



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Os Teoremas de Índice de Poincaré

Mauro Viegas da Silva

Dissertação de Mestrado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho - Câmpus de Rio Claro, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora
Profª. Dra. Alice Kimie Miwa Libardi

2011

514	da Silva, Mauro Viegas
S586t	Os Teoremas de Índice de Poincaré/ Mauro Viegas da Silva- Rio Claro: [s.n.], 2011. 59 f. Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Orientadora: Alice Kimie Miwa Libardi 1. Topologia. 2. Campo Vetorial. 3. Número de Voltas. 4. Homologia. 5. Característica de Euler. I. Título

Ficha Catalográfica elaborada pela STATI - Biblioteca da UNESP
Campus de Rio Claro/SP

TERMO DE APROVAÇÃO

Mauro Viegas da Silva
OS TEOREMAS DE ÍNDICE DE POINCARÉ

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática no Programa de Pós-Graduação em Matemática Universitária do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” - Câmpus de Rio Claro, pela seguinte banca examinadora:

Profa. Dra. Alice Kimie Miwa Libardi
Orientadora

Profa. Dra. Suzinei Aparecida Siqueira Marconato
IGCE/UNESP/Rio Claro (SP)

Profa. Dra. Karina Schiabel Silva
CCET/UFSCar/São Carlos (SP)

Rio Claro, 01 de março de 2011

*À minha mãe,
à minha esposa
e ao meu filho.*

Agradecimentos

À Professora Dra. Alice Kimie Miwa Libardi, pela orientação deste trabalho sempre com ética e dedicação.

Aos professores e funcionários do Departamento de Matemática do IGCE.

À minha mãe Antônia sempre rezando por este filho, à minha esposa Tatiana companheira de todas as horas e ao meu filho Mateus pela compreensão das mudanças que sempre tivemos que fazer.

Aos novos amigos que conquistamos em Rio Claro.

E acima de tudo à Deus.

*On a dit souvent que la géométrie est l'art de
bien raisonner sur les figures mal faites.
Henri Poincaré*

Resumo

O objetivo deste trabalho é apresentar uma demonstração combinatória dos teoremas de Índice de Poincaré, a saber:

"Sejam D um disco e γ seu bordo. Seja V um campo vetorial contínuo sobre D com pontos críticos isolados P_1, P_2, \dots, P_n pertencentes ao interior de D . Se V nunca se anula em γ , então

$$W(\gamma) = I(P_1) + I(P_2) + \dots + I(P_n),$$

onde $I(P_i)$ é o índice do ponto crítico P_i e $W(\gamma)$ o número de voltas de V sobre γ ."

"Seja V um campo vetorial tangente contínuo sobre uma superfície compacta, conexa e orientável S . Então a soma dos índices dos pontos críticos de V é igual à característica de Euler de S ."

Palavras-chave: Topologia, Campo Vetorial, Número de Voltas, Homologia, Característica de Euler.

Abstract

In this work we present a combinatorial proof for the Poincaré index theorems.

"Let V be a continuous vector field. Let D be a cell and γ its boundary. Supposing that V is not zero on γ , then

$$W(\gamma) = I(P_1) + I(P_2) + \dots + I(P_n)$$

where P_1, P_2, \dots, P_n are the critical points of V inside D , $I(P_i)$ is the index of P_i , and $W(\gamma)$ is the winding number of V on γ ."

"Let V be a continuous tangent vector field on a compact, connected, orientable surface S . Then the sum of the indexes of the critical points of V equals the Euler characteristic of S ."

Keywords: Topology, Vector Field, Winding number, Homology, Euler characteristic.

Sumário

1	Preliminares	9
2	Campo Vetorial	13
2.1	Retrato de Fase	15
2.2	Exemplos de Retratos de Fase	17
2.3	Pontos Críticos Isolados	19
3	O Primeiro Teorema do Índice de Poincaré	21
3.1	Lema de Sperner e o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer	21
3.2	Lema do Índice	25
3.3	Número de Voltas	27
3.4	Caminhos Integrais Fechados	32
3.5	O Primeiro Teorema do Índice de Poincaré	33
4	Homologia de um Complexo	35
4.1	Complexos	35
4.2	Grupos de Homologia de um Complexo	41
4.3	Invariância	43
4.4	Números de Betti	46
4.5	A característica de Euler	46
5	O Segundo Teorema do Índice de Poincaré	49
5.1	Campo Vetorial Gradiente	49
5.2	O segundo teorema do índice de Poincaré	52
	Referências	59

Introdução

O objetivo principal de uma dissertação de um programa de mestrado profissional é a formação em Matemática de um professor que irá atuar no ensino superior. O assunto escolhido, Os Teoremas de Índice de Poincaré, possibilitou que estudos em alguns tópicos de Análise, de Álgebra e de Topologia Combinatória fossem realizados e seus resultados interligados. A intuição geométrica foi bastante encorajada, porém sempre que possível, exigiu-se a formalização dos conceitos e o rigor nas demonstrações. Enunciamos os dois Teoremas de Índice de Poincaré:

"Sejam D um disco e γ seu bordo. Seja V um campo vetorial contínuo sobre D , com pontos críticos isolados P_1, P_2, \dots, P_n pertencentes ao interior de D . Se V nunca se anula em γ , então

$$W(\gamma) = I(P_1) + I(P_2) + \dots + I(P_n),$$

onde $I(P_i)$ é o índice do ponto crítico P_i e $W(\gamma)$ o número de voltas de V sobre γ ."

"Seja V um campo vetorial tangente contínuo sobre uma superfície compacta, conexa e orientável S . Então a soma dos índices dos pontos críticos de V é igual a característica de Euler de S ."

Este trabalho está organizado da seguinte maneira:

Inicialmente, apresentamos alguns resultados em Álgebra Linear, necessários para a definição de Característica de Euler.

O Capítulo 2, é dedicado à apresentação de alguns conceitos em Equações Diferenciais, tais como Campo Vetorial, Pontos Críticos Isolados e Retrato de Fase, que são os elementos dos Teoremas de Índice de Poincaré.

No Capítulo 3, demonstramos o Primeiro Teorema do Índice de Poincaré, usando o Lema de Sperner, que também é usado na demonstração do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer. Apresentamos também as definições do número de voltas de um campo vetorial e os índices dos pontos críticos isolados.

No capítulo 4, introduzimos a Característica de Euler que é usada na demonstração do Segundo Teorema de Índice de Poincaré. Para a definição da Característica de Euler são necessários os conceitos de complexos e seus grupos de homologia.

Finalmente no Capítulo 5 apresentamos a demonstração do Segundo Teorema do Índice de Poincaré, usando para sua demonstração alguns resultados sobre Campo Vetorial Gradiente.

1 Preliminares

Neste capítulo recordamos alguns conceitos de Álgebra Linear necessários ao desenvolvimento do trabalho.

Definição 1.1. *Seja G um grupo idempotente, isto é para todo $x \in G$, $x^2 = e$. Seja $A = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ um subconjunto de G . Um elemento x de G **depende** de A se x é uma combinação linear dos elementos de A , isto é,*

$$x = a_1y_1 + a_2y_2 + \dots + a_ny_n.$$

Vamos considerar para nossos propósitos que $G = \mathbb{Z}_2$, o que implica que cada coeficiente $a_i \in \mathbb{Z}$ é zero ou um.

É perfeitamente possível considerar quaisquer valores para os coeficientes a_1, \dots, a_n . Porém, em grupos idempotentes, coeficientes maiores que zero ou um são inúteis, pois por exemplo, $2y = y + y = 0$, $3y = y + 2y = y$, $4y = 0$, e assim por diante.

Definição 1.2. *Um conjunto A é independente se, e somente se, quando qualquer combinação linear $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$ dos elementos de A é igual a zero, então todos os coeficientes a_1, a_2, \dots, a_n são nulos.*

Teorema 1.3. *A teoria de dependência é baseada nas seguintes propriedades fundamentais:*

- (a) *Cada elemento do conjunto A depende de A .*
- (b) *Se cada elemento do conjunto A depende de um segundo conjunto B , então qualquer elemento $x \in G$ depende de A e também de B .*
- (c) *Se x depende do conjunto $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ mas não depende de $\{y_1, y_2, \dots, y_{n-1}\}$, então y_n depende do conjunto $\{y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, x\}$.*

Demonstração. Provaremos o item (c) que é chamado o **axioma da troca**. Seja $x \in G$ dependente de $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$. Então x é uma combinação linear dos elementos y_1, y_2, \dots, y_n de modo que, $x = a_1y_1 + a_2y_2 + \dots + a_ny_n$, onde cada coeficiente a_1, a_2, \dots, a_n é zero ou um. Se o coeficiente a_n é zero, então x é também dependente do menor conjunto $\{y_1, y_2, \dots, y_{n-1}\}$. Supondo que x não é dependente de

$\{y_1, y_2, \dots, y_{n-1}\}$, segue-se que a_n é igual a um. Assim

$$x = a_1y_1 + a_2y_2 + \dots + a_{n-1}y_{n-1} + y_n$$

Adicionando $x, y_n \in G$ a ambos os lados desta equação e como G é idempotente temos

$$y_n = a_1y_1 + a_2y_2 + \dots + a_{n-1}y_{n-1} + x$$

Portanto, y_n depende do conjunto $\{y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, x\}$. \square

Definição 1.4. *Sejam G um grupo idempotente e A um subconjunto de G . O subconjunto A **gera** G se cada elemento de G depende de A . O subconjunto A é **independente** se nenhum elemento de A depende de outros elementos de A . Um conjunto independente que gera G é chamado uma **base** para G .*

Teorema 1.5. *Seja A um conjunto finito gerando G . Então A contém um subconjunto B que é uma base para G .*

Demonstração. Seja $A = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$. Suponha que A não é ainda uma base, o que significa que A não é independente. Então algum elemento de A , digamos y_1 , depende do conjunto $A' = \{y_2, y_3, \dots, y_n\}$ composto pelos elementos restantes de A . Pela propriedade (a) cada elemento de A depende do conjunto A' . Pela propriedade (b), cada elemento que depende de A também depende de A' assim A' ainda gera G . Supondo que A' não seja independente, podemos desprezar algum elemento de A' que depende de outros elementos, obtendo um subconjunto A'' . Pelo argumento dado, A'' ainda gera G . Continuando desta forma, obtemos um subconjunto independente B de A que gera G . Logo, B é a base desejada. \square

Observe que na prova do teorema 1.5 a base B é construída excluindo os elementos de A que não são necessários para gerar G , são os elementos que dependem de outros elementos do conjunto. A base B é assim um subconjunto minimal de A e que ainda gera G .

Teorema 1.6. *Quaisquer duas bases para G têm o mesmo número de elementos. Este número é chamado de posto de G .*

Demonstração. Sejam $A = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ e $B = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ duas bases para G . Provaremos que $m = n$. O elemento x_1 é dependente de B , assim como todos os elementos de G . Vamos escolher um elemento y_k de B de modo que x_1 depende do subconjunto $\{y_1, y_2, \dots, y_k\}$ mas não dependa de $\{y_1, y_2, \dots, y_{k-1}\}$. Tal elemento y_k deve sempre existir; k é o menor número tal que x_1 é dependente de $\{y_1, y_2, \dots, y_k\}$. Pelo axioma da troca, y_k é dependente de $\{y_1, y_2, \dots, y_{k-1}, x_1\}$. Seja B_1 o conjunto B com x_1 no lugar de y_k , isto é, $B_1 = \{x_1, y_1, y_2, \dots, y_{k-1}, y_{k+1}, \dots, y_n\}$. Cada elemento de B depende do conjunto B_1 ; portanto pela propriedade (b) do teorema 1.3 B_1 gera

G . Deste modo temos um conjunto que gera B_1 e que difere de B pela troca de um elemento de A .

Considere o próximo elemento x_2 de A . Já que B_1 gera G , x_2 depende de B_1 . Seja $\{x_1, y_1, y_2, \dots, y_i\}$ uma porção inicial de B_1 de modo que x_2 depende deste conjunto mas não deste conjunto menos y_i . Tal conjunto deve incluir um elemento y , desde que o conjunto A (de x 's) seja independente. Então como no parágrafo anterior, o conjunto B_2 , obtido pela substituição de y_i em B_1 por x_2 , ainda gera G . Continuando desta forma obtemos a sequência B_1, B_2, \dots, B_m de todos os conjuntos que geram G . Cada B_j sendo obtido a partir de seu antecessor pela troca de um elemento a partir do conjunto original B com o elemento x_j a partir de A . Esta substituição é feita cada vez que possível pelo fato que x_j deve depender dos conjuntos precedentes B_{j-1} porque A é independente. Finalmente chegamos ao conjunto B_m , que deve conter A como um subconjunto. Assim, $m \leq n$. Note que até o momento a prova usou o fato de que B gera G embora A seja independente. Invertendo os papéis de A e B , usando o fato de que A gera G embora B seja independente, encontramos $n \leq m$. Portanto $m = n$ como desejado. \square

Teorema 1.7. *Seja f um homomorfismo do grupo G para o grupo H . Então o posto de f somado à nulidade de f é igual ao posto de G .*

Demonstração. Denotaremos o kernel de f por $Ker(f)$ e a imagem de f por $Im(f)$. O posto k do $Ker(f)$ chamaremos de nulidade de f e r o posto da $Im(f)$ será chamado de posto de f . Seja $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ uma base para o $Ker(f)$. Seja $\{x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n\}$ o conjunto de elementos de G que, quando adicionado a $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ produz uma base para G , sendo n o posto de G .

Devemos mostrar que $n - k = r$. Isto é concluído mostrando que os $n - k$ elementos de $H : y_{k+1} = f(x_{k+1}), \dots, y_n = f(x_n)$, formam uma base para $Im(f)$. De fato devemos provar que:

- (a) cada elemento da $Im(f)$ depende de $\{y_{k+1}, \dots, y_n\}$
- (b) o conjunto $\{y_{k+1}, \dots, y_n\}$ é independente.

Para provar (a), seja y qualquer elemento da $Im(f)$. Então y é igual a $f(x)$ para algum elemento x em G . Como um elemento de G , x pode ser expresso como a combinação linear $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n$ da base $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ de G . Então

$$\begin{aligned} y = f(x) &= f(a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n) = a_1f(x_1) + a_2f(x_2) + \dots + a_nf(x_n) \\ &= a_{k+1}y_{k+1} + \dots + a_ny_n \end{aligned}$$

desde de que $f(x_1) = f(x_2) = \dots = f(x_k) = 0$. Isto prova que y depende de $\{y_{k+1}, \dots, y_n\}$.

Para provar (b), suponha que o conjunto $\{y_{k+1}, \dots, y_n\}$ não seja independente. Então existe uma combinação linear $a_{k+1}y_{k+1} + \dots + a_ny_n = 0$, onde pelo menos um

dos coeficientes não seja zero. Então

$$\begin{aligned} f(a_{k+1}x_{k+1} + \cdots + a_n x_n) &= a_{k+1}f(x_{k+1}) + \cdots + a_n f(x_n) \\ &= a_{k+1}y_{k+1} + \cdots + a_n y_n = 0. \end{aligned}$$

Em outras palavras, os elementos $a_{k+1}x_{k+1} + \cdots + a_n x_n$ de G estão no kernel de f . Desde que $\{x_1, \dots, x_k\}$ seja uma base para o $\text{Ker}(f)$, temos que $a_{k+1}x_{k+1} + \cdots + a_n x_n = a_1 x_1 + \cdots + a_k x_k$ para alguns coeficientes a_1, a_2, \dots, a_k . De fato $a_1 x_1 + \cdots + a_k x_k + a_{k+1}x_{k+1} + \cdots + a_n x_n = 0$, onde nem todos os coeficientes nesta expressão são iguais a zero. Isto contradiz o fato de que $\{x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n\}$ seja independente. Portanto, o conjunto $\{y_{k+1}, \dots, y_n\}$ é também independente. \square

Teorema 1.8. *Seja H um subgrupo de G . Então o posto de G/H é igual ao posto de G subtraído do posto de H .*

Demonstração. A prova é similar à prova do teorema 1.7. Primeiramente escolhemos uma base $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ para H onde k é o posto de H e estendemos esta base a uma base $\{x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n\}$ para G , onde n é o posto de G . Devemos provar que o posto de G/H é $n - k$. Isto será realizado provando que $\{x_{k+1}, \dots, x_n\}$ é uma base para G/H . De fato devemos mostrar que:

- (a) todo elemento de G depende (*mod* H) de $\{x_{k+1}, \dots, x_n\}$
- (b) $\{x_{k+1}, \dots, x_n\}$ é independente (*mod* H).

Para provar (a), seja x qualquer elemento de G . Então para coeficientes adequados a_1, \dots, a_n , $x = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n$, já que $\{x_1, \dots, x_n\}$ é uma base para G . Logo, x_1, x_2, \dots, x_k estão todos contidos em H , temos $x \sim a_{k+1}x_{k+1} + \cdots + a_n x_n \pmod{H}$. De fato, x depende de $\{x_{k+1}, \dots, x_n\} \pmod{H}$.

Para provar (b), suponha que $\{x_{k+1}, \dots, x_n\}$ não seja independente (*mod* H). Então não haveria coeficientes a_{k+1}, \dots, a_n não todos nulos tal que $a_{k+1}x_{k+1} + \cdots + a_n x_n \sim 0 \pmod{H}$. Desde que $\{x_1, \dots, x_k\}$ seja uma base de H , isto implica que existem coeficientes a_1, \dots, a_k tal que $a_{k+1}x_{k+1} + \cdots + a_n x_n = a_1 x_1 + \cdots + a_k x_k$. Como na prova do teorema 1.7, isto contradiz a independência da base $\{x_1, \dots, x_n\}$ de G , de modo que $\{x_{k+1}, \dots, x_n\}$ deve ser independente (*mod* H). \square

2 Campo Vetorial

Neste capítulo faremos uma breve exposição sobre Campos Vetoriais, Retrato de Fase e Pontos Críticos Isolados, com o objetivo de introduzir os elementos das hipóteses dos Teoremas de Índice de Poincaré.

Definição 2.1. *Um campo vetorial V em um subconjunto D do plano é uma função $V : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, que associa a cada ponto P de D um vetor $V(P)$ no plano, com origem em P .*

Se considerarmos os vetores com origem no ponto $(0, 0)$, $V(P)$ poderá então ser descrito pelas coordenadas de seu extremo final,

$$V(P) = (F(x, y), G(x, y)) \quad (2.1)$$

onde F e G são funções a valores reais de $P = (x, y)$ (veja figura 2.1).

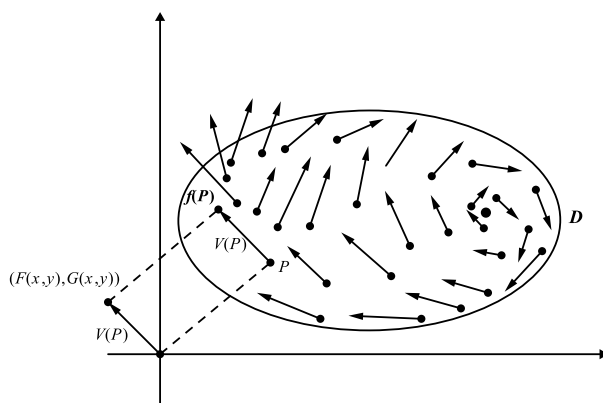


Figura 2.1 Campo vetorial

O campo vetorial V é **contínuo** quando a aplicação $V : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ é contínua.

Seja $f(P)$ o ponto final do vetor $V(P)$ localizado em P . A seguinte aplicação $f : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ define o vetor soma de P e $V(P)$:

$$f(P) = P + V(P) = (x + F(x, y), y + G(x, y)). \quad (2.2)$$

Como a soma de aplicações contínuas é contínua, temos que f é contínua sempre que V for um campo vetorial contínuo. Reciprocamente, dada uma aplicação $f : D \rightarrow \mathbb{R}^2$, o campo vetorial V pode ser definido considerando-se $V(P)$ localizado no ponto P e extremidade $f(P)$. O campo vetorial V será contínuo se a aplicação f o for. A aplicação f é chamada de **aplicação correspondente** ao campo vetorial V .

Os campos de forças resultantes da gravitação e do eletromagnetismo são campos vetoriais bem como o campo de velocidades de um fluido em movimento. Estes exemplos são usualmente estudados do ponto de vista das equações diferenciais.

Um campo vetorial $V : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ determina um sistema de equações diferenciais nas duas incógnitas x e y . Estas variáveis são tomadas para representar a posição de um ponto movendo-se no plano e dependendo de uma terceira variável, o tempo t . O sistema de equações diferenciais toma a forma:

$$\begin{cases} x' = F(x, y) \\ y' = G(x, y) \end{cases} \quad (2.3)$$

onde a diferenciação é em relação a t . Tal sistema é dito autônomo pois as funções F e G não dependem explicitamente da variável t .

Uma solução do sistema (2.3) em $I \subset \mathbb{R}$ consiste de duas funções $x(t)$ e $y(t)$, continuamente diferenciáveis em I e que satisfazem (2.3), para todo $t \in I$. E pode ser vista como as equações paramétricas que descrevem, por exemplo, a posição de uma molécula de gás ou líquido, a órbita de um planeta ou de um elétron. O vetor $V(P)$ representa o vetor tangente à curva dada pela solução de (2.3) no ponto $P = (x, y)$.

Exemplo 2.2. Considere o campo vetorial $V : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definido por $V(x, y) = (2, 1)$. Todos os vetores $V(P)$ são iguais e assim a aplicação correspondente $f(x, y) = (x + 2, y + 1)$ é uma translação (ver figura 2.2a). O sistema de equações diferenciais associado, $x' = 2$, $y' = 1$, que tem soluções $x = 2t + h$, $y = t + k$, $h, k \in \mathbb{R}$. As curvas dadas pelas soluções (tracejadas na figura 2.2a) constituem uma família de retas com inclinação $\frac{1}{2}$.

Exemplo 2.3. Considere o campo vetorial $V(x, y) = (-y, x)$. A aplicação correspondente $f(x, y) = (x - y, x + y)$ é uma rotação de 45° no sentido anti-horário composta com um alongamento a partir da origem por um fator $\sqrt{2}$. O sistema de equações diferenciais $x' = -y$, $y' = x$ é equivalente a $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ onde A possui dois autovalores i e $-i$ com autovetores $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ e $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ respectivamente. Da teoria de equações diferenciais temos que as soluções desse sistema são $x(t) = ke^{it} \cdot v_1$ e $y(t) = ke^{-it} \cdot v_2$. Logo, as soluções reais do sistema são $x = k\cos(t)$, $y = k\sin(t)$. As curvas soluções são círculos centrados na origem. Alguns vetores são esboçados na figura 2.2b e são tangentes a cada ponto do campo vetorial.

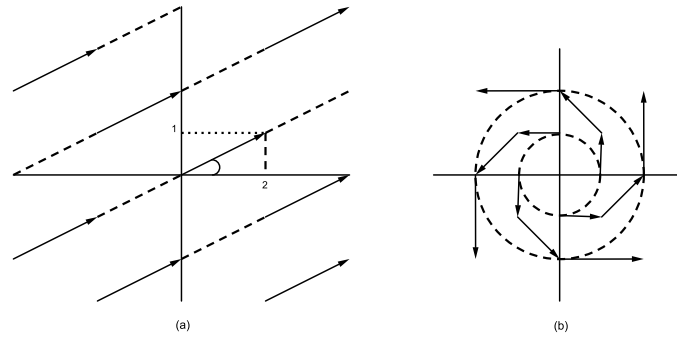


Figura 2.2

2.1 Retrato de Fase

Para conveniência do leitor enunciaremos abaixo o teorema de existência e unicidade de soluções para equações diferenciais, dado um valor inicial. Veja a demonstração em [1]

Teorema 2.4 (Existência e Unicidade). *Seja $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ uma função contínua definida em um aberto Ω do plano (x, y) . Suponhamos que a derivada parcial com relação à segunda variável, $f_y : \Omega \mapsto \mathbb{R}$, seja contínua também. Então, para cada $(x_0, y_0) \in \Omega$, existem um intervalo aberto I contendo x_0 e uma única função diferenciável $\phi : I \mapsto \mathbb{R}$ com $(x, \phi(x)) \in \Omega$ para todo $x \in I$, que é solução do problema de valor inicial (P.V.I.)*

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y) \\ y(x_0) &= y_0. \end{aligned}$$

Considere o sistema de equações diferenciais

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= F(x, y) \\ \frac{dy}{dt} &= G(x, y) \end{aligned} \tag{2.4}$$

determinado por um campo vetorial contínuo $V(x, y) = (F(x, y), G(x, y))$ em alguma região D do plano. Em relação à variável independente t considerada como um parâmetro, as soluções formam uma família de *caminhos* no plano, chamadas **curvas integrais** do sistema. De acordo com o teorema 2.4, exatamente uma destas curvas integrais passa por cada ponto P . O conjunto formado por estas curvas é chamado **retrato de fase** do sistema de equações diferenciais. Um exemplo é dado na figura 2.3.

Poincaré descobriu que a natureza do retrato de fase é determinado pelos **pontos críticos**, isto é os pontos P tais que $V(P) = 0$. Se $V(P) = 0$ com $P = (\bar{x}, \bar{y})$, temos que a função constante $(x(t), y(t)) = (\bar{x}, \bar{y})$ é solução de (2.4), pois $(\dot{x}(t), \dot{y}(t)) = (0, 0) =$

$V(x(t), y(t)), t \in \mathbb{R}$. E o caminho correspondente é representado no retrato de fase por um ponto. Se P não é um ponto crítico, então P é denominado **ponto regular**. Na figura 2.3 existem quatro pontos críticos. Na figura, o topo é um centro, isto é, as curvas integrais "próximas" são fechadas e não passam pelo ponto crítico.

Definição 2.5. Um ponto crítico é chamado **nó** se todas as curvas integrais "próximas" a este ponto têm por extremidade o próprio ponto.

Dizemos que um ponto crítico é **estável** quando podemos encontrar uma vizinhança desse ponto da qual uma vez dentro nenhuma curva integral sai. Assim a órbita de um ponto próximo a um ponto crítico estável permanece próximo a este ponto. Observe que o centro é um ponto crítico estável. Uma importante classe de pontos críticos são os **pontos de sela**, nos quais existem órbitas próximas que se afastam dele e outras que se aproximam. O ponto de sela é não-estável.

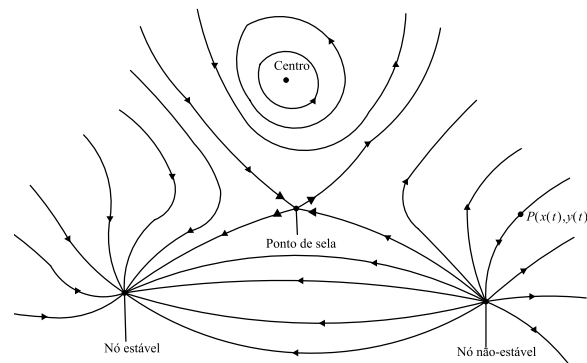


Figura 2.3 Um retrato de fase

Uma das mais importantes características do retrato de fase são a quantidade e a disposição dos pontos críticos e a sua estabilidade ou não estabilidade.

Estas propriedades são parte de uma teoria topológica de equações diferenciais desenvolvida por Poincaré. Imagine uma porção do plano representado na figura 2.3 por uma folha de borracha e submetta-a a movimentos do tipo esticar, puxar, mas sem rasgar. Então embora a forma e o comprimento das curvas possam mudar, o número e a natureza dos pontos críticos não mudam. Estas propriedades são propriedades topológicas do retrato de fase, propriedades topológicas do sistema de equações diferenciais.

Exemplo 2.6. Em alguns casos particulares, a curva integral de um campo (ou correspondente sistema de equações diferenciais) pode ser determinada pela solução de uma única equação diferencial:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{G(x, y)}{F(x, y)} \quad (2.5)$$

para y como função de x , ao invés de resolver o sistema 2.4 para x e y em termos de t . Para exemplificar, considere o campo vetorial $V(x, y) = (x, 2y)$. Neste caso, a equação

(2.5), $dy/dx = 2y/x$ é separável, ou seja,

$$\frac{dy}{2y} = \frac{dx}{x}.$$

Integrando, obtemos

$$\ln \left[\frac{\sqrt{y}}{x} \right] = c$$

ou seja,

$$y = e^{2c} \cdot x^2.$$

Portanto, $y = K \cdot x^2$, $K > 0$.

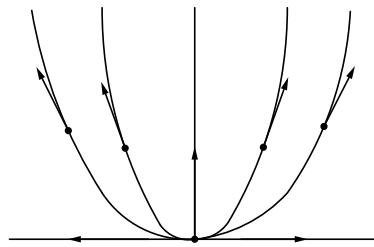


Figura 2.4 Parábolas

Na figura 2.4 estão traçadas algumas curvas integrais para pequenos valores de K e também alguns vetores tangentes às curvas. Para este campo vetorial temos apenas um ponto crítico, localizado na origem, que é um nó não estável. O sentido dos vetores tangentes é determinado por $(x, 2y)$.

2.2 Exemplos de Retratos de Fase

Ainda que usemos apenas um esboço é possível investigar uma série de interessantes retratos de fase.

Considere o campo vetorial $V(x, y) = (F(x, y), G(x, y)) = (2xy, y^2 - x^2 - k^2)$, onde k é uma constante. Para $k \neq 0$ este campo vetorial possui dois pontos críticos, são eles $(0, k)$ e $(0, -k)$. Estes pontos críticos são soluções do sistema $F(x, y) = 2xy = 0$ e $G(x, y) = y^2 - x^2 - k^2 = 0$.

Para esboçar um retrato de fase é suficiente desenhar o campo vetorial ao longo das curvas dadas *separadamente* pelas soluções das equações $F(x, y) = 0$ e $G(x, y) = 0$. Estas curvas são chamadas de **curvas críticas** e se intersectam nos pontos críticos. Neste caso particular as curvas críticas são representadas pelos eixos $x = 0, y = 0$ e os ramos de uma hipérbole.

Ao longo das curvas críticas os vetores tangentes estão na horizontal ou na vertical e portanto fácil de desenhar, conforme foi feito na figura 2.5 com vetores de espessuras

mais grossas. Agora entre as curvas críticas, as direções dos vetores não serão verticais e nem horizontais.

Assim, os vetores contidos nas regiões determinadas pelas curvas críticas, em cada quadrante, apontam para uma mesma direção. O campo vetorial fora das curvas críticas será preenchido com vetores de espessura mais fina e mesmo comprimento. Aqui a magnitude dos vetores não é importante, uma vez que estamos interessados nesses vetores apenas como tangentes às curvas integrais. Os caminhos integrais agora são facilmente esboçados na figura 2.6. Os pontos críticos que encontramos são nós, um é estável e outro é não estável. O retrato de fase representa o fluxo de um ponto crítico para o outro.

Agora suponha a constante k tendendo a zero. Então os dois pontos críticos estão se movendo uma mesma direção e encontrando-se na origem, assim temos o campo vetorial $V(x, y) = (2xy, y^2 - x^2)$ com apenas um ponto crítico o $(0, 0)$. Agora as curvas críticas incluem além dos eixos, duas retas passando pela origem e com inclinação de 45° , proveniente da hipérbole. Nas figuras 2.7 e 2.8 o ponto crítico é um dipolo. Observe que os dois nós foram juntados para formar um único ponto crítico. Isto é expressado dizendo que o dipolo é a **confluência** dos dois nós.

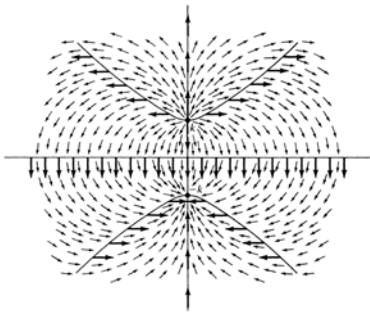


Figura 2.5 O campo vetorial $V(k \neq 0)$

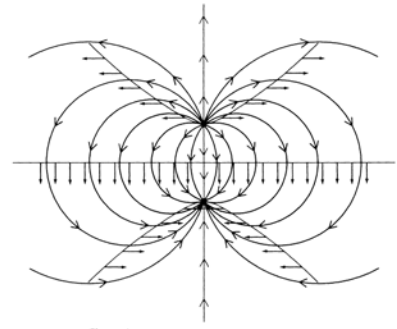


Figura 2.6 O retrato de fase do sistema ($k \neq 0$)

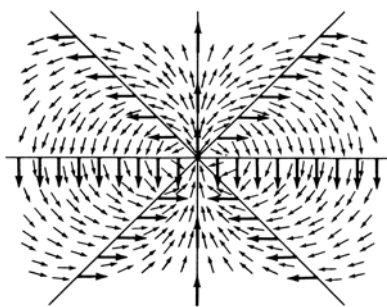


Figura 2.7 O campo vetorial $V(k = 0)$

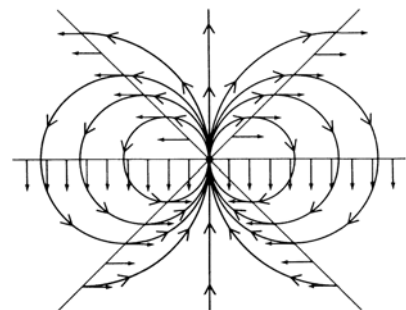


Figura 2.8 O retrato de fase do sistema ($k = 0$)

2.3 Pontos Críticos Isolados

Sejam V um campo vetorial contínuo e P um ponto. Se P é um ponto regular, então $V(P)$ não é zero, logo é possível escolher uma vizinhança de P de modo que V não se anula.

Definição 2.7. Um ponto crítico P é chamado de **ponto crítico isolado** se é possível escolher uma vizinhança de P na qual o campo vetorial V se anula somente em P .

Por exemplo, todos os pontos críticos na figura 2.3 são isolados. Faremos agora um exame dos diferentes tipos de pontos críticos isolados. Em primeiro lugar, consideramos o **centro**, o qual introduzimos anteriormente e um **foco** mostrado na Figura 2.9. Os caminhos integrais de um foco nunca alcançam o ponto crítico mas se aproximam ou se afastam dele em forma de espirais. Os focos podem ser estáveis ou não estáveis. Dizemos que o foco é estável quando os caminhos integrais se aproximam dele, caso contrário é um foco não estável.

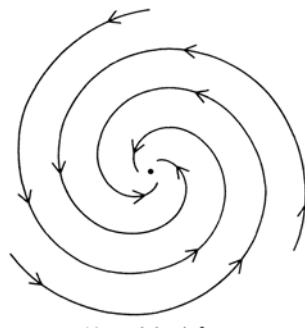


Figura 2.9 Um foco

Outros pontos críticos possuem algum tipo de setor como na figura 2.10.

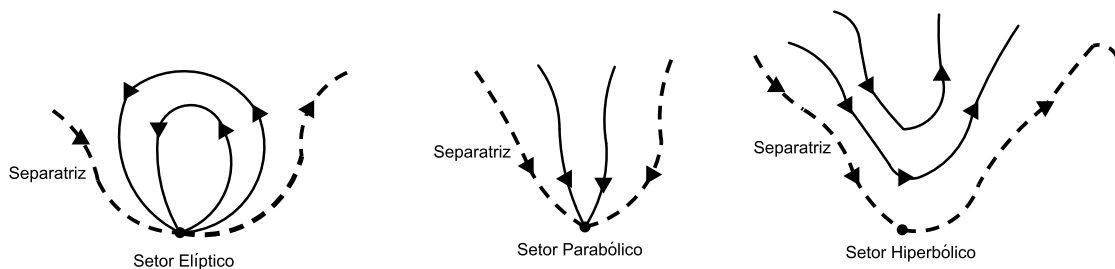


Figura 2.10

Setores elípticos, onde todos os caminhos começam e terminam no ponto crítico; **setores parabólicos**, onde apenas um extremo do caminho está no ponto crítico; **setores hiperbólicos**, onde nenhum dos caminhos alcança o ponto crítico. Chamamos de **separatriz** o caminho que divide cada setor. Usaremos o conceito de setor na demonstração do teorema 5.5.

Na figura 2.11 temos um ponto crítico com os três tipos de setores. Também pode ocorrer um ponto crítico com somente um tipo de setor.

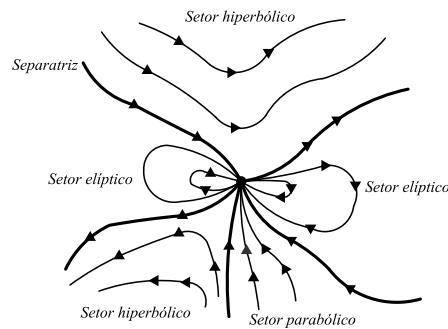


Figura 2.11 Um típico ponto crítico isolado

Quando os setores são apenas parabólicos, os pontos críticos são chamados de **nós** que podem ser estáveis ou não. Os outros tipos de setores são não estáveis. Assim os únicos pontos críticos estáveis são centro, nó e foco estável.

Em alguns casos mais complicados podemos ter um número infinito de setores, com pontos críticos não isolados. De agora em diante assumiremos apenas pontos críticos isolados com um número finito de setores.

Vejamos agora uma representação de um ponto crítico e seus setores em um círculo.

Seja P um ponto crítico isolado exceto o centro ou o foco. Assuma para simplificar que os setores são delimitados pelas separatrizes. Cada setor terá uma medida de ângulo. Na figura 2.12 existem quatro setores: dois parabólicos, um elíptico e outro hiperbólico. Sejam α_1 a medida do ângulo do setor elíptico, β_1, β_2 as medidas dos ângulos dos setores parabólicos e γ_1 a medida do ângulo do setor hiperbólico. O índice de um ponto crítico é dado pela fórmula $I(P) = 1 + (\frac{e-h}{2})$ que é demonstrada usando a definição original de número de voltas.

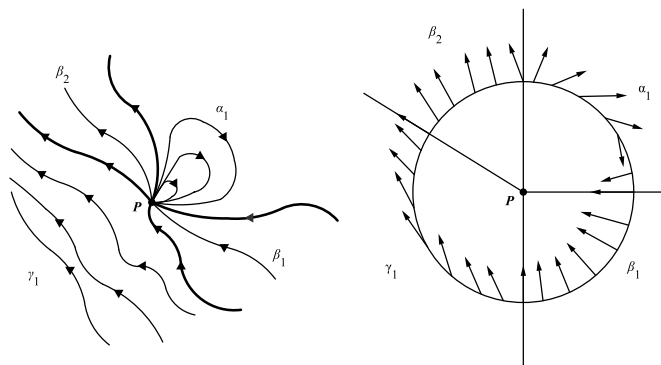


Figura 2.12

3 O Primeiro Teorema do Índice de Poincaré

Neste capítulo, apresentamos alguns resultados da Topologia Combinatória que serão utilizados na demonstração do primeiro teorema de índice de Poincaré. Ressaltamos que na Topologia Combinatória as deduções precisem apenas como ferramentas, processos simples de contagem. Entre estas ferramentas incluímos o Lema de Sperner que é usado na demonstração do Teorema de Índice de Poincaré e que fornece também uma demonstração interessante do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer. O número de voltas de um campo vetorial e os índices dos pontos críticos isolados são relacionados pelo Primeiro Teorema do Índice de Poincaré.

3.1 Lema de Sperner e o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer

Definição 3.1. *Seja f uma aplicação contínua de um espaço topológico X em si mesmo. Se $f(P) = P$ então P é chamado um ponto fixo de f .*

Definição 3.2. *Se toda aplicação contínua f de X em si mesmo tem um ponto fixo, então dizemos que X tem a propriedade do ponto fixo.*

Proposição 3.3. *A propriedade do ponto fixo é uma propriedade topológica.*

Demonstração. Para provar isto, seja $u : X \rightarrow Y$ um homeomorfismo de um espaço X que tem a propriedade do ponto fixo, em um espaço Y . Seja g uma aplicação contínua de Y em Y . Para encontrar um ponto fixo para g , considere a composição $f = u^{-1} \circ g \circ u$. Esta composição é uma aplicação contínua de X em X , que por hipótese tem a propriedade do ponto fixo, logo f tem um ponto fixo P em X , isto é, $u^{-1}(g(u(P))) = f(P) = P$. Então $u(P) = u(u^{-1}(g(u(P)))) = g(u(P))$ o que prova que $u(P)$ é um ponto fixo de g . Portanto Y tem a propriedade do ponto fixo. \square

Teorema 3.4 (Brouwer). *Discos têm a propriedade do ponto fixo.*

A prova deste resultado é bastante longa e está dividida em duas partes. A primeira é uma parte combinatória onde usamos o Lema de Sperner e a segunda parte é dada por um Lema Topológico. Faremos a primeira parte, mas antes apresentaremos alguns resultados preliminares.

Definição 3.5. *Uma triangulação de um polígono W é uma divisão de W em um número finito de triângulos onde cada lado dos triângulos que estejam na fronteira de W é o lado de um só triângulo da subdivisão, e cada lado no interior de W é lado de exatamente dois triângulos da subdivisão.*

Considere um triângulo dividido em subtriângulos conforme figura 3.1. Vamos assumir que todos os triângulos são euclidianos, isto é, seus lados são segmentos de retas. Os vértices da triangulação são agora nomeados com as letras A, B e C ; no triângulo original cada vértice será nomeado com um nome diferente como na figura 3.1. Fazendo restrições a cada lado do triângulo original temos as seguintes situações: no lado AB do triângulo somente serão usadas as letras A 's e B 's, para o lado BC do mesmo triângulo somente B 's e C 's e finalmente para o lado AC somente A 's e C 's. Finalmente, os vértices localizados dentro do triângulo, poderão ser nomeados aleatoriamente. Uma nomeação satisfazendo as condições acima será chamada de **nomeação de Sperner**.

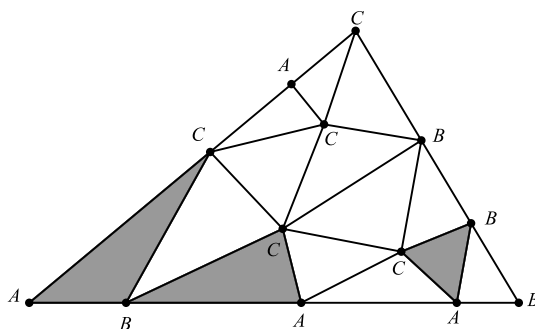


Figura 3.1 Uma nomeação de Sperner.

Definição 3.6. *Chamamos de segmento completo aquele que recebe os dois nomes A e B .*

Definição 3.7. *Chamamos de triângulo completo aquele que recebe todos os três nomes A, B e C .*

A parte combinatória da prova do *Ponto Fixo de Brouwer* está contida no Lema de Sperner.

Lema 3.8 (Lema de Sperner). *Pelo menos um subtriângulo de uma nomeação Sperner recebe todos os três nomes A, B e C .*

Demonstração. Vamos primeiro considerar um problema análogo em dimensão 1: considere uma só aresta nomeada AB e subdividida em segmentos com extremidades nomeadas apenas como A ou B . Seja b o número de segmentos completos. Mostraremos que este número é ímpar. Para fazer isto, vamos contar o número de vértices nomeados com o nome A do seguinte modo: seja a o número de segmentos nomeados AA , assim segmentos deste tipo terão dois vértices com o nome A , já os segmentos completos tem apenas um único vértice com o nome A , o outro tipo de segmento não terá vértice nomeado com o nome A . Então, o número total de vértices nomeados com A contando segmento por segmento é $2a + b$.

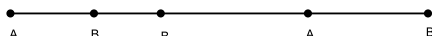


Figura 3.2 Uma nomeação de Sperner em uma dimensão.

Deste total os vértices nomeados com A dentro do segmento original foram contados duas vezes, pois eles pertencem a dois segmentos. Seja c o número de vértices internos nomeados com A , deste modo $2a + b = 2c + 1$, mostrando que b é ímpar.

Voltando agora para dimensão 2, seja b o número de triângulos completos em uma nomeação Sperner. Para mostrar que o número de triângulos completos b é ímpar, vamos contar o número de arestas nomeadas AB dentro e sobre o triângulo original do seguinte modo: seja a o número de triângulos nomeados com ABA ou BAB . Vejam que triângulos destes dois tipos tem duas arestas nomeadas com AB , enquanto que em um triângulo completo temos apenas uma aresta nomeada com AB .

Para outros tipos de triângulos não teremos arestas nomeadas com AB , assim o número total de arestas contando triângulo por triângulo será $2a + b$, mas deste total, as arestas dentro do triângulo original são contadas duas vezes, pois estas arestas pertencem a dois triângulos.

Seja c o número de arestas nomeadas com AB dentro do triângulo original, deste modo teremos realmente contado $2c + d$ arestas, onde d é o número de arestas nomeadas com AB sobre os lados do triângulo original. Portanto, $2a + b = 2c + d$ e conforme foi mostrado acima para dimensão um temos que d é ímpar, logo b também o será, o que completa a demonstração. \square

Prova do Teorema de Brouwer.

Considere o triângulo W como na figura 3.3 e mostremos que este triângulo tem a propriedade do ponto fixo.

Seja f uma aplicação contínua de W em si mesmo, e seja V o seu correspondente campo vetorial. Estamos buscando em W um ponto P onde $V(P) = 0$, pois sendo $f(P) = P + V(P)$, tem-se que P é um ponto fixo de f . Vejamos um argumento intuitivo: já que f é uma aplicação de W em si mesmo, os vetores de V estão todos em W .

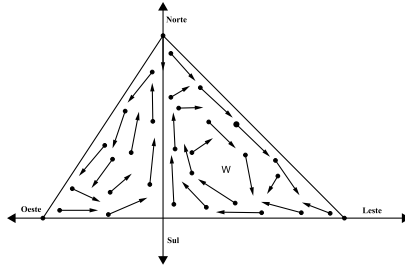


Figura 3.3 Um triângulo W .

Considere uma triangulação de W e nomeie cada vértice da triangulação conforme a direção do vetor V naquele vértice: A para vetores apontando para o nordeste, B para vetores apontando para o noroeste e C para vetores apontando para o sul. Para vetores com direções ambíguas, isto, é norte, leste e oeste, vamos atribuir o nome A para os dois primeiros casos e o nome B para o último caso. O resultado é uma nomeação Sperner. Portanto, pelo lema de Sperner ao menos um dos triângulos da triangulação é completo e os vetores deste triângulo apontam para as três direções (veja figura 3.4).

É importante salientar que W contém triângulos completos com lados arbitrariamente pequenos. A figura 3.5 mostra uma sequência (a),(b) e (c) de triangulações de W onde o tamanho dos triângulos está diminuindo e tendendo a zero, e cada uma destas triangulações contém um triângulo completo.

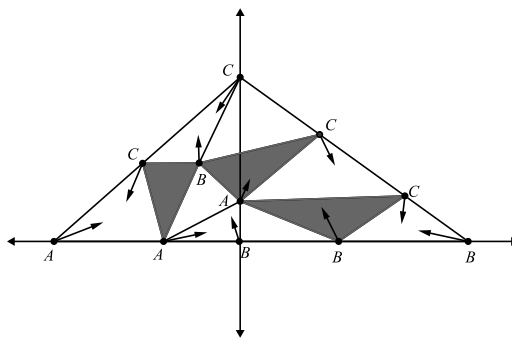


Figura 3.4 Uma nomeação Sperner obtida a partir de um campo vetorial.

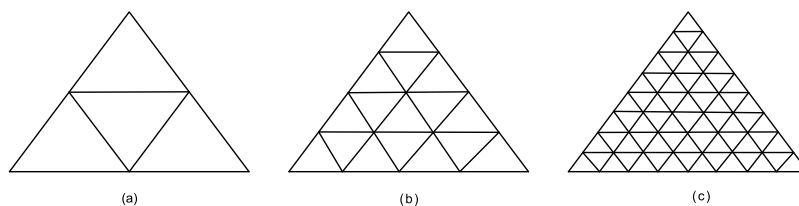


Figura 3.5

Consideremos agora um lema que nos permitirá completar a prova.

Lema 3.9. *Seja um campo vetorial contínuo V definido em um conjunto compacto D . Imagine que cada ponto de D é nomeado conforme a direção do campo vetorial V . Se D contém triângulos completos com lados arbitrariamente pequenos, então existe um ponto P em D onde $V(P) = 0$.*

Demonstração. Pela hipótese, D contém uma sequência de triângulos completos com vértices P_n, Q_n e R_n nomeados com A, B e C respectivamente e tal que os comprimentos dos lados destes triângulos tendem a zero. Deste modo existem três sequências de vértices, $P = \{P_n\}$ apontando para o nordeste, $L = \{Q_n\}$ apontando para o noroeste e $R = \{R_n\}$ apontando para o sul. Pela compacidade existe um ponto P de D próximo de P . Já que os lados dos triângulos tendem a zero, segue que P está também próximo a L e próximo a R . Pela continuidade o vetor $V(P)$ está próximo à sequência de vetores $V(P)$ bem como às sequências de vetores $V(L)$ e $V(R)$. Todos os vetores $V(P)$ apontam para o nordeste. Uma vez que o conjunto de vetores apontando para o nordeste ou seja, para o primeiro quadrante, que é fechado, segue que $V(P)$ está apontando para o nordeste também. Similarmente, $V(P)$ está apontando para o noroeste e apontando para o sul. Uma vez que o vetor nulo é o único vetor apontando para as três direções, então $V(P) = 0$, o que completa a prova do teorema de Brouwer e do lema. \square

3.2 Lema do Índice

Introduziremos agora a noção de índice de um polígono, com o objetivo de definir o número de voltas de um campo vetorial através do índice.

Considere um polígono triangulado com os vértices nomeados de tal maneira que recebam os nomes A, B e C . A figura abaixo dá um exemplo.

Definição 3.10. *A orientação de um triângulo é feita da seguinte maneira: atribuímos $(+1)$ se ABC é no sentido anti-horário em torno do triângulo e (-1) se ABC é no sentido horário. A orientação de uma aresta é feita da seguinte maneira: atribuímos $(+1)$ se AB é no sentido anti-horário em torno do bordo do polígono e (-1) se AB é no sentido horário em torno do bordo do polígono.*

Definição 3.11. *O conteúdo K é definido como sendo o número de triângulos completos, contados levando em conta a orientação.*

Definição 3.12. *O índice I é o número de arestas nomeadas AB em torno do bordo do polígono, contados levando em conta a orientação.*

Lema 3.13 (Lema do índice). *Em um polígono, o índice é igual ao conteúdo.*

Demonstração. Seja S o número de arestas nomeadas AB no bordo e dentro do polígono contado da seguinte maneira: cada triângulo é considerado separado de todos os outros e suas arestas AB são contadas $(+1)$ ou (-1) de acordo com a orientação.

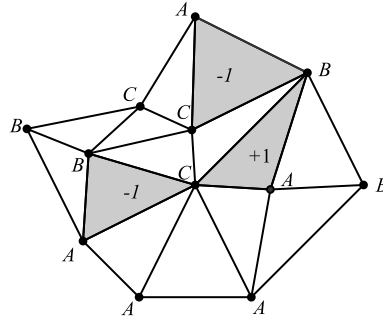


Figura 3.6 Polígono triangulado

Mostraremos que $K = S = I$. Para a primeira equação, isto, é $K = S$, considere um triângulo completo do tipo ABC como na figura 3.7a. Este triângulo só tem uma aresta de orientação positiva e assim contribui $(+1)$ para S , do mesmo modo que sendo um triângulo completo contribui $(+1)$ para o conteúdo K .

Agora vamos considerar um triângulo do tipo AAB como na figura 3.7b. Este triângulo tem duas arestas AB , uma com orientação positiva e outra com orientação negativa, e assim a contribuição será zero para S e contribuirá com zero para K , pois este triângulo não é completo. Pesquisando todas as possibilidades de triângulos, verifica-se que cada triângulo é contado da mesma forma em S como em K ; portanto, $K = S$.

Agora considere uma aresta nomeada AB . Se esta aresta estiver dentro do polígono então, esta aresta é uma aresta de dois triângulos, sendo que em um dos triângulos contará $(+1)$ enquanto em outro contará (-1) . Logo estas arestas não contribuem em nada para S . Mas, as arestas no bordo do polígono são contadas uma única vez em S , assim como para o índice I . Portanto, $S = I$. \square

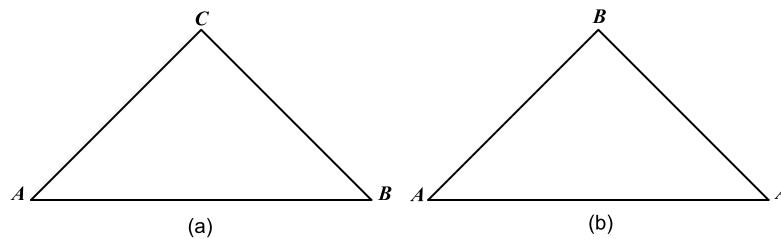


Figura 3.7

3.3 Número de Voltas

Considere um campo vetorial contínuo V ao longo de uma curva fechada γ e suponha que V nunca se anule em γ . Imagine um ponto P caminhando sobre a curva γ uma vez no sentido anti-horário. Durante o percurso $V(P)$ fará algumas voltas orientadas.

Definição 3.14. Chamamos de **número de voltas de V em γ** a soma algébrica das voltas orientadas positivamente se caminharem no sentido anti-horário e negativamente se caminharem no sentido horário sobre γ e será denotado por $W(\gamma)$.

O número de voltas será nossa ferramenta principal no estudo das equações diferenciais. Como veremos, também contém informações sobre a atividade do campo de vetores *no interior de γ* . Posteriormente, uma definição de número de voltas será feita de forma precisa. Poincaré propôs um método alternativo para contar o número de voltas, em vez de manter o controle do vetor $V(P)$, quando P percorre a curva γ olhamos apenas para uma direção particular escolhida e registramos somente o número de vezes que o vetor $V(P)$ aponta nessa direção.

Definição 3.15. Chamamos **número de voltas ao número de vezes que o vetor $V(P)$ passa por vetores apontando em uma direção específica (digamos norte)**.

Se o vetor $V(P)$ passa pela direção escolhida indo no sentido anti-horário, contamos $(+1)$ e contamos (-1) se o vetor $V(P)$ passa pela direção escolhida no sentido horário. E contamos zero se o vetor $V(P)$ vem até a direção escolhida e, em seguida, retorna de volta em sentido contrário. Note que a definição 3.15 terá um problema se o campo vetorial oscilar próximo da direção norte. Este método de contar o número de voltas pode ser aperfeiçoado.

Primeiro vamos particionar γ em um número finito de pontos P_i , depois ligamos os pontos P_i por segmentos de retas. Os pontos da subdivisão P_i são então nomeados de acordo com a direção dos vetores $V(P_i)$ usando as mesmas convenções sobre os nomes ABC como na prova do teorema do ponto fixo de Brouwer. Agora, se os pontos P_i forem escolhidos suficientemente próximos, quando o vetor $V(P)$ passa pela vertical em sentido anti-horário aparecerá uma aresta nomeada AB , e quando o vetor passa pela vertical indo no sentido horário aparecerá uma aresta nomeada BA . Portanto, o número de voltas poderá ser contado como no Lema do Índice. Os casos onde o vetor atinge a vertical e recua também são contados corretamente desta forma: corresponderá a uma sequência de pontos nomeados AAA ou BAB e contribuirá com zero para o índice.

O índice poderia agora ser adotado como a definição do número de voltas exceto para o problema de decidir quão próximo os pontos da subdivisão $\{P_i\}$ devem estar de modo que nenhum circuito do vetor $V(P)$ seja desperdiçado.

Definição 3.16. Dizemos que uma subdivisão $\{P_i\}$ de γ é ϵ -denso se qualquer ponto inserido entre dois pontos da subdivisão tem distância menor que ϵ dos extremos da subdivisão.

Intuitivamente está claro que quanto mais densa a subdivisão (isto é, quanto menor o valor de ϵ), provavelmente $I = W(\gamma)$. Uma pergunta seria, quão densa uma subdivisão seria necessária? Uma resposta é dada no seguinte teorema.

Teorema 3.17. *Seja V um campo vetorial contínuo definido em um caminho fechado γ , e assumamos que V nunca se anule em γ . Para qualquer subdivisão $P = \{P_i\}$ de γ , seja $I(P)$ o índice do polígono P nomeado de acordo com a direção dos vetores V nos vértices de P . Então existe uma constante $\epsilon > 0$ tal que se P e $Q = \{Q_i\}$ são quaisquer duas subdivisões ϵ -denso de γ , então $I(P) = I(Q)$.*

Em outras palavras, existe $\epsilon > 0$ tal que os índices obtidos da subdivisão de γ ϵ -denso ou mais fina coincidem. O número sobre o qual eles todos coincidem deverá ser o número de voltas. Isto leva à seguinte definição.

Definição 3.18. *Dados um caminho fechado γ e um campo vetorial contínuo V tal que nunca se anula em γ , o **número de voltas de V sobre γ** , denotado por $W(\gamma)$, é o índice do polígono nomeado obtido de qualquer subdivisão ϵ -denso de γ , onde ϵ é a constante dada pelo teorema anterior.*

Temos agora três definições de número de voltas. A primeira definição, que envolve o vetor $V(P)$ enquanto o ponto P percorre γ , o número de voltas é essencialmente intuitivo mas é difícil de aplicar. A segunda definição é a mais fácil de aplicar em exemplos e será usado para calcular o número de voltas ao invés da primeira definição (veja o exemplo a seguir). A terceira definição é a mais combinatória das definições e portanto a mais apropriada para uso teórico. Portanto, será a escolhida e aplicada na teoria adiante.

A definição pode ser usada mesmo quando o campo vetorial oscila infinitamente sobre o norte; tudo o que é necessário é a continuidade do campo vetorial. Também é importante ressaltar que o número de voltas é independente da direção escolhida e das convenções de nomeações utilizadas no cálculo do índice. Embora seja intuitivamente óbvia, a prova é bastante técnica. A única desvantagem na nossa definição de número de voltas, é que ela é quase impossível de aplicar em exemplos, porque o teorema sobre o qual é baseado responde somente à metade da pergunta: quão denso deveria ser a subdivisão? O Teorema somente afirma que existe alguma densidade de medida ϵ pelo qual toda subdivisão tem o mesmo índice. Vamos enunciar o Lema Topológico necessário na demonstração do teorema 3.17.

Lema 3.19 (Lema Topológico). *Seja V um campo vetorial contínuo em um conjunto compacto D . Se V nunca se anula em D , então existe uma constante $\epsilon > 0$ tal que todo triângulo completo com vértice em D tem um lado de comprimento maior que ϵ .*

Apresentaremos agora a prova do teorema 3.17. Como caminhos fechados são compactos, aplicando-se o lema 3.19 temos que existe uma constante $\epsilon > 0$ tal que todo

triângulo completo com vértices em γ tem um lado maior que ϵ , que será a constante referida no presente teorema. Seja P uma subdivisão ϵ -denso de γ . Primeiro examinemos o que acontece quando um ponto é adicionado à P ; considere o ponto Q inserido entre os pontos P_i e P_{i+1} . Os pontos P_i, Q e P_{i+1} são vértices de um triângulo, cujos os lados são menores que ϵ . Segue que estes vértices não formam um triângulo completo. Examinando todas as possibilidades pode-se verificar que a inserção de Q não pode alterar o índice $I(P)$. Por exemplo, suponha que os nomes em P_i e P_{i+1} sejam AB . Então o nome em Q deve ser um A ou um B , e o índice está inalterado pela inserção. Se era AA antes da inserção, o nome em Q poderia ser um B . Então um lado do tipo AB é adicionado pela inserção de Q , também um lado do tipo BA , de modo que o índice está inalterado. O que é especificamente preservado pela nossa escolha de ϵ são os nomes AC antes da inserção e ABC depois. Isto conduziria a uma aresta adicional AB mas também conduz a um triângulo completo, contradizendo o lema topológico 3.19. A análise de todas as possibilidades não será feita por ser análoga a apresentada. Agora considere duas subdivisões ϵ -denso, $P = \{P_i\}$ e $Q = \{Q_j\}$. Começando com P , adicione os pontos de Q para obter uma nova subdivisão R consistindo dos pontos de P e Q juntos. Desde que em cada passo o índice está inalterado, $I(P) = I(R)$ e similarmente $I(Q) = I(R)$, o que completa a prova.

Exemplo 3.20. Vamos encontrar o número de voltas do campo vetorial $V(x, y) = (2xy, y^2 - x^2)$ sobre o círculo unitário $x^2 + y^2 = 1$. Por meio de um esboço básico feito com o auxílio do programa Maple (figura 3.8) e pela primeira definição de número de voltas, concluimos que $W(\gamma) = 2$. Agora usando a segunda definição, encontramos os pontos sobre o círculo onde o vetor V aponta para o norte, resolvendo o sistema de equações

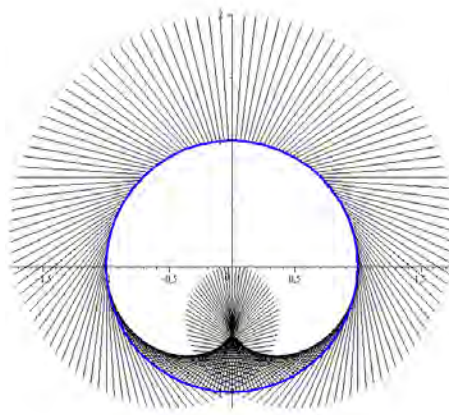


Figura 3.8

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$2xy = 0$$

$$y^2 - x^2 \geq 0$$

encontramos como soluções os pontos $(0, 1)$ e $(0, -1)$. Nestes pontos a coordenada x de V diz se o vetor está movendo no sentido anti-horário ou sentido-horário. Em cada caso $2xy$ muda o sinal de $+$ para $-$, indicando que V move do primeiro para o segundo quadrante ou da direção A para a direção B . Portanto, cada solução conta $+1$ como parte do número de voltas, e assim confirmamos que $W(\gamma) = +2$.

A definição de número de voltas, combinado com o lema do Índice, resulta no seguinte teorema.

Teorema 3.21 (Teorema Fundamental sobre o Número de Voltas). *Seja D um disco tendo o caminho fechado γ como bordo. Se o campo vetorial contínuo V nunca se anula em D , então $W(\gamma) = 0$.*

Demonstração. Desde que V nunca se anula em D , existe um $\epsilon > 0$ tal que cada triângulo completo com vértice em D tem um lado de comprimento maior que ϵ . Pela definição 3.18, o índice desta subdivisão em triângulos é o número de voltas de V em γ . Incorporando esta subdivisão em uma triangulação de D , pelo lema do índice o número de voltas é igual ao conteúdo desta triangulação. Agora se suficientes vértices são adicionados à triangulação de modo que a distância entre vértices adjacentes é sempre menor que ϵ , a triangulação não terá triângulos completos. Então o conteúdo é zero, o que prova o teorema. \square

Vejamos agora que o número de voltas torna-se uma ferramenta para o estudo dos pontos críticos isolados da seguinte maneira: escolha um círculo γ que contém o ponto crítico P de modo que no interior e sobre γ o campo vetorial V nunca se anula exceto em P .

Definição 3.22. *O índice de V em um ponto crítico P , denotado por $I(P)$, é definido como o número de voltas $W(\gamma)$ de V sobre γ .*

É evidente que há muitos círculos em torno de P . O que faz o índice útil é que ele não depende do círculo escolhido.

Proposição 3.23. *O número de voltas independe da escolha do círculo.*

Demonstração. Considere um anel A entre os círculos γ e μ onde V nunca se anula. Adicionando dois caminhos c_1 e c_2 atravessando o anel, dividimos o anel e os dois círculos em duas metades. Sejam as metades desses dois círculos dadas por γ_1 e γ_2 de γ e μ_1 e μ_2 de μ . Esses nomes são escolhidos de modo que se A_1 e A_2 são as duas metades do anel A , então o bordo de A_1 consiste de γ_1, μ_1 , e dos dois caminhos c_1 e c_2 . Enquanto o bordo de A_2 consiste de γ_2, μ_2 , e os dois caminhos c_1 e c_2 conforme figura 3.9. Pelo Teorema fundamental sobre número de voltas, o número de voltas de V sobre estes bordos é zero. Na soma desses dois números de voltas os dois caminhos

c_1 e c_2 cancelam-se porque as arestas nomeadas AB ao longo deles são contadas uma como $(+1)$ e outra como (-1) . O que resta são as contribuições das partes dos dois círculos. As metades de fora do círculos são tomados no sentido anti-horário como partes dos bordos de A_1 e A_2 . Portanto, a soma dos números de arestas AB sobre γ_1 e γ_2 é igual a $W(\gamma)$; contudo as partes do círculo interior são tomadas no sentido horário como partes dos bordos de A_1 e A_2 , e portanto, sua contribuição é $-W(\mu)$. Assim $W(\gamma) - W(\mu) = 0$. \square

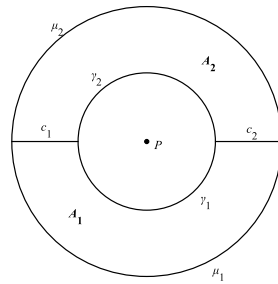


Figura 3.9 Um ponto crítico isolado.

Desde que o número de voltas $W(\gamma)$ é o mesmo, não importa quão pequeno seja o círculo γ , segue que o índice mede algo sobre o campo vetorial V que depende apenas do comportamento sobre V em uma área arbitrariamente pequena ao redor de P . A figura 3.10 dá alguns exemplos de pontos críticos. Em cada caso damos um esboço dos caminhos integrais na vizinhança do ponto e um esboço do comportamento do campo vetorial sobre um círculo desenhado ao redor do ponto crítico. O índice é apenas uma maneira de classificar estes tipos de pontos críticos. Diferentes tipos de pontos poderiam ter o mesmo índice.

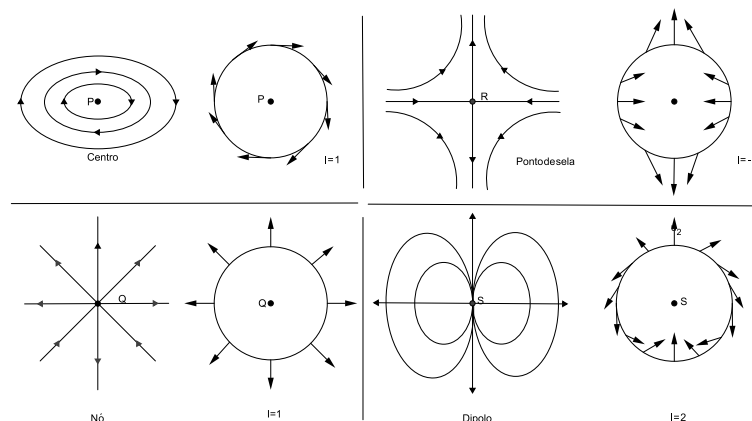


Figura 3.10 Exemplos de pontos críticos isolados.

No entanto, o índice é uma ferramenta teórica extremamente útil, como mostra a aplicação a seguir:

3.4 Caminhos Integrais Fechados

Teorema 3.24. *O número de voltas de um campo vetorial sobre caminhos integrais fechados é um.*

Demonstração. Seja γ um caminho integral fechado para um campo vetorial contínuo V . Escolheremos dois pontos P e S sobre γ e seja s o comprimento do arco de P a S ao longo de γ , este arco é tomado na direção indicada pelos vetores de V .

Vamos considerar P como o ponto de partida que será fixado para o restante da prova, assim o comprimento do arco s será determinado apenas pela posição do ponto S . Se L é o comprimento total de γ , então para cada número real s , $0 < s < L$, existe exatamente um ponto S cuja distância até P ao longo de γ é s (veja figura 3.11a). Considere um plano com eixos de coordenadas x e y . Consideremos o triângulo ABC

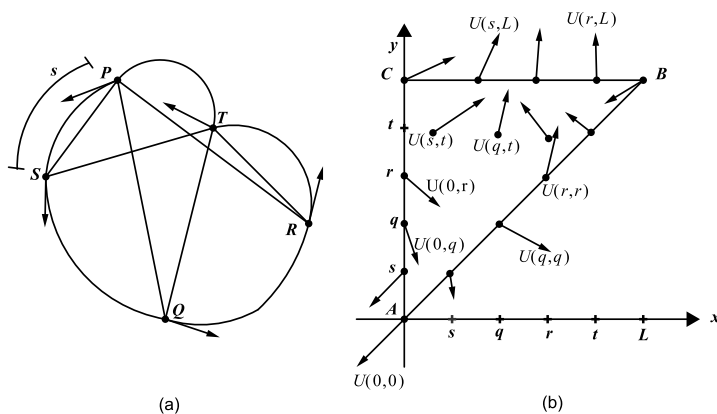


Figura 3.11 (a) O caminho integral fechado. (b) O plano (x, y)

consistindo de pontos (x, y) tal que $0 \leq x < y \leq L$ (veja figura 3.11b). Para cada ponto (x, y) no triângulo ABC corresponde um par de pontos X e Y sobre γ , tal que o ponto Y está mais afastado de P do que X .

Os pontos (x, x) sobre a hipotenusa do triângulo ABC são excepcionais e correspondem a apenas um único ponto de γ . Além disso, o ponto $C = (0, L)$ corresponde ao ponto P . Usando esta correspondência, um campo vetorial pode ser definido no triângulo ABC como segue: seja $U(x, y)$ o vetor unitário na direção do vetor secante sobre γ de X para Y . Na figura 3.11 temos um pequeno exemplo.

Cada secante desenhada na figura 3.11a corresponde a um vetor de U desenhado na figura 3.11b. O campo vetorial U é claramente contínuo. Nos pontos excepcionais (x, x) , U é definido como sendo um vetor tangente unitário apontando na mesma direção como em $V(X)$. Isto faz U contínuo em todo o triângulo ABC , uma vez que estes vetores tangentes são os limites dos vetores secantes de γ que são os valores de U dentro do triângulo.

Por razões de continuidade, $U(0, L)$ deve ser definido como um vetor unitário apontando na direção oposta de $V(P)$. Para completar a prova, contaremos o número de

voltas de U sobre o triângulo ABC . Isto pode ser dividido em duas partes, a primeira sobre a hipotenusa, e a segunda parte sobre os dois catetos do triângulo. Sobre a hipotenusa, U repete simplesmente os mesmos vetores de V sobre γ , assim a primeira parte é igual a $W(\gamma)$.

Sobre os catetos, U faz uma única rotação no sentido horário (metade da rotação em cada cateto). Portanto o número de voltas total de U é $W(\gamma) - 1$. Por outro lado, desde que U nunca se anula dentro ou sobre o triângulo, pelo teorema fundamental de número de voltas, este número deve ser zero. Logo, $W(\gamma) - 1 = 0$, o que completa a prova. \square

3.5 O Primeiro Teorema do Índice de Poincaré

Apresentaremos agora uma conexão entre os índices dos pontos críticos e o número de voltas do campo vetorial.

Teorema 3.25 (Primeiro Teorema do Índice de Poincaré). *Sejam D um disco e γ seu bordo. Seja V um campo vetorial contínuo sobre D , com pontos críticos isolados P_1, P_2, \dots, P_n pertencentes ao interior de D . Se V nunca se anula em γ , então*

$$W(\gamma) = I(P_1) + I(P_2) + \dots + I(P_n)$$

onde $I(P_i)$ é o índice do ponto crítico P_i e $W(\gamma)$ o número de voltas de V sobre γ .

Demonstração. Nossa primeira observação é que V tem apenas um número finito de pontos críticos em D . Se V tivesse um conjunto infinito A de pontos críticos, sendo D compacto, por continuidade do campo, A teria subsequência convergente e esse limite é ponto crítico que não é isolado. Assim V pode ter somente um número finito de pontos críticos em D . Sejam P_1, P_2, \dots, P_n estes pontos. Ao redor de cada ponto construímos um círculo γ_i , que contém apenas P_i , $i = 1, \dots, n$ (veja figura 3.12).

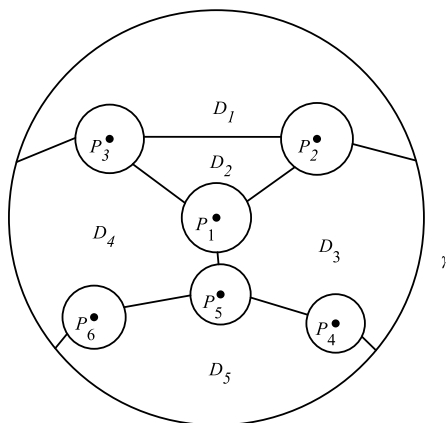


Figura 3.12

Em seguida desenhamos caminhos entre o círculo γ e os círculos γ_i e dividimos a região D fora dos círculos em um número de células D_k para os quais podemos aplicar o teorema fundamental sobre o número de voltas. Então, assim como na figura 3.9, encontramos que

$$W(\gamma) = W(\gamma_1) + W(\gamma_2) + \dots + W(\gamma_n)$$

Pela definição 3.22 $W(\gamma_i) = I(P_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Logo,

$$W(\gamma) = I(P_1) + I(P_2) + \dots + I(P_n)$$

□

4 Homologia de um Complexo

4.1 Complexos

Neste capítulo introduziremos a noção de grupos de homologia de um complexo com o objetivo de definir a Característica de Euler de um Complexo. O primeiro princípio da topologia combinatória é estudar as figuras complicadas que podem ser construídas, a partir de figuras mais simples. Pôr este princípio em prática, limita-se a estudar figuras que podem ser construídas a partir de figuras topológicas simples chamadas células, colando seus bordos. Nas figuras 4.1,4.2,4.3,4.4,4.5,4.6 temos alguns exemplos. Os números de células usadas são 4, 7, 8, 8, 3, e 5, respectivamente. Estes números não são determinados de forma rígida. Por exemplo, seria mais simples construir uma esfera com apenas duas células.

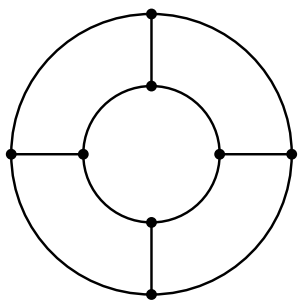


Figura 4.1 Anel

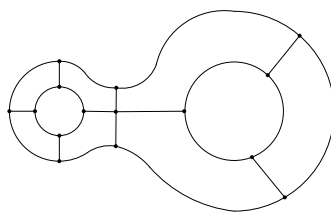


Figura 4.2 Anel duplo

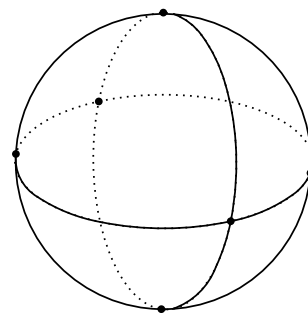


Figura 4.3 Esfera

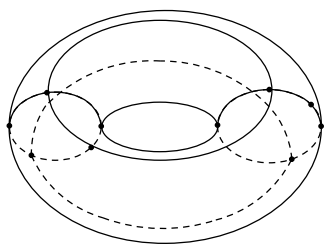


Figura 4.4 Toro

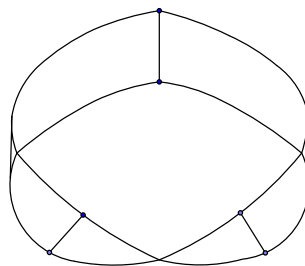


Figura 4.5 Fita de Möbius

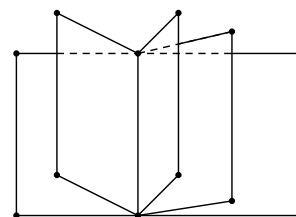


Figura 4.6 Livro

Definição 4.1. Uma *célula* é qualquer figura homeomorfa a um disco e um *complexo* é uma figura que pode ser construída a partir de células colando seus bordos.

Um complexo é um espaço topológico mais uma estrutura combinatória que descreve como o espaço é criado. Assim, um espaço topológico pode dar origem a muitos complexos diferentes.

Definição 4.2. Sejam P uma coleção de polígonos e $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ um conjunto de arestas destes polígonos. Estas arestas são ditas *identificadas* quando:

- (a) a cada aresta é atribuída um sentido de um extremo a outro e colocada em correspondência topológica com o intervalo unitário de tal forma que os pontos iniciais de todas as arestas correspondem a 0 e os pontos finais correspondem a 1;
- (b) todos os pontos sobre as arestas a_1, a_2, \dots, a_n que correspondem aos mesmos valores do intervalo unitário são tratados como um único ponto; e
- (c) as vizinhanças de P são os discos totalmente contidos em um único polígono mais a junção de discos em torno dos pontos correspondentes sobre as arestas a_1, a_2, \dots, a_n .

A figura 4.7 dá um exemplo no qual P consiste de quatro polígonos e um total de cinco arestas são identificadas. O sentido destas arestas é indicado por uma seta.

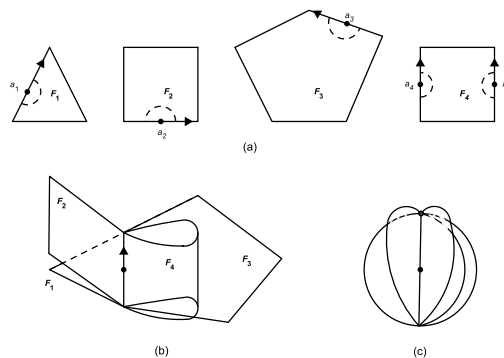


Figura 4.7 Identificação nas arestas. (a) Quatro polígonos identificados nas cinco arestas. (b) A identificação realizada no espaço. (c) Uma típica vizinhança

Na próxima definição a preocupação é a identificação dos vértices.

Definição 4.3. Seja P um conjunto de polígonos, e sejam P_1, P_2, \dots, P_n vértices destes polígonos. Estes vértices são ditos *identificados* quando a coleção de vértices é tratada como um único ponto P . As vizinhanças de P são discos contidos inteiramente em um único polígono mais a junção de parte dos discos em volta de cada ponto P_1, P_2, \dots, P_n .

A figura 4.8 dá um exemplo em que P consiste de seis polígonos e seis vértices estão identificados. Neste exemplo, algumas arestas também estão identificadas de modo que ambos os processos de identificação possam ser vistos juntos.

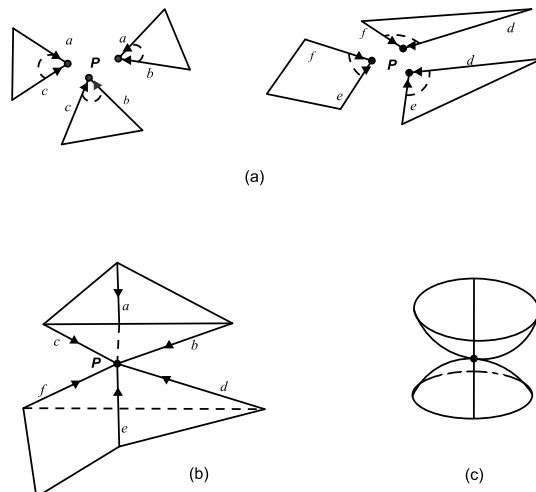


Figura 4.8 Identificação nos vértices. (a) Seis polígonos identificados em um vértice. (b) A identificação realizada no espaço. (c) Uma vizinhança do vértice.

Com estas preliminares estabelecidas, podemos proceder com uma definição formal de superfície. Do ponto de vista combinatório, todo espaço topológico pode ser construído por operações simples a partir de peças simples. No caso de superfície as peças são *polígonos* e as operações são *identificações topológicas*. Porém, identificação topológica pode produzir pontos cuja vizinhança não são discos, como mostram as figuras 4.7 e 4.8. A próxima definição é para excluir problemas em tais vizinhanças e assim preservar na forma combinatória a noção intuitiva de que uma superfície é um espaço topológico para o qual qualquer ponto tem uma vizinhança equivalente a um disco.

Definição 4.4. Um espaço topológico é **triangulado** se pode ser obtido a partir de um conjunto de triângulos pela identificação de arestas e vértices, sujeitos a restrição em que quaisquer dois triângulos estão identificados ao longo de uma única aresta ou em um único vértice, ou são completamente disjuntos. Uma **superfície** é um espaço triangulado e além disso:

- (a) cada aresta é identificada com exatamente uma outra aresta e
- (b) os triângulos identificados em um vértice podem sempre ser organizados em um ciclo T_1, T_2, \dots, T_k de modo que os triângulos adjacentes são identificados ao longo de uma aresta.

Espaços triangulados são sem dúvida os mais simples dos espaços topológicos. Isto é devido à sua simples construção. A restrição para triângulos não é essencial, uma vez que cada polígono pode ser triangulado. De acordo com a definição, dois triângulos em um espaço triangulado tem um, dois ou nenhum vértice em comum, de modo que dois triângulos devem ter dois conjuntos diferentes de vértices. Segue que o espaço pode ser descrito pela nomeação de cada vértice (vértices identificados sendo dados os mesmos nomes) e listando os triângulos por um conjunto de vértices.

Exemplo 4.5. Aqui está um espaço triangulado consistindo de oito triângulos: $PQR, QRU, PRS, RSU, PST, STU, PTQ, TQU$. A figura 4.9 mostra como o espaço pode ser parcialmente montado. Temos primeiro colados juntos os quatro triângulos que são identificados no vértice P (PQR, PRS, PST, PTQ) e então adicionados os triângulos restantes. Os lados que restam ser identificados são então nomeados na forma usual. Se estas identificações remanescentes são realizadas, o resultado é uma pirâmide de base quadrada. Assim, esta é uma superfície homeomorfa a uma *esfera*.

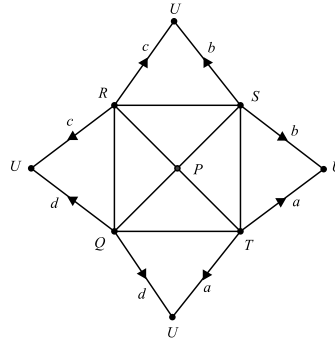


Figura 4.9 Um espaço triangulado.

É importante encontrar agora triangulações para outras superfícies, e mostrar que estas superfícies estão de acordo com a nossa definição formal. Não é difícil produzir estas triangulações, mas um pequeno cuidado é necessário. A figura 4.10a mostra uma falsa triangulação do toro. Embora existam quatro triângulos, existem somente dois vértices e todos os quatro triângulos tem o mesmo conjunto de vértices. Na figura 4.10b temos a correta triangulação do toro, e a figura 4.10c dá uma triangulação para o plano projetivo.

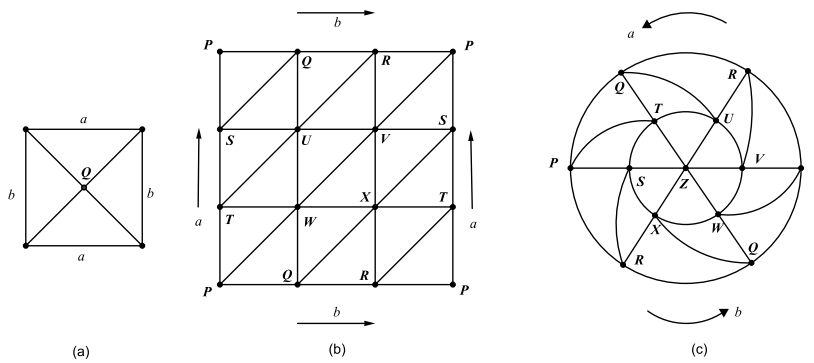


Figura 4.10

Definição 4.6. Uma superfície S é compacta se, e somente se, existe uma triangulação de S com um número finito de triângulos.

Esta definição dá uma interpretação combinatória da compacidade e a próxima definição dá uma interpretação combinatória da conexidade.

Definição 4.7. *Uma superfície é conexa se, e somente se, os triângulos em uma triangulação da superfície podem ser organizados em uma sequência T_1, T_2, \dots, T_n de modo que cada triângulo tem pelo menos uma aresta identificada com uma aresta de um triângulo anterior da sequência.*

Definição 4.8. *Chamaremos faces, arestas e vértices de **simplexos**, do seguinte modo, 0-simplexos para vértices, 1-simplexos para arestas e 2-simplexos para faces. Um complexo é constituído de simplexos.*

A homologia é um meio de tratar algebricamente algumas relações entre os simplexos de um complexo. A mais importante destas relações é a relação de bordo. O bordo de um polígono é o conjunto de suas arestas, o bordo de uma aresta é o conjunto dos pontos de seus extremos, enquanto que um ponto não tem bordo. Porém, o bordo de um simplexo em um *complexo* exige um tratamento mais cuidadoso. Justificamos abaixo com alguns pequenos exemplos.

Definição 4.9. *Seja K um complexo. Sejam x um k -simplexo e y um $(k+1)$ -simplexo de K ($k = 0, 1$). O **coeficiente de incidência** de x em y é o número de vezes em que x aparece no bordo de y .*

Exemplo 4.10. *Seja K o complexo equivalente a uma esfera retratado na figura 4.11a. Na figura 4.11b K foi cortado, aberto, planificado e marcado convenientemente. Cada simplexo de K foi nomeado. Veja que K consiste dos vértices P, Q, R, S, T, U, V, W ; das arestas $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l$; e das faces A, B, C, D, E, F . As tabelas abaixo resumem o bordo em relação a K . A tabela (a) dá os bordos das arestas, enquanto a tabela (b) dá os bordos das faces de K . Nestas tabelas o registro um (1) significa "sim, está no bordo", enquanto que o registro zero (0) significa "não, não está no bordo". Verifique que as tabelas refletem os bordos retratados na figura 4.11b. Os registros nestas tabelas são os **coeficientes de incidência** de K .*

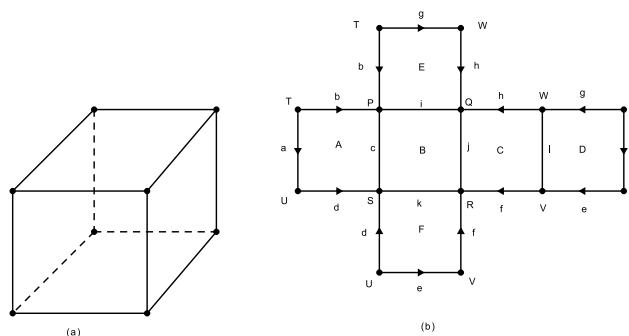


Figura 4.11 Um complexo equivalente a uma esfera.

	P	Q	R	S	T	U	V	W
a	0	0	0	0	1	1	0	0
b	1	0	0	0	1	0	0	0
c	1	0	0	1	0	0	0	0
d	0	0	0	1	0	1	0	0
e	0	0	0	0	0	1	1	0
f	0	0	1	0	0	0	1	0
g	0	0	0	0	1	0	0	1
h	0	1	0	0	0	0	0	1
i	1	1	0	0	0	0	0	0
j	0	1	1	0	0	0	0	0
k	0	0	1	1	0	0	0	0
l	0	0	0	0	0	0	1	1

(a)

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l
A	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
B	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0
C	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1
D	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1
E	0	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0
F	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	0

(b)

	P
a	2
b	2

(c)

	a	b
A	2	2

(d)

Exemplo 4.11. Considere o complexo L equivalente ao toro dado na figura 4.12a. Cortando, abrindo e planificando o toro como na figura 4.12b, temos a familiar forma do toro que consiste de um vértice, duas arestas a e b , e uma face A . Os coeficientes de incidência, dados nas tabelas (c) e (d), revelam um fenômeno novo. O registro 2

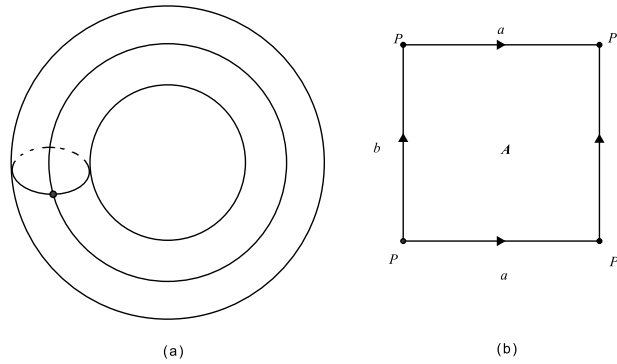


Figura 4.12 Um toro (1 face, 2 arestas, 1 vértice)

na primeira linha da tabela (c) significa que o vértice P aparece duas vezes no bordo da aresta, como está evidente no caso da figura 4.12b. Similarmente, o primeiro 2 na tabela (d) significa que a aresta a aparece duas vezes no bordo do retângulo A , refletindo a auto-identificação do retângulo. Os coeficientes de incidência por sua vez, refletem esta circunstância. Os coeficientes de incidência são escolhidos para transmitir o máximo de informação possível sobre os bordos dos simplexes de L no complexo L .

Isso é importante porque os grupos de homologia dependem inteiramente dos coeficientes de incidência. Porém, os coeficientes de incidência por si só não determinam o complexo completamente. Seria impossível, por exemplo, construir o toro a partir somente das informações dadas nas tabelas (c) e (d).

4.2 Grupos de Homologia de um Complexo

Para nossos propósitos, vamos desenvolver a teoria para complexos constituídos de k -cadeias, onde $k = 0, 1, 2$.

Definição 4.12. *Uma k -cadeia de um complexo K é um conjunto de k -simplexos ($k = 0, 1, 2$). A soma $C_1 + C_2$ de duas k -cadeias é definida como o conjunto de k -simplexos contidos em C_1 ou C_2 mas não contidos em ambos. (na teoria de conjuntos o nome técnico para esta operação é diferença simétrica). Com esta operação, o conjunto $C_k(K)$ de k -cadeias é um grupo no qual a identidade é o conjunto vazio de k -simplexos. Na adição, cada k -cadeia é seu próprio inverso de modo que $C_k(K)$ é um grupo idempotente.*

Por exemplo, considere o complexo K descrito na figura 4.11b. São típicas k -cadeias $P + Q + V$ ($k = 0$), $a + c + f + g$ ($k = 1$) e $B + C + D$ ($k = 2$). Da definição fica claro que a álgebra das cadeias por si só não diz nada sobre a topologia do complexo K , já que a operação de adição de cadeia é puramente uma operação de conjunto e não tem conexão com a geometria de K . A conexão com a geometria é proveniente do operador bordo.

Definição 4.13. *Seja C uma k -cadeia de K . O bordo de C que denotamos por $\partial(C)$, é a $(k-1)$ -cadeia constituída por $(k-1)$ -simplexos que estão incidindo um número ímpar de vezes com os simplexos de C , onde a incidência é determinada pelos coeficientes de incidência de K . O operador bordo ∂ é aditivo, $\partial(C_1 + C_2) = \partial(C_1) + \partial(C_2)$, e assim define um homomorfismo de $C_2(K)$ para $C_1(K)$ e um homomorfismo de $C_1(K)$ para $C_0(K)$.*

Por exemplo, considere a 1-cadeia $a + b$ no complexo K da figura 4.11b. Usando os coeficientes de incidência dados na tabela (a), $\partial(a + b) = P + U$. Note que o vértice T não está no $\partial(a + b)$ porque ele tem um total de incidência com $(a + b)$ de 2. Ambos P e U tem um total de incidência de 1 com $(a + b)$, enquanto outros vértices tem incidência 0. Note também que $\partial(a) = T + U$, $\partial(b) = P + T$, $\partial(a) + \partial(b) = T + U + P + T = P + U = \partial(a + b)$. Este é um exemplo da propriedade da adição do operador bordo. Para outro exemplo, considere a 2-cadeia $(A + D)$. Encontramos a partir da tabela (b) que $\partial(A + D) = (b + c + d + e + g + l)$.

Voltando ao complexo L da figura 4.12b encontramos alguns fatos interessantes. O bordo do simplexo a é vazio, $\partial(a) = \emptyset$, já que somente o vértice P tem incidência total 2 com a . Similarmente, $\partial(A) = \emptyset$, já que as arestas a e b são incidentes duas vezes com a face A .

Definição 4.14. *Um k -ciclo ($k = 1, 2$) é uma k -cadeia com bordo nulo. Por convenção, todas 0-cadeias são chamadas 0-ciclos. Um k -bordo ($k = 0, 1$) é uma k -cadeia que é o bordo de uma $(k + 1)$ -cadeia. Por convenção, somente a 2-cadeia nula é considerada um 2-bordo. O conjunto $Z_k(K)$ constituído pelos k -ciclos é um grupo. O mesmo ocorre com $B_k(K)$ que é constituído pelos k -bordos.*

Pelos seus significados geométricos estes dois tipos de cadeias são especiais, pois os grupos de homologia envolvem somente ciclos e bordos.

Teorema 4.15. *Todo bordo é um ciclo.*

Demonstração. Seja C uma k -cadeia de um complexo K . Um 0-bordo é um ciclo pois, por definição 0-cadeias são 0-ciclos, agora 2-bordo é um ciclo pois $\partial(\partial(C)) = 0$. Para 1-bordo segue do fato que para toda 2-cadeia C , $\partial(\partial(C)) = 0$. Para provar esta identidade é suficiente, por aditividade, confirmá-la para todos 2-simplexos, isto é, quando C é um polígono, desde que uma 2-cadeia é uma soma de 2-simplexos. Quando C é um polígono, $\partial(\partial(C))$ consiste daqueles vértices de C que são incidentes sobre um número ímpar de arestas de C . Desde que todo vértice de um polígono têm incidência total dois sobre as arestas do polígono então $\partial(\partial(C)) = 0$. \square

Segue deste resultado que $B_k(K)$ é um subgrupo de $Z_k(K)$.

Definição 4.16. *O k -ésimo grupo de homologia de um complexo K , denotado por $H_k(K)$ é o grupo quociente*

$$H_k(K) = \frac{Z_k(K)}{B_k(K)}.$$

Duas k -cadeias ($k = 0, 1, 2$), C_1 e C_2 , são chamadas **homólogos**, escrevendo $C_1 \sim C_2$, quando $C_1 + C_2$ é um k -bordo. A relação de homologia tem as seguintes propriedades:

- (a) $C_1 \sim C_1$ para toda k -cadeia.
- (b) Se $C_1 \sim C_2$, então $C_2 \sim C_1$.
- (c) Se $C_1 \sim C_2$ e $C_2 \sim C_3$, então $C_1 \sim C_3$.
- (d) Se $C_1 \sim C_2$ e $C_3 \sim C_4$, então $C_1 + C_3 \sim C_2 + C_4$.

4.3 Invariância

Os grupos de homologia de um espaço topológico apresentam complicadas construções. A construção é feita em três passos: o passo geométrico, o combinatório e o algébrico. Dado um espaço topológico, primeiro devemos ver este espaço como um complexo, ou seja, dividir o espaço em faces, arestas e vértices, e identificá-los. Segundo, do complexo, calculamos os coeficientes de incidência com o qual definimos os grupos de cadeias e o operador bordo. Terceiro, isolamos os subgrupos de ciclos e bordos e definimos os grupos de homologia.

O que os grupos de homologia dizem sobre o espaço topológico?

A resposta é dada pelo Teorema da Invariância. Com algumas restrições, este teorema afirma que *não importa como o espaço topológico é dividido para obter o complexo, os grupos de homologia resultantes são os mesmos, ou seja, o espaço topológico tem apenas um conjunto de grupos de homologia, e estes grupos são independentes do complexo*. As informações dos grupos de homologia são de natureza puramente topológica e não são afetadas pelos passos geométricos, combinatórios ou algébricos da construção. Por isso, o Teorema da Invariância é na verdade o Teorema Fundamental de Homologia.

Provaremos o teorema de invariância apenas para triangulações de superfícies, o que é suficiente para nosso propósito. Mas antes apresentamos o seguinte lema.

Lema 4.17. *Seja K um complexo qualquer. Seja K^+ o complexo obtido de K traçando uma nova aresta que divide o polígono de K em dois polígonos. Então os grupos de homologia de K e K^+ são os mesmos.*

Demonstração. Considere a figura 4.13. Note as diferenças entre K e K^+ . Observe que K^+ tem dois novos simplexos isto é, $(B$ e $C)$ e uma nova aresta g separando B de C , e também K^+ tem dois novos vértices $(P$ e $Q)$, que divide uma aresta de K em duas. A prova é dividida em alguns casos, ou seja, quantos novos vértices K^+ tem. Como os casos são análogos, faremos a prova do caso descrito na figura 4.13.

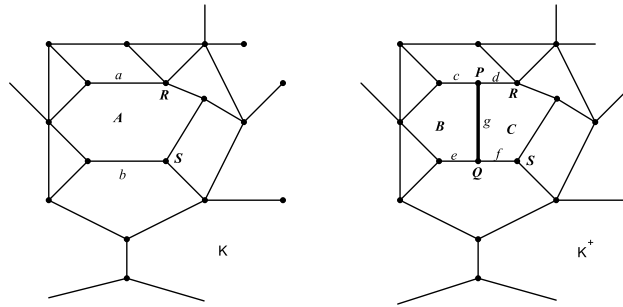


Figura 4.13

Observe que combinando os novos elementos de K^+ eles correspondem aos elementos em K . Ou seja, $B + C$ correspondem à A , $c + d$ correspondem à a , $e + f$ correspondem à b . Esta correspondência estabelece um isomorfismo dos grupos de cadeias de K nos grupos de cadeias de K^+ . Nesta correspondência duas cadeias homólogas em K sempre correspondem a duas cadeias homólogas sobre K^+ . Além do mais, todos os ciclos sobre K^+ são homólogos a um ciclo que contém os novos elementos de K^+ somente nessas combinações é que correspondem a elementos de K . Como esta relação é de equivalência, a correspondência estabelecida entre os grupos de cadeias torna-se um isomorfismo entre os grupos de homologia, provando o lema. \square

Teorema 4.18 (Teorema da Invariância). *Os grupos de homologia associados a uma triangulação K de uma superfície compacta e conexa L são independentes de K . Em outras palavras, os grupos $H_0(K)$, $H_1(K)$ e $H_2(K)$ não dependem dos simplexos, dos coeficientes de incidência ou da escolha da triangulação particular de K ; eles dependem apenas da própria superfície L .*

Demonstração. A idéia da prova é mostrar que os grupos de homologia para a triangulação K são os mesmos grupos de homologia do modelo planar N da superfície L . Para provar isto, basta seguir a prova do Teorema da Classificação completando suas seis etapas, mostrando que em cada etapa não mudam os grupos de homologia, desde que no início da prova tenhamos a triangulação K , e que no final, K tenha sido transformado no modelo planar N .

Primeiro consideremos a homologia zero-dimensional, observe que sobre K^+ , $P \sim R$ e $Q \sim S$, desde que $\partial(d) = P + R$ e $\partial(f) = Q + S$. Portanto, cada 0-ciclo contém P ou Q e é homólogo a um ciclo que não contém P ou Q , que é um ciclo correspondendo a um 0-ciclo sobre K . Isto conclui a prova para homologia zero-dimensional.

Considerando agora para homologia 1-dimensional, seja λ um 1-ciclo sobre K^+ . Existem três formas em que λ não deve corresponder a um ciclo sobre K : (1) λ deve conter c ou d mas não ambos, (2) λ deve conter e ou f mas não ambos, e (3) λ deve conter g . Suponha λ satisfazendo (1). Então porque λ é um ciclo, λ deve também conter g (caso contrário $\partial(\lambda)$ conteria Q). Assim, λ realmente satisfaz (1),(2) e (3). Isto completa a prova para homologia um-dimensional.

Finalmente para dimensão dois, observe que um 2-ciclo T sobre K^+ contém ambos B e C ou nenhum (caso contrário $\partial(T)$ contém g). Assim, T deve corresponder a um 2-ciclo sobre K^+ . \square

Princípio de Invariância

Os grupos de homologia de um complexo não são alterados por nenhum corte de um polígono em dois ou colando juntos dois polígonos ao longo de uma aresta.

Teorema 4.19 (Teorema Geral da Invariância). *Seja T um espaço triangulável de dimensão 2. Então os grupos de homologia de T são independentes da escolha da triangulação.*

Infelizmente o teorema não vale para espaços topológicos de dimensões maiores que dois.

Definição 4.20. *Chamamos de **formas normais** um modelo de uma superfície compacta e conexa S que transforma este modelo no modelo da esfera, na soma conexa de toros ou na soma conexa de planos projetivos.*

Teorema 4.21. *Os grupos de homologia de uma superfície compacta e conexa são os grupos de homologia de sua forma normal.*

Usando este teorema é fácil computar os grupos de homologia de todas as superfícies compactas e conexas. Por exemplo, considere a esfera da (figura 4.14). Existem dois vértices no modelo, mas eles são homólogos, e portanto $H_0(S^2) \cong \mathbb{C}_0$. Existe uma aresta, mas não há 1-ciclos exceto \emptyset , e portanto $H_1(S^2) \cong \mathbb{C}_1$. A face de um é um 2-ciclo, e portanto $H_2(S^2) \cong \mathbb{C}_2$. Estes resultados concordam com aqueles obtidos a partir do cubo K .

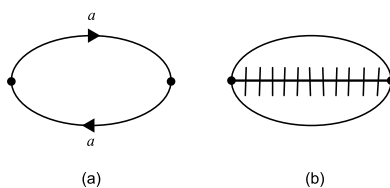


Figura 4.14 A esfera. (a) Modelo plano. (b) Modelo espacial.

Considere por um momento a importância do fato de que $H_1(S^2)$ é um grupo trivial. Isto significa que qualquer 1-ciclo é homólogo a zero, ou que qualquer 1-ciclo é um bordo. Esta conclusão é válida não só para a forma normal, mas, de acordo com o teorema da invariância, para toda triangulação da esfera; mais geral, de acordo com o argumento desta seção, a conclusão é válida para qualquer complexo equivalente a uma esfera e pode ser reduzido a forma normal cortando e costurando.

4.4 Números de Betti

De acordo com o teorema da invariância, as propriedades dos grupos de homologia devem refletir as propriedades topológicas do espaço original. Porém, até o momento não temos ideia de como as propriedades dos grupos de homologia e dos espaços topológicos se relacionam. Para sabermos mais sobre os grupos de homologia, necessitamos de propriedades adicionais de grupos, sobretudo os grupos idempotentes.

Suponha que G seja um grupo idempotente finito, por exemplo um grupo de cadeias ou um grupo de homologia de um complexo finito associado a um espaço topológico compacto. Pelo teorema 1.5, G contém bases, e de acordo com o teorema 1.6, todas estas bases contém o mesmo número de elementos.

Vamos agora considerar os postos dos grupos de cadeias e dos grupos de homologia associados a um complexo. Seja K um complexo finito. Considerando primeiro os grupos de cadeias, o conjunto de k -simplexos é uma base para o grupo $C_k(K)$, desde que cada cadeia é uma soma de simplexos e o conjunto de simplexos é independente. Assim o posto c_k de $C_k(K)$ é simplesmente o número de k -simplexos. Este número, embora de interesse combinatório, não é claramente de interesse topológico. Para os grupos de homologia, o posto h_k de $H_k(K)$ deve por força do Teorema da Invariância ter um significado topológico intrínseco, pelo menos para as superfícies.

Definição 4.22. *Os postos h_k são chamados de **números de Betti** do complexo.*

O zero-ésimo número de Betti h_0 é igual a 1 para todas as superfícies conexas, já que, em uma superfície conexa, quaisquer dois vértices são sempre homólogos. Mais genericamente, uma superfície arbitrária é sempre a união de suas componentes conexas. O zero-ésimo número de Betti é o número dessas componentes. O primeiro número de Betti h_1 é chamado o **número de conectividade** da superfície, ele dá o maior número de curvas fechadas que podem ser desenhadas sobre a superfície *sem* dividir a superfície em duas peças ou mais. (Este número é zero para a esfera).

4.5 A característica de Euler

Para qualquer complexo equivalente a uma esfera, o número de vértices menos o número de arestas mais o número de faces é sempre igual a dois que é a **característica de Euler** da esfera. Estabeleceremos resultados similares para outras superfícies compactas e conexas.

O operador bordo $\partial : C_k \rightarrow C_{k-1}$ é um homomorfismo entre o grupo das k -cadeias C_k no grupo das $(k-1)$ -cadeias C_{k-1} . O kernel de ∂ é o grupo de k -ciclos, enquanto a imagem de ∂ é o grupo de $(k-1)$ -bordos.

Seja K um complexo e sejam C_0, C_1, C_2 os grupos de cadeias de K , $B_0(K), B_1(K), B_2(K)$ os grupos dos bordos e $Z_0(K), Z_1(K), Z_2(K)$ os grupos dos ciclos. Temos então dois

homomorfismos nos operadores bordos:

$$C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0$$

para os quais $\text{Ker}(\partial_2) = Z_2(K)$, $\text{Ker}(\partial_1) = Z_1(K)$ e $\text{Im}(\partial_2) = B_1(K)$, $\text{Im}(\partial_1) = B_0(K)$. Recorde que pela convenção, $Z_0(K) = C_0$ e $B_2(K) = 0$ (o grupo trivial). Sejam $c_0, c_1, c_2, b_0, b_1, b_2, z_0, z_1, z_2$ os postos de todos estes grupos. Então de acordo com o teorema 1.7,

$$\begin{aligned} c_2 &= z_2 + b_1 \\ c_1 &= z_1 + b_0 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Definição 4.23. *Seja H um subgrupo do grupo G . Dois elementos x e y de G são chamados **homólogos (mod H)**, escrito $x \sim y(\text{mod } H)$, se $x = y + h$, com h um elemento de H . O grupo quociente de G por H é denotado por G/H .*

Esta definição apenas recapitula, de forma abstrata, a construção dos grupos de homologia. Pela definição todos os grupos de homologia são grupos quocientes. Suponha que K seja o mesmo complexo usado no parágrafo acima e sejam $H_0(K)$, $H_1(K)$, e $H_2(K)$ grupos de homologia de K . Então $H_0(K) = Z_0(K)/B_0(K)$, $H_1(K) = Z_1(K)/B_1(K)$ e $H_2(K) = Z_2(K)/B_2(K)$. O próximo teorema apresenta mais informações sobre os postos de todos estes grupos.

Aplicando o teorema 1.8 para os grupos de homologia $H_0(K)$, $H_1(K)$, $H_2(K)$ obtemos as relações

$$\begin{aligned} h_0 &= z_0 - b_0 \\ h_1 &= z_1 - b_1 \\ h_2 &= z_2 - b_2 \end{aligned} \tag{4.2}$$

onde h_0, h_1 e h_2 , são os postos dos grupos de homologia. As equações 4.1 e 4.2, juntamente com as consequências da convenção sobre $Z_0(K)$ e $B_2(K)$, a saber

$$\begin{aligned} c_0 &= z_0 \\ b_2 &= 0 \end{aligned} \tag{4.3}$$

permite-nos provar o seguinte teorema.

Teorema 4.24 (Poincaré). *Seja a superfície S dada como um complexo K . Sejam V, A , e F o número de vértices, arestas e faces em K . Então a soma $V - A + F$ é uma constante independente da maneira em que S é dividida a partir do complexo K . Esta constante é chamada a **característica de Euler** da superfície e é denotada por $\chi(S)$.*

Demonstração. Temos que:

$$\begin{aligned} c_2 &= F \\ c_1 &= A \\ c_0 &= V \end{aligned} \tag{4.4}$$

Segue que

$$\begin{aligned}V - A + F &= c_0 - c_1 + c_2 \\ &= z_0 - (z_1 + b_0) + (z_2 + b_1) \\ &= (z_0 - b_0) - (z_1 - b_1) + (z_2 - b_2) \\ &= h_0 - h_1 + h_2\end{aligned}$$

de acordo com o Teorema da Invariância, a soma $h_0 - h_1 + h_2$ é independente do complexo K ; o que prova o teorema. \square

5 O Segundo Teorema do Índice de Poincaré

5.1 Campo Vetorial Gradiente

Para apresentarmos uma demonstração do Segundo Teorema do Índice de Poincaré vamos introduzir algumas noções sobre Campo Vetorial Gradiente.

Seja S uma superfície compacta no espaço como por exemplo uma esfera irregular na figura 5.1. Se escolhermos um plano de referência, cada ponto P em S se encontra a uma certa distância $h(P)$ acima deste plano.

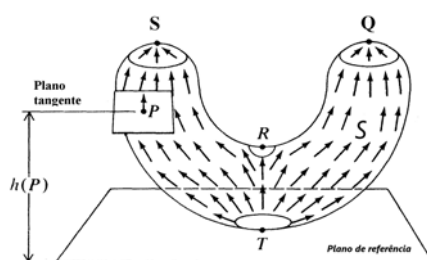


Figura 5.1 Uma esfera irregular

Definição 5.1. Dizemos que V é um **campo vetorial gradiente** de h se V é um campo vetorial contínuo em uma superfície compacta S do espaço de modo que para cada ponto P de S temos um plano tangente onde o vetor $V(P)$ aponta na direção de maior crescimento de h .

Os pressupostos necessários para garantir a existência do campo vetorial gradiente não são importante aqui. Deve-se garantir que S é suave o suficiente para ter um plano tangente em cada ponto P de S . Pretendemos estudar aqui os aspectos topológicos de V .

Definição 5.2. Chamamos de pontos críticos de um campo vetorial gradiente os pontos onde o plano tangente é paralelo ao plano de referência.

Na figura 5.1 os pontos Q, R, S e T são pontos críticos. Assumiremos que os pontos críticos serão sempre isolados e da compacidade de S segue que só existe um número finito de pontos críticos.

Para encontrar o índice de um ponto crítico P escolhamos uma vizinhança para P de modo que P seja o único ponto crítico nessa vizinhança e projetamos esta vizinhança junto com os vetores de V sobre o plano tangente em P . Na figura 5.2 mostramos este processo aplicado nos pontos Q, R e T da figura 5.1. Os vetores projetados no plano tangente formam um campo vetorial contínuo.

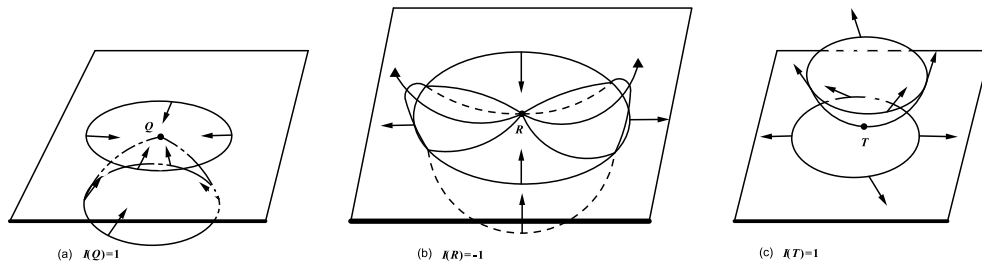


Figura 5.2

Definição 5.3. O índice de um campo vetorial gradiente V é o índice de P no campo vetorial do plano tangente.

Definição 5.4. Um vértice P de um triângulo é chamado **mediano** para este triângulo quando $h(P)$ está entre as alturas dos outros dois vértices do triângulo.

Vejam uma aplicação desta definição para um ponto crítico P . Consideremos um pequeno círculo em torno de P onde este círculo contém um certo número de lados de alguns triângulos. Se em cada triângulo o lado oposto ao ponto intersecta o plano tangente em P , então P será mediano neste triângulo.

Teorema 5.5. Sejam P_1, P_2, \dots, P_n os pontos críticos de um campo vetorial gradiente em uma superfície compacta S . Então

$$I(P_1) + I(P_2) + \dots + I(P_n) = \chi(S).$$

Demonstração. Usaremos a fórmula do índice

$$I(P) = 1 + \frac{1}{2}(e - h),$$

onde e e h são os números dos setores elípticos e hiperbólicos em P (o número de setores parabólicos é irrelevante). Desde que não existam setores elípticos podemos escrever a fórmula do índice deste modo

$$I(P) = 1 - \frac{h}{2}.$$

A fim de encontrar um método simples para contar os setores hiperbólicos vamos considerar o exemplo da figura 5.2b, onde o ponto R é um ponto de sela, a figura mostra as quatro separatrizes e os quatro setores hiperbólicos.

Observe que em cada setor a superfície atravessa o plano tangente. Se S é suficientemente suave, então qualquer círculo suficientemente pequeno em torno de um ponto crítico P intersectará o plano tangente exatamente h vezes, onde h é o número de setores hiperbólicos em P .

Para conectar estas observações com a homologia, seja K uma triangulação de S . Entre os vértices de K incluímos todos os pontos críticos P_1, P_2, \dots, P_n de V e entre as arestas incluímos segmentos fazendo um pequeno círculo em volta de cada ponto crítico. Na figura 5.3 é apresentado uma triangulação de uma esfera irregular.

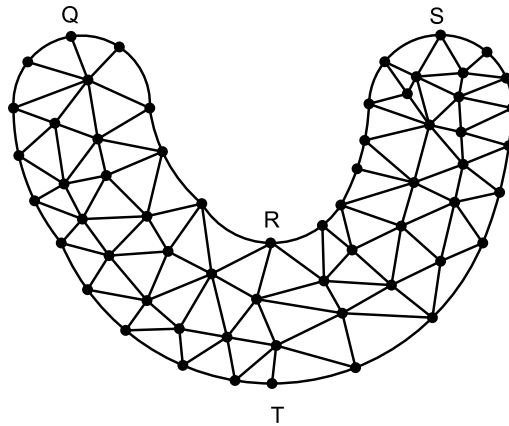


Figura 5.3 Uma triangulação de uma esfera irregular.

Deste modo pela definição 5.4 o número de setores hiperbólicos em P é igual ao número de triângulos na triangulação para o qual P é mediano. Em outras palavras,

$$I(P) = 1 - \frac{1}{2}(\text{número de triângulos para o qual } P \text{ é mediano}).$$

Note que se esta fórmula é usada em um ponto regular o resultado será zero, pois se o ponto é regular então é um ponto com dois setores hiperbólicos. Para completar a prova, assuma que nenhum triângulo contém dois vértices da mesma altura. Isto sempre pode ser feito por uma ligeira distorção na superfície, se necessário. Então

cada triângulo tem um vértice mediano. Agora

$$\begin{aligned}
 I(P_1) + I(P_2) + \cdots + I(P_n) &= \sum_{\text{pontos críticos } P} I(P) \\
 &= \sum_{\text{pontos críticos } P} \left[1 - \frac{1}{2} (\text{número de triângulos para o qual } P \text{ é mediano})\right] \\
 &= \sum_{\text{todos vértices } P} \left[1 - \frac{1}{2} (\text{número de triângulos para o qual } P \text{ é mediano})\right] \\
 &= V - \frac{1}{2}F
 \end{aligned}$$

Já que para a triangulação $3F = 2A$, $F = 2A - 2V$, segue que

$$\begin{aligned}
 I(P_1) + I(P_2) + \cdots + I(P_n) &= V - \frac{1}{2}(2A - 2V) \\
 &= V - A + V = \chi(S).
 \end{aligned}$$

□

5.2 O segundo teorema do índice de Poincaré

Seja S uma superfície compacta, conexa imersa em \mathbb{R}^3 onde todo ponto P de S tem um plano tangente.

Definição 5.6. *Um campo vetorial tangente V em S é uma função que associa a cada ponto P de S um vetor $V(P)$ tangente a S em P .*

A figura 5.4 dá um exemplo de um campo vetorial tangente sobre uma esfera. Assumiremos que V é contínuo e que tem somente pontos críticos isolados. O campo vetorial da figura 5.4, por exemplo, tem exatamente seis pontos críticos.

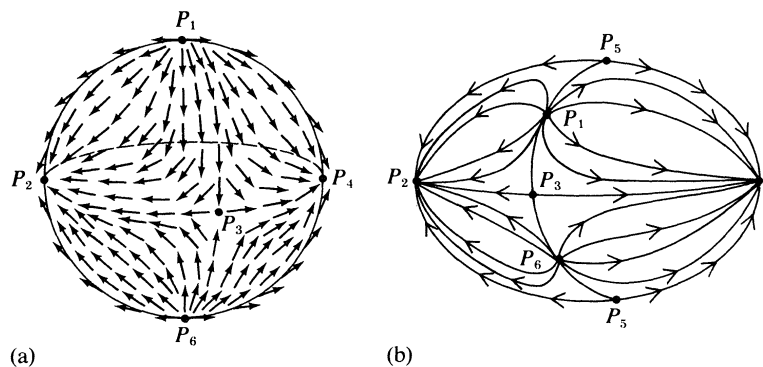


Figura 5.4 Campo vetorial tangente

Associado a V , como no caso de campos vetoriais no plano, temos uma família de caminhos sobre a superfície S e estes caminhos passam por cada ponto de V e são

tangentes aos vetores de V . Estes caminhos formam o **retrato de fase** de V . Alguns destes caminhos são mostrados na figura 5.4a, e o retrato de fase de S é apresentado na figura 5.4b.

Assim como nas discussões anteriores de campos vetoriais o interesse central são os pontos críticos, isto é, onde $V(P) = 0$. No exemplo da figura 5.4 existem seis pontos críticos: 2 nós estáveis, 2 nós não-estáveis, e 2 pontos de sela. Para prosseguir no estudo, será necessário assumir que a superfície S é orientada. A razão para esta restrição está claro no lema abaixo.

Lema 5.7 (Lema do Índice). *Seja S uma superfície orientada com bordo. Seja K uma triangulação orientada de S cujos vértices são nomeados com A, B e C . O conteúdo C da nomeação é definido como o número de triângulos completos em K ; cada triângulo é contado $(+1)$ se a ordem dos vértices ABC concorda com a orientação do triângulo em K , caso contrário o triângulo é contado (-1) . O índice I da nomeação é definido como o número de arestas nomeadas AB sobre o bordo de S ; cada aresta é contada $(+1)$ se a ordem dos vértices AB concorda com a orientação do triângulo contendo essa aresta, e caso contrário a aresta é contada (-1) . Então $I = C$.*

Um exemplo deste lema é esboçado na figura 5.5. Note que as definições de conteúdo e de índice dependem da orientação de S . A prova é exatamente a mesma feita no lema 3.13. O lema do índice é necessário para a prova do próximo teorema que é um dos resultados mais notáveis na topologia de superfícies.

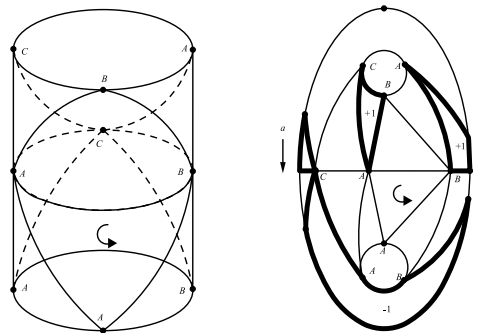


Figura 5.5 Um exemplo do lema do índice. (a) Uma triangulação de um cilindro, $I = C = 1$.(b) A mesma triangulação com triângulos completos sombreados.

Teorema 5.8 (Segundo Teorema do Índice de Poincaré). *Seja V um campo vetorial tangente contínuo sobre uma superfície compacta, conexa e orientável S . Então a soma dos índices dos pontos críticos de V é igual à característica de Euler de S .*

Demonstração. Vamos introduzir um segundo campo vetorial U sobre S , onde U é um campo vetorial gradiente. A figura 5.6 mostra U adicionado à V da figura 5.4. Os vetores gradientes de U estão esboçados somente nos pontos críticos de V para evitar

confusão entre os dois campos vetoriais. Deste modo V tem somente um número finito de pontos críticos e podemos sempre escolher o plano de referência de U não paralelo ao plano tangente nos pontos críticos de V . Assim, um ponto crítico não será simultaneamente ponto crítico de U e V . Isso explica o plano de referência inclinado na figura 5.6. Do teorema 5.5 sabemos que a soma dos índices dos pontos críticos de U é igual a *característica de Euler* de S . O problema será relacionar a soma dos índices $I_u(Q_1) + I_u(Q_2) + \dots + I_u(Q_m)$ com a soma dos índices $I_v(P_1) + I_v(P_2) + \dots + I_v(P_n)$.

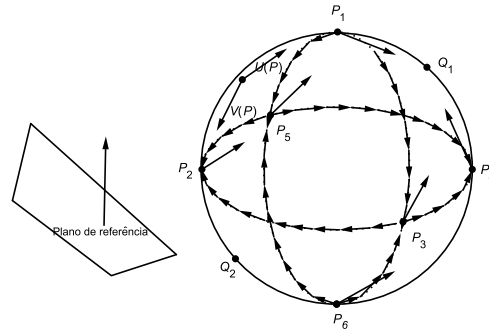


Figura 5.6

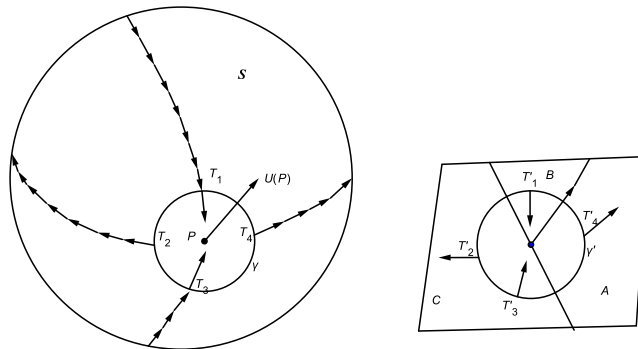


Figura 5.7 Um sistema de coordenadas no plano tangente em P

Começamos por considerar o cálculo do índice de um ponto crítico. A figura 5.7 mostra um ponto crítico P de V sobre S (na realidade o ponto P_3 da figura 5.6). Por construção $U(P)$ não será zero. Para contar o índice é esboçado um caminho γ em torno de P sobre a superfície S e então sobre o plano tangente de P projetamos γ juntamente com os correspondentes vetores de V .

Na figura 5.7 o plano tangente foi esboçado à uma distância de P para uma melhor visualização. Sobre a superfície S podemos ver o caminho γ passando pelos quatro pontos particulares isto é, T_1, T_2, T_3 e T_4 , e seus vetores. O ponto P , γ e seus respectivos vetores então projetados no plano tangente de P , onde tudo é nomeado com as letras A, B e C . A contagem do número de voltas exige o estabelecimento no plano tangente

de um sentido de rotação positiva e de um sistema de coordenadas. Podemos tomar o sentido de rotação positiva (sentido anti-horário na figura 5.7) a partir da orientação de S .

Agora os campos vetoriais U e V estão ligados. Usando a direção e sentido do vetor $U(P)$ para estabelecer um sistema de coordenadas no plano tangente, escolhemos $U(P)$ como o eixo y positivo. Com isto, determinamos qual região do plano tangente receberá os nomes A, B e C . Na figura 5.7 vemos que os pontos T'_1, T'_2, T'_3 e T'_4 recebem os nomes $BCCA$, respectivamente. Veja que $I(P) = -1$, exatamente como esperávamos vendo o retrato de fase na figura 5.4.

O próximo passo será dispensar o incômodo de projetar tudo no plano tangente de P . Como alternativa, na própria S em cada ponto T_1, T_2, T_3 e T_4 estabelecemos um plano tangente e nomeamos de acordo com cada um dos sistemas de coordenadas. A figura 5.8 mostra como este esquema se aplica para o ponto crítico P . Desde que o campo vetorial U seja contínuo em um ponto T próximo de P o vetor $U(T)$ será quase paralelo a $U(P)$.

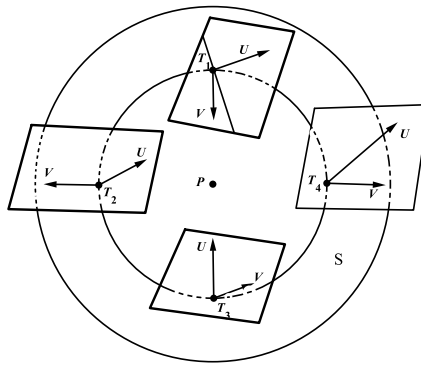


Figura 5.8 Um sistema de coordenadas no plano tangente perto de P

Assumiremos que a superfície S é suficientemente suave. Assim o índice contado pelos pontos nomeados sobre a superfície S serão os mesmos pontos nomeados no plano tangente de P .

Aplicaremos o lema do índice para a superfície S de acordo com o procedimento previsto nos parágrafos anteriores, onde todos os pontos P de S serão nomeados com A, B ou C dependendo da direção do vetor $V(P)$ em relação ao sistema de coordenada obtido tomando $U(P)$ como o eixo y positivo e orientando os quadrantes de acordo com a orientação de S . Este procedimento de nomeação falha somente se $V(P) = 0$ ou $U(P) = 0$, ou seja, nos pontos críticos dos dois campos vetoriais.

Para resolver isso, vamos considerar uma superfície S' obtida de S jogando fora pequenos discos em torno de cada um destes pontos críticos. Considere agora uma triangulação K de S' e apliquemos o lema do índice (veja figura 5.9). Note que, se os triângulos de K são suficientemente pequenos, não existirão triângulos completos.

Por outro lado se existirem pequenos triângulos completos sobre S' , implicará que S' contém um ponto crítico para U ou V . Uma vez que isto é impossível, segue-se que para triangulações suficientemente finas o conteúdo é zero. Portanto, pelo lema do índice, o índice é também zero.

O índice é composto por contribuições separadas de cada uma das curvas de S' ao redor de cada um dos pontos críticos de V e U . Sejam P_1, P_2, \dots, P_n os pontos críticos de V . Se os vértices de K são escolhidos suficientemente próximos sobre os caminhos de cada um dos pontos críticos P_i , então, pela nossa escolha no procedimento de nomeação, os caminhos ao redor dos P_i contribuem para o índice de K uma quantidade igual ao índice de P_i como um ponto crítico de V .

Sejam Q_1, Q_2, \dots, Q_m os pontos críticos de U . Precisamos encontrar uma interpretação similar às contribuições dos caminhos de K em torno dos pontos Q_j . Assim, teremos determinado o índice geral de K , que será igualado a zero.

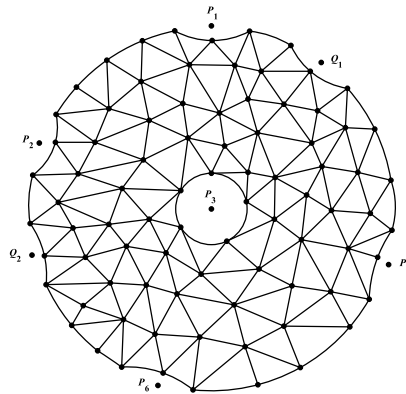


Figura 5.9

Agora examinaremos o que está acontecendo em um ponto crítico de U . A figura 5.10 exibe tal ponto, juntamente com vários outros pontos que são nomeados de acordo com o procedimento aplicado a pontos sobre um caminho em torno de Q . As figuras 5.7 e 5.10 são essencialmente as mesmas, o que muda são os papéis de U e V .

Na figura 5.7 temos um ponto crítico P de V , enquanto que na figura 5.10 temos um ponto crítico Q de U . Na figura 5.10 o vetor $U(P)$ não é nulo, de modo que os vetores $U(T)$ em uma vizinhança de P são quase paralelos; enquanto que na figura 5.7 o vetor $V(Q)$ não é nulo, de modo que os vetores $V(T)$ em uma vizinhança de Q são quase paralelos. Na figura 5.10 o paralelismo em uma vizinhança dos vetores U faz uma adequação com referência à criação de um sistema de coordenadas nos planos tangentes, fundamental para a contagem do índice de P em relação à V . Na figura 5.7 o paralelismo em uma vizinhança dos vetores $V(T)$ que faz assim uma adequação em relação à criação de um sistema cartesiano paralelo, o que levaria à contagem do índice de Q em relação a U .

Porém, na figura 5.7 não são usados os vetores V para estabelecer o sistema de

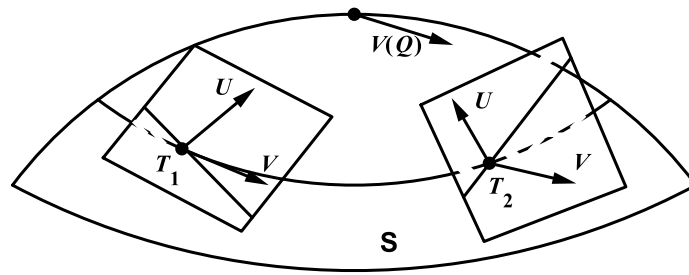


Figura 5.10

coordenadas, mas são ainda usados os vetores U assim como na figura 5.10, razão pela qual o sistema de coordenadas na figura 5.7 não são paralelos. Uma pergunta surge: qual é o efeito de não usar os vetores de V para estabelecer o sistema de coordenadas na vizinhança de Q ?

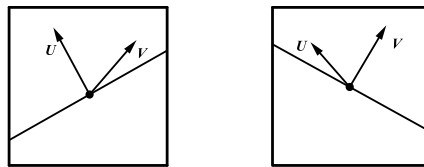


Figura 5.11 Usando U para estabelecer o sistema de coordenada o nome é A e usando V , o nome é B .

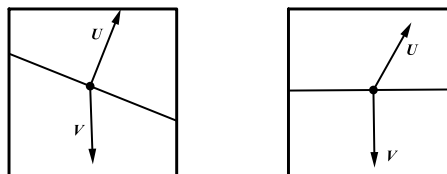


Figura 5.12 Usando U para estabelecer o sistema de coordenada o nome é C e usando V , o nome é C .

Examinaremos as figuras 5.11 e 5.12 e veremos que a única diferença entre dois sistemas de coordenadas é que em um ponto utilizamos U para determinar o eixo y positivo e em outro utilizamos V para determinar o eixo y positivo. Assim os vértices são nomeados com A em um plano e B em outro e vice-versa, enquanto os vértices C são nomeados não importa qual sistema é utilizado. Portanto, arestas nomeadas AB em um sistema é nomeado BA em outro.

Segue do parágrafo anterior que a contribuição para o índice da triangulação K de S' dos caminhos em volta dos pontos críticos de U são os valores negativos dos índices pontos críticos de V . Logo,

$$I_v(P_1) + I_v(P_2) + \cdots + I_v(P_n) - I_u(Q_1) - I_u(Q_2) - \cdots - I_u(Q_m) = 0$$

portanto

$$I_v(P_1) + I_v(P_2) + \cdots + I_v(P_n) = I_u(Q_1) + I_u(Q_2) + \cdots + I_u(Q_m) = \chi(S)$$

□

Referências

- [1] FIGUEIREDO, D. G e NEVES, A. F. *Equações Diferenciais Aplicadas*. 3. ed. Rio de Janeiro: IMPA., 2008.
- [2] HENLE, M. *A Combinatorial Introduction to Topology*. New York: Dover Publications, Inc., 1979.
- [3] BLACKETT, D. W. *Elementary Topology - A Combinatorial and Algebraic*. New York: Approach, Academic Press., 1982.
- [4] SHASHKIN, Y. A. *Fixed Points*. New York: Mathematical World - volume 2. AMS, 1991.