



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Geometria Diferencial das Curvas Planas

João Paulo Felipe Domingues

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática Universitária como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre

Orientador
Prof. Dr. Thiago de Melo

2013

516.36 Domingues, João Paulo Felipe
D671g Geometria Diferencial das Curvas Planas/ João Paulo Felipe
Domingues- Rio Claro: [s.n.], 2013.
71 f., il., figs., gráfs.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas.
Orientador: Thiago de Melo

1. Geometria diferencial. 2. Evoluta. 3. Involuta. I. Título

TERMO DE APROVAÇÃO

João Paulo Felipe Domingues
GEOMETRIA DIFERENCIAL DAS CURVAS PLANAS

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática Universitária do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dr. Thiago de Melo
Orientador

Prof. Dr. Vanderlei Marcos do Nascimento
Departamento de Matemática - IGCE/UNESP/Rio Claro

Prof. Dr. Nivaldo de Góes Grulha Junior
Departamento de Matemática - ICMC/USP/São Carlos

Rio Claro, 09 de dezembro de 2013

*Aos meus pais José e Maria
e meu irmão Everton*

Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar a Deus, que me acompanha em meus sonhos e me guia em Sua direção, e que me dá o dom de exercer a gratidão. Aos meus pais, José Domingues e Maria Dias Felipe Domingues, que me criaram com amor – ação e sentimento de quem cuida, protege, educa, aceita e ajuda a vencer –, e que sempre me estimularam a estudar; agradeço e amo sempre. Suas orações e orientações se fizeram sempre fortes, especialmente em favor de correrem bem as inúmeras viagens feitas a Rio Claro nestes três anos. Assim, também, sou grato ao meu irmão, Everton José Felipe Domingues, referência de inteligência e superação presente em nossas vidas. Pela amizade, companhia e apoio nas viagens e nos estudos, deixo aqui meu agradecimento aos amigos do mestrado, Denis, Edmar, Juliano, Renato, Vinícius, Daniele, Erica, Franciéli, Thaisa, Wellington, Aline, Débora, Edilson, Felipe, Mariana e Williner, de São José do Rio Preto e cidades vizinhas. Todos são pessoas de bem e, mesmo cansados nas idas de madrugada e retornos à noite, tanto de van quanto de carro, tornaram a caminhada mais suave e valiosa. Aos demais colegas de turma, Carlos, Edgar, Leandro, Mariana, Mônica, Nilson, Paulo e Olívio, que também se fizeram amigos, só me cabe agradecer. Pelo apoio institucional que permitiu meu afastamento parcial do trabalho sou grato ao IBILCE/UNESP Câmpus de São José do Rio Preto, com destaque para os amigos de seção, por seus conselhos, apoio e disposição em atuar diante de minhas ausências. Aos meus outros amigos pessoais, que também me ajudam a sonhar, compartilhar e lutar, digo-lhes muito obrigado! Aos professores Ma. Rita de Cássia Barison Racanicci dos Santos e Me. Hermes Antonio Pedroso deixo meu agradecimento por suas cartas de recomendação com destacado apoio, elementos importantes no processo de seleção para ingresso no mestrado. Demonstro minha gratidão aos profissionais dos Departamentos de Matemática e de Matemática Aplicada e Computacional do IGCE/UNESP Câmpus de Rio Claro, por seu empenho em oferecer um programa de mestrado de qualidade. Agradeço ao Prof. Dr. Vanderlei Marcos do Nascimento pelo auxílio na redação do projeto que deu origem à dissertação e pela demonstração da primeira proposição do Capítulo 3. Finalmente, deixo um agradecimento especial ao Prof. Dr. Thiago de Melo, meu orientador, por sua disposição, ensinamentos, buscas por soluções, compreensão e paciência dedicados a este trabalho e a mim. Seu auxílio certamente me permitiu adquirir conhecimento em Matemática e em postura profissional, recursos a serem utilizados por toda a vida.

*A vida é como andar de bicicleta:
para manter o equilíbrio é preciso se manter em movimento.*

Albert Einstein

Resumo

A história da Geometria Diferencial começa com o estudo de *curvas*. Noções de retas tangentes à curvas podem ser encontradas em Euclides, Arquimedes e Apolônio. Também, o Cálculo está baseado em ideias geométricas e, portanto, é natural encontrar investigações sobre curvas entre os tópicos tratados pelos pioneiros da Análise, Newton, Leibniz e Euler. Neste trabalho, serão apresentados os conceitos que fundamentam a teoria de curvas, bem como exemplos envolvendo algumas curvas clássicas, como a cicloide.

Palavras-chave: Geometria diferencial, Evoluta, Involuta.

Abstract

The history of Differential Geometry begins with the study of *curves*. Notions of tangent lines to the curves can be found in Euclid, Archimedes and Apollonius. Also, the Calculus is based on geometrical ideas and therefore is natural to find researches on curves between topics treated by the pioneers of Analysis, Newton, Leibniz and Euler. In this work, the concepts that underlie the theory of curves and some examples involving classical curves are presented, as the cycloid.

Keywords: Differential geometry, Evolute, Involute.

Sumário

1	Introdução	15
2	Curvas Parametrizadas	17
2.1	Reparametrização	24
2.1.1	Função comprimento de arco	25
2.1.2	Reparametrização pelo comprimento de arco	32
3	Círculo Osculador e Curvatura	35
3.1	Tractriz	44
3.2	Curvatura com Sinal	47
4	Evolutas e Involutas	55
5	Conclusão	65
A	Alguns Resultados Básicos e Construções Geométricas	67
A.1	Espaço Vetorial	67
A.1.1	Norma em um espaço vetorial	67
A.2	Diferenciabilidade uniforme	68
A.3	Teorema de Rolle	68
A.4	Construções no GeoGebra	68
	Referências	71

1 Introdução

Este trabalho tem a proposta de explorar, de forma ordenada, conceitos de geometria diferencial referentes ao estudo de curvas no plano cartesiano, em especial evoluta e involuta, a partir de elementos de Álgebra Linear, Cálculo Diferencial e Integral, Geometria Euclidiana, Equações Diferenciais e Análise. Serão usadas, para isso, algumas curvas conhecidas encontradas em textos afins. Em alguns pontos, o texto se apresenta de forma recursiva ao relacionar seus conteúdos, com o objetivo de fixar ideias e ferramentas e ampliar a visão geral sobre o tema.

O Capítulo 2 trata de caracterizar as funções que serão chamadas de curvas, além de apresentar as definições de norma, vetor tangente e produto interno, provenientes da Álgebra Linear. Ainda, com base no que define por parametrização e reparametrização, o texto alcança uma ferramenta útil conhecida como reparametrização por comprimento de arco. Esta atribui à curva uma propriedade interessante, a ser exigida e trabalhada nos tópicos posteriores. O capítulo contém exemplos que revelam alguns procedimentos adotados quando se buscam parametrizações para curvas.

No decorrer do Capítulo 3 são apresentados os conceitos de círculo osculador, centro de curvatura e curvatura. Na obtenção do centro de curvatura associado a um ponto da curva, dois processos são considerados: um mais geométrico, com apoio na Análise, e outro com conteúdo prioritariamente algébrico. Suas concepções provêm de épocas distintas da história, mas não são ambíguas no que se referem aos itens seguintes encontrados na dissertação.

No mesmo capítulo se define, ainda, o referencial de Frenet, previamente amparado por algumas noções pertinentes aos vetores associados às curvas. Sua caracterização permite obter equações envolvendo curvatura e, já no capítulo seguinte, equações para a evoluta e a involuta.

O Capítulo 4 inicia com a famosa curva cicloide e parte, depois, para a descrição da construção da involuta de uma curva, sendo esta a evoluta de sua involuta. No caso da cicloide, sua evoluta é também uma cicloide, mas isso não ocorre, de modo geral, para outras curvas. Outros exemplos também estão presentes em detalhes.

De modo geral, o leitor contará com uma considerável diversidade de exemplos e ilustrações em meio à redação, para facilitar o entendimento. De forma complementar, textos auxiliares estão presentes no Apêndice A.4, como resultados utilizados em

demonstrações e um especial onde é mostrado um procedimento para plotar traços de curvas no *software* GeoGebra ([1]).

2 Curvas Parametrizadas

Para todo número natural n , seja \mathbb{R}^n o *espaço vetorial¹ euclidiano* n -dimensional sobre \mathbb{R} . A base canônica considerada é $\{e_1 = (1, 0, \dots, 0), e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)\}$. Os elementos de \mathbb{R}^n são n -uplas ou vetores $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$, onde v_1, v_2, \dots, v_n são números reais, chamados de coordenadas do vetor \vec{v} na base canônica.

Como um vetor se escreve unicamente como combinação linear da base fixada, a igualdade $\vec{v} = \vec{w}$ significa que $v_i = w_i, i = 1, 2, \dots, n$. As operações em \mathbb{R}^n de soma “+” e produto por escalar “.” são assim definidas:

$$\begin{aligned}\vec{v} + \vec{w} &= (v_1 + w_1, v_2 + w_2, \dots, v_n + w_n), \\ \lambda \cdot \vec{v} &= (\lambda v_1, \lambda v_2, \dots, \lambda v_n).\end{aligned}$$

Dados $\vec{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n), \vec{w} = (w_1, w_2, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^n$, um *produto interno* (ou produto escalar) “.” entre eles é dado por:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + \dots + v_n w_n \in \mathbb{R}.$$

Diz-se que uma função $f : (a, b) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é *de classe* C^k se possui derivadas contínuas até a ordem k . Ainda, se ela for C^k para qualquer k , então é chamada de *suave* (notação: C^∞).

Definição 2.1. *Uma curva parametrizada é uma função $\alpha : (a, b) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^k , para algum k . Notação (em termos de funções coordenadas): $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t))$. Se α é derivável em t , escreve-se derivada de α em t*

$$\frac{d\alpha}{dt}(t) = \alpha'(t) = (\alpha'_1(t), \alpha'_2(t), \dots, \alpha'_n(t)),$$

e chama-se $\alpha'(t)$ de vetor tangente de α em t .

Neste trabalho, a menos que seja esclarecido de modo diferente, “curva parametrizada” será chamada simplesmente de “curva”. A imagem de uma curva recebe o nome de *traço* e α é chamada de *regular* se $\alpha'(t) \neq 0, \forall t \in (a, b)$.

¹Ver definição no Apêndice A.1.

Sejam $\alpha, \beta : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ curvas. Se $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t))$ e $\beta(t) = (\beta_1(t), \beta_2(t), \dots, \beta_n(t))$, com relação à derivada do produto interno entre $\alpha(t)$ e $\beta(t)$, tem-se:

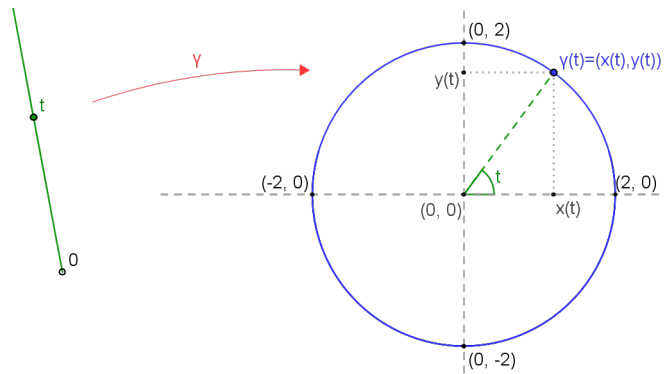
$$\begin{aligned} (\alpha(t) \cdot \beta(t))' &= (\alpha_1(t)\beta_1(t) + \alpha_2(t)\beta_2(t) + \dots + \alpha_n(t)\beta_n(t))' \\ &= (\alpha_1'(t)\beta_1(t) + \alpha_1(t)\beta_1'(t)) + \dots + (\alpha_n'(t)\beta_n(t) + \alpha_n(t)\beta_n'(t)) \\ &= (\alpha_1'(t)\beta_1(t) + \dots + \alpha_n'(t)\beta_n(t)) + (\alpha_1(t)\beta_1'(t) + \dots + \alpha_n(t)\beta_n'(t)) \\ &= \alpha'(t) \cdot \beta(t) + \alpha(t) \cdot \beta'(t). \end{aligned}$$

A norma² de $\alpha'(t)$, $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{\alpha'(t) \cdot \alpha'(t)}$, é chamada de *velocidade* de α em t . Se a curva α for regular, então $\|\alpha'(t)\| > 0$, pois $\alpha'(t) \neq 0 \Rightarrow \alpha'(t) \cdot \alpha'(t) > 0 \Rightarrow \sqrt{\alpha'(t) \cdot \alpha'(t)} > 0$.

Os conceitos de Álgebra Linear apresentados até este ponto do texto serão utilizados nas definições e demonstrações de vários resultados de Geometria Diferencial presentes no trabalho.

Exemplo 2.1. Seja $\alpha : (-a, a) \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $\alpha(t) = \left(\frac{3}{5}t^{\frac{5}{3}}, \frac{t^2}{2}\right)$. Neste caso, α é de classe C^1 , pois $\alpha'(t) = (t^{\frac{2}{3}}, t)$ é contínua em $(-a, a)$, mas não é de classe C^2 neste intervalo.

Exemplo 2.2. Seja $\gamma : (0, +\infty) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $\gamma(t) = (2 \sin t, 2 \cos t)$. Seu traço é o círculo de raio 2 e centro $(0, 0)$.



Calculando a derivada de γ , obtém-se a função $\gamma'(t) = (2 \cos t, -2 \sin t)$. Vê-se facilmente que γ é uma curva de classe C^∞ , e também que as imagens de γ e γ' coincidem. Por fim, $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{2^2(\cos^2 t + \sin^2 t)} = \sqrt{2^2} = 2$.

Exemplo 2.3. Seja $\zeta : \left(-\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{4}\pi\right) \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $\zeta(t) = (2t^2, -\pi \cos t)$. Tomando $t = 0$, obtém-se $\zeta'(0) = (0, 0)$, verificando-se, portanto, que ζ não é regular. Na

²Maiores detalhes em A.1.1.

Figura 2.1 o traço de ζ está identificado pela cor roxa e o de sua derivada ζ' , dada por $\zeta'(t) = (4t, \pi \sin t)$, pela cor laranja.

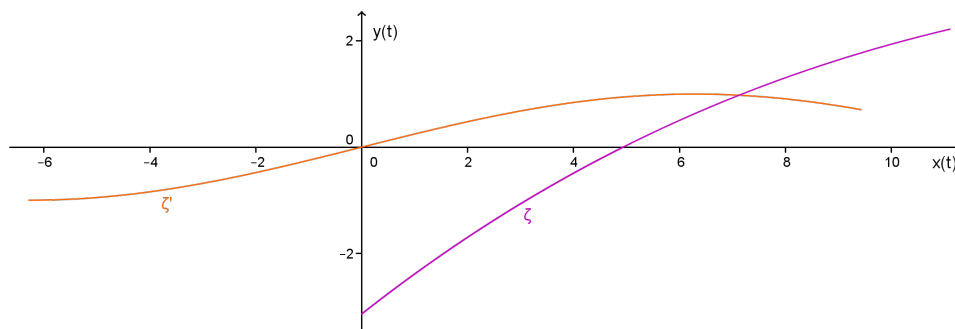


Figura 2.1: Curva não regular ζ e sua derivada

Os exemplos a seguir ilustrarão alguns procedimentos possíveis na busca de parametrizações, descritas a partir de pontos sobre objetos geométricos e movimentos destes no plano.

Exemplo 2.4 (O asteroide). A curva α que recebe este nome descreve o percurso de um ponto fixo sobre um círculo de raio $a/4$ que rola³ no interior de um círculo de raio a .

Em princípio, sejam $O = (0, 0)$ o centro do círculo maior, $P_0 = (a, 0)$ e o círculo menor rolando para a direita (ou seja, ao redor de O no sentido anti-horário). Ainda, seja t o ângulo – medido no sentido anti-horário – entre o eixo- x e o segmento OT , onde $T = T(t)$ é o ponto de tangência entre os círculos (ver Figura 2.2(1) e (2)). Para cada t , tem-se que $T(t)$, o centro $C = C(t)$ do círculo menor e a origem O são colineares e, portanto, $P_0\hat{O}C = t$.

Por fim, sendo $P = \alpha(t)$, considere-se $\theta = T\hat{C}P$, ângulo com origem em C e medido a partir do ponto T , no sentido horário.

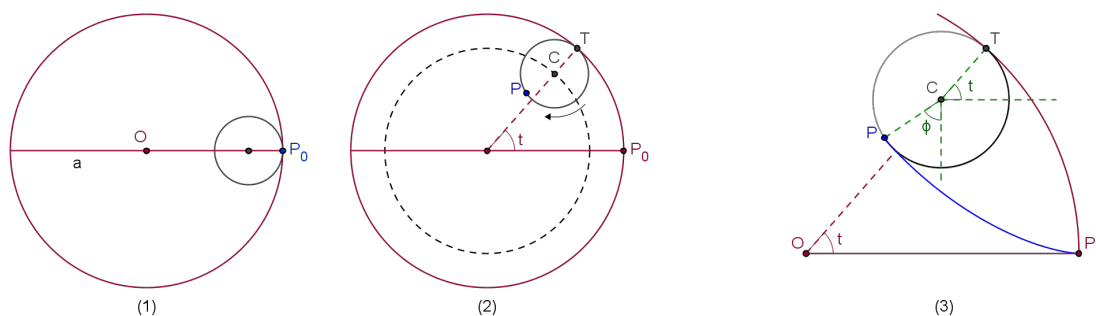


Figura 2.2: Construção de um asteroide

Considerando que $s = at$ e que $s = \frac{a}{4}\theta$ (comprimentos de arcos de círculos percorridos nos círculos maior e menor, respectivamente), chega-se em $\theta = 4t$.

³Sem deslizar ou derrapar.

Agora, seja $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $\gamma(t) = \left(\frac{3}{4}a \cos t, \frac{3}{4}a \sin t\right)$, cujo traço é o círculo de centro O e raio $\frac{3}{4}a$. Para cada t , $\gamma(t)$ coincide com o centro $C(t)$ (ver Figura 2.2(2)). Para determinar uma parametrização para α , é suficiente obter uma função ι que descreva o movimento do ponto ao redor de $\gamma(t)$.

Considerando a Figura 2.2(3), seja $\theta = t + \frac{\pi}{2} + \phi$, donde $\phi = \theta - t - \frac{\pi}{2} = 3t - \frac{\pi}{2}$, medido a partir da vertical que passa por C . A função ι tomada é, portanto,

$$\begin{aligned}\iota(\phi) &= \frac{a}{4} (-\sin \phi, -\cos \phi) \\ \Rightarrow \iota(t) &= \frac{a}{4} \left(-\sin\left(3t - \frac{\pi}{2}\right), -\cos\left(3t - \frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{a}{4} (\cos 3t, -\sin 3t),\end{aligned}$$

e a parametrização α fica determinada pela soma dessas funções vetoriais, ou seja:

$$\alpha(t) = \gamma(t) + \iota(t) = \left(\frac{3a}{4} \cos t + \frac{a}{4} \cos 3t, \frac{3a}{4} \sin t - \frac{a}{4} \sin 3t\right).$$

Finalmente, fazendo uso das relações trigonométricas $\sin 3t = 3 \sin t - 4 \sin^3 t$ e $\cos 3t = -3 \cos t + 4 \cos^3 t$, consegue-se simplificar $\alpha(t)$, chegando-se a

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= \frac{a}{4} (3 \cos t + \cos 3t, 3 \sin t - \sin 3t) \\ &= \frac{a}{4} (3 \cos t - 3 \cos t + 4 \cos^3 t, 3 \sin t - 3 \sin t + 4 \sin^3 t) \\ &= \frac{a}{4} (4 \cos^3 t, 4 \sin^3 t) \\ &= (a \cos^3 t, a \sin^3 t), \text{ para } t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

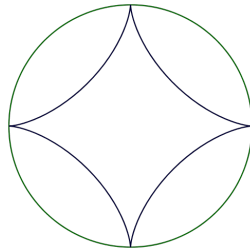


Figura 2.3: Astroide

A curva α deste exemplo não é regular, pois $\alpha'(t_k) = 0$ para $t_k = k\pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$.

Terminada a construção, faz sentido buscar uma parametrização geral para curvas obtidas por um procedimento semelhante ao do astroide, chamadas de *hipocicloides de n cúspides* – onde n é o número de interseções entre a curva e o círculo maior, utilizado em sua construção. O astroide, por exemplo, tem 4 cúspides.

A partir do raciocínio tomado, seja b o raio do círculo menor, com $0 < b < a$. A relação $b\theta = at$ (entre os comprimentos de arcos dos círculos) produz $\theta = at/b$. Daí, $\phi = \frac{at}{b} - t - \frac{\pi}{2} = \left(\frac{a}{b} - 1\right)t - \frac{\pi}{2}$, e se consegue a parametrização

$$\hat{\alpha}(t) = \left((a - b) \cos t + b \cos\left(\frac{a-b}{b}t\right), (a - b) \sin t - b \sin\left(\frac{a-b}{b}t\right)\right).$$

Dessa forma, dado a , para cada $b < a$ obtém-se uma nova curva. Além disso, não necessariamente $\alpha(0) = \alpha(2\pi)$, mas pode ser preciso um número superior de voltas para que isso ocorra ou, ainda, há casos em que não acontece.

Partindo-se de $k(2\pi b) = l(2\pi a)$, onde $k > 0$ é o número de voltas que P dá em torno de C , e $l > 0$ o número de voltas que P dá em torno de O , chega-se em $k = (\frac{a}{b})l$. Sejam k_0 e l_0 os menores valores possíveis que compõem uma solução, ou seja, referentes a quando $\alpha(0) = \alpha(2\pi l_0)$.

Assim, como $k, l \in \mathbb{N}$, em princípio a , b e a/b devem ser racionais para que a equação tenha solução, e a forma irredutível de a/b permitirá então obter k_0 e l_0 . Na hipótese da constante a/b não ser racional, a curva não será periódica (ou seja, $\alpha(0)$ não coincidirá com $\alpha(t)$, $\forall t \neq 0$), caso em que ela terá infinitas cúspides.

Ainda procedendo-se à construção de curvas de modo semelhante ao adotado, mas buscando ainda outra generalização, seja $P'_0 = (a + \epsilon, 0)$, $\epsilon > 0$, externo ao círculo maior. A curva resultante não será tangente a este círculo, recebe o nome de *hipotrocoide* e tem uma parametrização na forma

$$\check{\alpha}(t) = \left((a - b) \cos t + d \cos \left(\frac{a-b}{b} t \right), (a - b) \sin t - d \sin \left(\frac{a-b}{b} t \right) \right), \quad d = b + \epsilon.$$

Uma outra possibilidade é construir a curva colocando o círculo menor para rolar também sobre o maior, mas pelo lado externo deste. Tal curva é chamada de *epitrocoide* e uma parametrização sua tem a forma

$$\check{\alpha}(t) = \left((a + b) \cos t - d \cos \left(\frac{a+b}{b} t \right), (a + b) \sin t - d \sin \left(\frac{a+b}{b} t \right) \right).$$

Na Figura 2.4 a primeira imagem contém parte do traço de uma hipotrocoide (com $a = \frac{5}{2}$, $b = 1$, $d = \frac{3}{2}$ e $0 \leq t \leq \frac{17}{5}\pi$) e a segunda imagem parte do traço de uma epitrocoide (com $a = \frac{3}{2}$, $b = \frac{1}{2}$, $d = \frac{1}{2}$ e $0 \leq t \leq \frac{17}{10}\pi$).

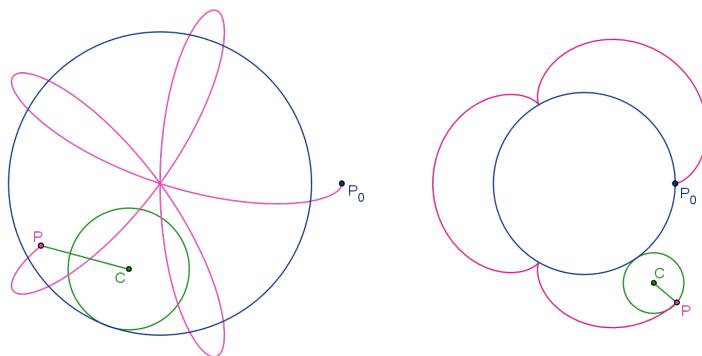


Figura 2.4: Hipotrocoide e epitrocoide

Exemplo 2.5 (A Bruxa de Agnesi). Uma parametrização para esta curva pode ser conseguida pelo seguinte procedimento: a partir da origem $O = (0, 0)$, desenha-se uma reta através de qualquer ponto $P \neq (0, 0)$ do círculo de raio a e centrado em $C = (0, a)$. Então, da interseção Q dessa reta com a reta horizontal $y = 2a$, traça-se

uma reta vertical. A interseção desta com a reta horizontal que passa por P é um ponto da curva *bruxa de Agnesi* (ver Figura 2.5).

Sejam $R = (0, 2a)$ e $R\hat{O}Q = t$, este medido no sentido horário. Para se chegar à uma parametrização $W(t) = (x(t), y(t))$ da curva, serão utilizadas relações trigonométricas nos triângulos retângulos que surgem no processo de construção. Para $x(t)$, tem-se

$$\operatorname{tg} t = \frac{\overline{RQ}}{\overline{OR}} = \frac{x(t)}{2a} \Rightarrow x(t) = 2a \operatorname{tg} t.$$

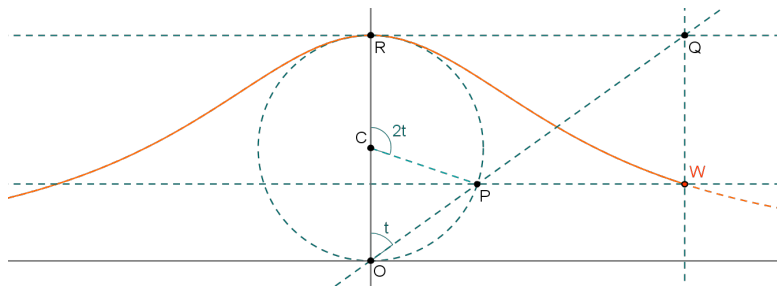
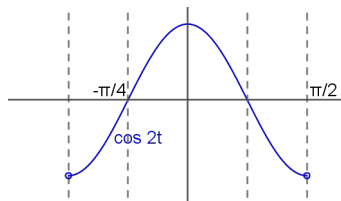


Figura 2.5: Bruxa de Agnesi

Para determinar $y(t)$, que varia em $(0, 2a]$, basta determinar a coordenada y de P . Toma-se inicialmente o ângulo central do círculo, $R\hat{C}P = 2t$ e, visto que o círculo está centrado em $(0, a)$, chega-se à y pela relação $y(t) = a + a \cos 2t$.

A coordenada y varia, como sugere a Figura 2.5, no intervalo $(-a, 2a]$. Basta observar que, para $t \in (-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}] \cup [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$, tem-se $\cos 2t \in (-1, 0]$ e que, para $t \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$, $\cos 2t \in (0, 1]$, como mostra a figura a seguir.



Usando-se $1 + \cos 2t = 2 \cos^2 t$ obtém-se $y(t) = a(1 + \cos 2t) = 2a \cos^2 t$, e se chega à parametrização

$$W(t) = (2a \operatorname{tg} t, 2a \cos^2 t), \quad t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Exemplo 2.6 (A Ponte Suspensa). Considere-se uma ponte suspensa, representada na Figura 2.6, onde o cabo suporta uma carga uniformemente distribuída. Isso significa que, sobre qualquer intervalo não degenerado $[a, b]$, o peso suportado pelo cabo é dado por $P = c(b - a)$, com $c > 0$ constante.

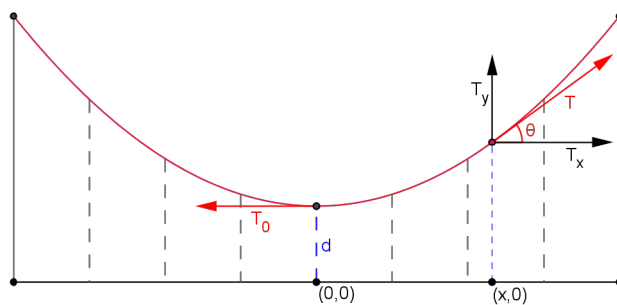


Figura 2.6: Ponte suspensa

Aplicando-se a Lei de Newton $F = ma$ às componentes vertical e horizontal da tensão T no cabo, obtêm-se as equações de força:

$$T \operatorname{sen} \theta = cx,$$

$$T \operatorname{cos} \theta = T_0,$$

onde x e θ são como desenhadas e T_0 é a força horizontal de tensão puxando o cabo, no comprimento de 0 a x . Usando que $dy/dx = \operatorname{tg} \theta$, consegue-se

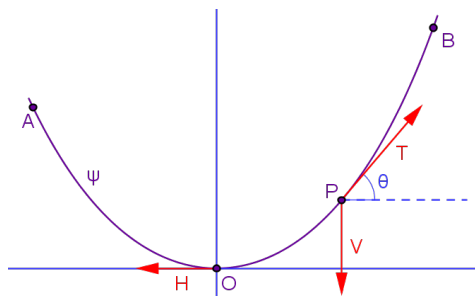
$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\operatorname{sen} \theta}{\operatorname{cos} \theta} = \frac{cx/T}{T_0/T} = \frac{cx}{T_0} \Rightarrow \int dy = \frac{c}{T_0} \int x dx \\ &\Rightarrow y(x) = \frac{c}{T_0} \frac{x^2}{2} + d = \left(\frac{c}{2T_0} \right) x^2 + d, \quad d \text{ constante,} \end{aligned}$$

e finalmente se escreve a parametrização $\varphi : (-a, a) \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por

$$\varphi(x) = \left(x, \frac{c}{2T_0} x^2 + d \right).$$

Exemplo 2.7 (A catenária ([2])). A curva ψ que leva o nome de *catenária* descreve a forma tomada por um cabo flexível⁴ e inextensível, suspenso em dois pontos A e B , sujeito apenas ao seu próprio peso.

Seja $O = (0,0)$ o ponto mais baixo da curva e $H + T + V = 0$ a equação para representar o equilíbrio do trecho OP do cabo, onde H (constante) é a tensão do cabo em O , $T(t)$ a tensão no ponto $P(t) = (t, y(t))$ e $V(t) = \omega s(t)$ o peso do trecho do cabo em questão. A constante ω é o peso por unidade de comprimento e s o comprimento do arco OP .



⁴Significa que a tensão no cabo é sempre no sentido da tangente.

As projeções dessa equação de equilíbrio sobre os dois eixos fornecem duas equações que, somadas, resultam em

$$\begin{cases} -H + T \cos t = 0, \\ -V + T \sin t = 0, \end{cases} \Rightarrow \operatorname{tg} t = \frac{\omega}{H} s. \quad (2.1)$$

Tem-se que $H/\omega \equiv 1/c$, $c \neq 0$ constante, e também que $\operatorname{tg} t = \frac{-V}{-H} = y'(t)$. Com isso, a derivação dos membros de (2.1) produz $y''(t) = s'(t)/c$.

Mas $s'(t) = \|\psi'(t)\| = \|(1, y'(t))\| = \sqrt{1 + (y')^2}$, de onde se observa que y deve satisfazer a equação diferencial $y'' = \sqrt{1 + (y')^2}/c$. Considerando-se a variável $p = y'$, obtém-se a equação separável de primeira ordem

$$\frac{p'}{\sqrt{1 + p^2}} = \frac{1}{c} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1 + p^2}} dp = \frac{1}{c} dt. \quad (2.2)$$

Fazendo-se a mudança de variável $p = \operatorname{cotg} t$, $dp = \operatorname{cosec}^2 t dt$ e retornando p após a obtenção da primitiva, chega-se em

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{1 + p^2}} dp &= - \int \frac{\operatorname{cosec}^2 t}{\sqrt{1 + \operatorname{cotg}^2 t}} dt = - \int \frac{\operatorname{sen} t}{\operatorname{sen}^2 t} dt = - \int \frac{1}{\operatorname{sen} t} dt \\ &= - \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} + k = - \ln(\sqrt{1 + p^2} - p) + k, \quad k \text{ constante.} \end{aligned}$$

Assim, as soluções da equação (2.2) são dadas por: $-\ln(\sqrt{1 + p^2} - p) = \frac{t}{c} + l$, l constante. Como para ψ tem-se $p(0) = y''(0) = 0$, então $l = 0$. Portanto,

$$\sqrt{1 + (y')^2} - y' = e^{-t/c}. \quad (2.3)$$

Por meio de propriedades de funções hiperbólicas, conclui-se que as soluções de (2.3) são dadas por $y(t) = c \cosh \frac{t}{c} + r$, r constante. Dado que $y(0) = 0$, ocorre que $r = -c$ e se chega finalmente à catenária com a parametrização

$$\psi(t) = \left(t, c \cosh \frac{t}{c} - c\right), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (2.4)$$

2.1 Reparametrização

O conceito de reparametrização é uma importante ferramenta no tratamento de curvas, especialmente por tornar possível modificar e regular o modo de percorrer seu traço.

Definição 2.2. *Sejam $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma curva (de classe C^k) regular e $g : (c, d) \rightarrow (a, b)$. Se g é de classe C^k e possui inversa também de classe C^k , então se diz que g é uma reparametrização, e $\beta = \alpha \circ g : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}^n$ a curva α reparametrizada.*

Nas condições desta definição, a curva β pode ser reparametrizada por g^{-1} , sendo α a parametrização resultante do processo.

Observação: Na subseção a seguir será definida a “função comprimento de arco” que, como sugere seu nome, dá, para cada t , o comprimento do traço de α , de $\alpha(a_0)$ a $\alpha(t)$. Antes disso e, de modo oportuno, descrever-se-á o procedimento do qual ela é resultante.

Considerando que o cálculo do referido comprimento se dá sobre um intervalo $[a_0, t]$, serão utilizados na subseção 2.1.1, a seguir, resultados que envolvem funções definidas em intervalos fechados, ou seja, $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Também, o Exemplo 2.9 mostra que alguma descontinuidade pode ocorrer.

2.1.1 Função comprimento de arco

Seja $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função. Dada uma partição $P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b\}$ de $[a, b]$, associa-se a ela o número $\ell(\alpha; P) = \sum_{i=1}^k \|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\|$, comprimento da poligonal que liga os pontos $\alpha(t_i)$.

Diz-se que uma partição Q de $[a, b]$ é mais fina que P quando $P \subset Q$. Neste contexto, [3, Teorema 1, p.93] garante que, se $P \subset Q$, então $\ell(\alpha; P) \leq \ell(\alpha; Q)$.

Definição 2.3. Uma função $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é dita retificável se existe $\sup_P \ell(\alpha; P)$, onde P varia entre todas as partições de $[a, b]$. Este supremo é chamado de comprimento de α , denotado por $\ell(\alpha)$.

Vale lembrar que, pela definição de supremo: i) $\ell(\alpha) \geq \ell(\alpha; P)$, para toda partição P de $[a, b]$; ii) dado $\epsilon > 0$, existe P_ϵ tal que $\ell(\alpha; P_\epsilon) > \ell(\alpha) - \epsilon$.

Exemplo 2.8. Um exemplo de função não-retificável é $\alpha : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por

$$\alpha(t) = \begin{cases} (t, t \operatorname{sen} \frac{1}{t}), & \text{se } t \neq 0, \\ (0, 0), & \text{se } t = 0. \end{cases}$$

Um ponto que percorre o traço de α oscila em torno do eixo- x , diminuindo a amplitude da oscilação conforme se aproxima da origem.

Para facilitar o raciocínio de condução da justificativa deste exemplo, considere-se a restrição $\alpha|_{[0, \frac{2}{\pi}]}$ da função em questão. Os valores t nos quais α intercepta uma das retas $r, s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, dadas por $r(t) = (t, t)$ e $s(t) = (t, -t)$, formam o conjunto $\{t_k = 2/((2k - 1)\pi), k \in \mathbb{N}^*\} \cup \{0\}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}^*$, sejam

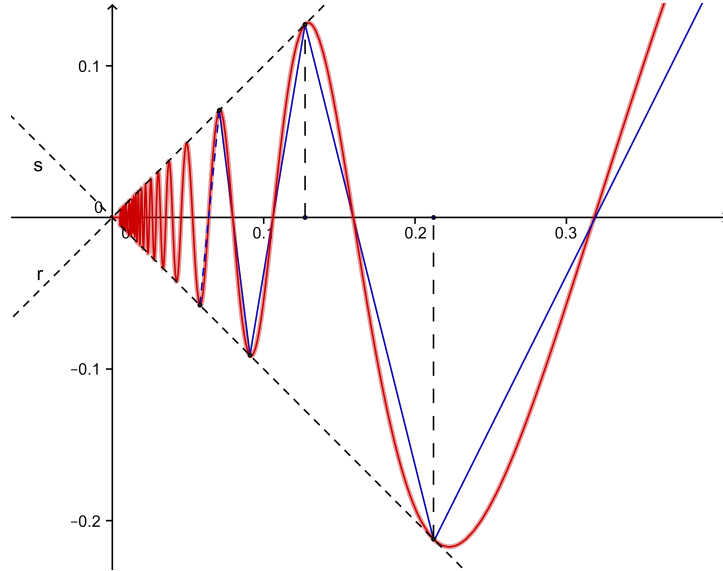
$$P_n = \left\{ 0, \frac{2}{(2n+1)\pi}, \dots, \frac{2}{3\pi}, \frac{2}{\pi} \right\} \text{ uma partição, e}$$

$$\ell(\alpha; P_n) = \left\| \alpha \left(\frac{2}{(2n+1)\pi} \right) - \alpha(0) \right\| + \sum_{k=1}^{n-1} \left\| \alpha \left(\frac{2}{(2k+1)\pi} \right) - \alpha \left(\frac{2}{(2k-1)\pi} \right) \right\| \quad (2.5)$$

o comprimento da polygonal que liga os pontos $\alpha(t_k)$, $t_k \in P_n$.

Cada parcela $\|\alpha(t_k) - \alpha(t_{k-1})\|$ do somatório de (2.5) é maior que a correspondente distância do ponto $\alpha(t_k)$ ao eixo- x , dada por

$$\left| t_k \operatorname{sen} \frac{1}{t_k} \right| = \frac{2}{(2k-1)\pi}.$$



Agora,

$$\ell(\alpha; P_n) > \sum_{k=1}^n \frac{2}{(2k-1)\pi} = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1} = \frac{2}{\pi} \left(1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n-1} \right). \quad (2.6)$$

Para cada n , $\sum_{k=1}^n 1/(2k-1)$ é a soma parcial de uma série que diverge. Basta considerar que “se $\sum a_n$ e $\sum b_n$ são séries com termos positivos e, se $\sum b_n$ é divergente e $a_n \geq b_n$, $\forall n > N_0$, então $\sum a_n$ é divergente” [4, Corolário, p.108], tomar $\sum a_n = \sum 1/(2n-1)$, $\sum b_n = \sum 1/2n$ e usar o resultado citado, pois $\sum b_n$ é divergente e $\frac{1}{2n} < \frac{1}{2n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

A divergência de $\sum b_n$ resulta do fato de ela ser “igual” à série $\frac{1}{2} \sum 1/n$ (ou seja, cada elemento $\sum_1^k 1/2k$ é igual a $\frac{1}{2} \sum_1^k 1/k$) e de a série harmônica $\sum 1/n$ ser divergente [4, Exemplo 23, p.106].

Novamente por [4, Corolário, p.108] e considerando os valores $\ell(\alpha; P_n)$ também como elementos de uma série – também positivos, no caso, e com $\ell(\alpha; P_{n_1}) > \ell(\alpha; P_{n_0})$ se $n_1 > n_0$ –, pela inequação (2.6) conclui-se que esta série também é divergente.

Portanto, o conjunto dos números $\ell(\alpha, P_n)$ associados à função α é ilimitado, ou seja, não existe o comprimento de $\alpha|_{[0, \frac{2}{\pi}]}$, donde α não é retificável.

Toda função retificável $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é limitada, ou seja, sua imagem está contida numa bola, por exemplo a bola fechada de centro $\alpha(a)$ e raio $\ell(\alpha)$.

Para verificar isso, parte-se de $\ell(\alpha)$ ter sido definido como o supremo dos comprimentos das poligonais associadas às partições de $[a, b]$. Daí, dado um ponto $\alpha(t_0)$ qualquer, $\|\alpha(t_0) - \alpha(t)\| < \ell(\alpha)$, para todo $t \in [a, b]$. Assim, a imagem está toda contida na bola fechada de centro $\alpha(t_0)$ e raio $\ell(\alpha)$. Além disso, se uma função $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ tem extremidades $A = \alpha(a)$ e $B = \alpha(b)$, então $\ell(\alpha) \geq \|B - A\|$, pois $P = \{a, b\}$ é uma partição tal que $\ell(\alpha) = \|B - A\|$. Se $\ell(\alpha) = \|B - A\|$, então a imagem de α está contida no segmento de reta de extremos A e B , desde que a norma provenha de um produto interno, como é o caso.

Fixando-se uma partição P_0 de $[a, b]$, o comprimento da função α também pode ser obtido, via supremo, considerando apenas partições mais finas que P_0 . Isto se deve ao seguinte fato: “ $\sup_P \ell(\alpha; P) = \sup_{Q \supset P_0} \ell(\alpha; Q)$ ” [3, Lema, p.94].

Os dois teoremas a seguir podem ser encontrados em [3, Teoremas 3 e 4, p.96-97].

Teorema 2.1. *A função $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é retificável se, e somente se, cada função coordenada $\alpha_i : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é retificável.*

Teorema 2.2. *Seja $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função tal que, para cada $c \in [a, b)$, a restrição $\alpha|_{[a, c]}$ é retificável. Se existir $K > 0$ tal que $\ell(\alpha|_{[a, c]}) \leq K$, para todo $c \in [a, b)$, então existe $\lim_{t \rightarrow b^-} \alpha(t)$. Analogamente, para $\alpha : (a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, se existir K com propriedades similares, então existe $\lim_{t \rightarrow a^+} \alpha(t)$.*

Um corolário do Teorema 2.2 diz que, “para uma função $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ retificável, tem-se que para todo $c \in [a, b]$ existem os limites laterais $\lim_{t \rightarrow c^-} \alpha(t)$ (se $c \neq a$) e $\lim_{t \rightarrow c^+} \alpha(t)$ (se $c \neq b$)”. As funções com esta propriedade chamam-se *reguladas*.

Dada uma partição P de $[a, b]$, denote-se por $|P| = \max |t_i - t_{i-1}|$ a maior distância entre quaisquer dois pontos consecutivos da partição. Pode-se definir o comprimento de α como $\ell(\alpha) = \lim_{|P| \rightarrow 0} \ell(\alpha; P)$ (se existe este limite, um número real), ou seja,

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ dado, } \exists \delta > 0 \text{ tal que } |P| < \delta \Rightarrow |\ell(\alpha; P) - \ell(\alpha)| < \varepsilon,$$

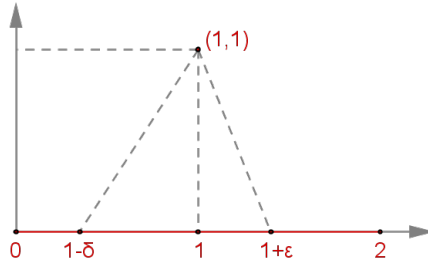
mas apenas para uma classe especial de funções, chamadas de “bem reguladas”, tratadas a seguir.

Diz-se que uma função $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é *bem regulada* quando é regulada e, para todo $c \in (a, b)$, tem-se

$$\| \lim_{t \rightarrow c^+} \alpha(t) - \lim_{t \rightarrow c^-} \alpha(t) \| = \| \lim_{t \rightarrow c^+} \alpha(t) - \alpha(c) \| + \| \alpha(c) - \lim_{t \rightarrow c^-} \alpha(t) \|.$$

Exemplo 2.9. Seja $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $f(t) = (t, 0)$ para $t \neq 1$, e $f(1) = (1, 1)$, uma função retificável e descontínua.

Tomando uma partição P qualquer de $[0, 2]$ que não contenha o ponto $t_i = 1$, resultará que $\ell(f; P) = 2$, pois as imagens de seus pontos por f estão sobre o eixo- x e a poligonal correspondente é o próprio segmento de $(0, 0)$ a $(2, 0)$.



Agora, se Q é uma partição de $[0, 2]$ com $t_i = 1$, $t_{i-1} = 1 - \delta$ e $t_{i+1} = 1 + \varepsilon$, $0 < \delta, \varepsilon < 1$, então

$$\begin{aligned} \ell(f; Q) &= \|(0, 0) - (1 - \delta, 0)\| + \|(1 - \delta, 0) - (1, 1)\| + \|(1, 1) - (1 + \varepsilon, 0)\| \\ &\quad + \|(1 + \varepsilon, 0) - (2, 0)\| = (1 - \delta) + \sqrt{1 + \delta^2} + \sqrt{1 + \varepsilon^2} + (1 - \varepsilon) \\ &= 2 - (\delta + \varepsilon) + \sqrt{1 + \delta^2} + \sqrt{1 + \varepsilon^2} \leq 4. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Observa-se, daí, que $\ell(f; Q) \geq 2$, para toda partição Q , e que 4 é uma cota superior para $\ell(f; Q)$. Para verificar se 4 é a menor delas, é preciso mostrar que, dado $\lambda \in (0, 2)$, existe uma partição $\bar{Q} = P \cup \{1 - \delta_\lambda, 1 + \delta_\lambda\}$ tal que $4 - \lambda < \ell(f; \bar{Q})$.

Para se obter δ_λ , por (2.7) resolve-se $2 - 2\delta + 2\sqrt{1 + \delta^2} = 4 - \lambda$, cuja solução é $\delta = (1 - \lambda)/(4 - 2\lambda)$. Assim, para $\delta_\lambda < \delta$ chega-se à partição esperada.

Portanto, $\ell(f) = 4$.

Esta função não é bem regulada. Basta tomar $c = 1 \in [0, 2]$ e ver que a igualdade presente na definição de função bem regulada não é atendida para este valor, ou seja,

$$\begin{aligned} \left\| \lim_{t \rightarrow 1^+} \alpha(t) - \lim_{t \rightarrow 1^-} \alpha(t) \right\| &= \|(1, 0) - (1, 0)\| = \|(0, 0)\| = 0 \neq \\ \left\| \lim_{t \rightarrow 1^+} \alpha(t) - \alpha(1) \right\| + \left\| \alpha(1) - \lim_{t \rightarrow 1^-} \alpha(t) \right\| &= \|(0, -1)\| + \|(0, 1)\| = 2. \end{aligned}$$

Com este exemplo, viu-se que nem sempre uma função retificável é bem regulada. No entanto, segue imediatamente da definição que a continuidade é uma condição suficiente.

De modo conveniente ao que aborda o texto, vale a pena verificar que são equivalentes:

$$L := \sup_P \ell(\alpha; P) \Leftrightarrow \begin{cases} L \geq \ell(\alpha; P); \\ \forall \varepsilon > 0, \exists P \mid L - \varepsilon < \ell(\alpha; P). \end{cases} \quad (2.8)$$

$$\tilde{L} := \lim_{|P| \rightarrow 0} \ell(\alpha; P) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid |P| < \delta \Rightarrow |\ell(\alpha; P) - \tilde{L}| < \varepsilon. \quad (2.9)$$

Suponha-se a existência de $\varepsilon_0 > 0$ tal que $|L - \tilde{L}| \geq \varepsilon_0$. Dessa forma,

- i) por (2.8), existe P_0 tal que $L - \varepsilon_0/2 < \ell(\alpha; P_0) \leq \ell(\alpha; Q)$, para todo $Q \supset P_0$;
- ii) por (2.9), existe $\delta_0 > 0$ tal que $|P| < \delta_0 \Rightarrow |\ell(\alpha; P) - \tilde{L}| < \varepsilon_0/2$. Em particular, para todo $\tilde{Q} \supset P$, $|\tilde{Q}| < \delta_0$ e, portanto, $|\ell(\tilde{Q}) - \tilde{L}| < \varepsilon_0/2$.

Seja P_1 tal que $|P_1| < \delta_0$ e tome-se $Q = P_0 \cup P_1$. Daí,

$$\begin{aligned} |L - \tilde{L}| &= |L - \ell(\alpha; Q) + \ell(\alpha; Q) - \tilde{L}| \leq |L - \ell(\alpha; Q)| + |\ell(\alpha; Q) - \tilde{L}| \\ &< \frac{\varepsilon_0}{2} + \frac{\varepsilon_0}{2} < \varepsilon_0, \end{aligned}$$

absurdo, segundo a hipótese tomada. Portanto, $|L - \tilde{L}| < \varepsilon$, para todo $\varepsilon > 0$, o que finaliza a demonstração.

Assim, tanto (2.8) quanto (2.9) podem ser utilizadas como definição de comprimento de α .

O próximo teorema e o seu corolário serão úteis na demonstração do Teorema 2.4, que diz respeito ao cálculo do comprimento de função por meio de integral. As demonstrações podem ser encontradas em [3].

Teorema 2.3. *As seguintes afirmações a respeito de uma função $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ são equivalentes:*

- i) α é bem regulada e retificável, com $\ell(\alpha) = L$;
- ii) $\lim_{|P| \rightarrow 0} \ell(\alpha; P) = L$.

Corolário 2.1. *Uma função contínua $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ tem comprimento L se, e somente se, $\lim_{|P| \rightarrow 0} \ell(\alpha; P) = L$.*

Teorema 2.4. *Toda função $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^1 é retificável, com $\ell(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt$.*

Demonstração. De início, como α é C^1 , então também é contínua e, por consequência, bem regulada. Além disso, pelo Corolário 2.1, “ $\ell(\alpha) = L \Leftrightarrow \lim_{|P| \rightarrow 0} \ell(\alpha; P) = L$ ”. Existindo tal limite, o Teorema 2.3 permite concluir que α é também retificável.

Com isso, basta então mostrar que $\lim_{|P| \rightarrow 0} \ell(\alpha; P) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt$.

A definição de integral diz que, para uma função limitada $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, tem-se

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{|P| \rightarrow 0} \sum(f; P^*) = \lim_{|P| \rightarrow 0} \left(\sum_{i=1}^k (t_i - t_{i-1}) f(\xi_i) \right),$$

onde $P^* = (P; \xi)$, com $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k)$, $t_{i-1} \leq \xi_i < t_i$, $\forall i = 1, \dots, k$, é um refinamento de P e recebe o nome de *partição pontilhada*.

Para simplificar, seja $\Delta i = t_i - t_{i-1}$. Dado $\varepsilon > 0$, se a partição $P = \{t_0, \dots, t_k\}$ for pontilhada tomando-se sempre $\xi_i = t_{i-1}$, então existe $\delta_1 > 0$ tal que $|P| < \delta_1$ implica

$$\left| \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt - \sum_{i=1}^k \|\alpha'(t)\| \Delta i \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.10)$$

Além disso, pela diferenciabilidade uniforme⁵ de α , existe $\delta_2 > 0$ tal que $|P| < \delta_2$ implica que $\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}) = (\alpha'(t_{i-1}) + \rho_i)\Delta i$, com $\|\rho_i\| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$.

De fato, como α é uniformemente diferenciável, então dado $\frac{\varepsilon}{2(b-a)} > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|P| < \delta$ implica que $\|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}) - \alpha'(t_{i-1})\Delta i\| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\Delta i$. Seja $\rho_i = (\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}))/\Delta i - \alpha'(t_{i-1})$. Calculando sua norma e substituindo-a na inequação, chega-se facilmente à relação esperada, como se pode ver a seguir:

$$\begin{aligned}\|\rho_i\| &= \|(\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1}))/\Delta i - \alpha'(t_{i-1})\|; \\ \|\rho_i\|\Delta i &< \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\Delta i \Rightarrow \|\rho_i\| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.\end{aligned}$$

Voltando à demonstração, com $|P| < \delta_2$, prossegue-se fazendo

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^k \|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\| - \sum_{i=1}^k \|\alpha'(t_{i-1})\|\Delta i &= \sum_{i=1}^k \|\alpha'(t_{i-1}) + \rho_i\|\Delta i - \sum_{i=1}^k \|\alpha'(t_{i-1})\|\Delta i \\ &\leq \sum_{i=1}^k (\|\alpha'(t_{i-1})\|\Delta i + \|\rho_i\|\Delta i - \|\alpha'(t_{i-1})\|\Delta i) = \sum_{i=1}^k \|\rho_i\|\Delta i \\ &\leq \sum_{i=1}^k \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\Delta i = \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{i=1}^k \Delta i = \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

Da mesma forma, $-\sum_{i=1}^k \|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\| + \sum_{i=1}^k \|\alpha'(t_{i-1})\|\Delta i \geq -\varepsilon/2$, e se conclui, então, que

$$\left| \sum_{i=1}^k \|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\| - \sum_{i=1}^k \|\alpha'(t_{i-1})\|\Delta i \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.11)$$

Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Então, fazendo uso de (2.10) e (2.11), $|P| < \delta$ implica que

$$\begin{aligned}&\left| \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt - \ell(\alpha; P) \right| = \left| \ell(\alpha; P) - \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt \right| \\ &= \left| \left(\ell(\alpha; P) - \sum_{i=1}^k \|\alpha'(t_{i-1})\|\Delta i \right) + \left(\sum_{i=1}^k \|\alpha'(t_{i-1})\|\Delta i - \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt \right) \right| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad \square\end{aligned}$$

Definição 2.4. *Sejam $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma curva (de classe C^1) e $a < a_0 < b$. A função comprimento de arco $s : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, com ponto base a_0 , é definida por*

$$s(t) = \int_{a_0}^t \|\alpha'(r)\| dr = \int_{a_0}^t \sqrt{\alpha'(r) \cdot \alpha'(r)} dr.$$

Nota-se que, se α for regular, então $s'(t) \neq 0, \forall t$, o que se verifica pelo seguinte: como $(a, b) \subset \mathbb{R}$ e $\|\alpha'(r)\|$ é uma função contínua de (a, b) em \mathbb{R} , então, pelo Teorema

⁵Ver definição em A.2.

Fundamental do Cálculo (II),

$$\frac{ds}{dt}(t) = \frac{d}{dt} \int_{a_0}^t \|\alpha'(r)\| dr \stackrel{\text{(II)}}{=} \|\alpha'(t)\| \neq 0, \forall t \in (a, b).$$

No Exemplo 2.4, o astroide é uma curva regular por partes. Sobre ele calculam-se $\alpha'(t) = (-3 \cos^2 t \operatorname{sen} t, 3 \operatorname{sen}^2 t \cos t)$ e $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{9 \cos^4 t \operatorname{sen}^2 t + 9 \operatorname{sen}^4 t \cos^2 t} = 3|\cos t \operatorname{sen} t|$. Tomando $[a_0, t] = [0, \frac{\pi}{2}]$, neste intervalo tem-se $\cos r \operatorname{sen} r \geq 0$, o que implica $\|\alpha'(r)\| = 3 \cos r \operatorname{sen} r$. Daí,

$$s(\frac{\pi}{2}) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (3 \cos t \operatorname{sen} t) dt = \frac{3}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen} 2t) dt = -\frac{3}{4} \cos 2t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2}.$$

Com isso, conseguiu-se o comprimento do traço do astroide restrito ao primeiro quadrante. Com relação à curva toda, seu traço mede quatro vezes o valor encontrado, ou seja, 6 unidades de comprimento.

Proposição 2.1. *Sejam $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $\beta = \alpha \circ g : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}^n$ curvas, onde g é uma reparametrização. Fixados $c_0 \in (c, d)$ e $a_0 = g(c_0)$, tem-se $s_\alpha(t) = s_\beta(u)$, onde $t = g(u)$, com pontos base a_0 e c_0 , respectivamente.*

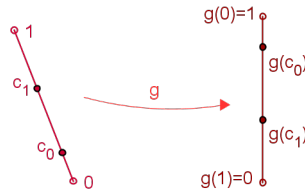
Demonstração. Calcula-se

$$\beta'(u) = \alpha'(g(u))g'(u) = \alpha'(g(u)) \frac{dg}{du}(u), \quad \|\beta'(u)\| = \|\alpha'(g(u))\| \left| \frac{dg}{du}(u) \right|, \text{ e}$$

$$s_\beta(u) = \int_{c_0}^u \|\beta'(v)\| dv = \int_{c_0}^u \|\alpha'(g(v))\| \left| \frac{dg}{dv} \right| dv = \pm \int_{a_0}^t \|\alpha'(r)\| dr = \pm s_\alpha(t). \quad \square$$

Observação 2.1. A função g nesta demonstração é uma função monótona – estritamente crescente ou estritamente decrescente. Para verificar isso, a ideia é mostrar que $g'(t) \neq 0, \forall t$. Tem-se $(g \circ g^{-1})(t) = t$ e, derivando-se os membros desta equação, obtém-se $(g \circ g^{-1})'(t) = g'(g^{-1}(t))(g^{-1})'(t) = 1$. Disso se observa que $g'(g^{-1}(t)) \neq 0$, ou seja, g' é não nula para todo t .

Seja, por exemplo, $g : (0, 1) \rightarrow (0, 1)$ dada por $g(t) = 1 - t$, tal que g é decrescente. Neste caso, o sinal de $s_\beta(u)$ é negativo, mas a integral é calculada na direção oposta a da integral determinada por α e, portanto, os sinais negativos se cancelam:



$$s_\beta(u) = - \int_t^{a_0} \|\alpha'(r)\| dr = \int_{a_0}^t \|\alpha'(r)\| dr = s_\alpha(t).$$

Portanto, o sinal de $s_\beta(u)$ será sempre igual ao de $s_\alpha(t)$.

2.1.2 Reparametrização pelo comprimento de arco

Por meio de resultados elementares de Cálculo, é possível mostrar que s é injetiva e de classe C^k .

- (i) *injetiva*: Dados $u_1, u_2 \in (a, b)$ distintos, com $u_1 < u_2$, tem-se, por definição, $s(u_1) = \int_{c_0}^{u_1} \|\alpha'(v)\| dv$ e $s(u_2) = \int_{c_0}^{u_2} \|\alpha'(v)\| dv$. Mas, $u_1 \neq u_2$ e $\|\alpha'(t)\|$ é contínua e positiva para todo t . Portanto,

$$s(u_2) - s(u_1) = \int_{u_1}^{u_2} \|\alpha'(v)\| dv \neq 0 \Rightarrow s(u_1) \neq s(u_2).$$

- (ii) *de classe C^k* : Como $s'(t) = \|\alpha'(t)\|$ e $\|\cdot\|$ é de classe C^∞ , então a classe de diferenciabilidade de α e de s é a mesma.

Seja (c, d) a imagem de s . A função (sobrejetiva) comprimento de arco $s : (a, b) \rightarrow (c, d)$ é usada para obter uma reparametrização de uma curva regular α .

Denote-se, agora, por $g : (c, d) \rightarrow (a, b)$ a função inversa de s , ou seja, tal que $g(s(t)) = t$, $\forall t$ (II). Considerando-se que $s'(t) \neq 0$, $\forall t \in (a, b)$ e, derivando ambos os lados de $s(g(s(t))) = s(t)$, fica

$$s'(g(s(t)))g'(s(t))s'(t) = s'(t) \stackrel{s'(t) \neq 0}{\Rightarrow} s'(g(s(t)))g'(s(t)) = 1 \stackrel{\text{(II)}}{\Rightarrow} g'(s(t)) = \frac{1}{s'(t)},$$

quando então se verifica que a função g' (quociente de funções contínuas) é contínua. Além disso, como s é suave, então g também o é.

Desse modo, β tem seu comprimento de arco como parâmetro e β é chamada de *parametrização pelo comprimento de arco* de α . Uma curva assim parametrizada tem velocidade dada por:

$$\|\beta'(s)\| = \|\alpha'(t)\| \left| \frac{dg}{ds} \right| = \|\alpha'(t)\| \frac{1}{|ds/dt|} = \frac{\|\alpha'(t)\|}{\|\alpha'(t)\|} = 1,$$

ou seja, o vetor tangente $\beta'(s)$ tem comprimento 1 para todo s .

Para finalizar o assunto, o exemplo a seguir ilustrará o procedimento para se obter a parametrização pelo comprimento de arco de uma curva.

Exemplo 2.10. Seja $\alpha : (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $\alpha(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)$. Em princípio, calcula-se $\alpha'(t) = (e^t(\cos t - \sin t), e^t(\sin t + \cos t))$ e, em seguida,

$$\begin{aligned} \|\alpha'(t)\| &= \sqrt{e^{2t}(\cos t - \sin t)^2 + e^{2t}(\sin t + \cos t)^2} \\ &= e^t \sqrt{\cos^2 t - 2 \cos t \sin t + \sin^2 t + \sin^2 t + 2 \sin t \cos t + \cos^2 t} \\ &= \sqrt{2} e^t. \end{aligned}$$

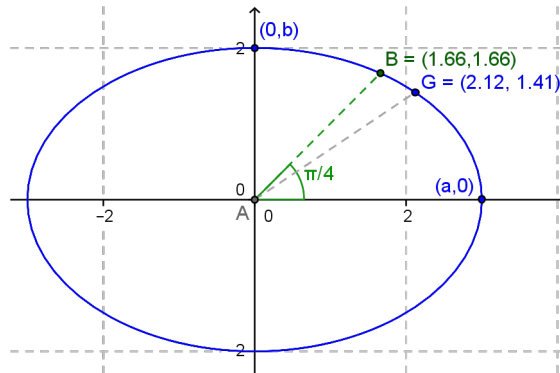
Disso se chega em $s(t) = \int_{a_0}^t \sqrt{2}e^r dr = (\sqrt{2}e^r) \Big|_{a_0}^t = \sqrt{2}(e^t - e^{a_0})$, onde $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Daí, obtém-se a inversa $g : (0, \infty) = \text{Im}(s) \rightarrow (-\infty, \infty)$ fazendo

$$\frac{s}{\sqrt{2}} + e^{a_0} = e^t \Rightarrow t = \ln \left(\frac{s}{\sqrt{2}} + e^{a_0} \right) = g(s(t)).$$

A curva α reparametrizada, $\beta = \alpha \circ g$, fica, portanto, dada por

$$\beta(s) = (g(s) \cos \ln(g(s)), g(s) \sin \ln(g(s)), g(s)), \quad g(s) = \frac{s}{\sqrt{2}} + e^{a_0}.$$

Na figura a seguir observa-se, sobre o traço da elipse $\nu(t) = (3 \cos t, 2 \sin t)$, o ponto $G = \nu(\frac{\pi}{4}) = (\frac{53}{25}, \frac{141}{100})$. Isso ilustra o fato de que, embora o parâmetro utilizado nesta curva seja dado em radianos, este não coincide necessariamente com o ângulo medido entre o vetor e o eixo- x . No caso, com relação ao vetor $\vec{AG} = (\frac{53}{25}, \frac{141}{100})$, o ângulo considerado mede aproximadamente $\frac{19}{100}\pi$, valor distinto de $t_0 = \frac{\pi}{4}$.



3 Círculo Osculador e Curvatura

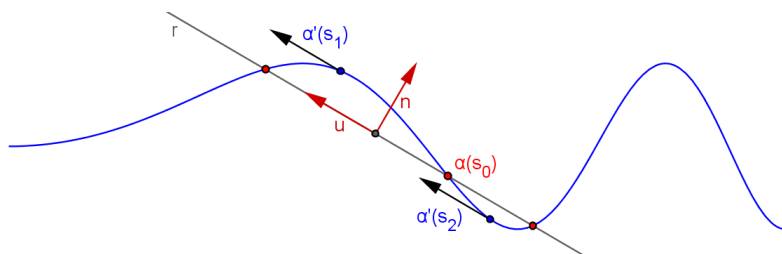
Antes de se prosseguir com o texto, observa-se, com o objetivo de simplificar a notação, que em algumas passagens o instante no qual as funções são calculadas será omitido.

No plano euclidiano, três pontos não colineares determinam um único círculo. Este fato será utilizado na construção de um círculo conveniente, através de um ponto de uma curva α .

Sejam $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular, parametrizada pelo comprimento de arco, e $s_0 \in (a, b)$ fixado. O objetivo agora é mostrar que para qualquer reta r contendo $\alpha(s_0)$ existe uma vizinhança $V_{s_0} \subset (a, b)$ de s_0 tal que, para quaisquer $s_1, s_2 \in V_{s_0}$, ou $\alpha(s_1)$ ou $\alpha(s_2)$ (ou ambos) não pertence a r . Uma condição suficiente para isso é que α'' não seja nulo em s_0 , e a justificativa se dará por absurdo na proposição a seguir.

Proposição 3.1. *Seja $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular, parametrizada pelo comprimento de arco, com $\alpha''(s_0) \neq (0, 0)$. Então, existe uma vizinhança $V_{s_0} \subset (a, b)$ de s_0 tal que, para quaisquer $s_1, s_2 \in V_{s_0}$, $\alpha(s_0)$, $\alpha(s_1)$ e $\alpha(s_2)$ não são colineares.*

Demonstração. Suponha-se que exista uma reta r por $\alpha(s_0)$ tal que para toda vizinhança V_{s_0} existam $s_1, s_2 \in V_{s_0}$ tais que $\alpha(s_0), \alpha(s_1), \alpha(s_2) \in r$. Seja u um vetor paralelo a r , com $\|u\| = 1$. Logo, $\alpha(s_1) - \alpha(s_0)$ e $\alpha(s_2) - \alpha(s_0)$ são múltiplos de u .



Tomando-se $n \perp u$, $\|n\| = 1$, e definindo-se por $h(s) = (\alpha(s) - \alpha(s_0)) \cdot n$ a função $h : V_{s_0} \rightarrow \mathbb{R}$, tem-se que $h(s_i) = (\alpha(s_i) - \alpha(s_0)) \cdot n = 0$, $i = 0, 1, 2$. Como h é contínua, então pelo *Teorema de Rolle*¹ existem $\bar{s}_1, \bar{s}_2 \in V_{s_0}$ tais que $h'(\bar{s}_1) = h'(\bar{s}_2) = 0$, isto é, $\alpha'(\bar{s}_i) = \pm u$, $i = 1, 2$ (pois $h'(s) = \alpha'(s) \cdot n$, $\|\alpha'(s)\| = 1$ e $u \perp n$).

¹ver detalhes em A.3

Como isso ocorre para toda V_{s_0} , obtém-se então uma sequência (ou subsequência, se necessário) (s_n) tal que, para $s_n \rightarrow s_0$, tem-se $(\alpha'(s_n))$ constante em u (ou $-u$). Pela continuidade de h' , aplica-se novamente o Teorema de Rolle para concluir que, para cada n , existe $\tilde{s}_n \in (s_n, s_{n+1})$ tal que $h''(\tilde{s}_n) = 0$, isto é, $\alpha''(\tilde{s}_n) = 0$.

Finalmente, para $s_n \rightarrow s_0$ tem-se $\tilde{s}_n \rightarrow s_0$ e $\alpha''(\tilde{s}_n) = 0$. Absurdo, pois $\alpha''(s_0) \neq 0$ e α'' é contínua. \square

Considere-se r a reta tangente a α em $\alpha(s_0)$ e V_{s_0} uma vizinhança de s_0 proveniente da proposição acima. Para cada $s_1, s_2 \in V_{s_0}$, com $s_1 < s_0 < s_2$, seja $C_{s_0}(s_1, s_2)$ o centro do círculo determinado pelos três pontos da curva.

Agora, seja definida uma função em V_{s_0} por:

$$\rho_{(s_0, s_1, s_2)}(s) \equiv \rho(s) = (\alpha(s) - C_{s_0}(s_1, s_2)) \cdot (\alpha(s) - C_{s_0}(s_1, s_2)),$$

que aproxima o quadrado do raio deste círculo. Como α é suave, então ρ também é e vale que

$$\begin{aligned} \rho'(s) &= \alpha'(s) \cdot (\alpha(s) - C_{s_0}(s_1, s_2)) + (\alpha(s) - C_{s_0}(s_1, s_2)) \cdot \alpha'(s) \\ &= 2\alpha'(s) \cdot (\alpha(s) - C_{s_0}(s_1, s_2)) \text{ e} \\ \rho''(s) &= 2(\alpha''(s) \cdot (\alpha(s) - C_{s_0}(s_1, s_2)) + \alpha'(s) \cdot \alpha'(s)). \end{aligned}$$

Sendo $\rho(s_1) = \rho(s_2) = \rho(s_0)$, pelo *Teorema de Rolle* existem pontos $t_1 \in (s_1, s_0)$ e $t_2 \in (s_0, s_2)$ tais que $\rho'(t_1) = \rho'(t_2) = 0$. Aplicando novamente o mesmo teorema, consegue-se $u \in (t_1, t_2)$ tal que $\rho''(u) = 0$, ou seja

$$\begin{aligned} 2(\alpha''(u) \cdot (\alpha(u) - C_{s_0}(s_1, s_2)) + \alpha'(u) \cdot \alpha'(u)) &= 0 \\ \Rightarrow -\alpha'(u) \cdot \alpha'(u) &= \alpha''(u) \cdot (\alpha(u) - C_{s_0}(s_1, s_2)) = -1. \end{aligned}$$

Tomando-se o limite quando $s_1, s_2 \rightarrow s_0$, os centros $C_{s_0}(s_1, s_2)$ convergem² para um único ponto, $C_\alpha(s_0)$ e, com isso, $\lim_{s_1, s_2 \rightarrow s_0} \alpha(s) - C_{s_0}(s_1, s_2) = \alpha(s) - C_\alpha(s_0)$. Também, t_1, t_2 e u convergem para s_0 , donde $\rho'(s_0) = 0$ e $\rho''(s_0) = 0$.

A partir disso, chega-se então que

$$\begin{cases} \alpha'(s_0) \cdot (\alpha(s_0) - C_\alpha(s_0)) = 0, \\ \alpha''(s_0) \cdot (\alpha(s_0) - C_\alpha(s_0)) = -1, \end{cases} \quad (3.1)$$

ou seja, o vetor tangente $\alpha'(s_0)$ é perpendicular a $\alpha(s_0) - C_\alpha(s_0)$ e, portanto, paralelo à reta tangente ao círculo em $\alpha(s_0)$ (ver Figura 3.1). Ainda, $\alpha''(s_0)$ é paralelo a esse raio.

²O centro pode ser determinado por interseção de duas mediatrizes obtidas por seus pontos, ou seja, solucionando-se um sistema linear.

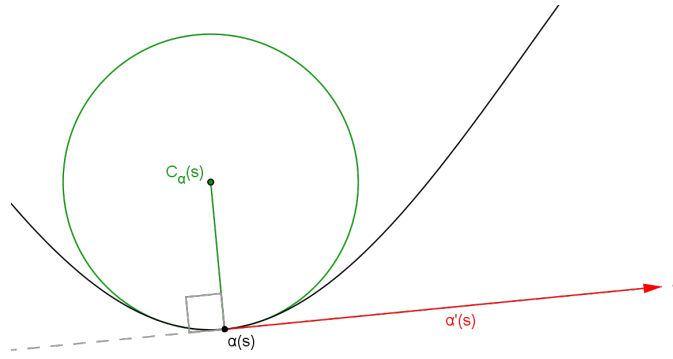


Figura 3.1: Círculo osculador

Definição 3.1. O círculo de centro $C_\alpha(s)$ e raio $\alpha(s) - C_\alpha(s)$ é chamado de círculo osculador de α em s . O ponto $C_\alpha(s)$ é chamado de centro de curvatura de α em s e a curva $s \mapsto C_\alpha(s)$ chamada de curva dos centros de curvatura.

Vale reforçar que, para um instante s , a obtenção do centro de curvatura $C_\alpha(s)$ depende de a curva atender à restrição $\alpha''(s) \neq 0$. Caso contrário, existe uma vizinhança de s para qual o traço da curva é um segmento de reta e, neste caso, diz-se que α tem curvatura κ igual a zero em s . Nos casos em que $\alpha''(s) \neq 0$, define-se:

Definição 3.2. A curvatura de uma curva regular α , parametrizada pelo comprimento de arco, em s , é dada por:

$$\kappa_\pm(s) = \frac{1}{\|\alpha(s) - C_\alpha(s)\|}.$$

Teorema 3.1 (Euler, 1736). Seja α como na Definição 3.2. Tem-se $\kappa_\pm(s) = \|\alpha''(s)\|$.

Demonstração. Derivando ambos os membros da equação $\alpha'(s) \cdot \alpha'(s) = 1$, chega-se em $\alpha'(s) \cdot \alpha''(s) = 0$, ou seja, $\alpha''(s)$ é perpendicular a $\alpha'(s)$. Sendo $\alpha(s) - C_\alpha(s)$ também perpendicular a $\alpha'(s)$, segue que $\alpha(s) - C_\alpha(s) = \mu\alpha''(s)$, para algum $\mu \in \mathbb{R}$.

Contudo, $-1 = \alpha''(s) \cdot (\alpha(s) - C_\alpha(s)) = \alpha''(s) \cdot \mu\alpha''(s) = \mu\|\alpha''(s)\|^2$ e, então:

$$\|\alpha(s) - C_\alpha(s)\| = |\mu|\|\alpha''(s)\| = \frac{1}{\|\alpha''(s)\|^2}\|\alpha''(s)\| = \frac{1}{\|\alpha''(s)\|}. \quad \square$$

Nota-se que o resultado deste teorema ainda é válido quando $\alpha''(s) = 0$, por definição de κ .

Exemplo 3.1. Seja $\zeta : (-\infty, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\zeta(s) = (r \cos \frac{s}{r}, r \sin \frac{s}{r})$, círculo de

raio r , parametrizado pelo comprimento de arco. Segue imediatamente que

$$\begin{aligned}\zeta'(s) &= \left(-\operatorname{sen} \frac{s}{r}, \cos \frac{s}{r}\right) \\ \zeta''(s) &= \left(-\frac{1}{r} \cos \frac{s}{r}, -\frac{1}{r} \operatorname{sen} \frac{s}{r}\right) \\ \|\zeta''(s)\| &= \sqrt{\frac{1}{r^2} \cos^2 \frac{s}{r} + \frac{1}{r^2} \operatorname{sen}^2 \frac{s}{r}} = \left|\frac{1}{r}\right| \stackrel{r \geq 0}{=} \frac{1}{r}.\end{aligned}$$

Embora a definição de curvatura tenha sido dada apenas para curvas parametrizadas por comprimento de arco, é possível estender esta definição para outras parametrizações. Na verdade, o que se faz é calcular a curvatura no instante correspondente da curva reparametrizada pelo comprimento de arco, como feito na proposição a seguir.

Proposição 3.2. *Se uma curva dispor de uma parametrização $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ não necessariamente pelo comprimento de arco, ainda assim será possível calcular a curvatura em cada t , através da expressão*

$$\kappa_{\pm}(t) = \left| \frac{x''(t)y'(t) - y''(t)x'(t)}{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)^{\frac{3}{2}}} \right|. \quad (3.2)$$

Demonstração. Seja $s(t)$ a função comprimento de arco e denotemos sua inversa por $t(s)$. A reparametrização $\alpha(t)$ pelo comprimento de arco é dada por:

$$\beta(s) = \alpha(t(s)) = (x(t(s)), y(t(s))),$$

e suas derivadas são $\beta'(s) = \alpha'(t(s))t'(s)$ e

$$\beta''(s) = \alpha''(t(s)) \frac{dt}{ds} \frac{dt}{ds} + \alpha'(t(s)) \frac{d}{ds} \left(\frac{dt}{ds} \right) = \alpha''(t(s)) \left(\frac{dt}{ds} \right)^2 + \alpha'(t(s)) \frac{d^2t}{ds^2}.$$

Como $\frac{ds}{dt} = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$, então $\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}}$. Daí,

$$\frac{d^2t}{ds^2} = -\frac{\left(\frac{1}{2}\right) ((x')^2 + (y')^2)^{-\frac{1}{2}} 2(x'x'' + y'y'')}{((x')^2 + (y')^2)^{\frac{1}{2}}^2} = -\frac{x'x'' + y'y''}{((x')^2 + (y')^2)^2}.$$

Pela fórmula de Euler, do Teorema 3.1, aplicado a β , obtém-se

$$\begin{aligned}\kappa_{\pm}(s) &= \left\| (x'', y'') \left| \frac{1}{(x')^2 + (y')^2} \right| + (x', y') \left(-\frac{x'x'' + y'y''}{((x')^2 + (y')^2)^2} \right) \right\| \\ &= \left\| \left(\frac{x''((x')^2 + (y')^2) - x'(x'x'' + y'y'')}{((x')^2 + (y')^2)^2}, \frac{y''((x')^2 + (y')^2) - y'(x'x'' + y'y'')}{((x')^2 + (y')^2)^2} \right) \right\|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\| \left(\frac{x''(y')^2 - x'y''(y')}{((x')^2 + (y')^2)^2}, \frac{y''(x')^2 - y'x''(x')}{((x')^2 + (y')^2)^2} \right) \right\| = \left\| \frac{x''y' - y''x'}{((x')^2 + (y')^2)^2} (y', -x') \right\| \\
&= \left| \frac{x''y' - y''x'}{((x')^2 + (y')^2)^2} \right| \|(y', -x')\| = \left| \frac{x''y' - y''x'}{((x')^2 + (y')^2)^2} \right| ((x')^2 + (y')^2)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left| \frac{x''(t)y'(t) - y''(t)x'(t)}{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)^{\frac{3}{2}}} \right|. \quad \square
\end{aligned}$$

Para exemplificar, considere-se a elipse $\nu : (-\pi, \frac{3}{2}\pi)$, dada por $\nu(t) = (a \cos t, b \sin t)$. Pela Proposição 3.2,

$$\kappa_{\pm}(t) = \left| \frac{ab}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{3/2}} \right| = \left| \frac{ab}{\sqrt{(a^2 + (b^2 - a^2) \cos^2 t)^3}} \right|.$$

Para $b > a$, é possível ver que a curvatura atinge seu valor máximo quando $t = \pm \frac{\pi}{2}$ e seu mínimo quando $t = 0$ ou π .

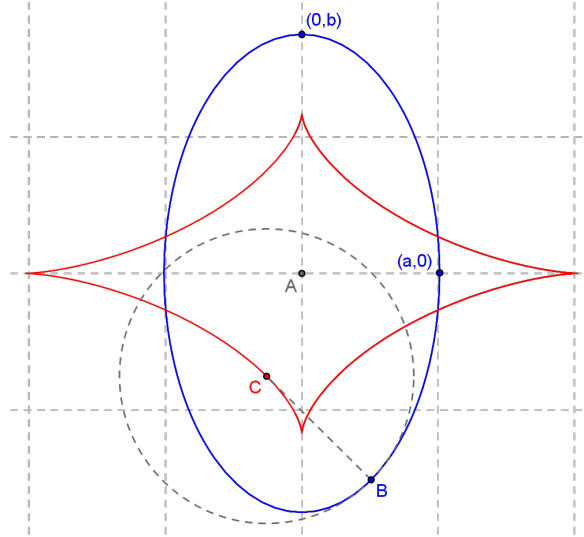
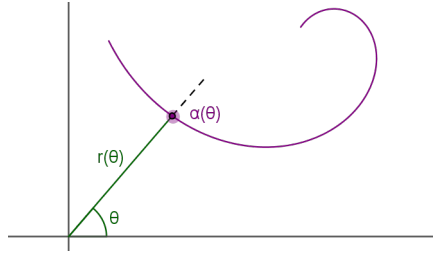


Figura 3.2: Em vermelho, curva dos centros de curvatura da elipse (em azul)

Caso sejam $a, b \neq 1$, por exemplo, esta curva não estará parametrizada pelo comprimento de arco, pois $\|\nu'(t)\| = \sqrt{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t}$ será distinto de 1 para diversos valores de t .

Exemplo 3.2 ([5, p.44]). Seja $r = r(\theta)$ uma curva regular em coordenadas polares. Para calcular sua curvatura $\kappa_{\pm}(\theta)$, seja $\alpha(\theta) = (x(\theta), y(\theta)) = r(\theta)(\cos \theta, \sin \theta)$ a equação paramétrica em coordenadas cartesianas da curva r . Daí,

$$\begin{aligned}
\alpha'(\theta) &= (x', y') = r'(\cos \theta, \sin \theta) + r(-\sin \theta, \cos \theta) \\
&= (r' \cos \theta - r \sin \theta, r' \sin \theta + r \cos \theta), \\
\alpha''(\theta) &= (x'', y'') = (r'' - r)(\cos \theta, \sin \theta) + 2r'(-\sin \theta, \cos \theta) \\
&= ((r'' - r) \cos \theta - 2r' \sin \theta, (r'' - r) \sin \theta + 2r' \cos \theta).
\end{aligned}$$



Finalmente, substituindo os valores de x' , y' , x'' , y'' em (3.2), com alguns cálculos feitos à parte, obtém-se

$$\begin{aligned}
 x'y'' - x''y' &= (r'r'' \sin \theta \cos \theta - rr' \sin \theta \cos \theta + 2(r')^2 \cos^2 \theta - rr'' \sin^2 \theta \\
 &\quad + r^2 \sin^2 \theta - 2rr' \sin \theta \cos \theta) + (-r'r'' \sin \theta \cos \theta + rr' \sin \theta \cos \theta \\
 &\quad - rr'' \cos^2 \theta + r^2 \cos^2 \theta + 2(r')^2 \sin^2 \theta + 2rr' \sin \theta \cos \theta) \\
 &= 2(r')^2 - rr'' + r^2, \\
 (x')^2 + (y')^2 &= ((r')^2 \cos^2 \theta - 2rr' \sin \theta \cos \theta + r^2 \sin^2 \theta) + ((r')^2 \sin^2 \theta \\
 &\quad + 2rr' \sin \theta \cos \theta + r^2 \cos^2 \theta) = (r')^2 + r^2, \\
 \kappa_{\pm}(\theta) &= \left| \frac{2r'(\theta) - r(\theta)r'(\theta) + (r(\theta))^2}{((r'(\theta))^2 + (r(\theta))^2)^{\frac{3}{2}}} \right|.
 \end{aligned}$$

O círculo osculador definido anteriormente possui uma característica interessante, que é observada no estudo de contato entre duas curvas. Para isso, será considerada a seguir uma breve abordagem do conceito, baseada na referência [6], com as notações adaptadas às usadas neste trabalho.

Definição 3.3. Dadas $\alpha, \beta : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ curvas, diz-se que elas têm em t_0 um contato de ordem $n \geq 0$ se as funções e suas derivadas coincidem em t_0 até a ordem n , mas não na ordem $n + 1$, isto é, se

$$\alpha^{(i)}(t_0) = \beta^{(i)}(t_0), \quad i = 0, 1, \dots, n; \quad \alpha^{(n+1)}(t_0) \neq \beta^{(n+1)}(t_0),$$

onde $\gamma^{(0)} := \gamma$, para $\gamma = \alpha, \beta$.

No teorema a seguir, a ordem de contato será utilizada para se estudar os tipos de cruzamentos entre duas curvas que se interceptam. Para isso, basicamente será feita uma análise do comportamento das curvas em instantes menores ou maiores que t_0 . Observa-se, ainda, que as curvas estudadas são localmente gráficos de funções de *uma mesma variável real*.

Teorema 3.2. Dadas $\alpha, \beta : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ definidas, respectivamente, por $\alpha(t) = (t, \alpha_2(t))$ e $\beta(t) = (t, \beta_2(t))$, curvas tais que para um certo t_0 ocorre $\alpha(t_0) = \beta(t_0)$,

seus traços sempre se cruzam (um atravessa o outro) nesse ponto se elas têm aí contato de ordem par; e não se cruzam se o contato é de ordem ímpar.

Demonstração. Para demonstrar esta propriedade, recorre-se ao desenvolvimento de Taylor da função diferença $\gamma = \alpha_2 - \beta_2 : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, ou seja,

$$\gamma(t) = \alpha_2(t) - \beta_2(t) : \quad (3.3)$$

$$\gamma(t) = \gamma(t_0) + \gamma'(t_0)(t - t_0) + \dots + \gamma^{(n)}(t_0) \frac{(t - t_0)^n}{n!} + R_n(t),$$

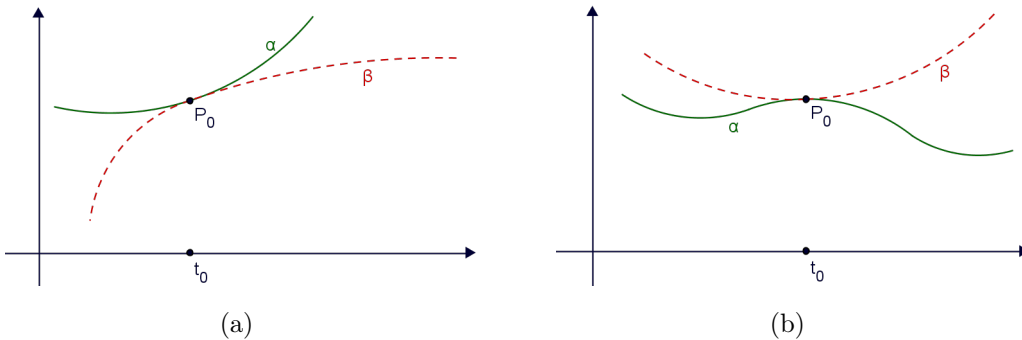
$$R_n(t) = \gamma^{(n+1)}(\bar{t}) \frac{(t - t_0)^{n+1}}{(n+1)!},$$

onde \bar{t} está compreendido entre t_0 e t . Supondo que as curvas tenham contato de ordem n em t_0 , o desenvolvimento em questão assume a forma

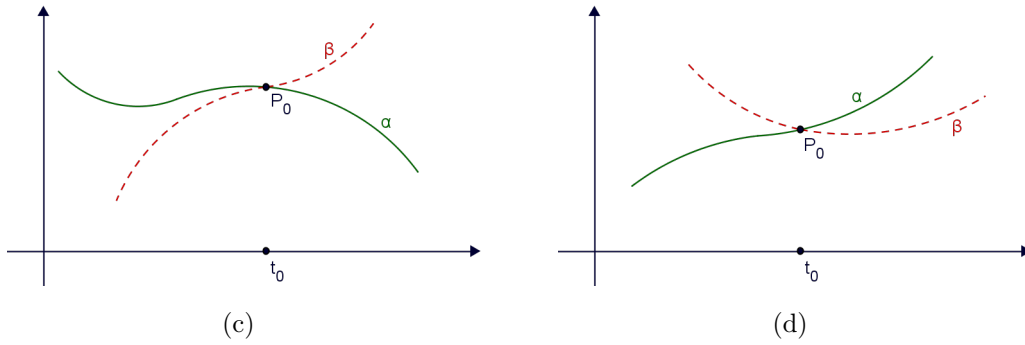
$$\gamma(t) = \gamma^{(n+1)}(\bar{t}) \frac{(t - t_0)^{n+1}}{(n+1)!}. \quad (3.4)$$

Como $\gamma^{(n+1)}(t) = \alpha_2^{(n+1)}(t) - \beta_2^{(n+1)}(t)$ é uma função contínua em t_0 , existe $\delta > 0$ tal que, para $|\bar{t} - t_0| < \delta$, $\gamma^{(n+1)}(\bar{t})$ se mantém diferente de zero e com o mesmo sinal de $\gamma^{(n+1)}(t_0)$. Mas isso certamente acontece quando $|t - t_0| < \delta$, pois \bar{t} está compreendido entre t_0 e t .

Sejam tratados separadamente os casos onde n é par e onde n é ímpar. Primeiramente, se n for ímpar, então $n + 1$ será par e $(t - t_0)^{n+1}$ sempre positivo para $t \neq t_0$. Por (3.4), verifica-se que (3.3) permanecerá sempre com o sinal de $\gamma^{(n+1)}(t_0)$ para todo $t \neq t_0$ na vizinhança $V_\delta = (t_0 - \delta, t_0 + \delta)$. Assim, $\alpha_2(t)$ será sempre maior que $\beta_2(t)$ se $\gamma^{(n+1)}(t_0) > 0$ (Figura 3.3(a)) e sempre menor que $\beta_2(t)$ se $\gamma^{(n+1)}(t_0) < 0$ (Figura 3.3(b)).



Agora, se n for par, $n + 1$ será ímpar e $(t - t_0)^{n+1}$ será positivo para $t > t_0$ e negativo para $t < t_0$. Conseqüentemente, $\gamma(t)$ mudará de sinal quando t passar de $t < t_0$ para $t > t_0$ na vizinhança V_δ (Figura 3).



Ou seja, $\alpha_2(t) - \beta_2(t)$ terá o mesmo sinal de $\gamma^{(n+1)}(t_0)$ à direita de t_0 e sinal oposto à esquerda de t_0 , para $t \in V_\delta$, o que finaliza a demonstração. \square

O *círculo osculador* $C_\alpha(s)$ a uma curva α em s é o círculo que tem com a curva em s o contato de maior ordem entre todos os círculos que têm contato com a curva em s . Este contato é, muitas vezes, de ordem 2, de modo que o círculo osculador atravessa a curva no ponto de contato, mas também há casos em que o contato é de ordem maior que 2.

Seja considerada a restrição $\alpha''(t_0) \neq 0$. Supondo que $x(t)$ e $y(t)$ descrevem um círculo, escreve-se

$$\begin{aligned} (x(t) - a, y(t) - b) \cdot (x(t) - a, y(t) - b) &= \rho^2 \\ (x(t) - a)^2 + (y(t) - b)^2 &= \rho^2 \end{aligned} \quad (3.5)$$

define o círculo de centro (a, b) e raio ρ . A ideia é determinar os parâmetros a , b e ρ , de maneira que (3.5) tenha, ao menos, contato de 2ª ordem com a curva α no instante t_0 . Derivando com relação a t os membros da equação (3.5) e mais uma vez sobre a resultante, chega-se então às equações (3.6) e (3.7), a seguir:

$$(x(t) - a)x' + (y(t) - b)y' = 0, \quad (3.6)$$

$$(x')^2 + (y')^2 + (x(t) - a)x'' + (y(t) - b)y'' = 0. \quad (3.7)$$

Tomando-se $\alpha^{(i)}(t_0) = (\alpha_1^{(i)}(t_0), \alpha_2^{(i)}(t_0))$, $i = 0, 1, 2$, então suas coordenadas devem coincidir com os valores correspondentes nas equações (3.5), (3.6) e (3.7), ou seja, $\alpha_1(t_0) = x(t_0)$, $\alpha_2(t_0) = y(t_0)$, $\alpha_1'(t_0) = x'(t_0)$, $\alpha_2'(t_0) = y'(t_0)$, $\alpha_1''(t_0) = x''(t_0)$ e $\alpha_2''(t_0) = y''(t_0)$, o que produz o sistema a seguir, de incógnitas a , b e ρ , possível de ser resolvido:

$$\begin{cases} (\alpha_1 - a)^2 + (\alpha_2 - b)^2 = \rho^2, \\ (\alpha_1 - a)\alpha_1' + (\alpha_2 - b)\alpha_2' = 0, \\ (\alpha_1')^2 + (\alpha_2')^2 + (\alpha_1 - a)\alpha_1'' + (\alpha_2 - b)\alpha_2'' = 0. \end{cases}$$

Como $\alpha''(t_0) \neq 0$, então $\alpha_1''(t_0) \neq 0$ e/ou $\alpha_2''(t_0) \neq 0$. Seja, por exemplo, $\alpha_2''(t_0) \neq 0$. Ainda, $(\alpha_2''(t_0), -\alpha_1''(t_0)) \perp \alpha''(t_0)$ e, por ser α de velocidade unitária, tem-se $\alpha'(t_0) \perp$

$\alpha''(t_0)$. Daí, $(\alpha_2''(t_0), -\alpha_1''(t_0))$ é paralelo a $\alpha'(t_0)$, donde

$$(\alpha_1', \alpha_2') \cdot (\alpha_2'', -\alpha_1'') = \alpha_1' \alpha_2'' - \alpha_2' \alpha_1'' \neq 0. \quad (3.8)$$

Assim,

$$\begin{aligned} (\alpha_1 - a)\alpha_1' &= - \left(\frac{-(\alpha_1')^2 - (\alpha_2')^2 - (\alpha_1 - a)\alpha_1''}{\alpha_2''} \right) \alpha_2' \\ \Rightarrow (\alpha_1 - a)(\alpha_1' \alpha_2'' - \alpha_2' \alpha_1'') &= \alpha_2' ((\alpha_1')^2 + (\alpha_2')^2) \\ \Rightarrow a &= \alpha_1(t_0) - \frac{\alpha_2'(t_0)((\alpha_1'(t_0))^2 + (\alpha_2'(t_0))^2)}{\alpha_1'(t_0)\alpha_2''(t_0) - \alpha_2'(t_0)\alpha_1''(t_0)}. \\ -(\alpha_2 - b) &= \frac{(\alpha_1')^2 + (\alpha_2')^2 + (\alpha_1 - a)\alpha_1''}{\alpha_2''} \\ \Rightarrow b &= \alpha_2 + \frac{(\alpha_1')^2 + (\alpha_2')^2}{\alpha_2''} + \frac{\alpha_2' \alpha_1'' ((\alpha_1')^2 + (\alpha_2')^2)}{\alpha_2'' (\alpha_1' \alpha_2'' - \alpha_2' \alpha_1'')} = \alpha_2 + \frac{\alpha_1' \alpha_2'' ((\alpha_1')^2 + (\alpha_2')^2)}{\alpha_2'' (\alpha_1' \alpha_2'' - \alpha_2' \alpha_1'')} \\ &= \alpha_2(t_0) + \frac{\alpha_1'(t_0)((\alpha_1'(t_0))^2 + (\alpha_2'(t_0))^2)}{\alpha_1'(t_0)\alpha_2''(t_0) - \alpha_2'(t_0)\alpha_1''(t_0)}. \\ \rho^2 &= \left(\frac{\alpha_2' ((\alpha_1')^2 + (\alpha_2')^2)}{\alpha_1' \alpha_2'' - \alpha_2' \alpha_1''} \right)^2 + \left(-\frac{\alpha_1' ((\alpha_1')^2 + (\alpha_2')^2)}{\alpha_1' \alpha_2'' - \alpha_2' \alpha_1''} \right)^2 \\ &= \frac{((\alpha_1')^2 + (\alpha_2')^2)((\alpha_1')^2 + (\alpha_2')^2)^2}{(\alpha_1' \alpha_2'' - \alpha_2' \alpha_1'')^2} \Rightarrow \rho = \frac{((\alpha_1'(t_0))^2 + (\alpha_2'(t_0))^2)^{\frac{3}{2}}}{|\alpha_1'(t_0)\alpha_2''(t_0) - \alpha_2'(t_0)\alpha_1''(t_0)|}. \end{aligned}$$

A condição de o círculo ter com a curva contato de ordem igual a 2, aliada à restrição (3.8), permitiu, então, desenvolver os cálculos acima e obter o *círculo osculador*, porém, com procedimento diferente do usado na Definição 3.1. Seu parâmetro ρ é chamado de *raio de curvatura* da curva α em t_0 .

Como comentado, é possível que a ordem de contato seja superior a 2, mas, para isso, é necessário que $\alpha'''(t_0)$ coincida com (x_0''', y_0''') do círculo. Derivando os membros da equação (3.7),

$$\begin{aligned} 3x'x'' + 3y'y'' + (x - a)x''' + (y - b)y''' &= 0 \\ \Rightarrow (x''', y''') \cdot (x - a, y - b) &= -3(x', y') \cdot (x'', y'') \\ \Rightarrow (x''', y''') \cdot (x - a, y - b) &= 0, \end{aligned}$$

e tomando o instante t_0 nesta última equação – como feito anteriormente sobre (3.5), (3.6) e (3.7) –, chega-se em $(\alpha_1'''(t_0), \alpha_2'''(t_0)) \cdot (\alpha_1(t_0) - a, \alpha_2(t_0) - b) = 0$ (ou seja, $\alpha'''(t_0) \perp P_0 - (a, b)$) como condição para que o contato seja maior que 2.

Na Figura 3.3, que mostra o traço da curva α dada por $\alpha(t) = (t, t^2)$ (ou seja, uma parábola), o círculo osculador em $(0, 0)$ tem com a curva contato de 3ª ordem. Ele fica, portanto, de um lado só da curva.

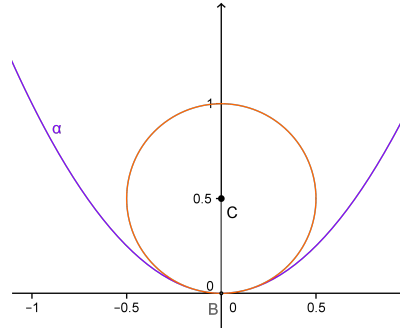


Figura 3.3: Círculo osculador à parábola em $(0, 0)$

Também é possível determinar os três parâmetros a , b e ρ satisfazendo as primeiras duas equações do sistema inicial, mas não a terceira. Dessa forma, o que se obtém é uma família de círculos tangentes à curva, cada um deles com contato de 1ª ordem com a curva.

3.1 Tractriz

O físico Claudius Perraut (1613-88) enviou a vários matemáticos o problema de descrever a curva que faz um peso ao ser arrastado, este fixado na ponta de um segmento de reta cuja outra ponta é movida ao longo de uma reta fixada. Leibniz e Huygens observaram que tal curva tem a propriedade de que, em cada ponto, a reta tangente encontra a reta fixada a uma mesma distância.

A curva recebeu posteriormente o nome de *tractriz*.

Sejam o eixo- y uma reta de apoio, o valor a o comprimento fixado e a curva com início em $(a, 0)$. Considerando-se a caracterização dada pelos matemáticos citados, a tractriz $\hat{\Theta} = (x(t), y(t))$ satisfaz a equação

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'} = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x}. \quad (3.9)$$

Basta se observar na figura a seguir o triângulo retângulo $\triangle RPQ$, sendo $\overline{RP} = x$, $\overline{PQ} = a$ e $\overline{QR} = \sqrt{a^2 - x^2}$, para $0 < x < a$ (sendo a relação da medida \overline{QR} obtida a partir do *Teorema de Pitágoras*).

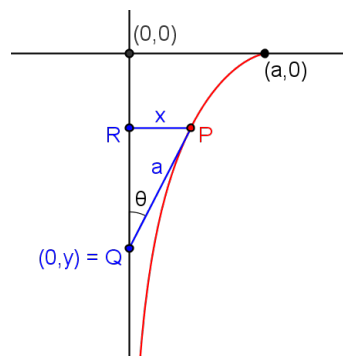


Figura 3.4: Tractriz

Elevando ambos os lados da equação (3.9) e manipulando-a, chega-se em

$$\begin{aligned} \frac{(y')^2}{(x')^2} &= \frac{(a^2 - x^2)}{x^2} \Rightarrow (y')^2 = \frac{a^2}{x^2}(x')^2 - (x')^2 \\ &\Rightarrow (x')^2 + (y')^2 = \left(\frac{a}{x}\right)^2 (x')^2. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Além disso, derivando ambos os lados da equação (3.9), resulta

$$\begin{aligned} \frac{y''x' - y'x''}{(x')^2} &= \left(\frac{1}{2} \frac{-2xx'}{\sqrt{a^2 - x^2}} x - \sqrt{a^2 - x^2} x' \right) \frac{1}{x^2} = \left(\left(\frac{-x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} \right) - \sqrt{a^2 - x^2} \right) \frac{x'}{x^2} \\ &= \frac{(-x^2 - (a^2 - x^2))x'}{x^2 \sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{-a^2 x'}{x^2 \sqrt{a^2 - x^2}} \\ &\Rightarrow x''y' - x'y'' = \frac{a^2 (x')^3}{x^2 \sqrt{a^2 - x^2}}, \quad 0 < x < a. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Assim, por meio dessas duas expressões, obtém-se a fórmula para a curvatura da curva em função de x :

$$\begin{aligned} \kappa_{\pm}(x, y) &= \left| \frac{x''y' - y''x'}{((x')^2 + (y')^2)^{\frac{3}{2}}} \right| = \left| \frac{a^2 (x')^3}{x^2 \sqrt{a^2 - x^2}} \left(\frac{x^2}{a^2 (x')^2} \right)^{\frac{3}{2}} \right| = \left| \frac{a^2 (x')^3 x^3}{x^2 a^3 (x')^3 \sqrt{a^2 - x^2}} \right| \\ &\Rightarrow \kappa_{\pm}(x) = \left| \frac{x}{a \sqrt{a^2 - x^2}} \right|, \quad 0 < x < a. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Ao se observar na figura o triângulo retângulo $\triangle RPQ$, onde a é a medida da hipotenusa e x a do cateto oposto ao ângulo θ , permite-se considerar a relação $x = a \operatorname{sen} \theta$.

A tractriz pode ser parametrizada a partir de $y(x) = \int (\sqrt{a^2 - x^2}/x) dx$, como se calcula a seguir:

$$\begin{aligned} y(x) &= \int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} dx = \sqrt{a^2 - x^2} - a \ln \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right| \\ &\stackrel{a>0}{=} |a \cos \theta| - a \ln \left| \frac{a + |a \cos \theta|}{a \operatorname{sen} \theta} \right| \stackrel{0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}}{=} a \cos \theta - a \ln \left(\frac{1 + \cos \theta}{\operatorname{sen} \theta} \right), \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Considerando-se as relações trigonométricas $1 + \cos \theta = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2}$ e $\operatorname{sen} \theta = 2 \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$ e, substituindo-as no resultado, fica

$$\begin{aligned} y(\theta) &= a \left(\cos \theta - \ln \left(\frac{2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}{2 \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}} \right) \right) = a \left(\cos \theta - \ln \left(\frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\theta}{2}} \right) \right) \\ &= a \left(\cos \theta - \ln \left(\frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\theta}{2}} \right) \right) = a \left(\cos \theta - \ln (\operatorname{tg} \frac{\theta}{2})^{-1} \right) = a \left(\cos \theta + \ln (\operatorname{tg} \frac{\theta}{2}) \right). \end{aligned}$$

Daí, $\hat{\Theta}(\theta) = (a \operatorname{sen} \theta, a \ln(\operatorname{tg} \frac{\theta}{2}) + a \cos \theta)$, com $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$.

A partir da parametrização $\hat{\Theta}$, o cálculo a seguir reforça analiticamente que o vetor tangente $\hat{\Theta}'(\theta)$ (onde $P = \hat{\Theta}(\theta)$) é paralelo ao segmento PQ . Para isso, calcula-se o produto escalar entre $\hat{\Theta}'(\theta)$ e o vetor $(0, 1)$, este último paralelo ao eixo- y , e compara-se o valor obtido com θ . Derivando-se a função $\hat{\Theta}$, consegue-se

$$\begin{aligned} \hat{\Theta}'(\theta) &= \left(a \cos \theta, -a \operatorname{sen} \theta + a \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{\theta}{2}} \frac{\sec^2 \frac{\theta}{2}}{2} \right) = \left(a \cos \theta, a \left(-\operatorname{sen} \theta + \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\operatorname{sen} \frac{\theta}{2}} \frac{1}{2 \cos^2 \frac{\theta}{2}} \right) \right) \\ &= \left(a \cos \theta, a \left(-\operatorname{sen} \theta + \frac{1}{2 \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}} \right) \right), \text{ com } \theta \in (0, \frac{\pi}{2}). \end{aligned}$$

Aproveitando-se da relação trigonométrica $\operatorname{sen} \theta = \operatorname{sen}(\frac{\theta}{2} + \frac{\theta}{2}) = 2 \operatorname{sen} \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}$, simplifica-se a parametrização, obtendo-se

$$\begin{aligned} \hat{\Theta}'(\theta) &= \left(a \cos \theta, a \left(-\operatorname{sen} \theta + \frac{1}{\operatorname{sen} \theta} \right) \right) = \left(a \cos \theta, a \frac{1 - \operatorname{sen}^2 \theta}{\operatorname{sen} \theta} \right) \\ &= \left(a \cos \theta, a \frac{\cos^2 \theta}{\operatorname{sen} \theta} \right) = \left(a \cos \theta, a \frac{\cos \theta}{\operatorname{tg} \theta} \right), \text{ para todo } \theta \in (0, \frac{\pi}{2}). \end{aligned}$$

Em seguida, encontra-se a norma deste vetor, fazendo

$$\begin{aligned} \|\hat{\Theta}'(\theta)\|^2 &= \hat{\Theta}'(\theta) \cdot \hat{\Theta}'(\theta) = a^2 \cos^2 \theta + a^2 \frac{\cos^2 \theta}{\operatorname{tg}^2 \theta} = a^2 \cos^2 \theta \left(1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \theta} \right) \\ &= a^2 \cos^2 \theta \left(1 + \frac{\cos^2 \theta}{\operatorname{sen}^2 \theta} \right) = a^2 \cos^2 \theta \frac{\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta}{\operatorname{sen}^2 \theta} = a^2 \cos^2 \theta \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \theta} = \frac{a^2}{\operatorname{tg}^2 \theta} \\ &\Rightarrow \|\hat{\Theta}'(\theta)\| = \frac{a}{\operatorname{tg} \theta}, \text{ com } 0 < \theta < \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned} \hat{\Theta}'(\theta) \cdot (0, 1) &= \|\hat{\Theta}'(\theta)\| \|(0, 1)\| \cos \theta_1 \Rightarrow \left(a \cos \theta, a \frac{\cos \theta}{\operatorname{tg} \theta} \right) \cdot (0, 1) = \frac{a}{\operatorname{tg} \theta} \cos \theta_1 \\ &\Rightarrow a \frac{\cos \theta}{\operatorname{tg} \theta} = a \frac{\cos \theta_1}{\operatorname{tg} \theta} \xrightarrow{a \neq 0} \frac{\cos \theta}{\operatorname{tg} \theta} = \frac{\cos \theta_1}{\operatorname{tg} \theta} \xrightarrow{\operatorname{tg} \theta \neq 0} \cos \theta = \cos \theta_1 \\ &\Rightarrow \theta = \pm \theta_1 \xrightarrow{0 < \theta < \frac{\pi}{2}} \theta = \theta_1, \end{aligned}$$

ou seja, $\hat{\Theta}'(\theta)$ forma um ângulo $\theta = P\hat{Q}R$ com o eixo- y .

Ainda com a mudança de parâmetro sugerida, a curvatura fica, portanto, igual a

$$\kappa_{\pm}(\theta) = \left| \frac{a \operatorname{sen} \theta}{a |a \cos \theta|} \right| = \left| \frac{\operatorname{sen} \theta}{a \cos \theta} \right| = \left| \frac{\operatorname{tg} \theta}{a} \right|.$$

As equações vistas permitem obter uma parametrização $\Theta(s)$ por comprimento de arco para a tractriz. Tal parametrização possui a característica de que $\|\Theta'(s)\| = 1$, $\forall s \in (0, \frac{\pi}{2})$, donde se obtém a relação $\sqrt{(x')^2 + (y')^2} = 1$ ou, ainda, $(x')^2 + (y')^2 = 1$. Substituindo-a na equação (3.10), obtém-se

$$\left(\frac{a}{x}\right)^2 (x')^2 = 1 \Rightarrow (x')^2 = \left(\frac{x}{a}\right)^2 \Rightarrow x' = \pm \frac{1}{a}x.$$

De modo conveniente, sejam $a = 1$ e $x' = x$, o que implica $x(s) = e^s$. Daí,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{ds} &= \frac{dy}{dx} \frac{dx}{ds} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \frac{dx}{ds} \stackrel{x=\frac{dx}{ds}}{=} \sqrt{1-e^{2s}} \\ \Rightarrow y(s) &= \int \sqrt{1-e^{2s}} ds = \sqrt{1-e^{2s}} - \operatorname{arccosh} e^{-s}. \end{aligned}$$

Como isso requer $0 \leq e^{2s} \leq 1$ (pois $e^r \geq 0, \forall r \in \mathbb{R}$, e $1 - e^{2s} \geq 0 \Rightarrow e^{2s} \leq 1$), toma-se a orientação oposta da curva trocando s por $-s$. Nas condições inseridas, a tractriz parametrizada fica, portanto, dada por

$$\Theta(s) = (e^{-s}, \sqrt{1-e^{-2s}} - \operatorname{arccosh}(e^s)), \text{ para } s \geq 0,$$

e sua curvatura é obtida a partir do resultado (3.12),

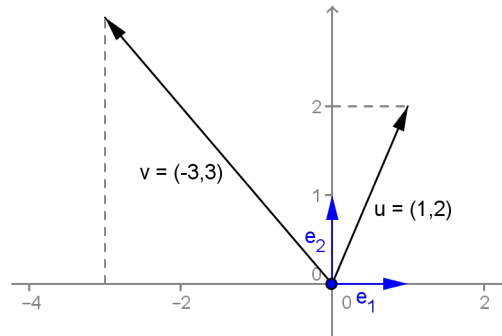
$$\kappa_{\pm}(s) = \left| \frac{x}{a\sqrt{a^2-x^2}} \right| = \left| \frac{e^{-s}}{\sqrt{1-e^{-2s}}} \right| = \frac{e^{-s}}{\sqrt{1-e^{-2s}}}.$$

3.2 Curvatura com Sinal

Nesta seção será introduzido um sinal ao valor $\kappa_{\pm}(t)$, o que dará à curvatura um significado maior. A ideia é conseguir distinguir um curva $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ de sua inversa $\hat{\alpha}(t) = \alpha(b-t)$ e identificar a convexidade de α quando sua curvatura se anula (um ponto de inflexão, por exemplo).

Definição 3.4. *Dado um par ordenado de vetores não-nulos $[\vec{u}, \vec{v}]$, $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$, diz-se que ele está positivamente orientado se a matriz que representa a transformação linear que aplica \vec{u} em e_1 e \vec{v} em e_2 possui determinante maior que zero.*

Exemplo 3.3. Sejam $\vec{u} = (1, 2)$, $\vec{v} = (-3, 3) \in \mathbb{R}^2$ vetores não-nulos, como na Figura 3.3, a seguir.



Para se obter a matriz desejada, deve-se resolver o sistema gerado a partir das equações:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

cujas soluções são dadas pelos valores $a = \frac{1}{3}$, $b = \frac{3}{9}$, $c = -\frac{2}{9}$ e $d = \frac{1}{9}$.

Como o determinante dela é igual a $\frac{3}{27} > 0$, conclui-se que $[\vec{u}, \vec{v}]$ está orientado positivamente.

Permutando duas linhas de uma matriz, altera-se o sinal de seu determinante. Isso leva à conclusão de que, se $[\vec{u}, \vec{v}]$ está orientado positivamente, então $[\vec{v}, \vec{u}]$ não está.

Ainda, nota-se que, quando $[\vec{u}, \vec{v}]$ está orientado positivamente, este par é *linearmente independente*. Basta observar que, nesse caso, $\det A \neq 0$, onde A é a matriz de transformação da Definição 3.4.

Dado um vetor unitário $\vec{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$, existe um único vetor unitário $\vec{v} = (-u_2, u_1)$ tal que \vec{u} é perpendicular a \vec{v} (notação: $\vec{u} \perp \vec{v}$), com $[\vec{u}, \vec{v}]$ orientado positivamente.

Se α é uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco, denote-se então o vetor tangente $\alpha'(s)$ por $T(s)$. E seja $N(s)$ o único vetor perpendicular a $T(s)$ tal que $[T(s), N(s)]$ está orientado positivamente. O conjunto de vetores $T(s)$ e $N(s)$ é conhecido como *referencial de Frenet* da curva α em s .

Como $T(s) \cdot T(s) = 1$, derivando esta igualdade com relação a s pela regra de Leibniz e, usando que o produto interno é comutativo, resulta que

$$\begin{aligned} 2(T'(s) \cdot T(s) + T(s) \cdot T'(s)) &= 0 \\ \Rightarrow T'(s) \cdot T(s) + T'(s) \cdot T(s) &= 0 \Rightarrow T'(s) \cdot T(s) = 0, \text{ ou seja, } T'(s) \perp T(s). \end{aligned}$$

Além disso, $N(s) \perp T(s)$, donde se tira que $T'(s) \parallel N(s)$ (notação para vetores paralelos). Portanto, $T'(s) = \alpha''(s)$ é um múltiplo de $N(s)$.

Definição 3.5. A curvatura com sinal $\kappa(s)$ de uma curva de velocidade unitária α em s é dada pela identidade

$$\alpha''(s) = \kappa(s)N(s).$$

Pelo Teorema 3.1, $\kappa_{\pm}(s) = \|\alpha''(s)\| = \|\kappa(s)N(s)\| = |\kappa(s)| \|N(s)\|$. Mas $\|N(s)\| = 1$ e, então, $|\kappa(s)| = \kappa_{\pm}(s)$. Dessa forma, também para uma curva não parametrizada pelo comprimento de arco, assegura-se o cálculo da curvatura com sinal através da fórmula dada pela Proposição 3.2, desde que seja possível determinar o sinal.

Exemplo 3.4. Seja $\alpha(t) = (t, f(t))$, ou seja, uma curva dada pelo gráfico de uma função, e considere-se a seguir um meio de se analisar o sinal de sua curvatura.

Tem-se $\|\alpha'(t)\| = \sqrt{(1, f'(t)) \cdot (1, f'(t))} = \sqrt{1 + (f'(t))^2}$. Daí, calcula-se $\tilde{T}(t)$ e $\tilde{N}(t)$ (a curva não é de velocidade unitária, o que inviabiliza o uso das notações T e N , respectivamente, embora $\tilde{T}(t)$ e $\tilde{N}(t)$ sejam vetores unitários, para cada t) e, derivando $\tilde{T}(t)$,

$$\tilde{T}(t) = \frac{1}{\|\alpha'(t)\|} \alpha'(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + (f'(t))^2}} (1, f'(t)),$$

$$\tilde{N}(t) = \frac{1}{\sqrt{1 + (f'(t))^2}} (-f'(t), 1) \text{ e}$$

$$\begin{aligned} \tilde{T}'(t) &= \frac{1}{1 + (f')^2} \left(\frac{-2f'f''}{2\sqrt{1 + (f')^2}}, f'' \sqrt{1 + (f')^2} - f' \frac{2f'f''}{2\sqrt{1 + (f')^2}} \right) \\ &= \frac{1}{1 + (f')^2} \left(\frac{-f'f''}{\sqrt{1 + (f')^2}}, \frac{f''(1 + (f')^2) - (f')^2 f''}{\sqrt{1 + (f')^2}} \right) \\ &= \frac{f''(t)}{1 + (f'(t))^2} \left(\frac{-f'(t)}{\sqrt{1 + (f'(t))^2}}, \frac{1}{\sqrt{1 + (f'(t))^2}} \right) \Rightarrow \tilde{T}'(t) = \frac{f''(t)}{1 + (f'(t))^2} \tilde{N}(t). \end{aligned}$$

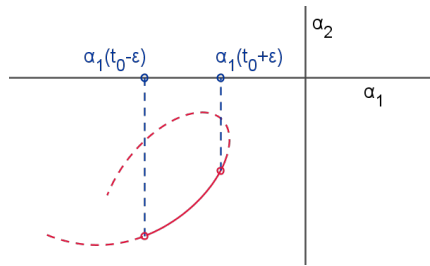
Nota-se que o sinal da curvatura é determinado pela derivada segunda $f''(t)$, que é positiva se f tem concavidade voltada para cima e negativa se a concavidade de f for para baixo.

Neste ponto, vale mostrar que toda curva regular é localmente o gráfico de uma função. Sejam $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular dada por $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$ e $t_0 \in (a, b)$. Por α ser regular, então $\alpha'_1(t_0) \neq 0$ ou $\alpha'_2(t_0) \neq 0$. Seja, por exemplo, $\alpha'_1(t_0)$ não nulo.

Pelo Teorema de Rolle³, existe uma vizinhança $V_{t_0} = (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ de t_0 onde α_1

³Maiores detalhes em A.3

é bijetiva. Com isso, cada $t_i \in V_{t_0}$ pode ser escrito em função de α_1 , ou seja, existe $\bar{t} = \alpha_1^{-1}|_{\text{Im}(V_{t_0})}$, definida por $\bar{t}(u_i) = \alpha_1^{-1}(u_i) = t_i$, com $u_i = \alpha_1(t_i)$.



Ainda, como t é a variável de α_2 e, sendo t_i obtido em função de u_i em V_{t_0} , então também é possível escrever α_2 em função de u_i , através de $\bar{\alpha}_2 = \alpha_2 \circ \bar{t}$, dada por $\alpha_2(u_i) = \alpha_2(\bar{t}(u_i))$.

Assim, para cada $t_i \in V_{t_0}$, ocorre

$$\begin{aligned} \alpha(t_i) &= (\alpha_1(t_i), \alpha_2(t_i)) = (\alpha_1(\bar{t}(u_i)), \alpha_2(\bar{t}(u_i))) \\ &= (\alpha_1(\alpha_1^{-1}(u_i)), (\alpha_2 \circ \bar{t})(u_i)) = (u_i, (\alpha_2 \circ \bar{t})(u_i)), \end{aligned}$$

ou seja, o traço de $\alpha|_{V_{t_0}}$ é gráfico de função.

Caso fosse atendida a condição $\alpha_2'(t_0) \neq 0$, da mesma forma haveria condições para se escrever t e α_1 em função de α_2 , donde também se concluiria que α é localmente o gráfico de uma função.

Com essa informação e o Exemplo 3.4, observa-se que a curvatura com sinal num ponto é positiva se a curva vira à esquerda do vetor tangente e negativa se para a direita.

Teorema 3.3 (Teorema fundamental para curvas planas). *Dada uma função contínua $\kappa : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$, existe uma curva $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^k , para algum k , que é parametrizada pelo comprimento de arco, tal que $\kappa(s)$ é a curvatura com sinal de α em s para todo $s \in (a, b)$. Além disso, qualquer outra curva $\bar{\alpha} : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ satisfazendo estas condições difere de α por uma rotação seguida por uma translação.*

Demonstração. A prova do teorema pode ser feita com base na teoria de equações diferenciais ([7, Capítulo 3]). As condições do teorema podem ser resumidas por uma equação diferencial envolvendo uma função $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$, onde $f = \alpha'$. Escrevendo-se $f(s) = (f_1(s), f_2(s))$, fica

$$(f_1'(s), f_2'(s)) = \kappa(s)(-f_2(s), f_1(s)) \quad (3.13)$$

sujeita às condições $f(a_0) = \vec{u}$ e $\|\vec{u}\| = 1$.

Uma solução para esta equação diferencial fornece uma curva de velocidade unitária. Veja:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}(f_1^2(s) + f_2^2(s)) &= 2f_1(s)f_1'(s) + 2f_2(s)f_2'(s) \\ &= 2(f_1(s), f_2(s)) \cdot (f_1'(s), f_2'(s)) \\ &= 2\kappa(s)(f_1(s), f_2(s)) \cdot (-f_2(s), f_1(s)) = 0, \end{aligned}$$

ou seja, $f_1^2(s) + f_2^2(s) = f(s) \cdot f(s) = c$, c constante.

Mas $\|f(a_0)\| = 1$ e, então, $c = 1$. Dessa forma, $\|f(s)\| = 1, \forall s \in (a, b)$. Para resolver a equação diferencial, será útil o resultado a seguir:

Lema 3.1 ([7, Teorema 10.3, p.107]). *Se $g(t)$ é uma função contínua a valores $(n \times n)$ -matriciais definida num intervalo (a, b) , então existem soluções $F : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ para a equação diferencial $F'(t) = g(t)F(t)$.*

No Teorema 3.3, a equação (3.13) pode ser reescrita como um sistema de equações lineares, e este na forma de equação envolvendo matrizes, ou seja,

$$\begin{cases} f_1'(s) = -\kappa(s)f_2(s) \\ f_2'(s) = \kappa(s)f_1(s) \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} f_1'(s) \\ f_2'(s) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -\kappa(s) \\ \kappa(s) & 0 \end{pmatrix}}_{g(s)} \begin{pmatrix} f_1(s) \\ f_2(s) \end{pmatrix},$$

onde $g(s)$, função a valores (2×2) -matriciais em destaque, é contínua em (a, b) .

A equação $T'(s) = \kappa(s)N(s)$ torna-se, portanto, $T'(s) = g(s)T(s)$ e, pelo Lema 3.1, existe $T(s) = \alpha'(s)$ para a curva α com a curvatura correta. Basta integrar $T(s)$ para se obter $\alpha(s)$, e então a primeira parte do teorema fica demonstrada.

Agora, considerando as restrições sobre as quais a equação (3.13) está sujeita, observa-se que é possível escolher $\alpha(a_0)$ qualquer em \mathbb{R}^2 , assim como um vetor unitário $\vec{u} = T(a_0)$ qualquer.

Uma mudança de \vec{u} em $\alpha(a_0)$ envolve uma rotação, que se obtém multiplicando-o pela matriz ρ_θ , dada por:

$$\rho_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\text{sen } \theta \\ \text{sen } \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Substituindo-se $\bar{T}(s) = \rho_\theta T(s)$ em $T'(s) = \kappa(s)N(s)$, verifica-se que $\bar{T}(s)$ também é solução para esta equação diferencial. Ainda, uma translação redefine o ponto $\alpha(a_0)$, alocando-o onde interessar por meio de sua soma com um vetor $\vec{w}_0 \in \mathbb{R}^2$.

Portanto, uma segunda solução $\bar{\alpha}(s)$, da forma

$$\bar{\alpha}(s) = \rho_\theta \alpha(s) + \vec{w}_0,$$

para algum ângulo θ e algum vetor inicial \vec{w}_0 , satisfaz à equação (3.13) e fica provado o teorema. \square

Exemplo 3.5. Suponha que uma curva regular de velocidade unitária em \mathbb{R}^2 tenha curvatura positiva constante $c > 0$. Escrevendo-se $T(s) = (x(s), y(s))$ e, fazendo uso de relações conhecidas, surgem duas equações diferenciais

$$\begin{cases} T(s) \cdot T'(s) = 0 \\ T'(s) = cN(s) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xx' + yy' = 0, \\ (x', y') = c(-y, x). \end{cases}$$

Daí, como $x' = -cy \Rightarrow x'' = -cy'$, substituindo y' por cx , resulta que $x'' = -c^2x$. Uma solução para esta equação diferencial é dada por $x(s) = a \cos(cs + t_0) + b \sin(cs + t_0)$. Semelhante solução seria verificada para $y(s)$, partindo da equação $y'' = -c^2y$.

Como apenas é preciso encontrar uma solução (e movê-la através de rotações e translações), pode-se tomar $x(s) = \frac{1}{c} \cos(cs)$. Com isso e, pela condição $T'(s) \cdot T'(s) = 1 \Rightarrow (x')^2 + (y')^2 = 1$, chega-se em $y(s) = \frac{1}{c} \sin(cs)$.

Esta é uma parametrização do círculo de raio $1/c$, e a condição imposta à curvatura implica que a curva seja parte de um círculo.

Uma curva $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por

$$\alpha(s) = \left(x_0 + \int_{s_0}^s \cos(\theta(s) + c) ds, y_0 + \int_{s_0}^s \sin(\theta(s) + c) ds \right), \quad (3.14)$$

com $P_0 = (x_0, y_0)$ fixado, $c \in \mathbb{R}$ e $\theta(s) = \int_{s_0}^s \kappa(s) ds$, atende ao que indica o Teorema 3.3, ou seja, está parametrizada pelo comprimento de arco e possui curvatura $\kappa(s)$. Para verificar isso, basta calcular

$$\begin{aligned} T(s) &= \alpha'(s) = (\cos(\theta(s) + c), \sin(\theta(s) + c)), \\ N(s) &= (-\sin(\theta(s) + c), \cos(\theta(s) + c)), \\ T'(s) &= (-\theta'(s) \sin(\theta(s) + c), \theta'(s) \cos(\theta(s) + c)), \\ \|\alpha'(s)\| &= \cos^2(\theta(s) + c) + \sin^2(\theta(s) + c) = 1, \\ T'(s) \cdot N(s) &= \theta'(s) \sin^2(\theta(s) + c) + \theta'(s) \cos^2(\theta(s) + c) = \theta'(s) = \kappa(s). \end{aligned}$$

Exemplo 3.6. Seja $\kappa(s) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $\kappa(s) = 1/\cosh s$, a curvatura com sinal de uma curva regular α . Através de (3.14) é possível parametrizar α , como será visto a seguir.

Em princípio, seja

$$\begin{aligned} \theta(s) &= \int_{s_0}^s \kappa(r) dr = \int_{s_0}^s \frac{1}{\cosh r} dr = (2 \operatorname{tg}^{-1} e^r) \Big|_{s_0}^s = 2 \operatorname{tg}^{-1} e^s - 2 \operatorname{tg}^{-1} e^{s_0} \\ &= 2 \operatorname{tg}^{-1} e^s + k, \quad k \text{ constante.} \end{aligned}$$

Então, basta calcular $\int_{s_0}^s \sin(2 \operatorname{tg}^{-1} e^x + k) dx$ e $\int_{s_0}^s \cos(2 \operatorname{tg}^{-1} e^x + k) dx$ e fazer as substituições. Para simplificar os cálculos e não se cair em uma integral indefinida,

seja $s_0 = 0$, donde $k = -\frac{\pi}{2}$. Sobre a primeira dessas integrais, escreva-se

$$\operatorname{sen}\left(2 \operatorname{tg}^{-1} e^x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\left(2 \operatorname{tg}^{-1} e^x\right) = -\frac{1}{e^{2x} + 1} + \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 1}$$

e, fazendo-se a mudança de variável $p = 2x$, $dp = 2dx$, a integral de interesse fica então resumida a

$$\int \left(-\frac{1}{e^{2x} + 1} + \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 1}\right) dx = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{e^p + 1} dp + \frac{1}{2} \int \frac{e^p}{e^p + 1} dp. \quad (3.15)$$

Para a segunda parcela, fazendo-se a mudança de variável $u = e^p + 1$, $du = e^p dp$, obtém-se $\frac{1}{2} \int \frac{1}{u} du = \frac{1}{2} \ln u + h$, h constante. Para a primeira, sejam $w = e^p$, $dw = e^p dp$ e $v = w + 1$, $dv = dw$ duas mudanças de variáveis. Então,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \int \frac{1}{w(w+1)} dw &= -\frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{w} - \frac{1}{w+1}\right) dw = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{w} dw + \frac{1}{2} \int \frac{1}{w+1} dw \\ &= -\frac{1}{2} \int \frac{1}{w} dw + \frac{1}{2} \int \frac{1}{v} dv = -\frac{1}{2} \ln w + \frac{1}{2} \ln v + l, \quad l \text{ constante.} \end{aligned}$$

Finalmente, desfazendo-se as mudanças $v = w + 1$, $w = e^p$, $u = e^p + 1$ e $p = 2x$, (3.15) fica igual a

$$\begin{aligned} \int \operatorname{sen}\left(2 \operatorname{tg}^{-1} e^x - \frac{\pi}{2}\right) dx &= -\frac{1}{2} \ln e^{2x} + \frac{1}{2} \ln(e^{2x} + 1) + \frac{1}{2} \ln(e^{2x} + 1) + c \\ &= \ln(e^{2x} + 1) - x + c, \quad c \text{ constante.} \end{aligned} \quad (3.16)$$

O procedimento para se calcular a integral $\int_{s_0}^s \cos(2 \operatorname{tg}^{-1} e^x - \frac{\pi}{2}) dx$ (referente à primeira coordenada de α) é semelhante, faz uso da relação $\cos(2 \operatorname{tg}^{-1} e^x - \frac{\pi}{2}) = \operatorname{sen}(2 \operatorname{tg}^{-1} e^x) = 2e^x/(e^{2x} + 1)$ e a primitiva que daí resulta é

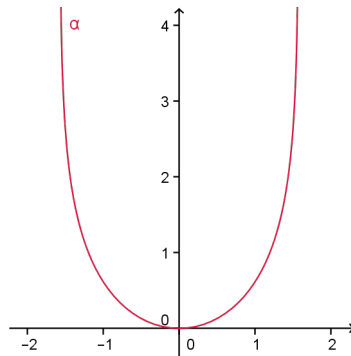
$$\int \cos\left(2 \operatorname{tg}^{-1} e^x - \frac{\pi}{2}\right) dx = 2 \operatorname{tg}^{-1} e^x + d, \quad d \text{ constante.} \quad (3.17)$$

Calculando-se então as integrais de (3.17) e (3.16) de 0 a s , chega-se respectivamente em

$$\begin{cases} (2 \operatorname{tg}^{-1} e^x)|_0^s &= 2 \operatorname{tg}^{-1} e^s - \frac{\pi}{2}, \\ (\ln(e^{2x} + 1) - x)|_0^s &= \ln(e^{2s} + 1) - s - \ln 2. \end{cases}$$

o que torna possível parametrizar a curva $\alpha : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}^2$, como segue:

$$\alpha(s) = (x(s), y(s)) = \left(x_0 + 2 \operatorname{tg}^{-1} e^s - \frac{\pi}{2}, y_0 + \ln(e^{2s} + 1) - s - \ln 2\right).$$



A figura acima mostra um pedaço do traço de α deste exemplo, restrita à condição inicial $P_0 = (0, 0)$. Neste caso, $s \rightarrow \infty \Rightarrow x(s) \rightarrow \frac{\pi}{2}$ e $s \rightarrow -\infty \Rightarrow x(s) \rightarrow -\frac{\pi}{2}$, ou seja, as retas $x = \pm \frac{\pi}{2}$ são assíntotas verticais do traço de α .

4 Evolutas e Involutas

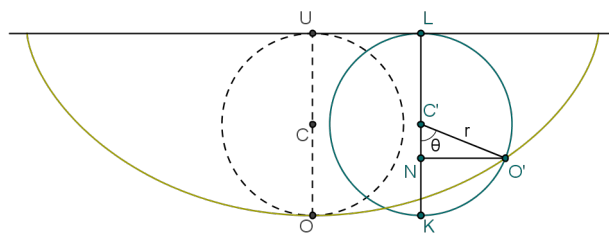
Seja uma curva que conecta dois pontos que não estão em uma mesma vertical, com a seguinte propriedade: uma partícula que desliza sobre ela, para baixo sob a força de uma gravidade uniforme, até um ponto de referência fixado, leva para isso precisamente o mesmo tempo independentemente do seu ponto de partida. Tal curva recebe o nome de *tautócrona*.

Em outras palavras, diz-se que uma curva é uma tautócrona se um pêndulo, ao se movimentar ao longo da curva partindo do repouso, alcança a parte inferior desta oscilação num mesmo período, indiferentemente de seu ponto inicial.

Se um círculo fosse uma tautócrona, então um pêndulo rígido teria o mesmo período independentemente da escolha inicial, o que é falso, conforme demonstram textos elementares de Física.

Definição 4.1. *Uma cicloide é a curva descrita por um ponto do bordo de um disco circular que rola, sem deslizar e sem patinar, ao longo de uma reta.*

A figura a seguir mostra uma cicloide em particular, com um círculo rolando sob a reta. Tomem-se $-\pi < \theta < \pi$, o ponto O sobre o círculo como referência inicial e $O' = (x(\theta), y(\theta))$ o correspondente deste ponto após o círculo rolar θ radianos. Denote-se por r o raio do círculo.



Ainda na figura, considerem-se o raio LC' e seu diâmetro associado LK , perpendiculares ao eixo- x . A origem fica sendo U , donde segue que $\overline{UL} = r\theta$, mesmo comprimento do arco $O'K$. Disso conclui-se que $\angle KC'O'$ mede θ . O ponto N é obtido da projeção do ponto O' sobre o diâmetro LK .

Observa-se que o parâmetro não é ângulo obtido entre o diâmetro UO e o segmento UO' , mas sim entre $C'K$ e $C'O'$ (segmentos com origem no ponto C').

A partir dessa construção, uma parametrização $\zeta(\theta)$ para esta cicloide particular surge das equações para O' , como segue:

$$\begin{cases} x(\theta) = \overline{UL} + \overline{NO'} \\ y(\theta) = -(\overline{LC'} + \overline{C'N}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(\theta) = r\theta + r \operatorname{sen} \theta \\ y(\theta) = -(r + r \cos \theta) \end{cases} \\ \Rightarrow \zeta(\theta) = (r(\theta + \operatorname{sen} \theta), -r(1 + \cos \theta)), \text{ com } \theta \in (-\pi, \pi).$$

Esta não é uma curva de velocidade unitária, o que se demonstra fazendo:

$$\begin{aligned} \zeta'(\theta) &= (r(1 + \cos \theta), r \operatorname{sen} \theta) \\ &= r(1 + \cos \theta, \operatorname{sen} \theta) \\ \|\zeta'(\theta)\| &= |r| \sqrt{1 + 2 \cos \theta + \cos^2 \theta + \operatorname{sen}^2 \theta} \stackrel{r \geq 0}{=} r \sqrt{2 + 2 \cos \theta}, \end{aligned}$$

Teorema 4.1 ([8, p.74]). *A cicloide é uma tautócrona.*

Antes da demonstração, vale a pena ressaltar que se está buscando uma curva de modo que, em cada instante a única força atuando no ponto é a força da gravidade. Além disso, é suficiente que a curva descreva um movimento harmônico simples. Com isso, teremos uma curva tautócrona, pois o período de um movimento harmônico simples independe da amplitude.

Demonstração. Suponha-se que um pêndulo não rígido descreva uma tautócrona, parametrizada pelo ângulo $\phi = \phi(t)$ entre o pêndulo e a vertical. Seja $\sigma(t)$ o ponto da tautócrona no tempo t alcançado pelo pêndulo a partir de um ponto inicial.

Pelas hipóteses assumidas, a aceleração (devido à única força, a da gravidade) na direção do movimento, ou seja, na direção tangente, é dada por:

$$\frac{d^2\sigma}{dt^2} = -g \operatorname{sen} \phi.$$

Mas, como o movimento é harmônico simples, esta força também satisfaz

$$\frac{d^2\sigma}{dt^2} = -k^2\sigma,$$

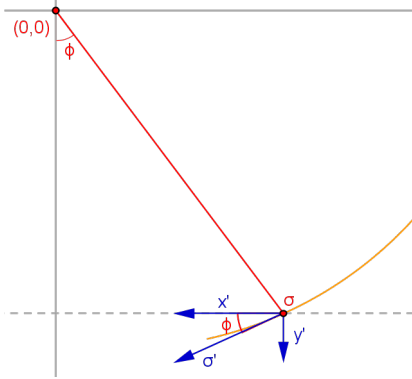
sendo $k \neq 0$ uma constante associada à *Lei de Hooke*.

Igualando estas duas equações e derivando com relação à t , produz-se:

$$\frac{d}{dt}(g \operatorname{sen} \phi) = \frac{d}{dt}(k^2\sigma) \Rightarrow g \cos \phi \frac{d\phi}{dt} = k^2 \frac{d\sigma}{dt} \Rightarrow \frac{d\sigma}{dt} = \frac{g}{k^2} \cos \phi \frac{d\phi}{dt}. \quad (4.1)$$

De acordo com o diagrama a seguir, como a tangente à curva (seguida pelo prumo do pêndulo) é perpendicular ao pêndulo, então ϕ também é o ângulo que a tangente faz com a horizontal. Portanto,

$$\frac{dx}{dt} = \cos \phi \frac{d\sigma}{dt} \quad \text{e} \quad \frac{dy}{dt} = \operatorname{sen} \phi \frac{d\sigma}{dt}.$$



Substituindo (4.1) nestas equações, obtém-se:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \cos \phi \left(\frac{g}{k^2} \cos \phi \frac{d\phi}{dt} \right) \\ \frac{dy}{dt} = \sin \phi \left(\frac{g}{k^2} \cos \phi \frac{d\phi}{dt} \right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = \frac{g}{k^2} \cos^2 \phi d\phi, \\ dy = \frac{g}{k^2} \sin \phi \cos \phi d\phi. \end{cases}$$

Integrando as equações da segunda chave, fica:

$$\begin{aligned} \int dx &= \int \left(\frac{g}{k^2} \cos^2 \phi \right) d\phi \Rightarrow x(\phi) = \frac{g}{k^2} \left(\frac{1}{2} \phi + \frac{1}{4} \sin 2\phi \right) + x_0, \quad x_0 \text{ constante} \\ &= \frac{g}{k^2} \left(\frac{2}{4} \phi + \frac{1}{4} \sin 2\phi \right) + x_0 \Rightarrow x(\phi) - x_0 = \frac{g}{4k^2} (2\phi + \sin 2\phi); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int dy &= \int \left(\frac{g}{k^2} \sin \phi \cos \phi \right) d\phi = \frac{g}{k^2} \int \left(\frac{\sin 2\phi}{2} \right) d\phi \\ \Rightarrow y(\phi) &= \frac{g}{k^2} \left(-\frac{\cos 2\phi}{4} \right) + y_0, \quad y_0 \text{ constante} \\ &= \frac{g}{k^2} \left(-\frac{\cos 2\phi}{4} \right) + y_0 \Rightarrow y(\phi) - y_0 = -\frac{g}{4k^2} (\cos 2\phi). \end{aligned}$$

Para $\phi = 0$, $x_0 = 0$ e $y_0 = -g/4k^2$, obtém-se

$$\begin{aligned} (x(\phi), y(\phi)) &= \left(\frac{g}{4k^2} (2\phi + \sin 2\phi), -\frac{g}{4k^2} (\cos 2\phi) - \frac{g}{4k^2} \right) \\ &= \left(\frac{g}{4k^2} (2\phi + \sin 2\phi), -\frac{g}{4k^2} (1 + \cos 2\phi) \right), \end{aligned}$$

$$x(0) - 0 = \frac{g}{4k^2} (0 + \sin 0) \Rightarrow x(0) = 0 \text{ e}$$

$$y(0) - \left(-\frac{g}{4k^2} \right) = -\frac{g}{4k^2} (\cos 0) \Rightarrow y(0) = -\frac{g}{4k^2} - \frac{g}{4k^2} = 2\frac{g}{4k^2},$$

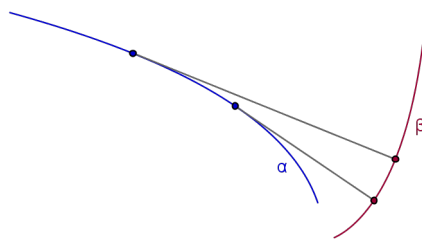
ou seja, a origem está localizada no meio do caminho entre os dois ápices de uma cicloide gerada por um círculo de raio $g/4k^2$. \square

Nesta demonstração, considerando-se as marcações da figura usada na definição da cicloide, observa-se que o ângulo ϕ representa $\angle KLO'$ e não $\theta = \angle KC'O'$. Ao compará-los, um conhecido resultado de geometria euclidiana mostra que $\theta = 2\phi$, o que justifica a diferença encontrada entre as duas parametrizações.

Sejam $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva fixada e $\beta : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada pelo desenrolar de uma corda ao longo de α na direção tangente a α em cada ponto. A partir da construção, é possível descrever a curva $\beta(t)$ pela equação

$$\beta(t) = \alpha(t) + \lambda(t)\alpha'(t).$$

Além disso, a condição de a corda estar esticada implica que $\beta'(t)$ é perpendicular a $\alpha'(t)$ para todos os valores de t .

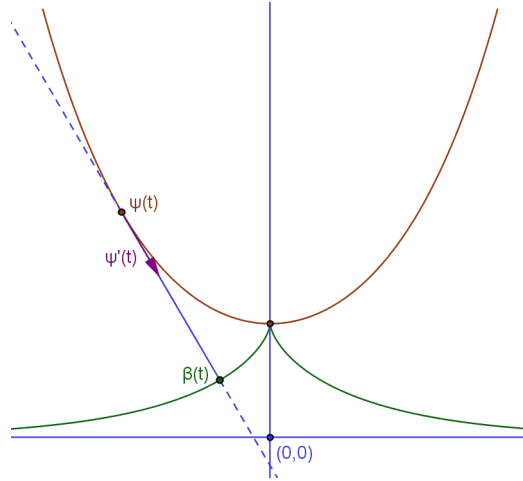


Um pêndulo com uma corda maleável obrigada a desenrolar-se ao longo de uma curva fixa α segue um caminho dado por uma involuta de α .

Definição 4.2. *Sejam $\alpha, \beta : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ curvas tais que $\beta(t)$ pertence à reta tangente a α em $\alpha(t)$, com $\beta'(t) \perp \alpha'(t)$. A curva β é chamada de involuta de α , e α de evoluta de β .*

Para cada t tal que $\kappa(t) > 0$, os vetores $T_\beta(t)$ e $N_\beta(t)$ de β se relacionam com os vetores correspondentes de α por $T_\beta(t) = N_\alpha(t)$ e $N_\beta(t) = -T_\alpha(t)$. E, para t quando $\kappa(t) < 0$, tem-se $T_\beta(t) = -N_\alpha(t)$ e $N_\beta(t) = T_\alpha(t)$.

A figura a seguir mostra parte do traço de uma catenária ψ e de sua involuta, a tractriz β , ambas curvas tratadas neste trabalho.



Proposição 4.1. $\beta(s)$ é uma involuta de uma curva de velocidade unitária $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ se, e somente se, para alguma constante c ,

$$\beta(s) = \alpha(s) + (c - s)\alpha'(s).$$

Demonstração. Suponha-se que $\beta(s) = \alpha(s) + (c - s)\alpha'(s)$. Então, β passa ao longo da linha tangente a α em cada ponto. Calculando-se a tangente de β , obtém-se:

$$\beta'(s) = \alpha'(s) - \alpha'(s) + (c - s)\alpha''(s) = (c - s)\alpha''(s),$$

ou seja, $\beta'(s)$ é um múltiplo de $\alpha''(s)$.

Ainda, como α é de velocidade unitária, tem-se $\alpha'' \perp \alpha'$. Portanto, $\beta' \perp \alpha'$.

Por outro lado, se β é uma involuta de α , então é possível escrever β na forma $\beta(s) = \alpha(s) + \lambda(s)\alpha'(s)$. Tomando sua derivada e fazendo o produto interno do resultado com $\alpha'(s)$, chega-se em

$$\begin{aligned} \beta'(s) \cdot \alpha'(s) &= (\alpha'(s) + \lambda'(s)\alpha'(s) + \lambda(s)\alpha''(s)) \cdot \alpha'(s) \\ &= \underbrace{\alpha'(s) \cdot \alpha'(s)}_{=1} + \lambda'(s) \underbrace{\alpha'(s) \cdot \alpha'(s)}_{=1} + \lambda(s) \underbrace{\alpha''(s) \cdot \alpha'(s)}_{=0} = 1 + \lambda'(s) \end{aligned}$$

$$(\|\alpha'(s)\| = 1, \forall s \Rightarrow \alpha'(s) \cdot \alpha'(s) = 1).$$

Disso e, como $\beta' \perp \alpha'$, então $\lambda'(s) + 1 = 0$. Integrando-se este resultado, obtém-se $\lambda(s) = -s + c$, c constante, ou seja, $\lambda(s) = c - s$. \square

Para uma curva regular α com $\kappa(s) \neq 0, \forall s$, existe uma curva já apresentada neste trabalho que é uma evoluta para α , como mostra a proposição a seguir.

Proposição 4.2. A curva dos centros de curvatura C_α associada a uma curva de velocidade unitária α é uma evoluta de α .

Demonstração. De início, sejam retomadas algumas propriedades de $C_\alpha(s)$:

- (i) $\kappa(s) = \frac{1}{\|\alpha(s) - C_\alpha(s)\|}$;
(ii) $(\alpha(s) - C_\alpha(s)) \cdot \alpha''(s) = -1$.

Sem uma parametrização explícita, não é possível reparametrizar $C_\alpha(s)$ para uma curva de velocidade unitária. Entretanto, a propriedade de ser uma involuta é caracterizada pelo fato de que cada um de seus pontos pertence a um correspondente vetor tangente à evoluta, este ortogonal ao vetor tangente à involuta no referido ponto.

Então, para provar a proposição é suficiente mostrar que $C'_\alpha(s) \perp \alpha'(s)$ e que $\alpha(s) = C_\alpha(s) + \mu(s)C'_\alpha(s)$.

Pela *Fórmula de Euler*, sabe-se que $T'(s) = \kappa(s)N(s)$. Para prosseguir, é importante provar o seguinte lema:

Lema 4.1. *Sejam $\alpha : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva de velocidade unitária, dada por $\alpha(s) = (x(s), y(s))$, e $\{T(s), N(s)\}$ o seu referencial de Frenet. Então, $N'(s) = -\kappa(s)T(s)$.*

Demonstração. Como $N(s)$ tem comprimento unitário, então $N(s) \perp N'(s)$. Assim, $N'(s) = v(s)T(s)$. Considerando que $N(s)$ é perpendicular a $T(s)$, deriva-se a relação

$$\begin{aligned} 0 = N(s) \cdot T(s) &\Rightarrow 0 = \frac{d}{ds} (N(s) \cdot T(s)) = N'(s) \cdot T(s) + N(s) \cdot T'(s) \\ &= v(s)(T(s) \cdot T(s)) + \kappa(s)(N(s) \cdot N(s)) = v(s) + \kappa(s) \Rightarrow v(s) = -\kappa(s). \end{aligned}$$

$$\text{Daí, } N'(s) = v(s)T(s) \Rightarrow N'(s) = -\kappa(s)T(s). \quad \square$$

De volta à demonstração da proposição, como $(\alpha(s) - C_\alpha(s)) \perp \alpha'(s)$, então $\alpha(s) - C_\alpha(s) = \mu(s)N(s)$ (*). Sabendo-se que $(\alpha(s) - C_\alpha(s)) \cdot \alpha''(s) = -1$, chega-se em

$$\begin{aligned} -1 = (\alpha(s) - C_\alpha(s)) \cdot \alpha''(s) &= \mu(s)N(s) \cdot \kappa(s)N(s) \\ &= \mu(s)\kappa(s)(N(s) \cdot N(s)) \stackrel{\kappa(s) \neq 0}{\Rightarrow} \mu(s) = \frac{-1}{\kappa(s)}. \end{aligned}$$

Substituindo-se este resultado em (*) e derivando-se os membros da igualdade resultante, obtém-se

$$\begin{aligned} C_\alpha(s) = \alpha(s) - \mu(s)N(s) &\Rightarrow C_\alpha(s) = \alpha(s) + \frac{1}{\kappa(s)}N(s), \quad (4.2) \\ C'_\alpha(s) = \alpha'(s) + \frac{N'(s)\kappa(s) - N(s)\kappa'(s)}{(\kappa(s))^2} &= \underbrace{\alpha'(s) - T(s)}_{=0} - \frac{\kappa'(s)N(s)}{(\kappa(s))^2} \\ &= \alpha'(s) + \frac{N'(s)}{\kappa(s)} - \frac{N(s)\kappa'(s)}{(\kappa(s))^2} \Rightarrow C'_\alpha(s) = -\frac{\kappa'(s)}{(\kappa(s))^2}N(s). \end{aligned}$$

Disso, conclui-se que $C'_\alpha(s) \perp \alpha'(s)$ e, pela equação (4.2), que

$$\alpha(s) = C_\alpha(s) - \frac{1}{\kappa(s)}N(s) \Rightarrow \alpha(s) = C_\alpha(s) + \frac{\kappa(s)}{\kappa'(s)}C'_\alpha(s).$$

Portanto, $C_\alpha(s)$ é uma evoluta de α . \square

Observa-se que $C_\alpha(s)$ é uma curva regular quando $\kappa'(s) \neq 0$ para todo s . A proposição será útil na demonstração do teorema a seguir, atribuído a *Huygens* (1673).

Teorema 4.2. *A evoluta de uma cicloide é também uma cicloide.*

Demonstração. Embora a parametrização para a cicloide disponível neste texto não seja de velocidade unitária, ainda será possível determinar sua curvatura e, portanto, a curva dos centros de curvatura.

Para começar, seja fixado o raio do círculo gerador como de comprimento 1, considerando-se que o caso geral permanecerá claro. Para a cicloide, obtém-se

$$\zeta(\theta) = (\theta + \text{sen } \theta, -1 - \cos \theta) \Rightarrow \begin{cases} \zeta'(\theta) = (1 + \cos \theta, \text{sen } \theta), \\ \zeta''(\theta) = (-\text{sen } \theta, \cos \theta). \end{cases}$$

Aplicando-se a fórmula para a curvatura de uma curva regular arbitrária $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, resulta

$$\begin{aligned} \kappa_\pm(\theta) &= \left| \frac{x''y' - y''x'}{((x')^2 + (y')^2)^{\frac{3}{2}}} \right| = \left| \frac{(1 + \cos \theta) \cos \theta - (-\text{sen } \theta) \text{sen } \theta}{((1 + \cos \theta)^2 + (\text{sen } \theta)^2)^{\frac{3}{2}}} \right| \\ &= \left| \frac{\cos \theta + (\cos^2 \theta + \text{sen}^2 \theta)}{(1 + 2 \cos \theta + (\cos^2 \theta + \text{sen}^2 \theta))^{\frac{3}{2}}} \right| = \left| \frac{1 + \cos \theta}{(2 + 2 \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} \right| = \left| \frac{(1 + \cos \theta)}{2^{\frac{3}{2}}(1 + \cos \theta)^{\frac{3}{2}}} \right| \\ &= \left| \frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{1 + \cos \theta}} \right| = \left| \frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt{2 \cos^2(\theta/2)}} \right| = \left| \frac{1}{4 \cos(\theta/2)} \right|. \end{aligned}$$

Para se construir a curva de centros de curvatura, sendo $N(\theta)$ é o vetor unitário normal à curva em $\zeta(\theta)$, escreve-se

$$C_\zeta(\theta) = \zeta(\theta) + \frac{1}{\kappa(\theta)}N(\theta), \quad \kappa(\theta) \neq 0.$$

Agora, $\zeta'(\theta) = (1 + \cos \theta, \text{sen } \theta)$ e $N(\theta)$ será dado por

$$\begin{aligned} N(\theta) &= \frac{1}{\sqrt{2 + 2 \cos \theta}}(-\text{sen } \theta, 1 + \cos \theta) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(-\frac{\text{sen } \theta}{\sqrt{1 + \cos \theta}}, \sqrt{1 + \cos \theta} \right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{-2 \text{sen } \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{\sqrt{2} \cos \frac{\theta}{2}}, \sqrt{2} \cos \frac{\theta}{2} \right) = \left(-\text{sen } \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2} \right). \end{aligned}$$

Nota-se que ao longo de $-\pi \leq \theta \leq \pi$ o vetor $N(\theta)$ gera pontos no semi-plano superior, deixando $\kappa(\theta)$ positivo. Substituindo a expressão obtida para $N(\theta)$, chega-se à curva dos centros de curvatura:

$$\begin{aligned} C_{\zeta}(\theta) &= (\theta + \operatorname{sen} \theta, -1 - \cos \theta) + 4 \cos \frac{\theta}{2} \left(-\operatorname{sen} \frac{\theta}{2}, \cos \frac{\theta}{2} \right) \\ &= \left(\theta + \operatorname{sen} \theta - 4 \cos \frac{\theta}{2} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}, -1 - \cos \theta + 4 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \\ &= (\theta + \operatorname{sen} \theta - 2 \operatorname{sen} \theta, -1 - \cos \theta + 2(1 + \cos \theta)) \\ &= (\theta - \operatorname{sen} \theta, 1 + \cos \theta). \end{aligned}$$

A transformação $\theta \mapsto \theta' + \pi$ conduz $C_{\zeta}(\theta)$ para

$$C_{\zeta}(\theta') = \underbrace{(\theta' + \operatorname{sen} \theta', -1 - \cos \theta')}_{\zeta(\theta')} + (\pi, 2).$$

Portanto, a evoluta da cicloide ζ é uma cicloide C_{ζ} , que difere de ζ por uma translação, e o teorema está provado.

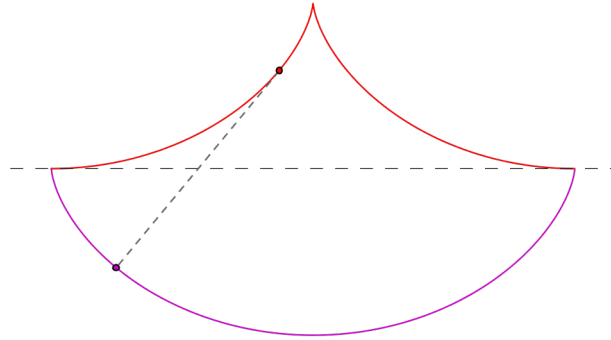


Figura 4.1: Em vermelho, a evoluta da cicloide (em roxo)

□

Exemplo 4.1. Se o traço de uma curva α descreve um círculo de raio r e centro C , sua evoluta é a curva constante dada por $\beta(s) = C$.

De fato, parametrizando a curva α por $\alpha(s) = C + \left(r \cos \frac{s}{r}, r \operatorname{sen} \frac{s}{r} \right)$, $s \in \mathbb{R}$, tem-se que $\kappa(s) = \frac{1}{r}$ e, portanto,

$$\beta(s) \stackrel{(4.2)}{=} \alpha(s) + \left(-r \cos \frac{s}{r}, -r \operatorname{sen} \frac{s}{r} \right) = C.$$

Exemplo 4.2. Seja $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $\alpha(t) = (a \cos t, b \operatorname{sen} t)$, uma elipse (ver Figura 3.2). Sua curvatura é dada por $\kappa(t) = ab / (a^2 \operatorname{sen}^2 t + b^2 \cos^2 t)^{\frac{3}{2}} \neq 0$ e, como

$$\begin{aligned} N(t) &= \frac{1}{a^2 \operatorname{sen}^2 t + b^2 \cos^2 t} (-b \cos t, -a \operatorname{sen} t) \text{ e} \\ \frac{\|\alpha'(t)\|^2}{\alpha''(t) \cdot N(t)} &= (a^2 \cos^2 t + b^2 \operatorname{sen}^2 t) \frac{(a^2 \operatorname{sen}^2 t + b^2 \cos^2 t)}{ab}, \end{aligned}$$

a evoluta de α pode então ser calculada, obtendo-se

$$\begin{aligned}
 \beta(t) &= \alpha(t) + \frac{\|\alpha'(t)\|^2}{\alpha''(t) \cdot N(t)} N(t) \\
 &= (a \cos t, b \sin t) + \frac{(a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t)}{ab} (-b \cos t, -a \sin t) \\
 &= \left(\frac{a^2 \cos t - a^2 \sin^2 t \cos t - b^2 \cos^3 t}{a}, \frac{b^2 \sin t - a^2 \sin^3 t - b^2 \sin t \cos^2 t}{b} \right) \\
 &= \left(\frac{a^2 \cos t(1 - \sin^2 t) - b^2 \cos^3 t}{a}, \frac{b^2 \sin t(1 - \cos^2 t) - a^2 \sin^3 t}{b} \right) \\
 &= \left(\frac{a^2 - b^2}{a} \cos^3 t, \frac{b^2 - a^2}{b} \sin^3 t \right), t \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

Esta curva pode ser escrita implicitamente por $(ax)^{\frac{2}{3}} + (by)^{\frac{2}{3}} = (a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}$ e não é regular para $t = 0$ e $t = \frac{(2k-1)\pi}{2}$, $k \in \mathbb{N}$.

Exemplo 4.3. Seja β uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco s e tal que $\kappa(s) > 0$, $\forall s$. É possível verificar que o comprimento de arco da evoluta de β entre s_0 e s_1 é igual à diferença entre os raios de curvatura em s_0 e s_1 .

Escrevendo-se a evoluta α de β e usando-se a relação $N'(s) = -\kappa(s)T(s)$ em sua derivada, chega-se em

$$\begin{aligned}
 \alpha &= \beta + \frac{1}{\kappa_\beta} N_\beta, \\
 \alpha' &= \beta' + \frac{1}{\kappa_\beta} N'_\beta - \frac{1}{\kappa_\beta^2} N_\beta = \beta' - \frac{\kappa_\beta}{\kappa_\beta} T_\beta - \frac{1}{\kappa_\beta^2} N_\beta = -\frac{1}{\kappa_\beta^2} N_\beta.
 \end{aligned}$$

O resultado esperado é então obtido ao se calcular

$$\int_{s_0}^{s_1} \|\alpha'(r)\| dr = \int_{s_0}^{s_1} \frac{1}{(\kappa_\beta(r))^2} dr = -\frac{1}{\kappa_\beta(r)} \Big|_{s_0}^{s_1} = \frac{1}{\kappa_\beta(s_0)} - \frac{1}{\kappa_\beta(s_1)}.$$

5 Conclusão

Neste trabalho foram apresentados e discutidos diversos conceitos ligados à teoria de curvas planas, dando-se especial atenção ao desenvolvimento e demonstração de alguns resultados por meio de ferramentas simples do Cálculo Diferencial. Na Subseção 2.1.1, por exemplo, definições como a de função retificável e partição e resultados de sequências e séries foram utilizados para embasar e se chegar à definição de função comprimento de arco.

Como diversas curvas clássicas surgiram a partir de ideias mecânicas, o trabalho de obter suas parametrizações envolveu resultados de Física e de Equações Diferenciais, amparados sobre algumas ilustrações desenhadas no *software* GeoGebra.

Ao serem colocadas concepções que conduziram à definição de curvatura, além de alguns resultados ligados a ela, de modo destacado se fez constar o Teorema Fundamental das Curvas Planas. Este teorema garante a existência de uma curva cuja função curvatura coincide com uma função real dada, sob algumas hipóteses. Por fim, uma parametrização geral para a curva garantida pelo teorema foi apresentada.

Este resultado ampliou os meios de se obter novas curvas, pois, além de ser possível reparametrizar uma curva visando um controle de sua velocidade, também se conseguiu controlar sua curvatura.

O trabalho terminou com noções de evolutas e involutas, curvas obtidas a partir de uma curva α dada. O mais interessante é o fato de que a involuta (resp. evoluta) da evoluta (resp. involuta) de α é a própria α .

A Alguns Resultados Básicos e Construções Geométricas

A.1 Espaço Vetorial

Seja K um corpo. Um conjunto $V \neq \emptyset$ é um espaço vetorial sobre K se possui uma *operação binária* $*$: $V \times V \mapsto V$ e um *produto por escalar* \cdot : $K \times V \mapsto V$ tais que, $\forall u, v, w \in V, \forall c, d \in K$, satisfazem:

- (i) $(u * v) * w = u * (v * w)$;
- (ii) $\exists e \in V \mid u * e = e * u = u$;
- (iii) $u * ((-1) \cdot u) = e, -1 \in K$;
- (iv) $u * v = v * u$;
- (v) $c \cdot (u * v) = (c \cdot u) * (c \cdot v)$;
- (vi) $(c + d) \cdot u = (c \cdot u) * (d \cdot u)$, onde $+$: $K \times K \mapsto K$ é a adição definida para K ;
- (vii) $c \cdot (d \cdot u) = (cd) \cdot u$;
- (viii) $1 \cdot u = u, 1 \in K$;

Notações: $du := d \cdot u$; $-u := (-1) \cdot u$; $u + v := u * v$; $u - v = u * (-v)$;

Observação: $u * ((v * w) * z) = (u * (v * w)) * z = u * v * w * z$.

A.1.1 Norma em um espaço vetorial

Dado um espaço vetorial X sobre o corpo K , uma função $\| \cdot \| : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ é chamada de norma se, para quaisquer $\vec{x}, \vec{y} \in X$ e todo $\alpha \in K$, tem-se

- (i) $\|\vec{x}\| = 0 \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}$;
- (ii) $\|\alpha\vec{x}\| = |\alpha|\|\vec{x}\|$;
- (iii) $\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$.

A.2 Diferenciabilidade Uniforme

Definição A.1 ([3, p.88]). Diz-se que $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uniformemente diferenciável no intervalo I quando f for diferenciável em I e, além disso, para cada $\varepsilon > 0$ for possível obter $\delta > 0$ tal que

$$x, x + h \in [a, b], 0 < |h| < \delta \Rightarrow \|f(x + h) - f(x) - h \cdot f'(x)\| < \varepsilon|h|.$$

A.3 Teorema de Rolle

Teorema A.1 ([9, §14.1, 410]). Seja f uma função contínua, definida num intervalo fechado $[a, b]$ e de classe C^1 em (a, b) . Se $f(a) = f(b)$, então existe algum ponto $c \in (a, b)$ onde a tangente ao gráfico de f é horizontal, isto é, $f'(c) = 0$.

Demonstração. Como f é contínua, então, pelo Teorema de Weierstrass, admite no intervalo $[a, b]$ um máximo M e um mínimo m .

Deve-se considerar o caso em que $M = m = f(a) = f(b)$, onde f é constante no intervalo tomado e, por isso, tem sua derivada igual a zero em todos os pontos. O resultado do teorema se verifica.

Ainda, se $M \neq m$, então a função admite no interior de $[a, b]$ um máximo, um mínimo, ou mesmo ambos. Suponha-se $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = M$.

Dessa forma, para valores $x < c$, ocorre $x - c < 0$, além de $f(x) - f(c) \leq 0$ (pois $f(c)$ é máximo). Daí,

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$$

e, como f é de classe C^1 no intervalo, obtém-se

$$\lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c) \geq 0.$$

Além disso, $x > c \Rightarrow x - c > 0$. Daí, $\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$ e $\lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c) \leq 0$. Mas $f'(c) \geq 0$ e $f'(c) \leq 0$ implicam $f'(c) = 0$.

A conclusão seria a mesma caso se admitisse um valor de mínimo no lugar de um de máximo. \square

A.4 Construções no GeoGebra

Utilizando-se do *software* GeoGebra (neste trabalho, a versão 4), é possível descrever uma curva $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$; $f(t) = (x(t), y(t))$ e plotar seu traço através do comando (na barra de Entrada):

Curva[<Expressão>, <Expressão>, <Variável>, <Valor Inicial>, <Valor Final>]

As entradas representam, neste caso (na sequência):

- ★ <Expressão>: função coordenada $x(t)$;
- ★ <Expressão>: função coordenada $y(t)$;
- ★ <Variável>: variável da função, ou seja, t ;
- ★ <Valor Inicial>: valor inicial do intervalo – domínio da função ;
- ★ <Valor Final>: valor final do intervalo – domínio da função .

Para se obter a curva dos centros de curvatura, considere inicialmente a relação

$$\kappa_{\pm}(t) = \left| \frac{x''(t)y'(t) - y''(t)x'(t)}{[(x'(t))^2 + (y'(t))^2]^{\frac{3}{2}}} \right|$$

e, substituindo-a na que segue, obtém-se

$$\|\alpha(t) - C_{\alpha}(t)\| = \frac{1}{\kappa_{\pm}(t)} = \left| \frac{[(x'(t))^2 + (y'(t))^2]^{\frac{3}{2}}}{x''(t)y'(t) - y''(t)x'(t)} \right| = R(t).$$

A função $R(t)$ calcula, portanto, o *raio* do círculo osculador referente a $\alpha(t)$.

Agora, $(x'(t), y'(t))$ é um vetor paralelo à tangente do círculo neste ponto e perpendicular a, por exemplo, $(-y'(t), x'(t))$. Este, por sua vez, é paralelo ao raio $\alpha(t) - C_{\alpha}(t)$. Então, a função dos centros de curvatura fica dada por:

$$f(t) = (x(t), y(t)) + R(t) \frac{1}{\|(-y'(t), x'(t))\|} (-y'(t), x'(t)).$$

O fator $1/\|(-y', x')\|$, presente na segunda parcela, torna unitário o vetor $(-y', x')$. Para se obter o *círculo osculador*, define-se a função

$$g(t) = (R(t) \cos u, R(t) \sin u) + (x(t), y(t)) + R(t) \frac{1}{\|(-y'(t), x'(t))\|} (-y'(t), x'(t)),$$

com $0 \leq u \leq 2\pi$.

A primeira parcela gera o círculo, mas centrado na origem. A segunda translada-o, ficando o centro sobre o ponto $(x(t), y(t))$. Finalmente a terceira, também por translação, deixa o centro do círculo sobre a reta ortogonal a $(x'(t), y'(t))$, a uma distância $R(t)$ de $(x(t), y(t))$, como esperado.

No GeoGebra, a expressão para $g(t)$ deve ser considerada, portanto, na forma

$$(g_1(t), g_2(t)) = \begin{cases} g_1(t) = x(t) + R(t) \left(\cos u - \frac{1}{\|(-y'(t), x'(t))\|} y'(t) \right), \\ g_2(t) = y(t) + R(t) \left(\sin u + \frac{1}{\|(-y'(t), x'(t))\|} x'(t) \right). \end{cases}$$

Para dar movimento à construção, no GeoGebra, uma sugestão é criar uma variável s por meio da ferramenta controle deslizante, utilizando-a para definir um ponto $P =$

$\alpha(s)$ sobre a curva principal, outro $Q = f(s)$ sobre a curva dos centros de curvatura e também na equação do círculo.

Para uma melhor compreensão do uso das ferramentas do programa, a seguir há um passo a passo para a construção da curva dos centros de curvatura da parábola $\alpha(t) = (t, t^2)$.

Referências

- [1] GEOGEBRA, Dynamic mathematics & science for learning and teaching. Disponível em: <www.geogebra.org>.
- [2] FIGUEIREDO, D. G. de; NEVES, A. F. *Equações Diferenciais Aplicadas*. Rio de Janeiro, Brasil: IMPA, 2001.
- [3] LIMA, E. L. *Curso de Análise, Volume 2*. Rio de Janeiro, Brasil: Projeto Euclides, 1999.
- [4] LIMA, E. L. *Curso de Análise, Volume 1*. Rio de Janeiro, Brasil: Projeto Euclides, 1999.
- [5] ALENCAR, H.; SANTOS, W. *Geometria das Curvas Planas*. Goiás, Brasil: CEGRAF-UFG, 2002.
- [6] ÁVILA, G. Notas de ensino: Contato de curvas, círculo osculador e integrais de fresnel. *Revista Matemática Universitária*, v. 2, p. 75–81, 1985.
- [7] DOERING, C. I.; LOPES, A. O. *Equações Diferenciais Ordinárias*. Rio de Janeiro, Brasil: IMPA, 2008.
- [8] MCCLEARY, J. *Geometry From a Differentiable Viewpoint*. New York, USA: Cambridge University Press, 1994.
- [9] GUIDORIZZI, H. L. *Um Curso de Cálculo*. Rio de Janeiro, Brasil: LTC, 1985.
- [10] GUGGENHEIMER, H. W. *Differential Geometry*. New York, USA: McGraw-Hill Book Company, Inc., 1963.
- [11] OPREA, J. *Differential Geometry and Its Applications*. New Jersey, USA: Prentice-Hall, 1997.