



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”  
Instituto de Geociências e Ciências Exatas  
Campus de Rio Claro

# Homologia Singular

**Adriana Cristiane Ruy**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática Universitária do Departamento de Matemática como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre

Orientador  
**Prof. Dr. João Peres Vieira**

**2011**

514.2 Ruy, Adriana Cristiane  
R985h Homologia Singular/ Adriana Cristiane Ruy- Rio Claro: [s.n.],  
2011.  
154 f. : fig.  
  
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto  
de Geociências e Ciências Exatas.  
Orientador: João Peres Vieira  
  
1. Topologia Algébrica. 2. Axiomas de Eilenberg-Steenrod. 3.  
Teoria - Aplicações. I. Título

Ficha Catalográfica elaborada pela STATI - Biblioteca da UNESP  
Campus de Rio Claro/SP

# TERMO DE APROVAÇÃO

Adriana Cristiane Ruy

HOMOLOGIA SINGULAR

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática Universitária do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, pela seguinte banca examinadora:

---

Prof. Dr. João Peres Vieira

Orientador

---

Profa. Dra. Alice Kimie Miwa Libardi

Departamento de Matemática - UNESP/Rio Claro

---

Prof. Dr. João Carlos Vieira Sampaio

Departamento de Matemática - UFSCar/São Carlos

**Rio Claro, 06 de Outubro de 2011**

# Agradecimentos

Agradeço:

1. a Deus que me acompanha em cada passo desta vida.
2. ao IGCE e ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual Paulista: “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de Rio Claro.
3. ao professor João Peres Vieira, pelo apoio e orientação no desenvolvimento desta dissertação.
4. a todos os professores que contribuíram para minha formação.
5. aos meus pais, Luiz e Margarida, minha irmãs, Andréia e Alessandra, e a Raphael.
6. aos colegas de curso de pós-graduação, da turma de 2010.
7. àqueles que tornaram este momento possível, mas que neste instante não recordo nomes.

*Matemática não é apenas números, envolve letras e toda a capacidade que o ser humano tem de conseguir se expressar.*

François Viète - "Pai da Álgebra"

*Duvidar de tudo ou crer em tudo são duas soluções igualmente cômodas, que nos dispensam ambas de refletir.*

Henri Poincaré - "Pai da Topologia"

# Resumo

A Topologia Algébrica descreve a estrutura geométrica de um espaço topológico, associando a ele um sistema algébrico, geralmente um grupo ou uma sequência de grupos. Às funções contínuas entre espaços topológicos correspondem homomorfismos entre grupos associados a estes espaços. Nesta dissertação, mostraremos que a homologia singular com coeficientes em  $\mathbb{Z}$ , constitui uma teoria de homologia, baseados nos axiomas de Samuel Eilenberg e Norman Steenrod. Apresentaremos, também, resultados clássicos como a não existência de um homeomorfismo entre  $\mathbb{R}^m$  e  $\mathbb{R}^n$ , para  $m \neq n$ , o teorema do ponto fixo de Brouwer e a não existência de campo vetorial não-nulo nas esferas de dimensão par.

**Palavras-chave:** Topologia Algébrica, Axiomas de Eilenberg-Steenrod, Teoria - Aplicações.

# Abstract

The Algebraic Topology describes the geometrical structure of a topological space by associating an algebraic system, usually a group or a sequence of groups. To continuous functions between topological spaces correspond homomorphisms between groups associated to these spaces. In this work we will show that Singular Homology with  $\mathbb{Z}$ -coefficients constitutes a homology theory, based on the Eilenberg-Steenrod Axioms. We also present some classical results as the nonexistence of a homeomorphism between  $\mathbb{R}^m$  and  $\mathbb{R}^n$ , if  $m \neq n$ , the Brouwer's fixed point theorem and the nonexistence of a non-zero vector field in even dimension spheres.

**Keywords:** Algebraic Topology, Eilenberg-Steenrod Axiom's, Theory - Applications.

# Lista de Figuras

3.1	$q$ -simplexos padrão para $q = 1, 2, 3$ . . . . .	38
3.2	$i$ -ésima face do $q$ -simplexo singular $T$ . . . . .	40
3.3	Representação geométrica do 1-Ciclo e do 2-Ciclo do par $(X, A)$ , respectivamente. . . . .	47
4.1	Equivalência de homotopia $k$ . . . . .	61
5.1	Equivalência de homotopia $k$ . . . . .	66
6.1	Semirreta $f(x)x$ , que começa em $f(x)$ e passa por $x$ , interseccionando a esfera $S^{n-1}$ em $g(x)$ . . . . .	76
9.1	Representação geométrica da terna $(X, A, B) = (D^n, A, S^{n-1})$ , para $n = 2$ e $n = 3$ , respectivamente. . . . .	113
10.1	Primeira subdivisão baricêntrica de $A = \Delta_2$ . . . . .	126
10.2	Primeira subdivisão baricêntrica de $A = \Delta_2$ . . . . .	130
10.3	Equivalência de homotopia $j$ . . . . .	142
C.1	Participantes do 1º Colóquio Brasileiro de Matemática. . . . .	152
C.2	Banca de Livre Docência, em 1971. . . . .	154



# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>17</b>
<b>2</b>	<b>Pré-Requisitos Algébricos</b>	<b>19</b>
2.1	Sequências exatas . . . . .	19
2.2	Complexos de Cadeias . . . . .	23
2.3	Exemplos de Aplicações de Cadeias . . . . .	25
2.4	Sequência Exata de Homologia . . . . .	28
2.5	Lema dos Cinco . . . . .	32
<b>3</b>	<b>Homologia Singular</b>	<b>37</b>
3.1	Cadeias singulares e grupos de homologia singular . . . . .	37
3.2	Homomorfismo Induzido por uma Aplicação Contínua . . . . .	44
3.2.1	Homologia Relativa . . . . .	46
<b>4</b>	<b>Axiomas de Eilenberg-Steenrod e Aplicações</b>	<b>53</b>
4.1	Axiomas de Eilenberg-Steenrod . . . . .	53
4.2	Suspensão na Homologia . . . . .	55
<b>5</b>	<b>Grupos de Homologia das Esferas</b>	<b>63</b>
<b>6</b>	<b>Aplicações da Teoria de Homologia</b>	<b>73</b>
6.1	A Não Existência de Homeomorfismo entre $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$ , se $m \neq n$ . . . . .	73
6.2	O Teorema do Ponto Fixo de Brouwer . . . . .	75
6.3	A Não Existência de um Campo Vetorial Não-Nulo nas Esferas de Dimensão Par . . . . .	78
<b>7</b>	<b>Grupos de Homologia de Espaços Topológicos Acíclicos</b>	<b>83</b>

<b>8</b>	<b>Sequência de Homologia da Terna <math>(X, A, B)</math></b>	<b>91</b>
<b>9</b>	<b>Axioma da Homotopia</b>	<b>95</b>
9.1	Propriedades de Homotopia . . . . .	95
9.2	Homotopia de Cadeias . . . . .	97
9.3	Quinto Axioma de Eilenberg-Steenrod: Axioma da Homotopia . . . . .	106
9.4	Resultados . . . . .	109
<b>10</b>	<b>Axioma da Excisão</b>	<b>115</b>
10.1	Operador Baricêntrico . . . . .	115
10.1.1	Subdivisão Baricêntrica de um $q$ -simplexo . . . . .	123
10.2	Sexto Axioma de Eilenberg-Steenrod: Teorema da Excisão . . . . .	138
<b>11</b>	<b>Conclusão</b>	<b>143</b>
	<b>Referências</b>	<b>145</b>
<b>A</b>	<b>Teorema do Isomorfismo de Grupos</b>	<b>147</b>
<b>B</b>	<b>Topologia Quociente</b>	<b>149</b>
<b>C</b>	<b>Breve Biografia sobre o Prof. Dr. Carlos Benjamim de Lyra</b>	<b>151</b>

# 1 Introdução

Estudos em Topologia Algébrica intensificaram-se nos últimos 30 a 40 anos, difundindo-se na graduação, na pós-graduação e em pesquisas matemáticas. Com isso, a Teoria de Homologia tornou-se popular entre os matemáticos.

Esta dissertação é espelhada na apostila do Prof. Dr. Carlos Benjamim de Lyra (ítem [1] da bibliografia), aplicada ao curso de pós-graduação na USP em São Carlos, em 1971, cujo objetivo é demonstrar que as propriedades referentes a Homologia Singular satisfazem axiomas requeridos para que a teoria seja uma Teoria de Homologia: os sete axiomas de Eilenberg-Steenrod. Esta descrição axiomática para a Teoria de Homologia foi proposta por Eilenberg e Steenrod, em 1945.

Primeiro apresentaremos pré-requisitos algébricos e topológicos necessários ao desenvolvimento do presente trabalho. Após, introduziremos a Homologia Singular e suas propriedades, verificando que esta satisfaz 5 dos 7 axiomas requeridos (de números 1, 2, 3, 4 e 7). Assumindo que os axiomas 5 e 6 são válidos, exploraremos as seguintes aplicações:

1. A não existência de um homeomorfismo entre  $\mathbb{R}^m$  e  $\mathbb{R}^n$ , se  $m \neq n$ .
2. Teorema do ponto fixo de Brouwer.
3. A não existência de um campo vetorial não-nulo nas esferas de dimensão par.

Em um segundo momento, mostraremos a validade dos axiomas 5 e 6, completando os objetivos deste trabalho e proporcionando um material disponível para alunos de graduação e pós-graduação, desta e de outras instituições de ensino superior.

## 2 Pré-Requisitos Algébricos

Inicialmente, abordaremos conceitos e resultados algébricos e topológicos necessários ao estudo da Teoria de Homologia.

### 2.1 Sequências exatas

**Definição 2.1.** *Sejam  $A$  e  $B$  grupos abelianos. A soma direta de  $A$  e  $B$ , denotada por  $A \oplus B$ , consiste do conjunto  $A \times B$  com a adição dada por:*

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$$

Observe que  $A \oplus B$  satisfaz os axiomas de grupo abeliano. Ou seja, o grupo  $(A \oplus B, +)$  satisfaz as propriedades: associativa, comutativa, existência de um único elemento neutro e existência de um único elemento oposto.

**Definição 2.2.** *Dados  $A$ ,  $B$  e  $X$  grupos abelianos, definimos uma aplicação  $\phi : X \rightarrow A \oplus B$  por*

$$\phi(x) = (\phi_1(x), \phi_2(x)), \text{ para todo } x \in X,$$

*onde  $\phi_1 : X \rightarrow A$  e  $\phi_2 : X \rightarrow B$  são as aplicações componentes de  $\phi$ .*

Observe que a aplicação  $\phi$  é um homomorfismo se, e somente se,  $\phi_1$  e  $\phi_2$  também o são.

De fato, se  $\phi$  é um homomorfismo, então para todos  $a$  e  $b$  em  $X$ , temos que  $\phi(a+b) = \phi(a) + \phi(b)$ . Por outro lado,  $\phi(a+b) = (\phi_1(a+b), \phi_2(a+b))$ . Então:  $(\phi_1(a+b), \phi_2(a+b)) = \phi(a) + \phi(b) = (\phi_1(a), \phi_2(a)) + (\phi_1(b), \phi_2(b)) = (\phi_1(a) + \phi_1(b), \phi_2(a) + \phi_2(b))$ . Pela igualdade de pares ordenados:  $\phi_1(a+b) = \phi_1(a) + \phi_1(b)$  e  $\phi_2(a+b) = \phi_2(a) + \phi_2(b)$ . Portanto,  $\phi_1$  e  $\phi_2$  são homomorfismos.

Reciprocamente, suponha que  $\phi_1$  e  $\phi_2$  são homomorfismos. Então para todos  $a$  e  $b$  em  $X$ ,  $\phi(a+b) = (\phi_1(a+b), \phi_2(a+b)) = (\phi_1(a) + \phi_1(b), \phi_2(a) + \phi_2(b)) = (\phi_1(a), \phi_2(a)) + (\phi_1(b), \phi_2(b)) = \phi(a) + \phi(b)$ . Portanto,  $\phi$  é um homomorfismo.

Denotaremos a aplicação  $\phi : X \rightarrow A \oplus B$ , definida acima, como uma matriz coluna ou uma matriz linha usando chaves no lugar do parênteses. Assim:

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \{ \phi_1, \phi_2 \}$$

**Definição 2.3.** *Sejam  $A$ ,  $B$  e  $Y$  grupos abelianos. Para quaisquer homomorfismos  $\psi_1 : A \rightarrow Y$  e  $\psi_2 : B \rightarrow Y$ , definimos a aplicação  $\psi = (\psi_1, \psi_2) : A \oplus B \rightarrow Y$  por  $(\psi_1, \psi_2)(a, b) = \psi_1(a) + \psi_2(b)$ .*

Este é um homomorfismo de grupos.

**Proposição 2.1.** *Todo homomorfismo de grupos  $\psi : A \oplus B \rightarrow Y$ , pode ser escrito de forma única como  $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ , onde  $\psi_1 : A \rightarrow Y$  e  $\psi_2 : B \rightarrow Y$  são homomorfismos.*

*Demonstração.* Para todo  $\psi$  defina  $\psi_1(a) = \psi(a, 0)$  e  $\psi_2(b) = \psi(0, b)$ . Desta forma,  $\psi_1$  e  $\psi_2$  são homomorfismos. Ainda:

$$\psi(a, b) = \psi((a, 0) + (0, b)) = \psi(a, 0) + \psi(0, b) = \psi_1(a) + \psi_2(b) = (\psi_1, \psi_2)(a, b).$$

Agora, que esta decomposição é única, segue do fato de que na soma direta  $A \oplus B$ , o par  $(a, b)$  se escreve de modo único como  $(a, 0) + (0, b)$ .

□

Consideremos, agora,  $A, B, X$  e  $Y$  grupos abelianos e os homomorfismos  $\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$  e  $(\psi_1, \psi_2)$ , onde  $\phi_1 : X \rightarrow A$ ,  $\phi_2 : X \rightarrow B$ ,  $\psi_1 : A \rightarrow Y$  e  $\psi_2 : B \rightarrow Y$ .

Podemos definir a aplicação composição:

$$(\psi_1, \psi_2) \circ \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} : X \rightarrow Y,$$

dada por

$$(\psi_1, \psi_2) \circ \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = (\psi_1 \circ \phi_1 + \psi_2 \circ \phi_2)$$

Então, para todo  $x \in X$ , temos  $(\psi_1, \psi_2) \circ \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} (x) = (\psi_1 \circ \phi_1 + \psi_2 \circ \phi_2)(x)$

Fazendo um análogo à multiplicação usual de matrizes, sendo  $\phi : X \oplus Y \rightarrow A \oplus B$ , este pode ser escrito da forma  $\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$ , onde  $\phi_1 : X \oplus Y \rightarrow A$  e  $\phi_2 : X \oplus Y \rightarrow B$ , com

$$\phi_1 = (\alpha_{11}, \alpha_{12}) \text{ e } \phi_2 = (\alpha_{21}, \alpha_{22}). \text{ Assim, } \phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}.$$

Então, a multiplicação usual de matrizes pode ser vista como uma composição de homomorfismos:

$$\begin{pmatrix} \psi_1 & \psi_2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix} : X \oplus Y \rightarrow Y.$$

**Definição 2.4.** *Sejam  $A, B$  e  $C$  grupos abelianos e  $\phi_1$  e  $\phi_2$  homomorfismos. Dizemos que a sequência  $A \xrightarrow{\phi_1} B \xrightarrow{\phi_2} C$  é uma sequência exata se  $\ker(\phi_2) = \text{Im}(\phi_1)$ .*

Podemos estender esta definição para sequências longas: sejam  $A_i$ , para  $i \in I$ , grupos abelianos e  $\phi_i$ , para  $i \in I$ , homomorfismos, então a sequência

$$\cdots \rightarrow A_1 \xrightarrow{\phi_1} A_2 \xrightarrow{\phi_2} A_3 \xrightarrow{\phi_3} A_4 \xrightarrow{\phi_4} A_5 \rightarrow \cdots$$

será dita sequência exata longa se para cada  $i \in I$ , tivermos  $\ker(\phi_{i+1}) = \text{Im}(\phi_i)$ .

**Definição 2.5.** *Uma sequência exata da forma  $0 \xrightarrow{\phi_0} A \xrightarrow{\phi_1} B \xrightarrow{\phi_2} C \xrightarrow{\phi_3} 0$  é chamada de sequência exata curta.*

Note que, neste caso, como a sequência é exata, temos:

$$\ker(\phi_1) = \text{Im}(\phi_0) = 0 \text{ e portanto } \phi_1 \text{ é injetora.}$$

$$\ker(\phi_3) = \text{Im}(\phi_2) = C \text{ e portanto } \phi_2 \text{ é sobrejetora.}$$

**Teorema 2.1.** *Dados a sequência exata  $P \xrightarrow{\alpha} Q \xrightarrow{\beta} R \xleftarrow[\delta]{\varphi} S \rightarrow \{0\}$  e o homomorfismo  $\delta : S \rightarrow R$ , com  $\varphi \circ \delta = \text{Id}_S$ , então a sequência  $P \xrightarrow{\{\alpha, 0\}} Q \oplus S \xrightarrow{(\beta, \delta)} R \xrightarrow{\phi} \{0\}$  é exata*

*Demonstração.* Primeiro, precisamos provar que a sequência é exata em  $Q \oplus S$ , ou seja, devemos mostrar que  $\ker(\beta, \delta) = \text{Im}\{\alpha, 0\}$ .

Considere as aplicações  $(\beta, \delta)$  e  $\{\alpha, 0\}$  foram definidas como segue:

$$\{\alpha, 0\}(a) = (\alpha(a), 0(a)) = (\alpha(a), 0), \forall a \in P \text{ e}$$

$$(\beta, \delta)(c, d) = \beta(c) + \delta(d), \forall (c, d) \in Q \oplus S.$$

Então,  $\ker(\beta, \delta) = \{(c, d) \in Q \oplus S \mid \beta(c) + \delta(d) = 0\}$  e  $\text{Im}\{\alpha, 0\} = \{(\alpha(a), 0) \mid a \in P\}$ . Chamaremos a expressão  $\beta(c) + \delta(d) = 0$  de (\*).

Usando o fato de que a sequência  $P \xrightarrow{\alpha} Q \xrightarrow{\beta} R \xrightarrow{\varphi} S \rightarrow \{0\}$  é exata, temos que  $Im(\beta) = ker(\varphi)$ ; deste modo para todo  $q \in Q$ ,  $\beta(q) \in ker(\varphi)$  e então  $\varphi(\beta(q)) = 0$ , para todo  $q \in Q$ . Chamaremos a expressão  $\varphi \circ \beta = 0$  de (\*\*).

Aplicando  $\varphi$  em ambos os lados de (\*), obtemos  $\varphi(\beta(c) + \delta(d)) = \varphi(0) = 0$  e então  $\varphi(\beta(c)) + \varphi(\delta(d)) = 0$ . Mas por (\*\*) e pela hipótese de que  $\varphi \circ \delta = Id_S$ , concluímos que  $Id_S(d) = 0$ , ou seja,  $d = 0$ .

Substituindo  $d = 0$  em (\*), temos que  $\beta(c) = 0$  e então  $c \in ker(\beta) = Im(\alpha)$ . Portanto, existe  $a \in P$  tal que  $\alpha(a) = c$ . Como  $d = 0$  e  $c = \alpha(a)$ , podemos escrever o núcleo da aplicação  $(\beta, \delta)$ , como sendo o conjunto  $ker(\beta, \delta) = \{(\alpha(a), 0) \mid a \in P\} = Im(\{\alpha, 0\})$ . Portanto, a sequência é exata em  $Q \oplus S$ .

Agora, mostraremos que a sequência é exata em  $R$ , ou seja,  $ker(\phi) = Im(\beta, \delta)$ .

Como  $\phi \equiv 0$ , então  $ker(\phi) = R$ . Assim, se mostrarmos que a aplicação  $(\beta, \delta)$  é sobrejetora, o teorema estará provado.

Neste caso, para todo  $r \in R$ ,  $\varphi(r) \in S$  e  $(\delta \circ \varphi)(r) \in R$ . Como  $\varphi \circ \delta = Id_S$ ,  $\varphi(r) = (\varphi \delta \varphi)(r)$  e então  $\varphi(r) - (\varphi \delta \varphi)(r) = 0$ . Assim,  $\varphi(r - \delta \varphi(r)) = 0$  e portanto  $r - \delta \varphi(r) \in ker(\varphi) = Im(\beta)$ .

Assim, existe  $q \in Q$  tal que  $\beta(q) = r - \delta \varphi(r)$  e então  $r = \beta(q) + \delta \varphi(r) = (\beta, \delta)(q, \varphi(r))$ . Dessa forma  $(\beta, \delta)$  é sobrejetora, pois existe  $(q, \varphi(r)) \in Q \oplus S$  tal que  $r = (\beta, \delta)(q, \varphi(r))$ .  $\square$

Como consequência deste teorema, o corolário a seguir expressa o resultado principal desta seção:

**Corolário 2.1.** *Dados a sequência exata curta  $\{0\} \xrightarrow{\alpha} Q \xrightarrow{\beta} R \xrightarrow{\varphi} S \rightarrow \{0\}$  e o homomorfismo  $\delta : S \rightarrow R$ , com  $\varphi \circ \delta = Id_S$ , então a aplicação  $(\beta, \delta) : Q \oplus S \rightarrow R$  é um isomorfismo.*

*Demonstração.* Substituindo  $P$  por  $\{0\}$ , no teorema acima, obtemos a seguinte sequência exata curta:  $\{0\} \xrightarrow{\{\alpha, 0\}} Q \oplus S \xrightarrow{(\beta, \delta)} R \xrightarrow{\phi} \{0\}$ , seguindo o resultado.  $\square$

**Observação 2.1.** Quando existir um homomorfismo  $\delta$ , tal como no teorema acima, dizemos que a sequência se fatora ou que  $R$  se decompõe em uma soma direta de  $Q$  e  $S$ .

Nas próximas seções, desenvolveremos a teoria algébrica necessária para a construção dos grupos de homologia singular. Isto nos permitirá desenvolver a Homologia

Singular.

## 2.2 Complexos de Cadeias

**Definição 2.6.** Um complexo de cadeias  $C = (C_q, \partial_q)$  é definido por um par de sequências: uma sequência de grupos abelianos  $(C_q)_{q \in \mathbb{Z}}$  e uma sequência de homomorfismos  $\partial_q : C_q \rightarrow C_{q-1}$ , tal que  $\partial_{q-1} \circ \partial_q = 0$ , para todo  $q \in \mathbb{Z}$ .

Representaremos um complexo de cadeias por um diagrama da forma:

$$\cdots \rightarrow C_{q+1} \xrightarrow{\partial_{q+1}} C_q \xrightarrow{\partial_q} C_{q-1} \xrightarrow{\partial_{q-1}} \cdots$$

**Definição 2.7.** Os elementos de  $C_q$  são chamados de  $q$ -cadeias.

Considere o complexo de cadeias  $C = (C_q, \partial_q)$ . Para cada  $q \in \mathbb{Z}$  podemos associar, de modo natural, certos subgrupos dos grupos de cadeias  $C_q$  a saber:

$$Z_q(C) = \ker(\partial_q)$$

$$B_q(C) = \text{Im}(\partial_{q+1})$$

Dessa forma, tanto  $Z_q(C)$ , quanto  $B_q(C)$ , serão subgrupos normais de  $C_q$ .

**Definição 2.8.** Chamaremos os elementos de  $Z_q(C)$  de  $q$ -ciclos e os de  $B_q(C)$ , de  $q$ -bordos do complexo  $C$ .

Observe que, como  $\partial_q \circ \partial_{q+1} = 0$ , segue que  $B_q(C) \subset Z_q(C)$ .

**Definição 2.9.** O grupo quociente  $H_q(C) = \frac{Z_q(C)}{B_q(C)}$  é denominado  $q$ -ésimo Grupo de Homologia do Complexo  $C$ . Os elementos de  $H_q(C)$  são chamados de classes de homologia e um elemento  $z + B_q(C) \in H_q(C)$ , com  $z \in Z_q(C)$ , é denotado por  $\{z\}$ .

**Definição 2.10.** Dados dois complexos de cadeias  $C = (C_q, \partial_q)$  e  $C' = (C'_q, \partial'_q)$ , chama-se aplicação de cadeias  $\phi : C \rightarrow C'$  a uma família de homomorfismos  $\phi = (\phi_q)$ , onde  $\phi_q : C_q \rightarrow C'_q$ ,  $q \in \mathbb{Z}$ , é tal que para todo  $q$  temos  $\partial'_q \circ \phi_q = \phi_{q-1} \circ \partial_q$ .

Com essa definição, podemos dizer que  $\phi$  é uma aplicação de cadeias se cada um dos "quadrados" do diagrama abaixo comuta:



$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \longrightarrow & C_{q+1} & \xrightarrow{\partial_{q+1}} & C_q & \xrightarrow{\partial_q} & C_{q-1} \longrightarrow \cdots \\
& & \downarrow \phi_{q+1} & & \downarrow \phi_q & & \downarrow \phi_{q-1} \\
\cdots & \longrightarrow & C'_{q+1} & \xrightarrow{\partial'_{q+1}} & C'_q & \xrightarrow{\partial'_q} & C'_{q-1} \longrightarrow \cdots
\end{array}$$

Diagrama I

**Definição 2.11.** *Seja  $C = (C_q, \partial_q)$  um complexo de cadeias. Por um subcomplexo de cadeias  $D$  de  $C$ , entenderemos uma seqüência de subgrupos  $D_q \subset C_q$  e de homomorfismos  $\partial'_q : D_q \rightarrow D_{q-1}$ , tais que  $\partial'_q = \partial_q |_{D_q}$ . Para indicar um subcomplexo de cadeias  $D$  de  $C$ , usaremos a notação  $D \subset C$ .*

Observemos que uma seqüência de subgrupos  $D_q \subset C_q$  define um subcomplexo de cadeias se, e somente se,  $\partial_q(D_q) \subset D_{q-1}$ , pois, se uma seqüência de subgrupos  $D_q \subset C_q$  e um homomorfismo  $\partial'_q : D_q \rightarrow D_{q-1}$  definem um subcomplexo de cadeias  $D$  de  $C$ , então  $\partial'_q = \partial_q |_{D_q}$ . Logo  $\partial_q(D_q) \subset D_{q-1}$ . Reciprocamente, se  $\partial_q(D_q) \subset D_{q-1}$ , então  $\partial'_q = \partial_q |_{D_q}$  define homomorfismos  $\partial'_q : D_q \rightarrow D_{q-1}$  visto que se  $f : X \rightarrow Y$  é um homomorfismo e  $A \subset X$ , então  $f |_A$  é um homomorfismo. Assim os subgrupos  $D_q \subset C_q$  definem o subcomplexo de cadeias  $D$  de  $C$ :

$$\cdots \rightarrow D_{q+1} \xrightarrow{\partial'_{q+1}} D_q \xrightarrow{\partial'_q} D_{q-1} \xrightarrow{\partial'_{q-1}} \cdots$$

**Definição 2.12.** *Dado um subcomplexo  $D \subset C$  definimos o complexo quociente  $E = \frac{C}{D}$ , como o complexo de cadeias  $E = (E_q, \bar{\partial}_q)$ , onde  $E_q = \frac{C_q}{D_q}$  e  $\bar{\partial}_q : E_q \rightarrow E_{q-1}$  é definido por passagem ao quociente em  $\partial_q$  (visto que  $\partial_q(D_q) \subset D_{q-1}$ ).*

Desta forma, para todo elemento  $c + D_q \in E_q$ ,  $\bar{\partial}_q : E_q \rightarrow E_{q-1}$  é dado por

$$\bar{\partial}_q(c + D_q) = \partial_q(c) + D_{q-1}$$

Afirmamos que  $\bar{\partial}_{q-1} \circ \bar{\partial}_q = 0$ , onde  $0$  é o homomorfismo nulo.

De fato, se  $c + D_q \in E_q$ , então  $(\bar{\partial}_{q-1} \circ \bar{\partial}_q)(c + D_q) = \bar{\partial}_{q-1}(\bar{\partial}_q(c + D_q)) = \bar{\partial}_{q-1}(\partial_q(c) + D_{q-1}) = (\partial_{q-1} \circ \partial_q)(c) + D_{q-2} = D_{q-2}$ , uma vez que  $(\partial_{q-1} \circ \partial_q)(c) = 0$ .

**Proposição 2.2.** *Dada uma aplicação de cadeias  $\phi : C \rightarrow C'$ , temos:*

- (i)  $(\phi_q(C_q))$  define um subcomplexo de  $C'$ .
- (ii)  $(\ker(\phi_q))$  define um subcomplexo de  $C$ .

*Demonstração.* (i) Devemos mostrar que  $\partial'_q(\phi_q(C_q)) \subset \phi_{q-1}(C_{q-1})$ .

Considere  $d \in \phi_q(C_q)$ . Então, existe  $c \in C_q$  tal que  $\phi_q(c) = d$ , e portanto  $\partial'_q(d) = \partial'_q(\phi_q(c))$ . Pela comutatividade do *Diagrama I*, temos que  $\partial'_q(d) = \partial'_q(\phi_q(c)) = \phi_{q-1}(\partial_q(c)) \in \phi_{q-1}(C_{q-1})$ . Portanto,  $\partial'_q(\phi_q(C_q)) \subset \phi_{q-1}(C_{q-1})$ .

(ii) Vamos verificar que  $\partial_q(\ker(\phi_q)) \subset \ker(\phi_{q-1})$ .

Se  $x \in \ker(\phi_q)$ , então  $\phi_q(x) = 0$ . Como o *Diagrama I* é comutativo, temos que  $\phi_{q-1}(\partial_q(x)) = \partial'_q(\phi_q(x)) = \partial'_q(0) = 0$ , e então  $\partial_q(x) \in \ker(\phi_{q-1})$ .  $\square$

**Observação 2.2.** Denotaremos os subcomplexos de cadeia, acima, por:

$$(i) \operatorname{Im}(\phi) = (\phi_q(C_q), \partial'_q) = (\operatorname{Im}(\phi_q), \partial'_q)$$

$$(ii) \ker(\phi) = (\ker(\phi_q), \partial_q)$$

### 2.3 Exemplos de Aplicações de Cadeias

**Exemplo 2.1.** Se  $D$  é um subcomplexo de  $C$  e  $i = (i_q)$ , onde  $i_q : D_q \rightarrow C_q$  é a função inclusão,  $\forall q \in \mathbb{Z}$ , então  $i : D \rightarrow C$  é uma aplicação de cadeias.

*Demonstração.* Considere o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & D_{q+1} & \xrightarrow{\partial'_{q+1}} & D_q & \xrightarrow{\partial'_q} & D_{q-1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow i_{q+1} & & \downarrow i_q & & \downarrow i_{q-1} & & \\ \cdots & \longrightarrow & C_{q+1} & \xrightarrow{\partial_{q+1}} & C_q & \xrightarrow{\partial_q} & C_{q-1} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Diagrama II

Devemos mostrar que para todo  $q \in \mathbb{Z}$ ,  $\partial_q \circ i_q = i_{q-1} \circ \partial'_q$ . Com efeito, para qualquer  $x \in D_q$ , temos que  $(\partial_q \circ i_q)(x) = \partial_q(i_q(x)) = \partial_q(x) = \partial'_q(x) = i_{q-1}(\partial'_q(x)) = i_{q-1} \circ \partial'_q(x)$ . Portanto,  $i$  é uma aplicação de cadeias.  $\square$

**Exemplo 2.2.** Sejam  $E_q = \frac{C_q}{D_q}$  o complexo quociente e  $j = (j_q)$ , onde  $j_q : C_q \rightarrow E_q$  é a projeção no quociente,  $\forall q \in \mathbb{Z}$ . Então  $j : C \rightarrow E$  é uma aplicação de cadeias.

*Demonstração.* Considere o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_q & \xrightarrow{\partial_q} & C_{q-1} & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow j_q & & \downarrow j_{q-1} & & \\ \cdots & \longrightarrow & E_q & \xrightarrow{\bar{\partial}_q} & E_{q-1} & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Diagrama III

Vamos mostrar que este é um diagrama comutativo, ou seja,  $\bar{\partial}_q \circ j_q = j_{q-1} \circ \partial_q$ . Assim, para qualquer  $q \in \mathbb{Z}$  e  $c \in C_q$ , temos que  $\bar{\partial}_q(j_q(c)) = \bar{\partial}_q(c + D_q) = \partial_q(c) + D_{q-1} = j_{q-1}(\partial_q(c))$ . Portanto,  $j$  é uma aplicação de cadeias.  $\square$

**Observação 2.3.** Através destes dois exemplos, podemos considerar a sequência de complexos

$$0 \rightarrow D \xrightarrow{i} C \xrightarrow{j} E = \frac{C}{D} \rightarrow 0$$

que é exata, uma vez que é uma sequência exata curta,  $\forall q \in \mathbb{Z}$ , uma vez que, sendo  $i = (i_q)$  e  $j = (j_q)$  aplicações de cadeias,  $i_q$  e  $j_q$  são homomorfismos. Temos  $i_q$  injetor e  $j_q$  sobrejetor para todo  $q \in \mathbb{Z}$ . Além disso, se  $c \in \ker(j_q)$ , então  $j_q(c) = c + D_q = D_q$  e portanto  $c \in D_q$ . Então  $\ker(j_q) \subset D_q = \text{Im}(i_q)$ . Também, para todo  $d \in D_q$ , temos que  $j_q(i_q(d)) = j_q(d) = d + D_q = D_q$  e portanto  $\text{Im}(i_q) \subset \ker(j_q)$ . Assim  $\text{Im}(i_q) = \ker(j_q)$

Considere, agora, dois pares de complexos  $D \subset C$  e  $D' \subset C'$  e uma aplicação de cadeias  $\phi : C \rightarrow C'$ , tal que  $\phi(D) \subset D'$ . Assim, podemos definir a aplicação  $\bar{\phi}_q : \frac{C_q}{D_q} \rightarrow \frac{C'_q}{D'_q}$ , da seguinte forma: para todo  $c + D_q \in \frac{C_q}{D_q}$ , teremos  $\bar{\phi}_q(c + D_q) = \phi_q(c) + D'_q$ , para todo  $q \in \mathbb{Z}$

Precisamos provar que  $\bar{\phi}$  está bem definida:

Considere as classes de equivalência  $a + D_q$  e  $b + D_q$  em  $\frac{C_q}{D_q}$  tais que  $a + D_q = b + D_q$ . Então  $b - a \in D_q$ . Como  $\phi_q(D_q) \subset D'_q$ , temos  $\phi_q(b - a) \in D'_q$ . Então  $\phi_q(b) - \phi_q(a) \in D'_q$  se, e somente se,  $\phi_q(a) + D'_q = \phi_q(b) + D'_q$  e assim  $\bar{\phi}_q(a + D_q) = \bar{\phi}_q(b + D_q)$ . Portanto,  $\bar{\phi}$  está bem definida.

Também,  $\bar{\phi}_q$  é um homomorfismo de grupos, pois  $\bar{\phi}_q((a + D_q) + (b + D_q)) = \bar{\phi}_q((a + b) + D_q) = \phi_q(a + b) + D'_q = (\phi_q(a) + \phi_q(b)) + D'_q = (\phi_q(a) + D'_q) + (\phi_q(b) + D'_q) = \bar{\phi}_q(a + D_q) + \bar{\phi}_q(b + D_q)$ .

**Observação 2.4.** Usaremos a notação  $\phi : (C, D) \rightarrow (C', D')$ , para indicar que  $\phi : C \rightarrow C'$  é uma aplicação de cadeias, tal que  $\phi(D) \subset D'$ .

**Exemplo 2.3.** Se  $\phi : (C, D) \rightarrow (C', D')$  é uma aplicação de cadeias, então  $\bar{\phi}_q : \frac{C_q}{D_q} \rightarrow \frac{C'_q}{D'_q}$  é uma aplicação de cadeias dos complexos quocientes.

*Demonstração.* Considere o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \longrightarrow & \frac{C_{q+1}}{D_{q+1}} & \xrightarrow{\bar{\partial}_{q+1}} & \frac{C_q}{D_q} & \xrightarrow{\bar{\partial}_q} & \frac{C_{q-1}}{D_{q-1}} \longrightarrow \cdots \\
& & \downarrow \bar{\phi}_{q+1} & & \downarrow \bar{\phi}_q & & \downarrow \bar{\phi}_{q-1} \\
\cdots & \longrightarrow & \frac{C'_{q+1}}{D'_{q+1}} & \xrightarrow{\bar{\partial}'_{q+1}} & \frac{C'_q}{D'_q} & \xrightarrow{\bar{\partial}'_q} & \frac{C'_{q-1}}{D'_{q-1}} \longrightarrow \cdots
\end{array}$$

Diagrama IV

Vamos mostrar que este é um diagrama comutativo, ou seja,  $\bar{\partial}'_q \circ \bar{\phi}_q = \bar{\phi}_{q-1} \circ \bar{\partial}_q$ . Assim, para todo  $c + D_q \in \frac{C_q}{D_q}$ , temos que  $(\bar{\partial}'_q \circ \bar{\phi}_q)(c + D_q) = \bar{\partial}'_q(\phi_q(c) + D'_q) = \partial'_q(\phi_q(c) + D'_{q-1})$ . Usando a comutatividade do *Diagrama I*,  $\partial'_q(\phi_q(c) + D'_{q-1}) = \phi_{q-1}(\partial_q(c) + D'_{q-1}) = \bar{\phi}_{q-1}(\partial_q(c) + D_{q-1}) = \bar{\phi}_{q-1}(\bar{\partial}_q(c + D_q))$   $\square$

Como nosso próximo objetivo, vamos verificar que toda aplicação de cadeias induz de modo natural homomorfismos entre grupos de homologia.

Seja  $\phi : C \rightarrow C'$  uma aplicação de cadeias, então:

- i)  $\phi_q(\ker(\partial_q)) \subset \ker(\partial'_q)$ .
- ii)  $\phi_q(\text{Im}(\partial_{q+1})) \subset \text{Im}(\partial'_{q+1})$ .

Vamos demonstrar estas duas afirmações:

i) Seja  $z \in \ker(\partial_q)$ , então  $\partial_q(z) = 0$ . Como  $\phi$  é uma aplicação de cadeias  $\partial'_q \circ \phi_q = \phi_{q-1} \circ \partial_q$ . Dessa forma,  $\partial'_q(\phi_q(z)) = \phi_{q-1}(\partial_q(z)) = \phi_{q-1}(0) = 0$ . Então,  $\phi_q(z) \in \ker(\partial'_q)$ . Assim, fica provado que  $\phi_q(\ker(\partial_q)) \subset \ker(\partial'_q)$ .

ii) Se  $b \in \text{Im}(\partial_{q+1})$ , então  $\exists c \in C_{q+1}$  tal que  $\partial_{q+1}(c) = b$ , então  $\phi_q(b) = \phi_q(\partial_{q+1}(c)) = \partial'_{q+1}(\phi_{q+1}(c))$ . Portanto,  $\phi_q(\text{Im}(\partial_{q+1})) \subset \text{Im}(\partial'_{q+1})$ .

Dos itens i) e ii), decorre a seguinte definição:

**Definição 2.13.** Se  $\phi : C \rightarrow C'$  é uma aplicação de cadeias, o homomorfismo induzido  $\phi_{*q} : H_q(C) \rightarrow H_q(C')$  é definido para todo  $q \in \mathbb{Z}$ , por:  $\phi_{*q}(z + \text{Im}(\partial_{q+1})) = \phi_q(z) + \text{Im}(\partial'_{q+1})$ , para todo  $z + \text{Im}(\partial_{q+1}) \in H_q(C)$ .

Temos que  $\phi_{*q}$  está bem definida:

Consideremos  $c + \text{Im}(\partial_{q+1})$  e  $a + \text{Im}(\partial_{q+1})$  em  $H_q(C)$ , tal que  $c + \text{Im}(\partial_{q+1}) = a + \text{Im}(\partial_{q+1})$ , então  $a - c \in \text{Im}(\partial_{q+1})$ . Isto implica que  $\phi_q(a - c) \in \text{Im}(\partial'_{q+1})$  e então  $\phi_q(a) - \phi_q(c) \in \text{Im}(\partial'_{q+1})$  se, e somente se,  $\phi_q(a) + \text{Im}(\partial'_{q+1}) = \phi_q(c) + \text{Im}(\partial'_{q+1})$ . Assim,  $\phi_{*q}(c + \text{Im}(\partial_{q+1})) = \phi_{*q}(a + \text{Im}(\partial_{q+1}))$ .

Também,  $\phi_{*q}$  é um homomorfismo de grupos:

Considere  $c + \text{Im}(\partial_{q+1})$  e  $a + \text{Im}(\partial_{q+1})$  em  $H_q(C)$ , assim,  $\phi_{*q}((c + \text{Im}(\partial_{q+1})) + (a + \text{Im}(\partial_{q+1}))) = \phi_{*q}((c + a) + \text{Im}(\partial_{q+1})) = \phi_q(c + a) + \text{Im}(\partial'_{q+1}) = (\phi_q(c) + \phi_q(a)) + \text{Im}(\partial'_{q+1}) = (\phi_q(c) + \text{Im}(\partial'_{q+1})) + (\phi_q(a) + \text{Im}(\partial'_{q+1})) = \phi_{*q}(c + \text{Im}(\partial_{q+1})) + \phi_{*q}(a + \text{Im}(\partial_{q+1}))$ .

Exploremos, agora, algumas propriedades referentes a homomorfismos induzidos.

**Propriedade 2.1.** Sejam  $C$  um complexo de cadeias e  $\phi : C \rightarrow C$ , a identidade em  $C$ . Então  $\phi_{*q}$  é o homomorfismo identidade em  $H_q(C)$ .

*Demonstração.* Para todo  $q \in \mathbb{Z}$  e  $c + \text{Im}(\partial_{q+1}) \in H_q(C)$ , temos que  $\phi_{*q}(c + \text{Im}(\partial_{q+1})) = \phi_q(c) + \text{Im}(\partial'_{q+1}) = c + \text{Im}(\partial'_{q+1})$ . Portanto,  $\phi_{*q}$  é o homomorfismo identidade  $H_q(C)$ .  $\square$

**Propriedade 2.2.** Sejam  $C$  e  $C'$  complexos de cadeias. Se  $\phi : C \rightarrow C'$  é a aplicação nula, então  $\phi_{*q} : H_q(C) \rightarrow H_q(C')$  é o homomorfismo nulo.

*Demonstração.* Se  $c + \text{Im}(\partial_{q+1}) \in H_q(C)$ , então  $\phi_{*q}(c + \text{Im}(\partial_{q+1})) = \phi_q(c) + \text{Im}(\partial'_{q+1}) = e + \text{Im}(\partial'_{q+1}) = \text{Im}(\partial'_{q+1})$ . Logo,  $\phi_{*q}$  é o homomorfismo nulo de  $H_q(C)$  em  $H_q(C')$ .  $\square$

**Propriedade 2.3.** Se  $\phi : C \rightarrow C'$  e  $\psi : C' \rightarrow C''$  são aplicações de cadeias, então  $(\psi_q \circ \phi_q)_* = \psi_{*q} \circ \phi_{*q}$ , para todo  $q \in \mathbb{Z}$ .

*Demonstração.* Para todo  $c + \text{Im}(\partial_{q+1}) \in H_q(C)$ , temos que  $(\psi_q \circ \phi_q)_*(c + \text{Im}(\partial_{q+1})) = (\psi_q \circ \phi_q)(c) + \text{Im}(\partial''_{q+1}) = \psi_q(\phi_q(c)) + \text{Im}(\partial''_{q+1}) = \psi_{*q}(\phi_q(c) + \text{Im}(\partial'_{q+1})) = \psi_{*q} \circ \phi_{*q}(c + \text{Im}(\partial_{q+1}))$ . Portanto,  $(\psi_q \circ \phi_q)_* = \psi_{*q} \circ \phi_{*q}$ .  $\square$

## 2.4 Sequência Exata de Homologia

Dados um complexo de cadeias  $C = (C_q, \partial_q)$  e um subcomplexo  $D = (D_q, \partial'_q)$ , vamos definir uma família de homomorfismos  $\Delta_q : H_q\left(\frac{C}{D}\right) \rightarrow H_{q-1}(D)$  denominado operador bordo na homologia, da seguinte forma: para todo elemento  $(c + D_q) + \text{Im}(\bar{\partial}_{q+1}) \in H_q\left(\frac{C}{D}\right)$ , com  $c + D_q \in \ker(\bar{\partial}_q)$ , temos que  $\Delta_q((c + D_q) + \text{Im}(\bar{\partial}_{q+1})) = \partial_q(c) + \text{Im}(\partial'_q)$ .

Vamos mostrar que  $\Delta_q$  está bem definido:

Consideremos  $(a + D_q) + \text{Im}(\bar{\partial}_{q+1})$  e  $(b + D_q) + \text{Im}(\bar{\partial}_{q+1})$  pertencentes a  $H_q\left(\frac{C}{D}\right)$ , tais que  $(a + D_q) + \text{Im}(\bar{\partial}_{q+1}) = (b + D_q) + \text{Im}(\bar{\partial}_{q+1})$ . Isto implica que  $(b + D_q) - (a + D_q) \in \text{Im}(\bar{\partial}_{q+1})$  e portanto  $(b - a) + D_q \in \text{Im}(\bar{\partial}_{q+1})$ . Então existe  $c + D_{q+1} \in$

$\frac{C_{q+1}}{D_{q+1}}$  tal que  $\bar{\partial}_{q+1}(c + D_{q+1}) = (b - a) + D_q$ . Assim,  $\partial_{q+1}(c) + D_q = (b - a) + D_q$  e, portanto,  $(b - a) - \partial_{q+1}(c) \in D_q$ . Logo,  $(b - a) - \partial_{q+1}(c) = d$ , para  $d \in D_q$  e  $\partial'_q(d) = \partial_q(d) = \partial_q((b - a) - \partial_{q+1}(c)) = \partial_q(b - a) - \partial_q(\partial_{q+1}(c)) = \partial_q(b - a) - 0 = \partial_q(b - a) = \partial_q(b) - \partial_q(a) \in \text{Im}(\partial'_q)$ , e assim  $\partial_q(a) + \text{Im}(\partial'_q) = \partial_q(b) + \text{Im}(\partial'_q)$ . Portanto,  $\Delta_q((a + D_q) + \text{Im}(\bar{\partial}_{q+1})) = \Delta_q((b + D_q) + \text{Im}(\bar{\partial}_{q+1}))$ .

Também,  $\Delta_q$  é um homomorfismo de grupos:

Se  $(a + D_q) + \text{Im}(\bar{\partial}_{q+1})$  e  $(b + D_q) + \text{Im}(\bar{\partial}_{q+1})$  pertencem a  $H_q\left(\frac{C}{D}\right)$ , então,  $\Delta_q((a + D_q) + \text{Im}(\bar{\partial}_{q+1}) + (b + D_q) + \text{Im}(\bar{\partial}_{q+1})) = \Delta_q((a + D_q) + (b + D_q) + \text{Im}(\bar{\partial}_{q+1})) = \Delta_q(((a + b) + D_q) + \text{Im}(\bar{\partial}_{q+1})) = \partial_q(a + b) + \text{Im}(\partial'_q) = (\partial_q(a) + \partial_q(b)) + \text{Im}(\partial'_q) = \partial_q(a) + \text{Im}(\partial'_q) + \partial_q(b) + \text{Im}(\partial'_q) = \Delta_q((a + D_q) + \text{Im}(\bar{\partial}_{q+1})) + \Delta_q((b + D_q) + \text{Im}(\bar{\partial}_{q+1}))$ .

Vamos, agora, ao conjunto de três lemas auxiliares, que ajudarão a demonstrar o resultado principal desta seção.

**Lema 2.1.** *A sequência  $H_q(D) \xrightarrow{i_{*q}} H_q(C) \xrightarrow{j_{*q}} H_q\left(\frac{C}{D}\right)$  é exata no grupo de homologia  $H_q(C)$ , para todo  $q \in \mathbb{Z}$ .*

*Demonstração.* Devemos mostrar que  $\ker(j_{*q}) = \text{Im}(i_{*q})$ .

i)  $\text{Im}(i_{*q}) \subset \ker(j_{*q})$ .

Para todo  $a \in D_q$ , temos que  $(j_q \circ i_q)(a) = j_q(i_q(a)) = j_q(a) = a + D_q = D_q$ . Logo,  $(j_q \circ i_q)$  é o homomorfismo nulo. Então  $j_{*q} \circ i_{*q} = (j_q \circ i_q)_*$  é o homomorfismo nulo. Portanto,  $\text{Im}(i_{*q}) \subset \ker(j_{*q})$ .

ii)  $\ker(j_{*q}) \subset \text{Im}(i_{*q})$ .

Seja  $u \in \ker(j_{*q})$ , com  $u = z + \text{Im}(\partial_{q+1})$ , com  $z \in \ker(\partial_q)$ . Então  $j_{*q}(u) = j_{*q}(z + \text{Im}(\partial_{q+1})) = \text{Im}(\bar{\partial}_{q+1})$ . Logo  $j_q(z) + \text{Im}(\bar{\partial}_{q+1}) = \text{Im}(\bar{\partial}_{q+1})$ , e, portanto,  $j_q z = (z + D_q) \in \text{Im}(\bar{\partial}_{q+1})$ .

Então existe  $(c + D_{q+1}) \in \frac{C_{q+1}}{D_{q+1}}$  tal que  $\bar{\partial}_{q+1}(c + D_{q+1}) = z + D_q$ . Então  $\partial_{q+1}(c) + D_q = z + D_q$  e portanto  $z - \partial_{q+1}(c) \in D_q$ . Assim,  $z - \partial_{q+1}(c) = y$ , para  $y \in D_q$ .

Afirmamos que  $y$  é um  $q$ -ciclo de  $D_q$ , ou seja,  $y \in \ker(\partial'_q)$ . De fato, se  $y \in D_q$  então  $\partial'_q(y) = \partial_q(y) = \partial_q(z - \partial_{q+1}(c)) = \partial_q(z) - \partial_q(\partial_{q+1}(c)) = 0$ .

Como  $D_q \subset C_q$  podemos olhar  $y$  no complexo  $C$ , dessa forma, como  $y = z - \partial_{q+1}(c)$ , então  $z - y = \partial_{q+1}(c)$  e portanto  $z - y \in \text{Im}(\partial_{q+1})$ . Então  $y + \text{Im}(\partial_{q+1}) = z + \text{Im}(\partial_{q+1})$ .

Falta encontrar  $w \in H_q(D)$  tal que  $j_{*q}(w) = u$ . Para isso, considere  $w = y + \text{Im}(\partial_{q+1})$ . Temos que  $i_{*q}(w) = i_{*q}(y + \text{Im}(\partial_{q+1})) = i_q(y) + \text{Im}(\partial_{q+1}) = y + \text{Im}(\partial_{q+1}) = z + \text{Im}(\partial_{q+1}) = u$ . Portanto,  $\ker(j_{*q}) \subset \text{Im}(i_{*q})$ .  $\square$

**Lema 2.2.** A sequência  $H_{q+1} \left( \frac{C}{D} \right) \xrightarrow{\Delta_{q+1}} H_q(D) \xrightarrow{i_{*q}} H_q(C)$  é exata no grupo de homologia  $H_q(D)$ , para todo  $q \in \mathbb{Z}$ .

*Demonstração.* Devemos mostrar que  $Im(\Delta_{q+1}) = ker(i_{*q})$ .

i)  $Im(\Delta_{q+1}) \subset ker(i_{*q})$ .

Seja  $w \in H_{q+1} \left( \frac{C}{D} \right)$ , com  $w = (c + D_{q+1}) + Im(\bar{\partial}_{q+2})$ , onde  $(c + D_{q+1}) \in ker(\bar{\partial}_{q+1})$ . Então  $\bar{\partial}_{q+1}(c + D_{q+1}) = D_q$ , e portanto  $\partial_{q+1}(c) + D_q = D_q$ , o que implica que  $\partial_{q+1}(c) \in D_q$ . Deste modo,  $\Delta_{q+1}(w) = \Delta_{q+1}((c + D_{q+1}) + Im(\bar{\partial}_{q+2})) = \partial_{q+1}(c) + Im(\partial'_{q+1})$ . Assim,  $i_{*q}(\Delta_{q+1}(w)) = i_{*q}(\partial_{q+1}(c) + Im(\partial'_{q+1})) = \partial_{q+1}(c) + Im(\partial_{q+1}) = Im(\partial_{q+1})$ . Portanto,  $Im(\Delta_{q+1}) \subset ker(i_{*q})$ .

**Observação 2.5.** Note que podemos aplicar  $i_{*q}$  em  $\partial_{q+1}(c) + Im(\partial'_{q+1})$ , pois  $\partial_{q+1}(c) \in ker(\partial'_q)$ . De fato,  $\partial'_q(\partial_{q+1}(c)) = \partial_q(\partial_{q+1}(c)) = 0$ , pois  $C = (C_q, \partial_q)$  é um complexo de cadeias. Portanto,  $\partial_{q+1}(c) \in ker(\partial'_q)$ .

ii)  $ker(i_{*q}) \subset Im(\Delta_{q+1})$ .

Seja  $x \in ker(i_{*q})$ , com  $x = z + Im(\partial'_{q+1})$ , onde  $z \in ker(\partial'_q)$ . Então  $i_{*q}(x) = i_{*q}(z + Im(\partial'_{q+1})) = i_q(z) + Im(\partial_{q+1}) = z + Im(\partial_{q+1}) = Im(\partial_{q+1})$ . Então  $z \in Im(\partial_{q+1})$ , isto é,  $\exists c \in C_{q+1}$  tal que  $\partial_{q+1}(c) = z$ . Dessa forma, tomando  $y = (c + D_{q+1}) + Im(\bar{\partial}_{q+2}) \in H_{q+1} \left( \frac{C}{D} \right)$ , temos que  $\Delta_{q+1}(y) = \Delta_{q+1}((c + D_{q+1}) + Im(\bar{\partial}_{q+2})) = \partial_{q+1}(c) + Im(\partial'_{q+1}) = z + Im(\partial'_{q+1}) = x$ . Logo,  $x \in Im(\Delta_{q+1})$ . Portanto,  $ker(i_{*q}) \subset Im(\Delta_{q+1})$ .  $\square$

**Lema 2.3.** A sequência  $H_q(C) \xrightarrow{j_{*q}} H_q \left( \frac{C}{D} \right) \xrightarrow{\Delta_q} H_{q-1}(D)$  é exata no grupo de homologia  $H_q \left( \frac{C}{D} \right)$ , para todo  $q \in \mathbb{Z}$ .

*Demonstração.* Devemos mostrar que  $Im(j_{*q}) = ker(\Delta_q)$ .

i)  $Im(j_{*q}) \subset ker(\Delta_q)$ .

Seja  $y \in H_q(C)$ , com  $y = z + Im(\partial_{q+1})$ , onde  $z \in ker(\partial_q)$ . Então  $(\Delta_q \circ j_{*q})(y) = \Delta_q(j_{*q}(y)) = \Delta_q(j_{*q}(z + Im(\partial_{q+1}))) = \Delta_q((z + D_q) + Im(\bar{\partial}_{q+1})) = \partial_q(z) + Im(\partial'_q) = Im(\partial'_q)$ . Logo,  $\Delta_q \circ j_{*q}$  é o homomorfismo nulo e, portanto,  $Im(j_{*q}) \subset ker(\Delta_q)$ .

ii)  $ker(\Delta_q) \subset Im(j_{*q})$ .

Seja  $u \in H_q \left( \frac{C}{D} \right)$ , com  $u = (c + D_q) + Im(\bar{\partial}_{q+1})$ , com  $c + D_q \in ker(\bar{\partial}_q)$ . Então  $\Delta_q(u) = \Delta_q((c + D_q) + Im(\bar{\partial}_{q+1})) = Im(\partial'_q)$  se, e somente se,  $\partial_q(c) + Im(\partial'_q) = Im(\partial'_q)$  se, e somente se,  $\partial_q(c) \in Im(\partial'_q) \subset D_{q-1}$ .

Assim, existe  $a \in D_q \subset C_q$  tal que  $\partial_q(c) = \partial'_q(a)$ . Se  $z = c - a \in C_q$ , então  $\partial_q(z) = \partial_q(c - a) = \partial_q(c) - \partial_q(a) = \partial_q(c) - \partial'_q(c) = 0$ . Ou seja,  $z$  é um ciclo de  $C$  e  $j_{*q}(z + \text{Im}(\partial_{q+1})) = (z + D_q) + \text{Im}(\bar{\partial}_{q+1}) = (c - a + D_q) + \text{Im}(\bar{\partial}_{q+1}) = (c + D_q) + \text{Im}(\bar{\partial}_{q+1}) = u$ , visto que  $a \in D_q$ . Portanto,  $\ker(\Delta_q) \subset \text{Im}(j_{*q})$ .  $\square$

**Teorema 2.2.** À sequência exata curta de complexos  $0 \rightarrow D \xrightarrow{i} C \xrightarrow{j} \frac{C}{D} \rightarrow 0$ , associa-se a seguinte sequência exata infinita denominada a sequência de homologia do par  $(C, D)$ :  $\cdots \rightarrow H_{q+1}\left(\frac{C}{D}\right) \xrightarrow{\Delta_{q+1}} H_q(D) \xrightarrow{i_{*q}} H_q(C) \xrightarrow{j_{*q}} H_q\left(\frac{C}{D}\right) \xrightarrow{\Delta_q} H_{q-1}(D) \rightarrow \cdots$

*Demonstração.* Aplicando os lemas 2.1, 2.2 e 2.3 aos trechos

$$H_q(D) \xrightarrow{i_{*q}} H_q(C) \xrightarrow{j_{*q}} H_q\left(\frac{C}{D}\right),$$

$$H_{q+1}\left(\frac{C}{D}\right) \xrightarrow{\Delta_{q+1}} H_q(D) \xrightarrow{i_{*q}} H_q(C)$$

e

$$H_q(C) \xrightarrow{j_{*q}} H_q\left(\frac{C}{D}\right) \xrightarrow{\Delta_q} H_{q-1}(D)$$

da sequência de homologia do par  $(C, D)$ , respectivamente, temos o resultado, para todo  $q \in \mathbb{Z}$ .  $\square$

Verificaremos, a seguir, a *naturalidade da sequência de homologia do par  $(C, D)$* .

Considere uma aplicação de cadeias  $\phi : (C, D) \rightarrow (C', D')$  entre os respectivos pares de complexos. Conforme vimos no exemplo 2.3, a aplicação  $\bar{\phi}$  obtida de  $\phi$ , por passagem ao quociente, é uma aplicação de cadeias. Isto nos garante que o diagrama abaixo é comutativo:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & D & \xrightarrow{i} & C & \xrightarrow{j} & \frac{C}{D} & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow \phi' & & \downarrow \phi & & \downarrow \bar{\phi} & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & D' & \xrightarrow{i'} & C' & \xrightarrow{j'} & \frac{C'}{D'} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Diagrama V

Dessa forma, passando às respectivas sequências de homologia dos pares  $(C, D)$  e  $(C', D')$ , obtemos o diagrama infinito:



$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \longrightarrow & H_q(D) & \xrightarrow{i_{*q}} & H_q(C) & \xrightarrow{j_{*q}} & H_q\left(\frac{C}{D}\right) & \xrightarrow{\Delta_q} & H_{q-1}(D) & \longrightarrow & \cdots \\
& & \downarrow \phi'_{*q} & & \downarrow \phi_{*q} & & \downarrow \bar{\phi}_{*q} & & \downarrow \phi'_{*(q-1)} & & \\
\cdots & \longrightarrow & H_q(D') & \xrightarrow{i'_{*q}} & H_q(C') & \xrightarrow{j'_{*q}} & H_q\left(\frac{C'}{D'}\right) & \xrightarrow{\Delta'_q} & H_{q-1}(D') & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

Diagrama VI

**Teorema 2.3.** *O Diagrama VI é comutativo.*

*Demonstração.* Precisamos mostrar que os quadrados (1), (2) e (3), no *Diagrama VI*, são comutativos.

Pela comutatividade do *Diagrama V*, temos que  $i'_q \circ \phi'_q = \phi_q \circ i_q$ . Então  $(i'_q \circ \phi'_q)_* = (\phi_q \circ i_q)_*$ . Logo, pela Propriedade 2.3,  $i'_{*q} \circ \phi'_{*q} = \phi_{*q} \circ i_{*q}$ . Isto prova a comutatividade do quadrado (1).

Analogamente,  $j'_{*q} \circ \phi_{*q} = \bar{\phi}_{*q} \circ j_{*q}$ . Assim, o quadrado (2) também é comutativo.

Agora, se  $(c+D_q) + \text{Im}(\bar{\partial}_{q+1}) \in H_q\left(\frac{C}{D}\right)$ , então  $(\phi'_{*(q-1)} \circ \Delta_q)((c+D_q) + \text{Im}(\bar{\partial}_{q+1})) = \phi'_{*(q-1)}(\partial_q(c) + \text{Im}(\partial'_q)) = \phi'_{q-1}(\partial_q(c)) + \text{Im}(\Delta_q) = \Delta_q(\phi_q(c)) + \text{Im}(\Delta_q) = \Delta'_q((\phi_q(c) + D'_q) + \text{Im}(\bar{\Delta}_{q+1})) = (\Delta'_q \circ \bar{\phi}_{*q})((c+D_q) + \text{Im}(\bar{\partial}_{q+1}))$ .

Portanto,  $\Delta'_q \circ \bar{\phi}_{*q} = \phi'_{*(q-1)} \circ \Delta_q$  e podemos dizer que o quadrado (3) é comutativo.  $\square$

## 2.5 Lema dos Cinco

A seguir, provaremos dois lemas auxiliares, para provar o Lema dos Cinco.

Sejam  $A_i$  e  $B_i$  grupos abelianos e  $\alpha_j, \beta_j$  e  $\phi_i$  homomorfismos, para  $0 \leq i \leq 4$  e  $0 \leq j \leq 3$ . Considere, como hipótese para os lemas, a seguir, o *Diagrama VII* e as seguintes afirmações:

- i) O *Diagrama VII* é comutativo;
- ii) As seqüências horizontais, do *Diagrama VII*, são exatas.

$$\begin{array}{ccccccccc}
A_0 & \xrightarrow{\alpha_0} & A_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & A_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & A_3 & \xrightarrow{\alpha_3} & A_4 \\
\downarrow \phi_0 & & \downarrow \phi_1 & & \downarrow \phi_2 & & \downarrow \phi_3 & & \downarrow \phi_4 \\
B_0 & \xrightarrow{\beta_0} & B_1 & \xrightarrow{\beta_1} & B_2 & \xrightarrow{\beta_2} & B_3 & \xrightarrow{\beta_3} & B_4
\end{array}$$

Diagrama VII

**Lema 2.4.** Se  $\phi_0$  é um epimorfismo e  $\phi_3$  é um monomorfismo, então  $\ker(\phi_2) = \alpha_1(\ker(\phi_1))$ .

*Demonstração.* i)  $\ker(\phi_2) \subset \alpha_1(\ker(\phi_1))$ .

Se  $x \in \ker(\phi_2)$  então  $\phi_2(x) = 0$ . Pela comutatividade do quadrado (3), no Diagrama VII, temos que  $0 = (\beta_2 \circ \phi_2)(x) = (\phi_3 \circ \alpha_2)(x)$  e sendo  $\phi_3$  um monomorfismo, concluímos que  $\alpha_2(x) = 0$  e portanto  $x \in \ker(\alpha_2)$ . Logo  $\ker(\phi_2) \subset \ker(\alpha_2)$ .

Usando a hipótese de que a sequência dos  $\alpha_i$  é exata, temos que  $\ker(\alpha_2) = \text{Im}(\alpha_1)$ . Logo existe  $y \in A_1$  tal que  $\alpha_1(y) = x$ . Ainda pela comutatividade do Diagrama VII, temos que  $(\beta_1 \circ \phi_1)(y) = (\phi_2 \circ \alpha_1)(y) = \phi_2(x) = 0$ . Logo  $\phi_1(y) \in \ker(\beta_1)$ .

Como a sequência dos  $\beta_i$  também é exata,  $\ker(\beta_1) = \text{Im}(\beta_0)$  e assim existe  $z \in B_0$  tal que  $\beta_0(z) = \phi_1(y)$  e como  $\phi_0$  é um epimorfismo,  $\exists w \in A_0$  tal que  $\phi_0(w) = z$ . Assim,  $(\phi_1 \circ \alpha_0)(w) = (\beta_0 \circ \phi_0)(w) = \beta_0(z) = \phi_1(y)$ , e portanto  $(\phi_1 \circ \alpha_0)(w) = \phi_1(y)$ . Logo  $(\phi_1 \circ \alpha_0)(w) - \phi_1(y) = 0$  e então  $\phi_1(\alpha_0(w) - y) = 0$ , ou seja,  $\alpha_0(w) - y \in \ker(\phi_1)$ .

Dessa forma, como  $\alpha_1(y - \alpha_0(w)) = \alpha_1(y) - \alpha_1(\alpha_0(w)) = \alpha_1(y) = x$ ,  $x \in \alpha_1(\ker(\phi_1))$ . Portanto,  $\ker(\phi_2) \subset \alpha_1(\ker(\phi_1))$ .

ii)  $\alpha_1(\ker(\phi_1)) \subset \ker(\phi_2)$ .

Se  $x \in \ker(\phi_1)$  então  $\phi_1(x) = 0$ . Como o quadrado (2), no Diagrama VII, é comutativo, temos que  $0 = (\beta_1 \circ \phi_1)(x) = (\phi_2 \circ \alpha_1)(x)$  e então  $\alpha_1(x) \in \ker(\phi_2)$ . Portanto,  $\alpha_1(\ker(\phi_1)) \subset \ker(\phi_2)$ .  $\square$

**Lema 2.5.** Se  $\phi_1$  é um epimorfismo e  $\phi_4$  é um monomorfismo, então  $\beta_2^{-1}(\text{Im}(\phi_3)) = \text{Im}(\phi_2)$ .

*Demonstração.* i)  $\beta_2^{-1}(\text{Im}(\phi_3)) \subset \text{Im}(\phi_2)$ .

Se  $x \in \beta_2^{-1}(\text{Im}(\phi_3))$  então  $\beta_2(x) \in \text{Im}(\phi_3)$ , e assim existe  $y \in A_3$  tal que  $\phi_3(y) = \beta_2(x)$ .

Usando a comutatividade do quadrado (4), no Diagrama VII, e o fato de que a sequência dos  $\beta_i$  é exata, temos que  $0 = (\beta_3 \circ \beta_2)(x) = (\beta_3 \circ \phi_3)(y) = (\phi_4 \circ \alpha_3)(y)$ . Mas, como por hipótese,  $\phi_4$  é um monomorfismo, então  $\alpha_3(y) = 0$  e  $y \in \ker(\alpha_3) = \text{Im}(\alpha_2)$ , desde que a sequência dos  $\alpha_i$  é exata. Então existe  $z \in A_2$  tal que  $\alpha_2(z) = y$ .

Novamente, pela comutatividade do quadrado (3), no Diagrama VII,  $\phi_3(y) = (\phi_3 \circ \alpha_2)(z) = (\beta_2 \circ \phi_2)(z)$  e como  $\phi_3(y) = \beta_2(x)$ , temos que  $\beta_2(x) = (\beta_2 \circ \phi_2)(z)$  e portanto  $\beta_2(x) - (\beta_2 \circ \phi_2)(z) = 0$ . Assim  $\beta_2(x - \phi_2(z)) = 0$ , e daí  $x - \phi_2(z) \in \ker(\beta_2) = \text{Im}(\beta_1)$ , desde que a sequência dos  $\beta_i$  é exata. Então existe  $w \in B_1$  tal que  $\beta_1(w) = x - \phi_2(z)$ .

Como por hipótese,  $\phi_1$  é um epimorfismo, existe  $u \in A_1$  tal que  $\phi_1(u) = w$  e pela comutatividade do quadrado (2), no *Diagrama VII*, temos que  $x - \phi_2(z) = \beta_1(w) = (\beta_1 \circ \phi_1)(u) = (\phi_2 \circ \alpha_1)(u)$ . Logo,  $x = (\phi_2 \circ \alpha_1)(u) + \phi_2(z) = \phi_2(\alpha_1(u) + z)$  e portanto  $x \in \text{Im}(\phi_2)$ . Assim,  $\beta_2^{-1}(\text{Im}(\phi_3)) \subset \text{Im}(\phi_2)$ .

ii)  $\text{Im}(\phi_2) \subset \beta_2^{-1}(\text{Im}(\phi_3))$ .

Se  $x \in \text{Im}(\phi_2)$ , temos que existe  $y \in A_2$  tal que  $\phi_2(y) = x$ . Pela comutatividade do quadrado (3), no *Diagrama VII*, concluímos que  $\beta_2(x) = (\beta_2 \circ \phi_2)(y) = (\phi_3 \circ \alpha_2)(y)$  e então  $\beta_2(x) \in \text{Im}(\phi_3)$ , ou seja,  $x \in \beta_2^{-1}(\text{Im}(\phi_3))$ .  $\square$

**Lema 2.6** (Lema dos Cinco). *Sejam  $A_i$  e  $B_i$  grupos abelianos e  $\alpha_j, \beta_j$  e  $\phi_i$  homomorfismos, para  $0 \leq i \leq 4$  e  $0 \leq j \leq 3$ . Suponha que o diagrama*

$$\begin{array}{ccccccccc} A_0 & \xrightarrow{\alpha_0} & A_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & A_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & A_3 & \xrightarrow{\alpha_3} & A_4 \\ \downarrow \phi_0 & & \downarrow \phi_1 & & \downarrow \phi_2 & & \downarrow \phi_3 & & \downarrow \phi_4 \\ B_0 & \xrightarrow{\beta_0} & B_1 & \xrightarrow{\beta_1} & B_2 & \xrightarrow{\beta_2} & B_3 & \xrightarrow{\beta_3} & B_4 \end{array}$$

é comutativo e que as sequências horizontais do diagrama são exatas. Se  $\phi_0, \phi_1, \phi_3$  e  $\phi_4$  são isomorfismos, então  $\phi_2$  também é um isomorfismo.

*Demonstração.* Como  $\phi_0, \phi_1, \phi_3$  e  $\phi_4$  são isomorfismos, estas aplicações estão sob as hipóteses dos dois lemas anteriores. Assim, podemos aplicá-los a esta situação. Observe que  $\ker(\phi_1) = 0$  e então pelo lema 2.4,  $\ker(\phi_2) = \alpha_1(\ker(\phi_1)) = \alpha_1(0) = 0$ . Logo  $\phi_2$  é um monomorfismo. Sendo  $\phi_3$  um isomorfismo,  $\text{Im}(\phi_3) = B_3$  e, pelo lema 2.5,  $\text{Im}(\phi_2) = \beta_2^{-1}(\text{Im}(\phi_3)) = \beta_2^{-1}(B_3) = B_2$ . Logo,  $\phi_2$  é um epimorfismo. Portanto,  $\phi_2$  é um isomorfismo.  $\square$

Como aplicação do Lema dos Cinco, veremos o

**Exemplo 2.4.** Seja  $\phi : (C, D) \rightarrow (C', D')$  uma aplicação de cadeias entre pares de complexos. Como vimos, anteriormente,  $\phi$  dá origem a um diagrama infinito, ligando duas sequências exatas de homologia:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_{q+1} \left( \frac{C}{D} \right) & \xrightarrow{\Delta_{q+1}} & H_q(D) & \xrightarrow{i_{*q}} & H_q(C) & \xrightarrow{j_{*q}} & H_q \left( \frac{C}{D} \right) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow \bar{\phi}_{*(q+1)} & & \downarrow \phi'_{*q} & & \downarrow \phi_{*q} & & \downarrow \bar{\phi}_{*q} & & \\ \cdots & \longrightarrow & H_{q+1} \left( \frac{C'}{D'} \right) & \xrightarrow{\Delta'_{q+1}} & H_q(D') & \xrightarrow{i'_{*q}} & H_q(C') & \xrightarrow{j'_{*q}} & H_q \left( \frac{C'}{D'} \right) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Diagrama VIII

Então, se para quaisquer duas, das três famílias de homomorfismos  $\bar{\phi}_*$ ,  $\phi'_*$  e  $\phi_*$ , tivermos que estes são isomorfismos, para todo  $q \in \mathbb{Z}$ , o mesmo valerá para os demais.

*Demonstração.* O Lema dos Cinco poderá ser aplicado diretamente a este caso. De fato, suponha, primeiramente, que  $\bar{\phi}_*$  e  $\phi'_*$  são isomorfismos, para todo  $q \in \mathbb{Z}$ . Então, pelo lema dos cinco, sendo  $\bar{\phi}_{*(q+1)}$ ,  $\phi'_{*q}$ ,  $\bar{\phi}_{*q}$ ,  $\phi'_{*(q-1)}$  isomorfismos, temos que  $\phi_{*q}$ , também o será para todo  $q \in \mathbb{Z}$ .

Analogamente, se escolhermos  $\phi'_*$  e  $\phi_*$  como isomorfismos, provamos que  $\bar{\phi}_*$  também o será para todo  $q \in \mathbb{Z}$ . Ainda, se  $\bar{\phi}_*$  e  $\phi_*$  forem isomorfismos, provamos que  $\phi'_*$  também o será, demonstrando o resultado.  $\square$

## 3 Homologia Singular

Após os requisitos iniciais, iniciaremos estudos referentes à Homologia Singular. Como objetivo principal, mostraremos que esta satisfaz os Axiomas de Eilenberg-Steenrod e, portanto, é uma Teoria de Homologia.

### 3.1 Cadeias singulares e grupos de homologia singular

**Definição 3.1.** O  $q$ -simplexo padrão  $\Delta_q$  é definido como o seguinte subespaço de  $\mathbb{R}^{q+1}$ :

$$\Delta_q = \{x = (x_0, x_1, x_2, \dots, x_q) \in \mathbb{R}^{q+1} \mid \sum_{i=0}^q x_i = 1, x_i \geq 0, i = 0, 1, \dots, q\}$$

Os pontos  $P_0 = (1, 0, 0, \dots, 0)$ ,  $P_1 = (0, 1, 0, 0, \dots, 0)$ , ...,  $P_q = (0, 0, \dots, 0, 1)$  de  $\mathbb{R}^{q+1}$  são chamados vértices de  $\Delta_q$ .

Usaremos a notação  $\Delta_q = |P_0 P_1 \dots P_q|$  para indicar o simplexo gerado pelos vértices  $P_0, P_1, \dots, P_q$  de  $\mathbb{R}^{q+1}$ . Observe que  $\Delta_0 \subset \Delta_1 \subset \Delta_2 \subset \Delta_3 \subset \dots \subset \Delta_q$ .

**Exemplo 3.1.** Geometricamente temos:

- i)  $\Delta_0 = |P_0|$  é um ponto em  $\mathbb{R}$ ;
  - ii)  $\Delta_1 = |P_0 P_1|$  é um intervalo de reta em  $\mathbb{R}^2$ ;
  - iii)  $\Delta_2 = |P_0 P_1 P_2|$  é uma região triangular em  $\mathbb{R}^3$ ;
  - iv)  $\Delta_3 = |P_0 P_1 P_2 P_3|$  é uma região tetraédrica em  $\mathbb{R}^4$ ;
- e assim por diante.

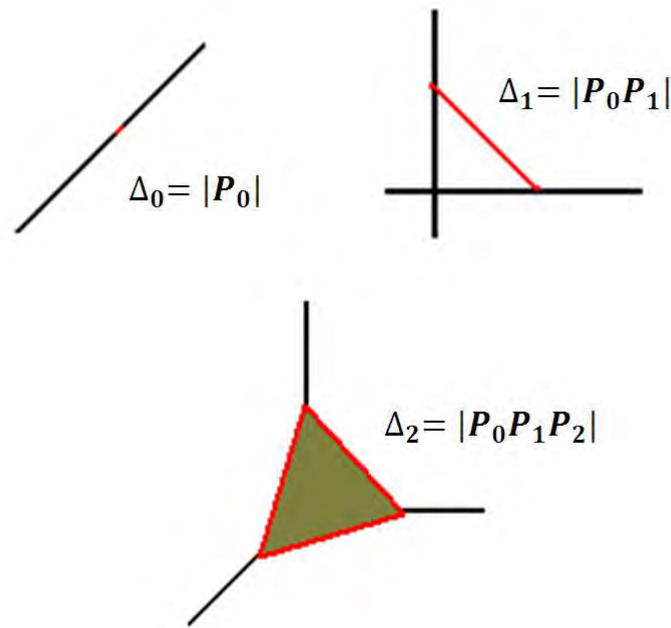


Figura 3.1:  $q$ -simplexos padrão para  $q = 1, 2, 3$ .

**Definição 3.2.**

i) Dizemos que um ponto  $x = \sum_{i=0}^q \lambda_i P_i \in \Delta_q$  é um ponto interno de  $\Delta_q$  se  $\lambda_i > 0$  para todo  $i \in \{0, 1, \dots, q\}$ .

ii) Dizemos que um ponto  $x = \sum_{i=0}^q \lambda_i P_i \in \Delta_q$  é um ponto do bordo de  $\Delta_q$  se  $\lambda_i = 0$  para algum  $i \in \{0, 1, \dots, q\}$ .

**Exemplo 3.2.** Observando a figura 3.1, temos que:

i)  $\Delta_1 = |P_0P_1|$  tem como pontos de bordo  $P_0$  e  $P_1$  e os pontos que estão sobre o segmento aberto, que liga  $P_0$  e  $P_1$  são os pontos interiores de  $\Delta_1$ .

ii)  $\Delta_2 = |P_0P_1P_2|$  tem como bordo os segmentos de reta  $\overline{P_0P_1}$ ,  $\overline{P_1P_2}$  e  $\overline{P_2P_0}$  e os pontos que não estão sobre os segmento citados, são os pontos interiores de  $\Delta_2$ .

**Definição 3.3.** Seja  $X$  um espaço topológico qualquer. Chamamos de  $q$ -simplexo singular de  $X$  a uma aplicação contínua  $T : \Delta_q \rightarrow X$ . Denotaremos o conjunto dos  $q$ -simplexos de  $X$  por  $C(\Delta_q, X)$ .

**Definição 3.4.** Dado um  $q$ -simplexo singular de  $X$ ,  $T : \Delta_q \rightarrow X$ , a imagem  $T(\Delta_q) \subset X$  é chamada de suporte do simplexo singular  $T$ .

**Definição 3.5.** Para cada  $q \geq 0$ , seja  $C_q(X)$  o grupo abeliano livre gerado pelo conjunto dos  $q$ -simplexos singulares,  $C(\Delta_q, X)$ , do espaço topológico  $X$ . Os elementos de  $C_q(X)$  são denominados  $q$ -cadeias singulares de  $X$ .

Uma  $q$ -cadeia singular de  $X$  é uma combinação linear finita da forma  $\sum_{j \in J} m_j T_j$  onde  $T_j \in C(\Delta_q, X)$  e  $m_j \in \mathbb{Z}$ .

Define-se a operação adição, em  $C_q(X)$ , por:

$$\sum_{j \in J} m_j T_j + \sum_{j \in J} n_j T_j = \sum_{j \in J} (m_j + n_j) T_j$$

Sabendo que  $C_q(X)$  é um grupo abeliano livre gerado pelo conjunto dos  $q$ -simplexos singulares,  $C(\Delta_q, X)$ , do espaço topológico  $X$ , podemos dizer que:

- i) A adição é associativa;
- ii) A adição é comutativa;
- iii) Temos o elemento neutro dado por:  $\sum_{j \in J} 0 T_j$ ;
- iv) Temos o elemento oposto de  $\sum_{j \in J} m_j T_j$  dado por:  $\sum_{j \in J} (-m_j) T_j$ .

Observe que os 0-simplexos singulares do espaço topológico  $X$  são aplicações contínuas  $T : |P_0| \rightarrow X$  que podem ser identificadas a um ponto  $T(P_0) \in X$ . Dessa forma, um elemento de  $C_0(X)$  é uma combinação linear finita do tipo  $\sum m_i x_i$ , com  $x_i \in X$  e  $m_i \in \mathbb{Z}$ .

**Definição 3.6.** Considere  $T : \Delta_q \rightarrow X$  um  $q$ -simplexo singular do espaço topológico  $X$  e  $g_i^{q-1} : \Delta_{q-1} \rightarrow \Delta_q$  a aplicação linear definida por:

$$g_i^{q-1}(x_0, x_1, x_2, \dots, x_{q-1}) = (x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_{q-1})$$

Definimos a  $i$ -ésima face de  $T$  ao  $(q-1)$ -simplexo como sendo a aplicação  $T^{(i)} = T \circ g_i^{q-1} : \Delta_{q-1} \rightarrow X$  dada por:

$$\begin{aligned} T^{(i)}(x_0, x_1, x_2, \dots, x_{q-1}) &= \\ T \circ g_i^{q-1}(x_0, x_1, x_2, \dots, x_{q-1}) &= \\ T(x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_{q-1}). \end{aligned}$$

**Exemplo 3.3.** Considere  $T : \Delta_2 \rightarrow X$ . Na figura 3.2, mostramos como funciona, geometricamente, a aplicação  $T^{(i)} = T \circ g_i^{q-1}$ , no caso onde  $i = 1$  e  $q = 2$ , ou seja, tem-se  $T^{(1)} = T \circ g_1^{2-1} = T \circ g_1^1$ . De maneira análoga, se fizessemos os casos  $i = 0$  e  $i = 2$ , obteríamos  $T^{(0)} = T \circ g_0^1$  e  $T^{(2)} = T \circ g_2^1$ , respectivamente.

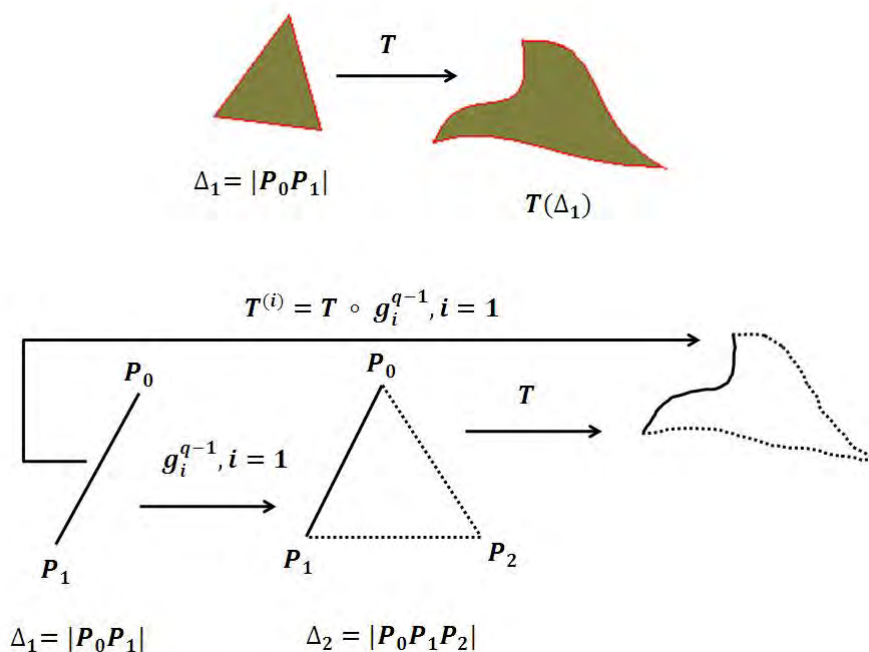


Figura 3.2:  $i$ -ésima face do  $q$ -simplexo singular  $T$ .

Vimos que dado um espaço topológico  $X$ , podemos associar a este um grupo abeliano livre  $C_q(X)$ , gerado pelo conjunto dos  $q$ -simplexos singulares de  $X$ ,  $C(\Delta_q, X)$ , para  $q \geq 0$ . Gostaríamos, agora, de definir, como um caso particular da teoria mais geral (vista no *Capítulo 2*), o complexo de cadeias de  $X$ .

Para isto, considere  $C_q(X) = 0$ , se  $q < 0$  e os homomorfismos  $\partial_q : C_q(X) \rightarrow C_{q-1}(X)$ . Para  $q = 0$ , teremos  $\partial_0 : C_0(X) \rightarrow 0$  e, portanto,  $\partial_0$  é o homomorfismo nulo.

Considere, também, a seguinte

**Definição 3.7.** *Seja  $T : \Delta_q \rightarrow X$  um  $q$ -simplexo singular de  $X$ , com  $q > 0$ . O operador bordo  $\partial_q : C_q(X) \rightarrow C_{q-1}(X)$  é definido sobre um gerador  $T$ , por  $\partial_q(T) = \sum_{i=0}^q (-1)^i T^{(i)} \in C_{q-1}(X)$  e é estendido por linearidade:*

$$\partial_q\left(\sum_{j \in J} m_j T_j\right) = \sum_{j \in J} m_j \partial_q(T_j)$$

Resta, agora, mostrar que  $\partial_{q-1} \circ \partial_q \equiv 0$ , para todo  $q \in \mathbb{Z}$ .

**Lema 3.1.**  $\partial_{q-1} \circ \partial_q \equiv 0$ , para todo  $q \in \mathbb{Z}$ .

*Demonstração.* É suficiente mostrar o resultado para um gerador  $T : \Delta_q \rightarrow X$ .



Observe, primeiramente, que se  $j < i$ , então  $(T^{(i)})^{(j)} = (T^{(j)})^{(i-1)}$ . Por definição:  
 $(T^{(i)})^{(j)} = T \circ g_i^{q-1} \circ g_j^{q-2}$  e  $(T^{(j)})^{(i-1)} = T \circ g_j^{q-1} \circ g_{i-1}^{q-2}$ .

Então basta mostrar que  $g_i^{q-1} \circ g_j^{q-2} = g_j^{q-1} \circ g_{i-1}^{q-2}$ :

$$\begin{aligned} (g_i^{q-1} \circ g_j^{q-2})(x_0, x_1, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{q-2}) &= \\ g_i^{q-1}(g_j^{q-2}(x_0, x_1, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{q-2})) &= \\ g_i^{q-1}(x_0, x_1, \dots, x_{j-1}, 0, x_j, x_{j+1}, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{q-2}) &= \\ (x_0, x_1, \dots, x_{j-1}, 0, x_j, x_{j+1}, \dots, x_{i-2}, 0, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{q-2}). \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} (g_j^{q-1} \circ g_{i-1}^{q-2})(x_0, x_1, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{q-2}) &= \\ g_j^{q-1}(g_{i-1}^{q-2}(x_0, x_1, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{q-2})) &= \\ g_j^{q-1}(x_0, x_1, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_{i-2}, 0, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{q-2}) &= \\ (x_0, x_1, \dots, x_{j-1}, 0, x_j, x_{j+1}, \dots, x_{i-2}, 0, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{q-2}). \end{aligned}$$

Logo,  $g_i^{q-1} \circ g_j^{q-2} = g_j^{q-1} \circ g_{i-1}^{q-2}$  e, portanto,  $(T^{(i)})^{(j)} = (T^{(j)})^{(i-1)}$ .

Usando esta observação, temos:

$$\begin{aligned} \partial_{q-1}(\partial_q(T)) &= \partial_{q-1}\left(\sum_{i=0}^q (-1)^i T^{(i)}\right) = \sum_{i=0}^q (-1)^i \partial_{q-1}(T^{(i)}) = \\ \sum_{i=0}^q (-1)^i \left(\sum_{j=0}^{q-1} (-1)^j (T^{(i)})^{(j)}\right) &= \sum_{\substack{0 \leq i \leq q \\ 0 \leq j \leq q-1}} (-1)^{i+j} (T^{(i)})^{(j)} = \\ \sum_{0 \leq j < i \leq q} (-1)^{i+j} (T^{(i)})^{(j)} + \sum_{0 \leq i \leq j < q} (-1)^{i+j} (T^{(i)})^{(j)} &= \end{aligned}$$

Assim, podemos escrever o primeiro somatório acima, como sendo:

$$\sum_{0 \leq j < i \leq q} (-1)^{i+j} (T^{(i)})^{(j)} = \sum_{0 \leq j < i \leq q} (-1)^{i+j} (T^{(j)})^{(i-1)}$$

Fazendo as mudanças de variáveis  $i-1 = j'$  e  $j = i'$ :

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq j < i \leq q} (-1)^{i+j} (T^{(j)})^{(i-1)} &= \sum_{0 \leq i' \leq j' < q} (-1)^{i'+j'+1} (T^{(i')})^{(j')} = \\ - \sum_{0 \leq i' \leq j' < q} (-1)^{i'+j'} (T^{(i')})^{(j')}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \sum_{0 \leq j < i \leq q} (-1)^{i+j} (T^{(i)})^{(j)} + \sum_{0 \leq i \leq j < q} (-1)^{i+j} (T^{(i)})^{(j)} &= \\ - \sum_{0 \leq i' \leq j' < q} (-1)^{i'+j'} (T^{(i')})^{(j')} + \sum_{0 \leq i \leq j < q} (-1)^{i+j} (T^{(i)})^{(j)} &= 0 \end{aligned}$$

Portanto,  $\partial_{q-1}(\partial_q(T)) = 0$ . □

**Definição 3.8.** O complexo de cadeias  $C_*(X) = (C_q(X), \partial_q)$  é chamado de complexo singular do espaço topológico  $X$ .

Usando o operador bordo  $\partial_q : C_q(X) \rightarrow C_{q-1}(X)$  podemos definir dois importantes subgrupos do grupo das  $q$ -cadeias  $C_q(X)$ , a saber:

- i) O subgrupo dos  $q$ -ciclos singulares do espaço topológico  $X$ :  $Z_q(X) = \ker(\partial_q)$
- ii) O subgrupo dos  $q$ -bordos singulares do espaço topológico  $X$ :  $B_q(X) = \text{Im}(\partial_{q+1})$

Observe que  $B_q(X)$  e  $Z_q(X)$  são subgrupos abelianos de  $C_q(X)$  e, além disso, como  $\partial_{q-1} \circ \partial_q \equiv 0$ , para todo  $q \in \mathbb{Z}$ , temos que  $B_q(X)$  é um subgrupo normal de  $Z_q(X)$ .

**Definição 3.9.** O  $q$ -ésimo grupo de homologia singular do espaço topológico  $X$  é definido por  $H_q(X) = \frac{Z_q(X)}{B_q(X)}$ .

Em outras palavras, os elementos de  $H_q(X)$  são classes de equivalência de ciclos,  $c$ , sob a relação de equivalência: dados dois ciclos  $c$  e  $c'$  em  $Z_q(X)$ ,  $c \sim c' \Leftrightarrow c' - c \in B_q(X)$ . Usaremos símbolo  $[c]$  para indicar os elementos de  $H_q(X)$ .

**Observação 3.1.** Neste texto, usaremos o símbolo  $\cong$  para indicar isomorfismo de grupos.

**Exemplo 3.4.** Seja  $X$  um espaço topológico constituído apenas de um ponto  $P$ , ou seja,  $X = \{P\}$ ; então  $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$  e  $H_q(X) \cong 0$ , para todo  $q \neq 0$ .

*Demonstração.* Lembremos que  $C_q(X) = 0$  e  $\partial_q \equiv 0$ , para todo  $q \leq 0$ . Assim,  $H_q(X) = 0$ , para todo  $q < 0$ . Desde que  $\partial_0 : C_0(X) \rightarrow 0$  é o homomorfismo nulo e sendo  $X = \{P\}$ ,  $\ker(\partial_0) = C_0(X) = \left\{ \sum_i m_i x_i, m_i \in \mathbb{Z}, x_i \in X \right\} = \{mP\}$ . Temos que  $C_0(X) \cong \mathbb{Z}$ . Para isso, considere  $\psi : C_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$  tal que  $\psi(mP) = m$ . Este é o isomorfismo de grupos.

Assim, para cada  $q \geq 0$ ,  $T : \Delta_q \rightarrow X$  é o  $q$ -simplexo constante  $P$  e, portanto, único. Consequentemente, também é constante o  $(q-1)$ -simplexo  $T^{(i)} = T \circ g_i^{q-1}$ . Dessa forma,  $\partial_1(T) = \sum_{i=0}^1 (-1)^i T^{(i)} = T^{(0)} - T^{(1)} = P - P = 0$ . Isto implica que  $\text{Im}(\partial_1) = 0$ . Portanto,  $H_0(X) = \frac{\ker(\partial_0)}{\text{Im}(\partial_1)} = \frac{C_0(X)}{0} \cong \frac{\mathbb{Z}}{0} \cong \mathbb{Z}$ .

Como, para todo  $q > 0$ , a aplicação  $T^{(i)} = T \circ g_i^{q-1}$  é constante  $P$  e, portanto, única, temos:  $\partial_q(T) = \sum_{i=0}^q (-1)^i T^{(i)} = T^{(0)} - T^{(1)} + T^{(2)} - T^{(3)} + \dots + (-1)^q T^{(q)}$ . Então  $\partial_q(T) = T_{q-1} - T_{q-1} + T_{q-1} - T_{q-1} + \dots + (-1)^q T_{q-1}$ , onde  $T_{q-1} : \Delta_{q-1} \rightarrow X$  é tal que  $T_{q-1}(\Delta_{q-1}) = \{P\}$ .

Note que:

$$\partial_q(T) = \begin{cases} 0 & \text{se } q \text{ for ímpar} \\ T_{q-1} & \text{se } q \text{ for par} \end{cases}$$

Logo,

$$\ker(\partial_q) = Z_q(X) = \begin{cases} C_q(X) & \text{se } q \text{ for ímpar} \\ 0 & \text{se } q \text{ for par} \end{cases}$$

E, também,

$$\text{Im}(\partial_{q+1}) = B_q(X) = \begin{cases} C_q(X) & \text{se } q \text{ for ímpar} \\ 0 & \text{se } q \text{ for par} \end{cases}$$

Portanto,  $H_q(X) = 0$ , para todo  $q > 0$ .  $\square$

No que segue, apresentaremos algumas noções da teoria de homologia reduzida de um espaço topológico  $X$ .

**Definição 3.10.** *O índice de Kronecker é o homomorfismo  $I : C_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$  definido por  $I(\sum_x m_x x) = \sum_x m_x$ .*

**Proposição 3.1.** *A sequência  $\cdots \rightarrow C_q(X) \xrightarrow{\partial_q} C_{q-1}(X) \xrightarrow{\partial_{q-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_2} C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \xrightarrow{I} \mathbb{Z} \rightarrow 0$  é um complexo de cadeias.*

*Demonstração.* Devemos mostrar, apenas, que  $I \circ \partial_1 = 0$ . Seja  $T : \Delta_1 \rightarrow X$  o 1-simplexo singular do espaço topológico  $X$ . Então:  $(I \circ \partial_1)(T) = I(\partial_1(T)) = I(1T^{(0)} + (-1)T^{(1)}) = 1 + (-1) = 0$ .  $\square$

**Definição 3.11.** *Chamamos de complexo aumentado do espaço topológico  $X$ , ao complexo de cadeias:  $\tilde{C}_q(X) = C_q(X)$ , para todo  $q \geq 0$ ;  $\tilde{C}_{-1}(X) = \mathbb{Z}$ ;  $\tilde{\partial}_q = \partial_q$ , para todo  $q \geq 1$ ;  $\tilde{\partial}_0 = I$ ; completando-se com  $\tilde{C}_{-q} = 0$ , para todo  $q > 1$  e  $\tilde{\partial}_{-q} = 0$ , para todo  $q \geq 1$ .*

Podemos representar esta definição através do seguinte diagrama:

$$\cdots \longrightarrow \tilde{C}_{q+1} \xrightarrow{\tilde{\partial}_{q+1}} \tilde{C}_q \xrightarrow{\tilde{\partial}_q} \tilde{C}_{q-1} \xrightarrow{\tilde{\partial}_{q-1}} \cdots \xrightarrow{\tilde{\partial}_2} \tilde{C}_1 \xrightarrow{\tilde{\partial}_1} \tilde{C}_0 \xrightarrow{\tilde{\partial}_0} \tilde{C}_{-1} \xrightarrow{\tilde{\partial}_{-1}} \tilde{C}_{-2} \xrightarrow{\tilde{\partial}_{-2}} \cdots$$

o qual é equivalente ao diagrama:

$$\cdots \longrightarrow C_{q+1} \xrightarrow{\partial_{q+1}} C_q \xrightarrow{\partial_q} C_{q-1} \xrightarrow{\partial_{q-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{I} \mathbb{Z} \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} \cdots$$

Observe que todos os complexos de cadeias referem-se ao espaço topológico  $X$ , omitido nos diagramas apenas para efeito de formatação do presente texto.

**Definição 3.12.** Os grupos de homologia do complexo  $(\tilde{C}_q(X), \tilde{\partial}_q)$  são denominados grupos de homologia reduzidos do espaço topológico  $X$  e denotados por  $\tilde{H}_q(X)$ .

**Definição 3.13.** Definimos a esfera unitária em  $\mathbb{R}$  como sendo o conjunto

$$S^0 = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| = 1\}$$

**Exemplo 3.5.** Calcule  $\tilde{H}_0(S^0)$ .

*Demonstração.* Temos que  $S^0 = \{-1, 1\}$ , ou seja, temos dois  $q$ -simplexos singulares a saber:  $T_q(\Delta_q) = \begin{cases} \{-1\} \\ \{1\} \end{cases}$  os quais indicaremos por  $T_q^-$  e  $T_q^+$ , respectivamente. Assim,

$C_q(S^0)$  é o grupo abeliano livre gerado por  $T_q^-$  e  $T_q^+$ , para todo  $q \geq 0$ .

Sendo  $\tilde{H}_0(S^0) = \frac{\ker(I)}{\text{Im}(\partial_1)}$ , precisamos determinar  $\ker(I)$  e  $\text{Im}(\partial_1)$ . Temos:

i)  $\text{Im}(\partial_1) = \{0\}$ .

Temos que  $\partial_1(T_1^-) = \sum_{i=0}^1 (-1)^i (T_1^-)^{(i)} = (T_1^-)^{(0)} - (T_1^-)^{(1)} = (T_1^- \circ g_0^0) - (T_1^- \circ g_1^0) = T_0^- - T_0^- = 0$ .

Também,  $\partial_1(T_1^+) = \sum_{i=0}^1 (-1)^i (T_1^+)^{(i)} = (T_1^+)^{(0)} - (T_1^+)^{(1)} = (T_1^+ \circ g_0^0) - (T_1^+ \circ g_1^0) = T_0^+ - T_0^+ = 0$ .

Logo,  $\partial_1$  é o homomorfismo nulo e, então,  $\text{Im}(\partial_1) = \{0\}$ . Portanto, concluímos que  $\tilde{H}_0(S^0) = \ker(I)$ .

ii)  $\ker(I) = \mathbb{Z}$ .

Sabemos que  $I(T_0^-) = 1$  e  $I(T_0^+) = 1$ . Assim,  $I(mT_0^- + nT_0^+) = m + n = 0$  se, e somente se,  $m = -n$ . Logo:  $\ker(I) = \{mT_0^- - mT_0^+, m \in \mathbb{Z}\} = \{m(T_0^- - T_0^+), m \in \mathbb{Z}\} = [T_0^- - T_0^+] \cong \mathbb{Z}$ , uma vez que identificando-se  $T_0^- = (1, 0)$  e  $T_0^+ = (0, 1)$ , então  $T_0^- - T_0^+ = (1, 0) - (0, 1) = (1, -1)$  e  $[(1, -1)] \cong \mathbb{Z}$ . Portanto,  $\tilde{H}_0(S^0) = \ker(I) \cong \mathbb{Z}$   $\square$

## 3.2 Homomorfismo Induzido por uma Aplicação Contínua

Sejam  $X$  e  $Y$  dois espaços topológicos e  $f : X \rightarrow Y$  uma aplicação contínua. Para cada  $q \geq 0$ ,  $f$  induz um homomorfismo  $f_{\#q} : C_q(X) \rightarrow C_q(Y)$ , que sobre os geradores de  $C_q(X)$  é definido do seguinte modo: se  $T : \Delta_q \rightarrow X$  é um  $q$ -simplexo singular

do espaço topológico  $X$ , então  $f \circ T : \Delta_q \rightarrow Y$  é um  $q$ -simplexo singular do espaço topológico  $Y$ . Fazendo  $f_{\#q}(T) = f \circ T$  e prolongando por linearidade, temos:

$$f_{\#q}\left(\sum_i m_i T_i\right) = \sum_i m_i f_{\#q}(T_i) = \sum_i m_i (f \circ T_i)$$

**Proposição 3.2.** *Se  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  são espaços topológicos e  $f : X \rightarrow Y$  e  $g : Y \rightarrow Z$  são aplicações contínuas, então  $(g \circ f)_{\#q} = g_{\#q} \circ f_{\#q}$ , para todo  $q \in \mathbb{Z}$ .*

*Demonstração.* Basta demonstrar o resultado para um gerador  $T : \Delta_q \rightarrow X$ . Assim, temos que  $(g \circ f)_{\#q}(T) = (g \circ f) \circ T = g \circ (f \circ T) = g_{\#q}(f \circ T) = g_{\#q}(f_{\#q}(T)) = (g_{\#q} \circ f_{\#q})(T)$ . Portanto,  $(g \circ f)_{\#q} = g_{\#q} \circ f_{\#q}$ .  $\square$

**Lema 3.2.** *Se  $T : \Delta_q \rightarrow X$  é um  $q$ -simplexo singular do espaço topológico  $X$ , então  $f_{\#(q-1)}(T^{(i)}) = (f_{\#q}(T))^{(i)}$ , para  $0 \leq i \leq q$ .*

*Demonstração.* Por definição,  $T^{(i)} = T \circ g_i^{q-1}$ . Então  $f_{\#(q-1)}(T^{(i)}) = f_{\#(q-1)}(T \circ g_i^{q-1}) = f \circ (T \circ g_i^{q-1}) = (f \circ T) \circ g_i^{q-1} = (f \circ T)^{(i)} = (f_{\#q}(T))^{(i)}$ . Portanto,  $f_{\#(q-1)}(T^{(i)}) = (f_{\#q}(T))^{(i)}$ .  $\square$

Na próxima proposição mostraremos que  $f_{\#q}$  é uma aplicação de cadeias, para todo  $q \geq 0$ .

**Proposição 3.3.**  *$f_{\#q} : C_q(X) \rightarrow C_q(Y)$  é uma aplicação de cadeias.*

*Demonstração.* Temos que provar que o Diagrama IX abaixo é comutativo.

$$\begin{array}{ccc} C_q(X) & \xrightarrow{f_{\#q}} & C_q(Y) \\ \downarrow \partial_q & & \downarrow \partial'_q \\ C_{q-1}(X) & \xrightarrow{f_{\#(q-1)}} & C_{q-1}(Y) \end{array}$$

Diagrama IX

Pela definição,  $(f_{\#(q-1)} \circ \partial_q)(T) = f_{\#(q-1)}(\partial_q(T)) = f_{\#(q-1)}\left(\sum_{i=0}^q (-1)^i T^{(i)}\right) = \sum_{i=0}^q (-1)^i f_{\#(q-1)}(T^{(i)}) = \sum_{i=0}^q (-1)^i (f_{\#q}(T))^{(i)} = \partial'_q(f_{\#q}(T))$ .  $\square$

**Observação 3.2.** De modo análogo ao que fizemos na seção anterior, a aplicação  $f_{\#q} : C_q(X) \rightarrow C_q(Y)$  induz um homomorfismo  $f_{*q} : H_q(X) \rightarrow H_q(Y)$  entre os grupos de homologia singular dos espaços topológicos  $X$  e  $Y$ , respectivamente, dado por

$f_{*q}([T]) = [f_{\#q}(T)]$ , para todo  $T \in Z_q(X) \subset C_q(X)$ . Estes homomorfismos são denominados homomorfismos induzidos por  $f$  em homologia.

Observe que  $f_{*q}$  lê-se induzida da aplicação  $f$ , a nível de homologia singular.

Segue da definição de homologia reduzida que se  $f : X \rightarrow Y$  é contínua, então  $f$  também induz homomorfismos nos grupos de homologia reduzidos dos espaços topológicos  $X$  e  $Y$ , respectivamente.

Temos que para todo  $q \geq 1$ ,  $f_{*q} : \tilde{H}_q(X) \rightarrow \tilde{H}_q(Y)$  coincide com  $f_{*q} : H_q(X) \rightarrow H_q(Y)$ .

Para  $q = 0$ , temos  $f_{*0}([\sum m_x x]) = [f_{\#0}(\sum m_x x)] = [\sum m_x f(x)]$ .

Para  $q = -1$ , como o índice de Kronecker  $I$  é sobrejetor, segue que, para todo  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $m = I(\sum m_x x) = \sum m_x$ . Como o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \tilde{C}_0(X) = C_0(X) & \xrightarrow{f_{\#0}} & \tilde{C}_0(Y) = C_0(Y) \\ \downarrow I & & \downarrow I \\ \tilde{C}_{-1}(X) = \mathbb{Z} & \xrightarrow{f_{\#-1}} & \tilde{C}_{-1}(Y) = \mathbb{Z} \end{array}$$

é comutativo, então  $f_{\#-1}(m) = f_{\#-1}(I(\sum m_x x)) = I(f_{\#0}(\sum m_x x)) = I(\sum m_x f(x)) = \sum m_x = m$ . Observemos que  $f_{\#-1}$  está bem definida, pois se  $m = I(\sum m_x x) = I(\sum m_y y)$  então  $f_{\#-1}(I(\sum m_x x)) = f_{\#-1}(I(\sum m_y y))$ . Logo,  $f_{*-1} : \tilde{H}_{-1}(X) \rightarrow \tilde{H}_{-1}(Y)$  é tal que  $f_{*-1}([m]) = [f_{\#-1}(m)] = [m]$ .

Para  $q < -1$ ,  $f_{*q}$  é o homomorfismo nulo.

### 3.2.1 Homologia Relativa

Se  $A$  é um subespaço do espaço topológico  $X$ , a aplicação inclusão  $i : A \rightarrow X$  induz monomorfismos  $i_{\#q} : C_q(A) \rightarrow C_q(X)$ , para todo  $q \geq 0$ , que são aplicações de cadeias. Isto nos permite identificar  $C_*(A)$  a um subcomplexo de  $C_*(X)$ :

**Definição 3.14.** *O complexo de cadeias do par  $(X, A)$  é definido como o complexo quociente  $C_*(X, A) = \frac{C_*(X)}{C_*(A)}$ . Isto é,  $C_q(X, A) = \frac{C_q(X)}{C_q(A)}$ , para todo  $q \geq 0$ .*

O homomorfismo quociente é dado por  $\overline{\partial}_q(T + C_q(A)) = \partial_q(T) + C_{q-1}(A)$ , obtido de  $\partial_q : C_q(X) \rightarrow C_{q-1}(X)$  por passagem ao quociente, onde  $\partial_q$  é definido sobre um gerador  $T$ , por  $\partial_q(T) = \sum_{i=0}^q (-1)^i T^{(i)} \in C_{q-1}(X)$  e é estendido por linearidade:  $\partial_q(\sum_{j \in J} m_j T_j) = \sum_{j \in J} m_j \partial_q(T_j)$

**Observação 3.3.**

i) Denotaremos os grupos de homologia do complexo  $C_*(X, A)$  por  $H_q(X, A)$ .

ii) Um representante de uma classe de  $Z_q(X, A)$  é uma  $q$ -cadeia  $c \in C_q(X)$  tal que  $\partial_q(c) \in C_{q-1}(A)$ .

Temos que  $c + C_q(A) \in \ker(\bar{\partial}_q)$  se, e somente se,  $C_{q-1}(A) = \bar{\partial}_q(c + C_q(A)) = \partial_q(c) + C_{q-1}(A)$  se, e somente se,  $\partial_q(c) \in C_{q-1}(A)$ .

iii) Analogamente, um representante de  $B_q(X, A)$  é uma  $q$ -cadeia  $b \in C_q(X)$  tal que existe  $c \in C_{q+1}(X)$  e  $a \in C_q(A)$  satisfazendo  $\partial_{q+1}(c) = b + a$ .

Temos que  $B_q(X, A) = \bar{\partial}_{q+1}(C_{q+1}(X, A))$ . Assim, existe  $c \in C_{q+1}(X)$  tal que  $\bar{\partial}_{q+1}(c + C_{q+1}(A)) = b + C_q(A)$ , ou equivalentemente,  $\partial_{q+1}(c) + C_q(A) = b + C_q(A)$ . Logo, existe  $a \in C_q(A)$  satisfazendo  $\partial_{q+1}(c) = b + a$ .

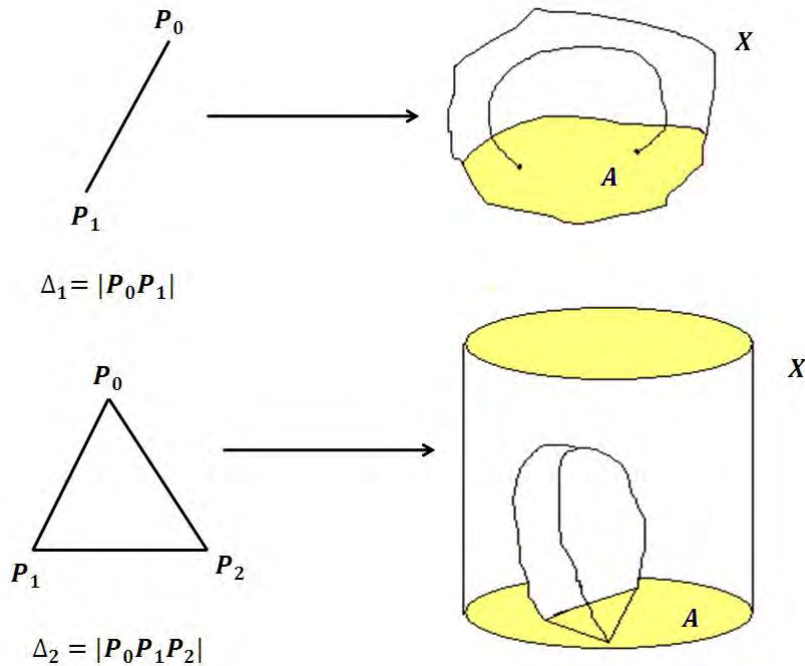


Figura 3.3: Representação geométrica do 1-Ciclo e do 2-Ciclo do par  $(X, A)$ , respectivamente.

Da teoria vista anteriormente, podemos obter, da sequência exata de complexos  $0 \rightarrow C_*(A) \rightarrow C_*(X) \rightarrow C_*(X, A) \rightarrow 0$ , a sequência longa de homologia do par  $(X, A)$ :

$$\cdots \rightarrow H_q(A) \xrightarrow{i_*} H_q(X) \xrightarrow{j_*} H_q(X, A) \xrightarrow{\Delta} H_{q-1}(X, A) \rightarrow \cdots$$

**Proposição 3.4.** *A sequência de homologia do par  $(X, A)$  é exata.*

*Demonstração.* Pelo teorema 2.2, concluímos imediatamente que a sequência exata de complexos  $0 \rightarrow C_*(A) \rightarrow C_*(X) \rightarrow C_*(X, A) \rightarrow 0$  associa-se a sequência exata infinita de homologia do par  $(X, A)$ :

$$\cdots \rightarrow H_q(A) \xrightarrow{i_*} H_q(X) \xrightarrow{j_*} H_q(X, A) \xrightarrow{\Delta} H_{q-1}(X, A) \rightarrow \cdots$$

□

Considere, agora,  $X$  e  $Y$  espaços topológicos e  $A$  e  $B$  subespaços de  $X$  e  $Y$ , respectivamente.

**Definição 3.15.** Dizemos que  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  é uma aplicação contínua de pares se  $f : X \rightarrow Y$  é contínua e  $f(A) \subset B$ .

Desta forma, para todo  $q \geq 0$  o seguinte diagrama de aplicações de cadeias é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} C_*(A) & \xrightarrow{i_\#} & C_*(X) \\ \downarrow (f|_A)_\# & & \downarrow f_\# \\ C_*(B) & \xrightarrow{i'_\#} & C_*(Y) \end{array}$$

Diagrama X

De fato,  $i'_\# \circ (f|_A)_\# = (i' \circ (f|_A))_\# = (f \circ i)_\# = f_\# \circ i_\#$ .

Por passagem ao quociente, ficam definidas as aplicações de cadeias  $\bar{f}_{\#q} : C_q(X, A) \rightarrow C_q(Y, B)$  dadas da seguinte forma: se  $c + C_q(A) \in C_q(X, A)$ , com  $c \in C_q(X)$ , então  $\bar{f}_{\#q}(c + C_q(A)) = f_{\#q}(c) + C_q(B)$

Assim, temos o seguinte diagrama comutativo de complexos:

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & C_*(A) & \xrightarrow{i_\#} & C_*(X) & \xrightarrow{j_\#} & C_*(X, A) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow (f|_A)_\# & & \downarrow f_\# & & \downarrow \bar{f}_\# \\ 0 & \longrightarrow & C_*(B) & \xrightarrow{i'_\#} & C_*(Y) & \xrightarrow{j'_\#} & C_*(Y, B) \longrightarrow 0 \end{array}$$

Diagrama XI

No *Diagrama X* vimos que o quadrado (1) é comutativo. Assim, resta apenas mostrar que o quadrado (2) é comutativo: para qualquer gerador  $T \in C_q(X)$ , temos:  $(\bar{f}_\# \circ j_\#)(T) = \bar{f}_\#(j_\#(T)) = \bar{f}_\#(T + C_q(A)) = f_\#(T) + C_q(B) = (f \circ T) + C_q(B)$ . Por outro lado,  $(j'_\# \circ f_\#)(T) = (j'_\#(f_\#(T))) = j'_\#(f \circ T) = (f \circ T) + C_q(B)$ . Logo, o quadrado (2), no *Diagrama XI*, é comutativo.



Pela naturalidade da sequência de homologia do par  $(X, A)$ , vista abaixo do teorema 2.2, obtemos o seguinte diagrama comutativo entre as sequências de homologia dos pares  $(X, A)$  e  $(Y, B)$ :

$$\begin{array}{cccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_q(A) & \longrightarrow & H_q(X) & \longrightarrow & H_q(X, A) & \longrightarrow & H_{q-1}(A) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow (f|_A)_{*q} & & \downarrow f_{*q} & & \downarrow \bar{f}_{*q} & & \downarrow (f|_A)_{*q} & & \\ \cdots & \longrightarrow & H_q(B) & \longrightarrow & H_q(Y) & \longrightarrow & H_q(Y, B) & \longrightarrow & H_{q-1}(B) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Diagrama XII

onde  $\bar{f}_{*q}(d + B_q(X, A)) = \bar{f}_{\#q}(d) + B_q(Y, B)$ , onde  $d = c + C_q(A)$  com  $c \in C_q(X)$ .

A seguir, veremos algumas propriedades dos homomorfismos induzidos.

**Propriedade 3.1.** Seja  $A$  um subespaço do espaço topológico  $X$ . Se  $f : (X, A) \rightarrow (X, A)$  é a aplicação identidade do par  $(X, A)$ , então  $\bar{f}_{*q} = Id_{H_q(X, A)}$ .

*Demonstração.* Desde que  $f : X \rightarrow X$  é a aplicação identidade de  $X$ , temos que  $f_{\#q} : C_q(X) \rightarrow C_q(X)$  é dada por  $f_{\#q}(T) = f \circ T = T$  e  $\bar{f}_{\#q} : \frac{C_q(X)}{C_q(A)} \rightarrow \frac{C_q(X)}{C_q(A)}$  é dada por  $\bar{f}_{\#q}(T + C_q(A)) = f_{\#q}(T) + C_q(A) = T + C_q(A)$ . Assim,  $f_{\#q}$  e  $\bar{f}_{\#q}$  são os homomorfismos identidades de  $C_q(X)$  e  $C_q(X, A) = \frac{C_q(X)}{C_q(A)}$ , respectivamente.

Pela definição de  $\bar{f}_{*q}$ , concluímos que  $\bar{f}_{*q}(d + B_q(X, A)) = \bar{f}_{\#q}(d) + B_q(X, A) = d + B_q(X, A)$ , ou seja,  $\bar{f}_{*q} = Id_{H_q(X, A)}$ .  $\square$

**Propriedade 3.2.** Sejam  $X, Y$  e  $Z$  espaços topológicos e  $A, B$  e  $C$  seus respectivos subespaços. Se  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  e  $g : (Y, B) \rightarrow (Z, C)$  são aplicações contínuas de pares, então  $\overline{(g \circ f)}_{*q} = \bar{g}_{*q} \circ \bar{f}_{*q}$ , para todo  $q \in \mathbb{Z}$ .

*Demonstração.* Sendo  $f : X \rightarrow Y$  e  $g : Y \rightarrow Z$  aplicações contínuas, então  $g \circ f : X \rightarrow Z$ , também é contínua. Isto nos permite considerar os homomorfismos de grupos  $\overline{(g \circ f)}_{\#q} : C_q(X, A) \rightarrow C_q(Z, C)$ , para todo  $q \in \mathbb{Z}$ .

Pela proposição 3.2, para todo  $d = c + C_q(A) \in C_q(X, A)$ , temos que  $\overline{(g \circ f)}_{\#q}(d) = \overline{(g \circ f)}_{\#q}(c + C_q(A)) = (g \circ f)_{\#q}(c) + C_q(C) = g_{\#q} \circ f_{\#q}(c) + C_q(C) = \bar{g}_{\#q}(f_{\#q}(c) + C_q(B)) = \bar{g}_{\#q} \circ \bar{f}_{\#q}(c + C_q(A))$ .

Assim,  $\overline{(g \circ f)}_{*q}(d + B_q(X, A)) = \overline{(g \circ f)}_{\#q}(d) + B_q(Z, C) = \bar{g}_{\#q} \circ \bar{f}_{\#q}(d) + B_q(Z, C) = \bar{g}_{*q}(\bar{f}_{\#q}(d) + B_q(Y, B)) = \bar{g}_{*q} \circ \bar{f}_{*q}(d + B_q(X, A))$  e portanto  $\overline{(g \circ f)}_{*q} = \bar{g}_{*q} \circ \bar{f}_{*q}$ , para todo  $q \in \mathbb{Z}$ .  $\square$

**Teorema 3.1.** *Sejam  $X$  e  $Y$  dois espaços topológicos e  $A$  e  $B$  seus respectivos subespaços. Se  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  é um homeomorfismo de pares, então  $\bar{f}_{*q} : H_q(X, A) \rightarrow H_q(Y, B)$  é um isomorfismo para todo  $q \in \mathbb{Z}$ .*

*Demonstração.* Como  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  é um homeomorfismo de pares, existe  $g : (Y, B) \rightarrow (X, A)$  aplicação contínua de pares, satisfazendo  $g \circ f = Id_{(X,A)}$  e  $f \circ g = Id_{(Y,B)}$ .

Assim, se  $g \circ f = Id_{(X,A)}$ , então  $Id_{H_q(X,A)} = \overline{(g \circ f)}_{*q} = \bar{g}_{*q} \circ \bar{f}_{*q}$ , e portanto  $\bar{f}_{*q}$  é um monomorfismo. Analogamente, se  $f \circ g = Id_{(Y,B)}$ , então  $Id_{H_q(Y,B)} = \overline{(f \circ g)}_{*q} = \bar{f}_{*q} \circ \bar{g}_{*q}$ , e portanto  $\bar{f}_{*q}$  é um epimorfismo. Logo,  $\bar{f}_{*q}$  é um isomorfismo para todo  $q \in \mathbb{Z}$ .  $\square$

**Definição 3.16.** *Se  $A$  é um subespaço do espaço topológico  $X$ , dizemos que  $A$  é um retrato de  $X$ , se existir uma aplicação contínua  $r : X \rightarrow A$  tal que  $r \circ i = Id_A$ , onde  $i : A \rightarrow X$  é a aplicação inclusão. A aplicação  $r$  é chamada retração de  $X$  em  $A$ .*

**Exemplo 3.6.** A aplicação  $r : \mathbb{R}^n - \{0\} \rightarrow S^{n-1}$  definida por  $r(x) = \frac{x}{\|x\|}$  é uma retração de  $\mathbb{R}^n - \{0\}$  em  $S^{n-1}$ .

*Demonstração.* Considere a aplicação inclusão  $i : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n - \{0\}$ . Temos que, para todo  $x \in S^{n-1}$ ,  $(r \circ i)(x) = r(i(x)) = r(x) = \frac{x}{\|x\|} = x$ , pois  $x \in S^{n-1}$  e portanto  $\|x\| = 1$ . Logo,  $r$  é uma retração de  $\mathbb{R}^n - \{0\}$  em  $S^{n-1}$ .  $\square$

**Definição 3.17.** *Sejam  $G$  um grupo abeliano e  $P : G \rightarrow G$  um homomorfismo. Dizemos que  $P$  é um projetor sobre  $G$  se  $P \circ P = P$ .*

**Teorema 3.2.** *Sejam  $G$  um grupo abeliano e  $P : G \rightarrow G$  um projetor sobre  $G$ . Então:*

- 1)  $Im(P) = \{g \in G \mid P(g) = g\}$ .
- 2)  $Id - P$  é um projetor sobre  $G$ .
- 3)  $Im(Id - P) = ker(P)$ .
- 4)  $G = Im(P) \oplus ker(P)$ .
- 5)  $\frac{G}{Im(P)} \cong ker(P)$ .

*Demonstração.* 1) Se  $g \in Im(P)$  então  $g = P(u)$ , com  $u \in G$ . Temos  $P(g) = P(P(u)) = (P \circ P)(u) = P(u) = g$ . Portanto,  $Im(P) \subset \{g \in G \mid P(g) = g\}$ . Sendo  $g' \in \{g \in G \mid P(g) = g\}$ , temos que  $g' = P(g')$ . Então  $g' \in Im(P)$ . Portanto,  $\{g \in G \mid P(g) = g\} \subset Im(P)$ . Logo  $Im(P) = \{g \in G \mid P(g) = g\}$ .

2) Para todo  $g \in G$ , temos que  $[(Id - P) \circ (Id - P)](g) = (Id - P)[(Id - P)(g)] = (Id - P)(Id(g) - P(g)) = Id(Id(g) - P(g)) - P(Id(g) - P(g)) = Id(g - P(g)) - P(g - P(g)) = Id(g) - Id(P(g)) - P(g) + P(P(g)) = Id(g) - P(g) - P(g) + P(g) = Id(g) - P(g) = (Id - P)(g)$ . Portanto,  $Id - P$  é um projetor sobre  $G$ .

3) Usando os item 1) e 2), temos que  $Im(Id - P) = \{g \in G \mid (Id - P)(g) = g\} = \{g \in G \mid g - P(g) - g = 0\} = \{g \in G \mid P(g) = 0\} = ker(P)$ .

4) Para mostrarmos que  $G = Im(P) \oplus ker(P)$ , devemos mostrar os itens i) e ii) abaixo.

i)  $Im(P) \cap ker(P) = \{0\}$ .

Se  $g \in Im(P) \cap ker(P)$  então  $g \in Im(P)$  e  $g \in ker(P)$ . Como  $g \in Im(P)$ , pelo item 1),  $P(g) = g$ . Mas, também,  $g \in ker(P)$ , e assim  $P(g) = 0$ . Logo,  $g = 0$  e, portanto,  $Im(P) \cap ker(P) = \{0\}$ .

ii)  $G = Im(P) + ker(P)$

Desde que  $P : G \rightarrow G$  e  $G$  é um grupo,  $Im(P) + ker(P) \subset G$ . Por outro lado, se  $g \in G$  então  $g = P(g) + g - P(g) = P(g) + (Id - P)(g)$ , com  $P(g) \in Im(P)$  e  $(Id - P)(g) \in Im(Id - P) = ker(P)$ , pelo item (3). Logo,  $g \in Im(P) + ker(P)$  e assim  $G \subset Im(P) + ker(P)$ . Portanto  $G = Im(P) + ker(P)$ .

5) Pelo item anterior, temos que  $G = Im(P) \oplus ker(P)$ .

Considere o homomorfismo  $\psi : G = Im(P) \oplus ker(P) \rightarrow ker(P)$  definido por:  $\psi(x, y) = y$ , para todo  $(x, y) \in Im(P) \oplus ker(P)$ . Temos que  $ker(\psi) = \{(x, y) \in Im(P) \oplus ker(P) \mid \psi(x, y) = 0\} = \{(x, 0) \in Im(P) \oplus ker(P)\} = Im(P) \oplus \{0\} \cong Im(P)$ . Observando que  $ker(\psi) \cong Im(P)$  e  $Im(\psi) = \{\psi(x, y) \mid (x, y) \in Im(P) \oplus ker(P)\} = \{y \mid y \in Ker(P)\} = ker(P)$ . Pelo Teorema do Isomorfismo de Grupos, temos que  $\frac{G}{Im(P)} \cong \frac{G}{ker(\psi)} \cong Im(\psi) = ker(P)$ .  $\square$

Usaremos os resultados deste teorema, para demonstrar a seguinte

**Proposição 3.5.** *Seja  $A$  um retrato do espaço topológico  $X$ . Então, para todo  $q \in \mathbb{Z}$ ,  $H_q(X) \cong H_q(A) \oplus H_q(X, A)$ .*

*Demonstração.* Por hipótese, existe  $r : X \rightarrow A$ , uma retração, isto é,  $r \circ i = Id_A$ . Então  $(r \circ i)_{*q} = Id_{H_q(A)}$  e, portanto,  $r_{*q} \circ i_{*q} = Id_{H_q(A)}$ , ou seja,  $r_{*q}$  é sobrejetor e  $i_{*q}$  é injetor para todo  $q \in \mathbb{Z}$ .

Considere a sequência exata de homologia do par  $(X, A)$ :

$$\cdots \rightarrow H_{q+1}(X, A) \xrightarrow{\Delta_{q+1}} H_q(A) \xrightarrow{i_{*q}} H_q(X) \xrightarrow{j_{*q}} H_q(X, A) \xrightarrow{\Delta_q} H_{q-1}(A) \xrightarrow{i_{*(q-1)}} H_{q-1}(X) \rightarrow \cdots$$

Pela injetividade de  $i_{*q}$  e  $i_{*(q-1)}$ , temos que  $\Delta_{q+1} \equiv 0$  e  $\Delta_q \equiv 0$ , respectivamente.

Obtemos, portanto, uma sequência exata curta

$$0 \rightarrow H_q(A) \xrightarrow{i_{*q}} H_q(X) \xrightarrow{j_{*q}} H_q(X, A) \rightarrow 0.$$

Seja  $\pi = (i \circ r) : X \rightarrow X$ . Note que  $\pi_{*q} = (i \circ r)_{*q} = i_{*q} \circ r_{*q}$  é um projetor sobre o grupo abeliano  $H_q(X)$  pois  $\pi_{*q} \circ \pi_{*q} = (i_{*q} \circ r_{*q}) \circ (i_{*q} \circ r_{*q}) = i_{*q} \circ (r_{*q} \circ i_{*q}) \circ r_{*q} = i_{*q} \circ Id_{H_q(A)} \circ r_{*q} = i_{*q} \circ r_{*q} = \pi_{*q}$ . Então pelo item 4), do teorema anterior, temos a seguinte decomposição em soma direta:

$$H_q(X) = Im(\pi_{*q}) \oplus ker(\pi_{*q}).$$

Note que, como  $r_{*q}$  é sobrejetor,  $Im(\pi_{*q}) = Im(i_{*q}) = i_{*q}(H_q(A)) \cong H_q(A)$  pois a sequência acima é exata curta. Também, usando o item 5), do teorema anterior, segue que  $ker(\pi_{*q}) \cong \frac{H_q(X)}{Im(\pi_{*q})} = \frac{H_q(X)}{i_{*q}(H_q(A))} \cong \frac{H_q(X)}{H_q(A)} = H_q(X, A)$ . Assim, a decomposição  $H_q(X) \cong Im(\pi_{*q}) \oplus ker(\pi_{*q})$ , pode ser escrita como  $H_q(X) \cong H_q(A) \oplus H_q(X, A)$ .  $\square$

**Exemplo 3.7.** Se  $A = \{x\}$  é um subespaço topológico de  $X$ , então  $H_q(X) \cong H_q(X, \{x\})$ ,  $q > 0$  e  $H_0(X) \cong \mathbb{Z} \oplus H_0(X, \{x\})$ .

*Demonstração.* De fato, se  $A = \{x\}$ , então  $H_q(X) \cong H_q(\{x\}) \oplus H_q(X, \{x\})$ . Pelo exemplo 3.4, temos que se  $H_q(\{x\}) = 0$ , para todo  $q > 0$ , então  $H_q(X) \cong H_q(X, \{x\})$ ,  $q > 0$  e se  $q = 0$ , então  $H_0(\{x\}) = \mathbb{Z}$  e portanto  $H_0(X) \cong \mathbb{Z} \oplus H_0(X, \{x\})$ .  $\square$

**Exemplo 3.8.** Prove que  $H_q(X, X) = 0$ , para todo  $q \in \mathbb{Z}$ .

*Demonstração.* Pela proposição 3.4, temos que a sequência do par  $(X, X)$ :

$$\cdots \rightarrow H_q(X) \xrightarrow{i_{*q}} H_q(X) \xrightarrow{j_{*q}} H_q(X, X) \xrightarrow{\Delta_q} H_{q-1}(X) \xrightarrow{i_{*(q-1)}} H_{q-1}(X) \rightarrow \cdots$$

é exata para todo  $q \in \mathbb{Z}$ . Logo, para todo  $q \in \mathbb{Z}$ ,  $i_{*q}$  é o isomorfismo identidade. Assim,  $ker(i_{*q}) = \{0\}$  e  $Im(i_{*q}) = H_q(X)$ .

Como a sequência é exata, temos que  $ker(j_{*q}) = Im(i_{*q}) = H_q(X)$ . Então  $j_{*q} \equiv 0$  e assim  $Im(j_{*q}) = 0$ . Também,  $Im(\Delta_q) = ker(i_{*(q-1)}) = \{0\}$ , e portanto  $ker(\Delta_q) = H_q(X, X)$ . Mas  $Im(j_{*q}) = ker(\Delta_q)$ . Logo,  $H_q(X, X) = 0$ .  $\square$

# 4 Axiomas de Eilenberg-Steenrod e Aplicações

## 4.1 Axiomas de Eilenberg-Steenrod

Veremos, agora, uma descrição axiomática da Teoria de Homologia, proposta por Eilenberg e Steenrod, em 1945. Nela, foram estabelecidos sete axiomas que englobam uma larga classe de espaços topológicos, onde as teorias de homologia existentes coincidem.

Assim, considere  $X, Y$  e  $Z$  espaços topológicos e  $A, B$  e  $C$  seus respectivos subespaços.

**Axioma 1** (Identidade) Se  $f : (X, A) \rightarrow (X, A)$  é a aplicação identidade do par  $(X, A)$ , então  $\bar{f}_{*q} : H_q(X, A) \rightarrow H_q(X, A)$  é o homomorfismo identidade de  $H_q(X, A)$ , para todo  $q \in \mathbb{Z}$ .

**Axioma 2** Se  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  e  $g : (Y, B) \rightarrow (Z, C)$  são aplicações contínuas de pares, então  $\overline{(g \circ f)}_{*q} = \bar{g}_{*q} \circ \bar{f}_{*q}$ , para todo  $q \in \mathbb{Z}$ .

**Axioma 3** Se  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  é uma aplicação contínua de pares, então o diagrama

$$\begin{array}{ccc} H_q(X, A) & \xrightarrow{\Delta_q} & H_{q-1}(A) \\ \downarrow \bar{f}_{*q} & & \downarrow f'_{*q} \\ H_q(Y, B) & \xrightarrow{\Delta'_q} & H_{q-1}(B) \end{array}$$

Diagrama XIII

é comutativo, para todo  $q \in \mathbb{Z}$ , onde  $f' = f|_A$ .

**Axioma 4** (Sequência Exata) Para todo par  $(X, A)$  a sequência de grupos denomi-

nada sequência de homologia do par  $(X, A)$  descrita por

$$\cdots \rightarrow H_q(A) \xrightarrow{i_*q} H_q(X) \xrightarrow{j_*q} H_q(X, A) \xrightarrow{\Delta_q} H_{q-1}(A) \xrightarrow{i_*(q-1)} H_{q-1}(X) \rightarrow \cdots$$

é uma sequência exata, para todo  $q \in \mathbb{Z}$ .

**Definição 4.1.** Dizemos que duas aplicações contínuas de pares  $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  são homotópicas se existe uma aplicação contínua de pares  $F : (X \times I, A \times I) \rightarrow (Y, B)$  tal que  $F(x, 0) = f(x)$  e  $F(x, 1) = g(x)$ .

**Observação 4.1.** Usaremos a notação  $f \simeq g$  para indicar que  $f$  é homotópica a  $g$ .

**Axioma 5** (Homotopia) Se as aplicações contínuas de pares  $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  são homotópicas, então  $\bar{f}_{*q} = \bar{g}_{*q}$ , para todo  $q \in \mathbb{Z}$ .

**Axioma 6** (Excisão) Se  $U$  é um subconjunto aberto do espaço topológico  $X$  tal que  $\bar{U} \subset \text{Int}(A)$  então a aplicação contínua de pares inclusão  $e : (X - U, A - U) \rightarrow (X, A)$  induz um isomorfismo de grupos  $\bar{e}_{*q} : H_q(X - U, A - U) \rightarrow H_q(X, A)$ , para todo  $q \in \mathbb{Z}$ .

**Axioma 7** Se  $P = \{x_0\}$ , onde  $\{x_0\}$  é o espaço topológico constituído de apenas um ponto, então  $H_q(P) = H_q(\{x_0\}) = 0$ , para todo  $q \neq 0$ , onde 0 é o grupo trivial.

**Definição 4.2.** O grupo  $H_0(P)$ , com  $P = \{x_0\}$ , é chamado o grupo de coeficientes da Teoria de Homologia.

Para que uma determinada teoria seja uma Teoria de Homologia é necessário que ela satisfaça os sete axiomas propostos por Eilenberg-Steenrod. Na Homologia Singular, vista anteriormente, o grupo de coeficientes considerado é  $\mathbb{Z}$  e já verificamos que os axiomas 1, 2, 3, 4 e 7 estão satisfeitos através dos seguintes resultados: *Propriedade 3.1, Propriedade 3.2, Diagrama XII, Proposição 3.4 e Exemplo 3.4*, respectivamente.

Neste momento, assumiremos a validade dos axiomas 5 e 6 e veremos algumas aplicações. Mais adiante iremos verificar estes dois axiomas para a Homologia Singular, vista anteriormente.

**Exemplo 4.1.** Os grupos de homologia singular são invariantes por tipo de homotopia.

*Demonstração.* Sejam  $(X, A)$  e  $(Y, B)$  pares de espaços topológicos, que têm o mesmo tipo de homotopia, ou seja, existem aplicações contínuas de pares  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  e  $g : (Y, B) \rightarrow (X, A)$  satisfazendo  $(f \circ g) \simeq \text{Id}_{(Y, B)}$  e  $(g \circ f) \simeq \text{Id}_{(X, A)}$ . Então, fazendo uso dos axiomas 1, 2 e 5, temos que:

- i)  $\overline{(g \circ f)}_{*q} = Id_{(X,A)*q}$ , e assim  $\bar{g}_{*q} \circ \bar{f}_{*q} = Id_{H_q(X,A)}$ , e portanto  $\bar{f}_{*q}$  é injetora.  
 ii)  $\overline{(f \circ g)}_{*q} = Id_{(Y,B)*q}$ , e assim  $\bar{f}_{*q} \circ \bar{g}_{*q} = Id_{H_q(Y,B)}$ , e portanto  $\bar{f}_{*q}$  é sobrejetora.  
 Logo,  $\bar{f}_{*q} : H_q(X, A) \rightarrow H_q(Y, B)$  é um isomorfismo.  $\square$

Relembremos algumas definições topológicas:

**Definição 4.3.** *Considere  $\mathbb{R}^{n+1}$  com a topologia usual. Assim:*

1. *O disco unitário é o subconjunto de  $\mathbb{R}^{n+1}$  dado por  $D^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1})\| \leq 1\}$ .*
2. *A esfera unitária é o subconjunto de  $\mathbb{R}^{n+1}$  dado por  $S^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1})\| = 1\}$ .*
3. *Os hemisférios norte e sul da esfera unitária  $S^n$  são os subconjuntos de  $\mathbb{R}^{n+1}$  dados por:*

$$E_+^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1})\| = 1 \text{ e } x_{n+1} \geq 0\}$$

e

$$E_-^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1})\| = 1 \text{ e } x_{n+1} \leq 0\},$$

respectivamente.

**Observação 4.2.** Geometricamente, a esfera unitária é a fronteira do disco unitário, ou seja,  $\partial(D^n) = S^n$ , em  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Ainda, da definição acima, temos que  $S^n = E_+^n \cup E_-^n$  e  $\emptyset \neq E_+^n \cap E_-^n \approx S^{n-1}$ , onde o símbolo  $\approx$  indica que os dois espaços são homeomorfos.

## 4.2 Suspensão na Homologia

**Definição 4.4.** *Seja  $I$  o intervalo fechado  $[0, 1]$ . Para qualquer espaço topológico  $X$ , a suspensão  $S(X)$  de  $X$  é o espaço quociente  $\frac{X \times I}{R}$ , onde  $R$  é a relação de equivalência dada por:*

$$(x, 1) \sim (x', 1) \text{ e } (x, 0) \sim (x', 0) \text{ para quaisquer } x, x' \in X.$$

**Definição 4.5.**

1. O cone inferior de um espaço topológico  $X$  é o espaço quociente  $C_-X = \frac{X \times [0, \frac{1}{2}]}{R_1}$ , onde  $R_1$  é a relação de equivalência dada por:

$$(x, 0) \sim (x', 0) \text{ para todos } x, x' \in X.$$

2. O cone superior de um espaço topológico  $X$  é o espaço quociente  $C_+X = \frac{X \times [\frac{1}{2}, 1]}{R_2}$ , onde  $R_2$  é a relação de equivalência dada por:

$$(x, 1) \sim (x', 1) \text{ para todos } x, x' \in X.$$

3. O ponto ao qual o subespaço  $X \times \{0\}$  é identificado denomina-se vértice do cone inferior e é indicado por  $v_-$ . Analogamente, o ponto ao qual o subespaço  $X \times \{1\}$  é identificado denomina-se vértice do cone superior e é indicado por  $v_+$ .

Dessas definições concluímos que  $S(X) = C_-X \cup C_+X$  e  $X = C_-X \cap C_+X$ .

**Exemplo 4.2.** Sendo  $S^0 = \{-1, 1\}$  a esfera 0-dimensional e  $I = [0, 1]$ , temos que  $S(S^0)$  é homeomorfo a  $S^1$ .

*Demonstração.* Considere o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} S^0 \times I & \xrightarrow{f} & S^1 \\ \downarrow \pi & \nearrow \bar{f} & \\ S(S^0) = \frac{S^0 \times I}{R} & & \end{array}$$

onde  $R$  é a relação de equivalência dada por  $(-1, 0) \sim (1, 0)$  e  $(-1, 1) \sim (1, 1)$ ,  $f : S^0 \times I \rightarrow S^1$  é a função contínua dada por

$$f(x, t) = \begin{cases} (\cos(\pi t), -\sin(\pi t)), & \text{se } x = -1 \\ (\cos(\pi t), \sin(\pi t)), & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

e  $\bar{f}([(x, t)]) = f(x, t)$ .

Note que  $\bar{f}$  é bem definida, pois  $\bar{f}([(1, 0)]) = \bar{f}([(-1, 0)])$  e  $\bar{f}([(1, 1)]) = \bar{f}([(-1, 1)])$ , uma vez que,  $\bar{f}([(1, 0)]) = f(1, 0) = (\cos(0), \sin(0)) = (1, 0)$  e, por outro lado,  $\bar{f}([(-1, 0)]) = f(-1, 0) = (\cos(0), -\sin(0)) = (1, 0)$ . Também, temos que  $\bar{f}([(1, 1)]) =$



$f(1, 1) = (\cos(\pi), \text{sen}(\pi)) = (-1, 0)$  e, por outro lado,  $\bar{f}([(-1, 1])) = f(-1, 1) = (\cos(\pi), -\text{sen}(\pi)) = (-1, 0)$ .

Além disso,  $\bar{f}$  é bijetora e contínua, como veremos a seguir.

A continuidade de  $\bar{f}$  segue do fato de que  $f$  é uma aplicação contínua.

Para provar que  $\bar{f}$  é injetiva basta verificar que cada uma das classes de equivalência  $[(1, 0)] = [(-1, 0)]$ ,  $[(-1, 1)] = [(1, 1)]$ ,  $[(1, t)]$  e  $[(-1, t)]$ , para  $0 < t < 1$ , determinadas por  $\mathbb{R}$ , são levadas, por  $\bar{f}$ , em imagens distintas. Por definição de  $\bar{f}$  :

$$[(1, 0)] \mapsto (1, 0)$$

$$[(-1, 1)] \mapsto (-1, 0)$$

$$[(1, t)] \mapsto (\cos(\pi t), \text{sen}(\pi t)), 0 < t < 1$$

$$[(-1, t)] \mapsto (\cos(\pi t), -\text{sen}(\pi t)), 0 < t < 1$$

Como

$$\text{a) } (\cos(\pi t), \text{sen}(\pi t)) = (1, 0) \Leftrightarrow \cos(\pi t) = 1 \text{ e } \text{sen}(\pi t) = 0 \Leftrightarrow t = 0.$$

$$\text{b) } (\cos(\pi t), \text{sen}(\pi t)) = (-1, 0) \Leftrightarrow \cos(\pi t) = -1 \text{ e } \text{sen}(\pi t) = 0 \Leftrightarrow t = 1.$$

$$\text{c) } (\cos(\pi t), \text{sen}(\pi t)) = (\cos(\pi t), -\text{sen}(\pi t)) \Leftrightarrow \text{sen}(\pi t) = -\text{sen}(\pi t) \Leftrightarrow \text{sen}(\pi t) = 0 \Leftrightarrow t = 0.$$

$$\text{d) } (\cos(\pi t), -\text{sen}(\pi t)) = (1, 0) \Leftrightarrow \cos(\pi t) = 1 \text{ e } \text{sen}(\pi t) = 0 \Leftrightarrow t = 0.$$

$$\text{e) } (\cos(\pi t), -\text{sen}(\pi t)) = (-1, 0) \Leftrightarrow \cos(\pi t) = -1 \text{ e } \text{sen}(\pi t) = 0 \Leftrightarrow t = 1, \text{ então}$$

para  $0 < t < 1$ , as imagens são distintas duas a duas.

$$\text{f) Finalmente, } (1, 0) \neq (-1, 0),$$

Temos que as classes de equivalência distintas têm imagens distintas e, portanto,  $\bar{f}$  é injetora.

Observemos que  $\bar{f}$  é sobrejetora, pois, para todo  $w \in S^1$ , se  $w$  pertence ao hemisfério norte de  $S^1$  e  $w \notin \{(1, 0), (-1, 0)\}$  temos que  $w = (\cos(\pi t), \text{sen}(\pi t)), t \in ]0, 1[$ . Neste caso, tomando-se  $[(1, t)] \in S(S^0)$  temos que  $w = (\cos(\pi t), \text{sen}(\pi t)) = f(1, t) = \bar{f}([(1, t)])$ . Se  $w$  pertence ao hemisfério sul de  $S^1$  e  $w \notin \{(1, 0), (-1, 0)\}$  temos que  $w = (\cos(-\pi t), \text{sen}(-\pi t)), t \in ]0, 1[$ . Neste caso, tomando-se  $[(-1, t)] \in S(S^0)$  temos que  $w = (\cos(-\pi t), \text{sen}(-\pi t)) = (\cos(\pi t), -\text{sen}(\pi t)) = f(-1, t) = \bar{f}([(-1, t)])$ . Para os pontos que faltam para completar a esfera, note que  $(1, 0) = (\cos(0), \text{sen}(0)) = f(1, 0) = \bar{f}([(1, 0)])$  e  $(-1, 0) = (\cos(\pi), -\text{sen}(\pi)) = f(-1, 1) = \bar{f}([(-1, 1)])$ . Concluimos, assim, que  $\bar{f}$  é sobrejetora.

Como  $\bar{f}$  é contínua,  $S(S^0)$  tem a topologia quociente,  $S^0 \times I$  é compacto,  $S^1$  é

um espaço de Hausdorff e  $\bar{f}$  é bijetora, segue que  $\bar{f}$  é um homeomorfismo. Portanto,  $S(S^0) \approx S^1$ .  $\square$

**Exemplo 4.3.**  $S(S^n)$  é homeomorfo a  $S^{n+1}$ .

*Demonstração.* Primeiro, vamos mostrar que  $C_+S^n$  é homeomorfo ao disco  $D^{n+1}$ . Considere  $f : S^n \times J \rightarrow D^{n+1}$ , onde  $J = [\frac{1}{2}, 1]$ , definida por  $f(x, t) = (2 - 2t)x$ . Temos que  $f$  é contínua e o diagrama seguinte é comutativo:

$$\begin{array}{ccc} S^n \times J & \xrightarrow{\pi} & C_+(S^n) \\ \downarrow f & \swarrow h & \\ D^{n+1} & & \end{array}$$

onde  $\pi$  é a aplicação quociente e  $h([(x, t)]) = f(x, t)$ .

Como  $f(x, 1) = 0 = f(x', 1)$ , a aplicação  $h$  está bem definida.

Agora verifiquemos que  $h$  é bijetora.

A aplicação  $h$  é injetora pois:

1. As possíveis classes distintas em  $C_+(S^n)$  são:  $[(x, 1)] = [(x', 1)]$  com  $x, x' \in S^n$  e  $[(x, t)]$  com  $x \in S^n$  e  $t \in J - \{1\}$ .
2. (a)  $h([(x, 1)]) = h([(x', 1)]) = f(x', 1) = 0$   
 (b)  $h([(x, t)]) = (2 - 2t)x$  com  $x \in S^n$  e  $t \in J - \{1\}$
3. (a) Se  $t \in J - \{1\}$  e  $x \in S^n$  então  $(2 - 2t)x \neq 0$  pois  $2 - 2t > 0$  e  $x \neq 0$   
 (b) Se  $t_1 \neq t_2 \in J - \{1\}$  e  $x \in S^n$  então  $h([(x, t_1)]) \neq h([(x, t_2)])$  pois se  $(2 - 2t_1)x = (2 - 2t_2)x$  então  $(2 - 2t_1)\|x\| = (2 - 2t_2)\|x\|$  e portanto  $t_1 = t_2$  desde que  $\|x\| = 1$ , o que é um absurdo.  
 (c) Se  $x \neq x' \in S^n$  e  $t \in J - \{1\}$  então  $h([(x, t)]) \neq h([(x', t)])$  pois se  $(2 - 2t)x = (2 - 2t)x'$  então, como  $2 - 2t > 0$ , segue que  $x = x'$ , o que é um absurdo.

Também, aplicação  $h$  é sobrejetora, pois dado  $w \in D^{n+1}$  temos que:

1. Se  $w = 0$  então  $h([(x_0, 1)]) = f(x_0, 1) = 0$  para todo  $x_0 \in S^n$ .
2. Se  $w \neq 0$  então  $h([\frac{w}{\|w\|}, \frac{2 - \|w\|}{2}]) = w$ .

Portanto, como  $C_+S^n$  tem a topologia quociente,  $S^n \times J$  é compacto,  $D^{n+1}$  é um espaço de Hausdorff e  $h$  é contínua e bijetora, segue que  $h$  é um homeomorfismo. Portanto,  $C_+S^n \approx D^{n+1}$

Analogamente, verifica-se que  $C_-S^n$  é homeomorfo ao disco  $D^{n+1}$ .

Indicando por  $E_+^{n+1}$  e  $E_-^{n+1}$  os hemisférios norte e sul de  $S^{n+1}$ , respectivamente, temos que  $E_+^{n+1} \approx D^{n+1} \approx E_-^{n+1}$ . Então  $S(S^n) = C_+S^n \cup C_-S^n \approx E_+^{n+1} \cup E_-^{n+1} = S^{n+1}$ . Portanto,  $S(S^n) \approx S^{n+1}$ .  $\square$

**Observação 4.3.** Observe que a demonstração acima é válida para  $n = 0$ , ou seja, a partir do exemplo 4.3, podemos demonstrar a validade do exemplo 4.2.

**Definição 4.6.** Um espaço topológico  $X$  é contrátil, se  $X$  é homotopicamente equivalente a um ponto  $x_0 \in X$ , isto é, existem aplicações  $f : X \rightarrow \{x_0\}$  e  $g : \{x_0\} \rightarrow X$  tais que  $f \circ g \simeq id_{\{x_0\}}$  e  $g \circ f \simeq id_X$

**Exemplo 4.4.** Se  $X$  é um espaço topológico, então  $C_+X$  e  $C_-X$  são espaços contráteis.

*Demonstração.* Demonstraremos apenas que  $C_+X$  é contrátil, pois a demonstração para  $C_-X$  é análoga. Considere as funções  $f : C_+X \rightarrow \{P\}$  e  $g : \{P\} \rightarrow C_+X$  dadas por  $f([(x, t)]) = P$  e  $g(P) = v_+$ . Assim:

$$(f \circ g)(P) = f(g(P)) = f(v_+) = P = Id_{\{P\}}(P).$$

$$(g \circ f)([(x, t)]) = g(f([(x, t)])) = g(P) = v_+.$$

Devemos mostrar que  $(g \circ f) \simeq Id_{C_+X}$ .

Considere  $F : C_+X \times I \rightarrow C_+X$  dada por  $F([x, t], s) = [(x, t(1-s) + s)]$ . Temos que  $F$  é contínua,  $F([x, t], 0) = [(x, t)] = Id_{C_+X}([(x, t)])$  e  $F([x, t], 1) = [(x, 1)] = v_+ = (g \circ f)([(x, t)])$ . Portanto,  $(g \circ f) \simeq Id_{C_+X}$  e  $C_+X$  é um espaço contrátil.  $\square$

**Proposição 4.1.** Se  $Y$  é um espaço contrátil, então  $H_q(Y) \cong 0$  para todo  $q \neq 0$  e  $H_0(Y) \cong \mathbb{Z}$ .

*Demonstração.* Vimos no exemplo 4.1 que os grupos de homologia são invariantes por tipo de homotopia. Como  $Y$  é homotopicamente equivalente a um ponto, digamos  $P$ , temos que:

$$H_q(Y) \cong H_q(P) \cong \begin{cases} 0, & \text{se } q \neq 0 \\ \mathbb{Z}, & \text{se } q = 0 \end{cases}$$

$\square$

Considere a sequência de homologia do par  $(S(X), C_+X)$ :

$$\cdots \rightarrow H_q(C_+X) \xrightarrow{i_{*q}} H_q(S(X)) \xrightarrow{j_{*q}} H_q(S(X), C_+X) \xrightarrow{\Delta_q} H_{q-1}(C_+X) \rightarrow \cdots$$

Sendo  $C_+X$  contrátil, temos que  $H_q(C_+X) \cong 0$ , se  $q \neq 0$ , e  $H_{q-1}(C_+X) \cong 0$ , se  $q \neq 1$ . Assim, para todo  $q \in \mathbb{Z}$ ,  $q \neq 0$  e  $q \neq 1$ , temos:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_q(C_+X) & \xrightarrow{i_{*q}} & H_q(S(X)) & \xrightarrow{j_{*q}} & H_q(S(X), C_+X) \xrightarrow{\Delta_q} & H_{q-1}(C_+X) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \parallel & & & & & \parallel & & \\ & & 0 & & & & & 0 & & \end{array}$$

Observando esta sequência de homologia do par  $(S(X), C_+X)$ , como  $\{0\} = \text{Im}(i_{*q}) = \text{ker}(j_{*q})$ , segue que  $j_{*q}$  é um monomorfismo. Também, sendo  $\Delta_q \equiv 0$ , então  $\text{Im}(j_{*q}) = \text{ker}(\Delta_q) = H_q(S(X), C_+X)$ . Com isso, temos que  $j_{*q}$  é um epimorfismo. Logo  $j_{*q}$  é um isomorfismo e, portanto:

$$H_q(S(X)) \cong H_q(S(X), C_+X), \text{ para todo } q \neq 0 \text{ e } q \neq 1 \quad (4.1)$$

De maneira análoga, considere a sequência de homologia do par  $(C_-X, X)$ :

$$\cdots \rightarrow H_q(C_-X) \xrightarrow{j_{*q}} H_q(C_-X, X) \xrightarrow{\Delta_q} H_{q-1}(X) \xrightarrow{i_{*(q-1)}} H_{q-1}(C_-X) \rightarrow \cdots$$

Sendo  $C_-X$  contrátil, para todo  $q \in \mathbb{Z}$ ,  $q \neq 0$  e  $q \neq 1$ , temos:

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_q(C_-X) & \xrightarrow{j_{*q}} & H_q(C_-X, X) & \xrightarrow{\Delta_q} & H_{q-1}(X) \xrightarrow{i_{*(q-1)}} & H_{q-1}(C_-X) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \parallel & & & & & \parallel & & \\ & & 0 & & & & & 0 & & \end{array}$$

Observando esta sequência de homologia do par  $(C_-X, X)$ , como  $j_{*q} \equiv 0$ , então  $0 = \text{Im}(j_{*q}) = \text{ker}(\Delta_q)$ . Portanto  $\Delta_q$  é um monomorfismo. Além disso, como  $\text{Im}(\Delta_q) = \text{ker}(i_{*(q-1)}) = H_{q-1}(X)$ , então  $\Delta_q$  é um epimorfismo. Logo  $\Delta_q$  é um isomorfismo e portanto:

$$H_q(C_-X, X) \cong H_{q-1}(X), \text{ para todo } q \neq 0 \text{ e } q \neq 1 \quad (4.2)$$

**Proposição 4.2.** *Se  $X$  é um espaço topológico, então  $H_q(X) \cong H_{q+1}(S(X))$ , para todo  $q \geq 1$ .*

*Demonstração.* Considere  $U = \{(x, s) \in S(X) \mid \frac{3}{4} < s \leq 1\}$ .

Observe que,  $U$  é aberto em  $S(X)$ , pois  $\pi^{-1}(U) = X \times (\frac{3}{4}, 1] \subset_{ab} X \times I$  e  $\bar{U} \subset \text{Int}(C_+X)$ . Logo, pelo axioma 6,  $e : (S(X) - U, C_+X - U) \rightarrow (S(X), C_+X)$  induz um isomorfismo  $\bar{e}_{*q} : H_q(S(X) - U, C_+X - U) \rightarrow H_q(S(X), C_+X)$ .

Considerando o diagrama

$$\begin{array}{ccc} (S(X) - U, C_+X - U) & \xrightarrow{e} & (S(X), C_+X) \\ \uparrow k & & \\ (C_-X, X) & & \end{array}$$

onde a inclusão de pares  $k$  é uma equivalência de homotopia, portanto, pelo exemplo 4.1,  $\bar{k}_{*q}$  é um isomorfismo. Logo,  $\bar{k}'_{*q} = \overline{(e \circ k)}_{*q} : H_q(C_-X, X) \rightarrow H_q(S(X), C_+X)$  é um isomorfismo para todo  $q \in \mathbb{Z}$  e assim

$$H_q(C_-X, X) \cong H_q(S(X), C_+X), \text{ para todo } q \in \mathbb{Z} \tag{4.3}$$

Portanto, tendo em vista as equações (4.1), (4.2) e (4.3), segue que a composição

$$H_q(X) \xrightarrow{\Delta_{q+1}^{-1}} H_{q+1}(C_-X, X) \xrightarrow{\bar{k}'_{*(q+1)}} H_{q+1}(S(X), C_+X) \xrightarrow{j_{*(q+1)}^{-1}} H_{q+1}(S(X))$$

dada por  $\delta = j_{*(q+1)}^{-1} \circ \bar{k}'_{*(q+1)} \circ \Delta_{q+1}^{-1}$  é um isomorfismo, para todo  $q \geq 1$ . Isto demonstra o resultado. □

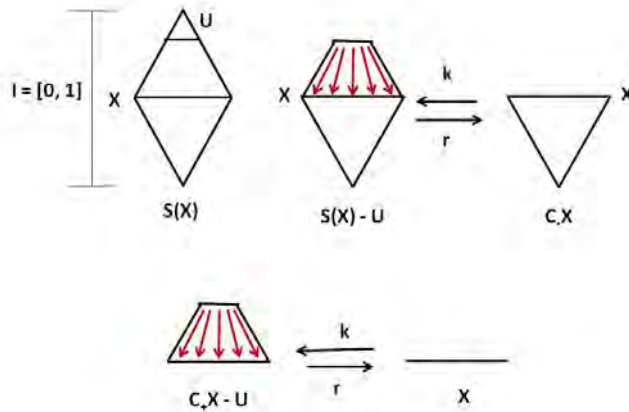


Figura 4.1: Equivalência de homotopia  $k$ .

**Definição 4.7.** A aplicação  $\delta$ , definida na proposição 4.2, é denominada homomorfismo de suspensão de homologia.

## 5 Grupos de Homologia das Esferas

Neste capítulo, trabalharemos sobre os grupos de homologia das esferas com o objetivo de descrever estes grupos para  $n \geq 0$ . Mostraremos os seguintes resultados:

1. Se  $n = 0$ :

$$H_q(S^n) = H_q(S^0) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & \text{se } q = 0 \\ 0, & \text{se } q \neq 0 \end{cases}$$

2. Para todo  $n \geq 1$ :

$$H_q(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } q = 0 \text{ ou } q = n \\ 0, & \text{se } q \neq 0 \text{ e } q \neq n \end{cases}$$

Os grupos de homologia das esferas constituem ferramentas essenciais para demonstrar aplicações referentes à Homologia Singular, como a não existência de um homeomorfismo entre  $\mathbb{R}^m$  e  $\mathbb{R}^n$ , se  $m \neq n$ . Esta aplicação será estudada no próximo capítulo.

Assim, iniciaremos pela:

**Proposição 5.1.**  $H_q(S^0) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & \text{se } q = 0 \\ 0, & \text{se } q \neq 0 \end{cases}$

*Demonstração.* Observemos inicialmente que  $S^0 = \{-1, 1\}$  e que  $\{-1\}$  e  $\{1\}$  são conjuntos abertos e fechados em  $S^0$ .

Como  $\{-1\}$  é aberto, então  $\{-1\} = \text{Int}(\{-1\})$ . Considerando  $A = U = \{-1\}$ , pelo Axioma 6 de Eilenberg-Steenrod, temos que a inclusão  $e : \{1\} = (\{1\}, \emptyset) \rightarrow (S^0, \{-1\})$  induz um isomorfismo

$$\bar{e}_{*q} : H_q(\{1\}) \rightarrow H_q(S^0, \{-1\}), \text{ para todo } q \in \mathbb{Z}$$

Visto que,  $r : S^0 \rightarrow \{-1\}$  definida por  $r(x) = -1$ , para todo  $x \in S^0$ , é uma retração, pois  $r \circ i(-1) = r(-1) = -1 = id_{\{-1\}}(-1)$ , onde  $i : \{-1\} \rightarrow S^0$  é a inclusão, segue da proposição 3.5 que

$$H_q(S^0) \cong H_q(\{-1\}) \oplus H_q(S^0, \{-1\}),$$

ou ainda, através do isomorfismo  $\bar{e}_{*q}$  acima, que:

$$H_q(S^0) \cong H_q(\{-1\}) \oplus H_q(\{1\}), \text{ para todo } q \in \mathbb{Z}$$

Considerando separadamente os casos  $q = 0$  e  $q \neq 0$  e aplicando o exemplo 3.4, segue que:

i) Para  $q = 0$ ,  $H_0(S^0) \cong H_0(\{-1\}) \oplus H_0(\{1\}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ .

ii) Para  $q \neq 0$ ,  $H_q(S^0) \cong H_q(\{-1\}) \oplus H_q(\{1\}) \cong \{0\} \oplus \{0\} \cong 0$ .  $\square$

**Lema 5.1.**  $H_q(E_-^1, S^0) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } q = 1 \\ 0, & \text{se } q = 0 \text{ ou } q \geq 2. \end{cases}$

*Demonstração.* Da observação 4.2, se  $E_+^1$  e  $E_-^1$  denotam os hemisférios norte e sul, de  $S^1$ , respectivamente, temos que  $S^1 = E_+^1 \cup E_-^1$ .

Tomemos um arco de circunferência,  $\lambda$ , aberto em  $S^1$ , tal que  $\bar{\lambda}$  está contido no interior de  $E_+^1$ . Consideremos o diagrama

$$\begin{array}{ccc} (S^1 - \lambda, E_+^1 - \lambda) & \xrightarrow{e} & (S^1, E_+^1) \\ \uparrow k & & \uparrow j' \\ (E_-^1, S^0) & & S^1 = (S^1, \emptyset) \end{array}$$

onde  $j'$  e  $k$  são inclusões e  $k$  é uma equivalência de homotopia. Logo, pela equação (4.3),  $k' = e \circ k$ , induz um isomorfismo  $\bar{k}'_{*q}$ , para todo  $q \in \mathbb{Z}$  e temos:

$$H_q(E_-^1, S^0) \cong H_q(S^1, E_+^1) \text{ para todo } q \in \mathbb{Z} \quad (5.1)$$

Também, pela equação (4.1) temos que  $j'_{*q}$  é um isomorfismo para todo  $q \geq 2$ . Assim,

$$H_q(S^1) \cong H_q(S^1, E_+^1), \text{ para todo } q \geq 2 \quad (5.2)$$

Observemos que nas equações (5.1) e (5.2) estamos usando o fato de que  $S^1 \approx S(S^0)$ ,  $C_-S^0 \approx E_-^1$  e  $C_+S^0 \approx E_+^1$ .

Da sequência exata

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow H_q(S^0) \xrightarrow{i_*^q} H_q(E_-^1) \xrightarrow{j_*^q} H_q(E_-^1, S^0) \xrightarrow{\Delta^q} H_{q-1}(S^0) \xrightarrow{i_*^{(q-1)}} \\ H_{q-1}(E_-^1) \xrightarrow{j_*^{(q-1)}} H_{q-1}(E_-^1, S^0) \xrightarrow{\Delta^{q-1}} H_{q-2}(S^0) \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

fazendo  $q = 0$ , obtemos a sequência exata

$$\cdots \rightarrow H_0(S^0) \xrightarrow{i_*^0} H_0(E_-^1) \xrightarrow{j_*^0} H_0(E_-^1, S^0) \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$$

onde  $i_{*0}$  é a aplicação induzida da aplicação inclusão  $i_0 : S^0 \rightarrow E_-^1$ . Definamos  $\delta : E_-^1 \rightarrow S^0$  tal que  $\delta(x) = 1 \equiv (1, 0) \in E_-^1$ , para todo  $x \in E_-^1$ .

Então  $(i_0 \circ \delta)(x) = i_0(\delta(x)) = i_0(1, 0) = (1, 0)$  e  $i_0 \circ \delta \simeq Id_{E_-^1}$ .

Escrevendo  $x \in E_-^1$  na forma  $x = (\cos \theta, -\sin \theta)$ , com  $\theta \in [0, \pi]$ , defina  $F : E_-^1 \times I \rightarrow E_-^1$  por  $F((\cos \theta, -\sin \theta), t) = (\cos((1-t)\theta), -\sin((1-t)\theta))$ . Assim,  $F$  é contínua,  $F(x, 0) = F((\cos \theta, -\sin \theta), 0) = (\cos \theta, -\sin \theta) = x = Id_{E_-^1}(x)$  e  $F(x, 1) = F((\cos \theta, -\sin \theta), 1) = (1, 0) = i_0 \circ \delta(x)$ . Logo  $F$  é uma homotopia entre  $Id_{E_-^1}$  e  $i_0 \circ \delta$ . Portanto  $i_{*0} \circ \delta_* = Id_{H_0(E_-^1)}$ , ou seja,  $i_{*0}$  é um epimorfismo.

Como  $E_-^1$  é contrátil, segue pela proposição 4.1 que  $H_0(E_-^1) \cong \mathbb{Z}$ . Assim,  $\mathbb{Z} = \text{Im } i_{*0} = \ker j_{*0}$ , donde segue que  $j_{*0}$  é o homomorfismo nulo e daí  $H_0(E_-^1, S^0) \cong 0$ .

Para  $q = 1$ , desde que  $E_-^1$  é contrátil, segue pela proposição 4.1 que  $H_1(E_-^1) = 0$  e  $H_0(E_-^1) = \mathbb{Z}$  e, pela proposição 5.1,  $H_0(S^0) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ . Assim, obtemos a sequência exata curta

$$0 \xrightarrow{j_*^1} H_1(E_-^1, S^0) \xrightarrow{\Delta^1} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{i_*^0} \mathbb{Z} \xrightarrow{j_*^0} 0$$

Desde que  $i_{*0} \circ \delta_* = Id_{H_0(E_-^1)}$ , segue pelo corolário 2.1, que  $H_1(E_-^1, S^0) \oplus \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$  é um isomorfismo e, portanto,  $H_1(E_-^1, S^0) \cong \mathbb{Z}$ .

Ainda pela mesma sequência, para  $q \geq 2$ , obtemos  $H_q(E_-^1, S^0) = 0$ , desde que  $H_q(E_-^1) \cong 0$  e  $H_q(S^0) \cong 0$ , para  $q \geq 2$ . □



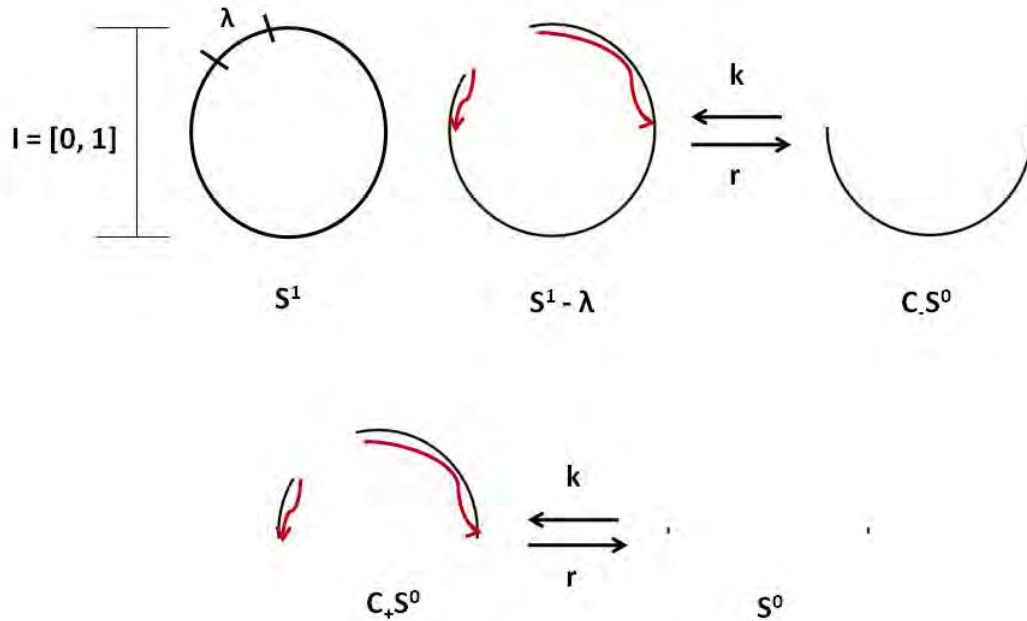


Figura 5.1: Equivalência de homotopia \$k\$.

**Proposição 5.2.**  $H_q(S^1) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } q = 0 \text{ ou } q = 1 \\ 0, & \text{se } q \neq 0 \text{ e } q \neq 1 \end{cases}$

*Demonstração.* Consideremos a sequência exata de homologia do par \$(S^1, E\_+^1)\$:

$$\dots \rightarrow H_q(E_+^1) \xrightarrow{i_*q} H_q(S^1) \xrightarrow{j_*q} H_q(S^1, E_+^1) \xrightarrow{\Delta_q} H_{q-1}(E_+^1) \rightarrow \dots$$

Para \$q \ge 2\$ das equações (5.1) e (5.2), do lema anterior, temos:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & 0 & \xrightarrow{i_*q} & H_q(S^1) & \xrightarrow{j_*q} & H_q(S^1, E_+^1) \xrightarrow{\Delta_q} 0 \longrightarrow \dots \\ & & & & & & \cong \uparrow k'_{*q} \\ & & & & & & H_q(E_-^1, S^0) \end{array}$$

Então, pelo lema anterior, \$H\_q(E\_-^1, S^0) \cong 0\$, se \$q \ge 2\$ ou equivalentemente \$H\_q(S^1) \cong 0\$, se \$q \neq 0\$ e \$q \neq 1\$.

Para \$q = 1\$, obtemos a sequência exata

$$\dots \rightarrow H_1(E_+^1) \xrightarrow{i_*1} H_1(S^1) \xrightarrow{j_*1} H_1(S^1, E_+^1) \xrightarrow{\Delta_1} H_0(E_+^1) \xrightarrow{i_*0} H_0(S^1) \xrightarrow{j_*0} H_0(S^1, E_+^1) \rightarrow \dots$$

Usando a equação (5.1) do lema 5.1 e a proposição 4.1 esta sequência pode ser escrita como:

$$\dots \rightarrow 0 \xrightarrow{i_{*1}} H_1(S^1) \xrightarrow{j_{*1}} \mathbb{Z} \xrightarrow{\Delta_1} \mathbb{Z} \xrightarrow{i_{*0}} H_0(S^1) \xrightarrow{j_{*0}} 0 \rightarrow \dots$$

Note que  $j_{*1}$  é um monomorfismo, pois  $\ker(j_{*1}) = \text{Im}(i_{*1}) = 0$ .

Para mostrarmos que  $j_{*1}$  é um epimorfismo, temos primeiro que garantir que  $i_{*0}$  é um monomorfismo. Neste caso, concluímos que  $\text{Im}(\Delta_1) = \ker(i_{*0}) = 0$  e, consequentemente,  $\Delta_1 \equiv 0$ . Então  $\text{Im}(j_{*1}) = \ker \Delta_1 = \mathbb{Z}$  e, portanto,  $H_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ .

Mostremos então que  $i_{*0}$  é um monomorfismo.

Definamos a aplicação  $\delta : S^1 \approx S(S^0) \rightarrow C_+S^0 \approx E_+^1$  dada por  $\delta(y) = v_+$ , para todo  $y \in S(S^0)$ . Então  $(\delta \circ i_0)(x) = \delta(i_0(x)) = \delta(x) = v_+$ . Afirmamos que  $(\delta \circ i_0) \simeq \text{Id}_{E_+^1}$ . De fato, consideremos a aplicação contínua  $F : E_+^1 \times I \rightarrow E_+^1$ , definida por  $F([(x, t)], s) = [(x, t(1-s) + s)]$ . Estamos considerando  $E_+^1$  homeomorfo a  $C_+S^0 = \frac{S^0 \times [\frac{1}{2}, 1]}{R}$ , onde  $R$  é a relação de equivalência  $(x, 1) \sim (x', 1)$ , para todo  $x, x' \in S^0$ . Assim,  $F([(x, t)], 0) = [(x, t)] = \text{id}_{E_+^1}([(x, t)])$  e  $F([(x, t)], 1) = [(x, 1)] = v_+ = (\delta \circ i_0)(x)$ . Logo  $F$  é uma homotopia entre  $\text{id}_{E_+^1}$  e  $\delta \circ i_0$ . Pelo Axioma 5, de Eilenberg-Steenrod, temos  $(\delta \circ i_0)_* = (\text{Id}_{E_+^1})_*$ . Então  $\delta_* \circ i_{*0} = \text{Id}_{H_0(E_+^1)}$ . Logo  $i_{*0}$  é um monomorfismo.

Sendo a sequência

$$\dots \rightarrow 0 \xrightarrow{i_{*1}} H_1(S^1) \xrightarrow{j_{*1}} \mathbb{Z} \xrightarrow{\Delta_1} \mathbb{Z} \xrightarrow{i_{*0}} H_0(S^1) \xrightarrow{j_{*0}} 0 \rightarrow \dots$$

exata e  $j_{*0} \equiv 0$ , temos que  $\text{Im}(i_{*0}) = \ker(j_{*0}) = H_0(S^1)$  e, portanto,  $i_{*0}$  é epimorfismo.

Logo  $H_0(S^1) \cong \mathbb{Z}$  o que completa a demonstração.  $\square$

Antes de calcularmos  $H_q(S^n)$ , para  $n \geq 1$ , calcularemos  $H_q(S^2)$ , com o objetivo de ajudar na compreensão dos passos a serem seguidos na demonstração do caso geral.

**Proposição 5.3.**  $H_q(S^2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } q = 0 \text{ ou } q = 2 \\ 0, & \text{se } q \neq 0 \text{ e } q \neq 2 \end{cases}$

*Demonstração.* Pela proposição 4.2, temos que  $H_q(S^1) \cong H_{q+1}(S^2)$ , para  $q \geq 1$ . Logo, pela proposição 5.2,  $H_2(S^2) \cong H_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$  e  $H_{q+1}(S^2) \cong 0$  se  $q \geq 2$ .

Sejam,  $E_+^2$  e  $E_-^2$  os hemisférios norte e sul da esfera  $S^2$ , respectivamente. Consideremos, agora, um aberto  $U \subset S^2$  tal que  $\bar{U} \subset \text{Int}(E_+^2)$ . Note que  $E_+^2$  é homeomorfo a

$C_+S^1$ . Assim, temos:

$$\begin{array}{ccc} (S^2 - U, E_+^2 - U) & \xrightarrow{e} & (S^2, E_+^2) \\ \uparrow k & & \\ (E_-^2, S^1) & & \end{array}$$

com  $k$  uma equivalência de homotopia e considere  $k' = e \circ k$ . Portanto  $\bar{e}_{*q} : H_q(S^2 - U, E_+^2 - U) \rightarrow H_q(S^2, E_+^2)$  e  $\bar{k}'_{*q} : H_q(E_-^2, S^1) \rightarrow H_q(S^2, E_+^2)$  são isomorfismos, para todo  $q \in \mathbb{Z}$  e podemos escrever:

$$H_q(S^2 - U, E_+^2 - U) \cong H_q(S^2, E_+^2) \quad (5.3)$$

e, também:

$$H_q(E_-^2, S^1) \cong H_q(S^2, E_+^2) \quad (5.4)$$

Lembrando que  $S^2 \approx S(S^1)$ , pela equação (4.1), concluimos que  $j_{*q} : H_q(S^2) \rightarrow H_q(S^2, E_+^2)$  é um isomorfismo, para todo  $q \geq 2$  e escrevemos:

$$H_q(S^2) \cong H_q(S^2, E_+^2), \text{ para todo } q \geq 2 \quad (5.5)$$

Para  $q = 1$ , considere a sequência exata de homologia do par  $(E_-^2, S^1)$ :

$$\dots \rightarrow H_1(S^1) \xrightarrow{i_{*1}} H_1(E_-^2) \xrightarrow{j_{*1}} H_1(E_-^2, S^1) \xrightarrow{\Delta_1} H_0(S^1) \xrightarrow{i_{*0}} H_0(E_-^2) \rightarrow \dots$$

Então, pelas proposições 4.1 e 5.2, temos:

$$\dots \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{i_{*1}} 0 \xrightarrow{j_{*1}} H_1(E_-^2, S^1) \xrightarrow{\Delta_1} \mathbb{Z} \xrightarrow{i_{*0}} \mathbb{Z} \rightarrow \dots$$

Seja  $\delta : E_-^2 \rightarrow S^1$  tal que, para todo  $x \in E_-^2$ ,  $\delta(x) = v_- \in S^1$ . Temos que  $(i_0 \circ \delta)(x) = i_0(\delta(x)) = i_0(v_-) = v_-$  e  $i_0 \circ \delta \simeq Id_{E_-^2}$ . Considere a aplicação contínua  $F : E_-^2 \times I \rightarrow E_-^2$  definida por  $F([(x, t)], s) = [(x, t(1-s))]$ , para toda classe  $[(x, t)] \in C_-S^1 \approx E_-^2$  e todo  $s \in I$ . Temos que  $F([(x, t), 0]) = [(x, t)] = Id_{E_-^2}([(x, t)])$  e  $F([(x, t), 1]) = [(x, 0)] = v_- = (i_0 \circ \delta)(x)$ . Portanto  $F$  é uma homotopia entre  $Id_{E_-^2}$  e  $i_0 \circ \delta$ .

Portanto  $(i_{*0} \circ \delta_*) = Id_{H_0(E_-^2)}$  e concluimos que  $i_{*0}$  é um epimorfismo de  $\mathbb{Z}$  em  $\mathbb{Z}$ .

Assim, pelo teorema do isomorfismo,  $\mathbb{Z} \cong \frac{\mathbb{Z}}{\ker i_{*0}}$  e portanto  $\ker i_{*0} \cong 0$ . Logo,  $i_{*0}$  é um monomorfismo e, conseqüentemente, um isomorfismo. Como  $i_{*0}$  é um isomorfismo e a sequência

$$\dots \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{i_{*1}} 0 \xrightarrow{j_{*1}} H_1(E_-^2, S^1) \xrightarrow{\Delta_1} \mathbb{Z} \xrightarrow{i_{*0}} \mathbb{Z} \rightarrow \dots$$

é exata, temos que  $Im(\Delta_1) = ker(i_{*0}) = 0$ . Então  $\Delta_1 \equiv 0$ . Isto implica que  $H_1(E_-^2, S^1) = ker(\Delta_1) = Im(j_{*1}) = 0$ . Portanto

$$H_1(E_-^2, S^1) \cong 0 \quad (5.6)$$

Agora, para  $q = 0$ , temos a sequência exata de homologia do par  $(E_-^2, S^1)$ :

$$\dots \rightarrow H_1(E_-^2, S^1) \xrightarrow{\Delta_1} H_0(S^1) \xrightarrow{i_{*0}} H_0(E_-^2) \xrightarrow{j_{*0}} H_0(E_-^2, S^1) \xrightarrow{\Delta_0} 0 \rightarrow \dots$$

Usando a equação (5.6) e as proposições 4.1 e 5.2, a sequência acima é equivalente a:

$$\dots \rightarrow 0 \xrightarrow{\Delta_1} \mathbb{Z} \xrightarrow{i_{*0}} \mathbb{Z} \xrightarrow{j_{*0}} H_0(E_-^2, S^1) \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

Nesta mesma proposição, vimos que  $i_{*0}$  é um isomorfismo de  $\mathbb{Z}$  em  $\mathbb{Z}$ .

Observemos que  $j_{*0}$  é um epimorfismo e, portanto, usando o Teorema do Isomorfismo:

$$H_0(E_-^2, S^1) \cong \frac{\mathbb{Z}}{ker(j_{*0})} = \frac{\mathbb{Z}}{Im(i_{*0})} \cong \frac{\mathbb{Z}}{\mathbb{Z}} \cong 0$$

Logo

$$H_0(E_-^2, S^1) \cong 0. \quad (5.7)$$

Finalmente, a sequência de homologia do par  $(S^2, E_+^2)$  fornece:

$$\dots \rightarrow H_1(E_+^2) \xrightarrow{i_{*1}} H_1(S^2) \xrightarrow{j_{*1}} H_1(S^2, E_+^2) \xrightarrow{\Delta_1} H_0(E_+^2) \xrightarrow{i_{*0}} H_0(S^2) \xrightarrow{j_{*0}} H_0(S^2, E_+^2) \rightarrow \dots$$

Pelas equações (5.4), (5.6), (5.7) e pela proposição 4.1, esta sequência é equivalente a:

$$\dots \rightarrow 0 \xrightarrow{i_{*1}} H_1(S^2) \xrightarrow{j_{*1}} 0 \xrightarrow{\Delta_1} \mathbb{Z} \xrightarrow{i_{*0}} H_0(S^2) \xrightarrow{j_{*0}} 0 \rightarrow \dots$$

Logo  $H_1(S^2) = 0$  e  $H_0(S^2) \cong \mathbb{Z}$ , como queríamos demonstrar.  $\square$

Finalizaremos esta seção com o resultado principal sobre os grupos de homologia das esferas:

**Proposição 5.4.** Para todo  $n \geq 1$ ,  $H_q(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } q = 0 \text{ ou } q = n \\ 0, & \text{se } q \neq 0 \text{ e } q \neq n \end{cases}$

*Demonstração.* Esta demonstração será feita por indução sobre  $n \in \mathbb{N}^*$ . Pela proposição 5.2, o resultado é válido para  $n = 1$ . Suponhamos, agora, que este resultado é válido para  $n \in \mathbb{N}^*$  e vamos provar que também será válido para  $n + 1 \in \mathbb{N}^*$ .

Utilizando o exemplo 4.3 e a proposição 4.2, temos  $H_q(S^{n+1}) \cong H_q(S(S^n))$  para todo  $q \geq 0$  e  $H_q(S(S^n)) \cong H_{q-1}(S^n)$ , para todo  $q \geq 2$ , respectivamente. Portanto, temos que  $H_q(S^{n+1}) \cong 0$ , para todo  $2 \leq q < n+1$  ou  $q > n+1$ .

Também, temos que para  $q = n+1$ , desde que  $n+1 \geq 3$ ,  $H_{n+1}(S^{n+1}) \cong H_{n+1}(S(S^n)) \cong H_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$ .

Sejam  $E_+^{n+1}$  e  $E_-^{n+1}$  os hemisférios norte e sul da esfera  $S^{n+1}$ , respectivamente. Consideremos, agora, um aberto  $U \subset S^{n+1}$  tal que  $\bar{U} \subset \text{Int}(E_+^{n+1})$ . Note que  $E_+^{n+1}$  é homeomorfo a  $C_+S^n$ . Assim, temos:

$$\begin{array}{ccc} (S^{n+1} - U, E_+^{n+1} - U) & \xrightarrow{e} & (S^{n+1}, E_+^{n+1}) \\ \uparrow k & & \\ (E_-^{n+1}, S^n) & & \end{array}$$

com  $k$  uma equivalência de homotopia e considere  $k' = e \circ k$ . Portanto  $\bar{e}_{*q} : H_q(S^{n+1} - U, E_+^{n+1} - U) \rightarrow H_q(S^{n+1}, E_+^{n+1})$  e  $\bar{k}'_{*q} : H_q(E_-^{n+1}, S^n) \rightarrow H_q(S^{n+1}, E_+^{n+1})$  são isomorfismos, para todo  $q \in \mathbb{Z}$  e podemos escrever:

$$H_q(S^{n+1} - U, E_+^{n+1} - U) \cong H_q(S^{n+1}, E_+^{n+1}) \quad (5.8)$$

e, também:

$$H_q(E_-^{n+1}, S^n) \cong H_q(S^{n+1}, E_+^{n+1}) \quad (5.9)$$

Lembrando que  $S^{n+1} \approx S(S^n)$ , pela equação (4.1), concluímos que  $j_{*q} : H_q(S^{n+1}) \rightarrow H_q(S^{n+1}, E_+^{n+1})$  é um isomorfismo, para todo  $q \geq 2$  e escrevemos:

$$H_q(S^{n+1}) \cong H_q(S^{n+1}, E_+^{n+1}), \text{ para todo } q \geq 2 \quad (5.10)$$

Para  $q = 1$ , considere a sequência de homologia do par  $(E_-^{n+1}, S^n)$ :

$$\dots \rightarrow H_1(E_-^{n+1}) \xrightarrow{j_*1} H_1(E_-^{n+1}, S^n) \xrightarrow{\Delta_1} H_0(S^n) \xrightarrow{i_*0} H_0(E_-^{n+1}) \rightarrow \dots$$

Então, pela proposição 4.1 e hipótese de indução, temos:

$$\dots \rightarrow 0 \xrightarrow{j_*1} H_1(E_-^{n+1}, S^n) \xrightarrow{\Delta_1} \mathbb{Z} \xrightarrow{i_*0} \mathbb{Z} \rightarrow \dots$$

Seja  $\delta : E_-^{n+1} \rightarrow S^n$  tal que, para todo  $x \in E_-^{n+1}$ ,  $\delta(x) = v_- \in S^n$ .

Assim,  $(i_0 \circ \delta)(x) = i_0(\delta(x)) = i_0(v_-) = v_-$  e  $i_0 \circ \delta \simeq Id_{E_-^{n+1}}$ . Considere a aplicação contínua  $F : E_-^{n+1} \times I \rightarrow E_-^{n+1}$  definida por  $F([(x, t)], s) = [(x, t(1-s))]$ , para

toda classe  $[(x, t)] \in C_- S^n \approx E_-^{n+1}$  e todo  $s \in I$ . Temos  $F([(x, t), 0]) = [(x, t)] = Id_{E_-^{n+1}}([(x, t)])$  e  $F([(x, t), 1]) = [(x, 0)] = v_- = (i_0 \circ \delta)(x)$ . Portanto  $F$  é uma homotopia entre  $Id_{E_-^{n+1}}$  e  $i_0 \circ \delta$ . Portanto  $(i_{*0} \circ \delta_*) = Id_{H_0(E_-^{n+1})}$  e concluímos que  $i_{*0}$  é um epimorfismo de  $\mathbb{Z}$  em  $\mathbb{Z}$ .

Assim, pelo teorema do isomorfismo,  $\mathbb{Z} \cong \frac{\mathbb{Z}}{\ker i_{*0}}$  e, portanto,  $\ker i_{*0} \cong 0$ . Logo,  $i_{*0}$  é um monomorfismo e, conseqüentemente, um isomorfismo. Como  $i_{*0}$  é um isomorfismo e a seqüência

$$\dots \rightarrow 0 \xrightarrow{j_{*1}} H_1(E_-^{n+1}, S^n) \xrightarrow{\Delta_1} \mathbb{Z} \xrightarrow{i_{*0}} \mathbb{Z} \rightarrow \dots$$

é exata, temos que  $Im(\Delta_1) = \ker(i_{*0}) = 0$ . Então  $\Delta_1 \equiv 0$ . Isto implica que  $H_1(E_-^{n+1}, S^n) = \ker(\Delta_1) = Im(j_{*1}) = 0$ . Portanto

$$H_1(E_-^{n+1}, S^n) \cong 0 \quad (5.11)$$

Agora, para  $q = 0$ , temos a seqüência de homologia do par  $(E_-^{n+1}, S^n)$ :

$$\dots \rightarrow H_1(E_-^{n+1}, S^n) \xrightarrow{\Delta_1} H_0(S^n) \xrightarrow{i_{*0}} H_0(E_-^{n+1}) \xrightarrow{j_{*0}} H_0(E_-^{n+1}, S^n) \xrightarrow{\Delta_0} 0 \rightarrow \dots$$

Usando a equação (5.11), a proposição 4.1 e a hipótese de indução (HP), a seqüência acima é equivalente a:

$$\dots \rightarrow 0 \xrightarrow{\Delta_1} \mathbb{Z} \xrightarrow{i_{*0}} \mathbb{Z} \xrightarrow{j_{*0}} H_0(E_-^{n+1}, S^n) \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

Nesta mesma proposição, vimos que  $i_{*0}$  é um isomorfismo de  $\mathbb{Z}$  em  $\mathbb{Z}$ .

Observemos que  $j_{*0}$  é um epimorfismo e portanto usando o Teorema do Isomorfismo:

$$H_0(E_-^{n+1}, S^n) \cong \frac{\mathbb{Z}}{\ker(j_{*0})} = \frac{\mathbb{Z}}{Im(i_{*0})} \cong \frac{\mathbb{Z}}{\mathbb{Z}} \cong 0$$

Logo

$$H_0(E_-^{n+1}, S^n) \cong 0. \quad (5.12)$$

Finalmente, a seqüência de homologia do par  $(S^{n+1}, E_+^{n+1})$  fornece:

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H_1(E_+^{n+1}) \xrightarrow{i_{*1}} H_1(S^{n+1}) \xrightarrow{j_{*1}} H_1(S^{n+1}, E_+^{n+1}) \xrightarrow{\Delta_1} \\ \xrightarrow{\Delta_1} H_0(E_+^{n+1}) \xrightarrow{i_{*0}} H_0(S^{n+1}) \xrightarrow{j_{*0}} H_0(S^{n+1}, E_+^{n+1}) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Pelas equações (5.9), (5.11), (5.12) e pela proposição 4.1, esta seqüência é equivalente a:

$$\dots \rightarrow 0 \xrightarrow{i_{*1}} H_1(S^{n+1}) \xrightarrow{j_{*1}} 0 \xrightarrow{\Delta_1} \mathbb{Z} \xrightarrow{i_{*0}} H_0(S^{n+1}) \xrightarrow{j_{*0}} 0 \rightarrow \dots$$

Logo  $H_1(S^{n+1}) = 0$  e  $H_0(S^{n+1}) \cong \mathbb{Z}$ , o que completa a demonstração.  $\square$

## 6 Aplicações da Teoria de Homologia

Neste capítulo, demonstraremos três aplicações da Homologia Singular: a não existência de um homeomorfismo entre dois espaços euclidianos reais de dimensões distintas, o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer e a não existência de um Campo Vetorial não-nulo nas esferas unitárias de dimensão par.

### 6.1 A Não Existência de Homeomorfismo entre $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$ , se $m \neq n$

Visto os grupos de homologia das esferas  $S^n$ , no *Capítulo 5*, onde provamos que

1. Se  $n = 0$ , então  $H_q(S^n) = H_q(S^0) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & \text{se } q = 0 \\ 0, & \text{se } q \neq 0 \end{cases}$
2. Para todo  $n \geq 1$ , temos que  $H_q(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se } q = 0 \text{ ou } q = n \\ 0, & \text{se } q \neq 0 \text{ e } q \neq n \end{cases}$

podemos enunciar e demonstrar a primeira aplicação, da Homologia Singular:

**Teorema 6.1.** *Para quaisquer inteiros  $m, n \geq 1$ , com  $m \neq n$ ,  $\mathbb{R}^m$  e  $\mathbb{R}^n$  não são homeomorfos.*

*Demonstração.* Inicialmente, suponhamos  $n > m \geq 1$ .

Primeiro, demonstraremos o resultado para  $m = 1$  e  $n \geq 2$ . Suponhamos que  $\mathbb{R}$  e  $\mathbb{R}^n$ , com  $n \geq 2$ , são homeomorfos, ou seja, existe um homeomorfismo  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Então  $h|_{\mathbb{R} - \{0\}} : \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n - \{h(0)\}$  ainda é um homeomorfismo. Mas isto é um absurdo, pois  $\mathbb{R} - \{0\}$  não é conexo e  $\mathbb{R}^n - \{h(0)\}$  é conexo e a propriedade ser conexo

é invariante por homeomorfismos, desde que, imagem de um conjunto conexo por uma aplicação contínua, também é conexa.

Considere, agora,  $n > m \geq 2$ . Suponhamos, novamente, que existe um homeomorfismo  $h : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Então  $f = h|_{\mathbb{R}^m - \{0\}} : \mathbb{R}^m - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n - \{h(0)\}$  ainda é um homeomorfismo e portanto temos que o homomorfismo induzido  $f_{*q} : H_q(\mathbb{R}^m - \{0\}) \rightarrow H_q(\mathbb{R}^n - \{h(0)\})$  é um isomorfismo, para todo  $q \in \mathbb{Z}$ .

Vimos no exemplo 3.6 que a aplicação  $r : \mathbb{R}^m - \{0\} \rightarrow S^{m-1}$  dada por  $r(x) = \frac{x}{\|x\|}$  é uma retração. Sendo  $i : S^{m-1} \rightarrow \mathbb{R}^m - \{0\}$  a aplicação inclusão, temos que  $(r \circ i) = Id_{S^{m-1}}$ . Então  $r_{*q} \circ i_{*q} = (r \circ i)_{*q} = Id_{H_q(S^{m-1})}$ . Ou seja,  $i_{*q}$  é injetora.

Por outro lado,  $(i \circ r)(x) = i(r(x)) = i\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = \frac{x}{\|x\|}$ , para todo  $x \in \mathbb{R}^m - \{0\}$ . Afirmamos que  $(i \circ r) \simeq Id_{\mathbb{R}^m - \{0\}}$ .

Consideremos  $F : \mathbb{R}^m - \{0\} \times I \rightarrow \mathbb{R}^m - \{0\}$  dada por  $F(x, t) = (1-t)\frac{x}{\|x\|} + tx$ . Então  $F$  é uma aplicação contínua tal que  $F(x, 0) = \frac{x}{\|x\|} = (i \circ r)(x)$  e  $F(x, 1) = x = Id_{\mathbb{R}^m - \{0\}}(x)$ . Isto mostra que  $(i \circ r) \simeq Id_{\mathbb{R}^m - \{0\}}$ . Consequentemente,  $i_{*q} \circ r_{*q} = Id_{H_q(\mathbb{R}^m - \{0\})}$  e  $i_{*q}$  é um epimorfismo.

Portanto  $i_{*q} : H_q(S^{m-1}) \rightarrow H_q(\mathbb{R}^m - \{0\})$  é um isomorfismo, para todo  $q \in \mathbb{Z}$ .

Sendo  $f_{*q} : H_q(\mathbb{R}^m - \{0\}) \rightarrow H_q(\mathbb{R}^n - \{h(0)\})$  um isomorfismo, para todo  $q \in \mathbb{Z}$ . Em particular, para  $q = m - 1$ , temos que  $\mathbb{Z} \cong H_{m-1}(S^{m-1}) \cong H_{m-1}(\mathbb{R}^m - \{0\}) \cong H_{m-1}(\mathbb{R}^n - \{h(0)\})$ .

Como  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  dada por  $g(x) = x - h(0)$  é um homeomorfismo com inversa  $g^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  dada por  $g^{-1}(y) = y + h(0)$  temos que  $g|_{\mathbb{R}^n - \{h(0)\}} : \mathbb{R}^n - \{h(0)\} \rightarrow \mathbb{R}^n - \{0\}$  também é um homeomorfismo e portanto induz um isomorfismo  $g|_{\mathbb{R}^n - \{h(0)\}}_{*(m-1)} : H_{m-1}(\mathbb{R}^n - \{h(0)\}) \rightarrow H_{m-1}(\mathbb{R}^n - \{0\})$ .

Assim,  $\mathbb{Z} \cong H_{m-1}(\mathbb{R}^n - \{h(0)\}) \cong H_{m-1}(\mathbb{R}^n - \{0\}) \cong H_{m-1}(S^{n-1}) \cong 0$ , desde que  $n - 1 > m - 1 \geq 1$ , o que é um absurdo, pois  $\mathbb{Z}$  não é homeomorfo ao grupo trivial. Portanto,  $\mathbb{R}^m$  não é homeomorfo a  $\mathbb{R}^n$  para  $n > m \geq 1$ .

O caso  $1 \leq n < m$  é análogo e o resultado segue. □



## 6.2 O Teorema do Ponto Fixo de Brouwer

Iniciaremos esta seção com o seguinte

**Lema 6.1.** *Não existe retração do disco unitário  $D^n$  na esfera  $S^{n-1}$ , para qualquer inteiro  $n \geq 1$ .*

*Demonstração.* Primeiro, mostraremos o resultado para  $n = 1$ .

Seja  $i : S^0 \rightarrow D^1$  a aplicação inclusão, onde  $D^1 = [-1, 1]$  e  $S^0 = \{-1, 1\}$ . Suponhamos que exista uma retração  $r : D^1 \rightarrow S^0$ , ou seja,  $r$  é uma aplicação contínua tal que  $(r \circ i) = Id_{S^0}$ . Então  $r$  é sobrejetora e assim  $S^0 = r(D^1)$ , o que é absurdo, pois  $D^1$  é conexo e  $S^0$  não é conexo e a propriedade ser conexo é invariante por aplicações contínuas. Portanto não existe retração do disco  $D^1$  na esfera  $S^0$ .

Para  $n > 1$ , suponha que exista uma retração  $r : D^n \rightarrow S^{n-1}$ , isto é, uma aplicação contínua  $r : D^n \rightarrow S^{n-1}$  tal que  $(r \circ i) = Id_{S^{n-1}}$ , onde  $i : S^{n-1} \rightarrow D^n$  é a inclusão.

Considerando os homomorfismos induzidos, obtemos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} H_{n-1}(S^{n-1}) & \xrightarrow{i_*(n-1)} & H_{n-1}(D^n) \\ & \searrow Id_{H_{n-1}(S^{n-1})} & \downarrow r_*(n-1) \\ & & H_{n-1}(S^{n-1}) \end{array}$$

Diagrama XIV

Usando os resultados das proposições 5.4 e 4.1, temos  $H_{n-1}(S^{n-1}) \cong \mathbb{Z}$  e  $H_{n-1}(D^n) \cong 0$  (desde que  $n > 1$ ), respectivamente. Assim, podemos reescrever o *Diagrama XIV* da seguinte forma:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{i_*(n-1)} & 0 \\ & \searrow Id_{H_{n-1}(S^{n-1})} & \downarrow r_*(n-1) \\ & & \mathbb{Z} \end{array}$$

Diagrama XV

Absurdo, visto que pela comutatividade do *Diagrama XV* temos que  $Id_{H_{n-1}(S^{n-1})}$  seria o homomorfismo nulo. □

**Teorema 6.2.** (*Teorema do Valor Intermediário - TVI*): *Se  $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua e  $d \in \mathbb{R}$  tal que  $f(a) < d < f(b)$  (ou  $f(a) > d > f(b)$ ), então existe ao menos um ponto  $c \in ]a, b[$  tal que  $f(c) = d$ .*

Para a próxima aplicação, tomaremos  $d = 0$  (Teorema de Bolzano).

**Lema 6.2.** *Dada uma aplicação contínua  $f : D^n \rightarrow D^n$  tal que  $f(x) \neq x$  para todo  $x \in D^n$ , considere  $g : D^n \rightarrow S^{n-1}$  dada por  $g(x) = f(x)x \cap S^{n-1} = P_x$ , para todo  $x \in D^n$ , onde  $f(x)x$  é a semirreta que começa em  $f(x)$  e passa por  $x$ , como na figura 6.1. Então  $g$  é uma função contínua e além disso, se  $x \in S^{n-1}$ ,  $g(x) = x$ .*

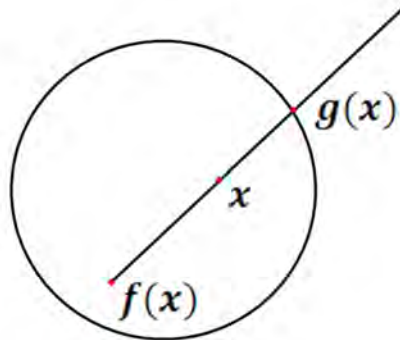


Figura 6.1: Semirreta  $f(x)x$ , que começa em  $f(x)$  e passa por  $x$ , interseccionando a esfera  $S^{n-1}$  em  $g(x)$ .

*Demonstração.* Pelo enunciado,  $g : D^n \rightarrow S^{n-1}$  é definida por  $g(x) = P_x$ , para todo  $x \in D^n$ , onde  $P_x$  é o ponto da interseção de  $S^{n-1}$  com a semirreta  $f(x)x = \{f(x) + t(x - f(x)); t \geq 0\}$ . Assim, temos que  $\|P_x\| = \|f(x) + t(x - f(x))\| = 1$ .

Mostremos que  $g$  é contínua e que se  $x \in S^{n-1}$ , então  $g(x) = x$ .

Coloquemos  $y = x - f(x)$ . Assim  $\|f(x) + ty\|^2 = \langle f(x) + ty, f(x) + ty \rangle = 1$ , ou seja,  $\|f(x)\|^2 + 2t\langle f(x), y \rangle + t^2\|y\|^2 = 1$ . Temos, portanto, a seguinte equação do segundo grau:

$$t^2\|y\|^2 + 2\langle f(x), y \rangle t + (\|f(x)\|^2 - 1) = 0 \quad (6.1)$$

cujo discriminante é dado por:

$$\begin{aligned} \Delta &= 4\langle f(x), y \rangle^2 - 4\|y\|^2(\|f(x)\|^2 - 1) \\ &= 4(\langle f(x), y \rangle^2 - \|y\|^2(\|f(x)\|^2 - 1)) \\ &= 4(\langle f(x), y \rangle^2 + \|y\|^2(1 - \|f(x)\|^2)) \end{aligned}$$

Como  $f(x) \in D^n$ ,  $1 - \|f(x)\|^2 \geq 0$  e portanto  $\Delta \geq 0$ . Logo, a equação (6.1) tem soluções:

$$t = \frac{-\langle f(x), y \rangle \pm \sqrt{\langle f(x), y \rangle^2 + \|y\|^2(1 - \|f(x)\|^2)}}{\|y\|^2}$$

Como  $t \geq 0$ , temos que:

$$t = \frac{-\langle f(x), y \rangle + \sqrt{\langle f(x), y \rangle^2 + \|y\|^2(1 - \|f(x)\|^2)}}{\|y\|^2} \quad (6.2)$$

Assim, para cada  $x \in D^n$ ,  $g(x) = P_x = f(x) + ty$ , onde  $y = x - f(x) \neq 0$  e  $t$  é dado por (6.2). Assim, a aplicação  $g$  está bem definida e é contínua.

Se  $x \in S^{n-1}$ , então:

1.  $\langle f(x), y \rangle = \langle f(x), x - f(x) \rangle = \langle f(x), x \rangle - \|f(x)\|^2$
2.  $\|y\|^2 = \langle x - f(x), x - f(x) \rangle = \|x\|^2 - 2\langle x, f(x) \rangle + \|f(x)\|^2 = 1 - 2\langle x, f(x) \rangle + \|f(x)\|^2$

Por outro lado,

3.  $\langle f(x), y \rangle^2 + \|y\|^2(1 - \|f(x)\|^2) = \langle f(x), x \rangle^2 - 2\langle f(x), x \rangle\|f(x)\|^2 + \|f(x)\|^4 + 1 - 2\langle x, f(x) \rangle + \|f(x)\|^2 - \|f(x)\|^2 + 2\langle x, f(x) \rangle\|f(x)\|^2 - \|f(x)\|^4 = \langle f(x), x \rangle^2 - 2\langle x, f(x) \rangle + 1 = (\langle f(x), x \rangle - 1)^2$ .

Desde que  $\|x\| = 1$ ,  $\langle f(x), x \rangle = \|f(x)\| \cos \theta$ , onde  $\theta$  é o ângulo entre  $f(x)$  e  $x$  e, como  $\|f(x)\| \leq 1$ , segue que  $\langle f(x), x \rangle \leq 1$  e portanto  $\langle f(x), x \rangle - 1 \leq 0$ . Logo

$$\begin{aligned} -\langle f(x), y \rangle + \sqrt{\langle f(x), y \rangle^2 + \|y\|^2(1 - \|f(x)\|^2)} &= \\ &= \|f(x)\|^2 - \langle f(x), x \rangle + \sqrt{(\langle f(x), x \rangle - 1)^2} \\ &= \|f(x)\|^2 - \langle f(x), x \rangle + |\langle f(x), x \rangle - 1| \\ &= \|f(x)\|^2 - \langle f(x), x \rangle - \langle f(x), x \rangle + 1 \\ &= \|f(x)\|^2 - 2\langle f(x), x \rangle + 1 = \|y\|^2 \end{aligned}$$

Assim,  $t = \frac{\|y\|^2}{\|y\|^2} = 1$ . Logo  $g(x) = P_x = f(x) + y = f(x) + x - f(x) = x, \forall x \in S^{n-1}$ .  
Portanto,  $g(x) = x, \forall x \in S^{n-1}$ . □

Agora, enunciemos e demonstremos a segunda aplicação, da Homologia Singular:

**Teorema 6.3.** (Teorema do Ponto Fixo de Brouwer) Dada uma aplicação contínua  $f : D^n \rightarrow D^n$ , existe  $x \in D^n$  tal que  $f(x) = x$ , para qualquer inteiro  $n \geq 1$ .

*Demonstração.* Consideremos primeiro  $n = 1$ . Temos que  $D^1 = [-1, 1]$ . Se  $f(-1) = -1$  ou  $f(1) = 1$ , então nada temos a provar.

Agora, se  $f(-1) > -1$  e  $f(1) < 1$ , considere  $g(x) = f(x) - x$ . Esta é uma aplicação contínua tal que  $g(-1) = f(-1) + 1 > -1 + 1 = 0$  e  $g(1) = f(1) - 1 < 1 - 1 = 0$ .

Então pelo Teorema do Valor Intermediário, existe  $x \in [-1, 1]$  tal que  $g(x) = 0$ . Então  $0 = g(x) = f(x) - x$  e concluímos que  $f(x) = x$ , para algum  $x \in [-1, 1]$ .

Para  $n \neq 1$ , seja  $f : D^n \rightarrow D^n$  uma aplicação contínua. Suponhamos que  $f(x) \neq x$ , para todo  $x \in D^n$ .

Considere  $g : D^n \rightarrow S^{n-1}$  a aplicação dada pelo lema 6.2, ou seja,  $g(x) = f(x)x \cap S^{n-1}$ , para todo  $x \in D^n$ , onde  $f(x)x$  é a semirreta que começa em  $f(x)$  e passa por  $x$ , como na Figura 6.1. Assim, a aplicação  $g$  é contínua e se  $x \in S^{n-1}$ , temos que  $g(x) = x$ . Então  $g$  é uma retração do disco  $D^n$  na esfera  $S^{n-1}$ . Absurdo, pois contraria o lema 6.1. Portanto existe  $x \in D^n$  tal que  $f(x) = x$ .  $\square$

**Observação 6.1.** O ponto  $x \in D^n$ , como descrito no teorema 6.3, é chamado de ponto fixo.

## 6.3 A Não Existência de um Campo Vetorial Não-Nulo nas Esferas de Dimensão Par

Nesta seção, veremos um resultado clássico sobre Campos Vetoriais em Esferas, através da aplicação da Homologia Singular: a não existência de um campo vetorial não-nulo nas esferas de dimensão par.

Primeiramente, vejamos a definição de grau de uma aplicação contínua de  $S^n$  em  $S^n$ . Assim, para qualquer inteiro  $n \geq 1$ , considere a aplicação contínua  $f : S^n \rightarrow S^n$  e o homomorfismo induzido  $f_{*n} : H_n(S^n) \rightarrow H_n(S^n)$ . Se  $\alpha$  é um gerador de  $H_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$ , então  $f_{*n}(\alpha) = m\alpha$ , para algum  $m \in \mathbb{Z}$ .

Observe que este inteiro independe do gerador de  $H_n(S^n)$ , pois se  $-\alpha$  é o outro gerador de  $H_n(S^n)$ , temos:  $f_{*n}(-\alpha) = -f_{*n}(\alpha) = -(m\alpha) = m(-\alpha)$ .

**Definição 6.1.** O inteiro  $m$  definido acima é chamado de grau da aplicação contínua  $f$  e é denotado por  $d(f)$ .

Vejamos, a seguir, algumas propriedades referentes ao grau de uma aplicação contínua  $f$  de  $S^n$  em  $S^n$ , para qualquer inteiro  $n \geq 1$ :

**Propriedade 6.1.**  $d(\text{Id}_{S^n}) = 1$ .

*Demonstração.* Pela propriedade 2.1,  $(\text{Id}_{S^n})_{*n} = \text{Id}_{H_n(S^n)}$ . Assim, se  $\alpha$  é um gerador de  $H_n(S^n)$ , então  $(\text{Id}_{S^n})_{*n}(\alpha) = \alpha = 1\alpha$ . Portanto  $d(\text{Id}_{S^n}) = 1$ .  $\square$

**Propriedade 6.2.** Se  $f, g : S^n \rightarrow S^n$  são aplicações contínuas, então  $d(g \circ f) = d(g)d(f)$ .

*Demonstração.* Sejam  $p = d(g)$  e  $q = d(f)$ . Temos que  $(g \circ f)_{*n}(\alpha) = (g_{*n} \circ f_{*n})(\alpha) = g_{*n}(f_{*n}(\alpha)) = g_{*n}(q\alpha) = q(g_{*n}(\alpha)) = q(p\alpha) = (pq)\alpha$ . Logo  $d(g \circ f) = pq = d(g)d(f)$ .  $\square$

**Observação 6.2.** Se  $h : S^n \rightarrow S^n$  é um homeomorfismo, então  $d(h) = \pm 1$ .

Este fato é uma consequência das propriedades 6.1 e 6.2. De fato, pelas propriedades citadas  $1 = d(Id_{S^n}) = d(h \circ h^{-1}) = d(h)d(h^{-1})$ . Sendo  $1 = d(h)d(h^{-1})$ , como o grau de uma aplicação contínua é um número inteiro, então  $d(h) = d(h^{-1}) = 1$  ou  $d(h) = d(h^{-1}) = -1$ .

**Propriedade 6.3.** Se  $f : S^n \rightarrow S^n$  é uma aplicação constante, então  $d(f) = 0$ .

*Demonstração.* Sendo  $f : S^n \rightarrow S^n$  constante, então  $f$  é uma aplicação contínua. Assim, podemos falar em grau da função  $f$ . Digamos que  $f(x) = x_0$ , para todo  $x \in S^n$ , onde  $x_0 \in S^n$ . Assim, do diagrama comutativo abaixo

$$\begin{array}{ccc} S^n & \xrightarrow{f} & S^n \\ & \searrow g & \nearrow i \\ & \{x_0\} & \end{array}$$

onde  $g : S^n \rightarrow \{x_0\}$  é tal que  $g(x) = x_0$ , para todo  $x \in S^n$  e  $i : \{x_0\} \rightarrow S^n$  é a aplicação inclusão, obtemos o diagrama comutativo de homomorfismos induzidos:

$$\begin{array}{ccc} H_n(S^n) & \xrightarrow{f_{*n}} & H_n(S^n) \\ & \searrow g_{*n} & \nearrow i_{*n} \\ & H_n(\{x_0\}) & \end{array}$$

Se  $\alpha$  é um gerador de  $H_n(S^n)$ , então  $f_{*n}(\alpha) = (i_{*n} \circ g_{*n})(\alpha) = i_{*n}(g_{*n}(\alpha)) = i_{*n}(0) = 0$ , pois  $H_n(\{x_0\}) \cong 0$ , para todo  $n \geq 1$ , conforme exemplo 3.4. Assim,  $f_{*n}(\alpha) = 0 = 0\alpha$  e portanto  $d(f) = 0$ .  $\square$

**Proposição 6.1.** Se  $n \geq 1$  e  $r : S^n \rightarrow S^n$  é a aplicação reflexão, definida por

$$r(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) = (-x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$$

então  $d(r) = -1$ .

*Demonstração.* Primeiro, note que se  $r$  é a aplicação reflexão, então  $r$  é contínua. Assim, podemos falar em grau da função  $r$ . Faremos a demonstração por indução sobre  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $n \geq 1$ .

Para  $n = 1$ , defina a aplicação  $r : S^0 \rightarrow S^0$  dada por  $r(x) = -x$ . Assim,  $r_{*0} : \tilde{H}_0(S^0) \rightarrow \tilde{H}_0(S^0)$  pode ser definida da seguinte forma: se  $(1, -1)$  é o gerador de  $\tilde{H}_0(S^0) \cong \mathbb{Z}$  (vide exemplo 3.5), então  $r_{*0}((1, -1)) = (-1, 1) = -(1, -1)$ . Dessa forma, se  $\alpha = (1, -1)$  é o gerador de  $\tilde{H}_0(S^0)$ , então  $r_{*0}(\alpha) = -\alpha$ .

Considere, agora, o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} H_1(S^1) & \xrightarrow[\cong]{\phi} & \mathbb{Z} \cong \tilde{H}_0(S^0) \\ \downarrow r_{*1} & & \downarrow r_{*0} \\ H_1(S^1) & \xrightarrow[\cong]{\phi} & \mathbb{Z} \cong \tilde{H}_0(S^0) \end{array}$$

onde  $\phi$  é o isomorfismo definido da seguinte forma: se  $\alpha_1$  é um gerador de  $H_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$  e  $\alpha$  é gerador de  $\tilde{H}_0(S^0)$ , então  $\phi(\alpha_1) = \alpha$ .

Então  $r_{*1}(\alpha_1) = (\phi^{-1} \circ r_{*0} \circ \phi)(\alpha_1) = (\phi^{-1} \circ r_{*0})(\phi(\alpha_1)) = (\phi^{-1} \circ r_{*0})(\alpha) = \phi^{-1}(r_{*0}(\alpha)) = \phi^{-1}(-\alpha) = -\phi^{-1}(\alpha) = -\alpha_1$ . Portanto  $d(r) = -1$ , para  $n = 1$ .

Suponha, agora, que o resultado é válido para  $n > 1$ , ou seja, se  $r : S^n \rightarrow S^n$  é a aplicação reflexão, para  $n > 1$ , então  $d(r) = -1$ . Provaremos que o resultado é válido para  $n + 1$ .

Sabemos que, pela proposição 5.4, para  $n > 1$ ,  $H_{n+1}(S^{n+1}) \cong \mathbb{Z} \cong H_n(S^n)$ . Portanto, temos o diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} H_{n+1}(S^{n+1}) & \xrightarrow[\cong]{\phi} & H_n(S^n) \\ \downarrow r_{*(n+1)} & & \downarrow r_{*n} \\ H_{n+1}(S^{n+1}) & \xrightarrow[\cong]{\phi} & H_n(S^n) \end{array}$$

onde  $\phi : H_{n+1}(S^{n+1}) \rightarrow H_n(S^n)$  é o isomorfismo definido da seguinte forma: se  $\alpha_{n+1}$  é um gerador de  $H_{n+1}(S^{n+1}) \cong \mathbb{Z}$  e  $\alpha_n$  é gerador de  $H_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$ , então  $\phi(\alpha_{n+1}) = \alpha_n$ . Assim, temos que  $r_{*(n+1)}(\alpha_{n+1}) = (\phi^{-1} \circ r_{*n} \circ \phi)(\alpha_{n+1}) = (\phi^{-1} \circ r_{*n})(\phi(\alpha_{n+1})) = (\phi^{-1} \circ r_{*n})(\alpha_n) = \phi^{-1}(r_{*n}(\alpha_n)) = \phi^{-1}(-\alpha_n) = -\phi^{-1}(\alpha_n) = -\alpha_{n+1}$ . Portanto  $d(r) = -1$ , para  $n \geq 1$ .  $\square$

**Corolário 6.1.** Se  $n \geq 1$  e  $g_i : S^n \rightarrow S^n$  é uma aplicação contínua definida por

$$g_i(x_1, \dots, x_i, \dots, x_{n+1}) = (x_1, \dots, -x_i, \dots, x_{n+1}), \forall i = 1, \dots, n+1$$

então  $d(g_i) = -1$ .

*Demonstração.* Note que se  $i = 1$ , então  $g_i = r$  definida na proposição anterior e portanto  $d(g_i) = d(r) = -1$ .

Para  $i > 1$ , consideremos o homeomorfismo  $h : S^n \rightarrow S^n$  dado por

$$h(x_1, \dots, x_i, \dots, x_{n+1}) = (x_i, \dots, x_1, \dots, x_{n+1})$$

Assim:

$$\begin{aligned} (h \circ r \circ h)(x_1, \dots, x_i, \dots, x_{n+1}) &= \\ (h \circ r)((x_i, \dots, x_1, \dots, x_{n+1})) &= \\ h((-x_i, \dots, x_1, \dots, x_{n+1})) &= \\ (x_1, \dots, -x_i, \dots, x_{n+1}) & \end{aligned}$$

Ou seja,  $g_i = (h \circ r \circ h)$ .

Segue que  $d(g_i) = d(h \circ r \circ h) = d(h)d(r)d(h) = [d(h)]^2d(r)$ . Pela observação 6.2, como  $h$  é um homeomorfismo, temos que  $d(h) = \pm 1$ . Então  $d(g_i) = [d(h)]^2d(r) = (\pm 1)^2d(r) = d(r) = -1$ .  $\square$

**Lema 6.3.** *Se  $a : S^n \rightarrow S^n$  é a aplicação antipodal, definida por*

$$a(x_1, \dots, x_i, \dots, x_{n+1}) = (-x_1, \dots, -x_i, \dots, -x_{n+1})$$

então  $d(a) = (-1)^{n+1}$ .

*Demonstração.* Usando as aplicações  $g_i$ , para  $1 \leq i \leq n + 1$  da proposição anterior, podemos escrever a aplicação antipodal como sendo  $a = g_{n+1} \circ g_n \circ \dots \circ g_2 \circ g_1$ . Pela propriedade 6.2, temos  $d(a) = d(g_{n+1} \circ g_n \circ \dots \circ g_2 \circ g_1) = d(g_{n+1})d(g_n) \dots d(g_2)d(g_1) = \underbrace{(-1)(-1) \dots (-1)(-1)}_{(n+1)\text{-vezes}} = (-1)^{n+1}$ .  $\square$

Para demonstrarmos o resultado principal desta seção, primeiro, precisamos definir o que é um campo vetorial sobre a esfera  $S^n$ :

**Definição 6.2.** *Um campo vetorial sobre a esfera  $S^n$  é uma aplicação contínua  $v : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  tal que  $x$  é ortogonal a  $v(x)$ , para todo  $x \in S^n$ .*

Agora, temos todas as ferramentas necessárias para enunciar e demonstrar a terceira aplicação, da Homologia Singular:

**Teorema 6.4.** *A esfera unitária  $S^n$  possui um campo vetorial não-nulo se, e somente se,  $n$  é ímpar.*

*Demonstração.* Primeiramente, mostraremos que se  $n$  é um número ímpar, então a esfera unitária  $S^n$  possui um campo vetorial não-nulo. Para isto, note que se  $n = 2m+1$ , então  $n+1 = 2m+2$  é par.

Assim, se  $x = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_{n+1}) = v(x_1, \dots, x_i, \dots, x_{2m+2}) \in S^n$  definimos  $v : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  por:

$$v(x) = v(x_1, \dots, x_i, \dots, x_{2m+2}) = (-x_2, x_1, -x_4, x_3, \dots, -x_{2m+2}, x_{2m+1})$$

Temos que  $v$  é contínua e

$$\begin{aligned} \langle x, v(x) \rangle &= \langle (x_1, \dots, x_i, \dots, x_{2m+2}), (-x_2, x_1, -x_4, x_3, \dots, -x_{2m+2}, x_{2m+1}) \rangle = \\ &= -x_1x_2 + x_1x_2 - x_3x_4 + x_3x_4 - \dots - x_{2m+1}x_{2m+2} + x_{2m+1}x_{2m+2} = 0 \end{aligned}$$

Isto demonstra que  $v$  é um campo vetorial não-nulo na esfera  $S^n$ , onde  $n$  é ímpar.

Reciprocamente, seja  $v : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  um campo vetorial não-nulo sobre a esfera  $S^n$ .

Defina  $f : S^n \rightarrow S^n$  por  $f(x) = \frac{v(x)}{\|v(x)\|}$ . Então  $f$  é uma aplicação contínua tal que  $f(x)$  é ortogonal a  $x$ , para todo  $x \in S^n$ .

Considere  $G : S^n \times I \rightarrow S^n$  definida por  $G(x, t) = x \cos(\pi t) + f(x) \sin(\pi t)$ . Então  $G$  é bem definida, pois  $\|x \cos(\pi t) + f(x) \sin(\pi t)\|^2 = \|x\|^2 \cos^2(\pi t) + \|f(x)\|^2 \sin^2(\pi t) = \cos^2(\pi t) + \sin^2(\pi t) = 1$  e, portanto,  $\|x \cos(\pi t) + f(x) \sin(\pi t)\| = 1$ , ou seja,  $G(x, t) \in S^n$ , para qualquer  $(x, t) \in S^n \times I$ . Temos que  $G$  é contínua,  $G(x, 0) = x = Id_{S^n}(x)$  e  $G(x, 1) = -x = a(x)$ .

Usando os axiomas 5 e 6 de Eilenberg-Steenrod e a definição de grau de uma aplicação contínua, como  $Id_{S^n} \simeq a$  segue que  $Id_{H_n(S^n)} = a_{*n}$ . Assim, podemos afirmar que  $d(Id_{S^n}) = d(a)$ . Portanto, pelo corolário 6.3 e pela propriedade 6.1, se  $d(Id_{S^n}) = d(a)$ , então  $1 = (-1)^{n+1}$  e, portanto,  $n+1$  é par, ou equivalentemente,  $n$  é ímpar, demonstrando o teorema.  $\square$



# 7 Grupos de Homologia de Espaços Topológicos Acíclicos

Neste capítulo, estabeleceremos algumas ferramentas importantes para que nosso objetivo final seja alcançado: demonstrar que a Homologia Singular é uma teoria de Homologia. Assim, exploraremos o comportamento dos grupos de homologia de espaços topológicos acíclicos.

**Definição 7.1.** *Um espaço topológico  $X$  é chamado de acíclico se  $H_q(X) \cong 0$ , para  $q > 0$  e  $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$ .*

Observe que os exemplos mais simples de espaços acíclicos são os espaços contráteis (exemplo 4.4 e proposição 4.1) e aqueles constituídos de apenas um ponto (exemplo 3.4).

**Proposição 7.1.** *Um espaço  $X \neq \emptyset$  é acíclico se, e somente se, for exata a sequência de grupos abelianos livres*

$$\cdots \rightarrow C_{q+1}(X) \xrightarrow{\partial_{q+1}} C_q(X) \xrightarrow{\partial_q} \cdots \rightarrow C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \xrightarrow{I} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

onde  $I$  é o índice de Kronecker.

*Demonstração.* Suponha, primeiramente, que a sequência dada é exata. Assim,  $\ker(\partial_q) = \text{Im}(\partial_{q+1})$  para todo  $q \geq 1$  e, portanto,  $H_q(X) \cong 0$ , para todo  $q \geq 1$ .

Para mostrar que  $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$ , devemos examinar a seguinte parte da sequência exata:  $C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \xrightarrow{I} \mathbb{Z} \rightarrow 0$ . Como este trecho da sequência também é exato, vale  $Z_0(X) = \ker(\partial_0) = \text{Im}(\partial_1) = \ker(I) = C_0(X)$  e  $\text{Im}(\partial_1) = B_0(X)$ . Assim teremos a seguinte sequência exata:

$$0 \rightarrow B_0(X) \xrightarrow{i} Z_0(X) \xrightarrow{I} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

onde  $i$  é a inclusão. Lembrando que a aplicação  $I$  é sobrejetora, pelo teorema do isomorfismo, temos que  $H_0(X) = \frac{Z_0(X)}{B_0(X)} \cong \frac{Z_0(X)}{\ker(I)} \cong \mathbb{Z}$ . Portanto  $X$  é um espaço acíclico.

Reciprocamente, suponha que  $X$  é um espaço acíclico. Devemos mostrar que a sequência

$$\cdots \rightarrow C_{q+1}(X) \xrightarrow{\partial_{q+1}} C_q(X) \xrightarrow{\partial_q} C_{q-1}(X) \rightarrow \cdots \rightarrow C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \xrightarrow{I} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

é exata.

Para todo  $q > 0$ ,  $H_q(X) \cong 0$ . Em outras palavras, o trecho  $C_{q+1}(X) \xrightarrow{\partial_{q+1}} C_q(X) \xrightarrow{\partial_q} C_{q-1}(X)$  da sequência dada é exato.

Agora, iremos analisar o trecho  $C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \xrightarrow{I} \mathbb{Z} \rightarrow 0$ . Sabemos que o índice de Kronecker,  $I : C_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ , é um homomorfismo sobrejetor e sobre um gerador  $x$  de  $C_0(X)$  temos  $I(x) = I(1x) = 1 \in \mathbb{Z}$ .

Por hipótese, existe um isomorfismo  $\phi : H_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ . Considere o homomorfismo  $\bar{\phi} = \phi \circ \pi : C_0(X) \rightarrow \mathbb{Z}$ , onde  $\pi : C_0(X) \rightarrow H_0(X) = \frac{C_0(X)}{B_0(X)}$  é a projeção canônica. O homomorfismo  $\bar{\phi}$  é sobrejetor, pois  $\phi$  e  $\pi$  são sobrejetores. Como  $\phi$  é um homomorfismo injetor,  $\ker(\bar{\phi}) = \ker(\phi \circ \pi) = \ker(\pi) = B_0(X)$ .

Precisamos ainda verificar que  $\pm \bar{\phi} = I$ . Considere  $x$  e  $y$  geradores de  $C_0(X)$  e suponha que  $\bar{\phi}(x) = m$  e  $\bar{\phi}(y) = n$ . Então:

$$\bar{\phi}(nx - my) = \bar{\phi}(nx) - \bar{\phi}(my) = n\bar{\phi}(x) - m\bar{\phi}(y) = nm - mn = 0$$

Assim,  $nx - my \in \ker(\bar{\phi}) = B_0(X) = \text{Im}(\partial_1) \subset \ker(I)$  (veja Proposição 3.1). Portanto  $nx - my \in \ker(I)$ , ou seja, usando a definição de índice de Kronecker, temos que  $I(nx - my) = n - m = 0$ . Então  $n = m$ . Logo  $\bar{\phi}$  é constante sobre os geradores.

Como  $\bar{\phi}$  é sobrejetor, esta aplicação deve levar algum gerador  $x \in C_0(X)$  em  $\pm 1 \in \mathbb{Z}$ . Assim, temos que  $\pm \bar{\phi} = I$  e o trecho  $C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \xrightarrow{I} \mathbb{Z} \rightarrow 0$  da sequência dada é exato.  $\square$

O corolário a seguir é consequência imediata desta proposição.

**Corolário 7.1.** *Se  $X$  é acíclico, então  $\tilde{H}_q(X) \cong 0$ , para todo  $q \geq 0$ .*

*Demonstração.* Como  $X$  é acíclico, pela proposição 7.1, a sequência  $\cdots \rightarrow C_q(X) \xrightarrow{\partial_q} C_{q-1}(X) \rightarrow \cdots \rightarrow C_1(X) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X) \xrightarrow{I} \mathbb{Z} \rightarrow 0$  é exata.

Assim, para  $q \geq 1$ , temos que  $\tilde{H}_q(X) = H_q(X) \cong 0$ . Para  $q = 0$ ,  $\tilde{H}_0(X) = \frac{\ker(I)}{\text{Im}(\partial_1)} = \frac{\text{Im}(\partial_1)}{\text{Im}(\partial_1)} \cong 0$ . Logo,  $\tilde{H}_q(X) \cong 0$ , para todo  $q \geq 0$ .  $\square$

Recordemos que, em qualquer espaço topológico  $X$  conexo por caminho, a relação de existência de um caminho em  $X$  ligando  $x$  a  $y$ , é uma relação de equivalência. Esta define uma partição de  $X$ ,  $X = \cup_{k \in J} X_k$ , onde os subespaços  $X_k$  são as componentes conexas por caminho do espaço  $X$ .

Temos que todo simplexo padrão  $\Delta_q$  é um espaço conexo por caminho, o mesmo ocorre para as imagens  $T(\Delta_q) \subset X$ , onde  $T \in C_q(X)$ . Portanto temos uma partição sobre o conjunto dos  $q$ -simplexos de  $X$ ,  $C(\Delta_q, X) = \cup_{k \in J} C(\Delta_q, X_k)$ . A esta partição do sistema de geradores de  $C_q(X)$ , corresponde uma decomposição em soma direta  $C_q(X) = \oplus_{k \in J} C_q(X_k)$ .

Como  $T(\Delta_q) \subset X_k$ , segue que  $T^{(i)}(\Delta_{q-1}) = T \circ g_i^{q-1}(\Delta_{q-1}) \subset X_k$ , para todo  $0 \leq i \leq q$ . Isso mostra que os subgrupos  $C_q(X_k)$  são estáveis relativamente ao operador bordo  $\partial_q : C_q(X) \rightarrow C_{q-1}(X)$ , ou seja, se  $T(\Delta_q) \subset X_k$  então  $\partial_q(T)(\Delta_{q-1}) \subset X_k$ .

**Observação 7.1.** Pela decomposição  $C_q(X) = \oplus_{k \in J} C_q(X_k)$ , temos que:

1.  $B_q(X) = \oplus_{k \in J} B_q(X_k)$ .

Para qualquer elemento  $b \in B_q(X)$ , podemos escrevê-lo como  $b = \sum_{k \in J} \partial_{q+1}(c_k)$ , onde  $c_k \in C_{q+1}(X_k)$ , pois  $b = \partial_{q+1}(c)$  com  $c = \sum_{k \in J} c_k \in C_{q+1}(X) = \oplus_{k \in J} C_{q+1}(X_k)$ . Como a decomposição de  $c$  é única e  $\partial_{q+1}(c_k) \in \partial_{q+1}(C_{q+1}(X_k)) = B_q(X_k)$ , para todo  $k \in J$ , temos  $B_q(X) = \oplus_{k \in J} B_q(X_k)$

2.  $Z_q(X) = \oplus_{k \in J} Z_q(X_k)$ .

Para qualquer elemento  $z \in Z_q(X)$ , podemos escrevê-lo como  $z = \sum_{k \in J} c_k$ , onde  $c_k \in C_q(X_k)$ , pois  $z \in Z_q(X) \subset C_q(X) = \oplus_{k \in J} C_q(X_k)$ . Como  $\partial_q(c_k) \in C_{q-1}(X_k)$ , para todo  $k \in J$ , e a soma  $\oplus_{k \in J} C_q(X_k)$  é direta, o fato de que  $0 = \partial_q(z) = \sum_{k \in J} \partial_q(c_k)$  implica que  $\partial_q(c_k) = 0$ , para todo  $k \in J$ . Portanto  $Z_q(X) = \oplus_{k \in J} Z_q(X_k)$ .

**Proposição 7.2.** Se  $X = \bigcup_{k \in J} X_k$  é uma partição de  $X$  em componentes conexas por caminho, então  $H_q(X) \cong \oplus_{k \in J} H_q(X_k)$ .

*Demonstração.* Pela observação 7.1, vimos que  $B_q(X) = \bigoplus_{k \in J} B_q(X_k)$  e  $Z_q(X) = \bigoplus_{k \in J} Z_q(X_k)$ . Logo

$$H_q(X) = \frac{Z_q(X)}{B_q(X)} = \frac{\bigoplus_{k \in J} Z_q(X_k)}{\bigoplus_{k \in J} B_q(X_k)} \cong \bigoplus_{k \in J} \frac{Z_q(X_k)}{B_q(X_k)} = \bigoplus_{k \in J} H_q(X_k)$$

onde o isomorfismo  $\psi : \frac{\bigoplus_{k \in J} Z_q(X_k)}{\bigoplus_{k \in J} B_q(X_k)} \rightarrow \bigoplus_{k \in J} \frac{Z_q(X_k)}{B_q(X_k)}$  é dado por  $\psi([\sum_{k \in J} z_k]) = \sum_{k \in J} [z_k]$   $\square$

A próxima proposição irá relacionar espaços conexos por caminho com os grupos de homologia na dimensão zero.

**Proposição 7.3.** *Um espaço topológico  $X$  é conexo por caminho se, e somente se,  $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$ .*

*Demonstração.* Pela proposição 3.1, temos que  $B_0(X) \subset \ker(I)$ . Se mostrarmos que para todo espaço topológico  $X$  conexo por caminho temos que  $B_0(X) = \ker(I)$ , conseqüentemente, pelo teorema do isomorfismo, teremos  $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$ .

Assim, dado  $c \in \ker(I)$ , temos que  $I(c) = I(\sum_i m_i x_i) = \sum_i m_i = 0$ .

Fixemos  $x^* \in X$ . Para cada  $i$ , existe uma aplicação  $T_i = \lambda_i \circ p : \Delta_1 \rightarrow X$  tal que  $\partial_1(T_i) = x_i - x^*$ , onde  $\lambda_i$  é um caminho em  $X$  ligando  $x^*$  a  $x_i$  e  $p : \Delta_1 \rightarrow [0, 1]$ , é uma aplicação linear que leva  $P_0$  em 0 e  $P_1$  em 1.

Como  $\sum_i m_i = 0$ , podemos escrever  $c \in \ker(I)$  da seguinte forma:  $c = \sum_i m_i x_i - (\sum_i m_i) x^* = \sum_i m_i (x_i - x^*) = \sum_i m_i \partial_1(T_i) = \partial_1(\sum_i m_i T_i)$ , ou seja,  $c \in B_0(X)$  e assim  $\ker(I) \subset B_0(X)$ . Logo  $B_0(X) = \ker(I)$  e, pelo teorema do isomorfismo, temos que  $H_0(X) = \frac{C_0(X)}{B_0(X)} = \frac{C_0(X)}{\ker(I)} \cong \mathbb{Z}$ .

Reciprocamente, suponhamos, por absurdo, que  $X$  não é conexo por caminho. Então,  $X = \bigcup_{k \in J} X_k$ , com  $\#(J) > 1$  e  $X_k$  conexos por caminho. Aplicando a proposição 7.2, para  $q = 0$ , devemos ter  $H_0(X) \cong \bigoplus_{k \in J} H_0(X_k) = \mathbb{Z}^J$ , cujo posto é maior que 1, contrariando a hipótese. Portanto  $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$ .  $\square$

Vejamos, agora, alguns resultados que relacionam espaços topológicos estrelados com os grupos de homologia e espaços acíclicos.

**Definição 7.2.** *Dizemos que um subconjunto  $X$  de  $\mathbb{R}^n$  é um conjunto estrelado se existir um elemento  $p \in X$  tal que para todo  $x \in X$  temos que o segmento  $|px| =$*

$\{tp + (1 - t)x, 0 \leq t \leq 1\}$  está contido em  $X$ . Nestas condições, dizemos que  $X$  é estrelado em relação a  $p \in X$ .

**Observação 7.2.** Todo conjunto estrelado  $X \subset \mathbb{R}^n$  é conexo por caminho.

Considere  $X$  um espaço estrelado em relação a  $p \in X$ . Então podemos definir uma aplicação  $D_q$  sobre os geradores de  $C_q(X)$ ,  $T : \Delta_q \rightarrow X$ , da seguinte forma:  $D_q(T) : \Delta_{q+1} \rightarrow X$  é dada por

$$D_q(T)(t_0, t_1, \dots, t_{q+1}) = \begin{cases} t_0 p + (1 - t_0) T\left(\frac{t_1}{1 - t_0}, \frac{t_2}{1 - t_0}, \dots, \frac{t_q}{1 - t_0}, \frac{t_{q+1}}{1 - t_0}\right) & , \text{ se } t_0 \neq 1 \\ p & , \text{ se } t_0 = 1 \end{cases}$$

Note que se  $(t_0, t_1, \dots, t_{q+1}) \in \Delta_{q+1} = |P_0 P_1 P_2 \cdots P_q P_{q+1}|$ , então podemos escrever o ponto  $(t_0, t_1, \dots, t_{q+1})$  como a combinação linear  $t_0 P_0 + t_1 P_1 + t_2 P_2 + \cdots + t_q P_q + t_{q+1} P_{q+1}$ . Usando este fato, temos que:

$$D_q(T)(t_0 P_0 + t_1 P_1 + t_2 P_2 + \cdots + t_q P_q + t_{q+1} P_{q+1}) = \begin{cases} t_0 p + (1 - t_0) T\left(\frac{t_1}{1 - t_0} P_0 + \frac{t_2}{1 - t_0} P_1 + \cdots + \frac{t_q}{1 - t_0} P_{q-1} + \frac{t_{q+1}}{1 - t_0} P_q\right), & \text{ se } t_0 \neq 1 \\ p, & \text{ se } t_0 = 1 \end{cases}$$

Esta aplicação é contínua, pois  $T$  é contínua. Além disso, sua imagem está em  $X$ , pois  $X$  é estrelado em relação a  $p$ . Portanto  $D_q$  é uma função bem definida.

**Lema 7.1.** *Seja  $X$  um espaço estrelado em relação a  $p \in X$  e  $D_q$  a aplicação acima definida sobre os geradores de  $C_q(X)$ . Então:*

1.  $(D_q(T))^{(i)} = D_{q-1}(T^{(i-1)})$ , para  $0 < i \leq q + 1$ .
2.  $(D_q(T))^{(0)} = T$ .

*Demonstração.* Utilizando a definição de  $D_q(T) : \Delta_{q+1} \rightarrow X$  dada acima temos que:

1.  $(D_q(T))^{(i)} = D_{q-1}(T^{(i-1)})$ , para  $0 < i \leq q + 1$ .

Primeiramente, note que, pela definição 3.6, temos que  $(D_q(T))^{(i)} = D_q(T) \circ g_i^q : \Delta_q \rightarrow X$  e  $D_{q-1}(T^{(i-1)}) = D_{q-1}(T \circ g_{i-1}^{q-1}) : \Delta_q \rightarrow X$ . Assim, basta demonstrar que as leis de formação de  $(D_q(T))^{(i)}$  e  $D_{q-1}(T^{(i-1)})$  são iguais. De fato:

$$(D_q(T))^{(i)}(t_0 P_0 + t_1 P_1 + \cdots + t_{i-1} P_{i-1} + t_i P_i + t_{i+1} P_{i+1} + \cdots + t_q P_q) =$$

$$\begin{aligned}
 (D_q(T) \circ g_i^q)(t_0P_0 + t_1P_1 + \cdots + t_{i-1}P_{i-1} + t_iP_i + t_{i+1}P_{i+1} + \cdots + t_qP_q) = \\
 D_q(T)(t_0P_0 + t_1P_1 + \cdots + t_{i-1}P_{i-1} + 0P_i + t_iP_{i+1} + t_{i+1}P_{i+2} \cdots + t_qP_{q+1}) = \\
 \begin{cases} t_0p + (1-t_0)T\left(\frac{t_1}{1-t_0}P_0 + \frac{t_2}{1-t_0}P_1 + \frac{t_3}{1-t_0}P_2 + \cdots + \frac{t_{i-1}}{1-t_0}P_{i-2} \right. \\ \quad \left. + 0P_{i-1} + \frac{t_i}{1-t_0}P_i + \frac{t_{i+1}}{1-t_0}P_{i+1} + \cdots + \frac{t_q}{1-t_0}P_q\right) & , \text{ se } t_0 \neq 1 \\ p & , \text{ se } t_0 = 1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned}
 D_{q-1}(T^{(i-1)})(t_0P_0 + t_1P_1 + \cdots + t_{i-1}P_{i-1} + t_iP_i + t_{i+1}P_{i+1} + \cdots + t_qP_q) = \\
 D_{q-1}(T \circ g_{i-1}^{q-1})(t_0P_0 + t_1P_1 + \cdots + t_{i-1}P_{i-1} + t_iP_i + t_{i+1}P_{i+1} + \cdots + t_qP_q) = \\
 \begin{cases} t_0p + (1-t_0)(T \circ g_{i-1}^{q-1})\left(\frac{t_1}{1-t_0}P_0 + \frac{t_2}{1-t_0}P_1 + \frac{t_3}{1-t_0}P_2 + \cdots + \right. \\ \quad \left. \frac{t_{i-1}}{1-t_0}P_{i-2} + \frac{t_i}{1-t_0}P_{i-1} + \frac{t_{i+1}}{1-t_0}P_i + \frac{t_{i+2}}{1-t_0}P_{i+1} + \cdots + \frac{t_q}{1-t_0}P_{q-1}\right) & , \text{ se } t_0 \neq 1 \\ p & , \text{ se } t_0 = 1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Pela definição 3.6, temos que:

$$\begin{cases} t_0p + (1-t_0)(T \circ g_{i-1}^{q-1})\left(\frac{t_1}{1-t_0}P_0 + \frac{t_2}{1-t_0}P_1 + \frac{t_3}{1-t_0}P_2 + \cdots + \right. \\ \quad \left. \frac{t_{i-1}}{1-t_0}P_{i-2} + \frac{t_i}{1-t_0}P_{i-1} + \frac{t_{i+1}}{1-t_0}P_i + \frac{t_{i+2}}{1-t_0}P_{i+1} + \cdots + \frac{t_q}{1-t_0}P_{q-1}\right) & , \text{ se } t_0 \neq 1 \\ p & , \text{ se } t_0 = 1 \end{cases}$$

é equivalente a:

$$\begin{cases} t_0p + (1-t_0)T\left(\frac{t_1}{1-t_0}P_0 + \frac{t_2}{1-t_0}P_1 + \frac{t_3}{1-t_0}P_2 + \cdots + \right. \\ \quad \left. \frac{t_{i-1}}{1-t_0}P_{i-2} + 0P_{i-1} + \frac{t_i}{1-t_0}P_i + \frac{t_{i+1}}{1-t_0}P_{i+1} + \right. \\ \quad \left. \frac{t_{i+2}}{1-t_0}P_{i+2} + \cdots + \frac{t_q}{1-t_0}P_q\right) & , \text{ se } t_0 \neq 1 \\ p & , \text{ se } t_0 = 1 \end{cases}$$

Logo  $(D_q(T))^{(i)} = D_{q-1}(T^{(i-1)})$ , para  $0 < i \leq q+1$ .

$$2. (D_q(T))^{(0)} = T.$$

Pela definição 3.6, temos que  $(D_q(T))^{(0)} = D_q(T) \circ g_0^q : \Delta_q \rightarrow X$ . Assim,

$$\begin{aligned}
 (D_q(T))^{(0)}(t_0P_0 + t_1P_1 + t_2P_2 + \cdots + t_{q-1}P_{q-1} + t_qP_q) = \\
 (D_q(T) \circ g_0^q)(t_0P_0 + t_1P_1 + t_2P_2 + \cdots + t_{i-1}P_{i-1} + t_iP_i + t_{i+1}P_{i+1} + \cdots + t_{q-1}P_{q-1} + t_qP_q) = \\
 D_q(T)(0P_0 + t_0P_1 + t_1P_2 + \cdots + t_{i-1}P_i + t_iP_{i+1} + t_{i+1}P_{i+2} + \cdots + t_{q-1}P_q + t_qP_{q+1})
 \end{aligned}$$

Substituindo  $u_0 = 0$  e  $u_i = t_{i-1}$ , para  $i = 1, 2, 3, \dots, q+1$ , temos que:

$$D_q(T)(0P_0 + t_0P_1 + t_1P_2 + \dots + t_{i-1}P_i + t_iP_{i+1} + t_{i+1}P_{i+2} + \dots + t_{q-1}P_q + t_qP_{q+1}) =$$

$$D_q(T)(u_0P_0 + u_1P_1 + \dots + u_iP_i + u_{i+1}P_{i+1} + u_{i+2}P_{i+2} + \dots + u_{q+1}P_{q+1})$$

Como  $u_0 = 0$ , ou seja,  $u_0 \neq 1$ , pela definição dada para  $D_q(T)$ :

$$D_q(T)(u_0P_0 + u_1P_1 + \dots + u_iP_i + u_{i+1}P_{i+1} + u_{i+2}P_{i+2} + \dots + u_{q+1}P_{q+1}) =$$

$$u_0p + (1 - u_0)T(u_0P_0 + u_1P_1 + \dots + u_iP_i + u_{i+1}P_{i+1} + u_{i+2}P_{i+2} + \dots + u_qP_q) =$$

$$0p + (1 - 0)T(u_0P_0 + u_1P_1 + \dots + u_iP_i + u_{i+1}P_{i+1} + u_{i+2}P_{i+2} + \dots + u_qP_q) =$$

$$T(u_0P_0 + u_1P_1 + \dots + u_iP_i + u_{i+1}P_{i+1} + u_{i+2}P_{i+2} + \dots + u_qP_q)$$

Logo  $(D_q(T))^{(0)} = T$ .

□

**Proposição 7.4.** *Todo conjunto estrelado  $X \subset \mathbb{R}^n$  é acíclico.*

*Demonstração.* Como  $X \subset \mathbb{R}^n$  é estrelado, temos que  $X$  é conexo por caminho e, pela proposição 7.3, temos que  $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$ .

Para mostrar que  $H_q(X) \cong 0$ , para  $q \geq 1$ , devemos mostrar que existe uma família de homomorfismos  $D_q : C_q(X) \rightarrow C_{q+1}(X)$  de forma que  $(\partial_{q+1} \circ D_q) + (D_{q-1} \circ \partial_q) = Id$ , para todo  $q > 0$ .

De fato, utilizando a definição 3.7, onde substituiremos os itens 1 e 2, do lema 7.1, e usando o fato de que se  $j < i$ , então  $(T^{(i)})^{(j)} = (T^{(j)})^{(i-1)}$  (lema 3.1), temos que:

$$(\partial_{q+1} \circ D_q)(T) = \sum_{i=0}^{q+1} (-1)^i (D_q(T))^{(i)} = (D_q(T))^{(0)} + \sum_{i=1}^{q+1} (-1)^i (D_q(T))^{(i)} =$$

$$T + \sum_{i=1}^{q+1} (-1)^i D_{q-1}(T^{(i-1)}) = T + \sum_{j=0}^q (-1)^{j+1} D_{q-1}(T^{(j)}) = T - (D_{q-1} \circ \partial_q)(T)$$

Logo  $(\partial_{q+1} \circ D_q)(T) + (D_{q-1} \circ \partial_q)(T) = T$ , para todo  $q \geq 1$ . Ou ainda,  $(\partial_{q+1} \circ D_q) + (D_{q-1} \circ \partial_q) = Id$ , para todo  $q > 0$ .

Neste caso, teremos que se  $x \in \ker(\partial_q) = Z_q(X)$ , então  $(\partial_{q+1} \circ D_q)(x) + (D_{q-1} \circ \partial_q)(x) = (\partial_{q+1} \circ D_q)(x) + 0 = x$ . Logo  $(\partial_{q+1} \circ D_q)(x) = x$  e, conseqüentemente,  $x \in \text{Im}(\partial_{q+1}) = B_q(X)$ , ou seja,  $Z_q(X) \subset B_q(X)$ , para  $q \geq 1$ . Portanto  $Z_q(X) = B_q(X)$  e daí  $H_q(X) \cong 0$ , para  $q \geq 1$ .

□

**Definição 7.3.** Um subconjunto  $X$  de  $\mathbb{R}^n$  diz-se um conjunto convexo se para quaisquer dois pontos  $x_1, x_2 \in X$  temos que o segmento  $|x_1x_2| = \{tx_1 + (1-t)x_2, 0 \leq t \leq 1\}$  está contido em  $X$ .

**Corolário 7.2.** Todo conjunto convexo  $X \subset \mathbb{R}^n$  é acíclico.

*Demonstração.* Observe que todo subconjunto convexo  $X \subset \mathbb{R}^n$  é estrelado em relação a qualquer um de seus pontos. Assim, este é um corolário direto do teorema 7.4.  $\square$



## 8 Sequência de Homologia da Terna

### $(X, A, B)$

Neste capítulo, faremos um análogo à teoria desenvolvida para escrever a sequência de homologia do par  $(X, Y)$ , para  $Y \subset X$ , onde  $X$  é um espaço topológico e  $Y$  é um subespaço de  $X$ .

Assim, seja  $X$  um espaço topológico e  $A, B \subset X$  subespaços, de forma que  $B \subset A$ . Lembre-se que todo subespaço topológico também é um espaço topológico. Assim, podemos escrever a Homologia Relativa dos pares  $(X, A)$ ,  $(X, B)$  e  $(A, B)$  por meio de sequências exatas.

Considere as inclusões de pares  $i : (A, B) \rightarrow (X, B)$  e  $k : (X, B) \rightarrow (X, A)$ . Estas aplicações induzem homomorfismos  $\bar{i}_{\#q} : C_q(A, B) \rightarrow C_q(X, B)$  e  $\bar{k}_{\#q} : C_q(X, B) \rightarrow C_q(X, A)$ , para todo  $q \geq 0$ .

**Proposição 8.1.** *A sequência de complexos curta  $0 \rightarrow C_q(A, B) \xrightarrow{\bar{i}_{\#q}} C_q(X, B) \xrightarrow{\bar{k}_{\#q}} C_q(X, A) \rightarrow 0$  é exata, para todo  $q \geq 0$ .*

*Demonstração.* Para todo  $q \geq 0$ , o monomorfismo  $0 \rightarrow \frac{C_q(A)}{C_q(B)} \xrightarrow{\bar{i}_{\#q}} \frac{C_q(X)}{C_q(B)}$  indentifica  $\frac{C_q(A)}{C_q(B)}$  como do um subgrupo de  $\frac{C_q(X)}{C_q(B)}$ . Por passagem ao quociente, temos a identificação canônica:

$$\frac{C_q(X, B)}{C_q(A, B)} = \frac{\frac{C_q(X)}{C_q(B)}}{\frac{C_q(A)}{C_q(B)}} \cong \frac{C_q(X)}{C_q(A)} = C_q(X, A)$$

Isto mostra que  $\ker(\bar{k}_{\#q}) = \text{Im}(\bar{i}_{\#q})$  e portanto  $0 \rightarrow C_q(A, B) \xrightarrow{\bar{i}_{\#q}} C_q(X, B) \xrightarrow{\bar{k}_{\#q}} C_q(X, A) \rightarrow 0$  é uma sequência curta exata.  $\square$

Dada a sequência exata curta  $0 \rightarrow C_q(A, B) \xrightarrow{\bar{i}_{\#q}} C_q(X, B) \xrightarrow{\bar{k}_{\#q}} C_q(X, A) \rightarrow 0$ , pelo teorema 2.2, associamos a sequência infinita de homologia da terna  $(X, A, B)$ :

$$\cdots \rightarrow H_q(A, B) \xrightarrow{\bar{i}_{*q}} H_q(X, B) \xrightarrow{\bar{k}_{*q}} H_q(X, A) \xrightarrow{\bar{\Psi}_q} H_{q-1}(A, B) \rightarrow \cdots$$

Observe que  $\bar{\Psi}_q$  é descrito pelo seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} H_q(X, A) & \xrightarrow{\bar{\Psi}_q} & H_{q-1}(A, B) \\ \Delta_q \downarrow & \nearrow j_{*(q-1)} & \\ H_{q-1}(A) & & \end{array}$$

Diagrama XVI

onde  $\Delta_q : H_q(X, A) \rightarrow H_{q-1}(A)$  é o homomorfismo bordo da sequência de homologia do par  $(X, A)$  e  $j_{*(q-1)} : H_{q-1}(A) \rightarrow H_{q-1}(A, B)$  é o homomorfismo projeção da sequência de homologia do par  $(A, B)$ .

**Proposição 8.2.** *A sequência de homologia da terna  $(X, A, B)$  é exata.*

*Demonstração.* Utilizando a proposição 3.4 e o Diagrama XVI, para as sequências de pares  $(X, A)$ ,  $(X, B)$  e  $(A, B)$ , obtemos o resultado.  $\square$

**Definição 8.1.** *Dizemos que  $f : (X, A, B) \rightarrow (X', A', B')$  é uma aplicação contínua de ternas se  $f : X \rightarrow X'$  é contínua,  $f(A) \subset A'$  e  $f(B) \subset B'$ .*

Se a aplicação  $f : (X, A, B) \rightarrow (X', A', B')$  é uma aplicação contínua de ternas, então  $f$  induz aplicações contínuas de pares:  $f^1 : (A, B) \rightarrow (A', B')$ ,  $f^2 : (X, B) \rightarrow (X', B')$  e  $f^3 : (X, A) \rightarrow (X', A')$  e podemos considerar o diagrama de sequências de homologia dos ternas  $(X, A, B)$  e  $(X', A', B')$

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_q(A, B) & \xrightarrow{\bar{i}_{*q}} & H_q(X, B) & \xrightarrow{\bar{k}_{*q}} & H_q(X, A) & \xrightarrow{\bar{\Psi}_q} & H_{q-1}(A, B) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow f^1_{*q} & & \downarrow f^2_{*q} & & \downarrow f^3_{*q} & & \downarrow f^1_{*(q-1)} & & \\ \cdots & \longrightarrow & H_q(A', B') & \xrightarrow{\bar{i}'_{*q}} & H_q(X', B') & \xrightarrow{\bar{k}'_{*q}} & H_q(X', A') & \xrightarrow{\bar{\Psi}'_q} & H_{q-1}(A', B') & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

Diagrama XVII

**Proposição 8.3.** *Se  $f : (X, A, B) \rightarrow (X', A', B')$  é uma aplicação contínua de ternas, então o Diagrama XVII é comutativo.*

*Demonstração.* Observe que a comutatividade de (1) e (2) é dada pelo fato da comutatividade ao nível de aplicações contínuas de pares e pelo fato de que a induzida da aplicação composta é a aplicação composta das induzidas. De fato, temos que  $\overline{i'}_{*q} \circ \overline{f^1}_{*q} = \overline{(i' \circ f^1)}_{*q} = \overline{(f^2 \circ i)}_{*q} = \overline{f^2}_{*q} \circ \overline{i}_{*q}$  e, também,  $\overline{k'}_{*q} \circ \overline{f^2}_{*q} = \overline{(k' \circ f^2)}_{*q} = \overline{(f^3 \circ k)}_{*q} = \overline{f^3}_{*q} \circ \overline{k}_{*q}$ .

Para o quadrado (3), note que  $\overline{\Psi}_q$  e  $\overline{\Psi}'_q$  se decompõem conforme o *Diagrama XVI*. Assim, podemos escrever o diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 H_q(X, A) & \xrightarrow{\Delta_q} & H_{q-1}(A) & \xrightarrow{j_{*(q-1)}} & H_{q-1}(A, B) \\
 \downarrow \overline{f^3}_{*q} & (4) & \downarrow (f|_A)_{*(q-1)} & (5) & \downarrow \overline{f^1}_{*(q-1)} \\
 H_q(X', A') & \xrightarrow{\Delta'_q} & H_{q-1}(A') & \xrightarrow{j'_{*(q-1)}} & H_{q-1}(A', B')
 \end{array}$$

Como, pelo *Diagrama XII*, (4) e (5) são comutativos, segue que o quadrado (3) é comutativo e, portanto, o *Diagrama XVII* é comutativo.  $\square$

No próximo capítulo veremos aplicações que envolvem ternas de espaços topológicos.

## 9 Axioma da Homotopia

Neste capítulo, desenvolveremos tópicos de Homotopia, tendo como objetivo demonstrar a validade do 5º axioma de Eilenberg-Steerod: Axioma da Homotopia. Este axioma estabelece que se as aplicações de pares  $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  são homotópicas, então  $\bar{f}_{*q} = \bar{g}_{*q}$ , para todo  $q \in \mathbb{Z}$ .

### 9.1 Propriedades de Homotopia

Antes de estudarmos homotopia de cadeias, relembremos alguns conceitos de homotopia para aplicações de pares ou homotopia de pares.

**Definição 9.1.** *Dados um par  $(X, A)$ , onde  $X$  é um espaço topológico e  $A$  um subespaço de  $X$  e um intervalo  $I = [0, 1]$ , definimos o par cartesiano  $(X, A) \times I = (X \times I, A \times I)$ .*

**Definição 9.2.** *Sejam  $f_0, f_1 : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  aplicações contínuas de pares. Uma homotopia entre  $f_0$  e  $f_1$  é uma aplicação contínua de pares  $F : (X \times I, A \times I) \rightarrow (Y, B)$  tal que  $F(x, 0) = f_0(x)$  e  $F(x, 1) = f_1(x)$ .*

**Observação 9.1.**

1. Como dissemos, anteriormente, iremos denotar uma homotopia entre  $f_0$  e  $f_1$  por  $F : f_0 \simeq f_1$ , ou simplesmente  $f_0 \simeq f_1$ . Alguns autores denominam  $F$  por homotopia de pares.
2. Se  $F : f_0 \simeq f_1$  é uma homotopia de pares, então  $F(A \times I) \subset B$ .

**Proposição 9.1.** *A homotopia de pares é uma relação de equivalência.*

*Demonstração.* Precisamos mostrar que a homotopia de pares satisfaz as propriedades reflexiva, simétrica e transitiva.

1. Propriedade Reflexiva: se definirmos  $F(x, t) = f(x), \forall (x, t) \in X \times I$ , temos que  $F : f \simeq f$  pois como  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  é uma aplicação de pares temos que  $F$  é contínua,  $F(A \times I) = f(A) \subset B$ ,  $F(x, 0) = f(x)$  e  $F(x, 1) = f(x)$ .
2. Propriedade Simétrica: se  $F : f_0 \simeq f_1$ , considere  $G(x, t) = F(x, 1 - t)$ , então pela definição de homotopia de pares, temos que, desde que  $F$  é contínua e  $F(A \times I) \subset B$ ,  $G$  também é contínua e  $G(A \times I) = F(A \times I) \subset B$ . Além disso,  $G(x, 0) = F(x, 1 - 0) = F(x, 1) = f_1(x)$  e  $G(x, 1) = F(x, 1 - 1) = F(x, 0) = f_0(x)$ , ou seja,  $G : f_1 \simeq f_0$ .
3. Propriedade Transitiva: se  $F : f_0 \simeq f_1$  e  $G : f_1 \simeq f_2$ , considere

$$H(x, t) = \begin{cases} F(x, 2t) & , \text{ se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(x, 2t - 1) & , \text{ se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} .$$

Temos que  $F$  e  $G$  são contínuas e se  $t = \frac{1}{2}$ , então  $F(x, 1) = f_1(x) = G(x, 0)$ . Com isso, temos que  $H$  também é contínua. Além disso,

$$H(A \times I) = \begin{cases} F(A \times I) & , \text{ se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(A \times I) & , \text{ se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \subset B,$$

$H(x, 0) = F(x, 0) = f_0(x)$  e  $H(x, 1) = G(x, 1) = f_2(x)$ . Portanto,  $H : f_0 \simeq f_2$ .

Portanto, a homotopia de pares é uma relação de equivalência. □

**Definição 9.3.** Dizemos que os pares  $(X, A)$  e  $(Y, B)$  têm o mesmo tipo de homotopia se existirem aplicações contínuas de pares  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  e  $g : (Y, B) \rightarrow (X, A)$  tais que  $f \circ g \simeq Id_{(Y, B)}$  e  $g \circ f \simeq Id_{(X, A)}$ . Neste caso, dizemos que as aplicações  $f$  e  $g$  são uma equivalência de homotopia.

**Observação 9.2.** Considere  $i_k : (X, A) \rightarrow (X \times I, A \times I)$ , com  $k = 0, 1$ , duas aplicações inclusão, definidas respectivamente por:  $i_0(x) = (x, 0)$  e  $i_1(x) = (x, 1)$ , para todo  $x \in X$ .

Se  $F : f \simeq g : (X \times I, A \times I) \rightarrow (Y, B)$ , então  $f = F \circ i_0$  e  $g = F \circ i_1$ . De fato, para todo  $x \in X$ , temos que:  $(F \circ i_0)(x) = F(i_0(x)) = F(x, 0) = f(x)$  e  $(F \circ i_1)(x) = F(i_1(x)) = F(x, 1) = g(x)$ .

## 9.2 Homotopia de Cadeias

Neste parágrafo, introduziremos o conceito de homotopia algébrica ou homotopia de cadeias entre duas aplicações de cadeias.

**Definição 9.4.** *Sejam  $C = (C_q, \partial_q)$  e  $C' = (C'_q, \partial'_q)$  complexos de cadeias e  $\phi, \psi : C \rightarrow C'$  aplicações de cadeias. Uma homotopia de cadeias  $D : \phi \simeq \psi$  é definida por uma família de homomorfismos  $D_q : C_q \rightarrow C'_{q+1}$  satisfazendo a relação*

$$\partial'_{q+1} \circ D_q + D_{q-1} \circ \partial_q = \phi_q - \psi_q$$

para todo  $q \in \mathbb{Z}$ . Neste caso, dizemos que as aplicações  $\phi$  e  $\psi$  são algebricamente homotópicas.

Se olharmos o *Diagrama XVIII*, a relação descrita na definição 9.4 significa que a diferença  $\phi_q - \psi_q$  é igual à soma dos dois percursos indicados.

$$\begin{array}{ccccc}
 C_{q+1} & \xrightarrow{\partial_{q+1}} & C_q & \xrightarrow{\partial_q} & C_{q-1} \\
 \phi_{q+1} \downarrow \psi_{q+1} & & D_q \nearrow & & \phi_{q-1} \downarrow \psi_{q-1} \\
 C'_{q+1} & \xrightarrow{\partial'_{q+1}} & C'_q & \xrightarrow{\partial'_q} & C'_{q-1} \\
 & & D_{q-1} \nearrow & & 
 \end{array}$$

Diagrama XVIII

Note que o *Diagrama XVIII* é comutativo, visto que o *Diagrama I* é comutativo.

**Proposição 9.2.** *A homotopia de cadeias é uma relação de equivalência.*

*Demonstração.* Demonstraremos que a homotopia de cadeias satisfaz as propriedades de reflexão, simetria e transitividade.

1. Propriedade Reflexiva: se tomarmos  $D_q = 0$ , para todo  $q \in \mathbb{Z}$ , temos que  $\phi_q - \psi_q = 0 = \partial'_{q+1} \circ 0 + 0 \circ \partial_q = \partial'_{q+1} \circ D_q + D_{q-1} \circ \partial_q$ . Portanto,  $D : \phi \simeq \phi$
2. Propriedade Simétrica: se  $D : \phi \simeq \psi$  é uma homotopia de cadeias, então  $\phi_q - \psi_q = \partial'_{q+1} \circ D_q + D_{q-1} \circ \partial_q$ . Portanto  $\psi_q - \phi_q = -(\phi_q - \psi_q) = \partial'_{q+1} \circ (-D_q) + (-D_{q-1}) \circ \partial_q$ . Assim, pela definição de homotopia de cadeias,  $-D : \psi \simeq \phi$ .
3. Propriedade Transitiva: suponha que  $D : \phi \simeq \psi$  e  $D' : \psi \simeq \theta$ . Por hipótese, temos que  $\phi_q - \psi_q = \partial'_{q+1} \circ D_q + D_{q-1} \circ \partial_q$  e  $\psi_q - \theta_q = \partial'_{q+1} \circ D'_q + D'_{q-1} \circ \partial_q$ .

Afirmamos que  $D'' = D + D' : \phi \simeq \theta$  é uma homotopia de cadeias. Observe que  $\phi_q - \theta_q = (\phi_q - \psi_q) + (\psi_q - \theta_q)$ . Por outro lado,  $(\phi_q - \psi_q) + (\psi_q - \theta_q) = \partial'_{q+1} \circ D_q + D_{q-1} \circ \partial_q + \partial'_{q+1} \circ D'_q + D'_{q-1} \circ \partial_q = \partial'_{q+1} \circ (D_q + D'_q) + (D_{q-1} + D'_{q-1}) \circ \partial_q = \partial'_{q+1} \circ D''_q + D''_{q-1} \circ \partial_q$ . Ou seja,  $D'' : \phi \simeq \theta$ .

Portanto, a homotopia de cadeias é uma relação de equivalência.  $\square$

**Proposição 9.3.** *Sejam  $C, C'$  e  $C''$  complexos de cadeias. Se  $D : \phi \simeq \psi : C \rightarrow C'$  e  $D' : \phi' \simeq \psi' : C' \rightarrow C''$  são homotopias de cadeias, então  $\phi' \circ \phi \simeq \psi' \circ \psi : C \rightarrow C''$  também é uma homotopia de cadeias.*

*Demonstração.* Por hipótese, temos que  $D : \phi \simeq \psi : C \rightarrow C'$  e  $D' : \phi' \simeq \psi' : C' \rightarrow C''$  são homotopias de cadeias. Assim, temos as seguintes relações:

$$\phi_q - \psi_q = \partial'_{q+1} \circ D_q + D_{q-1} \circ \partial_q \quad (9.1)$$

$$\phi'_q - \psi'_q = \partial''_{q+1} \circ D'_q + D'_{q-1} \circ \partial'_q \quad (9.2)$$

Temos, ainda, o diagrama comutativo abaixo, onde a soma dos percursos indicados descrevem as equações 9.1 e 9.2:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & C_{q+1} & \xrightarrow{\partial_{q+1}} & C_q & \xrightarrow{\partial_q} & C_{q-1} \longrightarrow \cdots \\
 & & \phi_{q+1} \downarrow \psi_{q+1} & & \phi_q \downarrow \psi_q & & \phi_{q-1} \downarrow \psi_{q-1} \\
 \cdots & \longrightarrow & C'_{q+1} & \xrightarrow{\partial'_{q+1}} & C'_q & \xrightarrow{\partial'_q} & C'_{q-1} \longrightarrow \cdots \\
 & & \phi'_{q+1} \downarrow \psi'_{q+1} & & \phi'_q \downarrow \psi'_q & & \phi'_{q-1} \downarrow \psi'_{q-1} \\
 \cdots & \longrightarrow & C''_{q+1} & \xrightarrow{\partial''_{q+1}} & C''_q & \xrightarrow{\partial''_q} & C''_{q-1} \longrightarrow \cdots
 \end{array}$$

Consideremos, agora, a seguinte família de aplicações:  $D''_q = D'_q \circ \phi_q + \psi'_{q+1} \circ D_q$ . Note que esta é uma família de homomorfismos, uma vez que  $D'_q, \phi_q, D_q$  e  $\psi'_{q+1}$  são homomorfismos, para todo  $q \in \mathbb{Z}$ .

Assim, precisamos verificar que  $\phi'_q \circ \phi_q - \psi'_q \circ \psi_q = \partial''_{q+1} \circ D''_q + D''_{q-1} \circ \partial_q$ . Utilizando as equações 9.1 e 9.2 e o diagrama comutativo acima, temos que:

$$\begin{aligned}
 \phi'_q \circ \phi_q - \psi'_q \circ \psi_q &= \\
 &= (\phi'_q - \psi'_q) \circ \phi_q + \psi'_q \circ (\phi_q - \psi_q) \\
 &= (\partial''_{q+1} \circ D'_q + D'_{q-1} \circ \partial'_q) \circ \phi_q + \psi'_q \circ (\partial'_{q+1} \circ D_q + D_{q-1} \circ \partial_q) \\
 &= \partial''_{q+1} \circ D'_q \circ \phi_q + D'_{q-1} \circ \partial'_q \circ \phi_q + \psi'_q \circ \partial'_{q+1} \circ D_q + \psi'_q \circ D_{q-1} \circ \partial_q \\
 &= \partial''_{q+1} \circ D'_q \circ \phi_q + D'_{q-1} \circ \phi_{q-1} \circ \partial_q + \partial''_{q+1} \circ \psi'_{q+1} \circ D_q + \psi'_q \circ D_{q-1} \circ \partial_q
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \partial''_{q+1} \circ (D'_q \circ \phi_q + \psi'_{q+1} \circ D_q) + (D'_{q-1} \circ \phi_{q-1} + \psi'_q \circ D_{q-1}) \circ \partial_q \\
&= \partial''_{q+1} \circ D''_q + D''_{q-1} \circ \partial_q
\end{aligned}$$

Portanto,  $D'' : \phi' \circ \phi \simeq \psi' \circ \psi : C \rightarrow C''$  é uma homotopia de cadeias.  $\square$

**Proposição 9.4.** *Sejam  $\phi, \psi : C \rightarrow C'$  aplicações de cadeias. Se  $D : \phi \simeq \psi$  é uma homotopia de cadeias, então  $\phi_{*q} = \psi_{*q} : H_q(C) \rightarrow H_q(C')$ , para todo  $q \in \mathbb{Z}$ .*

*Demonstração.* Por hipótese, temos que  $D : \phi \simeq \psi$  é uma homotopia de cadeias. Assim, podemos escrever a relação  $\phi_q - \psi_q = \partial'_{q+1} \circ D_q + D_{q-1} \circ \partial_q$ . Seja  $z \in \ker(\partial_q)$ .

Temos que:

$$\begin{aligned}
\phi_q(z) - \psi_q(z) &= (\partial'_{q+1} \circ D_q)(z) + (D_{q-1} \circ \partial_q)(z) \\
&= \partial'_{q+1}(D_q(z)) + D_{q-1}(\partial_q(z)) \\
&= \partial'_{q+1}(D_q(z)) + D_{q-1}(0) \\
&= \partial'_{q+1}(D_q(z)) + 0 \\
&= \partial'_{q+1}(D_q(z))
\end{aligned}$$

Portanto,  $\phi_q(z) - \psi_q(z) \in \text{Im}(\partial'_{q+1})$  e  $[\phi_q(z)] = [\psi_q(z)]$ . Logo,  $\phi_{*q}([z]) = [\phi_q(z)] = [\psi_q(z)] = \psi_{*q}([z])$ , ou seja, concluímos que  $\phi_{*q} = \psi_{*q}$ , para todo  $q \in \mathbb{Z}$ .  $\square$

**Definição 9.5.** *Sejam  $C$  e  $C'$  complexos de cadeias. Uma aplicação de cadeias  $\phi : C \rightarrow C'$  é denominada uma equivalência de cadeias se existir uma aplicação de cadeias  $\psi : C' \rightarrow C$  tal que  $\psi \circ \phi \simeq \text{Id}_C$  e  $\phi \circ \psi \simeq \text{Id}_{C'}$ .*

**Teorema 9.1.** *Se  $f \simeq g : X \rightarrow Y$ , então  $f_{\#q} \simeq g_{\#q} : C_q(X) \rightarrow C_q(Y)$ , para todo  $q \in \mathbb{Z}$ .*

*Demonstração.* Considere  $f = F \circ i_0$  e  $g = F \circ i_1$ , onde  $i_0$  e  $i_1$  são as aplicações inclusão dadas pela observação 9.2. Assim, temos que  $f_{\#q} = (F \circ i_0)_{\#q} = F_{\#q} \circ i_{0\#q}$  e  $g_{\#q} = (F \circ i_1)_{\#q} = F_{\#q} \circ i_{1\#q}$ .

Se provarmos que  $i_{0\#q} \simeq i_{1\#q}$  como aplicações de cadeias, pela proposição 9.3, se considerarmos  $\phi'_q = \psi'_q = F_{\#q}$ ,  $\phi_q = i_{0\#q}$  e  $\psi_q = i_{1\#q}$ , temos que  $F_{\#q} \circ i_{0\#q} \simeq F_{\#q} \circ i_{1\#q}$ . Mas como  $f_{\#q} = F_{\#q} \circ i_{0\#q}$  e  $g_{\#q} = F_{\#q} \circ i_{1\#q}$ , podemos concluir que  $f_{\#q} \simeq g_{\#q}$ .

Provaremos então que  $i_{0\#q} \simeq i_{1\#q}$ . Para isto, construiremos uma família de homomorfismos  $D_q(X) : C_q(X) \rightarrow C_{q+1}(X \times I)$ , onde  $I = [0, 1]$ , que satisfaça as propriedades:

**Propriedade  $P_1$ :**  $D_q(X) : i_{0\#q} \simeq i_{1\#q}$  é uma homotopia de cadeias, ou seja,  $i_{0\#q} - i_{1\#q} = \partial'_{q+1} \circ D_q(X) + D_{q-1}(X) \circ \partial_q$ , para todo  $q \in \mathbb{Z}$ .



Representando esta propriedade através de seu diagrama comutativo, temos:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & C_{q+1}(X) & \xrightarrow{\partial_{q+1}} & C_q(X) & \xrightarrow{\partial_q} & C_{q-1}(X) & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow i_{1\#(q+1)} & \swarrow D_q(X) & \downarrow i_{1\#q} & \swarrow D_{q-1}(X) & \downarrow i_{1\#(q-1)} & & \\
 \cdots & \longrightarrow & C_{q+1}(X \times I) & \xrightarrow{\partial'_{q+1}} & C_q(X \times I) & \xrightarrow{\partial'_q} & C_{q-1}(X \times I) & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow i_{0\#(q+1)} & \swarrow & \downarrow i_{0\#q} & \swarrow & \downarrow i_{0\#(q-1)} & & 
 \end{array}$$

Diagrama XIX

**Propriedade  $P_2$ :** Condição de naturalidade

Se  $f : X \rightarrow Y$  é uma aplicação contínua, então o diagrama *Diagrama XX* é comutativo, onde  $Id : I \rightarrow I$  é a aplicação identidade no intervalo fechado  $I = [0, 1]$ .

$$\begin{array}{ccc}
 C_q(X) & \xrightarrow{D_q(X)} & C_{q+1}(X \times I) \\
 \downarrow f\#_q & & \downarrow (f \times Id)\#_{(q+1)} \\
 C_q(Y) & \xrightarrow{D_q(Y)} & C'_{q+1}(Y \times I)
 \end{array}$$

Diagrama XX

Observe que esta condição de naturalidade foi vista abaixo do teorema 2.2, para seqüências de homologia do par  $(C, D)$ .

Essencialmente, construiremos  $D_q(X)$  satisfazendo as duas propriedades por indução sobre  $q \in \mathbb{Z}$ .

**Caso 1:**  $q < 0$

Como  $q < 0$ , por definição, temos que  $C_q(X) = 0$ . Então  $D_q(X) \equiv 0$ . Portanto as propriedades  $P_1$  e  $P_2$  estão satisfeitas, para todo espaço topológico  $X$ , se  $q < 0$ .

**Caso 2:**  $q = 0$

Defina  $D_0(X) : C_0(X) \rightarrow C_1(X \times I)$  de tal forma que se  $T$  é um gerador de  $C_0(X)$ , então  $D_0(X)(T)(\lambda P_0 + (1 - \lambda)P_1) = (T(P_0), \lambda)$  onde  $\lambda \in I = [0, 1]$ . Veremos, agora, que o homomorfismo  $D_0(X)$ , como definido, satisfaz as propriedades  $P_1$  e  $P_2$ :

i)  $D_{-1}(X) \equiv 0$ .

ii) Da definição 3.7 temos que  $\partial'_1 D_0(X)(T) = \sum_{i=0}^1 (-1)^i [D_0(X)(T)]^i$ .

iii)  $[D_0(X)(T)]^0(P_0) = (D_0(X)(T) \circ g_0^0)(P_0) = D_0(X)(T)(g_0^0(P_0)) = D_0(X)(T)(P_1) = D_0(X)(T)(0P_0 + (1 - 0)P_1) = (T(P_0), 0) = i_0(T(P_0)) = (i_0 \circ T)(P_0)$  e

$[D_0(X)(T)]^1(P_1) = (D_0(X)(T) \circ g_1^0)(P_1) = D_0(X)(T)(g_1^0(P_1)) = D_0(X)(T)(P_0) = D_0(X)(T)(1P_0 + (1 - 1)P_1) = (T(P_0), 1) = i_1(T(P_0)) = (i_1 \circ T)(P_0)$

*iv)* Pela definição acima da proposição 3.2 temos  $i_{k\#q}(T) = i_k \circ T, k \in \{0, 1\}$ .

*v)*  $D_0(Y)(f \circ T) : \Delta_1 \rightarrow Y \times I$ , onde  $I = [0, 1]$ , é dada por  $D_0(Y)(f \circ T)(\lambda P_0 + (1 - \lambda)P_1) = ((f \circ T)(P_0), \lambda) = (f \times Id)(T(P_0), \lambda) = ((f \times Id) \circ D_0(X)(T))(\lambda P_0 + (1 - \lambda)P_1)$ .

Assim, temos que:

1. Propriedade  $P_1$  está satisfeita, pois:

$$\begin{aligned}
 (\partial'_1 \circ D_0(X) + D_{-1}(X) \circ \partial_0)(T) &\stackrel{i)}{=} \partial'_1(D_0(X)(T)) + D_{-1}(X)(\partial_0(T)) \\
 &= \partial'_1(D_0(X)(T)) \\
 &\stackrel{ii)}{=} \sum_{i=0}^1 (-1)^i [D_0(X)(T)]^i \\
 &= [D_0(X)(T)]^0 - [D_0(X)(T)]^1 \\
 &\stackrel{iii)}{=} i_0 \circ T - i_1 \circ T \\
 &\stackrel{iv)}{=} i_{0\#q}(T) - i_{1\#q}(T) \\
 &= (i_{0\#q} - i_{1\#q})(T)
 \end{aligned}$$

2. Propriedade  $P_2$  está satisfeita pois, para qualquer gerador  $T \in C_0(X)$ , por *v)*, temos que:

$$\begin{aligned}
 (D_0(Y) \circ f_{\#0})(T) &= D_0(Y)(f_{\#0}(T)) \\
 &= D_0(Y)(f \circ T) \\
 &= (f \times Id) \circ D_0(X)(T) \\
 &= (f \times Id)_{\#1}(D_0(X)(T)) \\
 &= ((f \times Id)_{\#1} \circ D_0(X))(T)
 \end{aligned}$$

Portanto as propriedades  $P_1$  e  $P_2$  estão satisfeitas, para todo espaço topológico  $X$ , se  $q = 0$ .

**Caso 3:**  $q > 0$

Primeiro, vamos estabelecer a hipótese de indução (HP) sobre  $q > 0$ , a saber: suponha que para todo espaço topológico  $X$  e para todo  $q' < q$ , temos que os homomorfismos  $D_{q'}(X)$  estão definidos de forma a satisfazerem as propriedades  $P_1$  e  $P_2$ .

Vamos construir os homomorfismos  $D_q(X)$ , que irão satisfazer as requeridas propriedades, da seguinte forma: seja  $T : \Delta_q \rightarrow X$  um gerador de  $C_q(X)$ . A idéia principal é prosseguir com o passo de indução no caso mais simples dos  $q$ -simplexos padrão,  $\Delta_q$ , e

passar ao espaço  $X$ , considerando a aplicação contínua  $T$  que induz uma aplicação de cadeias  $T_{\#q} : C_q(\Delta_q) \rightarrow C_q(X)$ .

Assim, se  $Id_{\Delta_q} : \Delta_q \rightarrow \Delta_q$  é a aplicação identidade, então

$$T_{\#q}(Id_{\Delta_q}) = T \circ Id_{\Delta_q} = T \quad (9.3)$$

Precisamos definir, assim,  $D_q(\Delta_q)(Id_{\Delta_q})$ , para que o *Diagrama XXI* seja comutativo.

$$\begin{array}{ccc} C_q(\Delta_q) & \xrightarrow{D_q(\Delta_q)} & C_{q+1}(\Delta_q \times I) \\ \downarrow T_{\#q} & & \downarrow (T \circ Id)_{\#(q+1)} \\ C_q(X) & \xrightarrow{D_q(X)} & C'_{q+1}(X \times I) \end{array}$$

Diagrama XXI

onde  $I = [0, 1]$  e  $Id : I \rightarrow I$  é a aplicação identidade de  $I$ .

Neste caso, pela equação 9.3 e pelo *Diagrama XXI*, temos que

$$D_q(X)(T) = D_q(X) \circ T_{\#q}(Id_{\Delta_q}) = (T \circ Id)_{\#(q+1)} \circ D_q(\Delta_q)(Id_{\Delta_q}) \quad (9.4)$$

Portanto,  $D_q(\Delta_q)(Id_{\Delta_q})$  determina  $D_q(X)$ , para qualquer espaço topológico  $X$ .

Suponhamos, então, que  $D_{q'}(\Delta_q)$  esteja definido para todo  $q' < q$ . Logo,  $D_q(\Delta_q)$  deverá satisfazer a propriedade  $P_1$ , ou seja, no diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & C_{q+1}(\Delta_q) & \xrightarrow{\tilde{\partial}_{q+1}} & C_q(\Delta_q) & \xrightarrow{\tilde{\partial}_q} & C_{q-1}(\Delta_q) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow i'_{1\#(q+1)} & \swarrow D_q(\Delta_q) & \downarrow i'_{1\#q} & \swarrow D_{q-1}(\Delta_q) & \downarrow i'_{1\#(q-1)} & & \\ \cdots & \longrightarrow & C_{q+1}(\Delta_q \times I) & \xrightarrow{\tilde{\partial}'_{q+1}} & C_q(\Delta_q \times I) & \xrightarrow{\tilde{\partial}'_q} & C_{q-1}(\Delta_q \times I) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

devemos ter a relação:

$$i'_{0\#q} - i'_{1\#q} = \tilde{\partial}'_{q+1} \circ D_q(\Delta_q) + D_{q-1}(\Delta_q) \circ \tilde{\partial}_q, \text{ para todo } q \in \mathbb{Z} \quad (9.5)$$

Assim, pela equação 9.5 podemos escrever

$$(\tilde{\partial}'_{q+1} \circ D_q(\Delta_q))(Id_{\Delta_q}) = i'_{0\#q}(Id_{\Delta_q}) - i'_{1\#q}(Id_{\Delta_q}) - (D_{q-1}(\Delta_q) \circ \tilde{\partial}_q)(Id_{\Delta_q}), \forall q \in \mathbb{Z} \quad (9.6)$$

Pela hipótese de indução, vemos que a cadeia

$$b = [i'_{0\#q}(Id_{\Delta_q}) - i'_{1\#q}(Id_{\Delta_q}) - (D_{q-1}(\Delta_q) \circ \tilde{\partial}_q)](Id_{\Delta_q}) \quad (9.7)$$

está bem definida em  $C_q(\Delta_q \times I)$ .

Para que a equação 9.6 seja possível, veja que é necessário que  $\tilde{\partial}'_q \equiv 0$ , para qualquer  $q > 0$ , pois desde que  $(C_q(\Delta_q), \tilde{\partial}'_q)$  é um complexo de cadeias, temos que  $\tilde{\partial}'_q \circ \tilde{\partial}'_{q+1} = 0$ , para todo  $q > 0$ .

Assim, para todo  $b \in C_q(\Delta_q \times I)$ :

$$\begin{aligned}
 \tilde{\partial}'_q(b) &= \tilde{\partial}'_q(i'_{0\#q}(Id_{\Delta_q}) - i'_{1\#q}(Id_{\Delta_q}) - (D_{q-1}(\Delta_q) \circ \tilde{\partial}'_q)(Id_{\Delta_q})) \\
 &= (\tilde{\partial}'_q \circ i'_{0\#q})(Id_{\Delta_q}) - (\tilde{\partial}'_q \circ i'_{1\#q})(Id_{\Delta_q}) - (\tilde{\partial}'_q \circ D_{q-1}(\Delta_q) \circ \tilde{\partial}'_q)(Id_{\Delta_q}) \\
 &\stackrel{(9.6)}{=} (\tilde{\partial}'_q \circ i'_{0\#q})(Id_{\Delta_q}) - (\tilde{\partial}'_q \circ i'_{1\#q})(Id_{\Delta_q}) - \tilde{\partial}'_q[(i'_{0\#q} - i'_{1\#q} - \\
 &\quad \tilde{\partial}'_{q+1} \circ D_q(\Delta_q))(Id_{\Delta_q}] \\
 &= (\tilde{\partial}'_q \circ i'_{0\#q})(Id_{\Delta_q}) - (\tilde{\partial}'_q \circ i'_{1\#q})(Id_{\Delta_q}) - (\tilde{\partial}'_q \circ i'_{0\#q})(Id_{\Delta_q}) + \\
 &\quad (\tilde{\partial}'_q \circ i'_{1\#q})(Id_{\Delta_q}) + \tilde{\partial}'_q \circ \tilde{\partial}'_{q+1} \circ D_q(\Delta_q)(Id_{\Delta_q}) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Com isso, concluímos que  $b \in Z_q(\Delta_q \times I)$ , ou seja,  $b$  é um  $q$ -ciclo de  $C_q(\Delta_q \times I)$ . Note que como  $\Delta_q \times I$  é convexo, segue que  $\Delta_q \times I$  é estrelado. Pela proposição 7.4,  $\Delta_q \times I$  é um espaço topológico acíclico. Assim, pela proposição 7.1 a sequência de grupos

$$\cdots \rightarrow C_{q+1}(\Delta_q \times I) \xrightarrow{\tilde{\partial}'_{q+1}} C_q(\Delta_q \times I) \xrightarrow{\tilde{\partial}'_q} C_{q-1}(\Delta_q \times I) \rightarrow \cdots$$

é exata, o que implica que existe  $c \in C_{q+1}(\Delta_q \times I)$  tal que  $\tilde{\partial}'_{q+1}(c) = b$ .

Definiremos, então,

$$D_q(\Delta_q)(Id_{\Delta_q}) = c \tag{9.8}$$

e

$$D_q(X)(T) = (T \times Id)_{\#(q+1)}(c) \tag{9.9}$$

onde  $I = [0, 1]$  e  $Id : I \rightarrow I$  é a aplicação identidade de  $I$ .

Agora, podemos mostrar que  $D_q(X)$  satisfaz as duas propriedades requeridas, para todo  $q' < q$ .

1. Propriedade  $P_1$  está satisfeita.

Primeiro, observemos que temos os seguintes diagramas comutativos:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \cdots & \longrightarrow & C_{q+1}(\Delta_q) & \xrightarrow{\tilde{\partial}'_{q+1}} & C_q(\Delta_q) & \xrightarrow{\tilde{\partial}'_q} & C_{q-1}(\Delta_q) & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow T_{\#(q+1)} & & \downarrow T_{\#q} & & \downarrow T_{\#(q-1)} & & \\
 \cdots & \longrightarrow & C_{q+1}(X) & \xrightarrow{\partial_{q+1}} & C_q(X) & \xrightarrow{\partial_q} & C_{q-1}(X) & \longrightarrow & \cdots
 \end{array}$$

Diagrama XXII

$$\begin{array}{ccccccc}
\cdots & \longrightarrow & C_{q+1}(\Delta_q \times I) & \xrightarrow{\tilde{\partial}'_{q+1}} & C_q(\Delta_q \times I) & \xrightarrow{\tilde{\partial}'_q} & C_{q-1}(\Delta_q \times I) & \longrightarrow & \cdots \\
& & \downarrow (T \times Id)_{\#(q+1)} & & \downarrow (T \times Id)_{\#q} & & \downarrow (T \times Id)_{\#(q-1)} & & \\
\cdots & \longrightarrow & C_{q+1}(X \times I) & \xrightarrow{\partial'_{q+1}} & C_q(X \times I) & \xrightarrow{\partial'_q} & C_{q-1}(X \times I) & \longrightarrow & \cdots
\end{array}$$

Diagrama XXIII

$$\begin{array}{ccc}
C_{q-1}(\Delta_q) & \xrightarrow{D_{q-1}(\Delta_q)} & C_q(\Delta_q \times I) \\
\downarrow T_{\#q-1} & & \downarrow (T \times Id)_{\#q} \\
C_{q-1}(X) & \xrightarrow{D_{q-1}(X)} & C_q(X \times I)
\end{array}$$

Diagrama XXIV

$$\begin{array}{ccccc}
& & X & & \\
& & \nearrow T & & \searrow i_k \\
\Delta_q & \xrightarrow{Id_{\Delta_q}} & \Delta_q & & X \times I \\
& & \searrow i'_k & & \nearrow T \times Id \\
& & \Delta_q \times I & & 
\end{array}$$

Diagrama XXV

onde, para os *Diagrama XXIII*, *Diagrama XXIV* e *Diagrama XXV*, temos que  $I = [0, 1]$  e  $Id : I \rightarrow I$  é a aplicação identidade de  $I$  e no *Diagrama XXV*,  $i_k, i'_k$ ,  $k \in \{0, 1\}$  são as aplicações inclusão definidas na observação 9.2.

Assim, se considerarmos um gerador  $T$  de  $C_q(X)$ , utilizando as equações 9.9 e 9.3, os *Diagrama XXIII*, *Diagrama XXII* e *Diagrama XXIV* e a hipótese de indução (HP), nesta ordem, temos:

$$\begin{aligned}
(\partial'_{q+1} \circ D_q(X) + D_{q-1}(X) \circ \partial_q)(T) &= \\
&= (\partial'_{q+1} \circ D_q(X))(T) + (D_{q-1}(X) \circ \partial_q)(T) \\
&= \partial'_{q+1}(D_q(X)(T)) + D_{q-1}(X)(\partial_q(T)) \\
&= \partial'_{q+1}((T \times Id)_{\#(q+1)}(c)) + D_{q-1}(X)(\partial_q(T_{\#q}(Id_{\Delta_q}))) \\
&= (T \times Id)_{\#q}(\tilde{\partial}'_{q+1}(c)) + D_{q-1}(X)(T_{\#q-1}(\tilde{\partial}_q(Id_{\Delta_q}))) \\
&= (T \times Id)_{\#q}(\tilde{\partial}'_{q+1}(c)) + (T \times Id)_{\#q}(D_{q-1}(\Delta_q)(\tilde{\partial}_q(Id_{\Delta_q}))) \\
&= (T \times Id)_{\#q}[\tilde{\partial}'_{q+1}(c) + D_{q-1}(\Delta_q)(\tilde{\partial}_q(Id_{\Delta_q}))] \\
&= (T \times Id)_{\#q}[b + D_{q-1}(\Delta_q)(\tilde{\partial}_q(Id_{\Delta_q}))] \\
&= (T \times Id)_{\#q}[i'_{0\#q}(Id_{\Delta_q}) - i'_{1\#q}(Id_{\Delta_q})] \\
&= [(T \times Id)_{\#q} \circ i'_{0\#q}](Id_{\Delta_q}) - [(T \times Id)_{\#q} \circ i'_{1\#q}](Id_{\Delta_q}) \\
&= [(T \times Id) \circ i'_0]_{\#q}(Id_{\Delta_q}) - [(T \times Id) \circ i'_1]_{\#q}(Id_{\Delta_q})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (i_0 \circ T)_{\#q}(Id_{\Delta_q}) - (i_1 \circ T)_{\#q}(Id_{\Delta_q}) \\
 &= (i_{0\#q} \circ T_{\#q})(Id_{\Delta_q}) - (i_{1\#q} \circ T_{\#q})(Id_{\Delta_q}) \\
 &= i_{0\#q}(T_{\#q}(Id_{\Delta_q})) - i_{1\#q}(T_{\#q}(Id_{\Delta_q})) \\
 &= i_{0\#q}(T) - i_{1\#q}(T) \\
 &= (i_{0\#q} - i_{1\#q})(T)
 \end{aligned}$$

2. Propriedade  $P_2$  está satisfeita.

Se  $f : X \rightarrow Y$  é uma aplicação contínua, para todo gerador  $T$  de  $C_q(X)$ , temos que:

$$\begin{aligned}
 (D_q(Y) \circ f_{\#q})(T) &= D_q(Y)(f_{\#q}(T)) \\
 &= D_q(Y)(f \circ T) \\
 &= [f \circ T \times Id]_{\#q}(c) \\
 &= [(f \times Id) \circ (T \times Id)]_{\#q}(c) \\
 &= [(f \times Id)_{\#q} \circ (T \times Id)_{\#q}](c) \\
 &= (f \times Id)_{\#q} \circ D_q(X)(T)
 \end{aligned}$$

Portanto as propriedades  $P_1$  e  $P_2$  estão satisfeitas, para todo espaço topológico  $X$ , se  $q > 0$ .

Lembremos que, no início de nossa demonstração, definimos  $f_{\#q} = F_{\#q} \circ i_{0\#q}$  e  $g_{\#q} = F_{\#q} \circ i_{1\#q}$  e provamos que  $D_q(X) : i_{0\#q} \simeq i_{1\#q}$  é uma homotopia de cadeias. Assim, para completar a demonstração, mostraremos que  $D'_q = F_{\#(q+1)} \circ D_q(X) : f_{\#q} \simeq g_{\#q}$  é uma homotopia de cadeias.

De fato, considere os diagramas comutativos

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \longrightarrow & C_{q+1}(X) & \xrightarrow{\partial_{q+1}} & C_q(X) & \xrightarrow{\partial_q} & C_{q-1}(X) & \longrightarrow & \dots \\
 & & \downarrow i_{1\#(q+1)} & \swarrow D_q(X) & \downarrow i_{1\#q} & \swarrow D_{q-1}(X) & \downarrow i_{1\#(q-1)} & & \\
 \dots & \longrightarrow & C_{q+1}(X \times I) & \xrightarrow{\partial'_{q+1}} & C_q(X \times I) & \xrightarrow{\partial'_q} & C_{q-1}(X \times I) & \longrightarrow & \dots \\
 & & \downarrow F_{\#(q+1)} & & \downarrow F_{\#q} & & \downarrow F_{\#(q-1)} & & \\
 \dots & \longrightarrow & C_{q+1}(Y) & \xrightarrow{\partial''_{q+1}} & C_q(Y) & \xrightarrow{\partial''_q} & C_{q-1}(Y) & \longrightarrow & \dots
 \end{array}$$

Diagrama XXVI

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \longrightarrow & C_{q+1}(X) & \xrightarrow{\partial_{q+1}} & C_q(X) & \xrightarrow{\partial_q} & C_{q-1}(X) & \longrightarrow & \dots \\
 & & \downarrow g_{\#(q+1)} & \swarrow D'_q & \downarrow g_{\#q} & \swarrow D'_{q-1} & \downarrow g_{\#(q-1)} & & \\
 \dots & \longrightarrow & C_{q+1}(Y) & \xrightarrow{\partial''_{q+1}} & C_q(Y) & \xrightarrow{\partial''_q} & C_{q-1}(Y) & \longrightarrow & \dots
 \end{array}$$

Diagrama XXVII

Para cada gerador  $T$  de  $C_q(X)$ , utilizando o *Diagrama XXVI* e as propriedades  $P_1$  e  $P_2$ , temos que:

$$\begin{aligned}
& (\partial''_{q+1} \circ D'_q + D'_{q-1} \circ \partial_q)(T) = \\
&= (\partial''_{q+1} \circ D'_q)(T) + (D'_{q-1} \circ \partial_q)(T) \\
&= \partial''_{q+1}(D'_q(T)) + D'_{q-1}(\partial_q(T)) \\
&= \partial''_{q+1}(F_{\#(q+1)} \circ D_q(X)(T)) + F_{\#q} \circ D_{q-1}(X)(\partial_q(T)) \\
&= F_{\#q}(\partial'_{q+1} \circ D_q(X)(T)) + F_{\#q}(D_{q-1}(X) \circ \partial_q(T)) \\
&= F_{\#q}[\partial'_{q+1} \circ D_q(X)(T) + D_{q-1}(X) \circ \partial_q(T)] \\
&= F_{\#q}[(\partial'_{q+1} \circ D_q(X) + D_{q-1}(X) \circ \partial_q)(T)] \\
&= F_{\#q}[(i_{0\#q} - i_{1\#q})(T)] \\
&= F_{\#q}[i_{0\#q}(T) - i_{1\#q}(T)] \\
&= (F_{\#q} \circ i_{0\#q})(T) - (F_{\#q} \circ i_{1\#q})(T) \\
&= f_{\#q}(T) - g_{\#q}(T) \\
&= (f_{\#q} - g_{\#q})(T)
\end{aligned}$$

Portanto,  $D'_q : f_{\#q} \simeq g_{\#q}$  é uma homotopia de cadeias.  $\square$

**Corolário 9.1.** *Se  $f, g : X \rightarrow Y$  são aplicações homotópicas, então  $f_{*q} = g_{*q} : H_q(X) \rightarrow H_q(Y)$ , para todo  $q \in \mathbb{Z}$ .*

*Demonstração.* Como as aplicações  $f$  e  $g$  são aplicações homotópicas, pelo teorema 9.1, temos que  $f_{\#q} \simeq g_{\#q}$ , é uma homotopia de cadeias, para todo  $q \in \mathbb{Z}$ . Pela proposição 9.4, temos que  $f_{*q} = g_{*q}$ , para todo  $q \in \mathbb{Z}$ .  $\square$

O corolário apresentado é uma ferramenta algébrica muito útil para calcular os grupos de homologia singular de espaços topológicos.

### 9.3 Quinto Axioma de Eilenberg-Steenrod: Axioma da Homotopia

Nosso objetivo, agora, é estender os conceitos discutidos neste capítulo para a homologia relativa (tópico 3.2.1) e, assim, provar que a Homologia Singular satisfaz o 5º axioma de Eilenberg-Steenrod. Este é essencialmente o Teorema 9.3 que veremos nesta seção.

Observemos a naturalidade da definição de  $D_q(X)$ , visto na equação 9.4, aplicada à inclusão  $i : A \rightarrow X$ , onde  $A \subset X$  é um subespaço topológico. Assim,  $D_q(X)|_{C_q(A)} = D_q(A)$ , para todo  $q \in \mathbb{Z}$ . Analogamente,  $D_q(Y)|_{C_q(B)} = D_q(B)$ , para todo  $q \in \mathbb{Z}$ . Considere o diagrama

$$\begin{array}{ccccc} C_q(A) & \xrightarrow{D_q(A)} & C_{q+1}(A \times I) & \xrightarrow{F'_{\#(q+1)}} & C_{q+1}(B) \\ \downarrow i_{\#q} & & \downarrow (i \times Id)_{\#(q+1)} & & \downarrow i'_{\#(q+1)} \\ C_q(X) & \xrightarrow{D_q(X)} & C_{q+1}(X \times I) & \xrightarrow{F_{\#(q+1)}} & C_{q+1}(Y) \end{array}$$

Diagrama XXVIII

onde  $I = [0, 1]$ ,  $Id : I \rightarrow I$  é a aplicação identidade e  $F : f \simeq g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  é uma homotopia de pares.

A comutatividade do *Diagrama XXVIII* mostra que podemos, por passagem ao quociente, definir uma família de homomorfismos  $\overline{D}'_q : C_q(X, A) \rightarrow C_q(Y, B)$ , como apresentado no diagrama abaixo:

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & \frac{C_{q+1}(X)}{C_{q+1}(A)} & \xrightarrow{\overline{\partial}_{q+1}} & \frac{C_q(X)}{C_q(A)} & \xrightarrow{\overline{\partial}_q} & \frac{C_{q-1}(X)}{C_{q-1}(A)} \longrightarrow \dots \\ & & \downarrow \overline{g}_{\#(q+1)} \Big| \overline{f}_{\#(q+1)} & \swarrow \overline{D}'_q & \downarrow \overline{g}_{\#q} \Big| \overline{f}_{\#q} & \swarrow \overline{D}'_{q-1} & \downarrow \overline{g}_{\#(q-1)} \Big| \overline{f}_{\#(q-1)} \\ \dots & \longrightarrow & \frac{C_{q+1}(Y)}{C_{q+1}(B)} & \xrightarrow{\overline{\partial}'_{q+1}} & \frac{C_q(Y)}{C_q(B)} & \xrightarrow{\overline{\partial}'_q} & \frac{C_{q-1}(Y)}{C_{q-1}(B)} \longrightarrow \dots \end{array}$$

Diagrama XXIX

onde, para todo  $T + C_q(A) \in C_q(X, A)$ , definimos

$$\overline{D}'_q(T + C_q(A)) = D'_q(T) + C_{q+1}(B) \tag{9.10}$$

onde  $D'_q = F_{\#q+1} \circ D_q(X) : C_q(X) \rightarrow C_{q+1}(Y)$ .

**Observação 9.3.** Antes de prosseguirmos com os resultados, lembremos que, para todo  $T + C_q(A) \in C_q(X, A)$ , as aplicações  $\overline{f}_{\#q}$ ,  $\overline{g}_{\#q}$  e  $\overline{\partial}_q$  são definidas por:

1.  $\overline{f}_{\#q} : \frac{C_q(X)}{C_q(A)} \rightarrow \frac{C_q(Y)}{C_q(B)}$  é tal que  $\overline{f}_{\#q}(T + C_q(A)) = f_{\#q}(T) + C_q(B)$ ;
2.  $\overline{g}_{\#q} : \frac{C_q(X)}{C_q(A)} \rightarrow \frac{C_q(Y)}{C_q(B)}$  é tal que  $\overline{g}_{\#q}(T + C_q(A)) = g_{\#q}(T) + C_q(B)$
3.  $\overline{\partial}_q : \frac{C_q(X)}{C_q(A)} \rightarrow \frac{C_{q-1}(X)}{C_{q-1}(A)}$  é tal que  $\overline{\partial}_q(T + C_q(A)) = \partial_q(T) + C_{q-1}(A)$ .



**Teorema 9.2.** *Se  $f \simeq g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  é uma homotopia de pares, então  $\bar{f}_{\#q} \simeq \bar{g}_{\#q} : C_q(X, A) \rightarrow C_q(Y, B)$  é uma homotopia de cadeias.*

*Demonstração.* Devemos mostrar que  $\bar{D}'_q : \bar{f}_{\#q} \simeq \bar{g}_{\#q}$  é uma homotopia de cadeias, ou seja,  $\bar{D}'_q$  satisfaz a relação  $\bar{\partial}''_{q+1} \circ \bar{D}'_q + \bar{D}'_{q-1} \circ \bar{\partial}_q = \bar{f}_{\#q} - \bar{g}_{\#q}$

De fato, utilizando o *Diagrama XXIX*, para todo  $T + C_q(A) \in C_q(X, A)$ :

$$\begin{aligned} & (\bar{\partial}''_{q+1} \circ \bar{D}'_q + \bar{D}'_{q-1} \circ \bar{\partial}_q)(T + C_q(A)) = \\ &= (\bar{\partial}''_{q+1} \circ \bar{D}'_q)(T + C_q(A)) + (\bar{D}'_{q-1} \circ \bar{\partial}_q)(T + C_q(A)) \\ &= \bar{\partial}''_{q+1}(\bar{D}'_q(T + C_q(A))) + \bar{D}'_{q-1}(\bar{\partial}_q(T + C_q(A))) \\ &= \bar{\partial}''_{q+1}(D'_q(T) + C_{q+1}(B)) + \bar{D}'_{q-1}(\partial_q(T) + C_{q-1}(A)) \\ &= \partial''_{q+1}(D'_q(T)) + C_q(B) + D'_{q-1}(\partial_q(T)) + C_q(B) \end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned} & \partial''_{q+1}(D'_q(T)) + C_q(B) + D'_{q-1}(\partial_q(T)) + C_q(B) = \\ &= [\partial''_{q+1}(D'_q(T)) + D'_{q-1}(\partial_q(T))] + C_q(B) \\ &= [\partial''_{q+1} \circ D'_q + D'_{q-1} \circ \partial_q](T) + C_q(B) \\ &= (f_{\#q} - g_{\#q})(T) + C_q(B) \\ &= [f_{\#q}(T) + C_q(B)] - [g_{\#q}(T) + C_q(B)] \\ &= \bar{f}_{\#q}(T + C_q(A)) - \bar{g}_{\#q}(T + C_q(A)) \\ &= (\bar{f}_{\#q} - \bar{g}_{\#q})(T + C_q(A)) \end{aligned}$$

Portanto,  $\bar{D}'_q : \bar{f}_{\#q} \simeq \bar{g}_{\#q}$  é uma homotopia de cadeias.  $\square$

Vejamos, agora, o teorema que estabelece a validade do 5º axioma de Eilenberg-Steenrod.

**Teorema 9.3.** *Se  $f \simeq g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  é uma homotopia de pares, então  $\bar{f}_{*q} = \bar{g}_{*q} : H_q(X, A) \rightarrow H_q(Y, B)$ .*

*Demonstração.* Como  $f \simeq g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  é uma homotopia de pares, pelo teorema 9.2, temos que  $\bar{f}_{\#q} \simeq \bar{g}_{\#q} : C_q(X, A) \rightarrow C_q(Y, B)$  é uma homotopia de cadeias. Assim, pela proposição 9.4, temos que  $\bar{f}_{*q} = \bar{g}_{*q} : H_q(X, A) \rightarrow H_q(Y, B)$ , para todo  $q \in \mathbb{Z}$ .  $\square$

**Corolário 9.2.** *Se  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  é uma equivalência de homotopia, então  $\bar{f}_{*q} : H_q(X, A) \rightarrow H_q(Y, B)$  é um isomorfismo, para todo  $q \in \mathbb{Z}$*

*Demonstração.* Sendo  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  uma equivalência de homotopia, temos que  $f$  é uma aplicação contínua de pares e existe  $g : (Y, B) \rightarrow (X, A)$  uma aplicação contínua de pares tal que  $f \circ g \simeq Id_{(Y,B)}$  e  $g \circ f \simeq Id_{(X,A)}$ . Então:

1. Se  $f \circ g \simeq Id_{(Y,B)}$ , então  $\overline{(f \circ g)}_{*q} = Id_{H_q(Y,B)}$ . Assim,  $\overline{f}_{*q} \circ \overline{g}_{*q} = Id_{H_q(Y,B)}$ , o que implica que  $\overline{f}_{*q}$  é sobrejetor.
2. Se  $g \circ f \simeq Id_{(X,A)}$ , então  $\overline{(g \circ f)}_{*q} = Id_{H_q(X,A)}$ . Assim,  $\overline{g}_{*q} \circ \overline{f}_{*q} = Id_{H_q(X,A)}$ , o que implica que  $\overline{f}_{*q}$  é injetor.

Portanto,  $\overline{f}_{*q}$  é bijetor e isto implica que  $\overline{f}_{*q}$  é um isomorfismo. Em outras palavras, podemos dizer que nestas condições  $H_q(X, A) \cong H_q(Y, B)$ .  $\square$

## 9.4 Resultados

Nesta seção, exploraremos a teoria até o momento desenvolvida, mais precisamente, usaremos o corolário 9.2, para apresentar resultados que envolvem espaços deformáveis, espaços contráteis e ternas  $(X, A, B)$ .

**Definição 9.6.** *Sejam  $X$  um espaço topológico e  $A$  um subespaço de  $X$ . Dizemos que uma aplicação  $f : X \rightarrow A$  é uma deformação de  $X$  em  $A$ , se  $i \circ f \simeq Id_X$ , onde  $i : A \rightarrow X$  é a aplicação inclusão. Neste caso, dizemos que  $X$  é deformável em  $A$ .*

**Teorema 9.4.** *Se  $f : X \rightarrow A$  é uma deformação de  $X$  em  $A$ , então  $H_q(A) \cong H_q(X) \oplus H_q(X, A)$ , para todo  $q \geq 0$ .*

*Demonstração.* Como  $f : X \rightarrow A$  é uma deformação de  $X$  em  $A$ , temos que  $i \circ f \simeq Id_X$ , onde  $i : A \rightarrow X$  é a aplicação inclusão. Logo,  $(i \circ f)_{*q} = Id_{H_q(X)}$ , ou ainda,  $i_{*q} \circ f_{*q} = Id_{H_q(X)}$ . Portanto,  $i_{*q}$  é sobrejetor e  $f_{*q}$  é injetor.

Observemos a sequência exata do par  $(X, A)$ :

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow H_{q+2}(A) \xrightarrow{i_{*(q+2)}} H_{q+2}(X) \xrightarrow{j_{*(q+2)}} H_{q+2}(X, A) \xrightarrow{\Delta_{q+2}} H_{q+1}(A) \xrightarrow{i_{*(q+1)}} \\ H_{q+1}(X) \xrightarrow{j_{*(q+1)}} H_{q+1}(X, A) \xrightarrow{\Delta_{q+1}} H_q(A) \xrightarrow{i_{*q}} H_q(X) \xrightarrow{j_{*q}} H_q(X, A) \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

Aplicando o resultado obtido sobre  $i_{*q}$  e  $f_{*q}$ , temos que para todo  $q \geq 0$ ,  $j_{*q} \equiv 0$  e como  $i_{*q}$  é sobrejetor, temos que  $H_q(X) = \text{Ker}(j_{*q})$ , mas então  $j_{*q} = 0$ , para todo

$q \geq 0$ . Por outro lado, como  $j_{*(q+1)} = 0$ , temos que  $\ker(\Delta_{q+1}) = 0$ , ou seja,  $\Delta_{q+1}$  é injetor.

Logo, a sequência exata do par  $(X, A)$  se subdivide em sequências exatas curtas

$$0 \rightarrow H_{q+1}(X, A) \xrightarrow{\Delta_{q+1}} H_q(A) \xrightarrow{i_{*q}} H_q(X) \rightarrow 0$$

Considere, agora,  $g = f \circ i : A \rightarrow A$ . Afirmamos que  $g_{*q} : H_q(A) \rightarrow H_q(A)$  é um projetor sobre  $H_q(A)$ . Como  $H_q(A)$  é um grupo abeliano e, desde que  $i_{*q}$  e  $f_{*q}$  são homomorfismos,  $g_{*q}$  também é um homomorfismo. Além disso:  $g_{*q} \circ g_{*q} = (f \circ i)_{*q} \circ (f \circ i)_{*q} = f_{*q} \circ (i_{*q} \circ f_{*q}) \circ i_{*q} = f_{*q} \circ Id_{H_q(X)} \circ i_{*q} = f_{*q} \circ i_{*q} = g_{*q}$ , ou seja,  $g_{*q}$  é um projetor sobre  $H_q(A)$ .

Portanto, pelo teorema 3.2 temos que  $H_q(A) \cong \text{Im}(g_{*q}) \oplus \ker(g_{*q})$ , ou seja, precisamos apenas identificar os subgrupos  $\text{Im}(g_{*q})$  e  $\ker(g_{*q})$ .

Como  $g_{*q} = f_{*q} \circ i_{*q}$  e  $i_{*q}$  é sobrejetor, então  $\text{Im}(g_{*q}) = \text{Im}(f_{*q} \circ i_{*q}) = \text{Im}(f_{*q}) = f_{*q}(H_q(X)) \cong H_q(X)$ , pois  $f_{*q}$  é injetor. Também,  $\ker(g_{*q}) = \ker(f_{*q} \circ i_{*q}) = \ker(i_{*q})$ , pois  $f_{*q}$  é injetor. Assim,  $\ker(g_{*q}) = \ker(i_{*q}) = \text{Im}(\Delta_{q+1}) \cong H_{q+1}(X, A)$ , pois  $\Delta_{q+1}$  é injetor. Portanto,  $H_q(A) \cong \text{Im}(g_{*q}) \oplus \ker(g_{*q}) \cong H_q(X) \oplus H_{q+1}(X, A)$ .  $\square$

Vejamos uma aplicação do teorema 9.4.

**Exemplo 9.1.** Seja  $X$  um espaço topológico contrátil e  $A \neq \emptyset$  um subespaço de  $X$  tal que  $X$  é deformável em  $A$ . Então  $H_q(A) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus H_1(X, A) & \text{se } q = 0 \\ H_{q+1}(X, A) & \text{se } q > 0 \end{cases}$ .

*Demonstração.* Como  $X$  é deformável em  $A$ , aplicaremos o teorema 9.4, ou seja, para este espaço topológico, temos que  $H_q(A) \cong H_q(X) \oplus H_{q+1}(X, A)$ , para todo  $q \geq 0$ . Como  $X$  é um espaço contrátil, utilizando a proposição 4.1, vamos dividir este cálculo em duas partes:  $q = 0$  e  $q > 0$ .

1. Se  $q = 0$ , então  $H_0(A) \cong H_0(X) \oplus H_1(X, A) \cong \mathbb{Z} \oplus H_1(X, A)$ .
2. Se  $q > 0$ , então  $H_q(A) \cong H_q(X) \oplus H_{q+1}(X, A) \cong 0 \oplus H_{q+1}(X, A) \cong H_{q+1}(X, A)$ .

o que demonstra o resultado.  $\square$

Lembremos que, uma terna  $(X, A, B)$ , é constituída por um espaço topológico  $X$  e  $A, B \subset X$  subespaços, de forma que  $B \subset A$ , como descrito no capítulo anterior.

**Proposição 9.5.** *Seja  $(X, A, B)$  uma terna de espaços topológicos e  $f : (X, A) \rightarrow (X, A)$  uma aplicação contínua de pares satisfazendo:*

$$i) f \simeq Id_{(X,A)} : (X, A) \rightarrow (X, A);$$

ii) *A homotopia  $F : X \times I \rightarrow X$  que realiza a condição i), deve satisfazer também  $F(B \times I) \subset B$ ;*

iii)  $f(A) \subset B$ .

*Então a aplicação inclusão  $k : (X, B) \rightarrow (X, A)$  é uma equivalência de homotopia e, portanto,  $\bar{k}_{*q} : H_q(X, B) \rightarrow H_q(X, A)$  é um isomorfismo, para todo  $q \in \mathbb{Z}$ .*

*Demonstração.* Pelo item iii), podemos considerar  $f$  como a aplicação contínua de pares  $f' : (X, A) \rightarrow (X, B)$ , onde  $k \circ f' = f$ .

Para mostrar que  $k$  é uma equivalência de homotopia, devemos mostrar duas condições:  $k \circ f' \simeq Id_{(X,A)}$  e  $f' \circ k \simeq Id_{(X,B)}$ . Por i),  $f \simeq Id_{(X,A)}$  e como  $f = k \circ f'$ , segue que,  $k \circ f' \simeq Id_{(X,A)}$ . Portanto,  $F : k \circ f' \simeq Id_{(X,A)}$ . Também, se considerarmos  $F'$  tal que  $k \circ F' = F \circ (k \times Id_I)$ , onde  $I = [0, 1]$  e  $Id_I$  é a aplicação identidade de  $I$ , temos que  $F'$  é uma homotopia entre  $f' \circ k$  e  $Id_{(X,B)}$ . Concluimos que  $k$  é uma equivalência de homotopia e pelo corolário 9.2,  $\bar{k}_{*q} : H_q(X, B) \rightarrow H_q(X, A)$  é um isomorfismo.  $\square$

Vejamos uma aplicação da proposição 9.5.

**Exemplo 9.2.** Sejam  $X$  um disco em  $\mathbb{R}^n$ ,  $A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \frac{1}{4} \leq \sum_{i=0}^1 x_i^2 \leq 1\}$  e  $B$  uma esfera em  $\mathbb{R}^n$ , para  $n \geq 1$ . Usando a proposição 9.5, calculemos  $\bar{k}_{*q} : H_q(D^n, S^{n-1}) \rightarrow H_q(D^n, A)$ , para todo  $q \in \mathbb{Z}$ .

*Demonstração.* Pelo enunciado, temos que  $(X, A, B)$  é uma terna onde, para cada  $n \geq 1$ , temos que  $X = D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ ,  $A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \frac{1}{2} \leq \|x\| \leq 1\}$  e  $B = S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ . Na figura 9.1, apresentamos a representação geométrica desses conjuntos para  $n = 2$  e  $n = 3$ , respectivamente.

Assim, para todo  $x \in D^n$ , definimos

$$f(x) = \begin{cases} 2x & , \text{ se } \|x\| \leq \frac{1}{2} \\ \frac{x}{\|x\|} & , \text{ se } \|x\| \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Temos que  $f$  satisfaz iii), ou seja,  $f(A) \subset B$ . Isso se deve ao fato de que se  $x \in A$ , então  $\frac{1}{2} \leq \|x\| \leq 1$  e portanto  $\|f(x)\| = \left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = 1$ .

A homotopia que verifica i) e ii) é dada por

$$F(x, t) = \begin{cases} \frac{2x}{2-t} & , \text{ se } \|x\| \leq \frac{1}{2} \\ \frac{x}{(1-t) + t\|x\|} & , \text{ se } \|x\| \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Observe que se  $(x, t) \in B \times I$ , então  $\|x\| = 1$  e  $t \in I = [0, 1]$ . Assim,  $F(x, t) = \frac{x}{(1-t) + t\|x\|} = x$  e então  $\|F(x, t)\| = \|x\| = 1$ . Portanto,  $F(B \times I) \subset B$ . Isto prova que  $F$  satisfaz ii).

Para mostrar que  $F$  satisfaz i), temos que mostrar que  $f \simeq Id : (X, A) \rightarrow (X, A)$ .

Note que  $F$  é contínua e, além disso,

$$F(x, 0) = \begin{cases} \frac{2x}{2-0} & , \text{ se } \|x\| \leq \frac{1}{2} \\ \frac{x}{(1-0) + 0\|x\|} & , \text{ se } \|x\| \geq \frac{1}{2} \end{cases} = \begin{cases} x & , \text{ se } \|x\| \leq \frac{1}{2} \\ x & , \text{ se } \|x\| \geq \frac{1}{2} \end{cases} = Id_{(X,A)}(x)$$

e

$$F(x, 1) = \begin{cases} \frac{2x}{2-1} & , \text{ se } \|x\| \leq \frac{1}{2} \\ \frac{x}{(1-1) + 1\|x\|} & , \text{ se } \|x\| \geq \frac{1}{2} \end{cases} = \begin{cases} 2x & , \text{ se } \|x\| \leq \frac{1}{2} \\ \frac{x}{\|x\|} & , \text{ se } \|x\| \geq \frac{1}{2} \end{cases} = f(x)$$

Ainda,  $F(A \times I) \subset A$  pois para todo  $(x, t) \in A \times I$ , desde que  $\frac{1}{2} \leq \|x\| \leq 1$  e  $t \in I = [0, 1]$  segue que  $\|x\| \leq |(1-t) + t\|x\|| \leq 2\|x\|$ , ou equivalentemente,  $\frac{1}{2} \leq \frac{\|x\|}{|(1-t) + t\|x\||} \leq 1$ . Mas, para todo  $(x, t) \in A \times I$  temos,  $\|F(x, t)\| = \left\| \frac{x}{(1-t) + t\|x\|} \right\| = \frac{\|x\|}{|(1-t) + t\|x\||}$  e assim  $F(x, t) \in A$ . Portanto,  $F$  é uma homotopia entre  $f$  e  $Id_{(X,A)}$ .

Agora, pela proposição 9.5, temos que  $k : (D^n, S^{n-1}) \rightarrow (D^n, A)$  é uma equivalência de homotopia. Pelo corolário 9.2, temos que  $\bar{k}_{*q} : H_q(D^n, S^{n-1}) \rightarrow H_q(D^n, A)$  é um isomorfismo, para todo  $q \in \mathbb{Z}$ . □

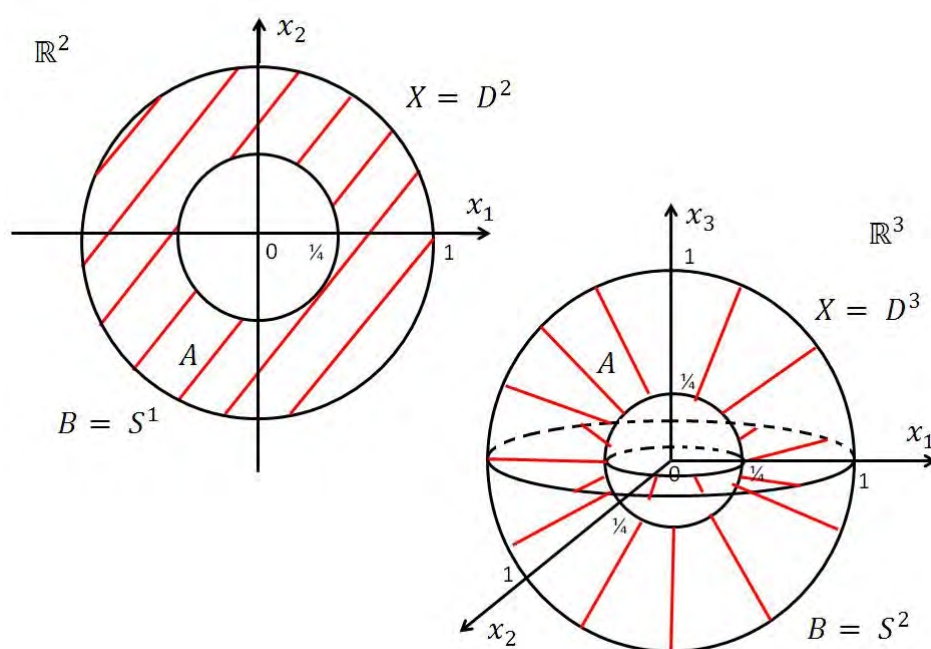


Figura 9.1: Representação geométrica da terna  $(X, A, B) = (D^n, A, S^{n-1})$ , para  $n = 2$  e  $n = 3$ , respectivamente.

# 10 Axioma da Excisão

Neste capítulo, desenvolveremos tópicos sobre o operador baricêntrico. Esta é uma ferramenta algébrica que permitirá demonstrar a validade do 6º axioma de Eilenberg-Steenrod: o axioma da excisão, para a Homologia Singular.

Este axioma estabelece que se  $U$  é um subconjunto aberto do espaço topológico  $X$  tal que  $\bar{U} \subset \text{Int}(A)$  então a aplicação de pares inclusão  $e : (X - U, A - U) \rightarrow (X, A)$  induz um isomorfismo de grupos  $e_{*q} : H_q(X - U, A - U) \rightarrow H_q(X, A)$ , para todo  $q \in \mathbb{Z}$ .

De fato, veremos que este axioma será demonstrado através de um resultado mais geral, onde assumimos que o subconjunto  $U$  não é necessariamente aberto.

## 10.1 Operador Baricêntrico

Antes de definirmos o objeto de estudos desta seção, o operador baricêntrico, reapresentaremos alguns conceitos da Homologia Singular. Isto se faz necessário, pois precisamos modificar as notações já estabelecidas, de forma a tornar os cálculos, sobre o operador baricêntrico, mais ágeis.

### Definição 10.1.

1. Seja  $X$  um subconjunto convexo de um espaço afim  $\mathbb{R}^n$  e  $\{y_i\}_{i=0}^q$  uma família qualquer de pontos de  $X$ . Denotaremos por  $(y_0 \ y_1 \ y_2 \ \dots \ y_{q-1} \ y_q) : \Delta_q \rightarrow X$  o  $q$ -simplexo singular afim (ou simplesmente,  $q$ -simplexo linear) de  $X$ , dado por

$$(y_0 \ y_1 \ y_2 \ \dots \ y_{q-1} \ y_q) \left( \sum_{i=0}^q t_i P_i \right) = \sum_{i=0}^q t_i y_i$$

onde  $t_i \geq 0$ ,  $\sum_{i=0}^q t_i = 1$  e  $P_i$  são os vértices do  $q$ -simplexo padrão  $\Delta_q$ .

2. Seja  $X$  um subconjunto convexo de  $\mathbb{R}^n$  e  $\{z\} \cup \{y_i\}_{i=0}^q$  uma família qualquer de pontos de  $X$ , onde  $(y_0 \ y_1 \ y_2 \ \dots \ y_{q-1} \ y_q)$  é um  $q$ -simplexo linear de  $X$ . Definimos o  $(q+1)$ -simplexo linear  $z(y_0 \ y_1 \ y_2 \ \dots \ y_{q-1} \ y_q) : \Delta_{q+1} \rightarrow X$  por

$$z(y_0 \ y_1 \ y_2 \ \dots \ y_{q-1} \ y_q) = (z \ y_0 \ y_1 \ y_2 \ \dots \ y_{q-1} \ y_q)$$

3. Se  $c = \sum_{i \in J} m_i T_i$  é uma  $q$ -cadeia singular de  $X$ , onde  $T_i \in C(\Delta_q, X)$  e  $m_i \in \mathbb{Z}$ , definimos  $zc = \sum_{i \in J} m_i z(T_i)$

Considere, agora,  $(y_0 \ y_1 \ y_2 \ \dots \ y_q \ y_{q+1}) : \Delta_{q+1} \rightarrow X$  um  $(q+1)$ -simplexo linear de  $X$ . A operação face sobre  $(y_0 \ y_1 \ y_2 \ \dots \ y_q \ y_{q+1})$  é dada por:

$$(y_0 \ y_1 \ y_2 \ \dots \ y_q \ y_{q+1})^{(i)} = (y_0 \ y_1 \ y_2 \ \dots \ y_{i-1} \ y_{i+1} \ \dots \ y_q \ y_{q+1})$$

Ou seja, a operação face aplicada a um  $(q+1)$ -simplexo linear omite sua  $i$ -ésima coordenada.

**Proposição 10.1.** *Se  $c$  é uma  $q$ -cadeia singular de  $X$  constituída de  $q$ -simplexos singulares  $T_i, i \in J$ , então  $\partial_{q+1}(zc) = c - z(\partial_q(c))$ , para todo  $q \geq 0$ .*

*Demonstração.* Basta mostrarmos para um  $q$ -simplexo linear  $(y_0 \ y_1 \ y_2 \ \dots \ y_{q-1} \ y_q)$  de  $X$ . Com efeito,

$$\begin{aligned} \partial_{q+1}(z(y_0 \ y_1 \ y_2 \ \dots \ y_{q-1} \ y_q)) &= \partial_{q+1}(z \ y_0 \ y_1 \ y_2 \ \dots \ y_{q-1} \ y_q) \\ &= \sum_{i=0}^{q+1} (-1)^i (z \ y_0 \ y_1 \ y_2 \ \dots \ y_{q-1} \ y_q)^{(i)} \\ &= (y_0 \ y_1 \ y_2 \ \dots \ y_{q-1} \ y_q) + \\ &\quad \sum_{i=1}^{q+1} (-1)^i (z \ y_0 \ y_1 \ y_2 \ \dots \ y_{q-1} \ y_q)^{(i)} \end{aligned}$$

Fazendo  $j = i - 1$ , temos que:

$$\begin{aligned} \partial_{q+1}(z(y_0 \ y_1 \ y_2 \ \dots \ y_{q-1} \ y_q)) &= (y_0 \ y_1 \ y_2 \ \dots \ y_{q-1} \ y_q) + \\ &\quad \sum_{j=0}^q (-1)^{j+1} (z \ y_0 \ y_1 \ y_2 \ \dots \ y_{j-1} \ y_{j+1} \ \dots \ y_{q-1} \ y_q) \\ &= (y_0 \ y_1 \ y_2 \ \dots \ y_{q-1} \ y_q) + \\ &\quad \sum_{j=0}^q (-1)^{j+1} z(y_0 \ y_1 \ y_2 \ \dots \ y_{j-1} \ y_{j+1} \ \dots \ y_{q-1} \ y_q) \\ &= (y_0 \ y_1 \ y_2 \ \dots \ y_{q-1} \ y_q) - \\ &\quad z\left(\sum_{j=0}^q (-1)^j (y_0 \ y_1 \ y_2 \ \dots \ y_{q-1} \ y_q)^{(j)}\right) \\ &= (y_0 \ y_1 \ y_2 \ \dots \ y_{q-1} \ y_q) - z(\partial_q(y_0 \ y_1 \ y_2 \ \dots \ y_{q-1} \ y_q)) \end{aligned}$$



□

Por meio de indução, podemos definir o operador baricêntrico:

**Definição 10.2.** Se  $C_*(X)$  é o complexo singular do espaço topológico  $X$ , definimos o operador baricêntrico, denotado por  $\beta_X : C_*(X) \rightarrow C_*(X)$ , por indução, da seguinte forma:

1. Se  $c \in C_0(X)$ , definimos  $\beta_X(c) = c$ .
2. Se  $\beta_X$  está definido para toda  $(q - 1)$ -cadeia do espaço topológico  $X$ , definimos:
  - (a) Se  $\Delta_q = |P_0 P_1 P_2 \dots P_{q-1} P_q|$  é um  $q$ -simplexo padrão do espaço topológico  $X$ , então  $\beta_{\Delta_q}(P_0 P_1 P_2 \dots P_{q-1} P_q) = b_q \beta_{\Delta_q}(\partial_q(P_0 P_1 P_2 \dots P_{q-1} P_q))$ , onde  $b_q = \sum_{i=0}^q \frac{P_i}{q+1}$  é o baricentro de  $|P_0 P_1 P_2 \dots P_{q-1} P_q|$ .
  - (b) Se  $T : \Delta_q \rightarrow X$  é um  $q$ -simplexo singular do espaço topológico  $X$ , então  $\beta_X(T) = (T_{\#q})(\beta_{\Delta_q}(P_0 P_1 P_2 \dots P_{q-1} P_q))$ .
  - (c) Se  $c = \sum_{i \in J} m_i T_i$  é uma  $q$ -cadeia singular de  $X$ , onde  $T_i \in C(\Delta_q, X)$  e  $m_i \in \mathbb{Z}$ , então  $\beta_X(c) = \sum_{i \in J} m_i \beta_X(T_i)$ .

No próximo resultado, mostraremos a naturalidade do operador baricêntrico  $\beta_X$ .

**Proposição 10.2.** Seja  $f : X \rightarrow Y$  uma aplicação contínua. Então o diagrama

$$\begin{array}{ccc} C_q(X) & \xrightarrow{f_{\#q}} & C_q(Y) \\ \downarrow \beta_X & & \downarrow \beta_Y \\ C_q(X) & \xrightarrow{f_{\#q}} & C_q(Y) \end{array}$$

Diagrama XXX

é comutativo.

*Demonstração.* Se  $T$  é um gerador de  $C_q(X)$ , para  $q \geq 0$ , então:

$$\begin{aligned} (\beta_Y \circ f_{\#q})(T) &= \beta_Y(f_{\#q}(T)) \\ &= \beta_Y(f \circ T) \\ &= (f \circ T)_{\#q}(\beta_{\Delta_q}(P_0 P_1 P_2 \dots P_{q-1} P_q)) \\ &= (f_{\#q} \circ T_{\#q})(\beta_{\Delta_q}(P_0 P_1 P_2 \dots P_{q-1} P_q)) \\ &= f_{\#q}(T_{\#q}(\beta_{\Delta_q}(P_0 P_1 P_2 \dots P_{q-1} P_q))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= f_{\#q}(\beta_X \circ T_{\#q})(P_0 P_1 P_2 \dots P_{q-1} P_q) \\
&= f_{\#q}(\beta_X(T)) \\
&= (f_{\#q} \circ \beta_X)(T) \\
&\text{pois } T_{\#q}((P_0 P_1 P_2 \dots P_{q-1} P_q)) = T \circ (P_0 P_1 P_2 \dots P_{q-1} P_q) = T \circ id_{\Delta_q} = T \quad \square
\end{aligned}$$

**Proposição 10.3.** *O operador baricêntrico  $\beta_X : C_*(X) \rightarrow C_*(X)$  é uma aplicação de cadeias.*

*Demonstração.* Para verificar que  $\beta_X$  é uma aplicação de cadeias, devemos mostrar que o diagrama

$$\begin{array}{ccc}
C_q(X) & \xrightarrow{\beta_X} & C_q(X) \\
\downarrow \partial_q & & \downarrow \partial_q \\
C_{q-1}(X) & \xrightarrow{\beta_X} & C_{q-1}(X)
\end{array}$$

Diagrama XXXI

é comutativo. Para isso, faremos a demonstração por indução sobre  $q \geq 0$ .

Para  $q = 0$ , o *Diagrama XXXI* pode ser reescrito como:

$$\begin{array}{ccc}
C_0(X) & \xrightarrow{\beta_X} & C_0(X) \\
\downarrow \partial_0 & & \downarrow \partial_0 \\
C_{-1}(X) & \xrightarrow{\beta_X} & C_{-1}(X)
\end{array}$$

Assim, se  $T$  é um gerador de  $C_0(X)$ , como  $C_q(X) = 0$ , se  $q < 0$ , e  $\partial_0 : C_0(X) \rightarrow 0$  é o homomorfismo nulo, temos que  $(\beta_X \circ \partial_0)(T) = \beta_X(\partial_0(T)) = \beta_X(0) = 0$ . Por outro lado,  $(\partial_0 \circ \beta_X)(T) = \partial_0(\beta_X(T)) = \partial_0(T) = 0$ . Portanto, se  $q = 0$ , temos que o *Diagrama XXXI* é comutativo.

Suponha, agora, que a comutatividade do *Diagrama XXXI* é válida para todo o nível  $q - 1$  e mostremos, por indução, que a comutatividade também é válida para  $q$ . Se  $T$  é um gerador de  $C_q(X)$ , então decorre da comutatividade do *Diagrama IX* e da hipótese de indução que:

$$\begin{aligned}
(\partial_q \circ \beta_X)(T) &= \partial_q(T_{\#q}(\beta_{\Delta_q}(P_0 P_1 P_2 \dots P_{q-1} P_q))) \\
&= (\partial_q \circ T_{\#q})(\beta_{\Delta_q}(P_0 P_1 P_2 \dots P_{q-1} P_q)) \\
&= T_{\#q-1}(\partial'_q \circ \beta_{\Delta_q}(P_0 P_1 P_2 \dots P_{q-1} P_q)) \\
&= T_{\#q-1}(\partial'_q(b_q(\beta_{\Delta_q} \circ \partial'_q(P_0 P_1 P_2 \dots P_{q-1} P_q))))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= T_{\#q-1}[(\beta_{\Delta_q} \circ \partial'_q)(P_0 P_1 P_2 \dots P_{q-1} P_q) \\
&\quad - b_q(\partial'_{q-1}((\beta_{\Delta_q} \circ \partial'_q)(P_0 P_1 P_2 \dots P_{q-1} P_q)))] \\
&= T_{\#q-1}[(\beta_{\Delta_q} \circ \partial'_q)(P_0 P_1 P_2 \dots P_{q-1} P_q) \\
&\quad - b_q(\beta_{\Delta_q}((\partial'_{q-1} \circ \partial'_q)(P_0 P_1 P_2 \dots P_{q-1} P_q)))] \\
&= T_{\#q-1}[(\beta_{\Delta_q} \circ \partial'_q)(P_0 P_1 P_2 \dots P_{q-1} P_q)] \\
&= \beta_X((T_{\#q-1} \circ \partial'_q)(P_0 P_1 P_2 \dots P_{q-1} P_q)) \\
&= \beta_X((\partial_q \circ T_{\#q})(P_0 P_1 P_2 \dots P_{q-1} P_q)) \\
&= \beta_X(\partial_q(T)) \\
&= (\beta_X \circ \partial_q)(T)
\end{aligned}$$

Portanto, o *Diagrama XXXI* é comutativo para qualquer  $q \geq 0$ .  $\square$

Vamos agora definir uma família de homomorfismos  $[H]_{(q,X)} : C_q(X) \rightarrow C_{q+1}(X)$ , por indução, da seguinte forma:

**Definição 10.3.**

1. Se  $q = 0$ , definimos  $[H]_{(0,X)}(c) = 0$ , para qualquer  $c \in C_0(X)$ .
2. Se  $[H]_{(q-1,X)} : C_{q-1}(X) \rightarrow C_q(X)$  está definido para toda  $(q-1)$ -cadeia singular do espaço topológico  $X$ , então definimos  $[H]_{(q,X)} : C_q(X) \rightarrow C_{q+1}(X)$  da seguinte forma:

(a) Se  $\Delta_q = |P_0 P_1 P_2 \dots P_{q-1} P_q|$  é um  $q$ -simplexo padrão do espaço topológico  $X$ , então  $[H]_{(q,\Delta_q)}(P_0 P_1 P_2 \dots P_{q-1} P_q) = b_q[(P_0 P_1 P_2 \dots P_{q-1} P_q) - \beta_{\Delta_q}(P_0 P_1 P_2 \dots P_{q-1} P_q) - [H]_{(q-1,\Delta_q)}(\partial'_q(P_0 P_1 P_2 \dots P_{q-1} P_q))]$ .

(b) Se  $T$  é um gerador de  $C_q(X)$ , então

$$[H]_{(q,X)}(T) = T_{\#(q+1)}([H]_{(q,\Delta_q)}(P_0 P_1 P_2 \dots P_{q-1} P_q))$$

(c) Se  $c = \sum_{i \in J} m_i T_i$  é uma  $q$ -cadeia de  $X$ , onde  $T_i \in C(\Delta_q, X)$  e  $m_i \in \mathbb{Z}$ , então,

$$[H]_{(q,X)}(c) = \sum_{i \in J} m_i [H]_{(q,X)}(T_i).$$

Mostremos, agora, a naturalidade dos homomorfismos  $[H]_{(q,X)}$  dados pela definição 10.3.

**Proposição 10.4.** *Se  $f : X \rightarrow Y$  é uma aplicação contínua então o diagrama*

$$\begin{array}{ccc} C_q(X) & \xrightarrow{f_{\#q}} & C_q(Y) \\ \downarrow [H]_{(q,X)} & & \downarrow [H]_{(q,Y)} \\ C_{q+1}(X) & \xrightarrow{f_{\#q+1}} & C_{q+1}(Y) \end{array}$$

*Diagrama XXXII*

*é comutativo.*

*Demonstração.* Se  $T$  é um gerador de  $C_q(X)$ , então

$$\begin{aligned} (f_{\#(q+1)} \circ [H]_{(q,X)})(T) &= f_{\#(q+1)}([H]_{(q,X)}(T)) \\ &= f_{\#(q+1)}(T_{\#(q+1)}([H]_{(q,\Delta_q)}(P_0 P_1 P_2 \dots P_{q-1} P_q))) \\ &= (f_{\#(q+1)} \circ T_{\#(q+1)})([H]_{(q,\Delta_q)}(P_0 P_1 P_2 \dots P_{q-1} P_q)) \\ &= (f \circ T)_{\#(q+1)}([H]_{(q,\Delta_q)}(P_0 P_1 P_2 \dots P_{q-1} P_q)) \\ &= [H]_{(q,Y)}(f \circ T) \\ &= [H]_{(q,Y)}(f_{\#q}(T)) \\ &= ([H]_{(q,Y)} \circ f_{\#q})(T) \end{aligned}$$

□

**Proposição 10.5.** *Se  $T$  é um gerador de  $C_q(X)$ , para todo  $q \geq 0$  vale a identidade*

$$\partial_{q+1}([H]_{(q,X)}(T)) = T - \beta_X(T) - [H]_{(q-1,X)}(\partial_q(T)) \quad (10.1)$$

*Demonstração.* Demonstraremos este resultado por indução sobre  $q \geq 0$ .

Para  $q = 0$ , se  $T$  é um gerador de  $C_0(X)$ , temos que  $\beta_X(T) = T$ . Isso implica que  $T - \beta_X(T) = 0$ . Assim, a equação 10.1, pode ser reescrita como:

$$\partial_1([H]_{(0,X)}(T)) = -[H]_{(-1,X)}(\partial_0(T))$$

Como  $T \in C_0(X)$ , então  $\partial_1([H]_{(0,X)}(T)) = \partial_1(0) = 0$ , pois  $\partial_1$  é um homomorfismo. Por outro lado,  $-[H]_{(-1,X)}(\partial_0(T)) = -[H]_{(-1,X)}(0) = 0$ , pois  $[H]_{(-1,X)}$  é um homomorfismo. Portanto, a afirmação é válida para  $q = 0$ .

Suponhamos, agora, que a equação 10.1 é válida para toda  $(q-1)$ -cadeia de  $X$  e provemos que ela também é válida para  $q$ -cadeias de  $X$ , com  $q > 0$ .

Inicialmente, consideremos os seguintes diagramas comutativos:

1. Naturalidade do operador bordo:

$$\begin{array}{ccc} C_q(\Delta_q) & \xrightarrow{T_{\#q}} & C_q(X) \\ \downarrow \partial'_q & & \downarrow \partial_q \\ C_{q-1}(\Delta_q) & \xrightarrow{T_{\#(q-1)}} & C_{q-1}(X) \end{array}$$

2. Naturalidade de  $\partial'_q$ :

$$\begin{array}{ccc} C_q(\Delta_q) & \xrightarrow{\beta_{\Delta_q}} & C_q(\Delta_q) \\ \downarrow \partial'_q & & \downarrow \partial'_q \\ C_{q-1}(\Delta_q) & \xrightarrow{\beta_{\Delta_q}} & C_{q-1}(\Delta_q) \end{array}$$

3. Naturalidade de  $\beta$ :

$$\begin{array}{ccc} C_q(\Delta_q) & \xrightarrow{\beta_{\Delta_q}} & C_q(\Delta_q) \\ \downarrow T_{\#q} & & \downarrow T_{\#q} \\ C_q(X) & \xrightarrow{\beta_X} & C_q(X) \end{array}$$

Assim, temos que:

$$\begin{aligned} \partial_{q+1}([H]_{(q,X)}(T)) &= \partial_{q+1}(T_{\#q+1}([H]_{(q,\Delta_q)}(P_0 P_1 P_2 \dots P_{q-1} P_q))) \\ &= (\partial_{q+1} \circ T_{\#q+1})([H]_{(q,\Delta_q)}(P_0 P_1 P_2 \dots P_{q-1} P_q)) \quad (1) \\ &= (T_{\#q} \circ \partial'_{q+1})([H]_{(q,\Delta_q)}(P_0 P_1 P_2 \dots P_{q-1} P_q)) \\ &= T_{\#q}(\partial'_{q+1}([H]_{(q,\Delta_q)}(P_0 P_1 P_2 \dots P_{q-1} P_q))) \end{aligned}$$

Note que, utilizando a definição de  $[H]_{(q,\Delta_q)}$  e a proposição 10.1, nesta ordem, temos que:

$$\begin{aligned} \partial'_{q+1}([H]_{(q,\Delta_q)}(P_0 P_1 P_2 \dots P_{q-1} P_q)) &= \\ &= \partial'_{q+1}(b_q[(P_0 P_1 P_2 \dots P_{q-1} P_q) - \beta_{\Delta_q}(P_0 P_1 P_2 \dots P_{q-1} P_q) \\ &\quad - [H]_{(q-1,\Delta_q)}(\partial'_q(P_0 P_1 P_2 \dots P_{q-1} P_q))]) \\ &= [(P_0 P_1 P_2 \dots P_{q-1} P_q) - \beta_{\Delta_q}(P_0 P_1 P_2 \dots P_{q-1} P_q) \\ &\quad - [H]_{(q-1,\Delta_q)}(\partial'_q(P_0 P_1 P_2 \dots P_{q-1} P_q))] - b_q[\partial'_q(P_0 P_1 P_2 \dots P_{q-1} P_q) \\ &\quad - \partial'_q(\beta_{\Delta_q}(P_0 P_1 P_2 \dots P_{q-1} P_q)) \\ &\quad - \partial'_q([H]_{(q-1,\Delta_q)}(\partial'_q(P_0 P_1 P_2 \dots P_{q-1} P_q)))] \quad (2) \end{aligned}$$

Pela hipótese de indução, *Diagrama XXXI*, lema 3.1 e a naturalidade de  $\partial'_q$  (vide diagrama do item 2 acima) temos que:

$$\begin{aligned}
& \partial'_q([H]_{(q-1, \Delta_q)}(\partial'_q(P_0 P_1 P_2 \dots P_{q-1} P_q))) = \\
& = \partial'_q(P_0 P_1 P_2 \dots P_{q-1} P_q) - \beta_{\Delta_q}(\partial'_q(P_0 P_1 P_2 \dots P_{q-1} P_q)) \\
& \quad - [H]_{(q-2, \Delta_q)}(\partial'_{q-1}(\partial'_q(P_0 P_1 P_2 \dots P_{q-1} P_q))) \\
& = \partial'_q(P_0 P_1 P_2 \dots P_{q-1} P_q) - (\beta_{\Delta_q} \circ \partial'_q)(P_0 P_1 P_2 \dots P_{q-1} P_q) \quad (3) \\
& \quad - [H]_{(q-2, \Delta_q)}((\partial'_{q-1} \circ \partial'_q)(P_0 P_1 P_2 \dots P_{q-1} P_q)) \\
& = \partial'_q(P_0 P_1 P_2 \dots P_{q-1} P_q) - (\partial'_q \circ \beta_{\Delta_q})(P_0 P_1 P_2 \dots P_{q-1} P_q)
\end{aligned}$$

Substituindo (3) em (2), temos que:

$$\begin{aligned}
& \partial'_{q+1}([H]_{(q, \Delta_q)}(P_0 P_1 P_2 \dots P_{q-1} P_q)) = \\
& = [(P_0 P_1 P_2 \dots P_{q-1} P_q) - \beta_{\Delta_q}(P_0 P_1 P_2 \dots P_{q-1} P_q) \\
& \quad - [H]_{(q-1, \Delta_q)}(\partial'_q(P_0 P_1 P_2 \dots P_{q-1} P_q))] \\
& \quad - b_q[\partial'_q(P_0 P_1 P_2 \dots P_{q-1} P_q) - \partial'_q(\beta_{\Delta_q}(P_0 P_1 P_2 \dots P_{q-1} P_q)) \\
& \quad - (\partial'_q(P_0 P_1 P_2 \dots P_{q-1} P_q) - (\partial'_q \circ \beta_{\Delta_q})(P_0 P_1 P_2 \dots P_{q-1} P_q))] \quad (4) \\
& = (P_0 P_1 P_2 \dots P_{q-1} P_q) - \beta_{\Delta_q}(P_0 P_1 P_2 \dots P_{q-1} P_q) \\
& \quad - [H]_{(q-1, \Delta_q)}(\partial'_q(P_0 P_1 P_2 \dots P_{q-1} P_q))
\end{aligned}$$

Substituindo (4) em (1), utilizando os diagramas dos itens 1 e 3, o *Diagrama XXXII* e, novamente, o diagrama do item 1, nesta ordem, temos que:

$$\begin{aligned}
& \partial_{q+1}([H]_{(q, X)}(T)) = \\
& = T_{\#q}(\partial'_{q+1}([H]_{(q, \Delta_q)}(P_0 P_1 P_2 \dots P_{q-1} P_q))) \\
& = T_{\#q}[(P_0 P_1 P_2 \dots P_{q-1} P_q) - \beta_{\Delta_q}(P_0 P_1 P_2 \dots P_{q-1} P_q) \\
& \quad - [H]_{(q-1, \Delta_q)}(\partial'_q(P_0 P_1 P_2 \dots P_{q-1} P_q))] \\
& = T_{\#q}(P_0 P_1 P_2 \dots P_{q-1} P_q) - T_{\#q}(\beta_{\Delta_q}(P_0 P_1 P_2 \dots P_{q-1} P_q)) \\
& \quad - T_{\#q}([H]_{(q-1, \Delta_q)}(\partial'_q(P_0 P_1 P_2 \dots P_{q-1} P_q))) \\
& = T_{\#q}(P_0 P_1 P_2 \dots P_{q-1} P_q) - (T_{\#q} \circ \beta_{\Delta_q})(P_0 P_1 P_2 \dots P_{q-1} P_q) \\
& \quad - T_{\#q}([H]_{(q-1, \Delta_q)}(\partial'_q(P_0 P_1 P_2 \dots P_{q-1} P_q))) \\
& = T_{\#q}(P_0 P_1 P_2 \dots P_{q-1} P_q) - (\beta_X \circ T_{\#q})(P_0 P_1 P_2 \dots P_{q-1} P_q) \\
& \quad - [H]_{(q-1, X)}(T_{\#(q-1)} \circ \partial'_q)(P_0 P_1 P_2 \dots P_{q-1} P_q) \\
& = T_{\#q}(P_0 P_1 P_2 \dots P_{q-1} P_q) - (\beta_X \circ T_{\#q})(P_0 P_1 P_2 \dots P_{q-1} P_q) \\
& \quad - [H]_{(q-1, X)}(\partial_q \circ T_{\#q})(P_0 P_1 P_2 \dots P_{q-1} P_q) \\
& = T - \beta_X(T) - [H]_{(q-1, X)}(\partial_q(T)),
\end{aligned}$$

demonstrando assim a validade da equação 10.1. □

### 10.1.1 Subdivisão Baricêntrica de um $q$ -simplexo

Iniciamos esta subseção com a seguinte

#### Definição 10.4.

1. Dizemos que uma família  $\{a_i\}_{i=0}^q$  de pontos de  $\mathbb{R}^{n+1}$  é independente se o conjunto formado pelos vetores  $a_i - a_0$ , com  $1 \leq i \leq q$ , é linearmente independente.
2. Considere uma família  $\{a_i\}_{i=0}^q$  de pontos independentes de  $\mathbb{R}^{n+1}$  e seja  $A = |a_0 a_1 a_2 \dots a_q|$  um  $q$ -simplexo singular gerado por  $\{a_i\}_{i=0}^q$ . Dizemos que  $B_0, B_1, B_2, \dots, B_r$  são faces distintas de  $A$ , ordenadas pela inclusão, se  $B_0 = |a_{i_0}|$ ,  $B_1 = |a_{i_0} a_{i_1}|$ , ...,  $B_r = |a_{i_0} a_{i_1} \dots a_{i_r}|$  satisfaz  $B_0 \subset B_1 \subset B_2 \subset \dots \subset B_r$ , com  $a_{i_j} \in \{a_i\}_{i=0}^q$ , para  $j = 0, \dots, r$ .

**Lema 10.1.** *Sejam  $A$  um  $q$ -simplexo singular gerado por uma família  $\{a_i\}_{i=0}^q$  de pontos independente de  $\mathbb{R}^{n+1}$  e  $B_0 \subset B_1 \subset B_2 \subset \dots \subset B_r$  faces distintas de  $A$ , ordenadas pela inclusão. Então os baricentros  $b_i \in B_i$ , com  $0 \leq i \leq r$ , também, são independentes.*

*Demonstração.* Reordenando as faces, se necessário, podemos supor que  $B_0 = |a_{i_0}| \subset B_1 = |a_{i_0} a_{i_1}| \subset \dots \subset B_r = |a_{i_0} a_{i_1} \dots a_{i_r}|$ .

Como os baricentros das faces distintas  $B_i$ , se encontram entre os pontos  $b_i \in B_i$ , com  $0 \leq i \leq r$ , definidos por:

$$\begin{aligned} b_0 &= a_{i_0} \\ b_1 &= \frac{a_{i_0} + a_{i_1}}{2} \\ b_2 &= \frac{a_{i_0} + a_{i_1} + a_{i_2}}{3} \\ &\vdots \\ b_r &= \frac{a_{i_0} + a_{i_1} + a_{i_2} + \dots + a_{i_r}}{r+1} = \frac{1}{r+1} \sum_{j=0}^r a_{i_j} \end{aligned}$$

basta mostrar que os vetores  $b_k - b_0$  são linearmente independentes, para  $1 \leq k \leq r$ .

Suponhamos, então, que existam  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$  não todos nulos tais que:

$$\sum_{k=1}^r \lambda_k (b_k - b_0) = 0 \quad (10.2)$$

Substituindo o baricentro  $b_k = \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^k a_{i_j}$ , na equação 10.2, temos:

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{k=1}^r \lambda_k (b_k - b_0) \\
&= \sum_{k=1}^r \lambda_k \left( \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^k a_{i_j} - b_0 \right) \\
&= \sum_{k=1}^r \lambda_k \left( \frac{1}{k+1} (a_{i_0} + a_{i_1} + a_{i_2} + \cdots + a_{i_k}) - b_0 \right) \\
&= \sum_{k=1}^r \lambda_k \left( \frac{a_{i_0} + a_{i_1} + a_{i_2} + \cdots + a_{i_k} - (k+1)b_0}{k+1} \right) \\
&= \lambda_1 \left( \frac{a_{i_0} + a_{i_1} - 2b_0}{2} \right) + \lambda_2 \left( \frac{a_{i_0} + a_{i_1} + a_{i_2} - 3b_0}{3} \right) + \cdots \\
&\quad + \lambda_r \left( \frac{a_{i_0} + a_{i_1} + a_{i_2} + \cdots + a_{i_r} - (r+1)b_0}{r+1} \right)
\end{aligned}$$

Como  $a_{i_0} = b_0$ , temos:

$$\begin{aligned}
0 &= \lambda_1 \left( \frac{a_{i_1} - b_0}{2} \right) + \lambda_2 \left( \frac{a_{i_1} + a_{i_2} - 2b_0}{3} \right) + \cdots + \lambda_r \left( \frac{a_{i_1} + a_{i_2} + \cdots + a_{i_r} - rb_0}{r+1} \right) \\
&= \left( \frac{1}{2}\lambda_1 + \frac{1}{3}\lambda_2 + \cdots + \frac{1}{r+1}\lambda_r \right) (a_{i_1} - b_0) + \left( \frac{1}{3}\lambda_2 + \frac{1}{4}\lambda_3 + \cdots + \frac{1}{r+1}\lambda_r \right) (a_{i_2} - b_0) \\
&\quad + \cdots + \left( \frac{1}{r+1}\lambda_r \right) (a_{i_r} - b_0) \\
&= u_1(a_{i_1} - b_0) + u_2(a_{i_2} - b_0) + \cdots + u_r(a_{i_r} - b_0) \\
&= \sum_{j=1}^r u_j (a_{i_j} - b_0) \\
&= \sum_{j=1}^r u_j (a_{i_j} - a_{i_0})
\end{aligned}$$

onde  $u_k = \frac{1}{k+1}\lambda_k + \cdots + \frac{1}{r+1}\lambda_r$ .

Tomando  $m_0$  o maior inteiro tal que  $\lambda_{m_0} \neq 0$ , ou seja,  $\lambda_{m_0+1} = \lambda_{m_0+2} = \cdots = \lambda_r = 0$ , então  $u_{m_0} = \frac{1}{m_0+1}\lambda_{m_0} \neq 0$ . Portanto, os vetores  $a_{i_k} - a_{i_0}$ , para  $1 \leq k \leq r$  seriam linearmente dependentes. Mas isto é um absurdo, uma vez que, por hipótese,  $a_{i_k} - a_{i_0}$  são vetores linearmente independentes.  $\square$

Considere  $A$  um  $q$ -simplexo singular gerado por uma família  $\{a_i\}_{i=0}^q$  de pontos independentes de  $\mathbb{R}^{n+1}$  e  $B_0 \subset B_1 \subset B_2 \subset \cdots \subset B_r$  uma sequência de faces distintas de  $A$  ordenadas pela inclusão. Lembremos que o baricentro de cada face  $B_i$  é dado por  $b_i = \frac{1}{i+1} \sum_{j=0}^i a_j$ .

Portanto, a partir de sequências de faces distintas de  $A$ , digamos  $B_0 \subset B_1 \subset B_2 \subset \cdots \subset B_r$ , podemos construir simplexos  $S = |b_0 b_1 b_2 \dots b_r|$ , tomando-se  $b_i$  como sendo o baricentro de cada face  $B_i$ , com  $0 \leq i \leq r$ . Assim, podemos dar a seguinte



**Definição 10.5.** O conjunto de todos os simplexes  $S$ , descritos acima, é denominado primeira subdivisão baricêntrica de  $A$  e será denotado por  $Sd^{(1)}(A)$ .

**Observação 10.1.** Alguns autores denotam a  $r$ -ésima subdivisão baricêntrica de um  $q$ -simplexo singular  $A$  gerado por uma família de pontos independentes por  $Sd^{(r)}(A)$ .

**Exemplo 10.1.** Seja  $X = \mathbb{R}$  e  $x_0$  e  $x_2$  pertencentes a  $X$ . Assim, a primeira subdivisão baricêntrica do 1-simplexo singular  $(x_0 x_2) : \Delta_1 \rightarrow X$  substituirá  $(x_0 x_2)$  por  $(x_0 x_1) + (x_1 x_2)$  onde  $x_1 = \frac{x_0 + x_2}{2}$ , ou seja,  $x_1$  é o ponto médio de segmento  $|x_0 x_2|$ .

*Demonstração.* Considerando  $T : \Delta_2 \rightarrow X$  definido por  $T = (x_0 x_1 x_2)$ , temos que:

$$\partial_2(T) = \sum_{i=0}^2 (-1)^i T^{(i)} = \sum_{i=0}^2 (-1)^i T \circ g_i^1 =$$

$$T \circ g_0^1 - T \circ g_1^1 + T \circ g_2^1 = (x_1 x_2) - (x_0 x_2) + (x_0 x_1)$$

Uma vez que  $((x_1 x_2) + (x_0 x_1)) - (x_0 x_2) \in \text{Im}(\partial_2)$ , temos que  $(x_0 x_2) \sim (x_0 x_1) + (x_1 x_2)$ . Lembrando que suporte é a imagem do espaço através da aplicação  $T$ , temos que o suporte de  $(x_0 x_2)$  coincide com o suporte de  $(x_0 x_1) + (x_1 x_2)$ .  $\square$

**Exemplo 10.2.** Considere  $A = \Delta_2 = |a_0 a_1 a_2|$ . A primeira subdivisão baricêntrica de  $A$  divide  $\Delta_2 \subset \mathbb{R}^3$  em seis triângulos.

*Demonstração.* Como  $A = \Delta_2 = |a_0 a_1 a_2|$ , pela definição 10.5, temos que:

1. Sendo  $|a_0| \subset |a_0 a_2| \subset A$ , temos:

$$S_1 = |a_0 \frac{a_0 + a_2}{2} \frac{a_0 + a_1 + a_2}{3}|$$

2. Sendo  $|a_0| \subset |a_0 a_1| \subset A$ , temos:

$$S_2 = |a_0 \frac{a_0 + a_1}{2} \frac{a_0 + a_1 + a_2}{3}|$$

3. Sendo  $|a_1| \subset |a_1 a_0| \subset A$ , temos:

$$S_3 = |a_1 \frac{a_1 + a_0}{2} \frac{a_0 + a_1 + a_2}{3}|$$

4. Sendo  $|a_1| \subset |a_1 a_2| \subset A$ , temos:

$$S_4 = |a_1 \frac{a_1 + a_2}{2} \frac{a_0 + a_1 + a_2}{3}|$$

5. Sendo  $|a_2| \subset |a_2a_1| \subset A$ , temos:

$$S_5 = \left| a_2 \frac{a_2 + a_1}{2} \frac{a_0 + a_1 + a_2}{3} \right|$$

6. Sendo  $|a_2| \subset |a_2a_0| \subset A$ , temos:

$$S_6 = \left| a_2 \frac{a_2 + a_0}{2} \frac{a_0 + a_1 + a_2}{3} \right|$$

Assim, podemos representar a primeira subdivisão baricêntrica de  $\Delta_2$  através da seguinte figura:

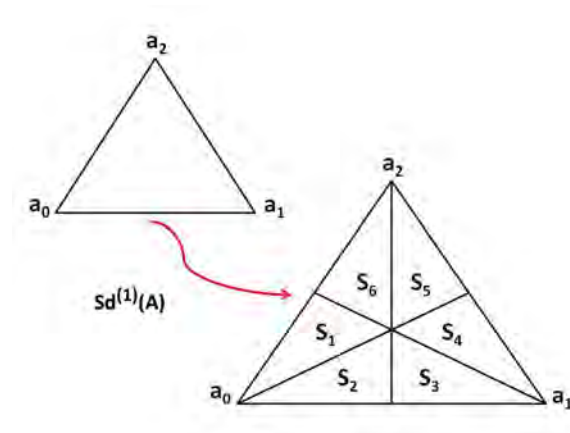


Figura 10.1: Primeira subdivisão baricêntrica de  $A = \Delta_2$ .

Note que o suporte de  $\Delta_2$  é igual à soma dos suportes de  $S_i$ , para  $1 \leq i \leq 6$ .  $\square$

**Observação 10.2.** Note que  $\Delta_2$  e  $\bigcup_{i=1}^6 S_i$ , dados no exemplo 10.2, têm a mesma realização geométrica, ou seja, as faces de  $\Delta_2$  coincidem com a união das faces de  $S_i$ , para  $1 \leq i \leq 6$ .

**Definição 10.6.** Se  $A \subset \mathbb{R}^{n+1}$  é um  $q$ -simplexo singular gerado pela família  $\{a_i\}_{i=0}^q$  de pontos independentes de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , definimos  $\text{diam}(A) = \sup_{x,y \in A} \{\|x - y\|\}$

**Lema 10.2.** Se  $A = |a_0a_1a_2 \dots a_r| \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , temos que  $\text{diam}(A) = \max_{0 \leq i, j \leq r} \{\|a_i - a_j\|\}$ .

*Demonstração.* Como  $A = |a_0a_1a_2 \dots a_r| \subset \mathbb{R}^{n+1}$ , tomemos  $x$  e  $y$  em  $A$ , de forma que  $y = \sum_{i=0}^r \lambda_i a_i$ , onde  $\sum_{i=0}^r \lambda_i = 1$  e  $\lambda_i \geq 0$ , para todo  $0 \leq i \leq r$ . Assim, temos que:

$$\|x - y\| = \left\| \left( \sum_{i=0}^r \lambda_i \right) x - \sum_{i=0}^r \lambda_i a_i \right\| = \left\| \sum_{i=0}^r \lambda_i (x - a_i) \right\| \leq \sum_{i=0}^r \lambda_i \|x - a_i\|$$

$$\leq \sum_{i=0}^r \lambda_i M = M \sum_{i=0}^r \lambda_i = M$$

onde  $M = \max_{0 \leq i \leq r} \{\|x - a_i\|\}$ . Logo,

$$\|x - y\| \leq \max_{0 \leq i \leq r} \{\|x - a_i\|\} \quad (10.3)$$

Em particular, tomando  $x = a_j$ , temos que:

$$\|a_j - y\| = \|y - a_j\| \leq \max_{0 \leq i, j \leq r} \{\|a_j - a_i\|\}.$$

Sendo  $y$  arbitrário, podemos tomar  $y = x$  e então  $\|x - a_j\| \leq \max_{0 \leq i, j \leq r} \{\|a_j - a_i\|\}$ .

Portanto  $\|x - y\| \leq \max_{0 \leq j \leq r} \{\|x - a_j\|\} \leq \max_{0 \leq i, j \leq r} \{\|a_j - a_i\|\}$  para todos  $x, y \in A$ .

Assim, desde que  $diam(A) = \sup_{x, y \in A} \{\|x - y\|\}$ , segue que

$$diam(A) \leq \max_{0 \leq i, j \leq r} \{\|a_j - a_i\|\} \quad (10.4)$$

Por outro lado, como  $a_i$  e  $a_j$  pertencem a  $A$ , temos que:

$$\max_{0 \leq i, j \leq r} \{\|a_j - a_i\|\} \leq diam(A) \quad (10.5)$$

Pelas equações 10.4 e 10.5, temos que:

$$diam(A) \leq \max_{0 \leq i, j \leq r} \{\|a_j - a_i\|\} \leq diam(A)$$

e portanto  $diam(A) = \max_{0 \leq i, j \leq r} \{\|a_j - a_i\|\} = \max_{0 \leq i, j \leq r} \{\|a_i - a_j\|\}$ .  $\square$

**Proposição 10.6.** *Seja  $A = |a_0 a_1 a_2 \dots a_n|$  um  $n$ -simplexo singular de  $\mathbb{R}^{n+1}$  e  $B$  um simplexo obtido de  $A$  por subdivisão baricêntrica. Se denotarmos  $d = diam(A)$  e  $d' = diam(B)$ , temos que  $d' \leq \frac{n}{n+1}d$ .*

*Demonstração.* Reordenando adequadamente os vértices de  $A$ , temos que dois vértices  $b$  e  $b'$  de um simplexo da subdivisão baricêntrica de  $A$ , podem ser expressos por:

$$b = \frac{a_0 + a_1 + \dots + a_p}{p+1}$$

e

$$b' = \frac{a_0 + a_1 + \dots + a_p + \dots + a_q}{q+1}$$

onde  $0 \leq p < q \leq n$ .

Pela equação (10.3),

$$\|b - b'\| \leq \max_{0 \leq k \leq q} \|b' - a_k\| \quad (10.6)$$

Agora, desde que  $1 \leq q \leq n$  e usando a desigualdade triangular, temos que

$$\begin{aligned} \|b' - a_k\| &= \\ &= \left\| \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_p + \cdots + a_q}{q+1} - a_k \right\| \\ &= \left\| \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_p + \cdots + a_q - (q+1)a_k}{q+1} \right\| \\ &= \left\| \frac{1}{q+1}(a_0 - a_k) + \frac{1}{q+1}(a_1 - a_k) + \cdots + \frac{1}{q+1}(a_p - a_k) + \cdots + \frac{1}{q+1}(a_q - a_k) \right\| \\ &= \left\| \frac{1}{q+1} \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^q (a_i - a_k) \right\| \\ &= \frac{1}{q+1} \left\| \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^q (a_i - a_k) \right\| \\ &\leq \frac{1}{q+1} \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^q \|a_i - a_k\| \\ &\leq \frac{1}{q+1} \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^q d \\ &= \frac{q}{q+1} d \\ &\leq \frac{n}{n+1} d \end{aligned}$$

Portanto,  $\|b' - a_k\| \leq \frac{n}{n+1} d$ .

Substituindo e comparando este resultado com a equação 10.6, temos que:

$$\|b - b'\| \leq \max_{0 \leq k \leq q} \|b' - a_k\| \leq \frac{n}{n+1} d$$

Portanto,  $d' = \text{diam}(B) \leq \frac{n}{n+1} d$ . □

**Lema 10.3.** (*Lema de Lebesgue*) Sejam  $X$  um espaço métrico compacto e  $\{U_i\}_{i \in J}$  uma cobertura aberta de  $X$ . Então existe um número real  $d > 0$  tal que se  $A \subset X$  e  $\text{diam}(A) < d$ , então existe  $j_0 \in J$  tal que  $A \subset U_{j_0}$ .

*Demonstração.* Como  $X$  é um espaço métrico compacto, existe  $\{U_i\}_{i \in \{0,1,\dots,k\}}$  uma subcobertura finita aberta de  $X$ . Para cada  $0 \leq i \leq k$ , definamos aplicações  $f_i : X \rightarrow \mathbb{R}$  por  $f_i(x) = \text{dist}(x, X - U_i)$ , para todo  $x \in X$ . Assim,  $f_i$  é contínua para todo  $0 \leq i \leq k$  e, além disso, para todo  $0 \leq i \leq k$ :

1. Se  $x \in U_i$ , então  $f_i(x) > 0$ .
2. Se  $x \notin U_i$ , então  $f_i(x) = 0$ .

Consideremos, agora, a aplicação  $f(x) = \max_{0 \leq i \leq k} \{f_i(x)\}$ . Temos que  $f$  é contínua e, pelos itens (1) e (2),  $f(x) > 0$ , para todo  $x \in X$ .

Sendo  $X$  um espaço métrico compacto, pelo teorema de Bolzano-Weierstrass, a aplicação  $f$  assume um ponto de mínimo e de máximo em  $\mathbb{R}$ . Chamemos  $d = \min_{x \in X} \{f(x)\}$ . Note que  $d > 0$ , pois  $f(x) > 0$ , para todo  $x \in X$ .

Verifiquemos que este número  $d > 0$  satisfaz a proposição. Com efeito, seja  $A \subset X$  tal que  $\text{diam}(A) < d$  e tomemos  $x \in A$ . Como  $\text{diam}(A) < d$ , então  $\|y - x\| < d$ , para todo  $y \in A$ . Então  $A \subset \{y \in A \mid \|y - x\| < d\}$ .

Por outro lado, como  $d = \min_{x \in X} \{f(x)\}$ , temos que  $f(x) \geq d$ , para todo  $x \in X$ . Então existe  $j_0 \in \{0, 1, \dots, k\}$  tal que  $f_{j_0}(x) = \max_{0 \leq i \leq k} \{f_i(x)\}$  e  $f_{j_0}(x) \geq d$ , ou seja,  $\text{dist}(x, X - U_{j_0}) > d$ .

Assim, se  $y \in A$ , então  $y \in U_{j_0}$ . Caso contrário, teríamos  $y \in A$  e  $y \in X - U_{j_0}$ . Mas se  $y \in A \subset X$ , então  $\text{dist}(y, X - U_{j_0}) \geq d > 0$ , o que é um absurdo, pois supomos que  $y \in X - U_{j_0}$ . Logo,  $A \subset U_{j_0}$ .

Portanto,  $d = \min_{x \in X} \{\max_{0 \leq i \leq k} \{f_i(x)\}\}$  satisfaz o lema de Lebesgue.  $\square$

**Exemplo 10.3.** Considere a aplicação identidade  $i_2 = (P_0 P_1 P_2) : \Delta_2 \rightarrow \Delta_2$ . Calcule o operador baricêntrico  $\beta_{\Delta_2}$  e estime o  $\text{diam}(S_i)$ , onde  $S_i$  são os simplexos obtidos a partir de faces distintas de  $\Delta_2$ .

*Demonstração.* Pela primeira subdivisão baricêntrica de  $\Delta_2$ , temos a *Figura 10.2*:

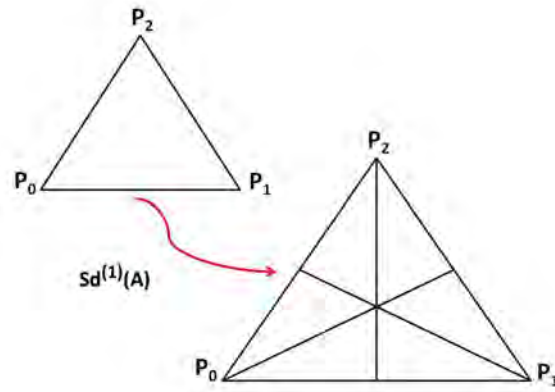


Figura 10.2: Primeira subdivisão baricêntrica de  $A = \Delta_2$ .

Assim, temos que o operador baricêntrico  $\beta_{\Delta_2}(i_2)$  será dado por  $\beta_{\Delta_2}(P_0 P_1 P_2) = b_2[\beta_{\Delta_2}(\partial_2(P_0 P_1 P_2))]$ , onde  $b_2 = \sum_{i=0}^2 \frac{P_i}{3}$  é o baricentro de  $\Delta_2 = |P_0 P_1 P_2|$ . Geometricamente,  $\beta_{\Delta_2}(P_0 P_1 P_2)$  é a soma de simplexos singulares cujos suportes são os simplexos criados a partir da primeira subdivisão baricêntrica de  $\Delta_2$ .

Pela proposição 10.6, como  $A = \Delta_2 = |P_0 P_1 P_2| \subset \mathbb{R}^3$ , temos que  $\text{diam}(S_i) \leq \frac{2}{3} \text{diam}(\Delta_2)$ .  $\square$

**Definição 10.7.** Para todo espaço topológico  $X$ , definimos:

1.  $\beta_X^0 = \text{Id}_{C_*(X)}$
2.  $\beta_X^r = \beta_X(\beta_X^{r-1}) = \beta_X^{r-1}(\beta_X)$  para  $r > 0$ .

e chamamos  $\beta_X^r$  o  $r$ -ésimo operador baricêntrico de  $X$ , para  $r > 0$ .

**Proposição 10.7.** Consideremos  $\Delta_q = |P_0 P_1 P_2 \dots P_q|$  o  $q$ -simplexo padrão do espaço  $\mathbb{R}^{q+1}$ . Então,

1. Para todo  $r > 0$ , temos que  $\beta_{\Delta_q}^r(P_0 P_1 P_2 \dots P_q)$  é uma  $q$ -cadeia de  $\Delta_q$  constituída de simplexos lineares.
2. Dado  $\epsilon > 0$ , existe  $r$  suficientemente grande tal que  $\beta_{\Delta_q}^r(P_0 P_1 P_2 \dots P_q)$  é constituída de simplexos cujos suportes têm diâmetro menor que  $\epsilon$ .

*Demonstração.* Para demonstrar o item (1), ou seja, que  $\beta_{\Delta_q}^r(P_0 P_1 P_2 \dots P_q)$  é uma  $q$ -cadeia de  $\Delta_q$ , constituída de simplexos lineares, procederemos por indução sobre  $r > 0$ .

Se  $r = 1$ , então:

$$\begin{aligned}\beta_{\Delta_q}^1(P_0 P_1 P_2 \dots P_q) &= \beta_{\Delta_q}(P_0 P_1 P_2 \dots P_q) \\ &= b_q(\beta_{\Delta_q}(\partial_q(P_0 P_1 P_2 \dots P_q)))\end{aligned}$$

o qual é uma  $q$ -cadeia de  $\Delta_q$  constituída de simplexos lineares.

Suponha, agora, que  $\beta_{\Delta_q}^{r-1}(P_0 P_1 P_2 \dots P_q)$  é uma  $q$ -cadeia de  $\Delta_q$  constituída de simplexos lineares. Assim:

$$\begin{aligned}\beta_{\Delta_q}^r(P_0 P_1 P_2 \dots P_q) &= \beta_{\Delta_q}(\beta_{\Delta_q}^{r-1}(P_0 P_1 P_2 \dots P_q)) \\ &= b_q(\beta_{\Delta_q}(\partial_q(\beta_{\Delta_q}^{r-1}(P_0 P_1 P_2 \dots P_q))))\end{aligned}$$

o qual é uma  $q$ -cadeia de  $\Delta_q$  constituída de simplexos lineares, pois, por indução  $\beta_{\Delta_q}(\partial_q(\beta_{\Delta_q}^{r-1}(P_0 P_1 P_2 \dots P_q)))$  é uma  $(q-1)$ -cadeia de  $\Delta_q$  constituída de simplexos lineares.

**Observação 10.3.** Note que os  $q$ -simplexos singulares gerados pela  $r$ -ésima subdivisão baricêntrica de  $\Delta_q$  coincidem com os suportes dos simplexos que comparecem na soma  $\beta_{\Delta_q}^r(P_0 P_1 P_2 \dots P_q)$ . Casos particulares deste fato foram observados nos exemplos 10.1 e 10.3.

Para demonstrar o item (2), vamos utilizar indução sobre  $r$  e a proposição 10.6, para mostrar que dado  $\epsilon > 0$ , existe  $r$  suficientemente grande tal que  $\beta_{\Delta_q}^r(P_0 P_1 P_2 \dots P_q)$  é constituída de simplexos cujos suportes têm diâmetro menor que  $\epsilon$ .

Denotemos por  $\Delta_q^{(1)}$  a coleção dos simplexos gerados pela primeira subdivisão baricêntrica de  $\Delta_q$ , onde consideraremos  $\Delta_q = \Delta_q^{(0)}$ . Note que, com essa notação, temos que  $\Delta_q^{(1)} = (\Delta_q^{(0)})^{(1)}$ . Denotaremos, também, a coleção dos simplexos da  $r$ -ésima subdivisão baricêntrica de  $\Delta_q$  por  $\Delta_q^{(r)} = (\Delta_q^{(r-1)})^{(1)}$ . Seja  $d^{(r)} = \max\{\text{diam}(\Delta_q^{(r)})\}$ . Então pela proposição 10.6 e indução mostraremos que

$$d^{(r)} \leq \left(\frac{q}{q+1}\right)^r \text{diam}(\Delta_q).$$

Para  $r = 1$ , temos que  $\text{diam}(\Delta_q^{(1)}) \leq \frac{q}{q+1} \text{diam}(\Delta_q)$ . Portanto,  $d^{(1)} \leq \frac{q}{q+1} \text{diam}(\Delta_q)$ .

Suponha, agora, que  $d^{(r-1)} \leq \left(\frac{q}{q+1}\right)^{r-1} \text{diam}(\Delta_q)$  e mostremos que ele é válido

para todo  $r > 0$ . Assim, pela proposição 10.6 e hipótese de indução temos

$$\begin{aligned} \text{diam}(\Delta_q^{(r)}) &\leq \left(\frac{q}{q+1}\right) \text{diam}(\Delta_q^{(r-1)}) \\ &\leq \left(\frac{q}{q+1}\right) d^{(r-1)} \\ &\leq \left(\frac{q}{q+1}\right) \left(\frac{q}{q+1}\right)^{r-1} \text{diam}(\Delta_q) \\ &= \left(\frac{q}{q+1}\right)^r \text{diam}(\Delta_q) \end{aligned}$$

Segue que:

$$d^{(r)} \leq \left(\frac{q}{q+1}\right)^r \text{diam}(\Delta_q)$$

Se fizermos  $r \rightarrow +\infty$ , então  $\left(\frac{q}{q+1}\right)^r \rightarrow 0$ , ou seja, dado  $\epsilon > 0$ , existe  $r$  suficientemente grande tal que os suportes dos simplexes de  $\beta_{\Delta_q}^r(P_0 P_1 P_2 \dots P_q)$  têm diâmetro menor que  $\epsilon$ .  $\square$

**Proposição 10.8.** *Sejam  $\{U_i\}_{i \in J}$  uma cobertura aberta do espaço topológico  $X$  e  $T : \Delta_q \rightarrow X$  um  $q$ -simplexo singular de  $X$ . Então existe  $r = r(T)$  suficientemente grande tal que  $\beta_X^r(T)$  é constituída por  $q$ -simplexos lineares cujos suportes estão contidos nos abertos da cobertura  $\{U_i\}_{i \in J}$ .*

*Demonstração.* Seja  $U'_i = T^{-1}(U_i)$  tal que  $\{U'_i\}_{i \in J}$  é uma cobertura aberta de  $\Delta_q$ . Como  $\Delta_q$  é um espaço métrico compacto, pelo Lema de Lebesgue (lema 10.3), existe um número real  $\epsilon > 0$  tal que para todo  $A \subset \Delta_q$  com  $\text{diam}(A) < \epsilon$ , existe  $j \in J$  tal que  $A \subset U'_j$ .

Como o diagrama

$$\begin{array}{ccc} C_q(\Delta_q) & \xrightarrow{\beta_{\Delta_q}} & C_q(\Delta_q) \\ \downarrow T_{\#q} & & \downarrow T_{\#q} \\ C_q(X) & \xrightarrow{\beta_X} & C_q(X) \end{array}$$

é comutativo, temos  $\beta_X^r \circ T_{\#q} = T_{\#q} \circ \beta_{\Delta_q}^r$ , para todo  $r > 0$ , e assim

$$\begin{aligned} \beta_X^r(T) &= \beta_X^{r-1}(\beta_X(T)) \\ &= \beta_X^{r-1}(T_{\#q} \beta_{\Delta_q}(P_0 P_1 P_2 \dots P_q)) \\ &= (\beta_X^{r-1} \circ T_{\#q})(\beta_{\Delta_q}(P_0 P_1 P_2 \dots P_q)) \\ &= (T_{\#q} \circ \beta_{\Delta_q}^{r-1})\beta_{\Delta_q}(P_0 P_1 P_2 \dots P_q) \\ &= T_{\#q}(\beta_{\Delta_q}^{r-1}(\beta_{\Delta_q}(P_0 P_1 P_2 \dots P_q))) \\ &= T_{\#q}(\beta_{\Delta_q}^r(P_0 P_1 P_2 \dots P_q)) \end{aligned}$$



Considere, agora,  $(y_0 y_1 y_2 \dots y_q)$  um dos  $q$ -simplexos linear que comparecem na soma  $\beta_{\Delta_q}^{(r)}(P_0 P_1 P_2 \dots P_q)$ . Pela proposição 10.7 e o lema 10.3 (lema de Lebesgue), para  $r$  suficientemente grande, temos que  $(y_0 y_1 y_2 \dots y_q)(\Delta_q) \subset U'_j$ , para algum  $j \in J$ .

Como o número de simplexos lineares de  $\beta_{\Delta_q}^{(r)}(P_0 P_1 P_2 \dots P_q)$  é finito, podemos supor  $r$  suficientemente grande para todos estes simplexos. Assim:

$$\begin{aligned} T_{\#q}(y_0 y_1 y_2 \dots y_q)(\Delta_q) &= (T \circ (y_0 y_1 y_2 \dots y_q))(\Delta_q) \\ &= T((y_0 y_1 y_2 \dots y_q)(\Delta_q)) \\ &\subset T(U'_j) \\ &\subset T(T^{-1}(U_j)) \\ &\subset U_j \end{aligned}$$

Portanto, para  $r$  suficientemente grande temos que os suportes de  $q$ -simplexos lineares que constituem  $\beta_{\Delta_q}^r$ , estão contidos na cobertura aberta  $\{U_i\}_{i \in J}$ .  $\square$

**Definição 10.8.** *Seja  $\Omega = \{U_i\}_{i \in J}$  uma cobertura do espaço topológico  $X$ .*

1. *Dizemos que um subconjunto  $Y$  de  $X$  é  $\Omega$ -pequeno se existir um  $j \in J$  tal que  $Y \subset U_j$ .*
2. *Um  $q$ -simplexo singular de  $X$ ,  $T : \Delta_q \rightarrow X$  diz-se  $\Omega$ -pequeno se  $T(\Delta_q)$  for  $\Omega$ -pequeno.*
3. *Se  $\Omega$  é tal que  $\{Int(U_i)\}_{i \in J}$  também é uma cobertura de  $X$ , denotaremos por  $C_q^\Omega(X)$  o subgrupo de  $C_q(X)$ , gerado pelos  $q$ -simplexos singulares de  $X$ ,  $T : \Delta_q \rightarrow X$ , que são  $\Omega$ -pequenos.*

**Observação 10.4.** Afirmamos que  $C_*^\Omega(X) = (C_q^\Omega(X), \partial_q|_{C_q^\Omega(X)})$  é um subcomplexo de  $C_*(X) = (C_q(X), \partial_q)$ .

Com efeito, se  $T : \Delta_q \rightarrow X$  é  $\Omega$ -pequeno, pela definição 10.8,  $T(\Delta_q) \subset U_j$ , para algum  $j \in J$ . Assim, temos que  $T^{(i)}(\Delta_{q-1}) \subset T(\Delta_q) \subset U_j$  para algum  $j \in J$ . Logo  $C_*^\Omega(X)$  é estável em relação a  $\partial_q(T) = \sum_{i=0}^q (-1)^i T^{(i)}$ , ou seja, se  $T : \Delta_q \rightarrow X$  é  $\Omega$ -pequeno então  $\partial_q(T) : \Delta_{q-1} \rightarrow X$  é  $\Omega$ -pequeno. Portanto  $C_*^\Omega(X)$  é um subcomplexo de  $C_*(X)$ .

**Definição 10.9.** *Seja  $\Omega = \{U_i\}_{i \in J}$  uma cobertura do espaço topológico  $X$  tal que  $\{Int(U_i)\}_{i \in J}$ , também, é uma cobertura de  $X$ . Definimos  $n(T)$  como sendo o menor número inteiro  $r \geq 0$  tal que os simplexos singulares de  $\beta_X^r(T)$  são  $\Omega$ -pequenos.*

**Observação 10.5.** Note que a existência do número inteiro  $n(T)$  é assegurada pela proposição 10.8, aplicada à cobertura aberta  $\{Int(U_i)\}_{i \in J}$  de  $X$ .

Se  $\Omega = \{U_i\}_{i \in J}$  é uma cobertura do espaço topológico  $X$  tal que  $\{Int(U_i)\}_{i \in J}$ , também, é uma cobertura de  $X$  então temos as seguintes propriedades:

**Propriedade 10.1.** Para todo  $T : \Delta_q \rightarrow X$ , temos que  $\beta_X^{n(T)}(T) \in C_q^\Omega(X)$ .

*Demonstração.* Segue da definição de  $n(T)$ . □

**Propriedade 10.2.** Para todo  $T : \Delta_q \rightarrow X$ , temos que  $n(T^{(i)}) \leq n(T)$ , para  $0 \leq i \leq q$ .

*Demonstração.* Como  $T^{(i)}(\Delta_{q-1}) \subset T(\Delta_q)$ , então  $\beta_X^{n(T)}(T^{(i)})(\Delta_{q-1}) \subset \beta_X^{n(T)}(T)(\Delta_q) \subset U_j$ , para algum  $j \in J$ . Assim,  $n(T^{(i)}) \leq n(T)$  por definição de  $n(T^{(i)})$ . □

**Propriedade 10.3.** Para todo  $T : \Delta_q \rightarrow X$ , temos que  $n(T) = 0$  se, e somente se,  $Im(T) \subset U_j$ , para algum  $j \in J$ .

*Demonstração.* Para todo  $T : \Delta_q \rightarrow X$ , se  $n(T) = 0$  então  $\beta_X^0(T) = T$  e pela propriedade 10.1,  $T$  é  $\Omega$ -pequeno e portanto  $Im(T) \subset U_j$ , para algum  $j \in J$ . Reciprocamente, se  $Im(T) \subset U_j$ , para algum  $j \in J$ ,  $T$  é  $\Omega$ -pequeno. Assim  $\beta_X^0(T) = T \in C_q^\Omega(X)$ . Assim, por definição de  $n(T)$  devemos ter  $n(T) \leq 0$  e portanto  $n(T) = 0$ . □

**Propriedade 10.4.**  $C_*^\Omega(X)$  é estável em relação ao operador baricêntrico.

*Demonstração.* Devemos mostrar que  $\beta_X : C_*^\Omega(X) \rightarrow C_*^\Omega(X)$ . Com efeito, se  $T$  é  $\Omega$ -pequeno, pela propriedade 10.3,  $n(T) = 0$ . Assim, pela definição de  $n(T)$  segue que  $\beta_X(T)$  é  $\Omega$ -pequeno. □

No próximo lema, mostraremos que o grupo  $C_*^\Omega(X)$  é estável, também, em relação aos homomorfismos  $[H]_{(q,X)}$ , para todo  $q \geq 0$  (vide definição 10.3).

**Lema 10.4.** O subgrupo  $C_*^\Omega(X)$  de  $C_*(X)$  é estável em relação à família de homomorfismos  $[H]_{(q,X)} : C_q(X) \rightarrow C_{q+1}(X)$ , para todo  $q \geq 0$ .

*Demonstração.* Devemos mostrar que  $[H]_{(q,X)} : C_q^\Omega(X) \rightarrow C_{q+1}^\Omega(X)$ , para todo  $q \geq 0$ .

Para  $q = 0$ , temos que  $[H]_{(0,X)}(c) = 0$ , para todo  $c \in C_0^\Omega(X)$ . Portanto, para  $q = 0$ , temos que  $[H]_{(0,X)}(c) = 0 \in C_1^\Omega(X)$  pois  $C_1^\Omega(X)$  é o subgrupo de  $C_1(X)$  gerado pelos 1-simplexos  $T : \Delta_1 \rightarrow X$   $\Omega$ -pequenos.

Para  $q > 0$  vamos mostrar que,  $[H]_{(q,X)}(T)$  é  $\Omega$ -pequeno se  $T$  é  $\Omega$ -pequeno. Com efeito, se  $T : \Delta_q \rightarrow X$  é um gerador de  $C_q^\Omega(X)$ , então  $T(\Delta_q) \subset U_j$ , para algum  $j \in J$ . Logo:

$$\begin{aligned} [H]_{(q,X)}(T) &= T_{\#q+1}([H_{(q,\Delta_q)}](P_0 P_1 P_2 \dots P_q)) \\ &= T_{\#q+1}(b_q[(P_0 P_1 P_2 \dots P_q) - \beta_{\Delta_q}(P_0 P_1 P_2 \dots P_q) \\ &\quad - [H]_{(q-1,\Delta_q)}(\partial'_q(P_0 P_1 P_2 \dots P_q))]) \end{aligned}$$

onde  $c = b_q[(P_0 P_1 P_2 \dots P_q) - \beta_{\Delta_q}(P_0 P_1 P_2 \dots P_q) - [H]_{(q-1,\Delta_q)}(\partial'_q(P_0 P_1 P_2 \dots P_q))]$   $\in C_{q+1}(\Delta_q)$ , ou seja,  $c$  é uma  $(q+1)$ -cadeia de  $C_{q+1}(\Delta_q)$ . Portanto,  $[H]_{(q,X)}(T)(\Delta_{q+1}) = T_{\#q+1}(c)(\Delta_{q+1}) = T(c(\Delta_{q+1})) \subset T(\Delta_q) \subset U_j$ , para algum  $j \in J$ . Logo  $[H]_{(q,X)}(T)$  é  $\Omega$ -pequeno. Portanto, o subgrupo  $C_*^\Omega(X)$  de  $C_*(X)$  é estável em relação à família de homomorfismos  $[H]_{(q,X)}$ , para todo  $q \geq 0$ .  $\square$

**Teorema 10.1.** *A inclusão  $i : C_*^\Omega(X) \rightarrow C_*(X)$  é uma equivalência de cadeias.*

*Demonstração.* Pela definição 9.5, para mostrar que a inclusão  $i : C_*^\Omega(X) \rightarrow C_*(X)$  é uma equivalência de cadeias, precisamos construir uma aplicação de cadeias  $\Lambda : C_*(X) \rightarrow C_*^\Omega(X)$  tal que  $\Lambda \circ i \simeq Id_{C_*^\Omega(X)}$  e  $i \circ \Lambda \simeq Id_{C_*(X)}$ .

Primeiro, definimos uma família de homomorfismos  $Q : C_q(X) \rightarrow C_{q+1}(X)$  de modo que: se  $T$  é um gerador de  $C_q(X)$ , então

$$Q(T) = \begin{cases} - \sum_{j=0}^{n(T)-1} [H]_{(q,X)} \beta_X^j(T) & , \text{ se } T \text{ não for } \Omega\text{-pequeno} \\ 0 & , \text{ se } T \text{ for } \Omega\text{-pequeno} \end{cases}$$

e estendemos por linearidade para todo  $C_q(X)$ .

Assim, se  $T$  é um gerador de  $C_q(X)$  tal que  $T$  não é  $\Omega$ -pequeno, utilizando a proposição 10.5, temos que:

$$\begin{aligned} (\partial_{q+1} \circ Q)(T) &= -\partial_{q+1} \left[ \sum_{j=0}^{n(T)-1} [H]_{(q,X)} \beta_X^j(T) \right] \\ &= -(\partial_{q+1} \circ [H]_{(q,X)})(\sum_{j=0}^{n(T)-1} \beta_X^j(T)) \\ &= - \sum_{j=0}^{n(T)-1} \beta_X^j(T) + \beta_X(\sum_{j=0}^{n(T)-1} \beta_X^j(T)) + [H]_{(q-1,X)}(\partial_q(\sum_{j=0}^{n(T)-1} \beta_X^j(T))) \\ &= - \sum_{j=0}^{n(T)-1} \beta_X^j(T) + \sum_{j=0}^{n(T)-1} \beta_X^{j+1}(T) + [H]_{(q-1,X)}(\sum_{j=0}^{n(T)-1} (\partial_q \circ \beta_X^j(T))) \end{aligned}$$

Se fizermos  $i = j + 1$  e utilizarmos a proposição 10.3, temos que:

$$\begin{aligned}
(\partial_{q+1} \circ Q)(T) &= - \sum_{j=0}^{n(T)-1} \beta_X^j(T) + \sum_{i=1}^{n(T)} \beta_X^i(T) + [H]_{(q-1, X)} \left( \sum_{j=0}^{n(T)-1} (\partial_q \circ \beta_X^j(T)) \right) \\
&= -T + \beta_X^{n(T)}(T) + [H]_{(q-1, X)} \left( \sum_{j=0}^{n(T)-1} (\beta_X^j \circ \partial_q)(T) \right) \\
&= -T + \beta_X^{n(T)}(T) + [H]_{(q-1, X)} \left( \sum_{j=0}^{n(T)-1} (\beta_X^j(\partial_q(T))) \right) \\
&= -T + \beta_X^{n(T)}(T) + [H]_{(q-1, X)} \left( \sum_{j=0}^{n(T)-1} (\beta_X^j \left( \sum_{i=0}^q (-1)^i (T)^{(i)} \right)) \right) \\
&= -T + \beta_X^{n(T)}(T) + \sum_{i=0}^q (-1)^i \left( \sum_{j=0}^{n(T)-1} [H]_{(q-1, X)} (\beta_X^j((T)^{(i)})) \right)
\end{aligned}$$

Pela propriedade 10.2, podemos escrever:

$$\begin{aligned}
(\partial_{q+1} \circ Q)(T) &= \\
&= -T + \beta_X^{n(T)}(T) + \sum_{i=0}^q (-1)^i \left( \sum_{j=0}^{n(T^{(i)})-1} [H]_{(q-1, X)} (\beta_X^j((T)^{(i)})) \right) \\
&\quad + \sum_{i=0}^q (-1)^i \left( \sum_{j=n(T^{(i)})}^{n(T)-1} [H]_{(q-1, X)} (\beta_X^j((T)^{(i)})) \right) \\
&= -T + \beta_X^{n(T)}(T) - \sum_{i=0}^q (-1)^i Q(T^{(i)}) + \sum_{i=0}^q (-1)^i \left( \sum_{j=n(T^{(i)})}^{n(T)-1} [H]_{(q-1, X)} (\beta_X^j((T)^{(i)})) \right) \\
&= -T + \beta_X^{n(T)}(T) - Q \left( \sum_{i=0}^q (-1)^i T^{(i)} \right) + \sum_{i=0}^q (-1)^i \left( \sum_{j=n(T^{(i)})}^{n(T)-1} [H]_{(q-1, X)} (\beta_X^j((T)^{(i)})) \right) \\
&= -T + \beta_X^{n(T)}(T) - Q(\partial_q(T)) + \sum_{i=0}^q (-1)^i \left( \sum_{j=n(T^{(i)})}^{n(T)-1} [H]_{(q-1, X)} (\beta_X^j((T)^{(i)})) \right)
\end{aligned}$$

Portanto  $(\partial_{q+1} \circ Q)(T) =$

$$-T + \beta_X^{n(T)}(T) - Q(\partial_q(T)) + \sum_{i=0}^q (-1)^i \left( \sum_{j=n(T^{(i)})}^{n(T)-1} [H]_{(q-1, X)} (\beta_X^j((T)^{(i)})) \right) \quad (10.7)$$

Definamos, então  $\Lambda(T) = T + (\partial_{q+1} \circ Q)(T) + (Q \circ \partial_q)(T)$ . Pela equação 10.7, verificamos que:

$$\Lambda(T) = \beta_X^{n(T)}(T) + \sum_{i=0}^q (-1)^i \left( \sum_{j=n(T^{(i)})}^{n(T)-1} [H]_{(q-1, X)} (\beta_X^j((T)^{(i)})) \right)$$

se  $T$  não é  $\Omega$ -pequeno.

Pelo lema 10.4, temos que  $C_*^\Omega(X)$  é estável em relação aos homomorfismos  $[H]_{(q,X)}$ , com  $q \geq 0$ . Por outro lado, pela definição 10.9, para todo  $j \geq n(T^{(i)})$ , temos que  $\beta_X^j(T^{(i)}) \in C_*^\Omega(X)$ . Como  $T : \Delta_q \rightarrow X$  é arbitrário, podemos considerar  $\Lambda$  como um homomorfismo de  $C_*(X)$  em  $C_*^\Omega(X)$ .

Afirmamos que o homomorfismo  $\Lambda$  é uma aplicação de cadeias:

Se  $T \in C_q(X)$  não é  $\Omega$ -pequeno, temos que:

$$\begin{aligned}
(\partial_q \circ \Lambda)(T) &= \partial_q(\Lambda(T)) \\
&= \partial_q(T + (\partial_{q+1} \circ Q)(T) + (Q \circ \partial_q)(T)) \\
&= \partial_q(T) + \partial_q((\partial_{q+1} \circ Q)(T)) + \partial_q((Q \circ \partial_q)(T)) \\
&= \partial_q(T) + (\partial_q \circ \partial_{q+1})(Q(T)) + \partial_q((Q \circ \partial_q)(T)) \\
&= \partial_q(T) + \partial_q((Q \circ \partial_q)(T))
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
(\Lambda \circ \partial_q)(T) &= \Lambda(\partial_q(T)) \\
&= \partial_q(T) + (\partial_q \circ Q)(\partial_q(T)) + (Q \circ \partial_{q-1})(\partial_q(T)) \\
&= \partial_q(T) + \partial_q((Q \circ \partial_q)(T)) + Q((\partial_{q-1} \circ \partial_q)(T)) \\
&= \partial_q(T) + \partial_q((Q \circ \partial_q)(T))
\end{aligned}$$

Se  $T$  é  $\Omega$ -pequeno, temos que  $T^{(i)}(\Delta_{q-1}) \subset T(\Delta_q) \subset U_j$  e, portanto,  $T^{(i)}$  também é  $\Omega$ -pequeno. Assim,  $Q(T) = 0$  e  $Q(\partial_q(T)) = Q(\sum_{i=0}^q (-1)^i (T)^{(i)}) = \sum_{i=0}^q (-1)^i Q((T)^{(i)}) = 0$ . Logo,  $\Lambda(T) = T$ .

Agora, mostraremos que a aplicação inclusão  $i : C_*^\Omega(X) \rightarrow C_*(X)$  é uma equivalência de cadeias:

Se  $T$  é  $\Omega$ -pequeno, temos que  $(\Lambda \circ i)(T) = \Lambda(i(T)) = \Lambda(T) = T$ . Então  $(\Lambda \circ i) = Id_{C_*^\Omega(X)}$ .

Por outro lado, da definição de  $\Lambda$ , temos para todo  $T \in C_q(X)$  que,  $(\partial_{q+1} \circ Q)(T) + (Q \circ \partial_q)(T) = \Lambda(T) - T = i(\Lambda(T)) - T$ . Logo  $\partial_{q+1} \circ Q + Q \circ \partial_q = i \circ \Lambda - Id_{C_*(X)}$  e portanto,  $i \circ \Lambda \simeq Id_{C_*(X)}$ .  $\square$

## 10.2 Sexto Axioma de Eilenberg-Steenrod: Teorema da Excisão

Sejam  $A$  um subespaço topológico de  $X$ ,  $i : A \rightarrow X$  a aplicação inclusão e  $\Omega = \{U_i\}_{i \in J}$  uma cobertura de  $X$  tal que  $\{int(U_i)\}$  é uma cobertura aberta de  $X$ . Lembremos que o monomorfismo  $i_{\#} : C_*(A) \rightarrow C_*(X)$  permite identificar  $C_*(A)$  como subgrupo de  $C_*(X)$ .

Considere  $Q : C_q(X) \rightarrow C_{q+1}(X)$  a aplicação definida no teorema 10.1. A naturalidade de  $Q$  em relação às aplicações contínuas é garantida pela naturalidade do operador baricêntrico  $\beta_X : C_q(X) \rightarrow C_q(X)$  e do homomorfismo  $[H]_{(q,X)} : C_q(X) \rightarrow C_{q+1}(X)$ , em relação às aplicações contínuas.

Em particular, considerando a naturalidade da aplicação  $Q$  em relação à aplicação inclusão  $i : A \rightarrow X$ , temos que  $Q(C_q(A)) \subset C_{q+1}(A)$ . Agora, se considerarmos a naturalidade da aplicação  $\Lambda = Id + (\partial_{q+1} \circ Q) + (Q \circ \partial_q)$  em relação à aplicação inclusão  $i : A \rightarrow X$ , temos que  $\Lambda(C_q(A)) \subset C_q^{\Omega}(A)$ .

A cobertura  $\Omega = \{U_i\}_{i \in J}$ , por sua vez, induz uma cobertura  $\Omega_A = \{U_i \cap A\}_{i \in J}$ , mantendo as mesmas propriedades da cobertura  $\Omega$ . Além disso, temos que  $\Lambda(C_q(A)) \subset C_q^{\Omega_A}(A)$ .

Consideremos, agora,  $C_*^{\Omega}(X, A) = C_*^{\Omega}(X)/C_*^{\Omega_A}(A)$ . Assim, temos o diagrama:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & C_*^{\Omega_A}(A) & \longrightarrow & C_*^{\Omega}(X) & \longrightarrow & C_*^{\Omega}(X, A) \longrightarrow 0 \\
 & & \Lambda_A \updownarrow i_A & & \Lambda \updownarrow i & & \bar{\Lambda} \updownarrow \bar{i} \\
 0 & \longrightarrow & C_*(A) & \longrightarrow & C_*(X) & \longrightarrow & C_*(X, A) \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Diagrama XXXIII

onde  $\bar{i}$  e  $\bar{\Lambda}$  são obtidos de  $i$  e  $\Lambda$ , respectivamente, por passagem ao quociente.

**Teorema 10.2.** *As aplicações  $\bar{i} : C_*^{\Omega}(X, A) \rightarrow C_*(X, A)$  e  $\bar{\Lambda} : C_*(X, A) \rightarrow C_*^{\Omega}(X, A)$  são equivalências de homotopias.*

*Demonstração.* Como  $\bar{i}$  e  $\bar{\Lambda}$  são obtidos de  $i$  e  $\Lambda$ , respectivamente, por passagem ao quociente e temos que  $\Lambda \circ i = Id_{C_*^{\Omega}(X)}$  e  $i \circ \Lambda - Id_{C_*(X)} = \partial_{q+1} \circ Q + Q \circ \partial_q$ , segue que  $\bar{i}$  e  $\bar{\Lambda}$  satisfazem as relações  $\bar{\Lambda} \circ \bar{i} = Id_{C_*^{\Omega}(X, A)}$  e  $\bar{i} \circ \bar{\Lambda} - Id_{C_*(X, A)} = \bar{\partial}_{q+1} \circ \bar{Q} + \bar{Q} \circ \bar{\partial}_q$ , ou seja,  $\bar{i} \circ \bar{\Lambda} \simeq Id_{C_*(X, A)}$ , donde segue o resultado.  $\square$

**Definição 10.10.** *Sejam  $C_*^\Omega(X, A) = C_*^\Omega(X)/C_*^{\Omega A}(A)$  subcomplexo de  $C_*(X, A)$  e  $\bar{\partial}_q|_{C_q^\Omega(X, A)}$  o homomorfismo quociente  $\bar{\partial}_q$  restrito a  $C_q^\Omega(X, A)$ . Denotaremos o  $q$ -ésimo grupo de homologia singular do subcomplexo  $C_*^\Omega(X, A)$ , a saber  $H_q(C_*^\Omega(X, A))$ , por  $H_q^\Omega(X, A)$ .*

Assim, podemos enunciar o corolário 10.1 a seguir, que nos permite calcular a homologia do par  $(X, A)$  através de cadeias de complexos  $\Omega$ -pequenos.

**Corolário 10.1.** *Se  $\bar{i} : C_*^\Omega(X, A) \rightarrow C_*(X, A)$  é a aplicação inclusão, então  $\bar{i}_{*q} : H_q^\Omega(X, A) \rightarrow H_q(X, A)$  é um isomorfismo, para todo  $q \geq 0$ .*

*Demonstração.* Pelo teorema 10.2, temos que a aplicação inclusão  $\bar{i} : C_*^\Omega(X, A) \rightarrow C_*(X, A)$  é uma equivalência de homotopia. Assim, pelo corolário 9.2, temos que  $\bar{i}_{*q} : H_q^\Omega(X, A) \rightarrow H_q(X, A)$  é um isomorfismo, para todo  $q \geq 0$ .  $\square$

Agora, enunciaremos e demonstraremos o objetivo principal deste capítulo, a saber, que a Homologia Singular satisfaz o 6º axioma de Eilenberg-Steenrod. Este é essencialmente o corolário 10.2 que veremos nesta seção. Contudo, observamos que o resultado que aqui enunciaremos e demonstraremos é mais geral que o descrito na axiomática para teorias de homologia, ou seja, consideraremos o conjunto  $U$  não necessariamente um conjunto aberto.

**Teorema 10.3.** *(Teorema da Excisão) Sejam  $(X, A)$  um par de espaços topológicos e  $U$  um subconjunto de  $A$  (não necessariamente aberto) tal que  $\bar{U} \subset \text{Int}(A)$ . Se  $k : (X - U, A - U) \rightarrow (X, A)$  é a aplicação inclusão, então  $k_{*q} : H_q(X - U, A - U) \rightarrow H_q(X, A)$  é um isomorfismo, para todo  $q \geq 0$ .*

*Demonstração.* Consideremos a cobertura  $\Omega = \{X - U, A\}$  de  $X$ .

Desde que  $U$  é um subconjunto de  $A$  tal que  $\bar{U} \subset \text{Int}(A)$ , então o complementar do  $\text{Int}(X - U)$  em  $X$ , que denotaremos  $(\text{Int}(X - U))^c$ , satisfaz  $(\text{Int}(X - U))^c \subset \bar{U} \subset \text{Int}(A)$ . Assim  $\text{Int}(X - U) \cup \text{Int}(A) \supset (\text{Int}(X - U))^c \cup \text{Int}(A) = X$  e portanto segue que  $\text{Int}(X - U) \cup \text{Int}(A) = X$ . Note, também, que como  $U$  é um subconjunto de  $A$  e  $A \in \Omega_A = \{(X - U) \cap A, A\} = \{A - U, A\}$ , temos que  $C_q^{\Omega A}(A) = C_q(A)$ .

Observemos que  $T : \Delta_q \rightarrow X$  é um  $q$ -simplexo singular  $\Omega$ -pequeno se, e somente se,

1.  $T(\Delta_q) \subset A$  ou

2.  $T(\Delta_q) \subset X - U$

Portanto,

$$C_q^\Omega(X) = C_q(X - U) + C_q(A) \quad (10.8)$$

Por outro lado,  $T \in C_q(X - U) \cap C_q(A)$  se, e somente se,  $T(\Delta_q) \subset (X - U) \cap A = A - U$  e assim

$$C_q(X - U) \cap C_q(A) = C_q(A - U) \quad (10.9)$$

Desde que  $A \in \Omega_A$ , utilizando a equação (10.9), o isomorfismo de grupos  $\frac{H}{H \cap K} \cong \frac{H + K}{K}$  e a equação (10.8), nesta ordem, temos:

$$\begin{aligned} \frac{C_q(X - U)}{C_q(A - U)} &= \frac{C_q(X - U)}{C_q(X - U) \cap C_q(A)} \\ &\cong \frac{C_q(X - U) + C_q(A)}{C_q(A)} \\ &= \frac{C_q^\Omega(X)}{C_q(A)} \\ &= \frac{C_q^\Omega(X)}{C_q^{\Omega_A}(A)} \end{aligned}$$

Considerando-se o isomorfismo de complexos de cadeias  $\Psi : C_*(X - U, A - U) \rightarrow C_*^\Omega(X, A)$  definido pela inclusão  $\frac{C_q(X - U)}{C_q(A - U)} \rightarrow \frac{C_q(X - U) + C_q(A)}{C_q(A)}$  e a aplicação inclusão  $\bar{i} : C_*^\Omega(X, A) \rightarrow C_*(X, A)$ , dada pelo teorema 10.2, temos o diagrama comutativo abaixo:

$$\begin{array}{ccc} C_*(X - U, A - U) & \xrightarrow{k_\#} & C_*(X, A) \\ & \searrow \Psi & \nearrow \bar{i} \\ & C_*^\Omega(X, A) & \end{array}$$

Portanto,  $k_\# = \bar{i} \circ \Psi$  é uma equivalência de cadeias, e pela proposição 9.4, temos que  $k_{*q} : H_q(X - U, A - U) \rightarrow H_q(X, A)$  é um isomorfismo, para todo  $q \geq 0$ .  $\square$

Como resultado imediato do teorema 10.3, segue o:

**Corolário 10.2.** *Se  $U$  é um subconjunto aberto do espaço topológico  $X$  tal que  $\bar{U} \subset \text{Int}(A)$  então a aplicação de pares inclusão  $e : (X - U, A - U) \rightarrow (X, A)$  induz um isomorfismo de grupos  $\bar{e}_{*q} : H_q(X - U, A - U) \rightarrow H_q(X, A)$ , para todo  $q \in \mathbb{Z}$ .*



Pelo corolário, temos que o 6° axioma de Eilenberg-Steenrod está satisfeito para a Homologia Singular. Finalizando nossa busca por demonstrar que a Homologia Singular, realmente, é uma teoria de homologia.

Antes de encerrarmos este capítulo, vejamos uma aplicação do teorema 10.3 e seu corolário.

**Exemplo 10.4.** Sejam  $X = S^n$  a esfera unitária em  $\mathbb{R}^{n+1}$  e  $E_+^n$  e  $E_-^n$  os hemisférios norte e sul da esfera unitária  $S^n$ , respectivamente. Mostremos que  $H_q(E_-^n, S^{n-1}) \cong H_q(S^n, E_+^n)$ , para todo  $q \geq 0$ .

*Demonstração.* Pela definição 4.3, se considerarmos  $\mathbb{R}^{n+1}$  com a topologia usual, temos que:

1. A esfera unitária é o subconjunto de  $\mathbb{R}^{n+1}$  dado por  $S^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1})\| = 1\}$ .
2. Os hemisférios norte e sul da esfera unitária  $S^n$  são subconjuntos de  $\mathbb{R}^{n+1}$  dados por  $E_+^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1})\| = 1 \text{ e } x_{n+1} \geq 0\}$  e  $E_-^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1})\| = 1 \text{ e } x_{n+1} \leq 0\}$ , respectivamente.

Logo,  $E_+^n \cap E_-^n \approx S^{n-1}$ .

Consideremos o par  $(X, A) = (S^n, E_+^n)$  e  $U = \{N\}$  onde  $N = (0, 0, \dots, 0, 1) \in S^n$  é o pólo norte da esfera unitária  $S^n$ . Note que  $U$  é um conjunto fechado e portanto  $\overline{U} = U \subset \text{Int}(E_+^n)$ . Logo, pelo teorema da excisão 10.3, temos que a aplicação inclusão  $k : (S^n - \{N\}, E_+^n - \{N\}) \rightarrow (S^n, E_+^n)$  induz um isomorfismo  $k_{*q} : H_q(S^n - \{N\}, E_+^n - \{N\}) \rightarrow H_q(S^n, E_+^n)$ .

Por outro lado, temos que  $j : (E_-^n, S^{n-1}) \rightarrow (S^n - \{N\}, E_+^n - \{N\})$  é uma equivalência de homotopia o qual pode ser visualizada retraindo-se radialmente os pontos de  $E_+^n - \{N\}$  sobre  $S^{n-1}$  e mantendo os pontos de  $E_-^n$  fixos, conforme *Figura 10.3*. Portanto, pelo corolário 9.2,  $j_{*q} : H_q(E_-^n, S^{n-1}) \rightarrow H_q(S^n - \{N\}, E_+^n - \{N\})$  é um isomorfismo, para todo  $q \geq 0$ .

Assim, concluímos que  $(k_{*q} \circ j_{*q}) : H_q(E_-^n, S^{n-1}) \rightarrow H_q(S^n, E_+^n)$  é um isomorfismo para todo  $q \geq 0$ . □

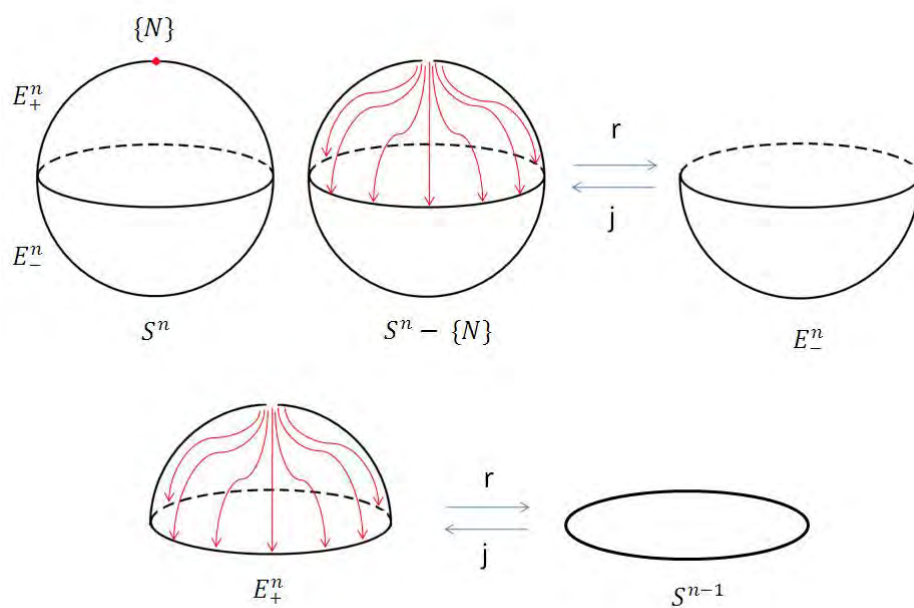


Figura 10.3: Equivalência de homotopia  $j$

# 11 Conclusão

A axiomática de Eilenberg-Steenrod, proposta em 1945, estabelece que toda Teoria de Homologia deve satisfazer os sete axiomas apresentados no *Capítulo 4*.

Nesta dissertação, primeiro, demonstramos que a Homologia Singular satisfaz 5 dos 7 axiomas de Eilenberg-Steenrod (de números 1, 2, 3, 4 e 7) e assumimos que os axiomas 5 (Axioma da Homotopia) e 6 (Teorema da Excisão) estavam satisfeitos. A seguir, calculamos os grupos de homologia das esferas e mostramos alguns resultados clássicos, a saber:

1. A não existência de um homeomorfismo entre  $\mathbb{R}^m$  e  $\mathbb{R}^n$ , se  $m \neq n$ .
2. O teorema do ponto fixo de Brouwer.
3. A não existência de um campo vetorial não-nulo nas esferas de dimensão par.

Em um segundo momento, mostramos que a Homologia Singular satisfaz os axiomas da Homotopia e da Excisão propostos por Eilenberg-Steenrod, a saber:

- Axioma da Homotopia: Se as aplicações  $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  são homotópicas, então  $\bar{f}_{*q} = \bar{g}_{*q}$ , para todo  $q \in \mathbb{Z}$ .
- Axioma da Excisão: Se  $U$  é um subconjunto aberto do espaço topológico  $X$  tal que  $\bar{U} \subset \text{Int}(A)$  então a aplicação de pares inclusão  $e : (X - U, A - U) \rightarrow (X, A)$  induz um isomorfismo de grupos  $e_{*q} : H_q(X - U, A - U) \rightarrow H_q(X, A)$ , para todo  $q \in \mathbb{Z}$ .

Concluimos, assim, que a Homologia Singular é uma Teoria de Homologia, completando nossos estudos.

# Referências

- [1] LYRA, C. B. *Homologia Singular - Notas de Curso de Pós Graduação ministrado em 1971*, São Paulo, 1971.
- [2] GREENBERG, M. J. *Lectures on Algebraic Topology*, New York: W.A. Benjamin, 1966.
- [3] HERNSTEIN, I. N. *Tópicos de Álgebra [Topics in algebra]. A. P. Bergamasco; L. H. J. Monteiro) (Trad.)*, São Paulo: Editora Polígono, 1964.
- [4] HILTON, P. J.; WYLIE S. *Homology Theory - An Introduction to Algebraic Topology*, Cambridge: The University Press, 1967.
- [5] MAC LANE, S. *Homology*, Berlin: Springer, 2001.
- [6] MASSEY, W. S. *Singular Homology Theory*, New York: Heidelberg, 1980.
- [7] MUNKRES, J. R. *Topology - A First Course*, Englewood Cliffs: Prentice-Hall, Inc., 1975.
- [8] MUNKRES, J. R. *Elements of Algebraic Topology*, Redwood City: Menlo Park, 1984.
- [9] SPANIER, E. H. *Algebraic Topology*, New York: McGraw-Hill Book, Inc., 1966.
- [10] VICK, J. W. *Homology Theory - An Introduction to Algebraic Topology*, New York: Academic Press, 1973.

# A Teorema do Isomorfismo de Grupos

**Definição A.1.** *Dois grupos  $G_1$  e  $G_2$  são ditos isomorfos se existir um homomorfismo bijetor de  $G_1$  em  $G_2$ . Neste caso, escrevemos  $G_1 \cong G_2$ .*

**Teorema A.1.** *(Teorema do Isomorfismo de Grupos) Seja  $\phi$  um homomorfismo de grupos sobrejetor, digamos  $\phi : G_1 \rightarrow G_2$ , tal que  $K = \ker(\phi)$ . Então  $\frac{G_1}{K} \cong G_2$ .*

*Demonstração.* Considere o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} G_1 & \xrightarrow{\phi} & G_2 \\ \sigma \downarrow & & \\ \frac{G_1}{K} & & \end{array}$$

onde  $\sigma(g) = Kg$

Gostaríamos de completar este diagrama da seguinte forma:

$$\begin{array}{ccc} G_1 & \xrightarrow{\phi} & G_2 \\ \sigma \downarrow & \nearrow \psi & \\ \frac{G_1}{K} & & \end{array}$$

Analisando estes dois diagramas, a fim de construir a aplicação  $\psi$  de  $\frac{G_1}{K}$  em  $G_2$ , devemos usar  $G_1$  como intermediário. Assim, de forma natural, escrevemos o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} g & \xrightarrow{\phi} & \phi(g) \\ \sigma \downarrow & \nearrow \psi & \\ Kg & & \end{array}$$

Ou seja, definimos formalmente a função  $\psi$  de  $\frac{G_1}{K}$  em  $G_2$  de forma que: se  $X \in \frac{G_1}{K}$ ,  $X = Kg$ , então  $\psi(X) = \phi(g)$ .

Precisamos verificar que  $\psi$  está bem definida. De fato, se  $X = Kg = Kg'$ , com  $g, g' \in G_1$ , por um lado temos que  $\psi(X) = \phi(g)$  e por outro  $\psi(X) = \phi(g')$ . Para que a aplicação  $\psi$  tenha sentido é necessário que tenhamos  $\phi(g) = \phi(g')$ . Mas isto ocorre, pois  $Kg = Kg'$ , então  $g = kg'$ , para algum  $k \in K$ . Portanto,  $\phi(g) = \phi(kg') = \phi(k)\phi(g') = \phi(g')$ , pois  $k \in K = \ker(\phi)$ .

Mostremos que  $\psi$  é um isomorfismo de  $\frac{G_1}{K}$  em  $G_2$ :

1.  $\psi$  é sobrejetora.

De fato, se  $x \in G_2$ , temos que  $x = \phi(g)$ , para algum  $g \in G_1$ , pois por hipótese  $\phi$  é sobrejetora. Logo,  $x = \phi(g) = \psi(Kg)$ .

2.  $\psi$  é um homomorfismo.

De fato, se  $X, Y \in \frac{G_1}{K}$  são tais que  $X = Kg$  e  $Y = Kg'$ , com  $g, g' \in G_1$ , então  $XY = KgKg' = Kgg'$ . Logo,  $\psi(XY) = \psi(KgKg') = \psi(Kgg') = \phi(gg') = \phi(g)\phi(g')$ , pois  $\phi$  é um homomorfismo de  $G_1$  em  $G_2$ . Como  $\psi(X) = \psi(Kg) = \phi(g)$  e  $\psi(Y) = \psi(Kg') = \phi(g')$ , temos que  $\psi(XY) = \phi(g)\phi(g') = \psi(X)\psi(Y)$ .

3.  $\psi$  é injetora.

Iremos mostrar que o núcleo de  $\psi$  é o elemento unidade de  $\frac{G_1}{K}$ , ou seja,  $\ker(\psi) = K = Ke$ , onde  $e \in G_1$  é o elemento unidade de  $G_1$ . Seja  $e' \in G_2$  o elemento unidade de  $G_2$ , se  $\psi(Kg) = e'$ , então  $Kg = Ke = K$ . De fato,  $e' = \psi(Kg) = \phi(g)$ . Logo  $g \in \ker(\phi) = K$ . Portanto  $Kg = K$ .

Juntando os itens 1, 2 e 3, podemos afirmar que  $\frac{G_1}{K} \cong G_2$ . □

## B Topologia Quociente

Neste parágrafo relembremos a definição de Aplicação Quociente e alguns resultados utilizados ao longo deste trabalho.

**Definição B.1.** *Sejam  $X$  e  $Y$  espaços topológicos e  $p : X \rightarrow Y$  uma aplicação sobrejetora. A aplicação  $p$  é denominada aplicação quociente se dado  $U \subset Y$ ,  $U$  é aberto em  $Y$  se, e somente se,  $p^{-1}(U)$  é aberto em  $X$ .*

Esta condição também é chamada de continuidade forte (strong continuity) e podemos defini-la através de conjuntos fechados, uma vez que  $p^{-1}(Y - B) = X - p^{-1}(B)$ , para  $B \subset Y$  aberto, onde  $p^{-1}(Z)$  denota a imagem inversa de  $Z$  por  $p$ , para  $Z \subset Y$ .

**Teorema B.1.** *Sejam  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  espaços topológicos. Sejam  $p : X \rightarrow Y$  uma aplicação quociente e  $g : X \rightarrow Z$  uma aplicação contínua tal que  $g$  é constante sobre cada conjunto  $p^{-1}(\{y\})$ , onde  $y \in Y$ . Então  $g$  induz uma aplicação contínua  $f : Y \rightarrow Z$  tal que  $f \circ p = g$ .*

*Demonstração.* Através do enunciado, podemos escrever o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ p \downarrow & \searrow g & \\ Y & \xrightarrow{f} & Z \end{array}$$

Para cada  $y \in Y$ , o conjunto  $g(p^{-1}(\{y\}))$  é um ponto de  $Z$ , pois por hipótese  $g$  é constante sobre  $p^{-1}(\{y\})$ . Se nós denotarmos este ponto por  $f(y)$ , então definimos uma aplicação  $f : Y \rightarrow Z$  tal que para cada  $x \in X$ ,  $f(p(x)) = g(x)$ . Precisamos mostrar que  $f$  é contínua. De fato, seja  $V$  um conjunto aberto em  $Z$ . A continuidade de  $g$  implica que  $g^{-1}(V) = p^{-1}(f^{-1}(V))$  é aberto em  $X$ . Como  $p$  é uma aplicação quociente,  $f^{-1}(V)$  será aberto em  $Y$ .  $\square$

Vejamos, agora, um resultado envolvendo Espaços de Hausdorff e Aplicações Quociente.

**Teorema B.2.** *Sejam  $g : X \rightarrow Z$  uma aplicação sobrejetora e  $X^*$  uma coleção de subconjuntos de  $X$  dada por  $X^* = \{g^{-1}(\{z\}) \mid z \in Z\}$  de forma que  $X^*$  tenha a topologia quociente. Afirmação:*

*i) Se  $Z$  é um espaço de Hausdorff, então  $X^*$  também será um espaço de Hausdorff.*

*ii) A aplicação  $g$  induz uma aplicação bijetiva  $f : X^* \rightarrow Z$ . Esta aplicação é um homeomorfismo se, e somente se,  $g$  é uma aplicação quociente.*

*Demonstração.* Pelo enunciado, escrevemos o diagrama:

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ p \downarrow & \searrow g & \\ X^* & \xrightarrow{f} & Z \end{array}$$

onde  $p$  é a aplicação quociente de  $X$  em  $X^*$ , que associa a cada  $x \in X$  o elemento  $g^{-1}(\{g(x)\})$

Pelo teorema anterior, a aplicação  $g$  induz uma aplicação contínua  $f : X^* \rightarrow Z$  e esta é bijetora. Se  $Z$  é um espaço de Hausdorff, então dados pontos distintos de  $X^*$  suas imagens por  $f$  são distintas. Portanto estes possuem vizinhanças  $U$  e  $V$  disjuntas em  $Z$ . Então  $f^{-1}(U)$  e  $f^{-1}(V)$  são vizinhanças disjuntas dos dois pontos dados.

Suponha que  $f$  é um homeomorfismo. Assim,  $f$  e  $p$  são aplicações quocientes e portanto  $g = f \circ p$  é uma aplicação quociente. Por outro lado, suponha que  $g$  é uma aplicação quociente. Dado um conjunto aberto  $V \in X^*$ , temos que  $g^{-1}(f(V)) = p^{-1}(V)$  é um conjunto aberto em  $X$ , pois  $p$  é uma aplicação quociente. Portanto  $f(V)$  é aberto em  $Z$ , pois  $g$  é uma aplicação quociente. Assim,  $f$  leva conjuntos abertos em conjuntos abertos e portanto  $f$  é um homeomorfismo.  $\square$



# C Breve Biografia sobre o Prof. Dr. Carlos Benjamim de Lyra

O professor Carlos Benjamim de Lyra nasceu em 1927, em Recife, PE. Aos 15 anos, foi aos Estados Unidos estudar matemática. Além dos Estados Unidos, estudou matemática na França.

Em 1958, obteve o grau de doutor em Ciências (Matemática) na antiga Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras (FFCL), localizada na USP em São Paulo. Sua tese foi intitulada “Sobre os Espaços de Mesmo Tipo de Homologia que a dos Poliedros”, (subárea: Topologia Algébrica), sendo esta orientada por Candido Lima da Silva Dias, então professor da USP em São Paulo.

Infelizmente, Prof. Lyra faleceu prematuramente, aos 46 anos, em 1974.

O Instituto de Matemática e Estatística (IME), da USP em São Paulo, fundou a Biblioteca "Prof. Carlos Benjamin de Lyra", em 1969, em sua homenagem.

Abaixo, seguem fotos do Prof. Lyra no 1º Colóquio Brasileiro de Matemática, realizado na cidade de Poços de Caldas, MG (Julho de 1957), e em banca de concurso de Livre Docência, em 1971.



Figura C.1: Participantes do 1º Colóquio Brasileiro de Matemática.

---

Participantes do 1º Colóquio Brasileiro de Matemática, descritos conforme a *Figura C.1.*

---

1 - Marília Chaves Peixoto	21 - Cândido Lima da Silva Dias
2 - Carlos Benjamim de Lyra	22 - Gilberto Francisco Loibel
3 - Maurício Matos Peixoto	23 - Carlos Alberto Aragão de Carvalho
4 - Chaim Samuel Hönig	24 - Constantino Menezes de Barros
5 - Domingo Pizanelli	25 - Milton Carvalho Martins
6 - Paulo Ribenboim	26 - Francisco Cavalcanti
7 - Ary Nunes Tietböhl	27 - Manfredo Perdigão do Carmo
8 - Omar Catunda	28 - Eliana Ferreira Rocha
9 - Lise Rodriguê (Sra. A. M. M. Rodriguês)	29 - Antonio Gervásio Colares
10 - José de Barros Netto	30 - Jonio Pereira de Lemes
11 - Djairo Guedes Figueiredo	31 - Nelo da Silva Allan
12 - Elza Gomide	32 - Nelson Onuchic
13 - Francisca Torres	33 - Ubiratan D'Ambrósio
14 - Lindolpho de Carvalho Dias	34 - Ernesto Bruno Cossi
15 - Alberto de Carvalho Peixoto de Azevedo	35 - Georges Reeb
16 - Waldir Muniz Oliva	36 - Luiz Henrique Jacy Monteiro
17 - Morikumi Goto	37 - Manoel Teixeira da Silva Filho
18 - Roberdo Figueiredo Ramalho de Azevedo	38 - Renzo Piccinini
19 - Alexandre Augusto Martins Rodrigues	39 - Artibano Micali
20 - Antonio Rodrigues	40 - Fernando Furquim de Almeida

---



Figura C.2: Banca de Livre Docência, em 1971.

Da esquerda para a direita: Carlos Benjamin de Lyra, Cândido Lima da Silva Dias, Gilberto Francisco Loibel, Chaim Samuel Hönlig e Nelson Onuchic.

**Fontes:**

1. Badin, M. G. *Um olhar sobre as contribuições do professor Nelson Onuchic para o desenvolvimento da matemática no Brasil*. Rio Claro: 2006.
2. *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society*. Volume 5, Number 2, 115-122, DOI: 10.1007/BF02938484
3. FERRI, Mário Guimarães; MONTROYAMA, Shozo. *História das Ciências no Brasil*. São Paulo: E.P.U.; EDUSP.