação topológica para as superfícies fechadas orientáveis e não-orientáveis.

Palavras-chave: Topologia, Superfícies Compactas, Somas Conexas de Superfícies.

Abstract

This project deals with the topology of closed surfaces using intuitive topological ideas. We show that every closed surface orientable is topologically a Sphere or a Torus, or a connected sum of two or more Tori, and also that every closed surface and non-orientable is topologically a Projective Plane or a connected sum of two or more Projective Planes. Therefore, we obtain a topological classification for closed surfaces, orientable and non-orientable.

Keywords: Topology, Compact Surfaces, Connected Sum of Surfaces.

Lista de Figuras

2.1	Toro bidimensional e Esfera	13
2.2	Figuras isotópicas	14
2.3	Técnica recorte-colagem	15
2.4	Superfícies isotópicas	16
2.5	Figuras em passeio no Toro plano	17
2.6	Diagrama plano da Esfera	17
2.7	Diagrama plano do Plano Projetivo	18
2.8	Diagrama plano do Toro bidimensional	18
2.9	Diagrama plano da Garrafa de Klein.	19
2.10	Construção da Garrafa de Klein	19
2.11	Triângulos na Esfera	20
2.12	Triângulos Homeomorfos	20
2.13	Triangularização da Superfície	21
2.14	Faixa de Möbius	22
2.15	Superfícies orientáveis	22
2.16	Superfícies não-orientáveis	22
2.17	Soma conexa de dois Toros	23
2.18	Soma conexa do Toro com a Esfera	23
2.19	Soma conexa de dois Planos Projetivos	24
2.20	Soma conexa de dois Toros	25
3.1	Diagramas plano e palavras	28
3.2	Diagrama plano octogonal e sua palavra representação	28
3.3	Bitoro: resultado da soma conexa de dois Toros	29
3.4	Novo esquema do Plano Projetivo	30
3.5	Novo esquema da Esfera	30
3.6	Técnica de Recorte	32
3.7	Técnica de Colagem	32
3.8	Operações elementares	33
3.9	Esquema 1	36
3.10	Esquema 2	38
3.11	Esquema 3	41

3.12	Esquema 4	42
3.13	Esquema 5	42
3.14	Esquema 6	43
A.1	Recorte	50
A.2	Colagem	50
B.1	Experiência em sala de aula	53
B.2	Experiência em sala de aula 1	54
B.3	Experiência em sala de aula 2	54
B.4	Experiência em sala de aula 3	54
B.5	Experiência em sala de aula 4	55
B.6	Experiência em sala de aula 5	55
B.7	Experiência em sala de aula 6	55
B.8	Experiência em sala de aula 7	56
B.9	Experiência em sala de aula 8	56
B.10	Experiência em sala de aula 9	56

Sumário

1	Introdução	10
2	Topologia Intuitiva de Superfícies	13
2.1	Topologia das superfícies	13
2.2	Superfícies e seus diagramas planos	16
2.3	Superfícies fechadas e orientabilidade	20
2.4	Somas conexas de superfícies fechadas	22
3	Classificação das Superfícies Fechadas	27
3.1	Palavra de uma superfície	27
3.2	Operações Elementares	31
3.3	Preparação do Teorema da Classificação	35
3.4	Classificação de Superfícies Fechadas	44
	Referências	48
A	<i>Teorema 3.1</i>	49
B	<i>Experiências em sala de aula</i>	52

1 Introdução

Neste projeto tratamos da topologia de superfícies fechadas através de ideias geométricas e topológicas intuitivas. Na disciplina Espaços Topológicos, pode-se apresentar a Topologia sob um ponto de vista intuitivo e bastante enriquecedor que bem explorado pode proporcionar um caminho natural de entendimento dos conceitos formais desta teoria.

Com este propósito, confeccionamos um material didático que poderá ser facilmente compreendido por estudantes que não tenham conhecimento prévio destes conceitos matemáticos avançados e, este fato, nos permite sobretudo aproveitá-lo no ensino médio.

Estudamos especificamente superfícies fechadas orientáveis e não-orientáveis, somas conexas de superfícies fechadas, palavras (ou esquemas) de superfícies fechadas e de somas conexas. Exploramos, sobretudo, as superfícies: Esfera, Toro, Garrafa de Klein e Plano Projetivo.

Mostramos que toda superfície fechada e orientável é um espaço homeomorfo a uma Esfera ou um Toro, ou ainda uma soma conexa de dois ou mais Toros; e também que toda superfície fechada e não-orientável é um espaço homeomorfo a um Plano Projetivo ou uma soma conexa de dois ou mais Planos Projetivos. Ou seja, obtemos uma classificação topológica para as superfícies fechadas orientáveis e não-orientáveis.

Para o capítulo Topologia Intuitiva das Superfícies adotamos como principal referência bibliográfica a obra [1] do professor João Sampaio. Abordamos os tópicos Topologia das Superfícies; Superfícies e seus diagramas planos; Superfícies Fechadas e Orientabilidade e Somas conexas de superfícies fechadas.

Dada uma superfície listamos quatro deformações Legais que preservam as propriedades intrínsecas a esta, tais propriedades são denominadas propriedades topológicas e descrevem completamente o que chamamos de Topologia da Superfície. Apresentamos figuras que ilustram a combinação destas deformações para obter superfícies homeomorfas.

Apresentamos os diagramas planos circulares de uma Esfera e de um Plano Projetivo bem como os diagramas planos retangulares de uma Garrafa de Klein e de um Toro

bidimensional.

Para caracterizar a orientabilidade de uma superfície utilizamos a faixa de Möbius. Superfícies que contêm a faixa de Möbius são chamadas superfícies não-orientáveis; caso contrário, são chamadas superfícies orientáveis.

Sobre somas conexas de superfícies fechadas, observamos que esta aritmética entre superfícies não admite cancelamentos e seu elemento neutro é a Esfera. Vemos ainda que a soma conexa de um Toro e um Plano Projetivo é topologicamente homeomorfa à soma conexa de uma Garrafa de Klein e um Plano Projetivo.

Para o capítulo três Classificação das Superfícies Fechadas adotamos como principal referência bibliográfica a obra [2] do professor James Munkres. Apresentamos Palavra Representação (ou Esquema) de uma superfície, Operações Elementares e Teorema da Classificação de Superfícies Fechadas.

A partir de diagramas, determinamos o esquema próprio de uma determinada superfície, também fazemos o ato inverso, ao ser dado um esquema próprio obtemos o diagrama plano para descobrir a superfície.

Estudamos detalhadamente as operações elementares sobre esquemas, quais sejam, recortar, colar, renomear, permutar, inverter, cancelar e descancelar. Ilustramos o uso destas operações com um exemplo.

Demonstramos resultados preparatórios para a prova do Teorema da Classificação de Superfícies Fechadas. Estes resultados resumem-se em quatro Proposições estudadas detalhadamente através das operações elementares aplicadas em esquemas próprios.

Finalmente, na última seção, tratamos do Teorema da Classificação de Superfícies Fechadas. Dado um esquema próprio w , mostramos que w é equivalente a $aa^{-1}bb^{-1}$, $abab$, $(a_1a_1)(a_2a_2)\dots(a_ka_k)$ com $k \geq 2$, ou $(a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1})(a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1})\dots(a_nb_na_n^{-1}b_n^{-1})$ com $n \geq 1$, sendo que o primeiro esquema é do espaço S^2 , o segundo, do espaço P^2 , o terceiro do espaço kP^2 e o quarto do espaço nT^2 . Esta demonstração tem indução finita sobre o comprimento de w como fio condutor.

Consequentemente, se X é uma superfície fechada orientável, então X é homeomorfa à Esfera, ao Toro ou a uma soma conexa de dois ou mais Toros; se X é uma superfície fechada não-orientável, então X é homeomorfa a um Plano Projetivo, a uma soma conexa de dois Planos Projetivos (Garrafa de Klein) ou uma soma conexa de três ou mais Planos Projetivos.

Além das obras já citadas consultamos [3] e [4].

As figuras foram retiradas de sites e dos livros citados, sendo adaptadas de acordo com a necessidade apresentada neste texto. A data da pesquisa dos sites abaixo foi em 07 de abril de 2010.

- Figura p. 13 e p. 17 (Esfera):

[http : //www.prof2000.pt](http://www.prof2000.pt)

- Figura p. 16:

[http : //pt.wikipedia.org/wiki/Topologia](http://pt.wikipedia.org/wiki/Topologia)

- Figura p. 18 (Plano projetivo):

[http : //gdpais.blogspot.com/2009/08](http://gdpais.blogspot.com/2009/08)

- Figura p. 19 (Garrafa de klein):

[http : //upload.wikimedia.org/wikipedia/commons](http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons)

- Figura p. 20 (Esfera) :

[http : //www.diaadia.pr.gov.br/tvpendrive](http://www.diaadia.pr.gov.br/tvpendrive)

- Figura p. 20 (triângulos homeomorfos):

[http : //www.mat.ufrgs.br](http://www.mat.ufrgs.br)

- Figura p. 21 (Esfera):

[http : //gdpais.blogspot.com/2009/08](http://gdpais.blogspot.com/2009/08)

- Figuras das p. 22 e p. 23:

[http : //www.mat.ufg.br/bienal/2006/poster/marciamayumi.pdf](http://www.mat.ufg.br/bienal/2006/poster/marciamayumi.pdf)

2 Topologia Intuitiva de Superfícies

Neste capítulo estudamos o conceito intuitivo de topologia das superfícies, bem como as deformações que preservam ou não esta topologia. Vemos a definição de superfícies isotópicas e homeomorfas, diagrama das superfícies: Esfera, Plano Projetivo, Toro bidimensional e Garrafa de Klein.

Analisamos como se deve fazer colagens estratégicas para a obtenção destas superfícies. Estudamos e utilizamos a Faixa de Möbius para caracterizar a orientabilidade de superfícies fechadas. Finalizamos este capítulo tratando de soma conexa de superfícies fechadas.

2.1 Topologia das superfícies

Intuitivamente, pensamos Superfície como um objeto geométrico bidimensional o qual é mentalmente concebido através de nossa noção geométrica (euclidiana) formada pelas experiências vivenciadas até aquele momento. Podemos citar vários exemplos de superfícies, um deles, a Superfície Esférica (Esfera).

Já uma definição formal de superfície requer conceitos de topologia e cálculo avançado. Em nosso trabalho estudamos apenas o conceito e a definição de superfície intuitivamente, a partir de exemplos e figuras.

Assumimos que as superfícies não tem espessura, sendo assim, podemos construir um modelo de uma superfície fazendo uso de uma película de material maleável e elástico; por exemplo uma bola de plástico e uma câmara de ar representam respectivamente Superfícies Esféricas e o Toro bidimensional.



Figura 2.1: Toro bidimensional e Esfera

Dada uma superfície, listamos a seguir quatro tipos de deformações que preservam propriedades intrínsecas àquela superfície:

1. Esticar ou inflar a superfície ou partes dela;
2. Encolher a superfície ou partes dela;
3. Entortar a superfície ou partes dela;
4. Recorte - colagem: Cortar a superfície segundo uma linha suave nela demarcada e logo após colar novamente, uma na outra, as bordas geradas por esse recorte, resgatando assim a superfície original com a linha demarcada.

Tais propriedades são denominadas propriedades topológicas e estas descrevem completamente o que chamamos de **Topologia da Superfície** em questão, ou seja, podemos dizer que a Topologia de uma Superfície é o conjunto de aspectos geométricos que se mantêm inalterados quando aplicada uma das deformações acima citadas. Neste contexto, essas deformações são denominadas **Deformações Legais**.

Destas Deformações Legais surgem classificações para as superfícies pois, se uma superfície S_1 é obtida de outra S_2 por uma combinação, em um número finito de vezes, de algumas ou todas as três primeiras Deformações Legais dizemos que S_1 é **isotópica** a S_2 . Ainda se uma superfície S_1 é obtida de outra S_2 por uma combinação finita das quatro Deformações Legais, dizemos S_1 é **homeomorfa** a S_2 .

Sendo assim podemos dizer que superfícies isotópicas são superfícies homeomorfas.

Vejam os através do esquema abaixo duas superfícies isotópicas: a superfície no alto à esquerda é isotópica à superfície no alto à direita.

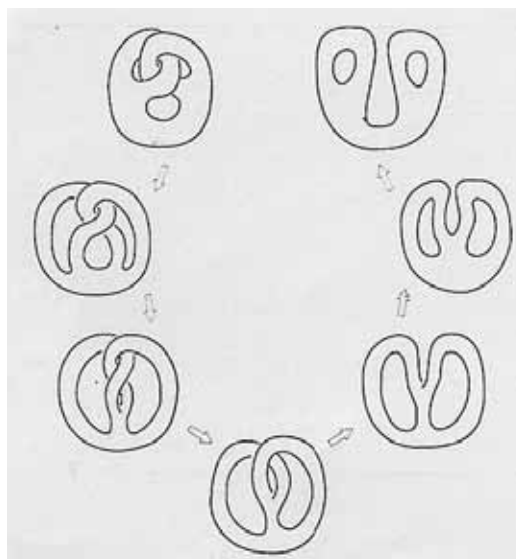


Figura 2.2: Figuras isotópicas

Utilizamos somente as três primeiras deformações legais para esta conclusão, ou seja, analisando o esquema acima no sentido anti-horário (sentido que indica as setas) observamos que a superfície começa ser deformada esticando-a nas laterais, encolhendo e entortando sua parte central, na qual o espaço que havia em seu centro vai diminuindo até que não se tenha mais qualquer abertura em sua parte central. Assim nos fornece a superfície que se encontra no alto do canto direito. Esta superfície é isotópica à superfície inicial e podemos também observar que o entrelaçado existente no centro da superfície já não existe mais, não foi preciso em momento algum o procedimento de recorte e colagem.

A seguir questionamos a afirmação recíproca, ou seja, duas superfícies homeomorfas são isotópicas. Intuitivamente através do esquema abaixo é possível concluir que essa afirmação não é verdadeira.

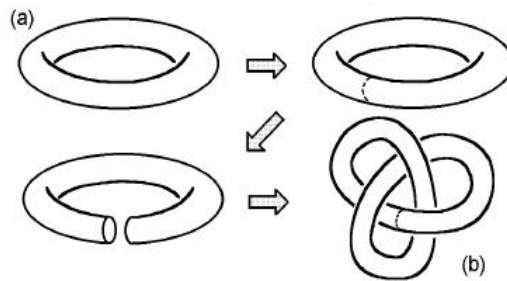


Figura 2.3: Técnica recorte-colagem

Analisando o esquema acima vemos que neste caso, além das três primeiras deformações, houve a utilização do procedimento de recorte e colagem, obtendo assim o homeomorfismo entre a superfície (a) e a superfície (b).

Observamos que para demonstrar a não isotopia entre as superfícies (a) e (b) requer ferramentas da Teoria dos Nós, que não abordamos neste trabalho.

Abaixo um outro exemplo de superfícies isotópicas.

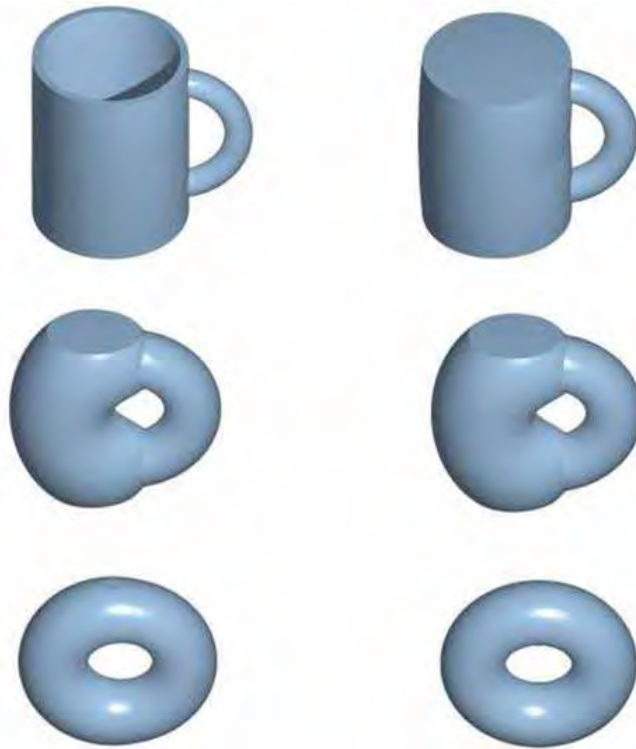


Figura 2.4: Superfícies isotópicas

As Deformações que não são Legais, são chamadas as **Ilegais**. Listamos a seguir, algumas Deformações Ilegais importantes:

1. Cortar a superfície, segundo uma curva nela demarcada, e não tornar a colar um no outro, os bordos gerados pelo recorte;
2. Realizar colagens de modo arbitrário, fazendo com que dois ou mais pontos antes separados se tornem um só ponto da superfície;
3. Encolher a superfície ou algumas de suas partes, de maneira que os pontos antes separados se aglutinem num só ponto.

2.2 Superfícies e seus diagramas planos

As superfícies podem ser representadas por diagramas planos na qual nos é fornecida a superfície desejada através de colagens estratégicas dessas regiões poligonais. Nessa seção estudamos os diagramas planos de uma Superfície Esférica, de um Toro bidimensional, da Garrafa de Klein e do Plano Projetivo, bem como a construção de cada uma destas superfícies.

É de extrema importância ressaltar que o significado de colar uma aresta na outra não significa passar cola nas arestas e grudá-las. Por exemplo, no caso do Toro, após

uma colagem, um habitante fictício dessa superfície emerge para dentro do retângulo ao cruzar a aresta superior, que foi colada na inferior e o mesmo se dá para as arestas esquerda e direita.

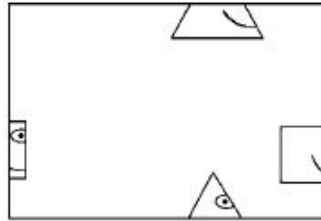


Figura 2.5: Figuras em passeio no Toro plano

Primeiramente analisamos o diagrama de uma Superfície Esférica, sendo que o diagrama plano que a representa é um diagrama plano circular onde são usados neste caso arestas curvilíneas.

A construção de uma Esfera é bem simples, basta colarmos as arestas, ou seja, colamos a aresta direita na aresta esquerda, como indica as setas simples demarcadas nas arestas, sem fazer qualquer tipo de retorção. Lembrando que os dois vértices do diagrama não representam o mesmo ponto na superfície. Dessa forma obtemos uma Superfície Esférica e o diagrama plano circular deixa de existir.

Observe a figura: do lado esquerdo o diagrama plano da Esfera e do lado direito a Esfera.



Figura 2.6: Diagrama plano da Esfera

O Plano Projetivo possui o mesmo diagrama plano que a Superfície Esférica, mas sua construção é bem diferente, ou seja, as setas simples demarcadas nas arestas circulares da direita e da esquerda também são coladas uma na outra, mas por possuírem direções opostas é necessário que façamos uma retorção antes da colagem. Logo a superfície encontrada é um Plano Projetivo e neste caso, os dois vértices do diagrama se tornam um único ponto no final da construção.

Vejamos: do lado esquerdo o diagrama plano do Plano Projetivo e do lado direito o Plano Projetivo.



Figura 2.7: Diagrama plano do Plano Projetivo

O diagrama plano de um Toro bidimensional é um retângulo plano, e nesse caso as arestas deixam de ser curvilineas. Sendo assim, para que sua construção seja feita, basta utilizar uma colagem estratégica, ou seja, a aresta de cima do retângulo é colada na aresta de baixo, sendo demarcadas com setas simples e a da direita colada na aresta esquerda que por sua vez são arestas demarcadas por setas duplas.

É necessário observar que as setas demarcadas em cada uma das arestas nos orientam para fazer a construção correta, ou seja, setas iguais e de mesma direção devem se sobrepor sem que haja qualquer retorcão. Após obter o Toro bidimensional nota-se que todos os vértices do diagrama plano se tornam um só ponto na superfície já construída, nos fornecendo, desta maneira, a superfície do Toro bidimensional. Como nos mostra a figura abaixo: do lado esquerdo o diagrama plano do Toro bidimensional e do lado direito o Toro.

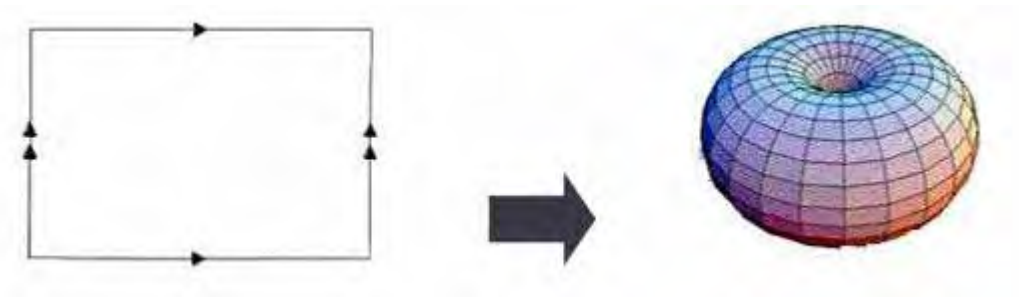


Figura 2.8: Diagrama plano do Toro bidimensional

Para finalizar as construções das superfícies que estudamos, analisamos a Garrafa de Klein que possui o mesmo diagrama plano que o Toro bidimensional, porém há uma grande diferença em sua construção. Mesmo tendo um diagrama plano em forma de retângulo e a colagem sendo feita basicamente seguindo os mesmos passos que na construção anterior, temos que ficar atentos, pois, nessa construção as arestas que possuem setas duplas possuem direções opostas e assim elas só se sobrepõem se houver

uma retorção ao colarmos tais arestas. Já as arestas de cima e de baixo continuam possuindo setas com a mesma demarcação (setas simples).

Após a colagem, assim como no Toro, todos os vértices do diagrama plano tornam-se um só ponto. Outro fato muito importante na construção da Garrafa de Klein é a existência de uma Faixa que a torna uma superfície não-orientável, faixa esta que chamamos Faixa de Möbius. Na figura 2.9 a seguir temos: do lado esquerdo o diagrama plano da Garrafa de Klein e do lado direito a Garrafa de Klein.



Figura 2.9: Diagrama plano da Garrafa de Klein.

Finalizamos esta seção apresentando detalhes da construção da Garrafa de Klein.

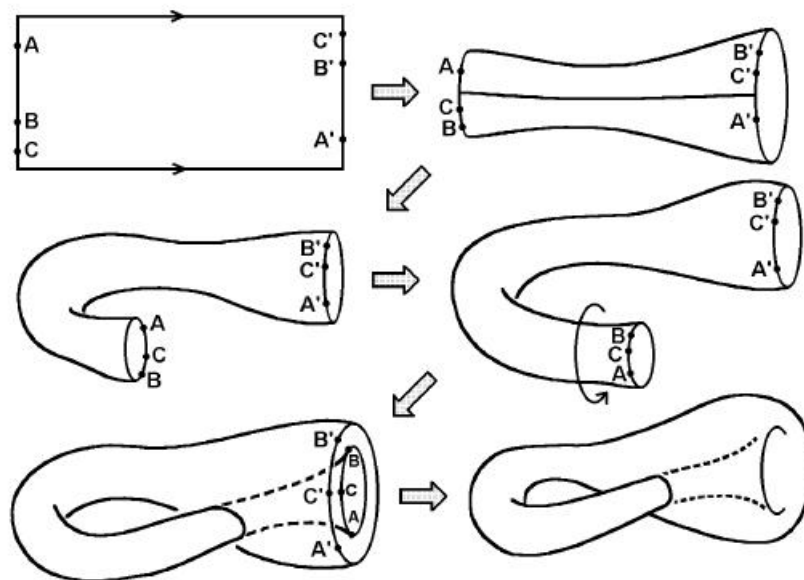


Figura 2.10: Construção da Garrafa de Klein

Observamos que na construção da Esfera e do Toro Bidimensional não foi necessário qualquer retorção, assim as superfícies não apresentam a existência da Faixa de Möbius, já na da Garrafa de Klein e do Plano Projetivo houve necessidade de retorção o que garante a existência da Faixa de Möbius nessas superfícies.

2.3 Superfícies fechadas e orientabilidade

Definimos triângulo em uma superfície como sendo uma porção desta superfície a qual é homeomorfa a uma região triangular plana. Note que o triângulo de uma superfície possui três vértices, três arestas e uma face. Por exemplo, na superfície esférica um triângulo é como descrito na figura abaixo:

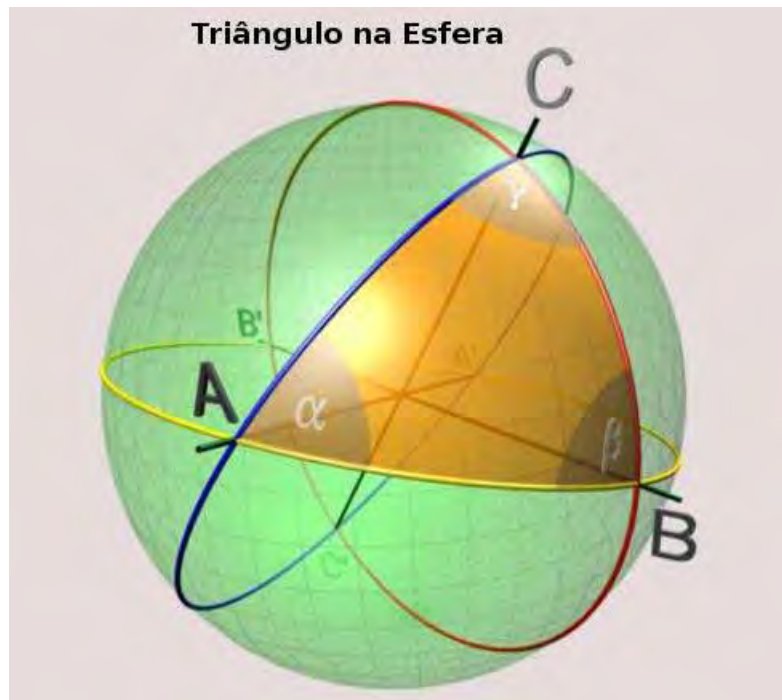


Figura 2.11: Triângulos na Esfera



Figura 2.12: Triângulos Homeomorfos

Triangularização da superfície é uma coleção de triângulos desta, a qual satisfaz as seguintes situações:

1. Cada par de triângulos da coleção tem em comum uma aresta ou um vértice, ou nada em comum;
2. Cada aresta de um destes triângulos é comum a exatamente dois triângulos;

3. Para cada par de pontos P e Q da superfície, existe uma sequência de n triângulos, digamos $\Delta_1, \dots, \Delta_n$ com P na região triangular Δ_1 e Q na região triangular Δ_n , tal que cada dois triângulos consecutivos dessa sequência tem uma aresta em comum.

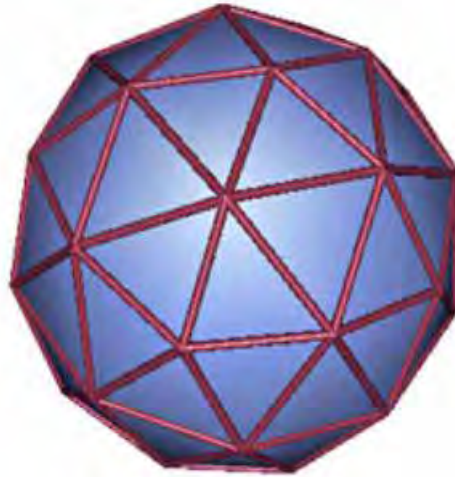


Figura 2.13: Triangularização da Superfície

Superfície fechada é uma superfície que não possui bordo, que pode ser triangulada através de uma coleção finita de triângulos intrínsecos a essa superfície, a qual satisfaz às propriedades supracitadas. Isto nos garante que a distância entre quaisquer dois pontos nunca seja maior que certa distância máxima (geodésica).

Explorando a definição de superfície fechada observamos que a condição três na triangularização, nos garante que a superfície é conexa por caminhos, pois para cada dois pontos A e B da superfície, podemos ir de A até B por um caminho traçado em uma faixa de triângulos.

Por ser reunião de um número finito de triângulos, as superfícies fechadas são também chamadas de superfícies compactas.

Intuitivamente é fácil perceber que as superfícies nas quais estamos interessados, a saber, Esfera, Toro bidimensional, Plano Projetivo e Garrafa de Klein são superfícies fechadas. Porém, o plano Euclidiano não é uma superfície fechada pois embora não possua bordo, sempre que fixada uma distância, haverá dois pontos do plano Euclidiano que estarão separados por uma distância maior que a fixada. Desse modo não serão satisfeitas as condições necessárias para ser uma superfície fechada, tampouco o retângulo é uma superfície fechada, já que possui bordo.

Quanto à orientabilidade de uma superfície fechada, convencionamos dizer que uma superfície é não-orientável quando esta possui uma faixa de Möbius. Caso contrário, isto é, quando a superfície não contém uma faixa de Möbius, dizemos que a superfície é orientável.

Abaixo temos uma faixa de Möbius: um caminho que inverte orientação.

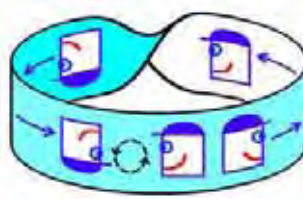


Figura 2.14: Faixa de Möbius

A Garrafa de Klein e o Plano Projetivo são superfícies não-orientáveis, enquanto a Esfera e o Toro bidimensional são superfícies orientáveis.

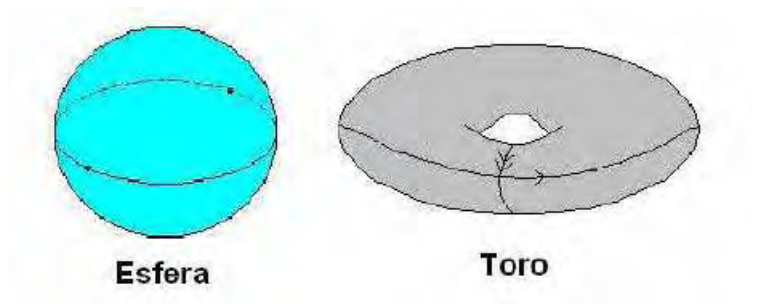


Figura 2.15: Superfícies orientáveis

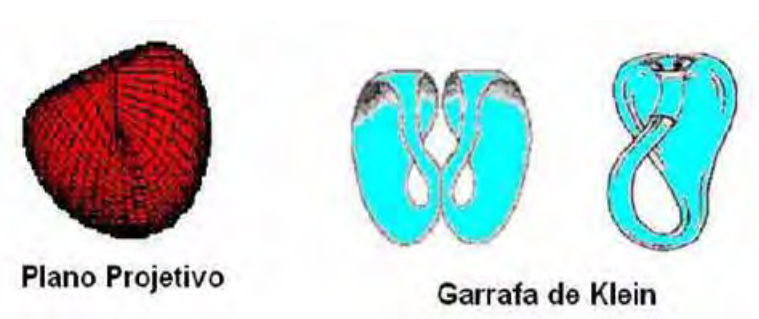


Figura 2.16: Superfícies não-orientáveis

2.4 Somas conexas de superfícies fechadas

As superfícies que estamos estudando até agora, Esfera, Toro bidimensional, Plano Projetivo e Garrafa de Klein recebem notações nesta seção para facilitar o estudo de somas conexas de superfícies fechadas. Para indicarmos a Esfera utilizamos a notação S^2 , para o Toro bidimensional T^2 , para a Garrafa de Klein K^2 e para o Plano Projetivo P^2 .

O símbolo de identificação da soma conexa é $\#$, então se temos superfícies M e N , temos que a soma conexa de M e N é uma nova superfície, indicada por $M\#N$, construída da seguinte maneira:

Comece por considerar M e N como duas superfícies separadas uma da outra, sem pontos em comum, próximas uma da outra, depois, corte e remova uma pequena região circular de cada uma das duas superfícies. Isto criará um pequeno bordo circular em cada uma delas. Para finalizar, estique um pouquinho as duas superfícies para fora, puxando-as pelos seus bordos circulares, fazendo com que os dois bordos se aproximem e, finalmente, cole os bordos circulares um no outro, obtendo a soma conexa de M e N , superfície denotada por $M\#N$.

Veja a figura abaixo:

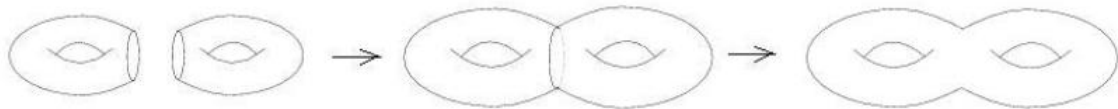


Figura 2.17: Soma conexa de dois Toros

Como visto anteriormente, a Esfera e o Toro bidimensional são superfícies fechadas orientáveis, e então S^2 , T^2 , $T^2\#T^2$, $T^2\#T^2\#T^2$, etc, é a lista infinita de superfícies fechadas orientáveis. O Plano Projetivo e a Garrafa de Klein são superfícies fechadas não-orientáveis, e a lista infinita de superfícies fechadas não-orientáveis é construída a partir de cópias de P^2 via somas conexas, isto é, P^2 , $P^2\#P^2$, $P^2\#P^2\#P^2$, etc.

A Esfera S^2 aparece apenas uma vez na listagem acima pois é o elemento neutro da soma conexa, ou seja, soma conexa entre uma Esfera e uma outra superfície qualquer resulta em uma superfície homeomorfa à superfície original. Por exemplo o Toro somado conexamente à Esfera é homeomorfo ao Toro. Simbolicamente $T^2\#S^2 = T^2$.

Observe a soma conexa abaixo:

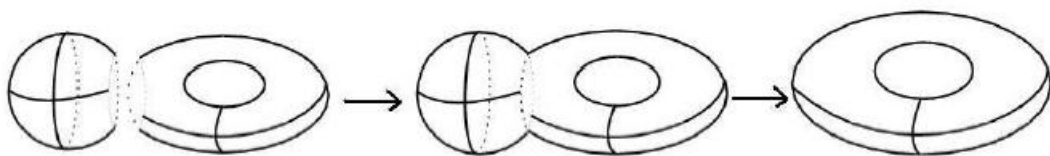


Figura 2.18: Soma conexa do Toro com a Esfera

Se temos duas superfícies representadas pelos seus respectivos diagramas planos, é possível obter a soma conexa delas também representada por um diagrama plano. O diagrama da soma é obtido de encaixes estratégicos das arestas dos diagramas planos das superfícies em questão, através da escolha de um vértice qualquer, escolhido em cada uma destas superfícies.

As arestas necessitam ser identificadas por letras e demarcadas por setas, lembrando que arestas demarcadas com a mesma letra são coladas uma às outras obedecendo a direção das setas nelas demarcadas.

A Garrafa de Klein não aparece na listagem infinita da soma conexa pois é obtida da soma conexa de dois Planos Projetivos. Analisando a sequência de figuras abaixo, concluímos que $P^2 \# P^2$ é topologicamente uma Garrafa de Klein.

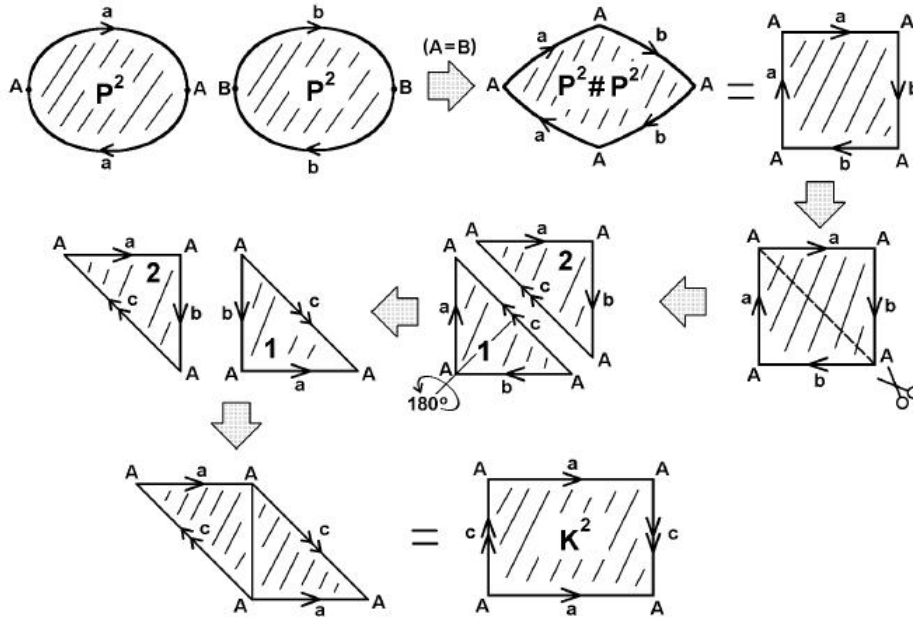


Figura 2.19: Soma conexa de dois Planos Projetivos

Para fazer esta construção, precisamos inicialmente de dois diagramas planos, diagramas estes que representam o Plano Projetivo, seguindo-se passo a passo as indicações da figura acima. É importante observar que após o recorte estratégico da soma conexa encontrada $P^2 \# P^2$ ao longo da linha c , as novas arestas são demarcadas com setas duplas e com mesma orientação, depois rotacionamos em 180° uma das regiões poligonais resultantes deste recorte, e então efetuamos a colagem para obter a Garrafa de Klein.

Um fato bem interessante é que a soma conexa de um Toro e um Plano Projetivo é uma nova superfície a qual é homeomorfa à soma conexa de uma Garrafa de Klein e um Plano Projetivo: $T^2 \# P^2 = K^2 \# P^2$. Isto nos permite mencionar que não existe cancelamento na soma conexa, sendo assim, como consequência se tem $T^2 \# P^2 = P^2 \# P^2 \# P^2$.

No esquema a seguir, temos a soma conexa de dois Toros.

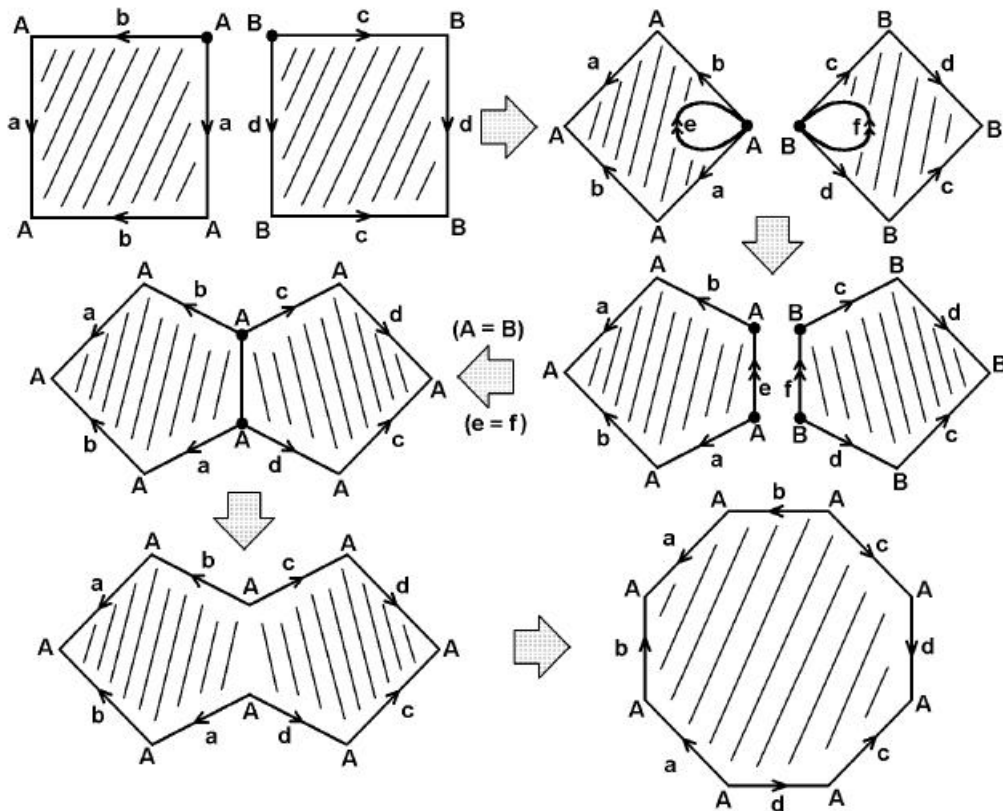


Figura 2.20: Soma conexa de dois Toros

Observem que para fazer esta construção precisamos inicialmente de dois diagramas planos, diagramas estes que representam o Toro bidimensional, seguindo-se passo a passo as indicações da figura acima. Removemos um disco ou uma região circular de cada um dos Toros, tomando o cuidado que seu bordo circular comece e termine em um determinado vértice do diagrama. Logo após, o bordo circular com a etiqueta e é colado no que está etiquetado com a letra f . Isto nos fornece uma representação octogonal do Bitoro.

Generalizando, a soma conexa de n Toros planos é $nT^2 = T^2 \# \dots \# T^2$, o qual é um Toro de genus n . Esta superfície pode ser representada por uma região poligonal plana de $4n$ lados, ou seja, como o diagrama plano de um Toro é um retângulo, um Toro de genus dois pode ser representado por um octógono. Um Toro de genus três pode ser representado por um dodecágono, e assim por diante. É importante lembrar que após todas as colagens estratégicas todos os $4n$ vértices se tornam um único ponto da superfície.

Concluimos neste capítulo que existem quatro tipos de deformações que preservam a topologia de uma superfície dada, que o diagrama plano de uma Esfera e de um Plano Projetivo é circular, e que o do Toro e da Garrafa de Klein é um retângulo. Vimos que na construção destas superfícies há necessidade ou não de uma retorção de alguma

das arestas. Diante disto, caracterizamos orientabilidade para as superfícies fechadas, a saber: se na construção da superfície existir uma retorção então existe uma Faixa de Möbius e neste caso as superfícies são denominadas não-orientáveis (Plano Projetivo e Garrafa de Klein), e quando não há a existência da Faixa de Möbius estas superfícies são denominadas orientáveis (Esfera e Toro bidimensional).

Finalizamos este capítulo com o estudo de soma conexa de superfícies fechadas. Vimos que a Esfera é o elemento neutro da soma conexa, que a soma conexa de dois Planos Projetivos é topologicamente uma Garrafa de Klein e que a soma conexa de dois Toros é topologicamente um Bitoro.

3 Classificação das Superfícies Fechadas

Neste capítulo, estudamos **palavra representação (ou esquema)** de uma superfície fechada. No que segue, entendemos por Superfície um Espaço Topológico tal que: quaisquer dois pontos distintos tem respectivamente, vizinhanças abertas disjuntas (Espaço de Hausdorff); contém uma base enumerável e ainda para cada ponto existe uma vizinhança aberta que é homeomorfa a um subconjunto de \mathbb{R}^2 .

Apresentamos as operações elementares sobre esquemas, quais sejam, recortar, colar, renomear, inverter, permutar, cancelar e descancelar. Através deste conjunto de manobras sobre um esquema próprio derivamos as demonstrações dos resultados de preparação do Teorema da Classificação de Superfícies Fechadas.

3.1 Palavra de uma superfície

Como visto no capítulo anterior podemos representar as superfícies fechadas, Esfera, Toro bidimensional, Plano Projetivo e Garrafa de Klein através de um diagrama plano que as representa. Sendo assim, para que sua identificação se torne ainda mais precisa podemos nomear com letras as arestas destes diagramas. As letras desta configuração plana seguindo as indicações das setas, formam certas "palavras" que neste contexto as denominamos **Palavra representação da superfície**.

Para obter a palavra representação de uma superfície, primeiramente precisamos caracterizá-la através de seu diagrama plano.

Em seguida, nomeamos cada aresta desta região poligonal com letras minúsculas. Para efetuar uma colagem, as letras envolvidas no processo necessariamente devem aparecer aos pares. O procedimento de "Colar" envolve fortemente o conceito Espaço Quociente, mais detalhes sobre esta abordagem está no Apêndice A.

Ao escolher um sentido (horário ou anti-horário) e início de trajetória devemos percorrer esta região poligonal colhendo tais letras em fila. Observamos que temos que colocar o expoente -1 sobre uma determinada letra se esta estiver representando uma aresta com sentido contrário ao adotado.

Deste modo, com esta sequência de letras produzimos a palavra da superfície.

A figura a seguir ilustra os diagramas planos das superfícies que estamos estudando, mostrando suas arestas com setas demarcadas e nomeadas, vejamos:

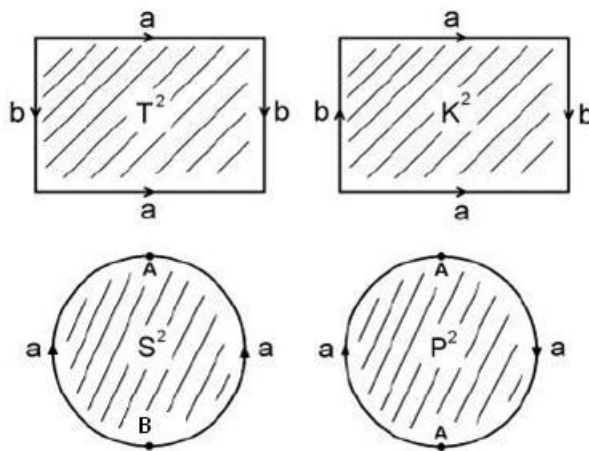


Figura 3.1: Diagramas plano e palavras

Utilizando o sentido horário para escrever a palavra representação das superfícies Toro, Garrafa de Klein, Esfera e Plano Projetivo temos de acordo com os diagramas anteriores que: a palavra representação de S^2 é $a^{-1}a$, a de T^2 é $aba^{-1}b^{-1}$, a de K^2 é $aba^{-1}b$, e a de P^2 é aa .

Acima descrevemos como obter a palavra representação de uma Superfície através do seu respectivo diagrama plano. Agora estamos interessados no ato inverso, ou seja, como, a partir de uma dada palavra representação é possível construir seu diagrama plano.

Analisemos a figura abaixo:

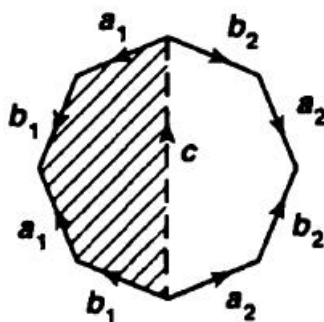


Figura 3.2: Diagrama plano octogonal e sua palavra representação

Dada uma palavra representação $a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1}a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}$, através desta palavra conseguimos identificar o diagrama plano que ela identifica da seguinte maneira:

Observe que aparecem quatro pares de letras para identificação das arestas, isto nos garante a quantidade de arestas, pois as letras que estão identificando aparecem

duas vezes cada uma. As letras utilizadas para identificar este diagrama plano foram a e b , com os números 1 e 2 subscritos para diferenciação, os quais estão demarcados de acordo com as setas nelas assinaladas e com o sentido do percurso.

Neste caso identificamos que este diagrama plano é um diagrama plano octogonal representado pela palavra $a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1}a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}$.

Este diagrama plano octogonal representa o diagrama plano de uma soma conexa de dois Toros bidimensionais, já visto em nosso trabalho no capítulo anterior e que é o mesmo diagrama da figura 2.20. Porém existem diferenças entre estas superfícies. Note que este atual diagrama não está posicionado como o outro e as letras das arestas também não são as mesmas. Isto nos garante que podemos também obter palavras representações das superfícies que são obtidas através de somas conexas.

Vejam os através da figura 3.3 a soma conexa de dois Toros, cujo resultado final não está representado pelo seu diagrama plano e sim pela superfície Bitoro.

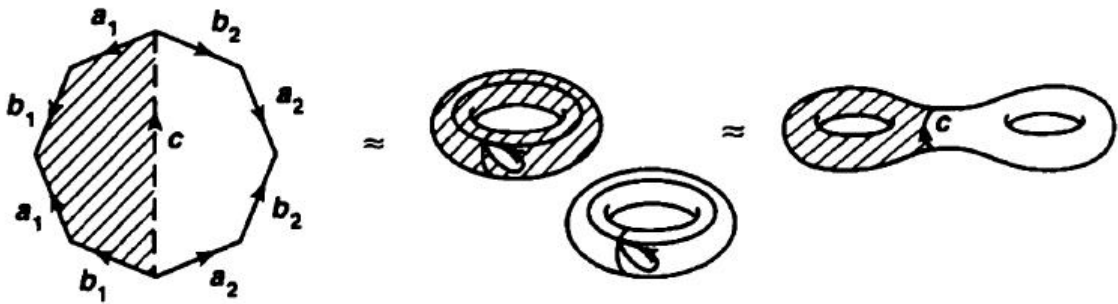


Figura 3.3: Bitoro: resultado da soma conexa de dois Toros

Quando escrevemos as palavras representações de uma soma conexa, devemos ser cautelosos, usando letras diferentes para cada palavra de cada respectiva superfície utilizada.

Na figura 2.20, temos a soma de dois Toros, um Bitoro, onde a palavra representação deste Bitoro é $aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1}$ que provêm da justaposição das palavras $aba^{-1}b^{-1}$ e $cdc^{-1}d^{-1}$, as palavras representação dos dois Toros utilizados na soma.

Observamos ainda que, quando as letras do alfabeto não forem suficientes para escrever palavras representações, ou, caso queiramos, podemos fazer uso de letras com números subscritos, por exemplo: $a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, b_3$ e etc, como já foi utilizado.

Um fato curioso a mencionar é que as superfícies Plano Projetivo e Esfera outrora representadas por diagrama circular, também podem ser representadas por diagramas planos quadrados da seguinte maneira:

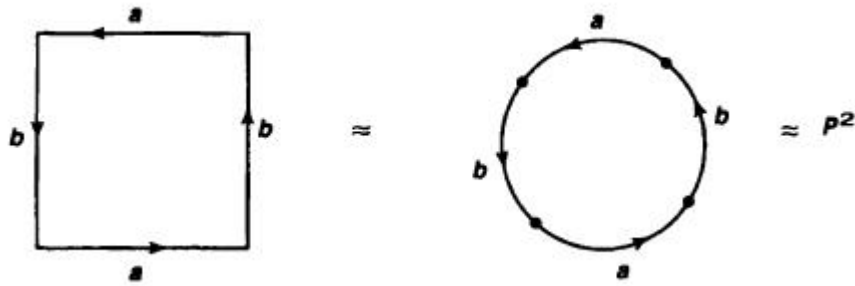


Figura 3.4: Novo esquema do Plano Projetivo

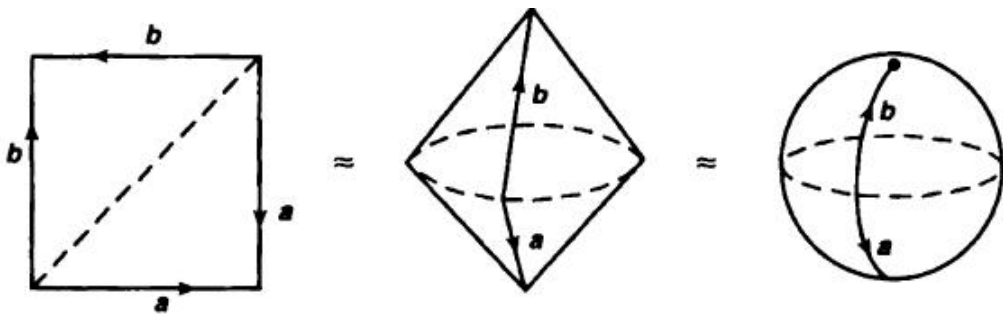


Figura 3.5: Novo esquema da Esfera

Desta forma, as superfícies Plano Projetivo e a Esfera, podem também ser representadas pelas palavras $abab$ e $aa^{-1}bb^{-1}$, respectivamente.

Um esquema (ou palavra) é denominado **próprio** se cada letra que o constitui aparece exatamente duas vezes. Dizemos que um esquema próprio é de **tipo Toro** quando os pares de letras aparecem exclusivamente uma com expoente +1 e outra com -1, caso contrário é denominado esquema de **tipo Projetivo**.

Observamos que o esquema de tipo Projetivo contém pelo menos um par de letras, ambas com expoente +1, podendo ainda conter pares de letras com expoente +1 e -1.

Exemplos:

- $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1} \dots a_kb_ka_k^{-1}b_k^{-1}$ é de tipo Toro e
- $a_1a_1a_2a_2 \dots a_ka_ka_k$ e $aa^{-1}bb^{-1}cc$ são de tipo Projetivo.

3.2 Operações Elementares

Iniciamos esta seção com o teorema que caracteriza Espaço Quociente obtido de uma região poligonal plana por recorte-colagem.

Teorema 3.1. *Suponha que X seja um espaço obtido pela colagem de arestas de m regiões poligonais com esquemas respectivamente dados por:*

$$y_0y_1, w_2, \dots, w_m \quad (*)$$

Seja c uma letra que não aparece nos esquemas acima. Se y_0 e y_1 são ambos de comprimento no mínimo dois, então X também pode ser obtido por colagem de arestas de $(m + 1)$ regiões poligonais com esquemas respectivamente dados por:

$$y_0c^{-1}, cy_1, w_2, \dots, w_m \quad (**)$$

*Reciprocamente, se X é o espaço obtido de $(m + 1)$ regiões poligonais com esquemas $(**)$ então, X também pode ser obtido por m regiões poligonais com esquemas $(*)$, desde que c não faça parte dos esquemas em $(*)$*

Demonstração. Apêndice A

□

Agora formalizamos as operações elementares realizadas anteriormente quando apresentamos soma conexa de superfícies fechadas.

Dado um esquema, entendemos como **bloco** deste esquema a junção de alguns subesquemas, denotados entre colchetes, por exemplo, para o esquema $w = a_1a_1a_2a_2\dots a_ka_k$ podemos reescrever em blocos:

$$w = [a_1a_1][a_2a_2]\dots[a_ka_k] \text{ ou ainda, } w = a_1[a_1a_2]a_2a_3a_3\dots[a_ka_k].$$

As operações elementares consistem em :

- (1) **Recortar:** Consideremos w sendo o esquema de uma superfície, onde $w = y_0y_1$. Este esquema pode ser substituído por y_0c e $c^{-1}y_1$ quando utilizamos a operação recorte, desde que a letra **c** não se encontre no esquema inicial, ou seja, antes do recorte.

Vejamos:



Figura 3.6: Técnica de Recorte

Observação: Os esquemas das figuras acima foram escritos considerando o percurso no sentido anti-horário.

- (2) **Colar:** Se tivermos duas superfícies cujos esquemas são y_0c e $c^{-1}y_1$ podemos obter através da operação colagem o esquema de apenas uma superfície, ou seja, $w_1 = y_0y_1$ passa a ser o novo esquema que identifica uma determinada superfície após aplicado a operação colagem nas arestas c . Note que as setas desta aresta tem o mesmo sentido, logo não é necessário retorção para fazer a colagem.

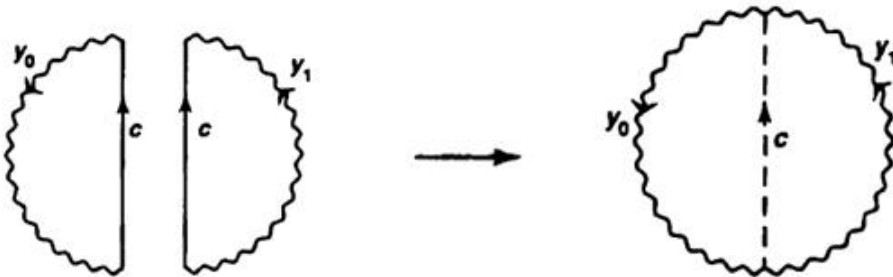


Figura 3.7: Técnica de Colagem

- (3) **Renomear:** Após realizado operações estratégicas de recorte e colagem em uma determinada superfície podemos renomear as arestas desta superfície caso o queira, sendo que é necessário atenção na escolha de um novo esquema, pois as letras escolhidas não devem ser as mesmas que aparecem no esquema inicial, ou seja, antes de realizada qualquer operação.
- (4) **Permutar:** Esta operação permuta ciclicamente blocos de um esquema. Exemplos: se tivermos uma superfície identificada pelo esquema $w = [y_0y_1][y_2y_3y_4]$, o esquema resultante após esta operação é $[y_2y_3y_4][y_1y_0]$; se $w = [y_0][y_1y_2y_3y_4]$ então o esquema resultante é $[y_1y_2y_3y_4][y_0]$.

Observamos que a permutação deve ser realizada com cautela. Nunca pode ser realizada dentro de um bloco, por exemplo, se $w = [y_0y_1][y_2y_3y_4]$ via a operação permutar, não é possível gerar o esquema $w = [y_1y_0][y_2y_3y_4]$.

- (5) **Inverter:** Se w for o esquema de uma determinada superfície, então w^{-1} também será um esquema para esta. Por exemplo:

Seja $w_i = (a_{i_1})^{\epsilon_1} \dots (a_{i_n})^{\epsilon_n}$ o esquema de uma superfície qualquer então, $(w_i)^{-1} = (a_{i_n})^{-\epsilon_n} \dots (a_{i_1})^{-\epsilon_1}$ também é o esquema desta mesma superfície. Esta operação apenas inverte o caminho a ser percorrido no bordo da região poligonal da superfície, um no sentido horário e o outro no sentido anti-horário. Em particular, $((a_{i_1})^{\epsilon_1} \dots (a_{i_n})^{\epsilon_n})^{-1} = (a_{i_n})^{-\epsilon_n} \dots (a_{i_1})^{-\epsilon_1}$.

- (6) **Cancelar:** O esquema $w_i = y_0aa^{-1}y_1$ pode ser substituído por $w_i = y_0y_1$, desde que a letra **a** não apareça em nenhum outro lugar do esquema. Notamos esta operação dentro da operação colagem.

- (7) **Descancelar:** Esta operação é inversa a operação anterior, ou seja, se tivermos o esquema $w_i = y_0y_1$ podemos substituí-lo por $w_i = y_0aa^{-1}y_1$.

Dados os esquemas w_1 e w_2 dizemos que w_1 é equivalente a w_2 , $w_1 \sim w_2$, quando w_2 é obtido do esquema w_1 via uma sequência finita destas operações elementares. Observamos que quando aplicamos estas operações elementares em um esquema próprio o esquema resultante ainda é próprio.

Através da figura abaixo podemos observar a existência das operações elementares aplicadas em uma mesma superfície:

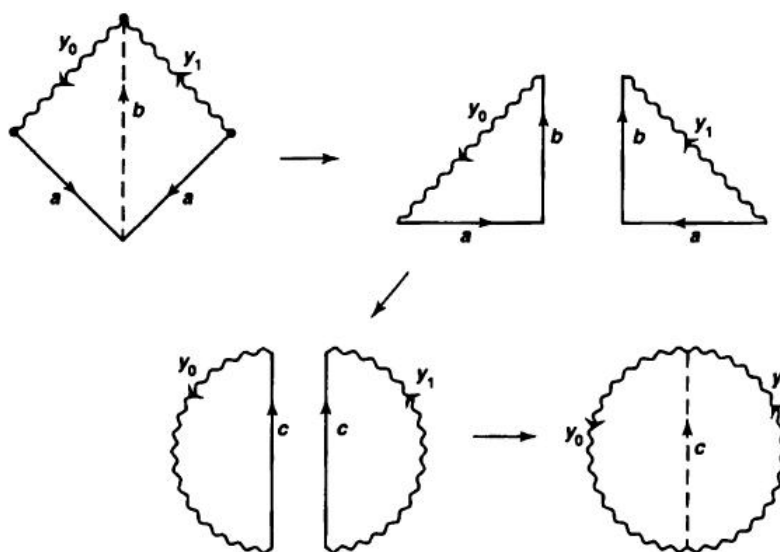


Figura 3.8: Operações elementares

Seguindo a ordem das setas temos que a superfície inicial é representada pelo esquema $y_0aa^{-1}y_1$, aplicamos a técnica recorte-colagem como segue. Observamos que a justificativa na implicação está na linha abaixo:

$$\begin{aligned}
 w &= y_0aa^{-1}y_1 \\
 &\sim y_0a[bb^{-1}]a^{-1}y_1 \text{ operação (7)} \\
 &\sim y_0ab, b^{-1}a^{-1}y_1 \text{ operação (1) em b} \\
 &\sim y_0ab, y_1^{-1}ab \text{ operação (5) no segundo esquema} \\
 &\sim y_0c, y_1^{-1}c \text{ operação (3) "ab"=c} \\
 &\sim y_0c, c^{-1}y_1 \text{ operação (5) no segundo esquema} \\
 &\sim y_0y_1 \text{ operação (2)}
 \end{aligned}$$

3.3 Preparação do Teorema da Classificação

Os resultados a seguir nos preparam para a demonstração do nosso principal resultado, o Teorema da Classificação de Superfícies Fechadas.

Mostraremos que qualquer que seja a superfície com seu esquema próprio, podemos aplicar a estas operações elementares que não alteram a topologia da superfície e que nos auxiliam a identificar que qualquer superfície dada é homeomorfa a uma Esfera S^2 , ou a um Toro, ou uma soma conexa de n Toros, nT^2 , ou uma soma de k Planos Projetivos, kP^2 .

Para o próximo resultado, seja w um esquema próprio que contenha pelo menos uma letra, digamos \mathbf{a} , tal que ambas ocorrências de \mathbf{a} no esquema w tem o mesmo expoente. Assumimos que w tem a forma $w = [y_0]a[y_1]a[y_2]$, onde alguns dos $[y_i]$ podem ser vazios.

Proposição 3.1. *Seja w um esquema próprio como acima. Então,*

$$w \sim aa[y_0y_1^{-1}y_2].$$

Demonstração. Passo I: Consideremos $y_0 = \emptyset$

Quando $y_0 = \emptyset$ temos que o esquema w é dado por:

$$w = ay_1ay_2$$

devemos mostrar que $w \sim aay_1^{-1}y_2$, para tanto analisaremos por casos:

1º **Caso:** Consideremos $y_1 = \emptyset$ e $y_2 \neq \emptyset$.

Se $y_1 = \emptyset$ então, $w = aay_2$, e segue o resultado.

2º **Caso:** Consideremos $y_1 \neq \emptyset$ e $y_2 = \emptyset$.

Se $y_2 = \emptyset$ temos que $w = ay_1a$.

Agora,

$$\begin{aligned} w &= ay_1a \\ &\sim a^{-1}[y_1^{-1}a^{-1}] \text{ operação (5)} \\ &\sim [y_1^{-1}a^{-1}]a^{-1} \text{ operação (4)} \\ &\sim y_1^{-1}[aa] \text{ operação (3) "a^{-1"} = a} \\ &\sim aay_1^{-1} \text{ operação (4)} \end{aligned}$$

3º Caso: Consideremos $y_1 \neq \emptyset$ e $y_2 \neq \emptyset$.

$$\begin{aligned}
 w &= ay_1ay_2 \\
 &\sim ay_1cc^{-1}ay_2 && \text{operação (7)} \\
 &\sim ay_1c, c^{-1}ay_2 && \text{operação (1)} \\
 &\sim c^{-1}y_1^{-1}a^{-1}, c^{-1}[ay_2] && \text{operação (5) no primeiro esquema} \\
 &\sim c^{-1}y_1^{-1}a^{-1}, [ay_2]c^{-1} && \text{operação (4) no segundo esquema} \\
 &\sim [c^{-1}y_1^{-1}y_2]c^{-1} && \text{operação (2)} \\
 &\sim c^{-1}c^{-1}y_1^{-1}y_2 && \text{operação (4)} \\
 &\sim aay_1^{-1}y_2 && \text{operação (3) "c^{-1"} = a}
 \end{aligned}$$

Logo, conclui-se que $ay_1ay_2 \sim aay_1^{-1}y_2$.

Abaixo ilustramos a equivalência de w com $c^{-1}c^{-1}y_1^{-1}y_2$.

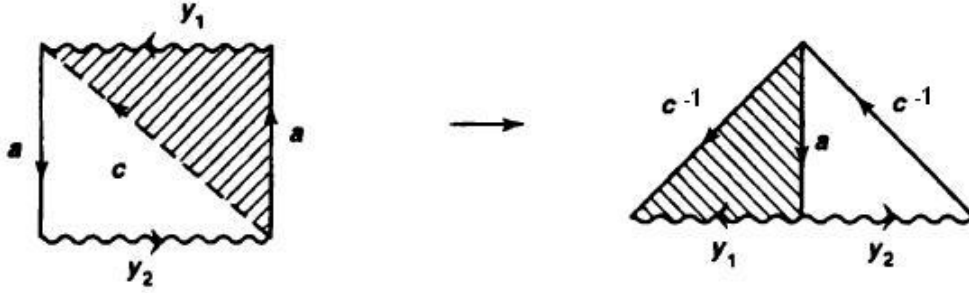


Figura 3.9: Esquema 1

Passo II: Consideremos $y_0 \neq \emptyset$.

Temos que $w = y_0ay_1ay_2$.

1º Caso: Consideremos $y_1 = \emptyset$ e $y_2 = \emptyset$.

Neste caso, $w = y_0[aa]$ e pela operação (4), temos que w é equivalente a $[aa]y_0$, como queríamos.

2º Caso: Consideremos $y_1 \neq \emptyset$ e $y_2 = \emptyset$.

Neste caso, temos que:

$$\begin{aligned}
 w &= y_0[ay_1a] \\
 &\sim [a^{-1}y_1^{-1}][a^{-1}y_0^{-1}] && \text{operação (5)} \\
 &\sim [a^{-1}y_0^{-1}][a^{-1}y_1^{-1}] && \text{operação (4)} \\
 &\sim a^{-1}a^{-1}y_0y_1^{-1} && \text{passo (I)} \\
 &\sim aay_0y_1^{-1} && \text{operação (3) "a^{-1"} = a}
 \end{aligned}$$

3º Caso: Consideremos $y_1 = \emptyset$ e $y_2 \neq \emptyset$.

Neste caso, temos que:

$$\begin{aligned}
w &= [y_0a][ay_2] \\
&\sim ay_2y_0a && \text{operação (4)} \\
&\sim ay_2bb^{-1}y_0a && \text{operação (7)} \\
&\sim ay_2b, b^{-1}y_0a && \text{operação (1)} \\
&\sim a[y_2b], a^{-1}y_0^{-1}b && \text{operação (5) no segundo esquema} \\
&\sim y_2ba, a^{-1}y_0^{-1}b && \text{operação (4) no primeiro esquema} \\
&\sim [y_2by_0^{-1}]b && \text{operação (2)} \\
&\sim by_2by_0^{-1} && \text{operação (4)} \\
&\sim [bb][y_2^{-1}y_0^{-1}] && \text{passo (I)} \\
&\sim [y_2^{-1}y_0^{-1}]bb && \text{operação (4)} \\
&\sim b^{-1}b^{-1}y_0y_2 && \text{operação (5)} \\
&\sim aay_0y_2 && \text{operação (3) “}b^{-1}\text{”} = a
\end{aligned}$$

4º Caso: Consideremos $y_1 \neq \emptyset$ e $y_2 \neq \emptyset$.

Temos que, $w = y_0ay_1ay_2$, primeiramente devemos mostrar que:

$$w \sim by_0by_1y_0^{-1} (A).$$

De fato:

$$\begin{aligned}
w &= y_0ay_1ay_2 \\
&\sim y_0abb^{-1}y_1ay_2 && \text{operação (7)} \\
&\sim y_0ab, b^{-1}y_1ay_2 && \text{operação (1)} \\
&\sim y_0[ab], [y_2^{-1}][a^{-1}y_1^{-1}b] && \text{operação (5) no segundo esquema} \\
&\sim [y_0a]b, a^{-1}y_1^{-1}by_2^{-1} && \text{operação (4) no segundo esquema} \\
&\sim by_0a, a^{-1}y_1^{-1}by_2^{-1} && \text{operação (4) no primeiro esquema} \\
&\sim by_0y_1^{-1}by_2^{-1} && \text{operação (2)} \\
&\sim [y_2b^{-1}y_1y_0^{-1}]b^{-1} && \text{operação (5)} \\
&\sim b^{-1}y_2b^{-1}y_1y_0^{-1} && \text{operação (4)} \\
&\sim by_2by_1y_0^{-1} && \text{operação (3) “}b^{-1}\text{”} = b
\end{aligned}$$

Conforme figura a seguir:

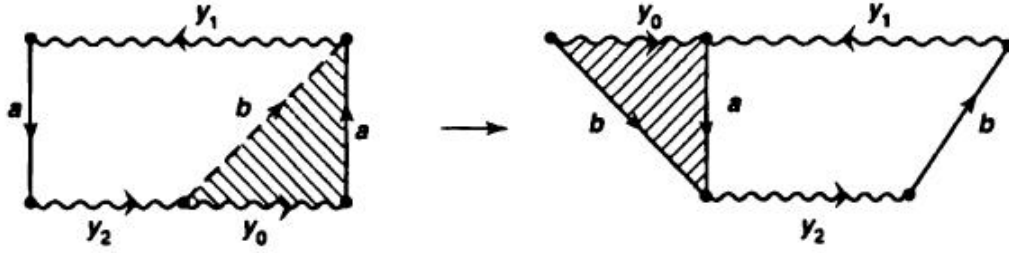


Figura 3.10: Esquema 2

Finalmente, $w = y_0 a y_1 a y_2$ é equivalente ao esquema $a a y_0 y_1^{-1} y_2$. Com efeito:

$$\begin{aligned}
 w &= y_0 a y_1 a y_2 \\
 &\sim b y_2 b y_1 y_0^{-1} && \text{por (A)} \\
 &\sim b b y_2^{-1} y_1 y_0^{-1} && \text{passo (I)} \\
 &\sim [y_0 y_1^{-1} y_2] [b^{-1} b^{-1}] && \text{operação (5)} \\
 &\sim [b^{-1} b^{-1}] [y_0 y_1^{-1} y_2] && \text{operação (4)} \\
 &\sim a a y_0 y_1^{-1} y_2 && \text{operação (3) "b^{-1}" = a}
 \end{aligned}$$

□

Na demonstração da Proposição a seguir, adotamos a seguinte notação: considere $[z] := [y_0 y_1^{-1} y_2]$, logo segue da Proposição anterior que w é equivalente a $a a [z]$, onde $[z]$ é um esquema próprio que pode ser de tipo Toro, ou de tipo Projetivo.

Proposição 3.2. *Seja w um esquema próprio de tipo Projetivo. Então w é equivalente a um esquema de mesmo comprimento com a forma: $(a_1 a_1)(a_2 a_2) \dots (a_k a_k) w_1$, onde $k \geq 1$ e w_1 é igual ao vazio ou é de tipo Toro.*

Demonstração. Seja a_1 uma letra que aparece no esquema próprio w . Sem perda de generalidade, podemos supor que:

$$w = [y_0] a_1 [y_1] a_1 [y_2].$$

Pela Proposição anterior temos que $w \sim w'$, onde $w' = a_1 a_1 [z']$ com w' de mesmo comprimento de w .

Se z' for do tipo Toro segue o resultado. Caso contrário, significa que z' é um esquema próprio que contém pelo menos uma letra a_2 com ocorrência de expoente +1, desta maneira podemos supor que $z' = [z'_0] a_2 [z'_1] a_2 [z'_2]$.

Logo, reescrevendo w' temos:

$$w' = a_1 a_1 [z'] = a_1 a_1 [z'_0] a_2 [z'_1] a_2 [z'_2] = [a_1 a_1 z'_0] a_2 [z'_1] a_2 [z'_2].$$

Aplicando novamente a Proposição anterior em w' obtemos:

$$w' = a_2 a_2 [a_1 a_1 z'_0] [z'_1^{-1}] [z'_2] \sim a_2 a_2 a_1 a_1 [z'_0 z'_1^{-1} z'_2].$$

Se $[\bar{z}] = [z'_0 z_1'^{-1} z_2']$ for um esquema de tipo Toro segue o resultado, já que:

$$w \sim w' \sim a_2 a_2 a_1 a_1 [\bar{z}] \sim (a_1 a_1)(a_2 a_2)[\bar{z}].$$

Caso contrário, continuamos este procedimento que termina (pois o comprimento de w é finito) quando obtemos a equivalência:

$$w \sim (a_1 a_1)(a_2 a_2) \dots (a_k a_k) w_1.$$

□

A Proposição 3.2 é o ponto de partida para a Classificação de Superfícies Fechadas. Com efeito, dado qualquer esquema próprio w que contenha pelo menos uma letra com suas ocorrências de expoente $+1$, segue desta Proposição que:

1. w é de tipo Toro;
2. w é equivalente a um esquema de forma $(a_1 a_1)(a_2 a_2) \dots (a_k a_k) w_1$, com w_1 de tipo Toro;
3. w é equivalente a um esquema de tipo $(a_1 a_1)(a_2 a_2) \dots (a_k a_k)$.

O caso (3) é exatamente um dos esquemas de equivalência de um esquema próprio w que está no Teorema Classificação de Superfícies Fechadas, qual seja, a soma conexa de k Planos Projetivos.

Resta-nos mostrar que os casos (1) e (2) contemplam os demais a saber: esquema próprio de uma Superfície Esférica ou esquema próprio de uma soma conexa de n Toros.

Proposição 3.3. *Seja w um esquema próprio da forma, $w = w_0 w_1$, onde w_1 é um esquema de tipo Toro que não contém duas letras adjacentes.*

Então,

$$w \sim w_0 w_2,$$

onde w_2 tem o mesmo comprimento de w_1 e tem a forma

$$w_2 = a b a^{-1} b^{-1} w_3,$$

com w_3 de tipo Toro ou vazio.

Demonstração. O primeiro passo desta demonstração é mostrar que w pode ser escrito como:

$$w = w_0[y_1]a[y_2]b[y_3]a^{-1}[y_4]b^{-1}[y_5],$$

onde eventualmente $[y_i]$ pode ser vazios, $i \in \{1, \dots, 5\}$.

Entre as letras que aparecem em w_1 , seja a aquela cujas ocorrências (uma com expoente $+1$ e outra -1) são não-adjacentes, garantida pela hipótese. Seja b qualquer letra (com expoente $+1$) que aparece entre a e a^{-1} . Agora o termo b^{-1} aparece em w_1 , mas não está entre a e a^{-1} , já que caso contrário b seria adjacente a b^{-1} , contrariando a hipótese.

Se b^{-1} aparece após a^{-1} temos o esquema desejado ($[y_1]a[y_2]b[y_3]a^{-1}[y_4]b^{-1}[y_5]$), se b^{-1} aparece antes a^{-1} basta aplicar a operação (3) considerando $c = b^{-1}$.

Portanto, temos que w pode ser escrito na forma:

$$w = w_0[y_1]a[y_2]b[y_3]a^{-1}[y_4]b^{-1}[y_5]. \quad (*)$$

Feita esta observação, começamos a prova desta Proposição. Aplicamos a técnica Recorte-Colagem em três passos.

1º Passo: $w \sim w' = w_0a[y_2]b[y_3]a^{-1}[y_1y_4]b^{-1}[y_5]$.

De fato: reescrevemos w na forma $w = w_0[y_1]a[y_2by_3]a^{-1}[y_4b^{-1}y_5]$, aplicando a técnica de recorte-colagem como indicado na figura abaixo. Observe que o recorte é feito em c , o que é possível já que ambos polígonos tem pelo menos 3 lados. Segue portanto a primeira equivalência:

$$\begin{aligned} w &= w_0[y_1ay_2by_3a^{-1}y_4b^{-1}y_5] \\ &\sim [y_1ay_2by_3a^{-1}y_4b^{-1}y_5]w_0 && \text{operação (4)} \\ &\sim [y_1a]c^{-1}c[y_2by_3a^{-1}y_4b^{-1}y_5w_0] && \text{operação (7)} \\ &\sim [y_1a]c^{-1}, [cy_2by_3]a^{-1}y_4b^{-1}y_5w_0 && \text{operação (1)} \\ &\sim [c^{-1}y_1]a, a^{-1}[y_4b^{-1}y_5w_0][cy_2by_3] && \text{operação (4) em ambos esquemas} \\ &\sim [c^{-1}y_1y_4b^{-1}y_5][w_0cy_2by_3] && \text{operação (2)} \\ &\sim w_0cy_2by_3c^{-1}y_1y_4b^{-1}y_5 && \text{operação (4)} \\ &\sim w_0ay_2by_3a^{-1}y_1y_4b^{-1}y_5 && \text{operação (3) "c" = a} \end{aligned}$$

Conforme a figura:

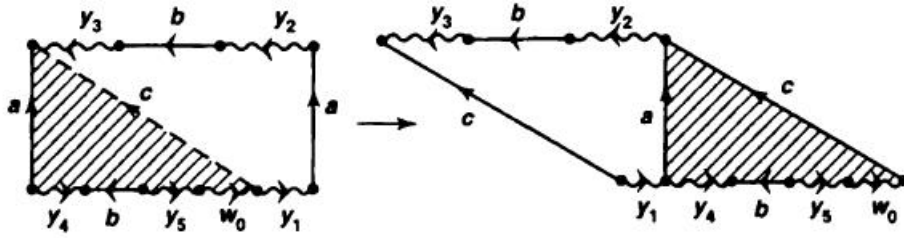


Figura 3.11: Esquema 3

Logo a equivalência é verdadeira.

2º Passo: $w' \sim w'' = w_0 a [y_1 y_4 y_3] b a^{-1} b^{-1} [y_2 y_5]$.

De fato, se todos os esquemas $y_1, y_4, y_5,$ e w_0 são vazios, temos que:

$$\begin{aligned}
 w' &= [a y_2] [b y_3 a^{-1} b^{-1}] \\
 &\sim [b y_3 a^{-1} b^{-1}] [a y_2] \quad \text{operação (4)} \\
 &\sim a y_3 b^{-1} a^{-1} b y_2 \quad \text{operação (3) "b" = a, "a" = b} \\
 &\sim a y_3 b a^{-1} b^{-1} y_2 \quad \text{operação (3) "b" = b^{-1}}
 \end{aligned}$$

Caso contrário, realizamos as seguintes operações:

$$\begin{aligned}
 w' &= w_0 a y_2 b y_3 a^{-1} y_1 y_4 b^{-1} y_5 \\
 &\sim a y_2 b y_3 a^{-1} y_1 y_4 b^{-1} y_5 w_0 \quad \text{operação (4)} \\
 &\sim a y_2 b y_3 a^{-1} c^{-1} c y_1 y_4 b^{-1} y_5 w_0 \quad \text{operação (7)} \\
 &\sim [a y_2 b] [y_3 a^{-1} c^{-1}], [c y_1 y_4] [b^{-1} y_5 w_0] \quad \text{operação (1)} \\
 &\sim y_3 a^{-1} c^{-1} a y_2 b, b^{-1} y_5 w_0 c y_1 y_4 \quad \text{operação (4) em ambos esquemas} \\
 &\sim [y_3 a^{-1} c^{-1} a y_2 y_5] [w_0 c y_1 y_4] \quad \text{operação (2)} \\
 &\sim w_0 c y_1 y_4 y_3 a^{-1} c^{-1} a y_2 y_5 \quad \text{operação (4)} \\
 &\sim w_0 a y_1 y_4 y_3 b a^{-1} b^{-1} y_2 y_5 \quad \text{operação (3) "c" = a e "a^{-1}" = b}
 \end{aligned}$$

Logo, a equivalência, ilustrada pela figura abaixo, é válida.

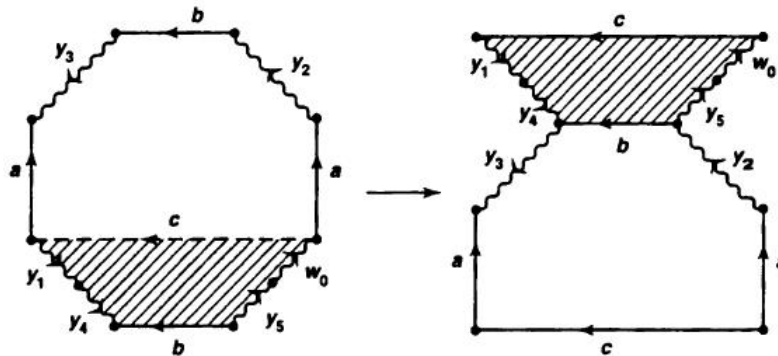


Figura 3.12: Esquema 4

3º Passo: $w'' = w_0 a y_1 y_4 y_3 b a^{-1} b^{-1} y_2 y_5 \sim w''' = w_0 a b a^{-1} b^{-1} [y_1 y_4 y_3 y_2 y_5]$.

Se os esquemas w_0 , y_5 e y_2 são vazios, esta situação é representada pela figura abaixo.

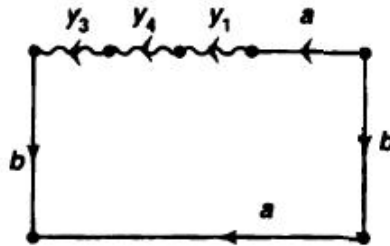


Figura 3.13: Esquema 5

O resultado é obtido da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
 w'' &= [a y_1 y_4 y_3] [b a^{-1} b^{-1}] \\
 &\sim b a^{-1} b^{-1} a y_1 y_4 y_3 \quad \text{operação (4)} \\
 &\sim a b a^{-1} b^{-1} y_1 y_4 y_3 \quad \text{operação (3) "b" = a e "a^{-1}" = b}
 \end{aligned}$$

Caso contrário, aplicamos o recorte indicado pela figura abaixo:

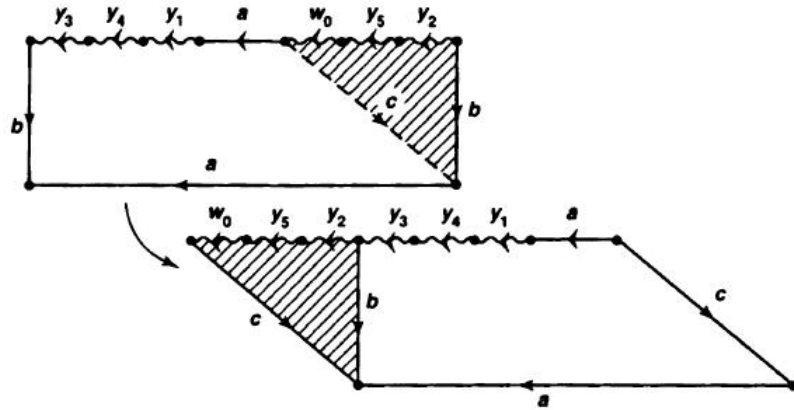


Figura 3.14: Esquema 6

Ou seja,

$$\begin{aligned}
 w'' &= w_0 a y_1 y_4 y_3 b a^{-1} b^{-1} y_2 y_5 \\
 &\sim a y_1 y_4 y_3 b a^{-1} b^{-1} y_2 y_5 w_0 && \text{operação (4)} \\
 &\sim a y_1 y_4 y_3 b c^{-1} c a^{-1} b^{-1} y_2 y_5 w_0 && \text{operação (7)} \\
 &\sim a y_1 y_4 y_3 b c^{-1}, c a^{-1} b^{-1} y_2 y_5 w_0 && \text{operação (1)} \\
 &\sim c^{-1} a y_1 y_4 y_3 b, b^{-1} y_2 y_5 w_0 c a^{-1} && \text{operação (4) em ambos esquemas} \\
 &\sim [c^{-1} a y_1 y_4 y_3 y_2 y_5] [w_0 c a^{-1}] && \text{operação (2)} \\
 &\sim w_0 c a^{-1} c^{-1} a y_1 y_4 y_3 y_2 y_5 && \text{operação (4)} \\
 &\sim w_0 a b a^{-1} b^{-1} y_1 y_4 y_3 y_2 y_5 && \text{operação (3) "c" = a e "a^{-1}" = b}
 \end{aligned}$$

Consequentemente, dos passos anteriores segue que:

$$w \sim w' \sim w'' \sim w'''$$

Concluimos portanto que,

$$w \sim w_0 a b a^{-1} b^{-1} w_3,$$

onde w_3 é de tipo Toro (pois por hipótese w_1 é tipo Toro) ou vazio.

□

Proposição 3.4. *Seja w um esquema próprio da forma $w = w_0[cc][aba^{-1}b^{-1}]w_1$. Então,*

$$w \sim w' = w_0[aabbcc]w_1.$$

Demonstração. Recorreremos a Proposição 3.1, onde para um esquema próprio temos:

$$[y_0]a[y_1]a[y_2] \sim aa[y_0y_1^{-1}y_2] \text{ (e } aa[y_0y_1^{-1}y_2] \sim [y_0]a[y_1]a[y_2]).$$

Procedemos da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} w &= w_0ccaba^{-1}b^{-1}w_1 \\ &\sim ccaba^{-1}b^{-1}w_1w_0 && \text{operação (4)} \\ &\sim ccab[ba]^{-1}w_1w_0 && \text{propriedade } a^{-1}b^{-1} = [ba]^{-1} \\ &\sim abc[ba]cw_1w_0 && \text{por 3.1, "[y}_0\text{]} = [ab], \text{"[y}_1\text{]} = [ba], \text{"[y}_2\text{]} = [w_1w_0]} \\ &\sim bbac^{-1}acw_1w_0 && \text{por 3.1, "[y}_0\text{]} = a, \text{"[a]} = b, \text{"[y}_1\text{]} = [c], \text{"[y}_2\text{]} = [acw_1w_0]} \\ &\sim aabbccw_1w_0 && \text{por 3.1, "[y}_0\text{]} = [bb], \text{"[y}_1\text{]} = [c^{-1}], \text{"[y}_2\text{]} = [cw_1w_0]} \\ &\sim w_0aabbccw_1 && \text{operação (4)} \end{aligned}$$

□

3.4 Classificação de Superfícies Fechadas

Para finalizar este trabalho demonstramos o resultado que sustenta a Classificação de Superfícies Fechadas Orientáveis e Não-Orientáveis, a saber:

Teorema 3.2. *Seja X uma superfície obtida de uma região poligonal plana por meio de recorte-colagem (com esquema próprio). Então X é homeomorfa a Esfera S^2 , a soma conexa de n Toros nT^2 ou a soma conexa de k Planos Projetivos kP^2 .*

Demonstração. Seja w o esquema próprio que gera o espaço X a partir de uma região poligonal P .

Adotando a notação $|w|$ para o comprimento de w , como w é um esquema próprio segue que $|w| \geq 4$. Mostraremos que w é equivalente aos esquemas:

- (1) $aa^{-1}bb^{-1}$,
- (2) $abab$,
- (3) $(a_1a_1)(a_2a_2)\dots(a_ka_k)$ com $k \geq 2$,
- (4) $(a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1})(a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1})\dots(a_nb_na_n^{-1}b_n^{-1})$ com $n \geq 1$.

O primeiro esquema é do espaço S^2 , o segundo, do espaço P^2 , o terceiro do espaço kP^2 e o quarto do espaço nT^2 .

Seja w um esquema próprio qualquer, com $|w| = s$.

1º Passo: Seja w um esquema próprio de tipo Toro. Mostraremos que w é equivalente ao esquema tipo (1) ou (4).

Se $s = 4$ então: $w = aa^{-1}bb^{-1}$ ou $w = aba^{-1}b^{-1}$, ou seja tipo (1) ou (4) respectivamente.

Se $s > 4$, mostraremos via Indução que w é do tipo (4).

Assumamos como Hipótese de Indução (sobre o comprimento de w), que todo esquema próprio tipo Toro com comprimento menor do que s é equivalente ao tipo (4).

Se $w \sim w'$ com $|w'| < s$ segue pela hipótese de indução que w' é equivalente ao tipo (4), conseqüentemente, pela transitividade w também o é.

Entretanto, se w não é equivalente a um esquema de comprimento menor do que seu comprimento, segue que w não contém pares de letras adjacentes. Nestas condições aplicando a Proposição 3.3 (com $w_0 = \emptyset$), segue que $w \sim aba^{-1}b^{-1}w_3$, onde w_3 é de tipo Toro com comprimento $(s - 4)$ (que não é vazio pois por hipótese o comprimento de w é maior do que 4).

Agora, w_3 não contém pares de letras adjacentes em seu esquema pois do contrário w seria equivalente a um esquema de comprimento menor que s , o que não ocorre. Desta maneira é possível aplicar novamente a Proposição 3.3, considerando “ w_0 ” = $aba^{-1}b^{-1}$ e “ w_1 ” = w_3 , para obtermos:

$$w \sim aba^{-1}b^{-1}w_3 \sim (aba^{-1}b^{-1})(cdc^{-1}d^{-1})w_4,$$

onde w_4 é vazio ou de tipo Toro com comprimento $(s - 8)$.

Se w_4 é vazio, temos que w é de tipo (4) para $n = 2$. Do contrário, w_4 é de tipo Toro sem pares de letras adjacentes (pois se tivesse, w seria equivalente a um esquema de comprimento menor que s , o que não ocorre) e então novamente aplicamos a Proposição 3.3. Este processo indutivo termina quando obtemos $w \sim (a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1})\dots(a_l b_l a_l^{-1} b_l^{-1})$ com $l \geq 2$ e $4.s = l$.

E conseqüentemente, $w \sim (a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1})\dots(a_n b_n a_n^{-1} b_n^{-1})$ com $n \geq 1$, e $4n = s$ para $s \geq 4$.

2º Passo: Seja w um esquema próprio de tipo Projetivo. Mostraremos que w é equivalente ao esquema tipo (2) ou (3).

Se $s = 4$, então pela Proposição 3.2 segue que $w \sim aabb$ (" w_1 " = \emptyset) ou $w \sim aab^{-1}b$ (" w_1 " $\neq \emptyset$).

Note que a primeira equivalência contempla o tipo (3). Enquanto que a segunda é do tipo (2), já que esta pode ser reescrita como $aay_1^{-1}y_2$ onde $y_1 = y_2 = b$ e segue da Proposição 3.1 ($y_0 = \emptyset$), que $w \sim ay_1ay_2 = abab$.

Se $s > 4$, mostraremos via Indução (sobre o comprimento de w) que w é do tipo (3).

Assumamos como Hipótese de Indução que todo tipo Projetivo com comprimento menor que s é equivalente ao tipo (3).

Pela Proposição 3.2, segue que $w \sim w' = (a_1a_1)\dots(a_la_l)w_1$ com $w_1 = \emptyset$ ou de tipo toro.

Se w_1 for vazio, temos que w é equivalente ao tipo (3), pois neste caso $l \geq 2$ já que $|w| = s > 4$

Entretanto, se w_1 é não vazio, temos duas possibilidades:

- w_1 possui par de letras adjacentes e neste caso w' tem comprimento menor que s , logo podemos aplicar nossa hipótese de indução para concluir que w é de tipo (3).
- w_1 não possui par de letras adjacentes, neste caso pela Proposição 3.3 segue que: $w \sim w' = (a_1a_1)\dots(a_la_l)w_1 \sim w'' = (a_1a_1)\dots(a_la_l)aba^{-1}b^{-1}w_2$, onde w_2 é vazio ou de tipo Toro.

Agora pela Proposição 3.4, segue que

$$w'' = (a_1a_1)\dots(a_la_l)aba^{-1}b^{-1}w_2 \sim (a_1a_1)\dots(a_la_l)aabw_2.$$

Se $w_2 = \emptyset$, concluímos a demonstração. Entretanto se $w_2 \neq \emptyset$, continuamos este processo até obtermos a equivalência ao tipo (3). \square

Pelo capítulo dois Seções 2.3 e 2.4, sabemos que $S^2, T^2, T^2 \# T^2, T^2 \# T^2 \# T^2$, etc, são as superfícies fechadas orientáveis, e, $P^2, P^2 \# P^2, P^2 \# P^2 \# P^2$, etc, são as superfícies fechadas não-orientáveis e pelo Teorema da Classificação de Superfícies Fechadas concluímos que:

- (i) Se X é uma superfície fechada orientável, então X é homeomorfa a Esfera ou ao Toro ou a uma soma conexa de dois ou mais Toros;
- (ii) Se X é uma superfície fechada não-orientável, então X é homeomorfa a um Plano Projetivo ou a uma soma conexa de dois Planos Projetivos (Garrafa de Klein) ou uma soma conexa de três ou mais Planos Projetivos.

A finalização deste capítulo se dá com a conclusão obtida através da demonstração de que, dada uma superfície fechada qualquer X , se esta for orientável então é homeomorfa a uma Esfera, a um Toro ou a uma soma conexa de n Toros. Caso contrário, se X for não-orientável, então esta superfície é homeomorfa a um Plano Projetivo, a uma soma conexa de dois Planos Projetivos (Garrafa de Klein) ou uma soma conexa de três ou mais Plano Projetivos.

Referências

- [1] SAMPAIO, J. C. V. *Uma introdução à topologia geométrica: passeios de Euler, superfícies, e o teorema das quatros cores*. São Carlos: EdUfscar, 2008.
- [2] MUNKRES, J. R. *Topology*. 2. ed. N. Jersey: Prentice Hall, Englewood Cliffs., 2000.
- [3] FIRBY, P. A.; GARDINER, C. *Surface Topology*. 1. ed. New York: Ellis Horwood series in mathematics and its applications, 1982.
- [4] GREENBERG, M. J. *Algebraic topology: a first course*. 1. ed. Redwood City: Redwood City Addison-Wesley, 1981.

A Teorema 3.1

Antes de efetuarmos a demonstração do Teorema 3.1 faremos considerações sobre o elemento implícito das situações: obtenção de uma superfície por meio de um diagrama (colagem de arestas) e técnica recorte-colagem. A saber, o Espaço Quociente.

Para tanto recordamos: Sejam X um espaço topológico, X^* uma partição de X em subconjuntos disjuntos cuja união é X e ainda $\rho : X \rightarrow X^*$ uma aplicação sobrejetora. É possível definir uma topologia, τ , em X^* da seguinte maneira: $U \subset X^*$ é aberto em X^* se, e somente se, $\rho^{-1}(U) \subset X$ é um aberto de X . Esta topologia induzida pela aplicação ρ é chamada Topologia Quociente e o par (X^*, τ) é denominado **Espaço Quociente**.

Seja P uma região poligonal plana. Quando estabelecida a orientação e a nomeação de suas arestas, podemos definir a seguinte relação sobre os pontos de P : cada ponto do interior de P está relacionado a si próprio, e, dadas duas arestas de P com a mesma letra, relacionamos cada ponto x de uma das arestas com o ponto $h(x)$ da outra aresta; onde h é a aplicação linear positiva e sobrejetora definida por: sejam p_k, p_l e p_i, p_j os vértices das duas arestas envolvidas, para cada $x \in p_k p_l$ temos que $x = (1 - s)p_k + sp_l$, $s \in [0, 1]$, então definimos $h(x) := (1 - s)p_i + sp_j$.

Esta relação é uma relação de equivalência sobre P . Dizemos que o espaço quociente X resultante desta equivalência é obtido “colando” as arestas de P de acordo com suas orientações e nomeações.

Vejam como é possível obter um espaço X fazendo recortes e colagens em arestas de uma ou mais regiões poligonais.

Seja P uma região poligonal com vértices $p_0, p_1, p_2, \dots, p_n = p_0$. Dado k , com $1 < k < n - 1$, consideramos as regiões poligonais Q_1 com vértices $p_0, p_1, \dots, p_k = p_0$ e Q_2 com vértices $p_0, p_{k-1}, p_k, p_{k+1}, \dots, p_n = p_0$. Observe que estas regiões tem a aresta $p_0 p_{k-1}$ em comum e $P = Q_1 \cup Q_2$.

Agora, aplicando uma translação T (de \mathbb{R}^2) sobre a região Q_1 , obtemos a região $Q_1' := T(Q_1)$, disjunta de Q_2 , com vértices $q_0, q_1, \dots, q_k = q_0, q_i = T(p_i), \forall i \in \{0, \dots, k\}$. Dizemos que as regiões Q_1' e Q_2 são obtidas por um **recorte** em P ao longo da aresta $p_0 p_{k-1}$.

A região P é homeomorfa ao espaço quociente obtido pela colagem das arestas de Q_1' , de q_0 a q_{k-1} , com as arestas de Q_2 , de p_0 a p_{k-1} , pela aplicação positiva h .

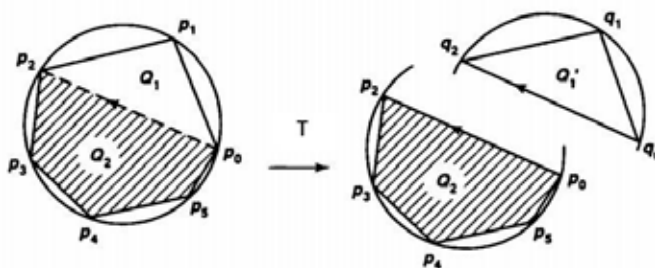


Figura A.1: Recorte

Trataremos agora da colagem. Suponha que temos dadas duas regiões poligonais distintas Q_1' e Q_2 , com vértices $q_0, \dots, q_k = q_0$, e $p_0, p_{k-1}, \dots, p_k, p_n = p_0$, respectivamente. Suponha ainda que formamos um espaço quociente da colagem das arestas de Q_1' de q_0 a q_{k-1} , com as arestas de Q_2 , de p_0 a p_{k-1} , pela aplicação positiva h . Vejamos como representar este espaço por uma região poligonal P .

Os pontos de Q_2 pertencem a um círculo e são arranjados no sentido anti-horário.

Escolhendo pontos p_1, \dots, p_{k-2} sobre este círculo de tal maneira que tenhamos $p_0, p_1, \dots, p_{k-1}, p_k, \dots, p_n = p_0$ no sentido anti-horário e considerando Q_1 a região poligonal formada pelos vértices $p_0, p_1, p_2, \dots, p_{k-1}, p_k = p_0$, note que existe um homeomorfismo entre Q_1' e Q_1 que aplica cada q_i em p_i , $\forall i \in \{0, \dots, k\}$ e leva linearmente a aresta q_0q_{k-1} de Q_1' sobre a aresta p_0p_{k-1} de Q_2 .

Desta maneira o espaço quociente em questão obtido pela colagem das arestas de Q_1' de q_0 a q_{k-1} , com as arestas de Q_2 de p_0 a p_{k-1} pela aplicação positiva h é homeomorfo a região $P = Q_1 \cup Q_2$. Dizemos que a região P foi obtido por meio da **colagem** de Q_1' a Q_2 .

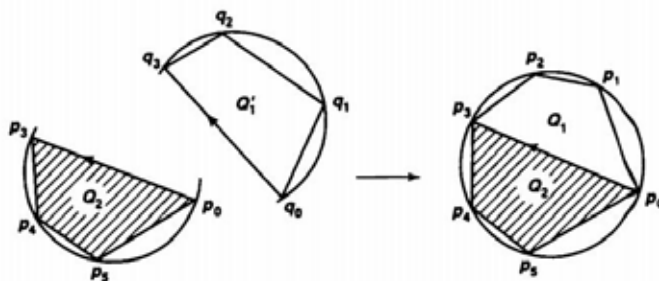


Figura A.2: Colagem

O teorema 3.1 explicita exatamente o efeito de um recorte e colagem sobre esquemas próprios que determinam um espaço X .

Teorema 3.1. *Suponha que X seja um espaço obtido pela colagem de arestas de m regiões poligonais com esquemas respectivamente dados por:*

$$y_0y_1, w_2, \dots, w_m \quad (*)$$

Seja c uma letra que não aparece nos esquemas acima. Se y_0 e y_1 são ambos de comprimento no mínimo dois, então X também pode ser obtido por colagem de arestas de $(m + 1)$ regiões poligonais com esquemas respectivamente dados por:

$$y_0c^{-1}, cy_1, w_2, \dots, w_m \quad (**)$$

*Reciprocamente, se X é o espaço obtido de $(m + 1)$ regiões poligonais com esquemas (**), então, X também pode ser obtido por m regiões poligonais com esquemas (*), desde que c não faça parte dos esquemas em (*).*

Demonstração. Suponha que temos uma coleção de regiões poligonais P_1, \dots, P_m , disjuntas, com os esquemas próprios w_1, \dots, w_m , respectivamente, e seja X o espaço quociente obtido da colagem das regiões P_1, \dots, P_m .

Agora recorte P_1 ao longo da linha de p_0 a p_{k-1} , desta maneira obtemos as $(m + 1)$ regiões poligonais $Q_1', Q_2, P_2, \dots, P_m$. Observe que para obter novamente o espaço X destas $(m + 1)$ regiões é necessário realizar uma colagem a mais.

Se w_1 é o esquema próprio para P_1 na forma $w_1 = y_0y_1$, onde y_0 consiste dos k primeiros termos de w_1 , y_1 os demais e c uma letra que não aparece nos esquemas w_1, \dots, w_m , então Q_1' é dada pelo esquema y_0c^{-1} e Q_2 por cy_1 e para $i > 1$ as P_i continuam com os esquemas w_i . Logo o espaço X é obtido das regiões $Q_1', Q_2, P_2, \dots, P_m$ por meio destes $(m + 1)$ esquemas.

E reciprocamente, se X é obtido por meio das regiões $Q_1', Q_2, P_2, \dots, P_m$ com esquemas como acima então, podemos dizer que X é obtido de m regiões poligonais P_1, P_2, \dots, P_m , onde $P_1 = Q_1' \cup Q_2$.

□

B Experiências em sala de aula

O conteúdo do segundo capítulo deste trabalho, foi desenvolvido na E.E.Prof. Hélio Nehring, para 30 alunos do 3º ano do Ensino Médio, em uma das salas em que as aulas de matemática são ministradas pela autora desta dissertação.

Ressaltando que antes de apresentar o material para os alunos, foi feita uma breve apresentação em HTPC (Hora de Trabalho Pedagógico Coletivo) para alguns professores e o coordenador pedagógico da escola, bem como também foi entregue um plano de aula contendo todos os itens que seriam apresentados aos alunos.

Esta parte do trabalho foi apresentada de forma intuitiva com o auxílio do material didático já confeccionado.

A sala escolhida para a apresentação deste trabalho contém alunos críticos e alguns bem comunicativos, de maneira que a escolha foi proposital, para que estes alunos falassem o que realmente sentiram em relação ao trabalho e grau de entendimento.

Os alunos foram levados até a biblioteca da escola, onde sentaram-se em grupos que eles mesmos escolheram.

Inicialmente alguns alunos mostraram-se um tanto apreensivos por pensarem que não conseguiriam entender o conteúdo, mas ao começar a apresentação, com explicações associadas ao material, eles participaram fazendo perguntas e tirando algumas dúvidas que surgiam no decorrer da apresentação.

Eles tiveram contato com o material e responderam algumas questões feitas durante a apresentação.

Foram feitas as seguintes perguntas:

- Quando mencionada a palavra superfície, o que vem em sua mente?
- O que é superfície?
- O que são deformações?
- Como deformar uma superfície?
- Como triangularizar um toro?
- O que vocês entendem por orientabilidade?

A resposta da pergunta *Como triangularizar um Toro ?* foi a que mais marcou pois neste momento pude perceber o efeito do material didático em relação ao conteúdo, o quanto este estava sendo assimilado, e as associações que o material proporcionava visto que um aluno disse que iria triangularizar o toro no seu diagrama plano.

No final, questionei como havia sido a apresentação, se o material didático realmente é um instrumento facilitador da aprendizagem e como tinha sido o entendimento.

Os alunos responderam que, com o material de apoio, o que parecia ser complicado tornou-se muito simples e que a possibilidade de aprender um conceito podendo visualizá-lo é bastante enriquecedor para o aprendizado pois permite a assimilação do conceito apresentado.

A experiência em sala de aula é de grande importância, pois nos ajuda a identificar se o trabalho está tendo o resultado esperado, e se há algo que precisa ser melhorado ou modificado para uma melhor compreensão do conteúdo.



Figura B.1: Experiência em sala de aula



Figura B.2: Experiência em sala de aula 1



Figura B.3: Experiência em sala de aula 2



Figura B.4: Experiência em sala de aula 3



Figura B.5: Experiência em sala de aula 4



Figura B.6: Experiência em sala de aula 5



Figura B.7: Experiência em sala de aula 6



Figura B.8: Experiência em sala de aula 7



Figura B.9: Experiência em sala de aula 8



Figura B.10: Experiência em sala de aula 9