



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”  
Instituto de Geociências e Ciências Exatas  
Câmpus de Rio Claro

# Transformações de Möbius e Inversões

**Francieli Duran**

Dissertação apresentada ao Programa de  
Pós-Graduação – Mestrado Profissional em  
Matemática Universitária como requisito par-  
cial para a obtenção do grau de Mestre

Orientador  
**Prof. Dr. Thiago de Melo**

**2013**

516      Duran, Francieli  
D948t      Transformações de Möbius e Inversões/ Francieli Duran- Rio  
Claro: [s.n.], 2013.  
71 f.:fig.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas.  
Orientador: Thiago de Melo

1. Transformação de Möbius. 2. Inversão. 3. Projeção estereográfica. I. Título

# TERMO DE APROVAÇÃO

Francieli Duran

TRANSFORMAÇÕES DE MÖBIUS E INVERSÕES

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática Universitária do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dr. Thiago de Melo  
Orientador

Prof. Dr. Vanderlei Marcos do Nascimento  
Departamento de Matemática - IGCE–Unesp

Prof. Dr. Márcio de Jesus Soares  
Departamento de Matemática - UFSCar

**Rio Claro, 18 de março de 2013**

*Aos meus pais Adelaide e Idneo,  
à minha irmã Thais  
e ao meu noivo Bruno,  
dedico.*

# Agradecimentos

A Deus, por ter me guiado durante essa trajetória, por me dar força para superar os momentos difíceis e mostrar o caminho nas horas de incerteza.

Aos meus pais, Adelaide e Idneo, que me trouxeram com tanto amor e carinho à este mundo e me ensinaram a viver com dignidade, por terem me apoiado e incentivado com amor incondicional.

A minha irmã Thais, que da sua maneira, tanto me ajudou e apoiou, mesmo não tendo tempo, mas contribuindo muito para realização deste trabalho.

Ao meu noivo Bruno, amigo e companheiro, por ser tão compreensivo e paciente, por estar presente em todos os momentos, pelo amor, pela atenção e por me fazer feliz todos os dias.

Ao Prof. Dr. Thiago de Melo, por me orientar durante essa caminhada, pela ajuda, compreensão e paciência em tantos momentos.

Aos meus colegas e professores do curso de Pós-Graduação em Matemática Universitária, pela convivência e aprendizado.

Aos amigos e colegas que contribuíram de forma direta ou indireta para realização desse trabalho.

Aos companheiros de estrada, pelo apoio nas horas mais complicadas, por fazerem que o trajeto de toda sexta-feira ficasse menos cansativo, pela ajuda, pelos momentos de alegria, pelo apoio, pelo carinho e por doarem um pouco de si para que eu chegasse até aqui.

*Um sonho sonhado sozinho é um sonho.*

*Um sonho sonhado junto é realidade.*

Raul Seixas

# Resumo

O objetivo deste trabalho é estudar Transformações de Möbius arbitrárias por meio de transformações mais simples. Um estudo detalhado de inversão geométrica é realizado com o objetivo de estudar a inversão complexa. Apresentamos o comportamento das Transformações de Möbius no infinito e as classificamos em elíptica, hiperbólica, loxodrômica e parabólica.

**Palavras-chave:** Transformação de Möbius, Inversão, Projeção estereográfica.

# Abstract

The aim of this work is the study of arbitrary Möbius transformations by use of simpler ones. A detailed study of geometric inversions is done to well understand complex inversions. We present the behavior of Möbius transformations at infinity and classify them as elliptic, hyperbolic, loxodromic, and parabolic.

**Keywords:** Möbius transformation, Inversion, Stereographic projection.



# Lista de Figuras

1.1	Inversão geométrica em relação à uma circunferência . . . . .	19
1.2	Analogia entre reflexão $\mathcal{R}_L$ e inversão $\mathcal{I}_K$ . . . . .	20
1.3	Triângulos semelhantes $\triangle aqb \approx \triangle \tilde{bq}\tilde{a}$ . . . . .	20
1.4	Inversão de uma circunferência furada . . . . .	22
1.5	Inversão de uma circunferência . . . . .	22
1.6	Propriedades da inversão $\mathcal{I}_K$ . . . . .	23
1.7	Preservação de ângulos pela inversão . . . . .	24
1.8	Propriedades análogas para $\mathcal{R}_M$ e $\mathcal{I}_C$ . . . . .	25
1.9	Inversão de uma esfera em relação à esfera $\mathcal{E}$ . . . . .	26
1.10	Inversão bidimensional vista a partir da inversão tridimensional . . . . .	28
1.11	Cadeia de circunferências tangentes . . . . .	29
1.12	Inversão da cadeia de circunferências tangentes . . . . .	29
1.13	Quadrilátero com diagonais ortogonais . . . . .	30
1.14	Inversão das circunferências tangentes em $q$ . . . . .	30
1.15	O Teorema de Ptolomeu . . . . .	31
2.1	Projeção estereográfica de uma circunferência furada em $N$ . . . . .	33
2.2	Ângulos preservados pela projeção estereográfica . . . . .	35
2.3	Projeção estereográfica como restrição de inversão geométrica . . . . .	36
2.4	Projeção estereográfica em termos de coordenadas cartesianas . . . . .	37
2.5	Projeção estereográfica em termos de coordenadas esféricas . . . . .	37
2.6	Transferência da conjugação complexa para uma reflexão de $\Sigma$ . . . . .	39
2.7	Transferência da inversão geométrica para uma reflexão de $\Sigma$ . . . . .	40
2.8	Efeito da aplicação $z \mapsto z^2$ em uma grade . . . . .	42
3.1	Sequência de circunferências invertidas convergente para uma reta . . . . .	46
3.2	Inversão complexa quando a origem não pertence à circunferência $\mathcal{C}$ e nem ao seu interior . . . . .	47
3.3	Inversão complexa quando a origem pertence ao interior da circunferência $\mathcal{C}$ . . . . .	47
3.4	Inversão complexa quando a origem pertence à circunferência $\mathcal{C}$ . . . . .	48
3.5	Transformações de Möbius Elíptica, Hiperbólica, Loxodrômica e Parabólica	50
3.6	Imagem de $z$ pela razão cruzada $[z, q, r, s]$ . . . . .	52

5.1	Ilustração da composição $\widetilde{M} = F \circ M \circ F^{-1}$ . . . . .	62
5.2	Efeito de uma transformação de Möbius elíptica . . . . .	63
5.3	Efeito de uma transformação de Möbius hiperbólica . . . . .	64
5.4	Efeito de uma transformação de Möbius loxodrômica . . . . .	64
5.5	Efeito de uma transformação de Möbius parabólica . . . . .	66

# Sumário

<b>1</b>	<b>Inversão Geométrica</b>	<b>19</b>
1.1	Invertendo circunferências . . . . .	21
1.2	Invertendo pontos por meio de circunferências ortogonais . . . . .	23
1.3	Preservação de ângulos . . . . .	24
1.4	Inversão em relação à uma esfera . . . . .	26
1.5	Algumas aplicações de inversão . . . . .	28
<b>2</b>	<b>Plano Complexo Estendido</b>	<b>33</b>
2.1	Projeção estereográfica . . . . .	33
2.2	Projeção estereográfica em coordenadas . . . . .	36
2.3	Transferência de funções complexas para funções na esfera . . . . .	38
2.4	Comportamento de funções no infinito . . . . .	41
<b>3</b>	<b>Transformações de Möbius</b>	<b>43</b>
3.1	Resultados básicos . . . . .	46
3.2	Razão cruzada . . . . .	50
<b>4</b>	<b>Transformações de Möbius e Álgebra Linear</b>	<b>53</b>
4.1	Representação matricial . . . . .	53
4.2	Coordenadas homogêneas . . . . .	54
4.3	Autovalores e autovetores . . . . .	55
4.4	Rotação da esfera como transformação de Möbius . . . . .	58
<b>5</b>	<b>Visualização e Classificação</b>	<b>61</b>
5.1	A ideia principal . . . . .	61
5.2	Transformações elíptica, hiperbólica e loxodrômica . . . . .	63
5.3	Interpretação geométrica local do multiplicador . . . . .	65
5.4	Transformações parabólicas . . . . .	66
5.5	Calculando o multiplicador . . . . .	67
5.6	Interpretação do multiplicador por meio de autovalores . . . . .	69
	<b>Referências</b>	<b>71</b>

# Introdução

Ao estudar as transformações observamos que as mesmas representam um papel importante em várias áreas da Matemática, assim como, na ciência de modo geral. Essa importância apoia-se no fato das transformações tornarem possível converter problemas aparentemente complicados em problemas análogos, mas com soluções mais simples. August Ferdinand Möbius, matemático alemão que nasceu em 1790 e morreu em 1868, introduziu o que hoje conhecemos por transformação de Möbius, uma transformação de  $\mathbb{C}$  em  $\mathbb{C}$ , que pode ser vista como composição de transformações complexas mais simples, como por exemplo, translação, rotação, homotetia e inversão. Estas composições tornam mais claras algumas propriedades das transformações de Möbius.

Neste trabalho, estudaremos as transformações de Möbius por meio do estudo dessas transformações mais simples. Veremos que o conjunto das transformações de Möbius forma um grupo com a operação composição, que as mesmas são conformes e que podemos associá-las a uma matriz quadrada complexa de ordem 2. Também, verificaremos que estas transformações preservam ângulos.

Por meio da inversão geométrica mostraremos que uma transformação de Möbius aplica circunferências generalizadas em circunferências generalizadas, mas não necessariamente circunferências em circunferências ou retas em retas, pois estas podem ser trocadas.

Outra propriedade interessante que veremos é a preservação da razão cruzada, isto é, se uma transformação de Möbius aplica quatro pontos distintos  $z_1, z_2, z_3, z_4$  em quatro pontos distintos  $w_1, w_2, w_3, w_4$ , respectivamente, então

$$\frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_2 - z_3)(z_1 - z_4)} = \frac{(w_1 - w_3)(w_2 - w_4)}{(w_2 - w_3)(w_1 - w_4)}.$$

Também estudaremos a classificação das transformações de Möbius em quatro tipos, a saber, elíptica, hiperbólica, loxodrômica e parabólica. Tal classificação leva em conta a existência de pontos fixos para estas transformações, e faz uso de um número complexo  $m$  associado a elas, chamado de multiplicador.

Esse trabalho está dividido da seguinte forma:

No capítulo 1, apresentaremos a inversão geométrica definida no plano. Mostraremos que esta inversão aplica circunferência em circunferência e que preserva ângulos. Generalizaremos para o espaço os conceitos de inversão no plano e finalizaremos o capítulo

com três propriedades da inversão: um problema sobre circunferências tangentes, uma propriedade de quadriláteros com diagonais ortogonais e o Teorema de Ptolomeu.

No capítulo 2, mostraremos uma relação entre um plano  $\Pi$  e uma esfera  $\Sigma$ , através da projeção estereográfica. Faremos a transferência de funções de  $\mathbb{C}$  em  $\mathbb{C}$  para uma função de  $\Sigma$  em  $\Sigma$ , e com isso examinaremos o comportamento das funções no infinito.

No capítulo 3, definiremos as transformações de Möbius e mostraremos algumas de suas propriedades interessantes, como por exemplo, uma estrutura de grupo no conjunto destas transformações.

No capítulo 4, daremos um tratamento matricial às transformações de Möbius e utilizaremos ferramentas da Álgebra Linear, como por exemplo, autovalores e autovetores.

Por fim, no capítulo 5, estudaremos a existência de pontos fixos para estas transformações, com o objetivo de classificá-las de acordo com a quantidade destes pontos. Definiremos o que vem a ser uma transformação elíptica, hiperbólica, loxodrômica e parabólica, e estudaremos o comportamento geométrico destas ao redor de um ponto fixo.

A referência adotada para este trabalho é [1]. O leitor também pode consultar [2, 3, 4].

# 1 Inversão Geométrica

Neste capítulo apresentaremos uma transformação geométrica do plano no plano, a saber, a inversão geométrica. Mais precisamente, fixaremos uma circunferência  $\mathcal{C}$  de raio  $R$  e centro  $q$  e com isso definiremos o inverso geométrico, em relação à  $\mathcal{C}$ , de qualquer ponto diferente de  $q$ .

**Definição 1.1.** *Seja  $\mathcal{C}$  uma circunferência de raio  $R$  e centro  $q$ . Dado  $p \neq q$  pertencente ao plano, seja  $\rho$  a distância de  $q$  à  $p$ . Definimos  $\tilde{p} = \mathcal{I}_{\mathcal{C}}(p)$ , o inverso geométrico de  $p$  em relação à  $\mathcal{C}$ , como sendo o ponto no mesmo sentido de  $q$  para  $p$  cuja distância é  $R^2/\rho$  de  $q$ .*

Observe que, se  $p$  pertence à  $\mathcal{C}$ , então  $\tilde{p} = p$ ; e que, se a distância de  $q$  à  $p$  é maior que  $R$ , então a distância de  $q$  à  $\tilde{p}$  é menor que  $R$ , e vice-versa. A figura 1.1 abaixo ilustra esse fato.

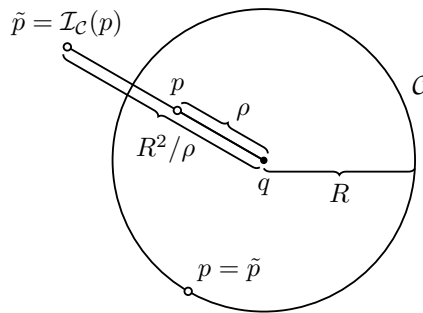


Figura 1.1: Inversão geométrica em relação à uma circunferência

Podemos fazer uma analogia entre a inversão  $\mathcal{I}_{\mathcal{K}}$  em relação a uma circunferência  $\mathcal{K}$  e a reflexão  $\mathcal{R}_L$  em relação à reta  $L$ . Para isso, vamos observar as figuras 1.2a e 1.2b.

Notemos que:

- (i) a reta  $L$  separa o plano em duas partes das quais são trocadas por  $\mathcal{R}_L(z)$ ;
- (ii) Cada ponto da reta  $L$  permanece fixo;
- (iii) a aplicação  $\mathcal{R}_L(z)$  é a sua própria aplicação inversa, ou seja,  $\mathcal{R}_L(z) \circ \mathcal{R}_L(z)$  é a aplicação identidade.

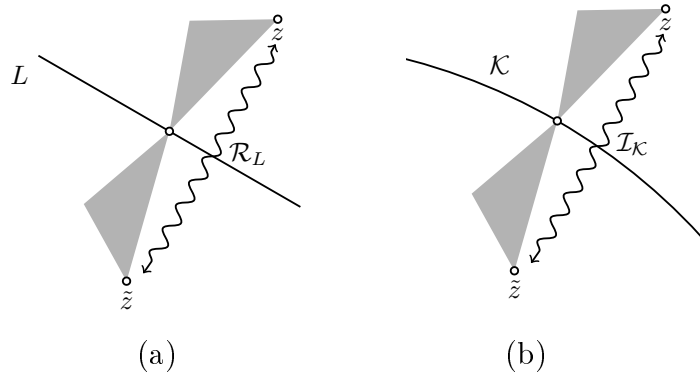


Figura 1.2: Analogia entre reflexão  $\mathcal{R}_L$  e inversão  $\mathcal{I}_K$

Consideremos agora um ponto  $z$  e sua reflexão  $\tilde{z} = \mathcal{R}_L(z)$  em  $L$ . Tal par é chamado de “imagem refletida” ou “simétricos em relação à  $L$ ”. Ou seja, a reflexão faz com que cada par de pontos troque de lugar. Agora, analisando os triângulos sombreados na figura 1.2b vemos que, quanto maior for a razão entre o raio de  $\mathcal{K}$  e a distância de  $z$  à  $\mathcal{K}$ , mais o efeito de  $\mathcal{I}_K$  se parece com o de  $\mathcal{R}_L$ . Por essas razões, também chamamos  $\mathcal{I}_K$  de reflexão em relação à uma circunferência e os pares de pontos  $z$  e  $\tilde{z} = \mathcal{I}_K(z)$  são chamados de simétricos em relação à  $\mathcal{K}$ .

A seguir, apresentamos duas propriedades simples da inversão geométrica.

**Propriedade 1.2.** Se a inversão em relação a uma circunferência com centro em  $q$  aplica dois pontos  $a$  e  $b$  (ambos diferentes de  $q$ ) em  $\tilde{a}$  e  $\tilde{b}$  respectivamente, então os triângulos  $aqb$  e  $\tilde{b}\tilde{q}\tilde{a}$  são semelhantes.

*Demonstração.* Seja  $\mathcal{C}$  uma circunferência de centro  $q$  e raio  $R$ . Sejam  $a$  e  $b$  dois pontos distintos tais que  $a$ ,  $b$  e  $q$  não sejam colineares, e sejam  $\tilde{a} = \mathcal{I}_C(a)$  e  $\tilde{b} = \mathcal{I}_C(b)$  suas respectivas imagens sob a inversão em relação à  $\mathcal{C}$ . Da definição, sabemos que  $d(q, a)d(q, \tilde{a}) = R^2 = d(q, b)d(q, \tilde{b})$  e observando o ângulo comum  $\angle aqb = \angle \tilde{b}\tilde{q}\tilde{a}$  obtemos,

$$d(q, a)d(q, \tilde{a}) = d(q, b)d(q, \tilde{b}) \Rightarrow \frac{d(q, a)}{d(q, b)} = \frac{d(q, \tilde{b})}{d(q, \tilde{a})},$$

como pode ser observado na figura 1.3. □

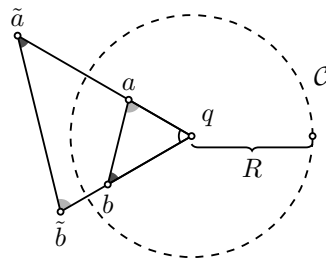


Figura 1.3: Triângulos semelhantes  $\triangle aqb \approx \triangle \tilde{b}\tilde{q}\tilde{a}$

**Propriedade 1.3.** Sejam  $a$  e  $b$  dois pontos arbitrários e  $\tilde{a} = \mathcal{I}_{\mathcal{K}}(a)$  e  $\tilde{b} = \mathcal{I}_{\mathcal{K}}(b)$  suas respectivas imagens sob a inversão em relação à  $\mathcal{K}$ . Então, a distância entre as imagens é dada por

$$d(\tilde{a}, \tilde{b}) = \left( \frac{R^2}{d(q, a)d(q, b)} \right) d(a, b).$$

*Demonstração.* Usando os triângulos semelhantes da propriedade anterior temos

$$\frac{d(\tilde{a}, \tilde{b})}{d(a, b)} = \frac{d(q, \tilde{b})}{d(q, a)} = \frac{d(q, \tilde{b})d(q, b)}{d(q, a)d(q, b)} = \frac{R^2}{d(q, a)d(q, b)}$$

e daí obtemos

$$d(\tilde{a}, \tilde{b}) = \left( \frac{R^2}{d(q, a)d(q, b)} \right) d(a, b).$$

□

## 1.1 Invertendo circunferências

A partir de agora usaremos o termo “reta furada  $L$ ” para fazer referência ao conjunto  $L - \{q\}$ , sempre que o centro de inversão  $q$  pertencer à reta  $L$ . Deste modo, abusaremos da notação e indicaremos a imagem de uma reta furada do mesmo modo que indicamos a imagem de uma reta qualquer, ou seja,  $\mathcal{I}_{\mathcal{K}}(L)$ . Analogamente, usaremos o termo “circunferência furada  $\mathcal{C}$ ”.

Consideremos uma reta  $L$  que passa pelo centro  $q$  de uma circunferência  $\mathcal{K}$ . Pela definição de  $\mathcal{I}_{\mathcal{K}}$  é claro que  $\mathcal{I}_{\mathcal{K}}$  aplica a reta furada  $L$  nela mesma, o que podemos escrever como  $\mathcal{I}_{\mathcal{K}}(L) = L$ . Dessa forma,  $\mathcal{I}_{\mathcal{K}}$  troca as partes de  $L$  interiores e exteriores a  $\mathcal{K}$  e os únicos pontos de  $L$  que permanecem fixos são os dois pontos onde  $L$  intercepta  $\mathcal{K}$ .

A proposição a seguir nos diz o que acontece com uma reta  $L$  que não passa pelo centro  $q$  de  $\mathcal{K}$  ao ser invertida em relação à  $\mathcal{K}$  (ver figura 1.4).

**Proposição 1.4.** *Se uma reta  $L$  não passa pelo centro  $q$  de uma circunferência  $\mathcal{K}$ , então a inversão em relação à  $\mathcal{K}$  aplica  $L$  em uma circunferência furada.*

*Demonstração.* Sejam  $b$  um ponto arbitrário da reta  $L$  e  $a$  o ponto de interseção de  $L$  com a reta perpendicular passado por  $q$ . Da Propriedade 1.2 temos que  $\angle \tilde{q}\tilde{b}\tilde{a} = \angle qab = \frac{\pi}{2}$ . Portanto,  $\tilde{b}$  está na circunferência onde o segmento de reta  $q\tilde{a}$  é o seu diâmetro. □

**Observação 1.5.** A inversão de uma circunferência furada, em relação à  $\mathcal{K}$ , é uma reta. De fato, pela demonstração anterior os inversos de  $\tilde{a}$  e  $\tilde{b}$  sempre formam um triângulo retângulo com o ponto  $q$ , portanto a reta que passa por  $a$  e  $b$  sempre é perpendicular à reta que passa por  $q$  e  $\tilde{a}$ . Como  $\tilde{b}$  é arbitrário e esta reta perpendicular é única, segue o resultado.



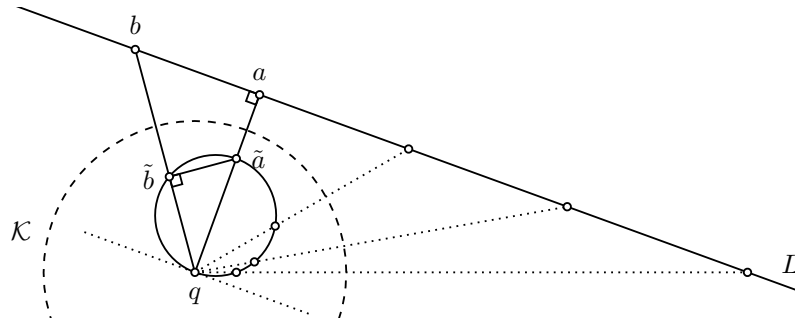


Figura 1.4: Inversão de uma circunferência furada

Em resumo, podemos dizer que a inversão  $\mathcal{I}_K$  permuta circunferências furadas com retas (mas não retas furadas).

Note que a reta  $q\tilde{a}$  contém o diâmetro da circunferência e, é perpendicular à reta  $L$ . Portanto, a reta tangente a esta circunferência em  $q$  é paralela à  $L$ .

O próximo resultado diz respeito a inversão de uma circunferência que não passa pelo centro de inversão.

**Teorema 1.6.** *Se uma circunferência  $\mathcal{C}$  não passa pelo centro de uma circunferência  $\mathcal{K}$ , então a inversão em relação à  $\mathcal{K}$  aplica  $\mathcal{C}$  em uma circunferência que não passa por  $q$ .*

*Demonstração.* Sejam  $\mathcal{K}$  uma circunferência de centro  $q$  e  $\mathcal{C}$  outra circunferência que não passa pelo centro  $q$  de  $\mathcal{K}$ . Consideremos os pontos  $a$  e  $b$  em  $\mathcal{C}$  de modo que sejam os extremos de um diâmetro de  $\mathcal{C}$ , e colineares com o centro  $q$ . Assim, temos um ângulo reto em um ponto  $c$  de  $\mathcal{C}$  ( $c \neq a$  e  $c \neq b$ ). Sejam  $\tilde{a}$ ,  $\tilde{b}$  e  $\tilde{c}$  as imagens de  $a$ ,  $b$  e  $c$  respectivamente. Da Propriedade 1.2 temos que os ângulos  $qac$  e  $q\tilde{c}\tilde{a}$  são congruentes, bem como os ângulos  $qbc$  e  $q\tilde{c}\tilde{b}$ . Em seguida, considerando o triângulo  $abc$ , observamos que o ângulo  $qac$  é igual a soma dos ângulos  $acb$  e  $cba$ . Segue que  $\angle\tilde{a}\tilde{c}\tilde{b} = \frac{\pi}{2}$ , e portanto,  $\tilde{a}$  e  $\tilde{b}$  são as extremidades de um diâmetro de uma circunferência passando por  $\tilde{c}$ .  $\square$

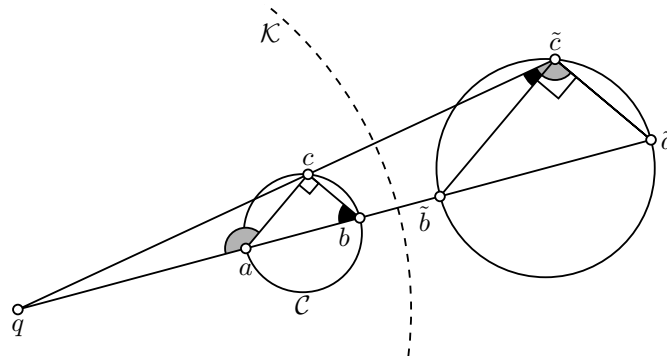


Figura 1.5: Inversão de uma circunferência

## 1.2 Invertendo pontos por meio de circunferências ortogonais

Nesta seção em vários momentos será necessária a construção de circunferências ortogonais a uma circunferência fixada  $\mathcal{K}$ . Porém, vale ressaltar que não existe uma tal circunferência contendo o centro de  $\mathcal{K}$ .

**Definição 1.7.** *Duas circunferências são ditas ortogonais se, elas se interceptam formando ângulos retos, ou seja, se seus raios são perpendiculares no ponto de intersecção.*

**Proposição 1.8.** *A inversão de uma circunferência  $\mathcal{C}$  ortogonal à  $\mathcal{K}$ , em relação à  $\mathcal{K}$ , é a própria circunferência  $\mathcal{C}$ .*

*Demonstração.* Considere uma circunferência  $\mathcal{K}$ , de centro  $q$  e raio  $R$ , e uma circunferência  $\mathcal{C}$  interceptando  $\mathcal{K}$  perpendicularmente nos pontos  $a$  e  $b$ , isto é, a reta  $T$  tangente à  $\mathcal{C}$  em  $a$ , por exemplo, passa por  $q$  (ver figura 1.6a). Sabemos que os pontos  $a$  e  $b$  permanecem fixos quando invertidos em relação à  $\mathcal{K}$ . Considere um ponto  $z$ , em  $\mathcal{C}$ , e a semirreta passando por  $q$  e  $z$ . Esta semirreta interceptará  $\mathcal{C}$  em um ponto  $z'$ . De acordo com o valor da potência de  $q$  com respeito à circunferência  $\mathcal{C}$ , temos  $d(q, z)d(q, z') = d(q, b)^2 = R^2 = d(q, a)^2$ , o que caracteriza  $z'$  como sendo o inverso de  $z$  em relação à  $\mathcal{K}$ . Mas, existe apenas uma circunferência passando por  $a$ ,  $b$  e  $z'$ , a própria  $\mathcal{C}$ , de onde segue o resultado.  $\square$

A figura 1.6a ilustra duas consequências imediatas deste resultado. A primeira é que o disco delimitado por  $\mathcal{C}$  também é aplicado em si mesmo e a segunda é que a reta passando por  $q$  e pelo ponto  $z$  de  $\mathcal{C}$ , intercepta  $\mathcal{C}$  pela segunda vez no ponto de inversão  $\tilde{z}$ .

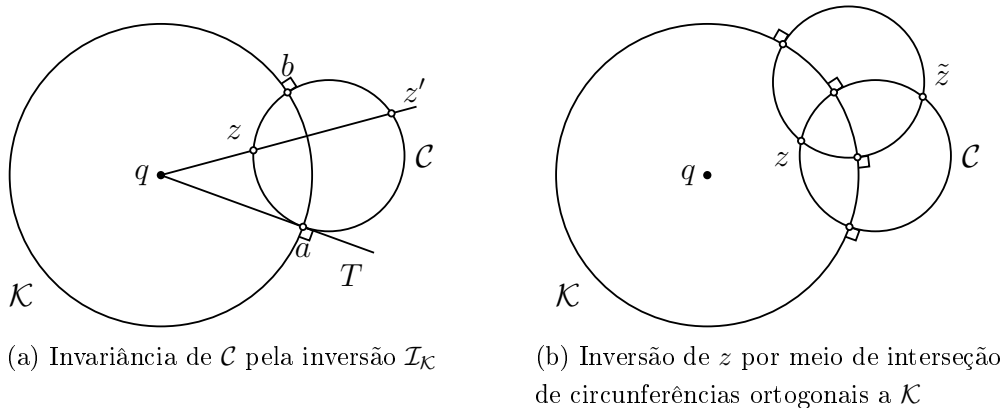


Figura 1.6: Ilustração para as Proposições 1.8 e 1.9

Outra consequência é a construção geométrica mostrada na figura 1.6b:

**Proposição 1.9.** *A imagem  $\tilde{z}$  de  $z$  sob a inversão em relação à  $\mathcal{K}$  é o segundo ponto de intersecção de quaisquer duas circunferências que passam por  $z$  e que são ortogonais à  $\mathcal{K}$ .*

*Demonstração.* A prova é simples. Dado um  $z \neq q$ , basta tomar duas circunferências  $\mathcal{C}_1$  e  $\mathcal{C}_2$  ortogonais à  $\mathcal{K}$  contendo  $z$ . Assim,  $\tilde{z}$  deve pertencer à  $\mathcal{C}_1$  e à  $\mathcal{C}_2$ , pois ambas são invariantes.  $\square$

### 1.3 Preservação de ângulos

Nesta seção, definiremos ângulo entre duas circunferências e mostraremos que a inversão geométrica preserva estes ângulos.

**Definição 1.10.** *Sejam  $\mathcal{C}_1$  e  $\mathcal{C}_2$  duas circunferências que se interceptam em um ponto  $p$ . Definimos o ângulo entre  $\mathcal{C}_1$  e  $\mathcal{C}_2$  em  $p$  como sendo o ângulo agudo  $\theta$  de  $T_1$  para  $T_2$ , nesta ordem, onde  $T_1$  e  $T_2$  são as retas tangentes às circunferências  $\mathcal{C}_1$  e  $\mathcal{C}_2$  em  $p$ , respectivamente.*

*Analogamente, se  $L$  é uma reta que intercepta  $\mathcal{C}_1$  em  $p$ , o ângulo entre  $L$  e  $\mathcal{C}_1$  é o ângulo agudo  $\theta$  de  $L$  para  $T_1$ , nesta ordem.*

**Proposição 1.11.** *Sejam  $\mathcal{C}$  uma circunferência e,  $\mathcal{K}_1$  e  $\mathcal{K}_2$  circunferências ortogonais à  $\mathcal{C}$ . Dado  $p \in \mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2$ , sejam  $T_1$  e  $T_2$  as tangentes à  $\mathcal{K}_1$  e  $\mathcal{K}_2$ , em  $p$ , formando ângulo agudo  $\theta$ . Então, o ângulo agudo entre as tangentes à  $\mathcal{K}_1$  e  $\mathcal{K}_2$  em  $\tilde{p}$  também é  $\theta$ .*

*Demonstração.* A prova é simples e portanto daremos apenas uma ideia (ver figura 1.7). Sendo  $T_i$  e  $T'_i$  as tangentes à  $\mathcal{K}_i$  em  $p$  e  $\tilde{p}$ , respectivamente, mostramos primeiramente que estas duas retas formam ângulos congruentes com a semirreta de origem  $q$  passando por  $p$ . Por fim, basta comparar estes ângulos com o ângulo  $\theta$ .  $\square$

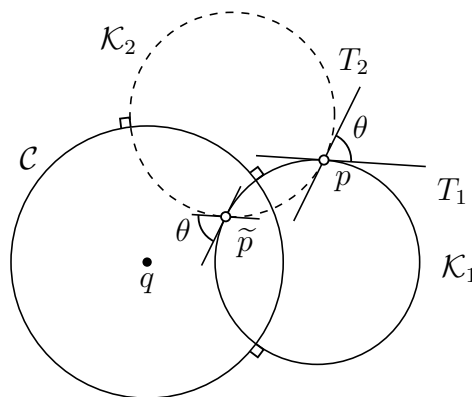


Figura 1.7: Preservação de ângulos pela inversão

Na figura 1.8a, os pontos  $a$  e  $b$  são simétricos em relação à reta  $L$ . Fazendo uma reflexão em relação à reta  $M$ , obtemos os pontos  $\tilde{a}$  e  $\tilde{b}$  bem como uma reta  $\tilde{L}$ . Assim, pode-se provar, por meio de congruência, que  $\tilde{a}$  e  $\tilde{b}$  são simétricos em relação à  $\tilde{L}$ . Ou seja, pontos simétricos em relação a uma reta  $L$  são refletidos em pontos simétricos em relação à reflexão de  $L$ .

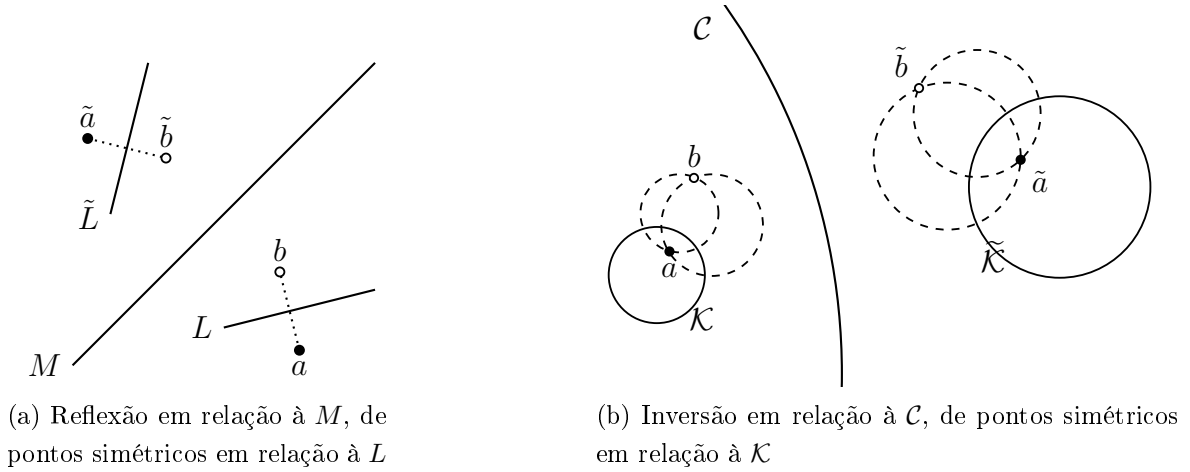


Figura 1.8: Propriedades análogas para  $\mathcal{R}_M$  e  $\mathcal{I}_C$

Mostremos agora que a reflexão de uma circunferência em relação a uma circunferência também possui propriedade similar.

**Propriedade 1.12.** Sejam  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{K}$  duas circunferências. Dados  $a$  e  $b = \mathcal{I}_{\mathcal{K}}(a)$ , sejam  $\tilde{a} = \mathcal{I}_{\mathcal{C}}(a)$  e  $\tilde{b} = \mathcal{I}_{\mathcal{C}}(b)$ . Então  $\tilde{b} = \mathcal{I}_{\tilde{\mathcal{K}}}(\tilde{a})$ , onde  $\tilde{\mathcal{K}} = \mathcal{I}_{\mathcal{C}}(\mathcal{K})$ .

O resultado acima é consequência da Proposição 1.9 e da proposição a seguir.

**Proposição 1.13.** *A inversão aplica um par de circunferências ortogonais em um par de circunferências ortogonais.*

*Demonstração.* Dividiremos a demonstração em três casos. Fixemos  $\mathcal{C}$  como sendo a circunferência de inversão, com centro em  $q$ .

**Caso 1:** suponhamos que as duas circunferências ortogonais  $\mathcal{K}_1$  e  $\mathcal{K}_2$  não passem pelo centro de inversão  $q$ . Dadas as tangentes  $T_1$  e  $T_2$  a estas duas circunferências formando um ângulo  $\theta = \pi/2$ , construímos duas circunferências  $\mathcal{X}_1$  e  $\mathcal{X}_2$ , ambas ortogonais à  $\mathcal{C}$ , tendo  $T_1$  e  $T_2$  como suas tangentes em  $p$ . Pela Proposição 1.11, o ângulo entre as tangentes  $T'_1$  e  $T'_2$  à  $\mathcal{X}_1$  e  $\mathcal{X}_2$  em  $\tilde{p}$  também é  $\theta$ .

**Caso 2:** suponhamos que as duas circunferências ortogonais  $\mathcal{K}_1$  e  $\mathcal{K}_2$  passem pelo centro de inversão  $q$ . Já sabemos portanto que seus simétricos são retas concorrentes em  $\tilde{p}$ . O resultado segue de modo análogo ao caso 1, apenas observando que estas duas retas são na verdade as tangentes  $T'_1$  e  $T'_2$ .

**Caso 3:** suponhamos que  $\mathcal{K}_1$  passe pelo centro de inversão mas não  $\mathcal{K}_2$ . Nesta caso a demonstração é análoga ao Caso 2.  $\square$

A Propriedade 1.12 pode ser agora entendida. Observando a figura 1.8b temos que as circunferências tracejadas passando por  $a$  e  $b$  são ortogonais à  $\mathcal{K}$  e que suas respectivas imagens pela inversão em relação à  $\mathcal{C}$  são ortogonais à  $\tilde{\mathcal{K}}$ . Portanto, se interceptam em um par de pontos inversos em relação à  $\tilde{\mathcal{K}}$ .

## 1.4 Inversão em relação à uma esfera

Nesta seção, obteremos resultados análogos aos obtidos até o momento, que tratam da inversão em relação a uma esfera. Por exemplo, considerando a figura 1.4, se a rotacionarmos (no espaço) ao redor da reta por  $q$  e  $a$ , obteremos a figura 1.9, onde a esfera de inversão  $\mathcal{E}$  é obtida pela rotação da circunferência de inversão  $\mathcal{K}$  e o plano  $\Pi$  é obtido pela rotação da reta  $L$ .

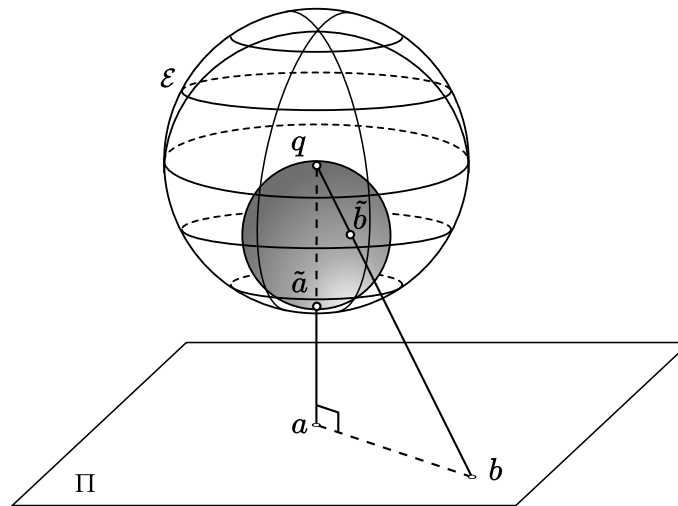


Figura 1.9: A inversão de uma esfera contendo  $q$ , em relação à esfera  $\mathcal{E}$ , é um plano  $\Pi$

Seguindo esta analogia, a definição abaixo surge naturalmente.

**Definição 1.14.** *Seja  $\mathcal{E}$  uma esfera de raio  $R$  e centro  $q$ . Se  $p \neq q$  é um ponto do espaço à distância  $\rho$  de  $q$ , então  $\mathcal{I}_{\mathcal{E}}(p)$  é o ponto da semirreta de  $q$  para  $p$  à distância  $R^2/\rho$  de  $q$ . A aplicação  $\mathcal{I}_{\mathcal{E}}$  é chamada de inversão do espaço tridimensional em relação à esfera  $\mathcal{E}$ .*

Observamos que, assim como no caso plano, o centro de inversão não pode ser invertido. Portanto continuaremos a fazer uso do termo “furado” para excluirmos o ponto  $q$  do conjunto com o qual estivermos trabalhando.

O primeiro resultado que é facilmente generalizado para o espaço é o seguinte:

**Propriedade 1.15.** *Sob a inversão em relação a uma esfera centrada em  $q$ , um plano  $\Pi$  que não contém  $q$  é invertido em uma esfera furada, e cujo plano tangente neste*

ponto é paralelo ao  $\Pi$ . Reciprocamente, uma esfera furada é invertida em um plano paralelo ao plano tangente a esfera em  $q$  por  $q$ .

Outro resultado generalizado pode ser obtido se rotacionarmos a figura 1.5 ao redor da reta por  $q$  e  $a$ . Mais precisamente temos que:

**Propriedade 1.16.** A inversão  $\mathcal{I}_{\mathcal{E}}$  aplica esfera em esfera.

Não apenas esferas ou planos podem ser invertidos por  $\mathcal{I}_{\mathcal{E}}$ . Se tomarmos uma interseção de duas esferas, obteremos uma circunferência no espaço, que pode então ser invertida. Assim, aplicando a Propriedade anterior a estas esferas, deduzimos o seguinte:

**Propriedade 1.17.** Sob a inversão  $\mathcal{I}_{\mathcal{E}}$ , a imagem de uma circunferência  $\mathcal{C}$  é uma circunferência. Se  $\mathcal{C}$  é furada, então sua imagem é uma reta paralela à reta tangente de  $\mathcal{C}$  em  $q$ .

*Demonstração.* De fato, basta considerarmos a circunferência  $\mathcal{C}$  como sendo uma interseção de duas esferas, e assim,  $\mathcal{I}_{\mathcal{E}}(\mathcal{C})$  será a interseção das inversões destas esferas, e portanto, será uma circunferência.  $\square$

A estreita ligação entre a inversão em relação a uma circunferência e a reflexão em relação a uma reta também persiste: reflexão em um plano é um “caso limite” de inversão em relação a uma esfera.

Uma propriedade análoga à Propriedade 1.12 também existe para o caso tridimensional. Mais precisamente:

**Propriedade 1.18.** Seja  $\mathcal{S}$  um plano ou uma esfera, e sejam  $a$  e  $b$  pontos simétricos em relação à  $\mathcal{S}$ . Sob a inversão  $\mathcal{I}_{\mathcal{E}}$  em relação a qualquer plano ou esfera  $\mathcal{E}$ , as imagens de  $a$  e  $b$  são simétricas em relação à imagem de  $\mathcal{S}$ .

A seguir, descrevemos brevemente as etapas que levam a este resultado, observando que são análogas às utilizadas para a obtenção do resultado bidimensional.

Observando a figura 1.6a, se a rotacionarmos em torno da reta que contém os centros de  $\mathcal{K}$  e de  $\mathcal{C}$ , obteremos duas esferas,  $\mathcal{E}$  e  $\mathcal{S}$ , respectivamente. Assim, deduzimos naturalmente que:

**Propriedade 1.19.** Sob a inversão em relação a uma esfera  $\mathcal{E}$ , cada esfera  $\mathcal{S}$  ortogonal à  $\mathcal{E}$  é aplicada nela mesma.

Quando dizemos que esferas são ortogonais queremos dizer que seus planos tangentes são ortogonais em cada ponto de suas circunferências de intersecção. No entanto, a fim de ilustrarmos os objetos envolvidos nos resultados anteriores, vamos reformular esta descrição tridimensional em termos bidimensionais:

**Propriedade 1.20.** Sejam  $\mathcal{S}_1$  e  $\mathcal{S}_2$  duas esferas que se interceptam e sejam  $\mathcal{C}_1$  e  $\mathcal{C}_2$  circunferências formadas pela intersecção de  $\mathcal{S}_1$  e  $\mathcal{S}_2$  com um plano  $\Pi$  (passando pelos centros das esferas). Então,  $\mathcal{S}_1$  e  $\mathcal{S}_2$  são ortogonais se, e somente se,  $\mathcal{C}_1$  e  $\mathcal{C}_2$  são ortogonais.

A figura 1.10 nos ajuda a ver que, se restringirmos a atenção ao  $\Pi$ , então a inversão tridimensional em relação à  $\mathcal{S}_1$  é idêntica à inversão bidimensional em relação à  $\mathcal{C}_1$ . Essa maneira de visualizar a inversão em relação às esferas nos permite generalizar os resultados anteriores rapidamente.

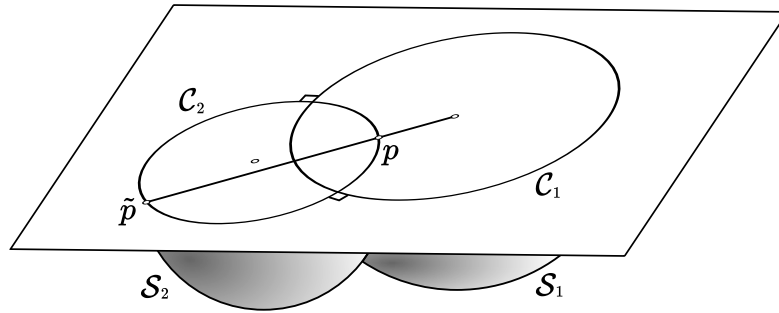


Figura 1.10: Inversão bidimensional vista a partir da inversão tridimensional

Por exemplo, referindo-se à figura 1.6b, descobrimos que se  $p$  encontra-se em  $\Pi$ , então  $\tilde{p} = \mathcal{I}_{\mathcal{S}_1}(p)$  pode ser construído como o segundo ponto de intersecção de duas circunferências quaisquer como  $\mathcal{C}_2$  que: (i) estão contidas em  $\Pi$ ; (ii) são ortogonais a  $\mathcal{C}_1$ ; (iii) passam por  $p$ .

Suponha que  $\mathcal{S}_1$  e  $\mathcal{S}_2$  (esferas ortogonais da figura 1.10) são submetidas à inversão em relação a uma terceira esfera  $\mathcal{E}$ . Seja  $\Pi$  o único plano passando pelos centros de  $\mathcal{S}_1$ ,  $\mathcal{S}_2$  e  $\mathcal{E}$ , e seja  $\mathcal{C}$  a circunferência na qual  $\mathcal{E}$  intercepta  $\Pi$ . Uma vez que  $\mathcal{I}_{\mathcal{C}}$  aplica  $\mathcal{C}_1$  e  $\mathcal{C}_2$  em circunferências ortogonais (pois  $\mathcal{C}_1 \perp \mathcal{C}_2$ ), deduzimos rapidamente que:

**Propriedade 1.21.** A inversão em relação a uma esfera  $\mathcal{E}$  aplica esferas ortogonais em esferas ortogonais.

**Observação 1.22.** A Propriedade 1.19 é um caso especial do resultado acima. Basta tomar  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1$  e  $\mathcal{E} = \mathcal{S}_2$ . Assim,  $\mathcal{I}_{\mathcal{E}}$  preserva  $\mathcal{E}$  e aplica  $\mathcal{S}$  em uma esfera ortogonal à  $\mathcal{E}$ . Como  $\mathcal{I}_{\mathcal{E}}(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$ , onde  $\mathcal{C} = \mathcal{S} \cap \mathcal{E}$ , a única possibilidade é  $\mathcal{I}_{\mathcal{E}}(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$ .

**Observação 1.23.** Ao considerarmos um plano como sendo um “caso limite” de esferas, vemos que os três últimos resultados acima, de fato, nos levam à Propriedade 1.18.

## 1.5 Algumas aplicações de inversão

A seguir apresentamos três aplicações de inversão. A primeira trata do efeito da inversão em uma cadeia de circunferências tangentes; a segunda lida com quadriláteros de diagonais ortogonais; a terceira apresenta o Teorema de Ptolomeu.

**Um Problema sobre Circunferências Tangentes.** Para o nosso primeiro problema, consideremos a figura 1.11, onde imaginamos que são dadas duas circunferências  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  que são tangentes em  $q$ . Construímos agora a circunferência  $\mathcal{C}_0$  que é tangente à  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  e cujo centro situa-se na reta horizontal  $L$  que passa pelos centros de  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$ . Finalmente, construímos a cadeia de circunferências  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ , e etc, tais que  $\mathcal{C}_{n+1}$  é tangente à  $\mathcal{C}_n, \mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$ .

Assim, obtemos dois resultados sobre esta cadeia de circunferências:

- (a) Os pontos de contato da cadeia  $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ , etc, ficam todos em uma circunferência (tracejada) que tangencia  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  em  $q$ .
- (b) Se o raio de  $\mathcal{C}_n$  é  $r_n$ , então a distância do centro de  $\mathcal{C}_n$  à  $L$  é  $2nr_n$ . A figura 1.11 ilustra esse fato na circunferência  $\mathcal{C}_3$ .

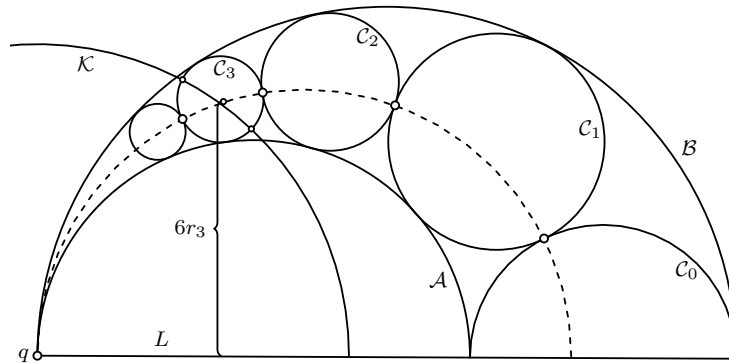


Figura 1.11: Cadeia de circunferências tangentes

A inversão nos permite demonstrar estes resultados de uma só vez. Na figura 1.12, temos uma única circunferência  $\mathcal{K}$  centrada em  $q$ , ortogonal à  $\mathcal{C}_3$ . Assim a inversão em relação à  $\mathcal{K}$  aplica  $\mathcal{C}_3$  nela mesma, e  $\mathcal{A}$  e  $\mathcal{B}$  em retas verticais paralelas, como mostrado na figura 1.12.

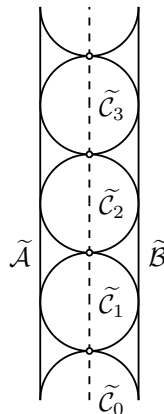


Figura 1.12: Inversão da cadeia de circunferências tangentes



**Uma Propriedade de Quadriláteros com Diagonais Ortogonais.** A figura 1.13 mostra um quadrilátero cujas diagonais se interceptam ortogonalmente em  $q$ . Se refletirmos  $q$  em relação à cada um dos lados do quadrilátero, obteremos quatro novos pontos. Por esses quatro pontos temos uma circunferência.

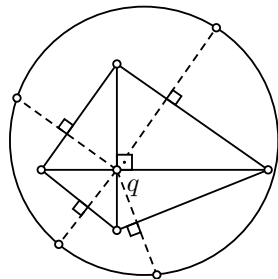


Figura 1.13: Quadrilátero com diagonais ortogonais

Para demonstrar o resultado usando a inversão, primeiro representamos a reflexão de  $q$  em relação a um lado, como o segundo ponto de intersecção de duas circunferências por  $q$  cujos centros são os vértices deste lado (ver figura 1.14). Como as diagonais são ortogonais, cada par de circunferências centradas nos vértices de uma mesma aresta se interceptam ortogonalmente, tanto em  $q$  quanto na reflexão de  $q$ . Daqui resulta que, se aplicarmos uma inversão em relação a qualquer circunferência  $\mathcal{K}$  de centro  $q$ , então um tal par de circunferências ortogonais será aplicado em um par de retas ortogonais, paralelas às diagonais do quadrilátero (parte direita da figura 1.14). Assim, as imagens das quatro reflexões de  $q$  são os vértices de um retângulo e portanto, pertencem a uma circunferência  $\mathcal{C}$ . Por fim,  $\mathcal{I}_{\mathcal{K}}(\mathcal{C})$  é uma circunferência que contém as quatro reflexões de  $q$ .

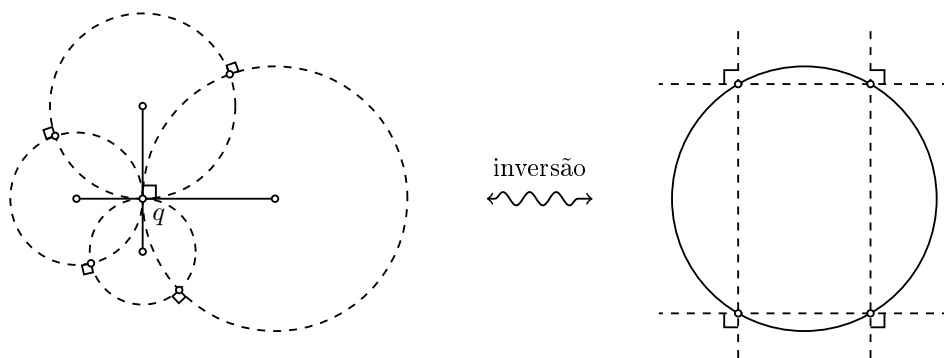


Figura 1.14: Inversão das circunferências tangentes em  $q$

**O Teorema de Ptolomeu.** A figura 1.15a apresenta um quadrilátero  $abcd$  inscrito em uma circunferência. Ptolomeu descobriu que “em um quadrilátero inscritível, a soma dos produtos dos lados opostos é o produto das diagonais”. Em símbolos

$$d(a, d)d(b, c) + d(a, b)d(c, d) = d(a, c)d(b, d).$$

Invertendo a figura 1.15a em relação a uma circunferência  $\mathcal{K}$  centrada em um dos vértices (digamos  $a$ ), obtemos a figura 1.15b, com  $\tilde{b}, \tilde{c}, \tilde{d}$  colineares, e portanto

$$d(\tilde{b}, \tilde{c}) + d(\tilde{c}, \tilde{d}) = d(\tilde{b}, \tilde{d}). \quad (1.1)$$

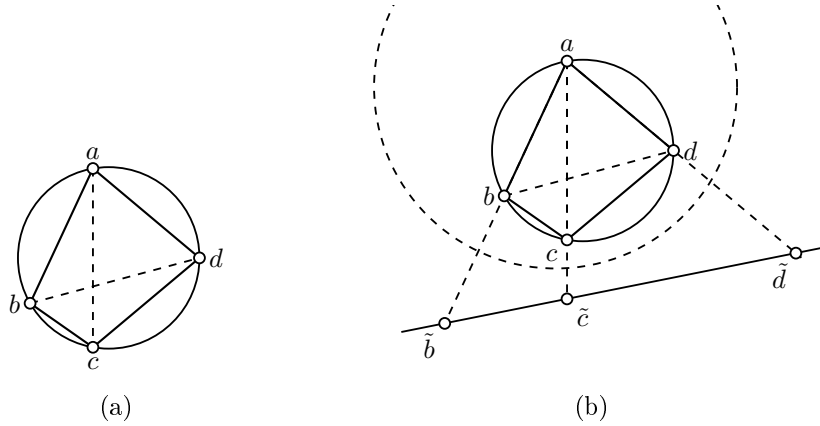


Figura 1.15: O Teorema de Ptolomeu

Lembrando que a propriedade 1.8 nos diz como a distância entre dois pontos invertidos está relacionada com a distância entre os pontos originais, e assumindo que a circunferência  $\mathcal{K}$  tem raio  $R$ , obtemos

$$\begin{aligned} d(\tilde{b}, \tilde{c}) &= \frac{R^2}{d(a, b)d(a, c)}d(b, c), \\ d(\tilde{c}, \tilde{d}) &= \frac{R^2}{d(a, c)d(a, d)}d(c, d) \text{ e} \\ d(\tilde{b}, \tilde{d}) &= \frac{R^2}{d(a, b)d(a, d)}d(b, d). \end{aligned}$$

Substituindo em (1.1) deduzimos que

$$\frac{d(b, c)}{d(a, b)d(a, c)} + \frac{d(c, d)}{d(a, c)d(a, d)} = \frac{d(b, d)}{d(a, b)d(a, d)}.$$

Multiplicando ambos os lados por  $d(a, b)d(a, c)d(a, d)$ , chegamos ao Teorema de Ptolomeu.

## 2 Plano Complexo Estendido

Este capítulo apresenta uma relação entre um plano  $\Pi$  e uma esfera  $\Sigma$ , através da projeção estereográfica. Também identificaremos o plano  $\Pi$  com o plano complexo  $\mathbb{C}$ , com o objetivo de obtermos a projeção estereográfica em termos de coordenadas. Veremos como transferir uma função de  $\mathbb{C}$  em  $\mathbb{C}$  para uma função de  $\Sigma$  em  $\Sigma$ , e com isso examinar o comportamento de funções no infinito.

### 2.1 Projeção estereográfica

Nesta seção, estabeleceremos uma correspondência biunívoca entre uma esfera furada (ou seja, uma esfera menos um de seus pontos) e um plano. Inicialmente, consideremos uma esfera  $\Sigma$  de raio unitário e centro  $O$ , e seja  $\Pi$  um plano passando por  $O$ . Para associarmos os pontos de  $\Sigma$  a pontos de  $\Pi$ , primeiro tomamos o diâmetro  $NS$  da esfera, perpendicular ao plano  $\Pi$  em  $O$ . Então, dado  $p \in \Sigma - \{N\}$ , construímos a reta  $Np$ , que intercepta o plano  $\Pi$  em um único ponto  $\hat{p}$ .

A construção acima fornece a correspondência desejada, chamada de “projeção estereográfica”, entre os pontos de  $\Sigma - \{N\}$  e os pontos do plano  $\Pi$ .

O contexto deixará claro se a projeção deve ser considerada como função de  $\Sigma - \{N\}$  para  $\Pi$ , ou vice-versa.

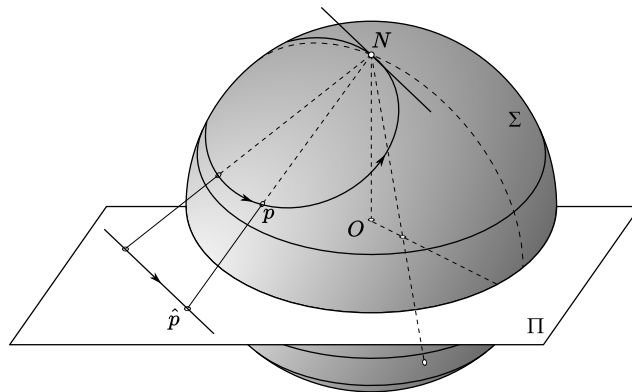


Figura 2.1: Projeção estereográfica de uma circunferência furada em  $N$

A figura acima ilustra algumas propriedades da projeção estereográfica, como por exemplo:

- (i) o interior da circunferência unitária do plano  $\Pi$  é aplicado sobre o hemisfério sul (que contém  $S$ ) de  $\Sigma$ , em particular,  $O$  é aplicado em  $S$  (chamado de polo sul);
- (ii) cada ponto da circunferência unitária do plano  $\Pi$  é aplicado nele mesmo;
- (iii) o exterior da circunferência unitária do plano  $\Pi$  é aplicado sobre o hemisfério norte de  $\Sigma$ , exceto o polo  $N$  que não é imagem de nenhum ponto do plano.

Notemos que, quando  $p$  se aproxima de  $N$ , a reta  $Np$  “tende a ser paralela” ao plano  $\Pi$  e portanto a projeção  $\hat{p}$  se distancia de  $O$ . Também, qualquer plano  $\alpha$  que contém  $N$  e não é paralelo ao plano  $\Pi$ , intercepta  $\Sigma$  em uma circunferência  $\mathcal{C}$ . Assim, se  $p \in \mathcal{C}$ ,  $p \neq N$ , a reta  $Np$  está contida em  $\alpha$  de modo que a projeção  $\hat{p}$  está contida na interseção  $\alpha \cap \Pi$ , que é uma reta. Isto mostra que:

**Proposição 2.1.** *A projeção estereográfica de uma circunferência  $\mathcal{C}$  furada em  $N$  é uma reta  $L$  contida em  $\Pi$ .*

Note que, como o plano tangente à esfera  $\Sigma$  em  $N$  é paralelo ao plano  $\Pi$ , a reta tangente a uma circunferência  $\mathcal{C}$  (não furada) qualquer de  $\Sigma$  contendo  $N$  é paralela à reta  $L$ , onde  $L$  é a projeção estereográfica da circunferência furada  $\mathcal{C}' = \mathcal{C} - \{N\}$  (basta considerar o plano que contém  $\mathcal{C}$ ).

Consideremos duas curvas  $\gamma_1, \gamma_2$  contidas em  $\Sigma$  e que se interceptam em um ponto  $p$ , suaves no sentido de possuírem retas tangentes  $T_1, T_2$  em  $p$ . Utilizando os planos que contêm  $N, T_1$  e  $T_2$ , obtemos duas circunferências  $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$  contidas em  $\Sigma$ , de modo que suas retas tangentes em  $p$  são exatamente  $T_1, T_2$ , respectivamente. Sejam  $T'_1$  e  $T'_2$  as retas tangentes a estas duas circunferências em  $N$ . Por simetria, o ângulo entre as tangentes em  $p$  é congruente ao ângulo entre as tangentes em  $N$ . Pelo parágrafo anterior,  $T'_1$  e  $T'_2$  são paralelas às retas  $L_1$  e  $L_2$  contidas em  $\Pi$ , obtidas pela projeção das circunferências furadas  $\mathcal{C}'_1, \mathcal{C}'_2$ . Portanto, seus ângulos são congruentes.

Em resumo, *a projeção estereográfica preserva magnitude de ângulos.*

O que se pode dizer sobre a orientação dos ângulos? Para darmos uma resposta, devemos definir ângulos orientados na esfera. Com base na figura 2.2, o ângulo em  $\hat{p}$  é positivo, ou seja, no sentido anti-horário, quando é visto de cima do plano. Porém, o ângulo em  $p$  é negativo, ou seja, no sentido horário. No entanto, se olharmos este ângulo de dentro da esfera, então ele será positivo. Assim, um ângulo em  $\Sigma$  orientado no sentido anti-horário será dito *positivo* se for visto do interior de  $\Sigma$ .

Com as orientações escolhidas como acima, obtemos o seguinte:

**Proposição 2.2.** *A projeção estereográfica é conforme<sup>1</sup>.*

Já sabemos que a projeção de circunferências furadas em  $N$  são retas. Além disso, podemos ver facilmente que a projeção de uma circunferência  $\mathcal{C}$  de  $\Sigma$ , paralela ao plano

<sup>1</sup>Uma aplicação é dita conforme se preserva ângulos.

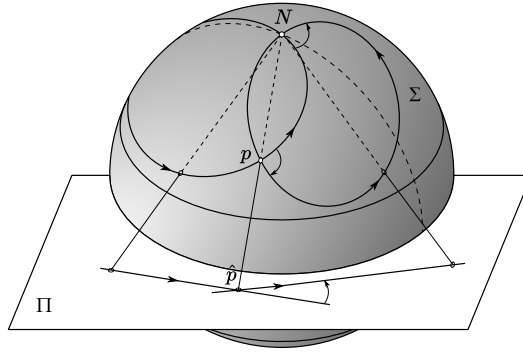


Figura 2.2: Ângulos preservados pela projeção estereográfica

$\Pi$ , é novamente uma circunferência, centrada em  $O$ , pois as retas passando por  $N$  e pelos pontos de  $\mathcal{C}$ , formam um cone reto com eixo na reta  $NO$ . O que acontece com as demais circunferências? Neste caso, suas projeções também são circunferências.

Para entendermos isto, considerando novamente a figura 1.9 (pg. 26), observamos certa semelhança com a definição da projeção estereográfica. Mais precisamente, seja  $\mathcal{K}$  a esfera centrada em  $N$  interceptando  $\Sigma$  em uma circunferência unitária contida em  $\Pi$ , centrada em  $O$ . A figura 2.3 mostra um seção vertical de  $\mathcal{K}$ ,  $\Sigma$  e  $\Pi$  (através de  $N$ ). A imagem tridimensional é obtida através da rotação desta figura ao redor da reta passando por  $N$  e  $S$ .

Podemos, então, mostrar que:

**Propriedade 2.3.** Se  $\mathcal{S}$  é a esfera de raio  $\sqrt{2}$  centrada em  $N$ , então a projeção estereográfica é a restrição à  $\Sigma$  da inversão geométrica em relação à  $\mathcal{S}$ . Em outras palavras, se  $p$  é um ponto de  $\Sigma$  e  $\hat{p}$  é a sua projeção estereográfica em  $\Pi$ , então  $\hat{p} = \mathcal{I}_{\mathcal{S}}(p)$  e  $p = \mathcal{I}_{\mathcal{S}}(\hat{p})$ .

*Demonstração.* Consideremos o segmento de reta por  $N$  e  $S$ . Seja  $x$  o ponto de interseção da reta passando por  $p$  e perpendicular ao segmento por  $N$  e  $S$ . Como os triângulos  $N\hat{p}O$  e  $Npx$  são semelhantes temos a seguinte relação:

$$\frac{d(N, \hat{p})}{d(N, O)} = \frac{d(N, p)}{d(N, x)} \Rightarrow d(N, \hat{p})d(N, x) = d(N, p)d(N, O),$$

mas sendo  $d(N, O) = 1$  temos  $d(N, \hat{p})d(N, x) = d(N, p)$ . Multiplicando ambos os lados por  $d(N, p)/d(N, x)$  obtemos

$$\begin{aligned} d(N, p)d(N, \hat{p}) &= \frac{d(N, p)^2}{d(N, x)} = \frac{d(N, x)^2 + d(x, p)^2}{d(N, x)} = \frac{(1 + d(O, x))^2 + d(x, p)^2}{1 + d(O, x)} \\ &= \frac{2(1 + d(O, x))}{1 + d(O, x)} = 2. \end{aligned}$$

Logo,  $d(N, p)d(N, \hat{p}) = 2$ , e portanto,  $p = \mathcal{I}_{\mathcal{S}}(\hat{p})$  e  $\hat{p} = \mathcal{I}_{\mathcal{S}}(p)$ . □

Concluimos então, por meio da propriedade acima e da Propriedade 1.17, que “projeção estereográfica preserva circunferências”. Note que a Proposição 2.1 também poderia ter sido derivada de 1.17 desta forma.

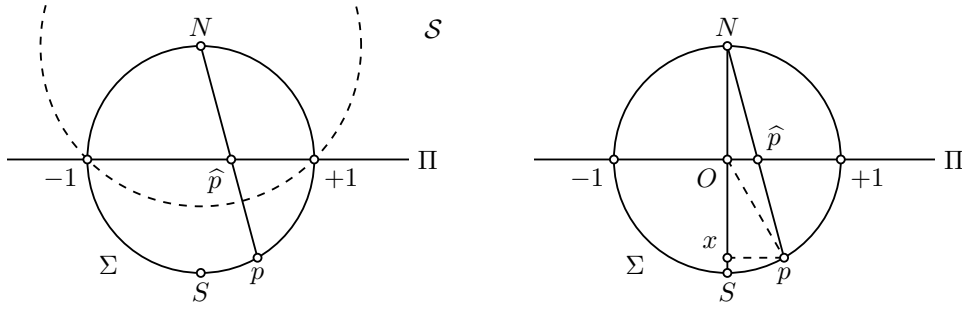


Figura 2.3: Projção estereográfica como restrição de inversão geométrica

## 2.2 Projção estereográfica em coordenadas

Nesta seção, identificaremos o plano  $\Pi$ , utilizado anteriormente na construção da projção estereográfica, com o plano complexo  $\mathbb{C}$ , de modo a obtermos uma expressão relacionando as coordenadas de um ponto  $p = (X, Y, Z) \in \Sigma$  com as coordenadas de sua projção estereográfica  $\hat{p} = (x, y) \in \mathbb{C}$ .

Escolheremos um sistema de coordenadas de modo que os eixos  $X$  e  $Y$  coincidam com os eixos  $x$  e  $y$  de  $\mathbb{C}$ , e assim, o eixo positivo  $Z$  passará por  $N$ . Deste modo, a equação de  $\Sigma$  é  $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$  e, as coordenadas de  $N$  e  $S$  são  $(0, 0, 1)$  e  $(0, 0, -1)$ , respectivamente.

Assim, seja  $p' = (X, Y) \in \mathbb{C}$  o pé da perpendicular de  $p \in \Sigma$  para  $\mathbb{C}$ . O ponto  $\hat{p}$  está no mesmo sentido de  $p'$ , e portanto,

$$\hat{p} = \frac{|\hat{p}|}{|p'|} p'. \quad (2.1)$$

A figura 2.4 mostra a intersecção vertical de  $\Sigma$  e  $\mathbb{C}$  tomada através de  $N$  e  $p$ . Note que este plano vertical necessariamente contém  $p'$  e  $\hat{p}$ . Da semelhança dos triângulos retângulos com hipotenusas  $Np$  e  $N\hat{p}$ , deduzimos imediatamente que

$$\frac{|\hat{p}|}{|p'|} = \frac{1}{1 - Z}, \quad (2.2)$$

e assim, substituindo (2.2) em (2.1), obtemos nossa primeira fórmula estereográfica:

$$p = (X, Y, Z) \mapsto \hat{p} = \left( \frac{X}{1 - Z}, \frac{Y}{1 - Z} \right). \quad (2.3)$$

Vamos, agora, inverter o processo para encontrar as coordenadas de  $p$  em termos das coordenadas de  $\hat{p}$ . Sabemos que  $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$ , ou equivalentemente,  $X^2 + Y^2 = 1 - Z^2$ , ou seja,  $|p'|^2 = 1 - Z^2 = (1 - Z)(1 + Z)$ . Tomando o quadrado em ambos os membros de (2.2) temos

$$|\hat{p}|^2 = \frac{|p'|^2}{(1 - Z)^2} = \frac{(1 - Z)(1 + Z)}{(1 - Z)^2} = \frac{1 + Z}{1 - Z},$$

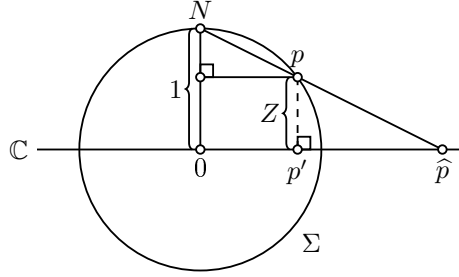


Figura 2.4: Projeção estereográfica em termos de coordenadas cartesianas

na qual isolamos  $Z$  do seguinte modo:

$$\begin{aligned} |\hat{p}|^2 &= \frac{1+Z}{1-Z} \Rightarrow (1-Z)|\hat{p}|^2 = 1+Z \Rightarrow |\hat{p}|^2 - Z|\hat{p}|^2 = 1+Z \\ \Rightarrow Z + Z|\hat{p}|^2 &= |\hat{p}|^2 - 1 \Rightarrow Z(1+|\hat{p}|^2) = |\hat{p}|^2 - 1 \Rightarrow Z = \frac{|\hat{p}|^2 - 1}{|\hat{p}|^2 + 1} = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1}. \end{aligned}$$

Substituindo  $Z$  obtido acima nas coordenadas de  $\hat{p}$  na equação (2.3), obtemos

$$X = \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \quad Y = \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \quad (2.4)$$

ou seja, obtemos a aplicação

$$\hat{p} = (x, y) \mapsto p = \left( \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1}, \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + y^2 + 1} \right).$$

Embora a construção acima seja útil, é mais natural utilizarmos coordenadas esféricas  $(\phi, \theta)$  ao invés de coordenadas retangulares  $(x, y, z)$ .

Primeiro lembramos que  $\theta$  mede o ângulo em torno do eixo  $Z$ , com  $\theta = 0$  começando do semi-plano vertical pelo eixo  $X$  positivo. Portanto, para um ponto  $\hat{p}$  em  $\mathbb{C}$ , o ângulo  $\theta$  é simplesmente o ângulo a partir do eixo real positivo para  $\hat{p}$ . A definição do ângulo  $\phi$  está ilustrada na figura 2.5 é o ângulo subtendido do centro de  $\Sigma$  para os pontos  $N$  e  $p$ . Por exemplo, o equador corresponde a  $\phi = \frac{\pi}{2}$ . Por convenção,  $0 \leq \phi \leq \pi$ .

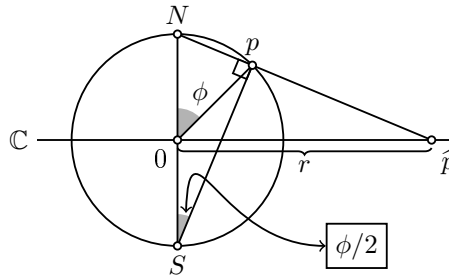


Figura 2.5: Projeção estereográfica em termos de coordenadas esféricas

Se  $\hat{p}$  é a projeção estereográfica do ponto  $p$  de coordenadas  $(\phi, \theta)$ , então  $\hat{p} = re^{i\theta}$ , e daí só resta encontrar  $r$  em função de  $\phi$ . Ao observar a figura 2.5 fica claro que os

triângulos  $NpS$  e  $N0\widehat{p}$  são semelhantes (caso AA), e pelo fato  $\angle NSp = \phi/2$ , segue que  $r = \cotg \frac{\phi}{2}$ . Portanto, uma outra fórmula para a projeção estereográfica é

$$\widehat{p} = \cotg \left( \frac{\phi}{2} \right) e^{i\theta}. \quad (2.5)$$

Vamos agora mostrar duas aplicações desta nova formulação. Na primeira, seja  $p$  um ponto de  $\Sigma$  tendo coordenadas  $(\phi, \theta)$ , e seja  $\tilde{p}$  o ponto obtido pela rotação de  $\Sigma$  (de um ângulo  $\pi$ ) ao redor do eixo real. As coordenadas de  $\tilde{p}$  são  $(\pi - \phi, -\theta)$  e se  $\widehat{\tilde{p}}$  é a imagem estereográfica de  $\tilde{p}$ , então

$$\widehat{\tilde{p}} = \cotg \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\phi}{2} \right) e^{-i\theta} = \operatorname{tg} \left( \frac{\phi}{2} \right) e^{-i\theta} = \frac{1}{\cotg \left( \frac{\phi}{2} \right) e^{i\theta}} = \frac{1}{\widehat{p}}.$$

Para a segunda aplicação, lembramos que dois pontos em uma esfera que são diametralmente opostos são ditos antipodais.

**Propriedade 2.4.** Se  $p$  e  $q$  são pontos antipodais de  $\Sigma$ , então suas projeções estereográficas  $\widehat{p}$  e  $\widehat{q}$  satisfazem  $\widehat{q} = -\overline{1/\widehat{p}}$ , ou seja,  $\widehat{q} = -\mathcal{I}_{\mathcal{C}}(\widehat{p})$ , onde  $\mathcal{C}$  é a circunferência unitária contida em  $\Pi$  centrada na origem.

*Demonstração.* Note que a relação entre  $\widehat{p}$  e  $\widehat{q}$  é, na verdade, simétrica:  $\widehat{p} = -\overline{1/\widehat{q}}$ . Para verificarmos a afirmação do enunciado, primeiro observamos que, se  $p$  tem coordenadas  $(\phi, \theta)$ , então  $q$  tem coordenadas  $(\pi - \phi, \pi + \theta)$ . Usando (2.5),

$$\widehat{p} = \cotg \left( \frac{\phi}{2} \right) e^{i\theta}, \quad \widehat{q} = \cotg \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\phi}{2} \right) e^{i(\pi+\theta)}. \quad (2.6)$$

Como

$$\cotg \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\phi}{2} \right) = \frac{\cos \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\phi}{2} \right)}{\operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\phi}{2} \right)} = \frac{\operatorname{sen} \frac{\phi}{2}}{\cos \frac{\phi}{2}} = \operatorname{tg} \frac{\phi}{2},$$

substituindo em (2.6), obtemos

$$\widehat{q} = \operatorname{tg} \left( \frac{\phi}{2} \right) e^{i(\pi+\theta)} = \operatorname{tg} \left( \frac{\phi}{2} \right) e^{i\theta} e^{i\pi} = -\operatorname{tg} \left( \frac{\phi}{2} \right) e^{i\theta} = -\frac{1}{\cotg \left( \frac{\phi}{2} \right) e^{-i\theta}} = -\overline{1/\widehat{p}}.$$

□

## 2.3 Transferência de funções complexas para funções na esfera

A projeção estereográfica, discutida nas seções anteriores, nos permite transferirmos uma função de  $\mathbb{C}$  em  $\mathbb{C}$  para uma função de  $\Sigma$  em  $\Sigma$ . Trataremos deste assunto nesta



seção. Mas antes, vale observar que os resultados da inversão de retas podem ser tratados como um caso especial dos resultados da inversão de circunferências, desde que utilizemos circunferências de raio infinito. Isto será formalizado em breve.

Para lidarmos com a inversão geométrica em relação a uma circunferência, foi necessário removermos o centro desta circunferência, uma vez que este ponto não possuía um inverso geométrico. Assim, tínhamos uma transformação bijetora de  $\Pi - \{q\}$ . Também, quando estudamos a aplicação complexa  $z \mapsto 1/z$ , observamos que seu domínio está restrito à  $\mathbb{C} - \{0\}$ , e além disso, sabemos que 0 não pertence à imagem desta aplicação. No entanto, quando  $z$  se distancia da origem,  $1/z$  se aproxima de 0. Com isso, se introduzirmos um único *ponto no infinito* (denotado por  $\infty$ ) e o definirmos como sendo o limite para o qual  $z$  converge, independente da direção, poderemos então definir  $\infty \mapsto 0$  e  $0 \mapsto \infty$ , ou seja,  $z \mapsto 1/z$  passa a ser uma transformação bijetora de  $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , chamado de *plano complexo estendido*.

Com esta nova abordagem, podemos, então, dizer que  $z \mapsto 1/z$  aplica uma circunferência que contém 0 em uma reta que contém  $\infty$ , estendendo o resultado obtido na Proposição 1.4. Portanto, nada mais natural do que dizer que “uma reta é uma circunferência pelo infinito”.

Voltando a tratar da projeção estereográfica, dada uma aplicação complexa  $\widehat{z} \mapsto \widehat{w} = f(\widehat{z})$  de  $\mathbb{C}$  em  $\mathbb{C}$ , obtemos uma aplicação correspondente  $z \mapsto w$  de  $\Sigma$  em  $\Sigma$ , onde  $z$  e  $w$  são as projeções estereográficas de  $\widehat{z}$  e  $\widehat{w}$ , respectivamente.

Agora, pensamos no seguinte: o que acontece se transferirmos  $f(z) = \bar{z}$  para  $\Sigma$ ? Neste caso, temos:

**Proposição 2.5.** *A conjugação complexa em  $\mathbb{C}$  induz, pela projeção estereográfica, uma reflexão da esfera  $\Sigma$  através do plano- $xz$ .*

*Demonstração.* A demonstração é simples, basta observarmos a figura 2.6 abaixo, que representa um corte transversal de  $\Sigma$  através do plano- $yz$ . Portanto, sendo  $z$  e  $\bar{z}$  dois pontos conjugados de  $\mathbb{C}$ , os triângulos retângulos  $\triangle zNO$  e  $\triangle \bar{z}NO$  são congruentes. Tomando suas projeções em  $\Sigma$ , pela Proposição 2.3,  $d(N, z)d(N, \widehat{z}) = d(N, \bar{z})d(N, \widehat{\bar{z}}) = 2$ . Portanto, os triângulos  $\triangle \widehat{z}NO$  e  $\triangle \widehat{\bar{z}}NO$  são congruentes (por *LAL*), e então, os pontos  $\widehat{z}, \widehat{\bar{z}}$  são simétricos em relação ao plano- $xz$ .  $\square$

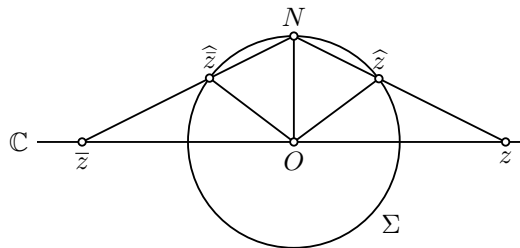


Figura 2.6: Transferência da conjugação complexa para uma reflexão de  $\Sigma$

Agora, considere  $z \mapsto \tilde{z} = 1/\bar{z}$ , que é a inversão geométrica em relação à circunferência unitária  $\mathcal{K}$  de centro na origem (ver Observação 3.5). A figura 2.7 mostra uma seção vertical de  $\Sigma$  tomada através de  $N$  e do ponto  $z$  em  $\mathbb{C}$ . Esta figura também ilustra o resultado da transferência dessa inversão para  $\Sigma$ .

**Propriedade 2.6.** A inversão geométrica em relação à circunferência unitária  $\mathcal{K}$ , de centro na origem, induz uma reflexão da esfera  $\Sigma$  através do seu plano equatorial,  $\mathbb{C}$ .

*Demonstração.* Primeiro note que os pontos  $z$  e  $\tilde{z}$  não são apenas simétricos (no sentido bidimensional) em relação à  $\mathcal{K}$ , mas também são simétricos (no sentido tridimensional) em relação à  $\Sigma$ . Pela Propriedade 2.3,  $\hat{z} = \mathcal{I}_S(z)$  e  $\hat{\tilde{z}} = \mathcal{I}_S(\tilde{z})$ , e pela Propriedade 1.18, são simétricos em relação à  $\mathcal{I}_S(\Sigma)$ . Como  $\mathcal{I}_S(\Sigma) = \mathbb{C}$ , segue o resultado.  $\square$

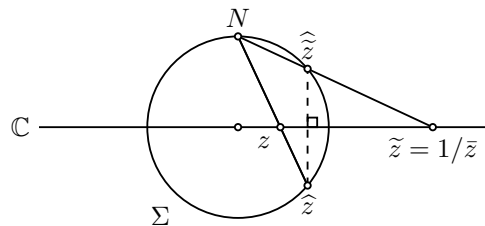


Figura 2.7: Transferência da inversão geométrica para uma reflexão de  $\Sigma$

Ao combinar os resultados acima, podemos transferir a inversão complexa para a esfera  $\Sigma$ , obtendo:

**Proposição 2.7.** A aplicação  $z \mapsto 1/z$  em  $\mathbb{C}$  induz uma rotação de um ângulo  $\pi$  na esfera de  $\Sigma$ , em torno do eixo real.

*Demonstração.* Sabemos que a inversão complexa  $z \mapsto 1/z$  é a composição da inversão geométrica  $\mathcal{I}_K$  com a conjugação complexa. A aplicação induzida em  $\Sigma$  é, portanto, a composição de duas reflexões, em relação ao plano- $xz$  e ao plano- $xy$ , respectivamente. No entanto, o efeito de reflexões sucessivas (em  $\Sigma$ ) em relação a dois planos perpendiculares entre si, através do eixo- $x$ , é uma rotação de  $\pi$  (em  $\Sigma$ ) ao redor deste eixo.  $\square$

Por fim, lembramos que o ponto  $\infty$  foi anteriormente definido como sendo a imagem de  $z = 0$ , pela inversão complexa  $z \mapsto 1/z$ . Assim, a Proposição 2.7 nos permite considerar a projeção estereográfica de  $N$  como sendo o ponto  $\infty$ , já que  $z = 0$  é a projeção de  $S \in \Sigma$ .

## 2.4 Comportamento de funções no infinito

Suponha que duas curvas em  $\mathbb{C}$  se estendem a uma distância arbitrariamente grande, desde a origem. Podemos dizer que elas se encontram em um ponto no infinito. Em  $\Sigma$ , esta intersecção acontece em  $N$ , e se cada uma das curvas chega ao  $N$  em uma direção bem definida, então podemos atribuir um ângulo de intersecção no  $\infty$ . Por exemplo, a figura 2.2 mostra que se duas retas se cruzam em  $\mathbb{C}$  em um ponto finito e contém um ângulo  $\alpha$ , então elas se cruzam pela segunda vez no  $\infty$  e contém um ângulo  $-\alpha$  nesse ponto.

Ao transferir uma função complexa para a esfera  $\Sigma$  podemos examinar seu comportamento no infinito, exatamente como seria em qualquer outro ponto. Em particular, pode-se ver se a função preserva o ângulo entre quaisquer duas curvas passando pelo  $\infty$ . Por exemplo, a Proposição 2.7 mostra que a inversão complexa preserva tais ângulos em  $N$ , e por isso é dito ser *conforme no infinito*. Da mesma forma, aquela rotação de  $\Sigma$  também preserva o ângulo entre duas curvas que passam pela singularidade  $z = 0$  de  $z \mapsto 1/z$ , e então a inversão complexa é conforme em  $z = 0$ , ou mais ainda, é conforme em todo o plano complexo estendido.

Até o momento, pensamos em  $z \mapsto w$  como uma aplicação de  $\mathbb{C}$  em  $\mathbb{C}$ , ou também, como no parágrafo anterior,  $\widehat{z} \mapsto \widehat{w}$  aplicando pontos de uma esfera em pontos desta mesma esfera. Mas muitas vezes é melhor pensarmos que estas aplicações enviam pontos de um  $z$ -plano em pontos da imagem que pertencem a uma segunda cópia de  $\mathbb{C}$ , ou seja,  $w$ -plano. No mesmo raciocínio, a aplicação induzida  $\widehat{z} \mapsto \widehat{w}$  pode ser vista como aplicando pontos de uma esfera (a  $z$ -esfera) em pontos de uma segunda esfera (a  $w$ -esfera). Ilustramos isto com o exemplo a seguir.

**Exemplo 2.8.** Considere a aplicação do  $z$ -plano para o  $w$ -plano, dada por  $z \mapsto w = z^n$ , onde  $n$  é um inteiro positivo. A figura 2.8a ilustra o efeito desta aplicação (no caso  $n = 2$ ) em uma grade de pequenos “quadrados” entre duas semi-retas que formam um ângulo  $\theta$ . As imagens desses “quadrados” no  $w$ -plano são novamente quase “quadrados”.

Sendo a projeção estereográfica conforme, ao transferirmos a grade do  $z$ -plano e a grade do  $w$ -plano para a  $z$ -esfera e a  $w$ -esfera, respectivamente, ainda temos grades de “quadrados” (figura 2.8b). De modo geral, qualquer aplicação conforme de  $\mathbb{C}$  em  $\mathbb{C}$  induzirá uma aplicação conforme de  $\Sigma$  em  $\Sigma$ , que também aplica grades de “quadrados infinitesimais” para grades de “quadrados infinitesimais”.

A figura 2.8a nos sugere uma *conformalidade* de  $z \mapsto w = z^2$ , em alguns pontos, mas também mostra que esta *conformalidade* se perde na origem, pois o ângulo  $\theta$  tem seu valor dobrado; mais geralmente,  $z \mapsto w = z^n$  multiplica os ângulos em 0 por  $n$ . Tais pontos são chamados de *pontos críticos* da aplicação. Assim, podemos dizer que 0 é um ponto crítico de  $z \mapsto w = z^n$ .

Como aplicação de  $\mathbb{C}$  em  $\mathbb{C}$ , a origem é o único ponto crítico desta aplicação. No entanto, se observarmos a aplicação induzida de  $\Sigma$  em  $\Sigma$ , a figura 2.8b deixa claro que

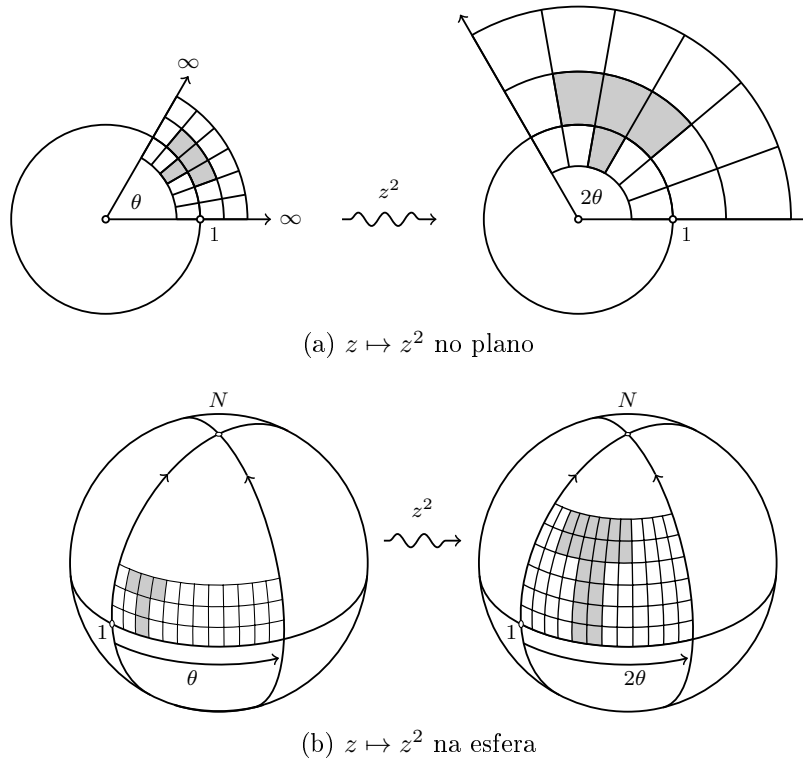


Figura 2.8: Efeito da aplicação  $z \mapsto z^2$  em uma grade

os ângulos em  $N$  não são preservados, e portanto, no plano complexo estendido, esta aplicação possui um segundo ponto crítico, o ponto no infinito, no qual os ângulos são também multiplicados por  $n$ . Assim,  $z \mapsto w = z^n$  é uma aplicação conforme cujos pontos críticos são  $0$  e  $\infty$ .

Por fim, podemos estudar como uma aplicação se comporta no infinito, por meio da composição com a inversão complexa. Pela Proposição 2.7, esta inversão complexa rotaciona  $\Sigma$  de forma que uma vizinhança de  $N = \infty$  torna-se uma vizinhança de  $S = 0$ . Assim, para examinarmos o comportamento próximo ao infinito, podemos aplicar primeiro a inversão complexa  $z \mapsto 1/z$  e, em seguida, examinar seu comportamento na vizinhança da origem. Mais precisamente, para estudarmos  $f(z)$  no infinito, estudamos  $F(z) = f(1/z)$  na origem. Em particular,  $f(z)$  é conforme no infinito se, e somente se,  $F(z)$  é conforme na origem.

**Exemplo 2.9.** Seja  $f(z) = \frac{(z+1)^3}{z^5-z}$ . Considerando  $F(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$  temos

$$F(z) = \frac{\left(\frac{1}{z} + 1\right)^3}{\left(\frac{1}{z}\right)^5 - \frac{1}{z}} = \frac{\frac{z^3 + 3z^4 + 3z^5 + z^6}{z^6}}{\frac{z - z^5}{z^6}} = \frac{z^3(1 + 3z + 3z^2 + z^3)}{z(1 - z^4)} = \frac{z^2(1 + z)^3}{1 - z^4},$$

que tem uma raiz dupla em  $z = 0$ . Assim, ao invés de simplesmente dizermos que  $f(z)$  “tende a zero quando  $z$  tende para o infinito”, podemos dizer que  $f(z)$  tem uma raiz dupla em  $z = \infty$ .

### 3 Transformações de Möbius

O objetivo deste capítulo é definir *transformação de Möbius* e a partir daí mostrar algumas propriedades interessantes, como por exemplo, o fato de que toda transformação de Möbius pode ser decomposta em outras (de Möbius) mais simples, ou ainda, o efeito de uma tal transformação em circunferências do plano.

Considere a transformação  $T : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$  dada por  $z \mapsto T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$  cujos coeficientes  $a, b, c, d$  são números complexos. Notemos que é interessante supor que os coeficientes  $a, b, c, d$  satisfaçam  $ad - bc \neq 0$ , e dessa forma, chamaremos tais transformações de não-singulares. Caso  $ad - bc = 0$ , teríamos  $ad = bc$  e, com isso,  $T$  seria constante igual a  $a/c$ .

Além disso, se  $c \neq 0$ , definimos  $T(-d/c)$  como sendo o ponto no infinito, denotado por  $\infty$ , como descrito na Seção 2.3, e  $T(\infty) = a/c$ . Por fim, se  $c = 0$ , definimos  $T(\infty) = \infty$ . Em resumo, temos:

**Definição 3.1.** *Um transformação de Möbius é uma aplicação de  $\mathbb{C}_\infty$  em  $\mathbb{C}_\infty$ , dada por*

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \tag{3.1}$$

onde  $a, b, c$  e  $d$  são constantes complexas satisfazendo  $ad - bc \neq 0$ .

É fácil mostrar que a composição de duas transformações de Möbius é também uma transformação de Möbius: dadas  $T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$  e  $S(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$  duas tais transformações, uma composição é

$$T(S(z)) = \frac{(a\alpha + b\gamma)z + (a\beta + b\delta)}{(c\alpha + d\gamma)z + (c\beta + d\delta)} = \frac{Az + B}{Cz + D}, \tag{3.2}$$

com  $AD - BC = (ad - bc)(\alpha\delta - \beta\gamma) \neq 0$ .

Outra propriedade das transformações de Möbius é a existência de uma transformação inversa  $T^{-1} : \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{C}_\infty$ , dada por  $z \mapsto T^{-1}(z) = \frac{dz - b}{-cz + a}$ . Como a identidade  $z \mapsto z$  é uma transformação de Möbius, o conjunto das transformações de Möbius não singulares possui estrutura de grupo, com a operação composição.

Vale ressaltar que os coeficientes complexos  $a, b, c, d$  não são únicos, isto é, se  $\lambda \neq 0$  é um número complexo então  $T(z) = \frac{\lambda az + \lambda b}{\lambda cz + \lambda d} = \frac{a'z + b'}{c'z + d'}$  também define a mesma

transformação da equação (3.1). No entanto, os novos coeficientes satisfazem  $a'd' - b'c' = \lambda^2(ad - bc) \neq 0$ , de modo que, se  $\lambda = \pm 1/\sqrt{ad - bc}$ , então  $a'd' - b'c' = 1$ , e neste caso a transformação de Möbius  $T$  (e também sua inversa  $T^{-1}$ ) é dita *normalizada*.

Um dos principais fatos a respeito de uma transformação de Möbius  $T$  é a possibilidade de decompô-la em termos de transformações mais simples. Mais precisamente, temos o seguinte:

**Proposição 3.2.** *Toda transformação de Möbius se decompõe em termos de (não necessariamente todas) transformações de Möbius dos tipos:*

- *translação*  $z \mapsto z + \beta$ ;
- *rotação*  $z \mapsto \alpha z$ , com  $|\alpha| = 1$ ;
- *homotetia*  $z \mapsto \rho z$ , com  $\rho > 0$  real;
- *inversão*  $z \mapsto 1/z$ .

*Demonstração.* Seja  $T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$  qualquer. Se  $c = 0$  então  $T(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$  é a composição  $H \circ G$ , com  $G(z) = \frac{a}{d}z$  e  $H(z) = z + b/d$ , rotação e/ou homotetia e translação, respectivamente. Se  $c \neq 0$ , seja  $\gamma = -(ad - bc)/c \neq 0$ . Tomando

$$T_1 : z \mapsto cz, \quad T_2 : z \mapsto z + d, \quad T_3 : z \mapsto \gamma/z, \quad T_4 : z \mapsto z + a/c,$$

segue que  $T(z) = T_4(T_3(T_2(T_1(z))))$ . □

**Lema 3.3.** *A transformação de Möbius  $T(z) = 1/z$  aplica circunferência ou reta em circunferência ou reta, não respectivamente.*

*Demonstração.* Como sabemos da Geometria Analítica ([5, Cap. 23]), uma equação de qualquer reta ou circunferência no plano pode ser escrita na forma

$$A(x^2 + y^2) + 2Bx + 2Cy + D = 0, \tag{3.3}$$

que descreve uma reta se  $A = 0$  e  $B^2 + C^2 > 0$ , e uma circunferência se  $A \neq 0$  e  $B^2 + C^2 - AD > 0$ . Sejam

$$x^2 + y^2 = z\bar{z}, \quad 2x = z + \bar{z}, \quad 2y = -i(z - \bar{z}),$$

onde  $\bar{z} = x - yi$  é o número complexo conjugado de  $z = x + yi$ , assim podemos escrever (3.3) como

$$Az\bar{z} + \bar{E}z + E\bar{z} + D = 0, \tag{3.4}$$

onde  $E = B + iC$ . A equação acima é uma reta se, e somente se,  $A = 0$  e  $E \neq 0$ , e é uma circunferência se, e somente se,  $A \neq 0$  e  $E\bar{E} - AD > 0$ .

Para encontrarmos a imagem da curva dada pela equação (3.4), sob a transformação  $1/z$ , substituímos  $z$  por  $\frac{1}{w}$  em (3.4) e obtemos

$$A\frac{1}{w\bar{w}} + \bar{E}\frac{1}{w} + E\frac{1}{\bar{w}} + D = 0,$$

ou, multiplicando por  $w\bar{w}$ ,

$$Dw\bar{w} + Ew + \bar{E}\bar{w} + A = 0. \quad (3.5)$$

A equação (3.5) tem a mesma forma da equação (3.4), com  $D$ ,  $\bar{E}$  e  $A$  substituídos por  $A$ ,  $E$  e  $D$ , respectivamente. Portanto, temos quatro casos a considerar:

1. Se (3.4) descreve uma *circunferência que não passa pela origem*, isto é,  $z = 0$  não é solução desta equação, então  $D \neq 0$ . Portanto, (3.5) descreve também uma *circunferência*, já que  $E\bar{E} - AD > 0$ . Além disso, como  $A \neq 0$ , ela *não passa pela origem*.
2. Se (3.4) descreve uma *circunferência que passa pela origem*, ou seja, se  $D = 0$ , então (3.5) descreve uma *reta que não passa pela origem*, pois  $A \neq 0$ .
3. Se (3.4) descreve uma *reta que não passa pela origem*, ou seja, se  $A = 0$  e  $D, E \neq 0$ , então obtemos em (3.5) uma *circunferência que passa pela origem*.
4. Por fim, se (3.4) descreve uma *reta que passa pela origem*, isto é, se  $A = D = 0$  e  $E \neq 0$ , obtemos como imagem *uma reta que passa pela origem*.

Os resultados obtidos acima podem ser resumidos com a tabela abaixo:

$z$	$1/z$
circunferência fora da origem	circunferência fora da origem
circunferência pela origem	reta fora da origem
reta fora da origem	circunferência pela origem
reta pela origem	reta pela origem

□

Por meio da Proposição 3.2 e do Lema anterior obtemos diretamente o seguinte:

**Teorema 3.4.** *Toda transformação de Möbius*

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

*aplica circunferência em circunferência.*

**Observação 3.5.** Sabemos que o inverso  $w$  de um número complexo  $z$  é dado por  $w = \bar{z}/|z|^2$ . Portanto, se tomarmos  $\bar{w} = z/|z|^2$ , temos um número complexo, que é exatamente o inverso geométrico  $\mathcal{I}_{\mathcal{K}}(z)$ , como na Definição 1.1, onde a inversão é feita em relação a circunferência unitária  $\mathcal{K}$  de centro na origem. Assim sendo, para obtermos a inversão complexa  $z \mapsto 1/z$ , conjugamos a inversão geométrica  $z \mapsto \mathcal{I}_{\mathcal{K}}(z)$ .

No plano estendido  $\mathbb{C}_{\infty}$ , podemos pensar em uma reta como sendo uma circunferência passando por  $\infty$ . A figura 3.1 representa uma sequência de circunferências, que não passam pelo centro  $q$  de inversão, convergindo para uma circunferência por  $q$ . Por meio da inversão geométrica  $\mathcal{I}_{\mathcal{K}}$  (ou também por meio da inversão complexa, devido à observação anterior) obtemos uma sequência de circunferências, que não passam por  $q$ , convergindo para uma reta  $L$ , que não passa por  $q$ .

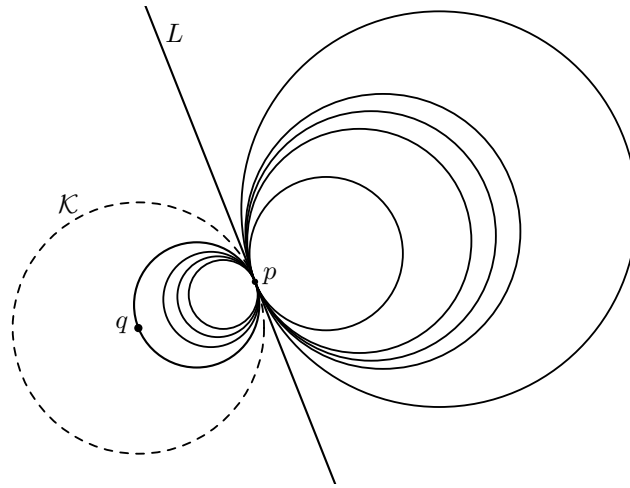


Figura 3.1: Sequência de circunferências invertidas convergente para uma reta

### 3.1 Resultados básicos

No início deste capítulo, observamos que o conjunto das transformações de Möbius possui uma estrutura de grupo, com a composição de funções como operação. Mostraremos agora algumas outras propriedades destas transformações, lembrando que agora podemos *considerar retas como sendo circunferências contendo  $\infty$* .

#### Preservação de circunferências, ângulos e simetrias

Já vimos que uma circunferência  $\mathcal{C}$  é aplicada, por uma transformação de Möbius, em uma circunferência  $\tilde{\mathcal{C}}$ . Analisaremos agora o que acontece com o disco  $\mathcal{D}$  limitado por  $\mathcal{C}$ . Primeiro vamos dar uma maneira útil de pensar sobre esse disco. Imagine percorrer em torno de  $\mathcal{C}$  no sentido anti-horário; este movimento determina uma orientação para  $\mathcal{C}$ , a qual chamamos de *orientação positiva*, e dizemos que  $\mathcal{D}$  está à esquerda de  $\mathcal{C}$ , nesta orientação.



Agora, considere o efeito das quatro transformações da Proposição 3.2 em  $\mathcal{D}$  e  $\mathcal{C}$ . Translações, rotações e homotetias preservam a orientação de  $\mathcal{C}$  e aplicam seu interior para o interior de  $\tilde{\mathcal{C}}$ . No entanto, o efeito da inversão complexa em  $\mathcal{C}$  depende de  $\mathcal{C}$  conter ou não a origem.

1. Se  $\mathcal{C}$  e  $\mathcal{D}$  não contêm a origem (ver Figura 3.2), então  $\tilde{\mathcal{C}}$  tem a mesma orientação de  $\mathcal{C}$ , e  $\mathcal{D}$  é aplicado para o interior de  $\tilde{\mathcal{C}}$  (denotado por  $\tilde{\mathcal{D}}$ ).

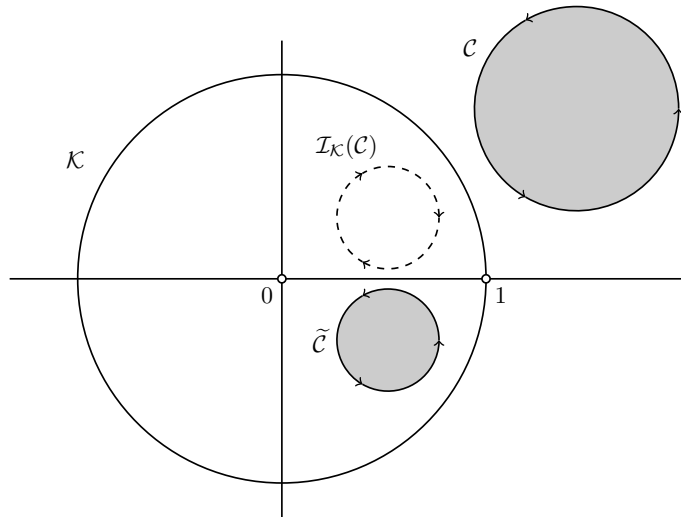


Figura 3.2: Inversão complexa quando a origem não pertence à circunferência  $\mathcal{C}$  e nem ao seu interior

2. Se  $\mathcal{C}$  contém a origem em seu interior, então  $\tilde{\mathcal{C}}$  tem a orientação oposta e o interior de  $\mathcal{C}$  é aplicado para o exterior de  $\tilde{\mathcal{C}}$ , ou seja, a região à esquerda de  $\mathcal{C}$  é aplicada na região à esquerda de  $\tilde{\mathcal{C}}$  (ver Figura 3.3).

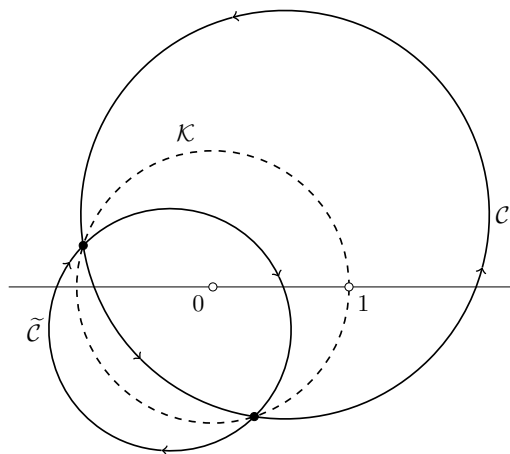


Figura 3.3: Inversão complexa quando a origem pertence ao interior da circunferência  $\mathcal{C}$

3. Se  $\mathcal{C}$  passa pela origem, então seu interior é aplicado para o semiplano à esquerda da reta orientada  $\tilde{\mathcal{C}}$  (ver Figura 3.4).

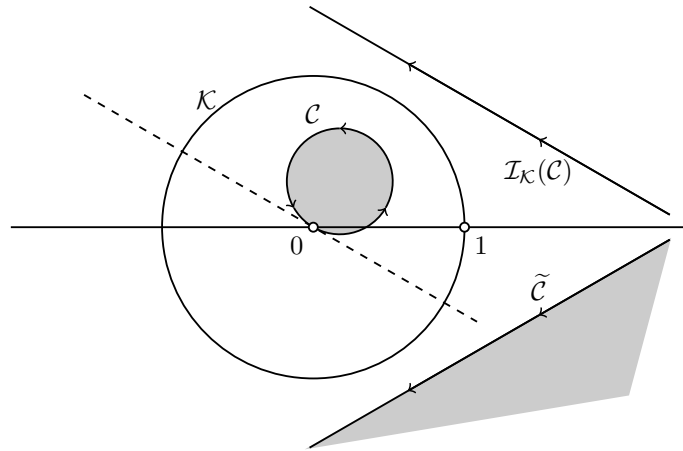


Figura 3.4: Inv. complexa quando a origem pertence à circunferência  $\mathcal{C}$

Para resumir,

**Proposição 3.6.** *Uma transformação de Möbius aplica uma circunferência orientada  $\mathcal{C}$  em uma circunferência orientada  $\tilde{\mathcal{C}}$  de tal forma que a região à esquerda de  $\mathcal{C}$  é aplicada em uma região à esquerda de  $\tilde{\mathcal{C}}$ .*

## Pontos fixos

A fim de mostrarmos que existe uma *única* transformação de Möbius que aplica três pontos dados em outros três pontos dados, introduzimos um conceito extremamente importante, que trata de pontos fixos de uma transformação. Um ponto  $\xi$  é chamado de *ponto fixo* de uma aplicação  $f$  se  $f(\xi) = \xi$ . Note que sob a aplicação identidade,  $z \mapsto Id(z) = z$ , todo ponto é um ponto fixo.

Por definição, então, os pontos fixos de uma transformação de Möbius  $M$  são as soluções de

$$z = M(z) = \frac{az + b}{cz + d}. \quad (3.6)$$

Mas, como esta equação é equivalente a uma equação quadrática, podemos afirmar que “*com exceção da aplicação identidade, uma transformação de Möbius tem no máximo dois pontos fixos*”.

Voltando ao nosso objetivo sobre a unicidade, suponha que  $M$  e  $N$  são duas transformações de Möbius que aplicam três pontos dados (digamos  $q, r, s$ ) para três pontos dados. Desde que  $N^{-1} \circ M$  é uma transformação de Möbius que tem  $q, r, s$  como pontos fixos, então ela deve ser a transformação identidade, e assim  $N = M$ .

Agora, descrevemos os pontos fixos explicitamente. Se  $M$  está normalizada, ou seja, se  $ad - bc = 1$ , então os dois pontos fixos  $\xi_+$ ,  $\xi_-$ , raízes da equação (3.6), são raízes de

$cz^2 + (d - a)z - b = 0$ . Logo,  $\xi_+$  e  $\xi_-$  são dados por

$$\xi_{\pm} = \frac{(a - d) \pm \sqrt{(d - a)^2 - 4c(-b)}}{2c} = \frac{(a - d) \pm \sqrt{d^2 - 2ad + a^2 + 4bc}}{2c}.$$

Fazendo  $4bc = 2bc + 2bc$  e  $bc = ad - 1$  temos

$$\xi_{\pm} = \frac{(a - d) \pm \sqrt{d^2 + 2ad + a^2 - 4}}{2c} = \frac{(a - d) \pm \sqrt{(a + d)^2 - 4}}{2c}. \quad (3.7)$$

No caso particular onde  $a + d = \pm 2$ , obtemos apenas  $\xi = \frac{a - d}{2c}$ , o único ponto fixo. A seguir, estudamos o caso  $c = 0$ .

## Pontos fixos no infinito

Se  $c = 0$  a transformação de Möbius  $M$  é dada por  $M(z) = Az + B$ , que representa, como já mencionado na Proposição 3.2, uma semelhança no plano. Se escrevermos  $A = \rho e^{i\alpha}$ , então  $M$  pode ser vista facilmente como a composição da rotação por um ângulo  $\alpha$ , centrada na origem, com a homotetia por  $\rho$ , e finalmente com a translação por  $B$ .

Vamos visualizar cada uma dessas três transformações na esfera  $\Sigma$ .

Se  $\alpha > 0$ , a figura 3.5a sugere que a rotação  $z \mapsto e^{i\alpha}z$  em  $\mathbb{C}$  induz uma rotação na esfera  $\Sigma$ , por um ângulo  $\alpha$ , ao redor do eixo vertical que passa pelo centro de  $\Sigma$ . Cada circunferência horizontal em  $\Sigma$  é rotacionada (na direção das setas), ou seja, é aplicada em si mesma, e são portanto chamadas de “curvas invariantes” da transformação. Note que não existem pontos fixos nestas circunferências. Assim, torna-se claro que os únicos pontos fixos da transformação são  $0$  e  $\infty$ , e que as circunferências (tracejadas) por esses pontos fixos (que são ortogonais às invariantes) são trocadas entre si. Uma transformação como esta é chamada *transformação de Möbius elíptica*. É claro que, se  $\alpha < 0$ , as rotações são no sentido contrário.

Se  $\rho > 1$ , a figura 3.5b ilustra a transformação induzida em  $\Sigma$ , correspondente à homotetia  $z \mapsto \rho z$  (uma expansão, neste exemplo). Se  $\rho < 1$ , temos uma contração em  $\mathbb{C}$  e os pontos de  $\Sigma$  movem-se para o sul e não para o norte. Novamente, os únicos pontos fixos são  $0$  e  $\infty$ , mas o comportamento das duas famílias de curvas na figura 3.5b são agora invertidos: as curvas invariantes são as grandes circunferências pelos pontos fixos, e as circunferências (tracejadas) ortogonais a elas são trocadas entre si. Uma transformação como esta é chamada *transformação de Möbius hiperbólica*.

A figura 3.5c mostra o efeito da composição de uma rotação (com  $\alpha > 0$ ) com uma homotetia (com  $\rho > 1$ ). Neste caso, as curvas invariantes são as espirais, divergindo do pólo sul e convergindo para o pólo norte de  $\Sigma$ . No entanto, cada membro da família de circunferências da figura 3.5a (ou da figura 3.5b) são permutados entre si, ou seja, cada família é invariante, como um todo. Uma transformação como esta é chamada *transformação de Möbius loxodrômica*. Se  $\alpha < 0$  e  $\rho > 1$ , ainda temos as curvas

divergindo do pólo sul e convergindo para o pólo norte, porém, rotacionando ao redor do eixo vertical no sentido contrário. Se  $\rho < 1$ , o movimento seria do pólo norte para o pólo sul, com o sentido da rotação ao redor do eixo vertical dependendo do sinal de  $\alpha$ .

Finalmente, a figura 3.5d mostra a translação. Desde que as curvas invariantes em  $\mathbb{C}$  formam uma família de retas paralelas à direção da translação, as curvas invariantes em  $\Sigma$  formam uma família de circunferências, cuja reta tangente comum no  $\infty$  é paralela às retas invariantes em  $\mathbb{C}$ . Sendo  $\infty$  o único ponto fixo, podemos dizer que a translação é uma *transformação de Möbius parabólica*.

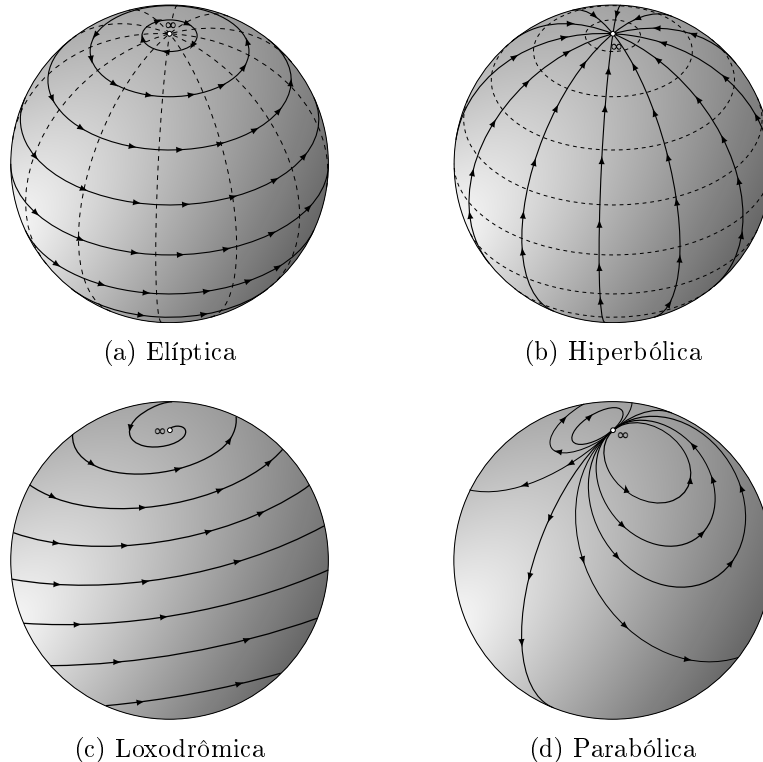


Figura 3.5: Transformações de Möbius Elíptica, Hiperbólica, Loxodrômica e Parabólica

Da discussão acima concluímos que:

*Uma Transformação de Möbius tem um ponto fixo no  $\infty$  se, e somente se, é uma semelhança, ou seja,  $M(z) = Az + B$ . Além disso,  $\infty$  é o único ponto fixo se, e somente se,  $M(z)$  é uma translação, isto é,  $M(z) = z + B$ .*

No Capítulo (5), usaremos esse fato para mostrar que cada transformação de Möbius é equivalente, em um certo sentido, a um (e somente um) dos quatro tipos de transformações definidas acima.

## 3.2 Razão cruzada

Como observado acima, se pudermos encontrar uma transformação de Möbius  $M$  que aplica três pontos dados  $q$ ,  $r$ , e  $s$  em três pontos dados  $\tilde{q}$ ,  $\tilde{r}$  e  $\tilde{s}$ , então  $M$  será única. Portanto nos resta mostrar que tal  $M$  sempre existe. Para isto, fixemos três pontos arbitrários  $q'$ ,  $r'$  e  $s'$ , e suponhamos que podemos escrever uma transformação

de Möbius  $M_{qrs}$  aplicando três pontos arbitrários  $q$ ,  $r$  e  $s$  para os pontos  $q'$ ,  $r'$  e  $s'$ . Exatamente do mesmo modo também podemos escrever  $M_{\tilde{q}\tilde{r}\tilde{s}}$ . Em virtude da propriedade de grupo, é fácil ver agora que

$$M = M_{\tilde{q}\tilde{r}\tilde{s}}^{-1} \circ M_{qrs} \quad (3.8)$$

é uma transformação de Möbius aplicando  $q$ ,  $r$  e  $s$  para  $q'$ ,  $r'$  e  $s'$ , e daí para  $\tilde{q}$ ,  $\tilde{r}$  e  $\tilde{s}$ , como era desejado.

Agora, o ponto crucial é a escolha de  $q'$ ,  $r'$  e  $s'$  de tal forma que seja possível determinar  $M_{qrs}$ . Pode parecer aleatório no momento, mas escolheremos  $q' = 0$ ,  $r' = 1$  e  $s' = \infty$  e a existência de  $M_{qrs}$  estará garantida. Junto com esta escolha especial vem uma notação especial: “a única transformação de Möbius que aplica  $q$ ,  $r$  e  $s$  em  $0$ ,  $1$  e  $\infty$  respectivamente será escrita como  $[z, q, r, s]$ . Para que isto ocorra, o numerador e o denominador de  $[z, q, r, s]$  devem ser proporcionais à  $(z - q)$  e  $(z - s)$ , respectivamente. Assim,  $[z, q, r, s] = k \left( \frac{z - q}{z - s} \right)$ , onde  $k$  é uma constante. Finalmente, como desejamos que  $[r, q, r, s] = k \left( \frac{r - q}{r - s} \right) = 1$ , deduzimos que  $k = \frac{r - s}{r - q}$  e assim

$$[z, q, r, s] = \frac{(z - q)(r - s)}{(z - s)(r - q)}.$$

**Definição 3.7.** A imagem de  $z_0$  pela transformação  $[z, q, r, s]$  é chamada de razão cruzada de  $z_0, q, r, s$ , nesta ordem.

Em resumo, a única transformação de Möbius  $z \mapsto w = M(z)$  da equação (3.8) enviando  $q$ ,  $r$  e  $s$  para  $\tilde{q}$ ,  $\tilde{r}$  e  $\tilde{s}$  é dada por  $M = [z, \tilde{q}, \tilde{r}, \tilde{s}]^{-1} \circ [z, q, r, s]$  e satisfaz

$$\frac{(w - \tilde{q})(\tilde{r} - \tilde{s})}{(w - \tilde{s})(\tilde{r} - \tilde{q})} = [w, \tilde{q}, \tilde{r}, \tilde{s}] = [z, q, r, s] = \frac{(z - q)(r - s)}{(z - s)(r - q)}. \quad (3.9)$$

Ou seja, a imagem de um ponto  $z_0$  pela transformação  $M$  é o único ponto  $w_0$  de modo que as razões cruzadas coincidam, isto é,  $[w_0, \tilde{q}, \tilde{r}, \tilde{s}] = [z_0, q, r, s]$ .

Observamos que, pela construção da transformação de Möbius  $M$  acima, a razão cruzada torna-se invariante por esta transformação. Por outro lado, temos também que se  $[z_1, z_2, z_3, z_4] = [w_1, w_2, w_3, w_4]$ , então existe uma única transformação de Möbius  $M$  tal que  $M(z_i) = w_i$ .

Recordando a Proposição 3.6, podemos entender melhor a razão cruzada:  $w = [z, q, r, s]$  é a imagem de  $z$  pela única transformação de Möbius que aplica a circunferência orientada  $\mathcal{C}$  passando por  $q$ ,  $r$  e  $s$  para o eixo real de tal forma que estes três pontos são aplicados em  $0$ ,  $1$  e  $\infty$ . Se  $q, r, s$  induzem uma orientação positiva em  $\mathcal{C}$ , então o interior de  $\mathcal{C}$  (lado esquerdo) é aplicado no semi-plano superior (acima do eixo). A figura 3.6 ilustra este fato e assim podemos deduzir uma equação para a circunferência  $\mathcal{C}$ , ou seja:

**Proposição 3.8.** *Seja  $\mathcal{C}$  uma circunferência orientada positivamente (passando) pelos pontos  $q$ ,  $r$  e  $s$ , nesta ordem. Assim,  $p \in \mathcal{C}$  se, e somente se,  $\text{Im}[p, q, r, s] = 0$ . Também,  $p$  está no interior de  $\mathcal{C}$  se, e somente se,  $\text{Im}[p, q, r, s] > 0$ . Se a orientação de  $\mathcal{C}$  é negativa, então a desigualdade é invertida.*

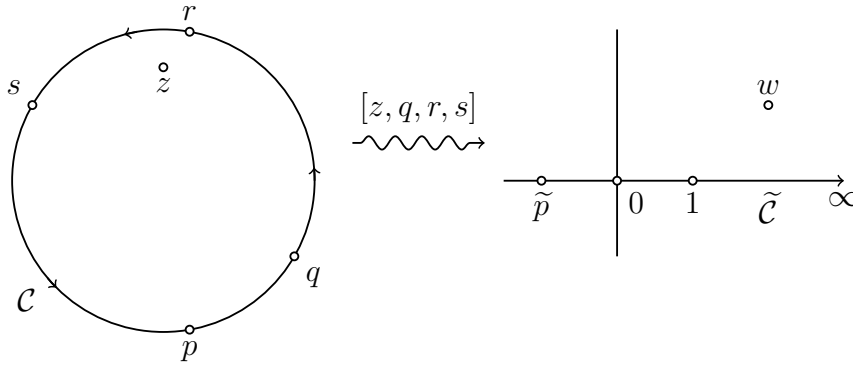


Figura 3.6: Imagem de  $z$  pela razão cruzada  $[z, q, r, s]$

# 4 Transformações de Möbius e Álgebra Linear

Neste capítulo, associaremos a uma transformação de Möbius uma matriz e apresentaremos suas propriedades relacionadas à Álgebra Linear, por meio do uso de coordenadas homogêneas, autovalores e autovetores, por exemplo.

## 4.1 Representação matricial

Vamos agora associar à transformação de Möbius  $M$  uma matriz  $2 \times 2$  por

$$M(z) = \frac{az + b}{cz + d} \longrightarrow [M] = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Como e os coeficientes da transformação de Möbius não são únicos,  $[M]$  também não é a única matriz correspondente à  $M$ , pois se  $k$  é uma constante não nula, então a matriz  $k[M]$ , definida multiplicando cada entrada de  $[M]$  pela constante  $k$ , corresponde à mesma transformação de Möbius  $M$ . No entanto, se  $M$  está normalizada, isto é,  $ad - bc = 1$ , então existem exatamente duas<sup>1</sup> matrizes associadas à  $M$ , denotadas por  $[M]$  e  $-[M]$ . Em outras palavras, a matriz é unicamente determinada, a menos do sinal. A partir de agora, iremos supor  $M$  normalizada.

Em geral, podemos associar uma matriz real  $2 \times 2$  a uma transformação linear de  $\mathbb{R}^2$  em  $\mathbb{R}^2$ . Por exemplo  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  representa uma rotação no plano (ao redor da origem) por um ângulo de  $\pi/2$ , no sentido anti-horário. De fato, quando a aplicamos no vetor  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  de  $\mathbb{R}^2$ , obtemos

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}.$$

No entanto, a matriz  $[M] = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  correspondendo à transformação de Möbius  $M$ ,

---

<sup>1</sup>Pois a multiplicação por  $-1$  não altera o determinante, já que a matriz é  $2 \times 2$ .

em geral, tem números complexos em suas entradas, e então, não pode ser interpretada como uma transformação linear de  $\mathbb{R}^2$  em  $\mathbb{R}^2$ , como de costume. Mesmo que as entradas sejam reais, não podemos pensar desta maneira. Por exemplo, a matriz  $[M] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  corresponde à transformação de Möbius  $M(z) = -\frac{1}{z}$ , que certamente não é uma transformação linear de  $\mathbb{C}$  em  $\mathbb{C}$ .

**Observação 4.1.** Para evitar confusão, vamos adotar a seguinte notação: usaremos parênteses para uma matriz real correspondendo a uma transformação linear de  $\mathbb{R}^2$  em  $\mathbb{R}^2$  ou de  $\mathbb{C}$  em  $\mathbb{C}$ , e usaremos colchetes para uma matriz complexa correspondendo a uma transformação de Möbius.

Apesar desta observação, temos as seguintes semelhanças entre o comportamento de uma transformação de Möbius e a matriz que a representa:

- A transformação de Möbius identidade  $\mathcal{E}(z) = z$  corresponde à conhecida matriz identidade, ou seja,  $[\mathcal{E}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ .
- A transformação de Möbius  $M$  com matriz  $[M] = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  possui inversa se, e somente se,  $[M]$  possui inversa, ou seja,  $[M]$  é não singular, ou ainda,  $\det[M] = ad - bc \neq 0$ .
- Como a inversa de uma transformação de Möbius  $M$  é dada por  $M^{-1}(z) = \frac{dz - b}{-cz + a}$ , vemos facilmente que  $[M^{-1}] = [M]^{-1}$ .
- Em Álgebra Linear, compomos duas transformações lineares multiplicando suas matrizes. Se multiplicarmos as matrizes  $[M_2]$  e  $[M_1]$  correspondentes as duas transformações de Möbius  $M_2$  e  $M_1$ , então obtemos

$$\begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2a_1 + b_2c_1 & a_2b_1 + b_2d_1 \\ c_2a_1 + d_2c_1 & c_2b_1 + d_2d_1 \end{bmatrix}.$$

Porém, como mostrado na equação (3.2), isto é simplesmente a matriz da transformação de Möbius  $M_2 \circ M_1$ . Portanto  $[M_2][M_1] = [M_2 \circ M_1]$ .

## 4.2 Coordenadas homogêneas

As propriedades apresentadas na seção anterior não são coincidências. Para entendermos o motivo, devemos primeiramente descrever o plano complexo com um novo sistemas de coordenadas. Ao invés de expressarmos  $z = x + iy$  em termos de dois números reais, escrevemos  $z$  como a razão de dois números complexos,  $z_1$  e  $z_2$ , isto é,

$$z = \frac{z_1}{z_2}.$$



Os números complexos  $z_1$  e  $z_2$  são chamados de *coordenadas homogêneas* de  $z$ , que neste caso, é denotado por  $z = [z_1 : z_2]$ . A cada  $[z_1 : z_2]$ , com  $z_2 \neq 0$ , corresponde um único número complexo  $z = \frac{z_1}{z_2}$ , mas a cada número complexo  $z$  corresponde uma infinidade de coordenadas homogêneas, pois  $[kz_1 : kz_2] = [z_1 : z_2]$ , onde  $k$  é um número complexo arbitrário não nulo.

O que podemos dizer sobre as coordenadas da forma  $[z_1 : 0]$ ? Se fixarmos  $z_1$  e tomarmos  $z_2$  tendendo a 0, está claro que  $[z_1 : 0]$  corresponderá a um ponto no infinito. Portanto, a totalidade dos pares  $[z_1 : z_2]$  fornece coordenadas homogêneas para o plano complexo estendido. A introdução destas coordenadas possibilita para a álgebra o que a esfera  $\Sigma$  possibilita para a geometria, como veremos.

Em geral, usamos o símbolo  $\mathbb{R}^2$  para denotar o conjunto de pares  $(x, y)$  de números reais e usamos o símbolo  $\mathbb{C}^2$  para denotar o conjunto de pares  $(z, w)$  de números complexos. Assim como na Observação 4.1, para evitar confusão entre  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{C}^2$ , usaremos  $(x, y)$  para elementos de  $\mathbb{R}^2$  e  $[z, w]$  para elementos de  $\mathbb{C}^2$ , e portanto, as matrizes de transformações lineares complexas de  $\mathbb{C}^2$  em  $\mathbb{C}^2$  serão denotadas com colchetes, deixando os parênteses para as reais.

Em resumo, uma transformação linear de  $\mathbb{C}^2$  em  $\mathbb{C}^2$  será representada por uma matriz complexa  $2 \times 2$ :

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} az_1 + bz_2 \\ cz_1 + dz_2 \end{bmatrix}.$$

Mas, se  $[z_1, z_2]$  e  $[w_1, w_2]$  são pensados como as coordenadas homogêneas em  $\mathbb{C}^2$  dos pontos  $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$  e  $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$  em  $\mathbb{C}$ , então a transformação linear acima induz a seguinte transformação (não necessariamente linear) em  $\mathbb{C}$ :

$$z = \frac{z_1}{z_2} \mapsto w = \frac{w_1}{w_2} = \frac{az_1 + bz_2}{cz_1 + dz_2} = \frac{a \left( \frac{z_1}{z_2} \right) + b}{c \left( \frac{z_1}{z_2} \right) + d} = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Esta é nada mais que uma transformação de Möbius geral.

Portanto, podemos agora entender como uma transformação de Möbius em  $\mathbb{C}$  se parece com uma transformação linear, ela pode ser vista como uma transformação linear atuando nos pares de coordenadas homogêneas de um ponto de  $\mathbb{C}$ .

### 4.3 Autovalores e autovetores

A representação de uma transformação de Möbius por meio de matrizes fornece um elegante e prático método de fazer cálculos. Com isso, muitas técnicas e ferramentas utilizadas na Álgebra Linear se aplicam agora para estas transformações.

Por exemplo, observando a equação (3.2), fica claro que a composição de duas transformações de Möbius não singulares é novamente não singular. Por meio do cálculo de determinantes, isto é novamente verificado apenas lembrando que

$$\det [M_2][M_1] = \det[M_2] \det[M_1].$$

Portanto, se  $\det[M_2] \neq 0$  e  $\det[M_1] \neq 0$ , então  $\det [M_2][M_1] \neq 0$ . Em particular, se  $\det[M_2] = \det[M_1] = 1$ , então  $\det [M_1][M_2] = 1$ , e assim, o conjunto de matrizes normalizadas  $2 \times 2$  forma um grupo, ou um subgrupo do grupo das matrizes não singulares.

Para o nosso segundo exemplo, faremos uso dos autovetores de uma transformação linear de  $\mathbb{C}^2$ , representada por  $[M] = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ . Por definição, um *autovetor* de  $M$  é um vetor  $z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$  cuja “direção” é inalterada pela transformação, no sentido de que sua imagem é simplesmente um múltiplo  $\lambda z$  de  $z$ ; neste caso,  $\lambda$  é chamado *autovalor* do autovetor  $z$ . Em outras palavras, um autovetor, com autovalor  $\lambda$ , satisfaz a equação:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}.$$

Em termos da transformação de Möbius correspondente em  $\mathbb{C}$ , isto significa que  $z = \frac{z_1}{z_2}$  é aplicado em  $M(z) = \frac{\lambda z_1}{\lambda z_2} = z$ , e então, obtemos o seguinte:

**Proposição 4.2.** *O ponto  $z = \frac{z_1}{z_2} \in \mathbb{C}$  é um ponto fixo de  $M$  se, e somente se,  $z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2$  é um autovetor de  $[M]$ .*

Uma vantagem em se tratar pontos fixos assim, é que não existe nenhuma distinção entre um ponto fixo finito e um ponto fixo  $\infty$ , pois este último corresponde simplesmente a um autovetor da forma  $\begin{bmatrix} z_1 \\ 0 \end{bmatrix}$ . Por exemplo, podemos reobter o fato de que  $\infty$  é um ponto fixo se, e somente se,  $M$  é uma semelhança. De fato, se  $\infty$  é um ponto fixo, então

$$\lambda \begin{bmatrix} z_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} az_1 \\ cz_1 \end{bmatrix},$$

e portanto,  $c = 0$ ,  $\lambda = a$  e  $M(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$ , como desejado.

O fato de que os autovetores carregam informações geométricas sobre  $M$  é confirmado notando-se que estes vetores não dependem do modo como  $M$  é representada matricialmente, ou seja, não depende da escolha de  $[M]$ , pois qualquer outra matriz é simplesmente obtida pelo produto com uma constante  $k$ . Mas, isso não altera o autovetor pois, se  $z$  é um autovetor de  $[M]$  (com autovalor  $\lambda$ ), então ele é também um autovetor de  $k[M]$ , mas com autovalor  $k\lambda$ .

Por outro lado, desde que os autovalores *dependem* da escolha de  $k$ , é plausível que estes autovalores não tenham influência na natureza geométrica da transformação  $M$ . Muito surpreendentemente, no entanto, é o fato de que se  $[M]$  está normalizada, então exatamente o oposto é verdadeiro, ou seja, os autovalores de uma matriz normalizada  $[M]$  determinam completamente a natureza geométrica da transformação de Möbius  $M$  correspondente. Trataremos deste assunto em breve.

Continuemos investigando os autovalores, lembrando que estes são as soluções da então chamada *equação característica de  $[M]$* ,  $\det([M] - \lambda[\mathcal{E}]) = 0$ , em que  $[\mathcal{E}]$  é a matriz identidade de ordem 2. Usando o fato de que  $[M]$  está normalizada, encontramos que a equação característica é

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + 1 = 0, \quad (4.1)$$

e que (para uso posterior) pode ser escrita como

$$\lambda + \frac{1}{\lambda} = a + d, \quad (4.2)$$

já que  $\lambda \neq 0$  não é solução de (4.1).

A primeira observação sobre esta equação é que existem, geralmente, dois autovalores,  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , que são determinados somente por  $a + d$ . Examinando os coeficientes da quadrática, imediatamente deduzimos que

$$\lambda_1\lambda_2 = 1 \quad \text{e} \quad \lambda_1 + \lambda_2 = a + d. \quad (4.3)$$

Portanto, se conhecermos  $\lambda_1$ , obteremos  $\lambda_2 = 1/\lambda_1$ . Enfatizamos este fato pois ele não é óbvio quando escrevemos a fórmula para os autovalores, ou seja,

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{1}{2} \left( (a + d) \pm \sqrt{(a + d)^2 - 4} \right).$$

Estudantes de Álgebra Linear reconheceriam (ou deveriam reconhecer) (4.3) como um caso especial do seguinte resultado geral sobre autovalores  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  de uma matriz  $N$  quadrada de ordem  $n$  (não necessariamente diagonal),

$$\lambda_1\lambda_2 \cdots \lambda_n = \det N \quad \text{e} \quad \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = \text{tr } N,$$

em que  $\text{tr } N$ , soma dos elementos da diagonal da matriz  $N$ , é chamado de *traço* de  $N$ .

As duas igualdades acima podem ser obtidas lembrando que

$$\text{tr } AB = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{k=1}^n (a_{ik}b_{ki}) \right) = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{k=1}^n (b_{ki}a_{ik}) \right) = \sum_{k=1}^n \left( \sum_{i=1}^n (b_{ki}a_{ik}) \right) = \text{tr } BA,$$

e que, se  $R$  é a matriz dos autovetores de  $N$ , então  $RNR^{-1} = \Lambda$ , com  $\Lambda$  matriz diagonal dos autovalores de  $N$ . Daí, basta fazer

$$\begin{aligned} \lambda_1\lambda_2 &= \det \Lambda = \det(RNR^{-1}) = (\det R)(\det N)(\det R^{-1}) = \det N, \\ \lambda_1 + \lambda_2 &= \text{tr } \Lambda = \text{tr}(RNR^{-1}) = \text{tr}(RR^{-1}N) = \text{tr } N. \end{aligned}$$

## 4.4 Rotação da esfera como transformação de Möbius

Nesta seção, definiremos “ortogonalidade” entre dois vetores  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{q}$  em  $\mathbb{C}^2$ . Observamos que estamos usando letras góticas (por ex.  $\mathbf{p}$ ) para vetores com coordenadas complexas, deixando as letras latinas para os de coordenadas reais. Também, usaremos matrizes coluna (parênteses e colchetes, para real e complexo, resp.) para representar vetores, visando uma facilidade nos cálculos a seguir.

Dois vetores  $p = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$  e  $q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$  em  $\mathbb{R}^2$  são ortogonais se, e somente se, seu produto escalar (estamos supondo o usual) é nulo, isto é,

$$p \cdot q = p_1q_1 + p_2q_2 = 0.$$

Deste modo, parece natural dizer que  $\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \end{bmatrix}$  e  $\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \end{bmatrix}$  em  $\mathbb{C}^2$  são “ortogonais” se  $\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{p}_1\mathbf{q}_1 + \mathbf{p}_2\mathbf{q}_2 = 0$ . Em particular, gostaríamos que este produto fosse tal que  $\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}$  seja real positivo. No entanto, é fácil ver que  $\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = 0$ . Dessa forma, o produto acima definido não é adequado para  $\mathbb{C}^2$ .

Uma solução para isto é generalizar o produto escalar  $\mathbf{p} \cdot \mathbf{q}$  para o chamado “produto interno”, definido por

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle := \bar{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{q} = \bar{\mathbf{p}}_1\mathbf{q}_1 + \bar{\mathbf{p}}_2\mathbf{q}_2.$$

Observe que a definição acima também possui as seguintes propriedades do produto escalar:

1.  $\langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle \geq 0$ ;
2.  $\langle \mathbf{p}, \mathbf{p} \rangle = 0 \Leftrightarrow \mathbf{p}_1 = 0 = \mathbf{p}_2$  (ou seja,  $\mathbf{p} = 0$ );
3.  $\langle \mathbf{p} + \mathbf{q}, \mathbf{r} \rangle = \langle \mathbf{p}, \mathbf{r} \rangle + \langle \mathbf{q}, \mathbf{r} \rangle$  e  $\langle \mathbf{r}, \mathbf{p} + \mathbf{q} \rangle = \langle \mathbf{r}, \mathbf{p} \rangle + \langle \mathbf{r}, \mathbf{q} \rangle$ .

Note, no entanto, que este produto não é comutativo, pois

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = \bar{\mathbf{p}}_1\mathbf{q}_1 + \bar{\mathbf{p}}_2\mathbf{q}_2 = \overline{\mathbf{p}_1\mathbf{q}_1 + \mathbf{p}_2\mathbf{q}_2} = \overline{\mathbf{q}_1\mathbf{p}_1 + \mathbf{q}_2\mathbf{p}_2} = \overline{\langle \mathbf{q}, \mathbf{p} \rangle}.$$

Agora, uma boa definição para  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{q}$  “ortogonais” seria quando

$$\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle := \bar{\mathbf{p}}_1\mathbf{q}_1 + \bar{\mathbf{p}}_2\mathbf{q}_2 = 0. \tag{4.4}$$

O que esta “ortogonalidade” significa em termos dos pontos  $p = \frac{\mathbf{p}_1}{\mathbf{p}_2}$  e  $q = \frac{\mathbf{q}_1}{\mathbf{q}_2}$ , cujos vetores das coordenadas homogêneas são  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{q}$ ? A equação (4.4) nos diz que, se  $\mathbf{p}$  e  $\mathbf{q}$  são “ortogonais”, então  $q = -\frac{1}{\bar{p}}$ , e assim, da Propriedade 2.4 deduzimos que

**Proposição 4.3.** *Dois vetores em  $\mathbb{C}^2$  são ortogonais se, e somente se, são vetores de coordenadas homogêneas de pontos de  $\mathbb{C}$  projetados (estereograficamente) em pontos antipodais na esfera  $\Sigma$ .*

Suponhamos que  $R$  seja uma transformação linear de  $\mathbb{C}^2$  em  $\mathbb{C}^2$ , análoga a uma rotação, ou seja,  $R$  preserva produto interno

$$\langle R(\mathbf{p}), R(\mathbf{q}) \rangle = \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle, \forall \mathbf{p}, \mathbf{q}. \quad (4.5)$$

Em particular,  $R$  aplica cada par de vetores ortogonais em outro par de vetores ortogonais.

Surge naturalmente a seguinte questão: *qual transformação na esfera  $\Sigma$  será induzida pela transformação de Möbius  $M$  correspondente à transformação linear  $R$ ?*

A invariância do produto interno descrita em (4.5) pode ser perfeitamente reformulada utilizando uma operação chamada *transposta conjugada*, indicada pelo sobrescrito  $*$ . Mais precisamente, para matrizes complexas obtemos  $M^* = \overline{M}^t$ , matriz transposta conjugada de  $M$ .

Obtemos então

$$\mathbf{p}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{p}_1} & \overline{\mathbf{p}_2} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [R]^* = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} \overline{a} & \overline{c} \\ \overline{b} & \overline{d} \end{bmatrix}.$$

Deste modo, o produto interno pode ser expresso simplesmente em termos de multiplicação de matrizes, ou seja,  $\langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle = \mathbf{p}^* \mathbf{q}$ , e uma vez que  $([R]\mathbf{p})^* = \mathbf{p}^* [R]^*$ , a equação (4.5) é equivalente à

$$\langle R(\mathbf{p}), R(\mathbf{q}) \rangle \stackrel{\text{def.}}{=} ([R]\mathbf{p})^* ([R]\mathbf{q}) = (\mathbf{p}^* [R]^*) ([R]\mathbf{q}) = \mathbf{p}^* \mathbf{q} \stackrel{\text{def.}}{=} \langle \mathbf{p}, \mathbf{q} \rangle, \forall \mathbf{p}, \mathbf{q}$$

que é satisfeita se, e somente se,

$$[R]^* [R] = [\mathcal{E}]. \quad (4.6)$$

Matrizes satisfazendo (4.6) são chamadas *unitárias*. No caso de matrizes  $2 \times 2$  normalizadas, podemos facilmente encontrar uma matriz unitária  $[R]$  que satisfaz (4.6), simplesmente resolvendo  $[R]^* = [R]^{-1}$ , ou seja,

$$\begin{bmatrix} \overline{a} & \overline{c} \\ \overline{b} & \overline{d} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \Rightarrow [R] = \begin{bmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{bmatrix}.$$

Assim sendo, se  $R : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$  preserva produto interno, então a transformação induzida na esfera  $\Sigma$  será contínua, preservando pontos antípodas e ângulo, e portanto, deve ser uma rotação ao redor de algum eixo. Em outras palavras, *“uma rotação arbitrária da esfera  $\Sigma$  pode ser expressa como uma transformação de Möbius da forma*

$$R(z) = \frac{az + b}{-\overline{b}z + \overline{a}}.$$



# 5 Visualização e Classificação

Neste capítulo, analisaremos a quantidade de pontos fixos de uma transformação de Möbius com o objetivo de classificar esta transformação como elíptica, hiperbólica, loxodrômica ou parabólica. Para tal, também utilizaremos o multiplicador  $\mathbf{m}$ , um número complexo associado a esta transformação.

## 5.1 A ideia principal

Embora a decomposição de uma transformação de Möbius  $M$ , apresentada na Proposição 3.2, como composição de transformações mais simples tem-se revelada valiosa na obtenção de resultados, isto faz  $M$  parecer muito mais complicada do que é. Nesta seção vamos revelar esta simplicidade escondida, examinando os pontos fixos em maior detalhe, o que nos permitirá visualizar as transformações de Möbius de uma forma mais clara. Neste processo, vamos esclarecer a nossa observação anterior de que as transformações de Möbius podem ser classificadas em quatro tipos, cada  $M$  está sendo “equivalente” a um (e apenas um) dos quatro tipos de transformação ilustrados na Figura 3.5.

Para começar, vamos supor que  $M$  tem dois pontos fixos distintos,  $\xi_+$  e  $\xi_-$ . Observe o lado esquerdo da figura 5.1 e, em particular, a família de circunferências  $\mathcal{C}_1$  (tracejadas) passando pelos pontos fixos. Se pensarmos em  $M$  como uma aplicação  $z \mapsto w = M(z)$ , desta figura nela mesma, então cada membro de  $\mathcal{C}_1$  é aplicada em outro membro de  $\mathcal{C}_1$ , já que são circunferências que passam pelos pontos fixos de  $M$ .

Ainda com referência ao lado esquerdo da figura 5.1, suponha que  $p$  é um ponto arbitrário da reta por  $\xi_+$  e  $\xi_-$ , mas que não está entre os pontos fixos. Se  $\mathcal{K}$  é a circunferência de raio  $\sqrt{\|p - \xi_+\| \|p - \xi_-\|}$  centrada em  $p$ , então  $\xi_+$  e  $\xi_-$  são simétricos em relação a  $\mathcal{K}$ . Assim,  $\mathcal{K}$  intercepta cada membro de  $\mathcal{C}_1$  ortogonalmente. Através da variação de  $p$ , obtemos uma família de circunferências  $\mathcal{C}_2$  (linha sólida) tal que  $\xi_+$  e  $\xi_-$  são simétricos em relação a cada membro de  $\mathcal{C}_2$ , e cada membro de  $\mathcal{C}_2$  é ortogonal a cada um de  $\mathcal{C}_1$ .

Agora, o passo principal é aplicar uma transformação de Möbius  $F$ , no lado esquerdo da figura 5.1, que aplica um ponto fixo (digamos  $\xi_+$ ) em 0 e o outro ponto fixo ( $\xi_-$ ) em  $\infty$ . Com isso, a família  $\mathcal{C}_1$  é aplicada em uma família de retas pela origem (que

são circunferências pelo  $\infty$ ) e como  $\mathcal{C}_2$  é ortogonal à  $\mathcal{C}_1$ , sua imagem só pode ser uma família de circunferências centradas na origem (pois só assim serão ortogonais às retas pela origem). O lado direito da figura 5.1 ilustra este fato.

Uma possível transformação (não necessariamente normalizada) seria

$$F(z) = \frac{z - \xi_+}{z - \xi_-}.$$

Notamos que, poderíamos obter as famílias  $\mathcal{C}_1$  e  $\mathcal{C}_2$  por meio da transformação inversa  $F^{-1}$ , aplicando-a nas retas pela origem e nas circunferências concêntricas, respectivamente.

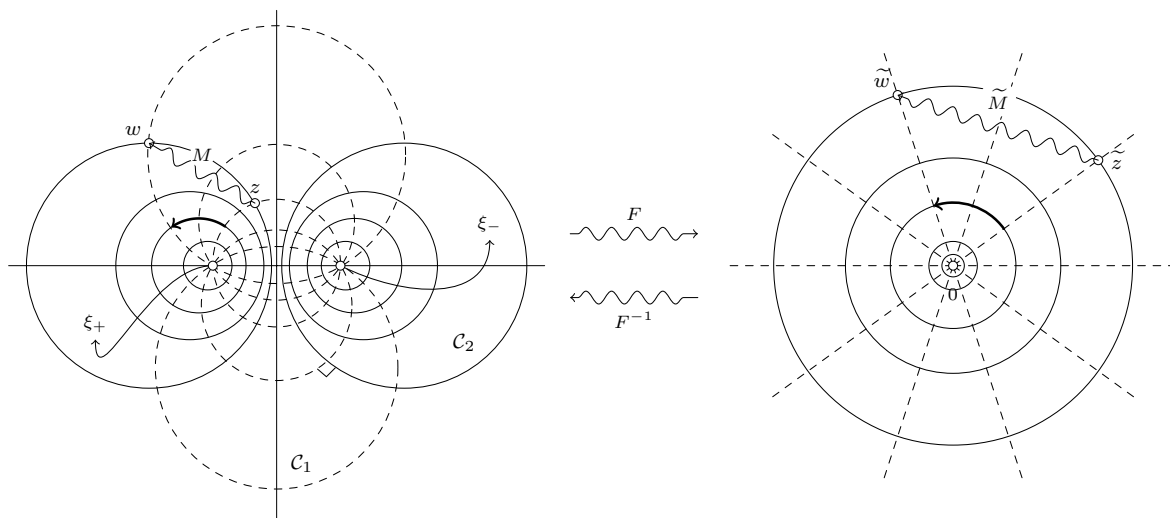


Figura 5.1: Ilustração da composição  $\widetilde{M} = F \circ M \circ F^{-1}$

Sejam  $\tilde{z} = F(z)$  e  $\tilde{w} = F(w)$  as imagens sob  $F$  de  $z$  e  $w = M(z)$ . Podemos pensar em  $F$  como sendo uma aplicação que transfere a transformação de Möbius  $z \mapsto w = M(z)$  (atuando no lado esquerdo) para uma transformação de Möbius  $\tilde{z} \mapsto \tilde{w} = \widetilde{M}(\tilde{z})$  (atuando no lado direito). Mais explicitamente,

$$\tilde{w} = F(w) = F(M(z)) = F(M(F^{-1}(\tilde{z}))),$$

e assim  $\widetilde{M} = F \circ M \circ F^{-1}$  é uma transformação de Möbius. Além disso, segue imediatamente da construção que os pontos fixos de  $\widetilde{M}$  são  $0$  e  $\infty$ . Porém, já vimos que se uma transformação de Möbius fixa tais pontos, ela só pode ser da forma

$$\widetilde{M}(\tilde{z}) = \mathbf{m}\tilde{z},$$

onde  $\mathbf{m} = \rho e^{i\alpha}$  é um número complexo. Geometricamente,  $\widetilde{M}$  é apenas uma rotação por  $\alpha$  seguida de uma homotetia por  $\rho$ .

Este número complexo  $\mathbf{m}$  não só determina completamente a aplicação  $\widetilde{M}$ , como também caracteriza a natureza geométrica da transformação de Möbius  $M$ , como veremos em breve. O número  $\mathbf{m}$  é chamado de *multiplicador* de  $M$ .



## 5.2 Transformações elíptica, hiperbólica e loxodrômica

Nesta seção, aprofundaremos o estudo dos três tipos de transformações já estudamos anteriormente.

**Elíptica:** Dizemos que  $M$  é uma transformação de Möbius *elíptica*, se  $\widetilde{M}$  é elíptica, ou seja, uma rotação pura correspondente à  $\mathbf{m} = e^{i\alpha}$ . Desde que  $\widetilde{M}$  é uma rotação se, e somente se, aplica cada circunferência centrada na origem em si mesma,  $M$  é elíptica se, e somente se, aplica cada circunferência de  $\mathcal{C}_2$  em si mesma.

Por exemplo, se  $\alpha = \pi/3$ , o lado direito da figura 5.1 ilustra o efeito de  $\widetilde{M}$  no ponto  $\tilde{z}$ . No lado esquerdo, vemos o correspondente efeito de  $M$ : movimenta  $z$  ao longo de uma circunferência  $C$  de  $\mathcal{C}_2$  até a interseção com uma circunferência de  $\mathcal{C}_1$  que faz um ângulo de  $\pi/3$  com  $C$ .

A figura 5.2 fornece uma ideia do movimento produzido por  $M$  no plano todo. Cada “retângulo” sombreado é aplicado por  $M$  no próximo retângulo sombreado, na direção das setas (lembrando que  $\alpha = \pi/3$  e que a grade circular foi feita com ângulo  $\pi/6$ ). Pela escolha de  $\alpha$ , seis aplicações sucessivas de  $M$  produzem a identidade, e portanto dizemos que “ $M$  tem período 6”. Mais geralmente, se  $\alpha = \left(\frac{m}{n}\right) 2\pi$ , onde  $\frac{m}{n}$  é uma fração irredutível, então  $M$  tem período  $n$ . Porém, se  $\frac{\alpha}{2\pi}$  é irracional, não importa quantas vezes aplicamos  $M$ , nunca obteremos a identidade.

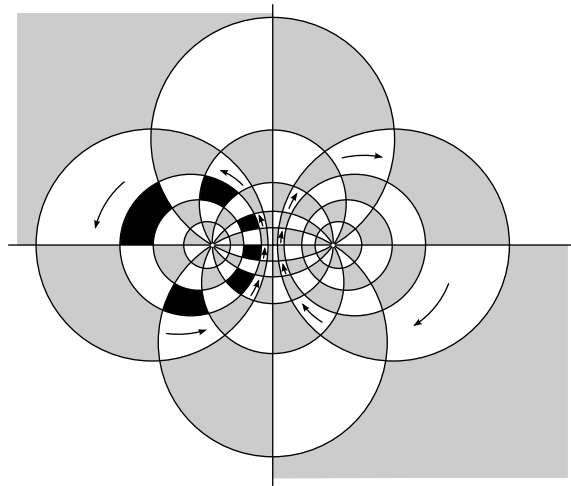


Figura 5.2: Efeito de uma transformação de Möbius elíptica

**Hiperbólica:** Dizemos que  $M$  é uma transformação de Möbius *hiperbólica*, se  $\widetilde{M}$  é hiperbólica, ou seja, uma homotetia correspondente a  $\mathbf{m} = \rho \neq 0, 1$ . Uma vez que  $\widetilde{M}$  é uma homotetia se, e somente se, deixa invariante cada reta pela origem,  $M$  é hiperbólica se, e somente se, deixa invariante cada circunferência de  $\mathcal{C}_1$ .

A figura 5.3 ilustra tal transformação com  $\rho > 1$ . Note que, se compusermos esta transformação, então qualquer região (por exemplo, a região hachurada próxima de

$\xi_+$ ) é aplicada para longe de  $\xi_+$ , sendo “espremida” em  $\xi_-$ . Neste caso  $\xi_+$  é chamado “ponto fixo repulsor” e  $\xi_-$  é “ponto fixo atrator”. Se  $m = \rho < 1$  então os papéis de  $\xi_+$  e  $\xi_-$  são trocados.

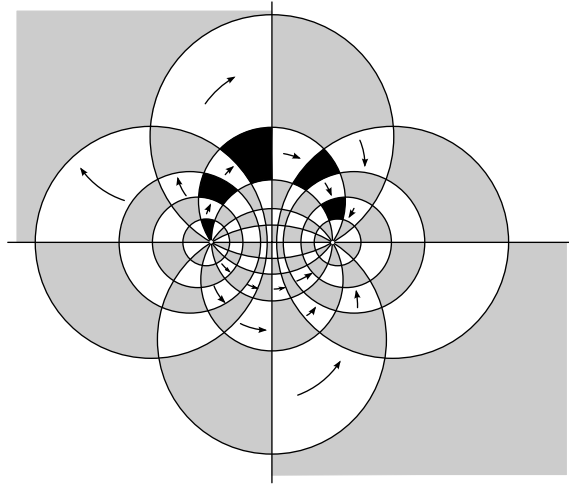


Figura 5.3: Efeito de uma transformação de Möbius hiperbólica

**Loxodrômica:** Se  $m = \rho e^{i\alpha}$ , então  $\widetilde{M}$  é a composição de uma rotação com uma homotetia. Assim,  $M$  é chamada de “transformação de Möbius *loxodrômica*”. Neste caso, nem as circunferências de  $\mathcal{C}_1$ , nem as de  $\mathcal{C}_2$  são invariantes. As curvas que são invariantes estão ilustradas na figura 5.4, com  $\alpha > 0$  e  $\rho > 1$ , que também mostra o efeito de aplicações sucessivas de  $M$  em uma pequena região próxima de  $\xi_+$ .

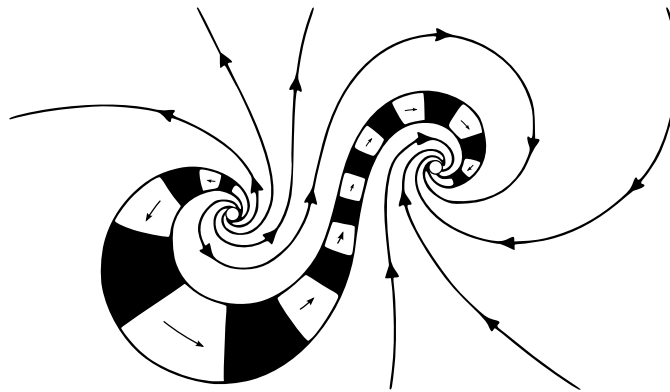


Figura 5.4: Efeito de uma transformação de Möbius loxodrômica

Observando a figura concluímos que: uma transformação de Möbius loxodrômica, com pontos fixos  $\xi_{\pm}$  e multiplicador  $m = \rho e^{i\alpha}$ , é a composição (em qualquer ordem) de: (i) uma transformação de Möbius elíptica com multiplicador  $m = e^{i\alpha}$  e pontos fixos  $\xi_{\pm}$ ; (ii) uma transformação de Möbius hiperbólica com multiplicador  $m = \rho$  e pontos fixos  $\xi_{\pm}$ .

### 5.3 Interpretação geométrica local do multiplicador

Na Seção 5.1, escolhemos arbitrariamente enviar  $\xi_+$  em 0, ao invés de  $\xi_-$ . Neste sentido, a definição do multiplicador  $\mathbf{m}$  da transformação de Möbius  $M$  torna-se ambígua e uma notação mais sugestiva deveria ter sido utilizada, por exemplo,  $\mathbf{m}_+$ . Assim sendo, qual seria o multiplicador  $\mathbf{m}_-$  e como se relacionaria com  $\mathbf{m}_+$ ?

Note que, por definição,  $\widetilde{M}$  satisfaz  $F \circ M = \widetilde{M} \circ F$ . Recordando a definição de  $F$ , se  $w = M(z)$  então

$$\frac{w - \xi_+}{w - \xi_-} = \mathbf{m} \left( \frac{z - \xi_+}{z - \xi_-} \right). \quad (5.1)$$

Permutar  $\xi_+$  e  $\xi_-$  na equação acima é equivalente a aplicar  $\xi_-$  em 0 e  $\xi_+$  em  $\infty$  e neste caso obtemos

$$\frac{w - \xi_-}{w - \xi_+} = \mathbf{m} \left( \frac{z - \xi_-}{z - \xi_+} \right) \iff \frac{w - \xi_+}{w - \xi_-} = \frac{1}{\mathbf{m}} \left( \frac{z - \xi_+}{z - \xi_-} \right). \quad (5.2)$$

Assim, o multiplicador é trocado de  $\mathbf{m}$  para  $\frac{1}{\mathbf{m}}$  e ambos os valores podem ser chamados de “o multiplicador de  $M$ ”. Refinamos nossa linguagem chamando o número  $\mathbf{m}$  que aparece em (5.1) de *multiplicador associado*<sup>1</sup> a  $\xi_+$  e denotando-o por  $\mathbf{m}_+$ . Nestes termos, mostramos que os multiplicadores associados aos dois pontos fixos são inversos um ao outro, ou seja,  $\mathbf{m}_- = \frac{1}{\mathbf{m}_+}$ .

Tentaremos entender este fato geometricamente. Observando novamente a figura 5.1, fica claro que  $\mathbf{m}_+ = e^{i\pi/3}$ . Tentaremos agora interpretar  $\mathbf{m}_+$  diretamente através da situação apresentada na figura 5.2, sem a ajuda do lado direito da figura 5.1. Quanto mais próximo de  $\xi_+$ , mais os membros de  $\mathcal{C}_2$  se aproximam de circunferências concêntricas neste ponto. De fato, quanto menor a vizinhança ao redor de  $\xi_+$ , mais as circunferências de  $\mathcal{C}_1$  se comportam como suas retas tangentes em  $\xi_+$ . Mas cada membro de  $\mathcal{C}_2$  é, por construção, ortogonal aos membros de  $\mathcal{C}_1$ , e portanto, devem ser circunferências centradas em  $\xi_+$ .<sup>2</sup>

Isto posto, podemos concluir que o efeito local de  $M$  (em uma vizinhança infinitesimal de  $\xi_+$ ) é uma rotação centrada em  $\xi_+$  por um ângulo de  $\pi/3$ . Este é o significado do multiplicador  $\mathbf{m}_+ = e^{i(\pi/3)}$  associado a  $\xi_+$ . É claro que a mesma argumentação se aplica para uma vizinhança infinitesimal de  $\xi_-$ . Porém, como pode ser visto na figura 5.2, o efeito local de  $M$  nesta vizinhança é uma rotação de  $-\pi/3$  e o multiplicador associado torna-se  $\mathbf{m}_- = \frac{1}{\mathbf{m}_+}$ .

Continuando a interpretação geométrica, podemos ver na figura 5.3 que o mesmo fenômeno ocorre no caso de uma transformação hiperbólica, e o multiplicador associado a  $\xi_+$  é  $\mathbf{m}_+ = \rho > 1$ . Isso nos diz que o efeito local de  $M$  em uma vizinhança infinitesimal de  $\xi_+$  é uma expansão centrada neste ponto. Em breve verificaremos que o “fator de

<sup>1</sup>Analogamente, definimos  $\mathbf{m}_-$ .

<sup>2</sup>Uma reta é perpendicular a uma circunferência se, e somente se, passa pelo centro desta.

expansão” é precisamente  $\rho$ . É também evidente, a partir da mesma figura, que o efeito local de  $M$  em uma vizinhança infinitesimal de  $\xi_-$  é uma contração, de modo que o multiplicador associado a esse ponto é real e menor que 1. No entanto, não é tão claro que esse número seja  $1/\rho$ , como suspeitamos ser. Isso também pode ser demonstrado geometricamente, mas ao invés disso, voltamos para os argumentos algébricos.

Sejam  $Z = z - \xi_+$  e  $W = w - \xi_+$ , vistos como vetores com origem em  $\xi_+$  até  $z$  e até sua imagem  $w = M(z)$ . Como observado acima, se  $Z$  é infinitesimal então o efeito de  $M$  é rotacionar  $Z$  por  $\alpha$  e expandir por  $\rho$ , ou seja,  $W = \mathbf{m}Z$ . Mais precisamente, note que (5.1) pode ser reescrita como

$$\frac{W}{w - \xi_-} = \mathbf{m} \left( \frac{Z}{z - \xi_-} \right) \iff \frac{W}{Z} = \mathbf{m} \left( \frac{w - \xi_-}{z - \xi_-} \right).$$

Como  $Z$  tende para 0,  $z$  e  $w$  tendem para  $\xi_+$ , e assim  $W = \mathbf{m}Z$ , como desejado.

Finalmente, para uma transformação de Möbius loxodrômica, o efeito geométrico local ao redor de  $\xi_+$  (ou de  $\xi_-$ ) é uma mescla dos dois anteriores, ou seja, rotação com expansão/contração, dependendo do valor de  $\rho$ .

## 5.4 Transformações parabólicas

Já temos algum entendimento das transformações de Möbius com dois pontos fixos. Resta agora tratar o caso em que  $M$  tem apenas um ponto fixo  $\xi$ , ou seja,  $M$  sendo uma transformação de Möbius parabólica.

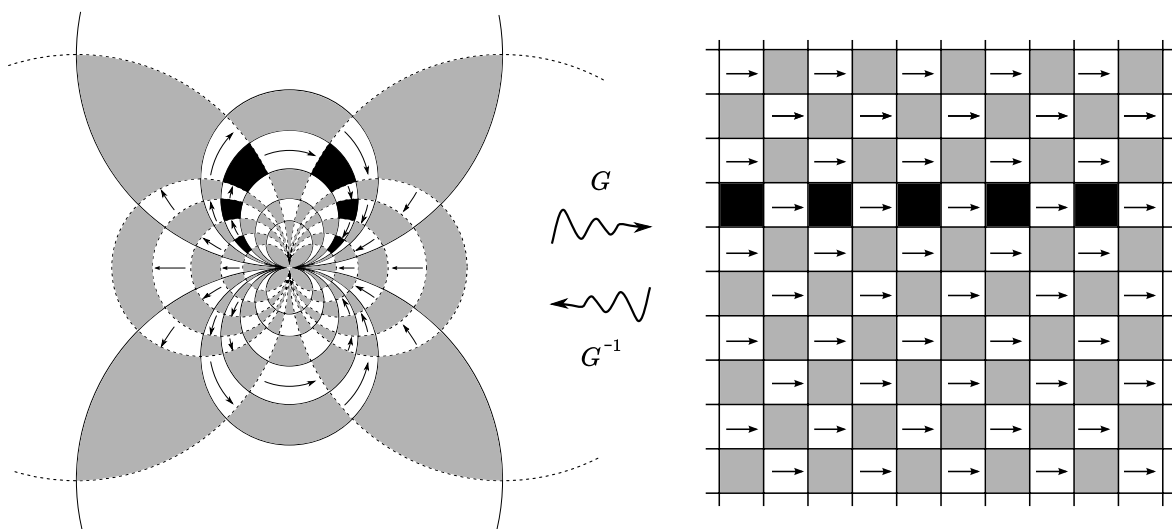


Figura 5.5: Efeito de uma transformação de Möbius parabólica

Considere o lado esquerdo da figura 5.5, mas ignore as setas por enquanto. Podemos observar duas famílias de circunferências passando por  $\xi$ : as famílias  $\mathcal{C}_1$  (tracejada) e  $\mathcal{C}_2$  (sólida). Além disso, cada membro de uma família é ortogonal a cada membro da

outra, nos dois pontos de interseção. O lado direito da figura 5.5 ilustra o que acontece quando aplicamos  $\xi$  em  $\infty$  por meio da transformação de Möbius, por exemplo,

$$G(z) = \frac{1}{z - \xi}.$$

Claramente,  $\mathcal{C}_1$  e  $\mathcal{C}_2$  são transformadas em famílias ortogonais de retas paralelas. Obviamente, se aplicarmos  $G^{-1}$  obteremos o efeito contrário, ou seja, famílias de retas são aplicadas em famílias de circunferências.

Como antes, sejam  $\tilde{z} = G(z)$  e  $\tilde{w} = G(w)$  as imagens de  $z$  e  $w = M(z)$ . Assim, a transformação de Möbius  $z \mapsto w = M(z)$  induz outra transformação de Möbius  $\tilde{z} \mapsto \tilde{w} = \widetilde{M}(\tilde{z})$ , definida por

$$\widetilde{M} = G \circ M \circ G^{-1}.$$

Como  $\infty$  é o único ponto fixo de  $\widetilde{M}$ , deduzimos que  $\widetilde{M}$  só pode ser uma translação,

$$\widetilde{M}(\tilde{z}) = \tilde{z} + p.$$

Suponhamos que as setas no lado direito da figura 5.5 representam a direção da translação por  $p$ . Assim, obtemos uma grade alinhada com  $p$ , a qual cada quadrado sombreado é aplicado no seguinte, por  $\widetilde{M}$ . No lado esquerdo da mesma figura, observamos a ação da transformação de Möbius parabólica  $M$ , onde cada circunferência de  $\mathcal{C}_2$  é invariante, e as circunferências de  $\mathcal{C}_1$  são trocadas entre si. Mais ainda, cada região sombreada é aplicada na próxima região sombreada, na direção das setas.

Se  $M(z) = \frac{az + b}{cz + d}$  está normalizada, pela equação (3.7),  $M$  é parabólica se, e somente se,  $a + d = \pm 2$ . Em cada caso  $\xi = \frac{a - d}{2c}$ . Agora, vamos determinar  $p$  em termos dos coeficientes de  $M$ . A igualdade  $G \circ M = \widetilde{M} \circ G$  fornece

$$\frac{1}{w - \xi} = \frac{1}{z - \xi} + p.$$

Desde que  $w = M(\infty) = \left(\frac{a}{c}\right)$ , concluímos que

$$p = \frac{1}{\frac{a}{c} - \xi} = \frac{1}{\frac{a}{c} - \frac{a - d}{2c}} = \frac{2c}{a + d} = \pm c,$$

onde o sinal “ $\pm$ ” é determinado por  $a + d$ .

Note que não definimos multiplicador para uma transformação de Möbius parabólica, uma vez que  $\widetilde{M}$  não é da forma  $m\tilde{z}$ .

## 5.5 Calculando o multiplicador

Vimos anteriormente como o multiplicador  $m$  determina o caráter de uma transformação de Möbius. Agora, mostraremos como determinar  $m$  diretamente dos coeficientes de  $M(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ .

Suponhamos já calculados os pontos fixos  $\xi_{\pm}$  por meio da equação (3.7), por exemplo. Desde que  $w = M(\infty) = a/c$ , (5.1) fornece o multiplicador associado a  $\xi_+$ , isto é,

$$\mathbf{m}_+ = \frac{a - c\xi_+}{a - c\xi_-}. \quad (5.3)$$

Por exemplo, considere a inversão complexa  $z \mapsto 1/z$ . Os pontos fixos são as soluções de  $z = 1/z$ , que são  $\xi_{\pm} = \pm 1$ . Assim, o multiplicador associado a  $\xi_+ = 1$  é  $\mathbf{m}_+ = \xi_+/\xi_- = -1 = e^{i\pi}$ , que neste caso é o mesmo que o multiplicador  $\mathbf{m}_- = 1/\mathbf{m}_+$  associado a  $\xi_- = -1$ . Assim, a *inversão complexa é elíptica* e uma vizinhança infinitesimal de cada ponto fixo é simplesmente rotacionada ao redor deste ponto por um ângulo de  $\pi$  (o sentido depende do ponto).

Se desejarmos, podemos obter explicitamente  $\mathbf{m}$ , substituindo (3.7) em (5.3). Se apenas quisermos saber o caráter da transformação de Möbius, então podemos prosseguir como se segue.

O multiplicador  $\mathbf{m}$  está relacionado com os coeficientes da transformação de Möbius normalizada por meio da equação

$$\sqrt{\mathbf{m}} + \frac{1}{\sqrt{\mathbf{m}}} = a + d. \quad (5.4)$$

De fato, como  $[\widetilde{M}] = [F][M][F]^{-1}$ , então  $\det[\widetilde{M}] = \det([F][F]^{-1}) \det[M] = \det[M]$ . Assim, independentemente se  $[F]$  está, ou não, normalizada,  $[M]$  está normalizada se, e somente se,  $[\widetilde{M}]$  está normalizada. Desde que  $\widetilde{M}(z) = \mathbf{m}z$ , e sua matriz normalizada será

$$[\widetilde{M}] = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\mathbf{m}} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{\mathbf{m}} \end{bmatrix},$$

pois os coeficientes  $\alpha$  e  $\delta$  devem satisfazer  $\alpha\delta = 1$  e  $\alpha/\delta = \mathbf{m}$ . Calculando o traço, obtemos

$$\sqrt{\mathbf{m}} + \frac{1}{\sqrt{\mathbf{m}}} = \text{tr}([F][M][F]^{-1}) = \text{tr}([F]^{-1}[F][M]) = \text{tr}([M]) = a + d.$$

A simetria da equação (5.4) implica que, se  $\mathbf{m}$  é uma solução, então  $1/\mathbf{m}$  também é solução. Com isso obtemos a seguinte classificação algébrica: a transformação de Möbius normalizada  $M(z) = \frac{az + b}{cz + d}$  é:

**elíptica** se, e somente se,  $a + d$  é real e  $|a + d| < 2$ ;

**hiperbólica** se, e somente se,  $a + d$  é real e  $|a + d| > 2$ ;

**loxodrômica** se, e somente se,  $a + d$  é complexo;

**parabólica** se, e somente se,  $a + d = \pm 2$ .

Para verificarmos estes casos, observamos primeiramente que, a partir da equação (5.4),  $\mathbf{m}$  deve ser solução de  $\mathbf{m} - \sqrt{\mathbf{m}}(a + d) + 1 = 0$ . Fazendo  $x = \sqrt{\mathbf{m}}$ , obtemos uma equação quadrática cujas soluções são  $((a + d) \pm \sqrt{(a + d)^2 - 4})/2$ .

Assim,  $M$  é elíptica se, e somente se,  $\mathbf{m}_{\pm} = e^{\pm i\alpha}$ , para  $0 < \alpha < \pi$ . Da equação (5.4), obtemos

$$\sqrt{e^{\pm i\alpha}} + \sqrt{e^{\mp i\alpha}} = 2 \cos(\alpha/2) = a + d,$$

e portanto,  $a + d$  é real e  $|a + d| < 2$ .

Também,  $M$  é hiperbólica se, e somente se, possui os dois multiplicadores reais, ou seja,  $a + d$  é real e  $|a + d| > 2$ .

Além disso,  $M$  é loxodrômica se, e somente se, possui dois multiplicadores  $\mathbf{m}_{\pm} = \rho_{\pm} e^{\pm i\alpha}$ , onde  $\rho_- = 1/\rho_+$ . Por (5.4), obtemos

$$\begin{aligned} \sqrt{\rho_+ e^{i\alpha}} + \sqrt{\rho_- e^{-i\alpha}} &= \sqrt{\rho_+}(\cos(\alpha/2) + i \operatorname{sen}(\alpha/2)) + \sqrt{\rho_-}(\cos(\alpha/2) - i \operatorname{sen}(\alpha/2)) \\ &= \cos(\alpha/2) (\sqrt{\rho_+} + \sqrt{\rho_-}) + i \operatorname{sen}(\alpha/2) (\sqrt{\rho_+} - \sqrt{\rho_-}), \end{aligned}$$

que é um número complexo. Portanto,  $a + d$  é um número complexo.

Por fim,  $M$  é parabólica se, e somente se, possui um único ponto fixo, e portanto, um único multiplicador. Isso ocorre se, e somente se,  $\sqrt{(a + d)^2 - 4} = 0$ , ou seja,  $a + d = \pm 2$ .

## 5.6 Interpretação do multiplicador por meio de autovalores

Se a matriz  $[M]$  representa uma transformação linear de  $\mathbb{C}^2$  em  $\mathbb{C}^2$ , vimos na Proposição 4.2 que seus autovetores são vetores de coordenadas homogêneas dos pontos fixos da correspondente transformação de Möbius  $M$ . Também vimos que, se  $[M]$  está normalizada, então seus autovalores determinam o caráter de  $M$ . Mais precisamente,

**Proposição 5.1.** *Se um ponto fixo de  $M$  é representado como um autovetor (com autovalor  $\lambda$ ) de uma matriz normalizada  $[M]$ , então o multiplicador  $\mathbf{m}$  associado a este ponto fixo é dado por  $\mathbf{m} = 1/\lambda^2$ .*

Antes de provarmos este resultado, vejamos como fica o caso da inversão complexa  $M : z \mapsto 1/z$ . Já sabemos que os pontos fixos são  $\xi_{\pm} = \pm 1$ , e que ambos os multiplicadores associados são dados por  $\mathbf{m}_{\pm} = -1$ .

Também, facilmente encontramos que a matriz normalizada é  $[M] = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}$ . Tomando como vetor de coordenadas homogêneas do complexo  $z$  o vetor  $\begin{bmatrix} z \\ 1 \end{bmatrix}$ , então

os autovetores associados aos pontos fixos  $z = \pm 1$  são  $\begin{bmatrix} \pm 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ . Desde que

$$\begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = -i \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

vemos que os autovalores são dados por  $\lambda = \pm i$ , como afirmado na Proposição 5.1.

Retornando ao caso geral, as equações (4.2) e (5.4) mostram que  $\sqrt{\mathbf{m}}$  e  $\lambda$  são raízes da mesma equação quadrática e assim deduzimos imediatamente de 5.1 que os dois valores recíprocos de  $\mathbf{m}$  são iguais aos dois valores recíprocos de  $\lambda^2$ . Entretanto, não sabemos como estes valores se correspondem. Apresentamos, então, uma abordagem mais produtiva.

Um resultado bem conhecido da Álgebra Linear, válido para matrizes  $n \times n$ , diz que:

se  $\mathbf{e}$  é um autovetor de  $[A]$  com autovalor  $\lambda$ , então  $\tilde{\mathbf{e}} := [B]\mathbf{e}$  é um autovetor de  $[\tilde{A}] := [B][A][B]^{-1}$ , também com autovalor  $\lambda$ .

De fato,  $[\tilde{A}]\tilde{\mathbf{e}} = ([B][A][B]^{-1})[B]\mathbf{e} = ([B][A])\mathbf{e} = [B](\lambda\mathbf{e}) = \lambda[B]\mathbf{e} = \lambda\tilde{\mathbf{e}}$ .

Considere novamente as hipóteses da figura 5.1, na qual o ponto fixo  $\xi_+$  de  $M$  (com multiplicador associado  $\mathbf{m}_+$ ) é aplicado no ponto fixo 0 de  $\tilde{M} = F \circ M \circ F^{-1}$ , por meio de  $z \mapsto \tilde{z} = F(z) = (z - \xi_+)/ (z - \xi_-)$ .

Em termos de transformações lineares de  $\mathbb{C}^2$  em  $\mathbb{C}^2$ , o autovetor  $\begin{bmatrix} \xi_+ \\ 1 \end{bmatrix}$  de  $[M]$  é aplicado por  $[F]$  no autovetor  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  de  $[\tilde{M}] = [F][M][F]^{-1}$ . Pelo resultado acima (da Álgebra Linear), se  $\lambda_+$  é o autovalor de  $\begin{bmatrix} \xi_+ \\ 1 \end{bmatrix}$ , então  $[\tilde{M}]\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \lambda_+\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ , estando, ou não, normalizadas as matrizes acima.

Suponhamos, agora, que  $[M]$  está normalizada, como exigido em 5.1. Já sabemos que a matriz normalizada de  $\tilde{M} : \tilde{z} \mapsto \mathbf{m}_+\tilde{z}$  é dada por  $[\tilde{M}] = \begin{bmatrix} \sqrt{\mathbf{m}_+} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{\mathbf{m}_+} \end{bmatrix}$ , de onde concluimos que

$$\lambda_+ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{\mathbf{m}_+} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{\mathbf{m}_+} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 1/\sqrt{\mathbf{m}_+} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto,  $\mathbf{m}_+ = 1/\lambda_+^2$ , como era para ser mostrado.

Terminamos, assim, a classificação das transformações de Möbius.



# Referências

- [1] NEEDHAM, T. *Visual Complex Analysis*. 5. ed. New York: Clarendon Press, Oxford, 2000.
- [2] CONWAY, J. B. *Functions of One Complex Variable*. 1. ed. New York: Springer, 1973.
- [3] COXETER, H. S. M. *Introduction to geometry*. 2. ed. New York: Wiley, 1969.
- [4] MARSDEN, J. E.; HOFFMAN, M. J. *Basic complex analysis*. 3. ed. New York: W. H. Freeman, 1999.
- [5] CAMARGO, I. de; BOULOS, P. *Geometria Analítica, um tratamento vetorial*. 3. ed. São Paulo: Pearson, Prentice Hall, 2005.