



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Teoria de Estabilidade de Equações Diferenciais Ordinárias e Aplicações: modelos presa-predador e competição entre espécies

Gislene Ramos Bessa

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática Universitária como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora
Profa. Dra. Renata Zotin Gomes de Oliveira

2011

517.38 Bessa, Gislene Ramos
B557t Teoria de Estabilidade de Equações Diferenciais Ordinárias e Aplicações: modelos presa-predador e competição entre espécies/ Gislene Ramos Bessa- Rio Claro: [s.n.], 2011.
95 f. : fig.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas.
Orientadora: Renata Zotin Gomes de Oliveira

1. sistema de equações diferenciais ordinárias. 2. solução de equilíbrio. 3. estabilidade. 4. teorema de linearização. 5. função de Lyapunov. I. Título

Ficha Catalográfica elaborada pela STATI - Biblioteca da UNESP
Campus de Rio Claro/SP

TERMO DE APROVAÇÃO

Gislene Ramos Bessa

TEORIA DE ESTABILIDADE DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS
ORDINÁRIAS E APLICAÇÕES: MODELOS PRESA-PREDADOR E
COMPETIÇÃO ENTRE ESPÉCIES

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática Universitária do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, pela seguinte banca examinadora:

Profa. Dra. Renata Zotin Gomes de Oliveira
Orientadora

Profa. Dra. Magda da Silva Peixoto
Departamento de Matemática - Ufscar/Sorocaba

Profa. Dra. Suzinei Aparecida Siqueira Marconato
Departamento de Matemática - Unesp/Rio Claro

Rio Claro, 05 de Dezembro de 2011

*Dedico a meus pais, José Antonio e Gildete,
e aos meus irmãos, Gisele, Gilmar e Gildene.*

Agradecimentos

Agradeço primeiramente à Deus pela vida e por todas as bênçãos recebidas, por me amparar nos momentos difíceis, me dar sabedoria e força interior para vencer os obstáculos, superar as dificuldades e por guiar-me sempre. Aos meus pais, irmãos e familiares que não mediram esforços para que eu pudesse estar aqui em Rio Claro, pessoas que sempre acreditaram em mim e em meus objetivos de vida.

Sou grata também a todos os professores da Universidade Federal de Mato Grosso - UFMT - pelo incentivo e voto de confiança em mim depositados, em especial à professora Dra Gladys Denise Wielewski e ao professor Dr. Geraldo Lúcio Diniz, por me recomendarem a esse programa de Pós-Graduação.

Tenho imensa gratidão por todos os professores deste programa - Suzinei Marconato, Elíris Rizziolli, Carina Alves, Marta Gadotti, João Peres, Ricardo Parreira, Renata Zotin, Thiago de Melo, Alice Libardi, Henrique Lazari - que contribuíram de forma significativa para o meu crescimento acadêmico e pessoal. Em especial, agradeço: ao professor João Peres pela contribuição direta a este trabalho; às secretárias do departamento Ana e Elisa; aos técnicos de informática Hugo e José Ricardo, por todo suporte que me foi dado; à Alessandra, pelas palavras de incentivo e apoio; à secretária e amiga Inajara, por todo suporte burocrático e pela amizade e aos funcionários da Sessão de Pós-Graduação, pelos serviços prestados.

Agradeço a todos os meus amigos de Cuiabá, que sempre acreditaram em mim e me apoiaram, amigos da infância, da escola e da graduação, amigos para toda a vida. Aos novos amigos conquistados aqui em Rio Claro, que foram essenciais para minha permanência no mestrado, em especial aqueles que tive uma intensa convivência - Tatiana e Mauro por me trazerem, Eliete, Luciana, Polyanna, Thiago Cobra, Thiago Lima, Nilson, Olívio e dona Leila, que foram minha família durante esses 22 meses.

Deixo aqui, profunda gratidão à minha orientadora, Profa. Dra. Renata Zotin, pela dedicação dada a este trabalho, pelas cobranças, paciência, serenidade e atenção com que me orientou e pelo incentivo e amizade.

*Pode ser que um dia deixemos de nos falar... Mas, enquanto houver amizade,
faremos as pazes de novo.*

*Pode ser que um dia o tempo passe... Mas, se a amizade permanecer,
um do outro se há de lembrar.*

(...) Há duas formas para viver a sua vida: Uma é acreditar que não existe milagre.

A outra é acreditar que todas as coisas são um milagre.

Albert Einstein

Resumo

O objetivo principal deste trabalho é o estudo da teoria qualitativa de sistemas de equações diferenciais ordinárias visando sua aplicação na análise de dois modelos clássicos de Dinâmica Populacional: presa-predador e competição entre duas espécies. Analisamos também duas variações para modelo predador-presa.

Palavras-chave: sistema de equações diferenciais ordinárias, solução de equilíbrio, estabilidade, teorema de linearização, função de Lyapunov.

Abstract

The main objective of this work is to study the qualitative theory for systems of ordinary differential equations in order to use in the analysis of two classical models of Population Dynamics: predator-prey and competition between two species. We also analyse two variations for predator-prey model.

Keywords: system of ordinary differential equations, equilibrium point, stability, linearization's theorem, Lyapunov's function.

Lista de Figuras

1.1	Ponto crítico: (a) estável; (b) assintoticamente estável; (c) instável	22
1.2	(a) plano de fase típico para autovalores negativos; (b) comportamento típico da solução x_1 em função de t	24
1.3	(a) Retrato de fase para o exemplo 1.1.	25
1.4	(a) plano de fase típico para autovalores com sinais diferentes; (b) comportamento típico da solução x_1 em função de t	26
1.5	Plano de fase para o exemplo 1.2	27
1.6	(a) plano de fase típico para autovalores repetidos com 2 autovetores l.i.; (b) comportamento típico da solução x_1 em função de t	28
1.7	(a) plano de fase típico para autovalores repetidos com um autovetor associado; (b) comportamento típico da solução x_1 em função de t	28
1.8	Plano de fase para o exemplo 1.3.	29
1.9	(a) plano de fase típico para autovalores complexos; (b) comportamento típico da solução x_1 em função de t	30
1.10	Plano de fase para o exemplo 1.4.	32
1.11	(a) plano de fase típico para autovalores imaginários; (b) comportamento típico da solução x_1 em função de t	32
3.1	z em função de x e como função de y	57
3.2	Construção das trajetórias no plano de fase xy	57
3.3	Existência do ponto de equilíbrio de coexistência. (a) condições do caso (i); (b) condições do caso (ii).	62
3.4	Dois situações (casos iii e iv) onde P_4 não existe do ponto de vista biológico.	63
3.5	Dois situações (casos v e vi) onde P_4 não existe do ponto de vista biológico.	63
3.6	Sinal de dx/dt e dy/dt para as situações de equilíbrio estudadas.	64

Sumário

Introdução	17
1 Sistemas Autônomos e Teoria de Estabilidade - o caso linear	19
1.1 Sistemas Autônomos e Estabilidade	19
1.2 Sistemas Lineares: o caso 2×2	22
1.3 Análise das soluções e plano de fase	22
2 Estabilidade de Sistemas não Lineares	35
2.1 Sistemas Quase Lineares	35
2.2 Teoria de Estabilidade segundo Lyapunov	42
2.3 Teorema de Linearização via Função de Lyapunov	46
3 Os Modelos Presa-Predador e Competição entre Espécies – análise de estabilidade	53
3.1 Presa-Predador	53
3.2 Competição entre Espécies	60
4 Variações do modelo clássico presa-predador	67
4.1 Variação para o modelo presa-predador utilizando o crescimento logístico	68
4.2 Modelo de Schoener(1973) - [1]	69
Conclusão	72
Referências	75
A Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias Lineares de ordem n	77
A.1 Teoria Básica	77
A.2 Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias Lineares com Coeficientes Constantes	81
A.2.1 Autovalores reais e distintos	82
A.2.2 Autovalores complexos	82
A.2.3 Autovalores repetidos	85
A.3 Matriz Fundamental	86

B	Classificação de Cônicas	89
C	Fórmula da Variação das Constantes	93
D	Teorema: Desigualdade de Gronwall	95

Introdução

O interesse em estudar o comportamento de espécies na natureza é antigo e o uso de conceitos matemáticos têm sido uma importante ferramenta nesses estudos.

É muito frequente, quando pretendemos modelar determinados fenômenos, nos pararmos com equações que envolvam variações de certas quantidades consideradas essenciais. O uso de equações diferenciais ou de diferenças para representar essas variações se devem essencialmente, ao fato do fenômeno estudado ser visto em tempo discreto ou contínuo.

O estudo das interações entre populações visa conhecer o comportamento dessas populações de modo a ajudar a prever quais espécies irão predominar numa comunidade, quais serão extintas e ainda quais as condições para que as espécies coexistam.

Sabe-se que o estudo de modelos matemáticos em Dinâmica Populacional teve seu início com Malthus (1798) e Verhulst (1838) e é objeto de estudo até os dias atuais [2].

Neste trabalho estudaremos a teoria de estabilidade de sistemas de equações diferenciais ordinárias cujo objetivo principal é o estudo qualitativo de dois modelos de Dinâmica Populacional: presa-predador e competição entre espécies.

Para isso, no primeiro capítulo definiremos sistemas autônomos, estabilidade, estabilidade assintótica e instabilidade para um sistema de equações diferenciais qualquer. Apresentaremos um estudo breve dos planos de fases de sistemas lineares, pois a teoria de sistemas quase-lineares está relacionada a sistemas lineares.

Em seguida, definiremos sistemas quase-lineares, apresentaremos um teorema que nos fornece uma condição suficiente para um sistema ser quase-linear e o teorema que caracteriza, por meio do sistema linear correspondente, a estabilidade assintótica ou instabilidade para este tipo de sistema. Discutiremos ainda, o estudo qualitativo de um sistema via função de Lyapunov, conhecido como Segundo Método de Lyapunov ([3], [4]).

No terceiro capítulo, estudaremos a estabilidade dos modelos competição entre espécies e presa-predador utilizando a teoria clássica.

Para finalizar o trabalho discutiremos duas variações do modelo presa-predador clássico, analisando as eventuais mudanças de ponto de equilíbrio e estabilidade.

1 Sistemas Autônomos e Teoria de Estabilidade - o caso linear

A maioria das equações diferenciais não pode ser resolvida analiticamente e assim, é importante considerarmos as informações qualitativas que podem ser obtidas da equação, sem de fato resolvê-las. Os resultados sobre estabilidade de pontos de equilíbrio para sistemas não lineares são baseados no comportamento de sistemas lineares com coeficientes constantes associados.

Desta forma, este capítulo é destinado ao estudo de sistemas autônomos lineares, formalização da teoria clássica de estabilidade e alguns resultados desta teoria. Faremos também uma breve apresentação dos resultados do estudo dos planos de fase de sistemas lineares, cuja caracterização das suas soluções estão no apêndice A deste trabalho.

1.1 Sistemas Autônomos e Estabilidade

Equações diferenciais ordinárias de ordem n em geral podem ser representadas por um sistema de equações diferenciais ordinárias de 1^a ordem. Para isso, vamos considerar D um aberto do \mathbb{R}^{n+1} e $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função contínua. Uma equação de ordem n , em geral pode ser escrita na forma

$$y^{(n)} = f(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)}). \quad (1.1)$$

Fazendo

$$x_1 = y, \quad x_2 = \dot{y}, \quad x_3 = \ddot{y}, \quad \dots, \quad x_n = y^{(n-1)}, \quad (1.2)$$

resulta o sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n \\ \dot{x}_n = f(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases} \quad (1.3)$$

sendo que a última equação decorre das equações (1.1) e (1.2). O sistema dado pelas equações (1.3) pode ser representado matricialmente por

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (1.4)$$

onde

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad f(t, x) = \begin{bmatrix} f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ f_2(t, x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{bmatrix}, \quad (1.5)$$

onde as $f_i(t, x_1, \dots, x_n)$ são funções definidas em D .

Definição 1.1. Uma solução para o sistema (1.4) em um intervalo da reta I é uma função vetorial $\varphi(t)$, diferenciável, onde $\varphi(t) = (\varphi_i)$, $i = 1, \dots, n$ e φ_i é definida em $I \subset \mathbb{R}$ com valores em \mathbb{R} , tal que φ satisfaça o sistema (1.4) em I para $t \in I$, $(t, \varphi(t)) \in D$.

Definição 1.2. Um sistema de equações diferenciais de primeira ordem é chamado de **autônomo** quando as funções f_i , $i = 1, \dots, n$ não dependem explicitamente da variável independente “ t ”, mas apenas das variáveis x_1, \dots, x_n , isto é,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, \dots, x_n) \end{cases} \quad (1.6)$$

O resultado a seguir nos permite realizar uma translação da solução através de uma mudança de variável.

Proposição 1.1. Se $x(t)$ é uma solução de (1.6) em I e se h é um número real então $x(t+h)$ é uma solução de (1.6) com domínio em $I_h = \{t-h / t \in I\}$.

Demonstração. Seja $\bar{x}(t) = x(t+h)$, fazendo $s = t+h$ temos:

$$\frac{d}{dt}\bar{x}(t) = \frac{d}{ds}x(s) \frac{d}{dt}s(t) = \frac{d}{dt}x(s) = f(x(s)) = f(x(t+h)) = f(\bar{x}(t)),$$

o que conclui a demonstração. □

Observação: A proposição acima não se aplica a sistemas não autônomos, pois neste caso teríamos

$$\frac{d}{dt}\bar{x}(t) = \frac{d}{dt}x(t+h) = f(x(s)) = f(t+h, x(t+h)) = f(t+h, \bar{x}(t)) \neq f(\bar{x}(t)).$$

As soluções constantes de um sistema autônomo desempenham um papel importante no estudo do comportamento do sistema, pois as outras soluções tendem a se

aproximar ou afastar das mesmas. E se $x(t) = c$ é solução de (1.6) então $\dot{x}(t) = f(x(t)) = f(c) = 0$. Reciprocamente, se $f(c) = 0$, então $x(t) = c$ é uma solução de (1.6). Assim, isso nos leva à seguinte definição.

Definição 1.3. Um ponto $x \in \mathbb{R}^n$ é chamado de ponto crítico de um sistema autônomo (1.6) se $f_i(x) = 0$, $i = 1, \dots, n$.

Trabalharemos com o ponto crítico sendo sempre o ponto $x = 0$. Caso não tenhamos essa situação, podemos usar a proposição anterior e obter um sistema de coordenadas em novas variáveis, de modo que o ponto crítico desse novo sistema seja a origem. Iremos denotar o ponto crítico por \bar{x} .

A seguir, para caracterizarmos a natureza de um ponto de equilíbrio (tipo de estabilidade), ou seja, se uma solução qualquer se aproxima ou se afasta de uma solução constante do problema, apresentaremos as definições de ponto de equilíbrio estável, assintoticamente estável e instável, cujas ilustrações geométricas são apresentadas nas figuras 1.1.a, b e c, respectivamente.

Definição 1.4. Um ponto crítico \bar{x} do sistema autônomo (1.6) é dito **estável** se, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que toda solução $\varphi(t)$ do sistema que satisfaz, em $t = t_0$

$$|\varphi(t_0) - \bar{x}| < \delta,$$

existe para todo t e satisfaz, para todo $t \geq t_0$

$$|\varphi(t) - \bar{x}| < \varepsilon.$$

Soluções que se iniciam próximas da solução constante $x(t) = \bar{x}$, permanecem próximas de \bar{x} para todo t .

Definição 1.5. Dizemos que um ponto crítico \bar{x} é **assintoticamente estável** se é estável e se existe $\delta_0 > 0$ tal que se uma solução $x = \varphi(t)$ do sistema satisfaz

$$|\varphi(t_0) - \bar{x}| < \delta_0,$$

então

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = \bar{x}.$$

Neste caso, além de se ter estabilidade, a solução que se inicia próxima de \bar{x} , tende à \bar{x} com o passar do tempo.

Definição 1.6. Um ponto crítico \bar{x} é dito **instável** se existe $\varepsilon > 0$ de modo que para todo $\delta > 0$ que se verifica

$$|\varphi(t_0) - \bar{x}| < \delta,$$

existe algum $t > t_0$ tal que,

$$|\varphi(t) - \bar{x}| \geq \varepsilon.$$

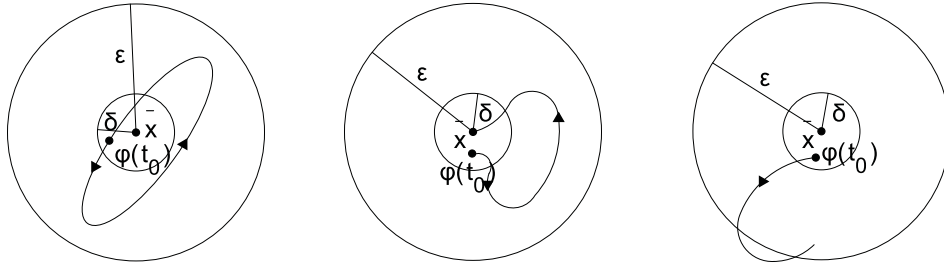


Figura 1.1: Ponto crítico: (a) estável; (b) assintoticamente estável; (c) instável

Em nossos estudos, nos restringiremos aos sistemas autônomos no plano, afim de podermos representá-los geometricamente.

1.2 Sistemas Lineares: o caso 2×2

Vamos considerar o tipo mais simples de sistema autônomo que é o sistema de equações diferenciais lineares com coeficientes constantes, ou seja,

$$\dot{x} = Ax \tag{1.7}$$

onde A é uma matriz constante de ordem 2×2 e $x = (x_1, x_2)$.

Mostramos no Apêndice A que as soluções são da forma $x = \xi e^{\lambda t}$, onde λ é um autovalor de A e ξ o autovetor associado. Lembremos que os autovalores são as raízes da equação polinomial $\det(A - \lambda I) = 0$ e os autovetores associados são determinados por $(A - \lambda I)\xi = 0$.

Como buscamos *soluções de equilíbrio*, sabemos que tais soluções são dadas pelos pontos onde temos $Ax = 0$. Consideremos A invertível, ou seja, $\det(A) \neq 0$. Então o único ponto crítico do sistema (1.7) é o ponto $x = 0$.

As soluções podem ser vistas como uma representação paramétrica de uma curva no plano x_1x_2 . Facilita, muitas vezes, olharmos essa curva como uma **trajetória** ou um caminho percorrido por um objeto cuja velocidade dx/dt é determinada pela equação diferencial. O plano x_1x_2 recebe o nome de **plano de fase** e o conjunto representativo de trajetórias é chamado **retrato de fase**.

1.3 Análise das soluções e plano de fase

Para analisarmos o sistema (1.7) devemos considerar os diversos casos, dependendo da natureza dos autovalores de A . Nosso objetivo aqui é caracterizar a solução do sistema de equações diferenciais de acordo com o padrão geométrico descrito por suas

trajetórias. É importante estarmos familiarizados com os tipos de comportamento das trajetórias para posteriormente abordarmos a teoria qualitativa de equações diferenciais. Vamos então, estudar os casos possíveis de autovalores [5]. Lembramos que a expressão da solução do sistema (1.7), dependendo do tipo de autovalor, é apresentada no Apêndice A.

1º Caso: Autovalores reais, distintos e de mesmo sinal

A solução geral do sistema (1.7) é dada por

$$x(t) = c_1 \xi^{(1)} e^{\lambda_1 t} + c_2 \xi^{(2)} e^{\lambda_2 t}, \quad (1.8)$$

onde os autovalores de A , λ_1 e λ_2 , são ambos positivos ou negativos. Vamos supor que $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$. Segue da equação (1.8) que $(x_1, x_2) \rightarrow (0, 0)$ quando $t \rightarrow \infty$, independentemente dos valores de c_1 e c_2 , ou seja, todas as soluções se aproximam da solução constante $x(t) = 0$, quando $t \rightarrow \infty$.

Se a solução começa em um ponto inicial na reta contendo a origem e na direção de $\xi^{(1)}$, então $c_2 = 0$ e a solução permanece nessa reta para todo t , tendendo à origem quando $t \rightarrow \infty$. De modo análogo, se o ponto inicial pertence à reta cuja direção é dada por $\xi^{(2)}$ e passa pela origem então a solução tende à origem por essa reta, quando $t \rightarrow \infty$.

É útil reescrevermos a solução geral, dada pela equação (1.8), na forma abaixo

$$x(t) = e^{\lambda_2 t} [c_1 \xi^{(1)} e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t} + c_2 \xi^{(2)}]. \quad (1.9)$$

Note que $\lambda_1 - \lambda_2 < 0$. Assim, sempre que tivermos $c_2 \neq 0$, o termo $c_1 \xi^{(1)} e^{(\lambda_1 - \lambda_2)t}$ se torna desprezível comparado ao termo $c_2 \xi^{(2)}$, para valores suficientemente grandes de t . Dessa forma, quando $t \rightarrow \infty$, as trajetórias no plano de fase tendem à origem e o fazem tendendo também à reta na direção de $\xi^{(2)}$. Logo, todas as soluções são tangentes à reta contendo $\xi^{(2)}$ em direção ao ponto crítico, exceto aquelas que começam exatamente na reta na direção $\xi^{(1)}$, como ilustra a figura 1.2.a.

Mostremos, na figura 1.2.b, o esboço de alguns gráficos típicos de x_1 em função de t , que ilustra o fato de todas as soluções apresentarem decaimento exponencial no tempo, se $x(0) > 0$. O comportamento de x_2 em função de t é semelhante.

Se tivermos $0 < \lambda_2 < \lambda_1$, então as trajetórias tem o mesmo padrão da figura 1.2.a exceto o sentido do movimento, que se afasta da origem. Neste caso, x_1 e x_2 crescem exponencialmente (em módulo) como funções de t .

No caso de autovalores reais, distintos e de mesmo sinal a origem é chamada de **nó**. É assintoticamente estável se os autovalores são negativos e, instável, se os autovalores são positivos.

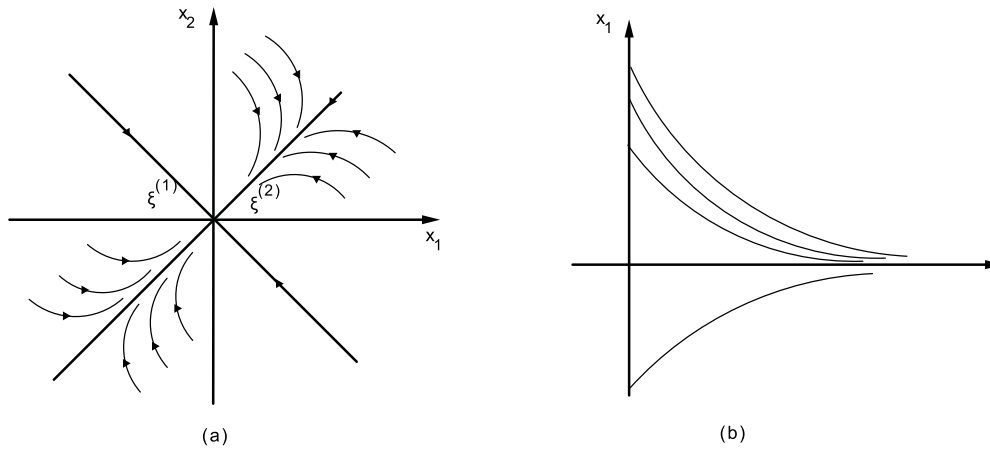


Figura 1.2: (a) plano de fase típico para autovalores negativos; (b) comportamento típico da solução x_1 em função de t .

Exemplo 1.1. Vamos estudar a estabilidade da solução geral do sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 - 2x_2 \\ \dot{x}_2 = -2x_1 - 5x_2 \end{cases}$$

Colocando o sistema na forma matricial temos

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Os autovalores são as soluções da equação

$$(-2 - \lambda)(-5 - \lambda) - 4 = 0$$

ou seja,

$$\lambda_1 = -1 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = -6,$$

e os autovetores associados são,

$$\xi^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \xi^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Portanto, a solução geral do sistema é

$$x(t) = c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{-6t} = e^{-t} \left\{ c_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{-5t} \right\}.$$

Observe que independente das constantes c_1 e c_2 , a solução $(x_1, x_2) \rightarrow (0, 0)$ quando $t \rightarrow \infty$. Ainda, sempre que tivermos $c_1 \neq 0$ o termo $c_2 \xi^{(2)} e^{-5t}$ torna-se desprezível comparado ao termo $c_1 \xi^{(1)}$ para t suficientemente grande. Isso nos diz que, quando

$t \rightarrow \infty$ todas as trajetórias (com $c_1 \neq 0$) tendem à origem através da reta contendo a origem, na direção de $\xi^{(1)}$.

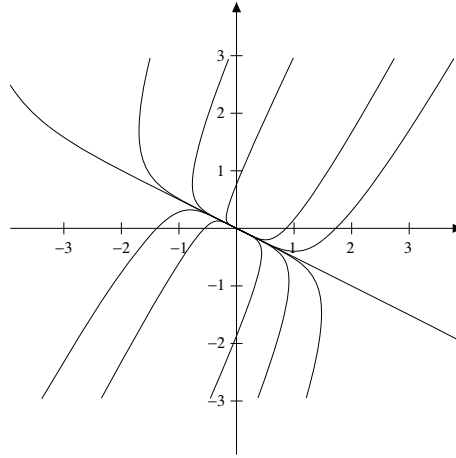


Figura 1.3: (a) Retrato de fase para o exemplo 1.1.

2º Caso: Autovalores reais com sinais diferentes

Temos que a solução geral para o sistema (1.7) é

$$x(t) = c_1 \xi^{(1)} e^{\lambda_1 t} + c_2 \xi^{(2)} e^{\lambda_2 t} \quad (1.10)$$

onde $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 < 0$.

Se a solução começa em um ponto da reta que passa pela origem, cuja direção é dada por $\xi^{(1)}$, então $c_2 = 0$ e, por consequência, a solução permanece nessa reta. Como $\lambda_1 > 0$, temos que $|(x_1, x_2)| \rightarrow \infty$ quando $t \rightarrow \infty$.

Por outro lado, se a solução inicia em um ponto da reta contendo a origem, na direção de $\xi^{(2)}$, temos $c_1 = 0$ e a solução permanece sobre a reta. Agora, como $\lambda_2 < 0$, segue que a $(x_1, x_2) \rightarrow (0, 0)$, quando $t \rightarrow \infty$.

As soluções que começam em outros pontos iniciais tem suas trajetórias se aproximando e comportando-se como a reta contendo a origem, na direção $\xi^{(1)}$, à medida que t cresce. O termo exponencial positivo é predominante na solução e dessa forma, as soluções tendem ao infinito, em módulo. As únicas soluções que se aproximam da solução nula são aquelas que iniciam precisamente na reta contendo a origem, determinada, pelo autovetor $\xi^{(2)}$, associado ao autovalor negativo.

A figura 1.4.a ilustra as trajetórias para a solução (1.10) e a figura 1.4.b mostra o esboço de alguns gráficos típicos de $x_1(t)$ em função de t . O comportamento de $x_2(t)$ em função de t é semelhante. Neste caso, a origem recebe o nome de **ponto de sela**.

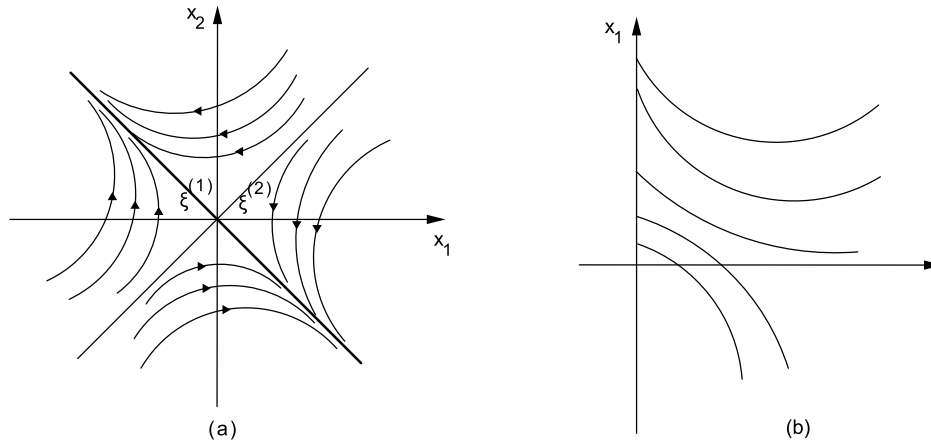


Figura 1.4: (a) plano de fase típico para autovalores com sinais diferentes; (b) comportamento típico da solução x_1 em função de t .

Exemplo 1.2. Vamos estudar a estabilidade da solução geral do sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 = 3x_1 - 2x_2 \end{cases}$$

Sua representação na forma matricial é

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

e seus autovalores e autovetores associados são:

$$\lambda_1 = 1 \rightarrow \xi^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \lambda_2 = -1 \rightarrow \xi^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

A solução geral é dada por

$$x(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^t + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} e^{-t}.$$

Note que para $c_1 = 0$ temos $x(t) \rightarrow (0, 0)$ quando $t \rightarrow \infty$, enquanto que se $c_2 = 0$ temos $|x(t)| \rightarrow \infty$ quando $t \rightarrow \infty$. No entanto, para qualquer outra solução ($c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$) o termo $c_2 \xi^{(2)} e^{-t}$ é desprezível comparado à $c_1 \xi^{(1)} e^t$ e a medida que t cresce, o termo $c_1 \xi^{(1)} e^t$ é predominante na solução. Portanto, para $t \rightarrow \infty$ temos $|(x_1, x_2)| \rightarrow \infty$. Logo, a origem é um ponto de sela.

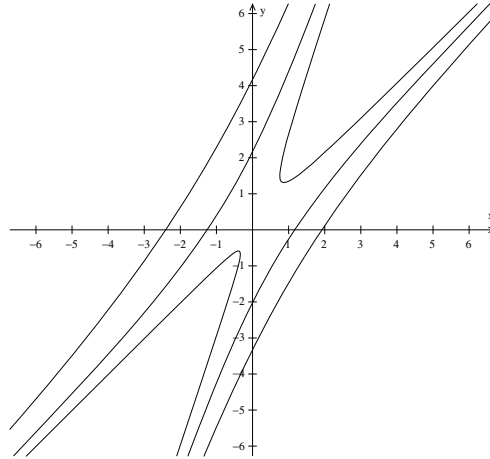


Figura 1.5: Plano de fase para o exemplo. 1.2

3º Caso: Autovalores iguais

Vamos supor agora $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda < 0$. No caso positivo, as trajetórias são semelhantes, mas o sentido do movimento é contrário.

Temos então, dois subcasos, que dependem do autovalor repetido ter dois autovetores linearmente independentes ou apenas um.

(a) Dois autovetores linearmente independentes

A solução geral do sistema (1.7) é

$$x(t) = c_1 \xi^{(1)} e^{\lambda t} + c_2 \xi^{(2)} e^{\lambda t}, \quad (1.11)$$

onde $\xi^{(1)}$ e $\xi^{(2)}$ são autovetores independentes. Note que, a razão $x_2(t)/x_1(t)$ independe de t mas depende das coordenadas de $\xi^{(1)}$ e $\xi^{(2)}$ e das constantes arbitrárias c_1 e c_2 , isso significa que a trajetória caminha ao longo de uma reta passando pela origem. Se $\lambda < 0$ temos, da equação (1.11), que a solução tende à solução nula quando t tende a infinito e toda trajetória está contida em uma reta contendo a origem. A figura 1.6.a ilustra as trajetórias e a figura 1.6.b mostra esboço de gráficos típicos de x_1 em função de t . A origem recebe o nome de **nó próprio** ou de **ponto estrela**.

(b) Um autovetor independente

Do apêndice A, sabemos que solução geral do sistema (1.7) neste caso é

$$x(t) = c_1 \xi e^{\lambda t} + c_2 (\xi t e^{\lambda t} + \eta e^{\lambda t}), \quad (1.12)$$

onde ξ é autovetor e η é o autovetor generalizado associado ao autovalor repetido.

Observe que para t grande, o termo dominante na (1.12) é $c_2 \xi t e^{\lambda t}$. Assim, quando $t \rightarrow \infty$, todas as trajetórias tendem à origem e são tangentes à reta na direção de

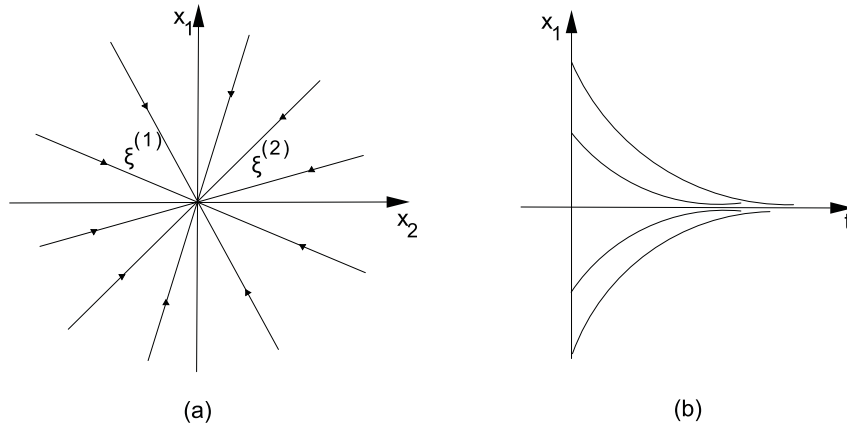


Figura 1.6: (a) plano de fase típico para autovalores repetidos com 2 autovetores l.i.; (b) comportamento típico da solução x_1 em função de t .

ξ pois, se $c_2 = 0$, a solução é $c_1 \xi e^{\lambda t}$, que pertence a reta contendo ξ e a origem. Se considerarmos valores negativos de t , o termo $c_2 \xi t e^{\lambda t}$ continua sendo dominante de modo que, quando $t \rightarrow -\infty$, cada trajetória é assintótica à uma reta paralela a ξ . A figura 1.7.a mostra as trajetórias e a figura 1.7.b ilustra o comportamento de x_1 em função de t .

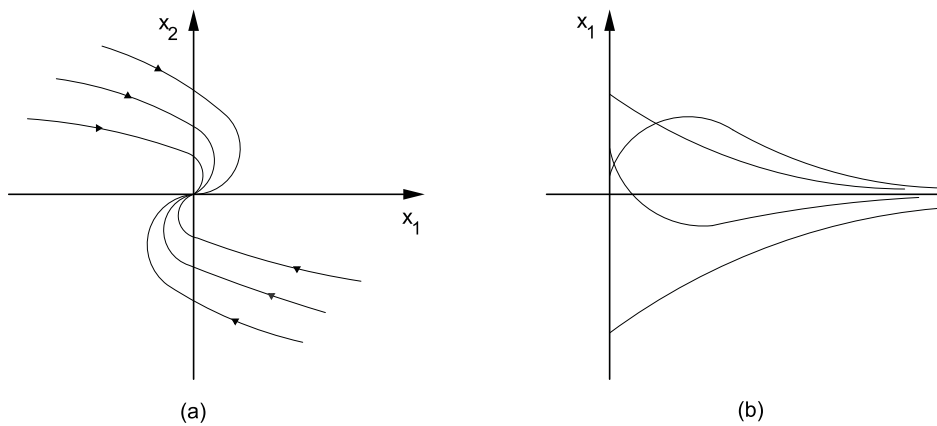


Figura 1.7: (a) plano de fase típico para autovalores repetidos com um autovetor associado; (b) comportamento típico da solução x_1 em função de t .

Exemplo 1.3. Consideremos o sistema

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -6 & 5 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} x.$$

O sistema possui um autovalor com multiplicidade algébrica 2, sendo ele $\lambda = -1$, e este autovalor λ está associado a um único autovetor $\xi^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Vamos determinar então, o vetor η tal que, $x(t) = \xi t e^{-t} + \eta e^{-t}$ seja uma solução para o sistema dado. Esse vetor η deve satisfazer $(A - \lambda I)\eta = \xi$, ou seja,

$$\begin{bmatrix} -5 & 5 \\ -5 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \implies \eta = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

Portanto a solução geral do sistema é:

$$x(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} + c_2 \left\{ t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix} e^{-t} \right\}$$

ou ainda,

$$x(t) = e^{-t} \begin{bmatrix} c_1 + c_2 t \\ c_1 + c_2(t + \frac{1}{5}) \end{bmatrix}.$$

Fazendo uso de propriedades de limite podemos concluir que $(x_1, x_2) \rightarrow (0, 0)$ quando $t \rightarrow \infty$, independentemente das constantes c_1 e c_2 .

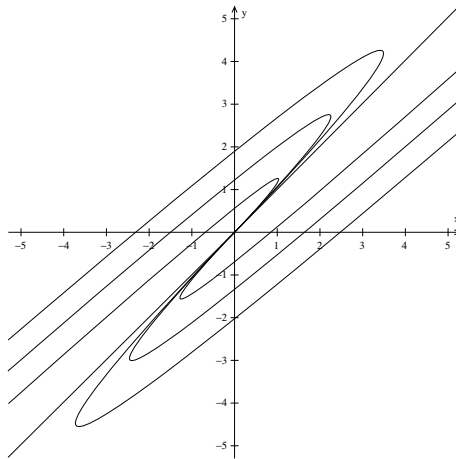


Figura 1.8: Plano de fase para o exemplo 1.3.

4º Caso: Autovalores complexos

Sistemas com autovalores $\lambda = \alpha \pm \beta i$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, $\beta > 0$ são tipicamente,

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} x \quad (1.13)$$

ou, na forma escalar,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha x_1 + \beta x_2 \\ \dot{x}_2 = -\beta x_1 + \alpha x_2 \end{cases} \quad (1.14)$$

Trabalhando em coordenadas polares no plano $x_1 x_2$, temos $r^2 = x_1^2 + x_2^2$, e $\text{tg } \theta = \frac{x_2}{x_1}$.

Diferenciando essas equações, temos:

$$r\dot{r} = x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2, \quad (\sec^2 \theta)\dot{\theta} = \frac{(\dot{x}_2x_1 - x_2\dot{x}_1)}{x_1^2} \quad (1.15)$$

Substituindo as equações (1.14) na primeira equação de (1.15), vem:

$$\dot{r} = \alpha r \quad (1.16)$$

Integrando em relação a t temos

$$r(t) = ce^{\alpha t}. \quad (1.17)$$

Substituindo as equações (1.14) na segunda equação de (1.15) e usando o fato de $\sec^2 \theta = r^2/x_1^2$ temos,

$$\dot{\theta} = -\beta. \quad (1.18)$$

Integrando (1.18) em relação a t ,

$$\theta(t) = -\beta t + \theta_0, \quad (1.19)$$

onde θ_0 é o valor de θ para $t = 0$.

As equações (1.17) e (1.19) são equações paramétricas em coordenadas polares das trajetórias do sistema (1.14). Como $\beta > 0$ temos que o valor de θ diminui à medida que t cresce e portanto o movimento em uma trajetória é no sentido horário. Observe na equação (1.17) que, quando $t \rightarrow \infty$, temos para $|r| \rightarrow \infty$ para $\alpha > 0$ e $r \rightarrow 0$ para $\alpha < 0$. Assim, as trajetórias são espirais que se afastam ou se aproximam da origem, dependendo do sinal de α . A figura 1.9.a ilustra as trajetórias enquanto que a figura 1.9.b mostra o comportamento típico da solução $x_1(t)$ em função de t . Os pontos críticos recebem o nome de **pontos espirais**.

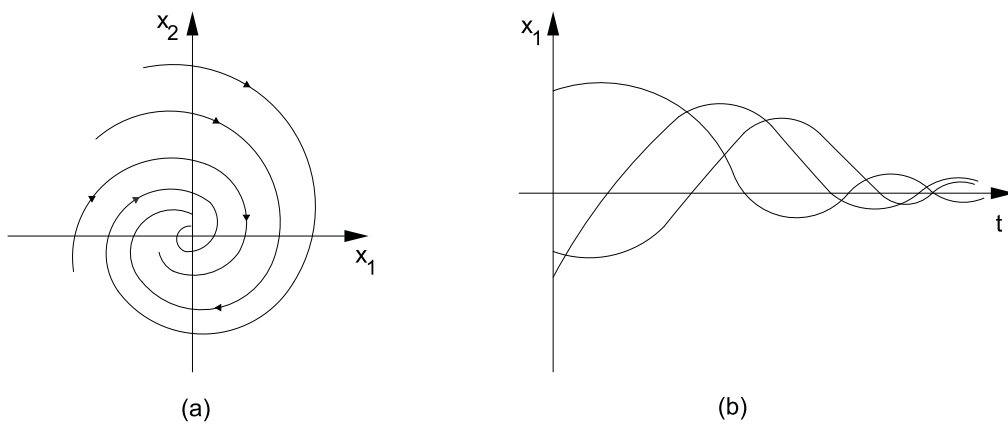


Figura 1.9: (a) plano de fase típico para autovalores complexos; (b) comportamento típico da solução x_1 em função de t .

Exemplo 1.4. Vamos determinar a solução geral para o sistema abaixo e descrever seu comportamento quando $t \rightarrow \infty$.

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix} x$$

O sistema dado têm como autovalores os complexos,

$$\lambda = -1 \pm i.$$

Olhando para $\lambda = -1 + i$ temos o autovetor associado, também complexo, na forma

$$\xi^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} i$$

Assim, as soluções reais linearmente independentes são (ver apêndice (A))

$$u(t) = e^{-t} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cos t - \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \sin t \right\} \quad e$$

$$v(t) = e^{-t} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \sin t + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \cos t \right\}.$$

Logo, a solução geral é dado por

$$x(t) = c_1 u(t) + c_2 v(t)$$

ou seja,

$$x(t) = e^{-t} \begin{bmatrix} c_1 \cos t + c_2 \sin t \\ c_1(2 \cos t + \sin t) + c_2(2 \sin t - \cos t) \end{bmatrix}.$$

Essa solução é o produto de uma função limitada (combinação de seno e cosseno) com uma função que tende a zero quando t tende a infinito. Usando propriedades de limite podemos concluir que $x(t) \rightarrow (0, 0)$, quando $t \rightarrow \infty$.

5º Caso: Autovalores Imaginários Puros

Neste caso os autovalores são $\lambda = \pm \beta i$, com $\beta \in \mathbb{R}$, ($\alpha = 0$) e o sistema (1.13) pode ser escrito na forma,

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ -\beta & 0 \end{pmatrix} x \quad (1.20)$$

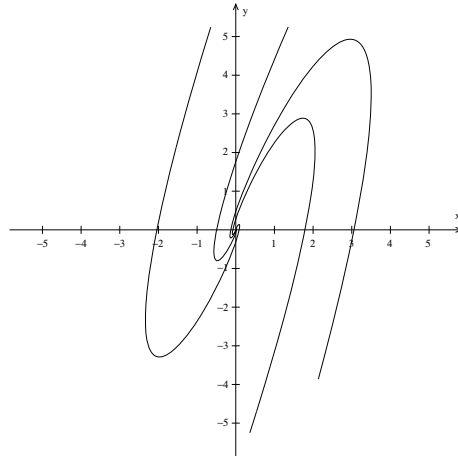


Figura 1.10: Plano de fase para o exemplo 1.4.

Seguindo o mesmo raciocínio do caso anterior, encontramos

$$\dot{r} = 0, \quad \dot{\theta} = -\beta \quad (1.21)$$

e portanto

$$r = c, \quad \theta = -\beta t + \theta_0 \quad (1.22)$$

onde c e θ_0 são constantes. Logo as trajetórias são círculos centrados na origem e o sentido do movimento é horário se $\beta > 0$ e anti-horário se $\beta < 0$. Uma volta completa é feita no intervalo de tempo de comprimento $2\pi/\beta$ e desta forma, todas as soluções são periódicas, com período $2\pi/\beta$. As trajetórias estão ilustradas na figura 1.11.a já a figura 1.11.b mostra o comportamento típico de $x_1(t)$ em função de t . A origem é chamada de **centro**.

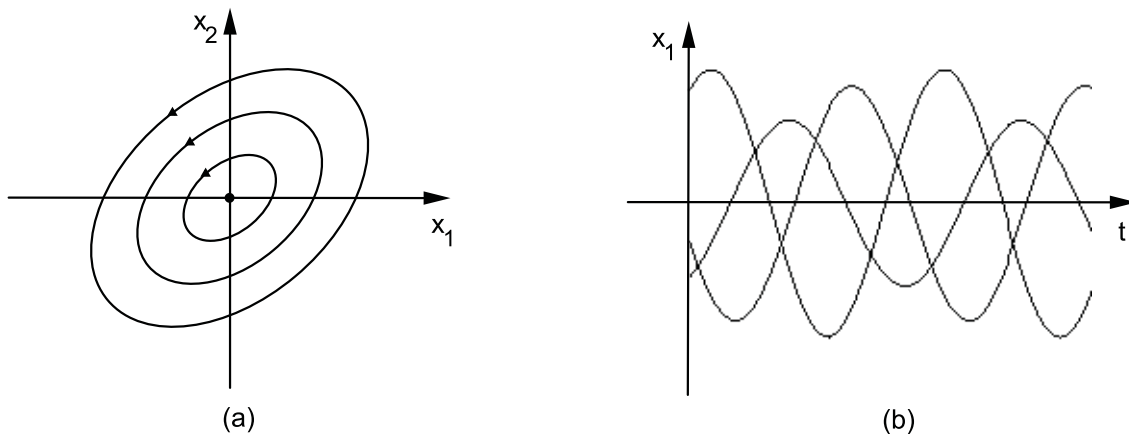


Figura 1.11: (a) plano de fase típico para autovalores imaginários; (b) comportamento típico da solução x_1 em função de t .

Exemplo 1.5. Vamos mostrar que as trajetórias são elipses, quando os autovalores são imaginários puros. Considere o sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

onde $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ são reais.

Note que, os autovalores são imaginários puros se, e somente se,

$$\alpha + \delta = 0, \quad \alpha\delta - \beta\gamma > 0. \quad (1.23)$$

Fazendo dx_2/dx_1 temos

$$\begin{aligned} \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\gamma x_1 + \delta x_2}{\alpha x_1 + \beta x_2} &\implies dx_2(\alpha x_1 + \beta x_2) = dx_1(\gamma x_1 + \delta x_2) \\ \underbrace{(\gamma x_1 + \delta x_2)}_M dx_1 + \underbrace{(-\alpha x_1 - \beta x_2)}_N dx_2 &= 0 \end{aligned} \quad (1.24)$$

Logo,

$$\frac{\partial M}{\partial x_2} = \delta \text{ e } \frac{\partial N}{\partial x_1} = -\alpha$$

Como por (1.23) $\alpha = -\delta$, temos que a equação é exata. Assim, existe $\psi(x_1, x_2)$ tal que $\frac{\partial \psi}{\partial x_1} = M(x_1, x_2)$ e $\frac{\partial \psi}{\partial x_2} = N(x_1, x_2)$.

Temos, então

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_1} = \gamma x_1 + \delta x_2$$

Integrando em relação a x_1 , vem:

$$\psi(x_1, x_2) = \frac{\gamma}{2} x_1^2 + \delta x_1 x_2 + f(x_2) \quad (1.25)$$

Derivando (1.25) em relação a x_2 , temos:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_2} = \delta x_1 + \dot{f}(x_2) = -(\alpha x_1 + \beta x_2).$$

Usando (1.23) temos:

$$-\alpha x_1 + \dot{f}(x_2) = -\alpha x_1 - \beta x_2 \implies \dot{f}(x_2) = -\beta x_2.$$

Integrando em relação a x_2

$$f(x_2) = \frac{-\beta}{2} x_2^2 + k_1,$$

embora a constante k_1 não apareça explicitamente na solução final.

Assim,

$$\psi(x_1, x_2) = \frac{\gamma}{2}x_1^2 + \delta x_1 x_2 - \frac{\beta}{2}x_2^2 \quad (1.26)$$

Sabemos que a solução da EDO é dada implicitamente por $\psi(x_1, x_2) = k$, isto é,

$$\gamma x_1^2 + 2\delta x_1 x_2 - \beta x_2^2 = k. \quad (1.27)$$

De acordo com o exemplo (B.1) do apêndice B, concluímos que o ponto crítico é estável.

Dessa forma, de acordo com a característica dos autovalores encontrados, as situações analisadas podem ser resumidas no seguinte teorema.

Teorema 1.1. *O ponto crítico \bar{x} do sistema linear (1.7) é:*

- (i) *assintoticamente estável se os autovalores λ_1 e λ_2 são reais e negativos ou têm a parte real negativa;*
- (ii) *estável, mas não assintoticamente estável, se λ_1 e λ_2 são imaginários puros;*
- (iii) *instável se λ_1 e λ_2 são reais e pelo menos um deles é positivo ou se ambos têm parte real positiva.*

Demonstração. A demonstração segue das análises feitas anteriormente. □

Esse teorema nos mostra que, os autovalores λ_1 e λ_2 da matriz de coeficientes A , determinam o tipo de ponto crítico e suas características de estabilidade.

A seguir, apresentaremos um teorema que será utilizado no próximo capítulo, para demonstrarmos os tipos de estabilidade de pontos de equilíbrio de sistemas não lineares. A definição de exponencial de uma matriz A encontra-se no apêndice A.

Teorema 1.2. *Seja o ponto crítico \bar{x} do sistema linear (1.7) um ponto assintoticamente estável, então existem constantes positivas k e α tais que*

$$\|e^{At}x_0\| < ke^{-\alpha t}\|x_0\| \quad \text{para todo } t \geq 0, x_0 \in \mathbb{R}^2. \quad (1.28)$$

Demonstração. Ver [6]. □

Após caracterizarmos a estabilidade de pontos críticos de sistemas lineares, no capítulo seguinte apresentaremos os sistemas não-lineares e teoremas relacionados à estabilidade de pontos de equilíbrio.

2 Estabilidade de Sistemas não Lineares

Neste capítulo, estudaremos a teoria clássica de estabilidade para uma classe de sistemas de equações não lineares que aparece com muita frequência nos modelos de dinâmica populacional. O resultado principal é conhecido como Teorema da Linearização. Discutiremos também a análise da estabilidade utilizando uma função auxiliar, chamada função de Lyapunov. Essa teoria é conhecida como Segundo Método de Lyapunov e nesse estudo, apresentaremos uma demonstração alternativa para o teorema da linearização via Lyapunov.

2.1 Sistemas Quase Lineares

Vamos considerar agora, um sistema autônomo não-linear,

$$\dot{x} = f(x). \tag{2.1}$$

Como na maioria das vezes não é possível determinar a estabilidade de um ponto crítico de um sistema não-linear por meio de soluções explícitas, vamos investigar o comportamento das trajetórias do sistema (2.1) em uma vizinhança de um ponto crítico \bar{x} . Os teoremas que apresentaremos relacionam o sistema (2.1) com um sistema linear associado, cuja análise de pontos de equilíbrio já foi realizada no capítulo anterior. Suponha o sistema autônomo não-linear (2.1) representado na forma

$$\dot{x} = Ax + g(x), \tag{2.2}$$

onde A é uma matriz real $n \times n$, $g(x)$ contínua uma matriz $n \times 1$ e $g(0) = 0$. Considere o ponto crítico do sistema autônomo sendo $\bar{x} = 0$, pois caso não o seja, basta fazermos uma mudança de variável $u = x - \bar{x}$. Suponha também que esse ponto seja **isolado**, ou seja, que existe um círculo em torno de \bar{x} cujo interior não contém outros pontos críticos e ainda, que $\det(A) \neq 0$. Assim, $\bar{x} = 0$ é o único ponto crítico do sistema linear $\dot{x} = Ax$. Para que o sistema linear $\dot{x} = Ax$ seja uma boa aproximação do sistema

não-linear (2.2), ou seja, o comportamento do sistema não linear é o mesmo do linear, em torno do ponto crítico $\bar{x} = 0$ é preciso que a função $g(x)$ atenda à condição

$$\frac{\|g(x)\|}{\|x\|} \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad x \rightarrow 0 \quad (2.3)$$

ou seja, $\|g(x)\|$ é pequeno em comparação a $\|x\|$, próximo à origem.

Definição 2.1. *Um sistema de equações diferenciais do tipo (2.2) satisfazendo (2.3) é chamado de **sistema quase linear**, na vizinhança do ponto crítico $\bar{x} = 0$.*

Exemplo 2.1. Considere

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_1 + x_2 + 2x_1x_2 \quad \frac{dx_2}{dt} = -4x_1 - x_2 + x_1^2 - x_2^2$$

Colocando o sistema dado na forma da equação (2.2), temos

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2x_1x_2 \\ x_1^2 - x_2^2 \end{bmatrix}. \quad (2.4)$$

Observe que o ponto $(x_1, x_2) = (0, 0)$ é ponto crítico do sistema dado e $\det(A) \neq 0$. Os outros pontos críticos do sistema (2.4) são: $(-1, 0)$, $(-1/3, -1)$, $(-2/3, -2)$. Logo, o ponto $\bar{x} = (0, 0)$ é ponto isolado. Vamos verificar então se

$$\frac{\|g(x_1, x_2)\|}{\|(x_1, x_2)\|} \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad (x_1, x_2) \rightarrow (0, 0), \quad \text{onde} \quad g(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} g_1(x_1, x_2) \\ g_2(x_1, x_2) \end{bmatrix}.$$

Agora,

$g_1(x_1, x_2) = 2x_1x_2$ e $\|2x_1x_2\| \rightarrow 0$ quando $(x_1, x_2) \rightarrow (0, 0)$ e

$g_2(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$ e $\|x_1^2 - x_2^2\| \rightarrow 0$ quando $(x_1, x_2) \rightarrow (0, 0)$.

Temos então que o sistema atende as condições e portanto é um sistema quase linear na vizinhança do ponto crítico $(0, 0)$.

A seguir, apresentaremos uma condição suficiente para um sistema não linear ser quase linear no caso bidimensional. Podemos escrever o sistema da equação (2.1) na forma,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = F(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = G(x_1, x_2) \end{cases} \quad (2.5)$$

Teorema 2.1. *Um sistema do tipo (2.5) será quase linear em uma vizinhança U de um ponto crítico \bar{x} sempre que as funções $F(x_1, x_2)$ e $G(x_1, x_2)$ forem duas vezes diferenciáveis e de classe C^1 .*

Demonstração. Como F e G são de classe C^1 , usando a expansão de Taylor em torno do ponto $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ temos, para $(x_1, x_2) \in U$,

$F(x_1, x_2) = F(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + F_{x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)(x_1 - \bar{x}_1) + F_{x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)(x_2 - \bar{x}_2) + \zeta_1(x_1, x_2)$ e
 $G(x_1, x_2) = G(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + G_{x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)(x_1 - \bar{x}_1) + G_{x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)(x_2 - \bar{x}_2) + \zeta_2(x_1, x_2)$
 onde,

$\zeta_1(x_1, x_2)/[(x_1 - \bar{x}_1)^2 + (x_2 - \bar{x}_2)^2]^{1/2} \rightarrow 0$ quando $(x_1, x_2) \rightarrow (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$; analogamente para ζ_2 .

Como

$F(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = G(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = 0$ e $dx_1/dt = d(x_1 - \bar{x}_1)/dt$ e $dx_2/dt = d(x_2 - \bar{x}_2)/dt$,

o sistema (2.2) pode ser escrito como

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 - \bar{x}_1 \\ x_2 - \bar{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) & F_{x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \\ G_{x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) & G_{x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - \bar{x}_1 \\ x_2 - \bar{x}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \zeta_1(x_1, x_2) \\ \zeta_2(x_1, x_2) \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

ou ainda,

$$\frac{du}{dt} = \frac{df}{dt}(\bar{x}) \cdot u + \zeta(x),$$

onde $u = [x_1 - \bar{x}_1 \quad x_2 - \bar{x}_2]^T$ e $\zeta(x) = [\zeta_1(x_1, x_2) \quad \zeta_2(x_1, x_2)]^T$.

Assim, o sistema (2.5) satisfaz a condição (2.3). \square

Esse teorema apresenta dois resultados importantes:

- (i) Tendo as condições do teorema 2.1 atendidas, não é necessário usarmos a definição para mostrar que um sistema é quase linear;
- (ii) O sistema linear que melhor aproxima o sistema não-linear, em uma vizinhança do ponto crítico (\bar{x}_1, \bar{x}_2) , é dado pela parte linear do sistema (2.5). E com isso, nos fornece um método simples de determinar o sistema linear correspondente a um sistema não-linear, na vizinhança de um ponto crítico (\bar{x}_1, \bar{x}_2) , que é a equação

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) & F_{x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \\ G_{x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) & G_{x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

com $u_1 = (x_1 - \bar{x}_1)$ e $u_2 = (x_2 - \bar{x}_2)$. A matriz $A = Df(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ é chamada **Matriz Jacobiana** do sistema (2.5) calculada em (\bar{x}_1, \bar{x}_2) .

Exemplo 2.2. Mostremos que o sistema não-linear abaixo é quase linear em todo ponto crítico e vamos determinar o sistema linear correspondente a cada um dos pontos críticos.

$$\frac{dx_1}{dt} = (1 + x_1) \operatorname{sen}(x_2) \quad \frac{dx_2}{dt} = 1 - x_1 - \cos(x_2),$$

pois $F(x_1, x_2) = (1 + x_1) \operatorname{sen}(x_2)$ e $G(x_1, x_2) = 1 - x_1 - \cos(x_2)$ são funções diferenciáveis assim como suas derivadas parciais de primeira ordem,

$F_{x_1}(x_1, x_2) = \operatorname{sen}(x_2)$, $F_{x_2}(x_1, x_2) = (1 + x_1) \cos(x_2)$, $G_{x_1}(x_1, x_2) = -1$ $G_{x_2}(x_1, x_2) = \operatorname{sen}(x_2)$.

$$\begin{cases} (1 + x_1) \operatorname{sen}(x_2) = 0 \\ 1 - x_1 - \cos(x_2) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \operatorname{sen}(x_2) + x \operatorname{sen}(x_2) = 0 & (1) \\ 1 - \cos(x_2) = x & (2) \end{cases}$$

Substituindo a equação (2) em (1) temos,

$$\operatorname{sen}(x_2) + (1 - \cos(x_2)) \operatorname{sen}(x_2) = 0 \implies$$

$$\operatorname{sen}(x_2) + \operatorname{sen}(x_2) - \cos(x_2) \operatorname{sen}(x_2) = 0 \implies$$

$$2 \operatorname{sen}(x_2) - \cos(x_2) \operatorname{sen}(x_2) = 0 \implies$$

$$\operatorname{sen}(x_2)(2 - \cos(x_2)) = 0 \implies \operatorname{sen}(x_2) = 0 \text{ e } \cos(x_2) = 2 \implies$$

$\operatorname{sen}(x_2) = 0 \implies x_2 = k\pi, k \in \mathbb{Z}^+$. Pensando no sentido anti-horário, vem:

$$x_2 = k\pi \implies x_1 = 1 - \cos k\pi \begin{cases} \nearrow \text{ Se } k \text{ par, } k = 2m \rightarrow x_1 = 0 \\ \searrow \text{ Se } k \text{ ímpar, } k = 2m + 1 \rightarrow x_1 = 2 \end{cases}$$

Logo os pontos críticos são:

$$P_1 = (0, 2m\pi), m = 0, 1, 2, \dots$$

$$P_2 = (0, (2m + 1)\pi) m = 0, 1, 2, \dots$$

Assim, o sistema linear correspondente a cada tipo de ponto crítico é respectivamente:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 - 2m\pi \end{pmatrix}, m = 0, 1, 2, \dots \text{ e}$$

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - 2 \\ x_2 - (2m + 1)\pi \end{pmatrix}, m = 0, 1, 2, \dots$$

Vimos até aqui que o sistema linear é uma boa aproximação para o sistema não-linear (quase linear) numa vizinhança do ponto de equilíbrio. Agora vamos ver como se relacionam as trajetórias e a estabilidade do sistema quase linear e o linear correspondente. O teorema a seguir nos apresenta esse resultado.

Teorema 2.2. *Linearização: Seja $\bar{x} = 0$ um ponto crítico do sistema quase linear (2.5) e do sistema linear (2.7) correspondente. Então:*

1. *Se \bar{x} é um ponto assintoticamente estável do sistema linear correspondente, então \bar{x} é um ponto assintoticamente estável do sistema quase linear;*
2. *Se \bar{x} é um ponto instável do sistema linear correspondente, então \bar{x} é um ponto instável do sistema (2.5).*

Demonstração. (1.) Inicialmente vamos fazer uma mudança de variável conveniente $y(t) = x(t) - \bar{x}(t)$, de modo que o ponto de equilíbrio \bar{x} de $\dot{x} = f(x)$ corresponda ao ponto de equilíbrio $y = (0, 0)$ do sistema

$$\dot{y} = f(y(t) + \bar{x}). \quad (2.8)$$

Como o sistema (2.5) é quase linear, temos que $f(x)$ é de classe C^1 . Assim, aplicando a expansão de Taylor na função $f(y(t) + \bar{x})$ em torno do ponto \bar{x} obtemos:

$$f(y(t) + \bar{x}) = f(\bar{x}) + \frac{d}{dt}f(\bar{x})y + g(y) \quad (2.9)$$

onde $g(y)$ satisfaz

$$g(0, 0) = 0 \text{ e } \frac{d}{dt}g(0, 0) = 0. \quad (2.10)$$

Como $f(\bar{x}) = 0$, a equação (2.8) pode ser reescrita como

$$\dot{y} = \frac{d}{dt}f(\bar{x})y + g(y). \quad (2.11)$$

Vamos mostrar que a solução nula, $y(t) = 0$ da equação (2.11) é assintoticamente estável.

Note que, do fato do sistema (2.8) ser quase linear e do Teorema do Valor Médio temos que, para algum $m > 0$, existe um $\varepsilon > 0$ tal que

$$|g(y)| \leq m|y| \text{ se } |y| < \varepsilon. \quad (2.12)$$

Retornando à equação (2.11), suponha que $y(t)$ é uma solução satisfazendo a condição inicial $y(0, 0) = y^0$. Se olharmos para $g(y(t))$ como uma função de t então, usando a fórmula da Variação das Constantes (ver Apêndice C) temos:

$$y(t) = e^{At}y^0(t) + \int_0^t e^{A(t-s)}g(y(s))ds. \quad (2.13)$$

Vamos usar a equação (2.12) para estimar $|y(t)|$ em termos de $|y^0|$.

Suponha que as constantes k e α são dadas como no teorema 1.2, $m > 0$ tal que $mk < \alpha$ e $B_\varepsilon(0, 0) = \{y \in \mathbb{R}^2; |y| \leq \varepsilon\}$ tal que a equação (2.12) é satisfeita. Segue do teorema 1.2 que

$$|y(t)| \leq ke^{-\alpha t}|y^0(t)| + \int_0^t ke^{-\alpha(t-s)}m|y(s)|ds. \quad (2.14)$$

com $|y(s)| < \varepsilon$ e $0 \leq s \leq t$.

Multiplicando ambos os lados da desigualdade (2.14) por $e^{\alpha t}$, vem:

$$e^{\alpha t}|y(t)| \leq k|y^0(t)| + \int_0^t kme^{\alpha s}m|y(s)|ds. \quad (2.15)$$

Aplicando a desigualdade de Gronwall (ver Apêndice D) em (2.15), obtemos:

$$e^{\alpha t}|y(t)| \leq k|y^0(t)|e^{kmt} \quad (2.16)$$

Multiplicando ambos os lados da desigualdade (2.16) por $e^{-\alpha t}$ segue

$$|y(t)| \leq k|y^0(t)|e^{-(\alpha-km)t}, \text{ para } |y(t)| \leq \varepsilon. \quad (2.17)$$

Para concluir a demonstração, escolha $\delta > 0$ tal que $k\delta < \varepsilon$. Assim, $|y(t)| < \varepsilon$ sempre que $\alpha - km > 0$, o que prova a estabilidade de $y(t)$. Ainda pela equação (2.17), concluímos que $|y(t)| \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow \infty$. Logo, o ponto de equilíbrio $y = (0, 0)$ é assintoticamente estável.

(2.) Ver Hale [6]. □

Este teorema nos mostra que podemos estudar a estabilidade de um ponto crítico de um sistema quase linear através de um estudo da estabilidade do sistema linear correspondente. Em apenas uma situação a estabilidade de um ponto crítico é indeterminada, que é quando temos um centro (isso ocorre quando temos autovalores imaginários puros). Para as outras situações de autovalores, a estabilidade de um ponto crítico em relação aos dois sistemas são as mesmas. Já, em relação a classificação do ponto crítico, observamos alterações em dois casos: quando os autovalores são imaginários puros e quando são reais e iguais.

O exemplo a seguir nos mostra a variação da estabilidade de sistema quase linear quando os autovalores do sistema linear correspondente são imaginários puros.

Exemplo 2.3. Vamos estudar a estabilidade próximo ao ponto $(0, 0)$ dos sistemas abaixo.

$$(i) \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{cases} \quad (ii) \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{cases}$$

Observe que $(0, 0)$ é ponto crítico de cada um dos sistemas acima. De fato, Sistema (i)

$$\begin{cases} x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2) = 0 \\ -x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_2^2 + x_1x_2(x_1^2 + x_2^2) = 0 \\ x_1^2 - x_1x_2(x_1^2 + x_2^2) = 0 \end{cases}$$

Somando as equações obtemos, $x_1^2 + x_2^2 = 0 \implies x_1 = x_2 = 0$

Logo $\bar{x} = (0, 0)$ é ponto crítico do sistema (i).

Sistema (ii)

$$\begin{cases} x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) = 0 \\ -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x_2^2 - x_1x_2(x_1^2 + x_2^2) = 0 \\ x_1^2 + x_1x_2(x_1^2 + x_2^2) = 0 \end{cases}$$

Somando as equações obtemos, $x_1^2 + x_2^2 = 0 \implies x_1 = x_2 = 0$

Logo $\bar{x} = (0, 0)$ é ponto crítico do sistema (ii).

Note que cada um dos sistemas dado é quase linear. Usando o teorema (2.1) temos: sistema (i) \Rightarrow As funções $F(x_1, x_2) = x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2)$ e $G(x_1, x_2) = -x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2)$ são funções polinomiais e portanto de classe C^2 . Logo, o sistema é quase linear na vizinhança de \bar{x} .

Com os mesmos argumentos, concluímos que o sistema (ii) também é quase linear.

Para estudarmos a estabilidade de \bar{x} , fazemos inicialmente,

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2, \quad r > 0, \quad r \frac{dr}{dt} = x_1 \frac{dx_1}{dt} + x_2 \frac{dx_2}{dt} \quad (2.18)$$

Sistema (i)

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 \frac{dx_1}{dt} = x_1 x_2 + x_1^2(x_1^2 + x_2^2) \\ x_2 \frac{dx_2}{dt} = -x_1 x_2 + x_2^2(x_1^2 + x_2^2) \end{cases}$$

Somando as equações,

$$x_1 \frac{dx_1}{dt} + x_2 \frac{dx_2}{dt} = (x_1^2 + x_2^2)^2 \Rightarrow r \frac{dr}{dt} = r^4 \Rightarrow \frac{dr}{dt} = r^3.$$

Resolvendo a EDO, temos

$$r^{-3} dr = dt \Rightarrow \frac{r^{-2}}{-2} = t + c \Rightarrow \frac{1}{r^2} = -2t + k \Rightarrow r^2 = \frac{1}{-2t + k} \Rightarrow r = \sqrt{\frac{1}{-2t + k}}$$

Para o PVI, $t = 0$ e $r = r_0 > 0$, vem $r_0 = \frac{1}{\sqrt{k}}$, $k > 0 \Rightarrow k = \frac{1}{r_0^2}$.

Logo,

$$r(t) = \frac{1}{\sqrt{-2t + \frac{1}{r_0^2}}}, \quad \text{onde } -2t + \frac{1}{r_0^2} > 0 \Rightarrow t < \frac{1}{2r_0^2}.$$

Assim, quando $t \rightarrow \frac{1}{2r_0^2}$, $r(t) \rightarrow \infty$. Logo, $r(t)$ torna-se ilimitada na vizinhança de $(0, 0)$.

Portanto, \bar{x} é instável.

Sistema (ii)

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 \frac{dx_1}{dt} = x_1 x_2 - x_1^2(x_1^2 + x_2^2) \\ x_2 \frac{dx_2}{dt} = -x_1 x_2 - x_2^2(x_1^2 + x_2^2) \end{cases}$$

Somando as equações,

$$x_1 \frac{dx_1}{dt} + x_2 \frac{dx_2}{dt} = (x_1^2 + x_2^2)(-x_1^2 - x_2^2) \Rightarrow r \frac{dr}{dt} = r^2(-r^2) \Rightarrow \frac{dr}{dt} = -r^3.$$

Como $r > 0$ temos que $\frac{dr}{dt} < 0$. Resolvendo a EDO, temos

$$r^{-3}dr = -dt \Rightarrow \frac{-r^{-2}}{-2} = -t + c \Rightarrow \frac{1}{r^2} = 2t + k \Rightarrow r = \sqrt{\frac{1}{2t + k}}, \quad t > \frac{-k}{2}.$$

Para o PVI, $t = 0$ e $r = r_0 > 0$, vem

$$r_0 = \frac{1}{\sqrt{k}}, \quad k > 0 \Rightarrow k = \frac{1}{r_0^2}.$$

Logo, $r(t) = \frac{1}{\sqrt{2t + \frac{1}{r_0^2}}}$ e quando $t \rightarrow \infty$, $r(t) \rightarrow 0$.

Portanto, \bar{x} é assintoticamente estável para o sistema (ii).

2.2 Teoria de Estabilidade segundo Lyapunov

O segundo método de Lyapunov¹ ou método direto, como também é conhecido, por não necessitar conhecer a solução do sistema de EDO, é utilizado para tirarmos conclusões a respeito da estabilidade ou instabilidade de um ponto crítico do sistema de EDO's por meio de uma função auxiliar apropriada, chamada **função de Lyapunov**.

As funções de Lyapunov são, de certa forma, motivadas pelo conceito de energia para sistemas não conservativos, onde a energia não é preservada pela trajetória, mas assume um comportamento monótono, decrescente, se o processo for dissipativo, e crescente, se houver absorção de energia.

Este método também pode ser aplicado no estudo de sistemas de equações que não são quase lineares. Para o estudo dessa outra teoria, alguns conceitos são essenciais.

Vamos considerar Ω um aberto de \mathbb{R}^2 contendo a origem e $F(0, 0) = 0$ e $G(0, 0) = 0$, para que a função nula seja solução do sistema autônomo

$$\dot{x} = f(x), \tag{2.19}$$

onde $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ e $f(x) = \begin{bmatrix} F(x_1, x_2) \\ G(x_1, x_2) \end{bmatrix}$.

Definição 2.2. Uma função $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 é dita:

(i) *semidefinida positiva (semidefinida negativa)* se $V(x_1, x_2) \geq 0$ ($V(x_1, x_2) \leq 0$), $\forall (x_1, x_2) \in \Omega$;

¹Alexander M. Lyapunov (1857-1918) formou-se em matemática na universidade de São Petersburgo em 1880. No ano de 1884, Lyapunov defendeu sua Dissertação de Mestrado com o título “On the stability of ellipsoidal forms of equilibrium of rotating fluids” (Sobre a estabilidade de Formas Elipsoidais de Equilíbrio de Fluidos Rotativos) tema sugerido por seu professor Chebyshev. Em 1892, Lyapunov defendeu sua Tese de Doutorado intitulada “General Problem of Stability of Motion” (Problema Geral de Estabilidade do Movimento) neste trabalho está presente o seu segundo método. Lyapunov é conhecido pelo desenvolvimento da teoria de estabilidade de um sistema dinâmico e suas contribuições à física-matemática e teoria de probabilidade.

(ii) *definida positiva (definida negativa) se $V(0,0) = 0$ e $V(x_1, x_2) > 0$ ($V(x_1, x_2) < 0$), $\forall (x_1, x_2) \in \Omega \setminus \{(0,0)\}$.*

Exemplo 2.4. A função $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ é definida positiva pois $x_1^2 + x_2^2 = 0 \iff (x_1, x_2) = (0,0)$ e $x_1^2 + x_2^2 > 0 \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, (x_1, x_2) \neq (0,0)$.

Já a função $V(x_1, x_2) = (x_1 + x_2)^2$ é semidefinida positiva pois $V(x_1, x_2) = 0$ na reta $x_2 = -x_1$ e $V(x_1, x_2) > 0 \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, (x_1, x_2) \neq (x_1, -x_1)$.

A função $V(x_1, x_2) = -x_1^2$ é semidefinida negativa uma vez que $V(x_1, x_2) \leq 0 \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Note que $V(x_1, x_2) = 0 \forall (x_1, x_2) = (0, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

O método de Lyapunov para análise de estabilidade de um ponto de equilíbrio é baseado na análise do comportamento da função V ao longo das soluções do sistema. Assim, se $\varphi(t) = (x_1(t), x_2(t))$ é uma solução do sistema (2.19) então, usando a Regra da Cadeia para derivada temos,

$$\dot{V}(\varphi(t)) = \frac{\partial V}{\partial x_1}(\varphi(t))\dot{x}_1(t) + \frac{\partial V}{\partial x_2}(\varphi(t))\dot{x}_2(t)$$

ou ainda,

$$\dot{V}(\varphi(t)) = \nabla V(\varphi(t)) \cdot f(\varphi(t)) \quad (2.20)$$

onde $f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} F(x_1, x_2) \\ G(x_1, x_2) \end{pmatrix}$, ou seja, \dot{V} é o produto interno do gradiente de V e $f(x_1, x_2)$.

Vejamos as possibilidade de estabilidade para $\bar{x} = (0,0)$

Teorema 2.3. *Lyapunov: Seja $\bar{x} = (0,0)$ um ponto crítico isolado do sistema (2.19) em Ω e seja V de classe C^1 uma função definida positiva em Ω .*

(i) *Se $\dot{V}(x_1, x_2) \leq 0$, $\forall (x_1, x_2) \in \Omega \setminus \{(0,0)\}$, então $(0,0)$ é estável;*

(ii) *Se $\dot{V}(x_1, x_2) < 0$, $\forall (x_1, x_2) \in \Omega \setminus \{(0,0)\}$, então $(0,0)$ é assintoticamente estável;*

(iii) *Se $\dot{V}(x_1, x_2) > 0$, $\forall (x_1, x_2) \in \Omega \setminus \{(0,0)\}$, então $(0,0)$ é instável.*

Demonstração. (i) Seja V uma função definida positiva. Tome $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno de modo que $B = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; \|(x_1, x_2)\| < \varepsilon\} \subset \Omega$ e seja $k = \min\{V(x_1, x_2); \|(x_1, x_2)\| = \varepsilon\}$, que é positivo pois V é positiva definida. Pela continuidade de V , existe δ com $0 < \delta < \varepsilon$ tal que $B_\delta(\bar{x}) \subset B$ e $V(x_1, x_2) < k$, $\forall (x_1, x_2) \in B_\delta(\bar{x})$. Vamos mostrar que a solução constante $x(t) = \bar{x}$ iniciada na bola de raio δ são estáveis, isto é,

$$\|\varphi(t_0) - \bar{x}\| < \delta \implies \|\varphi(t) - \bar{x}\| < \varepsilon, \forall t > 0. \quad (2.21)$$

Seja $\bar{t} = \min\{s \in (0, t]; \|\varphi(s) - \bar{x}\| \geq \varepsilon\}$, assim temos $V(x(\bar{t})) \geq k$. Por hipótese $\dot{V} \leq 0$, ou seja, V é não crescente ao longo das soluções, logo, $V(x(\bar{t})) \leq V(x(t_0)) \leq k \implies V(x(\bar{t})) < k$, o que é uma contradição. Assim, o ponto \bar{x} é estável.

Os outros itens podem ser encontrados em [6]. □

Definição 2.3. Uma função V definida positiva em um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ contendo a origem é dita função de Lyapunov para o sistema (2.19) se $\dot{V} \leq 0$ para todo $x \in \Omega \setminus (0,0)$. Quando $\dot{V} < 0$ para todo $x \in \Omega \setminus (0,0)$, a função V é chamada função de Lyapunov estrita.

As definições e o teorema apresentados para sistemas de EDO's de ordem 2 são apenas uma particularização dos resultados gerais para sistemas de ordem n visto que, em nosso estudo nos restringimos ao caso 2×2 para realizarmos um estudo geométrico.

Os teoremas a seguir são utilizados na demonstração do teorema de linearização via função de Lyapunov que apresentaremos ainda neste capítulo.

Teorema 2.4. Suponha que a origem seja um ponto crítico isolado do sistema autônomo (2.19). Seja V uma função de classe C^1 . Se existe um domínio limitado D_k , k constante, contendo a origem, onde $V(x_1, x_2) < k$, V é definida positiva e \dot{V} é definida negativa, então toda solução do sistema (2.19) que começa em um ponto em D_k tende à origem quando t tende à ∞ .

Demonstração. A demonstração pode ser vista em Boyce [4]. □

Ao utilizar o segundo método de Lyapunov para o estudo de estabilidade de pontos críticos nos deparamos com o problema de determinar uma função de Lyapunov. Até o momento não se conhece uma forma para isso, no entanto algumas funções são tidas como fortes candidatas a exercerem o papel de função de Lyapunov. O teorema a seguir nos mostra uma família destas funções.

Teorema 2.5. A função $V : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$V(x_1, x_2) = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 \quad (2.22)$$

é definida positiva se, e somente se,

$$a > 0 \quad e \quad 4ac - b^2 > 0 \quad (2.23)$$

e é definida negativa se, e somente se

$$a < 0 \quad e \quad 4ac - b^2 > 0. \quad (2.24)$$

Demonstração. De fato,

$$\begin{aligned}
V(x_1, x_2) &= ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 \\
&= ax_1^2 + bx_1x_2 + \frac{b^2}{4a}x_2^2 + cx_2^2 - \frac{b^2}{4a} \\
&= \left(ax_1^2 + bx_1x_2 + \frac{b^2}{4a}x_2^2\right) + x_2^2\left(c - \frac{b^2}{4a}\right) \\
&= a\left(x_1 + \frac{bx_2}{2a}\right)^2 + x_2^2\left(\frac{4ac - b^2}{4a}\right)
\end{aligned}$$

Se V é definida positiva então $V(0, 0) = 0$ e $V(x_1, x_2) > 0$, $\forall (x_1, x_2) \neq (0, 0) \in \Omega$, isto é,

$$a\left(x_1 + \frac{bx_2}{2a}\right)^2 + x_2^2\left(\frac{4ac - b^2}{4a}\right) > 0, \forall (x_1, x_2) \neq (0, 0) \in \Omega. \quad (2.25)$$

Como, $\left(x_1 + \frac{bx_2}{2a}\right)^2 \geq 0$ e $x_2^2 \geq 0 \forall (x_1, x_2) \neq (0, 0) \in \Omega$ então para termos (2.25) satisfeita devemos ter $a > 0$ e $4ac - b^2 > 0$.

Agora, se $a > 0$ e $4ac - b^2 > 0$ então $a\left(x_1 + \frac{bx_2}{2a}\right)^2 + x_2^2\left(\frac{4ac - b^2}{4a}\right) > 0$, $\forall (x_1, x_2) \neq (0, 0) \in \Omega$ e $V(0, 0) = 0$. Logo $V(x_1, x_2)$ é definida positiva em Ω .

Se V é definida negativa então $V(0, 0) = 0$ e $V(x_1, x_2) < 0$, $\forall (x_1, x_2) \neq (0, 0) \in \Omega$, ou seja,

$$a\left(x_1 + \frac{bx_2}{2a}\right)^2 + x_2^2\left(\frac{4ac - b^2}{4a}\right) < 0, \forall (x_1, x_2) \neq (0, 0) \in \Omega. \quad (2.26)$$

Como, $\left(x_1 + \frac{bx_2}{2a}\right)^2 \geq 0$ e $x_2^2 \geq 0 \forall (x_1, x_2) \neq (0, 0) \in \Omega$, então para termos $V(x_1, x_2) < 0$, devemos ter $a < 0$ e $4ac - b^2 > 0$.

Agora, se $a < 0$ e $4ac - b^2 > 0$ então $a\left(x_1 + \frac{bx_2}{2a}\right)^2 + x_2^2\left(\frac{4ac - b^2}{4a}\right) < 0$, $\forall (x_1, x_2) \neq (0, 0) \in \Omega$ e $V(0, 0) = 0$. Logo $V(x_1, x_2)$ é definida negativa em Ω . \square

Retomando o exemplo (2.3), vamos analisá-lo usando o método de Lyapunov. Vamos considerar a função $V : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, onde Ω é um aberto de \mathbb{R}^2 contendo a origem e V é definida por $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$. Claramente, V é definida positiva. Vamos então, calcular $\dot{V}(x_1, x_2)$.

No caso do sistema (i) temos,

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x, y) &= V_x \dot{x} + V_y \dot{y} \\
&= 2x_1[x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2)] + 2x_2[-x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2)] \\
&= 2x_1x_2 + 2x_1^2(x_1^2 + x_2^2) - 2x_1x_2 + 2x_2^2(x_1^2 + x_2^2) \\
&= 2(x_1^2 + x_2^2) \geq 0 \quad (\dot{V}(x_1, x_2) > 0 \forall (x_1, x_2) \in \Omega \setminus (0, 0) \text{ e } \dot{V}(0, 0) = 0)
\end{aligned}$$

Logo, \dot{V} é definida positiva, e portanto, pelo teorema de Lyapunov, o ponto crítico

$(0, 0)$ é instável.

Já para o sistema (ii) temos:

$$\begin{aligned}\dot{V}(x_1, x_2) &= V_{x_1}\dot{x}_1 + V_{x_2}\dot{x}_2 \\ &= 2x_1[x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2)] + 2x_2[-x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2)] \\ &= 2x_1x_2 - 2x_1^2(x_1^2 + x_2^2) - 2x_1x_2 - 2x_2^2(x_1^2 + x_2^2) \\ &= -2(x_1^2 + x_2^2) \neq 0 \quad (\dot{V}(x_1, x_2) < 0 \forall (x_1, x_2) \in \Omega \setminus (0, 0) \text{ e } \dot{V}(0, 0) = 0)\end{aligned}$$

Logo, \dot{V} é definida negativa, portanto pelo teorema de Lyapunov, o ponto crítico $(0, 0)$ é assintoticamente estável.

Dessa forma, nos casos onde os autovalores são imaginários puros, como é o caso do exemplo 2.3, o Método de Lyapunov pode ser útil para conclusão sobre a estabilidade do ponto de equilíbrio.

2.3 Teorema de Linearização via Função de Lyapunov

A seguir apresentaremos uma demonstração alternativa para o teorema (2.2) da linearização utilizando função de Lyapunov. Vamos considerar o sistema quase linear

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= ax_1 + bx_2 + F_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= cx_1 + dx_2 + G_1(x_1, x_2) \end{cases} \quad (2.27)$$

cujo sistema linear correspondente é

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= ax_1 + bx_2 \\ \dot{x}_2 &= cx_1 + dx_2 \end{cases} \quad (2.28)$$

Teorema 2.6. *Linearização: Seja $\bar{x} = 0$ um ponto crítico do sistema quase linear (2.27) e do sistema linear correspondente. Então:*

1. *Se \bar{x} é um ponto assintoticamente estável do sistema linear correspondente, então \bar{x} é um ponto assintoticamente estável do sistema quase linear;*
2. *Se \bar{x} é um ponto instável do sistema linear correspondente, então \bar{x} é um ponto instável do sistema (2.27).*

Demonstração. Mostremos inicialmente que se o ponto crítico $\bar{x} = 0$ é um ponto crítico assintoticamente estável do sistema (2.28) então ele o é do sistema (2.27).

De fato, como $\bar{x} = 0$ é um ponto crítico assintoticamente estável do sistema (2.28) temos, pelo teorema (1.1) que a matriz dos coeficientes do sistema (2.28) possui autovalores reais negativos ou com parte real negativa, ou seja,

$$a + d < 0 \text{ e } ad - bc > 0 \quad (2.29)$$

Vamos construir uma função de Lyapunov $V(x_1, x_2) = Ax_1^2 + Bx_1x_2 + Cx_2^2$ tal que V é definida positiva ($V(x_1, x_2) > 0$ e $V(0, 0) = 0$) e \dot{V} é definida negativa ($\dot{V}(x_1, x_2) < 0$ e $\dot{V}(0, 0) = 0$). Observe que $\dot{V}(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2$ é definida negativa. Mas, $\dot{V}(x_1, x_2)$ deve satisfazer $\dot{V}(x_1, x_2) = V_{x_1}\dot{x}_1 + V_{x_2}\dot{x}_2$. Assim,

$$\begin{aligned}\dot{V}(x_1, x_2) &= V_{x_1}\dot{x}_1 + V_{x_2}\dot{x}_2 \\ &= (2Ax_1 + Bx_2)(ax_1 + bx_2) + (Bx_1 + 2Cx_2)(cx_1 + dx_2) \\ &= (2aA + cB)x_1^2 + (bB + 2dC)x_2^2 + (2bA + aB + dB + 2cC)x_1x_2.\end{aligned}$$

Como queremos $\dot{V}(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_2^2$ segue
 $(2aA + cB)x_1^2 + (bB + 2dC)x_2^2 + (2bA + aB + dB + 2cC)x_1x_2 = -x_1^2 - x_2^2$.

Resolvendo o sistema encontramos,

$$A = -\frac{c^2 + d^2 + (ad - bc)}{2(a + d)(ad - bc)}, \quad B = \frac{bd + ac}{(a + d)(ad - bc)} \quad \text{e} \quad C = -\frac{a^2 + b^2 + (ad - bc)}{2(a + d)(ad - bc)}. \quad (2.30)$$

Fazendo $\Delta = (a + d)(ad - bc)$, reescrevemos, em notação mais simples, os valores A , B , C da equação (2.30)

$$A = -\frac{c^2 + d^2 + (ad - bc)}{2\Delta}, \quad B = \frac{bd + ac}{\Delta} \quad \text{e} \quad C = -\frac{a^2 + b^2 + (ad - bc)}{2\Delta}. \quad (2.31)$$

Vamos mostrar que $V(x_1, x_2) = Ax_1^2 + Bx_1x_2 + Cx_2^2$ é definida positiva, usando o teorema 2.5. Assim, precisamos mostrar que $A > 0$ e $4AC - B^2 > 0$.

Por (2.29) segue que $A > 0$. Agora,

$$\begin{aligned}4AC - B^2 &= 4 \left[-\frac{c^2 + d^2 + (ad - bc)}{2\Delta} \right] \left[-\frac{a^2 + b^2 + (ad - bc)}{2\Delta} \right] - \left[\frac{bd + ac}{\Delta} \right]^2 \\ &= \frac{[c^2 + d^2 + (ad - bc)][a^2 + b^2 + (ad - bc)]}{\Delta^2} - \frac{(bd + ac)^2}{\Delta^2} \\ &= \frac{2(a^2d^2 + c^2b^2 - 2abcd) + (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(ad - bc)}{\Delta^2} \\ &= \frac{2(ad - bc)^2 + (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(ad - bc)}{\Delta^2} > 0\end{aligned}$$

Vamos mostrar agora que a função de Lyapunov definida acima também é uma função de Lyapunov para o sistema quase linear (2.27).

Para isso, usaremos o teorema 2.4, ou seja, mostraremos que existe alguma região

contendo a origem na qual \dot{V} é definida negativa. Agora,

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x_1, x_2) &= (2Ax_1 + Bx_2)\dot{x}_1 + (Bx_1 + 2Cx_2)\dot{x}_2 \\
&= (2Ax_1 + Bx_2)(ax_1 + bx_2 + F_1) + (Bx_1 + 2Cx_2)(cx_1 + dx_2 + G_1) \\
&= (2Ax_1 + Bx_2)(ax_1 + bx_2) + (2Ax_1 + Bx_2)F_1 + (Bx_1 + 2Cx_2)(cx_1 + dx_2) + \\
&\quad + (Bx_1 + 2Cx_2)G_1 \\
&= -(x_1^2 + x_2^2) + (2Ax_1 + Bx_2)(F_1) + (Bx_1 + 2Cx_2)(G_1)
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Como o sistema (2.27) é quase linear temos que

$$\frac{\|F_1(x_1, x_2)\|}{r} \rightarrow 0 \text{ e } \frac{\|G_1(x_1, x_2)\|}{r} \rightarrow 0 \text{ quando, } r = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2} \rightarrow 0.$$

Isso significa que, dado $\varepsilon > 0$ existe uma bola aberta de raio R centrado na origem tal que, se $0 < r < R$ então

$$|F_1(x_1, x_2)| < \varepsilon r \text{ e } |G_1(x_1, x_2)| < \varepsilon r. \tag{2.33}$$

Tome

$$M = \max\{|2A|, |B|, |2C|\}. \tag{2.34}$$

Vamos mostrar que dado $\varepsilon > 0$, R pode ser escolhido de modo a ter $\dot{V} < 0$ para $r < R$.

Fazendo

$$\begin{cases} x_1 = r \cos(\theta) \\ x_2 = r \sin(\theta) \end{cases} \tag{2.35}$$

e substituindo em (2.32) vem,

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x_1, x_2) &= -r^2 + (2Ar \cos(\theta) + Br \sin(\theta))F_1(x_1, x_2) + (Br \cos(\theta) \\
&\quad + 2Cr \sin(\theta))G_1(x_1, x_2).
\end{aligned}$$

Note que,

$$\begin{aligned}
&r[(2A \cos(\theta) + B \sin(\theta))F_1 + (B \cos(\theta) + 2C \sin(\theta))G_1(x_1, x_2)] \leq \\
&|r[(2A \cos(\theta) + B \sin(\theta))F_1(x_1, x_2) + (B \cos(\theta) + 2C \sin(\theta))G_1(x_1, x_2)]| \leq \\
&|r[|(2A \cos(\theta) + B \sin(\theta))F_1(x_1, x_2)| + |(B \cos(\theta) + 2C \sin(\theta))G_1(x_1, x_2)|]| \leq \\
&|r\{ [|2A| \cos(\theta)| + |B| \sin(\theta)|]|F_1(x_1, x_2)| + [|B| \cos(\theta)| + |2C| \sin(\theta)|]|G_1(x_1, x_2)|\} \leq \\
&r[(M + M)|F_1(x_1, x_2)| + (M + M)|G_1(x_1, x_2)|] = 2rM[|F_1(x_1, x_2)| + |G_1(x_1, x_2)|]
\end{aligned}$$

Assim,

$$\dot{V} \leq -r^2 + 2rM[|F_1(x_1, x_2)| + |G_1(x_1, x_2)|]$$

Tomando $\varepsilon = \frac{1}{4M}$, por (2.33), $\exists R$ tal que $|F_1(x_1, x_2)| < \frac{r}{4M}$ e $|G_1(x_1, x_2)| < \frac{r}{4M}$.

Então, $\dot{V} < 0$. Logo, \dot{V} é definida negativa nessa região.

Portanto, pelo teorema de Lyapunov, temos que \bar{x} é um ponto crítico assintoticamente estável do sistema (2.27).

Vamos mostrar agora que se o ponto crítico $\bar{x} = 0$ é um ponto crítico instável do sistema (2.28) então ele o é do sistema (2.27).

Note inicialmente que se $a + d > 0$ e $ad - bc > 0$, então o ponto crítico $\bar{x} = 0$ é um ponto instável do sistema (2.27) pois a matriz A dos coeficientes tem autovalores dados por

$$\lambda = \frac{(a + d) \pm \sqrt{(-a - d)^2 - 4(ad - bc)}}{2} \quad (2.36)$$

ou seja, possui parte real positiva, caso λ seja complexo. Caso seja real, temos que o termo da raiz quadrada é menor do que o termo da primeira parcela o que resulta em um ponto instável.

Vamos construir uma função de Lyapunov $V(x_1, x_2)$ de modo que $\dot{V}(x_1, x_2)$ seja definida positiva, isto é, $\dot{V}(0, 0) = 0$ e $\dot{V}(x_1, x_2) > 0 \forall (x_1, x_2) \in \Omega \setminus \{(0, 0)\}$.

Seja $V(x_1, x_2) = Ax_1^2 + Bx_1x_2 + Cx_2^2$ tal que $\dot{V}(x, y) = x^2 + y^2$

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, y) &= V_x \dot{x} + V_y \dot{y} \\ &= (2Ax_1 + Bx_2)(ax_1 + bx_2) + (Bx_1 + 2Cx_2)(cx_1 + dx_2) \\ &= (2aA + cB)x_1^2 + (bB + 2dC)x_2^2 + (2bA + aB + dB + 2cC)x_1x_2. \end{aligned}$$

Como queremos $\dot{V}(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ segue

$$(2aA + cB)x_1^2 + (bB + 2dC)x_2^2 + (2bA + aB + dB + 2cC)x_1x_2 = x_1^2 + x_2^2.$$

Resolvendo o sistema encontramos,

$$A = \frac{c^2 + d^2 + (ad - bc)}{2(a + d)(ad - bc)}, \quad B = -\frac{bd + ac}{(a + d)(ad - bc)} \quad \text{e} \quad C = \frac{a^2 + b^2 + (ad - bc)}{2(a + d)(ad - bc)}. \quad (2.37)$$

Fazendo $\Delta = (a + d)(ad - bc)$, reescrevemos, em notação mais simples, os valores A, B, C da equação (2.37)

$$A = \frac{c^2 + d^2 + (ad - bc)}{2\Delta}, \quad B = -\frac{bd + ac}{\Delta} \quad \text{e} \quad C = \frac{a^2 + b^2 + (ad - bc)}{2\Delta}. \quad (2.38)$$

Vamos mostrar que $V(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2$, com A, B e C dados por (2.38) é definida positiva, isto é, $A > 0$ e $4AC - B^2 > 0$.

Note que,

$$A = \frac{c^2 + d^2 + (ad - bc)}{2(a + d)(ad - bc)} > 0, \quad \text{pois } a + d > 0 \text{ e } ad - bc > 0.$$

Agora

$$\begin{aligned}
4AC - B^2 &= 4 \left[\frac{c^2 + d^2 + (ad - bc)}{2\Delta} \right] \left[\frac{a^2 + b^2 + (ad - bc)}{2\Delta} \right] - \left[-\frac{bd + ac}{\Delta} \right]^2 \\
&= \frac{(c^2 + d^2 + (ad - bc))(a^2 + b^2 + (ad - bc))}{\Delta^2} - \frac{(bd + ac)^2}{\Delta^2} \\
&= \frac{2(a^2d^2 + c^2b^2 - 2abcd) + (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(ad - bc)}{\Delta^2} \\
&= \frac{2(ad - bc)^2 + (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(ad - bc)}{\Delta^2} > 0
\end{aligned}$$

Vamos mostrar que a função de Lyapunov acima definida também é uma função de Lyapunov para o sistema (2.27). Usando o teorema 2.3 devemos mostrar que \dot{V} é definida positiva.

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x_1, x_2) &= (2Ax_1 + Bx_2)\dot{x}_1 + (Bx_1 + 2Cx_2)\dot{x}_2 \\
&= (2Ax_1 + Bx_2)(ax_1 + bx_2 + F_1) + (Bx_1 + 2Cx_2)(cx_1 + dx_2 + G_1) \\
&= (2Ax_1 + Bx_2)(ax_1 + bx_2) + (2Ax_1 + Bx_2)F_1 + (Bx_1 + 2Cx_2)(cx_1 + dx_2) \\
&\quad + (Bx_1 + 2Cx_2)G_1 \\
&= (x_1^2 + x_2^2) + (2Ax_1 + Bx_2)(F_1) + (Bx_1 + 2Cx_2)(G_1) \tag{2.39}
\end{aligned}$$

Como o sistema (2.27) é quase linear temos que

$$\frac{\|F_1(x_1, x_2)\|}{r} \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \frac{\|G_1(x_1, x_2)\|}{r} \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad r = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2} \rightarrow 0$$

Isso significa que, dado $\varepsilon > 0$ existe uma bola aberta de raio R centrado na origem tal que, se $0 < r < R$ então

$$\|F_1(x_1, x_2)\| < \varepsilon r \quad \text{e} \quad \|G_1(x_1, x_2)\| < \varepsilon r. \tag{2.40}$$

Tomando

$$M = \max\{|2A|, |B|, |2C|\}, \tag{2.41}$$

vamos mostrar que dado $\varepsilon > 0$, R pode ser escolhido de modo a ter $\dot{V} > 0$ para $r < R$.

Fazendo

$$\begin{cases} x_1 = r \cos(\theta) \\ x_2 = r \sin(\theta) \end{cases} \tag{2.42}$$

e substituindo em (2.39) vem,

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x_1, x_2) &= r^2 + [2Ar \cos(\theta) + Br \sin(\theta)]F_1(x_1, x_2) + [Br \cos(\theta) + 2Cr \sin(\theta)]G_1(x_1, x_2) \\
&= r^2 + r\{[2A \cos(\theta) + B \sin(\theta)]F_1(x_1, x_2) + [B \cos(\theta) + 2C \sin(\theta)]G_1(x_1, x_2)\}
\end{aligned}$$

Observe que,

$$\begin{aligned}
& r\{ [2A \cos(\theta) + B \sin(\theta)]F_1(x_1, x_2) + [B \cos(\theta) + 2C \sin(\theta)]G_1(x_1, x_2) \} \leq \\
& |r\{ [2A \cos(\theta) + B \sin(\theta)]F_1(x_1, x_2) + [B \cos(\theta) + 2C \sin(\theta)]G_1(x_1, x_2) \}| = \\
& |r| \{ [2A \cos(\theta) + B \sin(\theta)]F_1(x_1, x_2) + [B \cos(\theta) + 2C \sin(\theta)]G_1(x_1, x_2) \} | \leq \\
& r\{ |[2A \cos(\theta) + B \sin(\theta)]F_1(x_1, x_2)| + |[B \cos(\theta) + 2C \sin(\theta)]G_1(x_1, x_2)| \} \leq \\
& r\{ [|2A \cos(\theta)| + |B \sin(\theta)|] |F_1(x_1, x_2)| + [|B \cos(\theta)| + |2C \sin(\theta)|] |G_1(x_1, x_2)| \} \leq \\
& r\{ [|2A| |\cos(\theta)| + |B| |\sin(\theta)|] |F_1(x_1, x_2)| + [|B| |\cos(\theta)| + |2C| |\sin(\theta)|] |G_1(x_1, x_2)| \} \leq \\
& 2Mr[|F_1(x_1, x_2)| + |G_1(x_1, x_2)|]
\end{aligned}$$

Tome $\varepsilon = \frac{1}{4M}$, e assim,

$$\begin{aligned}
& |r\{ [2A \cos(\theta) + B \sin(\theta)]F_1(x_1, x_2) + [B \cos(\theta) + 2C \sin(\theta)]G_1(x_1, x_2) \}| < r^2 \Rightarrow \\
& |r[(2A \cos(\theta) + B \sin(\theta))F_1(x_1, x_2) + (B \cos(\theta) + 2C \sin(\theta))G_1(x_1, x_2)]| > -r^2
\end{aligned}$$

Usando o fato de que $x \geq -|x|$ para todo número real, temos:

$$\dot{V}(x, y) = r^2 + [2Ar \cos(\theta) + Br \sin(\theta)]F_1(x, y) + [Br \cos(\theta) + 2Cr \sin(\theta)]G_1(x, y) > 0.$$

Logo, \dot{V} é definida positiva na região R.

Portanto, pelo teorema de Lyapunov concluímos que \bar{x} é um ponto crítico instável do sistema (2.27). \square

A demonstração do Teorema de Linearização via função de Lyapunov em geral não é apresentada nas referências bibliográficas. Podemos perceber que, a construção da função V durante a demonstração do teorema, usando a função de Lyapunov, pode ser útil para concluirmos sobre a estabilidade de um ponto de equilíbrio quando ele é um centro para o sistema linear associado.

No capítulo a seguir, utilizaremos os teoremas sobre estabilidade de pontos de equilíbrio para dois modelos clássicos de Dinâmica Populacional: presa-predador e competição entre espécies.

3 Os Modelos Presa-Predador e Competição entre Espécies – análise de estabilidade

Nos ecossistemas, a interação entre duas espécies distintas varia de acordo com o tipo dos efeitos que uma espécie causa sobre a outra espécie. De acordo com o tipo de interação podemos ter: (i) simbiose ou mutualismo, quando ambas espécies se beneficiam com a presença da outra; (ii) presa-predador, quando uma espécie (predador) se beneficia com a presença da outra (presa), enquanto que a segunda é afetada pela presença da primeira (predador); (iii) competição, caracterizada por ambas espécies serem afetadas com a presença da outra [7].

Neste capítulo apresentaremos dois modelos clássicos em Dinâmica Populacional, envolvendo as interações (ii) e (iii), apresentados inicialmente por **Lotka** e **Volterra**, por volta de 1925-1926, e mais tarde estudados por **Gause**, em 1934.

3.1 Presa-Predador

Este modelo trata de duas espécies dividindo um ambiente fechado, onde uma das espécies (presas) dispõe de alimento em abundância e a outra espécie (predador) se alimenta da primeira. Vale ressaltar que um modelo representado por apenas duas populações não descreve os complexos relacionamentos existentes na natureza mas, o estudo desses modelos simples é o primeiro passo para que possamos compreender os fenômenos mais complicados.

Denotaremos a população de presas por x e a população de predadores por y . Ambas populações variam com o tempo e seus crescimentos dependem de suas respectivas taxas de natalidade e mortalidade.

Suponhamos que, na ausência dos predadores, a população de presas cresça ilimitadamente e que os predadores, na ausência das presas, sejam extintos (por falta de alimento morrerão). Se a principal causa de mortalidade das presas for atribuída ao ataque dos predadores, então a taxa de mortalidade das presas será proporcional ao

encontro entre as duas populações, ou seja, ao produto xy . Admitindo que a taxa de natalidade dos predadores seja proporcional à quantidade de indivíduos sobreviventes e que essa quantidade de indivíduos sobreviventes seja proporcional à quantidade de alimento disponível (presas) podemos dizer então, que a taxa de natalidade efetiva dos predadores é proporcional ao produto das duas populações, xy .

Assim, as equações que regem o crescimento destas espécies são:

$$\begin{cases} \dot{x} = ax - \alpha xy \\ \dot{y} = -by + \beta xy \end{cases} \implies \begin{cases} \dot{x} = x(a - \alpha y) \\ \dot{y} = y(-b + \beta x) \end{cases} \quad (3.1)$$

onde a , α , b , β são constantes positivas, sendo:

- $a \rightarrow$ taxa de crescimento das presas;
- $b \rightarrow$ taxa de mortalidade dos predadores;
- α e $\beta \rightarrow$ as medidas do efeito da interação entre as duas espécies.

As equações (3.1) recebem o nome de *modelo Lotka-Volterra*, que as desenvolveram por volta de 1925.

Nosso objetivo aqui é analisar o comportamento qualitativo das soluções do sistema (3.1) para valores iniciais quaisquer positivos de x e y .

Observe que o sistema (3.1) é um sistema quase linear e portanto a análise qualitativa de suas soluções será feita por meio da análise das soluções do sistema linearizado correspondente.

Inicialmente vamos determinar os pontos críticos do sistema (3.1). Tais pontos críticos são as soluções das equações:

$$x(a - \alpha y) = 0 \quad \text{e} \quad y(-b + \beta x) = 0,$$

ou seja, $P_1 = (0, 0)$ e $P_2 = \left(\frac{b}{\beta}, \frac{a}{\alpha}\right)$.

Vamos agora analisar o sistema linear correspondente na vizinhança de cada ponto crítico.

$$J = \begin{pmatrix} a - \alpha y & -\alpha x \\ \beta y & -b + \beta x \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

(i) Para a vizinhança do ponto $P_1 = (0, 0)$, o sistema linear correspondente é

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

Os autovalores e autovetores do sistema (3.3) são:

- $\lambda_1 = a > 0 \implies \xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

• $\lambda_2 = -b < 0 \implies \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

A sua solução geral é dado por

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = c_1 e^{at} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 e^{-bt} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Logo, a origem é um ponto de sela e portanto instável para o sistema (3.3). Pelo teorema (2.2) temos que P_1 é também um ponto instável para o sistema (3.1).

(ii) Para a vizinhança do ponto $P_2 = (\frac{b}{\beta}, \frac{a}{\alpha})$ temos o seguinte sistema linear:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -b\frac{\alpha}{\beta} \\ a\frac{\beta}{\alpha} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \tag{3.4}$$

cujos autovalores são: $\lambda = \pm i\sqrt{ab}$.

Neste caso, o ponto crítico é um centro (estável) do sistema (3.4). Para obtermos a equação que define as trajetórias no plano uv faremos:

$$\frac{dv}{du} = \frac{-a\frac{\beta}{\alpha}u}{b\frac{\alpha}{\beta}v} \implies b\frac{\alpha}{\beta}v dv + a\frac{\beta}{\alpha}u du = 0 \implies b\frac{\alpha}{\beta}v^2 + a\frac{\beta}{\alpha}u^2 = k, \text{ onde } k > 0.$$

Logo, as trajetórias do sistema (3.4) são elipses.

Pelo teorema (2.2), quando o ponto crítico é um centro do sistema linear correspondente temos que a “estabilidade” desse ponto crítico para o sistema quase linear é indeterminada, podendo ser um centro ou uma espiral.

Mas, nesta situação, esta indeterminação pode ser resolvida encontrando as trajetórias do sistema (3.1). Para isso, vamos calcular dy/dx o que resulta na seguinte equação:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(-b + \beta x)}{x(a - \alpha y)} \tag{3.5}$$

A equação (3.5) pode ser resolvida usando o método de variáveis separáveis. Assim, obtemos:

$$dx \left(\frac{-b}{x} + \beta \right) = dy \left(\frac{a}{y} - \alpha \right) \implies \left(\frac{b}{x} - \beta \right) dx + \left(\frac{a}{y} - \alpha \right) dy = 0$$

$$b \ln x - \beta x + a \ln y - \alpha y = k \tag{3.6}$$

Podemos mostrar que o gráfico da função que satisfaz a equação (3.6) é uma curva fechada e portanto, o ponto crítico $(\frac{b}{\beta}, \frac{a}{\alpha})$ também é um centro para o sistema (3.1). Nas referências bibliográficas, essa propriedade em geral é ilustrada através do método geométrico de Volterra. Apresentaremos também, uma demonstração algébrica do fato.

1. Algébrico: Reescrevendo a equação (3.6) temos:

$$a \ln y - \alpha y = \ln c + \beta x - b \ln x \implies \ln y^a - \alpha y = \ln c + \beta x + \ln x^{-b}$$

$$y^a e^{-\alpha y} = c e^{\beta x} x^{-b}, \quad (3.7)$$

onde a constante c pode ser determinada em função das condições iniciais (x_0, y_0) e é dada por

$$c = x_0^b y_0^a e^{-\beta x_0} e^{-\alpha y_0}. \quad (3.8)$$

Inicialmente, precisamos garantir que a curva não possui auto intersecção, ou seja, é regular.

Seja $\gamma(t)$ a trajetória do sistema (3.1) no plano xy . Para $(x_0, y_0) \neq (\frac{b}{\beta}, \frac{a}{\alpha})$ e distinto de $(0, 0)$, temos

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) \quad \text{e} \quad \dot{\gamma}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) \neq (0, 0). \text{ Portanto, a curva } \gamma(t) \text{ é regular.}$$

Mostremos agora que a curva $\gamma(t)$ é fechada. Sejam $t_1 \neq t_2$ pontos quaisquer tais que

$$P_1 = \gamma(t_1) = (x(t_1), y(t_1))$$

$$P_2 = \gamma(t_2) = (x(t_2), y(t_2))$$

Usando (3.6) temos

$$\begin{cases} a \ln y(t_1) - \alpha y(t_1) + b \ln x(t_1) - \beta x(t_1) = k \\ a \ln y(t_2) - \alpha y(t_2) + b \ln x(t_2) - \beta x(t_2) = k \end{cases} \quad (3.9)$$

Assim, usando (3.7), temos que P_1 e P_2 são pontos da trajetória se, e somente se

$$e^{\alpha(y(t_2)-y(t_1))} \left(\frac{y(t_1)}{y(t_2)} \right)^a = e^{\beta(x(t_1)-x(t_2))} \left(\frac{x(t_2)}{x(t_1)} \right)^b. \quad (3.10)$$

Observe que $x(t_2) = x(t_1)$ e $y(t_2) = y(t_1)$ satisfaz a relação (3.10), ou seja, $\exists t_1, t_2, t_1 \neq t_2$ tal que $\gamma(t_1) = \gamma(t_2)$. Como a curva não tem auto intersecção, ela é fechada.

2. Geométrico: (Conforme consta em Bassanezi [3].) Faremos uma ilustração geométrica das curvas representadas pela equação (3.6), onde usaremos um método gráfico dado por Volterra, para traçarmos um esboço das trajetórias para a constante c , fixa.

Inicialmente introduzimos uma variável auxiliar z :

$$z = a \ln y - \alpha y \quad z = -b \ln(kx) + \beta x, \quad k = \left(\frac{1}{c} \right)^{\frac{1}{b}}. \quad (3.11)$$

Em seguida traçamos seus gráficos conforme a figura (3.1)

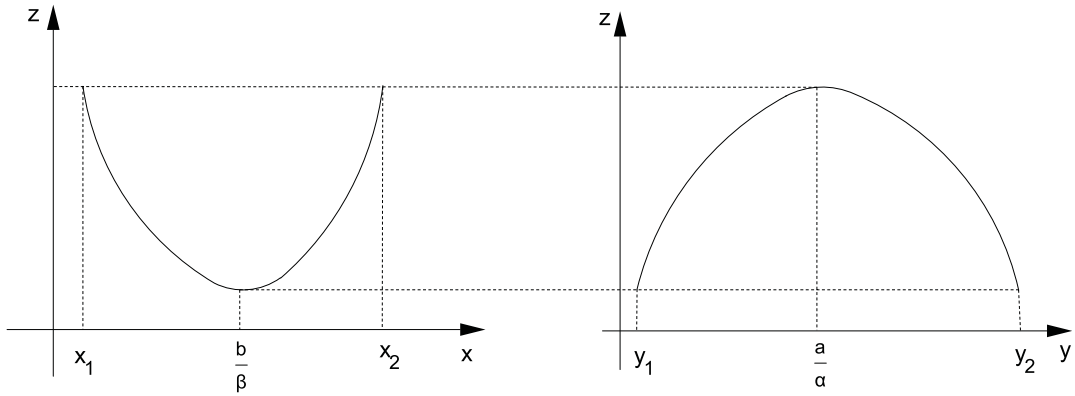


Figura 3.1: z em função de x e como função de y .

Plotando os dois gráficos em um único plano e fazendo as devidas identificações, construímos o gráfico no plano xy , como mostra a figura (3.2).

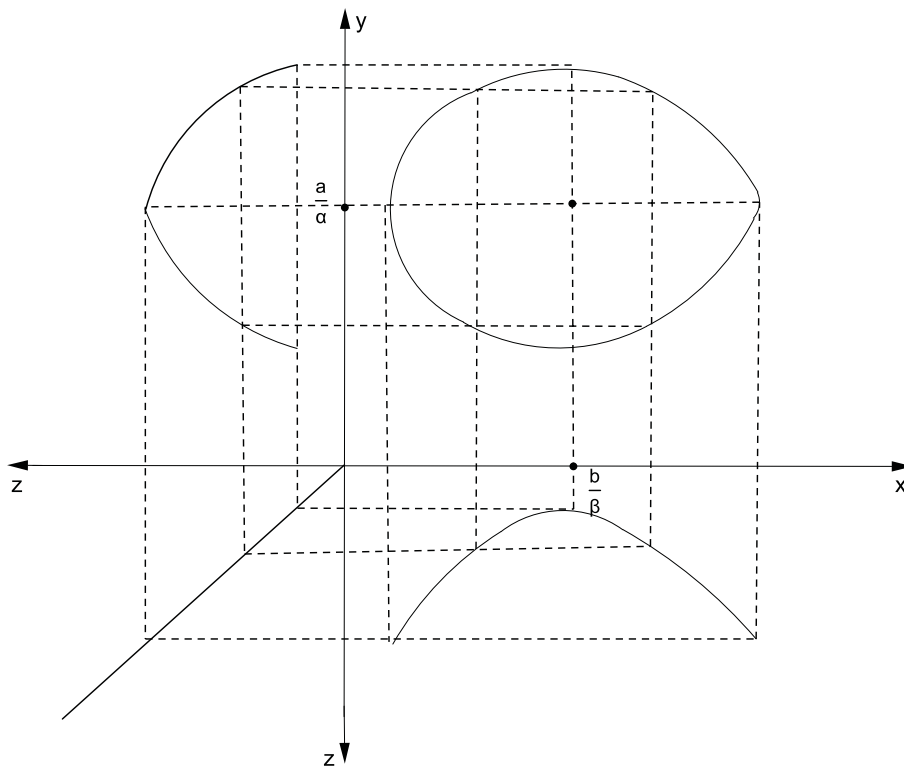


Figura 3.2: Construção das trajetórias no plano de fase xy .

Observe que:

$$\frac{dz}{dy} = \frac{a}{y} - \alpha \implies \frac{dz}{dy} = 0 \iff y = \frac{a}{\alpha}, \text{ e ainda } \frac{d^2z}{dy^2} = -\frac{a}{y^2} < 0.$$

Portanto para $y = \frac{a}{\alpha}$, z atinge o valor máximo $a \left(\ln \frac{a}{\alpha} - 1 \right)$.

Fazendo o mesmo para $\frac{dz}{dx}$ obtemos:

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{b}{x} + \beta \implies \frac{dz}{dx} = 0 \iff x = \frac{b}{\beta}, \text{ e ainda } \frac{d^2z}{dx^2} = \frac{b}{x^2} > 0.$$

Logo, para $x = \frac{b}{\beta}$, z atinge o valor mínimo, $b \left(1 - \ln \frac{cb}{\beta}\right)$. Desta forma, a população de x deve variar entre um valor mínimo x_1 e um valor máximo x_2 , soluções de

$$a \left(\ln \frac{a}{\alpha} - 1 \right) = -b \ln x - \beta x.$$

O mesmo ocorre com a população y , variando entre as duas soluções de

$$b \left(1 - \ln \frac{cb}{\beta} \right) = a \ln y - \alpha y.$$

Observe que os valores limitantes de ambas populações são dependentes de seus estágios iniciais, pois dependem da constante arbitrária c . Podemos analisar a variação cíclica das populações de presas e predadores usando o sistema linear (3.4), tendo em vista que este sistema é boa aproximação para o sistema não linear, tomadas condições iniciais próximas ao ponto crítico $\left(\frac{b}{\beta}, \frac{a}{\alpha}\right)$.

Vamos então escrever a solução analítica para o sistema (3.4) colocando-a na forma paramétrica, onde t é o parâmetro. Assim,

$$\begin{cases} \dot{u} = \frac{-b\alpha}{\beta}v \\ \dot{v} = \frac{a\beta}{\alpha}u \end{cases} \quad (3.12)$$

Derivando em relação a t ambos os membros das equações temos:

$$\begin{cases} \ddot{u} = \frac{-b\alpha}{\beta}\dot{v} \\ \ddot{v} = \frac{a\beta}{\alpha}\dot{u} \end{cases} \implies \begin{cases} \ddot{u} = \frac{-b\alpha}{\beta} \frac{a\beta}{\alpha} u \\ \ddot{v} = \frac{a\beta}{\alpha} \left(\frac{-b\alpha}{\beta} \right) v \end{cases} \implies \begin{cases} \ddot{u} + abu = 0 \\ \ddot{v} + abv = 0 \end{cases} \quad (3.13)$$

Olhando para a primeira equação de (3.13) temos que sua solução é:

$$u(t) = c_1 \cos \sqrt{ab} t + c_2 \sen \sqrt{ab} t. \quad (3.14)$$

Agora, existem constantes k e θ tais que, para $c_1 \neq 0$, a equação (3.14) possa ser escrita como:

$$u(t) = \frac{kb}{\beta} \cos(\sqrt{ab} t + \theta) \quad (3.15)$$

onde,

$$c_1 = \frac{kb}{\beta} \cos \theta \quad \text{e} \quad c_2 = \frac{-kb}{\beta} \sin \theta \quad \implies \quad k = \frac{\beta c_1}{b \cos \theta} \quad \text{e} \quad k = \frac{-\beta c_2}{b \sin \theta} \quad \implies$$

$$\frac{\beta c_1}{b \cos \theta} = \frac{-\beta c_2}{b \sin \theta} \quad \implies \quad \frac{c_1}{\cos \theta} = \frac{-c_2}{\sin \theta} \quad \implies \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{-c_2}{c_1} \quad \implies \quad \theta = \operatorname{arctg} \left(\frac{-c_2}{c_1} \right).$$

Como $\dot{u} = \frac{-b\alpha}{\beta}v$ obtemos v , usando a equação (3.15).

$$v(t) = k \frac{a}{\alpha} \sqrt{\frac{b}{a}} \operatorname{sen}(\sqrt{ab} t + \theta). \quad (3.16)$$

Observe que as constantes k , θ são determinadas a partir das condições iniciais.

As equações (3.15) e (3.16) formam uma solução na forma paramétrica para o sistema (3.4) nas variáveis u e v .

Lembremos a mudança de variáveis que fizemos anteriormente:

$$\begin{cases} u = x - \frac{b}{\beta} \\ v = y - \frac{a}{\alpha} \end{cases} \implies \begin{cases} x = u + \frac{b}{\beta} \\ y = v + \frac{a}{\alpha} \end{cases} \quad (3.17)$$

Reescrevendo a solução para as variáveis iniciais x e y , temos:

$$\begin{cases} x = \frac{b}{\beta} + k \frac{b}{\beta} \cos(\sqrt{ab} t + \theta) \\ y = \frac{a}{\alpha} + k \frac{a}{\alpha} \sqrt{\frac{b}{a}} \operatorname{sen}(\sqrt{ab} t + \theta) \end{cases} \quad (3.18)$$

Olhando para a solução analítica (3.18) podemos concluir que, para pequenas variações em torno do ponto crítico $\left(\frac{b}{\beta}, \frac{a}{\alpha}\right)$ tem-se:

- O tamanho das populações de presas e predadores variam periodicamente com período $T = \frac{2\pi}{\sqrt{ab}}$, independente das condições iniciais;
- As amplitudes das oscilações são de $k \frac{b}{\beta}$ para presas e $k \frac{a}{\alpha} \sqrt{\frac{b}{a}}$ para os predadores, valores que dependem das condições iniciais e dos parâmetros do problema;
- Para $y < \frac{a}{\alpha}$ temos $\frac{dx}{dt} > 0$, o número de presas aumenta devido ao baixo número de predadores. Já para $y > \frac{a}{\alpha}$ temos $\frac{dx}{dt} < 0$, ou seja, número de presas diminui quando o número de predadores é grande;
- Temos também que $\frac{dy}{dt} > 0$ se $x > \frac{a}{\alpha}$, pois com alimentação (presa) em grande

quantidade o número de predadores aumenta, enquanto que para $x < \frac{a}{\alpha}$ tem-se $\frac{dy}{dt} < 0$ já que com um número baixo de alimento (presa) o número de predadores diminui.

Os resultados que acabamos de apresentar são devidos a Volterra e foram desenvolvidos para explicar um fenômeno observado por D’Ancona, relativo à quantidade de peixes de diversas espécies capturados no Adriático durante e após a primeira Guerra Mundial. O fato observado foi que a quantidade de predadores havia aumentado durante o período da guerra. A explicação dada por Volterra foi com o argumento de que no período da guerra, houve uma diminuição na pesca e isso tinha que necessariamente beneficiar os predadores, o que fez com que a população média destes crescessem mais rapidamente que as populações médias das presas.

Informações adicionais para o modelo a respeito da defasagem das duas populações assim como as populações médias durante um período de tempo, podem ser encontradas em Bassanezi [3].

3.2 Competição entre Espécies

Considere duas populações da mesma espécie interagindo em algum ambiente fechado, competindo por um suprimento limitado de alimento e nenhuma se alimentando da outra. Por exemplo, duas espécies de peixes em um lago onde nenhuma é presa da outra mas ambas competem pela comida disponível. Denotemos por x e y as populações das duas espécies em um instante de tempo t . Vamos supor que, na ausência da outra, a população de cada espécie seja governada por uma equação **logística**. Então,

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a - bx) \\ \dot{y} = y(c - dy) \end{cases} \quad (3.19)$$

onde a , c são as taxas de crescimento das duas espécies e a/b e c/d são seus níveis de saturação. Mas, quando ambas espécies estão presentes, temos que cada uma afeta o suprimento de comida disponível para a outra. A expressão mais simples para reduzir a taxa de crescimento da espécie x devido à presença da espécie y é substituir o fator de crescimento $(a - bx)$ na primeira equação de (3.19) por $(a - bx - \alpha y)$, onde α é a medida de grau de interferência da espécie y sobre a espécie x . De modo análogo, substituindo $(c - dy)$ na segunda equação de (3.19) por $(c - dy - \beta x)$ obtemos o sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = x(a - bx - \alpha y) \\ \dot{y} = y(c - dy - \beta x) \end{cases} \quad (3.20)$$

Buscar uma solução onde a competição entre duas espécies leva a um estado de equilíbrio de coexistência que nem sempre é possível. Em alguns casos, a competição resulta

na extinção de uma das espécies. Para compreender como isso ocorre e aprender a prever qual situação prevalecerá vamos estudar os possíveis casos, dependendo da orientação das isóclinas de x e y , que são as retas onde \dot{x} e \dot{y} se anulam, respectivamente. Vamos denotar por r_1 e r_2 as isóclinas de x e y , respectivamente.

$$r_1 : a - bx - \alpha y = 0$$

$$r_2 : c - dy - \beta x = 0$$

Para obtermos os pontos críticos fazemos

$$\begin{aligned} x(a - bx - \alpha y) = 0 &\implies x = 0 \text{ ou } a - bx - \alpha y = 0 \\ y(c - dy - \beta x) = 0 &\implies y = 0 \text{ ou } c - dy - \beta x = 0 \end{aligned}$$

e assim, temos o seguinte:

$$P_1 = (0, 0), P_2 = (a/b, 0), P_3 = (0, c/d) \text{ e } P_4 = (\bar{x}, \bar{y}), \text{ onde } \bar{x} = \frac{ad - c\alpha}{bd - \alpha\beta} \text{ e } \bar{y} = \frac{cb - a\beta}{bd - \alpha\beta}, \text{ } bd - \alpha\beta \neq 0.$$

Do ponto de vista biológico, só nos interessam pontos de equilíbrios cujas coordenadas são não negativas. Logo, os pontos P_1, P_2, P_3 sempre existem e P_4 deve satisfazer à condição $\bar{x} > 0$ e $\bar{y} > 0$, ou seja,

$$\bar{x} > 0 \implies \frac{ad - c\alpha}{bd - \alpha\beta} > 0 \implies \begin{cases} ad > c\alpha \\ bd > \alpha\beta \end{cases} \text{ (1) ou } \begin{cases} ad < c\alpha \\ bd < \alpha\beta \end{cases} \text{ (2)}$$

$$\bar{y} > 0 \implies \frac{cb - a\beta}{bd - \alpha\beta} > 0 \implies \begin{cases} cb > a\beta \\ bd > \alpha\beta \end{cases} \text{ (3) ou } \begin{cases} cb < a\beta \\ bd < \alpha\beta \end{cases} \text{ (4)}$$

Combinando as condições acima temos: (1) e (3), (1) e (4), (2) e (3) ou (2) e (4).

Note que as possibilidades “(1) e (4)” e “(2) e (3)” não existem. Vamos então analisar as duas possibilidades possíveis.

(i) condições (1) e (3)

$$bd > \alpha\beta$$

$$ad > c\alpha \implies \frac{a}{\alpha} > \frac{c}{d}$$

$$cb > a\beta \implies \frac{a}{b} < \frac{c}{\beta}$$

(ii) condições (2) e (4)

$$bd < \alpha\beta$$

$$ad < c\alpha \implies \frac{a}{\alpha} < \frac{c}{d}$$

$$cb < a\beta \implies \frac{a}{b} > \frac{c}{\beta}$$

Observe que as condições acima envolvem os coeficientes angulares e os coeficientes lineares de r_1 e r_2 e os pontos de intersecção dessas retas com o eixo.

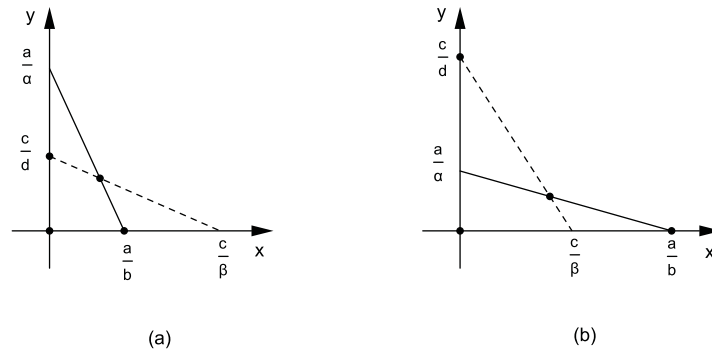


Figura 3.3: Existência do ponto de equilíbrio de coexistência. (a) condições do caso (i); (b) condições do caso (ii).

Observe que P_4 é determinado pela interseção de r_1 e r_2 , cujos coeficientes angulares são negativos e coeficientes lineares positivos o que nos garante que essas retas não estão no terceiro quadrante do plano coordenado xy . Assim, se P_4 não existe do ponto de vista biológico é porque temos uma das situações:

(1) $\bar{x} > 0$ e $\bar{y} < 0$ ou (2) $\bar{x} < 0$ e $\bar{y} > 0$.

Da condição (1) temos:

$$\bar{x} > 0 \implies \begin{cases} ad > c\alpha \\ bd > \alpha\beta \end{cases} \quad (5) \quad \text{ou} \quad \begin{cases} ad < c\alpha \\ bd < \alpha\beta \end{cases} \quad (6)$$

$$\bar{y} < 0 \implies \begin{cases} cb < a\beta \\ bd > \alpha\beta \end{cases} \quad (7) \quad \text{ou} \quad \begin{cases} cb > a\beta \\ bd < \alpha\beta \end{cases} \quad (8)$$

Analogamente ao caso anterior, as combinações possíveis são apenas duas:

(iii) condições (5) (7)

$$bd > \alpha\beta$$

$$ad > c\alpha \implies \frac{a}{\alpha} > \frac{c}{d}$$

$$a\beta > cb \implies \frac{a}{b} > \frac{c}{\beta}$$

(iv) condições (6) (8)

$$bd < \alpha\beta$$

$$ad < c\alpha \implies \frac{a}{\alpha} < \frac{c}{d}$$

$$a\beta < cb \implies \frac{a}{b} < \frac{c}{\beta}$$

Observe na figura (3.4) estas duas situações.

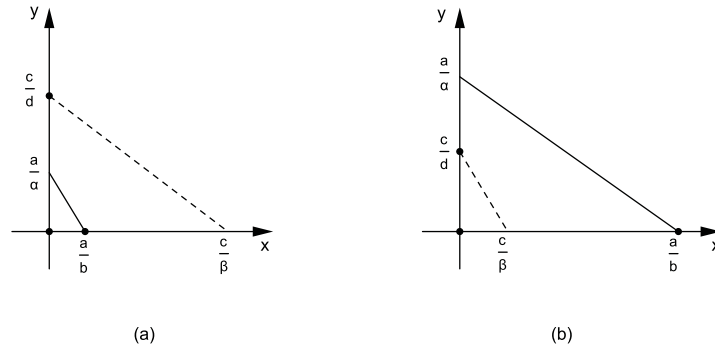


Figura 3.4: Duas situações (casos iii e iv) onde P_4 não existe do ponto de vista biológico.

Enquanto que a condição (2) no fornece:

$$\bar{x} < 0 \implies \begin{cases} ad < c\alpha \\ bd > \alpha\beta \end{cases} \quad (9) \quad \text{ou} \quad \begin{cases} ad > c\alpha \\ bd < \alpha\beta \end{cases} \quad (10)$$

$$\bar{y} > 0 \implies \begin{cases} a\beta < cb \\ bd < \alpha\beta \end{cases} \quad (11) \quad \text{ou} \quad \begin{cases} a\beta < cb \\ bd > \alpha\beta \end{cases} \quad (12)$$

Temos as seguintes combinações possíveis:

(iii) condições (9) e (11)

$$bd > \alpha\beta$$

$$ad < c\alpha \implies \frac{a}{\alpha} < \frac{c}{d}$$

$$a\beta < cb \implies \frac{a}{b} < \frac{c}{\beta}$$

(iv) condições (10) e (12)

$$bd < \alpha\beta$$

$$ad > c\alpha \implies \frac{a}{\alpha} > \frac{c}{d}$$

$$a\beta > cb \implies \frac{a}{b} > \frac{c}{\beta}$$

Observe na figura (3.5) estas duas situações.

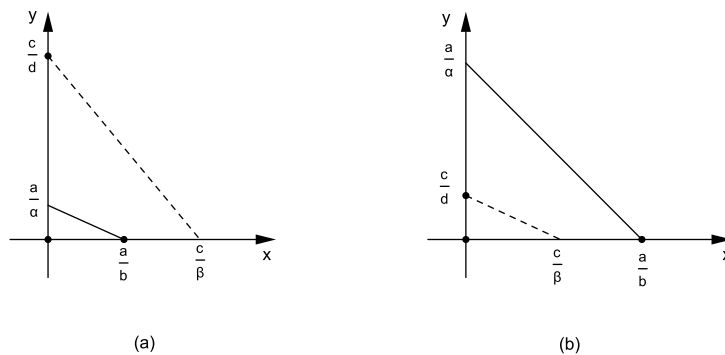


Figura 3.5: Duas situações (casos v e vi) onde P_4 não existe do ponto de vista biológico.

Observe que os quatro resultados onde o ponto P_4 não existe, podem ser resumidos a dois, pois as condições encontradas são duas a duas iguais, exceto na localização do ponto P_4 , que nos dois primeiros pertence ao quarto quadrante, já nos dois últimos pertence ao segundo quadrante.

Vamos fazer o estudo dos sinais de \dot{x} e \dot{y} para "suspeitarmos" da estabilidade dos pontos críticos.

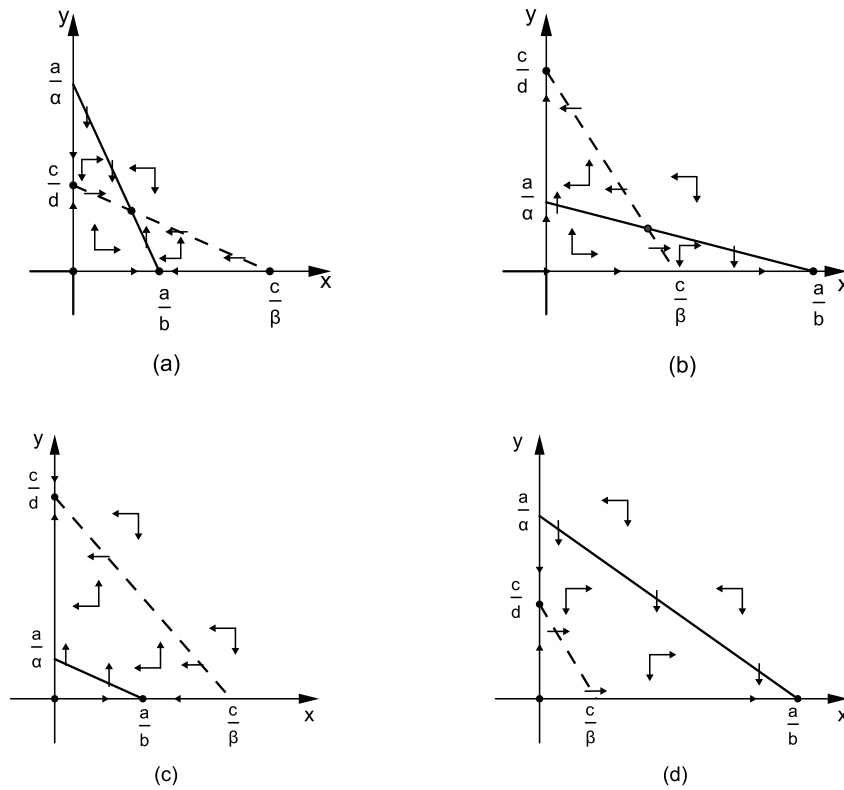


Figura 3.6: Sinal de dx/dt e dy/dt para as situações de equilíbrio estudadas.

Mostremos analiticamente a estabilidade dos pontos críticos encontrados. Como as funções à esquerda da igualdade no sistema (3.20) são funções polinomiais temos pelo teorema (2.2) que o sistema (3.20) é quase linear. Assim, vamos estudar a estabilidade do sistema (3.20) em uma vizinhança de cada ponto crítico olhando para o sistema linear correspondente, dado segundo a equação (2.7), isto é,

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - 2bx^* - \alpha y^* & -\alpha x^* \\ -\beta y^* & c - 2dy^* - \beta x^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

onde (x^*, y^*) é um ponto crítico qualquer.

- $P_1 = (0, 0)$

Reescrevendo o sistema acima temos,

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad (3.22)$$

cujos autovalores são a e c , ambos positivos. Logo, o ponto crítico $(0,0)$ é instável, independente dos parâmetros do sistema.

- $P_2 = (a/b, 0)$

Usando o sistema (3.21) temos,

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - 2b\frac{a}{b} & -\alpha\frac{a}{b} \\ 0 & c - \beta\frac{a}{b} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

Os autovalores são: $\lambda_1 = a - 2b\frac{a}{b} = -a < 0$ e $\lambda_2 = c - \beta\frac{a}{b}$.

Observe que:

(1) $\lambda_2 > 0 \implies \frac{a}{b} < \frac{c}{\beta}$;

(2) $\lambda_2 < 0 \implies \frac{a}{b} > \frac{c}{\beta}$.

Assim para as casos onde $\frac{a}{b} < \frac{c}{\beta}$ temos que P_2 é ponto de sela. Enquanto que, para os que $\frac{a}{b} > \frac{c}{\beta}$, P_2 é assintoticamente estável.

- $P_3 = (0, c/d)$

Usando (3.21) temos,

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - \alpha\frac{c}{d} & 0 \\ -\beta\frac{c}{d} & c - 2d\frac{c}{d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

Os autovalores são: $\lambda_1 = c - 2d\frac{c}{d} = -c < 0$ e $\lambda_2 = a - \alpha\frac{c}{d}$.

Logo, $\lambda_2 > 0 \implies \frac{a}{\alpha} > \frac{c}{d}$ e $\lambda_2 < 0 \implies \frac{a}{\alpha} < \frac{c}{d}$.

Assim para as casos onde $\frac{a}{\alpha} < \frac{c}{d}$ temos que P_3 é assintoticamente estável e, para os que $\frac{a}{\alpha} > \frac{c}{d}$, P_3 é ponto de sela e portanto instável.

- Para o ponto $P_4 = (\bar{x}, \bar{y})$. Reescrevendo a equação (3.21), já que $a - b\bar{x} - \alpha\bar{y} = 0$

e $c - d\bar{x} - \beta\bar{y} = 0$, obtemos:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b\bar{x} & -\alpha\bar{x} \\ -\beta\bar{y} & -d\bar{y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}. \quad (3.25)$$

Os autovalores são determinados pela equação

$$(-b\bar{x} - \lambda)(-d\bar{y}) - (-\alpha\bar{x})(-\beta\bar{y}) = 0.$$

Resolvendo-a, encontramos:

$$\lambda = \frac{-(b\bar{x} + d\bar{y}) \pm \sqrt{(b\bar{x} + d\bar{y})^2 - 4(bd - \alpha\beta)\bar{x}\bar{y}}}{2}$$

Observe que:

* Se $bd - \alpha\beta < 0$ então a expressão da raiz é positiva e maior que $(b\bar{x} + d\bar{y})^2$. Logo, os autovalores são distintos com sinais contrários. Portanto, o ponto crítico P_4 é um ponto de sela, o que representa em nosso estudo biológico que a coexistência pode não ser possível.

* Se $bd - \alpha\beta > 0$ temos ainda que a expressão da raiz é positiva mas menor que $(b\bar{x} + d\bar{y})^2$. De fato, pois

$$\begin{aligned} (b\bar{x} + d\bar{y})^2 - 4(bd - \alpha\beta)\bar{x}\bar{y} &= (b\bar{x})^2 + 2bd\bar{x}\bar{y} + (d\bar{y})^2 - 4bd\bar{x}\bar{y} + 4\alpha\beta\bar{x}\bar{y} \\ &= (b\bar{x})^2 - 2bd\bar{x}\bar{y} + (d\bar{y})^2 + 4\alpha\beta\bar{x}\bar{y} \\ &= (b\bar{x} - d\bar{y})^2 + 4\alpha\beta\bar{x}\bar{y} > 0. \end{aligned}$$

Logo os autovalores são distintos e negativos. Portanto P_4 é um ponto assintoticamente estável. Considerando apenas os casos onde $P_4 > 0$ temos, como análise biológica, que é uma coexistência possível.

Os dois modelos aqui apresentados serviram de base para outros modelos mais complexos que descrevem interações deste tipo, entre duas ou mais populações.

No capítulo a seguir apresentaremos algumas variações para o modelo presa-predador.

4 Variações do modelo clássico presa-predador

Tendo em vista o fato do modelo presa-predador original receber muitas críticas uma vez que os resultados obtidos com suas equações não são realistas, muitas variações foram e são propostas.

Algumas variações sugerem substituir a taxa de crescimento da população de presa por funções que limitam esse crescimento e outros sugerem que a substituição seja feita na taxa de ataque dos predadores, deixando de ser constante e passando a ser funções onde o ataque é limitado [8].

Leah [2] apresenta algumas sugestões de variações do modelo presa-predador:

1. Considerar a taxa de crescimento mais realista para as presas, assumindo que a constante a é representada pela função f :

- $f(x) = r \left(1 - \frac{x}{k}\right)$ Pielou (1969, pp. 19-21),
- $f(x) = r \left(\frac{k}{x} - 1\right)$ Schoener (1973),
- $f(x) = r \left[\left(\frac{x}{k}\right)^{-g} - 1\right]$ ($1 \geq g > 0$) Rosenzweig (1971).

2. Assumir que a taxa de ataque dos predadores seja limitada, substituindo o termo bxy por uma das equações a seguir:

- $ky(1 - e^{-cx})$ Ivlev(1961),
- $\frac{kxy}{x + D}$ Holling (1965),
- kyx^g ($1 \geq g > 0$) Rosenzweig (1971),
- $\frac{kxy^2}{x^2 + D^2}$ Takahashi(1964).

Apresentaremos com mais detalhes as duas primeiras variações para o modelo presa predador, alterando a taxa de crescimento das presas.

4.1 Variação para o modelo presa-predador utilizando o crescimento logístico

Uma crítica muito forte ao modelo clássico de Lotka-Volterra é o fato da população de presas crescer ilimitadamente na ausência de predadores. Talvez, o mais natural a se pensar naquele tempo com o objetivo de tornar o modelo mais realista, fosse substituir a taxa de crescimento das presas por uma equação logística o que limitaria o crescimento das presas.

Seguindo essa sugestão, o modelo original pode ser reescrito na forma

$$\begin{cases} \dot{x} &= \frac{ax(k-x)}{k} - bxy \\ \dot{y} &= -cy + dxy \end{cases} \quad (4.1)$$

A matriz Jacobiana associada ao sistema (4.1) é

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} a - \frac{2ax}{k} - by & -bx \\ dy & -c + dx \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

e seus pontos de equilíbrio são dados pelo sistema

$$\begin{cases} x \left(\frac{ak - ax}{k} - by \right) = 0 \\ y(-c + dx) = 0 \end{cases} \quad (4.3)$$

Assim, resolvendo o sistema (4.3) encontramos os pontos de equilíbrio $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (k, 0)$ e $P_3 = \left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b} - \frac{ac}{bdk} \right)$.

Analisando a estabilidade dos pontos de equilíbrios encontrados temos:

- Para $P_1 = (0, 0)$ temos:

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = a > 0 \\ \lambda_2 = -c < 0 \end{cases}$$

Pelo teorema da linearização, o ponto $P_1 = (0, 0)$ é um ponto de sela, portanto instável.

- Para $P_2 = (k, 0)$ temos:

$$J(k, 0) = \begin{pmatrix} -a & -bk \\ 0 & -c + dk \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -a < 0 \\ \lambda_2 = -c + dk < 0 \end{cases}$$

Dessa forma se $k > \frac{c}{d}$ o ponto de equilíbrio $P_2 = (k, 0)$ é um ponto de sela, portanto instável. Enquanto que, para $k < \frac{c}{d}$, $P_2 = (k, 0)$ é assintoticamente estável.

- Para $P_3 = \left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b} - \frac{ac}{bdk}\right)$.

$$J\left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b} - \frac{ac}{bdk}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{ac}{dk} & \frac{bc}{d} \\ \frac{ad}{b} - \frac{ac}{bk} & 0 \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

Resolvendo a equação característica encontramos os autovalores na forma

$$\lambda = \frac{-\frac{ac}{dk} \pm \sqrt{\left(\frac{ac}{dk}\right)^2 - 4ac\left(1 - \frac{c}{dk}\right)}}{2} \quad (4.5)$$

Observe que:

- Se $k < \frac{c}{d}$ então o termo da raiz quadrada é um número real positivo e maior do que o primeiro termo da expressão (4.5). Logo, o ponto de equilíbrio é um ponto de sela, instável.
- Se $k > \frac{c}{d}$ temos que os autovalores são números reais negativos ou complexos conjugado com parte real negativa. Logo o ponto de equilíbrio $P_3 = \left(\frac{c}{d}, \frac{a}{b} - \frac{ac}{bdk}\right)$ é assintoticamente estável.

4.2 Modelo de Schoener(1973) - [1]

A variação proposta por Schoener consiste em limitar o crescimento das presas substituindo a taxa de crescimento da população de presas, que no modelo de Lotka-Volterra era uma constante, por uma função f do tipo

$$f(x) = r \left(\frac{k}{x} - 1\right) \quad (4.6)$$

onde r é uma constante real positiva e k é a capacidade suporte. Dessa forma, as equações que descrevem o modelo presa-predador são

$$\begin{cases} \dot{x} = rx \left(\frac{k}{x} - 1\right) - bxy \\ \dot{y} = -cy + dxy \end{cases} \quad (4.7)$$

A matriz Jacobiana do sistema (4.7) é

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} -r - by & -bx \\ dy & -c + dx \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

Para determinarmos os pontos de equilíbrio resolvemos o sistema

$$\begin{cases} rx \left(\frac{k}{x} - 1 \right) - bxy = 0 \\ -cy + dxy = 0 \end{cases}, \quad (4.9)$$

onde encontramos $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (k, 0)$ e $P_3 = \left(\frac{c}{d}, \frac{rdk}{bc} - \frac{r}{b} \right)$.

Estudando a estabilidade em cada ponto de equilíbrio, vem:

- Para $P_1 = (0, 0)$ temos:

$$J(0, 0) = \begin{pmatrix} -r & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -r < 0 \\ \lambda_2 = -c < 0 \end{cases}$$

Logo, pelo teorema da linearização, temos que o ponto de equilíbrio $P_1 = (0, 0)$ é assintoticamente estável. Do ponto de vista biológico isso significa que para condições iniciais das populações próximas a zero, ambas espécies serão extintas.

- Para $P_2 = (k, 0)$ temos:

$$J(k, 0) = \begin{pmatrix} -r & -bk \\ 0 & -c + dk \end{pmatrix}$$

Para determinarmos os autovalores, resolvemos a equação característica dada por $\det(J - \lambda I) = 0$, ou seja, $\lambda^2 + (c + r - dk)\lambda + (r - rdk) = 0$.

Onde encontramos $\lambda_1 = -r < 0$ e $\lambda_2 = -c + dk$.

Logo, se $k \geq \frac{c}{d}$ então o ponto crítico $P_2 = (k, 0)$ é um ponto de sela e portanto instável. Já se $k < \frac{c}{d}$ então o ponto crítico $P_2 = (k, 0)$ é um ponto assintoticamente estável.

- Para $P_3 = \left(\frac{c}{d}, \frac{rdk}{bc} - \frac{r}{b} \right)$ temos:

$$J\left(\frac{c}{d}, \frac{rdk}{bc} - \frac{r}{b}\right) = \begin{pmatrix} -\frac{rdk}{c} & -\frac{bc}{d} \\ \frac{dr}{b} \left(\frac{rdk}{bc} - 1 \right) & 0 \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

Para determinarmos os autovalores, resolvemos a equação característica

$$\lambda^2 + \frac{rdk}{c}\lambda + (rdk - cr) = 0,$$

e encontramos

$$\lambda = \frac{-\frac{rdk}{c} \pm \sqrt{\left(\frac{rdk}{c}\right)^2 - 4(rdk - cr)}}{2} \quad (4.11)$$

Dessa forma temos:

- Se $dk - c > 0 \Rightarrow k > \frac{c}{d}$ temos que o termo da raiz quadrada é positivo e menor do que o primeiro termo da expressão (4.11) ou um número complexo. Logo, os autovalores possuem parte real negativa e portanto o ponto de equilíbrio $P_3 = \left(\frac{c}{d}, \frac{rdk}{bc} - \frac{r}{b}\right)$ é assintoticamente estável;
- Se $dk - c < 0$ temos que o termo da raiz quadrada é positivo e maior do que o termo $\frac{rdk}{c}$. Logo, os autovalores possuem sinais contrários e portanto o ponto de equilíbrio $P_3 = \left(\frac{c}{d}, \frac{rdk}{bc} - \frac{r}{b}\right)$ é um ponto de sela, instável.

No modelo clássico temos o ponto de equilíbrio trivial $P_1 = (0, 0)$, que é do tipo sela, e o ponto P_2 que indica a possibilidade de coexistência das duas populações, já que é um centro. No entanto, para o modelo que considera o crescimento logístico das presas, surge um terceiro ponto de equilíbrio $P = (k, 0)$, onde k é a capacidade suporte do meio, cujo tipo de estabilidade depende de parâmetros do modelo. Além disso, o ponto de equilíbrio de coexistência das duas populações não é mais um centro, podendo ser instável ou assintoticamente estável. Já o modelo de Schoener também possui três pontos de equilíbrio, sendo que o ponto $(0, 0)$ passa a ser assintoticamente estável.

Assim, o estudo dessas duas variações para o modelo presa-predador mostra que a mudança na hipótese de crescimento das presas gera alterações significativas, tanto no número de pontos de equilíbrio quanto na estabilidade dos mesmos.

Conclusão

Ao desenvolver este trabalho pudemos perceber que sistemas de equações diferenciais estão presentes em modelagens nas mais diversas áreas, embora nesse texto optamos por apresentar somente modelos de Dinâmica Populacional. O estudo da teoria de estabilidade se torna muito útil, uma vez que quase sempre não é possível obter uma expressão analítica para solução. Dessa forma, obter informações qualitativas da solução é importante para conhecermos o comportamento do sistema.

Discutimos duas técnicas para o estudo de estabilidade: linearização e de Lyapunov. Com a primeira, nada concluímos quando o ponto de equilíbrio é um centro para o sistema linear. No entanto, a segunda pode ser aplicada a qualquer sistema autônomo apesar da inexistência de um método para determinarmos a função de Lyapunov.

Ao estudarmos as variações para o modelo presa-predador percebemos que pequenas alterações nos parâmetros causam mudanças significativas nos pontos de equilíbrio e na estabilidade desses pontos.

Referências

- [1] SCHOENER, T. W. Population growth regulated by intraspecific competition for energy or time: some simple representations. *Theoretical Population Biology*, v. 4, p. 56–84, 1973.
- [2] LEAH, E.-K. *Mathematical Models in Biology*. 1. ed. Vancouver: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2005.
- [3] BASSANEZI, R. C.; JR., W. C. F. *Equações Diferenciais com aplicações*. 1. ed. São Paulo: Harbra Ltda, 1988.
- [4] BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. 8. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 2006.
- [5] HALE, J. K. *Ordinary Differential Equations*. 2. ed. Florida: Robert and Krieger Publishing Company, Inc, 1980.
- [6] HALE, J.; KOÇAK, H. *Dynamics and Bifurcations*. 1. ed. New York: Springer-Verlag, 1991.
- [7] MAY, R. M. *Stability and Complexity in model Ecosystems*. 2. ed. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1974.
- [8] ROSENZWEIG, M. L. Paradox of enrichment: Destabilization of exploitation ecosystems in ecological time. *Science*, v. 171, p. 385–387, 1971.
- [9] ZILL, D. G.; MICHAEL, R. *Equações Diferenciais - vol.2*. 3. ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 2001.
- [10] BRAUN, M. *Equações Diferenciais e suas aplicações*. 1. ed. Rio de Janeiro: Campus Ltda, 1979.
- [11] CAMARGO, I. de; BOULOS, P. *Geometria Analítica: um tratamento vetorial*. 3. ed. São Paulo: Prentice Hall, 2005.

A Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias Lineares de ordem n

Uma Equação Diferencial Ordinária (EDO) de ordem n ($n \geq 2$), em geral pode ser representada por

$$y^{(n)} = F(t, y, \dots, y^{(n-1)}). \quad (\text{A.1})$$

Através da mudança de variável

$$x_1 = y, \quad x_2 = \dot{y}, \quad x_3 = \ddot{y}, \quad \dots, \quad x_n = y^{(n-1)}, \quad (\text{A.2})$$

a equação pode ser escrita na forma de um sistema de EDO's:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n \\ \dot{x}_n &= F(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

Dessa forma, consideraremos os sistemas de EDO de ordem n , $n \geq 2$, pois as equações de primeira ordem em geral são tratadas separadamente. Como nem todo sistema do tipo (A.3) possui solução analítica e a teoria de estabilidade utiliza as propriedades de sistemas de EDO lineares, apresentaremos aqui uma caracterização da sua solução geral [9].

A.1 Teoria Básica

Dada uma equação diferencial de ordem n , do tipo (A.1), vimos que através de uma mudança de variável ela pode ser descrita pelo sistema (A.3). Podemos reescrever este

sistema de uma forma mais geral, isto é,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = F_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dot{x}_2 = F_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = F_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n). \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

Se cada uma das funções F_1, F_2, \dots, F_n nas equações (A.4) é uma função linear das variáveis dependentes x_1, x_2, \dots, x_n , então o sistema de equações é dito **linear** e caso contrário, é não linear. Nesse momento, nosso objeto de estudo são os sistemas lineares e assim, vamos reescrever o sistema (A.4) na forma,

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_{11}(t)x_1(t) + a_{12}(t)x_2(t) + \dots + a_{1n}(t)x_n(t) + g_1(t) \\ \dot{x}_2(t) = a_{21}(t)x_1(t) + a_{22}(t)x_2(t) + \dots + a_{2n}(t)x_n(t) + g_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) = a_{n1}(t)x_1(t) + a_{n2}(t)x_2(t) + \dots + a_{nn}(t)x_n(t) + g_n(t) \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

Se $g_i(t) = 0, \forall i, i = 1, \dots, n$, o sistema (A.5) é dito **homogêneo**, caso contrário, é não homogêneo.

Em notação matricial podemos escrever o sistema (A.5) como:

$$\dot{x} = A(t)x + g(t) \quad (\text{A.6})$$

onde

$$\dot{x} = [\dot{x}_1 \ \dot{x}_2 \ \dots \ \dot{x}_n]^T, \quad g(t) = [g_1(t) \ g_2(t) \ \dots \ g_n(t)]^T \quad \text{e} \quad A(t) = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

onde $a_{ij} = a_{ij}(t)$ são funções reais de variável real, $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n$.

Além do sistema de equações diferenciais, podem ser dadas condições iniciais da forma

$$x(t_0) = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.7})$$

onde $t_0 \in I$ sendo I o domínio das soluções $x(t)$ e $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$ são números dados. O sistema (A.5) sujeito à condição inicial (A.7) constitui um **Problema de Valor Inicial - PVI**.

Definição A.1. Dizemos que uma função $x = \varphi(t)$ é uma solução, num intervalo I ,

para o sistema (A.6), se suas componentes satisfazem cada uma das equações em (A.5), $\forall t \in I$.

Teorema A.1. Teorema de Existência e Unicidade - Suponha que as funções a_{ij} , $i, j = 1, \dots, n$ e g_i , $i = 1, \dots, n$ sejam contínuas em uma região R do espaço $tx_1x_2 \dots x_n$ definida por $\alpha < t < \beta$, $\alpha_1 < x_1 < \beta_1$, \dots , $\alpha_n < x_n < \beta_n$, contendo o ponto $(t_0, x_1^0, \dots, x_n^0)$. Então, existe uma única solução $\varphi(t)$ do sistema (A.5) e $(t_0 - h, t_0 + h) \subset (\alpha, \beta)$ para algum $h > 0$ que também satisfaz a condição inicial (A.7).

Demonstração. A demonstração deste teorema pode ser encontrada em Braun [10]. \square

Assim, vamos supor que as funções a_{ij} , $i, j = 1, \dots, n$ e g_i , $i = 1, \dots, n$ sejam contínuas em uma região R do espaço $tx_1x_2 \dots x_n$, definida por $\alpha < t < \beta$, $\alpha_1 < x_1 < \beta_1$, \dots , $\alpha_n < x_n < \beta_n$.

Consideremos, inicialmente, o sistema linear homogêneo dado por

$$\dot{x} = A(t)x, \quad (\text{A.8})$$

e soluções específicas $x^{(1)}$ e $x^{(2)}$ desse sistema, denotadas por

$$x^{(1)} = \begin{bmatrix} x_{11}(t) \\ x_{21}(t) \\ \vdots \\ x_{n1}(t) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad x^{(2)} = \begin{bmatrix} x_{12}(t) \\ x_{22}(t) \\ \vdots \\ x_{n2}(t) \end{bmatrix}. \quad (\text{A.9})$$

Teorema A.2. Se $x^{(1)}$ e $x^{(2)}$ são soluções do sistema (A.8) então $c_1x^{(1)} + c_2x^{(2)}$ também é solução, para quaisquer constantes reais c_1 e c_2 .

Demonstração. Como $x^{(1)}$ e $x^{(2)}$ são soluções temos $[x^{(1)}]' = A(t)x^{(1)}$ e $[x^{(2)}]' = A(t)x^{(2)}$.

Vamos mostrar que a combinação linear dessas duas soluções também é uma solução.

$$\begin{aligned} [c_1x^{(1)} + c_2x^{(2)}]' &= c_1[x^{(1)}]' + c_2[x^{(2)}]' \\ &= c_1A(t)x^{(1)} + c_2A(t)x^{(2)} \\ &= A(t)[c_1x^{(1)} + c_2x^{(2)}], \end{aligned}$$

e portanto, $c_1x^{(1)} + c_2x^{(2)}$ é solução de $\dot{x} = A(t)x$. \square

Usando este teorema várias vezes, temos que se $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, \dots , $x^{(k)}$ são soluções de (A.8) então $c_1x^{(1)} + c_2x^{(2)} + \dots + c_kx^{(k)}$ é solução, $\forall c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$. Consideremos agora $x^{(1)}$, $x^{(2)}$, \dots , $x^{(n)}$ "n" soluções do sistema (A.8), onde $A_{n \times n}$ e a matriz

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_{11}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{bmatrix}. \quad (\text{A.10})$$

é obtida a partir das n soluções obtidas, colocando-as em colunas.

Observe que, as colunas da matriz $X(t)$ são linearmente independentes para um dado valor de t se, e somente se, $\det X(t) \neq 0$. Esse determinante é chamado de **Wronskiano** das n soluções $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}$ e denotado por

$$W[x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}] = \det X(t). \quad (\text{A.11})$$

Podemos concluir que as soluções $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}$ são linearmente independentes em um ponto se, e somente se, $W[x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}] \neq 0$ para esse ponto.

Teorema A.3. *Se as funções vetoriais $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}$ são soluções linearmente independentes em cada ponto do intervalo (α, β) então toda solução $x = \phi(t)$ é expressa de modo único por*

$$x = c_1 x^{(1)} + c_2 x^{(2)} + \dots + c_n x^{(n)}. \quad (\text{A.12})$$

Demonstração. Observe que, toda expressão da forma (A.12) é solução da equação (A.8) (pelo teorema A.2).

Mostremos que dada qualquer solução $\varphi(t)$ da equação (A.8) temos $\varphi(t) = c_1 x^{(1)} + c_2 x^{(2)} + \dots + c_n x^{(n)}$ para valores apropriados de c_1, c_2, \dots, c_n .

Seja $t = t_0$ um ponto do intervalo (α, β) e seja $\xi = \phi(t_0)$. Queremos saber se existe alguma solução da forma $x = c_1 x^{(1)} + c_2 x^{(2)} + \dots + c_n x^{(n)}$ que satisfaz $x(t_0) = \xi$, ou seja, se existem constantes c_1, c_2, \dots, c_n tais que,

$$c_1 x^{(1)}(t_0) + c_2 x^{(2)}(t_0) + \dots + c_n x^{(n)}(t_0) = \xi.$$

Na forma escalar temos,

$$\begin{aligned} c_1 x_{11}(t_0) + c_2 x_{12}(t_0) + \dots + c_n x_{1n}(t_0) &= \xi_1, \\ c_1 x_{21}(t_0) + c_2 x_{22}(t_0) + \dots + c_n x_{2n}(t_0) &= \xi_2, \\ &\vdots \\ c_1 x_{n1}(t_0) + c_2 x_{n2}(t_0) + \dots + c_n x_{nn}(t_0) &= \xi_n. \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Como por hipótese $\det X(t_0) \neq 0$, pois $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}$ são linearmente independentes, segue que o sistema (A.13) tem solução única c_1, c_2, \dots, c_n . Assim, pelo teorema de Existência e Unicidade, como $\phi(t_0) = x(t_0)$, temos $\varphi(t) = x(t) = c_1 x^{(1)}(t) + c_2 x^{(2)}(t) + \dots + c_n x^{(n)}(t)$, $\forall t \in (\alpha, \beta)$, o que completa a demonstração. \square

Definição A.2. *Qualquer conjunto de n soluções $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}$ linearmente independente para $\dot{x} = A(t)x$, $A_{n \times n}$, é chamado de **Conjunto Fundamental de Soluções**.*

O teorema a seguir nos mostra que basta analisarmos o Wronskiano em um ponto

conveniente do intervalo para mostrar se as n soluções formam um conjunto fundamental de soluções.

Teorema A.4. *Se $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}$ são soluções de $\dot{x} = A(t)x$ no intervalo (α, β) , então $W[x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}]$ ou é identicamente nulo ou nunca se anula nesse intervalo.*

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em Boyce [4]. □

A.2 Sistemas de Equações Diferenciais Ordinárias Lineares com Coeficientes Constantes

Vamos caracterizar as soluções para os sistemas homogêneos de EDO's lineares com coeficientes constantes, ou seja, sistemas na forma,

$$\dot{x} = Ax, \tag{A.14}$$

onde A é uma matriz real $n \times n$.

Buscamos por soluções de equilíbrio, isto é, soluções encontradas com a resolução da equação $Ax = 0$. Vamos supor $\det A \neq 0$ e assim, a única solução de equilíbrio é $x = 0$.

Se $n = 1$ o sistema se reduz a uma única equação diferencial de primeira ordem

$$\dot{x}_1 = ax_1,$$

cuja solução é $x_1(t) = ce^{at}$.

Para $n \geq 2$, vamos supor que uma solução para o sistema (A.14) seja da forma,

$$x(t) = \xi e^{\lambda t}, \tag{A.15}$$

onde ξ é um vetor $n \times 1$. Se (A.15) é solução para (A.14) temos,

$$\lambda \xi e^{\lambda t} = A \xi e^{\lambda t} \implies (A - \lambda I)\xi = 0. \tag{A.16}$$

Assim, x é solução não trivial para (A.14) desde que $\det(A - \lambda I) = 0$, ou seja, λ é autovalor de A e ξ seu autovetor associado.

Dessa forma, a natureza dos autovalores e autovetores associados determinam a natureza da solução geral do sistema (A.14). Considerando A uma matriz real, temos três possibilidades de autovalores para A :

1. Todos os autovalores são reais e distintos entre si;

2. Alguns autovalores são complexos (e conjugados);
3. Alguns autovalores são repetidos.

A.2.1 Autovalores reais e distintos

Se os n autovalores de A são reais e distintos, então existe um autovetor real $\xi^{(i)}$ associado a cada autovalor λ_i e os n autovetores $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \dots, \xi^{(n)}$ são linearmente independentes. Assim, as n soluções do sistema (A.14) são:

$$x^{(1)} = \xi^{(1)}e^{\lambda_1 t}, \dots, x^{(n)} = \xi^{(n)}e^{\lambda_n t}. \quad (\text{A.17})$$

Para mostrar que as n soluções são linearmente independentes, basta calcular o Wronskiano das soluções, ou seja,

$$W[x^{(1)}, \dots, x^{(n)}] = \begin{vmatrix} \xi_1^{(1)} e^{\lambda_1 t} & \dots & \xi_1^{(n)} e^{\lambda_n t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_n^{(1)} e^{\lambda_1 t} & \dots & \xi_n^{(n)} e^{\lambda_n t} \end{vmatrix} = e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)t} \begin{vmatrix} \xi_1^{(1)} & \dots & \xi_1^{(n)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_n^{(1)} & \dots & \xi_n^{(n)} \end{vmatrix}. \quad (\text{A.18})$$

Observe que a função exponencial nunca se anula e ainda o determinante do último termo é sempre diferente de zero, pois os autovetores que formam as colunas da matriz, são linearmente independentes. Assim, o Wronskiano nunca se anula e portanto, as soluções $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ formam um conjunto fundamental de soluções. Logo, a solução geral para a equação (A.14) é da forma

$$x = c_1 \xi^{(1)} e^{\lambda_1 t} + c_2 \xi^{(2)} e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n \xi^{(n)} e^{\lambda_n t}. \quad (\text{A.19})$$

A.2.2 Autovalores complexos

Se tivermos um autovalor complexo λ_1 , então o conjugado também o é. Vejamos: seja $\xi^{(1)}$ o autovetor associado a λ_1 . Assim,

$$(A - \lambda_1 I)\xi^{(1)} = 0, \quad A \text{ real e } \lambda_1 \text{ complexo.} \quad (\text{A.20})$$

Tomando o conjugado da equação (A.20) temos,

$$(A - \bar{\lambda}_1 I)\overline{\xi^{(1)}} = 0.$$

Logo, se λ é autovalor complexo associado ao autovetor complexo ξ então $\bar{\lambda}$ é autovalor associado a $\bar{\xi}$. E portanto temos as soluções complexas

$$x^{(1)} = \xi^{(1)}e^{\lambda_1 t} \quad \text{e} \quad x^{(2)} = \overline{\xi^{(1)}}e^{\bar{\lambda}_1 t}. \quad (\text{A.21})$$

Mas, buscamos por soluções reais. Então, vamos considerar, $\lambda_1 = \alpha + \beta i$, e $\xi^{(1)} = a + bi$ onde $a = [a_1 \ a_2]^t$, $b = [b_1 \ b_2]^t$ com $\alpha, \beta, a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2$. Assim,

$$x^{(1)} = (a + bi)e^{\alpha_1 t} [\cos(\beta t) + i \operatorname{sen}(\beta t)]$$

$$x^{(1)} = [ae^{\alpha_1 t} \cos(\beta t) - be^{\alpha_1 t} \operatorname{sen}(\beta t)] + i[ae^{\alpha_1 t} \operatorname{sen}(\beta t) + be^{\alpha_1 t} \cos(\beta t)].$$

Fazendo,

$$u(t) = ae^{\alpha_1 t} \cos(\beta t) - be^{\alpha_1 t} \operatorname{sen}(\beta t) \quad \text{e} \quad v(t) = ae^{\alpha_1 t} \operatorname{sen}(\beta t) + be^{\alpha_1 t} \cos(\beta t) \quad (\text{A.22})$$

temos,

$$x^{(1)} = u(t) + iv(t). \quad (\text{A.23})$$

Vamos mostrar que se $x^{(1)} = u(t) + iv(t)$ é uma solução complexa para (A.14) então $u(t)$ e $v(t)$ são soluções reais de (A.14).

Note que, se $u(t) + iv(t)$ é solução então:

$$[u(t) + iv(t)]' = A[u(t) + iv(t)]$$

Usando propriedade de derivada, vem

$$\dot{u}(t) + i\dot{v}(t) = Au(t) + Aiv(t)$$

Da igualdade de números complexos, segue

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = Au(t) \\ \dot{v}(t) = Av(t) \end{cases}$$

e portanto, $u(t)$ e $v(t)$ são soluções reais de (A.14).

Para mostrarmos que $u(t)$ e $v(t)$ são soluções linearmente independentes vamos considerar λ_1 e $\overline{\lambda_1}$ autovalores conjugados com autovetores associados $\xi^{(1)}$ e $\overline{\xi^{(1)}}$, respectivamente, $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ e $\xi^{(1)} = a + bi$, como acima.

Primeiramente vamos mostrar que a e b são linearmente independentes.

Considere a equação

$$c_1 a + c_2 b = 0 \quad (\text{A.24})$$

Escrevendo a e b em função de $\xi^{(1)}$ e $\overline{\xi^{(1)}}$ temos que,

$$\xi^{(1)}[c_1 - ic_2] + \overline{\xi^{(1)}}[c_1 + ic_2] = 0.$$

Como $\xi^{(1)}$ e $\overline{\xi^{(1)}}$ são autovetores linearmente independentes, segue que

$$\begin{cases} c_1 - ic_2 = 0 \\ \text{e} \\ c_1 + ic_2 = 0 \end{cases} \implies c_1 = c_2 = 0$$

e portanto, a e b são linearmente independentes.

Agora, para mostrarmos que $u(t)$ e $v(t)$ são soluções linearmente independentes, considere

$$c_1 u(t_0) + c_2 v(t_0) = 0, \quad (\text{A.25})$$

onde t_0 é um ponto arbitrário do intervalo (α, β) .

Reescrevendo a equação (A.25) em função de a e b temos,

$$c_1 [e^{\alpha t_0} [a \cos(\beta t_0) - b \sin(\beta t_0)]] + c_2 [e^{\alpha t_0} [a \sin(\beta t_0) + b \cos(\beta t_0)]] = 0.$$

Como $e^{\alpha t_0} \neq 0, \forall t \in \mathbb{R}$ segue,

$$a [c_1 \cos(\beta t_0) + c_2 \sin(\beta t_0)] + b [c_2 \cos(\beta t_0) - c_1 \sin(\beta t_0)] = 0.$$

Mas, a e b são linearmente independentes, então

$$\begin{cases} c_1 \cos(\beta t_0) + c_2 \sin(\beta t_0) = 0 \\ c_2 \cos(\beta t_0) - c_1 \sin(\beta t_0) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} c_1 \cos(\beta t_0) = -c_2 \sin(\beta t_0) \\ c_2 \cos(\beta t_0) = c_1 \sin(\beta t_0) \end{cases} \implies$$

$$c_1 c_2 \cos^2(\beta t_0) = -c_1 c_2 \sin^2(\beta t_0) \implies c_1 c_2 [\cos^2(\beta t_0) + \sin^2(\beta t_0)] = 0 \implies$$

$$c_1 c_2 = 0 \implies c_1 = 0 \text{ ou } c_2 = 0$$

Se $c_1 = 0$, então

$$\begin{cases} -c_2 \sin(\beta t_0) = 0 \\ c_2 \cos(\beta t_0) = 0 \end{cases} \implies c_2 = 0$$

$\therefore u(t)$ e $v(t)$ são soluções linearmente independentes.

Desta forma, se os autovalores são $\lambda_1 = \alpha + \beta i$ ($\lambda_2 = \alpha - \beta i$), e $\lambda_3, \dots, \lambda_n$ são reais e distintos, cujos respectivos autovalores são $\xi^{(1)} = a + bi$ ($\xi^{(2)} = a - bi$), $\xi^{(3)}, \dots, \xi^{(n)}$, a solução geral da equação (A.14) é

$$x(t) = c_1 u(t) + c_2 v(t) + c_3 \xi^{(3)} e^{\lambda_3 t} + \dots + c_n \xi^{(n)} e^{\lambda_n t} \quad (\text{A.26})$$

onde $u(t)$ e $v(t)$ são dados pela equação (A.24).

A.2.3 Autovalores repetidos

A última possibilidade de autovalores para o sistema (A.14) é que A possua autovalor repetido, ou seja, com multiplicidade algébrica $k \geq 2$.

Seja ρ uma autovalor de A com multiplicidade algébrica k . Então temos duas possibilidades:

- (1) existem k autovetores linearmente independentes associados a ρ ;
- (2) existem menos do que k autovetores linearmente independentes associados a ρ .

Se tivermos a primeira possibilidade então temos $\xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \dots, \xi^{(k)}$, os k autovetores linearmente independentes associados ao autovalor ρ , de multiplicidade algébrica k . Logo,

$$x^{(1)} = \xi^{(1)}e^{\rho t}, \quad x^{(2)} = \xi^{(2)}e^{\rho t}, \quad \dots, \quad x^{(k)} = \xi^{(k)}e^{\rho t}$$

são k soluções linearmente independentes de (A.14). Considerando $\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n$ autovalores reais e distintos associados aos autovetores $\xi^{(k+1)}, \dots, \xi^{(n)}$, respectivamente, a solução geral de (A.14) é:

$$x = c_1 \xi^{(1)} e^{\rho t} + c_2 \xi^{(2)} e^{\rho t} + \dots + c_k \xi^{(k)} e^{\rho t} + c_{k+1} \xi^{(k+1)} e^{\lambda_{k+1} t} + \dots + c_n \xi^{(n)} e^{\lambda_n t}. \quad (\text{A.27})$$

Se o autovalor ρ , da matriz A , com multiplicidade algébrica k , tiver menos do que k autovetores linearmente independentes associados, teremos menos do que k soluções linearmente independentes. Portanto, para construirmos a solução geral precisamos encontrar outras soluções.

Vamos supor que a multiplicidade algébrica de ρ seja 2 e que $\xi^{(1)}$ seja o único autovetor associado a ρ . Logo, uma solução para a equação (A.14) é

$$x^{(1)} = \xi e^{\rho t} \quad (\text{A.28})$$

Por analogia ao estudo de equações diferenciais lineares de segunda ordem parece natural tentarmos encontrar uma segunda solução da forma

$$x = \delta t e^{\rho t} \quad (\text{A.29})$$

onde δ é um vetor constante a ser determinado. Substituindo (A.29) na equação (A.14) vem,

$$\rho \delta t e^{\rho t} + \delta e^{\rho t} = A \delta t e^{\rho t} \quad (\text{A.30})$$

Comparando a igualdade temos que $\delta = 0$ é a única solução e portanto $x = \delta t e^{\rho t}$ não é solução não trivial para (A.14).

Como a equação (A.30) contém termos em $t e^{\rho t}$ e $e^{\rho t}$, é sugestivo que a segunda solução, além de $\delta t e^{\rho t}$ contenha um termo na forma $\eta e^{\rho t}$. Assim, vamos supor que a

segunda solução seja,

$$x = \delta te^{\rho t} + \eta e^{\rho t} \quad (\text{A.31})$$

onde δ e η são vetores constantes. Substituindo (A.31) na equação (A.14) temos

$$\begin{aligned} \rho \delta te^{\rho t} + \delta e^{\rho t} + \rho \eta e^{\rho t} &= A[\delta te^{\rho t} + \eta e^{\rho t}] \implies \\ \rho \delta te^{\rho t} + e^{\rho t}[\delta + \rho \eta] &= A\delta te^{\rho t} + A\eta e^{\rho t}. \end{aligned}$$

Comparando-os, temos que δ e η devem satisfazer

$$\begin{cases} \rho \delta = A\delta \\ \delta + \rho \eta = A\eta \end{cases} \implies \begin{cases} (A - \rho I)\delta = 0 \\ (A - \rho I)\eta = \delta \end{cases}$$

Observe que δ é autovetor associado ao autovalor ρ , isto é, $\delta = \xi$. A equação (A.31) é uma solução para a equação (A.14) desde que as condições acima sejam satisfeitas.

Desta forma, a solução geral para a equação (A.14) é

$$x = c_1 \xi e^{\rho t} + c_2 [\xi te^{\rho t} + \eta e^{\rho t}], \quad (\text{A.32})$$

onde η é tal que $(A - \rho I)\eta = \xi$.

A.3 Matriz Fundamental

Sejam $x^{(1)}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}$ um conjunto fundamental de soluções para

$$\dot{x} = Ax. \quad (\text{A.33})$$

A matriz

$$\Psi(t) = \begin{bmatrix} x_1^{(1)} & x_1^{(2)} & \cdots & x_1^{(n)} \\ x_2^{(1)} & x_2^{(2)} & \cdots & x_2^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^{(1)} & x_n^{(2)} & \cdots & x_n^{(n)} \end{bmatrix} \quad (\text{A.34})$$

é chamada de **Matriz Fundamental de Soluções** para (A.33). Observe que a matriz $\Psi(t)$ é inversível.

Assim, a solução geral

$$x = c_1 x^{(1)} + c_2 x^{(2)} + \cdots + c_n x^{(n)} \quad (\text{A.35})$$

tem sua representação na forma matricial dada por

$$x = \Psi(t)C, \quad (\text{A.36})$$

onde C é um vetor constante, $C = [c_1 \ c_2 \ \cdots \ c_n]^t$.

Se tivermos uma condição inicial $x(0) = x_0$ obtemos,

$$x(0) = \Psi(0)C \implies x_0 = \Psi(0)C \xrightarrow{\Psi^{-1}(0)} C = \Psi^{-1}(0)x(0),$$

onde $\Psi^{-1}(0)$ é a matriz inversa de $\Psi(0)$.

Logo, a solução geral na forma matricial para um PVI é:

$$x(t) = \Psi(t)\Psi^{-1}(0)x_0. \quad (\text{A.37})$$

Se tivermos uma matriz fundamental $\phi(t)$ tal que $\phi(0) = I$, então $\phi^{-1}(0) = I$. Logo, a solução $x(t)$ obtida em (A.37) pode ser representada por

$$x(t) = \phi(t)x_0. \quad (\text{A.38})$$

Observe de (A.38) que, nas situações onde serão calculadas as soluções para várias condições iniciais, a solução para o PVI é obtida através de uma multiplicação de matrizes, pois esta matriz fundamental é tal que $\phi(0) = I$.

Fazendo uma analogia com a expansão em série de e^{at} , dada uma matriz constante A , $n \times n$, podemos mostrar que cada termo da série

$$I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!}$$

converge para todo t , quando n tende à infinito.

Definimos essa soma por

$$\exp(At) = I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n t^n}{n!} \quad (\text{A.39})$$

Além disso, podemos mostrar que

$$\frac{d}{dt}[\exp(At)] = A \exp(At) \implies \exp(At)|_{t=0} = I$$

Assim, a matriz fundamental ϕ tal que $\phi(0) = I$ satisfaz o mesmo PVI que $\exp(At)$. Dessa forma, podemos identificar $\phi(t)$ com $\exp(At)$ e portanto a solução do PVI é dada por

$$x(t) = \exp(At)x_0 \quad (\text{A.40})$$

Para mais detalhes, consultar Boyce [4].

B Classificação de Cônicas

Neste apêndice veremos como identificar as cônicas por meio da análise dos coeficientes da equação original (antes das mudanças de coordenadas ou rotação). Este resultado é bastante útil quando não se deseja esboçar o gráfico.

Dada a função polinomial

$$g(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f \quad (\text{B.1})$$

podemos representá-la matricialmente por

$$\begin{bmatrix} g(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \end{bmatrix} M_3 \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

ou ainda,

$$\begin{bmatrix} g(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} M_2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + L \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f \end{bmatrix} \quad (\text{B.3})$$

onde

$$M_3 = \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{b}{2} & c & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{bmatrix} \text{ é a matriz da função polinomial } g;$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{bmatrix} \text{ é a matriz da parte quadrática de } g;$$

$$L = \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix} \text{ é a matriz da parte linear de } g.$$

Sempre que quisermos descrever uma cônica por meio da equação $g(x, y) = 0$ suporemos que g é do segundo grau, ou seja, os coeficientes a , b e c não são todos nulos, isto é equivalente a dizer que a matriz M_2 é não nula.

Definição B.1. *Sejam g uma função polinomial de segundo grau, M_3 matriz associada*

a g e M_2 a matriz associada à sua parte linear. Então os números $\Delta_1 = \text{tr}M_2$, $\Delta_2 = \det M_2$ e $\Delta_3 = \det M_3$ são chamados invariantes (ortogonais) de g .

Proposição B.1. Sejam Δ_1 , Δ_2 e Δ_3 os invariantes ortogonais da função polinomial de segundo grau

$$g(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f \quad (\text{B.4})$$

e $\delta = \text{cof}_{M_3}(a) + \text{cof}_{M_3}(c)$. Fixando um sistema ortogonal de coordenadas, a identificação da cônica de equação $g(x, y) = 0$ pode ser feita com o auxílio do quadro sinóptico:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_2 \neq 0 \\ \Delta_2 = 0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \Delta_3 \neq 0 \\ \Delta_3 = 0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \Delta_2 < 0 \text{ hipérbole} \\ \Delta_2 > 0 \text{ } (\because \Delta_1 \neq 0) \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \Delta_1 \Delta_3 > 0 \text{ conjunto vazio} \\ \Delta_1 \Delta_3 < 0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \text{elipse } (a \neq 0 \text{ ou } b \neq 0) \\ \text{circunferência } (a = c \text{ e } b = 0) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_2 \neq 0 \\ \Delta_2 = 0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \Delta_3 \neq 0 \\ \Delta_3 = 0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \Delta_2 < 0 \text{ duas retas concorrentes} \\ \Delta_2 > 0 \text{ ponto} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_2 \neq 0 \\ \Delta_2 = 0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \Delta_3 \neq 0 \text{ parábola} \\ \Delta_3 = 0 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \delta < 0 \text{ duas retas paralelas} \\ \delta = 0 \text{ reta} \\ \delta > 0 \text{ conjunto vazio} \end{array} \right.$$

Demonstração. A demonstração pode ser encontrada em Boulos [11]. \square

Exemplo B.1. Considere a equação que representa a solução não nula de um sistema de EDO's, conforme exemplo 1.5 do capítulo 1 para o caso onde o autovalor é imaginário puro,

$$cx_1^2 + 2dx_1x_2 - bx_2^2 = k,$$

onde $b, c, d \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$, $a + d = 0$ e $ad - bc > 0$. Vamos identificar o que essa equação representa. Utilizando a proposição (B.1) temos:

$$M_3 = \begin{bmatrix} c & d & 0 \\ d & -b & 0 \\ 0 & 0 & -k \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} c & d \\ d & -b \end{bmatrix}$$

Logo, $\Delta_1 = c - b$, $\Delta_2 = -(d^2 + bc)$ e $\Delta_3 = k(d^2 + bc)$.

Como $a + d = 0$ e $ad - bc > 0$ segue que $bc < -d^2 < 0$ e assim b e c tem sinais opostos. Logo, $\Delta_2 > 0$.

Agora $\Delta_3 = k(d^2 + bc) \neq 0$, pois $k \neq 0$.

Como $\Delta_2 > 0$ vamos analisar o sinal de $\Delta_1\Delta_3 = (c - b)k(d^2 + bc)$. Temos garantido que o conjunto das soluções não é vazio assim, $\Delta_1\Delta_3 < 0$ o que resulta em k e $(c - b)$ terem o mesmo sinal.

Logo, pela proposição (B.1) concluímos que a equação $cx_1^2 + 2dx_1x_2 - bx_2^2 = k$ representa:

- uma elipse, se tivermos $a \neq c$ ou $d \neq 0$, ou
- uma circunferência, se $a = c$ e $d = 0$.

Portanto, o ponto crítico é estável.

C Fórmula da Variação das Constantes

Considere o sistema de equações diferenciais não autônomo

$$\dot{x} = Ax + g(t), \quad (\text{C.1})$$

onde A é uma matriz real e $g(t)$ uma função de classe C^1 . Se $x(t)$ é uma solução da equação (C.1), vamos considerar uma nova variável $y(t)$ dada por

$$y(t) = e^{-At}x(t), \quad (\text{C.2})$$

onde e^{At} é a matriz fundamental do sistema linear $\dot{x} = Ax$.

Derivando a equação (C.2) em relação a t obtemos

$$\dot{y}(t) = -Ae^{-At}x(t) + e^{-At}\dot{x}(t). \quad (\text{C.3})$$

Agora substituindo a equação (C.1) em (C.3) vem:

$$\dot{y}(t) = e^{-At}g(t). \quad (\text{C.4})$$

Suponha que o sistema dado pela equação (C.1) atenda à condição inicial $x(t_0) = x^0$. Logo, temos que a condição inicial para o sistema dado pela equação (C.4) é dada por

$$y(t) = e^{-At_0}x^0(t). \quad (\text{C.5})$$

Integrando ambos os lados da equação (C.4) no intervalo $[t_0, t]$ e usando a equação (C.5) obtemos:

$$y(t) = e^{-At_0}x^0(t) + \int_{t_0}^t e^{-As}g(s)ds. \quad (\text{C.6})$$

Substituindo a equação (C.2) em (C.6), temos:

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x^0(t) + e^{At} \int_{t_0}^t e^{-As}g(s)ds. \quad (\text{C.7})$$

A expressão representada pela equação (C.7) recebe o nome de *Fórmula da Variação das Constantes*.

D Teorema: Desigualdade de Gronwall

Teorema D.1. (Desigualdade de Gronwall) *Seja k uma constante real não negativa e sejam f e g funções contínuas e não negativas num intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ satisfazendo*

$$f(t) \leq k + \int_a^t f(s)g(s)ds, \quad t \in [a, b], \quad (\text{D.1})$$

então

$$f(t) \leq ke^{\int_a^t g(s)ds}, \quad t \in [a, b]. \quad (\text{D.2})$$

Demonstração. Vamos definir a função $h(t) = k + \int_a^t f(s)g(s)ds$. Note que $h(a) = k$ e dessa forma temos $f(t) \leq h(t)$, $\forall t \in [a, b]$.

Derivando a função $h(t)$ em relação a t temos, do Teorema Fundamental do Cálculo e do fato de $g(t) \geq 0$, que

$$\dot{h}(t) = f(t)g(t) \leq h(t)g(t), \quad t \in [a, b]. \quad (\text{D.3})$$

Multiplicando a desigualdade dada pela equação (D.3) por $e^{-\int_a^t g(s)ds}$ obtemos,

$$\dot{h}(t)e^{-\int_a^t g(s)ds} \leq h(t)g(t)e^{-\int_a^t g(s)ds} \Rightarrow \left[h(t)e^{-\int_a^t g(s)ds} \right]' \leq 0$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt} \left[h(t)e^{-\int_a^t g(s)ds} \right] \leq 0. \quad (\text{D.4})$$

Integrando a equação (D.4) em relação à t , no intervalo $[a, b]$, vem:

$$h(t)e^{-\int_a^t g(s)ds} - h(a) \leq 0 \Rightarrow h(t) \leq ke^{\int_a^t g(s)ds}, \quad t \in [a, b]. \quad (\text{D.5})$$

Como $f(t) \leq h(t)$, segue a desigualdade desejada. \square