



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA "JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Semigrupos de Operadores Lineares e Equações Diferenciais em Espaços de Banach

Mariéle de Freitas Osti

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática Universitária como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre

Orientador

Prof. Dr. Ricardo Parreira da Silva

Co-orientadora

Profa. Dra. Suzete Maria Silva Afonso

2013

517.38 Osti, Mariéle F.
O85s Semigrupos de operadores lineares e equações diferenciais
em espaços de Banach / Mariéle F. Osti. - Rio Claro : [s.n.],
2013
70 f. : il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista,
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Orientador: Ricardo Parreira da Silva
Co-Orientador: Suzete Maria Silva Afonso

1. Equações diferenciais. 2. Soluções fracas. 3. Problema
de Cauchy abstrato. I. Título.

TERMO DE APROVAÇÃO

Mariéle de Freitas Osti

SEMIGRUPOS DE OPERADORES LINEARES E EQUAÇÕES
DIFERENCIAIS EM ESPAÇOS DE BANACH

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática Universitária do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dr. Ricardo Parreira da Silva
Orientador

Prof. Dr. Marcone Correa Pereira
EACH/USP

Profa. Dra. Suzinei Aparecida Siqueira Marconato
IGCE/Unesp - Rio Claro

Rio Claro, 04 de Janeiro de 2013

*Aos meus pais
Dorival e Marisa*

Agradecimentos

Ao Professor Dr. Ricardo Parreira da Silva, pela orientação e paciência.

À Professora Dra. Suzete Maria Silva Afonso, pelas sugestões e ajuda.

Ao meu companheiro Fernando Rosa, pelo incentivo, força e sábias palavras.

À minha família, por todo apoio e compreensão.

À equipe do CICC - Centro Integrado de Ciência e Cultura, pelo apoio e ajuda.

A todos aqueles que direta ou indiretamente contribuíram para a realização desse trabalho.

*Felizes aqueles que se divertem
com problemas que educam a
alma e elevam o espírito.*

Fenelon

Resumo

O objetivo deste trabalho é apresentar a teoria de Semigrupos de Operadores Lineares para analisar existência de solução de uma equação diferencial parcial. Inicia-se com a introdução de conceitos de álgebra linear, análise funcional e cálculo em espaços normados. Em seguida, é desenvolvido fragmentos da teoria de Semigrupos de Operadores Lineares e é mostrada uma condição necessária e suficiente para a existência e unicidade de soluções fracas.

Palavras-chave: Semigrupos de Operadores Lineares, Soluções Fracas, Problema de Cauchy Abstrato.

Abstract

This work aims to present the theory of Semigroups of Linear Operators for the analysis of the existence of solution of a partial differential equation. It begins by introducing concepts of linear algebra, functional analysis and calculus in normed spaces. Then we study part of Semigroups of Linear Operators and it is displayed a necessary and sufficient condition for the existence and uniqueness of weak solutions.

Keywords: Semigroups of Linear Operators, Weak Solutions, Abstract Cauchy Problem.

Sumário

1	Introdução	8
2	Introdução à Análise Funcional	9
2.1	Espaço Vetorial	9
2.2	Espaços Vetoriais Normados	12
2.3	Operadores Lineares	14
2.4	Operadores Lineares Limitados	16
2.5	Operadores Lineares Fechados	22
2.6	Espaços normados de Operadores e Espaço Dual	23
2.7	Extensão de Funcionais Lineares	25
3	Cálculo em Espaços Normados	35
3.1	Séries de Operadores Lineares Limitados	35
3.2	A Função Exponencial	37
3.3	Derivação das Funções Vetoriais	37
3.4	Integração das Funções Vetoriais	40
3.5	Integrais Impróprias	43
4	Semigrupos de Operadores Lineares	44
4.1	Semigrupos uniformemente contínuos	44
4.2	Semigrupos de Classe C_0	50
4.3	Geração de Semigrupos	54
5	Problema de Cauchy Abstrato	61
5.1	Equação Não Homogênea	61
5.2	Semigrupos Fortemente Contínuos, Soluções Fracas e Fórmula da Variação das Constantes	65
	Referências Bibliográficas	69
	Referências	70

1 Introdução

Neste trabalho apresentamos elementos da análise funcional como ferramenta para o estudo de equações diferenciais em espaços vetoriais abstratos.

O estudo é feito de maneira sistemática, traduzindo objetos tradicionalmente estudados em cursos básicos de álgebra linear e equações diferenciais para contextos mais gerais.

Este estudo nos permite introduzir a teoria de semigrupos de operadores lineares e aplicá-la ao estudo de equações abstratas.

Na primeira parte do trabalho será feita uma revisão sobre espaços vetoriais normados, operadores e funcionais lineares. Seguiremos estudando os semigrupos de operadores lineares e sua aplicação aos problemas de existência de solução de uma classe de equações diferenciais. Tal solução tem sido objeto de pesquisa de matemáticos, físicos e engenheiros desde os tempos do surgimento do Cálculo Diferencial.

Em seguida, demonstramos o Teorema de Hille-Yosida, que foi muito importante para o avanço dessa teoria.

Por fim, mostramos uma condição necessária e suficiente para a existência e unicidade de soluções fracas.

2 Introdução à Análise Funcional

Neste capítulo, apresentamos os resultados de álgebra linear e análise funcional necessários para o desenvolvimento da teoria de semigrupos. Embora elementar, alguns resultados são apresentados de forma distinta do que tradicionalmente se apresenta em cursos básicos e, por isso mesmo, optamos por provar a maioria dos resultados apresentados.

2.1 Espaço Vetorial

Definição 2.1. Um espaço vetorial sobre um corpo \mathbb{K} é um conjunto não vazio X munido de duas operações, $X \times X \ni (x, y) \mapsto x + y \in X$ e $\mathbb{K} \times X \ni (\alpha, x) \mapsto \alpha x \in X$, satisfazendo as seguintes propriedades:

$$A1 : x + y = y + x, \forall x, y \in X;$$

$$A2 : x + (y + z) = (x + y) + z, \forall x, y, z \in X;$$

$$A3 : \exists 0 \in X \text{ tal que } x + 0 = x, \forall x \in X;$$

$$A4 : \forall x \in X, \exists -x \in X \text{ tal que } x + (-x) = 0;$$

$$M1 : \alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x, \forall x \in X, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K};$$

$$M2 : 1x = x, \forall x \in X;$$

$$M3 : \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall x, y \in X;$$

$$M4 : (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall x \in X.$$

Os elementos de X são chamados vetores de X .

Definição 2.2. Um subespaço de um espaço vetorial X é um subconjunto não vazio $Y \subset X$ tal que se $y_1, y_2 \in Y$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ então $\alpha y_1 + \beta y_2 \in Y$.

Note que, neste caso, Y munido das operações induzidas por X é, por si só, um espaço vetorial.

Definição 2.3. Uma combinação linear dos vetores x_1, x_2, \dots, x_m de X é uma expressão da forma $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_m x_m$, com $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{K}$.

Para qualquer subconjunto não vazio $M \subset X$, o conjunto de todas as combinações lineares (finitas) de elementos de M é chamado o subespaço gerado por M e é denotado por $\langle M \rangle$.

Definição 2.4. Seja M um subconjunto do espaço vetorial X . Dizemos que M é linearmente independente se, dado qualquer subconjunto finito $\{x_1, x_2, \dots, x_k\} \subset M$, a equação $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_k x_k = 0$ com $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ possui somente a solução trivial $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$. Caso contrário, M é dito ser linearmente dependente.

Definição 2.5. Um subconjunto linearmente independente $B \subset X$ é uma base do espaço vetorial X se $X = \langle B \rangle$.

Definição 2.6. Dizemos que o espaço vetorial X possui dimensão finita se existir um inteiro positivo n e um conjunto linearmente independente com n vetores de X , tal que qualquer subconjunto de $n + 1$ ou mais vetores de X for linearmente dependente. O número n é chamado a dimensão de X e é denotado por $\dim X = n$. Por definição, $\dim\{0\} = 0$. Se X não for de dimensão finita, então dizemos que X é de dimensão infinita.

Proposição 2.1. Seja X um espaço vetorial. Então $\dim X = n$ se, e somente se, existir uma base de X constituída por n vetores de X .

Demonstração:

Se $\dim X = n$, existe um subconjunto $B = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset X$ linearmente independente e qualquer subconjunto $\{y_1, y_2, \dots, y_n, y_{n+1}\} \subset X$ é linearmente dependente.

Mostremos que B é uma base.

Seja $y \in X$. Então, a equação $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n + \alpha_{n+1} y = 0$ nos coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}$ possui uma solução não trivial.

Mostremos por absurdo que $\alpha_{n+1} \neq 0$. Se $\alpha_{n+1} = 0$, temos:

$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n + 0 \cdot y = 0 \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$, pois B é linearmente independente. O que implica $\{x_1, x_2, \dots, x_n, y\}$ linearmente independente, o que é absurdo. Logo, $\alpha_{n+1} \neq 0$.

Portanto,

$$y = -\frac{\alpha_1}{\alpha_{n+1}}x_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_{n+1}}x_2 - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}x_n \in \langle B \rangle.$$

Reciprocamente, seja $B = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ uma base de X .

Seja $C = \{y_1, y_2, \dots, y_{n+1}\} \subset X$.

Afirmação: C é linearmente dependente.

Note que para cada i , existem escalares $\alpha_{i,1}, \alpha_{i,2}, \dots, \alpha_{i,n}$ tais que $y_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{i,j} x_j$.

Mostremos que a equação $\beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \dots + \beta_{n+1} y_{n+1} = 0$ admite solução não-trivial.

De fato,

$$\beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \dots + \beta_{n+1} y_{n+1} = 0 \Leftrightarrow \beta_1 \sum_{j=1}^n \alpha_{1,j} x_j + \dots + \beta_{n+1} \sum_{j=1}^n \alpha_{n+1,j} x_j = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\sum_{j=1}^{n+1} \beta_j \alpha_{j,1} \right) x_1 + \dots + \left(\sum_{j=1}^{n+1} \beta_j \alpha_{j,n} \right) x_n = 0 \Leftrightarrow$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} \beta_j \alpha_{j,1} = 0$$

$$\vdots$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} \beta_j \alpha_{j,n} = 0$$

Como o sistema linear homogêneo de n -equações nas $(n+1)$ variáveis $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n+1})$ sempre admite solução não-trivial, segue o resultado. ■

Nosso interesse principal são os espaços vetoriais de dimensão infinita. Para estender a tais espaços propriedades dos espaços de dimensão finita estudados em álgebra linear, necessitamos do Lema de Zorn. Assim introduzimos os seguintes conceitos.

Definição 2.7. Um conjunto parcialmente ordenado é um conjunto M munido de uma ordem parcial, isto é, uma relação binária, denotada por \leq , que satisfaz as condições:

- (i) $a \leq a$ para todo $a \in M$, (Reflexiva)
- (ii) Se $a \leq b$ e $b \leq a$, então $a = b$, (Anti-simétrica)
- (iii) Se $a \leq b$ e $b \leq c$, então $a \leq c$. (Transitiva)

É evidente que o conjunto parcialmente ordenado M pode conter elementos a e b para os quais nem $a \leq b$ nem $b \leq a$. Neste caso a e b são chamados de elementos incomparáveis. Em contraste, dois elementos a e b de M são chamados de elementos comparáveis, se satisfizerem $a \leq b$ ou $b \leq a$ (ou ambos).

Definição 2.8. Dado um conjunto M parcialmente ordenado, um subconjunto $C \subset M$ é totalmente ordenado quando quaisquer dois elementos de C são comparáveis.

Definição 2.9. Um limitante superior de um subconjunto W do conjunto parcialmente ordenado M é um elemento $u \in M$ tal que $x \leq u$ para todo $x \in W$.

Definição 2.10. Um elemento maximal de M é um elemento $\beta \in M$ tal que se $\beta \leq x$ para algum $x \in M$, então $\beta = x$.

Lema 2.1. (Lema de Zorn) Seja $M \neq \emptyset$ um conjunto parcialmente ordenado. Se todo subconjunto totalmente ordenado $C \subset M$ possuir um limitante superior, então M terá pelo menos um elemento maximal.

Como consequência podemos provar o seguinte resultado:

Teorema 2.1. Todo espaço vetorial $X \neq \{0\}$ possui uma base.

Demonstração:

Consideremos $M = \{B \subset X : B \text{ é linearmente independente}\}$. Como $X \neq \{0\}$, existe $x \in X$, não nulo, e desta forma o conjunto $\{x\}$ é linearmente independente, o que implica $\{x\} \in M$, ou seja $M \neq \emptyset$.

Em M , consideramos a seguinte ordem parcial: $A \leq B \Leftrightarrow A \subset B$.

Mostremos que tal relação é, de fato, uma ordem parcial em M .

- i) $A \subset A$, isto é, $A \leq A$, para todo $A \in M$;
- ii) $A \subset B$ e $B \subset A \Rightarrow B = A$, isto é, $A \leq B$ e $B \leq A \Rightarrow A = B$;
- iii) $A \subset B \subset C \Rightarrow A \subset C$, isto é, $A \leq B$ e $B \leq C \Rightarrow A \leq C$.

Seja $C \in M$ totalmente ordenado.

Então $\mathcal{A} = \cup_{B \in C} B$ é um limitante superior de C . De fato:

i) $\mathcal{A} \in M$ pois;

Sejam $x_1, x_2, \dots, x_k \in \mathcal{A}$ e $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ tal que $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_k x_k = 0$.

Para cada $i = 1, 2, \dots, k$ existe $B_i \subset C$ tal que $x_i \in B_i$. Como C é totalmente ordenado podemos supor que $B_1 \subset B_2 \subset \dots \subset B_k$, logo $x_1, x_2, \dots, x_k \in B_k$ que é linearmente independente, então $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 0$.

ii) Note que, se $B \subset C$ então $B \subset \mathcal{A}$, logo $B \leq \mathcal{A}$.

Portanto, pelo Lema de Zorn, existe um elemento maximal β de M . Note que, pela definição de M , β é um subconjunto linearmente independente de X .

Afirmamos que $X = \langle \beta \rangle$.

Para provar a afirmação, suponha que ela não vale, isto é, existe $z \in X$ tal que z não pertence a $\langle \beta \rangle$. É fácil ver que $Y = \beta \cup \{z\}$ é linearmente independente, pois se $z, x_1, x_2, \dots, x_k \in \beta \cup \{z\}$ são tais que $\alpha z + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_k x_k = 0 \Rightarrow \alpha z = -\alpha_1 x_1 - \alpha_2 x_2 - \dots - \alpha_k x_k$.

Se $\alpha = 0$ então $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k = 0$, pois β é linearmente independente.

Se $\alpha \neq 0$ então $z = -\frac{\alpha_1}{\alpha} x_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha} x_2 - \dots - \frac{\alpha_k}{\alpha} x_k \Rightarrow z \in \langle \beta \rangle$ o que é absurdo.

Então $Y \in M$, $\beta \leq Y$ e $\beta \neq Y$, mas isso contradiz a maximalidade de β . O que é absurdo.

Logo, $z \in \langle \beta \rangle$ e $X = \langle \beta \rangle$. ■

2.2 Espaços Vetoriais Normados

Definição 2.11. Seja X um espaço vetorial sobre \mathbb{K} ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}). Uma norma em X é uma aplicação $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes propriedades:

- i) $\|x\| \geq 0$, para todo $x \in X$ e $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
- ii) Para todo $\alpha \in \mathbb{K}$ e para todo $x \in X$ vale $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$;
- iii) Para todo $x, y \in X$ vale $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (desigualdade triangular).

Um espaço vetorial X munido de uma norma $\|\cdot\|$ é chamado de espaço normado e será denotado por $(X, \|\cdot\|)$.

Definição 2.12. Sejam $(X, \|\cdot\|_1)$, $(X, \|\cdot\|_2)$ espaços normados. Dizemos que as normas $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ são equivalentes se existirem constantes $c_1, c_2 > 0$ tais que

$$c_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2 \|x\|_1, \quad \text{para todo } x \in X.$$

Observação 1. Se $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ forem espaços normados então $X \times Y$ será um espaço normado quando munido da norma $\|\cdot\|_{X \times Y}: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\|(x, y)\|_{X \times Y} = \|x\|_X + \|y\|_Y$.

Definição 2.13. Sejam $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ espaços normados. Uma função $f: X \rightarrow Y$ é contínua em $x_0 \in X$ se, para todo $\varepsilon > 0$ existir $\delta > 0$, tal que se $\|x - x_0\|_X < \delta$, então $\|f(x) - f(x_0)\|_Y < \varepsilon$.

A função f é contínua se for contínua em todo ponto $x \in X$.

Proposição 2.2. Seja $(X, \|\cdot\|)$ um espaço normado. Então as operações

i) soma de vetores $X \times X \rightarrow X$, $(x, y) \mapsto x + y$,

ii) multiplicação por escalar $\mathbb{K} \times X \rightarrow X$, $(\alpha, x) \mapsto \alpha x$, e

iii) norma $\|\cdot\|: X \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \|x\|$.

São funções contínuas.

Demonstração:

i) Mostremos que a soma é contínua em $(x_0, y_0) \in X \times X$.

Dado $\varepsilon > 0$, tomando $\delta = \varepsilon$ temos que se $(x, y) \in X \times X$ é tal que $\|(x, y) - (x_0, y_0)\|_{X \times X} < \delta \Rightarrow \|x + y - (x_0 + y_0)\|_X \leq \|x - x_0\|_X + \|y - y_0\|_X = \|(x, y) - (x_0, y_0)\|_{X \times X} < \varepsilon$.

ii) Mostremos que a multiplicação por escalar é contínua em $(\alpha_0, y_0) \in \mathbb{K} \times X$.

Dado $\varepsilon > 0$, queremos determinar $\delta > 0$ de forma que:

$$\begin{aligned} \|\alpha x - \alpha_0 x_0\| &\leq \|\alpha x - \alpha_0 x\| + \|\alpha_0 x - \alpha_0 x_0\| = |\alpha - \alpha_0| \|x\| + |\alpha_0| \|x - x_0\| \leq \\ &\leq |\alpha - \alpha_0| (\|x - x_0\| + \|x_0\|) + |\alpha_0| \|x - x_0\| = \\ &= \|x - x_0\| (|\alpha - \alpha_0| + |\alpha_0|) + |\alpha - \alpha_0| \|x_0\| \leq \delta(\delta + |\alpha_0|) + \delta \|x_0\| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto, se

$$\delta^2 + (|\alpha_0| + \|x_0\|)\delta - \varepsilon = 0,$$

ou seja,

$$\delta = \frac{-(|\alpha_0| + \|x_0\|) \pm \sqrt{(|\alpha_0| + \|x_0\|)^2 + 4\varepsilon}}{2},$$

escolhemos

$$\delta' = \frac{-(|\alpha_0| + \|x_0\|) + \sqrt{(|\alpha_0| + \|x_0\|)^2 + 4\varepsilon}}{2} > 0.$$

Dessa forma, considerando δ satisfazendo $0 < \delta < \delta'$, segue que $\|(\alpha, x) - (\alpha_0, x_0)\|_{\mathbb{K} \times X} < \delta \Rightarrow |\alpha - \alpha_0| + \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow |\alpha - \alpha_0| < \delta$ e $\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|\alpha x - \alpha_0 x_0\| < \varepsilon$, como queríamos.

iii) Mostremos que a norma é contínua em $x_0 \in X$.

Dado $\varepsilon > 0$, tomando $\delta = \varepsilon$ temos que se $\|x - x_0\| < \delta$ então $|\|x\| - \|x_0\|| \leq \|x - x_0\| < \delta = \varepsilon$.

■

Definição 2.14. Uma sequência (x_n) no espaço normado X é de Cauchy se para todo $\varepsilon > 0$ existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n \geq n_0 \Rightarrow \|x_m - x_n\| < \varepsilon$.

Definição 2.15. Uma sequência (x_n) no espaço normado X converge para $x \in X$ se, para todo $\varepsilon > 0$ existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0 \Rightarrow \|x_n - x\| < \varepsilon$.

Notação $x_n \rightarrow x$ ou $\lim x_n = x$.

É imediato que toda sequência convergente é de Cauchy, porém nem toda sequência de Cauchy converge.

Definição 2.16. Um espaço normado X é dito completo se toda sequência de Cauchy converge em X .

Definição 2.17. Um espaço normado completo X é chamado de espaço de Banach.

2.3 Operadores Lineares

Em todo texto, X denotará um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K} (= \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$.

Definição 2.18. Dizemos que uma aplicação $T : D(T) \subset X \rightarrow X$ é um operador linear se $D(T)$ é um subespaço vetorial de X e para quaisquer $x, y \in D(T)$ e $\alpha \in \mathbb{K}$,

$$T(\alpha x + y) = \alpha T x + T y. \quad (2.1)$$

Denotaremos por:

$D(T)$ o domínio de T ,

$R(T) = \{y \in X; \exists x \in D(T) \text{ com } y = T x\}$ a imagem de T ,

$N(T) = \{x \in D(T); T x = 0\}$ o núcleo de T .

Teorema 2.2. Seja $T : D(T) \subset X \rightarrow X$ um operador linear. Então:

i) A imagem $R(T)$ é um subespaço vetorial de X .

ii) Se $\dim D(T) = n < \infty$, então $\dim R(T) \leq n$.

iii) O núcleo $N(T)$ é um subespaço vetorial de X .

Demonstração:

i) Sejam $y_1, y_2 \in R(T)$. Mostremos que $\alpha y_1 + \beta y_2 \in R(T)$ para quaisquer escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$. Desde que $y_1, y_2 \in R(T)$, temos $y_1 = Tx_1$ e $y_2 = Tx_2$, para algum $x_1, x_2 \in D(T)$.

Portanto,

$$\alpha y_1 + \beta y_2 = \alpha Tx_1 + \beta Tx_2 = T(\alpha x_1) + T(\beta x_2),$$

como $\alpha x_1 + \beta x_2 \in D(T)$, que é um subespaço vetorial de X , $T(\alpha x_1) + T(\beta x_2) = T(\alpha x_1 + \beta x_2) \in R(T)$.

ii) Escolhemos $n + 1$ elementos y_1, y_2, \dots, y_{n+1} de $R(T)$ de forma arbitrária. Então $y_1 = Tx_1, \dots, y_{n+1} = Tx_{n+1}$ para x_1, \dots, x_{n+1} em $D(T)$. Se $\dim D(T) = n$, esse conjunto x_1, \dots, x_{n+1} deve ser linearmente dependente. Considere a combinação linear,

$$\alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_{n+1} y_{n+1} = 0,$$

em que $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$ são escalares. Como T é linear, segue que

$$\alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_{n+1} y_{n+1} = T(\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{n+1} x_{n+1}) = 0 \Rightarrow \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{n+1} x_{n+1} \in N(T),$$

o que mostra que y_1, \dots, y_{n+1} é um conjunto linearmente dependente. Sendo que este subconjunto de $R(T)$ foi escolhido de forma arbitrária, nós concluímos que $R(T)$ não tem subconjuntos linearmente independentes de $n+1$ ou mais elementos. Pela definição, isso significa que $\dim R(T) \leq n$.

iii) Tomemos quaisquer $x_1, x_2 \in N(T)$. Então $Tx_1 = Tx_2 = 0$. Como T é linear, para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, temos

$$T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha Tx_1 + \beta Tx_2 = 0.$$

Isso mostra que $\alpha x_1 + \beta x_2 \in N(T)$ e portanto $N(T)$ é um subespaço vetorial de X . ■

Recordemos que um operador $T : D(T) \subset X \rightarrow X$ é injetivo se, para quaisquer $x_1 \neq x_2 \in D(T)$, tivermos $Tx_1 \neq Tx_2$. Neste caso podemos definir um operador

$$T^{-1} : R(T) \rightarrow D(T)$$

$$y_0 \mapsto x_0, \text{ onde } y_0 = Tx_0.$$

Chamado de operador inverso a T que claramente satisfaz as relações:

$$T^{-1}Tx = x \text{ para todo } x \in D(T),$$

$$TT^{-1}y = y \text{ para todo } y \in R(T).$$

Teorema 2.3. Seja $T : D(T) \subset X \rightarrow X$ um operador linear. Então:

i) O inverso $T^{-1} : R(T) \rightarrow D(T)$ existe se, e somente se, $N(T) = \{0\}$.

ii) Se T^{-1} existir, T^{-1} será linear.

iii) Se $\dim D(T) = n < \infty$ e T^{-1} existir, então $\dim R(T) = \dim D(T) = n$.

Demonstração:

i) Suponha que $Tx = 0 \Rightarrow x = 0$, isto é, $N(T) = \{0\}$ e seja $Tx_1 = Tx_2$.

Desde que T seja linear,

$$T(x_1 - x_2) = Tx_1 - Tx_2 = 0,$$

então $x_1 - x_2 \in N(T) = \{0\}$, logo $x_1 = x_2$ e T é injetiva.

Portanto, existe $T^{-1} : R(T) \rightarrow D(T)$.

Reciprocamente, se T^{-1} existir, então $Tx_1 = Tx_2 \Rightarrow x_1 = x_2$. Se $x_2 = 0$, obteremos

$$T(x_1) = 0 = T(0) \Rightarrow x_1 = 0,$$

o que mostra que $N(T) = \{0\}$.

ii) Assumindo que T^{-1} existe, mostremos que T^{-1} é linear.

O domínio de T^{-1} é $R(T)$ e é um espaço vetorial pelo Teorema 2.2 *i)*.

Sejam $y_1, y_2 \in R(T)$. Então existem $x_1, x_2 \in D(T)$ tais que

$$y_1 = Tx_1 \text{ e } y_2 = Tx_2, \text{ isto é, } x_1 = T^{-1}y_1 \text{ e } x_2 = T^{-1}y_2.$$

Portanto se $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, temos da linearidade de T que

$$\alpha y_1 + \beta y_2 = \alpha Tx_1 + \beta Tx_2 = T(\alpha x_1 + \beta x_2).$$

Então,

$$T^{-1}(\alpha y_1 + \beta y_2) = T^{-1}T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha x_1 + \beta x_2 = \alpha T^{-1}y_1 + \beta T^{-1}y_2.$$

Portanto, T^{-1} é linear.

iii) Pelo Teorema 2.2 *ii)* temos $\dim R(T) \leq \dim D(T)$ e $\dim D(T) \leq \dim R(T)$ pelo mesmo teorema aplicado à T^{-1} . Daí, segue que, $\dim R(T) = \dim D(T)$. ■

2.4 Operadores Lineares Limitados

Definição 2.19. Sejam X um espaço normado e $T : D(T) \subset X \rightarrow X$ um operador linear. Dizemos que T é limitado se existir um número real c tal que para todo $x \in D(T)$,

$$\|Tx\| \leq c \|x\|. \quad (2.2)$$

Note que a desigualdade em (2.2) mostra que um operador linear limitado aplica conjuntos limitados de $D(T)$ em conjuntos limitados de X .

Note ainda que a utilização da palavra "limitada" é diferente do que usualmente se tem em Cálculo, em que uma função limitada é aquela cuja imagem é um conjunto limitado.

Sendo T um operador limitado, uma pergunta surge naturalmente: qual é o valor ótimo de c tal que (2.2) ainda seja válida para todo $x \in D(T)$ diferente do vetor nulo?

Note que, pela divisão,

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq c,$$

o valor de c deve ser, pelo menos, tão grande quanto o supremo da expressão à esquerda assumida sobre $D(T) - \{0\}$. Portanto, a resposta à nossa pergunta é que o valor ótimo de c em (2.2) é tal supremo. Esse número é denotado por $\|T\|$, ou seja,

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in D(T) \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}, \quad (2.3)$$

chamado a norma do operador T . Quando $D(T) = \{0\}$, definimos $\|T\| = 0$.

Substituindo $c = \|T\|$ em (2.2) obtemos

$$\|Tx\| \leq \|T\| \|x\|. \quad (2.4)$$

Lema 2.2. Seja $T : D(T) \subset X \rightarrow X$ um operador linear limitado. Uma fórmula alternativa para a norma de T é:

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in D(T) \\ \|x\|=1}} \|Tx\|. \quad (2.5)$$

Demonstração:

Mostremos que (2.3) e (2.5) são equivalentes.

Segue que

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in D(T) \\ \|x\| \neq 0}} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in D(T) \\ \|x\| \neq 0}} \left\| T \left(\frac{x}{\|x\|} \right) \right\| = \sup_{\substack{y \in D(T) \\ \|y\|=1}} \|Ty\|.$$

■

Teorema 2.4. Seja $T : D(T) \subset X \rightarrow X$ um operador linear. Então:

- i) T é contínuo se, e somente se, T é limitado.
- ii) Se T é contínuo em um único ponto, ele é contínuo.

Demonstração:

i) Para $T = 0$ a afirmação é trivial.

Seja $T \neq 0$, então $\|T\| \neq 0$. Suponhamos, primeiramente, que T é limitado. Dados $x_0 \in D(T)$ e $\varepsilon > 0$, tal que para todo $x \in D(T)$ com $\|x - x_0\| < \delta = \frac{\varepsilon}{\|T\|}$, então

$$\|Tx - Tx_0\| = \|T(x - x_0)\| \leq \|T\| \|x - x_0\| < \|T\| \delta = \varepsilon.$$

Como $x_0 \in D(T)$ é arbitrário, segue que T é contínuo.

Reciprocamente, supondo que T seja contínuo em um ponto $x_0 \in D(T)$, para $\varepsilon = 1$ existe um $\delta > 0$ tal que

$$\|Tx - Tx_0\| \leq 1, \quad (2.6)$$

para todo $x \in D(T)$ sempre que $\|x - x_0\| \leq \delta$.

Se $0 \neq x \in D(T)$ definimos $y = x_0 + \frac{\delta}{\|x\|}x$. Como $\|y - x_0\| = \delta$ e T é linear, temos

$$1 \geq \|Ty - Tx_0\| = \|T(y - x_0)\| = \left\| T \left(\frac{\delta}{\|x\|} x \right) \right\| = \frac{\delta}{\|x\|} \|Tx\| \Rightarrow \|Tx\| \leq \frac{1}{\delta} \|x\|.$$

Ou seja, $\|Tx\| \leq \frac{1}{\delta} \|x\|$, para todo $x \in D(T)$.

ii) A continuidade de T em um ponto implica que T é limitado na segunda parte da demonstração do item *i)*, o que implica a continuidade de T por *i)*. ■

O próximo resultado auxiliar nos será útil para a caracterização dos espaços vetoriais de dimensão finita em termos da continuidade dos seus operadores lineares.

Lema 2.3. Seja $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ um conjunto linearmente independente de vetores do espaço vetorial normado X de dimensão finita. Então existe uma constante $C > 0$ tal que para quaisquer α_i , $1 \leq i \leq n$, tem-se

$$\|\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n\| \geq C (|\alpha_1| + \dots + |\alpha_n|). \quad (2.7)$$

Demonstração:

Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ arbitrários e considere $S = |\alpha_1| + \dots + |\alpha_n|$.

Se $S = 0$, então todos os $\alpha_j = 0$ são nulos e a desigualdade (2.7) é verdadeira.

Suponhamos que $S > 0$. Note que se dividirmos (2.7) por S , obtemos a desigualdade

$$\|\beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x_n\| \geq C \text{ e } \sum_{j=1}^n |\beta_j| = 1,$$

com $\beta_1 = \frac{\alpha_1}{|\alpha_1| + \dots + |\alpha_n|}, \dots, \beta_n = \frac{\alpha_n}{|\alpha_1| + \dots + |\alpha_n|}$.

Assim, para provar (2.7), basta provar que existe $C > 0$ tal que

$$\|\beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x_n\| \geq C \quad (2.8)$$

para quaisquer $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$ tal que $\sum_{j=1}^n |\beta_j| = 1$.

Suponha que a desigualdade (2.8) seja falsa. Então, existe uma sequência $(y_m)_{m \in \mathbb{N}}$ em X tal que

$$\begin{aligned} y_1 &= \beta_1^{(1)} x_1 + \dots + \beta_n^{(1)} x_n \\ y_2 &= \beta_1^{(2)} x_1 + \dots + \beta_n^{(2)} x_n \\ y_m &= \beta_1^{(m)} x_1 + \dots + \beta_n^{(m)} x_n \end{aligned}$$

Assim $\sum_{j=1}^n |\beta_j^{(m)}| = 1$ e $\|y_m\|$ converge para 0 quando m tende para infinito.

Os índices sobrescritos estão de acordo com os índices da sequência $(y_m)_{m \in \mathbb{N}}$ e os subscritos com a coordenada do elemento na sequência.

Assim, para cada j fixado na sequência, obtemos

$$\begin{aligned} (\beta_1^{(m)}) &= (\beta_1^{(1)}, \beta_1^{(2)}, \dots) \\ (\beta_2^{(m)}) &= (\beta_2^{(1)}, \beta_2^{(2)}, \dots) \\ (\beta_n^{(m)}) &= (\beta_n^{(1)}, \beta_n^{(2)}, \dots) \end{aligned}$$

Como $\sum_{j=1}^n |\beta_j^{(m)}| = 1$, tem-se $|\beta_j^{(m)}| \leq 1$, para todo $j = 1, 2, \dots, n$. Assim, $(\beta_j^{(m)}) = (\beta_j^{(1)}, \beta_j^{(2)}, \dots)$ é limitada.

Pelo Teorema do Bolzano-Weierstrass, toda sequência limitada possui uma subsequência convergente. Logo, a sequência limitada $(\beta_1^{(m)}) = (\beta_1^{(1)}, \beta_1^{(2)}, \dots)$ possui uma subsequência convergente.

Sejam β_1 o seu limite e $(y_1^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ a correspondente subsequência de $(y_m)_{m \in \mathbb{N}}$.

Da mesma forma, $(\beta_2^{(m)})$ possui uma subsequência convergente, sendo β_2 o seu limite e $(y_2^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ a correspondente subsequência de $(y_1^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$.

Com esse mesmo argumento, para $j = 3, \dots, n$ obtemos uma nova sequência de $(y_m)_{m \in \mathbb{N}}$ da seguinte forma

$$(y_n^{(m)}) = (y_n^{(1)}, y_n^{(2)}, \dots) \text{ de } (y_m)$$

com termos

$$\begin{aligned} (y_n^{(1)}) &= \eta_1^{(1)} x_1 + \eta_2^{(1)} x_2 + \dots + \eta_n^{(1)} x_n \\ (y_n^{(2)}) &= \eta_1^{(2)} x_1 + \eta_2^{(2)} x_2 + \dots + \eta_n^{(2)} x_n \end{aligned}$$

Logo,

$$(y_n^{(m)}) = \sum_{j=1}^n \eta_j^{(m)} x_j \text{ e } \sum_{j=1}^n |\eta_j^{(m)}| = 1$$

com $\eta_1^{(m)} \rightarrow \beta_1, \eta_2^{(m)} \rightarrow \beta_2, \dots, \eta_n^{(m)} \rightarrow \beta_n$, ou seja $\eta_j^{(m)} \rightarrow \beta_j$ quando $m \rightarrow \infty$.

Assim, quando $m \rightarrow \infty$, $y_n^{(m)} \rightarrow y = \sum_{j=1}^n \beta_j x_j$, com $\sum_{j=1}^n |\beta_j| = 1$, logo nem todos os β_j são nulos e como o conjunto $\{x_1, \dots, x_n\}$ é linearmente independente, temos que $y \neq 0$.

Por outro lado, $y_n^{(m)} \rightarrow y$, então $\|y_n^{(m)}\| \rightarrow \|y\|$, pela continuidade de norma. Como $\|y_m\| \rightarrow 0$ e $(y_n^{(m)})$ é subsequência de (y_m) , temos que $\|y_n^{(m)}\| \rightarrow 0$.

Portanto, pela definição de norma, temos $\|y\| = 0 \Leftrightarrow y = 0$. Contradição, pois $y \neq 0$. ■

Teorema 2.5. Em um espaço normado X de dimensão finita, todo operador linear é limitado.

Demonstração:

Sejam $\dim X = n$, $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma base de X , $x = \sum_{i=1}^n \xi_i e_i$ e T um operador linear

Assim,

$$\|T(x)\| = \left\| T \left(\sum_{i=1}^n \xi_i e_i \right) \right\| = \left\| \sum_{i=1}^n \xi_i T(e_i) \right\| \leq \sum_{i=1}^n |\xi_i| \|T(e_i)\| \leq \max_{1 \leq k \leq n} \|T(e_k)\| \sum_{i=1}^n |\xi_i|.$$

Pelo Lema 2.3, temos

$$\sum_{i=1}^n |\xi_i| \leq \frac{1}{C} \left\| \sum_{i=1}^n \xi_i e_i \right\| = \frac{1}{C} \|x\|.$$

Logo, $\|T(x)\| \leq \alpha \|x\|$, onde $\alpha = \frac{1}{C} \max_{1 \leq k \leq n} \|T(e_k)\|$.

Portanto, T é limitado. ■

Definição 2.20. Dois operadores T_1 e T_2 são iguais, escrevemos $T_1 = T_2$, se eles possuírem o mesmo domínio, ou seja, se $D(T_1) = D(T_2)$, e se $T_1 x = T_2 x$ para todo $x \in D(T_1) = D(T_2)$.

A restrição de um operador $T : D(T) \subset X \rightarrow X$ a um subconjunto $B \subset D(T)$ será denotada por $T|_B$.

Uma extensão de T para o subespaço $X \supset M \supset D(T)$ é um operador linear

$$\tilde{T} : M \rightarrow X \text{ tal que } \tilde{T}|_{D(T)} = T.$$

Teorema 2.6. (Extensão Linear Limitada) Sejam X um espaço de Banach e $T : D(T) \subset X \rightarrow X$ um operador linear limitado. Então, T tem uma única extensão linear $\tilde{T} : \overline{D(T)} \rightarrow X$ com \tilde{T} linear satisfazendo $\|\tilde{T}\| = \|T\|$, onde $\overline{D(T)}$ representa o fecho do conjunto $D(T)$.

Demonstração:

Seja $x \in \overline{D(T)}$, então existe uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D(T)$ tal que $x_n \rightarrow x$ quando $n \rightarrow \infty$. Como T é linear e limitado, temos:

$$\|Tx_n - Tx_m\| = \|T(x_n - x_m)\| \leq \|T\| \|x_n - x_m\|.$$

Isto mostra que (Tx_n) é de Cauchy, pois como (x_n) é convergente segue que (x_n) é de Cauchy em X e portanto $(Tx_n) \subset X$ converge, digamos

$$Tx_n \longrightarrow y \in X.$$

Definimos \tilde{T} por:

$$\tilde{T}x = y.$$

Mostramos que esta definição é independente da escolha particular de uma sequência no $D(T)$ convergindo para o x . Suponha que $x_n \longrightarrow x$ e $z_n \longrightarrow x$, (x_n) e (z_n) são seqüências em $D(T)$. Então $v_m \longrightarrow x$, onde (v_m) é a seqüência $(x_1, z_1, x_2, z_2, \dots)$.

Portanto, $T(v_m)$ converge.

E as duas subseqüências $(T(x_n))$ e $(T(z_n))$ de $(T(v_m))$ devem ter o mesmo limite. Logo \tilde{T} é unicamente determinada para todo $x \in \overline{D(T)}$.

Mostremos que $\overline{D(T)}$ é um subespaço vetorial.

Sejam $x, y \in \overline{D(T)}$.

i) $0 \in \overline{D(T)}$, pois $0 \in D(T) \subset \overline{D(T)}$;

ii) $x + \alpha y \in \overline{D(T)}$. Sabemos que existem $x_n \longrightarrow x$, $x_n \in D(T)$ e $y_n \longrightarrow y$, $y_n \in D(T)$. Logo, $x_n + \alpha y_n \longrightarrow x + \alpha y$, $x_n + \alpha y_n \in D(T)$. Portanto, $\tilde{T}(x + \alpha y) = \tilde{T}(x) + \alpha \tilde{T}(y)$.

Note ainda que \tilde{T} é linear, pois se $x, y \in \overline{D(T)}$, então existem seqüências $(x_n), (y_n) \subset D(T)$, tais que $x_n \longrightarrow x$, $y_n \longrightarrow y$ e

$$\tilde{T}(x + \alpha y) = \lim_{n \rightarrow \infty} T(x_n + \alpha y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (Tx_n + \alpha Ty_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n + \alpha \lim_{n \rightarrow \infty} Ty_n = \tilde{T}x + \alpha \tilde{T}y$$

e $\tilde{T}x = Tx$ para todo $x \in D(T)$. Ou seja, \tilde{T} é uma extensão de T .

Sabemos que

$$\|Tx_n\| \leq \|T\| \|x_n\|, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

pois T é limitado. Além disso, $Tx_n \longrightarrow \tilde{T}x$, quando $n \rightarrow \infty$. Então, como $x \longmapsto \|x\|$ define uma aplicação contínua, obtemos

$$\|\tilde{T}x\| \leq \|T\| \|x\|.$$

Portanto, \tilde{T} é limitado e $\|\tilde{T}\| \leq \|T\|$. Certamente, $\|\tilde{T}\| \geq \|T\|$, pois sendo a norma definida por um supremo, esta não pode decrescer numa extensão,

$$\|\tilde{T}\| = \sup_{\substack{x \in \overline{D(T)} \\ \|x\|=1}} \|\tilde{T}x\| \geq \sup_{\substack{x \in D(T) \\ \|x\|=1}} \|\tilde{T}x\| = \sup_{\substack{x \in D(T) \\ \|x\|=1}} \|Tx\| := \|T\|.$$

Logo, $\|\tilde{T}\| = \|T\|$.

■

2.5 Operadores Lineares Fechados

Definição 2.21. Um operador linear $T : D(T) \subset X \longrightarrow X$ é dito fechado se o seu gráfico

$$G(T) = \{(x, Tx); x \in D(T)\}$$

for um subespaço fechado de $X \times X$.

Equivalentemente, T é fechado se $(x_n) \subset D(T)$ é tal que $x_n \longrightarrow x$ e $Tx_n \longrightarrow y$ quando $n \rightarrow \infty$, implica que $x \in D(T)$ e $Tx = y$.

Definição 2.22. Seja $f : D(f) \subset X \longrightarrow X$ uma aplicação aberta, isto é, a imagem $f(A)$ de qualquer aberto $A \subset D(f)$ é um subconjunto aberto de X .

Teorema 2.7. (Teorema da Aplicação Aberta) Seja $T : X \longrightarrow Y$ uma aplicação linear sobrejetiva entre espaços de Banach. Então, T é contínua se, e somente se, é uma aplicação aberta.

Teorema 2.8. (Teorema do Gráfico Fechado) Se X for um espaço de Banach então o operador linear $T : X \longrightarrow X$ será fechado se, e somente se, for limitado.

Demonstração:

É claro que se T é limitado então $G(T)$ é fechado.

Para a recíproca observemos que por hipótese, $G(T)$ é fechado em $X \times X$ e portanto é um espaço de Banach.

Considere as projeções

$$\begin{aligned} P_1 : G(T) &\longrightarrow X \\ (x, Tx) &\longmapsto x \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} P_2 : G(T) &\longrightarrow X \\ (x, Tx) &\longmapsto Tx. \end{aligned}$$

Note que P_i é linear e limitado, pois

$$\| P_i(x, Tx) \| \leq \| x \| + \| Tx \| = \| (x, Tx) \|.$$

Ainda P_1 é bijetiva com inversa

$$\begin{aligned} P_1^{-1} : X &\longrightarrow G(T) \\ x &\longmapsto (x, Tx) \end{aligned}$$

limitada pelo Teorema da Aplicação Aberta.

Logo,

$$Tx = P_2 \circ P_1^{-1}x$$

é limitada. ■

2.6 Espaços normados de Operadores e Espaço Dual

Seja X um espaço normado e consideremos o conjunto $\mathcal{L}(X)$ de operadores lineares limitados de X . Queremos mostrar que $\mathcal{L}(X)$ possui uma estrutura natural de espaço normado.

Primeiramente, introduzimos a estrutura de espaço vetorial em $\mathcal{L}(X)$ definindo a soma de dois operadores $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(X)$ por

$$(T_1 + T_2)x = T_1x + T_2x$$

e o produto de $T \in \mathcal{L}(X)$ por um escalar por

$$(\alpha T)x = \alpha Tx.$$

Teorema 2.9. O espaço vetorial $\mathcal{L}(X)$ é um espaço normado com norma definida por

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} \|Tx\|. \quad (2.9)$$

Teorema 2.10. Se X é um espaço de Banach, então $\mathcal{L}(X)$ é um espaço de Banach.

Demonstração:

Consideremos uma sequência de Cauchy arbitrária (T_n) em $\mathcal{L}(X)$ e mostremos que (T_n) converge para um operador $T \in \mathcal{L}(X)$.

Como (T_n) é de Cauchy, para todo $\varepsilon > 0$ existe um N tal que

$$\|T_n - T_m\| < \varepsilon,$$

sempre que $m, n > N$.

Para quaisquer $x \in X$ e $m, n > N$ obtemos

$$\|T_nx - T_mx\| = \|(T_n - T_m)x\| \leq \|T_n - T_m\| \|x\| < \varepsilon \|x\|. \quad (2.10)$$

Então, para cada x fixo, a sequência (T_nx) é de Cauchy em X . Como X é de Banach, (T_nx) converge, digamos $T_nx \rightarrow y \in X$. Claramente, o limite y depende da escolha de $x \in X$. Isto define um operador $T : X \rightarrow Y$, onde $y = Tx$. O operador T é linear pois

$$T_n(\alpha x + \beta z) = \lim T_n(\alpha x + \beta z) = \lim(\alpha T_nx + \beta T_nz) = \alpha \lim T_nx + \beta \lim T_nz = \alpha T_nx + \beta T_nz.$$

Provemos que T é limitado e $T_n \rightarrow T$ em $\mathcal{L}(X)$, isto é, $\|T_n - T\| \rightarrow 0$.

Desde que (2.10) se mantenha para todo $m > N$ e $T_mx \rightarrow Tx$, podemos fazer $m \rightarrow \infty$. Usando a continuidade da norma, obtemos por (2.10) para todo $n > N$ e todo $x \in X$

$$\|T_nx - Tx\| = \left\| T_nx - \lim_{m \rightarrow \infty} T_mx \right\| = \lim_{m \rightarrow \infty} \|T_nx - T_mx\| \leq \varepsilon \|x\|. \quad (2.11)$$

Isto mostra que $(T_n - T)$ com $n > N$ é um operador linear limitado.

Como T_n é limitado, $T = T_n - (T_n - T)$ é limitado, isto é, $T \in \mathcal{L}(X)$. Além disso, se em (2.11) tomarmos o supremo sobre todos os x de norma 1, obtemos

$$\| T_n - T \| \leq \varepsilon.$$

Assim, $\| T_n - T \| \rightarrow 0$. ■

Definição 2.23. Um funcional linear limitado f é um operador linear limitado com imagem no corpo escalar do espaço normado X em que está o domínio $D(f)$.

Portanto, existe um número real c , tal que para todo $x \in D(f)$,

$$| f(x) | \leq c \| x \| .$$

Além disso, a norma de f é

$$\| f \| = \sup_{\substack{x \in D(f) \\ x \neq 0}} \frac{| f(x) |}{\| x \|}$$

ou

$$\| f \| = \sup_{\substack{x \in D(f) \\ \| x \| = 1}} | f(x) | .$$

Definição 2.24. Seja X um espaço normado. O conjunto de todos os funcionais lineares limitados em X constituem um espaço normado com norma definida por

$$\| f \| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0}} \frac{| f(x) |}{\| x \|} = \sup_{\substack{x \in X \\ \| x \| = 1}} | f(x) | \quad (2.12)$$

que é chamado o espaço dual (topológico) de X e é denotado por X^* .

Definição 2.25. Seja (X, d) um espaço métrico. Dizemos que $A \subset X$ é nunca denso em X se $\text{int} \bar{A} = \emptyset$.

Teorema 2.11. (Teorema da Categoria de Baire) Se (X, d) for um espaço métrico completo então X não poderá ser escrito como uma reunião enumerável de conjuntos nunca densos em X .

O próximo teorema é uma consequência do Teorema da Categoria de Baire.

Teorema 2.12. (Princípio da Limitação Uniforme) Seja $(T_n) \in \mathcal{L}(X)$ uma sequência de operadores lineares limitados tal que para cada $x \in X$, existe $c_x \in \mathbb{R}$ tal que,

$$\| T_n x \| \leq c_x, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \quad (2.13)$$

Então a sequência das normas $(\| T_n \|)$ é limitada, isto é, existe um c tal que,

$$\| T_n \| \leq c, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \quad (2.14)$$

Demonstração:

Para cada $k \in \mathbb{N}$, seja $A_k = \{x \in X \text{ tal que } \|T_n x\| \leq k, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}$.

Mostremos que A_k é fechado.

De fato, seja $x \in \overline{A_k}$. Logo, existe uma sequência (x_j) em A_k convergindo para x . Isto significa que para todo n fixo $\|T_n x_j\| \leq k$. Portanto $\|T_n x\| \leq k$, visto que T_n é contínuo, bem como a norma em x . Portanto, $x \in A_k$ e A_k é fechado.

Por (2.13), cada $x \in X$ pertence a algum A_k . Portanto,

$$X = \cup_{k=1}^{\infty} A_k.$$

Como X é completo, o Teorema de Baire implica que algum A_k contém uma bola aberta, ou seja,

$$B_0 = B(x_0; r) \subset A_{k_0}, \text{ com } r > 0. \quad (2.15)$$

Seja $x \in X$ arbitrário, $x \neq 0$. Tome

$$z = x_0 + \frac{r}{2\|x\|}x. \quad (2.16)$$

Então $\|z - x_0\| < r$, isto é, $z \in B_0$. Por (2.15), $B_0 \subset A_{k_0}$. Portanto $\|T_n z\| \leq k_0$, para todo n . Igualmente $\|T_n x_0\| \leq k_0$, já que $x_0 \in B_0$. De (2.16) obtemos

$$x = \frac{2\|x\|}{r}(z - x_0).$$

Deste modo,

$$\|T_n x\| = \frac{2\|x\|}{r} \|T_n(z - x_0)\| \leq \frac{2\|x\|}{r} (\|T_n z\| + \|T_n x_0\|) \leq \frac{4}{r} \|x\| k_0, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Portanto, para todo n ,

$$\|T_n\| = \sup_{\|x\|=1} \|T_n x\| \leq \frac{4}{r} k_0,$$

que é da forma (2.14) com $c = \frac{4k_0}{r}$. ■

2.7 Extensão de Funcionais Lineares

Definição 2.26. Sejam X um espaço vetorial e $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação satisfazendo as seguintes propriedades:

- i) Para todo $x, y \in X$, $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$.
- ii) Para o escalar $\lambda \geq 0$ e $x \in X$, $p(\lambda x) = \lambda p(x)$.

Diz-se que p é um funcional sublinear.

Lema 2.4. Seja S um subespaço próprio do espaço vetorial real X (isto é, $S \neq \{0\}$ e $S \neq X$) e seja $x_0 \in X - S$. Considere o subespaço gerado

$$N = \langle S \cup \{x_0\} \rangle$$

e suponha que f seja um funcional linear definido em S e p seja um funcional sublinear definido em X . Além disso, suponha que

$$f(x) \leq p(x), \quad \text{para todo } x \in S.$$

Então, f pode ser estendido a um funcional linear F ($F|_S = f$) definido em N tal que

$$F(x) \leq p(x), \quad \text{para todo } x \in N.$$

Demonstração:

Como $f(x) \leq p(x)$ em S , dados $x_1, x_2 \in S$

$$\begin{aligned} f(x_1 - x_2) &= f(x_1) - f(x_2) \leq p(x_1 - x_2) = \\ &= p(x_1 + x_0 - x_2 - x_0) \leq p(x_1 + x_0) + p(-x_2 - x_0). \end{aligned}$$

Logo,

$$-p(-x_2 - x_0) - f(x_2) \leq p(x_1 + x_0) - f(x_1). \quad (2.17)$$

Supondo que x_1 esteja fixado e x_2 seja arbitrário, segue que o conjunto de números reais

$$\{-p(-x_2 - x_0) - f(x_2), x_2 \in S\}$$

é limitado superiormente, assim possui supremo. Seja então

$$a = \sup \{-p(-x_2 - x_0) - f(x_2), x_2 \in S\}.$$

Analogamente, podemos garantir a existência de

$$b = \inf \{p(x_1 + x_0) - f(x_1), x_1 \in S\}.$$

De (2.17), segue que

$$a \leq b$$

e então existe $c_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$a \leq c_0 \leq b.$$

Por (2.17), para qualquer $y \in S$, obtemos

$$-p(-y - x_0) - f(y) \leq p(y + x_0) - f(y). \quad (2.18)$$

Como $x_0 \notin S$, dado $x \in N$, digamos que

$$x = y + \lambda x_0,$$

onde o escalar λ e o elemento $y \in S$ são unicamente determinados. Devido à unicidade desta representação, a aplicação

$$F : N \longrightarrow \mathbb{R}$$

dada por

$$F(y + \lambda x_0) = f(y) + \lambda c_0, \quad (2.19)$$

está bem definida. Além disso, F é um funcional linear. De fato:

i) Dados o escalar β e $y + \lambda x_0 \in N$, temos

$$F(\beta(y + \lambda x_0)) = F(\beta y + \beta \lambda x_0) = f(\beta y) + (\lambda \beta) c_0 = \beta(f(y) + \lambda c_0) = \beta F(y + \lambda x_0).$$

ii) Dados $y_1 + \lambda_1 x_0, y_2 + \lambda_2 x_0 \in N$, temos

$$\begin{aligned} F((y_1 + \lambda_1 x_0) + (y_2 + \lambda_2 x_0)) &= F(y_1 + y_2 + (\lambda_1 + \lambda_2)x_0) = f(y_1 + y_2) + (\lambda_1 + \lambda_2)c_0 = \\ &= f(y_1) + \lambda_1 c_0 + f(y_2) + \lambda_2 c_0 = F(y_1 + \lambda_1 x_0) + F(y_2 + \lambda_2 x_0) \end{aligned}$$

e então, F é um funcional linear. Além disso, dado $y \in S$,

$$F(y) = F(y + 0x_0) = f(y) + 0c_0 = f(y),$$

donde segue que F é extensão de f . Resta mostrar que

$$F(x) \leq p(x), \quad \text{para todo } x \in N.$$

Para tal, consideremos três casos. Dado $x \in N$, $x = y + \lambda x_0$, onde $y \in S$. Estudaremos os casos em que $\lambda = 0$, $\lambda > 0$ ou $\lambda < 0$:

1) Considere $\lambda = 0$. Neste caso, $F(x) = F(y + 0x_0) = f(y) \leq p(y) = p(x)$.

2) Considere $\lambda > 0$. Trocando y por $\frac{y}{\lambda}$, tem-se por (2.18),

$$c_0 \leq p\left(\frac{y}{\lambda} + x_0\right) - f\left(\frac{y}{\lambda}\right), \text{ onde}$$

$$c_0 \leq p\left(\frac{y}{\lambda} + x_0\right) - f\left(\frac{y}{\lambda}\right) \leq \frac{1}{\lambda}p(y + \lambda x_0) - \frac{1}{\lambda}f(y) \text{ e portanto,}$$

$$\lambda c_0 \leq p(y + \lambda x_0) - f(y).$$

Da última desigualdade, obtemos

$$f(y) + \lambda c_0 \leq p(y + \lambda x_0).$$

Por conseguinte,

$$F(x) \leq p(x).$$

3) Considere $\lambda < 0$. Novamente de (2.18), trocando y por $\frac{y}{\lambda}$, vem por (2.19) que

$$-p\left(-\frac{y}{\lambda} - \frac{\lambda}{\lambda}x_0\right) - f\left(\frac{y}{\lambda}\right) \leq c_0.$$

Daí,

$$\frac{1}{\lambda} p(y + \lambda x_0) - \frac{1}{\lambda} f(y) \leq c_0.$$

Multiplicando ambos os lados da desigualdade por $\lambda < 0$, obtemos

$$\begin{aligned} (\lambda) \frac{1}{\lambda} p(y + \lambda x_0) - \lambda \frac{1}{\lambda} f(y) &\geq \lambda c_0, \text{ onde} \\ p(y + \lambda x_0) - f(y) &\geq \lambda c_0. \end{aligned}$$

Da última desigualdade, obtemos

$$p(x) \geq f(y) + \lambda c_0.$$

De (2.19), segue que

$$p(x) \geq F(x),$$

e o lema fica demonstrado. ■

Teorema 2.13. (Hahn Banach analítico) Sejam X um espaço vetorial real e p um funcional sublinear em X . Além disso, seja f um funcional linear definido em um subespaço Z de X que satisfaz:

$$f(x) \leq p(x), \text{ para todo } x \in Z.$$

Então, f tem uma extensão linear \tilde{f} de Z para X satisfazendo:

$$\tilde{f}(x) \leq p(x), \text{ para todo } x \in X.$$

Isto é, \tilde{f} é um funcional linear em X , que satisfaz $\tilde{f}(x) \leq p(x)$ em X e $\tilde{f}(x) = f(x)$, para todo $x \in Z$.

Demonstração:

Seja,

$$S = \{\tilde{f} : D_{\tilde{f}} \subset X \longrightarrow \mathbb{R}; \ D_{\tilde{f}} \supset D_f, \ \tilde{f}|_{D_f} = f, \ \tilde{f}(x) \leq p(x) \ \forall x \in D_{\tilde{f}}\}.$$

A seguir é introduzida uma ordem parcial em S da seguinte maneira: dados \tilde{f}_1 e $\tilde{f}_2 \in S$,

$$\tilde{f}_1 \prec \tilde{f}_2 \quad \Leftrightarrow \quad D_{\tilde{f}_2} \supset D_{\tilde{f}_1} \quad \text{e} \quad \tilde{f}_2|_{D_{\tilde{f}_1}} = \tilde{f}_1.$$

A relação binária \prec é uma ordem. De fato, dados $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \tilde{f}_3 \in S$, temos:

i) $\tilde{f}_1 \prec \tilde{f}_1$, pois $D_{\tilde{f}_1} \supset D_{\tilde{f}_1}$ e $\tilde{f}_1|_{D_{\tilde{f}_1}} = \tilde{f}_1$ (reflexiva).

ii) Se $\tilde{f}_1 \prec \tilde{f}_2$, e $\tilde{f}_2 \prec \tilde{f}_3$, segue que

$$D_{\tilde{f}_3} \supset D_{\tilde{f}_2} \supset D_{\tilde{f}_1} \quad \text{e} \quad \tilde{f}_3|_{D_{\tilde{f}_1}} = \tilde{f}_1 \quad \text{e}$$

$$D_{\tilde{f}_3} \supset D_{\tilde{f}_2} \quad \text{e} \quad \tilde{f}_3|_{D_{\tilde{f}_2}} = \tilde{f}_2.$$

Então,

$$\begin{aligned} D_{\tilde{f}_3} \supset D_{\tilde{f}_2} \supset D_{\tilde{f}_1} \\ D_{\tilde{f}_3} \supset D_{\tilde{f}_1} \quad \text{e} \quad \tilde{f}_3|_{D_{\tilde{f}_1} \subset D_{\tilde{f}_2}} = \tilde{f}_2|_{D_{\tilde{f}_1}} = \tilde{f}_1 \end{aligned}$$

isto é, $\tilde{f}_1 \prec \tilde{f}_3$ (transitiva).

iii) Se $\tilde{f}_1 \prec \tilde{f}_2$, e $\tilde{f}_2 \prec \tilde{f}_1$, temos

$$D_{\tilde{f}_2} \supset D_{\tilde{f}_1} \quad \text{e} \quad \tilde{f}_2|_{D_{\tilde{f}_1}} = \tilde{f}_1 \quad \text{e}$$

$$D_{\tilde{f}_1} \supset D_{\tilde{f}_2} \quad \text{e} \quad \tilde{f}_1|_{D_{\tilde{f}_2}} = \tilde{f}_2.$$

Logo, $D_{\tilde{f}_1} = D_{\tilde{f}_2}$ e $\tilde{f}_1|_{D_{\tilde{f}_2}} = D_{\tilde{f}_1} = \tilde{f}_2$, então $\tilde{f}_1 \equiv \tilde{f}_2$ (anti-simétrica).

Assim, S é parcialmente ordenado por \prec .

A seguir será demonstrado que S é indutivamente ordenado, ou seja, todo subconjunto totalmente ordenado de S possui um limitante superior em S .

Seja $H = \{\tilde{f}_\beta\}$, onde β é um subconjunto totalmente ordenado de S e demonstremos a existência de um limitante superior para H , o qual denotaremos por \tilde{f} .

Seja \tilde{f} cujo domínio é dado por $D_{\tilde{f}} = \bigcup_{\tilde{f}_\beta \in H} D_{\tilde{f}_\beta}$, onde $D_{\tilde{f}_\beta}$ é o domínio de $\tilde{f}_\beta \in H$. Se

$$x \in \bigcup_{\tilde{f}_\beta \in H} D_{\tilde{f}_\beta},$$

existe um β tal que

$$x \in D_{\tilde{f}_\beta}.$$

Definimos então \tilde{f} por:

$$\tilde{f}(x) = \tilde{f}_\beta(x).$$

Afirmamos que \tilde{f} está bem definida. Com efeito, se

$$x \in D_{\tilde{f}_{\beta_1}} \quad \text{e} \quad x \in D_{\tilde{f}_{\beta_2}},$$

segue que

$$\tilde{f}(x) = \tilde{f}_{\beta_1}(x) \quad \text{e} \quad \tilde{f}(x) = \tilde{f}_{\beta_2}(x).$$

Sendo H totalmente ordenado segue que $\tilde{f}_{\beta_1} \prec \tilde{f}_{\beta_2}$ ou $\tilde{f}_{\beta_2} \prec \tilde{f}_{\beta_1}$, ou seja, \tilde{f}_{β_1} estende \tilde{f}_{β_2} ou vice-versa. Em ambos os casos, temos

$$\tilde{f}_{\beta_1}(x) = \tilde{f}_{\beta_2}(x)$$

e então \tilde{f} está bem definida.

$D_{\tilde{f}}$ é um subespaço vetorial de X . De fato:

i) Como $f \in S$, $D_f = M \subset D_{\tilde{f}_\beta} \subset D_{\tilde{f}}$, logo $D_{\tilde{f}} \neq \emptyset$.

ii) Dados um escalar λ e $x \in D_{\tilde{f}}$, existe algum β tal que $x \in D_{\tilde{f}_\beta}$, e como $D_{\tilde{f}_\beta}$ é subespaço vetorial, $\lambda x \in D_{\tilde{f}_\beta} \subset D_{\tilde{f}}$.

iii) Dados $x, y \in D_{\tilde{f}} = \bigcup_{\beta} D_{\tilde{f}_\beta}$, existem β_1, β_2 tais que

$$x \in D_{\tilde{f}_{\beta_1}} \quad \text{e} \quad y \in D_{\tilde{f}_{\beta_2}}$$

e, sendo H totalmente ordenado segue que

$$\tilde{f}_{\beta_1} \prec \tilde{f}_{\beta_2} \quad \text{ou} \quad \tilde{f}_{\beta_2} \prec \tilde{f}_{\beta_1}, \quad \text{então} \quad D_{\tilde{f}_{\beta_1}} \subset D_{\tilde{f}_{\beta_2}} \quad \text{ou} \quad D_{\tilde{f}_{\beta_2}} \subset D_{\tilde{f}_{\beta_1}}.$$

Suponha, sem perda de generalidade, que $D_{\tilde{f}_{\beta_1}} \subset D_{\tilde{f}_{\beta_2}}$, logo

$$x, y \in D_{\tilde{f}_{\beta_2}}$$

e, como $D_{\tilde{f}_{\beta_2}}$ é subespaço de X , segue que

$$x + y \in D_{\tilde{f}_{\beta_2}} \subset D_{\tilde{f}}.$$

Assim, o domínio de \tilde{f} é um subespaço de X .

Além disso, \tilde{f} é uma aplicação linear. De fato:

i) Dados um escalar λ e $x \in D_{\tilde{f}}$, existe β tal que $x \in D_{\tilde{f}_\beta}$, logo $\lambda x \in D_{\tilde{f}_\beta}$ e como \tilde{f}_β é um funcional linear, segue que

$$\tilde{f}(\lambda x) = \tilde{f}_\beta(\lambda x) = \lambda \tilde{f}_\beta(x) = \lambda \tilde{f}(x).$$

ii) Dados $x, y \in D_{\tilde{f}}$, existem β_1, β_2 tais que $x \in D_{\tilde{f}_{\beta_1}}$ e $y \in D_{\tilde{f}_{\beta_2}}$. Sendo H totalmente ordenado, $\tilde{f}_{\beta_1} \prec \tilde{f}_{\beta_2}$ ou $\tilde{f}_{\beta_2} \prec \tilde{f}_{\beta_1}$, ou seja, \tilde{f}_{β_1} estende \tilde{f}_{β_2} ou vice-versa, logo $D_{\tilde{f}_{\beta_1}} \subset D_{\tilde{f}_{\beta_2}}$ ou $D_{\tilde{f}_{\beta_2}} \subset D_{\tilde{f}_{\beta_1}}$.

Suponhamos que $D_{\tilde{f}_{\beta_1}} \subset D_{\tilde{f}_{\beta_2}}$, então

$$\tilde{f}(x + y) = \tilde{f}_{\beta_2}(x + y) = \tilde{f}_{\beta_2}(x) + \tilde{f}_{\beta_2}(y) = \tilde{f}(x) + \tilde{f}(y).$$

Assim, \tilde{f} é uma aplicação linear.

Além disso, dado $x \in D_{\tilde{f}}$, existe β tal que $x \in D_{\tilde{f}_\beta}$, então

$$\tilde{f}(x) = \tilde{f}_\beta(x) \leq p(x).$$

Portanto, dado $\tilde{f}_{\beta_0} \in H$ tem-se $D_{\tilde{f}} = \bigcup_{\beta} D_{\tilde{f}_\beta} \supset D_{\tilde{f}_{\beta_0}}$ e, por definição, $\tilde{f}|_{D_{\tilde{f}_{\beta_0}}} = \tilde{f}_{\beta_0}$, assim

$$\tilde{f}_{\beta_0} \prec \tilde{f}.$$

Então \tilde{f} é um limitante superior para H em S , logo S é indutivamente ordenado. Do Lema de Zorn, segue que existe $F \in S$ tal que F é um elemento maximal para S . Como $F \in S$, F é um funcional linear que estende f com a propriedade de que

$$F(x) \leq p(x), \quad \text{para todo } x \in D_F.$$

■

Teorema 2.14. (Hahn Banach Generalizado) Sejam X um espaço vetorial real ou complexo e p um funcional sublinear em X , tal que para todo $x, y \in X$,

$$p(x + y) \leq p(x) + p(y)$$

e para todo escalar α

$$p(\alpha x) = |\alpha| p(x).$$

Além disso, seja f um funcional linear que é definido num subespaço Z de X e satisfaz,

$$|f(x)| \leq p(x), \quad \text{para todo } x \in Z.$$

Então f tem uma extensão linear \tilde{f} de Z para X satisfazendo:

$$|\tilde{f}(x)| \leq p(x), \quad \text{para todo } x \in X.$$

Teorema 2.15. (Hahn Banach em espaços normados) Seja f um funcional linear limitado definido num subespaço Z de um espaço normado X . Então, existe um funcional linear limitado \tilde{f} em X que é extensão de f a todo X com a mesma norma

$$\|\tilde{f}\|_X = \|f\|_Z,$$

onde

$$\|\tilde{f}\|_X = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} |\tilde{f}(x)|, \quad \|f\|_Z = \sup_{\substack{x \in Z \\ \|x\|=1}} |f(x)|$$

e $\|f\|_Z = 0$ no caso trivial $Z = \{0\}$.

Demonstração:

Se $Z = \{0\}$, então $f = 0$. De fato, sendo f linear, temos

$$f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0) \Rightarrow f(0) = 0.$$

Considere $\tilde{f}: X \rightarrow K$ dada por $\tilde{f}(x) = 0$, para todo $x \in X$. Então, $\tilde{f}|_Z = 0$ e $\|\tilde{f}\| = \|f\| = 0$.

Portanto, $\|\tilde{f}\|_X = \|f\|_Z$.

Seja $Z \neq \{0\}$. Para utilizarmos o Teorema de Hahn Banach Generalizado, precisamos definir o funcional sublinear p . Note que para todo $x \in Z$, temos

$$|f(x)| \leq \|f\|_Z \|x\|,$$

uma vez que f é um funcional linear limitado.

Se tomarmos $p(x) = \| f \|_Z \| x \|$, para todo $x \in \mathbb{Z}$, então p será um funcional sublinear, e ainda teremos

$$| f(x) | \leq p(x).$$

Mas podemos definir p em todo X e, neste conjunto, p é sublinear, pois pela desigualdade triangular

$$\begin{aligned} p(x+y) &= \| f \|_Z \| x+y \| \leq \| f \|_Z (\| x \| + \| y \|) = \\ &= \| f \|_Z \| x \| + \| f \|_Z \| y \| = p(x) + p(y) \end{aligned}$$

e

$$p(\alpha x) = \| f \|_Z \| \alpha x \| = \| f \|_Z |\alpha| \| x \| = |\alpha| p(x).$$

Então, para quaisquer $x, y \in X$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, pelo Teorema de Hahn Banach Generalizado, existe um funcional linear \tilde{f} em X que é uma extensão de f e satisfaz

$$| \tilde{f}(x) | \leq p(x) = \| f \|_Z \| x \|.$$

O que implica

$$\| \tilde{f} \|_X = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} | \tilde{f}(x) | \leq \| f \|_Z.$$

Como numa extensão a norma nunca diminui, então temos também $\| \tilde{f} \|_X \geq \| f \|_Z$.

Portanto,

$$\| \tilde{f} \|_X = \| f \|_Z.$$

■

Teorema 2.16. Sejam X um espaço normado e $x_0 \neq 0$ um elemento de X . Então existe um funcional linear limitado \tilde{f} definido em X tal que

$$\| \tilde{f} \| = 1 \quad e \quad \tilde{f}(x_0) = \| x_0 \|.$$

Demonstração:

Consideremos o subespaço Z de X gerado por x_0 , isto é, se $x \in Z$, então existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tal que $x = \alpha x_0$. Definimos um funcional linear $f : Z \rightarrow \mathbb{R}$ pondo

$$f : Z \rightarrow \mathbb{K}, \quad x \mapsto f(x) = f(\alpha x_0) := \alpha f(x_0) = \alpha \| x_0 \|. \quad (2.20)$$

Afirmamos que $\| f \| = 1$.

$f(x) = f(\alpha x) = \alpha f(x_0) = \alpha \| x_0 \|$, para todo $\alpha \in \mathbb{K}$.

De fato, por definição de operador linear limitado, $\|f\| = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} |f(x)|$ e, por (2.20), temos

$$|f(x)| = |f(\alpha x_0)| = |\alpha f(x_0)| = |\alpha| |f(x_0)| = |\alpha| \|x_0\| = \|\alpha x_0\| = \|x\|,$$

para todo $x \in Z$.

Então

$$\|f\| = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|=1}} |f(x)| = \sup_{\substack{x \in Z \\ \|x\|=1}} \|x\| = 1.$$

Pelo Teorema de Hahn Banach analítico, existe uma extensão \tilde{f} de f em X tal que

$$\|\tilde{f}\|_X = \|f\|_Z = 1. \quad (2.21)$$

Da definição de extensão, resulta que $\tilde{f}|_{D_f} = f$. Logo,

$$\tilde{f}(x_0) = f(x_0) = \|x_0\|. \quad (2.22)$$

De (2.21) e (2.22) fica provado o teorema. ■

Corolário 2.1. Para todo x num espaço normado X temos

$$\|x\| = \sup_{\substack{f \in X^* \\ \|f\| \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|f\|}.$$

Se x_0 for tal que $f(x_0) = 0$ para todo $f \in X^*$, então $x_0 = 0$.

Demonstração:

Se $f \in X^*$, então $|f(x)| \leq \|f\| \|x\|$, para todo $x \in X$.

Portanto, $\|f\| \neq 0 \Rightarrow \frac{|f(x)|}{\|f\|} \leq \|x\|$, para todo $x \in X$.

Para x fixo e $\|f\| \neq 0$, temos

$$\sup_{f \in X^*} \frac{|f(x)|}{\|f\|} \leq \|x\|. \quad (2.23)$$

Para esse $x \in X$ fixado, do Teorema 2.16 segue que existe $g \in X^*$ tal que $g(x) = \|x\|$ e $\|g\| = 1$. Portanto,

$$\sup_{f \in X^*} \frac{|f(x)|}{\|f\|} \geq \frac{|g(x)|}{\|g\|} = \|x\|. \quad (2.24)$$

Portanto, de (2.23) e (2.24), segue que

$$\|x\| = \sup_{\substack{f \in X^* \\ \|f\| \neq 0}} \frac{|f(x)|}{\|f\|}.$$

Se x_0 é tal que $f(x_0) = 0$ para todo $f \in X^*$, então $x_0 = 0$. Com efeito,

$$\|x_0\| = \sup_{\substack{f \in X^* \\ \|f\| \neq 0}} \frac{|f(x_0)|}{\|f\|} = \sup_{\substack{f \in X^* \\ \|f\| \neq 0}} \frac{|0|}{\|f\|} = 0.$$

Logo, $x_0 = 0$.

■

3 Cálculo em Espaços Normados

3.1 Séries de Operadores Lineares Limitados

Definição 3.1. A convergência de uma série

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n, \quad A_n \in \mathcal{L}(X), \quad (3.1)$$

é definida exatamente como no caso numérico. Dizemos que (3.1) converge para $A \in \mathcal{L}(X)$ se a sucessão (S_p) , $p = 1, \dots$, das somas parciais

$$S_p = \sum_{n=1}^p A_n$$

for convergente para A . Nesse caso a série (3.1) é dita convergente e A é a soma de (3.1).

Definição 3.2. A série (3.1) é chamada de absolutamente convergente quando a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|A_n\| \quad (3.2)$$

for convergente.

Se $m > n$ temos

$$\|S_m - S_n\| = \|A_{n+1} + \dots + A_m\| \leq \|A_{n+1}\| + \dots + \|A_m\|,$$

logo a sequência (S_n) é de Cauchy, e portanto, toda série absolutamente convergente é convergente e

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} A_n \right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|A_n\|.$$

A série de Neumann

$$I + A + A^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} A^n,$$

onde I é operador identidade de X também denotado por $A^0 = I$, é absolutamente convergente se $\|A\| < 1$. Designando sua soma por S temos, multiplicando termo a termo por A ,

$$AS = SA = S - I.$$

Portanto,

$$(I - A)S = S(I - A) = I,$$

isto é,

$$S = (I - A)^{-1}.$$

Logo, se $\|A\| < 1$ o operador $I - A$ é inversível e

$$I + A + A^2 + \dots = (I - A)^{-1},$$

como no caso numérico.

Teorema 3.1. Seja $A \in \mathcal{L}(X)$, onde X é um espaço de Banach. Se $\|A\| < 1$, então $(I - A)^{-1}$ existe e é um operador linear limitado.

Demonstração:

Seja $S_n = \sum_{k=0}^n A^k$. Para $p \leq q$, como $\|A\| < 1$ e $\|A^n\| \leq \|A\|^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \|S_q - S_p\| &= \left\| \sum_{k=p+1}^q A^k \right\| \leq \sum_{k=p+1}^q \|A\|^k \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^{q-p} \|A\|^i \|A\|^p \leq \sum_{i=0}^{\infty} \|A\|^i \|A\|^p = \\ &= \left(\frac{1}{1 - \|A\|} \right) \|A\|^p. \end{aligned}$$

Assim, $\|S_q - S_p\| \rightarrow 0$ quando $p \rightarrow \infty$, implicando que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy no espaço de Banach $\mathcal{L}(X)$.

Seja $S \in \mathcal{L}(X)$ o limite de $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Note que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} A^k = I + \sum_{k=1}^{n+1} A^k = \\ &= I + A \sum_{k=0}^n A^k = I + AS_n = I + S_n A. \end{aligned}$$

Fazendo $n \rightarrow \infty$ na igualdade acima, concluímos que

$$S = I + SA = I + AS.$$

Assim,

$$I = S(I - A) = (I - A)S,$$

o que mostra que $(I - A)$ é inversível e $\sum_{n=0}^{\infty} A^n = S(I - A)^{-1}$.

■

3.2 A Função Exponencial

Definição 3.3. Se A for um número real qualquer, a função exponencial $e^{tA} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ poderá ser definida por

$$e^{tA} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{tA}{n} \right)^n,$$

por

$$e^{tA} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{tA}{n} \right)^{-n},$$

ou ainda, por

$$e^{tA} = 1 + \frac{tA}{1!} + \frac{t^2 A^2}{2!} + \dots + \frac{t^n A^n}{n!} + \dots$$

e seu campo de definição é todo o eixo real.

Agora se $A \in \mathcal{L}(X)$ então para cada $t > 0$ fixo, a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!},$$

é convergente em $\mathcal{L}(X)$, pois é absolutamente convergente. Isto é fácil de ver já que,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\| \frac{(tA)^n}{n!} \right\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|t|^n \|A\|^n}{n!} = e^{t\|A\|}.$$

Assim escrevemos

$$e^{tA} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} \in \mathcal{L}(X).$$

Notemos que $e^{tA} \in \mathcal{L}(X)$ e $\|e^{tA}\| \leq e^{t\|A\|}$.

3.3 Derivação das Funções Vetoriais

Definição 3.4. Seja $f : (a, b) \rightarrow X$ uma função definida no intervalo (a, b) e com valores em um espaço de Banach X (real ou complexo). Diz-se que f é diferenciável no ponto $t_0 \in (a, b)$ se existir, em X , o limite

$$f'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0},$$

dito derivada de f no ponto t_0 .

Diz-se que f é diferenciável em $\Omega \subset (a, b)$ se f for diferenciável em todo ponto de Ω .

Definição 3.5. Seja $f : (a, b) \rightarrow X$ uma função definida no intervalo (a, b) e com valores em um espaço de Banach X (real ou complexo). Diz-se que f é diferenciável à direita no ponto $t_0 \in (a, b)$ se existir, em X , o limite

$$f'_+(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0^+} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h},$$

dito derivada à direita de f no ponto t_0 .

Propriedades:

i) Se f for diferenciável no ponto t_0 , então

$$f(t) - f(t_0) = (t - t_0)f'(t_0) + \alpha,$$

onde $\alpha = \alpha(t, t_0)$ satisfaz a condição

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\alpha(t, t_0)}{t - t_0} = 0.$$

Em particular, se f for diferenciável no ponto t_0 , então f será contínua nesse ponto.

ii) Se f for uma função constante, isto é, se $f(t) = x_0$, para todo $t \in (a, b)$, onde x_0 é um ponto de X , então f é diferenciável em todo ponto de (a, b) e

$$f'(t) = 0 \quad \text{para todo } t \in (a, b).$$

iii) Se f e g forem diferenciáveis no ponto t_0 , então $f + g$ é diferenciável em t_0 e

$$(f + g)'(t_0) = f'(t_0) + g'(t_0).$$

iv) Se γ for uma função numérica definida em (a, b) e diferenciável no ponto $t_0 \in (a, b)$ e $f : (a, b) \rightarrow X$ for diferenciável em t_0 , então γf será diferenciável em t_0 e

$$(\gamma f)'(t_0) = \gamma'(t_0)f(t_0) + \gamma(t_0)f'(t_0).$$

Em particular, se γ for uma constante, $(\gamma f)'(t_0) = \gamma f'(t_0)$.

Teorema 3.2. Se $f : (a, b) \rightarrow X$ for contínua em (a, b) , derivável à direita em (a, b) e $f'_+ = 0$ em todo ponto de (a, b) , então f será constante em (a, b) .

Demonstração:

Seja $c \in (a, b)$ e $\varepsilon > 0$. Como $f'_+(c) = 0$, segue que para $t > c$ suficientemente próximo de c , tem-se

$$\|f(t) - f(c)\| \leq \varepsilon(t - c). \quad (3.3)$$

Seja $[c, t_0)$ o máximo subintervalo de $[c, b)$ onde (3.3) é válida. Deve-se ter $t_0 = b$. Com efeito, suponha-se que $t_0 < b$. Como $f'_+(t_0) = 0$ tem-se

$$\|f(t) - f(t_0)\| \leq \varepsilon(t - t_0), \quad (3.4)$$

para $t > t_0$ e suficientemente próximo de t_0 . Seja $t > t_0$ um ponto onde (3.4) é válida. De (3.3) e (3.4) vem,

$$\|f(t) - f(c)\| \leq \|f(t) - f(t_0)\| + \|f(t_0) - f(c)\| \leq \varepsilon(t - t_0) + \varepsilon(t_0 - c) \leq \varepsilon(t - c),$$

isto é, (3.3) é válida para todo $t > t_0$ e suficientemente próximo de t_0 , o que contraria a definição de t_0 . Logo, $t_0 = b$ e temos $\|f(t) - f(c)\| \leq \varepsilon(t - c)$ para todo $t \in [c, b)$. Pela arbitrariedade de ε , $f(t) = f(c)$ para todo $t \in [c, b)$. Como c é um ponto arbitrário de (a, b) , f é constante em (a, b) . ■

Definição 3.6. Dizemos que a função $f : [a, b] \rightarrow X$ é continuamente diferenciável (ou de Classe C^1) se f for diferenciável em $[a, b]$ e $f' : [a, b] \rightarrow X$ for uma função contínua.

Lema 3.1. (Lema de Dini) Se $f : (a, b) \rightarrow X$ for contínua em (a, b) e admitir uma derivada à direita f'_+ , contínua em (a, b) , então f será continuamente diferenciável em (a, b) .

Demonstração:

A função f'_+ é integrável em (a, t) , para todo $t \in (a, b)$, considerando

$$g(t) = \int_a^t f'_+(\tau) d\tau,$$

vemos que g é diferenciável em (a, b) e $g' = f'_+$ em (a, b) . Mas, então, $g'_+ = f'_+$, isto é, $(f - g)'_+ = 0$ em todo ponto de (a, b) e, como f e g são contínuas, $f - g$ é uma constante, pelo Teorema 3.2. Logo, f é diferenciável em (a, b) e sendo $f' = f'_+$ e, por hipótese, f'_+ contínua em (a, b) segue que f é continuamente diferenciável em (a, b) . ■

Teorema 3.3. Se f e g forem duas funções definidas em (a, b) , com valores em um espaço de Banach e diferenciáveis em um ponto $t_0 \in (a, b)$, então fg será diferenciável no ponto t_0 e

$$(fg)'(t_0) = f'(t_0)g(t_0) + f(t_0)g'(t_0).$$

Proposição 3.1. Seja $u : (a, b) \rightarrow X$, onde X é um espaço de Banach. Se u' existir e for uniformemente contínua em (a, b) , então

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(t+h) - u(t)}{h} = u'(t)$$

uniformemente em (a, b) .

Demonstração:

Como u' é uniformemente contínua em (a, b) , então dado $\varepsilon > 0$, existe $h_0 > 0$ tal que

$$|u'(t+h) - u'(t)| < \varepsilon, \quad 0 < h < h_0, \quad \text{para todo } t \in (a, b), \text{ com } t+h \in (a, b).$$

Logo,

$$\left| \frac{u(t+h) - u(t)}{h} - u'(t) \right| = \left| \frac{1}{h} \int_0^h [u'(t+h) - u'(t)] dh \right| \leq \frac{1}{h} \int_0^h |u'(t+h) - u'(t)| dh < \varepsilon,$$

$0 < h < h_0$ e para todo $t \in (a, b)$, $t+h \in (a, b)$, isto é, $\frac{u(t+h)-u(t)}{h}$ converge uniformemente para $u'(t)$ em (a, b) . ■

3.4 Integração das Funções Vetoriais

Definição 3.7. Seja $f : (a, b) \rightarrow X$ uma função contínua, onde X é um espaço de Banach (real ou complexo). Dada uma partição π de $[a, b]$, isto é, $n+1$ números reais, t_0, \dots, t_n , satisfazendo a condição

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$$

e n números reais $\xi_i, i = 1, \dots, n, \xi_i \in (t_{i-1}, t_i)$, fica definida a soma de Riemann de f por:

$$\sigma_\pi(f) = \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) f(\xi_i).$$

Evidentemente $\sigma_\pi(f) \in X$.

Seja

$$|\pi| = \max_{1 \leq i \leq n} \{t_i - t_{i-1}\}.$$

Com os mesmos argumentos do caso numérico, demonstra-se que $\sigma_\pi(f)$ tem um limite $x \in X$, quando $|\pi| \rightarrow 0$. De modo mais preciso: dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\|\sigma_\pi(f) - x\| < \varepsilon,$$

para toda partição π tal que $|\pi| < \delta$.

Como no caso numérico, dizemos que x é a integral de f em $[a, b]$ e escrevemos

$$x = \lim_{|\pi| \rightarrow 0} \sigma_\pi(f) = \int_a^b f(t) dt.$$

Propriedades:

i) Se K for uma constante e f integrável em $[a, b]$, temos:

$$\int_a^b K f(t) dt = K \int_a^b f(t) dt.$$

ii) Se f e g forem funções contínuas e integráveis em $[a, b]$, temos:

$$\int_a^b (f + g)(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt.$$

iii) Se $a \leq c \leq b$, então

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$

iv)

$$\left\| \int_a^b f(t)dt \right\| \leq \int_a^b \| f(t) \| dt.$$

v)

$$\left\| \int_a^b f(t)dt \right\| \leq \max_{a \leq t \leq b} \| f(t) \| (b - a).$$

para f contínua em $[a, b]$.

A demonstração é análoga a do caso real e será omitida.

Definição 3.8. A combinação linear $\alpha v_1 + \dots + \alpha v_k$ chama-se combinação convexa de $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ quando $\alpha_1 + \dots + \alpha_k = 1$ e $\alpha_i \geq 0$ para $i = 1, \dots, k$.

Teorema 3.4. (Teorema da Média) Temos

$$\int_a^b f(t)dt = (b - a)\tilde{x},$$

onde $\tilde{x} \in \overline{\text{conv}f(a, b)}$, isto é, \tilde{x} pertence ao fecho do conjunto das combinações convexas dos elementos do conjunto de valores de f em (a, b) .

Demonstração:

Com efeito,

$$\frac{1}{b - a} \int_a^b f(t)dt = \frac{1}{b - a} \lim_{|\pi| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})f(\xi_i) = \lim_{|\pi| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \frac{t_i - t_{i-1}}{b - a} f(\xi_i).$$

Mas,

$$\frac{t_i - t_{i-1}}{b - a} > 0 \quad e \quad \sum_{i=1}^n \frac{t_i - t_{i-1}}{b - a} = 1,$$

onde

$$\frac{1}{b - a} \int_a^b f(t)dt \in \overline{\text{conv}f(a, b)}.$$

■

Corolário 3.1. Para todo $t \in [a, b]$ temos,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f(\tau)d\tau = f(t). \tag{3.5}$$

Demonstração:

Com efeito, dado $\varepsilon > 0$ tem-se $\|f(\tau) - f(t)\| \leq \varepsilon$ para $|\tau - t| < \delta$, para δ suficientemente pequeno, uma vez que, por hipótese, f é contínua e portanto uniformemente contínua.

Logo, para h suficientemente pequeno,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f(\tau) d\tau - f(t) \right\| &= \left\| \frac{1}{h} \int_t^{t+h} (f(\tau) - f(t)) d\tau \right\| \leq \\ &\leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \|f(\tau) - f(t)\| d\tau \leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \varepsilon d\tau = \varepsilon. \end{aligned}$$

■

Teorema 3.5. (Teorema Fundamental do Cálculo) Se F for diferenciável em $[a, b]$ e $F'(t) = f(t)$, $t \in [a, b]$, então

$$\int_a^b f(\tau) d\tau = F(b) - F(a).$$

Teorema 3.6. Sejam A um operador linear fechado de X , isto é, um operador linear fechado com domínio e imagem contidos em X e f uma função contínua em $[a, b]$, com valores em $D(A)$ e tal que Af é contínua em $[a, b]$. Então

$$\int_a^b f(t) dt \in D(A)$$

e

$$A \int_a^b f(t) dt = \int_a^b Af(t) dt.$$

Demonstração:

Consideremos a partição $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ de $[a, b]$, onde $t_i = a + i(b-a)/n$ e seja $\xi_i \in (t_{i-1}, t_i)$. Então,

$$x_n = \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) f(\xi_i) \in D(A), \quad n = 1, 2, \dots$$

pois $f(\xi_i) \in D(A)$, $i = 1, \dots, n$ e $D(A)$ é um subespaço de X . Como, por hipótese, f e Af são contínuas, temos

$$x_n \longrightarrow \int_a^b f(t) dt, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty$$

e

$$Ax_n = \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) Af(\xi_i) \longrightarrow \int_a^b Af(t) dt, \quad \text{quando } n \rightarrow \infty.$$

Logo,

$$\int_a^b f(t) dt \in D(A) \quad \text{e} \quad A \int_a^b f(t) dt = \int_a^b Af(t) dt$$

pois A é fechado, por hipótese.

■

3.5 Integrais Impróprias

A integral imprópria de uma função contínua $f : [a, \infty) \rightarrow X$ é definida exatamente como no caso numérico:

$$\int_a^\infty f(t) dt = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_a^\rho f(t) dt,$$

quando esse limite existe. Nesse caso dizemos que a integral

$$\int_a^\infty f(t) dt$$

é convergente. Dizemos que é absolutamente convergente se existir o limite

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_a^\rho \|f(t)\| dt.$$

É imediato que toda integral absolutamente convergente é convergente.

Permanece válido para as integrais impróprias o seguinte teste.

Teste de Weierstrass. Seja $f : [a, \infty) \times \Lambda \rightarrow X$, Λ um subconjunto aberto em \mathbb{C} , contínua em $t \in [a, \infty)$, para cada $\lambda \in \Lambda$ e $M : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e positiva em $t \in [a, \infty)$. Se $\|f(t, \lambda)\| \leq M(t)$ para todo $(t, \lambda) \in [a, \infty) \times \Lambda$ e

$$\int_a^\infty M(t) dt$$

converge, então

$$\int_a^\infty f(t, \lambda) dt$$

converge absolutamente para cada λ pertencente ao conjunto Λ e a convergência é uniforme nesse conjunto.

Teorema 3.7. (Teorema de Weierstrass) Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a \leq b$ e seja f uma função contínua de $[a, b]$ em \mathbb{R} . Então, existem números $x_m, x_n \in [a, b]$ tais que para todo $x \in [a, b]$, $f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_n)$. Em particular f é limitada.

Este teorema afirma que qualquer função contínua de um intervalo $[a, b]$ em \mathbb{R} é limitada e que, além disso, tem um máximo e um mínimo.

4 Semigrupos de Operadores Lineares

Uma das mais importantes aplicações de semigrupos de operadores lineares ocorre na análise de problemas de Equações Diferenciais Parciais.

Esta teoria teve seu grande avanço com a demonstração do Teorema de Hille-Yosida, que é o principal resultado deste capítulo.

Existem diversas classes de semigrupos, porém abordaremos os semigrupos uniformemente contínuos e, principalmente, os semigrupos de classe C_0 .

4.1 Semigrupos uniformemente contínuos

Nesta seção estudaremos propriedades da função $E(t) = e^{tA}$ com $A \in \mathcal{L}(X)$, e a relação de $E(t) = e^{tA}$ com o conceito de semigrupos uniformemente contínuos.

Definição 4.1. Seja X um espaço de Banach. Uma família de operadores lineares limitados, $\{S(t) : t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(X)$, é um semigrupo de operadores lineares limitados de X em X se:

i) $S(0) = I$, onde I é o operador identidade de $\mathcal{L}(X)$.

ii) $S(t + s) = S(t)S(s)$ para quaisquer $t, s \in \mathbb{R}^+$.

Dizemos que o semigrupo S é uniformemente contínuo se

iii) $\lim_{t \rightarrow 0^+} \|S(t) - I\| = 0$. Neste caso dizemos que I é o limite uniforme de $S(t)$ quando $t \rightarrow 0^+$.

Como foi visto no capítulo 3, a função exponencial $E(t) = e^{tA}$, onde A é um número real e t é uma variável real, pode ser definida pela fórmula

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}. \quad (4.1)$$

Quando $A \in \mathbb{R}$ e $t \geq 0$, a exponencial $E(t) = e^{tA}$ é a única função $E : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ que tem as seguintes propriedades:

i) $E(0) = 1$;

ii) $E(t + s) = E(t)E(s)$;

iii) $\lim_{t \rightarrow 0^+} E(t) = 1$.

Ver [5].

Como vimos, a definição de exponencial pode ser estendida no caso em que $A : X \rightarrow X$ é um operador linear limitado de um espaço de Banach X e o seguinte Teorema caracteriza os semigrupos uniformemente contínuos como tais exponenciais.

Teorema 4.1. Uma função $E : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathcal{L}(X)$ satisfaz as condições

i) $E(0) = I$;

ii) $E(t+s) = E(t)E(s)$;

iii') $\|E(t) - I\| \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow 0^+$;

se, e somente se, $E(t) = e^{tA}$, onde $A \in \mathcal{L}(X)$ e e^{tA} é definida por (4.1).

Demonstração:

Seja $A \in \mathcal{L}(X)$ e consideramos

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}.$$

Como, para cada $t \geq 0$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}$$

converge na topologia uniforme de $\mathcal{L}(X)$, e^{tA} é uma aplicação de \mathbb{R}^+ em $\mathcal{L}(X)$. Trivialmente e^{tA} satisfaz i).

Pois, $e^{0A} = I$;

Tome $E(t) = e^{tA}$ e $E(s) = e^{sA}$, com $A \in \mathcal{L}(X)$.

$$\begin{aligned} E(t)E(s) &= e^{tA}e^{sA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(sA)^k}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{t^k A^k s^{n-k} A^{n-k}}{k! (n-k)!} \right) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{t^k s^{n-k}}{k!(n-k)!} \right) A^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} t^k s^{n-k} \right) \frac{A^n}{n!} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (t+s)^n \frac{A^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{((t+s)A)^n}{n!} = e^{(t+s)A} = E(t+s), \end{aligned}$$

resulta que e^{tA} satisfaz ii).

Além disso, de

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} = I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!},$$

segue que

$$\|e^{tA} - I\| = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} \right\| = \left\| tA \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(tA)^{n-1}}{n!} \right\| \leq \left\| tA \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(tA)^{n-1}}{(n-1)!} \right\| \leq$$

$$\leq \|tA\| \left\| \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(tA)^m}{m!} \right\| \leq t \|A\| \|e^{tA}\| \leq t \|A\| e^{t\|A\|}.$$

Assim,

$$\|e^{tA} - I\| \rightarrow 0,$$

quando $t \rightarrow 0^+$, isto é, e^{tA} satisfaz *iii'*).

Reciprocamente, vamos supor que $E : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathcal{L}(X)$ satisfaça *i*), *ii*) e *iii'*). Demonstraremos, em primeiro lugar, que $\|E(t)\|$ é uma função limitada em todo intervalo limitado. Dado $\varepsilon > 0$ existe por *iii'*) um $\delta > 0$ tal que

$$\|E(t) - I\| \leq \varepsilon, \text{ para todo } t, \text{ tal que } 0 \leq t \leq \delta,$$

e, como

$$\| \|E(t)\| - \|I\| \| \leq \|E(t) - I\|,$$

tem-se

$$\|E(t)\| \leq 1 + \varepsilon = M, \text{ para todo } t, \text{ tal que } 0 \leq t \leq \delta.$$

Além disso, para cada real $t \geq 0$, existe um inteiro não negativo n , tal que $t = n\delta + r$, onde $0 \leq r < \delta$. Por *ii*) temos, então,

$$\begin{aligned} \|E(t)\| &= \|E(n\delta + r)\| = \|E(\delta)^n E(r)\| \leq \|E(\delta)^n\| \cdot \|E(r)\| \leq M^{n+1} = \\ &= MM^n \leq MM^{\frac{t}{\delta}} = Me^{wt}, \end{aligned}$$

onde $w = \delta^{-1} \ln M > 0$. Portanto, se $t \in [0, T]$, então $\|E(t)\| \leq Me^{wt}$, isto é, $\|E(t)\|$ é limitada em $[0, T]$. Observemos a seguir que E é contínua. De fato, se $h > 0$,

$$\|E(t+h) - E(t)\| = \|E(t)(E(h) - I)\| \leq \|E(t)\| \cdot \|E(h) - I\| \rightarrow 0$$

quando $h \rightarrow 0$ e, se $0 < h \leq t$,

$$\|E(t-h) - E(t)\| = \|E(t-h)(I - E(h))\| \leq \|E(t-h)\| \cdot \|E(h) - I\| \rightarrow 0$$

quando $h \rightarrow 0$ porque $\|E(t-h)\|$ é, como foi mostrada, limitada em $[0, t]$. Da continuidade de E resulta sua integrabilidade no sentido de Riemann e

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h E(t) dt = E(0) = I,$$

se tomarmos $\varepsilon = 1$ e $h = \rho$ temos,

$$\left\| I - \frac{1}{\rho} \int_0^\rho E(t) dt \right\| < 1,$$

sempre que $\rho < \delta$.

Segue daí que podemos determinar um $\rho > 0$ tal que

$$\left\| I - \frac{1}{\rho} \int_0^\rho E(t) dt \right\| < 1.$$

Portanto, pelo Teorema 3.1, existe a inversa da expressão abaixo em $\mathcal{L}(X)$.

$$I - \left(I - \rho^{-1} \int_0^\rho E(t) dt \right) = \rho^{-1} \int_0^\rho E(t) dt.$$

Consequentemente,

$$\int_0^\rho E(t) dt$$

também é um operador inversível.

Além disso,

$$\begin{aligned} \frac{E(h) - I}{h} \int_0^\rho E(t) dt &= \frac{1}{h} \int_0^\rho E(t+h) dt - \frac{1}{h} \int_0^\rho E(t) dt = \\ &= \frac{1}{h} \int_h^{\rho+h} E(t) dt - \frac{1}{h} \int_0^\rho E(t) dt = \\ &= \frac{1}{h} \int_h^\rho E(t) dt + \frac{1}{h} \int_\rho^{\rho+h} E(t) dt - \frac{1}{h} \int_0^h E(t) dt - \frac{1}{h} \int_h^\rho E(t) dt = \\ &= \frac{1}{h} \int_\rho^{\rho+h} E(t) dt - \frac{1}{h} \int_0^h E(t) dt, \end{aligned}$$

onde

$$\frac{E(h) - I}{h} = \left(\frac{1}{h} \int_\rho^{\rho+h} E(t) dt - \frac{1}{h} \int_0^h E(t) dt \right) \left(\int_0^\rho E(t) dt \right)^{-1}.$$

Fazendo $h \rightarrow 0_+$ na igualdade acima concluímos que:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{E(h) - I}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\int_\rho^{\rho+h} E(t) dt - \int_0^h E(t) dt \right] \left(\int_0^\rho E(t) dt \right)^{-1} = \\ &= [E(\rho) - I] \left(\int_0^\rho E(t) dt \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Seja A o limite uniforme de $\frac{E(h)-I}{h}$ quando $h \rightarrow 0_+$. Como $E(t) \in \mathcal{L}(X)$, então $A \in \mathcal{L}(X)$ e $E(t)$ é derivável à direita no ponto 0,

$$\frac{d^+ E(0)}{dt} = A.$$

Ainda mais, por *ii*), para todo $h > 0$,

$$\frac{E(t+h) - E(t)}{h} = E(t) \frac{E(h) - I}{h}$$

como o segundo membro da igualdade converge para $E(t)A$, resulta que E é derivável à direita em todo $t \geq 0$,

$$\frac{d^+ E(t)}{dt} = E(t)A.$$

E,

$$\frac{E(t-h) - E(t)}{-h} = E(t-h) \frac{[I - E(h)]}{-h}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{E(t-h) - E(t)}{-h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{E(t-h) [I - E(h)]}{-h}$$

como o segundo membro da igualdade converge para $E(t)A$, resulta que E é derivável à esquerda em todo $t \geq 0$,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{E(t-h) - E(t)}{-h} = \frac{d^+ E(t)}{dt} = E(t)A.$$

$$\frac{d^+ E(t)}{dt} = AE(t) \text{ e } \frac{d^- E(t)}{dt} = \frac{d^+ E(t)}{dt}, \text{ para todo } t > 0.$$

Consideremos, por fim, a função

$$\phi(t) = E(t)e^{(-t)A}, \quad t \geq 0.$$

Temos

$$\frac{d\phi(t)}{dt} = \frac{dE(t)}{dt}e^{(-t)A} - E(t)Ae^{(-t)A} = E(t)Ae^{(-t)A} - E(t)Ae^{(-t)A} = 0.$$

Consequentemente ϕ é constante em \mathbb{R}^+ . Mas $\phi(0) = I = E(0)$. Logo,

$$E(t)e^{(-t)A} = I, \text{ para todo } t \geq 0,$$

onde $E(t) = e^{tA}$, como queríamos demonstrar. ■

Definição 4.2. O operador linear A definido por

$$D(A) = \left\{ x \in X; \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(h) - I}{h} x \text{ existe} \right\}$$

$$Ax = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(h) - I}{h} x = \frac{d^+ S(t)x}{dt} \Big|_{t=0}, \text{ para todo } x \in D(A),$$

é dito gerador infinitesimal do semigrupo $S(t)$.

No que segue vamos denotar por A_h o operador linear limitado $\frac{S(h) - I}{h}$, $h > 0$.

Corolário 4.1. Seja $\{S(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo uniformemente contínuo em X e A seu gerador infinitesimal. Então $D(A) = X$.

Demonstração:

Como convergência uniforme implica em convergência forte, de

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{S(h) - I}{h} = [S(\rho) - I] \left(\int_0^\rho S(t) dt \right)^{-1}.$$

Segue que para todo $x \in X$ existe

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(S(h) - I)x}{h} = \left[(S(\rho) - I) \left(\int_0^\rho S(t) dt \right)^{-1} \right] x.$$

Portanto, pela definição 4.2, $D(A) = X$. ■

A seguir enunciaremos um corolário que dá a condição necessária e suficiente para que um operador linear seja gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente contínuo.

Corolário 4.2. Um operador linear A é gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente contínuo $\{S(t) : t \geq 0\}$ se, e somente se, A é um operador linear limitado, ou seja, $A \in \mathcal{L}(X)$.

Demonstração:

Seja A um operador linear limitado em X . Do Teorema 4.1 temos que,

$$S(t) = e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}$$

define um semigrupo uniformemente contínuo.

Mostremos que A é o gerador infinitesimal deste semigrupo. De fato, notemos que $t \rightarrow 0^+$.

$$\left\| \frac{S(t) - I}{t} - A \right\| = \left\| \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} - I}{t} - A \right\| \leq \left\| tA^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{tA^{(n-2)}}{n!} \right\| \leq t \|A\|^2 e^{\|A\|t}.$$

Assim,

$$\left\| \frac{S(t) - I}{t} - A \right\| \leq \|A\| \|e^{At} - I\| \tag{4.2}$$

o que implica $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t) - I}{t} = A$.

Portanto, A é o gerador infinitesimal do semigrupo uniformemente contínuo $\{S(t) : t \geq 0\}$.

Reciprocamente, suponha que A é o gerador infinitesimal do semigrupo uniformemente contínuo $\{S(t) : t \geq 0\}$. Já que existe $B \in \mathcal{L}(X)$ tal que $S(t) = e^{Bt}$ temos por (4.2), que $\lim_{h \rightarrow 0} \left\| \frac{e^{Bh} - I}{h} - B \right\| = 0$.

Portanto, $Bx = Ax$ para todo $x \in D(A) = X$, pelo Corolário 4.1, isto é, $A = B \in \mathcal{L}(X)$. ■

Considerando a demonstração do Teorema 4.1, dado um semigrupo uniformemente contínuo $\{S(t) : t \geq 0\}$ e seu gerador infinitesimal A concluímos que,

$$\frac{d}{dt}S(t) = AS(t) = S(t)A \text{ para todo } t \geq 0.$$

Logo, se $A \in \mathcal{L}(X)$ é gerador infinitesimal do semigrupo uniformemente contínuo $\{S(t) : t \geq 0\}$, então a função $u(t) = S(t)x$ é solução do problema de Cauchy homogêneo.

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u(t) = Au(t), & t > 0 \\ u(0) = x \end{cases} \quad (4.3)$$

pois,

$$\frac{d}{dt}u(t) = \frac{d}{dt}S(t)x = AS(t)x = Au(t) \quad \text{e} \quad u(0) = S(0)x = Ix = x.$$

4.2 Semigrupos de Classe C_0

Nesta seção analisaremos os semigrupos de classe C_0 , também chamados semigrupos fortemente contínuos. Mostraremos que a teoria dos semigrupos de classe C_0 se aplica na solução do problema de Cauchy (4.3) quando o operador linear A é não limitado.

Definição 4.3. Uma família de operadores lineares limitados $\{S(t) : t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(X)$ é um semigrupo de classe C_0 em X se:

- i) $S(0) = I$, onde I é o operador identidade de $\mathcal{L}(X)$.
- ii) $S(t+s) = S(t)S(s)$, para todo $t, s \in \mathbb{R}^+$.
- iii) $\lim_{t \rightarrow 0^+} \|(S(t) - I)x\| = 0$, para todo $x \in X$. Neste caso dizemos que x é o limite forte de $S(t)x$ quando $t \rightarrow 0^+$.

Corolário 4.3. Todo semigrupo de classe C_0 é fortemente contínuo em \mathbb{R}^+ , isto é, se $t \in \mathbb{R}^+$ então

$$\lim_{s \rightarrow t} S(s)x = S(t)x, \quad \text{para todo } x \in X.$$

Demonstração:

Com efeito, seja $t \in \mathbb{R}^+$. De $h > 0$ vem,

$$\|S(t+h)x - S(t)x\| = \|S(t)[S(h) - I]x\| \leq \|S(t)\| \cdot \|(S(h) - I)x\| \rightarrow 0$$

quando $h \rightarrow 0$ e, de $0 < h < t$,

$$\|S(t-h)x - S(t)x\| = \|S(t-h)(I - S(h))x\| \leq \|S(t-h)\| \cdot \|(S(h) - I)x\| \rightarrow 0$$

quando $h \rightarrow 0^+$. Logo,

$$\lim_{s \rightarrow t} S(s)x = S(t)x, \quad \forall x \in X.$$

■

Observação 2. A definição 4.2 se estende de modo análogo aos semigrupos de classe C_0 .

Proposição 4.1. Se $\{S(t) : t \geq 0\}$ for um semigrupo de classe C_0 , então $\|S(t)\|$ será uma função limitada em todo intervalo limitado $[0, T]$.

Demonstração:

Com a continuidade forte do semigrupo em $t = 0$, mostremos que existem constantes $\delta > 0$ e $M \geq 1$ tais que

$$\|S(t)\| \leq M, \quad \text{para todo } t \in [0, \delta].$$

Com efeito, se isto não acontecesse existiria uma sucessão (t_n) , $t_n \rightarrow 0^+$, tal que $\|S(t_n)\| \geq n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Mas então, pelo Teorema da Limitação Uniforme, deve existir um $x \in X$ tal que $S(t_n)x \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$. Mas isto contradiz a continuidade forte de $S(t)$ em $t = 0$. Logo, existem constantes $\delta > 0$ e $M \geq 0$ tais que $\|S(t)\| \leq M$, para todo $t \in [0, \delta]$. Desde que $S(0) = I$, então $M \geq 1$.

Seja $t \in [0, T]$. Então, $t = n\delta + r$, para algum inteiro não negativo n e algum real r , tal que $0 \leq r < \delta$. Pela propriedade de semigrupo,

$$\begin{aligned} \|S(t)\| &= \|S(n\delta + r)\| = \|S(\delta)^n S(r)\| \leq \|S(\delta)\|^n \|S(r)\| \leq M^{n+1} = \\ &= MM^n \leq MM^{\frac{t}{\delta}} = Me^{\omega t}, \end{aligned}$$

onde $\omega = \delta^{-1} \ln M \geq 0$. Segue o resultado $\|S(t)\| \leq Me^{\omega T}$, isto é, $\|S(t)\|$ é uma função limitada em $[0, T]$. ■

Proposição 4.2. Sejam $\{S(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo de classe C_0 e A o gerador infinitesimal de $S(t)$.

i) Se $x \in D(A)$, então $S(t)x \in D(A)$, $\forall t \geq 0$ e $\frac{d}{dt}S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax$. (4.4)

ii) Se $x \in D(A)$, então $S(t)x - S(s)x = \int_s^t AS(\tau)x d\tau = \int_s^t S(\tau)Ax d\tau$. (4.5)

iii) Se $x \in X$, então $\int_0^t S(\tau)x d\tau \in D(A)$ e $S(t)x - x = A \int_0^t S(\tau)x d\tau$. (4.6)

Demonstração:

Seja $t > 0$ fixado. Para todo $h > 0$,

$$\frac{S(t+h) - S(t)}{h}x = \frac{S(h) - I}{h}S(t)x = A_h S(t)x = S(t)A_h x.$$

Se $x \in D(A)$, o membro da direita desta igualdade, $A_h S(t)x$, tem um limite quando $h \rightarrow 0$, pois $A_h x$ tem um limite e $S(t)$ é contínuo, o mesmo acontecendo, portanto, com os outros dois. Logo, $S(t)x \in D(A)$ e

$$\frac{d^+}{dt}S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax. \quad (4.7)$$

Por outro lado, para $0 < h < t$ temos,

$$\begin{aligned} \frac{S(t-h) - S(t)}{-h}x &= \frac{S(t-h) - S(t-h+h)}{-h}x = \left[\frac{S(t-h) - [S(t-h)S(h)]}{-h} \right]x = \\ &= \frac{S(t-h)[I - S(h)]}{-h}x = \frac{S(t-h)[S(h) - I]}{h}x = \\ &= S(t-h)A_h x = S(t-h)(A_h x - Ax) + S(t-h)Ax. \end{aligned}$$

Mas pela Proposição 4.1 $\|S(t-h)\|$ é limitada para $0 < h < t$ e, como $x \in D(A)$, o primeiro termo do membro da direita desta igualdade tende a zero quando $h \rightarrow 0$, além disto, pela continuidade forte de $S(t)$ e pelo Corolário 4.3, $S(t-h)Ax \rightarrow S(t)Ax$. Logo,

$$\frac{d^-}{dt}S(t)x = S(t)Ax. \quad (4.8)$$

Portanto,

$$\frac{d}{dt}S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax. \quad (4.9)$$

Integrando (4.9) de s a t temos:

$$\int_s^t \frac{d}{dt}S(\tau)x \, d\tau = \int_s^t AS(\tau)x \, d\tau = \int_s^t S(\tau)Ax \, d\tau.$$

$$S(\tau)x|_s^t = \int_s^t AS(\tau)x \, d\tau = \int_s^t S(\tau)Ax \, d\tau.$$

$$S(t)x - S(s)x = \int_s^t AS(\tau)x \, d\tau = \int_s^t S(\tau)Ax \, d\tau.$$

Observando que, para todo $x \in X$,

$$\begin{aligned} A_h \int_0^t S(\tau)x \, d\tau &= \frac{1}{h} \int_0^t (S(h) - I)S(\tau)x \, d\tau = \frac{1}{h} \int_h^{t+h} S(\tau)x \, d\tau - \frac{1}{h} \int_0^t S(\tau)x \, d\tau = \\ &= \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(\tau)x \, d\tau - \frac{1}{h} \int_0^h S(\tau)x \, d\tau, \end{aligned}$$

e pelo Corolário 3.1, quando $h \rightarrow 0$, o membro da direita desta igualdade tende a $S(t)x - x$, pela continuidade forte de $S(t)$.

Assim,

$$A \int_0^t S(\tau)x \, d\tau = S(t)x - x. \quad \blacksquare$$

Definição 4.4. Sejam X, Y espaços de Banach com $X \subset Y$. Diremos que X é denso em Y , quando todo ponto de Y for limite de seqüências em X .

Proposição 4.3. i) O gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 é um operador linear fechado e seu domínio é denso em X .

ii) Um operador linear A , fechado e com domínio denso em X , é o gerador infinitesimal de, no máximo, um semigrupo de classe C_0 .

Demonstração:

i) Sejam $\{S(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo de classe C_0 e A seu gerador infinitesimal. Colocando, para cada $x \in X$ e $h > 0$,

$$x_h = \frac{1}{h} \int_0^h S(t)x \, dt,$$

tem-se, por *iii)* da Proposição 4.2, que $x_h \in D(A)$, e como $x_h \rightarrow x$ quando $h \rightarrow 0$, assim pelo Corolário 3.1

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h S(\tau)x \, d\tau = S(0)x = x,$$

resulta que $x \in \overline{D(A)}$. Logo, $\overline{D(A)} = X$, isto é, $D(A)$ é denso em X .

Seja $(x_n), n \in \mathbb{N}$, uma sequência de elementos de $D(A)$ tal que $x_n \rightarrow x$ e $Ax_n \rightarrow y$ quando $n \rightarrow \infty$. Por *ii)* da Proposição 4.2 temos,

$$S(h)x_n - x_n = \int_0^h S(t)Ax_n \, dt. \quad (4.10)$$

Mas pela Proposição 4.1, existe um M tal que $\|S(t)\| \leq M$ para todo $t \in [0, h]$, logo, se $t \in [0, h]$, então,

$$\|S(t)Ax_n - S(t)y\| \leq \|S(t)\| \cdot \|Ax_n - y\| \leq M \|Ax_n - y\|,$$

onde $S(t)Ax_n$ tende a $S(t)y$ uniformemente em $[0, h]$ no limite, quando $n \rightarrow \infty$. Então, tomando o limite em (4.10) temos que

$$S(h)x - x = \int_0^h S(t)y \, dt,$$

bem como

$$\frac{S(h)x - x}{h} = \frac{1}{h} \int_0^h S(t)y \, dt.$$

Como o segundo membro dessa igualdade tende a y quando $h \rightarrow 0$, resulta que $x \in D(A)$ e $Ax = y$. Logo A é um operador fechado.

ii) Mostraremos que se A for um operador linear fechado, com domínio denso em X , e gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 , então ele será gerador, apenas de um semigrupo de classe C_0 .

Suponhamos que A seja gerador infinitesimal dos semigrupos $\{S_1(t) : t \geq 0\}$ e $\{S_2(t) : t \geq 0\}$ de classe C_0 . Se $0 \leq s \leq t < \infty$, para cada $x \in D(A)$, a função

$$\phi(s)x = S_1(t-s)S_2(s)x$$

é diferenciável no intervalo $0 \leq s \leq t$ e, por *i)* da Proposição 4.2, temos

$$\frac{d}{ds}\phi(s)x = S_1(t-s)AS_2(s)x - S_1(t-s)AS_2(s)x = 0.$$

Segue pelo Teorema 3.2, que $\phi(s)x$ é constante para $0 \leq s \leq t$. Temos então,

$$S_1(t)x = \phi(0)x = \phi(t)x = S_2(t)x, \quad \text{para todo } x \in D(A),$$

onde

$$S_1(t)x = S_2(t)x, \quad \text{para todo } x \in X,$$

pois $D(A)$ é denso em X e $S_1(t), S_2(t) \in \mathcal{L}(X)$. ■

4.3 Geração de Semigrupos

Demonstraremos nesta seção o Teorema de Hille-Yosida, o qual determina as condições necessárias e suficientes para que um operador linear A seja o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 .

Definição 4.5. Sejam X um espaço de Banach e $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador linear fechado de X .

O conjunto $\{\lambda \in \mathbb{C} : (\lambda I - A) : D(A) \rightarrow X \text{ é inversível e } (\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)\}$, representado por $\rho(A)$ é chamado de conjunto resolvente de A .

Definição 4.6. O conjunto $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ é chamado de espectro de A .

Definição 4.7. O operador linear $(\lambda I - A)^{-1}$, $\lambda \in \rho(A)$, representado por $R(\lambda, A)$, é chamado de resolvente de A .

Para simplificar a escrita, quando não houver possibilidade de confusão escreveremos simplesmente $(\lambda - A)$ no lugar de $(\lambda I - A)$.

Para motivarmos as próximas definições, consideremos o caso particular em que $X = \mathbb{C}$. Todo operador linear A de X é da forma $Ax = ax$, onde $a \in \mathbb{C}$. Nesse caso particular temos $R(\lambda, A) = (\lambda - a)^{-1}$.

Temos ainda que,

$$\frac{d}{dt} e^{(a-\lambda)t} = (a - \lambda)e^{(a-\lambda)t}$$

então,

$$e^{(a-\lambda)t} - 1 = \int_0^x \frac{d}{dt} e^{(a-\lambda)t} dt = (a - \lambda) \int_0^x e^{(a-\lambda)t} dt.$$

Fazendo $x \rightarrow \infty$ e supondo que $Re\lambda > Rea$, temos:

$$|e^{(a-\lambda)x}| = e^{xRea} e^{-xRe\lambda} \rightarrow 0,$$

e portanto,

$$-1 = (a - \lambda) \int_0^\infty e^{(a-\lambda)t} dt \Rightarrow R(\lambda, A) = \int_0^\infty e^{(a-\lambda)t} dt.$$

Tal representação do operador resolvente é natural quando $A \in \mathcal{L}(X)$.
Ver [8].

É natural indagar se tal representação é válida quando A não é limitado.

Teorema 4.2. Seja $\{S(t) : t \geq 0\}$ um semigrupo de classe C_0 com gerador infinitesimal A . Se $Re\lambda > \omega$, onde ω é dado na prova do Teorema 4.1, então $\lambda \in \rho(A)$, existe a integral

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x dt, \text{ para todo } x \in X,$$

e

$$R(\lambda, A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x dt, \text{ para todo } x \in X. \quad (4.11)$$

Demonstração:

Seja $Re\lambda \geq \mu > \omega$, então

$$\| e^{-\lambda t} S(t)x \| \leq M e^{(\omega - Re\lambda)t} \| x \| \leq M e^{(\omega - \mu)t} \| x \| .$$

Além disso, como

$$\int_0^\infty e^{(\omega - \mu)t} dt = \frac{1}{\mu - \omega},$$

e a função $e^{-\lambda t} S(t)x$ é contínua, segue pelo Teste de Weierstrass que a integral

$$R_\lambda(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x dt, \quad Re\lambda > \omega, \quad \forall x \in X$$

é convergente.

Além disto, R_λ é linear e limitado.

De fato:

$$\begin{aligned} \| R_\lambda \| &= \left\| \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x dt \right\| \leq \int_0^\infty \| e^{-\lambda t} S(t)x \| dt \leq \int_0^\infty M e^{(\omega - Re\lambda)t} \| x \| dt \leq \\ &\leq M \| x \| \int_0^\infty e^{(\omega - Re\lambda)t} dt = \frac{M \| x \|}{Re\lambda - \omega}. \end{aligned}$$

Temos,

$$\begin{aligned} A_h R_\lambda(x) &= \left(\frac{S(h) - I}{h} \right) \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t) \left(\frac{S(h) - I}{h} \right) x dt = \\ &= \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t+h)x dt - \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x dt. \end{aligned}$$

Seja $s = t + h$,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{h} \int_h^\infty e^{-\lambda(s-h)} S(s)x ds - \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x dt = \\ &= \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x dt - \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_0^h e^{-\lambda t} S(t)x dt - \frac{1}{h} \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x dt = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{e^{\lambda h} - 1}{h} \right) \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x dt - \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_0^h e^{-\lambda t} S(t)x dt = \\
 &= \left(\frac{e^{\lambda h} - 1}{h} \right) R_\lambda(x) - \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_0^h e^{-\lambda t} S(t)x dt \longrightarrow \lambda R_\lambda(x) - x, \text{ quando } h \rightarrow 0.
 \end{aligned}$$

Portanto, $AR_\lambda(x) = \lambda R_\lambda(x) - x$, então $(A - \lambda)R_\lambda(x) = -x$, então $(\lambda - A)R_\lambda(x) = x$.
 Segue que,

$$R_\lambda(x) \in D(A), \text{ para todo } x \in X \text{ e } (\lambda - A)R_\lambda(x) = x. \quad (4.12)$$

Por outro lado, de $x \in D(A)$ vem, levando em conta que, pela Proposição 4.3, A é fechado e que, pela Proposição 4.2, $S(t)Ax = AS(t)x$,

$$\begin{aligned}
 R_\lambda(Ax) &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)Ax dt = \\
 &= \int_0^\infty Ae^{-\lambda t} S(t)x dt = A \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x dt = AR_\lambda(x).
 \end{aligned}$$

Daí e de (4.12) segue que

$$R_\lambda(\lambda - A)x = x, \text{ para todo } x \in D(A),$$

que mostra que

$$R_\lambda = (\lambda - A)^{-1} = R(\lambda, A),$$

o que completa a demonstração. ■

Teorema 4.3. (Hille-Yosida) Para que um operador linear A , definido em $D(A) \subset X$ e com valores em X , seja o gerador infinitesimal de um semigrupo $\{S(t) : t \geq 0\}$ de classe C_0 tal que $\|S(t)\| \leq e^{\omega t}$ é necessário e suficiente que:

- i) A seja fechado e seu domínio seja denso em X .
- ii) Exista $\omega \in \mathbb{R}$ tal que para cada real $\lambda > \omega$ se tenha $\lambda \in \rho(A)$ e

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{(\lambda - \omega)}.$$

Demonstração:

Necessidade:

Seja A o gerador infinitesimal do semigrupo $\{S(t) : t \geq 0\}$ de classe C_0 , com $\|S(t)\| \leq e^{\omega t}$.

A Proposição 4.3 demonstra a necessidade de *i*).

Pelo Teorema 4.2, se $\lambda > \omega$ então $\lambda \in \rho(A)$,

$$R(\lambda, A)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x dt. \quad (4.13)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \| R(\lambda, A)x \| &= \left\| \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)x dt \right\| \leq \int_0^\infty \| e^{-\lambda t} S(t)x \| dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} \| S(t)x \| dt \leq \\ &\leq \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{\omega t} \| x \| dt = \int_0^\infty e^{-(\lambda-\omega)t} dt \| x \| = \frac{1}{(\lambda-\omega)} \| x \| . \end{aligned}$$

Portanto,

$$\| R(\lambda, A) \| \leq \frac{1}{(\lambda-\omega)} .$$

Isto é, a condição *ii*) é necessária.

Suficiência:

A demonstração da suficiência consiste em definir $B_\lambda = \lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda I$, com $\lambda > \omega$ e mostrar que $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{tB_\lambda} x = S(t)x$, onde $S(t)$ é um semigrupo de classe C_0 cujo gerador infinitesimal é A .

Notemos que $B_\lambda \in \mathcal{L}(X)$, pois $R(\lambda, A) \in \mathcal{L}(X)$ por definição.

Para isto, vamos dividir a demonstração em cinco etapas:

i) Vamos mostrar que para $x \in D(A)$,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} B_\lambda x = Ax. \tag{4.14}$$

Como por definição,

$$R(\lambda, A)(\lambda - A) = I,$$

temos,

$$\lambda R(\lambda, A) - I = R(\lambda, A)A,$$

então para $x \in D(A)$,

$$\| \lambda R(\lambda, A)x - x \| = \| R(\lambda, A)Ax \| \leq \| R(\lambda, A) \| \| Ax \| \leq \frac{1}{\lambda - \omega} \| Ax \| \rightarrow 0$$

quando $\lambda \rightarrow \infty$.

Por hipótese, $\| R(\lambda, A) \| \leq (\lambda - \omega)^{-1}$ com $\lambda > \omega$.

Então,

$$\| \lambda R(\lambda, A)x - x \| \leq \frac{1}{\lambda - \omega} \| Ax \| .$$

Portanto,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \| \lambda R(\lambda, A)x - x \| = 0.$$

Assim,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda R(\lambda, A)x = x, \text{ para todo } x \in D(A).$$

Mas, como por hipótese,

$$\| \lambda R(\lambda, A) \| \leq |\lambda| (\lambda - \omega)^{-1}.$$

Observando que

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\lambda}{\lambda - \omega} = 1, \quad (4.15)$$

temos para λ suficientemente grande,

$$\| \lambda R(\lambda, A) \| \leq 2.$$

De fato,

$$\left| \frac{\lambda}{(\lambda - \omega)} - 1 \right| < \varepsilon \Leftrightarrow 1 - \varepsilon < \frac{\lambda}{\lambda - \omega} < \varepsilon + 1, \text{ tome } \varepsilon = 1.$$

Segue que,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda R(\lambda, A)x = x, \text{ para todo } x \in X,$$

uma vez que $D(A)$ é, por hipótese, denso em X .

De fato, seja $x \in X$, como $\overline{D(A)} = X$, existe $x_\lambda \in D(A)$ tal que $x_\lambda \rightarrow x$.

$$\begin{aligned} \| \lambda R(\lambda, A)x - x \| &= \| \lambda R(\lambda, A)x - \lambda R(\lambda, A)x_\lambda + \lambda R(\lambda, A)x_\lambda - x_\lambda + x_\lambda - x \| \leq \\ &\leq \| \lambda R(\lambda, A)(x - x_\lambda) \| + \| \lambda R(\lambda, A)x_\lambda - x_\lambda \| + \| x_\lambda - x \| \leq \\ &\leq 2 \| x - x_\lambda \| + \| \lambda R(\lambda, A)x_\lambda - x_\lambda \| + \| x_\lambda - x \| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

quando $\lambda \rightarrow \infty$.

Logo $\| \lambda R(\lambda, A)x - x \| \rightarrow 0$.

Levando em conta que $B_\lambda = \lambda R(\lambda, A)A$, para cada $x \in D(A)$ temos

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} B_\lambda x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda R(\lambda, A)Ax = Ax.$$

ii) Mostrar que dado $\gamma > \omega$ existe $\lambda(\gamma)$ tal que $\| e^{tB_\lambda} \| \leq e^{t\gamma}$, para todo $\lambda > \lambda(\gamma)$.

Da definição de B_λ e das hipóteses temos,

$$\begin{aligned} \| e^{tB_\lambda} \| &= \| e^{t(\lambda^2 R(\lambda, A) - \lambda I)} \| = \| e^{t\lambda^2 R(\lambda, A)} e^{-t(\lambda I)} \| \leq \\ &\leq e^{(-\lambda t)} \| e^{t\lambda^2 R(\lambda, A)} \| \leq e^{(-\lambda t)} e^{t\lambda^2 \| R(\lambda, A) \|} \leq \\ &\leq e^{(-\lambda t)} e^{\lambda^2 t \frac{1}{(\lambda - \omega)}} = e^{(-\lambda t)} e^{\frac{(\lambda^2 t)}{(\lambda - \omega)}} = e^{\frac{-\lambda t(\lambda - \omega) + (\lambda^2 t)}{(\lambda - \omega)}} = e^{\lambda t \omega (\lambda - \omega)^{-1}}. \end{aligned}$$

Mas,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{\omega \lambda}{\lambda - \omega} = \omega.$$

Logo, se $\gamma > \omega$ existe $\lambda(\gamma)$ tal que $\omega \lambda (\lambda - \omega)^{-1} < \gamma$, para todo $\lambda > \lambda(\gamma)$ e assim,

$$\| e^{tB_\lambda} \| \leq e^{t\gamma}, \text{ para todo } \lambda > \lambda(\gamma). \quad (4.16)$$

iii) Mostrar que o semigrupo e^{tB_λ} tende fortemente para um operador linear limitado quando $\lambda \rightarrow \infty$. Por simplicidade, usaremos a notação $S_\lambda(t) = e^{tB_\lambda}$.

Como para cada $\lambda > \omega$ e cada $\mu > \omega$, $R(\lambda, A)$ comuta com $R(\mu, A)$, segue que $B_\lambda B_\mu = B_\mu B_\lambda$. Levando em conta que,

$$S_\lambda(t) = e^{tB_\lambda},$$

segue que $B_\mu S_\lambda = S_\lambda B_\mu$. Logo,

$$\begin{aligned} S_\lambda(t)x - S_\mu(t)x &= e^{tB_\lambda}x - e^{tB_\mu}x = \int_0^t \frac{d}{d\tau} [e^{(t-\tau)B_\mu} e^{\tau B_\lambda} x] d\tau = \\ &= \int_0^t e^{tB_\mu} (B_\lambda - B_\mu) e^{-\tau B_\mu + \tau B_\lambda} x d\tau = \\ &= \int_0^t e^{(t-\tau)B_\mu} e^{\tau B_\lambda} (B_\lambda - B_\mu) x d\tau = \\ &= \int_0^t S_\mu(t-\tau) S_\lambda(\tau) [B_\lambda - B_\mu] x d\tau, \end{aligned}$$

onde, levando em conta (4.16),

$$\begin{aligned} \| S_\lambda(t)x - S_\mu(t)x \| &\leq \int_0^t \| S_\mu(t-\tau) \| \| S_\lambda(\tau) \| \| B_\lambda x - B_\mu x \| d\tau \leq \\ &\leq \int_0^t e^{(t-\tau)\gamma} e^{\tau\gamma} \| B_\lambda x - B_\mu x \| d\tau = \int_0^t e^{t\gamma} d\tau \| B_\lambda x - B_\mu x \| = \\ &= t e^{t\gamma} \| B_\lambda x - B_\mu x \|, \quad \forall \lambda, \mu > \lambda(\gamma), \gamma > \omega. \end{aligned}$$

Mas, por (4.14), temos $\| B_\lambda x - B_\mu x \| \rightarrow 0$, quando $\lambda, \mu \rightarrow \infty$, para todo $x \in D(A)$. Portanto $S_\lambda(t)x$ é uma seqüência de Cauchy em X .

Logo, para todo $x \in D(A)$, $S_\lambda(t)x$ converge uniformemente em relação a t em cada intervalo finito $[0, T]$ e isto é válido para todo $x \in X$, pois $D(A)$ é por hipótese denso em X e $S_\lambda(t)$ é limitado quando $\lambda \rightarrow \infty$. Segue pelo Teorema da Limitação Uniforme, que existe um operador linear limitado $S(t)$ tal que,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} S_\lambda(t)x = S(t)x, \quad \text{para todo } x \in X, \quad (4.17)$$

e a convergência é uniforme nos intervalos limitados, pois $t e^{t\gamma} \| B_\lambda x - B_\mu x \| \rightarrow 0$, para todo $t \in [0, T]$.

iv) Mostrar que $\{S(t) : t \geq 0\}$ é um semigrupo de classe C_0 .

Como, para cada $\lambda > \omega$, $\{S_\lambda(t) : t \geq 0\}$ é um semigrupo, temos,

$$S(0)x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} S_\lambda(0)x = Ix = x, \quad \text{e}$$

$$S_\lambda(t+s)x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} S_\lambda(t+s)x = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} S_\lambda(t)S_\lambda(s)x = S(t)S(s)x,$$

para cada $x \in X$ e $t, s \geq 0$.

Além disso, $S(t)x$ é o limite uniforme de $S_\lambda(t)x$, portanto contínuo. Consequentemente, $\{S(t) : t \geq 0\}$ é um semigrupo de classe C_0 .

v) Resta demonstrar que o gerador infinitesimal de $\{S(t) : t \geq 0\}$ é A . Temos, para $\lambda > \lambda(\gamma)$ e todo $x \in D(A)$,

$$\begin{aligned} \| S_\lambda(t)B_\lambda x - S(t)Ax \| &= \| S_\lambda(t)B_\lambda x + S_\lambda(t)Ax - S_\lambda(t)Ax - S(t)Ax \| \leq \\ &\leq \| S_\lambda(t)B_\lambda x - S_\lambda(t)Ax \| + \| S_\lambda(t)Ax - S(t)Ax \| \leq \\ &\leq \| S_\lambda(t) \| \cdot \| B_\lambda x - Ax \| + \| S_\lambda(t)Ax - S(t)Ax \| \leq \\ &\leq e^{t\gamma} \| B_\lambda x - Ax \| + \| S_\lambda(t)Ax - S(t)Ax \|, \end{aligned}$$

como, por (4.14), para todo $x \in D(A)$, $B_\lambda x \rightarrow Ax$, quando $\lambda \rightarrow \infty$ e por (4.17),

$$S_\lambda(t)B_\lambda x \rightarrow S(t)Ax.$$

Essa desigualdade mostra que $S_\lambda(t)B_\lambda x$ converge para $S(t)Ax$, uniformemente em relação a t , em todo intervalo $[0, T]$ e para todo $x \in D(A)$. Logo, passando ao limite ambos os membros da igualdade, quando $\lambda \rightarrow \infty$,

$$S_\lambda(t)x - x = \int_0^t \frac{d}{d\tau} S_\lambda(\tau)x d\tau = \int_0^t S_\lambda(\tau)B_\lambda x d\tau$$

temos,

$$S(t)x - x = \int_0^t S(\tau)Ax d\tau, \text{ para todo } x \in D(A).$$

Portanto, se por hipótese B é o gerador infinitesimal de $S(t)$, temos,

$$Bx = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)x - x}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} \int_0^t S_\lambda(\tau)Ax d\tau = Ax,$$

para cada $x \in D(A)$.

Logo $D(A) \subset D(B)$ e $B|_{D(A)} = A$. Mas, por hipótese, $\lambda \in \rho(A)$, se $\lambda > \omega$ e, como B é o gerador infinitesimal de $S(t)$ segue pelo Teorema 4.2 que $\lambda \in \rho(B)$ para cada λ suficientemente grande. Logo, se λ é suficientemente grande temos $\lambda \in \rho(A) \cap \rho(B)$. Para tais valores de λ temos,

$$(\lambda I - A)(D(A)) = X, \quad (\lambda I - B)(D(B)) = X,$$

e como $B \supset A$ temos,

$$(\lambda I - B)(D(A)) = X, \quad (\lambda I - A)(D(A)) = X,$$

onde,

$$D(A) = (\lambda I - B)^{-1}X = D(B).$$

Logo $A = B$ e, assim, A é o gerador infinitesimal de $\{S(t) : t \geq 0\}$, o que completa a demonstração. ■

5 Problema de Cauchy Abstrato

5.1 Equação Não Homogênea

Sejam A o gerador infinitesimal de um semigrupo $\{S(t) : t \geq 0\}$ de classe C_0 , $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow X$ uma função contínua e consideremos o problema de Cauchy abstrato

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u(t) = Au(t) + f(t), & t > 0 \\ u(0) = x \end{cases} \quad (5.1)$$

Definição 5.1. Uma função $u : \mathbb{R}^+ \rightarrow X$ é chamada de solução forte de (5.1) se u for contínua para $t \geq 0$, continuamente diferenciável para $t > 0$, $u(t) \in D(A)$ para todo $t > 0$ e u satisfizer (5.1).

Seja u uma solução forte de (5.1) e coloquemos $g(s) = S(t-s)u(s)$, $0 \leq s \leq t$. Temos:

$$\begin{aligned} g'(s) &= (S(t-s))'u(s) + S(t-s)u'(s) \\ g'(s) &= -S(t-s)Au(s) + S(t-s)[Au(s) + f(s)] \\ g'(s) &= -S(t-s)Au(s) + S(t-s)Au(s) + S(t-s)f(s) \\ g'(s) &= S(t-s)f(s) \end{aligned}$$

onde, integrando de 0 a t , $0 < t < \infty$,

$$\begin{aligned} \int_0^t g'(s)ds &= \int_0^t S(t-s)f(s)ds \\ g(s)|_0^t &= \int_0^t S(t-s)f(s)ds \\ g(t) - g(0) &= \int_0^t S(t-s)f(s)ds \\ S(t-t)u(t) - S(t-0)u(0) &= \int_0^t S(t-s)f(s)ds \\ Iu(t) - S(t)x &= \int_0^t S(t-s)f(s)ds \end{aligned}$$

$$u(t) = S(t)x + \int_0^t S(t-s)f(s)ds. \quad (5.2)$$

Esta é chamada fórmula da variação das constantes, que é uma condição necessária para que u seja solução forte de (5.1).

Entretanto como f é contínua, a função $0 \leq s \leq t \ni s \mapsto S(t-s)f(s)$ é contínua e, portanto, a fórmula (5.2) tem sentido. Neste caso chamamos u uma solução generalizada (mild solution) de (5.1). Toda solução forte é desta forma.

As soluções generalizadas não são necessariamente soluções fortes, isto é facilmente visto tomando $y \in X$ tal que $S(t)y \notin D(A)$, $t > 0$ e $f(t) = S(t)y$. Nesse caso,

$$u(t) = S(t)x + \int_0^t S(t-s)S(s)yds$$

$$u(t) = S(t)x + \int_0^t S(t-s+s)yds$$

$$u(t) = S(t)x + \int_0^t S(t)yds$$

$$u(t) = S(t)x + tS(t)y$$

é uma solução generalizada que não é uma solução forte porque essa função não é diferenciável, pois $S(t)y \notin D(A)$ para $t > 0$. Portanto, para que uma solução generalizada seja uma solução forte é necessário que A ou f satisfaçam condições adicionais, algumas das quais serão estudadas aqui.

Como consequência imediata de (5.2) temos:

Proposição 5.1. O sistema (5.1) tem no máximo uma solução forte.

Teorema 5.1. O sistema (5.1) tem uma solução forte para todo $x \in D(A)$ se, e somente se, a função v dada por

$$v(t) = \int_0^t S(t-s)f(s)ds \quad (5.3)$$

for continuamente diferenciável para todo $t > 0$.

Demonstração:

Quando (5.1) tem uma solução forte para $x \in D(A)$, a função v é, por (5.2),

$$v(t) = u(t) - S(t)x,$$

e diferença de duas funções continuamente diferenciáveis em todo $t > 0$ é continuamente diferenciável em todo $t > 0$.

Reciprocamente,

$$A_h v(t) = \frac{S(h) - I}{h} v(t) = \frac{S(h) - I}{h} \int_0^t S(t-s)f(s)ds$$

$$\begin{aligned}
A_h v(t) &= \frac{1}{h} \int_0^t S(t-s)S(h)f(s)ds - \frac{1}{h} \int_0^t S(t-s)f(s)ds = \\
&= \frac{1}{h} \int_0^t S(t+h-s)f(s)ds - \frac{1}{h} \int_0^t S(t-s)f(s)ds = \\
&= \frac{1}{h} \int_0^{t+h} S(t+h-s)f(s)ds - \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(t+h-s)f(s)ds - \frac{1}{h} \int_0^t S(t-s)f(s)ds = \\
&= \frac{v(t+h) - v(t)}{h} - \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(t+h-s)f(s)ds.
\end{aligned}$$

Assim,

$$A_h v(t) = \frac{v(t+h) - v(t)}{h} - \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(t+h-s)f(s)ds. \quad (5.4)$$

Se v é continuamente diferenciável em todo $t > 0$, então o segundo membro de (5.4) tem um limite quando $h \rightarrow 0^+$, para todo $t > 0$, o mesmo acontecendo, portanto, com o primeiro, isto é,

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} A_h v(t) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{v(t+h) - v(t)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(t+h-s)f(s)ds.$$

Logo, no limite quando $h \rightarrow 0^+$ temos,

$$Av(t) = v'(t) - f(t).$$

Portanto, $v(t) \in D(A)$. Além disto, $v(0) = 0$. Assim, se $x \in D(A)$, a função $u(t)$ dada por

$$u(t) = S(t)x + v(t)$$

é solução forte de (5.1). ■

Corolário 5.1. Se $v(t) \in D(A)$ para todo $t \geq 0$ e Av é contínua, então o problema (5.1) tem solução forte para todo $x \in D(A)$.

Demonstração:

De (5.4) temos,

$$\frac{v(t+h) - v(t)}{h} = A_h v(t) + \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(t+h-s)f(s)ds.$$

Aplicando o limite quando $h \rightarrow 0^+$, para todo $t > 0$, temos,

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{v(t+h) - v(t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} A_h v(t) + \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(t+h-s)f(s)ds$$

$$v'(t) = Av(t) + f(t).$$

Mas, por hipótese, $f(t)$ e $Av(t)$ são contínuas. Logo $\frac{d^+}{dt}v(t)$ é contínua.

Pelo Lema de Dini, é continuamente diferenciável para $t > 0$. Pelo Teorema 5.1 o sistema (5.1) tem uma solução forte que é dada por

$$u(t) = S(t)x + \int_0^t S(t-s)f(s)ds.$$

■

Proposição 5.2. Seja A o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 , $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow X$ uma função contínua e suponhamos que f satisfaça uma das seguintes condições:

- i) f é continuamente diferenciável em todo $t \geq 0$;
- ii) $f(t) \in D(A)$ para todo $t \geq 0$ e Af é contínua.

Então, para todo $x \in D(A)$, o sistema (5.1) tem solução forte.

Demonstração:

i) Por (5.3),

$$v(t) = \int_0^t S(t-s)f(s)ds.$$

Seja $u = t - s$, então,

$$v(t) = \int_t^0 S(u)f(t-u)(-du) = \int_0^t S(u)f(t-u)du,$$

para $h > 0$,

$$\begin{aligned} \frac{v(t+h) - v(t)}{h} &= \frac{1}{h} \int_0^{t+h} S(u)f(t+h-u)du - \frac{1}{h} \int_0^t S(u)f(t-u)du = \\ &= \frac{1}{h} \int_0^t S(u)f(t+h-u)du + \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(u)f(t+h-u)du - \frac{1}{h} \int_0^t S(u)f(t-u)du = \\ &= \frac{1}{h} \int_0^t S(u)[f(t+h-u) - f(t-u)]du + \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(u)f(t+h-u)du. \end{aligned}$$

Por hipótese f é continuamente diferenciável para todo $t \geq 0$, portanto,

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{v(t+h) - v(t)}{h} &= \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_0^t S(u)[f(t+h-u) - f(t-u)]du + \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} S(u)f(t+h-u)du. \\ \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{v(t+h) - v(t)}{h} &= \int_0^t S(u)f'(t-u)du + S(t)f(0), \text{ é contínua.} \end{aligned}$$

Assim $v(t)$ é continuamente diferenciável, logo pelo Teorema 5.1, o sistema (5.1) tem uma solução forte.

ii) Por hipótese $f(s) \in D(A)$, $0 \leq s \leq t$, então pela Proposição 4.2, $S(t-s)f(s) \in D(A)$ e $\frac{d}{dt}(S(t-s)f(s)) = AS(t-s)f(s) = S(t-s)Af(s)$.

Por hipótese Af é contínua e $\{S(t) : t \geq 0\}$ é um semigrupo de classe C_0 , portanto é uma família de operadores lineares limitados, então pelo Teorema 2.4, $S(t)$ é contínuo, onde $S(t-s)Af(s) = AS(t-s)f(s)$ é contínuo.

Também, por hipótese, $f(s)$ é contínua, logo $S(t-s)f(s)$ é contínuo.

A por hipótese é um gerador infinitesimal, pela Proposição 4.3 segue que A é um operador linear fechado. Então pelo Teorema 3.6,

$$v(t) = \int_0^t S(t-s)f(s)ds \in D(A) \text{ para todo } t > 0.$$

$$Av(t) = A \int_0^t S(t-s)f(s)ds = \int_0^t AS(t-s)f(s)ds.$$

Concluimos que $v(t) \in D(A)$ para todo $t > 0$ e Av é contínua, então pelo Corolário 5.1, o sistema (5.1) tem uma solução forte, para todo $x \in D(A)$. ■

5.2 Semigrupos Fortemente Contínuos, Soluções Fracas e Fórmula da Variação das Constantes

Nesta seção estendemos um pouco mais a noção de solução para (5.1). Uma definição de solução fraca para (5.1) é dada, e é mostrado que uma condição necessária e suficiente para a existência e unicidade de soluções fracas para todos os dados iniciais em X , é que A gere um C_0 semigrupo em X e, neste caso, a solução é dada pela fórmula da variação das constantes.

No que segue A é um operador linear fechado e densamente definido em um espaço de Banach X com dual denotado por X^* .

Definição 5.2. O adjunto de A é o operador $A^* : D(A^*) \subset X^* \rightarrow X^*$ definido por:

$$D(A^*) = \{\varphi \in X^* : \text{a aplicação } D(A) \ni x \mapsto \varphi(Ax) \text{ possui uma extensão contínua } \tilde{\varphi} \in X^*\}$$

$$A^*\varphi = \tilde{\varphi}, \text{ para todo } \varphi \in D(A^*).$$

Observação 3. Note que para $x \in D(A)$, $\langle x, A^*\varphi \rangle = \langle x, \tilde{\varphi} \rangle = \langle Ax, \varphi \rangle$, onde estamos usando a notação $\varphi(x) = \langle x, \varphi \rangle$.

Definição 5.3. Uma função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada absolutamente contínua em $[a, b]$ se dado $\epsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que

$$\sum_{i=1}^n |f(x'_i) - f(x_i)| < \epsilon$$

para cada escolha de sub-intervalos $[x_i, x'_i]$ de $[a, b]$ dois a dois disjuntos satisfazendo

$$\sum_{i=1}^n |x'_i - x_i| < \delta.$$

Teorema 5.2. Se f é absolutamente contínua em $[a, b]$, então f tem derivada em quase todos os pontos de $[a, b]$.

Este resultado pode ser encontrado em [7].

Definição 5.4. Seja $f : (0, \tau] \rightarrow X$ uma função contínua. Uma função $u \in C(0, \tau; X)$ é uma solução fraca de

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}u(t) = Au(t) + f(t), & t \in (0, \tau] \\ u(0) = x, & x \in X \end{cases} \quad (5.5)$$

se, e somente se, para todo $v \in D(A^*)$ a função $\langle u(t), v \rangle$ for absolutamente contínua em $[0, \tau]$, $u(0) = x$ e

$$\frac{d}{dt} \langle u(t), v \rangle = \langle u(t), A^*v \rangle + \langle f(t), v \rangle \quad (5.6)$$

para quase todos $t \in [0, \tau]$.

Teorema 5.3. Para cada $x \in X$ (x é o valor inicial) existe uma única solução fraca $u(t)$ de (5.5) satisfazendo $u(0) = x$ se, e somente se, A for o gerador infinitesimal de um semigrupo fortemente contínuo $\{T(t) : t \geq 0\}$ de operadores lineares limitados em X , e neste caso $u(t)$ é dado por (5.2).

A demonstração é baseada em repetidas aplicações do seguinte Lema.

Lema 5.1. Se $x, z \in X$ são tais que para todo $v \in D(A^*)$, $\langle z, v \rangle = \langle x, A^*v \rangle$, então $x \in D(A)$ e $z = Ax$.

Demonstração:

Seja $G(A) \subseteq X \times X$ o gráfico de A , o qual é fechado por hipótese. Se (x, z) não pertence ao $G(A)$ segue pelo Teorema de Hahn-Banach, segunda forma geométrica, que existem $v, v^* \in X^*$, tais que $\langle Ax, v \rangle + \langle x, v^* \rangle = 0$ para todo $x \in D(A)$ e $\langle z, v \rangle + \langle x, v^* \rangle \neq 0$. Assim, $v \in D(A^*)$, $v^* = -A^*v$ e $\langle z, v \rangle \neq \langle x, A^*v \rangle$, o que é uma contradição. ■

Demonstração: (do Teorema 5.3)

Seja A o gerador do semigrupo fortemente contínuo $\{T(t) : t \geq 0\}$. Existe uma constante M tal que $\|T(t)\| \leq M$ para $t \in [0, \tau]$.

Notemos que se $x \in X$ e $v \in D(A^*)$ então $\langle T(t)x, v \rangle$ é diferenciável em relação a t com derivada $\langle T(t)x, A^*v \rangle$.

De fato, para $x \in D(A)$,

$$\frac{d}{dt} \langle T(t)x, v \rangle = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\langle T(t+h)x, v \rangle - \langle T(t)x, v \rangle}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\langle (T(t)T(h) - T(t))x, v \rangle}{h} =$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\langle T(t)(T(h) - I)x, v \rangle}{h} = \left\langle \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(T(h) - I)T(t)}{h} x, v \right\rangle = \\ &= \langle AT(t)x, v \rangle = \langle T(t)x, A^*v \rangle. \end{aligned}$$

Para $x \in X$ existe uma sequência $D(A) \ni x_n \rightarrow x$, e portanto

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \langle h^{-1}(T(t+h) - T(t))x, v \rangle &= \lim_{h \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \langle h^{-1}(T(t+h) - T(t))x_n, v \rangle \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{h \rightarrow 0} \langle h^{-1}(T(t+h) - T(t))x_n, v \rangle \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \langle T(t)x_n, A^*v \rangle = \langle T(t)x, A^*v \rangle. \end{aligned}$$

Seja u dado por (5.2). É fácil ver que $u \in C^1(0, \tau; X)$, além disso, para todo $v \in D(A^*)$ e $t \in [0, \tau]$,

$$\langle u(t), v \rangle = \langle T(t)x, v \rangle + \int_0^t \langle T(t-s)f(s), v \rangle ds.$$

Uma vez que $(t, x) \mapsto T(t)x$ é contínua em $[0, \tau] \times X$ segue pelo Teorema Fundamental do Cálculo,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_0^t \langle T(t-s)f(s), v \rangle ds &= \langle f(t), v \rangle + \int_0^t \frac{d}{dt} \langle T(t-s)f(s), v \rangle ds = \\ &= \langle f(t), v \rangle + \int_0^t \langle T(t-s)f(s), A^*v \rangle ds, \end{aligned}$$

portanto, $\langle u(t), v \rangle$ é diferenciável para $t \in (0, \tau)$ e satisfaz (5.6).

Em seguida vamos provar que $u(t)$ é a única solução fraca de (5.5) satisfazendo $u(0) = x$.

Seja $\bar{u}(t)$ outra solução fraca e definimos $w = u - \bar{u}$. Então,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle w(t), v \rangle &= \frac{d}{dt} \langle u(t) - \bar{u}(t), v \rangle = \frac{d}{dt} \langle u(t), v \rangle - \frac{d}{dt} \langle \bar{u}(t), v \rangle = \\ &= \langle u(t), A^*v \rangle + \langle f(t), v \rangle - \langle \bar{u}(t), A^*v \rangle - \langle f(t), v \rangle = \langle u(t) - \bar{u}(t), A^*v \rangle = \langle w(t), A^*v \rangle. \\ &\int_0^t \frac{d}{dt} \langle w(s), v \rangle ds = \int_0^t \langle w(s), A^*v \rangle ds = \\ &= \langle w(t), v \rangle - \langle w(0), v \rangle = \left\langle \int_0^t w(s) ds, A^*v \right\rangle. \end{aligned}$$

Logo,

$$\langle w(t), v \rangle = \left\langle \int_0^t w(s) ds, A^*v \right\rangle$$

para todo $v \in D(A^*)$, $t \in [0, \tau]$. Pelo Lema anterior, $z(t) = \int_0^t w(s) ds \in D(A)$ e $w(t) = \frac{d}{dt} z(t) = Az(t)$.

Portanto, $z(t)$ satisfaz a equação homogênea

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = Az(t) \\ z(0) = 0 \end{cases}$$

logo, $z(t) = 0$.

Portanto, $w(t) = 0$, isto é, $u = \bar{u}$.

Reciprocamente, suponha que A é tal que (5.5) seja válido e para cada $x \in X$ exista uma única solução fraca $u(t)$ satisfazendo $u(0) = x$. Para $t \in [0, \tau]$ defina $T(t)x = u(t) - u_0(t)$, onde u_0 é a solução fraca de (5.5) satisfazendo $u_0(0) = 0$.

Para $t \geq \tau$ escrevemos $t = n\tau + s$, onde n é um inteiro não negativo e $s \in [0, \tau]$ e podemos estender a definição acima colocando $T(t)x = T(s)T(\tau)^n x$.

Primeiramente observamos que a aplicação linear $\theta : X \rightarrow C(0, \tau; X)$ definida por $\theta(x) = T(\cdot)x$ possui gráfico fechado.

De fato, seja $x_n \rightarrow x$ e $\theta(x_n) \rightarrow y$, isto é,

$$\sup_{t \in [0, \tau]} \|T(t)x_n - y(t)\| \rightarrow 0, \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Portanto, para $\varphi^* \in X^*$ temos

$$\begin{aligned} |\langle \varphi^*, y(t) - T(t)x \rangle| &\leq |\langle \varphi^*, y(t) - T(t)x_n \rangle| + |\langle \varphi^*, T(t)x_n - T(t)x \rangle| \leq \\ &\leq \|\varphi^*\|_{X^*} \|y(t) - T(t)x_n\|_X + \|\varphi^*\|_{X^*} \|T(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \|x_n - x\|_X \rightarrow 0, \end{aligned}$$

quando $n \rightarrow \infty$, logo

$$\langle \varphi^*, y(t) - T(t)x \rangle = 0, \text{ para todo } \varphi \in X^*,$$

isto é, $y(t) - T(t)x = 0$.

Portanto a aplicação $x \mapsto T(\cdot)x$ é contínua. As outras propriedades de semigrupo decorrem trivialmente da definição de $T(t)$, ou seja, $\{T(t) : t \geq 0\}$ é um semigrupo fortemente contínuo.

Seja B o gerador de $T(t)$ e $x \in D(B)$. Então da definição de $T(t)$ como diferença de soluções fracas e da observação sobre a fórmula de derivação de $\langle T(t)x, v \rangle$ temos

$$\langle T(t)x, A^*v \rangle = \frac{d}{dt} \langle T(t)x, v \rangle = \langle BT(t)x, v \rangle \text{ para } t \geq 0 \text{ e } v \in D(A^*).$$

Em particular para $t = 0$

$$\langle x, A^*v \rangle = \langle Bx, v \rangle, \text{ para todo } v \in D(A^*).$$

Segue pelo Lema anterior que $x \in D(A)$ e $Bx = Ax$. Então, $D(B) \subseteq D(A)$ e $Bx = Ax$, para todo $x \in D(B)$.

A prova do Teorema estará completa ao mostrarmos que $D(A) \subseteq D(B)$.

Seja $x \in D(A)$, portanto, pelo Lema vemos que para cada $t \in [0, \tau]$ as integrais $\int_0^t T(s)x ds$ e $\int_0^t T(s)Ax ds$ pertencem a $D(A)$.

De fato,

$$\frac{d}{dt} \langle T(t)x, v \rangle = \langle T(t)x, A^*v \rangle, \text{ para todo } v \in D(A^*),$$

temos,

$$\langle T(t)x - x, v \rangle = \int_0^t \langle T(s)x, A^*v \rangle ds = \left\langle \int_0^t T(s)x ds, A^*v \right\rangle, \text{ e,}$$

$$T(t)x = x + A \int_0^t T(s)x ds. \quad (5.7)$$

$$T(t)Ax = Ax + A \int_0^t T(s)Ax ds. \quad (5.8)$$

Considere a função,

$$z(t) = \int_0^t T(s)Ax ds - A \int_0^t T(s)x ds.$$

Segue de (5.7) que $z \in C(0, \tau; X)$. Claramente $z(0) = 0$. Seja $v \in D(A^*)$.

Note que para todo $v \in D(A^*)$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle u(t), v \rangle &= \langle u(t), A^*v \rangle + \langle f(t), v \rangle, \quad u(0) = x \\ \frac{d}{dt} \langle u_0(t), v \rangle &= \langle u_0(t), A^*v \rangle + \langle f(t), v \rangle, \quad u_0(0) = 0 \end{aligned}$$

e portanto, para $T(t)x = u(t) - u_0(t)$,

$$\frac{d}{dt} \langle T(t)x, v \rangle = \langle T(t)x, A^*v \rangle.$$

Também,

$$z(t) := \int_0^t T(s)Ax ds - A \int_0^t T(s)x ds \stackrel{(5.7)}{=} \int_0^t T(s)Ax ds + x - T(t)x.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle z(t), v \rangle &= \frac{d}{dt} \left\langle \int_0^t T(s)Ax ds, v \right\rangle + \frac{d}{dt} \langle x - T(t)x, v \rangle \\ &= \langle T(t)Ax, v \rangle - \langle T(t)x, A^*v \rangle \\ &\stackrel{(5.8)}{=} \left\langle A \left(x + \int_0^t T(s)Ax ds \right), v \right\rangle - \langle T(t)x, A^*v \rangle \\ &= \langle z(t), A^*v \rangle. \end{aligned}$$

Mas segue de nossas hipóteses que a equação $\frac{d}{dt}z(t) = Az(t)$, $z(0) = 0$, tem apenas a solução fraca zero. Assim,

$$\int_0^t T(s)Ax ds = A \int_0^t T(s)x ds, \quad t \in [0, \tau].$$

Portanto, por (5.7),

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t} [T(t)x - x] = Ax$$

e, então, $x \in D(B)$.

Portanto, $D(A) \subseteq D(B)$ e o Teorema está completo. ■

Referências

- [1] BALL, J.M. *Strongly Continuous Semigroups, Weak Solutions, and the Variation of Constants Formula*, Proceedings of the American Mathematical Society, v. 63, n. 2, p. 370-373, 1977.
- [2] BREZIS, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer: New York, 2010.
- [3] GOMES, A.M. *Semigrupos de Operadores Lineares e Aplicações às Equações de Evolução*, 2.ed. UFRJ: Rio de Janeiro, 1999. 164 p.
- [4] KREYSZIG, E. *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley: New York, 1978. 688 p.
- [5] LIMA, E.L. *Curso de Análise*, 13.ed. IMPA: Rio de Janeiro, 2011. v.1. 431 p.
- [6] OLIVEIRA, C.R. *Introdução à Análise Funcional*, 2.ed. IMPA: Rio de Janeiro, 2008. 262 p.
- [7] ROYDEN, H.L. *Real Analysis*, The Macmillan Company, 1971.
- [8] TAYLOR, A.E., LAY, D.C. *Introduction to Functional Analysis*, John Wiley: New York, 1980.