



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Campus de Rio Claro

Introdução às equações diferenciais ordinárias e aplicações.

Ana Claudia Chinchio

Dissertação apresentada ao Programa de
Pós-Graduação – Mestrado Profissional em
Matemática Universitária do Departamento
de Matemática como requisito parcial para a
obtenção do grau de Mestre

Orientadora
Profa. Dra. Marta Cilene Gadotti

2012

517.38 Chinchio, Ana Claudia
C539i Introdução às equações diferenciais ordinárias e aplicações. / Ana
Claudia Chinchio- Rio Claro: [s.n.], 2012.
87 f.:fig.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Insti-
tuto de Geociências e Ciências Exatas.
Orientadora: Marta Cilene Gadotti

1. equações diferenciais ordinárias. 2. existência de solução. 3.
modelo da dinâmica do Diabetes. I. Título

Ficha Catalográfica elaborada pela STATI - Biblioteca da UNESP
Campus de Rio Claro/SP

TERMO DE APROVAÇÃO

Ana Claudia Chinchio

INTRODUÇÃO ÀS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS E
APLICAÇÕES.

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática Universitária do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, pela seguinte banca examinadora:

Profa. Dra. Marta Cilene Gadotti
Orientadora

Profa. Dra. Renata Zotin Gomes de Oliveira
IGCE/UNESP/Rio Claro (SP)

Profa. Dra. Silvia Martorano Raimundo
FM/USP/São Paulo (SP)

Rio Claro, 29 de agosto de 2012

Dedico esta dissertação aos meus exemplos de vida, meus pais, Jamil e Cinira, que me propiciaram uma vida digna onde eu pudesse crescer, acreditando que tudo é possível, desde que sejamos honestos, íntegros de caráter e tendo a convicção de que desistir nunca seja uma ação contínua em nossas vidas; que sonhar e concretizar os sonhos só dependerão de nossa vontade. Sempre me incentivaram a dar este grande passo. Com muita sabedoria, discernimento, bom senso e dedicação, estiveram ao meu lado me encorajando nas horas difíceis e me aplaudindo nos momentos de glória. Obrigada por serem os melhores pais do mundo, fonte de inspiração, apoio e ensino diário.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, pela saúde, fé e perseverança que tem me dado. Obrigada pela oportunidade, e principalmente por estar presente em cada passo, cada detalhe e cada instante da minha vida. Faz-me acreditar que tudo é possível na Tua presença!

À Profa. Dra. Marta Cilene Gadotti, orientadora desta dissertação, por todo empenho, sabedoria, compreensão, exigência e, acima de tudo, pela paciência. Obrigada por fazer dos nossos encontros momentos prazerosos. "Gestos de carinho, atenção e delicadeza nos fazem perceber quanto algumas pessoas são especiais na forma de ser e como são bem-vindas suas ações. Muito obrigada!". Obrigada por me proporcionar a curiosidade e a vontade de buscar novas descobertas. Um exemplo de profissional que sabe como tornar uma simples orientação em um momento de reflexão. Obrigada por acreditar no meu trabalho!

Ao meu marido Guilherme, que sempre acreditou em mim, apoiou meus sonhos, minhas ideias e até as maluquices. Obrigada pela compreensão e pelo carinho... és o meu mais fiel amigo... Amor, obrigada por fazer dessa caminhada a melhor que eu poderia ter...

Aos meus amigos e professores da FCT/Unesp campus de Presidente Prudente, sem exceções,... a minha eterna gratidão pelos momentos de carinho, conhecimento, solidariedade e felicidade que vivemos. Sem eles não conseguiria suportar a saudade da minha família. E pude comemorar uma grande vitória, o primeiro diploma de curso superior da minha família. As meninas, Su, Tia Ninha, Mi, Beth, Paty, Filhotinha, e os meninos, Robinson, Willian, Heberti, Guti, Buiu, Leleco, Bob, Por, Itelim, mas em especial, quero agradecer a minha irmã de alma, Vivi, e ao meu querido amigo, e agora padrinho professor Dr. José Roberto Nogueira, obrigada por compartilharem comigo a honra de conhecer e amar suas famílias, que me ensinaram o verdadeiro sentido da palavra generosidade. Obrigada amigos por cada momento!

Agradeço aos meus amigos da Primeira Turma de Pós-Graduação em Matemática Universitária, que foram os melhores, cada qual com sua peculiaridade, porém insubstituíveis. Em especial ao Batista, Tofu, Robinson e Loreane por todas as horas de estudos e todos os nossos seminários. A Leda, capitã do nosso time, amiga fiel e companheira,

que desde de Prudente compartilha e desfruta de todos os momentos de minha vida. Que prazer tê-los comigo e não haveria palavras para descrever quanta felicidade vocês me proporcionam!

Obrigada à todos os professores deste programa, em especial, Alice, Henrique, João, Renata, Suzinei, Simone e Wladimir que contribuíram de forma significativa para o meu crescimento acadêmico e pessoal. Agradeço também as secretárias de departamento Ana, Elisa e Inajara e ao técnico de informática José Ricardo, por todo suporte que me foi dado e aos funcionários da Seção de Pós-Graduação, pelos serviços prestados.

Por fim, a Amanda, minha irmã, aos meus queridos pais, a quem honro pelo esforço com o qual educaram a mim e a minha irmã. Obrigada Pai, Mãe e Tata! Obrigada por existirem! Obrigada por depositarem em mim a confiança para todas as horas. Sei que vocês se orgulham por eu ter atingido uma etapa que nenhum outro de nós tinha atingido antes, mas este orgulho que sentem por mim, converto numa obrigação de a cada dia ser mais digna de representá-los.

Só existem dois dias no ano que nada pode ser feito. Um se chama ontem e o outro se chama amanhã, portanto hoje é o dia certo para amar, acreditar, fazer e principalmente viver. Dalai Lama

Resumo

Motivados por interessantes aplicações das equações diferenciais ordinárias a problemas em diversas áreas, apresentamos um texto introdutório e básico sobre a teoria de existência e unicidade de solução e descrevemos o estudo sobre alguns modelos.

Palavras-chave: equações diferenciais ordinárias, existência de solução, modelo da dinâmica do Diabetes.

Abstract

Motivated by interesting applications of ordinary differential equations to problems in several area, we present an introductory text theory on the existence and uniqueness of solutions and describe the study on some models.

Keywords: ordinary differential equations, existence of solution, the dynamic model of Diabetes.

Lista de Figuras

2.1	Faixa de amplitude 2ϵ	20
2.2	Gráficos de $f_n(x) = x/n$	21
3.1	Gráfico das soluções do Modelo de Malthus	41
3.2	Gráfico das soluções do Modelo de Verhulst	43
4.1	Diagrama de fluxo do sistema regulatório da glicose sanguínea	53
4.2	Gráfico de $g(t)$ se $\alpha^2 - \omega_0 > 0$	57
5.1	Circuito elétrico	81

Sumário

1	Introdução	17
2	Preliminares	19
2.1	Resultados de Análise	19
2.2	Resultados de Álgebra Linear	23
2.3	Formas de Jordan	25
3	Equações diferenciais de primeira ordem	29
3.1	Existência e unicidade de solução	29
3.2	Equação linear de primeira ordem	35
4	Equações diferenciais de segunda ordem	45
4.1	Equações lineares de segunda ordem	45
4.2	Equações homogêneas	46
4.2.1	O wronskiano	49
4.3	Um modelo para a dinâmica do Diabetes	50
5	Sistemas de equações diferenciais	59
5.1	Definições básicas	59
5.2	Sistemas de equações diferenciais lineares	63
5.3	O estudo dos autovalores e autovetores	69
5.3.1	Raízes complexas	71
5.3.2	Raízes iguais	72
5.3.3	Análise do caso 2×2	72
5.4	Solução matriz fundamental	75
5.5	Fórmula da variação de parâmetros	79
6	Conclusão	85
	Referências	87

1 Introdução

As equações diferenciais constituem uma ferramenta importante na modelagem de problemas naturais. Vários problemas físicos, químicos, ecológicos, econômicos e biológicos são descritos através das equações diferenciais; podemos encontrar suas diversas aplicações nas referências [3], [5] e [7]. Para se estudar a teoria sobre existência de solução para equações diferenciais ordinárias é necessário o conhecimento de algumas técnicas e resultados da análise matemática como a convergência de sequências de funções.

Observa-se que no final do século XVII, com os avanços do Cálculo, por obra de Isaac Newton (*1646, †1727) e Gottfried Wilhelm von Leibniz (*1646, †1716), inúmeros problemas puderam ser modelados matematicamente na forma de equações diferenciais. Com isso, surgiu a questão da resolução dos problemas matemáticos apresentados por estes modelos. Vários desses problemas foram resolvidos explicitamente por grandes matemáticos como os da família Bernoulli (*1654, †1705) e Leonhard Euler (*1707, †1783).

Com o tempo perceberam que não seria possível obter procedimentos gerais de resolução explícita para as equações diferenciais e então, no século XVII, os pesquisadores começaram a procurar outros métodos de estudo das equações diferenciais que não a sua solução explícita. Um grande nome dessa época é Augustin Louis Cauchy (*1789, †1857) que demonstrou a existência de soluções para uma grande parte das equações diferenciais, que aparecem em muitos modelos. No final do século XIX surge a teoria qualitativa geométrica, com Henri Poincaré (*1854, †1912) e Aleksandr Mikhailovich Lyapunov (*1857, †1918), e também a teoria de aproximação analítica e de aproximação numérica. Embora essas duas teorias não sejam objetos desse trabalho, é válido observar a sua importância e a existência de pesquisas desenvolvidas até os dias atuais envolvendo os resultados obtidos por esses grandes matemáticos.

Por outro lado, para um processo de ensino-aprendizagem mais comprometido com o conhecimento do aluno é espera-se propiciar um ambiente favorável e prazeroso para este processo, para tanto, apostamos na modelagem que estimulada por um problema da "vida real", utiliza-se da Matemática para buscar as possíveis soluções. Segundo

Bassanezi ([?], 2002, p.16) "a modelagem matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real."

Dessa forma, a arte de modelar faz com que a Matemática aproxime-se da realidade e não o caminho inverso.

Tendo em vista que o Programa de **PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA UNIVERSITÁRIA**, Curso de Mestrado Profissional da Unesp tem como objetivo a formação de um matemático e não necessariamente um pesquisador no sentido tradicional, mas com suficiente grau de erudição matemática para traçar conexões entre os diversos domínios dessa ciência, fizemos um estudo utilizando a interdisciplinaridade de ciências para a motivação do processo de ensino aprendizagem. Para tanto produzimos um material que poderá ser utilizado em sala de aula, em disciplina de Modelagem Matemática e ou em disciplina introdutória sobre Equações Diferenciais Ordinárias.

Os objetivos centrais deste trabalho são: a promoção da familiaridade com um modelo matemático advindo de situação real; a promoção de um estudo introdutório sobre a teoria das equações diferenciais ordinárias e sua utilização em aplicações. Para este fim introduzimos alguns conceitos e resultados da Análise Matemática e Álgebra Linear.

Para que possamos atingir os objetivos supracitados este trabalho está organizado da seguinte forma:

Capítulo 2: resultados básicos que foram utilizados no estudo da teoria de equações diferenciais ordinárias.

Capítulo 3: teoria básica das equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, com respeito à existência e unicidade de solução.

Capítulo 4: teoria básica das equações diferenciais lineares de segunda ordem, equações homogêneas e trazemos a descrição de um modelo para a dinâmica do Diabétes, sua análise quanto à solução, interpretação e validação.

Capítulo 5: sistemas de equações diferenciais lineares, autovalores e autovetores, uma breve análise qualitativa e uma aplicação de estratégias de armamentos.

Através das aplicações das equações diferenciais ordinárias, ficou evidente a importância da interdisciplinariedade na aquisição do conhecimento.

2 Preliminares

Neste capítulo apresentamos os conceitos e resultados teóricos de Análise Matemática e Álgebra Linear necessários para o desenvolvimento do trabalho. Muitos desses resultados não são demonstrados, mas algumas referências que apresentam as provas desses teoremas são dadas no decorrer do texto.

2.1 Resultados de Análise

As definições e resultados desta seção podem ser encontrados na referência [1].

Definição 2.1. *Um subconjunto K do espaço \mathbb{R}^n é compacto, quando K é fechado e limitado.*

Teorema 2.1 (de Borel-Lebesgue). *Toda cobertura aberta de um conjunto compacto admite subcobertura finita.*

Definição 2.2. *Se $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de números reais, então:*

A soma infinita $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é chamada série.

Cada número a_i é um termo da série, onde a_n é o termo genérico de ordem n . Para definir a soma de infinitas parcelas, consideram-se as somas parciais.

$$S_1 = a_1$$

$$S_2 = a_1 + a_2$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$

$$\vdots$$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

A sequência $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é chamada de sequência das somas parciais. Se essa sequência (S_n) tem limite S , então a série converge e sua soma é S .

Se a sequência (S_n) não tem limite, então a série diverge.

Definição 2.3. *Uma sequência de funções $f_n : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma correspondência que associa a cada número natural $n \in \mathbb{N}$ uma função f_n , definida em D e tomando valores reais.*

As sequências de funções, distinguem-se em dois conceitos de convergência: convergência pontual e convergência uniforme.

Definição 2.4. Diz-se que uma sequência de funções $f_n : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, com o mesmo domínio D , converge simplesmente ou pontualmente para uma função f se, dado qualquer $\epsilon > 0$, para cada $x \in D$ existe $N = N(x, \epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Definição 2.5. Diz-se que uma sequência de funções f_n converge uniformemente para uma função f em um domínio D se, dado qualquer $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $x \in D$ e $n > N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$.

A definição acima significa, geometricamente, que $\forall \epsilon > 0$ cada gráfico de $y = f_n(x)$, para $n > N$ está contido numa faixa de amplitude 2ϵ , centrada no gráfico de $y = f(x)$, como mostra figura abaixo:

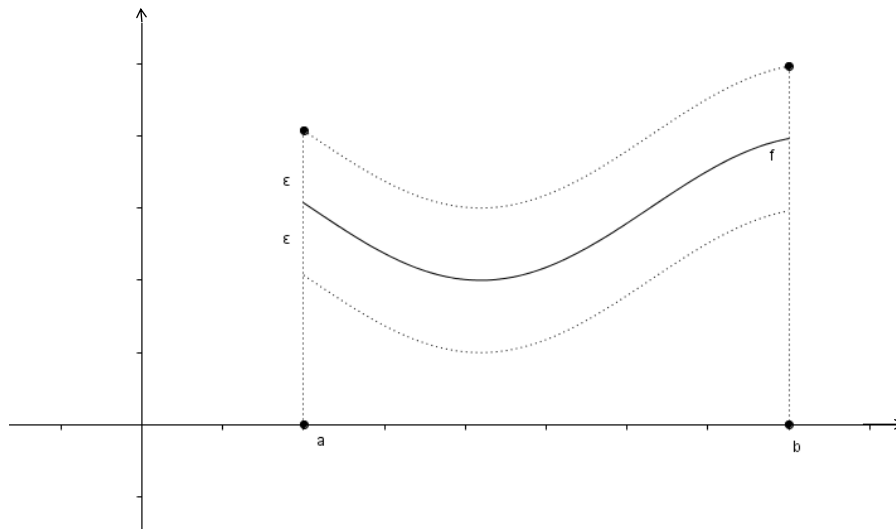


Figura 2.1: Faixa de amplitude 2ϵ .

Observação 2.1. Note que a convergência uniforme implica convergência pontual, mas a recíproca não é verdadeira. Por exemplo, considere a sequência $f_n(x) = x/n$, $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Vamos mostrar que para cada $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) \rightarrow 0$ pontualmente quando $n \rightarrow \infty$, mas a convergência não é uniforme.

De fato, $\forall \epsilon > 0$, e cada $x \in \mathbb{R}$, basta considerar $N_x \in \mathbb{N}$, $N_x > \frac{|x|}{\epsilon}$ então $\forall n > N_x$ tem-se

$$\left| \frac{x}{n} - 0 \right| = \frac{|x|}{n} < \epsilon.$$

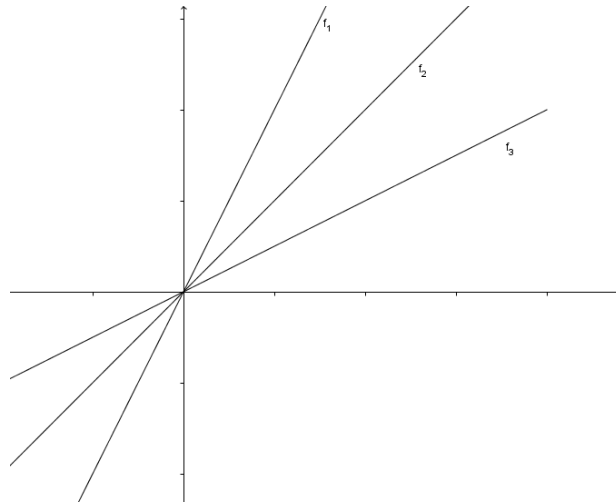


Figura 2.2: Gráficos de $f_n(x) = x/n$.

Note agora que $f_n(x)$ são retas passando pela origem e é impossível colocar uma infinidade de gráficos de $(f_n(x))$ em uma faixa de amplitude 2ϵ centrada na reta $y = 0$. Logo, a convergência não pode ser uniforme.

Teorema 2.2. *Se f_n é uma sequência de funções contínuas em um mesmo domínio D , que converge uniformemente para uma função f , então f é contínua em D .*

Demonstração. Sejam $x, x' \in D$. A desigualdade triangular permite escrever:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x')| &= |(f(x) - f_n(x)) + (f_n(x) - f_n(x')) + (f_n(x') - f(x'))| \\ &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x')| + |(f_n(x') - f(x'))|. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Dado qualquer $\epsilon > 0$, a convergência uniforme garante a existência de N tal que, para $n > N$,

$$|f(x) - f_n(x)| < \epsilon/3 \quad \text{e} \quad |f_n(x') - f(x')| < \epsilon/3,$$

quaisquer que sejam $x, x' \in D$. Fixando um índice $n > N$ e usando a continuidade de f_n para determinar $\delta > 0$ tal que $x, x' \in D$, satisfazendo $|x - x'| < \delta$ implica $|f_n(x) - f_n(x')| < \epsilon/3$. Dado $\epsilon > 0$, usando (2.1), obtemos $|f(x) - f(x')| < \epsilon$ para $x, x' \in D, |x - x'| < \delta$.

Portanto, como f é contínua em $x' \in D$ arbitrário, segue que f é uma função contínua em D . \square

Teorema 2.3 (de Dini). *Se f_n é uma sequência de funções contínuas em um mesmo domínio compacto D , que converge monotonamente para uma função contínua f , então essa convergência é uniforme.*

Demonstração. Vamos supor (f_n) decrescente. Dado qualquer $\epsilon > 0$, para cada $x \in D$ existe um inteiro positivo N_x tal que

$$|f_{N_x}(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Pela continuidade, $\exists \delta_x > 0$ tal que $|f_{N_x}(x) - f_{N_x}(t)| < \epsilon \forall t$ satisfazendo $|t - x| < \delta_x$. Note que a sequência $(f_n(t))$ é decrescente, então $|f_n(t) - f(t)| \leq |f_{N_x}(t) - f(t)| < \epsilon, \forall n > N_x$. Logo existem N_x como acima e $\delta_x > 0$ tais que

$$n \geq N_x, \forall t \in D, \text{ com } |t - x| < \delta_x, \text{ então } |f_n(t) - f(t)| < \epsilon.$$

Note que $V_{\delta_x}(x) = \{t \in \mathbb{R}; |t - x| < \delta_x\}$, quando x varia em D , forma uma cobertura aberta de D , e como D é compacto, pelo Teorema de Borel-Lebesgue, existe um número finito de vizinhanças $V_{\delta_x}(x)$ que cobrem D , denotadas por $V_{\delta_{x_1}}(x_1), V_{\delta_{x_2}}(x_2), \dots, V_{\delta_{x_r}}(x_r)$. Sendo N o maior dos números $N_{x_1}, N_{x_2}, \dots, N_{x_r}$, segue que

$$n > N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon,$$

qualquer que seja $x \in D$. □

Um importante resultado utilizado para provar que uma dada sequência ou série de funções é uniformemente convergente é o Critério de Cauchy. Esta técnica permite garantir a convergência sem a necessidade de exibir o valor do limite. A prova pode ser encontrada em [1].

Teorema 2.4 (Critério de Cauchy para Séries). *Uma condição necessária e suficiente para que uma série $\sum a_n$ seja convergente é dado qualquer $\epsilon > 0$, existe N tal que, para todo inteiro positivo p e $n > N$ temos*

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}| < \epsilon.$$

Vamos introduzir o conceito de supremo de um conjunto de números reais. Para isto precisamos da seguinte definição.

Definição 2.6. *Um conjunto C de números reais é limitado à direita ou limitado superiormente se existe um número K tal que $c \leq K$ para todo $c \in C$. Do mesmo modo, C é limitado à esquerda ou limitado inferiormente se existe um número k tal que $k \leq c$ para todo $c \in C$. Os números K e k são chamados cotas do conjunto C , superior e inferior, respectivamente.*

Definição 2.7. *O supremo de um conjunto C é a menor de suas cotas superiores, ou seja, é o número S que satisfaz as seguintes condições: a) $c \leq S$ para todo $c \in C$; b) dado qualquer número $\epsilon > 0$, existe um elemento $c \in C$ tal que $S - \epsilon < c$.*

Proposição 2.1. *Todo conjunto não vazio de números reais, que seja limitado superiormente, possui supremo.*

O próximo resultado é utilizado na linearização de um sistema de equações diferenciais em torno de um ponto de equilíbrio.

Teorema 2.5 (Fórmula de Taylor em Duas Variáveis). *Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida num aberto $U \subset \mathbb{R}^2$, de classe C^3 . Sejam $(a, b) \in U$ e $(h, k) \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$ tais que os pontos da forma $(a + h, b + k)$ estejam no domínio U . Então,*

$$f(a + h, b + k) = f(a, b) + \left[h \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + k \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) h^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) h k + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) k^2 \right] + R(h, k),$$

onde

$$R(h, k) = \frac{1}{3!} \left[\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(\bar{a}, \bar{b}) h^3 + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(\bar{a}, \bar{b}) h^2 k + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(\bar{a}, \bar{b}) h k^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(\bar{a}, \bar{b}) k^3 \right],$$

para algum (\bar{a}, \bar{b}) interno ao segmento das extremidades (a, b) e $(a + h, b + k)$.

2.2 Resultados de Álgebra Linear

Nesta seção são apresentados resultados e conceitos de Álgebra Linear baseados nas referências [6] e [8], que são utilizados no decorrer do trabalho.

Definição 2.8. *Seja V um espaço vetorial sobre o corpo \mathbb{K} dos escalares, dizemos que um conjunto de vetores x_1, x_2, \dots, x_n gera o espaço V se todo elemento de V pode ser expresso como uma combinação linear de x_1, x_2, \dots, x_n , e neste caso, dizemos que V é finitamente gerado.*

Definição 2.9. *Um conjunto de vetores x_1, x_2, \dots, x_n em V é **linearmente dependente, l.d.** se um desses vetores é combinação linear dos outros. Ou seja, o conjunto de vetores x_1, x_2, \dots, x_n é **l.d.** se existirem escalares c_1, \dots, c_n não todos nulos tais $c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n = 0$.*

Definição 2.10. *Se os vetores x_1, x_2, \dots, x_n não são l.d., isto é, nenhum desses vetores pode ser escrito como combinação linear dos demais, neste caso essa sequência é dita **linearmente independente, l.i.** Ou seja, se os vetores x_1, x_2, \dots, x_n forem **l.i.**, isto implica que se $c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n = 0$, então $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$.*

Definição 2.11. *A **dimensão** de um espaço vetorial V , denotada por $\dim V$, é o número de vetores l.i. que geram V . Se V for finitamente gerado dizemos que V é um espaço de dimensão finita. Caso contrário, isto é, se nenhum conjunto com um número finito de elementos de V gerar V , então V é chamado de espaço de dimensão infinita.*

Definição 2.12. *Se um conjunto B de vetores l.i. gera um espaço V , então B é chamado de uma **base** para V .*

Definição 2.13. *Sejam U, W subespaços de um espaço vetorial V . O espaço vetorial V é soma direta dos subespaços U, W a qual será representada por $U \oplus W$, se as seguintes condições são satisfeitas:*

1. $U \cap W = \{0\}$, onde 0 é o vetor nulo.
2. $V = U + W$, isto é, $\forall v \in V$, existem $u \in U$ e $w \in W$ tais que $v = u + w$.

Definição 2.14. *O conjunto $\{f_1, \dots, f_n\}$ formado por funções definidas em um mesmo domínio D é l.i. se*

$$\alpha_1 f_1(t) + \dots + \alpha_n f_n(t) = 0, \quad \forall t \in D,$$

implicar $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

Definição 2.15. *As transformações lineares T definidas em um espaço vetorial V em si mesmo, isto é, $T : V \rightarrow V$ e que satisfazem*

- (i) $T(u + v) = T(u) + T(v), \forall u, v \in V$
- (ii) $T(\alpha u) = \alpha T(u), \forall u \in V$ e $\forall \alpha \in \mathbb{K}$

são chamadas de operadores lineares sobre V .

Exemplo 2.1. Dado V um espaço vetorial, $Id : V \rightarrow V$, definido por $Id(v) = v$ para todo $v \in V$, é um operador linear denominado identidade.

Definição 2.16. *Dado um operador linear $T : V \rightarrow V$, onde V é um espaço vetorial finitamente gerado, define-se o polinômio característico de T por:*

$$p_T(x) = \det([T]_B - \lambda I),$$

onde $[T]_B$ representa a matriz da transformação T , com respeito à base B de V . As raízes de $p_T(x)$ são denominadas os autovalores de T e vetores não nulos que satisfazem $T(v) = \lambda v$, onde λ é autovalor de T são denominados autovetores de T .

Observação 2.2. O polinômio característico independe da escolha da base B do espaço vetorial V , já que se C for outra base de V então $[T]_B$ e $[T]_C$ são matrizes semelhantes.

Definição 2.17. *Um operador linear $L : V \rightarrow V$ é nilpotente se $L^k = 0$ para algum inteiro k positivo. O menor k para o qual $L^k = 0$ é chamado de índice da nilpotência de L . Se o índice da nilpotência de L for k , significa que existe v em V tal que $L^{k-1}v \neq 0$. Observe que $L^k = 0$ significa que $L^k v = 0$ para todo v em V . Se L for nilpotente com índice k , seu polinômio característico será t^k e assim o seu único autovalor é o zero.*

Definição 2.18. *Sejam V um \mathbb{K} -espaço vetorial de dimensão finita n e $T : V \rightarrow V$ um operador linear. O subespaço vetorial $S \subset V$ é denominado subespaço vetorial invariante pelo operador T ou subespaço vetorial T -invariante quando $T(S) \subseteq S$, sendo $T(S) = \{T(s) | s \in S\}$.*

Posteriormente, com o objetivo de estender os resultados de existência e unicidade de soluções para sistemas de equações diferenciais lineares usaremos o seguinte resultado, cuja prova encontra-se em [6].

Teorema 2.6 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz). *Seja V um espaço vetorial sobre o corpo \mathbb{K} , com o produto interno denotado por \langle, \rangle . Então*

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|, \quad \forall x, y \in V.$$

A igualdade vale se, e somente se, $\{x, y\}$ for linearmente dependente.

2.3 Formas de Jordan

Nesta seção são apresentados alguns resultados para a construção da chamada Forma de Jordan de um operador linear. Para isto considere V um \mathbb{K} -espaço vetorial de dimensão finita, onde \mathbb{K} denota o corpo dos escalares, o texto a seguir é baseado na referência [6].

Definição 2.19. *Um bloco de Jordan $r \times r$ em λ é a matriz $J_r(\lambda)$ em $\mathbb{M}_r(\mathbb{K})$ que tem λ na diagonal principal e 1 na diagonal abaixo da principal, isto é,*

$$J_r(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_r(\mathbb{K}).$$

Para operadores nilpotentes, temos o seguinte resultado.

Teorema 2.7. *Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e $T : V \rightarrow V$ linear e nilpotente de índice $k < \dim V$. Então existe uma base B de V tal que*

$$[T]_B = \begin{bmatrix} J_1(0) & & & \\ & J_2(0) & & \\ & & \ddots & \\ & & & J_r(0) \end{bmatrix},$$

onde $J_1(0)$ é de ordem k e os demais blocos $J_j(0)$, $j = 2, \dots, r$ são de ordem menor ou igual a k .

Agora apresentamos a forma de Jordan para um operador qualquer.

Teorema 2.8. *Seja $T : V \rightarrow V$ um operador linear, onde V é um espaço vetorial de dimensão finita, tal que $p_T(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} \cdots (x - \lambda_t)^{m_t}$, $m_i \geq 1$ e $\lambda_i \neq \lambda_j$, se $i \neq j$. Então $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_t$, onde para cada $i = 1, \dots, t$, U_i , representa o auto-espaço generalizado associado ao autovalor λ_i e tem-se:*

1. $\dim_{\mathbb{K}} U_i = m_i$;
2. o subespaço U_i é T -invariante;
3. a restrição do operador $(\lambda_i Id - T)$ a U_i é nilpotente.

Será construída a Forma de Jordan de um operador linear utilizando o teorema acima. Sejam $T : V \rightarrow V$ um operador linear, e $p_T(x) = (x - \lambda_1)^{m_1} \cdots (x - \lambda_r)^{m_r}$, $r \geq 1$, $m_i \geq 1$ e $\lambda_i \neq \lambda_j$, o polinômio característico de T . Pelo teorema 2.8, existe uma decomposição $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_r$ satisfazendo as propriedades 1, 2 e 3 de seu enunciado. Para cada $i = 1, \dots, r$, considere o operador $T_i = T|_{U_i} : U_i \rightarrow U_i$. E como $\tilde{T} = T_i - \lambda_i Id_{m_i}$ é nilpotente, existem uma base B_i de U_i e números $t_i, m_{i1} \geq m_{i2} \cdots \geq m_{it_i}$ tais que

$$[T_i]_{B_i} = \begin{bmatrix} J_{m_{i1}}(\lambda_i) & 0 & \cdots & 0 \\ & J_{m_{i2}}(\lambda_i) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_{m_{it_i}}(\lambda_i) \end{bmatrix},$$

onde, para cada $i = 1, \dots, r$ e $j = 1, \dots, t_i$,

$$J_{m_{ij}}(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_i & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda_i \end{bmatrix} \in \mathbb{M}_{m_{ij}}(\mathbb{K}),$$

é o correspondente bloco de Jordan. Observe que, como a soma $U_1 \oplus \cdots \oplus U_r$ é direta, segue que $B = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_r$ é base de V . Portanto,

$$[T]_B = \begin{bmatrix} [T_1]_{B_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & [T_2]_{B_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & [T_r]_{B_r} \end{bmatrix}.$$

Esta matriz é chamada de forma de Jordan associada a T . Os números $t_i, m_{ij}, i = 1, \dots, r, j = 1, \dots, t_i$, estão bem determinados a partir de T , isto é, dado T , a forma de Jordan está bem determinada. Além disso, dois operadores lineares $S \in L(V, V)$ e $T \in L(V', V')$ tem a mesma forma de Jordan se, e somente se, existir um isomorfismo $\phi : V \rightarrow V'$ tal que $\phi^{-1}T\phi = S$. Vamos denotar por $L(V, V)$ o conjunto de todos os operadores lineares definidos em V .

Definição 2.20. *O polinômio minimal de um operador linear $T \in L(V, V)$ é o polinômio mônico $m_T(x)$ de menor grau tal que $m_T(T)(v) = 0, \forall v \in V$.*

Sejam $T : V \rightarrow V$, r_i e m_{ij} , $i = 1, \dots, t$ e $j = 1, \dots, r_i$. Como anteriormente para cada $i = 1, \dots, t$ e $j = 1, \dots, r_i$, defina o polinômio $q_{ij}(x) = (x - \lambda_i)^{m_{ij}}$ como divisor elementar de T de multiplicidade m_{ij} associado a λ_i . Quando $m_{ij} = 1$ para algum i, j , diz-se que o correspondente polinômio q_{ij} é simples.

Segue da construção feita que o polinômio característico de T é o produto de todos os seus divisores elementares, isto é,

$$p_T(x) = \prod_{i,j} q_{ij}(x).$$

Os números m_{ij} representam os tamanhos dos blocos de Jordan. É claro que T será diagonalizável se, e somente se, todos os blocos de Jordan tiverem tamanho 1.

Por outro lado, para cada i , tem-se $m_{i1} \geq \dots \geq m_{ir_i}$ de onde se conclui que T será diagonalizável se, e somente se, $m_{i1} = 1$ para todo $i = 1, \dots, t$. No caso $m_{i1} > 1$ sabe-se que a ordem do maior bloco de Jordan associado ao autovalor λ_i é dado por $m_{i1} \times m_{i1}$.

Observação 2.3. Considere o bloco de Jordan $J_r(\lambda)$ com $\lambda \in \mathbb{K}$. Observe que

$$(J_r(\lambda) - \lambda Id_r)^r = 0 \text{ e } (J_r(\lambda) - \lambda Id_r)^{r-1} \neq 0.$$

Seja A uma matriz $m \times m$ formada por blocos de Jordan $J_{r_1}(\lambda), \dots, J_{r_s}(\lambda)$ na diagonal e matrizes nulas no resto. Se $r_1 \geq r_i$, $\forall i = 2, \dots, s$, então $(A - \lambda Id_m)^{r_1} = 0$ e $(A - \lambda Id_m)^{r_1-1} \neq 0$. Utilizando esta observação, segue que

$$q_{i1}(T_i) = (T_i - \lambda_i Id_{r_i})^{m_{i1}} = 0,$$

isto é, o operador T_i é anulado pelo polinômio q_{i1} , $\forall i = 1, \dots, t$. Como a soma $T = T_1 \oplus \dots \oplus T_t$ é direta, conclui-se que T é anulado pelo polinômio

$$q_{11}(x)q_{21}(x) \cdots q_{t1}(x) = (x - \lambda_1)^{m_{11}}(x - \lambda_2)^{m_{12}} \cdots (x - \lambda_t)^{m_{1t}},$$

mas não por nenhum outro de grau menor. Este é o polinômio minimal $m_T(x)$. Assim, o polinômio característico de T é um múltiplo de seu polinômio minimal.

O próximo capítulo apresenta alguns resultados da teoria básica de **Equações Diferenciais Ordinárias**.

3 Equações diferenciais de primeira ordem

Dada uma função $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, a relação

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y(t))$$

é chamada de **equação diferencial ordinária** (EDO) de primeira ordem. Um Problema de Valor Inicial (PVI) é constituído pela equação diferencial e por uma condição inicial $y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}$ e é denotado por:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (3.1)$$

Geometricamente, resolver (3.1) consiste em determinar um intervalo I , contendo t_0 e uma função y que satisfaz $y' = f(t, y(t)), \forall t \in I$ que passa pelo ponto $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

Na seção 3.1 descrevemos o importante teorema sobre existência e unicidade de solução para o PVI.

3.1 Existência e unicidade de solução

A primeira questão que surge quando trabalhamos com equações diferenciais diz respeito à existência de solução. Posteriormente, analisa-se a questão de unicidade. Para responder ambas as questões apresentamos o Teorema de Existência e Unicidade e uma prova baseada em técnicas básicas, utilizadas na referência [3].

Teorema 3.1 (Teorema da Existência e Unicidade). *Suponha que $f(t, y)$ e $\frac{\partial f(t, y)}{\partial y}$ são funções contínuas em uma região retangular*

$$A = \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq t \leq b \text{ e } c \leq y \leq d\}$$

contendo (t_0, y_0) . Então nessas condições, existe uma única função $y(t)$ definida num intervalo I contendo t_0 , que é solução do PVI (3.1).

A prova desse resultado é apresentada nesta seção, após introduzirmos algumas definições e resultados necessários.

Observação 3.1. (a) O intervalo I só fica determinado, em geral, depois que encontrarmos a solução $y(t)$, como veremos na demonstração.

(b) O teorema apresenta apenas uma condição suficiente para a existência e unicidade da solução. Se as condições não são satisfeitas o PVI pode ou não ter uma ou mais soluções.

Para demonstrar o Teorema 3.1 são necessários alguns resultados preliminares. Vamos considerar o PVI (3.1) onde f é uma função contínua e (t_0, y_0) pertence ao domínio de f .

Proposição 3.1. *Seja $y : [t_0, t_0 + \gamma] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Esta função é solução de (3.1) se, e somente se,*

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds, t \in [t_0, t_0 + \gamma]. \quad (3.2)$$

Demonstração. Se y é solução da equação diferencial, então integrando ambos os membros de $\frac{dy}{ds} = f(t, y(s))$, temos

$$\int_{t_0}^t \frac{dy(s)}{ds} ds = \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds.$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$y(t) - y(t_0) = \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds, \forall t \in [t_0, t_0 + \gamma].$$

Assim,

$$y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds, \forall t \in [t_0, t_0 + \gamma].$$

Reciprocamente, seja $y(t) = y(t_0) + \int_{t_0}^t f(s, y(s)) ds$. Derivando com relação a t , obtemos

$$\frac{dy(t)}{dt} = f(t, y(t)).$$

Como $y(t_0) = y_0 + \int_{t_0}^{t_0} f(s, y(s)) ds = y_0$, segue que y é solução de (3.1). \square

Lema 3.1. Se w é uma função contínua não negativa que satisfaz $w(t) \leq L \int_{t_0}^t w(s)ds$, então $w(t) = 0, \forall t$.

Demonstração. Seja $U(t) = \int_{t_0}^t w(s)ds$. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo tem-se $\frac{dU(t)}{dt} = w(t)$ e, por hipótese, $w(t) \leq L \int_{t_0}^t w(s)ds = L.U(t)$. Com isso,

$$\frac{dU(t)}{dt} \leq L.U(t)$$

Consequentemente

$$e^{-L(t-t_0)}U(t) \leq U(t_0) = 0, \forall t \geq t_0.$$

Como $e^{-L(t-t_0)} \neq 0$, segue que $U(t) = 0, \forall t \geq t_0$. Logo

$$\begin{aligned} 0 \leq w(t) &\leq L \int_{t_0}^t w(s)ds = LU(t) = 0 \\ &\Rightarrow w(t) = 0, \forall t. \end{aligned}$$

□

Definição 3.1. Definimos as iteradas de Picard do PVI (3.1) como sendo a sequência de funções definidas da seguinte forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_0(t) = y_0, \forall t \\ y_1(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_0(s))ds, t \geq t_0 \\ y_2(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_1(s))ds, t \geq t_0 \\ \vdots \\ y_n(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_{n-1}(s))ds, t \geq t_0. \end{array} \right.$$

Para provarmos o Teorema de Existência e Unicidade, vamos utilizar o seguinte lema.

Lema 3.2. Dados $a, b \in \mathbb{R}_+$ e $R = \{(t, y); (t, y) \in [t_0, t_0+a] \times [y_0-b, y_0+b]\}$, considere $f : R \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Defina M como sendo o máximo de $\{|f(s, y)|, (s, y) \in R\}$ e α o mínimo de $\{a, \frac{b}{M}\}$. Então,

$$|y_n(t) - y_0| \leq M(t - t_0), \forall t \in [t_0, t_0 + \alpha], \quad (3.3)$$

onde y_n são as iteradas de Picard.

Demonstração. Provemos usando indução. Para $n = 0$, tem-se $|y_0(t) - y_0| = 0$, $\forall t$. Agora vamos supor que (3.3) vale para $n - 1$ e provemos para n . Nossa hipótese é $|y_{n-1}(t) - y_0| \leq M(t - t_0)$, $\forall t \in [t_0, t_0 + \alpha]$.

Como

$$\begin{aligned} |y_n(t) - y_0| &= \left| y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_{n-1}(s)) ds - y_0 \right| = \left| \int_{t_0}^t f(s, y_{n-1}(s)) ds \right| \\ &\leq \int_{t_0}^t |f(s, y_{n-1}(s))| ds \leq M \int_{t_0}^t ds \\ &= M(t - t_0) \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \alpha]. \end{aligned}$$

$$\text{Assim, } |y_n(t) - y_0| \leq M(t - t_0), \forall t \in [t_0, t_0 + \alpha].$$

Note que na desigualdade acima foi utilizada a informação que $|f(s, y_{n-1}(s))| \leq M$, pois $(s, y_{n-1}(s)) \in R$. De fato,

$$\begin{aligned} |y_{n-1}(t) - y_0| \leq M(t - t_0) &\Leftrightarrow \\ -M(t - t_0) \leq y_{n-1}(t) - y_0 \leq M(t - t_0) &\Leftrightarrow \\ -M(t - t_0) + y_0 \leq y_{n-1}(t) \leq M(t - t_0) + y_0. \end{aligned}$$

Definindo as retas

$$\begin{aligned} r : y &= -M(t - t_0) + y_0 \\ s : y &= M(t - t_0) + y_0 \end{aligned}$$

e aplicando-as no ponto $t_0 + \alpha$ temos

$$\begin{aligned} r : y &= -M(t_0 + \alpha - t_0) + y_0 \\ &= -M\alpha + y_0 \geq -b + y_0, \end{aligned}$$

já que $\alpha = \min\{a, \frac{b}{M}\}$, e

$$\begin{aligned} s : y &= M(t_0 + \alpha - t_0) + y_0 \\ &= M\alpha + y_0 \leq y_0 + b. \end{aligned}$$

Portanto, como o gráfico de $y_{n-1}(s)$ fica entre as retas r e s , tem-se que $(s, y_{n-1}(s)) \in R$, se $s \in [t_0, t_0 + \alpha]$. \square

Para provar o Teorema 3.1 resta-nos mostrar que a sequência $\{y_n(t)\}$ é convergente e que, se $y(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(t)$, então $y(t)$ é solução de (3.2).

Primeiramente, vamos mostrar que a sequência $\{y_n(t)\}$ é convergente. Para isto, considere

$$y_n(t) = y_0(t) + y_1(t) - y_0(t) + y_2(t) - y_1(t) + \cdots + y_{n-1}(t) - y_{n-2}(t) - y_{n-1}(t) + y_n(t),$$

e mostremos que a série $\sum_{k=1}^{\infty} [y_k(t) - y_{k-1}(t)]$ é convergente. De fato, pelo lema anterior tem-se $|y_1(t) - y_0(t)| \leq M(t - t_0)$, $\forall t \in [t_0, t_0 + \alpha]$. Usando essa desigualdade também temos,

$$\begin{aligned} |y_2(t) - y_1(t)| &= \left| y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_1(s)) ds - y_0 - \int_{t_0}^t f(s, y_0(s)) ds \right| \\ &= \left| \int_{t_0}^t f(s, y_1(s)) ds - \int_{t_0}^t f(s, y_0(s)) ds \right| \leq \int_{t_0}^t |f(s, y_1(s)) - f(s, y_0(s))| ds. \end{aligned}$$

Usando o Teorema do Valor Médio para a segunda componente, segue que

$$\begin{aligned} |y_2(t) - y_1(t)| &\leq \int_{t_0}^t \left| \frac{\partial f}{\partial y}(s, \xi_1(s)) \right| |y_1(s) - y_0(s)| ds \leq L \int_{t_0}^t |y_1(s) - y_0(s)| ds \\ &\leq L \int_{t_0}^t M(s - t_0) ds = LM \frac{(s - t_0)^2}{2} \Big|_{t_0}^t = LM \frac{(t - t_0)^2}{2}, \end{aligned}$$

onde $\xi_1(s)$ é um valor entre $y_0(s)$ e $y_1(s)$ para cada $s \in [t_0, t]$ e $L = \max_{(t,y) \in R} \left| \frac{\partial f(t,y)}{\partial y} \right|$. Por indução, segue que

$$|y_{n-1}(t) - y_{n-2}(t)| \leq ML^{n-2} \frac{(t - t_0)^{n-1}}{(n-1)!}. \quad (3.4)$$

Logo,

$$\begin{aligned} |y_1(t) - y_0(t)| + |y_2(t) - y_1(t)| + \dots &= \sum_{k=1}^{\infty} |y_k(t) - y_{k-1}(t)| \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} ML^{k-1} \frac{(t - t_0)^k}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M}{L} L^k \frac{(t - t_0)^k}{k!} = \frac{M}{L} \sum_{k=1}^{\infty} L^k \frac{(t - t_0)^k}{k!} \\ &= \frac{M}{L} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[L(t - t_0)]^k}{k!} = \frac{M}{L} (e^{L(t-t_0)} - 1) \leq \frac{M}{L} (e^{L\alpha} - 1), \end{aligned}$$

com $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$.

Portanto,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |y_k(t) - y_{k-1}(t)| \text{ converge, } \forall t \in [t_0, t_0 + \alpha],$$

ou seja, a sequência $\{y_n(t)\}_n$ é uniformemente convergente.

Por fim, mostremos que se $y(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(t)$, então $y(t)$ é solução de (3.2). Dessa forma, seja $y(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(t)$, para cada $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$. Podemos mostrar que y é solução do problema utilizando a Proposição 3.1.

Com efeito, sabemos que $y_n(t) = y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_{n-1}(s))ds$. Então, aplicando o limite temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(y_0 + \int_{t_0}^t f(s, y_{n-1}(s))ds \right). \quad (3.5)$$

Com isso, basta provar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t f(s, y_{n-1}(s))ds = \int_{t_0}^t f(s, y(s))ds. \quad (3.6)$$

O que de fato é verdade, pois usando novamente o Teorema do Valor Médio,

$$\begin{aligned} \left| \int_{t_0}^t f(s, y_k(s))ds - \int_{t_0}^t f(s, y(s))ds \right| &\leq \int_{t_0}^t |f(s, y_k(s)) - f(s, y(s))| ds \\ &= \int_{t_0}^t \left| \frac{\partial f}{\partial y}(s, \xi(s)) \right| |y_k(s) - y(s)| ds \leq L \int_{t_0}^t |y_k(s) - y(s)| ds \end{aligned}$$

Usando (3.4), temos

$$|y_k(s) - y(s)| = \left| \sum_{l=k+1}^{\infty} (y_l(s) - y_{l-1}(s)) \right| \leq \sum_{l=k+1}^{\infty} |y_l(s) - y_{l-1}(s)| \leq \sum_{l=k+1}^{\infty} M \frac{L^{l-1} \alpha^l}{l!}, \quad (3.7)$$

e

$$\left| \int_{t_0}^t f(s, y_k(s))ds - \int_{t_0}^t f(s, y(s))ds \right| \leq \sum_{l=k+1}^{\infty} M \frac{L^{l-1} \alpha^l}{l!} \leq M \sum_{l=k+1}^{\infty} \frac{L^{l-1} \alpha^l}{l!}.$$

Quando $k \rightarrow \infty$ o módulo acima tende a zero, pois a série que aparece está relacionada com a expansão de Taylor da função $e^{\alpha L}$, o que conclui (3.6).

Para provar que y é contínua em t , para $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$, devemos mostrar que para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|y(t+h) - y(t)| < \epsilon \quad \text{para} \quad |h| < \delta.$$

Então dado $\epsilon > 0$, existe n_0 suficientemente grande tal que $\frac{M}{L} \sum_{k=n_0+1}^{\infty} L^k \frac{(\alpha)^k}{k!} < \frac{\epsilon}{3}$.

Observe que

$$y(t+h) - y(t) = [y(t+h) - y_{n_0}(t+h)] + [y_{n_0}(t+h) - y_{n_0}(t)] + [y_{n_0}(t) - y(t)].$$

Usando (3.7), e a escolha de n_0 , temos

$$|y(t+h) - y_{n_0}(t+h)| < \frac{\epsilon}{3} \quad \text{e} \quad |y_{n_0}(t) - y(t)| < \frac{\epsilon}{3},$$

para $t < t_0 + \alpha$ e h suficientemente pequeno tal que $t+h < t_0 + \alpha$. Desde que y_{n_0} é contínua (por construção), existe $\delta > 0$ tal que

$$|y_{n_0}(t+h) - y_{n_0}(t)| < \frac{\epsilon}{3}, \quad \text{para } |h| < \delta.$$

Consequentemente, para $|h| < \delta$

$$|y(t+h) - y(t)| \leq |y(t+h) - y_{n_0}(t+h)| + |y_{n_0}(t+h) - y_{n_0}(t)| + |y_{n_0}(t) - y(t)| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

Assim tem-se que $y(t)$ é a solução contínua da equação integral associada à equação diferencial, para todo $t \in [t_0, t_0 + \alpha]$, o que completa a demonstração do Teorema 3.1.

3.2 Equação linear de primeira ordem

Uma equação linear de primeira ordem é da forma:

$$a_1(x)\dot{y} + a_0(x)y = g(x), \quad \text{com } a_1(x) \neq 0, \quad (3.8)$$

onde $\dot{y} = \frac{dy}{dx}$ denota a derivada de y com relação à sua variável independente x .

Dividindo (3.8) por $a_1(x)$ temos

$$\dot{y} + P(x)y = f(x) \quad (3.9)$$

onde $P : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ e $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ são funções reais supostamente contínuas. Uma função $y : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ é uma solução de (3.9) se esta for diferenciável e satisfazer a equação (3.9), $\forall x \in (a, b)$.

Para encontrar uma solução da equação (3.9), utilizaremos uma técnica relacionada à seguinte definição:

Definição 3.2. Dizemos que uma equação diferencial $M(x, y) + N(x, y)\frac{dy}{dx} = 0$ é exata, quando $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x$, onde $M(x, y)$ e $N(x, y)$ são funções reais contínuas.

Com isso, suponhamos que exista uma função $\mu(x)$ contínua e diferenciável, que ao multiplicar (3.9) torna esta equação exata. Isto é, se

$$\dot{y} + P(x)y = f(x),$$

então multiplicando por $\mu(x)$, obtemos

$$\begin{aligned} \mu(x)\dot{y} + \mu(x)P(x)y - \mu(x)f(x) &= 0, \\ \mu(x)\frac{dy}{dx} + \mu(x)(P(x)y - f(x)) &= 0, \\ \underbrace{\mu(x)}_{N(x,y)} dy + \underbrace{\mu(x)(P(x)y - f(x))}_{M(x,y)} dx &= 0. \end{aligned}$$

Assim, pela definição anterior, a equação acima é exata se $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x$. Logo,

$$\frac{\partial}{\partial y} \underbrace{(\mu(x)P(x)y - f(x)\mu(x))}_{M(x,y)} = \frac{\partial}{\partial x} \underbrace{(\mu(x))}_{N(x,y)}.$$

Com isso, obtemos

$$\mu(x)P(x) = \frac{d\mu(x)}{dx}$$

e, integrando esta equação em relação a x , temos

$$\int P(x)dx = \int \frac{1}{\mu(x)} \frac{d\mu(x)}{dx} dx$$

$$\int P(x)dx = \ln |\mu(x)| + C \quad \Rightarrow \quad |\mu(x)| = Ce^{\int P(x)dx}.$$

Então para $\mu(x) \geq 0$, segue que $\mu(x) = Ce^{\int P(x)dx}$. Essa função $\mu(x)$ é chamada de fator integrante. E mais, multiplicando (3.9) por esse fator, conseguiremos explicitar a solução geral procurada desta equação, da seguinte forma:

$$e^{\int P(x)dx} \frac{dy}{dx} + e^{\int P(x)dx} P(x)y = e^{\int P(x)dx} f(x), \text{ ou seja,}$$

$$\frac{d}{dx} \left[e^{\int P(x)dx} y \right] = e^{\int P(x)dx} f(x), \text{ e integrando com respeito à } x, \text{ temos}$$

$$e^{\int P(x)dx} y = \int e^{\int P(x)dx} f(x)dx + C$$

Portanto,

$$y(x) = e^{-\int P(x)dx} \int e^{\int P(t)dt} f(t)dt + Ce^{-\int P(x)dx}$$

que é a solução geral explícita da equação linear de 1ª ordem.

Vejamos agora aplicações de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem. A primeira aplicação é sobre o crescimento de tumores sólidos e a segunda trata de problemas de misturas.

Exemplo 3.1. A dinâmica de crescimento de um tumor.

As células de divisão de crescimento livre, como as células de bactérias, por exemplo, crescem numa razão proporcional ao volume das células de divisão neste instante. Seja $V(t)$ o volume das células de divisão no instante t . Então,

$$\frac{dV}{dt} = \lambda V \tag{3.10}$$

para alguma constante positiva λ . A solução de (3.10) é

$$V(t) = V_0 e^{\lambda(t-t_0)} \tag{3.11}$$

onde V_0 é o volume das células de divisão no instante inicial t_0 . Assim, as células de divisão de crescimento livre crescem exponencialmente com o tempo. Uma consequência importante de (3.11) é que o volume das células se mantém duplicando em todo intervalo de tempo de comprimento $\ln 2/\lambda$. Vejamos

$$\begin{aligned} V\left(\frac{\ln 2}{\lambda}\right) &= V_0 e^{\lambda\left(\frac{\ln 2}{\lambda}-t_0\right)} \\ &= V_0 e^{\ln 2} \cdot e^{-\lambda t_0} \\ &= V_0 2 e^{-\lambda t_0} \\ &= 2(V_0 e^{-\lambda t_0}) \\ &= 2(V(0)) \end{aligned}$$

E para encontrarmos esse intervalo do tempo onde o volume das células de divisão é o dobro do instante anterior bastou tomar $t = 0$, e

$$\begin{aligned} V(t) &= 2V_0 e^{-\lambda t_0} \\ V_0 e^{\lambda(t-t_0)} &= 2V_0 e^{-\lambda t_0} \\ e^{\lambda t} e^{-\lambda t_0} &= 2 e^{-\lambda t_0} \\ e^{\lambda t} &= 2 \\ t &= \frac{\ln 2}{\lambda}. \end{aligned}$$

Exemplo 3.2. Crescimento de uma célula.

Seja $m(t)$ a massa de uma célula em função do tempo, e $m_0 = m(0)$ a massa inicial no instante $t = 0$. Suponhamos que o crescimento da célula seja determinado somente pela velocidade do metabolismo no seu interior.

Assim, se o aumento do metabolismo depende da massa das moléculas em atividade, então a razão de crescimento da massa celular é proporcional à sua massa presente em cada instante t , ou seja,

$$\frac{dm}{dt} = km,$$

onde $k > 0$ é a constante de proporcionalidade, e esta equação está restrita à $m < M$, onde M é uma constante positiva pois quando a célula atinge um determinado tamanho ela se divide. A solução geral da equação diferencial anterior é

$$m(t) = Ae^{kt}, \text{ com } A \in \mathbb{R}$$

e usando a condição inicial $m(0) = m_0$, obtemos a solução particular

$$m(t) = m_0 e^{kt}, \text{ com } m < M.$$

Logo, m cresce exponencialmente antes de se dividir, ou seja, enquanto $m_0 e^{kt} < M$, o que implica que $t < \frac{1}{k} \ln\left(\frac{M}{m_0}\right)$.

Nesse caso o conceito de crescimento específico é muito importante, sendo definido por

$$\frac{1}{m} \cdot \frac{dm}{dt} = k,$$

k constante.

Assim, enquanto $\frac{dm}{dt}$ mede a velocidade do crescimento, k mede a velocidade de crescimento relativa a massa presente.

Sabemos que o crescimento de uma planta ou animal não é tão simples assim, mas se pudéssemos transferir este modelo do crescimento de uma célula para o crescimento de uma planta, seria possível resolver o problema abaixo.

Problema: Suponha que uma planta de massa $m = 100g$ cresça $4g$ em 24 horas, queremos determinar:

- (i) Em quanto tempo se tornará uma árvore de $100kg$?
- (ii) De quanto aumentará sua massa em 1 dia quando a planta estiver com $100kg$?

Solução:

- (i) A taxa média de crescimento é de $\frac{4}{24} g/h$. Supondo que esta taxa não varie com o tempo, podemos considerar $\frac{1}{6} g/h$ a aproximação para a taxa de crescimento instantâneo ($\frac{dm}{dt}$). Já a taxa de crescimento específico, para este exemplo, é de

$$\frac{1}{6} g/h \frac{1}{100g} = \frac{1}{600} h^{-1}.$$

Assim, com o objetivo de encontrar o tempo necessário para a árvore alcançar $100kg$ e usando os dados $m_0 = 100g$ e $k = 1/600h^{-1}$, temos a seguinte solução

$$100.000 = 100e^{t/600}, \quad \text{ou seja,} \quad \frac{t}{600} = \ln 1000$$

e portanto, $t \cong 4144,7 h \cong 172,7$ dias.

- (ii) Usando a solução $m(t) = m_0 e^{t/600}$ para $m_0 = 100.000 g$, obtemos

$$m(t) = 100.000 e^{24/600} = 104.081,08 g.$$

Portanto, a planta aumentará $4,08kg$ em um dia.

Exemplo 3.3. Problemas de misturas.

Soluções contendo uma concentração física de uma substância x flui para um reservatório, contendo a substância x e possivelmente outras substâncias, a uma velocidade especificada. A mistura é agitada muito rapidamente, e então deixa o reservatório, novamente a uma velocidade especificada. A determinação da concentração da substância x no reservatório em qualquer instante t , é um exemplo de "problemas de misturas", veja o problema a seguir.

Problema: Um reservatório contém S_0 kg de sal dissolvidos em 200 galões de água. Partindo do instante $t = 0$, água contendo $\frac{1}{2}$ kg de sal por galão penetra no reservatório à taxa de 4 gal/min, e a solução bem agitada deixa o reservatório à mesma taxa. Para determinar a concentração de sal no reservatório em qualquer instante $t > 0$, podemos resolver da seguinte forma:

Seja $S(t)$ a quantidade de sal no reservatório no instante t . Então, $S'(t)$, que é a taxa de variação de sal no reservatório no instante t , deve igualar a diferença entre a taxa com que o sal penetra no reservatório e a taxa com que ele deixa o reservatório. A taxa em que o sal penetra no reservatório é

$$\frac{1}{2} \text{kg/galão} \times 4 \text{gal/min} = 2 \text{kg/min}.$$

E a taxa com que o sal deixa o reservatório é

$$4 \text{gal/min} \times \frac{S(t)}{200}.$$

Assim,

$$S'(t) = 2 - \frac{S(t)}{50}, \quad S(0) = S_0,$$

logo

$$S'(t) = \frac{100 - S(t)}{50} \Rightarrow \frac{S'(t)}{100 - S(t)} = \frac{1}{50}.$$

Sabemos que

$$\frac{S'(t)}{100 - S(t)} = -\frac{d}{dt} \ln |100 - S(t)|,$$

então

$$\frac{d}{dt} \ln |100 - S(t)| = -\frac{1}{50},$$

e integrando ambos os lados em relação a t obtemos

$$\begin{aligned} \ln |100 - S(t)| &= -\frac{t}{50} + c \Rightarrow \\ |100 - S(t)| &= e^{-\frac{t}{50} + c} \Rightarrow \\ 100 - S(t) &= e^{-\frac{t}{50}} \cdot k \end{aligned}$$

Então,

$$S(t) = 100 - e^{-\frac{t}{50}} \cdot k, \quad (3.12)$$

onde k é uma constante. Fazendo $t = 0$ na expressão (3.12), temos

$$S(0) = 100 - e^0 \cdot k, \text{ ou seja } k = 100 - S_0.$$

Substituindo k em (3.12), obtemos

$$\begin{aligned} S(t) &= 100 - e^{-\frac{t}{50}} (100 - S_0) \\ &= 100(1 - e^{-0,02t}) + S_0 e^{-0,02t}. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$S(t) = S_0 e^{-0,02t} + 100(1 - e^{-0,02t}). \quad (3.13)$$

Portanto, a concentração $c(t)$ de sal no reservatório é dada por

$$c(t) = \frac{S(t)}{200} = \frac{S_0}{200} e^{-0,02t} + \frac{1}{2}(1 - e^{-0,02t}). \quad (3.14)$$

Observação 3.2. O primeiro termo do segundo membro de (3.13) representa a porção da quantidade original de sal que permanece no reservatório no instante t . Este termo torna-se cada vez menor com o aumento do tempo, à medida que a solução original é escoada do reservatório. O segundo termo do segundo membro de (3.13) representa a quantidade de sal no reservatório no instante t devido à ação do processo de escoamento. A quantidade de sal no reservatório deve finalmente tender ao valor limite de 100 kg, e isto é facilmente verificado fazendo t tender a ∞ em (3.13).

Exemplo 3.4. Modelo de crescimento populacional.

Vamos apresentar mais uma aplicação de equações diferenciais, agora relacionada com o crescimento populacional. Consideraremos o modelo matemático mais simples para tratar sobre o crescimento populacional de algumas espécies, conhecido como o **Modelo de Malthus**. Seja $y = y(t)$ a população da espécie dada no instante t . Este modelo estabelece que a taxa de variação da população em relação ao tempo é proporcional à população presente no instante t , ou seja,

$$\frac{dy}{dt} = ry, \quad (3.15)$$

onde r é a taxa de crescimento ou declínio, positiva ou negativa, respectivamente. Suponha que $r > 0$, assim a população cresce exponencialmente como mostra figura (3.1). Resolvendo a equação (3.15), sujeita a condição inicial

$$y(0) = y_0, \quad (3.16)$$

temos como solução

$$y = y_0 e^{rt}. \quad (3.17)$$

Sob condições ideais a equação (3.15) funciona para muitas populações, porém o modelo pode não funcionar bem a longo prazo. O argumento principal para isto vem das limitações do ambiente, por exemplo, espaço, o suprimento de comida, que podem inibir o crescimento exponencial.

Um outro modelo proposto para contornar este problema do modelo exponencial, é o **Modelo Logístico ou Modelo de Verhulst**. A equação diferencial para este modelo leva em conta o fato de que a taxa de crescimento depende da população. Substituindo a constante r da equação (3.15) por uma função $h(t)$, obtemos

$$\frac{dy}{dt} = h(y)y. \quad (3.18)$$

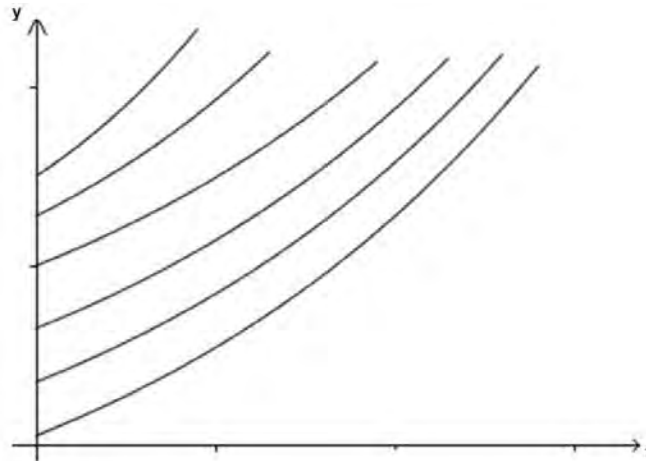


Figura 3.1: Gráfico das soluções do Modelo de Malthus

Vamos tomar $h(y) \approx r > 0$ quando y for pequeno, $h(y)$ decrescente quando y crescer e $h(y) < 0$ quando y for suficientemente grande. Assim, a função mais simples que tem essa propriedade é $h(y) = r - ay$, onde a é uma constante positiva. De (3.18), temos

$$\frac{dy}{dt} = (r - ay)y. \quad (3.19)$$

Muitas vezes é conveniente escrever a equação logística desta forma

$$\frac{dy}{dt} = r \left(1 - \frac{y}{K} \right) y. \quad (3.20)$$

onde $k = r/a$. A constante r é chamada de taxa de crescimento intrínseco, isto é, a taxa de crescimento na ausência de qualquer limitante.

As soluções constantes são $y = 0$ e $y = K$. Essas soluções são chamadas de **soluções de equilíbrio** da equação (3.20) porque não há variação no valor de y quando t cresce. As soluções não constantes podem ser obtidas pela separação das variáveis, seguido de integração com o uso da técnica das frações parciais. Vejamos

$$\frac{dy}{dt} = r \left(1 - \frac{y}{K} \right) y.$$

$$\int \frac{dy}{\left(1 - \frac{y}{K} \right) y} = \int r dt. \quad (3.21)$$

Para calcular $\int \frac{dy}{\left(1 - \frac{y}{K} \right) y}$ usaremos a integração com a técnica de frações parciais.

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{y}{K}\right)y} = \frac{A}{\left(1 - \frac{y}{K}\right)} + \frac{B}{y}$$

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{y}{K}\right)y} = \frac{Ay + B\left(1 - \frac{y}{K}\right)}{\left(1 - \frac{y}{K}\right)y}$$

$$1 = Ay + B\left(1 - \frac{y}{K}\right), \forall y.$$

Suponha $y = 0$, então

$$B = 1$$

Se $y = K$, então

$$AK = 1$$

$$A = \frac{1}{K}.$$

Assim,

$$\int \frac{dy}{\left(1 - \frac{y}{K}\right)y} = \int \frac{1}{K\left(1 - \frac{y}{K}\right)} dy + \int \frac{1}{y} dy$$

$$= -\ln \left| 1 - \frac{y}{K} \right| + \ln |y|$$

Por (3.21) temos

$$-\ln \left| 1 - \frac{y}{K} \right| + \ln |y| = rt + c,$$

então, se $K - y > 0$

$$\ln \left(\frac{y}{1 - \frac{y}{K}} \right) = rt + c.$$

Aplicando exponencial temos

$$\frac{y}{1 - \frac{y}{K}} = C.e^{rt} \tag{3.22}$$

Usando a condição inicial $y(0) = y_0$, temos

$$\frac{y(0)}{1 - \frac{y(0)}{K}} = C.e^{r \cdot 0} \Rightarrow \frac{y_0}{\frac{K}{K} - \frac{y_0}{K}} = C \Rightarrow C = \frac{y_0}{K - y_0}$$

Assim de (3.22) temos

$$y = C.e^{rt} \left(1 - \frac{y}{K} \right) \Rightarrow y + C.e^{rt} \frac{y}{K} = C.e^{rt} \Rightarrow y \left(1 + C \frac{e^{rt}}{K} \right) = C.e^{rt}$$

$$\Rightarrow y = \frac{C.e^{rt}}{\frac{K}{K} + \frac{C.e^{rt}}{K}} = \frac{KC}{e^{-rt}(K + C.e^{rt})} = \frac{KC}{e^{-rt}K + C}.$$

Substituindo $C = \frac{y_0}{1 - \frac{y_0}{K}}$, na equação acima obtemos

$$\begin{aligned} y &= \frac{K \frac{y_0}{1 - \frac{y_0}{K}}}{e^{-rt}K + \frac{y_0K}{K - y_0}} = \frac{K \frac{y_0}{1 - \frac{y_0}{K}}}{\frac{e^{-rt}K(K - y_0) + y_0K}{K - y_0}} \\ &= K \frac{Ky_0}{K - y_0} \cdot \frac{K - y_0}{e^{-rt}K(K - y_0) + y_0K} = \frac{y_0K}{e^{-rt}(K - y_0) + y_0}. \end{aligned}$$

Analogamente se $K < y_0$.

Isto implica que $\lim_{t \rightarrow \infty} y = K$. Note que $y(t) = K$ e $y(t) = 0$ são soluções de equilíbrio da equação logística, isto é, satisfazem $y'(t) = 0, \forall t \geq 0$. Veja a figura (3.2).

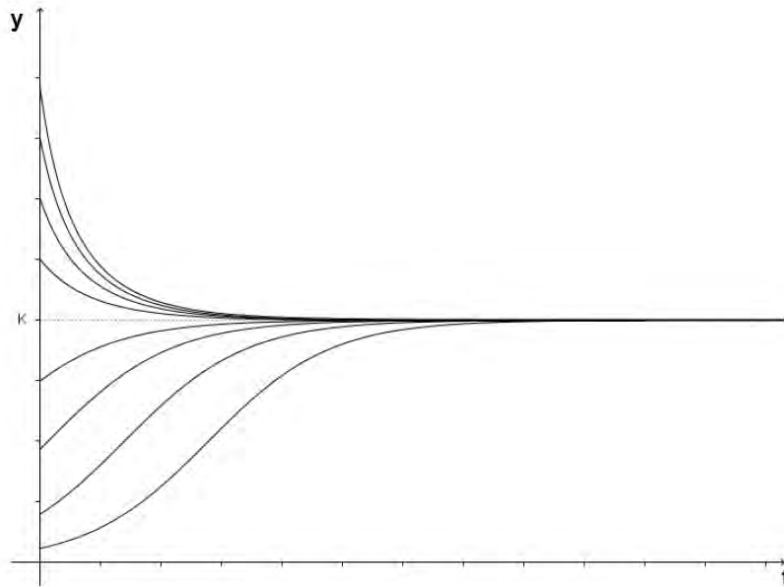


Figura 3.2: Gráfico das soluções do Modelo de Verhulst

Dessa forma, para cada $y_0 > 0$, a solução tende à solução de equilíbrio $y(t) = K$ assintoticamente quando $t \rightarrow \infty$. Assim, denotamos $y(t) = K$ como uma solução assintoticamente estável da equação (3.20). Em outras palavras, após um longo tempo a população sempre tenderá para a capacidade K do ambiente.

Por outro lado, a situação para a solução de equilíbrio $y(t) = 0$ é diferente, pois mesmo soluções que começam bem próximas de zero crescem quando t cresce e, como vimos na figura (3.2), tendem a K quando $t \rightarrow \infty$. Denotamos $y(t) = 0$ como uma solução de equilíbrio instável. Assim para garantirmos que a solução permaneça nula é necessário que o seu valor inicial seja exatamente igual a zero.

No próximo capítulo tratamos do caso das equações diferenciais de segunda ordem e algumas aplicações.

4 Equações diferenciais de segunda ordem

Uma EDO de segunda ordem em geral tem a forma

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y, y') \text{ ou } y'' = f(x, y, y').$$

Para resolver uma EDO de segunda ordem, em geral são necessárias duas integrações. Assim, ao resolver esta equação aparecem duas constantes de integração. Neste caso, um PVI para uma EDO de segunda ordem exige duas condições iniciais. Sejam

$$y(x_0) = y_0 \text{ e } y'(x_0) = y'_0.$$

Um PVI para uma equação de segunda ordem é constituído por:

$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y, y') \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \end{cases}$$

Porém, o problema de determinar uma função $y(x)$ tal que $y'' = f(x, y, y')$ é extremamente complexo. Vamos tratar na seção seguinte do caso linear.

4.1 Equações lineares de segunda ordem

O caso mais simples para a resolução de equação de segunda ordem linear é quando a equação assume a forma:

$$P(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = G(x)$$

onde P, Q, R, G são funções dadas, com $P(x) \neq 0$. Dividindo a equação acima por $P(x)$, obtemos

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x). \tag{4.1}$$

O PVI associado é dado por

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0. \end{cases} \quad (4.2)$$

O próximo teorema é importante, pois se por um lado ele indica quando é válido tentar determinar a solução única de (4.2), por outro lado, ele nos ajudará a determinar todas as soluções de (4.1).

Teorema 4.1 (Teorema da Existência e Unicidade). *Se as funções $p(t)$, $q(t)$ e $g(t)$ forem contínuas em algum intervalo $(a, b) \subset \mathbb{R}$, então o PVI (4.2) tem uma única solução $y = y(x)$, definida em (a, b) .*

A prova deste resultado pode ser encontrada em [5].

4.2 Equações homogêneas

Se o termo $g(x)$ na equação $y'' + p(x)y' + q(x)y = g(x)$ é identicamente nulo, a equação se resume ao caso mais simples de (4.1), onde a equação linear é homogênea ($g(x) = 0$) e também assumindo que p e q são coeficientes constantes, temos

$$a \frac{d^2 y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt} + cy = 0. \quad (4.3)$$

$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, que é chamada de equação linear homogênea de 2^a ordem. Para esta equação vale o seguinte teorema, que é fundamental no estudo de equações lineares, não só de 2^a ordem, mas também de ordem n .

Teorema 4.2 (Princípio da Superposição). *Se y_1 e y_2 são soluções da equação homogênea $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, então a combinação linear $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ é também solução dessa equação, quaisquer que sejam c_1, c_2 números reais.*

Demonstração. Considerando $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ e calculando suas derivadas, temos $y' = c_1 y_1' + c_2 y_2'$ e $y'' = c_1 y_1'' + c_2 y_2''$. Assim,

$$\begin{aligned} y'' + p(x)y' + q(x)y &= \\ &= (c_1 y_1'' + c_2 y_2'') + p(x)(c_1 y_1' + c_2 y_2') + q(x)(c_1 y_1 + c_2 y_2) \\ &= c_1 y_1'' + p(x)c_1 y_1' + q(x)c_1 y_1 + c_2 y_2'' + p(x)c_2 y_2' + q(x)c_2 y_2 \\ &= c_1 \underbrace{(y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1)}_{= 0 \text{ pois } y_1 \text{ é solução}} + c_2 \underbrace{(y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2)}_{= 0 \text{ pois } y_2 \text{ é solução}} = 0 \end{aligned}$$

ou seja, $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ é solução da equação homogênea. \square

Observação 4.1. Seja $\mathcal{C}_2((a, b), \mathbb{R}) = \{f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}, \text{ duas vezes diferenciáveis}\}$ com as operações $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ e $(\alpha f)(x) = \alpha f(x), \forall f, g \in \mathcal{C}_2((a, b), \mathbb{R}), \forall \alpha \in \mathbb{R}$. É imediato que $\mathcal{C}_2((a, b), \mathbb{R})$ é um espaço vetorial sobre \mathbb{R} . O conjunto S das soluções de $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ está contido em $\mathcal{C}_2((a, b), \mathbb{R})$ e forma um subespaço vetorial de \mathcal{C}_2 de dimensão 2.

Para provar que S é um subespaço de \mathcal{C}_2 , observa-se inicialmente que a função identicamente nula, isto é, a função $y(x) = 0, \forall x \in (a, b)$, pertence a S , pois $y^{(n)}(x) = 0, \forall x \in (a, b), n = 1, 2$.

Considerando $y, z \in S$ então

$$\begin{aligned} (y+z)''(x) + p(x)(y+z)'(x) + q(x)(y+z)(x) = \\ (y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x)) + (z''(x) + p(x)z'(x) + q(x)z(x)) = 0 \end{aligned}$$

para todo $x \in (a, b)$ e assim $y+z \in S$.

Se $y \in S$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então

$$\begin{aligned} (\lambda y)''(x) + p(x)(\lambda y)'(x) + q(x)(\lambda y)(x) = \\ \lambda [y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x)] = \lambda \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

para todo $x \in (a, b)$ e, portanto, λy também é solução.

Dessa forma está provado que S é um subespaço de $\mathcal{C}_2((a, b), \mathbb{R})$. Iremos provar que $\dim S = 2$ e para isto precisamos de alguns resultados.

Definição 4.1. *Duas soluções y_1 e y_2 da equação $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ formam um conjunto fundamental (base) de soluções se toda solução $y(x)$ pode ser escrita de forma única como combinação linear de y_1 e y_2 , ou seja, se existem constantes c_1 e c_2 tais que $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$. Em outras palavras, y_1 e y_2 formam uma base do espaço de soluções S .*

Considerando o PVI

$$\begin{cases} y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \end{cases}$$

onde p e q são funções contínuas em $(a, b) \subset \mathbb{R}$, então pelo Teorema 4.1 vimos anteriormente que existe uma única solução $y(x)$ do PVI acima tal que $y(x_0) = y_0$ e $y'(x_0) = y'_0$.

Se y_1 e y_2 são soluções desta equação, então será analisado quais as condições sobre c_1 e c_2 para que $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$. Supondo que seja solução, temos

$$\begin{cases} c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) = y(x_0) \\ c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) = y'(x_0) \end{cases}$$

ou na forma matricial

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}}_X = \underbrace{\begin{bmatrix} y(x_0) \\ y'(x_0) \end{bmatrix}}_B$$

Esse sistema algébrico tem solução única se, e somente se, $\det A \neq 0$, ou seja $y_1(x_0)y_2'(x_0) - y_1'(x_0)y_2(x_0) \neq 0$. Isso acontece pois $\{y_1, y_2\}$ é *l.i.* Portanto existem c_1 e c_2 tais que $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$.

Vejam agora como encontrar uma solução de (4.3). Consideramos que $y(t) = e^{\lambda t}$ seja solução, sendo solução ela deve satisfazer a equação diferencial, isto é,

$$\begin{aligned} a(e^{\lambda t})'' + b(e^{\lambda t})' + c(e^{\lambda t}) &= 0 \\ (a\lambda^2 + b\lambda + c)(e^{\lambda t}) &= 0. \end{aligned}$$

Vemos então que $y(t) = e^{\lambda t}$ é uma solução de (4.3) se, e somente se,

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0. \quad (4.4)$$

A equação (4.4) é chamada de equação característica de (4.3). Ela tem no máximo duas raízes λ_1, λ_2 , dadas por

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ e} \\ \lambda_2 &= \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \end{aligned}$$

dependendo do discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$.

Teorema 4.3. *Se $y(t) = u(t) + iv(t)$ é uma solução de valores complexos de (4.3), então $u(t)$ e $v(t)$ são soluções reais de (4.3).*

Demonstração. Note que

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = 0$$

ou seja,

$$[au''(t) + bu'(t) + cu(t)] + i[av''(t) + bv'(t) + cv(t)] = 0.$$

Um número complexo é zero se, e somente se, sua parte real e sua parte imaginária são nulas. Logo,

$$au''(t) + bu'(t) + cu(t) = 0 \text{ e } av''(t) + bv'(t) + cv(t) = 0.$$

Isto é, u e v são soluções de (4.3).

□

4.2.1 O wronskiano

Dadas duas funções y_1 e y_2 chama-se de wronskiano dessas funções o seguinte determinante:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1 y_2' - y_2 y_1'.$$

O wronskiano em um ponto x é denotado por $W(y_1, y_2)(x)$ ou simplesmente $W(x)$.

Vale o seguinte teorema sobre o wronskiano:

Teorema 4.4. *Suponha que y_1 e y_2 são duas soluções de $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, em um intervalo aberto I em que p e q são contínuas. Então, y_1 e y_2 são linearmente independentes, se e somente se, $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$ em algum ponto de $x \in I$.*

Demonstração. (\Leftarrow) Seja $x_0 \in I$ tal que $W(y_1, y_2)(x_0) \neq 0$. Suponha que y_1 e y_2 sejam linearmente dependentes. Isto é, existe λ tal que $y_1 = \lambda y_2$. Tome α_1 e α_2 tais que $\lambda = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ e $\alpha_1 \neq 0$. Temos:

$$y_1 = \lambda y_2 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} y_2 \quad \text{e} \quad \alpha_1 y_1(x_0) + \alpha_2 y_2(x_0) = 0.$$

Portanto

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1(x_0) + \alpha_2 y_2(x_0) & = & 0 \\ \alpha_1 y_1'(x_0) + \alpha_2 y_2'(x_0) & = & 0. \end{cases}$$

Note que o determinante da matriz associada ao sistema linear acima é exatamente igual ao wronskiano $W(y_1, y_2)(x_0) \neq 0$ no ponto x_0 . Isto implicaria que a única solução do sistema seria a trivial, ou seja, $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, o que é uma contradição. Logo, y_1 e y_2 são linearmente independentes.

(\Rightarrow) Suponha que y_1 e y_2 são *l.i.* e mostremos que $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. De fato, suponha por contradição, que exista $x_0 \in I$ tal que $W(y_1, y_2)(x_0) = 0$. Isto nos diz que o sistema:

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1(x_0) + \alpha_2 y_2(x_0) & = & 0 \\ \alpha_1 y_1'(x_0) + \alpha_2 y_2'(x_0) & = & 0 \end{cases}$$

tem uma solução não-trivial (α_1, α_2) . Seja

$$\phi(x) = \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x).$$

Observe que, por construção, ϕ é solução do PVI:

$$\begin{cases} \phi'' + p(x)\phi + q(x) & = & 0 \\ \phi(x_0) = \alpha_1 y_1(x_0) + \alpha_2 y_2(x_0) & = & 0 \\ \phi'(x_0) = \alpha_1 y_1'(x_0) + \alpha_2 y_2'(x_0) & = & 0 \end{cases}$$

Por outro lado, $\Psi \equiv 0$ também é solução do PVI acima. Pelo Teorema de existência e unicidade, $\Psi = \phi$ em I . Isto implica:

$$0 = \Psi(x) = \phi(x) = \alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x), \quad \text{com } \alpha_1, \alpha_2 \text{ não todos nulos,}$$

o que implica, y_1 e y_2 linearmente dependentes. Logo, se y_1 e y_2 são linearmente independentes, então $W(y_1, y_2)(x) \neq 0$ em todo $x \in I$. \square

Com isso, concluímos o seguinte resultado:

Teorema 4.5. *Sejam p, q funções contínuas em um intervalo $(a, b) \subset \mathbb{R}$. Se $y_1 y_2' - y_1' y_2 \neq 0, \forall x \in (a, b)$, então y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de soluções desta equação. Assim, qualquer outra solução $y = y(x)$ pode ser expressa como combinação linear de y_1 e y_2 .*

4.3 Um modelo para a dinâmica do Diabetes

O modelo que apresentamos pode ser encontrado na referência [3].

Diabetes Mellitus é uma doença crônica, que ocorre quando o pâncreas não produz insulina suficiente, ou quando o corpo não pode utilizar eficazmente a insulina que produz. Isto leva a um aumento da concentração de glicose no sangue (hiperglicemia). Assim, o Diabetes afeta o modo pelo qual o nosso corpo utiliza a glicose. Durante a digestão normal o corpo converte o açúcar, o amido e outros alimentos em glicose. Esta glicose por sua vez é conduzida pelo sangue até as células, sendo introduzida no seu interior através da insulina, e então, a glicose é convertida em energia para uso imediato ou armazenada para futuro uso. Com o Diabetes esse processo é interrompido.

A glicose é a principal fonte de energia do organismo, mas quando em excesso, pode trazer várias complicações à saúde. Quando não tratada adequadamente, causa doenças tais como infarto do coração, derrame cerebral, insuficiência renal, problemas visuais e lesões de difícil cicatrização, dentre outras complicações.

Embora ainda não haja uma cura definitiva para o diabetes, hoje há vários tratamentos disponíveis que, quando seguidos de forma regular, proporcionam saúde e qualidade de vida para o paciente portador.

De acordo com a Organização Mundial da Saúde, que em 16 de maio de 2012, comunicou o crescente problema das doenças crônicas, em especial o caso do diabetes. Segundo o comunicado, um em 10 adultos tem diabetes. O comunicado destaca que a prevalência média de diabetes no mundo está em 10% da população, embora muitas regiões, como as ilhas do Pacífico, esse valor chegue a 33%.

O diabetes está na lista das cinco doenças de maior índice de morte no mundo, e está chegando cada vez mais perto do topo da lista. Os Centros de Controles de Doenças classificaram o aumento da doença como epidêmico, onde as causas se resumem em dois mecanismos fundamentais: o primeiro se caracteriza pela falta de insulina (nestes casos, o pâncreas não produz insulina ou a produz em quantidades muito baixas). Com a falta de insulina, a glicose não entra nas células, permanecendo na circulação sanguínea em grandes quantidades. Para esta situação, os médicos chamaram esse tipo de diabetes de diabetes Mellitus tipo 1 (DM tipo 1). O diabetes Mellitus do

tipo 1 é também caracterizada pela produção de anticorpos à insulina. Já o segundo tipo, chamado de diabetes Mellitus tipo 2 (DM tipo 2), é caracterizado pelo mau funcionamento ou diminuição dos receptores das células beta. Estas são responsáveis pela produção de insulina cuja atuação nas células se dá pelo transporte de glicose para dentro desta. Nestes casos, a produção de insulina pode estar ou não normal. Mas como os receptores não estão funcionando direito ou estão em pequenas quantidades, a insulina não consegue promover a entrada de glicose necessária para dentro das células, aumentando também as concentrações da glicose na corrente sanguínea.

Ambos os tipos 1 e 2 podem ser herdáveis. A DM tipo 1 é a mais característica no quesito de herança genética, sendo a disfunção do pâncreas na produção de insulina a sua causa superior. A DM tipo 2, entretanto, é desencadeada normalmente por hábitos não saudáveis, sendo a chance de adquiri-la maior com o avanço da idade (tendo como causa principal a auto-imunidade das células à insulina, tornando o tratamento difícil), não sendo característica da herdabilidade.

O pâncreas é o órgão responsável pela produção da insulina e, este hormônio, é responsável pela regularização do nível de glicose no sangue. Para que as células das diversas partes do corpo humano possam realizar o processo de respiração aeróbica (utilizar glicose como fonte de energia), é necessário que a glicose esteja presente na célula. Portanto, as células possuem receptores de insulina (tirosina quinase) que, quando acionados, "abrem" a membrana celular para a entrada da glicose presente na circulação sanguínea.

Visando manter o nível de glicose constante, o pâncreas também produz outro hormônio antagônico à insulina, denominado glucagon. Ou seja, quando o nível de glicose cai, mais glucagon é secretado visando restabelecer o nível de glicose na circulação. O glucagon é o hormônio predominante em situações de jejum ou de estresse, enquanto a insulina tem seus níveis aumentados em situações de alimentação recente.

Grande parte do carboidrato dos alimentos é convertido em poucas horas no monossacarídeo glicose, o principal carboidrato encontrado no sangue. Alguns carboidratos não são convertidos. Alguns exemplos incluem a frutose que é utilizada como um combustível celular, mas não é convertida em glicose e não participa no mecanismo regulatório metabólico da insulina - glicose. Adicionalmente, o carboidrato celulose não é convertido em glicose, já que os humanos e muitos animais não têm vias digestivas capazes de digerir a celulose.

A insulina é liberada no sangue pelas células beta (células- β) do pâncreas em resposta aos níveis crescentes de glicose no sangue (por exemplo, após uma refeição). A insulina habilita a maioria das células do corpo a absorverem a glicose do sangue e a utilizarem como combustível, para a conversão em outras moléculas necessárias, ou para armazenamento. A insulina é também o sinal de controle principal para a conversão da glicose em glicogênio para armazenamento interno nas células do fígado e musculares. Níveis reduzidos de glicose resultam em níveis reduzidos de secreção de

insulina a partir das células β e na conversão reversa de glicogênio a glicose quando os níveis de glicose caem.

Níveis aumentados de insulina aumentam muitos processos anabólicos como o crescimento e duplicação celular, síntese proteica e armazenamento de gordura.

Se a quantidade de insulina disponível é insuficiente, se as células respondem mal aos efeitos da insulina, ou se a própria insulina está defeituosa, a glicose não será administrada corretamente pelas células do corpo ou armazenada corretamente no fígado e músculos. O efeito dominó são níveis altos persistentes de glicose no sangue, síntese proteica pobre e outros distúrbios metabólicos, como a acidose (evolução desfavorável do diabetes).

O diabetes Mellitus é caracterizada pela hiperglicemia recorrente ou persistente, e é diagnosticada através do GTT (Teste de Tolerância de Glicose). Ele é feito da seguinte maneira: o paciente, em jejum, recebe uma grande dose de glicose; nas próximas três a cinco horas, o paciente é submetido à várias medições da glicose na corrente sanguínea. Não existe um critério universalmente aceito para interpretar os resultados desse teste. Três médicos podem chegar a três diagnósticos diferentes analisando um mesmo GTT.

Segundo Braun em [3] em meados de 1960, os Drs. Rosevear e Molnar, da Clínica Mayo, e Ackerman e Gatewood, da Universidade de Minnesota, descobriram um critério de concordância para interpretar os resultados deste teste.

A partir de agora, apresentaremos com mais detalhes este critério que é dado por um modelo matemático que estabelece a interação entre a insulina e a glicose e é baseado nas seguintes suposições biológicas:

- (i) A glicose é fonte de energia para todos os órgãos e sistemas. Para cada indivíduo há uma concentração ótima de glicose no sangue e qualquer desvio excessivo desta concentração ótima conduz à condições patológicas severas.
- (ii) O nível de glicose no sangue tende a ser auto-regulatório. Este nível é influenciado e controlado por uma grande variedade de hormônios e outros metabólitos. O principal deles é a insulina, secretada pelas células β do pâncreas.

O modelo básico é descrito analiticamente pelo seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\begin{aligned} \frac{dG}{dt} &= F_1(G, H) + J(t) \\ \frac{dH}{dt} &= F_2(G, H), \end{aligned} \tag{4.5}$$

onde G a concentração de glicose no sangue, H a concentração hormonal líquida, com predominância da insulina e $J(t)$ a taxa externa em que a concentração de glicose no sangue é aumentada.

O diagrama de fluxo (figura 4.1) descreve todos esses fatores:

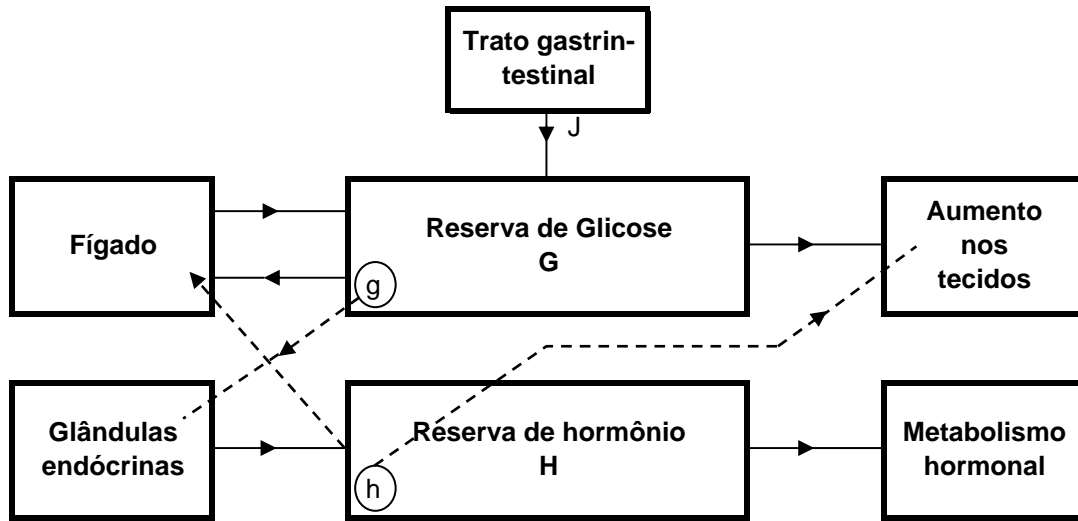


Figura 4.1: Diagrama de fluxo do sistema regulatório da glicose sanguínea

Suponhamos que G e H assumam valores ótimos, G_0 e H_0 , quando o paciente está em jejum, isto é, $F_1(G_0, H_0) = 0$ e $F_2(G_0, H_0) = 0$. O que é realmente importante é descobrir os desvios de G e H de seus valores ótimos. Considera-se neste estudo as novas variáveis $g = G - G_0$, ou seja $G = G_0 + g$ e $h = H - H_0$, ou seja $H = H_0 + h$. O sistema inicial, nas novas variáveis, é dado por:

$$\begin{aligned}\frac{dg}{dt} &= F_1(G_0 + g, H_0 + h) + J(t) \\ \frac{dh}{dt} &= F_2(G_0 + g, H_0 + h).\end{aligned}$$

Como o sistema acima é não linear, vamos utilizar o sistema linearizado em torno do ponto (G_0, H_0) . Para isto, vamos usar a fórmula de Taylor, descrita no capítulo (2), que neste problema é dada por

$$F_1(G_0 + g, H_0 + h) = F_1(G_0, H_0) + \frac{\partial F_1(G_0, H_0)}{\partial G}g + \frac{\partial F_1(G_0, H_0)}{\partial H}h + e_1$$

e

$$F_2(G_0 + g, H_0 + h) = F_2(G_0, H_0) + \frac{\partial F_2(G_0, H_0)}{\partial G}g + \frac{\partial F_2(G_0, H_0)}{\partial H}h + e_2$$

onde e_1 e e_2 são muito pequenos comparados a g e h . Admitindo que G e H desviam-se muito pouco de G_0 e H_0 , pode-se desprezar os termos e_1 e e_2 , e tem-se uma boa aproximação do modelo original

$$\frac{dg}{dt} = \frac{\partial F_1(G_0, H_0)}{\partial G}g + \frac{\partial F_1(G_0, H_0)}{\partial H}h + J(t) \quad (4.6)$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial F_2(G_0, H_0)}{\partial G}g + \frac{\partial F_2(G_0, H_0)}{\partial H}h. \quad (4.7)$$

A priori, não existem meios para determinar os números:

$$\frac{\partial F_1(G_0, H_0)}{\partial G}, \frac{\partial F_1(G_0, H_0)}{\partial H}, \frac{\partial F_2(G_0, H_0)}{\partial G} \text{ e } \frac{\partial F_2(G_0, H_0)}{\partial H},$$

mas, podemos determinar seus sinais. Utilizando a figura 4.1, vemos que dg/dt é negativo, para $g > 0$ e $h = 0$, pois a concentração de glicose sanguínea decrescerá através do aumento da glicose nos tecidos e o depósito do excesso de glicose no fígado sob a forma de glicogênio. Conseqüentemente, $\partial F_1(G_0, H_0)/\partial G$ deve ser negativo. Analogamente, $\partial F_1(G_0, H_0)/\partial H$ é negativo pois um valor positivo de h tende a diminuir os níveis de glicose sanguínea por facilitar o aumento da glicose nos tecidos e pelo aumento da taxa pela qual a glicose é transformada em glicogênio. O número $\partial F_2(G_0, H_0)/\partial G$ deve ser positivo pois um valor positivo de g faz com que as glândulas endócrinas secretem aqueles hormônios que tendem a aumentar H . Finalmente $\partial F_2(G_0, H_0)/\partial H$ deve ser negativo pois a concentração de hormônios no sangue diminui através do metabolismo hormonal.

Portanto, é possível escrever as equações (4.6) e (4.7) sob a forma:

$$\frac{dg}{dt} = -m_1g - m_2h + J(t) \quad (4.8)$$

$$\frac{dh}{dt} = -m_3h + m_4g, \quad (4.9)$$

onde m_1, m_2, m_3 e m_4 são constante positivas. As equações (4.8) e (4.9) são duas equações de primeira ordem em g e h . Entretanto, como pode-se medir apenas a concentração de glicose sanguínea, é interessante remover a variável h . Isto pode ser feito da seguinte maneira, diferenciando (4.8) em relação t obtém-se

$$\frac{d^2g}{dt^2} = -m_1\frac{dg}{dt} - m_2\frac{dh}{dt} + \frac{dJ}{dt}.$$

De (4.9) substituindo dh/dt obtém-se

$$\frac{d^2g}{dt^2} = -m_1\frac{dg}{dt} + m_2m_3h - m_2m_4g + \frac{dJ}{dt} \quad (4.10)$$

Observa-se de (4.8) que $m_2h = (-dg/dt) - m_1g + J(t)$. Assim, $g(t)$ satisfaz a equação linear de segunda ordem

$$\frac{d^2g}{dt^2} + (m_1 + m_3)\frac{dg}{dt} + (m_1m_3 + m_2m_4)g = m_3J + \frac{dJ}{dt}.$$

Reescrevendo esta equação sob a forma

$$\frac{dg^2}{dt^2} + 2\alpha\frac{dg}{dt} + \omega^2g = S(t) \quad (4.11)$$

onde $\alpha = (m_1 + m_3)/2$, $\omega^2 = m_1 m_3 + m_2 m_4$, e $S(t) = m_3 J + dJ/dt$.

Note que o segundo membro de (4.11) é identicamente nulo exceto no intervalo de tempo muito pequeno que a dose de glicose está sendo ingerida.

Seja $t = 0$ o instante no qual a dose de glicose tenha sido completamente ingerida. Então, para $t \geq 0$, $g(t)$ satisfaz a equação linear homogênea de segunda ordem

$$\frac{dg^2}{dt^2} + 2\alpha \frac{dg}{dt} + \omega^2 g = 0. \quad (4.12)$$

Sendo a equação característica dada por $\lambda^2 + 2\alpha\lambda + \omega^2 = 0$, em que

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{-2\alpha \pm \sqrt{4\alpha^2 - 4\omega^2}}{2} \\ \lambda &= -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}. \end{aligned}$$

Assim, as soluções $g(t)$ de (4.12) podem ser de três tipos:

1. $\alpha^2 - \omega^2 < 0$
2. $\alpha^2 - \omega^2 = 0$
3. $\alpha^2 - \omega^2 > 0$

No primeiro caso, para obter a solução geral que é da forma $g(t) = Ae^{-\alpha t} \cos(\omega t - \delta)$. Denotando $\omega^2 = \omega_0^2 - \alpha^2$ e procedendo da seguinte forma:

$$\begin{aligned} g(t) &= e^{(-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2})t} \\ &= e^{-\alpha t} (e^{\pm \sqrt{-\omega^2}t}), \text{ onde} \\ g_1 = e^{-\alpha t} \cdot e^{i\omega t} &= e^{-\alpha t} (\cos \omega t + i \operatorname{sen} \omega t) \\ g_2 = e^{-\alpha t} \cdot e^{-i\omega t} &= e^{-\alpha t} (\cos(-\omega t) + i \operatorname{sen}(-\omega t)) \\ &= e^{-\alpha t} (\cos \omega t - i \operatorname{sen} \omega t) \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} g_1 + g_2 &= e^{-\alpha t} (\cos \omega t + i \operatorname{sen} \omega t) + e^{-\alpha t} (\cos \omega t - i \operatorname{sen} \omega t) \\ g_1 + g_2 &= e^{-\alpha t} (2 \cos \omega t), \text{ que é uma solução da (4.12).} \end{aligned}$$

Analogamente, verificamos que $g_1 - g_2 = 2ie^{-\alpha t} \operatorname{sen} \omega t$, também é solução. Segue que a solução geral é dada por

$$g(t) = e^{-\alpha t} [c_1 \cos \omega t + c_2 \operatorname{sen} \omega t].$$

Substituindo $c_1 = A \cos \delta$ e $c_2 = A \operatorname{sen} \delta$, temos

$$g(t) = Ae^{-\alpha t} [\cos \delta \cos \omega t + \operatorname{sen} \delta \operatorname{sen} \omega t].$$

Assim,

$$g(t) = Ae^{-\alpha t} \cos(\omega t - \delta). \quad (4.13)$$

Conseqüentemente,

$$G(t) = G_0 + Ae^{-\alpha t} \cos(\omega t - \delta). \quad (4.14)$$

Em (4.14) temos cinco incógnitas G_0, A, α, ω e δ , e a maneira de determiná-las é a seguinte: a concentração de glicose sanguínea do paciente, antes de ser ingerida a dose de glicose é G_0 e podemos determinar G_0 medindo a concentração de glicose sanguínea do paciente imediatamente após sua chegada ao hospital. A seguir toma-se quatro medições adicionais G_1, G_2, G_3 , e G_4 da concentração de glicose sanguínea do paciente nos instantes t_1, t_2, t_3 , e t_4 , e então determinamos A, α, ω e δ por meio dessas quatro equações

$$G_j = G_0 + Ae^{-\alpha t_j} \cos(\omega t_j - \delta); \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Um segundo melhor método de determinar estas constantes G_0, A, α, ω e δ é considerar n medições G_1, G_2, \dots, G_n da concentração de glicose sanguínea do paciente nos instantes t_1, t_2, \dots, t_n . Tipicamente n é 6 ou 7. Encontram-se então valores ótimos para G_0, A, α, ω e δ tais que o menor erro ao quadrado

$$E = \sum_{j=1}^n [G_j - G_0 + Ae^{-\alpha t_j} \cos(\omega t_j - \delta)]^2$$

seja reduzido ao mínimo. O problema de minimizar E pode ser resolvido em um computador digital, e Ackerman e outros forneceram um programa Fortran completo para determinar valores ótimos para G_0, A, α, ω e δ . Este método é preferível ao primeiro, pois (4.14) é satisfeita exatamente em quatro pontos t_1, t_2, t_3 , e t_4 , mas fornece um insuficiente ajuste para os dados em outros instantes. O segundo método usualmente oferece um melhor ajuste para os dados no intervalo inteiro de tempo, pois envolve mais medições.

Em várias experiências, Ackerman e outros observaram que um pequeno erro na medição de G produziria um erro muito grande no valor de α . Portanto qualquer critério para o diagnóstico do diabetes que envolva o parâmetro α não merece confiança. Entretanto, o parâmetro ω , a frequência natural do sistema, era relativamente insensível aos erros experimentais nas medições G . Portanto, podemos olhar um valor de ω como o narrador básico da resposta a um teste de tolerância de glicose. Para fins expositivos, é mais conveniente usar o período natural correspondente $T_0 = 2\pi/\omega$. O fato importante é que os dados de uma variedade de fontes indicam que um valor de menos de quatro horas para T_0 indica normalidade, enquanto que apreciavelmente mais que quatro horas implica em diabetes moderado.

Observação 4.2. 1. O período usual entre alimentações em nossa cultura é de cerca de quatro horas. Isso sugere a possibilidade interessante de que fatores sociológicos podem também ter um papel no sistema regulador da glicose sanguínea.

2. Desejamos enfatizar que o modelo descrito acima somente pode ser usado para diagnosticar diabetes moderado ou pré-diabetes, pois admitimos durante todo o tempo que o desvio g de G de seu valor ótimo G_0 é pequeno. Desvios muito grandes de G de G_0 indicam geralmente diabetes "severa" ou diabetes "insipidus", que é um distúrbio do lobo posterior da glândula hipófise.

Um sério defeito deste modelo simplificado é que algumas vezes fornece um pequeno ajuste para os dados num período de tempo de três ou cinco horas depois da ingestão da dose de glicose. Isso indica, certamente, que variáveis como a adrenalina e o glucagon desempenham um papel importante nesse período de tempo. Portanto essas variáveis podem ser incluídas como variáveis separadas em nosso modelo, de preferência a serem agrupadas com a insulina. De fato, a evidência indica que os níveis de adrenalina podem elevar-se dramaticamente durante a fase de recuperação da resposta do GTT, quando os níveis de glicose descenderem abaixo dos níveis de jejum. Isso pode também ser visto diretamente da equação (4.12). Se $\alpha^2 - \omega_0^2 > 0$, então $g(t)$ pode ter a forma descrita na figura 4.2. Observamos que $g(t)$ cai muito rapidamente de um valor regularmente alto para um negativo. É perfeitamente imaginável, entretanto, que o corpo interpretará isso como uma emergência extrema e desse modo secretará uma grande quantidade de adrenalina.

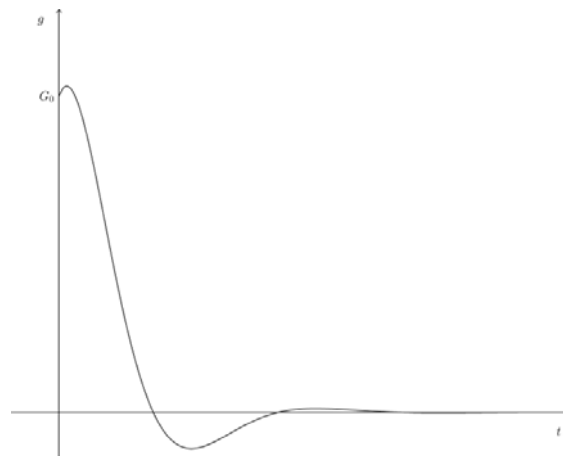


Figura 4.2: Gráfico de $g(t)$ se $\alpha^2 - \omega_0^2 > 0$.

Os pesquisadores médicos tardaram a reconhecer a necessidade de incluir a adrenalina como uma variável separada em qualquer modelo do sistema regulador da glicose sanguínea. Entretanto, ficaram num impasse pelo fato de que não havia método confiável de medir a concentração de adrenalina no sangue. Assim, admitiram, para todos os fins práticos, que o nível de adrenalina permanecia constante durante um GTT. E somente por volta de 1975, pesquisadores do Hospital de Rhode Island inventaram um

método preciso de medida da concentração da adrenalina no sangue. Portanto, outros modelos desenvolvidos que não serão abordados neste trabalho são mais precisos no sistema regulador da glicose sanguínea.

5 Sistemas de equações diferenciais

Neste capítulo introduzimos alguns resultados sobre a teoria de sistemas, especialmente de sistemas lineares de equações diferenciais. Apresentamos a expressão da Matriz Solução Fundamental, descrevemos o caso 2×2 , e por fim apresentamos algumas aplicações.

5.1 Definições básicas

Um sistema de primeira ordem com n equações é dado pela seguinte forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(t, x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{array} \right. \quad (5.1)$$

Uma solução deste sistema são n funções $x_1(t), \dots, x_n(t)$, tais que

$$\frac{dx_j(t)}{dt} = f_j(t, x_1(t), \dots, x_n(t)),$$

com $j = 1, \dots, n$.

Exemplo 5.1.

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ t^2 \end{bmatrix},$$

é uma solução do sistema de equações diferenciais de 1ª ordem

$$\frac{dx_1}{dt} = 1 \text{ e } \frac{dx_2}{dt} = 2x_1$$

pois, $\frac{dx_1(t)}{dt} = 1$ e $\frac{dx_2(t)}{dt} = 2t$.

Definição 5.1. Uma função $f : D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é lipschitziana relativamente a x em $B \subset D$ se existir uma constante $L > 0$ tal que

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq L|x_1 - x_2| \quad \forall t \in \mathbb{R}, (t, x_1), (t, x_2) \in B.$$

A função $f(t, x)$ é localmente lipschitziana relativamente a x quando f for lipschitziana em uma vizinhança de cada $(t_0, x_0) \in D$.

Teorema 5.1. Suponhamos que a função f seja contínua e localmente lipschitziana relativamente a x em D . Então, dado $(t_0, x_0) \in D$ existe uma única solução $x = \phi(t)$ do sistema (5.1) satisfazendo a condição inicial $x(t_0) = x_0$. Além disso, a solução ϕ é uma função contínua de (t, t_0, x_0) .

Uma prova desse resultado pode ser encontrada em [4].

Observação 5.1. Toda equação diferencial linear de ordem n na única variável y pode se converter num sistema de n equações de primeira ordem nas variáveis x_1, x_2, \dots, x_n . De fato,

A equação diferencial

$$a_n(t) \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_0(t)y = 0$$

pode ser convertida no sistema de n equações de primeira ordem:

Suponha

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1(t) = y \\ x_2(t) = \frac{dy}{dt} \\ \vdots \\ x_{n-1}(t) = \frac{d^{n-2}y}{dt^{n-2}} \\ x_n(t) = \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} \end{array} \right. \quad \text{Então,} \quad \left\{ \begin{array}{l} x'_1 = x_2 \\ x'_2 = x_3 \\ \vdots \\ x'_{n-1} = x_n \\ x'_n = -\frac{a_{n-1}(t)x_n + a_{n-2}(t)x_{n-1} + \dots + a_0(t)x_1}{a_n(t)}. \end{array} \right.$$

Definição 5.2. O problema envolvendo as equações (5.1), juntamente com as condições iniciais $x_1(t_0) = x_1^0, x_2(t_0) = x_2^0, \dots, x_n(t_0) = x_n^0$, sobre as funções $x_1(t), \dots, x_n(t)$, é conhecido como Problema do Valor Inicial (PVI).

Um exemplo particular é o modelo da glicose sanguínea, visto no capítulo anterior. Nesse modelo, as taxas de variação de g e h (desvio da glicose sanguínea e das concentrações dos hormônios de seus valores ótimos) são dadas pelas equações:

$$\begin{cases} \frac{dg}{dt} = -m_1g - m_2h + J(t) \\ \frac{dh}{dt} = -m_3h + m_4g, \end{cases}$$

que é um sistema de duas equações de primeira ordem em relação às funções $g(t)$ e $h(t)$.

Exemplo 5.2. As funções $x_1(t) = e^t$ e $x_2(t) = 1 + \frac{e^{2t}}{2}$ é uma solução do problema do

$$\text{valor inicial: } \begin{cases} x_1'(t) = x_1 \\ x_2'(t) = x_2^2 \\ x_1(0) = 1 \\ x_2(0) = \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Observe que $x_1'(t) = e^t = x_1(t)$, $x_2'(t) = e^{2t} = x_2^2(t)$. Logo, $x_1(0) = 1$ e $x_2(0) = \frac{3}{2}$.

Considere agora a EDO homogênea com coeficientes constantes e de ordem n ,

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0 \quad (5.2)$$

com $y = y(t)$, $a_j \in \mathbb{R}$, $j = 0, \dots, n-1$. Onde, $y^{(n)} = \frac{d^n y}{dt^n}$.

Lema 5.1. O conjunto solução S da equação (5.2) é um espaço vetorial.

Demonstração. Basta provar que S é um subespaço de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R}) = \{f : I \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ função}\}$.

De fato,

1. $S \neq \emptyset$, pois $y(t) = 0, \forall t \in I$ é solução de (5.2).
2. Se y_1 e $y_2 \in S$, mostremos que $y_1 + y_2 \in S$. De fato,

$$\begin{aligned} (y_1 + y_2)^{(n)}(t) + a_{n-1}(y_1 + y_2)^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(y_1 + y_2)'(t) + a_0(y_1 + y_2)(t) &= \\ &= (y_1^{(n)}(t) + a_{n-1}y_1^{(n-1)}(t) + \dots + a_1y_1'(t) + a_0y_1(t)) + \\ &+ (y_2^{(n)}(t) + a_{n-1}y_2^{(n-1)}(t) + \dots + a_1y_2'(t) + a_0y_2(t)) = 0 \end{aligned}$$

para todo $t \in I$ e assim $y_1 + y_2 \in S$.

3. Se $y \in S$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ então $\lambda y \in S$.

$$\begin{aligned} (\lambda y)^{(n)}(t) + a_{n-1}(\lambda y)^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(\lambda y)'(t) + a_0(\lambda y)(t) &= \\ &= (\lambda y^{(n)}(t) + a_{n-1}\lambda y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1\lambda y'(t) + a_0\lambda y(t)) + \\ &= \lambda [(y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1y'(t) + a_0y(t))] = \lambda \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

para todo $t \in I$ e, portanto, λy também é solução. Assim, S é subespaço de $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$.

□

Teorema 5.2. *Considere a equação (5.2), então o conjunto solução de (5.2), denotado por S , tem dimensão igual a n .*

Demonstração. Considere $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0$. Queremos provar que $\dim S = n$. Para isso, devemos construir n soluções de (5.2) que geram o espaço S e que são l.i.

Considere n conjuntos de condições iniciais, onde $t_0 = 0$

$$(1) \begin{cases} y_1(0) = 1 \\ y_1'(0) = 0 \\ \vdots \\ y_1^{(n-1)}(0) = 0 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} y_2(0) = 0 \\ y_2'(0) = 1 \\ \vdots \\ y_2^{(n-1)}(0) = 0 \end{cases} \quad \dots \quad (n) \begin{cases} y_n(0) = 0 \\ y_n'(0) = 0 \\ \vdots \\ y_n^{(n-1)}(0) = 1 \end{cases}$$

Pelo Teorema de Existência e Unicidade, os PVI (5.2) com as respectivas condições iniciais dadas acima fornecem n soluções distintas que denotamos por y_1, y_2, \dots, y_n respectivamente. Denote por $B = \{y_1(t), \dots, y_n(t)\}$ esse conjunto de soluções.

Mostremos que B é base de S .

1. B é l.i.

Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ e $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_n y_n = 0$. Mostremos que $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$. De fato,

$$\alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t) + \dots + \alpha_n y_n(t) = 0, \forall t \in I.$$

Derivando, temos:

$$\alpha_1 y_1'(t) + \alpha_2 y_2'(t) + \dots + \alpha_n y_n'(t) = 0, \forall t \in I.$$

Repetindo esse processo por $(n-1)$ vezes, obtemos:

$$\begin{cases} \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t) + \dots + \alpha_n y_n(t) = 0 \\ \alpha_1 y_1'(t) + \alpha_2 y_2'(t) + \dots + \alpha_n y_n'(t) = 0 \\ \vdots \\ \alpha_1 y_1^{(n-1)}(t) + \alpha_2 y_2^{(n-1)}(t) + \dots + \alpha_n y_n^{(n-1)}(t) = 0, \end{cases} \quad \forall t \in I$$

Em particular, tome $t = t_0 = 0$, usando as condições iniciais, segue que

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \\ \vdots \\ \alpha_n = 0. \end{cases}$$

Portanto, B é l.i.

2. B gera S . Seja $y_0(t) \in S$ arbitrária e mostremos que y é uma combinação linear de y_1, \dots, y_n . De fato, defina

$$\phi(t) = y_0(0)y_1(t) + y_0'(0)y_2(t) + \dots + y_0^{(n-1)}(0)y_n(t),$$

então as derivadas de ϕ são dadas por:

$$\phi^{(k)}(t) = y_0(0)y_1^{(k)}(t) + \dots + y_0^{(n-1)}(0)y_n^{(k)}(t), \quad \forall k = 1, \dots, n-1.$$

Logo, $\phi \in S$, pois S é um subespaço vetorial e

$$\begin{aligned} \phi(0) &= y_0(0) \\ \phi'(0) &= y_0'(0) \\ \phi''(0) &= y_0''(0) \\ &\vdots \\ \phi^{(n-1)}(0) &= y_0^{(n-1)}(0). \end{aligned}$$

Logo, ϕ e y_0 são soluções do mesmo PVI e, pelo Teorema de Existência e Unicidade, $\phi(t) = y_0(t)$. Portanto y_0 é combinação linear dos elementos de B .

□

5.2 Sistemas de equações diferenciais lineares

Nesta seção, vamos estudar uma maneira de estender os resultados de existência e unicidade bem como a fórmula de variação das constantes para os sistemas de equações diferenciais. Vamos considerar um sistema de equações diferenciais com coeficientes constantes, na forma

$$\dot{x} = Ax(t), \tag{5.3}$$

onde A é uma matriz real $n \times n$,

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix}.$$

Vamos definir $\exp(A) = e^A$ da matriz quadrada $A = (a_{ij})_{n \times n}$, de modo a mostrar que $x(t) = e^{At}x_0$ é a solução do sistema (5.3), que satisfaz a condição inicial

$$x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n. \tag{5.4}$$

Primeiramente devemos definir e^A . Para isto vamos observar o caso escalar, em que temos

$$e^{(a)} = e^a = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^3}{3!} + \dots \quad (5.5)$$

Então, por analogia, definimos a exponencial da matriz A por meio da série

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \dots \quad (5.6)$$

Para que essa matriz e^A esteja bem definida é preciso mostrar que essa série é convergente no espaço $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ das matrizes $n \times n$ (ou dos operadores lineares de \mathbb{R}^n em \mathbb{R}^n). Para isto, vamos definir uma norma apropriada.

Se \langle, \rangle e $|| \cdot ||$ denotam, respectivamente, o produto interno e a norma usuais do \mathbb{R}^n , isto é,

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n \quad \text{e} \quad |x| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2},$$

se

$$x = (x_1, \dots, x_n) \quad \text{e} \quad y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Definimos a norma de um operador linear $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ por

$$||A|| = \sup_{x \neq 0} \frac{|Ax|}{|x|} = \sup_{x \neq 0} \left| A \left(\frac{x}{|x|} \right) \right| = \sup_{|y|=1} |Ay|. \quad (5.7)$$

Para que essa definição realmente represente uma norma, vamos primeiramente observar que esse supremo é finito. Esta propriedade pode ser obtida utilizando-se do seguinte resultado de Análise: "Toda função contínua definida num conjunto compacto é limitada". Neste caso, Ax é contínua (sua representação matricial envolve somente expressões contínuas) e está definida em $K = \{y : |y| = 1\}$, que é compacto de \mathbb{R}^n , pois é fechado e limitado. A é uma transformação linear no espaço \mathbb{R}^n , que tem dimensão finita e sabemos que toda transformação linear num espaço de dimensão finita é contínua, portanto A é contínua num compacto então A possui máximo e mínimo em k . Logo, o supremo é finito.

$$\text{Seja } A = (a_{ij})_{n \times n} \text{ e } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \text{ onde } |x| = 1.$$

Temos que o produto da matriz A por um vetor $x \in \mathbb{R}^n$ é dado por

$$Ax = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

$$= \begin{bmatrix} \langle A_1, x \rangle \\ \langle A_2, x \rangle \\ \vdots \\ \langle A_n, x \rangle \end{bmatrix}$$

onde,

$$\begin{aligned} A_1 &= (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}) \\ A_2 &= (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}) \\ &\vdots \\ A_n &= (a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn}). \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Schwarz ($|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$), temos

$$\begin{aligned} \|Ax\| &= \sqrt{\langle A_1, x \rangle^2 + \langle A_2, x \rangle^2 + \cdots + \langle A_n, x \rangle^2} \\ &\leq \sqrt{\|A_1\|^2 \|x\|^2 + \|A_2\|^2 \|x\|^2 + \cdots + \|A_n\|^2 \|x\|^2} \\ &= \sqrt{\|x\|^2 (\|A_1\|^2 + \|A_2\|^2 + \cdots + \|A_n\|^2)} = \|x\| \sqrt{\|A_1\|^2 + \|A_2\|^2 + \cdots + \|A_n\|^2}, \end{aligned}$$

assim, $\|Ax\| \leq \|x\| \sqrt{\|A_1\|^2 + \|A_2\|^2 + \cdots + \|A_n\|^2}$.

Então, para $x \neq 0$ tem-se

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \sqrt{\|A_1\|^2 + \|A_2\|^2 + \cdots + \|A_n\|^2}.$$

Portanto,

$$\frac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq (\|A_1\|^2 + \cdots + \|A_n\|^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall x \neq 0 \quad (5.8)$$

o que justifica que o supremo de $\frac{\|Ax\|}{\|x\|}$ é finito. A verificação de que (5.7) define uma norma, se conclui com as provas das propriedades:

(i) $\|A\| \geq 0$ e $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$

(ii) $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$, $\alpha \in \mathbb{R}$

(iii) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$.

O espaço vetorial das matrizes $n \times n$, o qual é isomorfo ao espaço dos operadores lineares definidos em \mathbb{R}^n e denotado por $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ pode ser considerado como o espaço \mathbb{R}^{n^2} e a norma definida em (5.7) é equivalente a norma usual de \mathbb{R}^{n^2} (dada pela raiz quadrada da soma dos quadrados de seus elementos), pois de (5.2) temos

$$\|A\| = \sup_{x \neq 0} \frac{|Ax|}{|x|}$$

Pela definição de supremo, segue que

$$\begin{aligned} \|A\| &\leq \sqrt{|A_1|^2 + \cdots + |A_n|^2} \\ &= \sqrt{(a_{11}^2 + \cdots + a_{1n}^2) + \cdots + (a_{n1}^2 + \cdots + a_{nn}^2)} \\ &= \left(\sum_{i,j=1}^n (a_{ij})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

ou seja,

$$\|A\| \leq \left(\sum_{i,j=1}^n (a_{ij})^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

e, por outro lado, denotando-se por $\{e_1, \dots, e_n\}$ a base canônica do \mathbb{R}^n , temos

$$|Ae_i| = (a_{1i}^2 + \cdots + a_{ni}^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Logo,

$$\|A\| = \sup_{|x|=1} |Ax| \geq (a_{1i}^2 + \cdots + a_{ni}^2)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall i.$$

Somando, para $i = 1, \dots, n$, obtemos

$$n\|A\| \geq \left(\sum_{i,j=1}^n (a_{ij})^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \|A\|, \quad (5.9)$$

$$\|A\| \leq \left(\sum_{i,j=1}^n (a_{ij})^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Assim,

$$\|A\| \leq \left(\sum_{i,j=1}^n (a_{ij})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq n\|A\|,$$

isso mostra a equivalência da norma canônica de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ com a norma $\| \cdot \|$ definida pelo supremo.

Foi necessária a desigualdade $\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq \sqrt{a+b}, \forall a, b \geq 0$.

As desigualdades (5.2) e (5.9) mostram a desigualdade

$$\frac{1}{n}|(a_{ij})| \leq \|A\| \leq |(a_{ij})|.$$

O espaço vetorial das matrizes $n \times n$, $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ é um espaço vetorial completo, ou seja, toda sequência de Cauchy de elementos em $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tem um limite pertence a $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, e a vantagem em considerar a norma $\|\cdot\|$ em vez da norma usual é que nesta norma vale a desigualdade

$$\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|, \quad (5.10)$$

onde a constante $\|A\|$ é a menor constante tal que essa desigualdade é verdadeira.

Com isso,

$$\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|.$$

De fato, para $x \in \mathbb{R}^n$ com $\|x\| = 1$, temos

$$\begin{aligned} \|(AB)x\| = \|A(Bx)\| &\leq \|A\| \|Bx\| \\ &\leq \|A\| \|B\| \|x\| \\ &= \|A\| \|B\|, \quad \forall x \text{ com } \|x\| = 1. \end{aligned}$$

Logo, como o supremo é a menor das cotas superiores, segue que

$$\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|.$$

Em particular,

$$\|A^n\| \leq \|A\|^n, \quad (5.11)$$

que é a desigualdade que iremos utilizar na justificativa da convergência da série exponencial e^A .

Lema 5.2. *Dada $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$, a série definida por $\sum \frac{A^n}{n!}$ é convergente.*

Demonstração. Como $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ é completo, ou seja, toda sequência de Cauchy é convergente, basta mostrar que a sequência das reduzidas (S_n) é uma sequência de Cauchy. Note que

$$\begin{aligned} S_0 &= I \\ S_1 &= I + A \\ &\vdots \\ S_n &= I + A + \cdots + \frac{A^n}{n!} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Mostremos que $\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|S_{n+p} - S_n\| < \epsilon, \forall n \geq n_0$ e $p > 0$.

De fato,

$$\begin{aligned} \|S_{n+p} - S_n\| &= \left\| \frac{A^{n+1}}{(n+1)!} + \cdots + \frac{A^{n+p}}{(n+p)!} \right\| \\ &\leq \frac{\|A^{n+1}\|}{(n+1)!} + \cdots + \frac{\|A^{n+p}\|}{(n+p)!} \\ &\leq \frac{\|A\|^{n+1}}{(n+1)!} + \cdots + \frac{\|A\|^{n+p}}{(n+p)!}. \end{aligned}$$

Denotando $\|A\| = a \geq 0 \in \mathbb{R}$, temos a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} = e^a$ que sabemos que é convergente em \mathbb{R} . Assim, (s_n) dada por

$$s_n = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \cdots + \frac{a^n}{n!}$$

é de Cauchy.

Logo, $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tal que $|s_{n+p} - s_n| < \epsilon, \forall n > N, \forall p > 0$.

Mas, $|s_{n+p} - s_n| = \left| \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} + \cdots + \frac{a^{n+p}}{(n+p)!} \right| < \epsilon, \forall n \geq N$. Então, tomando $n_0 = N$,

$$\|S_{n+p} - S_n\| \leq \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} + \cdots + \frac{a^{n+p}}{(n+p)!} = \left| \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} + \cdots + \frac{a^{n+p}}{(n+p)!} \right| < \epsilon,$$

desde que $n > N$.

Portanto, (S_n) é de Cauchy e e^A está bem definida para todo $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. \square

De modo análogo às funções reais, temos que a candidata à solução do sistema (5.3) é

$$\exp(At)x_0 = e^{At}x_0 = x_0 + Atx_0 + \frac{A^2t^2}{2!}x_0 + \frac{A^3t^3}{3!}x_0 + \cdots$$

com derivada com respeito a t satisfazendo

$$\frac{d}{dt}e^{tA}x_0 = Ae^{tA}x_0,$$

isto é, $x(t) = e^{At}x_0$ está bem definida, satisfaz (5.3) e a condição inicial (5.4). Analogamente ao problema escalar, temos então existência e unicidade de solução.

Vamos apresentar algumas propriedades que e^A satisfaz.

Teorema 5.3. 1. Se M é uma matriz inversível, então

$$e^{M^{-1}AM} = M^{-1}e^AM.$$

2. $e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt} \forall t \Leftrightarrow A$ comuta com B .

Demonstração. 1. Decorre do fato de que

$$(M^{-1}AM)^j = M^{-1}A^jM.$$

2. (\Rightarrow) Se $e^{(A+B)t} = e^{At}e^{Bt}$ então, derivando ambos os lados, temos

$$(A+B)e^{(A+B)t} = Ae^{At}e^{Bt} + e^{At}Be^{Bt}.$$

Derivando novamente e fazendo $t = 0$, obtemos

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

que implica $AB = BA$. (\Leftarrow) Se A comuta com B , é fácil ver que $X(t) = e^{At}e^{Bt}$ satisfaz a equação diferencial $\dot{X}(t) = (A+B)X(t)$ com condição inicial $X(0) = I$. Então, pela unicidade de solução, deve-se ter $X(t) = e^{(A+B)t}$, e a propriedade está justificada. \square

Se M é a matriz de mudança de base tal que $M^{-1}AM$ está na forma de Jordan, isto é,

$$M^{-1}AM = \text{diag}[A_1, \dots, A_l], \quad A_i = \lambda_i I + R_i,$$

onde R_i é um bloco de Jordan, temos então

$$M^{-1}e^{At}M = e^{M^{-1}AMt},$$

e portanto

$$e^{At} = Me^{M^{-1}AMt}M^{-1}.$$

Calculando a matriz $e^{M^{-1}AMt}$, temos que $e^{M^{-1}AMt}$ é diagonal de blocos do tipo:

$$e^{(\lambda I + R)t}, \quad \text{onde } R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}_{k \times k}.$$

Como λI comuta com R , tem-se que

$$\begin{aligned} e^{(\lambda I + R)t} &= e^{(\lambda I)t}e^{Rt} = e^{\lambda t}e^{Rt} \\ &= e^{\lambda t} \left(I + Rt + \frac{R^2}{2!}t^2 + \cdots + \frac{R^{k-1}}{(k-1)!}t^{k-1} \right) \\ &= e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ t & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \vdots \\ \frac{t^2}{2!} & t & 1 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} & \frac{t^{k-2}}{(k-2)!} & \cdots & t & 1 & 0 \end{pmatrix}_{k \times k}. \end{aligned}$$

Observe que $e^{\lambda t}$ está multiplicando a matriz, assim concluímos que os autovalores da exponencial e^{At} são todos do tipo $e^{\lambda t}$, onde λ é autovalor de A . Além disso, os elementos de e^{At} são combinações lineares de termos do tipo $t^j e^{\lambda t}$, com j limitado pelos índices de nilpotência, no caso acima $j \leq k$, logo são do tipo $p(t)e^{\lambda t}$, onde $p(t)$ é um polinômio em t .

5.3 O estudo dos autovalores e autovetores

Retomaremos agora o sistema de equações diferenciais lineares homogêneo de primeira ordem:

$$\dot{x} = Ax, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}. \quad (5.12)$$

O objetivo é encontrar n soluções l.i. $x_1(t), \dots, x_n(t)$. Ora, recordemos que as equações lineares homogêneas tanto de primeira ordem como de segunda ordem têm funções exponenciais como soluções. Isto sugere que busquemos $x(t) = e^{\lambda t}v$, onde v é o vetor constante, como uma solução de (5.12).

Com esse fim, observemos que

$$\frac{d}{dt}e^{\lambda t}v = \lambda e^{\lambda t}v \quad \text{e} \quad A(e^{\lambda t}v) = e^{\lambda t}Av.$$

Então, $x(t) = e^{\lambda t}v$ é uma solução de (5.12) se, e somente se, $\lambda e^{\lambda t}v = e^{\lambda t}Av$. Dividindo ambos os membros desta equação por $e^{\lambda t}$, segue

$$\lambda v = Av. \quad (5.13)$$

Logo, $x(t) = e^{\lambda t}v$ é uma solução de (5.12) se, e somente se, λ e v satisfazem (5.13). Assim, o vetor não nulo v da solução $x(t) = e^{\lambda t}v$ é um **autovetor** da matriz A com **autovalor** λ .

Os autovalores λ de A são raízes da equação

$$0 = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix}$$

e os autovetores da A são então as soluções não nulas da equação $(A - \lambda I)v = 0$ para esses valores de λ .

O determinante da matriz $A - \lambda I$ é claramente um polinômio em λ de grau n , com termo de maior grau $(-1)^n \lambda^n$; relembramos que é chamado de **polinômio característico** de A e indicado por $p(\lambda)$. Para cada raiz λ_j de $p(\lambda)$, existe pelo menos um vetor não nulo v_j tal que $Av_j = \lambda_j v_j$. Ora, todo polinômio de grau $n \geq 1$ tem pelo menos uma raiz (possivelmente complexa), isto é, toda matriz tem pelo menos um autovalor e pelo menos um autovetor.

Por outro lado, $p(\lambda)$ tem no máximo n raízes distintas. Assim, toda matriz $n \times n$ tem no máximo n autovalores e n autovetores. Finalmente, observamos que toda matriz

$n \times n$ tem no máximo n autovetores l.i., pois o espaço de todos os vetores $v = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$

tem dimensão n .

Para cada autovetor v_j de A com autovalor λ_j , temos uma solução $x_j(t) = e^{\lambda_j t}v_j$ de (5.12). Se A tem n autovetores l.i. v_1, \dots, v_n com autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, respectivamente ($\lambda_1, \dots, \lambda_n$ não precisam ser distintos), então $x_j(t) = e^{\lambda_j t}v_j, j = 1, \dots, n$ são n soluções l.i. de (5.12). Isto segue imediatamente do Teorema (5.6) e do fato que $x_j(0) = v_j$. Nesse caso, toda solução $x(t)$ de (5.12) é da forma

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} v_n \quad (5.14)$$

que é chamada de ***solução geral*** de (5.12).

A situação é mais simples quando A tem n autovalores distintos reais $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ com autovetores v_1, \dots, v_n respectivamente, pois nesse caso temos certeza de que v_1, \dots, v_n são l.i.

Teorema 5.4. *Quaisquer k autovetores de A , v_1, \dots, v_k com autovalores distintos $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ respectivamente, são l.i.*

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [6].

5.3.1 Raízes complexas

Se $\lambda = \alpha + i\beta$ é um autovalor complexo de A com o autovetor $v = v_1 + i v_2$, então a solução $x(t) = e^{\lambda t} v$ é uma solução com valores complexos da equação diferencial (5.3).

Essa solução com valores complexos dá origem a duas soluções reais como mostremos abaixo.

Lema 5.3. *Seja $x(t) = y(t) + i z(t)$ uma solução com valores complexos de (5.3). Então, tanto $y(t)$ como $z(t)$ são soluções de (5.3).*

Demonstração. Se $x(t) = y(t) + i z(t)$ é uma solução complexa de (5.3), então

$$\dot{y}(t) + i \dot{z}(t) = A(y(t) + i z(t)) = Ay(t) + i Az(t). \quad (5.15)$$

Igualando as partes reais e imaginárias de (5.15), obtemos $\dot{y}(t) = Ay(t)$ e $\dot{z}(t) = Az(t)$. Consequentemente, tanto $y(t) = \Re \{x(t)\}$ como $z(t) = \Im \{x(t)\}$ são soluções de (5.3).

A função com valores complexos $x(t) = e^{(\alpha+i\beta)t} (v_1 + i v_2)$ pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{\alpha t} (\cos \beta t + i \sin \beta t) (v_1 + i v_2) \\ &= e^{\alpha t} [(v_1 \cos \beta t - v_2 \sin \beta t) + i (v_1 \sin \beta t + v_2 \cos \beta t)]. \end{aligned}$$

Portanto, se $\lambda = \alpha + i\beta$ é um autovalor de A com autovetor $v = v_1 + i v_2$, então

$$y(t) = e^{\alpha t} (v_1 \cos \beta t - v_2 \sin \beta t)$$

e

$$z(t) = e^{\alpha t} (v_1 \sin \beta t + v_2 \cos \beta t)$$

que são duas soluções reais de (5.3). Além disso, essas duas soluções são l.i. \square

Observação 5.2. Se v é um autovetor de A com autovalor λ , então \bar{v} , o conjugado de v , é um autovetor de A com o autovalor $\bar{\lambda}$. Para mostrar isso, tomamos os complexos conjugados de ambos os membros da equação $Av = \lambda v$ e observemos que o complexo conjugado do vetor Av é $A\bar{v}$ se A é real. Portanto $A\bar{v} = \bar{\lambda}\bar{v}$, o que mostra que \bar{v} é um autovetor de A com autovalor $\bar{\lambda}$.

5.3.2 Raízes iguais

Se o polinômio característico de A não tem n raízes distintas, então A pode não ter n autovetores *l.i.*

Teorema 5.5. *Suponhamos que o polinômio característico de A tem k raízes distintas $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, com multiplicidade n_1, \dots, n_k , respectivamente. (Isto significa que $p(\lambda)$ pode ser fatorado sob a forma $(\lambda_1 - \lambda)^{n_1} \dots (\lambda_k - \lambda)^{n_k}$). Suponhamos que A tem somente $v_j < n_j$ autovetores *l.i.* com autovalores λ_j . Então a equação $(A - \lambda_j I)^2 v = 0$ tem no mínimo v_{j+1} soluções *l.i.* De um modo geral, se a equação $(A - \lambda_j I)^m v = 0$ tem somente $m_j < n_j$ soluções *l.i.*, então a equação $(A - \lambda_j I)^{m+1} v = 0$ tem no mínimo $m_j + 1$ soluções *l.i.**

A prova deste Teorema pode ser encontrada em [3].

Para expressarmos a solução $x(t) = ce^{At}$ do sistema, nesse caso, utilizamos a forma de Jordan da matriz A . Suponha que A não é diagonalizável, então podemos encontrar uma base B do \mathbb{R}^n de forma que $e^{At} = e^{M^{-1}AMt} = e^{Jt}$, onde J é a forma de Jordan de A .

5.3.3 Análise do caso 2×2

Vamos aplicar a análise anterior para o caso $n = 2$.

Considere o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = ax + by \\ \dot{y} = cx + dy \end{cases}, \quad (5.16)$$

onde a matriz dos coeficientes $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Suponhamos que o determinante $\det A = ad - bc \neq 0$. De (5.16), podemos escrever $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, ou seja, $\dot{X} = AX$. O que nos remete a equação diferencial $\dot{x} = ax$, cuja solução geral é $x(t) = ke^{at}$, onde a, k são constantes. Buscaremos soluções da forma

$$X(t) = Ce^{\lambda t} \Leftrightarrow X(t) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x(t) = c_1 e^{\lambda t} \\ y(t) = c_2 e^{\lambda t} \end{cases}.$$

Se $X(t) = Ce^{\lambda t}$ segue de $\dot{X} = AX$ que,

$$\lambda e^{kt} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = A e^{kt} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow (\lambda I - A) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.17)$$

Como estamos interessados em soluções não triviais, seque que $\det(A - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = 0 \Leftrightarrow p(\lambda) = \lambda^2 - (a + d)\lambda + \det A = 0$ que é o polinômio característico, cujas raízes são os autovalores de A .

Obtidos os autovalores, voltamos ao sistema (5.17) e determinamos os autovetores $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ correspondentes e escrevemos a solução de (5.16) na forma $X(t) = Ce^{\lambda t}$. Note que os autovalores de A são da forma: $\lambda = \frac{(a+d) \pm \sqrt{\Delta}}{2}$, onde $\Delta = (a+d)^2 - 4(ad-bc)$, e teremos os três casos usuais dessas raízes, conforme o discriminante seja positivo, negativo ou zero. Faremos agora uma breve análise quanto a estabilidade em cada caso.

Caso 1 - Autovalores reais distintos ($\Delta > 0$). A solução geral de (5.16) é dada por

$$X(t) = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 v_2 e^{\lambda_2 t}, \quad (5.18)$$

onde λ_1 e λ_2 são os autovalores e v_1 e v_2 são os autovetores correspondentes. Note que $X(t)$ também pode ser escrito como

$$X(t) = e^{\lambda_1 t} [c_1 v_1 + c_2 v_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}]. \quad (5.19)$$

Estudemos as possibilidades com respeito ao sinal dos autovalores.

(a) Ambos os autovalores negativos ($\Delta > 0$), $(a+d) < 0$ e $(ad-bc) > 0$. **Nó estável.** De (5.18) decorre que $\lim_{t \rightarrow \infty} X(t) = 0$. Se admitimos $\lambda_2 < \lambda_1$, então $\lambda_2 - \lambda_1 < 0$ e podemos concluir de (5.19) que $X(t) = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t}$ para grandes valores de t . Quando $c_1 \neq 0$, $X(t)$ tende para 0 segundo uma das direções determinadas pelo autovetor v_1 correspondente a λ_1 . Se $c_1 = 0$, $X(t) = c_2 v_2 e^{\lambda_2 t}$ e $X(t)$ tende para 0 ao longo da reta determinada pelo autovetor v_2 . Neste caso um ponto crítico é chamado de **nó estável**, quando ambos os autovalores forem negativos.

(b) Ambos os autovalores positivos ($\Delta > 0$), $(a+d) > 0$ e $(ad-bc) > 0$. **Nó instável.** A análise desse caso é análoga ao caso (a). Novamente, por (5.18), $X(t)$ torna-se arbitrariamente grande quanto t cresce, em uma das direções determinadas pelo autovetor v_1 (quando $c_1 \neq 0$) ou ao longo da reta determinada pelo autovetor v_2 (quando $c_1 = 0$). Esse ponto crítico, correspondente ao caso em que ambos os autovalores são positivos, é denominado por **nó instável**.

(c) Autovalores com sinais opostos ($\Delta > 0$) e $(ad-bc) < 0$. **Ponto de sela.** A análise é idêntica ao caso (b). Com uma exceção, quando $c_1 = 0$, $X(t) = c_2 v_2 e^{\lambda_2 t}$ e, como $\lambda_2 < 0$, $X(t)$ tenderá para 0 ao longo da reta determinada pelo autovetor v_2 . Se $X(0)$ não está sobre a reta determinada por v_2 , a reta determinada por v_1 é uma assíntota de $X(t)$. Esse ponto crítico instável é denominado por **ponto de sela**.

Caso 2 - Um autovalor real repetido ($\Delta = 0$). **Nós degenerados.** A solução geral toma uma de duas formas diferentes, conforme possamos determinar, para o autovalor repetido λ_1 , um ou dois autovetores linearmente independente.

(a) **Dois autovetores linearmente independentes.** Se v_1 e v_2 são dois autovetores *l.i.* correspondentes a λ_1 , então a solução geral é dada por

$$X(t) = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 v_2 e^{\lambda_1 t} = (c_1 v_1 + c_2 v_2) e^{\lambda_1 t}.$$

Se $\lambda_1 < 0$, $X(t)$ tende para 0 ao longo da reta determinada pelo vetor $c_1 v_1 + c_2 v_2$, o ponto crítico é denominado por **nó estável degenerado**.

(b) **Um único autovetor linearmente independente.** Quando existe um único autovetor *l.i.* v_1 , a solução geral é dada por

$$X(t) = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 (v_1 e^{\lambda_1 t} + v_2 e^{\lambda_1 t}),$$

onde $(A - \lambda_1 I)P = v_1$. A solução pode ser escrita na forma

$$X(t) = t e^{\lambda_1 t} \left[c_2 v_1 + \frac{c_1}{t} v_1 + \frac{c_2}{t} v_2 \right].$$

Se $\lambda_1 < 0$, $\lim_{t \rightarrow \infty} t e^{\lambda_1 t} = 0$, decorrendo que $X(t)$ tende para 0 segundo a direção determinada pelo autovetor v_1 . O ponto crítico é novamente denominado por **nó estável degenerado**. Quando $\lambda_1 > 0$, então $\lim_{t \rightarrow \infty} t e^{\lambda_1 t} = +\infty$. A reta determinada por v_1 é uma assíntota para todas as soluções. O ponto crítico é denominado por **nó instável degenerado**.

Caso 3 - Autovalores complexos ($\Delta < 0$). Se $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ e $\bar{\lambda}_1 = \alpha - i\beta$ são os autovalores complexos e $v_1 = b_1 + ib_2$ é um autovetor correspondente a λ_1 , então a solução geral é da forma $X(t) = c_1 X_1(t) + c_2 X_2(t)$, onde

$$X_1(t) = (b_1 \cos \beta t - b_2 \operatorname{sen} \beta t) e^{\alpha t}$$

e

$$X_2(t) = (b_2 \cos \beta t + b_1 \operatorname{sen} \beta t) e^{\alpha t},$$

usando o Lema 5.3.

Temos então uma solução na forma

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{\alpha t} (c_{11} \cos \beta t + c_{12} \operatorname{sen} \beta t) \\ y(t) &= e^{\alpha t} (c_{21} \cos \beta t + c_{22} \operatorname{sen} \beta t), \end{aligned} \tag{5.20}$$

onde $c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22}$ são constantes e que também dependem dos autovetores. E quando $\alpha = 0$, temos

$$\begin{aligned} x(t) &= c_{11} \cos \beta t + c_{12} \operatorname{sen} \beta t \\ y(t) &= c_{21} \cos \beta t + c_{22} \operatorname{sen} \beta t \end{aligned} \tag{5.21}$$

Ainda temos o seguinte caso.

Raízes imaginárias puras ($\Delta < 0$), $(a + d) = 0$. **Centro.** Quando $\alpha = 0$, os autovalores são imaginários puros e, por (5.21), todas as soluções são periódicas com período $p = 2\pi/\beta$. Note que se c_{12} e c_{21} fossem simultaneamente nulos, então (5.21) se reduziria a

$$\begin{aligned}x(t) &= c_{11} \cos \beta t \\y(t) &= c_{22} \sin \beta t\end{aligned}$$

que é a representação paramétrica de uma elipse. Resolvendo o sistema de equações (5.21) em relação a $\cos \beta t$ e $\sin \beta t$ e utilizando a identidade $\sin^2 \beta t + \cos^2 \beta t = 1$, é possível mostrar que todas as soluções são elipses com centro na origem. O ponto crítico $(0, 0)$ é chamado de **centro**.

5.4 Solução matriz fundamental

Nesta seção, vamos introduzir a expressão para a solução de um sistema linear com coeficientes constantes.

Se $x^1(t), \dots, x^n(t)$ são n soluções *l.i.* da equação diferencial (5.3) dada por $\dot{x} = Ax$, onde A é uma matriz real $n \times n$. Então toda solução $x(t)$ pode ser escrita sob a forma

$$x(t) = c_1 x^1(t) + c_2 x^2(t) + \dots + c_n x^n(t), \quad (5.22)$$

pois sabemos que a dimensão do espaço solução de (5.3) é n .

Seja $X(t)$ a matriz cujas colunas são $x^1(t), \dots, x^n(t)$. Então (5.22), pode ser escrita sob a forma concisa $x(t) = X(t)c$, onde $c = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$.

Definição 5.3. Uma matriz $X(t)$ é dita **solução matriz fundamental** de (5.3) se suas colunas formam um conjunto de n soluções *l.i.* de (5.3).

Teorema 5.6 (Teste de Independência Linear). *Sejam x_1, x_2, \dots, x_k , k soluções de $\dot{x} = Ax$ e $t_0 \in \mathbb{R}$. Então, x_1, x_2, \dots, x_k são soluções *l.i.* se, e somente se, $x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_k(t_0)$ são vetores *l.i.* em \mathbb{R}^n .*

Demonstração. (\Leftarrow) Mostremos por negação. Suponha que x_1, x_2, \dots, x_k sejam soluções *l.d.* Então, existem escalares c_1, c_2, \dots, c_k não todos nulos, tais que

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_k x_k = 0.$$

Calculando essa equação para $t = t_0$,

$$c_1 x_1(t_0) + c_2 x_2(t_0) + \dots + c_k x_k(t_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, $x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_k(t_0)$ são vetores *l.d.* em \mathbb{R}^n .

Conclui-se que $\{x_1(t_0), x_2(t_0), \dots, x_k(t_0)\}$ é *l.i.*, então $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ é *l.i.*.

(\Rightarrow) Vamos provar novamente por negação.

Suponhamos que os valores de x_1, x_2, \dots, x_k , em algum instante t_0 , são vetores *l.d.* em \mathbb{R}^n . Então, existem constantes c_1, c_2, \dots, c_k , não todas nulas, tais que

$$c_1x_1(t_0) + \dots + c_kx_k(t_0) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = 0. \quad (5.23)$$

Com essa escolha de constantes c_1, c_2, \dots, c_k , podemos considerar a função com valores vetoriais dada por

$$\phi(t) = c_1x_1(t) + \dots + c_kx_k(t).$$

Essa função satisfaz (5.23), pois é uma combinação linear de soluções, ou seja, $\phi(t_0) = 0$. Além disso, pelo Teorema de Existência e Unicidade, a solução nula é também solução do PVI $\dot{x} = Ax$, com $x(0) = 0$, logo $\phi(t) = 0, \forall t$. Isto implica que x_1, x_2, \dots, x_k são soluções linearmente dependentes. \square

Por outro lado, já definimos a matriz e^{At} e esta pode ser calculada diretamente a partir de qualquer solução matriz fundamental de (5.3), como veremos a seguir. Para isto, introduzimos alguns resultados necessários.

Lema 5.4. *Uma matriz $X(t)$ é uma solução matriz fundamental de (5.3) se, e somente se, $\dot{X} = AX$ e $\det X(0) \neq 0$.*

Demonstração. Denotando por $x^1(t), \dots, x^n(t)$ as n colunas de $X(t)$, observamos que

$$\dot{X} = (\dot{x}^1(t), \dots, \dot{x}^n(t))$$

e

$$AX(t) = (Ax^1(t), \dots, Ax^n(t)).$$

Portanto as n equações vetoriais $\dot{x}^1(t) = Ax^1(t), \dots, \dot{x}^n(t) = Ax^n(t)$ são equivalentes à única equação matricial $\dot{X}(t) = AX(t)$. Além disso, n soluções $x^1(t), \dots, x^n(t)$ de (5.3) são *l.i.* se, e somente se, $x^1(0), \dots, x^n(0)$ são vetores *l.i.* de \mathbb{R}^n . Esses vetores por sua vez, são *l.i.* se, e somente se, $\det X(0) \neq 0$. Consequentemente, $X(t)$ é uma solução matriz fundamental de (5.3) se, e somente se, $\dot{X}(t) = AX(t)$ e $\det X(0) \neq 0$. \square

Teorema 5.7. *A função com valores matriciais $e^{At} \equiv I + At + \frac{A^2t^2}{2!} + \dots$ é uma solução matriz fundamental de (5.3).*

Demonstração. Sabemos que $\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}$. Então, e^{At} é uma solução da equação diferencial $\dot{X}(t) = AX(t)$. Além disso, seu determinante calculado em $t = 0$ é 1, pois $e^{A0} = I$. Portanto, pelo Lema (5.4), e^{At} é uma solução matriz fundamental de (5.3). \square

Lema 5.5. *Sejam $X(t)$ e $Y(t)$ duas soluções matrizes fundamentais de (5.3). Então, existe uma matriz C tal que $Y(t) = X(t)C$.*

Demonstração. Por definição, as colunas $x^1(t), \dots, x^n(t)$ de $X(t)$ e $y^1(t), \dots, y^n(t)$ de $Y(t)$ são conjuntos l.i de soluções de (5.3). Em particular, cada coluna de $Y(t)$ pode ser escrita como uma combinação linear das colunas de $X(t)$, isto é, existem constantes c_1^j, \dots, c_n^j tais que

$$y^j(t) = c_1^j x^1(t) + c_2^j x^2(t) + \dots + c_n^j x^n(t), \quad j = 1, \dots, n. \quad (5.24)$$

Seja C a matriz (c^1, c^2, \dots, c^n) onde

$$c^j = \begin{bmatrix} c_1^j \\ \vdots \\ c_n^j \end{bmatrix}.$$

Então, as n equações (5.24) são equivalentes à única equação matricial $Y(t) = X(t)C$. \square

Teorema 5.8. *Se $X(t)$ uma solução matriz fundamental da equação diferencial $\dot{x} = Ax$. Então,*

$$e^{At} = X(t)X^{-1}(0). \quad (5.25)$$

Ou seja, o produto de qualquer solução matriz fundamental de (5.3) por sua inversa em $t = 0$ é igual a e^{At} .

Demonstração. Seja $X(t)$ uma solução matriz fundamental de (5.3). Então, pelos Teorema (5.7) e Lema (5.5), existe uma matriz constante C tal que

$$e^{At} = X(t)C. \quad (5.26)$$

para $t = 0$ em (5.26), obtém-se $I = X(0)C \Rightarrow C = X^{-1}(0)$. Portanto, $e^{At} = X(t)X^{-1}(0)$. \square

Apresentamos a seguir uma aplicação envolvendo o uso de sistemas de equações diferenciais ordinárias. Esse exemplo foi extraído da referência [3].

Exemplo 5.3. Estratégias de armamentos.

Suponhamos dois países A e B , isolados e que tenham uma política externa pacífica e mesmo assim desejam se preparar para uma guerra eventual. E mais, que o poderio militar de cada país seja dado pela quantidade de armas num determinado instante. Então, vamos supor que $x = x(t)$ e $y = y(t)$ determinam o potencial de guerra de cada país no instante t e vamos considerar as seguintes hipóteses:

1. x e y são funções contínuas com derivadas contínuas para $t > 0$, (t é o tempo).

2. Quanto maior o potencial de guerra de cada país, mais ele será fonte de problemas para o outro. Portanto, a variação do poderio militar de um país é proporcional ao poderio do outro.
3. A depreciação dos armamentos existentes, em relação ao tempo, é responsável pela diminuição do poderio militar de cada país. Suponhamos que essa depreciação seja proporcional à quantidade de armamentos existentes.
4. Se um país tem intuítos bélicos secretos, isto pode influenciar no crescimento de seu potencial de guerra. Por outro lado, se não houver uma situação econômica compatível para suportar o crescimento bélico do outro país, isto pode acarretar uma diminuição da aquisição de armas.

Essas hipóteses propoem como modelo o seguinte sistema de equações diferenciais,

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -ax + by + g(t) \\ \frac{dy}{dt} = cx - dy + h(t), \end{cases} \quad (5.27)$$

com a, b, c e d constantes positivas onde:

- b e c são os coeficientes de proporcionalidade devido à interação de um país com o outro.
- a e d são os coeficientes de depreciação do material bélico.
- $g(t)$ e $h(t)$ são as estratégias de cada país.

Vamos estudar o caso particular em que os países não possuem estratégias, ou seja, $g(t) = 0$ e $h(t) = 0$. Assim o sistema (5.27) torna-se homogêneo.

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -ax + by \\ \frac{dy}{dt} = cx - dy \end{cases} \quad (5.28)$$

A equação característica associada a (5.28) é

$$\lambda^2 + (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0,$$

cujas raízes são

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}[-(a + d) \pm \sqrt{(a + d)^2 - 4(ad - bc)}].$$

Se $\Delta > 0$ então a solução geral de (5.28) é dada por

$$x(t) = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 v_2 e^{\lambda_2 t}, \quad (5.29)$$

com $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ e c_1, c_2 constantes arbitrárias e v_1 e v_2 são os autovetores associados aos autovalores λ_1 e λ_2 respectivamente.

O ponto de equilíbrio de (5.28) é a origem $(0, 0)$ e sua natureza depende do sinal de $(ad - bc)$. Tratemos de dois casos:

Se λ_1 e λ_2 são negativos, o ponto crítico $(0, 0)$ é um nó assintoticamente estável, o que significa que os países estarão em paz permanentemente.

Se λ_1 e λ_2 são positivos, o ponto crítico $(0, 0)$ será um nó instável.

5.5 Fórmula da variação de parâmetros

Veremos que podemos utilizar as soluções da equação homogênea associada $\dot{x} = Ax$ para encontrar a solução do P.V.I

$$\dot{x} = Ax(t) + f(t); \quad x(t_0) = x^0. \quad (5.30)$$

Para isto consideremos $x^1(t), \dots, x^n(t)$ n soluções l.i da equação homogênea (5.3) associada. Como a solução geral de (5.3) é $c_1x^1(t) + \dots + c_nx^n(t)$, é natural pensar que a solução de (5.30) seja algo na forma

$$x(t) = u_1(t)x^1(t) + u_2(t)x^2(t) + \dots + u_n(t)x^n(t) \quad (5.31)$$

Esta equação pode ser escrita na forma $x(t) = X(t)u(t)$ onde $X(t) = (x^1(t), \dots, x^n(t))$ e $u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{bmatrix}$.

Substituindo essa expressão em $\dot{x} = Ax + f(t)$, obtemos

$$\dot{x}(t)u(t) + x(t)\dot{u}(t) = Ax(t)u(t) + f(t). \quad (5.32)$$

A matriz $X(t)$ é uma solução matriz solução fundamental de (5.3), portanto $\dot{x} = Ax(t)$ e a equação (5.32) se reduz a

$$X(t)\dot{u}(t) = f(t). \quad (5.33)$$

Uma vez que as colunas de $X(t)$ são vetores l.i. de \mathbb{R}^n em cada instante t , segue que $X^{-1}(t)$ existe, e

$$\dot{u}(t) = X^{-1}(t)f(t). \quad (5.34)$$

Integrando essa expressão entre t_0 e t , obtém-se

$$\begin{aligned} u(t) &= u(t_0) + \int_{t_0}^t X^{-1}(s)f(s)ds \\ &= X^{-1}(t_0)x^0 + \int_{t_0}^t X^{-1}(s)f(s)ds. \end{aligned}$$

Conseqüentemente,

$$x(t) = X(t)X^{-1}(t_0)x^0 + X(t) \int_{t_0}^t X^{-1}(s)f(s)ds. \quad (5.35)$$

Se $X(t)$ é a solução da matriz fundamental e^{At} , então a equação (5.35) se simplifica, isto é, se $X(t) = e^{At}$ então $X^{-1}(s) = e^{-As}$, e

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{At}e^{-At_0}x^0 + e^{At} \int_{t_0}^t e^{-As}f(s)ds \\ &= e^{A(t-t_0)}x^0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)}f(s)ds. \end{aligned}$$

Este próximo exemplo foi retirado da referência [5].

Exemplo 5.4. Os problemas físicos do tipo massa-mola e circuitos elétricos são descritos por equações diferenciais ordinárias de segunda ordem ou por sistemas 2×2 de primeira ordem. Este exemplo trata de um circuito elétrico dado na figura (5.1), e a construção do modelo matemático pode ser encontrada baseando-se nas leis da Física. Este circuito é descrito pelo sistema de equações diferenciais

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/8 \\ 2 & -1/2 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \end{pmatrix} I(t),$$

em que $x = (x_1 \ x_2)^T$, x_1 é a corrente do indutor, x_2 é a queda de voltagem no capacitor e $I(t)$ é a corrente fornecida pela fonte externa.

Vamos determinar uma matriz fundamental $X(t)$ para o sistema homogêneo correspondente e usando $I(t) = e^{-t/2}$, vamos determinar a solução que satisfaz a condição inicial $x(0) = 0$.

Neste caso $A = \begin{pmatrix} -1/2 & -1/8 \\ 2 & -1/2 \end{pmatrix}$, e para determinarmos a matriz fundamental $X(t)$ para o sistema homogêneo correspondente será necessário primeiramente calcularmos os autovalores e autovetores correspondentes. Para determinarmos os autovalores temos que calcular λ de forma que $|A - \lambda I| = 0$. Note que

$$\begin{vmatrix} -1/2 & -1/8 \\ 2 & -1/2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \lambda + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-1 \pm i}{2}.$$

Encontremos então o autovetor associado ao autovalor $\lambda_1 = \frac{-1 + i}{2}$. Para tanto é

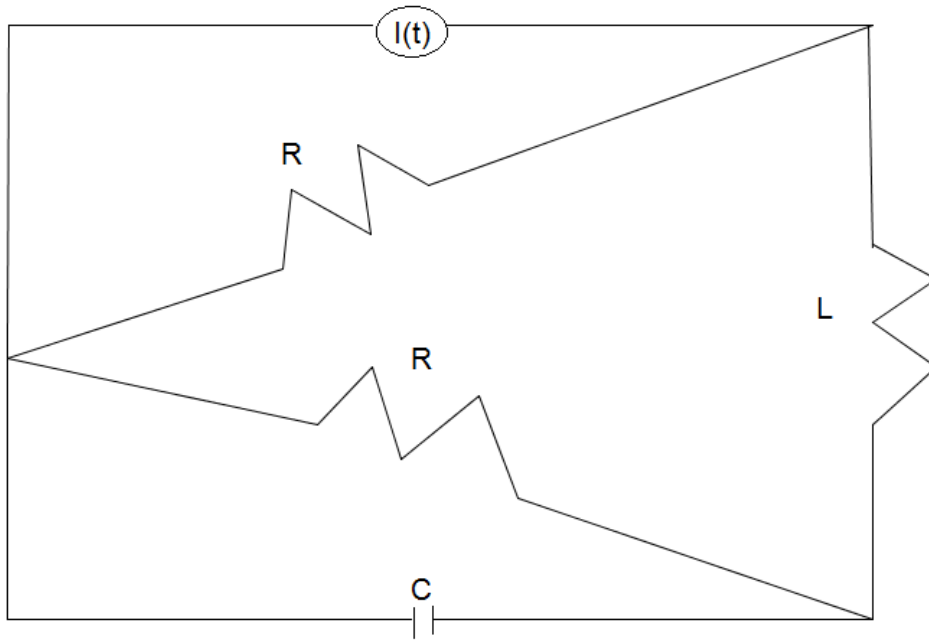


Figura 5.1: Circuito elétrico

preciso que o autovetor $v = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, satisfaça $(A - \lambda_1 I)v = 0$. Logo

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} -i/2 & -1/8 \\ 2 & -i/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \begin{cases} \frac{-i}{2}\alpha - \frac{1}{8}\beta = 0 & \Rightarrow \beta = -4i\alpha \\ 2\alpha - \frac{i}{2}\beta = 0 \end{cases} \end{cases},$$

o que implica $v = \begin{pmatrix} \alpha \\ -4i\alpha \end{pmatrix}$, assim o autovetor associado ao autovalor λ_1 é $\begin{pmatrix} 1 \\ -4i \end{pmatrix}$.

Assim,

$$\begin{aligned} x(t) &= \begin{pmatrix} 1 \\ -4i \end{pmatrix} e^{(-\frac{1}{2} + \frac{i}{2})t} \\ &= e^{-\frac{1}{2}t} \left[\cos \frac{t}{2} + i \operatorname{sen} \frac{t}{2} \right] \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} i \right] \\ &= e^{-\frac{1}{2}t} \left[\cos \frac{t}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \operatorname{sen} \frac{t}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} \right] + i e^{-\frac{1}{2}t} \left[\cos \frac{t}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} + \operatorname{sen} \frac{t}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right], \end{aligned}$$

e separando a parte real da parte imaginária e temos

$$\begin{aligned} X_1(t) &= e^{-\frac{1}{2}t} \begin{pmatrix} \cos \frac{t}{2} \\ 4 \operatorname{sen} \frac{t}{2} \end{pmatrix} \\ X_2(t) &= e^{-\frac{1}{2}t} \begin{pmatrix} \operatorname{sen} \frac{t}{2} \\ -4 \cos \frac{t}{2} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

e portanto

$$X(t) = e^{At} = \begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}t} \cos \frac{t}{2} & e^{-\frac{1}{2}t} \operatorname{sen} \frac{t}{2} \\ 4e^{-\frac{1}{2}t} \operatorname{sen} \frac{t}{2} & -4e^{-\frac{1}{2}t} \cos \frac{t}{2} \end{pmatrix}.$$

Facilmente obtemos

$$X(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}. \quad (5.36)$$

Determinando a matriz inversa de (5.36), temos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ -4d = 1 \Rightarrow d = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Assim,

$$X^{-1}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Temos que $X^{-1}(s) = e^{-As}$, então

$$X^{-1}(s) = e^{\frac{s}{2}} \begin{pmatrix} \cos \frac{s}{2} & -\operatorname{sen} \frac{s}{2} \\ -4 \operatorname{sen} \frac{s}{2} & -4 \cos \frac{s}{2} \end{pmatrix}. \quad (5.37)$$

$$(5.38)$$

Agora temos que calcular $X^{-1}(s)f(s)$, onde $f(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{-\frac{s}{2}} \\ 0 \end{pmatrix}$, então

$$X^{-1}(s)f(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cos \frac{s}{2} \\ -2 \operatorname{sen} \frac{s}{2} \end{pmatrix},$$

e por (5.35), sabemos que

$$x(t) = X(t) \cdot \int_0^t \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cos \frac{s}{2} \\ -2 \operatorname{sen} \frac{s}{2} \end{pmatrix} ds.$$

Calculemos então

$$\int_0^t \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cos \frac{s}{2} \\ -2 \operatorname{sen} \frac{s}{2} \end{pmatrix} ds,$$

assim

$$\int_0^t \frac{1}{2} \cos \frac{s}{2} ds = \frac{1}{2} \int_0^t \cos \frac{s}{2} ds \quad (5.39)$$

Seja

$$u = \frac{s}{2} \Rightarrow du = \frac{1}{2} ds \Rightarrow 2du = ds \quad (5.40)$$

e substituindo (5.40) em (5.39) temos

$$\frac{1}{2} \int_0^t \cos u \cdot 2du = \int_0^t \cos u \, du = \operatorname{sen} u \Big|_0^t = \operatorname{sen} \frac{s}{2} \Big|_0^t = \operatorname{sen} \frac{t}{2}. \quad (5.41)$$

De maneira análoga

$$\int_0^t -2 \operatorname{sen} \frac{s}{2} ds = -2 \int_0^t \operatorname{sen} \frac{s}{2} ds \quad (5.42)$$

e fazendo as mesmas substituições de (5.40) em (5.42) temos

$$\begin{aligned} -2 \int_0^t \operatorname{sen} u \cdot 2du &= -4 \int_0^t \operatorname{sen} u \, du = 4 \cos u \Big|_0^t = 4 \cos \frac{s}{2} \Big|_0^t \\ &= 4 \cos \frac{t}{2} - 4. \end{aligned} \quad (5.43)$$

De (5.41) e (5.43) temos

$$\int_0^t \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cos \frac{s}{2} \\ -2 \operatorname{sen} \frac{s}{2} \end{pmatrix} ds = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} \frac{t}{2} \\ 4 \cos \frac{t}{2} - 4 \end{pmatrix} e \quad (5.44)$$

por (5.35) sabemos

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{At} \cdot \int_0^t e^{-As} f(s) ds \\ &= \begin{pmatrix} e^{-\frac{1}{2}t} \cos \frac{t}{2} & e^{-\frac{1}{2}t} \operatorname{sen} \frac{t}{2} \\ 4e^{-\frac{1}{2}t} \operatorname{sen} \frac{t}{2} & -4e^{-\frac{1}{2}t} \cos \frac{t}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{sen} \frac{t}{2} \\ 4 \cos \frac{t}{2} - 4 \end{pmatrix} \\ &= e^{-\frac{t}{2}} \begin{pmatrix} 5 \cos \frac{t}{2} \operatorname{sen} \frac{t}{2} - 4 \operatorname{sen} \frac{t}{2} \\ 4 \operatorname{sen}^2 \frac{t}{2} - 16 \cos^2 \frac{t}{2} + 16 \cos \frac{t}{2} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (5.45)$$

que satisfaz a condição inicial.

6 Conclusão

Vimos a importância do conhecimento de outras áreas quando tratamos de um problema específico modelado por EDO, por exemplo o caso do Diabetes. Muitas vezes necessitamos compreender os fenômenos que nos cercam e para tanto é necessário compreender tudo que está relacionado com o problema para que possamos construir modelos, encontrar suas soluções e validar essas soluções, gerando discussões reflexivas sobre tais fenômenos que nos cercam.

Ao trabalharmos Modelagem Matemática dois pontos são fundamentais: aliar o tema escolhido com a realidade de nossos alunos e aproveitar as experiências extra-classe dos alunos aliadas à experiência do professor em sala de aula. O professor deve mediar todos esses saberes com os saberes da Matemática estimulando sempre a criatividade dos alunos, para que eles possam contruir seus conhecimentos.

Os modelos são uma aproximação da realidade e embora não sejam exatamente a realidade, eles são úteis no estudo de propriedades, resultados, fornecendo algumas informações sobre algum fenômeno.

Podemos usar a Modelagem Matemática como instrumento motivador para os alunos e para os próprios professores, criando um ambiente facilitador no processo de ensino-aprendizagem. A Matemática deixa de ser abstrata e passa a ser concreta. É necessário utilizarmos muito raciocínio e sermos mais críticos quando nos deparamos com as soluções e precisamos validá-las ou não.

Também se fez necessário o estudo de resultados de outra área, ou seja, a teoria de EDO não é uma teoria isolada, é necessário o estudo de alguns tópicos de Análise, Álgebra Linear.

Referências

- [1] ÁVILA, G. *Introdução à Análise Matemática*, 2ª Edição, Editora Edgard Blucher, LTDA, São Paulo, 2003.
- [2] BASSANEZI, R. C. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática*, Editora Contexto, São Paulo, 2006.
- [3] BRAUN, M. *Equações diferenciais e suas aplicações*, Editora Campus, Rio de Janeiro, 1979.
- [4] HALE, J. K. *Ordinary Differential Equation*, Robert E. Krieger Publishing Company, INC, New York, 1980.
- [5] BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*, 7ª Edição, Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., LCT, Rio de Janeiro, 2002.
- [6] COELHO, F. U.; LOURENÇO, M.L. *Um curso de Álgebra Linear*, Editora EDUSP, São Paulo, 2001.
- [7] BASSANEZI, R. C.; FERREIRA Jr., W.C. *Equações Diferenciais com aplicações*, Editora Harbra LTDA, São Paulo, 1988.
- [8] NEVES, A. F. *Notas de Aulas: Forma de Jordan e Equações Diferenciais Lineares*, UNICAMP, Campinas.
- [9] LADEIRA, L. A. C; Junior H. C. *Equações Diferenciais Ordinárias - Notas de Aula*, ICMC-USP, São Carlos, 2009.
- [10] FAMAT em Revista *Algumas Aplicações e Teoria Qualitativa das Equações Diferenciais Ordinárias*, Número 5, Uberlândia, Setembro de 2005.
- [11] <<http://www.diabetes.org.br/sala-de-noticias/2132-o-avanco-do-diabetes-no-mundo-segundo-a-oms>>. Acessado em 11/09/2012 às 14:00 hs.