



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”  
Instituto de Geociências e Ciências Exatas  
Campus de Rio Claro

# Modelos Descritos por Equações Diferenciais Ordinárias

**Fernanda Luiz Teixeira**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-  
Graduação – Mestrado Profissional em Ma-  
temática Universitária como requisito parcial  
para a obtenção do grau de Mestre

Orientadora  
**Profa. Dra. Marta Cilene Gadotti**

**2012**

517.38 Teixeira, Fernanda L.  
T266m Modelos Descritos por Equações Diferenciais Ordinárias/ Fernanda Luiz Teixeira- Rio Claro: [s.n.], 2012.  
124 f.:fig.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas.

Orientadora: Marta Cilene Gadotti

I. Título

# TERMO DE APROVAÇÃO

Fernanda Luiz Teixeira

MODELOS DESCRITOS POR EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática Universitária do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, pela seguinte banca examinadora:

Profa. Dra. Marta Cilene Gadotti  
Orientadora

Prof. Dr. Wladimir Seixas  
Departamento de Física, Química e Matemática - UFSCar

Prof. Dr. Luis Augusto da Costa Ladeira  
Departamento de Matemática Aplicada e Estatística - ICMC - USP

**Rio Claro, 01 de Novembro de 2012**



*Dedico a meus pais, Elpidio e Ceila.*



# Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus pela vida.

A minha família, pelo apoio incondicional, em especial meus pais, que nunca mediram esforços e sempre acreditaram em mim.

Agradeço a todos os funcionários e professores do Departamento de Matemática-IGCE, que fizeram parte da minha graduação e tornaram possível este trabalho.

À banca examinadora da qualificação e da defesa do mestrado - Renata, Wladimir e Ladeira - que fizeram correções e sugestões extremamente importantes para o trabalho.

A todos meus amigos, que me apoiaram e incentivaram.

E agradeço, imensamente, à minha orientadora Marta, pelo incentivo e voto de confiança antes mesmo de entrar no programa, pela dedicação a este trabalho, pela paciência e atenção com que me orientou, e pela amizade.





# Resumo

Neste trabalho apresentamos as principais aplicações das equações diferenciais ordinárias de primeira ordem especialmente o estudo de dinâmica populacional e modelos decritos por equações diferenciais ordinárias de segunda ordem, destacando o modelo da catenária. Descrevemos a teoria básica sobre sistemas lineares com respeito à existência de solução e apresentamos o modelo do oscilador harmônico.

**Palavras-chave:** equações de primeira ordem, equações de segunda ordem, sistemas lineares, soluções.



# Abstract

In this work we presented the main applications of first order ordinary differential equations, specially the study of population dynamics and models described by second order differential equations, including the catenary model. We described the basic theory about linear systems with respect to existence of solutions and we presented the harmonic oscillator model.

**Keywords:** first order equation, second order equation, linear systems, solutions.



# Lista de Figuras

2.1	Gráfico da solução do PVI (2.11).	27
2.2	Comportamento do modelo de Malthus.	29
2.3	Gráfico do volume da célula no instante $t$ .	32
2.4	Comportamento de algumas soluções do modelo de Verhulst.	38
2.5	Gráfico de $y(t) = \frac{y_0 T}{y_0 + (T - y_0)e^{rt}}$ .	41
2.6	$f(y)$ em função de $y$ para a equação (2.22)	42
2.7	Comportamento das soluções da equação (2.22) retirado de [3].	42
2.8	Gráficos dos modelos de Verhulst e Gompertz.	44
3.1	Gráfico da solução (3.25) para $c_1 = c_2 = 1$ .	57
3.2	Gráfico da solução geral (3.30) para $c_1 = c_2 = 1$ .	60
3.3	Gráfico da solução geral (3.36).	62
3.4	Sistema massa-mola.	63
3.5	Algumas soluções do sistema massa mola com amortecimento supercrítico retirado de [12].	65
3.6	Algumas soluções do sistema massa mola com amortecimento crítico retirado de [12].	66
3.7	Coordenadas polares.	66
3.8	Algumas soluções do sistema massa mola com amortecimento subcrítico retirado de [12].	67
3.9	Solução do sistema massa-mola livre com subamortecimento.	67
3.10	Um circuito elétrico em série simples.	72
3.11	Curva de Perseguição	75
3.12	Curva da Catenária.	78
3.13	Gráfico de (3.63) para $c = \frac{1}{2}$ .	80
4.1	Sistema massa-mola.	95
4.2	Circuito RLC em paralelo.	99
4.3	Mistura de Soluções.	100



# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>15</b>
<b>2</b>	<b>Modelos descritos por equações diferenciais de primeira ordem</b>	<b>19</b>
2.1	Teoria elementar de equações diferenciais ordinárias . . . . .	19
2.1.1	Teorema da Existência e Unicidade . . . . .	22
2.2	Modelos de dinâmica populacional . . . . .	28
2.2.1	Modelo de Malthus . . . . .	28
2.2.2	Modelo de Verhulst . . . . .	35
2.2.3	Modelo de Gompertz . . . . .	42
<b>3</b>	<b>Modelos com equações diferenciais de segunda ordem</b>	<b>47</b>
3.1	Equações lineares de segunda ordem . . . . .	47
3.1.1	Equações diferenciais de segunda ordem com coeficientes constantes	48
3.1.2	Método de redução de ordem da equação diferencial . . . . .	49
3.1.3	Equação característica . . . . .	50
3.1.4	Método dos coeficientes indeterminados . . . . .	52
3.1.5	Método da variação dos parâmetros . . . . .	59
3.2	Aplicações . . . . .	63
3.2.1	Vibrações . . . . .	63
3.2.2	Circuitos elétricos . . . . .	72
3.2.3	Curva de perseguição . . . . .	74
3.2.4	A catenária . . . . .	77
<b>4</b>	<b>Sistemas lineares de equações diferenciais</b>	<b>81</b>
4.1	Sistemas lineares . . . . .	83
4.1.1	Soluções matrizes fundamentais $e^{Ax}$ . . . . .	92
4.1.2	Equação não homogênea . . . . .	93
4.2	Aplicações . . . . .	95
4.2.1	Oscilador harmônico . . . . .	95
4.2.2	Circuito elétrico . . . . .	98
<b>5</b>	<b>Comentário final</b>	<b>103</b>

<b>Referências</b>	<b>105</b>
<b>A Álgebra Linear e espaço solução</b>	<b>107</b>
<b>B Matrizes</b>	<b>111</b>
B.1 Sistemas com matrizes diagonalizáveis e Forma de Jordan . . . . .	111
B.1.1 Operador exponencial . . . . .	121



# 1 Introdução

Este trabalho aborda fatos interessantes na área de Equações Diferenciais Ordinárias, pois a ideia inicial foi listar uma sequência de aplicações que exemplificam o uso das equações diferenciais ordinárias para descrever matematicamente alguns fenômenos da natureza e estudá-los.

A construção da teoria sobre Equações Diferenciais está associado ao desenvolvimento geral da Matemática, em especial ao Cálculo. A partir do momento em que os matemáticos Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646- 1716) tiveram entendimento suficiente e introduziram a notação para a derivada, esta logo apareceu em equações, tornando-se o que conhecemos por equações diferenciais.

Newton classificou as equações diferenciais de primeira ordem de acordo com as formas  $\frac{dy}{dx} = f(x)$ ,  $\frac{dy}{dx} = f(y)$  e  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ . Desenvolveu um método para resolver a equação  $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ , no caso em que  $f(x, y)$  é um polinômio em  $x$  e  $y$ , usando séries infinitas. Mas, sua principal contribuição foi o desenvolvimento do Cálculo e seus estudos sobre os princípios básicos da Mecânica, que forneceram a base para a aplicação das equações diferenciais no século XVIII, especialmente por Leonhard Euler(1707-1783).

Leibniz chegou aos resultados do Cálculo independentemente de Newton, apesar de pouco tempo depois. Enquanto Newton considerava variáveis mudando com o tempo, Leibniz pensava em variáveis  $x, y$  variando sobre sequências de valores infinitamente próximos.

Leibniz introduziu a notação  $dx$  e  $dy$  como as diferenças entre os valores sucessivos dessas sequências. Tinha consciência da importância de uma boa notação e por isso estabeleceu a notação de derivada  $\frac{dy}{dx}$ , assim como o sinal de integral. Além disso, em 1691 generalizou o método de separação de variáveis e desenvolveu o método de redução de equações homogêneas em equações separáveis e em 1694, o procedimento para resolver equações lineares de primeira ordem.

Leibniz, por meio de cartas, mantinha contato com outros matemáticos, em especial os irmãos Bernoulli. No decorrer dessas correspondências foram solucionados vários problemas através de equações diferenciais.

Os irmãos Jakob Bernoulli (1654 - 1705) e Johann Bernoulli (1667 - 1748) tiveram

grande contribuição no desenvolvimento de métodos para resolver equações diferenciais e para ampliar o campo de suas aplicações. Jakob resolveu a equação diferencial

$$y' = \sqrt{\frac{a^3}{b^2y - a^3}}$$

em 1690 e foi o primeiro a usar a palavra “integral” no sentido atual. Johann resolveu a equação  $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{ax}$  e o problema da catenária, que satisfaz a equação diferencial

$$y'' = \frac{\omega}{H} \sqrt{1 + (y')^2}.$$

Um problema que ambos contribuíram, foi o da braquistócrona, que destina-se em determinar a forma de uma curva ligando dois pontos distintos sobre um plano vertical. Além deles, Newton e Leibniz também resolveram o problema da braquistócrona. Daniel Bernoulli, filho de Johann, tinha interesse nas aplicações de equações diferenciais. Foi ele que desenvolveu a equação de Bernoulli em Mecânica dos Flúidos e foi o primeiro a estudar as funções, que hoje são conhecidas como funções de Bessel.

Leonhard Euler (1707 - 1783) foi aluno de Johann na universidade e colega de Daniel, suas obras completas somam mais de 70 volumes. Seus interesses incluíam todas as áreas da Matemática e muitos campos de aplicação. Em particular, é muito interessante seu trabalho em Mecânica, que o levou a desenvolver métodos para resolvê-los. Euler identificou a condição para que equações diferenciais de primeira ordem sejam exatas em 1735, desenvolveu o método de variação de parâmetros em 1739, a teoria de fatores integrantes e encontrou a solução geral de equações lineares homogêneas com coeficientes constantes em 1743. Estendeu esse último resultado para equações não homogêneas em 1751. Usou com frequência série de potências para solucionar equações diferenciais. Ainda, incluiu o uso de aproximações numéricas e o desenvolvimento de métodos numéricos, que proveram “soluções” aproximadas para algumas equações. Fez contribuições importantes em equações diferenciais parciais. Euler também trabalhou com séries de Fourier e foram encontradas as funções de Bessel em seus estudos sobre vibrações de uma membrana circular esticada. Aplicou transformadas de Laplace para resolver equações diferenciais; isso tudo antes de Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), Friedrich Wilhelm Bessel (1784-1846) e Pierre-Simon Laplace (1749-1827) nascerem.

Joseph-Louis Lagrange (1736 - 1813) sucedeu Euler na cadeira de Matemática na Academia de Berlim em 1766. Seguiu seus passos aprofundando a teoria e estendendo resultados em Mecânica, especialmente equações de movimento e energia potencial. Durante o período de 1762 à 1765, mostrou que a solução geral de uma equação diferencial linear homogênea de ordem  $n$  é uma combinação linear de  $n$  soluções linearmente independentes. Mais tarde, em 1774-1775 desenvolveu completamente o método de variação de parâmetros. Manteve o interesse em generalizar métodos e analisar novas famílias de equações diferenciais. Em 1788 introduziu equações gerais de movimento para sistemas dinâmicos, atualmente conhecidas como equações de Lagrange.

---

Pierre-Simon de Laplace (1749 - 1827) destacou-se no campo da mecânica celeste. A equação  $\nabla^2 f = 0$ , conhecida como equação de Laplace é de fundamental importância em muitos ramos da Física Matemática e foi estudada amplamente em conexão com a atração gravitacional. Desenvolveu o método “A transformada de Laplace”, que permite obter a solução de uma equação diferencial ordinária de coeficientes constantes através da resolução de uma equação algébrica.

No final do século XVIII, vários métodos elementares para solucionar equações diferenciais ordinárias já tinham sido descobertos. No início do século XIX, Carl Friedrich Gauss (1777-1855) e Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) tiveram grande contribuição no desenvolvimento das teorias e conceitos de funções de variáveis complexas. Gauss entendeu que a teoria das funções de uma variável complexa era a chave para compreender muitos dos resultados necessários em equações diferenciais aplicadas. Cauchy desenvolveu o método da equação característica, importante ferramenta na análise e solução de muitas equações diferenciais parciais. No final do século XIX iniciou-se a busca de soluções para questões teóricas de existência e unicidade. Em 1876, Rudolf Lipschitz (1832 - 1903) desenvolveu teoremas de existência para soluções de equações diferenciais de primeira ordem.

Nos dias atuais, o estudo sobre o comportamento das soluções de determinadas equações diferenciais é objeto de pesquisa de vários matemáticos e está em constante desenvolvimento. Portanto, conhecer os resultados básicos e aplicações de equações diferenciais ordinárias é extremamente importante para quem deseja se aventurar e se aprofundar nessa área da Matemática. O objetivo principal desse trabalho é introduzir a teoria necessária das equações diferenciais para descrever certos modelos e constatar a importância desses modelos como elemento motivador de aprendizagem da Matemática. Afinal, o desenvolvimento das equações diferenciais se deve, em grande parte, a necessidade de modelar processos físicos subjacentes, através de equações. A compreensão de um processo natural, em geral, se dá através da compreensão, ou construção, de modelos matemáticos.

O trabalho está estruturado da seguinte forma: o capítulo 1 apresenta os modelos descritos por equações diferenciais de primeira ordem; o capítulo 2 os modelos são descritos por equações de segunda ordem; e no capítulo 3 são desenvolvidos modelos envolvendo sistemas de equações diferenciais, especialmente os que utilizam sistemas lineares.



## 2 Modelos descritos por equações diferenciais de primeira ordem

Neste capítulo introduziremos alguns conceitos e resultados básicos da teoria de equações diferenciais ordinárias (EDO) de primeira ordem. Descreveremos alguns problemas que são modelados por esse tipo de equação e estudaremos o comportamento de suas soluções.

### 2.1 Teoria elementar de equações diferenciais ordinárias

Consideremos a equação diferencial de primeira ordem

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y) \quad (2.1)$$

onde  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função definida em um aberto  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . Qualquer função diferenciável  $y = \phi(t)$  que satisfaz  $\frac{d\phi}{dt} = f(t, \phi(t))$ , para  $t$  em um intervalo  $I \subset \mathbb{R}$  é chamada de **solução** de (2.1) definida em  $I$ .

Nosso objetivo é verificar se tal função existe e desenvolver métodos para encontrá-la. Porém, não existe um único método geral para solucionar a equação em termos de funções elementares para uma função arbitrária  $f$ . Em vez disso, vamos descrever alguns métodos, cada um deles aplicável a determinada família de equações de primeira ordem.

Se a função  $f$  em (2.1) depender linearmente da variável  $y$ , então (2.1) é dita uma **equação diferencial linear de primeira ordem**.

**Definição 2.1.** *A forma geral das equações diferenciais ordinárias lineares de primeira ordem é definida por*

$$\frac{dy}{dt} + a(t)y = b(t), \quad (2.2)$$

onde  $a$  e  $b$  são funções da variável independente  $t$ .

Em (2.2), se  $b$  é a função nula, a equação  $\frac{dy}{dt} + a(t)y = 0$  é chamada **equação diferencial linear homogênea de primeira ordem**. Caso contrário é chamada **equação diferencial linear não homogênea de primeira ordem**.

A seguir descrevemos um processo para resolver a equação homogênea.

Primeiramente dividimos ambos os membros da equação por  $y$ , supondo que  $y(t) \neq 0$ ,  $\forall t \in I$ , e reescrevemos sob a forma  $\frac{\frac{dy}{dt}}{y} = -a(t)$ . Observemos que  $\frac{\frac{dy}{dt}}{y} = \frac{d}{dt} \ln |y(t)|$ , pois

$$\frac{d}{dt} \ln |y(t)| = \begin{cases} \frac{d}{dt} \ln y(t) = \frac{1}{y(t)} \frac{d}{dt} y(t), & \text{se } y(t) > 0 \\ \frac{d}{dt} \ln [-y(t)] = -\frac{1}{y(t)} \frac{d}{dt} (-y(t)) = \frac{1}{y(t)} \frac{d}{dt} y(t), & \text{se } y(t) < 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

Assim a equação  $\frac{dy}{dt} + a(t)y = 0$  pode ser escrita sob a forma

$$\frac{d}{dt} \ln |y(t)| = -a(t). \quad (2.4)$$

Integrando ambos os membros de (2.4) na variável  $t$  obtemos

$$\ln |y(t)| = - \int a(t) dt + c_1,$$

onde  $c_1$  é uma constante de integração arbitrária. Isolando  $y(t)$  temos

$$|y(t)| = e^{-\int a(t) dt + c_1} = ce^{-\int a(t) dt} \quad \Rightarrow \quad |y(t)e^{\int a(t) dt}| = c,$$

onde  $c = e^{c_1}$ .

Como solução de uma EDO é uma função contínua e a equação acima estabelece que  $|y(t)e^{\int a(t) dt}|$  é constante então o sinal de  $y(t)e^{\int a(t) dt}$  é constante. Para provar isto, consideremos  $g$  uma função contínua tal que  $|g(t)| = c$  para qualquer  $t$ . Então se existissem dois instantes diferentes  $t_1$  e  $t_2$  tais que  $g(t_1) = c$  e  $g(t_2) = -c$ , pelo Teorema do Valor Intermediário, existiria  $\bar{t}$ , com  $t_1 < \bar{t} < t_2$ , tal que  $g(\bar{t}) = 0$ , o que implicaria  $y(t) = 0$  o que contradiz a hipótese de que  $y(t) \neq 0$ . Logo, se  $y(t) > 0$  tem-se

$$y(t)e^{\int a(t) dt} = c \quad \Rightarrow \quad y(t) = ce^{-\int a(t) dt}.$$

$y(t)$  dada acima é chamada de solução geral da equação diferencial homogênea

$$\frac{dy}{dt} + a(t)y = 0.$$

Note que a equação homogênea tem uma infinidade de soluções, pois para cada valor real de  $c$  obtemos uma solução  $y(t)$  distinta.

No caso das equações diferenciais lineares não homogêneas de primeira ordem com  $a$  e  $b$  constantes podemos resolver de maneira análoga se  $a \neq 0$  e  $y \neq \frac{b}{a}$ , escrevemos a equação (2.2) na forma

$$\frac{\frac{dy}{dt}}{y - \left(\frac{b}{a}\right)} = -a,$$

e integrando ambos os membros obtemos

$$\ln \left| y - \left(\frac{b}{a}\right) \right| = -at + c_2.$$

Segue que a solução geral da equação (2.2), com  $a$  e  $b$  constantes é dada por:

$$y = \left(\frac{b}{a} + ce^{-at}\right),$$

onde  $c$  é a constante de integração.

Outra maneira de encontrar a solução para (2.2) é o método do fator integrante que envolve a multiplicação da equação diferencial por uma determinada função  $\mu = \mu(t)$ , escolhida de modo que a equação resultante seja facilmente integrável. A função  $\mu$  é chamada de **fator integrante**.

Consideremos a equação (2.2) onde  $a$  e  $b$  são funções contínuas dadas. Assim, o fator integrante  $\mu(t)$  deve ser tal que

$$\mu(t) \frac{dy}{dt} + a(t)\mu(t)y(t) = \frac{d}{dt}(\mu(t)y(t)), \quad (2.5)$$

para que possamos obter  $y(t)$  através de uma integração.

Se multiplicarmos (2.2) por  $\mu(t)$ , obtemos

$$\mu(t) \frac{dy}{dt} + a(t)\mu(t)y = \mu(t)b(t), \quad (2.6)$$

Logo, de (2.5) se  $\mu(t)$  satisfaz

$$\frac{d}{dt}[\mu(t)y(t)] = \mu(t)b(t)$$

podemos reescrever (2.2) e resolvê-la. Nessa situação

$$\mu(t)y = \int \mu(t)b(t)dt + k,$$

onde  $k$  é uma constante arbitrária de integração. Algumas vezes podemos calcular a integral acima em termos de funções elementares. No entanto, pode ser necessário deixar a solução em forma integral. Nesse caso, a solução geral da equação (2.2) é dada por

$$y(t) = \frac{1}{\mu(t)} \left[ \int_{t_0}^t \mu(s)b(s)ds + c \right],$$

onde  $t_0$  é algum limite inferior de integração conveniente e  $s$  a variável de integração.

Para determinar o fator integrante  $\mu(t)$  reescrevemos (2.5) na forma

$$\frac{d\mu}{dt} \cdot \frac{1}{\mu(t)} = a(t),$$

integrando ambos os membros, encontramos

$$\ln |\mu(t)| = \int a(t)dt + c, \quad \text{onde } c \text{ é uma constante de integração.}$$

Escolhendo  $c = 0$ , obtemos

$$\mu(t) = e^{\int a(t)dt}.$$

**Exemplo 2.1.** Vamos determinar a solução geral para a equação diferencial

$$y' + \frac{2}{t}y = t^3, \quad t > 0. \quad (2.7)$$

Nesta equação  $a(t) = \frac{2}{t}$ , então

$$\mu(t) = e^{\int \frac{2}{t}dt} = e^{2 \ln |t|} = t^2.$$

Multiplicando ambos os membros de (2.7) por  $\mu(t)$  obtemos

$$t^2 y' + 2ty = t^5, \quad \text{isto é,} \quad \frac{d}{dt}[t^2 y] = t^5.$$

Assim,

$$\int \frac{d}{dt}[s^2 y(s)]ds = \int s^5 ds,$$

logo,

$$t^2 y(t) = \frac{t^6}{6} + c \quad \Rightarrow \quad y(t) = \frac{t^4}{6} + ct^{-2}.$$

Portanto a solução geral de (2.7) é

$$y(t) = \frac{t^4}{6} + ct^{-2}.$$

### 2.1.1 Teorema da Existência e Unicidade

Nesta subseção provaremos o teorema que fornece condições suficientes para a existência e unicidade de solução de um problema do valor inicial.

Um **Problema do Valor Inicial (PVI)** consiste de uma equação diferencial e de uma condição inicial dada. Assim, quando procuramos uma solução particular  $y$  que em  $x_0$  tem o valor  $y_0$ , desejamos determinar  $y$  tal que

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \quad (2.8)$$

Nosso primeiro passo será mostrar que resolver o PVI é equivalente a resolver uma equação integral, através do seguinte lema.



**Lema 2.1.** *Seja  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua em um aberto  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . Então, uma função diferenciável  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$ , onde  $I$  é um intervalo da reta contendo  $x_0$ , é uma solução do PVI (2.8) se, e somente se, for uma solução da equação integral*

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds, \quad \text{onde } [x_0, x] \subset I. \quad (2.9)$$

*Demonstração.* Se  $y = y(x)$  é solução do PVI então pelo Teorema Fundamental do Cálculo,  $y$  é solução da equação integral (2.9).

Se  $y : I \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua que é a solução da equação integral (2.9), então, pelo Teorema Fundamental do Cálculo,  $y$  é diferenciável e satisfaz o PVI.  $\square$

Para provar o Teorema de Existência e Unicidade vamos precisar de alguns resultados da Análise.

Consideremos  $(x_0, y_0) \in \Omega$ ,  $a$  e  $b$  positivos tais que o retângulo

$$B = B(a, b, x_0, y_0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| \leq a \text{ e } |y - y_0| \leq b\}$$

esteja contido em  $\Omega$ . Como  $f$  é contínua e  $B$  é compacto, temos que  $f$  é limitada em  $B$ . Defina

$$M = \max\{|f(x, y)| : (x, y) \in B\}.$$

Sejam  $0 < \bar{a} \leq \min\{a, \frac{b}{M}\}$  e  $J_{\bar{a}}$  o intervalo fechado  $[x_0 - \bar{a}, x_0 + \bar{a}]$ .

Seja  $\mathcal{C}(J_{\bar{a}}, \mathbb{R})$  o conjunto de todas as funções contínuas  $g : J_{\bar{a}} \rightarrow \mathbb{R}$  tais que  $g(x_0) = y_0$  e  $|g(x) - y_0| \leq b$ . Graficamente queremos em  $\mathcal{C}(J_{\bar{a}}, \mathbb{R})$  as funções contínuas cujos gráficos contenham o ponto  $(x_0, y_0)$  e que estejam contidos no retângulo  $B$ .

Definimos também em  $\mathcal{C}(J_{\bar{a}}, \mathbb{R})$  a seguinte métrica:

$$d(g_1, g_2) = \max\{|g_1(x) - g_2(x)| : x \in J_{\bar{a}}\}.$$

De fato,  $d$  está bem definida, pois  $g \in \mathcal{C}(J_{\bar{a}}, \mathbb{R})$  e  $J_{\bar{a}}$  é compacto, e satisfaz as seguintes propriedades:

- $d_1)$   $d(g_1, g_2) \geq 0$  e  $d(g_1, g_2) = 0 \Leftrightarrow g_1 = g_2$ ;
- $d_2)$   $d(g_1, g_2) = d(g_2, g_1)$ , para quaisquer  $g_1, g_2 \in \mathcal{C}(J_{\bar{a}}, \mathbb{R})$ ;
- $d_3)$   $d(g_1, g_2) \leq d(g_1, g_3) + d(g_3, g_2)$ , para quaisquer  $g_1, g_2, g_3 \in \mathcal{C}(J_{\bar{a}}, \mathbb{R})$ .

Portanto,  $\mathcal{C}(J_{\bar{a}}, \mathbb{R})$  munido da métrica  $d$  é um espaço métrico.

Diz-se que  $(g_n)$  é uma sequência de Cauchy quando, para todo  $\varepsilon > 0$ , existir  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $d(g_n, g_m) < \varepsilon$  para todo  $n, m \geq n_0$ .

Quando todas as sequências de Cauchy de um dado espaço métrico  $(M, d)$  é convergente dizemos que o espaço  $M$  é completo.

**Lema 2.2.**  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$  é um espaço métrico completo.

*Demonstração.* Considere  $(f_n)$  uma sequência de Cauchy em  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ , isto é,

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{tal que} \quad \forall n, m > n_0, \quad d(f_n, f_m) < \varepsilon,$$

o que implica

$$\max |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon, \quad \forall x \in [a, b].$$

Segue que para cada  $x$ ,  $(f_n(x))$  é de Cauchy em  $\mathbb{R}$  e como  $\mathbb{R}$  é completo então existe, para cada  $x$

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x).$$

Provemos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$  em  $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ , onde  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  dada acima. De fato,  $\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}$ , tal que

$$d(f_n, f_m) = \max |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon, \quad x \in [a, b], \quad \forall n, m > n_0.$$

Fixando  $n$  na desigualdade acima e fazendo  $m \rightarrow \infty$ , lembrando que  $f_m(x) \rightarrow f(x)$ , obtemos

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon, \quad \forall x \in [a, b].$$

Então para todo  $n > n_0$  temos  $d(f_n, f) \leq \varepsilon$ . Portanto  $f_n \rightarrow f$ , quando  $n \rightarrow \infty$ .  $\square$

Concluimos que o espaço métrico  $\mathcal{C}(J_{\bar{a}}, \mathbb{R})$  é completo, isto é, que toda sequência de Cauchy é convergente para algum elemento de  $\mathcal{C}(J_{\bar{a}}, \mathbb{R})$ .

**Definição 2.2.** *Sejam  $(M, d)$  e  $(N, d_1)$  espaços métricos. Dizemos que uma aplicação  $\psi : (M, d) \rightarrow (N, d_1)$  é uma contração se existe  $k$  com  $0 \leq k < 1$  tal que*

$$d_1(\psi(x), \psi(y)) \leq kd(x, y), \quad \forall x, y \in M.$$

**Teorema 2.1** (Teorema do Ponto Fixo de Banach). *Considere  $\mathcal{C}(J_{\bar{a}}, \mathbb{R})$  o espaço métrico completo. Suponha que  $\Psi : \mathcal{C}(J_{\bar{a}}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}(J_{\bar{a}}, \mathbb{R})$  é uma contração. Então, existe um e somente um  $g \in \mathcal{C}(J_{\bar{a}}, \mathbb{R})$  tal que  $g = \Psi(g)$ .*

A ideia para provar que a equação (2.9) tem uma única solução consiste em mostrar que

$$\phi(y) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s)) ds, \quad y \in \mathcal{C}(J_{\bar{a}}, \mathbb{R})$$

satisfaz o Teorema do Ponto fixo de Banach. Para isto vamos demonstrar o seguinte resultado.

**Lema 2.3.** *Seja  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua definida em um aberto  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  e tal que a derivada parcial  $f_y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  seja também contínua. Dado um subconjunto limitado  $\Omega_0$  tal que  $\Omega_0 \subset \bar{\Omega}_0 \subset \Omega$ , onde  $\bar{\Omega}_0$  é o fecho do conjunto  $\Omega_0$ , então existe uma constante  $K > 0$  tal que*

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq K|y_1 - y_2|$$

para todos  $(x, y_1), (x, y_2) \in \bar{\Omega}_0$ .

*Demonstração.* Seja  $\delta \leq d(\overline{\Omega}_0, \partial\Omega)$ , onde  $\partial\Omega$  representa a fronteira de  $\Omega$ , e denotamos por  $\Omega_\delta = \{(x, y) \in \Omega : d((x, y), \overline{\Omega}_0) < \frac{\delta}{2}\}$  uma  $(\frac{\delta}{2})$ -vizinhança de  $\overline{\Omega}_0$ . Dados  $(x, y_1), (x, y_2) \in \overline{\Omega}_0$  com  $|y_1 - y_2| < \delta$ , o segmento  $[x, \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2]$ , com  $0 \leq \lambda \leq 1$ , está contido em  $\Omega_\delta$ . Aplicando o Teorema do Valor Médio à segunda coordenada de  $f$  temos

$$f(x, y_1) - f(x, y_2) = f_y(x, \xi)(y_1 - y_2), \quad y_1 > y_2$$

onde  $\xi$  está no segmento descrito acima. Tomando

$$M_1 = \max\{|f_y(x, y)| : (x, y) \in \overline{\Omega}_\delta\},$$

pois  $f_y$  é contínua e  $\overline{\Omega}_\delta$  é compacto, obtemos

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq M_1|y_1 - y_2|$$

para  $(x, y_1), (x, y_2) \in \overline{\Omega}_0$  com  $|y_1 - y_2| < \delta$ . Para os pontos com  $|y_1 - y_2| \geq \delta$ , temos

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq 2M \leq \frac{2M}{\delta}|y_1 - y_2|,$$

onde  $M = \max\{|f(x, y)| : (x, y) \in \overline{\Omega}_0\}$ .

Assim, basta tomar  $K = \max\{M_1, \frac{2M}{\delta}\}$ . Portanto,

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq K|y_1 - y_2|.$$

□

Agora podemos provar a existência e unicidade da solução de um PVI.

**Teorema 2.2** (Existência e Unicidade). *Seja  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua definida em um aberto  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . Suponhamos que a derivada parcial com relação à segunda variável,  $f_y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , seja contínua também. Então, para cada  $(x_0, y_0) \in \Omega$ , existem um intervalo aberto  $I$  contendo  $x_0$  e uma única função diferenciável  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$  com  $(x, \varphi(x)) \in \Omega$ , para todo  $x \in I$ , que é solução do PVI*

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \quad (2.10)$$

*Demonstração.* Consideremos a função  $\phi$  definida em  $\mathcal{C}(J_{\bar{a}}, \mathbb{R})$  e que associa a cada  $y \in \mathcal{C}(J_{\bar{a}}, \mathbb{R})$  uma função

$$\phi(y(x)) = y_0 + \int_{x_0}^x f(s, y(s))ds, \quad x \in I.$$

Note que  $\phi(y(x))$  é uma função contínua para  $x \in J_{\bar{a}}$ ,  $y(x_0) = y_0$  e que

$$|\phi(y(x)) - y_0| \leq \left| \int_{x_0}^x |f(s, y(s))|ds \right| \leq M|x - x_0| \leq M\bar{a} \leq b.$$

Assim  $\phi(y) \in \mathcal{C}(J_{\bar{a}}, \mathbb{R})$ . Logo  $\phi : \mathcal{C}(J_{\bar{a}}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}(J_{\bar{a}}, \mathbb{R})$ . Note que as soluções de (2.10) são os pontos fixos de  $\phi$ . Resta provar que  $\phi$  satisfaz o Teorema do Ponto Fixo de Banach. Para isto, calculamos

$$\begin{aligned} \left| \phi(y_1(x)) - \phi(y_2(x)) \right| &= \left| \int_{x_0}^x [f(s, y_1(s)) - f(s, y_2(s))] ds \right| \\ &\leq k \left| \int_{x_0}^x |y_1(s) - y_2(s)| ds \right| \leq K\bar{a}d(y_1, y_2), \end{aligned}$$

onde  $k$  e  $K$  são dadas como no lema anterior. Segue que

$$d(\phi(y_1), \phi(y_2)) \leq K\bar{a}d(y_1, y_2).$$

Logo  $\phi$  é uma contração se  $K\bar{a} < 1$ , desta forma, basta escolher  $\bar{a} < \frac{1}{K}$ . Então existe um e somente um  $y \in \mathcal{C}(J_{\bar{a}}, \mathbb{R})$  tal que  $y = \phi(y)$ , que é solução da equação integral. Portanto, é solução do PVI no intervalo  $I = (x_0 - \bar{a}, x_0 + \bar{a})$ .  $\square$

**Exemplo 2.2.** Vamos resolver o PVI

$$\begin{cases} y' = 2t(1 + y), \\ y(0) = 0. \end{cases} \quad (2.11)$$

Nesse caso,  $f(t, y) = 2t(1 + y)$  e sua derivada  $f_y(t, y) = 2ty'$  são funções contínuas em todo  $\mathbb{R}^2$ . Então, pelo Teorema de Existência e Unicidade, existe uma única solução para (2.11).

Reescrevemos a equação (2.11) na forma

$$y' - 2ty = 2t.$$

Logo, seu fator integrante é  $\mu(t) = e^{\int -2tdt} = e^{-t^2}$ .

Multiplicando a equação por  $\mu(t)$ , obtemos

$$e^{-t^2} y' - 2te^{-t^2} y = e^{-t^2} 2t,$$

que é o mesmo que

$$\frac{d}{dt}[e^{-t^2} y] = 2te^{-t^2}.$$

Integrando ambos os membros em  $t$ , temos

$$e^{-t^2} y = -e^{-t^2} + c \quad \Rightarrow \quad y = -1 + ce^{-t^2}.$$

Logo,  $y = -1 + ce^{-t^2}$  é a solução geral da equação diferencial. Para encontrarmos a solução do PVI devemos aplicar a função  $y$  em  $t = 0$ . Assim,

$$\begin{aligned} y(0) &= -1 + ce^{-0^2} = 0 \\ \Rightarrow \quad -1 + c &= 0 \quad \Rightarrow \quad c = 1 \end{aligned}$$

Portanto, a solução do PVI (2.11) é

$$y(t) = -1 + e^{-t^2},$$

cujo gráfico está descrito na Figura 2.1.

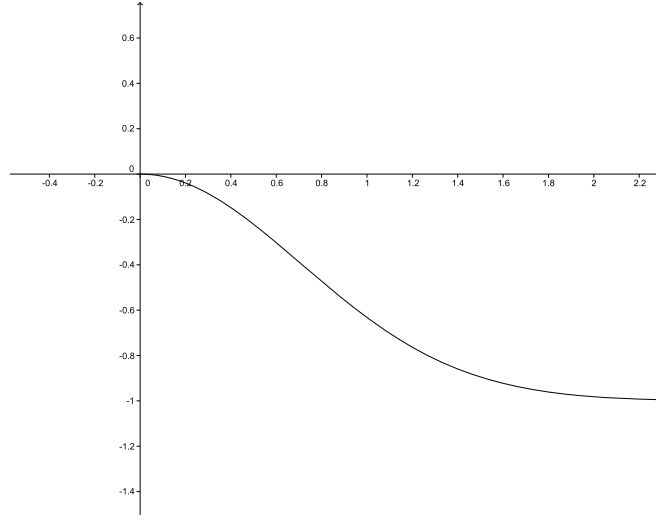


Figura 2.1: Gráfico da solução do PVI (2.11).

Definiremos agora alguns conceitos que serão necessários para a análise dos modelos que serão apresentados na próxima seção.

**Definição 2.3.** *Uma equação da forma*

$$y' = f(y) \tag{2.12}$$

onde a função  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A \subset \mathbb{R}$  aberto, depende somente de  $y$  e não da variável independente  $t$ , é chamada de equação autônoma.

Uma propriedade importante dessas equações é que, se  $y = y(t)$  é solução de (2.12), então  $y = y(t + c)$ , onde  $c$  é constante, também é solução de (2.12). Logo, se  $y(t)$  é solução do PVI

$$\begin{cases} y' = f(y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases},$$

então  $y(t + t_0)$  é solução de

$$\begin{cases} y' = f(y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}.$$

Portanto, para estas equações, podemos considerar somente condições iniciais onde  $t_0 = 0$ .

**Definição 2.4.** *Se  $\bar{y}$  é um zero de  $f$ , isto é,  $f(\bar{y}) = 0$ , então  $y(t) \equiv \bar{y}$  é solução de (2.12) e é chamada de solução de equilíbrio ou estacionária e o ponto  $\bar{y}$  é chamado de ponto de equilíbrio ou singularidade.*

**Definição 2.5.** Um ponto de equilíbrio  $\bar{y}$  é dito estável, se dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$ , tal que para  $|y_0 - \bar{y}| < \delta$ , a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' = f(y) \\ y(0) = y_0 \end{cases}.$$

é tal que  $|y(t) - \bar{y}| < \varepsilon$  para todo  $t \geq 0$ . Um ponto de equilíbrio que não é estável é chamado de instável.

Ainda, um ponto de equilíbrio  $\bar{y}$  é dito assintoticamente estável, se for estável e se existir  $\gamma > 0$  tal que  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \bar{y}$  quando  $|y_0 - \bar{y}| < \gamma$ .

## 2.2 Modelos de dinâmica populacional

Veremos alguns modelos populacionais que são descritos por equações de primeira ordem, ou seja, tratam do crescimento de uma única população. Destacaremos os modelos de Malthus, Verhulst e Gompertz.

### 2.2.1 Modelo de Malthus

O primeiro grande avanço na modelagem de populações foi dado pelo inglês Thomas Robert Malthus (1766-1834) que em 1798 publicou seu trabalho anonimamente no livro "An Essay on the Principle of Population as it Affects the Future Improvement of Society", onde usou um modelo que estabelecia que o crescimento populacional se daria segundo uma progressão geométrica. O trabalho de Malthus teve grande influência na teoria da evolução de Charles Darwin (1809-1882) e também de Alfred Russel Wallace (1823-1913).

No livro de Malthus havia poucos dados que comprovassem suas ideias, mas ele percebeu, por exemplo, que a população dos EUA dobrava a cada 25 anos durante o século XVIII. Ele não conseguiu traduzir corretamente suas ideias em modelos matemáticos, mas preparou o caminho para o trabalho de Adolphe Quetelet (1796-1874), Pierre-François Franco e Pierre François Verhulst (1804-1849).

Ao longo do tempo Malthus publicou seu trabalho em sucessivas edições, anexando novas matérias. As ideias de Malthus não foram completamente inéditas, pois a tese de que a população cresce geometricamente já era familiar a Euler meio século antes. No entanto, Malthus lidou com o assunto de forma polêmica.

Vamos analisar matematicamente esse modelo. Para isto, seja  $P(t)$  o número de habitantes de uma espécie num instante  $t$ . Num intervalo de tempo  $\Delta t$ , supomos que os nascimentos e as mortes são proporcionais ao tamanho da população e ao tamanho do intervalo, ou seja, o número de nascimentos é igual a  $\alpha P(t)\Delta t$  e o número de mortes

é igual a  $\beta P(t)\Delta t$ , onde  $\alpha$  é o coeficiente de natalidade e  $\beta$  o de mortalidade. Assim,

$$\begin{aligned}\Delta P &= P(t + \Delta t) - P(t) = \alpha P(t)\Delta t - \beta P(t)\Delta t, \\ \Delta P &= (\alpha - \beta)P(t).\Delta t, \\ \frac{\Delta P}{\Delta t} &= (\alpha - \beta)P(t).\end{aligned}$$

Aplicando limite com  $\Delta t \rightarrow 0$ , temos a equação diferencial

$$\frac{dP}{dt} = (\alpha - \beta)P. \quad (2.13)$$

Logo, a taxa de variação de uma população é proporcional à população em cada instante. Note que  $P \equiv 0$  é o único equilíbrio dessa equação.

Da equação (2.13) obtemos,

$$\frac{dP}{dt} \left( \frac{1}{P} \right) = (\alpha - \beta).$$

Integrando ambos os membros em  $t$ ,

$$\ln |P| = (\alpha - \beta)t + c \Rightarrow P(t) = ke^{(\alpha - \beta)t}.$$

Lembrando que  $P(t) \geq 0$  para todo  $t \geq 0$  e considerando  $P(0) = P_0$ , então a solução do PVI é

$$P(t) = P_0 e^{(\alpha - \beta)t}.$$

Se  $\alpha = \beta$ , isto é, o índice de natalidade for igual ao de mortalidade, então  $P(t) \equiv P_0$  e, portanto, a população não varia.

Se  $\alpha > \beta$ , isto é, natalidade é maior que mortalidade, então a população cresce exponencialmente com o tempo.

Se  $\alpha < \beta$  a população diminui e tende à extinção à medida que  $t$  cresce.

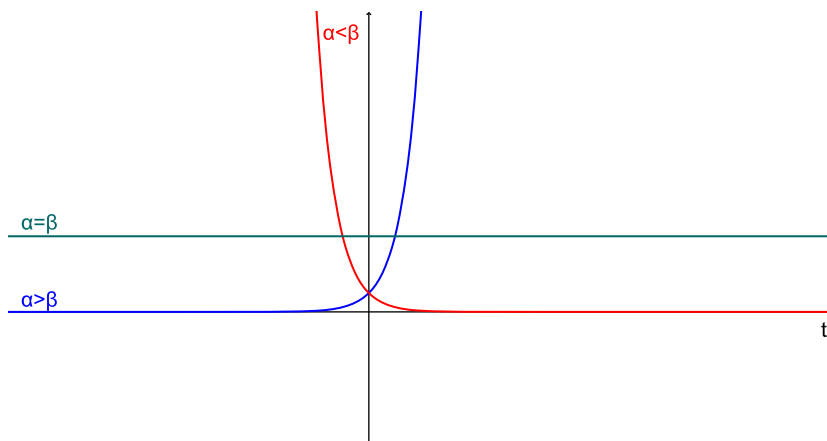


Figura 2.2: Comportamento do modelo de Malthus.

A aplicação desse modelo às populações humanas gerou uma grande discussão no início do século XIX. Malthus afirmava que a população mundial crescia em razão geométrica, enquanto os meios de sobrevivência cresciam apenas em razão aritmética.

Assim a população crescerá até um limite de subsistência e será controlada por fome, miséria, epidemias, guerras, vícios, etc. Por isso é considerado um modelo muito simples.

**Exemplo 2.3** (População brasileira). Vamos considerar a população brasileira, cujos dados são apresentados na tabela a seguir e que foi retirada do livro "Ensino-Aprendizagem com modelagem matemática" de Rodney Bassanezi. O censo demográfico da população do Brasil de 1940 a 1991 é dado por

Ano	População	Taxa de crescimento (% a.a.)	Crescimento Absoluto	Distribuição Etária (%)		
				0-14	15-64	65 e mais
1940	41.236.315	2.3	10.708.082	42.6	55.0	2.4
1950	51.944.397	3.2	19.047.946	41.9	55.5	2.6
1960	70.992.343	2.8	22.146.694	43.2	54.3	2.5
1970	93.139.037	2.5	25.863.669	42.6	54.3	3.1
1980	119.002.706	1.9	27.822.769	38.8	57.2	4.0
1991	146.825.475	-	-	35.0	60.2	4.8

Seja  $\alpha$  a taxa de crescimento da população dada pela diferença entre as taxas de natalidade e a de mortalidade. Então o modelo discreto de Malthus é dado por

$$P(t+1) - P(t) = \alpha P(t).$$

Considerando a população inicial  $P(0) = P_0$  obtemos

$$P_t = (\alpha + 1)^t P_0. \quad (2.14)$$

Assim, dados dois censos  $P_0$  e  $P_t$ , a taxa de crescimento demográfico em  $t$  anos é obtida de (2.14), fazendo

$$(\alpha + 1)^t = \frac{P_t}{P_0},$$

isto é,

$$\alpha = \sqrt[t]{\frac{P_t}{P_0}} - 1.$$

Se considerarmos a população entre os censos de 1940 e 1991, então  $\alpha$  é obtida por

$$\alpha = \sqrt[51]{\frac{146825475}{41236351}} - 1 = 0.0252131,$$

o que nos permite afirmar que a população brasileira cresceu a uma taxa média de, aproximadamente, 2.5% ao ano nestes 51 anos.

Aplicando o logaritmo natural em  $P_t = (1+\alpha)^t P_0$  obtemos  $\ln P_t = t \ln(1+\alpha) + \ln P_0$ . Desta forma

$$P_t = P_0 e^{\ln(1+\alpha)t},$$



que é análoga à (2.14). Podemos comparar a solução do modelo discreto com a solução do modelo contínuo correspondente, considerando que

$$\frac{dP}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(t + \Delta t) - P(t)}{\Delta t}$$

e que  $P(t + \Delta t) - P(t) = \beta P(t)\Delta t$  ( $\beta$  taxa de crescimento).

Assim, podemos escrever o modelo contínuo por:

$$\begin{cases} \frac{dP}{dt} = \beta P(t), \\ P(0) = P_0, \end{cases}$$

cuja solução é dada por

$$P(t) = P_0 e^{\beta t}.$$

Desta maneira, os modelos discretos e contínuos fornecem a mesma solução quando

$$\beta = \ln(1 + \alpha).$$

Então, quando  $\alpha = 0.0252131$  temos  $\beta = 0.0249$ .

A função

$$P(t) = 41.236 e^{0.0249t}$$

fornece a população (em milhões de habitantes) em cada ano  $t$ .

**Exemplo 2.4** (A dinâmica de crescimento de um tumor). Experimentalmente observou-se que células de divisão de crescimento livre, tais como as células de bactérias, satisfazem o modelo de Malthus. Isto é, crescem numa razão proporcional ao volume das células de divisão naquele instante. Considere  $V(t)$  o volume das células de divisão no instante  $t$ . Logo

$$\frac{dV}{dt} = \lambda V \tag{2.15}$$

para alguma constante positiva  $\lambda$ . Integrando (2.15) obtemos

$$\ln V = \lambda t + c \quad \Rightarrow \quad V(t) = e^{t+c} = k \cdot e^{\lambda t}.$$

Considerando  $V(t_0) = V_0$ , então a solução de (2.15) com essa condição inicial é

$$V(t) = V_0 e^{\lambda t}.$$

Portanto, as células de divisão de crescimento livre crescem exponencialmente com o tempo. Uma consequência importante da solução acima é que se o intervalo de tempo for de comprimento  $t^* = \frac{\ln 2}{\lambda}$ , então

$$\begin{aligned} V(t^*) &= V_0 e^{\lambda \left(\frac{\ln 2}{\lambda}\right)} \\ \Rightarrow V(t^*) &= V_0 e^{\ln 2} = 2V_0, \end{aligned}$$

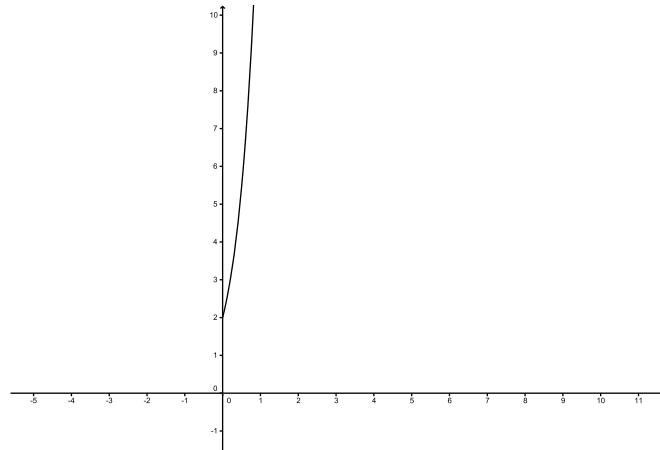


Figura 2.3: Gráfico do volume da célula no instante  $t$ .

ou seja, o volume da célula mantém-se dobrando para estes intervalos.

Por outro lado, tumores sólidos não crescem exponencialmente com o tempo. Quando o tumor se torna maior, o tempo de duplicação do volume total do tumor cresce continuamente.

**Exemplo 2.5** (As falsificações de arte de Van Meegeren). A investigação da origem de uma obra de arte é uma das aplicações do modelo de Malthus em equações diferenciais ordinárias.

Depois da libertação da Bélgica na II Guerra Mundial, Van Meegeren foi detido sob a acusação de ser um colaborador dos nazistas por ter vendido a Goering o quadro “Mulheres apanhadas em adultério” de um famoso pintor holandês do século XVII. Em 12 de julho de 1945, ele declarou que esse quadro e muitos outros, incluindo o belo “Discípulos de Emaús” eram seu próprio trabalho. Muitos duvidaram, pois acreditavam que Van Meegeren queria se livrar da acusação de traição. Foi então indicada uma comissão internacional de químicos, físicos e historiadores de arte ilustres para investigar o assunto. Eles determinaram que Van Meegeren havia falsificado os quadros e em 12 de outubro 1947 ele foi sentenciado a um ano de prisão, onde morreu em 30 de dezembro do mesmo ano.

Entretanto, mesmo com as conclusões da comissão de especialistas, muitos pediram uma prova meticulosamente científica e conclusiva de que o “Discípulos de Emaús” era realmente uma falsificação.

Para entendermos melhor, define-se a atividade de uma amostra radioativa como sendo o número de desintegrações por unidade de tempo. Sabe-se que a atividade é proporcional ao número de átomos radioativos presentes. Então, se  $N(t)$  é o número de átomos em uma amostra num instante  $t$ , temos

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N, \quad (2.16)$$

onde  $\lambda$  é chamada de constante de desintegração ou de decaimento radioativo,  $\lambda > 0$ .

A meia-vida de uma substância radioativa é definida como sendo o tempo necessário para a decomposição da metade da substância.

Para calcular a meia-vida de uma substância em termos de  $\lambda$ , suponhamos que no instante  $t_0$ ,  $N(t_0) = N_0$ . Então, a solução do problema de valor inicial (2.16),  $N(t_0) = N_0$  é

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda \int_{t_0}^t ds} = N_0 e^{-\lambda(t-t_0)} \quad \text{ou} \quad \frac{N(t)}{N_0} = e^{-\lambda(t-t_0)}.$$

Segue que

$$\ln\left(\frac{N}{N_0}\right) = \ln(e^{-\lambda(t-t_0)}) \Rightarrow \ln\left(\frac{N}{N_0}\right) = -\lambda(t-t_0).$$

Como queremos determinar a meia-vida, basta resolvermos

$$-\lambda(t-t_0) = \ln \frac{1}{2} \Rightarrow \lambda(t-t_0) = -\ln \frac{1}{2} \Rightarrow t-t_0 = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0.6931}{\lambda}.$$

Portanto, a meia-vida de uma substância é  $\ln 2$  dividido pela constante de decaimento  $\lambda$ .

A confecção de tintas para pinturas artísticas faz uso de pigmentos que contém chumbo-210 ( $^{210}\text{Pb}$ ) e uma pequena quantidade de radio-226 ( $^{226}\text{Ra}$ ). Mais ainda, a desintegração do  $^{210}\text{Pb}$  é exatamente equilibrada pela desintegração do  $^{226}\text{Ra}$ .

Seja  $y(t)$  a quantidade de  $^{210}\text{Pb}$  por grama de alvaiade (óxido de chumbo) no instante  $t$ ,  $y_0$  a quantidade de  $^{210}\text{Pb}$  por grama de alvaiade presente no instante  $t_0$  de sua formação, e  $r(t)$  o número de desintegrações do  $^{226}\text{Ra}$  por minuto, por grama de alvaiade, no instante  $t$ . Se  $\lambda$  é a constante de decaimento para o  $^{210}\text{Pb}$ , então

$$\frac{dy}{dt} = -\lambda y + r(t), \quad y(t_0) = y_0.$$

Como estamos interessados em um período de tempo de no máximo 300 anos, podemos tomar a quantidade de  $^{226}\text{Ra}$ , cuja meia-vida é de 1600 anos, como constante  $r$ . Multiplicando ambos os membros da equação pelo fator de integração  $\mu(t) = e^{\lambda t}$  obtemos

$$\frac{d}{dt} e^{\lambda t} y = r e^{\lambda t}.$$

Integrando ambos os membros em  $t$ , temos

$$\begin{aligned} e^{\lambda t} y(t) - e^{\lambda t_0} y_0 &= \frac{r}{\lambda} \left( e^{\lambda t} - e^{\lambda t_0} \right) \Rightarrow \\ e^{\lambda t} y(t) &= \frac{r}{\lambda} \left( e^{\lambda t} - e^{\lambda t_0} \right) + e^{\lambda t_0} y_0 \Rightarrow \\ y(t) &= \frac{r}{\lambda} e^{-\lambda t} \left( e^{\lambda t} - e^{\lambda t_0} \right) + e^{\lambda t_0} e^{-\lambda t} y_0 \Rightarrow \\ & y(t) = \frac{r}{\lambda} \left( 1 - e^{-\lambda(t-t_0)} \right) + y_0 e^{-\lambda(t-t_0)}. \end{aligned}$$

Observou-se que é impossível precisar a idade do quadro, porque  $y_0$  poderá variar num intervalo muito grande pois o número de desintegrações de  $^{210}\text{Pb}$  é proporcional à quantidade presente. Entretanto, é possível distinguir um quadro do século XVII de uma falsificação moderna. A base para isso foi a constatação de que se a tinta é muito antiga comparada aos 22 anos de meia-vida do  $^{210}\text{Pb}$ , então sua taxa de radioatividade será próxima à do  $^{226}\text{Ra}$  na tinta. Por outro lado, se o quadro é moderno então a radioatividade do  $^{210}\text{Pb}$  será muito maior que a radioatividade do  $^{226}\text{Ra}$ .

Assim, admitimos que o quadro em questão tem cerca de 300 anos, então  $t - t_0 = 300$  anos. Substituindo na equação anterior, temos

$$y(t) = \frac{r}{\lambda} \left( 1 - e^{-300\lambda} \right) + y_0 e^{-300\lambda} \Rightarrow$$

$$\lambda y(t) - r(1 - e^{-300\lambda}) = \lambda y_0 e^{-300\lambda} \Rightarrow$$

$$\lambda e^{300\lambda} y(t) - r e^{300\lambda} (1 - e^{-300\lambda}) = \lambda y_0 \Rightarrow$$

$$\lambda y_0 = \lambda y(t) e^{300\lambda} - r(e^{300\lambda} - 1).$$

Para calcular  $\lambda y_0$ , devemos determinar a taxa de desintegração,  $\lambda y(t)$ , do  $^{210}\text{Pb}$ , a taxa de desintegração  $r$  do  $^{226}\text{Ra}$ , é  $e^{300\lambda}$ . Como a taxa de desintegração do polônio-210 ( $^{210}\text{Po}$ ) é igual à do  $^{210}\text{Pb}$  depois de muitos anos, e como é mais fácil medir a taxa de desintegração do  $^{210}\text{Po}$ , substituímos esses valores pelos do  $^{210}\text{Pb}$ . Para calcular  $e^{300\lambda}$ , observamos que  $(t - t_0) = \frac{\ln 2}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{\ln 2}{(t - t_0)}$ , neste caso  $\lambda = \frac{\ln 2}{22}$ . Portanto,

$$e^{300\lambda} = e^{(\frac{300}{22}) \ln 2} = 2^{\frac{150}{11}}.$$

A tabela a seguir mostra as taxas de desintegrações do  $^{210}\text{Po}$  e do  $^{226}\text{Ra}$  para algumas obras.

Descrição	Desintegração do $^{210}\text{Po}$	Desintegração do $^{226}\text{Ra}$
“Discípulo de Emaús”	8,5	0,8
“Lavagem dos pés”	12,6	0,26
“Mulher ouvindo música”	10,3	0,3
“Mulher tocando bandolim”	8,2	0,17
“A rendeira”	1,5	1,4
“Garotas rindo”	5,2	6,0

Se calcularmos agora  $\lambda y_0$  para o alvaiade no quadro “Discípulos de Emaús” obtemos

$$\lambda y_0 = \lambda y(t) e^{300\lambda} - r(e^{300\lambda} - 1) \Rightarrow \lambda y_0 = (8,5) 2^{\frac{150}{11}} - 0,8(2^{\frac{150}{11}} - 1) = 98050$$

que é um valor muito alto. Portanto esse quadro deve ser uma falsificação moderna. Analogamente, mostra-se que os quadros “Lavagem dos pés”, “Mulher ouvindo música” e “Mulher tocando bandolim” são falsos Vermeers. Por outro lado, os quadros “A rendeira” e “Garotas rindo” não podem ser falsificações recentes de Vermeers como diziam alguns peritos.

### 2.2.2 Modelo de Verhulst

Pierre-François Verhulst (1804-1849) nasceu em Bruxelas e obteve seu doutorado em Matemática na University of Ghent, em 1825. Em 1835 ele se tornou professor de matemática na recém-criada Free University in Brussels.

No ano de 1835, seu compatriota Adolphe Quetelet (1796-1874), um estatístico e diretor do observatório de Bruxelas, publicou “A Treatise on Man and the Development of his Faculties”. Quetelet sugeriu que as populações não poderiam crescer geometricamente por um longo período de tempo, porque os obstáculos mencionados por Malthus formariam uma espécie de “resistência”, que ele pensou, por analogia à Mecânica, ser proporcional ao quadrado da velocidade de crescimento da população. Esta analogia não tinha base real, mas inspirou Verhulst.

Em 1838 Verhulst publicou “Note on the law of population growth”. Verhulst percebeu que a analogia de Quetelet não era razoável e propôs a seguinte equação diferencial para a população  $P(t)$  no tempo  $t$ ,

$$\frac{dP}{dt} = rP \left( 1 - \frac{P}{K} \right). \quad (2.17)$$

Quando a população  $P(t)$  é pequena em comparação com o parâmetro  $K$ , obtemos a aproximação

$$\frac{dP}{dt} \cong rP,$$

cuja solução é  $P(t) \cong P(0)e^{rt}$ , isto é, crescimento exponencial.

Assim, a taxa de crescimento diminui quando  $P(t)$  se aproxima de  $K$ .

Para obter a solução de (2.17) a reescrevemos da forma

$$\frac{1}{rP \left( 1 - \frac{P}{K} \right)} dP = dt.$$

Mas, através de frações parciais temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{rP \left( 1 - \frac{P}{K} \right)} &= \frac{A}{rP} + \frac{B}{\left( 1 - \frac{P}{K} \right)} \\ \Rightarrow \frac{1}{rP \left( 1 - \frac{P}{K} \right)} &= \frac{A \left( 1 - \frac{P}{K} \right) + BrP}{rP \left( 1 - \frac{P}{K} \right)} \\ &\Rightarrow A \left( 1 - \frac{P}{K} \right) + BrP = 1. \end{aligned}$$

Se  $P = 0$  então  $A = 1$ . Se  $P = K$  então  $BrK = 1$  o que implica que  $B = \frac{1}{rK}$ .

Logo,

$$\frac{1}{rP\left(1 - \frac{P}{K}\right)} = \frac{1}{rP} + \frac{\frac{1}{rK}}{\left(1 - \frac{P}{K}\right)}.$$

Segue que

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{rP\left(1 - \frac{P}{K}\right)} dP &= \int \frac{1}{rP} dP + \int \frac{\frac{1}{rK}}{\left(1 - \frac{P}{K}\right)} dP \\ &= \int \frac{1}{rP} dP + \frac{1}{rK} \int \frac{1}{\left(1 - \frac{P}{K}\right)} dP = \frac{1}{r} \ln |P| - \frac{1}{r} \ln \left|1 - \frac{P}{K}\right| \\ &= \frac{1}{r} \left[ \ln \left| \frac{P}{1 - \frac{P}{K}} \right| \right]. \end{aligned}$$

Voltando em (2.17), temos

$$\frac{1}{r} \left[ \ln \left| \frac{P}{1 - \frac{P}{K}} \right| \right] = t + c \quad \Rightarrow \quad \ln \left| \frac{P}{1 - \frac{P}{K}} \right| = r(t + c).$$

Aplicando exponencial em ambos os membros,

$$\begin{aligned} \left| \frac{P}{1 - \frac{P}{K}} \right| &= e^{rt+rc} \\ \Rightarrow |P| &= \left| 1 - \frac{P}{K} \right| e^{rt} \cdot e^{rc} \\ \Rightarrow P(t) &= \left| 1 - \frac{P(t)}{K} \right| e^{rt} \cdot C, \end{aligned}$$

onde  $C = e^{rc} > 0$ .

Para  $t = 0$ , com  $P(0) = P_0 \neq 0$  e  $P(0) \neq K$  obtemos

$$P_0 = \left| 1 - \frac{P_0}{K} \right| C \quad \Rightarrow \quad \frac{P_0}{\left| 1 - \frac{P_0}{K} \right|} = C,$$

assim,  $C = \frac{P_0 K}{K - P_0}$ , para  $P_0 < K$ . E  $C = \frac{P_0 K}{P_0 - K}$ , para  $P_0 > K$ .

Vamos considerar duas situações:

I) Para  $P_0 < K$  temos que  $P(t) < K$  para qualquer  $t$ , então

$$\begin{aligned}
P(t) &= \left| 1 - \frac{P(t)}{K} \right| e^{rt} \frac{P_0 K}{K - P_0}, \quad P_0 < K \\
\Rightarrow P(t) &= |K - P(t)| e^{rt} \frac{P_0}{K - P_0} \\
\Rightarrow P(t) + P(t) e^{rt} \frac{P_0}{K - P_0} &= K e^{rt} \frac{P_0}{K - P_0} \\
\Rightarrow P(t) &= \frac{\frac{K e^{rt} P_0}{K - P_0}}{\frac{K - P_0}{K - P_0} + e^{rt} \frac{P_0}{K - P_0}} \\
\Rightarrow P(t) &= \frac{K e^{rt} P_0}{K - P_0 + P_0 e^{rt}}.
\end{aligned}$$

II) Para  $P_0 > K$  temos que  $P(t) > K$  para qualquer  $t$ , então

$$\begin{aligned}
P(t) &= \left| 1 - \frac{P(t)}{K} \right| e^{rt} \frac{P_0 K}{P_0 - K} \\
\Rightarrow P(t) &= |K - P(t)| e^{rt} \frac{P_0}{P_0 - K} \\
\Rightarrow P(t) - P(t) e^{rt} \frac{P_0}{P_0 - K} &= -K e^{rt} \frac{P_0}{P_0 - K} \\
\Rightarrow P(t) &= \frac{\frac{-K e^{rt} P_0}{P_0 - K}}{\frac{P_0 - K}{P_0 - K} - e^{rt} \frac{P_0}{P_0 - K}} \\
\Rightarrow P(t) &= \frac{-K e^{rt} P_0}{P_0 - K - P_0 e^{rt}} = \frac{K e^{rt} P_0}{K - P_0 + P_0 e^{rt}}
\end{aligned}$$

Logo

$$P(t) = \frac{K e^{rt} P_0}{K + P_0 (e^{rt} - 1)}. \quad (2.18)$$

Dessa forma a população aumenta progressivamente a partir de  $P(0)$  no tempo  $t = 0$  até o limite  $K$ , que é alcançado somente quando  $t \rightarrow \infty$ . Sem dar valores para os parâmetros desconhecidos  $r$  e  $K$ , Verhulst comparou seu resultado com os dados da população da França entre 1817 e 1831, entre outros, e o ajuste mostrou ser razoável.

Voltando a equação (2.17), a qual Verhulst chamou de equação *logística*, ele notou que a curva de  $P(t)$  aumenta com a curvatura positiva (é convexa) quando  $P(t) < \frac{K}{2}$  e, em seguida, continua a aumentar em relação a  $K$ , mas com uma curvatura negativa (é côncava), logo que  $P(t) > \frac{K}{2}$ . Assim, a curva tem a forma de uma letra S distorcida.

Isto é facilmente provado pelo fato de que  $\frac{d^2 P}{dt^2} = r \left( 1 - \frac{2P}{K} \right) \frac{dP}{dt}$ . Então

$$\frac{d^2 P}{dt^2} > 0, \text{ se } P < \frac{K}{2} \text{ e } \frac{d^2 P}{dt^2} < 0, \text{ se } P > \frac{K}{2}.$$

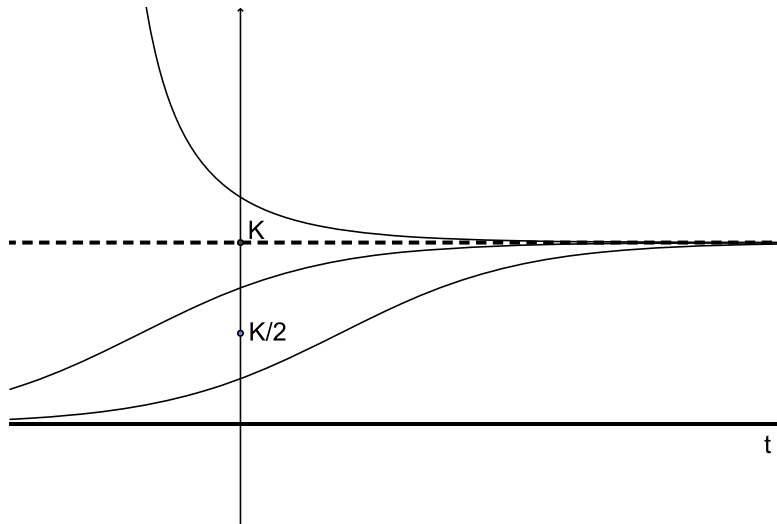


Figura 2.4: Comportamento de algumas soluções do modelo de Verhulst.

Note que os únicos pontos de equilíbrio são  $P = 0$  e  $P = K$ , sendo que  $P = K$  é assintoticamente estável e  $P = 0$  é instável.

Verhulst também explicou como podemos calcular  $r$  e  $K$  a partir de  $P(t)$  em três anos diferentes, mas igualmente espaçados <sup>1</sup>. Se  $P_0$  é a população no tempo  $t = 0$ ,  $P_1$  no tempo  $t = T$  e  $P_2$ , no tempo  $t = 2T$ , então a partir da equação (2.18) segue

$$\begin{cases} K = P_1 \frac{P_0 P_1 + P_1 P_2 - 2P_0 P_2}{P_1^2 - P_0 P_2}, \\ r = \frac{1}{T} \log \left[ \frac{1/P_0 - 1/K}{1/P_1 - 1/K} \right]. \end{cases} \quad (2.19)$$

Verhulst aplicou esse modelo para a população da Bélgica e França e percebeu que as populações no tempo médio excediam largamente os valores de  $K$ . Concluiu então, que a equação logística pode ser um modelo realista apenas por períodos de tempo de algumas décadas, mas não para períodos mais longos.

Em 1847, Verhulst desistiu da equação logística e partiu para um novo estudo do crescimento de populações. Adotou uma equação diferencial da forma

$$\frac{dP}{dt} = r \left( 1 - \frac{P}{K} \right).$$

Ele pensou em utilizar esta equação para populações  $P(t)$  acima de um certo limite. A solução deste problema é dada por

$$P(t) = K + (P(0) - K)e^{-rt/K}.$$

Apesar da hesitação de Verhulst entre os dois modelos anteriores, a equação logística foi reintroduzida de forma independente várias décadas mais tarde, por diferentes

<sup>1</sup>Constantes retiradas de [1].



peçoas para modelar o crescimento dos animais, plantas, seres humanos e órgãos do corpo humano.

O valor do parâmetro  $K$  se tornou conhecido como “capacidade suporte”.

Na realidade, a equação logística é uma modificação da equação original de Malthus. O modelo de Verhulst supõe que a população de uma certa espécie, vivendo num determinado meio, atinja um limite máximo sustentável, dado pelo parâmetro  $K$  ou simplesmente por  $P_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} P(t)$ . Considera ainda que a variação de população esteja sujeita a um fator de proporcionalidade inibidor. Sendo preciso que a equação incorpore a queda de crescimento, à medida que a população cresce.

Para usarmos a curva logística como modelo de projeção da população brasileira já feito com o modelo de Malthus, devemos estimar os valores de  $K$  e  $r$ .

**Exemplo 2.6** (População Brasileira). Pela tabela do exemplo 2.1 dada anteriormente observamos que a tendência de desaceleração do crescimento populacional ocorre a partir do censo de 1980. Pelo modelo logístico a taxa decai linearmente, em função da população. Então podemos ajustar  $r_i$  médios (entre censos consecutivos  $i$  e  $i + 1$ ) com as respectivas populações médias  $P_i$  (estimadas através de um modelo exponencial). E, em seguida,  $r_i$  e  $P_i$  são ajustados pela equação da reta dada por

$$r = -0.0001682P + 0.04182402.$$

O modelo de Verhulst será, neste caso, dado por

$$\frac{dP}{dt} = r(P)P = 0.04182402P - 0.0001682P^2,$$

ou

$$\frac{dP}{dt} = 0.04182P \left[ 1 - \frac{P^2}{248.656} \right],$$

onde  $K = 248.656$  é a população limite, isto é,  $K$  é o valor de  $P$  quando  $r = 0$ . Assim, a solução é a curva logística dada por

$$P(t) = \frac{248.656}{3.786e^{-0.0418(t-1950)} + 1},$$

onde  $3.786 = \frac{K}{P_0} - 1$ , considerando  $P_0 = P(1950) = 51.944$ .

Portanto, calculando a população brasileira no ano de 1996 obtemos

$$P(1996) = \frac{248.656}{3.786e^{-0.0418(1996-1950)} + 1} = \frac{248.656}{3.786e^{-0.0418(46)} + 1}.$$

Uma das limitações do modelo de Verhulst é o fato de que o ponto de inflexão (ou de crescimento máximo) da curva está sempre localizado no ponto  $P_m = \frac{K}{2}$ , o que nem sempre acontece nas variáveis relacionadas a fenômenos com tendência assintótica.

**Exemplo 2.7** (Crescimento da população de linguados gigantes). Outro exemplo de aplicação do modelo logístico é o crescimento natural da população de linguados gigantes em determinadas áreas do Oceano Pacífico.

Seja  $P$  a massa total (ou biomassa), em quilogramas, da população de linguado gigante no instante  $t$ . Estima-se que os parâmetros na equação logística tenham os valores  $r = 0,71$  por ano e  $K = 80,5 \times 10^6 kg$ . Considere a biomassa inicial  $P_0 = 0,25 kg$ , então para encontrar a biomassa dois anos depois devemos reescrever a equação (2.18) da forma

$$P = \frac{P_0 K}{P_0 + (K - P_0)e^{-rt}}$$

dividindo-a por  $K$  temos

$$\frac{P}{K} = \frac{P_0/K}{(P_0/K) + [1 - (P_0/K)]e^{-rt}}. \quad (2.20)$$

Usando os dados descritos, encontramos

$$\frac{P(2)}{K} = \frac{0,25}{0,25 + 0,75e^{-1,42}} \cong 0,5797.$$

Logo,  $P(2) \cong 46,7 \times 10^6 kg$ , isto é, a biomassa de linguados será de  $46.700.000 kg$ , dois anos depois.

Porém, se quisermos encontrar o instante  $\tau$  para o qual a biomassa é  $P(\tau) = 0,75K$ , devemos resolver a equação (2.20) para  $t = \tau$ .

Assim,

$$\begin{aligned} \frac{P}{K} \cdot \left[ \frac{P_0}{K} + \left( 1 - \frac{P_0}{K} \right) \right] e^{-rt} &= \frac{P_0}{K} \\ \Rightarrow e^{-rt} &= \frac{P_0/K - P/K \cdot P_0/K}{P/K(1 - P_0/K)} \\ \Rightarrow r^{-rt} &= \frac{P_0/K \cdot (1 - P/K)}{P/K(1 - P_0/K)} \\ \Rightarrow t &= -\frac{1}{r} \ln \frac{(P_0/K)[1 - (P/K)]}{(P/K)[1 - (P_0/K)]}. \end{aligned}$$

Usando os valores dados e fazendo  $y/K = 0,75$ , encontramos

$$\tau = -\frac{1}{0,71} \ln \frac{(0,25)(0,25)}{(0,75)(0,75)} = \frac{1}{0,71} \ln 9 \cong 3,095.$$

Portanto, o instante  $\tau$  será pouco mais que 3 anos.

**Exemplo 2.8** (Crescimento logístico com Limiar). Consideremos a equação

$$\frac{dy}{dt} = -r \left( 1 - \frac{y}{T} \right) y, \quad (2.21)$$

onde  $r$  e  $T$  são constantes positivas. Note que esta equação só se diferencia da equação logística pela presença do sinal negativo na expressão à direita do sinal de igualdade. Porém seu comportamento é bem diferente das soluções da equação logística. Novamente os únicos equilíbrios são  $y = 0$  e  $y = T$ .

Para encontrar a solução da (2.21) podemos substituir  $K$  por  $T$  e  $r$  por  $-r$  na (2.18) e obter

$$y(t) = \frac{y_0 T}{y_0 + (T - y_0)e^{rt}},$$

que é a solução de (2.21) sujeita à condição inicial  $y(0) = y_0$ .

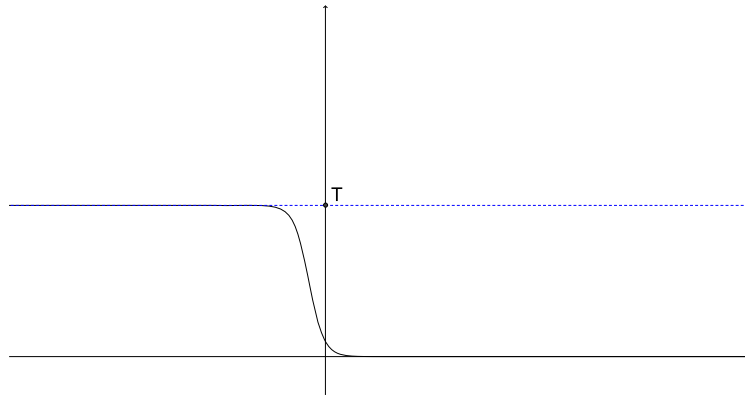


Figura 2.5: Gráfico de  $y(t) = \frac{y_0 T}{y_0 + (T - y_0)e^{rt}}$ .

Se  $0 < y_0 < T$ , segue que  $y(t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ . Se  $y_0 > T$ , então o denominador na expressão à direita do sinal de igualdade se anula para um determinado valor finito de  $t$ . Vamos chamar esse valor de  $t^*$  e calculá-lo. Fazendo

$$y_0 - (y_0 - T)e^{rt^*} = 0,$$

segue que

$$t^* = \frac{1}{r} \ln \frac{y_0}{y_0 - T}.$$

Assim,  $t = t^*$  é assíntota vertical do gráfico de  $y(t)$ , quando a população inicial  $y_0$  está acima do limiar. Ou seja, a população se torna ilimitada em um tempo finito que depende de  $y_0$ ,  $T$  e  $r$ .

Em algumas populações ocorre o fenômeno da existência de limiar. Se estiverem em poucos indivíduos, então a espécie não consegue se propagar e entra em extinção. Porém, se a população é maior que o limiar, ela cresce ainda mais. Evidentemente a população não pode crescer ilimitadamente. Então, é preciso modificar o modelo com limiar de modo a evitar um crescimento ilimitado.

A melhor maneira de fazermos isso é introduzir outro fator que tornará  $\frac{dy}{dt}$  negativo para  $y$  grande. Vamos considerar, então

$$\frac{dy}{dt} = -r \left(1 - \frac{y}{T}\right) \left(1 - \frac{y}{K}\right) y, \quad (2.22)$$

onde  $r > 0$  e  $0 < T < K$ .

A figura 2.6 mostra o gráfico de  $f(y) = -r \left(1 - \frac{y}{T}\right) \left(1 - \frac{y}{K}\right) y$ . Note que existem três pontos críticos,  $y = 0$ ,  $y = T$  e  $y = K$ , correspondendo às soluções de equilíbrio  $\phi_1(t) = 0$ ,  $\phi_2(t) = T$  e  $\phi_3(t) = K$ , respectivamente. Observando a figura, fica claro que  $\frac{dy}{dt} > 0$  para  $T < y < K$  e  $\frac{dy}{dt} < 0$  para  $y < T$  e para  $y > K$ . Portanto,  $y(t)$  é crescente no intervalo  $(T, K)$ , e decrescente nos intervalos  $(0, T)$  e  $(K, \infty)$ . Consequentemente, as soluções de equilíbrio  $\phi_1(t)$  e  $\phi_3(t)$  são assintoticamente estáveis, enquanto a solução  $\phi_2(t)$  é instável.

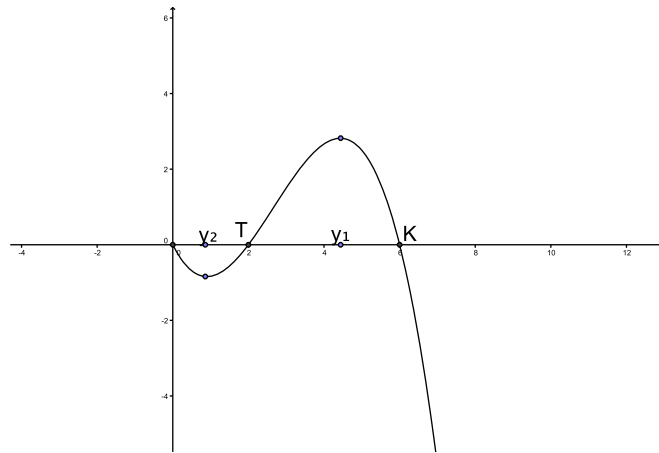


Figura 2.6:  $f(y)$  em função de  $y$  para a equação (2.22)

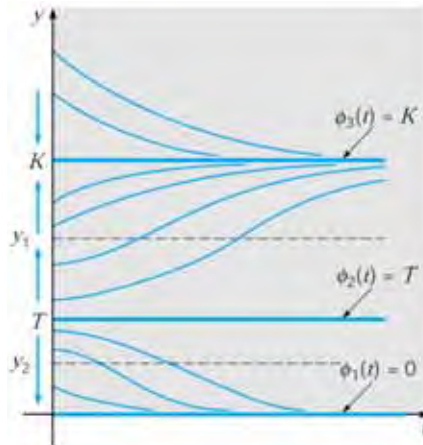


Figura 2.7: Comportamento das soluções da equação (2.22) retirado de [3].

### 2.2.3 Modelo de Gompertz

Benjamin Gompertz (1779 - 1865) era de uma família de comerciantes holandeses que se estabeleceram na Inglaterra. Gompertz nasceu na Inglaterra, mas não foi aceito nas universidades de seu país por ser judeu. Assim tornou-se autodidata e aprendeu

Matemática através da leitura de autores como Newton e Maclaurin. Com 18 anos de idade foi aceito na Sociedade de Matemática de Londres.

Gompertz estudou cálculo atuarial<sup>2</sup>, mas sua maior contribuição foi a Lei Gompertz para mortalidade. Em 1825, mostrou que a taxa de mortalidade aumenta em uma progressão geométrica. Assim, quando as taxas de mortalidade são plotadas em uma escala logarítmica, uma linha reta conhecida como função de Gompertz é obtida. Essa função indica a taxa de envelhecimento atuarial.

Sua experiência na área o levou a ser consultado pelo governo, prestando depoimentos a comissões de parlamentares entre 1825 e 1827, além de desenvolver um trabalho computacional importante para a junta médica do exército.

Gompertz foi membro fundador da “Royal Statistical Society” em 1834. Em 1848 aposentou-se de todas suas funções para se dedicar em seus estudos de Matemática. Em 1865, ele faleceu de um ataque de paralisia em sua casa.

No artigo “On the Nature of the Function Expressive of the Law Human Mortality” publicado em 1825, na revista *Philosophical Transactions of the Royal Society* ele mostrou que o número de sobreviventes de idade  $x$  pode ser dada pela equação

$$L_x = kg^{c^x}, \quad (2.23)$$

onde  $k, g$  e  $c$  são constantes. A curva de Gompertz foi, por algum tempo, de interesse somente de atuários. Entretanto, atualmente tem sido usada por vários autores como curva de crescimento de fenômenos biológicos e econômicos.

Vamos estudar algumas propriedades matemáticas desta curva, indicando alguma de suas utilidades e de suas limitações como curva de crescimento.

No trabalho de Winsor [13] o autor considerou mais conveniente tratar da equação

$$y(x) = ke^{-e^{a-bx}}, \quad (2.24)$$

onde  $k$  e  $b$  são constantes positivas.

De (2.24) se  $x \rightarrow -\infty$  então  $y \rightarrow 0$ , e se  $x \rightarrow +\infty$  então  $y \rightarrow k$ . Derivando a equação (2.24) temos

$$\frac{dy}{dx} = kbe^{a-bx}e^{-e^{a-bx}} = bye^{a-bx}.$$

Notemos que a derivada será positiva para um conjunto limitado de valores de  $x$ , e tende a 0 quando  $x$  tende a infinito. Derivando (2.24) novamente obtemos

$$\frac{d^2y}{dx^2} = b^2ye^{a-bx}(e^{a-bx} - 1).$$

Segue que o ponto de inflexão está em  $x = \frac{a}{b}$ , isto é,  $y = \frac{k}{e}$ .

---

<sup>2</sup>O cálculo atuarial é a disciplina que se aplica métodos de matemática e estatística de forma a determinar o risco e retorno nos ramos dos seguros e finanças.

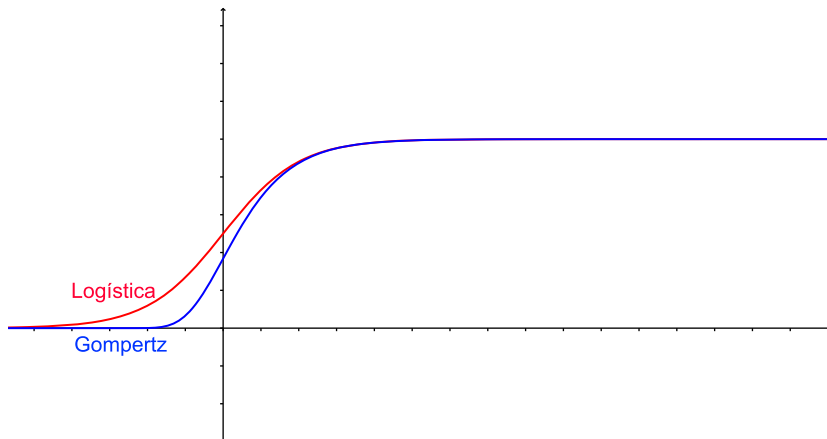


Figura 2.8: Gráficos dos modelos de Verhulst e Gompertz.

A tabela a seguir apresenta uma comparação entre os modelos de Gompertz e de Verhulst.

Propriedades	Gompertz	Logística
Solução	$y = ke^{-e^{-bx}}$	$y = \frac{K}{1 + e^{-bx}}$
Número de constantes	3	3
Assíntotas	$y = 0, y = k$	$y = 0, y = k$
Ponto de inflexão	$x = \frac{a}{b}, y = \frac{k}{e}$	$x = \frac{a}{b}, y = \frac{k}{2}$
Forma da equação	$\log \log \frac{k}{y} = a - bx$	$\log \frac{k-y}{y} = a - bx$
Simetria	Assimétrica	Simétrica no ponto de inflexão
Taxa de crescimento	$\frac{dy}{dx} = bye^{a-bx} = by \log \frac{k}{y}$	$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{k}y(k-y)$
Taxa de crescimento máximo	$\frac{bk}{e}$	$\frac{bk}{4}$
Taxa relativa de crescimento como função do tempo	$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = be^{a-bx}$	$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{b}{1+e^{-a+bx}}$
Taxa relativa de crescimento como função de tamanho	$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = b(\log k - \log y)$	$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \frac{b}{k}(k-y)$

Podemos usar a curva de Gompertz com a expectativa que a aproximação para dados será boa acima do ponto de inflexão.

O professor do departamento de Biologia da Universidade Johns Hopkins, Charles P. Winsor, faz a seguinte afirmação em seu artigo

*“Entretanto a expectativa da curva de Gompertz será mostrar-se mais poderosa que qualquer outro modelo com três constantes com a curva na forma de S. Por exemplo, a logística*

$$y = \frac{k}{1 + e^{a-bx}},$$

*possui o mesmo número de constantes que a curva de Gompertz, mas tem o ponto de inflexão entre as assíntotas.”*

**Exemplo 2.9** (Dinâmica de crescimento de um tumor). Na seção 2.2, exemplo 2.4 vimos o crescimento de um tumor sólido através do modelo de Malthus, porém os tumores sólidos não crescem exponencialmente com o tempo. Quando o tumor se torna maior, o tempo de duplicação do volume total do tumor cresce continuamente.

Vários pesquisadores mostraram que os dados para muitos tumores sólidos ajustam-se bem pela equação

$$V(t) = V_0 e^{\frac{\lambda}{\alpha}(1-e^{-\alpha t})} = V_0 e^{\frac{\lambda}{\alpha}} e^{-e^{-\alpha t}}, \quad (2.25)$$

onde  $\lambda$  e  $\alpha$  são constantes positivas.

A equação (2.25) nada mais é que a Lei de Gompertz para  $a = 0$  e  $b = \alpha$ . Isto significa que o tumor cresce cada vez mais lentamente com a passagem do tempo, e que tende ao volume limite  $V_0 e^{\frac{\lambda}{\alpha}}$ . Para compreender melhor este problema devemos encontrar uma equação diferencial que satisfaça  $V(t)$ . Derivando (2.25) obtemos

$$\frac{dV}{dt} = V_0 \lambda e^{(-\alpha t)} e^{\frac{\lambda}{\alpha}(1-e^{-\alpha t})} = \lambda e^{-\alpha t} V. \quad (2.26)$$

A partir disso desenvolveram-se duas teorias conflitantes para a dinâmica de crescimento de um tumor. Elas correspondem às duas disposições da equação (2.26).

De acordo com a primeira teoria, o efeito retardado de crescimento do tumor é devido a um crescimento do tempo médio de geração das células, sem uma mudança na proporção das células reprodutoras. Quando passa o tempo as células reprodutoras amadurecem, ou envelhecem, e portanto se dividem mais lentamente. Esta teoria corresponde à

$$\frac{dV}{dt} = \lambda e^{-\alpha t} V.$$

A outra teoria sugere que o tempo médio de geração das células de divisão permanece constante, e a demora no crescimento é devida à perda de células reprodutoras do tumor. Esta teoria é dada pela equação

$$\frac{dV}{dt} = \lambda(e^{-\alpha t} V)$$

Neste último caso a necrose aparece em um tamanho crítico para um tipo particular de tumor, e em seguida o “centro” de necrose cresce rapidamente quando a massa total do tumor cresce. De acordo com essa teoria, um centro de necrose se desenvolve porque em muitos tumores o suprimento de sangue, e portanto de oxigênio e nutrientes é quase completamente confinado à superfície do tumor. Quando o tumor cresce o suprimento de oxigênio ao centro por difusão se torna cada vez mais difícil, resultando na formação de um centro de necrose.

**Exemplo 2.10** (Crescimento da massa de um animal). Podemos usar a curva de Gompertz para descrever o crescimento de animais e de tecidos. A equação a seguir expressa a massa de um animal em função da idade do animal

$$M = A e^{-e^{-B(t-C)}}, \quad (2.27)$$

onde  $M$  representa a massa em kg,  $t$  a idade em dias,  $A$  a massa na maturidade em kg,  $B$  o crescimento relativo no ponto de inflexão (kg/dia por kg) e  $C$  a idade no ponto de inflexão em dias.

Assim a taxa de crescimento é dada pela derivada de (2.27)

$$\frac{dM}{dt} = AB e^{-B(t-C)-e^{-B(t-C)}}.$$

Observe que a massa inicial é sempre maior que zero, pois o animal já nasce com alguma massa, e a massa  $M$  tende a atingir um valor máximo, dado pelo parâmetro  $A$ .

A taxa de crescimento é máxima em torno do ponto de inflexão, onde a massa é igual a  $\frac{A}{e}$ .

A taxa de crescimento relativo  $R$  é definida como a taxa de crescimento dividida pela massa corporal, então  $R$  é dada por

$$R = \frac{\frac{dM}{dt}}{M} = B e^{-B(t-C)}.$$

Assim quanto maior o a idade  $t$  menor o valor de  $R$ . No momento do ponto de inflexão temos

$$R_{\text{inflexão}} = \frac{AB e^{-B(C-C)-e^{-B(C-C)}}}{\frac{A}{e}} = B e^{-B \cdot 0 - e^{B \cdot 0} + 1} = B.$$

Ou seja,  $B$  é a taxa de crescimento relativo, em kg/dia por kg, no ponto em que o crescimento é máximo. Assim, para um animal que chega a uma taxa de crescimento máxima de 0,1 kg/dia aos 10 kg, o valor de  $B$  é igual a 0,01.



# 3 Modelos com equações diferenciais de segunda ordem

Introduzimos neste capítulo a teoria elementar de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem, que será necessária para compreendermos algumas aplicações. Estudaremos alguns modelos e analisaremos o comportamento de suas soluções.

## 3.1 Equações lineares de segunda ordem

Nesta seção apresentamos as equações lineares de segunda ordem com coeficientes constantes, o método de redução de ordem, o método dos coeficientes a determinar e o método de variação de parâmetros.

Uma equação diferencial de segunda ordem é uma equação da forma

$$\frac{d^2y}{dt^2} = f\left(t, y, \frac{dy}{dt}\right). \quad (3.1)$$

Denotamos por linear, assim como nas EDO's de primeira ordem, sempre que a função desconhecida e suas derivadas não são multiplicadas entre si, isto é, são elevadas somente a potência 1 e não são argumentos de outras funções.

Como muitas das equações da forma (3.1) são extremamente difíceis de serem tratadas analiticamente, trabalharemos inicialmente com equações lineares dadas por:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p(t)\frac{dy}{dt} + q(t)y = f(t), \quad (3.2)$$

onde  $p, q, f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  são funções contínuas definidas num intervalo aberto  $(a, b) \subset \mathbb{R}$ .

É sempre importante fornecermos condições que garantam a existência de soluções de equações diferenciais de segunda ordem e é isso que faremos através do próximo teorema.

**Teorema 3.1.** *Se  $p, q$  e  $f$  são funções contínuas em  $(a, b)$ , então o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \frac{d^2y}{dt^2} + p(t)\frac{dy}{dt} + q(t)y = f(t), \\ y(t_0) = y_0, \\ y'(t_0) = \nu_0 \end{cases} \quad (3.3)$$

tem uma, e somente uma, solução definida em todo o intervalo  $(a, b)$ .

A prova pode ser encontrada em [6].

**Definição 3.1.** Duas funções  $\phi_1, \phi_2 : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  são linearmente independentes (l.i.) se a condição

$$\alpha_1 \phi_1(t) + \alpha_2 \phi_2(t) = 0, \quad \text{para todo } t \in (a, b),$$

implicar  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ . Caso contrário, são linearmente dependentes (l.d.).

**Definição 3.2.** Sejam  $\phi_1, \phi_2 : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  funções diferenciáveis, o determinante

$$W(\phi_1, \phi_2)(t) = \begin{vmatrix} \phi_1(t) & \phi_2(t) \\ \phi_1'(t) & \phi_2'(t) \end{vmatrix} \quad (3.4)$$

é chamado o wronskiano das funções  $\phi_1$  e  $\phi_2$ .

**Teorema 3.2.** Se  $f$  e  $g$  são funções diferenciáveis em um intervalo aberto  $(a, b)$  e  $W(f, g)(t_0) \neq 0$  em algum ponto  $t_0$  em  $(a, b)$ , então  $f$  e  $g$  são linearmente independentes em  $(a, b)$ . Além disso, se  $f$  e  $g$  são linearmente dependentes em  $(a, b)$ , então  $W(f, g)(t) = 0$  para todo  $t$  em  $(a, b)$ , ou seja, é identicamente nulo.

*Demonstração.* Consideremos a combinação linear a seguir e sua derivada.

$$\begin{cases} K_1 f(t_0) + K_2 g(t_0) = 0 \\ K_1 f'(t_0) + K_2 g'(t_0) = 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

Como  $W(f, g)(t_0) \neq 0$  por hipótese, então a única solução de (3.5) é  $K_1 = K_2 = 0$ . Portanto  $f$  e  $g$  são linearmente independentes.

Para provar a segunda parte do teorema consideremos  $f$  e  $g$  linearmente dependentes e  $W(f, g)(t_0) \neq 0$  para algum  $t_0$  em  $(a, b)$ . Então, pela primeira parte do teorema,  $f$  e  $g$  são linearmente independentes, o que é uma contradição. Portanto  $W(f, g)(t) \equiv 0$ .  $\square$

### 3.1.1 Equações diferenciais de segunda ordem com coeficientes constantes

O primeiro caso que estudaremos será o das equações lineares de segunda ordem homogêneas com coeficientes constantes, ou seja, equações do tipo

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + p \frac{dy}{dt} + qy = 0, \quad (3.6)$$

onde  $p, q$  são constantes. Pelo teorema anterior, tomando  $t_0 \in (a, b)$ , o PVI constituído por (3.6) e pelas condições iniciais

$$\begin{cases} y(t_0) = 1, \\ y'(t_0) = 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

tem uma única solução  $\phi_1 : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ . E mantendo a equação (3.6) e considerando as condições iniciais

$$\begin{cases} y(t_0) = 0, \\ y'(t_0) = 1 \end{cases} \quad (3.8)$$

este PVI também tem uma única solução  $\phi_2 : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ .

Toda solução de (3.6) se escreve da forma

$$\phi(t) = \alpha_1 \phi_1(t) + \alpha_2 \phi_2(t), \quad (3.9)$$

onde  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  são constantes convenientes. Esta afirmação está demonstrada no Apêndice A, pois o conjunto solução de (3.6) forma um espaço vetorial de dimensão 2.

### 3.1.2 Método de redução de ordem da equação diferencial

Dada a equação diferencial linear homogênea de segunda ordem

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + p \frac{dy}{dt} + qy = 0, \quad (3.10)$$

com  $p, q : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  funções contínuas. Suponhamos que seja conhecida uma das soluções  $y_1(t)$  tal que  $y_1 : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ . O método de redução de ordem consiste em encontrar uma segunda solução na forma

$$y_2(t) = \mu(t)y_1(t), \quad (3.11)$$

onde  $\mu(t)$  é uma função a determinar. Como  $y_2$  deve ser solução então

$$\mu(t)[y_1''(t) + p(t)y_1'(t) + q(t)y_1(t)] + \mu'(t)[2y_1'(t) + p(t)y_1(t)] + \mu''(t)y_1(t) = 0,$$

como  $y_1$  é solução da equação (3.6) segue que

$$\mu'(t)[2y_1'(t) + p(t)y_1(t)] + \mu''(t)y_1(t) = 0.$$

Ou seja,

$$\mu'(t) \left[ \frac{2y_1'(t)}{y_1(t)} + p(t) \right] + \mu''(t) = 0.$$

Substituindo  $z(t) = \mu'(t)$  temos

$$z(t) \left[ \frac{2y_1'(t)}{y_1(t)} + p(t) \right] + z'(t) = 0,$$

cujas solução é dada por

$$z(t) = ce^{-\int p(t) + 2[y_1'(t)/y_1(t)] dt} = cv(t),$$

onde  $c$  é uma constante. Logo,

$$\mu(t) = \int z(t) dt = c \int v(t) dt$$

e portanto  $y_2(t) = c \int v(t) dt \cdot y_1(t) = cy_1(t) \int v(t) dt$ .

Assim  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  são soluções de (3.6) e a solução geral é da forma  $y(t) = k_1 y_1(t) + k_2 y_2(t)$ , com  $k_1$  e  $k_2$  constantes reais.

### 3.1.3 Equação característica

Observando a equação (3.6), percebemos que qualquer solução será uma função que se anula com suas derivadas. Logo, ela é uma função similar às suas derivadas. Assim, é razoável procurar por soluções da forma

$$y = e^{rt},$$

onde  $r$  é uma constante. Substituindo  $y$  em (3.6) obtemos,

$$(e^{rt})'' + p(e^{rt})' + q(e^{rt}) = 0. \quad (3.12)$$

Calculando as derivadas, encontramos

$$r^2 e^{rt} + pr e^{rt} + q e^{rt} = 0 \quad \Rightarrow \quad (r^2 + pr + q)e^{rt} = 0,$$

ou seja, para  $y = e^{rt}$  ser solução da equação (3.6) então  $(r^2 + pr + q) = 0$ , esta é uma equação quadrática chamada de equação polinomial associada ou equação característica.

Vamos analisar as três possibilidades para o discriminante  $p^2 - 4q$ :

(i) Se  $p^2 - 4q > 0$ , então temos raízes reais distintas.

Neste caso,

$$r_1 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \quad \text{e} \quad r_2 = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

Logo,  $e^{r_1 t}$  e  $e^{r_2 t}$  são soluções da equação (3.6) e seu wronskiano

$$W(t) = \begin{vmatrix} e^{r_1 t} & e^{r_2 t} \\ r_1 e^{r_1 t} & r_2 e^{r_2 t} \end{vmatrix} = (r_2 - r_1)e^{(r_1 + r_2)t} \neq 0, \quad (3.13)$$

para qualquer  $t \in \mathbb{R}$ . Ou seja, essas soluções são linearmente independentes. Portanto a solução geral é dada por

$$y = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t},$$

onde  $A$  e  $B$  são constantes.

(ii) Se  $p^2 - 4q = 0$ , então temos raízes reais iguais.

Neste caso,  $r_1 = r_2 = -\frac{p}{2}$  e  $y_1 = e^{-\frac{p}{2}t}$  é uma solução de (3.6). Temos que encontrar uma outra solução, usando o método de redução de ordem, tal que  $y_2(t) = v(t)e^{-\frac{p}{2}t}$  seja solução de (3.6). Substituindo  $y_2$  em (3.6), segue que

$$(v(t)e^{-\frac{p}{2}t})'' + p(t)(v(t)e^{-\frac{p}{2}t})' + q(t)(v(t)e^{-\frac{p}{2}t}) = 0$$

o que implica

$$\begin{aligned} v''(t)e^{-\frac{p}{2}t} - \frac{p}{2}v'(t)e^{-\frac{p}{2}t} + \frac{p^2}{4}v(t)e^{-\frac{p}{2}t} - \frac{p}{2}v'(t)e^{-\frac{p}{2}t} \\ + pv'(t)e^{-\frac{p}{2}t} - v(t)\frac{p^2}{2}e^{-\frac{p}{2}t} + qv(t)e^{-\frac{p}{2}t} = 0, \end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned} e^{-\frac{p}{2}t} \left[ v''(t) + \left( \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{2} + q \right) v(t) \right] &= 0, \\ \Rightarrow e^{-\frac{p}{2}t} \left[ v''(t) - \left( \frac{p^2 - 4q}{4} \right) v(t) \right] &= 0. \end{aligned}$$

Como  $e^{-\frac{p}{2}t} \neq 0$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  e  $p^2 - 4q = 0$ , temos

$$v''(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad v'(t) = a \quad \Rightarrow \quad v(t) = at + b, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

Basta tomar  $a = 1$  e  $b = 0$ , logo  $v(t) = t$  então  $y_2(t) = te^{-\frac{p}{2}t}$ .

Como

$$W(t) = \begin{vmatrix} e^{-\frac{p}{2}t} & te^{-\frac{p}{2}t} \\ -\frac{p}{2}e^{-\frac{p}{2}t} & -\frac{p}{2}e^{-\frac{p}{2}t} + e^{-\frac{p}{2}t} \end{vmatrix} = -\frac{p}{2}te^{-\frac{p}{2}t} + \frac{p}{2}te^{-\frac{p}{2}t} = e^{-pt} \neq 0, \quad (3.14)$$

então  $y_1$  e  $y_2$  são linearmente independentes.

Portanto a solução geral é  $y(t) = Ae^{-\frac{p}{2}t} + Bte^{-\frac{p}{2}t}$ , com  $A, B \in \mathbb{R}$ .

(iii) Se  $p^2 - 4q < 0$ , então temos raízes complexas conjugadas

$$r_1 = \lambda + i\nu \quad \text{e} \quad r_2 = \lambda - i\nu$$

onde  $\lambda = -\frac{p}{2}$  e  $\nu i = \frac{1}{2}i\sqrt{p^2 - 4q}$ .

Logo,  $y_1(t) = e^{(\lambda+i\nu)t}$ ,  $y_2(t) = e^{(\lambda-i\nu)t}$ .

Pela fórmula de Euler recorrente de série de Taylor temos,

$$y_1(t) = e^{(\lambda+i\nu)t} = e^{\lambda t} e^{i\nu t} = e^{\lambda t} (\cos \nu t + i \operatorname{sen} \nu t)$$

e

$$y_2(t) = e^{(\lambda-i\nu)t} = e^{\lambda t} e^{-i\nu t} = e^{\lambda t} (\cos \nu t - i \operatorname{sen} \nu t).$$

Porém, queremos encontrar soluções reais, e para isso usaremos a seguinte proposição.

**Proposição 3.1.** *Se  $y(t) = u(t) + iv(t)$  é uma solução a valores complexos de (3.6), então  $u$  e  $v$  são soluções reais de (3.6).*

*Demonstração.* Como  $y$  é solução de (3.6), então

$$y'' + py' + qy = 0,$$

ou seja,

$$[u'' + pu' + qu] + i[v'' + pv' + qv] = 0.$$

Mas para que um número complexo seja zero é necessário que sua parte real e sua parte imaginária sejam zero. Logo,

$$u'' + pu' + qu = 0 \quad \text{e} \quad v'' + pv' + qv = 0.$$

Portanto,  $u$  e  $v$  são soluções de (3.6). □

Assim, obtemos um par de soluções reais

$$u(t) = e^{\lambda t} \cos \nu t, \quad v(t) = e^{\lambda t} \sin \nu t.$$

O wronskiano de  $u$  e  $v$  é

$$\begin{aligned} W(u, v)(t) &= \begin{vmatrix} e^{\lambda t} \cos \nu t & e^{\lambda t} \sin \nu t \\ \lambda e^{\lambda t} \cos \nu t - \nu e^{\lambda t} \sin \nu t & \lambda e^{\lambda t} \sin \nu t + \nu e^{\lambda t} \cos \nu t \end{vmatrix} = \\ &= \lambda e^{2\lambda t} \cos \nu t \sin \nu t + \nu e^{2\lambda t} \cos^2 \nu t - \lambda e^{2\lambda t} \cos \nu t \sin \nu t \\ &\quad + \nu e^{2\lambda t} \sin^2 \nu t = \nu e^{2\lambda t} (\cos^2 \nu t + \sin^2 \nu t) = \nu e^{2\lambda t} \neq 0. \end{aligned}$$

Portanto,  $u$  e  $v$  é linearmente independente e a solução geral de (3.6) é

$$y = c_1 e^{\lambda t} \cos \nu t + c_2 e^{\lambda t} \sin \nu t,$$

onde  $c_1$  e  $c_2$  são constante reais.

### 3.1.4 Método dos coeficientes indeterminados

Vamos agora estudar as equações diferenciais lineares de segunda ordem não homogêneas (3.2).

Chamamos de equação homogênea associada à (3.2) quando  $f(t) \equiv 0$ , isto é,

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + p(t) \frac{dy}{dt} + q(t)y = 0 \tag{3.15}$$

**Teorema 3.3.** *Sejam  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  soluções linearmente independentes da equação homogênea (3.15) e seja  $\varphi(t)$  uma solução particular da equação não homogênea (3.2). Então toda solução  $y(t)$  de (3.2) é da forma*

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \varphi(t), \tag{3.16}$$

onde  $c_1, c_2$  são constantes.

*Demonstração.* Sejam  $y(t)$  e  $\varphi(t)$  soluções de (3.15) e considere  $\psi(t) = y(t) - \varphi(t)$ . Então

$$\begin{aligned}y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) &= g(t), \\ \varphi''(t) + p(t)\varphi'(t) + q(t)\varphi(t) &= g(t).\end{aligned}$$

Fazendo a diferença entre as equações acima, obtemos

$$(y'' - \varphi'')(t) + p(t)(y' - \varphi')(t) + q(t)(y - \varphi)(t) = g(t) - g(t),$$

o que implica

$$\psi''(t) + p(t)\psi'(t) + q(t)\psi(t) = 0.$$

Portanto  $\psi(t)$  é solução de (3.15). Mas toda solução de (3.15) é uma combinação linear de  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$ . Então,

$$\begin{aligned}y(t) - \varphi(t) &= c_1y_1(t) + c_2y_2(t) \\ \Rightarrow y(t) &= c_1y_1(t) + c_2y_2(t) + \varphi(t).\end{aligned}$$

Portanto toda solução de (3.15) é da forma  $y(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t) + \varphi(t)$ .  $\square$

O método dos coeficientes indeterminados requer uma hipótese inicial sobre a forma da solução particular  $\varphi(t)$ , mas com os coeficientes desconhecidos. Fazemos então, a substituição de  $\varphi(t)$  em (3.2) e tentamos determinar os coeficientes de modo a satisfazer a equação. Encontrados os coeficientes teremos a solução da equação diferencial. Caso não seja possível encontrar os coeficientes significa que não há solução da forma que propusemos. Assim, devemos modificar a hipótese inicial e tentar novamente. Vamos estudar equações da forma (3.2) com  $p$  e  $q$  constantes reais e os casos em que  $g(t)$  é uma função exponencial, ou polinomial, ou seno ou cosseno. Dividiremos a teoria em casos.

**Caso 1:** Se  $f(t) = P_n(t) = a_nt^n + \dots + a_1t + a_0$ ,  $a_n \neq 0$  então

$$y''(t) + py'(t) + qy(t) = a_nt^n + a_{n-1}t^{n-1} + \dots + a_1t + a_0. \quad (3.17)$$

Nosso candidato inicial é

$$y_p(t) = A_nt^n + A_{n-1}t^{n-1} + \dots + A_1t + A_0$$

Substituindo na equação diferencial temos

$$\begin{aligned}[n(n-1)A_nt^{n-2} + (n-1)(n-2)A_{n-1}t^{n-3} + \dots + 6A_3 + 2A_2] \\ + p[nA_nt^{n-1} + (n-1)A_{n-1}t^{n-2} + \dots + 2A_2t + A_1] \\ + q[A_nt^n + A_{n-1}t^{n-1} + \dots + A_1t + A_0] = a_nt^n + a_{n-1}t^{n-1} + \dots + a_1t + a_0.\end{aligned}$$

Igualando os coeficientes, obtemos

$$\begin{cases} qA_n = a_n \\ qA_{n-1} + npA_n = a_{n-1} \\ \dots \\ qA_0 + pA_1 + 2A_2 = a_0. \end{cases} \quad (3.18)$$

Se  $q \neq 0$  então  $A_n = \frac{a_n}{q}$ . Em seguida obtemos  $A_{n-1} = \frac{a_{n-1} - (npa_n/q)}{q}$  e assim sucessivamente.

Se  $q = 0$ , mas  $p \neq 0$ , então o polinômio à esquerda da igualdade tem grau  $n - 1$  enquanto que o polinômio à direita da igualdade tem grau  $n$ . Para garantir que  $y_p''(t) + py_p'(t)$  é um polinômio de grau  $n$  devemos escolher  $y_p(t)$  como sendo um polinômio de grau  $n + 1$ . Assim,

$$y_p(t) = t(A_n t^n + A_{n-1} t^{n-1} + \dots + A_1 t + A_0).$$

Caso  $q = 0$  e  $p = 0$ , supomos  $y_p(t)$  sendo de grau  $n + 2$ , então tomamos

$$y_p(t) = t^2(A_n t^n + A_{n-1} t^{n-1} + \dots + A_1 t + A_0).$$

Assim, o termo  $y_p''(t)$  é um polinômio de grau  $n$  e podemos proceder como inicialmente.

**Caso 2:** Se  $g(t) = e^{\alpha t} P_n(t)$  então

$$y''(t) + py'(t) + qy(t) = e^{\alpha t} P_n(t), \quad (3.19)$$

e devemos remover o fator  $e^{\alpha t}$  para torná-la na forma de (3.17). Para isto, basta tomar  $y(t) = e^{\alpha t} v$ , e assim,  $y'(t) = e^{\alpha t}(v' + \alpha v)$  e  $y''(t) = e^{\alpha t}(v'' + 2\alpha v' + \alpha^2 v)$ . Substituindo em (3.19) obtemos

$$\begin{aligned} e^{\alpha t}(v'' + 2\alpha v' + \alpha^2 v) + p[e^{\alpha t}(v' + \alpha v)] + q[e^{\alpha t}v] &= e^{\alpha t} P_n(t) \\ \Rightarrow v'' + v'(2\alpha + p) + v(\alpha^2 + \alpha + q) &= P_n(t). \end{aligned}$$

Dessa forma, se  $v(t)$  é solução da equação acima então  $y(t) = e^{\alpha t} v$  é solução de (3.19). Para determinar  $v(t)$  procedemos como no *Caso 1*.

**Exemplo 3.1.** Vamos determinar a solução geral da equação

$$y'' - 4y' + 4y = (1 + t + t^2 + \dots + t^{27})e^{2t}$$

A equação característica  $r^2 - 4r + 4 = 0$  possui raízes iguais  $r_1 = r_2 = 2$ . Portanto,  $y_1(t) = e^{2t}$  e  $y_2(t) = te^{2t}$  são soluções da equação homogênea associada. Para encontrarmos uma solução particular fazemos  $y(t) = e^{2t}v$ , o que implica que  $y'(t) = (v' + 2v)e^{2t}$  e  $y''(t) = (v'' + 4v' + 4v)e^{2t}$ . Substituindo na equação, obtemos

$$\begin{aligned} (v'' + 4v' + 4v)e^{2t} - 4[(v' + 2v)e^{2t}] + 4[e^{2t}v] &= (1 + t + t^2 + \dots + t^{27})e^{2t} \\ \Rightarrow v'' &= (1 + t + t^2 + \dots + t^{27}). \end{aligned}$$



Integrando duas vezes, temos

$$v(t) = \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{2.3} + \frac{t^4}{3.4} \dots + \frac{t^{29}}{28.29}$$

Logo, uma solução particular é

$$y_p = \left( \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{12} \dots + \frac{t^{29}}{812} \right) e^{2t}.$$

Portanto, a solução geral da equação dada é

$$\begin{aligned} y(t) &= c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t} + e^{2t} \left( \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{12} \dots + \frac{t^{29}}{812} \right) \\ &= e^{2t} \left( c_1 + c_2 t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \frac{t^4}{12} \dots + \frac{t^{29}}{812} \right). \end{aligned}$$

**Caso 3:** Consideremos a equação diferencial

$$y''(t) + py'(t) + qy(t) = e^{\alpha t} P_n(t) \operatorname{sen} \beta t. \quad (3.20)$$

Podemos reduzir o problema de encontrar uma solução particular  $y_p$  de (3.20) a um problema mais simples utilizando o seguinte lema.

**Lema 3.1.** *Se  $y^*(t) = \mu(t) + iv(t)$  é uma solução com valores complexos da equação*

$$y''(t) + py'(t) + qy(t) = g_1(t) + ig_2(t)$$

*onde  $p$  e  $q$  são reais. Então  $\mu(t)$  é solução de  $y''(t) + py'(t) + qy(t) = g_1(t)$  e  $v(t)$  é solução de  $y''(t) + py'(t) + qy(t) = g_2(t)$ .*

*Demonstração.* Substituindo  $y^*$  na equação diferencial, obtemos

$$\begin{aligned} \mu''(t) + iv''(t) + p(\mu'(t) + iv'(t)) + q(\mu(t) + iv(t)) &= g_1(t) + ig_2(t) \\ \Rightarrow [\mu''(t) + p\mu'(t) + q\mu(t)] + i[v''(t) + pv'(t) + v(t)] &= g_1(t) + ig_2(t). \end{aligned}$$

Igualando as partes real e imaginária, temos

$$\begin{cases} \mu''(t) + p\mu'(t) + q\mu(t) = g_1(t), \\ v''(t) + pv'(t) + qv(t) = g_2(t). \end{cases} \quad (3.21)$$

O que conclui a prova do lema. □

Notemos que  $e^{i\beta t} = \cos \beta t + i \operatorname{sen} \beta t$  e consideremos  $y_p(t) = \mu(t) + iv(t)$  uma solução particular da equação

$$y''(t) + py'(t) + qy(t) = e^{\alpha t} P_n(t) e^{i\beta t}. \quad (3.22)$$

Assim, a parte real do segundo membro de (3.22) é  $e^{\alpha t} P_n(t) \cos \beta t$  e a parte imaginária é  $e^{\alpha t} P_n(t) \operatorname{sen} \beta t$ .

Logo, pelo Lema 3.1,  $\mu(t)$  é solução de

$$y''(t) + py'(t) + qy(t) = e^{\alpha t} P_n(t) \cos \beta t,$$

e  $v(t)$  é solução de

$$y''(t) + py'(t) + qy(t) = e^{\alpha t} P_n(t) \sen \beta t.$$

Neste caso, devemos escolher  $y_p$  da forma

$$y_p(t) = e^{(\alpha+i\beta)t}(A_n t^n + A_{n-1} t^{n-1} + \dots + A_0) + e^{(\alpha-i\beta)t}(B_n t^n + B_{n-1} t^{n-1} + \dots + B_0),$$

ou, equivalentemente,

$$y_p(t) = e^{\alpha t}(A_n t^n + A_{n-1} t^{n-1} + \dots + A_0) \cos \beta t + e^{\alpha t}(B_n t^n + B_{n-1} t^{n-1} + \dots + B_0) \sen \beta t.$$

Se  $\alpha \pm i\beta$  forem raízes da equação característica da homogênea associada, temos que multiplicar cada um dos polinômios por  $t$  para aumentar o grau de cada um.

**Exemplo 3.2.** Encontremos uma solução de

$$y''(t) - 3y'(t) - 4y(t) = -8e^t \cos 2t. \quad (3.23)$$

A equação característica  $r^2 - 3r - 4 = 0$  possui raízes  $r_1 = 4$  e  $r_2 = -1$ , então  $y_1(t) = e^{4t}$  e  $y_2(t) = e^{-t}$  são soluções da equação homogênea associada.

Vamos supor que

$$y_p(t) = Ae^t \cos 2t + Be^t \sen 2t$$

seja uma solução particular de (3.23), logo

$$\begin{aligned} y_p' &= e^t \cos 2t(A + 2B) + e^t \sen 2t(-2A + B) \\ \text{e } y_p'' &= e^t \cos 2t(-3A + 4B) + e^t \sen 2t(-4A - 3B). \end{aligned} \quad (3.24)$$

Substituindo essas expressões em (3.23), temos

$$\begin{aligned} e^t \cos 2t(-3A + 4B) + e^t \sen 2t(-4A - 3B) - 3[e^t \cos 2t(A + 2B) + e^t \sen 2t(-2A + B)] \\ - 4[Ae^t \cos 2t + Be^t \sen 2t] = -8e^t \cos 2t. \end{aligned}$$

Simplificando o termo  $e^t$  e reduzindo os termos semelhantes, obtemos

$$\cos 2t(-10A - 2B) + \sen 2t(2A - 10B) = -8 \cos 2t,$$

segue que  $A$  e  $B$  devem satisfazer o seguinte sistema

$$\begin{cases} -10A - 2B = -8, \\ 2A - 10B = 0. \end{cases}$$

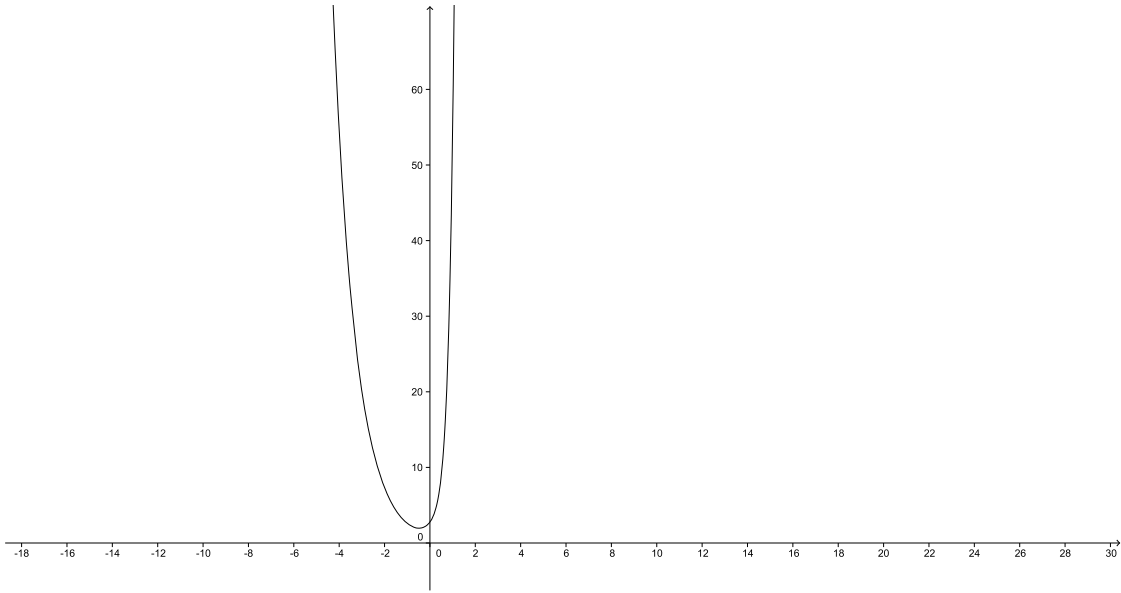


Figura 3.1: Gráfico da solução (3.25) para  $c_1 = c_2 = 1$ .

Logo,  $A = \frac{10}{13}$  e  $B = \frac{2}{13}$ , e uma solução particular de (3.23) é

$$y_p(t) = \frac{10}{13}e^t \cos 2t + \frac{2}{13}e^t \sen 2t.$$

Portanto, a solução geral é da forma

$$y(t) = c_1 e^{4t} + c_2 e^{-t} + \frac{10}{13}e^t \cos 2t + \frac{2}{13}e^t \sen 2t. \quad (3.25)$$

**Caso 4 :** Se  $g$  for um combinação linear de funções dos tipos descritos nos casos 1, 2 e 3 então devemos usar a seguinte proposição.

**Proposição 3.2.** *Seja*

$$y''(t) + py'(t) + qy(t) = \alpha_1 g_1(t) + \alpha_2 g_2(t), \quad (3.26)$$

com  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  constantes. Se  $\varphi_1$  é solução de

$$y''(t) + py'(t) + qy(t) = g_1(t)$$

e  $\varphi_2$  é solução de

$$y''(t) + py'(t) + qy(t) = g_2(t),$$

então  $\varphi(t) = \alpha_1 \varphi_1(t) + \alpha_2 \varphi_2(t)$  é solução de (3.26).

*Demonstração.* Seja  $\varphi(t) = \alpha_1 \varphi_1(t) + \alpha_2 \varphi_2(t)$ . Então

$$\varphi'(t) = \alpha_1 \varphi_1'(t) + \alpha_2 \varphi_2'(t) \quad \text{e} \quad \varphi''(t) = \alpha_1 \varphi_1''(t) + \alpha_2 \varphi_2''(t)$$

Substituindo estas expressões no primeiro membro de (3.26), obtemos

$$\begin{aligned} \alpha_1\varphi_1''(t) + \alpha_2\varphi_2''(t) + p[\alpha_1\varphi_1'(t) + \alpha_2\varphi_2'(t)] + q[\alpha_1\varphi_1(t) + \alpha_2\varphi_2(t)] = \\ \alpha_1[\varphi_1''(t) + p\varphi_1'(t) + q\varphi_1(t)] + \alpha_2[\varphi_2''(t) + p\varphi_2'(t) + q\varphi_2(t)]. \end{aligned}$$

Como  $\varphi_1(t)$  é solução de  $y''(t) + py'(t) + qy(t) = g_1(t)$  e  $\varphi_2$  é solução de  $y''(t) + py'(t) + qy(t) = g_2(t)$ , então segue que

$$\alpha_1[\varphi_1''(t) + p\varphi_1'(t) + q\varphi_1(t)] + \alpha_2[\varphi_2''(t) + p\varphi_2'(t) + q\varphi_2(t)] = \alpha_1g_1(t) + \alpha_2g_2(t).$$

Portanto,  $\varphi(t)$  é solução de (3.26).  $\square$

Utilizando esta proposição podemos encontrar a solução de uma equação diferencial, cuja  $f(t)$  é expressa por uma soma de diversas funções.

**Exemplo 3.3.** Determinemos agora uma solução geral da equação

$$2y'' + 3y' + y = t^2 + 3 \operatorname{sen} t. \quad (3.27)$$

Encontrar uma solução para (3.27) é equivalente a encontrar uma solução para

$$y''(t) + \frac{3}{2}y'(t) + \frac{y(t)}{2} = \frac{t^2}{2} + \frac{3}{2} \operatorname{sen} t.$$

Por conveniência, trabalharemos com a última forma. A equação característica  $r^2 + \frac{3}{2}r + \frac{1}{2} = 0$  da homogênea associada possui raízes  $r_1 = \frac{-1}{2}$  e  $r_2 = -1$ . Logo,  $y_1 = e^{-\frac{1}{2}t}$  e  $y_2 = e^{-t}$  são soluções da equação diferencial homogênea.

Vamos agora encontrar a solução particular de

$$2y'' + 3y' + y = t^2. \quad (3.28)$$

Supomos que  $y_{p1} = A_0 + A_1t + A_2t^2$  seja uma solução particular de (3.28). Então,  $y'_{p1} = A_1 + 2A_2t$  e  $y''_{p1} = 2A_2$ . Substituindo essas expressões em (3.28), obtemos

$$\begin{aligned} 2A_2 + \frac{3}{2}A_1 + 3A_2t + \frac{A_0}{2} + \frac{A_1}{2}t + \frac{A_2}{2}t^2 = \frac{t^2}{2} \\ \Rightarrow \frac{A_0}{2} + \frac{3}{2}A_1 + 2A_2 + t\left(3A_2 + \frac{A_1}{2}\right) + \frac{A_2}{2}t^2 = \frac{t^2}{2}. \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema,

$$\begin{cases} \frac{A_0}{2} + \frac{3}{2}A_1 + 2A_2 = 0, \\ 3A_2 + \frac{A_1}{2} = 0, \\ A_2 = 1, \end{cases}$$

encontramos

$$y_{p1} = t^2 - 6t + 14.$$

Resta encontrar a solução particular de

$$y''(t) + \frac{3}{2}y'(t) + \frac{y(t)}{2} = \frac{3}{2}\text{sen } t. \quad (3.29)$$

Supomos  $y_{p_2} = A \text{sen } t + B \cos t$  seja a solução particular de (3.29). Segue que,  $y'_{p_2} = A \cos t - B \text{sen } t$  e  $y''_{p_2} = -A \text{sen } t - B \cos t$ . Substituindo essas expressões em (3.29), obtemos

$$\begin{aligned} -A \text{sen } t - B \cos t + \frac{3}{2}A \cos t - \frac{3}{2}B \text{sen } t + \frac{A}{2} \text{sen } t + \frac{B}{2} \cos t &= \frac{3}{2} \text{sen } t \\ \Rightarrow \cos t \left( \frac{3}{2}A - B + \frac{B}{2} \right) + \text{sen } t \left( -A - \frac{3}{2}B + \frac{A}{2} \right) &= \frac{3}{2} \text{sen } t \\ \Rightarrow \cos t \left( \frac{3}{2}A - \frac{B}{2} \right) + \text{sen } t \left( -\frac{A}{2} - \frac{3}{2}B \right) &= \frac{3}{2} \text{sen } t. \end{aligned}$$

Como  $\{\text{sen } t, \cos t\}$  é linearmente independente segue que

$$\begin{cases} \frac{3}{2}A - \frac{B}{2} = 0, \\ -\frac{A}{2} - \frac{3}{2}B = \frac{3}{2}, \end{cases}$$

$$\text{logo } y_{p_2} = -\frac{3}{10} \text{sen } t - \frac{9}{10} \cos t.$$

Portanto, a solução geral de (3.27) é

$$y(t) = c_1 e^{-\frac{1}{2}t} + c_2 e^{-t} + t^2 - 6t + 14 - \frac{3}{10} \text{sen } t - \frac{9}{10} \cos t, \quad (3.30)$$

com  $c_1$  e  $c_2$  constantes.

### 3.1.5 Método da variação dos parâmetros

Descreveremos nesta seção outro método de encontrar uma solução particular de uma equação diferencial não-homogênea, conhecido como variação dos parâmetros. Esse método foi desenvolvido por Joseph-Louis Lagrange (1736 - 1813), e sua vantagem é que pode ser aplicado em equações com coeficientes não constantes. Por outro lado, ele conduz ao cálculo de integrais que podem apresentar complicações.

O método da variação de parâmetros consiste em determinar uma solução particular de

$$y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = g(t), \quad (3.31)$$

através das soluções  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$ , linearmente independentes, da equação homogênea associada

$$y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = 0. \quad (3.32)$$

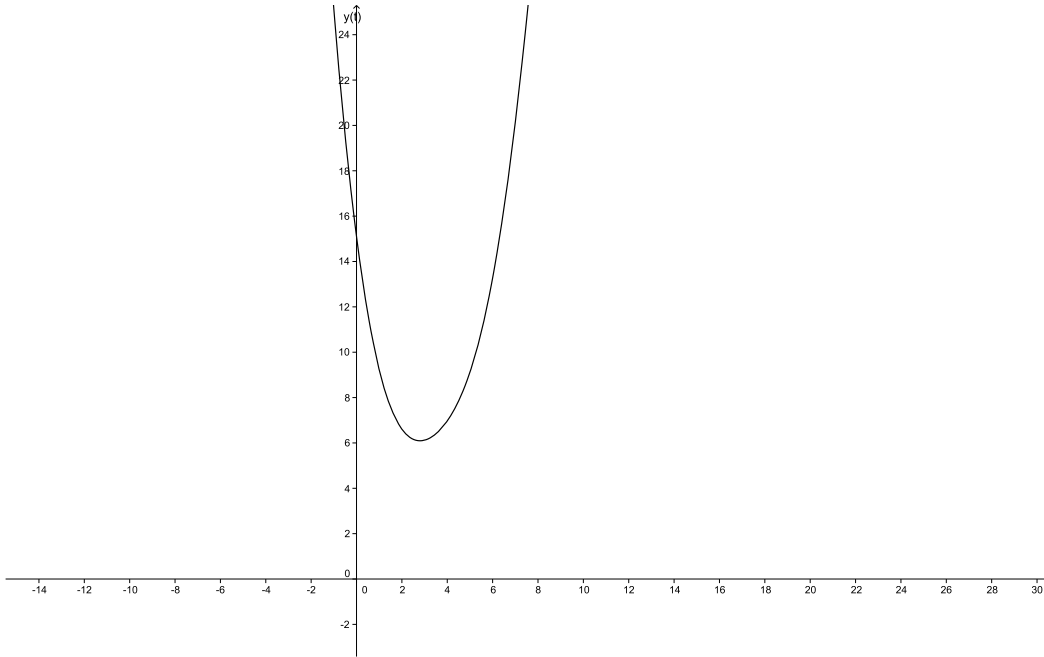


Figura 3.2: Gráfico da solução geral (3.30) para  $c_1 = c_2 = 1$ .

A idéia é substituir  $c_1$  e  $c_2$ , da solução geral  $y_h(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$  de (3.32), por funções  $u_1(t)$  e  $u_2(t)$ , respectivamente. Daí vem o nome variação de parâmetros.

Assim, supomos uma solução  $y_p$  na forma

$$y_p(t) = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t). \quad (3.33)$$

Devemos impor condições sobre  $u_1$  e  $u_2$  para que a expressão  $y_p'' + py_p' + qy_p$  se torne a mais simples possível. Derivando  $y_p$ , temos

$$y_p' = u_1 y_1' + u_2 y_2' + u_1' y_1 + u_2' y_2.$$

Para simplificar a expressão vamos impor sobre  $u_1$  e  $u_2$  a condição

$$u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0.$$

Com isso, derivando  $y_p'$ , temos

$$y_p'' = u_1' y_1' + u_1 y_1'' + u_2' y_2' + u_2 y_2''.$$

Substituindo  $y_p$ ,  $y_p'$  e  $y_p''$  em (3.31)

$$\begin{aligned} u_1' y_1' + u_1 y_1'' + u_2' y_2' + u_2 y_2'' &= p[u_1 y_1' + u_2 y_2'] + q[u_1 y_1 + u_2 y_2] = g(t) \\ \Rightarrow u_1 [y_1'' + p y_1' + q y_1] + u_2 [y_2'' + p y_2' + q y_2] + u_1' y_1' + u_2' y_2' &= g(t). \end{aligned}$$

Como  $y_1$  e  $y_2$  são soluções de (3.32), então as expressões dentro dos colchetes são nulas. Desta forma, temos outra condição sobre  $u_1$  e  $u_2$ , que é

$$u_1' y_1' + u_2' y_2' = g(t).$$

Logo, (3.33) é uma solução de (3.31) se  $u_1$  e  $u_2$  satisfizerem as duas condições

$$\begin{cases} u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0, \\ u_1' y_1' + u_2' y_2' = g(t). \end{cases}$$

Multiplicando a primeira equação por  $y_2'$ , a segunda por  $y_2$ , e subtraindo-as, temos

$$[y_1 y_2' - y_1' y_2] u_1' = -g(t) y_2, \quad (3.34)$$

enquanto multiplicando a primeira equação por  $y_1'$ , a segunda por  $y_1$ , e subtraindo-as, temos

$$[y_1 y_2' - y_1' y_2] u_2' = g(t) y_1. \quad (3.35)$$

Portanto, por (3.34) e (3.35), obtemos

$$u_1'(t) = -\frac{g(t)y_2(t)}{W[y_1, y_2](t)} \quad \text{e} \quad u_2'(t) = \frac{g(t)y_1(t)}{W[y_1, y_2](t)}.$$

Finalmente integrando  $u_1'$  e  $u_2'$ , quando possível, determinamos

$$u_1(t) = \int -\frac{g(t)y_2(t)}{W[y_1, y_2](t)} dt \quad \text{e} \quad u_2(t) = \int \frac{g(t)y_1(t)}{W[y_1, y_2](t)} dt,$$

e conseqüentemente  $y_p(t)$ .

**Exemplo 3.4.** Consideremos

$$t^2 y''(t) - 3t y'(t) + 4y(t) = t^4, \quad t > 0, \quad (3.36)$$

que é uma equação do tipo de Euler-Cauchy<sup>1</sup>. Para encontrar duas soluções linearmente independentes da equação homogênea associada

$$t^2 y''(t) - 3t y'(t) + 4y(t) = 0, \quad (3.37)$$

supomos  $y(t) = t^\lambda$ . Segue que  $y'(t) = \lambda t^{\lambda-1}$  e  $y''(t) = \lambda(\lambda-1)t^{\lambda-2}$ , substituindo em (3.37), obtemos

$$\begin{aligned} t^2[\lambda(\lambda-1)]t^{\lambda-2} - 3t\lambda t^{\lambda-1} + 4t^\lambda &= 0 \\ \Rightarrow t^\lambda(\lambda^2 - 4\lambda + 4) &= 0. \end{aligned}$$

Como  $t > 0$ , implica que  $t^\lambda > 0$ , então  $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ . Segue que  $\lambda = 2$ . Logo,  $y_1(t) = t^2$ .

Para obter a segunda solução usamos o método de redução de ordem. Procuramos  $y_2(t) = u(t)t^2$  que satisfaça (3.37). Substituindo  $y_2$  em (3.37), obtemos  $y_2(t) = t^2 \ln t$ .

<sup>1</sup>Uma equação de Euler-Cauchy tem a forma  $x^n y^{(n)}(x) + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1 x y'(x) + a_0 y(x) = f(x)$ , onde  $a_0, \dots, a_{n-1}$  são constantes dadas.

Reescrevemos (3.36) da forma

$$y''(t) - \frac{3}{t}y'(t) + \frac{4}{t^2}y(t) = t^2.$$

Devemos encontrar uma solução particular da forma

$$y_p(t) = u_1(t)t^2 + u_2(t)t^2 \ln t.$$

Como

$$W[t^2, t^2 \ln t] = t^2 \left( 2t \ln t + t^2 \frac{1}{t} \right) - 2tt^2 \ln t = t^3, \quad t > 0$$

aplicando o método de variação de parâmetros, obtemos

$$\begin{aligned} u_1(t) &= - \int \frac{y_2(t)g(t)}{W[y_1, y_2]} dt = - \int \frac{t^2 \ln t t^2}{t^3} dt = - \int t \ln t dt \\ &\Rightarrow u_1(t) = \frac{t^2 - t^2 \ln t}{2} + c_1, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} u_2(t) &= \int \frac{y_1(t)g(t)}{W[y_1, y_2]} dt = \int \frac{t^2 t^2}{t^3} dt = - \int t dt \\ &\Rightarrow u_2(t) = \frac{t^2}{2} + c_2. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} y_p(t) &= \frac{t^2 - t^2 \ln t}{2} t^2 + \frac{t^2}{2} t^2 \ln t = \frac{t^4}{2} - \frac{t^4 \ln t}{2} + \frac{t^4}{2} \ln t \\ &\Rightarrow y_p(t) = \frac{t^4}{2}, \end{aligned}$$

é uma solução particular de (3.36), e portanto, a solução geral é dada por

$$y(t) = c_1 t^2 + c_2 t^2 \ln t + \frac{t^4}{2}.$$

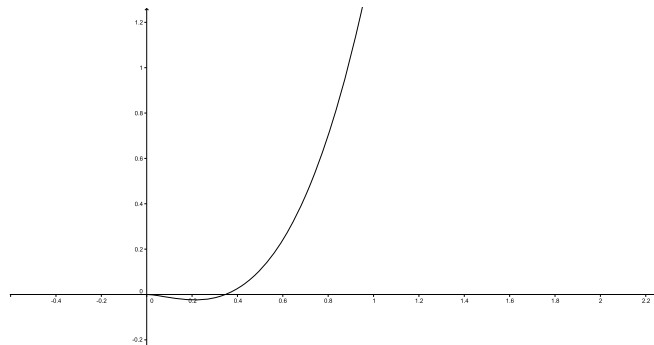


Figura 3.3: Gráfico da solução geral (3.36).



## 3.2 Aplicações

Nesta seção apresentaremos algumas aplicações que são descritas por equações diferenciais de segunda ordem. Destacaremos os modelos de vibrações, perseguição de presa/predador e a catenária.

### 3.2.1 Vibrações

Consideremos o caso em que um objeto de massa  $m$  está preso em uma mola elástica de comprimento  $l$ . A massa causa um alongamento  $L$  da mola para baixo. A força peso da massa puxa para baixo e tem módulo igual a  $mg$ , onde  $g$  é a aceleração da gravidade. Existe também a força da mola,  $F_s$ , que puxa para cima. Supondo que o alongamento  $L$  é pequeno, então  $F_s$  fica próximo de ser proporcional a  $L$ , o que é conhecido como **lei de Hooke**. Logo,  $F_s = -kL$ , onde  $k$  é a constante da mola, e negativo porque a mola puxa para cima. Como o sistema massa mola está em equilíbrio, temos

$$mg - kL = 0.$$

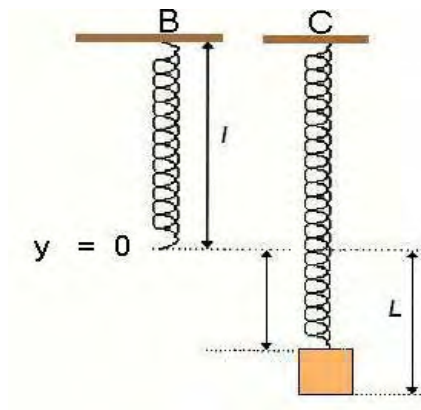


Figura 3.4: Sistema massa-mola.

Considere  $u(t)$  o deslocamento da massa a partir do seu ponto de equilíbrio no instante  $t$ . Pela **lei do movimento de Newton**,

$$mu''(t) = f(t),$$

onde  $u''$  é a aceleração da massa e  $f$  a força total resultante, que é a soma das forças aplicadas, sobre a massa. Além disso,  $F_s$  passa a ser  $-k(L + u)$ .

Devemos também considerar a força de amortecimento ou resistência dada por  $F_d(t) = -\gamma u'(t)$ , onde  $\gamma$  é a constante de amortecimento. E ainda, pode ser aplicada uma força externa  $F(t)$ , que pode ser uma força causada pelo movimento da estrutura onde está presa a mola, ou pode ser uma força aplicada diretamente na massa.

Levando em consideração essas forças, reescrevemos a lei de Newton

$$\begin{aligned} mu''(t) &= mg + F_s(t) + F_a(t) + F(t) \\ &= mg - K[L + u(t)] - \gamma u'(t) + F(t). \end{aligned}$$

Como  $mg - kL = 0$ , segue que

$$mu''(t) + \gamma u'(t) + ku(t) = F(t). \quad (3.38)$$

Vamos agora impor duas condições: a posição inicial  $u_0$  e a velocidade inicial  $v_0$  da massa. Então,

$$\begin{cases} u(0) = u_0, \\ u'(0) = v_0. \end{cases} \quad (3.39)$$

Por (3.38) e (3.39) temos um problema do valor inicial, e o Teorema de Existência e Unicidade garante que existe e é única a solução desse problema.

### Vibrações Livres Não Amortecidas.

Se não existir forçar externas, então  $F(t) = 0$  em (3.38). E quando não há amortecimento, temos  $\gamma = 0$ . Assim, a equação do movimento (3.38) se reduz a

$$mu''(t) + ku(t) = 0, \quad (3.40)$$

cuja equação característica é  $mr^2 + k = 0$  que tem raízes complexas  $r_{1,2} = \pm i\sqrt{\frac{k}{m}}$ . Logo, a solução geral de (3.40) é

$$u(t) = A \cos \sqrt{\frac{k}{m}}t + B \sin \sqrt{\frac{k}{m}}t,$$

onde  $A$  e  $B$  são constantes arbitrárias.

Definimos o período  $T$  como sendo o tempo necessário para que o movimento de um corpo volte a se repetir, e neste caso temos

$$T = \frac{2\pi\sqrt{m}}{\sqrt{k}}, \quad \text{ou seja} \quad u(t+T) = u(t), \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

E a frequência  $f$  do movimento é o número de ciclos por unidade de tempo, logo  $f \cdot T = 1$ , ou seja,

$$f = \frac{\sqrt{k}}{2\pi\sqrt{m}}.$$

Assim, se a constante  $k$  for aumentada, o período se torna menor e a frequência maior. Analogamente, se a massa  $m$  aumentar o período se torna maior e a frequência menor.

O sistema de vibrações livres não-amortecidas é o sistema idealizado, que dificilmente acontece na prática. Porém, para amortecimentos muito pequenos, em intervalos

de tempo pequenos, a hipótese de que não há amortecimento pode dar resultados satisfatórios.

### Vibrações Livres Amortecidas

Se agora considerarmos o efeito do amortecimento, então a equação que nos fornece o movimento da massa é

$$mu''(t) + \gamma u'(t) + ku(t) = 0. \quad (3.41)$$

As raízes da equação característica correspondente,  $mr^2 + \gamma r + k = 0$ , são

$$r_1 = \frac{-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 4km}}{2m} \quad \text{e} \quad r_2 = \frac{-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - 4km}}{2m}.$$

Logo, temos três casos para estudar, dependendo do sinal de  $\gamma^2 - 4km$ .

(i) Se  $\gamma^2 - 4km > 0$ , tanto  $r_1$  quanto  $r_2$  são negativos então a solução geral de (3.41) tem a forma

$$u(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}, \quad \text{com } c_1 \text{ e } c_2 \text{ constantes arbitrárias.}$$

Este caso é chamado de **amortecimento supercrítico**, ilustrado na Figura 3.5, e a solução  $u(t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ .

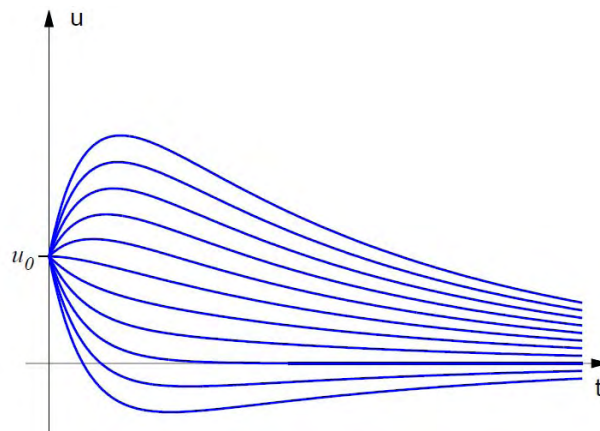


Figura 3.5: Algumas soluções do sistema massa mola com amortecimento supercrítico retirado de [12].

(ii) Se  $\gamma^2 - 4km = 0$ , então toda solução de (3.41) é da forma

$$u(t) = (c_1 + c_2 t) e^{\frac{-\gamma t}{2m}}, \quad \text{com } c_1 \text{ e } c_2 \text{ constantes arbitrárias.}$$

Este caso é chamado de **amortecimento crítico**, ilustrado na Figura 3.6, e a solução  $u(t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ .

(iii) Se  $\gamma^2 - 4km < 0$ , então toda solução de (3.41) é da forma

$$u(t) = e^{\frac{-\gamma t}{2m}} \left[ c_1 \cos \frac{\sqrt{4km - \gamma^2}}{2m} t + c_2 \sin \frac{\sqrt{4km - \gamma^2}}{2m} t \right]. \quad (3.42)$$

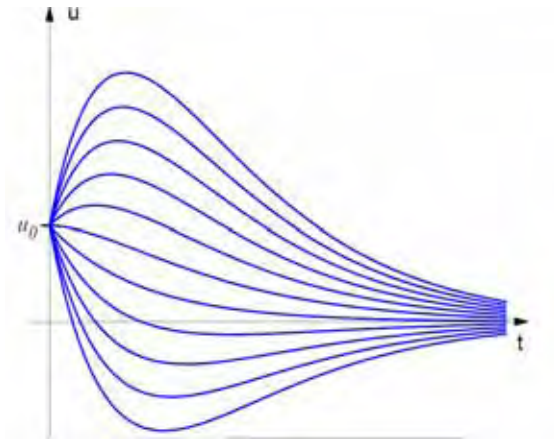


Figura 3.6: Algumas soluções do sistema massa mola com amortecimento crítico retardado de [12].

Observando a Figura 3.7, note que podemos escrever  $c_1$  e  $c_2$  em coordenadas polares

$$\begin{cases} c_1 = R \cos \delta, \\ c_2 = R \sin \delta. \end{cases} \quad (3.43)$$

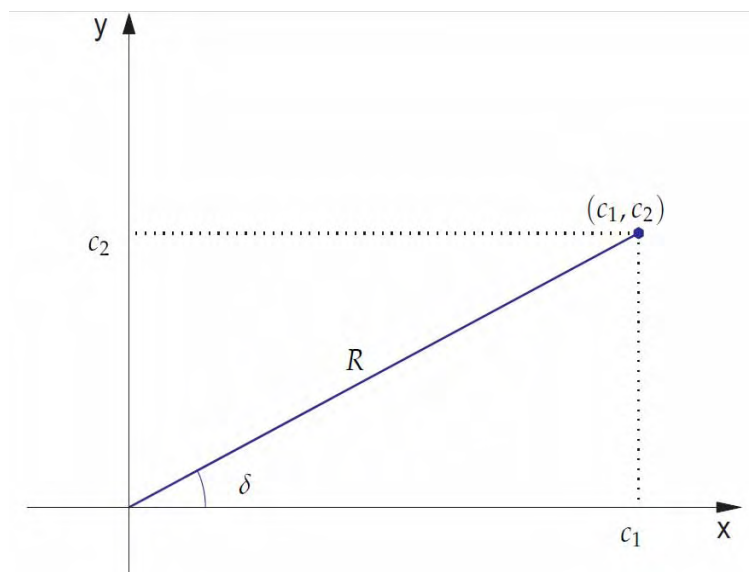


Figura 3.7: Coordenadas polares.

Substituindo (3.43) em (3.42) obtemos

$$\begin{aligned} u(t) &= e^{-\frac{\gamma t}{2m}} \left[ R \cos \delta \cos \frac{\sqrt{4km - \gamma^2}}{2m} t + R \sin \delta \sin \frac{\sqrt{4km - \gamma^2}}{2m} t \right] \\ &= R e^{-\frac{\gamma t}{2m}} \cos \left( \frac{\sqrt{4km - \gamma^2}}{2m} t - \delta \right), \end{aligned}$$

onde  $R = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ .

Este caso é chamado de **amortecimento subcrítico**, e a solução  $u(t) \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ . Ocorre muito frequentemente em sistemas mecânicos e representa uma vibração com atrito.

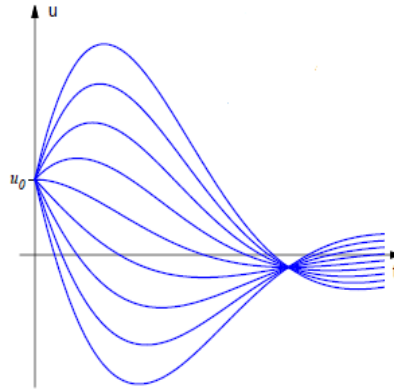


Figura 3.8: Algumas soluções do sistema massa mola com amortecimento subcrítico retirado de [12].

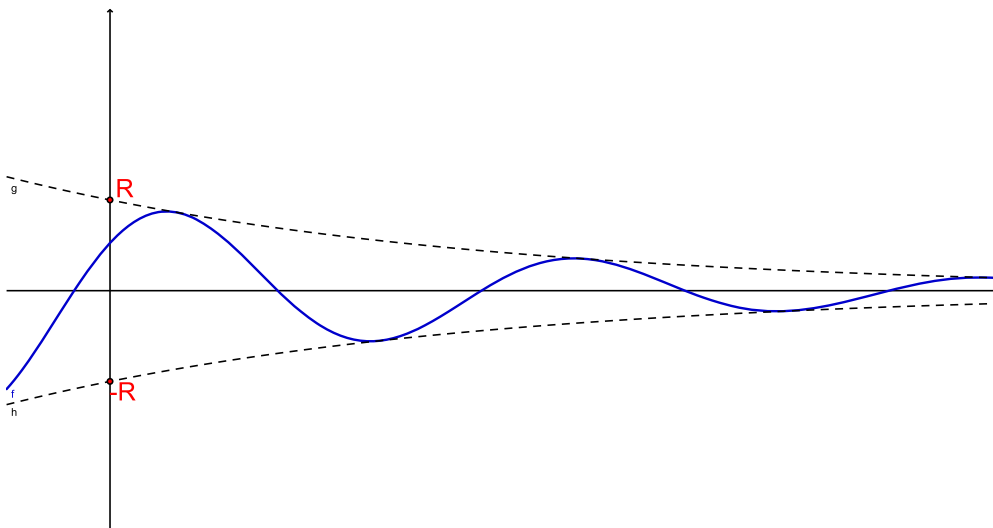


Figura 3.9: Solução do sistema massa-mola livre com subamortecimento.

### Vibrações amortecidas forçadas.

Se for introduzida uma força externa  $F(t) = F_0 \cos \omega t$ , com  $\omega > 0$ , então a equação diferencial para o movimento da massa é

$$mu''(t) + \gamma u'(t) + ku(t) = F_0 \cos \omega t. \quad (3.44)$$

Pelo método dos coeficientes a determinar encontramos uma solução particular de (3.44) na forma

$$u_p(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t.$$

Considerando  $u^*(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t$  solução geral da equação homogênea associada a (3.44), temos que a solução geral de (3.44) é da forma

$$u(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t + A \cos \omega t + B \sin \omega t.$$

Para determinar os coeficientes  $A$  e  $B$ , basta substituir  $u_p$  na equação (3.44). Segue que

$$\begin{aligned} m(-A\omega^2 \cos \omega t - B\omega^2 \sin \omega t) + \gamma(-A\omega \sin \omega t \\ + B\omega \cos \omega t) + k(A \cos \omega t + B \sin \omega t) = F_0 \cos \omega t \\ \Rightarrow (-mA\omega^2 + \gamma B\omega + kA - F_0) \cos \omega t + (-B\omega^2 m - \gamma A\omega + kB) \sin \omega t = 0 \end{aligned}$$

Como  $\{\cos \omega t, \sin \omega t\}$  são funções linearmente independentes, temos que

$$\begin{cases} -mA\omega^2 + \gamma B\omega + kA - F_0 = 0, \\ -B\omega^2 m - \gamma A\omega + kB = 0. \end{cases}$$

Reescrevemos da forma,

$$\begin{cases} (-m\omega^2 + k)A + \gamma B\omega = F_0, & \text{(I)} \\ -\gamma A\omega + (k - \omega^2 m)B = 0 & \text{(II)}. \end{cases}$$

De (II), segue que

$$A = \frac{(k - \omega^2 m)B}{\gamma\omega}.$$

Substituindo  $A$  em (I), obtemos

$$\begin{aligned} (-m\omega^2 + k) \left( \frac{k - \omega^2 m}{\gamma\omega} \right) B + \gamma\omega B = F_0 \\ \Rightarrow B \left( \frac{-m\omega^2 k + m^2\omega^4 + k^2 - k\omega^2 m + \gamma\omega^2}{\gamma\omega} \right) = F_0 \\ \Rightarrow B = F_0 \gamma\omega \left( \frac{1}{-m\omega^2 k + m^2\omega^4 + k^2 - k\omega^2 m + \gamma\omega^2} \right) \\ \Rightarrow B = F_0 \gamma\omega \left( \frac{1}{m^2(\omega^4 - 2\omega^2 \frac{k}{m} + (\frac{k}{m})^2) + \gamma^2\omega^2} \right) \end{aligned}$$

Fazendo  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ , segue que

$$\begin{aligned} B = F_0 \gamma\omega \left( \frac{1}{m^2(\omega^4 - 2\omega^2\omega_0^2 + \omega_0^4) + \gamma^2\omega^2} \right) \\ \Rightarrow B = F_0 \gamma\omega \left( \frac{1}{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2} \right). \end{aligned}$$

Agora, substituindo  $B$  em  $A$ , temos

$$\begin{aligned} A &= \left( \frac{k - \omega m}{\gamma \omega} \right) \left( \frac{1}{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \right) F_0 \gamma \omega \\ &\Rightarrow A = \frac{F_0(k - \omega^2 m)}{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \\ &\Rightarrow A = \frac{m F_0 \left( \frac{k}{m} - \omega^2 \right)}{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \\ &\Rightarrow A = \frac{m F_0(\omega_0^2 - \omega^2)}{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}. \end{aligned}$$

Portanto, a solução geral é da forma

$$\begin{aligned} u(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t + \left( \frac{m F_0(\omega_0^2 - \omega^2)}{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \right) \cos \omega t \\ + \left( \frac{F_0 \gamma \omega}{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \right) \sin \omega t. \end{aligned}$$

### Vibrações não amortecidas forçadas

Neste caso, a equação diferencial que descreve o movimento da massa no sistema massa-mola é

$$m u''(t) + k u(t) = F_0 \cos \omega t. \quad (3.45)$$

Como a solução da equação homogênea associada é

$$u^*(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t,$$

onde  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ , e uma solução particular de (3.45), pelo método dos coeficientes a determinar visto no caso 4 da **seção 3.1.3**, é

$$u_p(t) = t^s [A \cos \omega t + B \sin \omega t],$$

onde  $s = 1$  se  $\omega = \omega_0$ , e  $s = 0$  se  $\omega \neq \omega_0$ , para que nenhuma parcela seja solução da equação homogênea associada.

(i) Se  $\omega \neq \omega_0$ , então uma solução particular é

$$u_p(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t,$$

substituindo-a em (3.45) temos,

$$\begin{aligned} m(-\omega^2 A \cos \omega t - \omega^2 B \sin \omega t) + k(A \cos \omega t + B \sin \omega t) &= F_0 \cos \omega t \\ \Rightarrow \cos \omega t(-m\omega^2 A + kA - F_0) + \sin \omega t(-m\omega^2 B + kB) &= 0. \end{aligned}$$

Como  $\{\cos \omega t, \sin \omega t\}$  são funções linearmente independentes, segue que

$$\begin{cases} -m\omega^2 A + kA - F_0 = 0, & (1) \\ -m\omega^2 B + kB = 0 & (2). \end{cases}$$

Usando (1) temos,

$$A = \frac{F_0}{-m\omega^2 + k} = \frac{F_0}{m(-\omega^2 + \frac{k}{m})} = \Rightarrow A = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)},$$

e de (2) temos

$$B(-m\omega^2 + k) = 0 \\ \Rightarrow \text{ou } B = 0 \text{ ou } -m\omega^2 + k = 0$$

Se  $-m\omega^2 + k = 0$ , então  $\omega^2 = \frac{k}{m} = \omega_0^2$ . Mas por hipótese  $\omega \neq \omega_0$ . Portanto,  $B = 0$ . Então, a solução geral de (3.45) quando  $\omega \neq \omega_0$  é da forma

$$u(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t + \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t.$$

(ii) Se  $\omega = \omega_0$ , então a solução particular é

$$u_p(t) = At \cos \omega t + Bt \sin \omega t,$$

substituindo a expressão acima em (3.45) temos,

$$-2A\omega m \sin \omega t - A\omega^2 m t \cos \omega t + 2\omega B m \cos \omega t - B\omega^2 m t \sin \omega t \\ + kAt \cos \omega t + kBt \sin \omega t - F_0 \cos \omega t = 0,$$

$$\Rightarrow (-2A\omega m) \sin \omega t + (2Bm\omega - F_0) \cos \omega t + (-Bm\omega^2 + kB)t \sin \omega t \\ + (-A\omega^2 m + kA)t \cos \omega t = 0$$

Como  $\{\cos \omega t, \sin \omega t, t \cos \omega t, t \sin \omega t\}$  são soluções linearmente independentes, segue que

$$\begin{cases} -2A\omega m = 0 & \Rightarrow A = 0 \\ 2Bm\omega - F_0 = 0 & \Rightarrow B = \frac{F_0}{2m\omega} \\ -Bm\omega^2 + kB = 0 \\ -A\omega^2 m + kA = 0. \end{cases}$$

Da terceira equação temos  $B(-m\omega^2 + k) = 0$ , como  $B \neq 0$  então  $-m\omega^2 + k = 0$  o que implica  $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ , o que é verdade pois  $\omega = \omega_0$ . A quarta equação também está satisfeita para  $A = 0$ .

Portanto,

$$A = 0 \quad \text{e} \quad B = \frac{F_0}{2m\omega}.$$



Nesse caso a solução geral para (3.45) é da forma

$$u(t) = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t + \frac{F_0}{2m\omega} t \sin \omega t. \quad (3.46)$$

Este caso das vibrações não amortecidas forçadas com  $\omega = \omega_0$ , onde a frequência da força externa é igual a frequência natural do sistema, é chamado de ressonância. O termo  $\frac{F_0}{2m\omega} t \sin \omega t$  de (3.46) representa uma oscilação de amplitude crescente. Como a força externa está em ressonância com o sistema, causará sempre oscilações ilimitadas.

**Exemplo 3.5.** Um corpo de massa  $100g$  estica uma mola  $10cm$ . O corpo está preso a um amortecedor viscoso. Considere a aceleração da gravidade como  $10^3 cm/s^2$  e suponha que o amortecedor exerce uma força de  $10^4 \text{ dinas} = 10^4 g \cdot cm/s^2$  quando a velocidade é  $10 cm/s$ . Se o sistema é puxado para baixo  $2cm$  e depois solto, determine a posição  $u$  em função do tempo  $t$ .

Inicialmente, calculemos a constante da mola e a constante de amortecimento

$$k = \frac{m \cdot g}{L} = \frac{100 \cdot 10^3}{10} \Rightarrow k = 10^4,$$

$$\gamma = \frac{F_d}{u'(t)} = \frac{10^4}{10} \Rightarrow \gamma = 10^3.$$

Além disso, como nada foi dito sobre uma força externa, vamos supor  $F(t) = 0$ . Então, a equação diferencial que descreve o movimento é

$$10^2 u''(t) + 10^3 u'(t) + 10^4 u(t) = 0,$$

que reescrevemos da forma

$$u''(t) + 10u'(t) + 10^2 u(t) = 0 \quad (3.47)$$

Cuja equação característica  $r^2 + 10r + 100 = 0$  tem raízes complexas  $r_1 = -5 + 5i\sqrt{3}$  e  $r_2 = -5 - 5i\sqrt{3}$ . Logo a solução geral é dada por

$$u(t) = c_1 e^{-5t} \cos 5\sqrt{3}t + c_2 e^{-5t} \sin 5\sqrt{3}t. \quad (3.48)$$

Derivando (3.48), temos

$$u'(t) = -5c_1 e^{-5t} \cos 5\sqrt{3}t - 5\sqrt{3}c_1 e^{-5t} \sin 5\sqrt{3}t - 5c_2 e^{-5t} \sin 5\sqrt{3}t + 5\sqrt{3}c_2 e^{-5t} \cos 5\sqrt{3}t. \quad (3.49)$$

Como a posição inicial  $u(0) = 2$  e a velocidade inicial  $u'(0) = 0$  (pois solta a mola, não há velocidade inicial), então substituindo esses valores em (3.48) e (3.49), respectivamente, obtemos

$$u(0) = c_1 + 0 = 2 \Rightarrow c_1 = 2,$$

$$u'(0) = -5c_1 + 0 + 0 + 5\sqrt{3}c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Portanto, a solução geral do sistema massa-mola desse exercício é dada por

$$u(t) = 2e^{-5t} \cos 5\sqrt{3}t + \frac{2\sqrt{3}}{3} e^{-5t} \sin 5\sqrt{3}t.$$

### 3.2.2 Circuitos elétricos

Nesta seção veremos o caso de circuitos elétricos modelados por equações diferenciais lineares de segunda ordem.

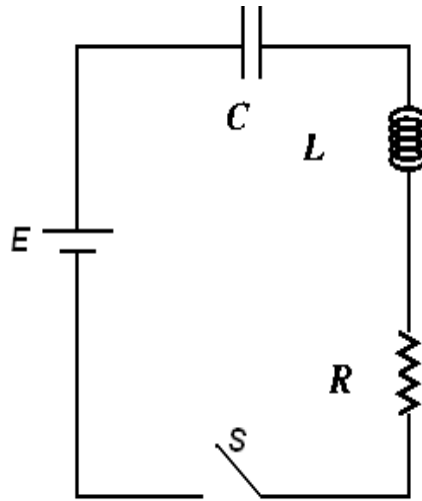


Figura 3.10: Um circuito elétrico em série simples.

O símbolo  $E$  (em Volts) representa uma fonte de força eletromotriz, que pode ser uma bateria ou um gerador que produza uma corrente  $I$  (em Ampères), que passa através do circuito quando a chave  $S$  é fechada. Tanto  $E$  quanto  $I$  são funções do tempo  $t$ . A resistência ao fluxo da corrente, denotado por  $R$  (em Ohms), a capacitância  $C$  (em Faraday) e a indutância  $L$  (em Henrys) são todas constantes positivas<sup>2</sup>.

Um capacitor, ou condensador, geralmente consiste de duas placas de metal, que armazenam cargas opostas, separadas por um material através do qual pode passar pouca corrente. Ele reverte o fluxo da corrente quando uma das duas placas se torna carregada.

Uma outra quantidade física que devemos considerar é a carga total  $Q$  (em Coulombs) no capacitor no instante  $t$ . A relação entre a carga  $Q$  e a corrente  $I$  é

$$I = \frac{dQ}{dt}. \quad (3.50)$$

Para encontrar uma equação diferencial que satisfaça  $Q(t)$  usaremos a segunda **lei de Kirchhoff** que diz:

*Em um circuito fechado, a tensão aplicada é igual à soma das quedas de tensão no resto do circuito.*

Assim, temos que

- (i) A queda de tensão no resistor é igual a  $RI$  (Lei de Ohm).
- (ii) A queda de tensão no capacitor é igual a  $\frac{Q}{C}$ .

<sup>2</sup>As unidades satisfazem  $1\text{Volt} = 1\text{Ohm} \cdot 1\text{Ampere} = 1\text{Coulomb}/1\text{Faraday} = 1\text{Henry} \cdot 1\text{Ampere}/1\text{Segundo}$ .

(iii) A queda de tensão no indutor é igual a  $L\frac{dI}{dt}$ .  
Portanto, pela segunda lei de Kirchhoff, temos

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C} = E(t). \quad (3.51)$$

Usando a igualdade de (3.50), obtemos

$$LQ''(t) + RQ'(t) + \frac{1}{C}Q(t) = E(t). \quad (3.52)$$

Com as condições iniciais

$$Q(t_0) = Q_0, \quad Q'(t_0) = I(t_0) = I_0. \quad (3.53)$$

Portanto temos um problema do valor inicial.

Observando (3.52) e (3.53) podemos notar que esse problema do valor inicial tem a mesma forma que o que descreve o movimento de um sistema de massa-mola. Logo, podemos resolvê-lo de modo análogo.

**Exemplo 3.6.** Um circuito em série simples tem um indutor de  $1\text{Henry}$ , um capacitor de  $10^6\text{Faradays}$  e uma resistência de  $1000\text{Ohms}$ . A carga inicial no capacitor é zero. Se ligarmos ao circuito um bateria de  $12\text{Volts}$ , e o circuito for fechado no instante  $t = 0$ , determine a carga no capacitor 1 segundo depois.

Fazendo as substituições possíveis em (3.52), obtemos

$$\begin{aligned} Q''(t) + 1000Q'(t) + \frac{1}{10^{-6}}Q(t) &= 12 \\ \Rightarrow Q''(t) + 1000Q'(t) + 10^6Q(t) &= 12. \end{aligned}$$

A equação característica da homogênea associada é  $r^2 + 1000r + 10^6 = 0$  cujas raízes são  $r_{1,2} = -500 \pm 500i\sqrt{3}$ .

Logo, a solução geral da equação homogênea associada é

$$Q_h(t) = e^{-500t}(c_1 \cos 500\sqrt{3}t + c_2 \sen 500\sqrt{3}t).$$

Agora, vamos procurar uma solução particular da equação da forma  $Q_p(t) = A$  usando o caso 1 de **3.1.3**, o que implica que  $Q'_p(t) = Q''_p(t) = 0$ , substituindo essas expressões na equação, obtemos

$$10^6 A = 12 \quad \Rightarrow \quad A = \frac{12}{10^6},$$

ou seja,  $Q_p(t) = \frac{12}{10^6}$ .

Logo a solução geral é da forma

$$Q(t) = e^{-500t}(c_1 \cos 500\sqrt{3}t + ic_2 \sen 500\sqrt{3}t) + \frac{12}{10^6}.$$

Como as condições iniciais são

$$Q(0) = 0 \quad \text{e} \quad Q'(0) = 0,$$

então fazendo  $t = 0$  em  $Q(t)$ , obtemos

$$\begin{aligned} Q(0) &= 1(c_1 + 0) + \frac{12}{10^6} = 0 \\ \Rightarrow \quad c_1 &= -\frac{12}{10^6}. \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} Q'(t) &= -500e^{-500t}(c_1 \cos 500\sqrt{3}t + ic_2 \operatorname{sen} 500\sqrt{3}t) + \\ &\quad e^{-500t}(-c_1(\operatorname{sen} 500\sqrt{3}t)500\sqrt{3} + c_2(\cos 500\sqrt{3}t)500\sqrt{3}), \end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned} Q'(0) &= -500c_1 + 500\sqrt{3}c_2 = 0 \\ \Rightarrow \quad 500\left(\frac{12}{10^6} + \sqrt{3}c_2\right) &= 0 \\ \Rightarrow \quad c_2 &= -\frac{12}{10^6} \frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{12}{10^6\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Substituindo  $c_1$  e  $c_2$  em  $Q(t)$  obtemos a solução geral

$$Q(t) = \frac{12}{10^6} \left[ 1 - e^{-500t} \left( \cos 500\sqrt{3}t + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{sen} 500\sqrt{3}t \right) \right].$$

Para determinar a carga no capacitor 1 segundo depois basta aplicar a função  $Q$  em 1, portanto

$$Q(1) = \frac{12}{10^6} \left[ 1 - e^{-500} \left( \cos 500\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{sen} 500\sqrt{3} \right) \right].$$

### 3.2.3 Curva de perseguição

Suponhamos que na origem do plano  $xy$  temos uma presa que foge de um predador pelo eixo  $y$  com velocidade constante  $v$ . O predador localizado no ponto  $G = (a, 0)$  persegue a presa correndo sempre em sua direção com velocidade constante  $\omega$ . O predador sempre verá a presa em linha reta. E a presa sempre seguirá em linha reta.

Nesta subseção determinaremos a curva que descreve a trajetória do predador e as condições sobre  $a$ ,  $v$  e  $\omega$  para o predador encontrar a presa.

Após um período de tempo  $t$  o predador se encontra no ponto  $P_0 = (x_0, y_0)$  e a presa no ponto  $Q = (0, vt)$ . O deslocamento do predador,  $\omega t$ , é dado pelo comprimento de curva entre o ponto  $G$  e  $P_0$ . Então, precisaremos do seguinte teorema.

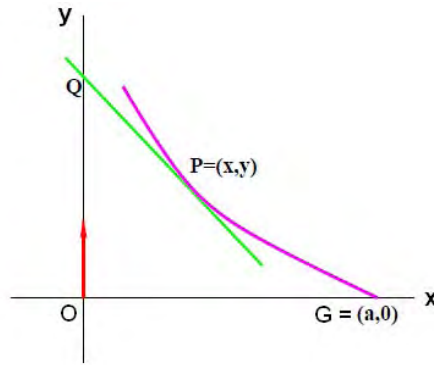


Figura 3.11: Curva de Perseguição

**Teorema 3.4.** <sup>3</sup> Se a função  $f$  e sua derivada  $f'$  são contínuas no intervalo fechado  $[a, b]$ , então, o comprimento do arco da curva  $y = f(x)$  do ponto  $(a, f(a))$  ao ponto  $(b, f(b))$  é dado por

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx. \quad (3.54)$$

Logo,

$$\omega t = \int_{x_0}^a \sqrt{1 + (y')^2} dx. \quad (3.55)$$

O ponto  $Q$  é a interseção da reta tangente à curva no ponto  $P$  com o eixo  $y$ , e a equação desta reta é dado por

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0),$$

se  $x = 0$ , então  $\overline{OQ} = y_0 - x_0 y'(x)$ . Porém,  $\overline{OQ} = vt$ . Portanto,

$$\frac{v}{\omega} \int_{x_0}^a \sqrt{1 + (y')^2} dx = \frac{v}{\omega} (\omega t) = vt = y_0 - x_0 y'(x).$$

Fazendo  $c = \frac{v}{\omega}$ , temos

$$c \int_{x_0}^a \sqrt{1 + (y')^2} dx = y_0 - x_0 y'(x).$$

Derivando em relação a  $x$  em ambos os lados, obtemos

$$x_0 y''(x) = c \sqrt{1 + (y')^2},$$

que é uma equação diferencial de segunda ordem.

Agora, para o ponto  $P = (x, y)$  deslocando-se sobre a curva  $y(x)$ , tem-se que  $p = y'$  e  $p' = y''$ , assim obtemos

$$xp' = c \sqrt{1 + p^2}$$

$$\frac{p'}{\sqrt{1 + p^2}} = \frac{c}{x},$$

<sup>3</sup>A demonstração de Teorema 3.4 pode ser encontrada em *Cálculo com Geometria Analítica* vol.1, Swokowski.

Integrando ambos os membros, temos

$$\int \frac{p'}{\sqrt{1+p^2}} dx = \int \frac{c}{x} dx$$

Resolvendo o primeiro membro, chamamos  $u = p(x) \Rightarrow du = p'(x)dx$ , temos

$$\int \frac{p'}{\sqrt{1+p^2}} dx = \int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \int \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} du. \quad (3.56)$$

Como  $\sec^2 \theta = 1 + \operatorname{tg}^2 \theta$ , chamemos  $u = \operatorname{tg} \theta \Rightarrow du = \sec^2 \theta d\theta$ , logo

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} du &= \int \frac{1}{\sec \theta} \cdot \sec^2 \theta d\theta \\ &= \int \sec \theta d\theta = \ln |\sec \theta + \operatorname{tg} \theta| + C = \ln |\sec(\operatorname{arctg} u(x)) + u(x)| + C \\ &= \ln |\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2[\operatorname{arctg} u(x)]} + u(x)| + C = \ln |\sqrt{1 + p(x)^2} + p(x)| + C \end{aligned}$$

Voltando a equação (3.56),

$$\begin{aligned} \ln |\sqrt{1 + p(x)^2} + p(x)| + C &= c \ln |x| + C_* \\ \Rightarrow \ln |\sqrt{1 + p(x)^2} + p(x)| &= c \ln |x| + \ln(K), \end{aligned}$$

pois  $C_* - C \in \mathbb{R}$  e existe  $k > 0$  tal que  $\ln(k) = C_* - C$ .

Aplicando exponencial, obtemos

$$\sqrt{1 + p(x)^2} + p(x) = k|x|^c, \quad k > 0.$$

Como a trajetória do predador se inicia no ponto  $G$ , e considerando  $y'(a) = 0$  ou  $p = 0$  segue  $k = \frac{1}{a^c}$ . Onde  $y'(x) = p(x)$  e  $y''(x) = p'(x)$ , logo  $y'(a) = p(a)$ . Então,

$$\begin{aligned} \left[ \sqrt{1 + p(x)^2} \right]^2 &= \left[ \left( \frac{x}{a} \right)^c - p(x) \right]^2 \Rightarrow 1 + p^2 = \left( \frac{x}{a} \right)^{2c} - 2 \left( \frac{x}{a} \right)^c p + p^2 \\ \Rightarrow 1 - \left( \frac{x}{a} \right)^{2c} &= -2 \left( \frac{x}{a} \right)^c p \Rightarrow p = \frac{1}{2} \left( -\frac{a}{x} \right) \left[ 1 - \left( \frac{x}{a} \right)^{2c} \right] \\ &\Rightarrow p = \frac{1}{2} \left( \frac{a}{x} \right)^c \left[ \left( \frac{x}{a} \right)^{2c} - 1 \right] \end{aligned}$$

Portanto,

$$y' = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{x}{a} \right)^c - \left( \frac{a}{x} \right)^c \right]. \quad (3.57)$$

Integrando ambos os membros de (3.57), obtemos as seguintes soluções

$$\begin{cases} y_1 = \frac{1}{2} \left[ \frac{a}{c+1} \left( \frac{x}{a} \right)^{c+1} + \frac{a}{c-1} \left( \frac{a}{x} \right)^{c-1} \right] + k_1 & \text{se } c \neq 1, \\ y_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{x^2}{2a} - a \ln |x| \right) + k_2 & \text{se } c = 1. \end{cases}$$

Usando que  $y(a) = 0$ , no caso  $c \neq 1$ , obtemos

$$y_1(a) = \frac{1}{2} \left[ \frac{a}{c+1} \left( \frac{a}{a} \right)^{c+1} + \frac{a}{c-1} \left( \frac{a}{a} \right)^{c-1} \right] + k_1$$

$$\Rightarrow k_1 = \frac{ac}{1-c^2},$$

e para  $c = 1$  temos

$$y_2(a) = \frac{1}{2} \left( \frac{a^2}{2a} - a \ln |a| \right) + k_2$$

$$\Rightarrow k_2 = -\frac{1}{2} \left( \frac{a}{2} a \ln |a| \right).$$

Logo,

$$\begin{cases} y_1 = \frac{1}{2} \left[ \frac{a}{c+1} \left( \frac{x}{a} \right)^{c+1} + \frac{a}{c-1} \left( \frac{x}{a} \right)^{c-1} \right] + \frac{ac}{1-c^2} & \text{se } c \neq 1, \\ y_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{x^2}{2a} - a \ln |x| \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{a}{2} a \ln |a| \right) & \text{se } c = 1. \end{cases}$$

Note que,

i) Se  $v \geq \omega$ , então  $c \geq 1$  e portanto,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y(x) = +\infty.$$

Ou seja, o predador não alcança a presa.

ii) Se  $v < \omega$ , então  $c < 1$  e, portanto,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} y(x) = -\frac{ac}{c^2 - 1}.$$

Ou seja, o ponto  $\left( 0, -\frac{ac}{c^2 - 1} \right)$  é onde o predador encontra a presa, se  $v < \omega$ .

### 3.2.4 A catenária

Mostraremos agora como determinar a forma exata da curva assumida por um cabo flexível e inextensível, suspenso em ambas as extremidades na mesma altura e sujeito a ação do seu próprio peso. Esta curva é chamada catenária, do latim *catena*, que significa "corrente".

Esse problema foi proposto pela primeira vez por Leonardo da Vinci (1452-1519), e o primeiro a tentar solucioná-lo foi Galileu Galilei (1564-1642), que "mostrou erroneamente" ser uma parábola a curva descrita pelo cabo.

Em 1690, James Bernoulli divulgou esse problema na comunidade matemática e um ano depois foi resolvido por Johann Bernoulli (irmão de James), Leibniz e Huyghens quase simultaneamente. E foi Leibniz quem batizou a curva de catenária.

Esse período foi marcado por polêmicas e grandes desafios entre Newton, Leibniz e os irmãos Bernoulli. Para se ter ideia disso, segue um trecho de uma carta que Johann Bernoulli fez a um amigo.

"Os esforços de meu irmão não tiveram sucesso; eu fui mais feliz, pois tive a habilidade (digo isso sem presunção, porque deveria eu esconder a verdade?) de resolver o problema e reduzi-lo à retificação da parábola. É verdade que isso me fez trabalhar durante toda uma noite. Isso representou muito naqueles dias e para minha pouca idade e experiência, mas na manhã seguinte, transbordando de alegria, corri até meu irmão, que ainda estava lutando miseravelmente com o nó górdio sem chegar a lugar nenhum, sempre pensando como Galileu que a catenária era uma parábola. Pare! Pare! disse-lhe eu, não se torture mais tentando provar a identidade de uma catenária e de uma parábola, pois isso é inteiramente falso. A parábola serve na construção da catenária mas as duas curvas são tão diferentes que uma é algébrica e a outra transcendente<sup>4</sup>".

Para analisar a solução deste problema, vamos considerar um sistema de coordenadas cartesianas com origem no ponto mais baixo da curva e o eixo  $y$  coincidindo com a vertical.

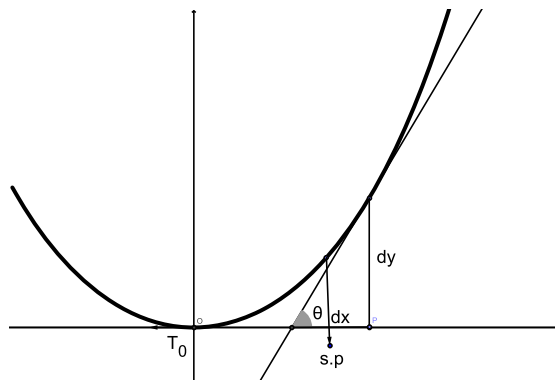


Figura 3.12: Curva da Catenária.

Vamos considerar o equilíbrio no trecho  $OP$  do cabo, assim  $H + T + V = 0$ , onde  $H$  é a tensão do cabo em seu ponto mais baixo,  $T$  é a tensão no ponto  $P = (x, y)$  e  $V$  é o peso do trecho  $OP$  do cabo,  $V = \omega s$ ,  $\omega$  é o peso por unidade de comprimento e  $s$  é o comprimento do arco  $OP$ . Fazendo as projeções necessárias obtemos

$$\begin{cases} T \cos \theta = H \\ T \sin \theta = V \end{cases}$$

segue que

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{V}{H} = \frac{\omega}{H} s.$$

Como  $\omega$  e  $H$  são constantes, então  $\frac{\omega}{H} \equiv c = \text{constante}$ . E  $\operatorname{tg} \theta = y'$ . Logo, derivando  $y' = cs$  obtemos

<sup>4</sup>Curva algébrica é aquela descrita por incógnitas submetidas apenas às operações algébricas, já as curvas transcendentais são descritas por logaritmos, exponenciais, funções circulares, entre outras.



$$y'' = c \frac{ds}{dx}. \quad (3.58)$$

Por outro lado, temos

$$\frac{ds}{dx} = \frac{1}{\cos \theta} \Rightarrow \frac{ds}{dx} = \sec \theta \Rightarrow \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta},$$

ou seja,

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}. \quad (3.59)$$

Substituindo (3.59) em (3.58) obtemos

$$y'' = c\sqrt{1 + (y')^2}. \quad (3.60)$$

Para integrar a equação (3.60) é necessário fazer a mudança de variável  $p = y'$ , assim

$$p' = c\sqrt{1 + p^2} \Rightarrow \frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = cdx.$$

Integrando ambos os membros,

$$\int \frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}} = \int cdx. \quad (3.61)$$

Como  $p = \operatorname{tg} \theta$  e  $dp = \sec^2 \theta d\theta$  segue

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{1 + p^2}} dp &= \int \frac{\sec^2 \theta}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta}} d\theta = \int \frac{\sec^2 \theta}{\sec \theta} d\theta \\ &= \int \sec \theta d\theta = \ln(\operatorname{tg} \theta + \sec \theta) + K_1 \\ &= \ln(\operatorname{tg} \theta + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \theta}) + K_1, \quad \text{com } \theta \in [0, \frac{\pi}{2}). \end{aligned}$$

Reescrevemos a solução em função de  $p$  e usando a igualdade (3.61) temos

$$\ln(p + \sqrt{1 + p^2}) + K_1 = cx + K_2 \Rightarrow \ln(p + \sqrt{1 + p^2}) = cx + K, \quad (3.62)$$

onde  $K_1$  e  $K_2$  são constantes reais e  $K = K_2 - K_1$ .

Note que  $p(0) = y'(0) = 0$ , e isto implica que  $K$  deve ser nula. Aplicando exponencial em (3.62) obtemos

$$\begin{aligned} p + \sqrt{1 + p^2} &= e^{cx} \Rightarrow \sqrt{1 + p^2} = e^{cx} - p \\ \Rightarrow 1 + p^2 &= e^{2cx} - 2e^{cx}p + p^2 \Rightarrow 1 - e^{2cx} = -2e^{cx}p \\ \Rightarrow p &= \frac{1 - e^{2cx}}{-2e^{cx}} = \frac{e^{2cx} - 1}{2e^{cx}} = \frac{e^{cx} - e^{-cx}}{2}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{e^{cx} - e^{-cx}}{2} \Rightarrow \int dy = \int \frac{e^{cx} - e^{-cx}}{2} dx \\ y &= \frac{1}{2} \left[ \int e^{cx} dx - \int e^{-cx} dx \right] \Rightarrow y = \frac{e^{cx}}{2c} + \frac{e^{-cx}}{2c} + C. \end{aligned}$$

Observe que quando  $y(0) = 0$  obtemos  $C = -c^{-1}$ . Portanto

$$y = \frac{e^{cx} + e^{-cx}}{2c} - c^{-1}.$$

Usando as propriedades das funções hiperbólicas, concluímos que a solução procurada é

$$y(x) = c^{-1}(\cosh(cx) - 1). \quad (3.63)$$

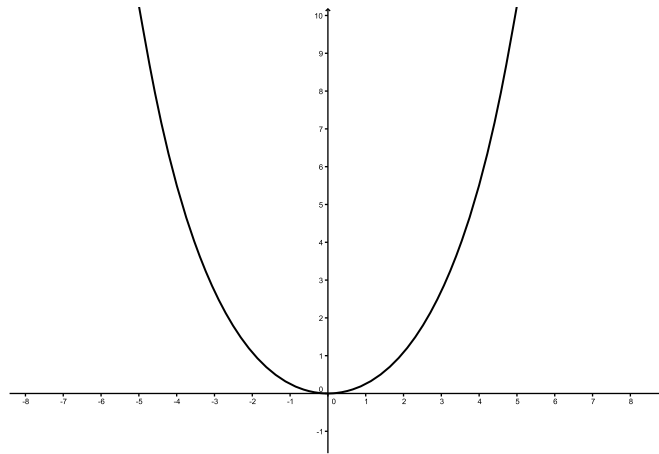


Figura 3.13: Gráfico de (3.63) para  $c = \frac{1}{2}$ .

Uma característica da catenária é que uma força aplicada em um ponto qualquer da curva é dividida igualmente por todo o material, isto é, é distribuída uniformemente ao longo da curva. Por esta razão é usada para a fabricação de materiais como fundo de latas de refrigerante, iglus(casas de neve) e tunéis.

# 4 Sistemas lineares de equações diferenciais

Este capítulo traz um estudo elementar da teoria de sistemas lineares de equações diferenciais e alguns problemas que são descritos por sistemas.

Um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem é dado por

$$x' = f(t, x) \quad (4.1)$$

onde  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ,  $f = (f_1, \dots, f_n) : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ , com  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ .

Se cada uma das componentes da função  $f(t, x)$  em (4.1) for linear em  $x \in \mathbb{R}^n$ , então dizemos que o sistema de equações é linear.

Quando  $g_i(t) \equiv 0$  para todo  $i = 1, \dots, n$ , dizemos que o sistema é homogêneo. Caso contrário, o sistema é não homogêneo.

**Observação 4.1.** Toda equação diferencial linear de ordem  $n$  na variável  $y(t)$  pode ser escrita na forma de um sistema de  $n$  equações de primeira ordem nas variáveis

$$x_1(t) = y, x_2(t) = \frac{dy}{dt}, \dots, x_n(t) = \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}.$$

Assim, podemos converter a equação diferencial do tipo

$$a_n(t) \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y = 0, \quad a_n(t) \neq 0,$$

em um sistema de  $n$  equações de primeira ordem. Basta tomar  $x_1(t) = y, x_2(t) = \frac{dy}{dt}, \dots, x_n(t) = \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}$ . Assim,

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \frac{dx_2}{dt} = x_3, \dots, \frac{dx_{n-1}}{dt} = x_n,$$

$$\text{e } \frac{dx_n}{dt} = -\frac{a_{n-1}(t)x_n + a_{n-2}(t)x_{n-1} + \dots + a_0 x_1}{a_n(t)}.$$

**Definição 4.1.** Uma função diferencial  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  chama-se solução da equação (4.1) no intervalo  $I$  se:

- i) o gráfico de  $\varphi$  em  $I$ ,  $\{(t, \varphi(t)); t \in I\}$ , está contido em  $\mathbb{R} \times \Omega$ .
- ii)  $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$  para todo  $t \in I$ .

Vamos apresentar uma prova do Teorema de Existência e Unicidade de solução para o PVI e para isto, vamos precisar das definições e resultados a seguir.

**Definição 4.2.** Uma aplicação  $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é dita *lipschitziana* em  $\Omega$  relativamente a segunda variável se existe uma constante  $K$  tal que

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq K|x - y|$$

para todo  $(t, x), (t, y) \in \Omega$ ,  $K > 0$  é chamada de *constante de Lipschitz* de  $f$ .

**Teorema 4.1** (Banach<sup>1</sup>). Sejam  $(X, d)$  um espaço métrico completo e  $F : X \rightarrow X$  uma contração, isto é,  $d(F(x), F(y)) \leq Kd(x, y)$ , para  $0 \leq K < 1$ . Então, existe um único ponto fixo  $p$ , de  $F$ , ou seja,  $F(p) = p$ .

**Corolário 4.1.** Seja  $X$  um espaço métrico completo. Se  $F : X \rightarrow X$  é contínua e, para algum  $m$ ,  $F^m$  é uma contração, então existe um único ponto  $p$  fixo de  $F$ .

**Teorema 4.2.** Seja  $f$  contínua e lipschitziana relativamente a segunda variável em  $\Omega = I_a \times B_b$ , onde  $I_a = \{t; |t - t_0| \leq a\}$ ,  $B_b = \{x; |x - x_0| \leq b\}$ . Se  $|f| \leq M$  em  $\Omega$  então existe uma única solução de

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (4.2)$$

em  $I_\alpha$ , onde  $\alpha = \min\{a, \frac{b}{M}\}$ .

*Demonstração.* Seja  $X = \mathcal{C}(I_\alpha, B_b)$  espaço métrico completo das funções contínuas  $\varphi : I_\alpha \rightarrow B_b$  com métrica

$$d(\varphi_1, \varphi_2) = \sup_{t \in I_\alpha} |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|.$$

Seja  $\varphi \in X$ , definimos  $F(\varphi) : I_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$  por

$$F(\varphi)(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds, \quad t \in I_\alpha.$$

Note que, para todo  $t \in I_\alpha$ , temos

$$|F(\varphi)(t) - x_0| = \left| \int_{t_0}^t f(s, \varphi(s)) ds \right| \leq M|t - t_0| \leq M\alpha \leq b.$$

Portanto  $F(X) \subseteq X$ .

Além disso, para todo  $\varphi_1, \varphi_2 \in X$  e  $n \geq 0$

$$|F^n(\varphi_1)(t) - F^n(\varphi_2)(t)| \leq \frac{K^n |t - t_0|^n}{n!} d(\varphi_1, \varphi_2), \quad t \in I_\alpha,$$

---

<sup>1</sup>A demonstração deste teorema pode ser encontrada em *Introductory Functional Analysis with Applications*. de Erwin Kreyszig, John Wiley & Sons, 1978.

onde  $K$  é uma constante de Lipschitz de  $f$ .

Provaremos esta desigualdade por indução em  $n$ .

Para  $n = 1$  temos

$$\begin{aligned} |F(\varphi_1)(t) - F(\varphi_2)(t)| &= \left| \int_{t_0}^t [f(s, \varphi_1(s)) - f(s, \varphi_2(s))] ds \right| \\ &\leq \int_{t_0}^t |f(s, \varphi_1(s)) - f(s, \varphi_2(s))| ds \leq K \int_{t_0}^t |\varphi_1(s) - \varphi_2(s)| ds \\ &\leq K|t - t_0|d(\varphi_1, \varphi_2), \quad t \in I_\alpha. \end{aligned}$$

Suponhamos que é válida para  $n$ , ou seja,

$$|F^n(\varphi_1)(t) - F^n(\varphi_2)(t)| \leq \frac{K^n |t - t_0|^n}{n!} d(\varphi_1, \varphi_2), \quad t \in I_\alpha.$$

Então para  $n + 1$  temos,

$$\begin{aligned} |F^{n+1}(\varphi_1)(t) - F^{n+1}(\varphi_2)(t)| &= |F(F^n(\varphi_1))(t) - F(F^n(\varphi_2))(t)| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t |f(s, F^n(\varphi_1)(s)) - f(s, F^n(\varphi_2)(s))| ds \right| \leq \int_{t_0}^t K |F^n(\varphi_1)(s) - F^n(\varphi_2)(s)| ds \\ &\leq K \int_{t_0}^t \frac{K^n (t_0 - s)^n}{n!} d(\varphi_1, \varphi_2) ds = \frac{K^{n+1} |t - t_0|^{n+1}}{(n+1)!} d(\varphi_1, \varphi_2), \quad t \in I_\alpha. \end{aligned}$$

Portanto,  $d(F^n(\varphi_1), F^n(\varphi_2)) \leq \frac{K^n \alpha^n}{n!} d(\varphi_1, \varphi_2)$  e, para  $n$  suficientemente grande,  $\frac{K^n \alpha^n}{n!} < 1$ , pois este é o termo geral cuja soma é  $e^{K\alpha}$ , logo  $F^n$  é uma contração em  $X$ . Pelo corolário anterior, existe uma única  $\varphi$  tal que  $F(\varphi) = \varphi$ .  $\square$

## 4.1 Sistemas lineares

Vamos fazer uma analogia com o caso escalar com respeito a expressão de uma solução do sistema linear com coeficientes constantes. Para isso consideremos o seguinte sistema linear de equações diferenciais

$$x' = Ax, \tag{4.3}$$

onde  $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $A$  é uma matriz real  $n \times n$  e

$$x' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

No caso escalar, utilizando o método de separação de variáveis para equações diferenciais de primeira ordem podemos encontrar a solução  $x(t) = \alpha e^{at}$  da equação  $x' = ax$ , com  $x(0) = \alpha$ . Veremos no decorrer desta seção que a solução de (4.3) também pode ser expressa por meio de uma exponencial.

**Exemplo 4.1.** Consideremos um caso particular de (4.3) dado pelo sistema linear

$$\begin{cases} x_1' = -x_1 \\ x_2' = 2x_2, \end{cases}$$

neste caso

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Quando  $A$  é uma matriz diagonal, isto é, os elementos que não estão na diagonal principal são nulos, como no caso acima, a solução obtida pelo método de separação de variáveis é dada por

$$\begin{cases} x_1(t) = c_1 e^{-t} \\ x_2(t) = c_2 e^{2t} \end{cases}$$

que é o mesmo que

$$x(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix},$$

onde  $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = x(0)$ .

Percebemos que a solução acima define uma curva  $x(t) \in \mathbb{R}^2$  conforme  $t$  varia. Esta curva pode ser descrita geometricamente desenhando as componentes da solução  $x_1$  e  $x_2$  no plano, conhecido como *plano de fase*, e usando as setas para indicar a direção do movimento ao longo dessas curvas com o tempo  $t$  variando. Quando  $c_1 = c_2 = 0$  temos  $x_1(t) = x_2(t) = 0$  para todo  $t$  e a origem é dita *ponto de equilíbrio*.

**Definição 4.3.** Um sistema autônomo é um sistema de equações diferenciais em que a função  $f$  em (4.3) não depende explicitamente de  $t$ . Representamos tal sistema pela equação

$$x' = f(x), \tag{4.4}$$

onde  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

No exemplo acima o sistema dado é autônomo.

A aplicação  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $f(x) = Ax$  define um *campo de vetores* em  $\mathbb{R}^2$ , ou seja, a cada ponto  $x \in \mathbb{R}^2$  a função  $f$  associa um vetor  $f(x)$ . Se traçamos cada vetor  $f(x)$  com seu ponto inicial no ponto  $x$  obtemos uma representação geométrica do campo de vetores.

**Definição 4.4.** Se  $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$  é solução do sistema (4.4), então a curva parametrizada pelo parâmetro  $t$  é chamada *órbita do sistema*. A representação gráfica das órbitas do sistema é chamada de *retrato de fase do sistema*.

**Definição 4.5.** Qualquer ponto  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  tal que  $f(\bar{x}) = 0$  é chamado ponto de equilíbrio (ou estacionário) do sistema (4.4). Qualquer ponto  $x$  no domínio da função  $f$  tal que  $f(x) \neq 0$  é dito ponto regular.

No caso linear o retrato de fase de um sistema autônomo é obtido através da análise dos autovalores e autovetores da matriz  $A$  e dependendo dos sinais dos autovalores temos a seguinte definição.

**Definição 4.6.** Seja  $A$  uma matriz real  $n \times n$  com  $k$  autovalores negativos  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  e  $n - k$  autovalores positivos  $\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n$  sendo todos distintos. Seja  $\{v_1, \dots, v_n\}$  o conjunto correspondente de autovetores, então definimos os subespaços estável e instável do sistema linear (4.3),  $E^s$  e  $E^u$  como sendo os subespaços gerados por  $\{v_1, \dots, v_k\}$  e  $\{v_{k+1}, \dots, v_n\}$  respectivamente, isto é,  $E^s = [v_1, \dots, v_k]$  e  $E^u = [v_{k+1}, \dots, v_n]$ .

Se a matriz  $A$  tem autovalores imaginários puros então definimos também o subespaço centro.

**Exemplo 4.2.** Consideremos o seguinte sistema linear em  $\mathbb{R}^3$ :

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 \\ x'_2 = x_2 \\ x'_3 = -x_3. \end{cases}$$

Cuja solução geral é dada por

$$\begin{cases} x_1(t) = c_1 e^t \\ x_2(t) = c_2 e^t \\ x_3(t) = c_3 e^{-t}. \end{cases}$$

Além disso, através da matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  obtemos os autovalores  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 1$  e  $\lambda_3 = -1$ . Logo, o plano  $x_1 x_2$  é referido como subespaço instável e o eixo  $x_3$  é o subespaço estável do sistema.

**Definição 4.7.** Seja  $A$  uma matriz  $n \times n$ . Então para  $t \in \mathbb{R}$ , definimos

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}.$$

Note que  $e^{At}$  é uma matriz  $n \times n$  que pode ser expressa em termos do autovalores e autovetores de  $A$ . Se usarmos  $T$  a transformação linear  $T(x) = Ax$  então  $\|e^{At}\| \leq e^{\|A\||t|}$ , onde  $\|A\| = \|T\|$ .

**Observação 4.2.** No apêndice B se encontra o estudo de matrizes diagonalizáveis e não diagonalizáveis, além da prova que a  $e^{At}$  está bem definida e das propriedades que essa exponencial satisfaz, como por exemplo

$$e^{STS^{-1}} = Se^T S^{-1}.$$

A fim de dar condições que garantam a existência de soluções de sistemas lineares de equações diferenciais definiremos a derivada de um operador exponencial.

**Proposição 4.1.** *Seja  $A$  uma matriz  $n \times n$ , então*

$$\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}.$$

*Demonstração.* Temos por definição de derivada que

$$\frac{d}{dt}e^{At} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{A(t+h)} - e^{At}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} e^{At} \frac{(e^{Ah} - I)}{h} = e^{At} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{Ah} - I}{h}$$

Além disso, pelo definição 4.7, segue que

$$e^{At} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{Ah} - I}{h} = e^{At} \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{k \rightarrow \infty} \left( A + \frac{A^2 h}{2!} + \dots + \frac{A^k h^{k-1}}{k!} \right) = Ae^{At}.$$

□

**Teorema 4.3.** *Seja  $A$  uma matriz  $n \times n$ . Então para um dado  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , o problema do valor inicial*

$$\begin{cases} x' = Ax \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (4.5)$$

*tem uma única solução dada por*

$$x(t) = e^{At}x_0.$$

*Demonstração.* Pela proposição 4.3, se  $x(t) = e^{At}x_0$ , então

$$x'(t) = \frac{d}{dt}e^{At}x_0 = Ae^{At}x_0 = Ax(t),$$

para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Além disso,  $x(0) = Ix_0 = x_0$ . Então  $x(t) = e^{At}x_0$  é uma solução de (4.5).

Provemos que  $x(t) = e^{At}x_0$  é única.

Seja  $x(t)$  uma solução qualquer de (4.5) e consideremos

$$y(t) = e^{-At}x(t).$$

Pela proposição anterior temos

$$y'(t) = -Ae^{-At}x(t) + e^{-At}x'(t) = -Ae^{-At}x(t) + e^{-At}Ax(t) = 0,$$



para todo  $t$  real e desde que  $e^{-At}$  e  $A$  comutem.

Então,  $y(t)$  é uma constante. Fazendo  $t = 0$ , temos que  $y(0) = x_0$ , e portanto, uma solução de (4.5) é dada por

$$x(t) = e^{At}y(0) = e^{At}x_0.$$

Portanto, a solução é única. □

**Observação 4.3.** Seja  $v$  um autovetor de  $A$  associado ao autovalor  $\lambda$ . Notemos que

$$A(cv) = cAv = c\lambda v = \lambda(cv)$$

para qualquer constante  $c$ . Logo, qualquer múltiplo de um autovetor de  $A$  é também um vetor próprio de  $A$ , com o mesmo autovalor. Para cada autovetor  $v_j$  de  $A$  com autovalor  $\lambda_j$ , temos uma solução  $x_j(t) = e^{\lambda_j t}v_j$  de  $x' = Ax$ . Se  $A$  tem  $n$  vetores próprios linearmente independentes  $v_1, \dots, v_n$  com autovalores  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , respectivamente, então  $x_j(t) = e^{\lambda_j t}v_j$ ,  $j = 1, \dots, n$  são  $n$  soluções linearmente independentes de  $x' = Ax$ . Então, a solução geral de  $x' = Ax$  é dada por

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} v_2 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} v_n.$$

**Exemplo 4.3.** Vamos determinar a solução do PVI

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} x, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

O polinômio característico da matriz  $A$  é

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 12 \\ 3 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)^2 - 36 = (\lambda - 7)(\lambda + 5).$$

Logo, os autovalores de  $A$  são  $\lambda_1 = 7$  e  $\lambda_2 = -5$ .

Para  $\lambda_1 = 7$  temos

$$(A - 7I)v_1 = \begin{pmatrix} -6 & 12 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

o que implica que  $v^1 = 2v^2$ . Desta forma,  $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  é um autovetor de  $A$ . Então,

$$x_1(t) = e^{7t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

é uma solução.

Para  $\lambda_2 = -5$  temos

$$(A + 5I)v_2 = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v^3 \\ v^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

o que implica que  $v^3 = -2v^4$ . Assim,  $v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$  é um autovetor de  $A$ . Então,

$$x_2(t) = e^{-5t} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

é uma segunda solução. As soluções  $x_1$  e  $x_2$  são linearmente independentes pois  $A$  tem autovalores distintos. Portanto, a solução geral é dada por

$$x(t) = c_1 e^{7t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-5t} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

As constantes  $c_1$  e  $c_2$  são determinadas pelas condições iniciais

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c_1 \\ c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2c_2 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Assim,  $2c_1 - 2c_2 = 0$  e  $c_1 + c_2 = 1$ , o que implica que  $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$ . A solução do PVI é

$$x(t) = \frac{1}{2} e^{7t} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} e^{-5t} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{7t} - e^{-5t} \\ \frac{1}{2} e^{7t} + \frac{1}{2} e^{-5t} \end{pmatrix}.$$

Uma outra situação a se considerar é o caso em que o polinômio característico de  $A$  possuir raízes repetidas, isto é, se  $\lambda$  for um autovalor de multiplicidade  $m$ , teremos duas possibilidades:

*i)* Para algumas matrizes  $A$ , é possível encontrar  $m$  autovetores linearmente independentes  $w_1, \dots, w_m$  correspondentes a um autovalor  $\lambda_*$  de multiplicidade  $m \leq n$ . Nesse caso, a solução geral do sistema é dada por

$$x(t) = c_1 w_1 e^{\lambda_* t} + \dots + c_m w_m e^{\lambda_* t} + c_{n-m} w_{n-m} e^{\lambda_1 t} + \dots + c_n w_n e^{\lambda_{n-m} t}.$$

*ii)* Se houver somente um autovetor correspondente ao autovalor  $\lambda_*$  de multiplicidade  $m$ , então podem ser obtidas  $m$  soluções linearmente independentes da forma

$$x_1(t) = w_{11} e^{\lambda_* t} \tag{4.6}$$

$$x_2(t) = w_{21} t e^{\lambda_* t} + w_{22} e^{\lambda_* t} \tag{4.7}$$

$$\vdots \tag{4.8}$$

$$x_m(t) = w_{m1} \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} e^{\lambda_* t} + w_{m2} \frac{t^{m-2}}{(m-2)!} e^{\lambda_* t} + \dots + w_{mm} e^{\lambda_* t}. \tag{4.9}$$

onde  $w_{ij}$  são os vetores coluna. Logo, a solução geral é dada pela combinação linear de  $x_1, \dots, x_m$  e das demais soluções provenientes dos outros autovalores.

**Exemplo 4.4.** Vamos resolver o PVI

$$x' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} x, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

O polinômio característico da matriz do sistema é  $(2 - \lambda)^3$ , portanto  $\lambda = 2$  é um autovalor com multiplicidade três. Então,

$$(A - 2I)v = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

o que implica que  $v_2 = v_3 = 0$  e  $v_1$  é arbitrário. Logo uma solução de  $x' = Ax$  é

$$x_1(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Também temos

$$(A - 2I)^2 v = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

o que implica que  $v_3 = 0$  e que  $v_1$  e  $v_2$  são arbitrários. Logo consideramos

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que satisfaz  $(A - 2I)^2 v = 0$  e  $(A - 2I)v \neq 0$ . Portanto

$$\begin{aligned} x_2(t) &= e^{At} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e^{2t} e^{(A-2I)t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e^{2t} [I + t(A - 2I)] \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & t & 3t \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.11) \end{aligned}$$

é uma segunda solução de  $x' = Ax$ .

Agora procuramos a solução da equação

$$(A - 2I)^3 v = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Como todo vetor  $v$  é solução da equação tomamos

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

pois satisfaz  $(A - 2I)^2 v \neq 0$ . Portanto,

$$\begin{aligned} x_3(t) &= e^{At} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e^{2t} e^{(A-2I)t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= e^{2t} \left[ I + (A - 2I)t + (A - 2I)^2 \frac{t^2}{2} \right] \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= e^{2t} \begin{pmatrix} 1 & t & 3t - \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & -t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} 3t - \frac{t^2}{2} \\ -t \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

é uma terceira solução de  $x' = Ax$ . Portanto

$$x(t) = e^{2t} \left[ c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 3t - \frac{t^2}{2} \\ -t \\ 1 \end{pmatrix} \right].$$

A partir das condições iniciais determinamos as constantes  $c_1$ ,  $c_2$  e  $c_3$ ,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Assim,  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = 2$  e  $c_3 = 1$ . Portanto

$$x(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 + 5t - \frac{t^2}{2} \\ 2 - t \\ 1 \end{pmatrix}$$

é a solução do PVI.

Outro caso a considerar, se  $\lambda = \alpha + i\beta$  é uma autovalor complexo de  $A$  com autovetor  $v = v_1 + iv_2$ , então  $x(t) = e^{\lambda t} v$  é uma solução com valores complexos da equação diferencial  $x' = Ax$ .

**Lema 4.1.** *Seja  $x(t) = y(t) + iz(t)$  uma solução com valores complexos de  $x' = Ax$ . Então, tanto  $y(t)$  como  $z(t)$  são soluções com valores reais de  $x' = Ax$ .*

*Demonstração.* A função com valores complexos  $x(t) = e^{(\alpha+i\beta)t}(v_1 + iv_2)$  pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{\alpha t}(\cos \beta t + i \operatorname{sen} \beta t)(v_1 + iv_2) \\ &= e^{\alpha t}[(v_1 \cos \beta t - v_2 \operatorname{sen} \beta t) + i(v_1 \operatorname{sen} \beta t + v_2 \cos \beta t)]. \end{aligned}$$

Portanto, se  $\lambda = \alpha + i\beta$  é um autovalor de  $A$  com autovetor correspondente  $v = v_1 + iv_2$ , então

$$y(t) = e^{\alpha t}[(v_1 \cos \beta t - v_2 \operatorname{sen} \beta t)]$$

e

$$z(t) = e^{\alpha t}[(v_1 \operatorname{sen} \beta t + v_2 \cos \beta t)]$$

são soluções reais de  $x' = Ax$  linearmente independentes, pois satisfazem a equação diferencial  $x' = Ax$ .  $\square$

**Exemplo 4.5.** Vamos encontrar a solução do PVI

$$x' = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} x, \quad x(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Calculando as raízes do polinômio característico

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & 8 \\ -1 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)(-2 - \lambda) + 8 = \lambda^2 + 4 = 0,$$

obtemos os autovalores  $\lambda_1 = 2i$  e  $\lambda_2 = -2i$ .

Para  $\lambda_1$  temos

$$\begin{pmatrix} 2 - 2i & 8 \\ -1 & -2 - 2i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

o que implica que  $v_1 = -(2 + 2i)v_2$ . Tomando  $v_2 = -1$  temos

$$v = \begin{pmatrix} 2 + 2i \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Então

$$v_1 = \operatorname{Re}(v) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad v_2 = \operatorname{Im}(v) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Como o autovalor tem parte real nula, isto é  $\alpha = 0$ , segue que a solução geral do sistema é

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1 e^{0t} \left[ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cos 2t - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \operatorname{sen} 2t \right] + \left[ \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cos 2t + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \operatorname{sen} 2t \right] \\ &= c_1 \begin{pmatrix} 2 \cos 2t - 2 \operatorname{sen} 2t \\ -\cos 2t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \cos 2t + 2 \operatorname{sen} 2t \\ -\operatorname{sen} 2t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

As constantes  $c_1$  e  $c_2$  são determinadas pela condição inicial,

$$\begin{aligned} x(0) &= c_1 \begin{pmatrix} 2 \cos 2.0 - 2 \operatorname{sen} 2.0 \\ -\cos 2.0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \cos 2.0 + 2 \operatorname{sen} 2.0 \\ -\operatorname{sen} 2.0 \end{pmatrix} \\ &= c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Segue que  $c_1 = 1$  e  $c_2 = 0$ . Assim a solução do PVI é

$$x(t) = \begin{pmatrix} 2 \cos 2t - 2 \operatorname{sen} 2t \\ -\cos 2t \end{pmatrix}.$$

#### 4.1.1 Soluções matrizes fundamentais $e^{Ax}$

Se  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  são  $n$  soluções linearmente independentes da equação diferencial

$$x' = Ax, \tag{4.12}$$

então toda solução  $x(t)$  pode ser escrita como a combinação linear

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \dots + c_n x_n(t).$$

Na forma matricial temos  $x(t) = X(t)c$ , onde  $X(t)$  é a matriz cujas colunas são

$$x_1, \dots, x_n \text{ e } c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

**Definição 4.8.** Uma matriz  $X(t)$  é chamada de uma solução matriz fundamental de (4.12) se suas colunas formam um conjunto de  $n$  soluções linearmente independentes de (4.12).

Veremos a seguir que a partir de uma solução matriz fundamental de (4.12) podemos calcular a matriz  $e^{At}$ . O que é de extrema importância, já que nem sempre é possível determinar a série infinita  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$ .

**Teorema 4.4.** Seja  $X(t)$  uma solução matriz fundamental da equação diferencial  $x' = Ax$ . Então

$$e^{At} = X(t)X^{-1}(0).$$

*Demonstração.* Seja  $X(t)$  uma solução matriz fundamental de (4.12). Então  $e^{At}$  pode ser escrita como uma combinação linear de  $X(t)$

$$e^{At} = X(t)C, \tag{4.13}$$

onde  $C$  é uma matriz constante. Tomando  $t = 0$  em (4.13) obtemos  $I = X(0)C$ , o que implica que  $C = X^{-1}(0)$ . Portanto,

$$e^{At} = X(t)X^{-1}(0).$$

□

**Exemplo 4.6.** Vamos determinar  $e^{At}$  para a matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

Os autovalores da matriz  $A$  são  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 2$  e  $\lambda_3 = -1$  e seus respectivos autovetores  $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  e  $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Logo, obtemos as soluções  $x_1(t) = e^t \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $x_2(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  e  $x_3(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Então uma solução matriz fundamental de  $A$  é

$$X(t) = \begin{pmatrix} 2e^t & 0 & 0 \\ -2e^t & e^{2t} & 0 \\ e^t & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}. \quad (4.14)$$

Não é difícil verificar que

$$X^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \frac{e^{-t}}{2} & 0 & 0 \\ e^{-2t} & e^{-2t} & 0 \\ -\frac{e^t}{2} & e^t & e^{-t} \end{pmatrix}. \quad (4.15)$$

Portanto,

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 2e^t & 0 & 0 \\ -2e^t & e^{2t} & 0 \\ e^t & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ -e^t + e^{2t} & e^{2t} & 0 \\ \frac{e^t}{2} - \frac{e^{-t}}{2} & e^{-t} & e^{-t} \end{pmatrix}. \quad (4.16)$$

### 4.1.2 Equação não homogênea

Vamos considerar agora a equação não homogênea  $x' = Ax + f(t)$ . Para encontrar a solução do PVI

$$\begin{cases} x' = Ax + f(t), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (4.17)$$

podemos utilizar o método da **variação de parâmetros**, que consiste em procurar uma solução de (4.17) da forma

$$x(t) = u_1(t)x_1(t) + \dots + u_n(t)x_n(t), \quad (4.18)$$

onde  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  são  $n$  soluções linearmente independentes da equação  $x' = Ax$ . Podemos escrever (4.18) na forma matricial  $x(t) = X(t)u(t)$ , onde  $X(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$

$$\text{e } u(t) = \begin{pmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix}.$$

Substituindo essa expressão na equação  $x' = Ax + f(t)$  temos

$$X'(t)u(t) + X(t)u'(t) = AX(t)u(t) + f(t). \quad (4.19)$$

Como  $X(t)$  é uma matriz fundamental, então  $X'(t) = AX(t)$ , portanto, a equação (4.19) se reduz a

$$X(t)u'(t) = f(t).$$

Como as colunas de  $X(t)$  são vetores linearmente independentes, segue que existe  $X^{-1}(t)$ , e

$$u'(t) = X^{-1}(t)f(t).$$

Integrando essa expressão, obtemos

$$u(t) = u(t_0) + \int_{t_0}^t X^{-1}(s)f(s)ds = X^{-1}(t_0)x_0 + \int_{t_0}^t X^{-1}(s)f(s)ds.$$

Logo,

$$x(t) = X(t)X^{-1}(t_0)x_0 + X(t) \int_{t_0}^t X^{-1}(s)f(s)ds.$$

Se  $X(t) = e^{At}$ , então  $X^{-1}(s) = e^{-As}$ . Portanto

$$x(t) = e^{At}e^{-At_0}x_0 + e^{At} \int_{t_0}^t e^{-As}f(s)ds = e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)}f(s)ds.$$

**Exemplo 4.7.** Vamos encontrar a solução geral do sistema

$$X' = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t$$

Para isso determinamos primeiro a solução da equação homogênea associada. O polinômio característico, é dado por:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ -1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2) = 0,$$

logo  $\lambda_1 = 1$  e  $\lambda_2 = 2$  são autovalores.

Para  $\lambda_1$  temos,

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

o que implica que  $v_1 = 2v_2$ . Tomando  $v_2 = 1$ , obtemos o autovetor  $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Logo

$$x_1(t) = e^t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Para  $\lambda_2$  temos

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$



o que implica que  $w_1 = w_2$ . Tomando  $w_1 = 1$ , obtemos o autovetor  $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Assim,

$$x_2(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Obtemos, dessa forma

$$X(t) = \begin{pmatrix} 2e^t & e^{2t} \\ e^t & e^{2t} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad X^{-1}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & -e^{-t} \\ -e^{-2t} & 2e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} X_p(t) &= \begin{pmatrix} 2e^t & e^{2t} \\ e^t & e^{2t} \end{pmatrix} \cdot \int \begin{pmatrix} e^{-t} & -e^{-t} \\ -e^{-2t} & 2e^{-2t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^t \\ -e^t \end{pmatrix} dt \\ &= \begin{pmatrix} 2e^t & e^{2t} \\ e^t & e^{2t} \end{pmatrix} \cdot \int \begin{pmatrix} 2 \\ -3e^{-t} \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} 2e^t & e^{2t} \\ e^t & e^{2t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2t \\ 3e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2te^t + 3e^t \\ 4te^t + 3e^t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Portanto, a solução geral do sistema é

$$X(t) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2e^t & e^{2t} \\ e^t & e^{2t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2te^t + 3e^t \\ 4te^t + 3e^t \end{pmatrix}.$$

## 4.2 Aplicações

### 4.2.1 Oscilador harmônico

Vamos generalizar o oscilador harmônico visto no capítulo anterior para um sistema de duas molas acopladas. Considere  $k_1 > 0$  a constante de elasticidade de uma mola sem massa que tem uma das extremidades presa a uma parede e a outra extremidade a um carrinho de massa  $m_1 > 0$  que está preso em uma extremidade de uma segunda mola sem massa com constante de elasticidade  $k_2 > 0$  que tem preso a sua outra extremidade um segundo carrinho de massa  $m_2 > 0$ .

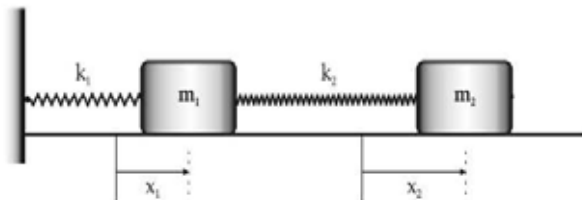


Figura 4.1: Sistema massa-mola.

Os carrinhos se movem em linha reta sem atrito. Como já vimos, as forças restauradoras das molas são proporcionais ao deslocamento ( Lei de Hooke ). Assim na

posição  $x_1$ , o primeiro carrinho sofre uma força restauradora  $-k_1x_1$ . E na posição  $x_2$  o carrinho tem um deslocamento  $x_2 - x_1$  e a força restauradora é  $-k_2(x_2 - x_1)$ .

Porém como estão acoplados a segunda mola também atua sobre o primeiro carrinho com a mesma intensidade, no sentido oposto, isto é,  $k_2(x_2 - x_1)$ . Além disso, consideramos que exista uma força de atrito do meio agindo sobre os carrinhos, cada força atua no sentido oposto ao do movimento e é de intensidade proporcional à velocidade de cada carrinho. Logo  $-b_1x_1'$  e  $-b_2x_2'$  são as forças de atritos dos dois carrinhos.

Logo pela segunda Lei de Newton

$$\begin{cases} m_1x_1'' = -(k_1 + k_2)x_1 - b_1x_1' + k_2x_2 \\ m_2x_2'' = -k_2x_1 - k_2x_2 - b_2x_2' \end{cases}$$

Denotando  $y_1 = x_1$ ,  $y_2 = x_1'$ ,  $y_3 = x_2$  e  $y_4 = x_2'$  temos

$$\begin{cases} m_1y_2' = -y_1(k_1 + k_2) - b_1y_2 + k_2y_3 \\ m_2y_4' = -k_2(y_3 - y_1) - b_2y_4 \end{cases}$$

Então o sistema linear associado a essas molas acopladas é dado por

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = -\frac{k_1 + k_2}{m_1}y_1 - \frac{b_1}{m_1}y_2 + \frac{k_2}{m_1}y_3 \\ y_3' = y_4 \\ y_4' = \frac{k_2}{m_2}y_1 - \frac{k_2}{m_2}y_3 - \frac{b_2}{m_2}y_4 \end{cases}$$

Esse sistema linear de equações diferenciais nas variáveis  $y_1, y_2, y_3$  e  $y_4$  pode ser escrito na forma vetorial  $y' = Ay$ , com  $y = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4$  e  $A \in M_{4 \times 4}(\mathbb{R})$

$$y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1+k_2}{m_1} & \frac{b_1}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_2}{m_2} & 0 & -\frac{k_2}{m_2} & -\frac{b_2}{m_2} \end{pmatrix} \cdot y. \quad (4.20)$$

Se tivéssemos  $n$  massas acopladas, ao aplicarmos a Segunda Lei de Newton teríamos um sistema de  $n$  equações diferenciais de segunda ordem, o qual poderia ser transformado num sistema de  $2n$  equações lineares de primeira ordem.

**Exemplo 4.8.** Assumindo que  $m_1 = m_2 = 1$ ,  $k_1 = k_2 = 1$ . Vamos resolver o sistema (4.20), considerando que não haja força externa.

Pelo polinômio característico temos,

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -2 & -\lambda & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} + (-\lambda) \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ -2 & -\lambda & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (-1)(-\lambda^2 + 1 - 2) + (-\lambda)(-\lambda^3 - 2\lambda) = \lambda^4 + 3\lambda^2 + 1.$$

Logo, os autovalores são

$$\lambda_1 = \sqrt{\frac{-3 + \sqrt{5}}{2}}, \quad \lambda_2 = -\sqrt{\frac{-3 + \sqrt{5}}{2}}, \quad \lambda_3 = \sqrt{\frac{-3 - \sqrt{5}}{2}}, \quad \lambda_4 = -\sqrt{\frac{-3 - \sqrt{5}}{2}}.$$

Para simplificar a notação chamamos  $\lambda_1 = bi$ ,  $\lambda_2 = -bi$ ,  $\lambda_3 = di$  e  $\lambda_4 = -di$ .

Então, para  $\lambda_2 = -bi$  obtemos

$$\begin{pmatrix} bi & 1 & 0 & 0 \\ -2 & bi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & bi & 1 \\ 1 & 0 & -1 & bi \end{pmatrix}$$

Escalonando temos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & bi \\ 0 & 1 & bi & b^2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{bi} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Segue o sistema

$$\begin{cases} \alpha - \gamma + bi\delta = 0 \\ \beta + bi\gamma + b^2\delta = 0 \\ \gamma + \frac{1}{bi}\delta = 0 \end{cases}$$

o que implica que  $\alpha = \frac{(i - b^2i)\delta}{b}$ ,  $\beta = (1 - b^2)\delta$  e  $\gamma = \frac{i}{b}\delta$ . Portanto um

autovetor associado ao  $\lambda_2$  é dado por  $v_2 = \begin{pmatrix} i - bi \\ b - b^3 \\ i \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b - b^3 \\ 0 \\ b \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 1 - b \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  Assim,

$$x_1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ b - b^3 \\ 0 \\ b \end{pmatrix} \cos(-bt) - \begin{pmatrix} 1 - b \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{sen}(-bt)$$

e

$$x_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ b - b^3 \\ 0 \\ b \end{pmatrix} \text{sen}(-bt) + \begin{pmatrix} 1 - b \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{cos}(-bt)$$

são soluções de (4.20) neste exemplo.

Analogamente, para  $\lambda_4 = -di$  encontramos o autovetor  $v_4 = \begin{pmatrix} i - di \\ d - d^3 \\ i \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ d - d^3 \\ 0 \\ d \end{pmatrix} +$

$$i \begin{pmatrix} 1 - d \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$x_3(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ d - d^3 \\ 0 \\ d \end{pmatrix} \text{cos}(-dt) - \begin{pmatrix} 1 - d \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{sen}(-dt)$$

e

$$x_4(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ d - d^3 \\ 0 \\ d \end{pmatrix} \text{sen}(-dt) + \begin{pmatrix} 1 - d \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{cos}(-dt)$$

são soluções de (4.20) neste exemplo.

Portanto, a solução geral deste problema é dada por

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + c_3 x_3(t) + c_4 x_4(t)$$

## 4.2.2 Circuito elétrico

A teoria de circuitos elétricos, constituídos por indutores, capacitores e resistores, está baseada nas *leis de Kirchhoff* que diz que:

- i) O fluxo líquido de corrente em cada nó de uma rede é nulo;
- ii) O somatório das quedas de voltagem numa malha fechada de uma rede é nulo.

Além das leis de Kirchnoff, temos as relações entre a corrente e a voltagem dadas

por:

$$V = RI; \quad R = \text{resist\^encia em ohms}$$

$$C \frac{dV}{dt} = I; \quad C = \text{capacit\^ancia em farads}$$

$$L \frac{dI}{dt} = V; \quad L = \text{indut\^ancia em henrys.}$$

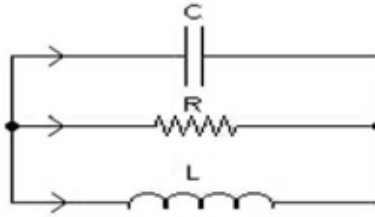


Figura 4.2: Circuito RLC em paralelo.

Considere um circuito el\^etrico paralelo como o da figura anterior. Sejam  $I_c$ ,  $I_r$  e  $I_l$  as correntes que passam no capacitor, resistor e indutor, respectivamente, no sentido indicado pelas setas.

Pelas leis de Kirchhoff, temos

$$\begin{cases} I_c + I_r + I_l = 0 \\ V_c - V_r = 0 \\ V_r - V_l = 0. \end{cases}$$

Ent\^ao,

$$C \frac{dV_c}{dt} = I_c = -(I_r + I_l) = -\frac{V_c}{R} - I_l$$

$$L \frac{dI_l}{dt} = V_l = V_c$$

Assim, obtemos o sistema

$$\begin{cases} \frac{dV_c}{dt} = -\frac{V_c}{RC} - \frac{I_l}{C} \\ \frac{dI_l}{dt} = \frac{V_c}{L}. \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema encontramos  $V_c$ , e conseq\^uentemente, todas as outras informa\^oes do circuito.

**Exemplo 4.9.** Considere o circuito el\^etrico da Figura 4.2. Suponhamos que  $R = 1\Omega$ ,  $C = 0,5F$  e  $L = 1H$ . Vamos encontrar a solu\^ao geral sistema (4.2.2). Reescrevendo-o na forma matricial temos

$$\begin{pmatrix} V_c' \\ I_l' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{RC} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_c \\ I_l \end{pmatrix}.$$

Substituindo os valores de  $R$ ,  $C$  e  $L$  obtemos

$$\begin{pmatrix} V_c' \\ I_l' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V_c \\ I_l \end{pmatrix}.$$

Logo os autovalores são  $\lambda_1 = -1 - i$  e  $\lambda_2 = -1 + i$ . Tomamos o autovalor  $\lambda_1$  e encontramos o autovetor correspondente

$$v = \begin{pmatrix} -1 - i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto, a solução geral do sistema é dada por

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} V_c \\ I_l \end{pmatrix} &= c_1 e^{-t} \left( \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(-t) - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sin(-t) \right) + c_2 e^{-t} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos(-t) + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \sin(-t) \right) \\ &= c_1 \begin{pmatrix} -e^{-t} \cos(-t) - e^{-t} \sin(-t) \\ e^{-t} \cos(-t) \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{-t} \cos(-t) - e^{-t} \sin(-t) \\ e^{-t} \sin(-t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

**Exemplo 4.10** (Mistura de Soluções). Consideremos os tanques 1 e 2 da Figura 4.3, onde  $Q_1$  e  $Q_2$  são, respectivamente, as quantidades de sal. Dados  $Q_1(0) = 25oz$  e  $Q_2(0) = 15oz$ <sup>2</sup>, vamos encontrar o sistema de equações diferenciais que descreve tal fato e sua solução.

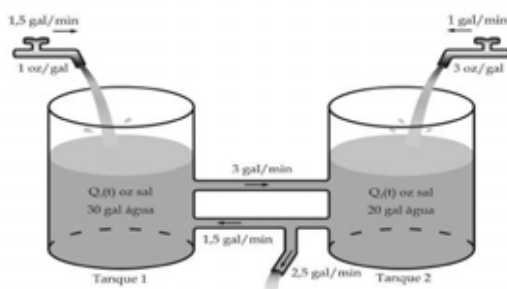


Figura 4.3: Mistura de Soluções.

Observe que a quantidade de solução que entra é igual a quantidade que sai nos tanques, e portanto, o volume se mantém o mesmo. Então, em cada instante  $t$  a concentração da solução é dada por  $\frac{Q_1(t)}{30}$  e  $\frac{Q_2(t)}{20}$ . Assim, a taxa de variação da quantidade de sal no tanque 1 é a diferença entre o sal que entra e o sal que sai, ou seja,

$$\frac{dQ_1(t)}{dt} = 1,5 + 1,5 \frac{Q_2(t)}{20} - 3 \frac{Q_1(t)}{30} = \frac{3}{2} + \frac{3Q_2(t)}{40} - \frac{Q_1(t)}{10}.$$

<sup>2</sup>Para a unidade de medida oz(onça), nos Estados Unidos, 1L equivale a 33,81 onças.

Analogamente, temos

$$\frac{dQ_2(t)}{dt} = 1 + 3\frac{Q_1(t)}{30} - 4\frac{Q_2(t)}{20} = 1 + \frac{Q_1(t)}{10} - \frac{Q_2(t)}{5}.$$

Logo, temos o sistema

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{10} & \frac{3}{40} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

O polinômio característico nos fornece os autovalores  $\lambda_1 = -\frac{1}{20}$  e  $\lambda_2 = -\frac{1}{4}$ . Os autovetores correspondentes são  $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$  e  $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Assim, a solução geral da equação homogênea associada é

$$\begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = c_1 e^{-\frac{1}{20}t} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 e^{-\frac{1}{4}t} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Logo, a matriz  $e^{At}$  é dada por

$$e^{At} = \begin{pmatrix} 3e^{-\frac{1}{20}t} & -e^{-\frac{1}{4}t} \\ 2e^{-\frac{1}{20}t} & 2e^{-\frac{1}{4}t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}e^{-\frac{1}{20}t} + \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}t} & \frac{3}{8}e^{-\frac{1}{20}t} - \frac{3}{8}e^{-\frac{1}{4}t} \\ \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{20}t} - \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{4}t} & \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{20}t} + \frac{3}{4}e^{-\frac{1}{4}t} \end{pmatrix},$$

Portanto,

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{A(t-t_0)}x_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-s)}f(s)ds \\ &= \begin{pmatrix} \frac{3}{4}e^{-\frac{1}{20}t} + \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}t} & \frac{3}{8}e^{-\frac{1}{20}t} - \frac{3}{8}e^{-\frac{1}{4}t} \\ \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{20}t} - \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{4}t} & \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{20}t} + \frac{3}{4}e^{-\frac{1}{4}t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 25 \\ 15 \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} \frac{3}{4}e^{-\frac{1}{20}t} + \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}t} & \frac{3}{8}e^{-\frac{1}{20}t} - \frac{3}{8}e^{-\frac{1}{4}t} \\ \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{20}t} - \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{4}t} & \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{20}t} + \frac{3}{4}e^{-\frac{1}{4}t} \end{pmatrix} \cdot \int_0^t \begin{pmatrix} \frac{9}{8}e^{\frac{1}{20}s} + \frac{3}{8}e^{\frac{1}{4}s} + \frac{3}{8}e^{\frac{1}{20}s} - \frac{3}{8}e^{\frac{1}{4}s} \\ \frac{3}{4}e^{\frac{1}{20}s} - \frac{3}{4}e^{\frac{1}{4}s} + \frac{1}{4}e^{\frac{1}{20}s} + \frac{3}{4}e^{\frac{1}{4}s} \end{pmatrix} ds \\ &= \begin{pmatrix} \frac{75}{4}e^{-\frac{1}{20}t} + \frac{25}{4}e^{-\frac{1}{4}t} + \frac{45}{8}e^{-\frac{1}{20}t} - \frac{45}{8}e^{-\frac{1}{4}t} \\ \frac{25}{2}e^{-\frac{1}{20}t} - \frac{25}{2}e^{-\frac{1}{4}t} + \frac{15}{4}e^{-\frac{1}{20}t} + \frac{45}{8}e^{-\frac{1}{4}t} \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} \frac{3}{4}e^{-\frac{1}{20}t} + \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}t} & \frac{3}{8}e^{-\frac{1}{20}t} - \frac{3}{8}e^{-\frac{1}{4}t} \\ \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{20}t} - \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{4}t} & \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{20}t} + \frac{3}{4}e^{-\frac{1}{4}t} \end{pmatrix} \cdot \int_0^t \begin{pmatrix} \frac{12}{8}e^{\frac{1}{20}s} \\ e^{\frac{1}{20}s} \end{pmatrix} ds \\ &= \begin{pmatrix} \frac{195}{8}e^{-\frac{1}{20}t} + \frac{5}{8}e^{-\frac{1}{4}t} \\ \frac{65}{4}e^{-\frac{1}{20}t} - \frac{5}{4}e^{-\frac{1}{4}t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{4}e^{-\frac{1}{20}t} + \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}t} & \frac{3}{8}e^{-\frac{1}{20}t} - \frac{3}{8}e^{-\frac{1}{4}t} \\ \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{20}t} - \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{4}t} & \frac{1}{4}e^{-\frac{1}{20}t} + \frac{3}{4}e^{-\frac{1}{4}t} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 30e^{\frac{1}{20}t} - 30 \\ 20e^{\frac{1}{20}t} - 20 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{195}{8}e^{-\frac{1}{20}t} + \frac{5}{8}e^{-\frac{1}{4}t} \\ \frac{65}{4}e^{-\frac{1}{20}t} - \frac{5}{4}e^{-\frac{1}{4}t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 30 - 30e^{-\frac{1}{20}t} \\ 20 - 20e^{-\frac{1}{20}t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{45}{8}e^{-\frac{1}{20}t} + \frac{5}{8}e^{-\frac{1}{4}t} + 30 \\ -\frac{15}{4}e^{-\frac{1}{20}t} - \frac{5}{4}e^{-\frac{1}{4}t} + 20 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$





## 5 Comentário final

Com esse trabalho podemos constatar a diversidade de aplicações descritas por equações diferenciais ordinárias nas áreas da física, biologia, química. Este trabalho deu origem a um texto didático que pode ser usado em cursos de física, engenharias, como aplicações do Cálculo Diferencial e Integral, destacando a importância do uso das equações diferenciais no estudo de alguns fenômenos.



# Referências

- [1] N.Bacaër, *A short history of Mathematical Population Dynamics*, Springer-Verlag, 2011.
- [2] R.C.Bassanezi, *Ensino-Aprendizagem com Modelagem Matemática*, Contexto, 2002.
- [3] W.E.Boyce; R.C.DiPrima, *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*, Sétima edição, LTC, 2002.
- [4] M.Braun, *Equações Diferenciais e suas Aplicações*, Campus, 1979.
- [5] H.Cassago.Jr.; L.A.C.Ladeira, *Equações Diferenciais Ordinárias*, ICMC-USP, São Carlos, 2009.
- [6] J.G.Figueiredo; A.F.Neves, *Equações Diferenciais Aplicadas*, Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2001.
- [7] Instituto de Matemática e Estatística, [www.ime.uerj.br/calculo/LivroIV/edoseg.pdf](http://www.ime.uerj.br/calculo/LivroIV/edoseg.pdf), Acessado em: 23.10.2011.
- [8] S.Lipschutz, *Álgebra Linear*, Terceira edição, Makron Books, 1994.
- [9] MacTutor History of Mathematics, [www.gap-system.org/history/HistTopics](http://www.gap-system.org/history/HistTopics), Acessado em: 27.08.2011.
- [10] A.F.Neves, *Forma de Jordan e Equações Diferenciais Lineares*. Notas de Aula.
- [11] L.Perko, *Differential Equations and Dynamical Systems*, Second Edition, Springer-Verlag, 1996.
- [12] R.J.Santos, *Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias*, ICEX-UFMG, 2011.
- [13] C.P.Winsor, *The Gompertz curve as a growth curve*. Proceedings of the National Academy of Sciences, v. 13, number 1, 1932.
- [14] F.B.Fialho, *Interpretação da curva de crescimento de Gompertz*, EMBRAPA, 1999.



# A Álgebra Linear e espaço solução

Sejam  $y_1$  e  $y_2$  soluções da equação de segunda ordem

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p\frac{dy}{dt} + qy = 0. \quad (\text{A.1})$$

e vamos provar que  $y = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$ , também é solução da equação (A.1), onde  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ .

De fato,

$$\begin{aligned} y'' + p(t)y' + q(t)y &= (\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)'' + p(t)(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)' + q(t)(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) \\ &= \alpha_1 [y_1'' + p(t)y_1' + q(t)y_1] + \alpha_2 [y_2'' + p(t)y_2' + q(t)y_2] = 0. \end{aligned}$$

Vamos generalizar este fato e provar que as soluções da equação

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + a_2(t)y^{(n-2)} + \dots + a_n(t)y = 0 \quad (\text{A.2})$$

são combinações lineares de  $n$  soluções linearmente independentes.

Note que  $S = \{y \in \mathcal{C}(I; \mathbb{R}); y(t) \text{ é solução de (A.2)}\}$  é um subespaço vetorial do espaço das funções contínuas  $\mathcal{C}(I; \mathbb{R}) = \{f : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ contínuas}\}$  pois,

1.  $y \equiv 0$  é solução.
2. Se  $y_1$  e  $y_2$  são soluções, então  $y_1 + y_2$  também é solução.
3. Se  $y_1$  é solução então  $\alpha y_1$  também é,  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ .

Mostremos que  $\dim S = n$ . Para isso consideremos o conjunto  $B = \{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}$ , onde  $\phi_1$  é solução do P.V.I

$$\begin{cases} y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + a_2(t)y^{(n-2)} + \dots + a_n(t)y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(0) = 0, \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

$\phi_2$  é solução do P.V.I.

$$\begin{cases} y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + a_2(t)y^{(n-2)} + \dots + a_n(t)y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(0) = 0, \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

assim por diante, até  $\phi_n$  solução do P.V.I.

$$\begin{cases} y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + a_2(t)y^{(n-2)} + \dots + a_n(t)y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(0) = 1. \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

Temos que  $B = \{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}$  é l.i., pois

$$W(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0. \quad (\text{A.6})$$

Provemos também que  $B$  gera  $S$ .

Seja  $y_*(t) \in S$  uma solução arbitrária da equação (A.1). Mostremos que  $y_*$  se escreve como combinação linear dos elementos de  $B$ .

Para isto definimos a função

$$\psi(t) = y_*(0)\phi_1(t) + y'_*(0)\phi_2(t) + \dots + y_*^{(n-1)}(0)\phi_n(t)$$

Observe que  $\psi \in S$ , pois  $\psi$  é uma combinação linear de elementos de  $S$  e

$$\begin{cases} \psi(0) = y_*(0) \\ \psi'(0) = y'_*(0) \\ \dots \\ \psi^{(n-1)}(0) = y_*^{(n-1)}(0). \end{cases} \quad (\text{A.7})$$

Logo  $\psi(t)$  e  $y_*(t)$  satisfazem o mesmo P.V.I. e pelo Teorema da Existência e Unicidade a solução deve ser única o que implica  $y_*(t) = \psi(t)$ , ou seja,  $B$  gera  $S$ . Portanto  $\dim S = n$ .

Com essa informação, para determinar todas as soluções de (A.1) basta encontrar duas soluções *l.i.* e qualquer outra solução de (A.1) é escrita como combinação linear dessas duas soluções.





# B Matrizes

## B.1 Sistemas com matrizes diagonalizáveis e Forma de Jordan

Em um sistema de equações diferenciais lineares pode ocorrer que algumas, ou todas, as equações envolvem mais de uma das incógnitas, isto é, estão *acopladas*. Assim, as equações deste sistema têm que ser resolvidas simultaneamente. Porém, se as equações dependessem de uma mesma variável, então cada equação seria resolvida independente de todas as outras, o que é muito mais simples, mas isso nem sempre acontece.

A técnica algébrica de *diagonalização* de uma matriz quadrada  $A$  pode ser usada para reduzir o sistema linear (4.3) a um sistema linear *desacoplado*.

Na sequência faremos o estudo sobre as matrizes diagonalizáveis e a Forma de Jordan.

Consideraremos primeiro o caso em que  $A$  é uma matriz real, com autovalores distintos.

**Teorema B.1.** *Se os autovalores  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  de uma matriz  $n \times n$   $A$  são reais e distintos, então qualquer conjunto de autovetores correspondentes  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  forma uma base para  $\mathbb{R}^n$ , a matriz  $P = [v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n]$  formada pelos vetores na forma de coluna é invertível e*

$$P^{-1}AP = \text{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n].$$

*Demonstração.* Sejam  $v_1, v_2, \dots, v_n$  autovetores associados aos autovalores  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ . Sabemos, da teoria de Álgebra Linear, que autovetores associados a autovalores distintos são linearmente independentes, conseqüentemente  $\det P \neq 0$  e portanto  $P$  é invertível.

Considere as matrizes  $AP$  e  $PD$ , onde  $D$  é a matriz diagonal, cuja diagonal é formada pelos autovalores.

As colunas da matriz  $AP$  são  $Av_1, \dots, Av_n$ . Mas como cada  $v_i$  é um autovetor associado a  $\lambda_i$  que é um autovalor da matriz  $A$ , temos  $Av_i = \lambda_i v_i$ , ou seja, as colunas de  $AP$  são  $\lambda_1 v_1, \dots, \lambda_n v_n$ . Por outro lado, é evidente que as colunas de  $PD$  também

são  $\lambda_i v_i$ . Logo,

$$AP = PD, \quad \text{e portanto,} \quad D = P^{-1}AP.$$

□

A fim de reduzir o sistema (4.3),  $x' = Ax$ , em um sistema linear desacoplado usando o teorema anterior, definimos a transformação linear de coordenadas

$$y = P^{-1}x, \tag{B.1}$$

onde  $P$  é a matriz invertível definida no teorema C.1. Então,  $x = Py$ . Segue que,

$$y' = P^{-1}x' = P^{-1}Ax = P^{-1}APy.$$

De acordo com o teorema anterior, temos o sistema linear desacoplado

$$y' = \text{diag}[\lambda_1, \dots, \lambda_n]y. \tag{B.2}$$

A solução deste sistema (B.2) é dada por

$$y(t) = \text{diag}[e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}]y(0).$$

De (B.1) temos  $y(0) = P^{-1}x(0)$  e  $x(t) = Py(t)$ , segue então que o sistema (4.3) tem como solução

$$x(t) = PE(t)P^{-1}x(0), \tag{B.3}$$

onde  $E(t)$  é a matriz diagonal  $E(t) = \text{diag}[e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t}]$ .

**Corolário B.1.** *De acordo com as hipóteses do teorema anterior, a solução do sistema (4.3) é dada pela função  $x(t)$  definida por (B.3).*

**Exemplo B.1.** Considere o sistema linear

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 \\ x'_2 = x_1 + 2x_2 \\ x'_3 = x_1 - x_3 \end{cases} \tag{B.4}$$

o qual pode ser escrito na forma matricial

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Os autovalores de  $A$  são  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = 2$  e  $\lambda_3 = -1$  e consideremos os autovetores correspondentes  $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  e  $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

A matriz  $P$  e sua inversa são dadas por,

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Como  $y' = P^{-1}APy$ , então obtemos o sistema linear desacoplado

$$\begin{cases} y_1' = y_1 \\ y_2' = 2y_2 \\ y_3' = -y_3 \end{cases},$$

que tem como solução geral

$$\begin{cases} y_1(t) = k_1 e^t \\ y_2(t) = k_2 e^{2t} \\ y_3(t) = k_3 e^{-t} \end{cases}.$$

De acordo com o corolário anterior, a solução geral do sistema (B.4) é dada por

$$x(t) = P \cdot \begin{pmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \cdot P^{-1}c$$

onde  $c = x(0)$ .

Portanto a solução geral de (B.4) é

$$\begin{cases} x_1(t) = c_1 e^t \\ x_2(t) = c_1(-e^t + e^{2t}) + c_2 e^{2t} \\ x_3(t) = c_1 \left( \frac{e^t}{2} - \frac{e^{-t}}{2} \right) + c_3 e^{-t} \end{cases}.$$

e o plano  $x_1x_2$  representa o subespaço instável e o eixo  $x_3$  representa o subespaço estável do sistema.

Quando a matriz  $A$  do sistema não for diagonalizável, então podemos utilizar a Forma de Jordan.

Através da Forma de Jordan conseguimos determinar uma base em  $\mathbb{R}^n$  na qual a matriz  $A$  seja composta pelo maior número de zeros possível, tornando-a mais simples. Antes de definir a Forma de Jordan, vamos precisar de algumas definições e resultados de Álgebra Linear.

**Definição B.1.** *Se existir um inteiro  $r > 0$  tal que  $A^r = 0$ , então a matriz  $A$  é chamada de nilpotente e o menor valor de  $r$  tal que  $A^r = 0$  é chamado de índice de nilpotência.*

**Proposição B.1.** *Se  $A$  é nilpotente de índice  $r$ , então:*

- (i)  $\lambda = 0$  é o único autovalor de  $A$ .
- (ii) Se  $A^{r-1}v_0 \neq 0$ , então  $\{v_0, Av_0, \dots, A^{r-1}v_0\}$  é linearmente independente.

*Demonstração.* (i) Seja  $\lambda$  um autovalor de  $A$ , então existe  $v$  tal que  $Av = \lambda v$ , com  $v \neq 0$ . Como  $A$  é nilpotente,  $0 = A^r v = \lambda^r v$ , logo  $\lambda = 0$ .

(ii) Seja  $\alpha_0 v_0 + \alpha_1 Av_0 + \dots + \alpha_{r-1} A^{r-1} v_0 = 0$ , onde  $\alpha_0, \dots, \alpha_r$  são escalares. Suponhamos que  $\{v_0, Av_0, \dots, A^{r-1}v_0\}$  seja linearmente dependente, isto é, que existam escalares não nulos, e que o primeiro seja  $\alpha_s$ . Então podemos reescrever a expressão acima da forma

$$\alpha_s A^s v_0 + \dots + \alpha_{r-1} A^{r-1} v_0 = 0.$$

Isolando  $A^s v_0$ , obtemos

$$\begin{aligned} A^s v_0 &= -\frac{\alpha_{s+1}}{\alpha_s} A^{s+1} v_0 - \dots - \frac{\alpha_{r-1}}{\alpha_s} A^{r-1} v_0 \\ &= A^{s+1} \left( -\frac{\alpha_{s+1}}{\alpha_s} v_0 - \dots - \frac{\alpha_{r-1}}{\alpha_s} A^{r-s-2} v_0 \right) \end{aligned}$$

Denotando

$$v = \left( -\frac{\alpha_{s+1}}{\alpha_s} v_0 - \dots - \frac{\alpha_{r-1}}{\alpha_s} A^{r-s-2} v_0 \right),$$

então  $A^s v_0 = A^{s+1} v$ .

Logo, temos

$$A^{r-1} v_0 = A^{r-1-s} \cdot (A^s v_0) = A^{r-1-s} (A^{s+1} v) = A^r v = 0,$$

que é uma contradição, pois  $r$  é o índice de nilpotência.

Portanto não existe escalar não nulo e os vetores são linearmente independentes.  $\square$

**Definição B.2.** *Dados  $U$  e  $V$  espaços vetoriais, o núcleo de uma transformação linear  $T : V \rightarrow U$  é o conjunto de elementos em  $V$  que são levados em  $0 \in U$ , e denotado por*

$$\text{Ker}(T) = \{x \in V | T(x) = 0\}.$$

**Definição B.3.** Seja  $T : V \rightarrow V$ . Diz-se que um subespaço  $W$  de  $V$  é invariante sob  $T$ , ou  $T$  - invariante, se  $T$  aplica  $W$  em si mesmo, isto é,  $T(W) \subseteq W$ .

**Proposição B.2.** Dada uma transformação linear  $T : V \rightarrow V$ , existem subespaços vetoriais  $H$  e  $K$ ,  $T$  - invariantes, tais que

$$V = H \oplus K$$

com  $T|_H : H \rightarrow H$  nilpotente e  $T|_K : K \rightarrow K$  invertível.

*Demonstração.* Não é difícil verificar por indução que

$$\text{Ker}T \subset \text{Ker}T^2 \subset \dots$$

Como  $V$  é de dimensão finita, logo existe um menor inteiro  $k$  tal que  $\text{Ker}T^k = \text{Ker}T^{k+1}$ , conseqüentemente,  $\text{Ker}T^k = \text{Ker}T^{k+j}$ , com  $j = 1, 2, 3, \dots$

Consideremos  $H = \text{Ker}T^k$  e  $K = \text{Im}T^k$ , então  $H \cap K = 0$ , pois se  $v \in H \cap K$  então  $T^k v = 0$  e existe  $w \in V$  tal que  $T^k w = v$ , portanto  $T^k(T^k w) = 0$  o que implica que  $w \in \text{Ker}T^{2k} = \text{Ker}T^k$ . Logo,  $v = T^k w = 0$ .

Novamente por  $V$  ser de dimensão finita, temos pelo Teorema do Núcleo e da Imagem  $\dim(\text{Ker}T^k) + \dim(\text{Im}T^k) = \dim V$ . Portanto  $V = H \oplus K$ .

Além disso,  $H$  é  $T$  - invariante, pois se  $v \in H = \text{Ker}T^k$  então  $T^k(T(v)) = T(T^k(v)) = T(0) = 0$ , logo  $T(v) \in H$ . Analogamente  $K$  é  $T$  - invariante, pois seja  $w \in K$  então existe  $v \in V$  tal que  $w = T^k(v)$ , mostremos que  $T(w) \in K$ .

De fato,

$$T(w) = T(T^k(v)) = T^k(T(v)),$$

logo existe  $v' = T(v) \in V$  de forma que  $T(w) = T^k(v') \in K$ . Portanto  $K$  é  $T$  - invariante.

Note que  $H = \text{Ker}T^k$ , então  $T^k(h) = 0$  para qualquer  $h \in H$ . Logo  $T|_H$  é nilpotente de índice  $k$ .

Por outro lado, usando o fato que  $K$  é  $T$  - invariante então  $T(K) \subset K$ , ou seja, podemos definir o operador  $T|_K : K \rightarrow K$ .

Verifiquemos que  $T|_K$  é bijetora.

(i)  $T|_K$  é injetora, pois seja  $v \in \text{Ker}(T|_K)$  então  $T|_K(v) = 0 \Rightarrow T(v) = 0$ .

Logo  $v \in \text{Ker}T \subset \text{Ker}T^k$ , como  $\text{Ker}T^k \cap K = \{0\}$ , segue que  $v = 0$ .

(ii) Pelo Teorema do Núcleo e da Imagem aplicado à  $T|_K$  segue que  $T|_K$  é sobrejetora, pois

$$\dim K = \dim(\text{Ker}T|_K) + \dim(\text{Im}T|_K),$$

como  $\dim(\text{Ker}T|_K) = 0$ , segue que  $\dim K = \dim(\text{Im}T|_K)$ . Portanto  $T|_K$  é invertível.  $\square$

Para obter a Forma de Jordan de um operador  $T$  devemos considerar as seguintes observações.

**Observação B.1.** O índice de nilpotência  $k$  de  $T|_H$  é menor ou igual a dimensão de  $H$ , ou seja,  $k \leq \dim H$ .

**Observação B.2.** Se  $B$  é uma base de  $V$  formada pela união das bases de  $H$  e  $K$ , então a matriz de  $T$  na base  $B$  é

$$[T]_B = \begin{pmatrix} [T|_H] & 0 \\ 0 & [T|_K] \end{pmatrix},$$

e portanto,  $\det[T]_B = \det[T|_H] \cdot \det[T|_K]$ . Além disso, como  $\det[T|_K] \neq 0$ , pois  $T|_K$  é inversível, segue que a multiplicidade algébrica do zero é igual a multiplicidade algébrica do zero em  $T|_H$ , que é igual a  $\dim H$ , pois  $T|_H$  é nilpotente e só possui o zero como autovalor, isto é

$$m.a.(0) = \dim H = \dim \text{Ker} T^k.$$

**Observação B.3.** Se  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_l$  são autovalores de  $T : V \rightarrow V$ , com as respectivas multiplicidades algébricas,  $m_1, m_2, \dots, m_l$ , então seu polinômio característico é igual a

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \dots (\lambda - \lambda_l)^{m_l},$$

e existem subespaços  $T$ -invariantes  $H_1, H_2, \dots, H_l$  tais que:

$$\begin{cases} \dim H_i = m_i \\ V = H_1 \oplus H_2 \oplus \dots \oplus H_l \\ (T - \lambda_i I)|_{H_i} \text{ nilpotente} \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

**Observação B.4.** Se encontrarmos uma base de uma transformação nilpotente na qual a matriz da transformação for bem simples, então que a matriz da transformação será formada por esses blocos simples, em diagonal.

Com base nessas observações e nos resultados apresentados nesta seção suponha-se que  $T : V \rightarrow V$  é nilpotente de índice  $k$ .

Sabemos que  $\{v, Tv, \dots, T^{k-1}v\}$  é linearmente independente para algum vetor  $v$  pela Proposição B.1. Se  $k = \dim V$  então esses vetores formam uma base de  $V$  e a matriz de  $T$  nessa base é do tipo **Bloco de Jordan** dado na forma:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Note que os elementos 1 podem aparecer ou na diagonal abaixo ou acima da diagonal principal, basta inverter a ordem da base.

Caso  $k < \dim V$  usaremos a seguinte proposição.

**Proposição B.3.** Se  $T : V \rightarrow V$  é nilpotente de índice  $k$  e  $T^{k-1}(v_0) \neq 0$ , então existe um subespaço  $M$ ,  $T$ -invariante, tal que

$$V = N \oplus M,$$

onde  $N = [v_0, T(v_0), \dots, T^{k-1}(v_0)]$ .

*Demonstração.* Provaremos por indução sobre o índice de nilpotência  $k$  que a proposição é válida.

Se  $k = 1$ , então  $T = T^1 = 0$  e portanto a proposição é verdadeira pois,  $N = [v_0]$  e como  $\dim V = n$ , basta escolher  $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$  linearmente independentes de forma que  $\{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$  seja linearmente independente, então  $V = N \oplus M$ , onde  $M = [v_1, \dots, v_{n-1}]$ .

Suponhamos que para  $k - 1$  seja verdadeiro o resultado e provemos que vale para  $k$ .

Sabemos que  $ImT$  é um subespaço  $T$ -invariante e  $T|_{ImT}$  é nilpotente de índice  $k - 1$ , pois se  $T(v) \in ImT$  então

$$T^{k-1}(T(v)) = T^k(v) = 0 \quad \text{e} \quad T^{k-2}(T(v_0)) = T^{k-1}(v_0) \neq 0,$$

e pela hipótese de indução, já que a proposição é verdadeira para o índice  $k - 1$ , existe um subespaço  $M_1$  tal que

$$ImT = N_1 \oplus M_1 \quad \text{onde} \quad N_1 = [T(v_0), \dots, T^{k-1}(v_0)] = T(N) \quad \text{e} \quad T(v_0) \in ImT.$$

Considerando  $M_2 = \{v \in V | T(v) \in M_1\}$ , temos que

$$V = N + M_2, \quad \text{com} \quad N = [v_0, T(v_0), \dots, T^{k-1}(v_0)],$$

pois, se  $v \in V$ , então  $T(v) \in ImT = N_1 \oplus M_1$  o que implica que  $T(v) = n_1 + m_1$  com  $n_1 \in N_1$  e  $m_1 \in M_1$ , logo  $n_1 = Tn$  para algum  $n \in N$ . Assim,  $T(v) = Tn + m_1$  o que implica que  $T(v - n) = m_1 \in M_1$ , logo  $v - n \in M_2$  e portanto  $v = n + (v - n) \in N + M_2$ .

Note que  $M_1 \subset M_2$  e  $N \cap M_2 \subset M_2$  logo,

$$(N \cap M_2) \oplus M_1 \subset M_2.$$

Vamos escolher  $M_3$  tal que

$$M_2 = (N \cap M_2) \oplus M_1 \oplus M_3. \tag{B.6}$$

Denotando  $M = M_1 \oplus M_3$  temos:

(i)  $M \subset M_2$ , logo  $T(M) \subset T(M_2) \subset M_1 \subset M$ , logo  $M$  é  $T$ -invariante.

(ii)  $N \cap M = \{0\}$ , pois se  $v \in N \cap M \Rightarrow v \in N$  e  $v \in M \subset M_2 \Rightarrow v \in N \cap M_2$  logo,

$$v \in M \cap (N \cap M_2) = \{0\} \quad \text{pois (B.6) é soma direta.}$$

(iii)  $V = N \oplus M$  pois  $V = N + M_2$  e  $M_2 = N \cap M_2 \oplus M$ , assim  $v = n + (h + m)$  com  $n \in N, h \in N \cap M_2$  e  $m \in M$ , então

$$v = (n + h) + m \quad \text{com} \quad (n + h) \in N, m \in M.$$

Portanto, a proposição está demonstrada. □

Logo, quando  $k < \dim V$ , consideramos  $T_{/M}$  para  $M$  definido como na proposição anterior, que também será nilpotente com índice  $k' \leq k$  e obtemos o conjunto  $\{v', T(v'), \dots, T^{k'-1}(v')\}$  linearmente independente. Se  $k' = \dim M$  então

$$\{v, T(v), \dots, T^{k-1}(v), v', T(v'), \dots, T^{k'-1}(v')\}$$

é uma base de  $V$  na qual a matriz de  $T$  é formada por dois blocos de Jordan na diagonal.

Seguindo esse raciocínio concluímos que se  $T$  é nilpotente de índice  $k$ , existe uma base na qual sua matriz é bem simples, formada por blocos de Jordan em diagonal, do tipo:

$$\left( \begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}_{k \times k} & & 0 \\ & & 0 \\ & & \ddots \\ & & 0 \\ & & & \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}_{k' \times k'} & & 0 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \\ & & & & & \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & \ddots & \ddots & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \right)$$

onde os blocos em diagonal vão decrescendo em ordem e são todos do tipo Bloco de Jordan definido na Observação B.4.

**Observação B.5.** Por (B.5),  $(T - \lambda_i I)$  é nilpotente de índice  $k_i$  e sua matriz é da forma acima. Como a matriz de  $T_{/H_i}$  é a soma dessa matriz com a matriz diagonal  $\lambda_i I$ , a matriz  $T_{/H_i}$  é do tipo acima, mas com  $\lambda_i$  na diagonal principal em vez de zeros.

Como  $V = H_1 \oplus \dots \oplus H_l$ , a matriz de  $T$  é uma matriz formada por blocos em diagonal onde cada bloco é do tipo de Jordan com o respectivo autovalor  $\lambda_i$  na diagonal e sua ordem é a multiplicidade algébrica do autovalor  $\lambda_i$ ,  $m_i$ .

Logo, a matriz resultante de  $T$  é chamada de *Forma de Jordan do operador  $T$* .



Descreveremos a seguir um método para encontrar uma base de autovetores de  $A$  que a reduza em uma Forma de Jordan, a prova detalhada deste método pode ser encontrada em livros de Álgebra Linear. Para apresentar tal método precisaremos da seguinte definição.

**Definição B.4.** *Seja  $\lambda$  um autovalor da matriz  $A$ . A multiplicidade geométrica de  $\lambda$  é dada por*

$$d_k = \dim \text{Ker}(A - \lambda I)^k.$$

Note que  $d_k$  é o número de linhas de zeros na forma reduzida de  $(A - \lambda I)^k$  por escalonamento. Logo,  $d_1 < d_2 < \dots < d_n = n$ .

Seja  $\nu_k$  o número de blocos de Jordan  $k \times k$  na Forma de Jordan da matriz  $A$ . Então segue da definição anterior que

$$d_0 = \dim \text{Ker} I = 0.$$

Além disso, o número de blocos é igual a multiplicidade geométrica, então

$$d_1 = \nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_n,$$

e como nos blocos de Jordan de ordens maiores que 2 aumenta uma coluna de zeros em cada um, temos

$$\begin{aligned} d_2 &= \nu_1 + 2\nu_2 + \dots + 2\nu_n \\ d_3 &= \nu_1 + 2\nu_2 + 3\nu_3 + \dots + 3\nu_n \\ &\vdots \\ d_{n-1} &= \nu_1 + 2\nu_2 + 3\nu_3 + \dots + (n-1)\nu_{n-1} + (n-1)\nu_n \\ d_n &= \nu_1 + 2\nu_2 + 3\nu_3 + \dots + (n-1)\nu_{n-1} + n\nu_n \\ d_{n+1} &= d_n. \end{aligned}$$

Com essas informações definiremos um algoritmo para determinar a forma de Jordan de uma matriz  $A$ .

**Passo 1:** Encontre uma base  $\{v_j^{(1)}\}_{j=1}^{d_1}$  para  $\text{Ker}(A - \lambda I)$ , ou seja, um conjunto de autovetores de  $A$  linearmente independentes correspondente ao autovalor  $\lambda$ .

**Passo 2:** Se  $d_2 > d_1$ , escolha uma base  $\{V_j^{(1)}\}_{j=1}^{d_1}$  para  $\text{Ker}(A - \lambda I)$  de forma que

$$\text{Ker}(A - \lambda I)v_j^{(2)} = V_j^{(1)}$$

tenha  $d_2 - d_1$  soluções linearmente independentes  $v_j^{(2)}$ , com  $j = 1, \dots, d_2 - d_1$ . Então  $\{v_j^{(2)}\}_{j=1}^{d_1} = \{V_j^{(1)}\}_{j=1}^{d_1} \cup \{v_j^{(2)}\}_{j=1}^{d_2-d_1}$  é uma base para  $\text{Ker}(A - \lambda I)^2$ .

**Passo 3:** Se  $d_3 > d_2$ , escolha uma base  $\{V_j^{(2)}\}_{j=1}^{d_2}$  para  $\text{Ker}(A - \lambda I)^2$  com  $V_j^{(2)} \in [\{v_j^{(2)}\}_{j=1}^{d_2-d_1}]$  para  $j = 1, \dots, d_2 - d_1$  tal que

$$\text{Ker}(A - \lambda I)v_j^{(3)} = V_j^{(2)}$$

tenha  $d_3 - d_2$  soluções linearmente independentes  $v_j^{(3)}$ , com  $j = 1, \dots, d_3 - d_2$ . Se para  $j = 1, \dots, d_2 - d_1$ ,  $V_j^{(2)} = \sum_{i=1}^{d_2-d_1} c_i v_i^{(2)}$ , fazemos  $\bar{V}_j^{(1)} = \sum_{i=1}^{d_2-d_1} c_i V_i^{(1)}$  e  $\bar{V}_j^{(1)} = V_j^{(1)}$  para  $j = d_2 - d_1 + 1, \dots, d_1$ . Então

$$\{v_j^{(3)}\}_{j=1}^{d_3} = \{\bar{V}_j^{(1)}\}_{j=1}^{d_1} \cup \{V_j^{(2)}\}_{j=1}^{d_2-d_1} \cup \{v_j^{(3)}\}_{j=1}^{d_3-d_2}$$

é uma base para  $\text{Ker}(A - \lambda I)^3$ .

**Passo 4:** Continue o processo até o  $k$ -ésimo passo, onde  $d_k = n$ , para obter uma base  $B = [\{v_j^k\}_{j=1}^n]$  para  $\mathbb{R}^n$ . Assim, a matriz  $A$  assume a forma de Jordan com respeito a esta base.

**Exemplo B.2.** Vamos encontrar uma base para  $\mathbb{R}^3$  que reduz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

a sua forma de Jordan. Note que  $\det(A - \lambda I) = (2 - \lambda)^3$ , então  $\lambda = 2$  é um autovalor de multiplicidade 3 e

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Então,  $d_1 = 2$  é o mesmo que  $(A - \lambda I)v = 0$  para  $x_2 = 0$ . Mas escolhemos

$$v_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad v_2^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

como uma base para  $\text{Ker}(A - \lambda I)$ . Agora, fazemos

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} v = c_1 v_1^{(1)} + c_2 v_2^{(1)} = \begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Isto é equivalente para  $x_2 = c_1$  e  $-x_2 = c_2$ , isto é,  $c_1 = -c_2$ . Escolhemos então

$$V_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_1^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad V_2^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Os vetores  $v_1, v_2$  e  $v_3$  formam, respectivamente, uma base para  $\text{Ker}(A - \lambda I)^2 = \mathbb{R}^3$ . Logo, a matriz  $P = [v_1, v_2, v_3]$  e sua inversa são

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Então,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

e portanto é uma matriz na forma de Jordan.

### B.1.1 Operador exponencial

Para definir um operador linear exponencial  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , é necessário definir o conceito de convergência em um espaço linear  $L(\mathbb{R}^n)$  de operadores lineares em  $\mathbb{R}^n$ . Faremos isto usando o *operador norma* de  $T$  definido por

$$\| T \| = \max_{|x| \leq 1} |T(x)|$$

onde  $|x|$  é a norma Euclidiana de  $x \in \mathbb{R}^n$ , isto é,

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

O operador norma possui as propriedades usuais de norma, ou seja, para  $S, T \in L(\mathbb{R}^n)$

- (i)  $\| T \| \geq 0$  e  $\| T \| = 0$  se  $T = 0$ ,
- (ii)  $\| kT \| = |k| \| T \|$  para  $k \in \mathbb{R}$ ,
- (iii)  $\| S + T \| \leq \| S \| + \| T \|$ .

Segue da desigualdade de Cauchy-Schwarz que se  $T \in L(\mathbb{R}^n)$  é representado pela matriz  $A$  com respeito a base de  $\mathbb{R}^n$ , então  $\| A \| \leq \sqrt{nl}$  onde  $l$  é o comprimento máximo da coluna de  $A$ .

A convergência da sequência de operadores  $T_k \in L(\mathbb{R}^n)$  é definida a seguir.

**Definição B.5.** Uma sequência de operadores lineares  $T_k \in L(\mathbb{R}^n)$  converge para o operador linear  $T \in L(\mathbb{R}^n)$  quando  $k \rightarrow \infty$ , isto é,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} T_k = T,$$

se para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $N$  tal que para  $k \geq N$ ,  $\| T - T_k \| < \varepsilon$ .

**Lema B.1.** Para  $S, T \in L(\mathbb{R}^n)$  e  $x \in \mathbb{R}^n$ ,

- (i)  $|T(x)| \leq \| T \| |x|$
- (ii)  $\| TS \| \leq \| T \| \| S \|$
- (iii)  $\| T^k \| \leq \| T \|^k$  para  $k = 0, 1, 2, \dots$

*Demonstração.* (i) Para  $x = 0$  é evidente que vale. Para  $x \neq 0$  definimos o vetor unitário  $y = \frac{x}{|x|}$ . Então, pela definição de operador norma, temos

$$\| T \| \geq |T(y)| = \left| T \left( \frac{x}{|x|} \right) \right|,$$

como  $|x| \in \mathbb{R}$  então

$$\left| T\left(\frac{x}{|x|}\right) \right| = \frac{1}{|x|} |T(x)| \Rightarrow |T(x)| \leq \|T\| |x|.$$

(ii) Para  $|x| \leq 1$  segue que

$$|T(S(x))| \leq \|T\| |S(x)| \leq \|T\| \|S\| |x| \leq \|T\| \|S\|.$$

Logo,

$$\|TS\| = \max_{|x| \leq 1} |TS(x)| \leq \|T\| \|S\|.$$

(iii) É imediato como consequência de (ii), pois

$$\|T^k\| = \|T \cdot T \cdot \dots \cdot T\| \leq \|T\| \cdot \|T\| \cdot \dots \cdot \|T\| = \|T\|^k.$$

□

**Teorema B.2.** *Sejam  $T \in L(\mathbb{R}^n)$  e  $t_0 > 0$ , a série*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k t^k}{k!}$$

*é absolutamente e uniformemente convergente para todo  $|t| \leq t_0$ .*

*Demonstração.* Seja  $\|T\| = a$ . Então segue do lema anterior que

$$\left\| \frac{T^k t^k}{k!} \right\| \leq \frac{\|T\|^k |t|^k}{k!} \leq \frac{a^k t_0^k}{k!}. \quad (\text{B.7})$$

Mas  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k t_0^k}{k!} = e^{at_0}$ .

Então pelo teste de convergência de M-Weierstrass a série

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k t^k}{k!}$$

é absolutamente e uniformemente convergente para todo  $|t| \leq t_0$ .

□

Vamos definir o exponencial de um operador linear  $T$  pela série absolutamente convergente

$$e^T = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{k!}.$$

Segue por propriedades de limite que  $e^T$  é um operador linear em  $\mathbb{R}^n$  e de (B.7) que  $\|e^T\| \leq e^{\|T\|}$ .

Voltando aos sistemas lineares da forma (4.3), assumiremos que a transformação linear  $T$  em  $\mathbb{R}^n$  é representada pela matriz  $n \times n$ ,  $A$ , e definiremos a seguir  $e^{At}$ .

**Definição B.6.** *Seja  $A$  uma matriz  $n \times n$ . Então para  $t \in \mathbb{R}$ ,*

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}.$$

Note que  $e^{At}$  é uma matriz  $n \times n$  que pode ser expressa em termos do autovalores e autovetores de  $A$ . Se usarmos  $T$  a transformação linear  $T(x) = Ax$  então  $\|e^{At}\| \leq e^{\|A\||t|}$ , onde  $\|A\| = \|T\|$ .

**Proposição B.4.** *Sejam  $P$  e  $T$  transformações lineares em  $\mathbb{R}^n$  tal que  $S = PTP^{-1}$ . Então  $e^S = Pe^T P^{-1}$ .*

*Demonstração.* Por definição temos que

$$e^S = e^{PTP^{-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{(PTP^{-1})^k}{k!} = P \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{T^k}{k!} \right) P^{-1} = Pe^T P^{-1}.$$

□

Como consequência da proposição anterior temos o seguinte corolário.

**Corolário B.2.** *Se  $P^{-1}AP = \text{diag}[\lambda_i]$  então  $e^{At} = P \text{diag}[e^{\lambda_i t}] P^{-1}$ .*

**Proposição B.5.** *Se  $S$  e  $T$  são transformações lineares em  $\mathbb{R}^n$  que comutam, isto é, satisfazem  $ST = TS$ , então  $e^{S+T} = e^S e^T$ .*

*Demonstração.* Se  $ST = TS$ , então temos pelo teorema binomial que

$$(S + T)^n = n! \sum_{j+k=n} \frac{S^j T^k}{j!k!}.$$

Entretanto,

$$e^{S+T} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(S+T)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot n! \sum_{j+k=n} \frac{S^j T^k}{j!k!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j+k=n} \frac{S^j T^k}{j!k!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{S^j}{j!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{k!} = e^S e^T$$

Portanto,  $e^{S+T} = e^S e^T$ . □

Como consequência desta proposição para  $S = -T$  temos o seguinte corolário.

**Corolário B.3.** *Se  $T$  é uma transformação linear em  $\mathbb{R}^n$ , a inversa da transformação linear  $e^{At}$  é dada por  $(e^T)^{-1} = e^{-T}$ .*

**Corolário B.4.** *Se  $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$  então*

$$e^A = e^a \begin{pmatrix} \cos b & -\text{sen } b \\ \text{sen } b & \cos b \end{pmatrix}.$$

*Demonstração.* Se  $\lambda = a + ib$ , não é difícil verificar por indução que

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(\lambda^k) & -\operatorname{Im}(\lambda^k) \\ \operatorname{Im}(\lambda^k) & \operatorname{Re}(\lambda^k) \end{pmatrix}$$

onde  $\operatorname{Re}$  e  $\operatorname{Im}$  denotam a parte real e imaginária do número complexo  $\lambda$  respectivamente.

Então,

$$\begin{aligned} e^A &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(\frac{\lambda^k}{k!}) & -\operatorname{Im}(\frac{\lambda^k}{k!}) \\ \operatorname{Im}(\frac{\lambda^k}{k!}) & \operatorname{Re}(\frac{\lambda^k}{k!}) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(e^\lambda) & -\operatorname{Im}(e^\lambda) \\ \operatorname{Im}(e^\lambda) & \operatorname{Re}(e^\lambda) \end{pmatrix} = e^a \begin{pmatrix} \cos b & -\operatorname{sen} b \\ \operatorname{sen} b & \cos b \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

**Corolário B.5.** Se  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ , então  $e^A = e^a \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

*Demonstração.* Reescrevemos  $A$  da forma  $A = aI + B$  onde  $I$  é a matriz identidade e  $B = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

Então como  $(aI)B = B(aI)$ , isto é, comutam, temos pela proposição anterior,

$$e^A = e^{aI} e^B = e^a e^B.$$

Por definição, obtemos

$$e^B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B^k}{k!} = I + B + \frac{B^2}{2!} + \frac{B^3}{3!} + \dots = I + B,$$

pois  $B^2 = B^3 = \dots = 0$ .

Portanto,  $e^A = e^a e^B = e^a \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

□