



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Sobre Coincidências e Pontos Fixos de Aplicações

Thiago Taglialatela Cobra

Dissertação de Mestrado elaborada junto ao
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Universitária como parte dos requisitos para
obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Orientadora
Profa. Dra. Alice Kimie Miwa Libardi

2010

TERMO DE APROVAÇÃO

Thiago Taglialatela Cobra
SOBRE COINCIDÊNCIAS E PONTOS FIXOS DE APLICAÇÕES

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática Universitária do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” - Câmpus de Rio Claro, pela seguinte banca examinadora:

Profa. Dra. Alice Kimie Miwa Libardi
Orientadora

Prof. Dr. Edson de Oliveira
Centro Universitário Central Paulista - São Carlos/SP

Prof. Dr. Thiago de Melo
Departamento de Matemática - IGCE/Unesp - Rio Claro

Rio Claro, 09 de Dezembro de 2010

*Aos meus pais
Renata e José*

Agradecimentos

À Professora Dra. Alice Kimie Miwa Libardi, pela orientação paciente e dedicada, pelo incentivo e, principalmente, por ter acreditado e confiado em mim.

Ao Professor Dr. Edson de Oliveira, pelas valiosas sugestões para a conclusão deste projeto e, principalmente, pelo grande apoio e incentivo na continuação da minha formação acadêmica desde a graduação.

Aos professores e funcionários do Departamento de Matemática do IGCE, pelo acompanhamento e pela simpatia durante todo o curso.

Aos meus pais, Renata e José, que não mediram esforços para que eu pudesse concluir mais esta etapa da minha vida.

À minha família, por todo o apoio dispensado.

À algumas pessoas especiais que Deus colocou no meu caminho durante o cumprimento desta etapa, pelo amor, pelo carinho e pelo apoio moral e humano: Geisiane dos Santos, Gislene Bessa, Luciana Machado, Mauro da Silva, Polyanna da Costa, Tatiana da Silva, Thiago Lima e Vânia Flose.

À todos aqueles que direta ou indiretamente contribuíram para que este projeto pudesse ser realizado.

E, acima de tudo, a Deus por ter me preparado tudo isso.

A Matemática, vista corretamente, possui não apenas verdade, mas também suprema beleza, uma beleza fria e austera, como a da escultura.

Bertrand Russell

Resumo

O principal objetivo deste trabalho é apresentar conceitos básicos sobre coincidências e pontos fixos de aplicações contínuas usando como ferramentas os Lemas Combinatórios de Sperner e grau de aplicações. Apresentamos também um cálculo do número de Lefschetz de $f, g : T_2 \rightarrow T_3$, onde T_h denota uma superfície de genus h , através da fórmula dada por Gonçalves e Oliveira em [3].

Palavras-chave: Lemas de Sperner, Grau de Aplicações, Ponto Fixo, Índice de Coincidência, Número de Coincidência de Lefschetz.

Abstract

The main goal of this work is present basic concepts on coincidences and fixed points of continuous maps with Sperner's Combinatorial Lemmas, and degree maps approaches. We also present a calculation of the Lefschetz number of $f, g : T_2 \rightarrow T_3$, where T_h denotes surface of genus h , by using the formula given by Gonçalves and Oliveira in [3].

Keywords: Sperner's Lemmas, Degree of Maps, Fixed Point, Coincidence Index, Lefschetz Coincidence Number.

Sumário

Introdução	9
1 Preliminares	11
1.1 Princípio dos Intervalos Fechados Encaixados	11
1.2 Homeomorfismo	11
1.3 Homotopia	12
1.4 Variedade	12
1.5 Grupo Abelian Livre	12
1.6 Sequências Exatas	13
2 Lemas Combinatórios de Sperner	14
2.1 Primeiro Lema Combinatório de Sperner	14
2.2 Segundo Lema Combinatório de Sperner	15
2.3 Lema de Sperner para um Triângulo	17
2.4 Lema de Sperner para um Quadrado	19
3 Espaços de Ponto Fixo	21
3.1 Teorema do Valor Intermediário	22
3.2 Teorema de Borsuk-Ulam para S^1	22
3.3 Teorema do Ponto Fixo de Brouwer	24
3.4 Retração	26
4 Grau de Uma Aplicação	28
4.1 Aplicações Contínuas da S^1	28
4.2 Primeira Definição de Grau de uma Aplicação	29
4.3 Segunda Definição de Grau de uma Aplicação	31
4.4 Aplicações Contínuas da S^2	33
5 Homologia Singular	39
5.1 Grupo de Homologia Singular	39
5.2 Aplicações Induzidas em Homologia Singular	41
5.3 Sequências Exatas de Homologias	42
5.4 Grupo de Cohomologia	45

5.5	Dualidade de Poincaré	47
6	Coincidências de Aplicações	48
6.1	Orientação em Variedades e Classe de Thom	49
6.2	Índice de Pontos de Coincidência	50
6.3	Índice como Grau de uma Autoaplicação Contínua da Esfera	51
6.4	Teoremas de Lefschetz	52
6.5	Número de Lefschetz para Aplicações entre Superfícies T_h , de Genus $h \geq 1$	53
6.6	Aplicação	54
	Referências Bibliográficas	62

Introdução

Os clássicos Teoremas de Bolzano, Brouwer e Borsuk-Ulam são exemplos de resultados sobre pontos fixos envolvendo técnicas simples. A existência de ponto fixo num intervalo fechado sob uma aplicação contínua g qualquer, isto é, $g(x) = x$, garante a existência de soluções para a equação $F(x) = g(x) - x = 0$. Os teoremas de existência são geralmente expressos na forma de ponto fixo. Este teorema é formulado para o chamado princípio do ponto fixo, segundo o qual, se F é uma aplicação contínua de um intervalo fechado então ela tem pelo menos um ponto fixo. Quando para um espaço topológico X , qualquer autoaplicação f de X possui um ponto fixo, dizemos que X é um espaço de ponto fixo.

De acordo com [1], o desenvolvimento da Teoria do Ponto Fixo foi uma parte importante da Topologia desde o início dos trabalhos de Poincaré, na década de 1880. Ele mostrou que a solução para certos problemas em Análise poderiam ser estudados através da definição de um conjunto X e uma aplicação contínua $f : X \rightarrow X$ de tal forma que as soluções corresponderiam aos pontos fixos da função f , isto é, aos pontos $x \in X$ tais que $f(x) = x$. Através da aplicação de conceitos de Homologia na Teoria do Ponto Fixo, Lefschetz desenvolveu no mesmo período que Heinz Hopf um considerável refinamento das descobertas de Brouwer. Lefschetz introduziu o que agora chamamos de Número de Lefschetz para ponto fixo de uma aplicação contínua e provou que se esse número é não nulo, então a aplicação tem um ponto fixo.

A generalização da Teoria do Ponto Fixo é a Teoria da Coincidência. O famoso Teorema de Lefschetz para coincidência prova que para determinado tipo de espaço é possível definir um número, chamado “número de coincidência de Lefschetz”, denotado por $\Lambda(f, g)$, tal que se $f, g : M \rightarrow N$, com M e N variedades fechadas, conexas e orientadas de dimensão $n \geq 1$, e $\Lambda(f, g) \neq 0$, então f e g têm ponto de coincidência. Particularmente, se f é uma autoaplicação e $g = \text{Id}$ temos que o não anulamento de $\Lambda(f, g) = \Lambda(f)$ garante a existência de ponto fixo para a aplicação f . Como o número de Lefschetz é dado em termos de homomorfismo induzido em cohomologia, é um invariante por homotopias.

Este trabalho está organizado da seguinte forma:

O Capítulo 1 consta dos conceitos preliminares para o entendimento desse estudo.

No Capítulo 2, enunciamos e demonstramos dois lemas combinatórios e os lemas de Sperner para um triângulo e para um quadrado. Tais conceitos são utilizados

para a demonstração do teorema de Brouwer para um quadrado, descrito no Capítulo posterior.

No Capítulo 3, definimos um espaço de ponto fixo, enunciamos e demonstramos os teoremas do valor intermediário e seu corolário para ponto fixo, de Borsuk-Ulam para S^1 e o teorema do ponto fixo de Brouwer para um intervalo fechado e para um quadrado. Apresentamos ainda a importância do conceito de retração no que tange ao tema ponto fixo.

O Capítulo 4 contempla definições do grau de autoaplicações contínuas da S^1 e S^2 e apresenta o resultado de que toda autoaplicação contínua da S^2 tem um ponto fixo ou leva um ponto em seu antípoda, se $\deg f \neq -1$ ou $\deg f \neq 1$, respectivamente.

O Capítulo 5 descreve conceitos da teoria de homologia e da cohomologia necessários para a definição da classe de Lefschetz, que, por sua vez, serve de subsídio para apresentação de uma fórmula para o cálculo do número de coincidência de Lefschetz.

Finalmente, no Capítulo 6, apresentamos a fórmula dada por [3] para o cálculo do número de coincidência de Lefschetz de duas aplicações contínuas $f, g : T_h \rightarrow T_r$, onde T_h e T_r representam dois toros de genus h e r , respectivamente, em termos dos determinantes das matrizes dos homomorfismos induzidos em cohomologia $f^{1*}, g^{1*} : H^1(T_r, \mathbb{Q}) \rightarrow H^1(T_h, \mathbb{Q})$. Fazemos, por fim, uma aplicação da fórmula para o número de coincidência de Lefschetz para o caso em que $r = 3$ e $h = 2$, isto é, tomando como as superfícies dois toros de genus 3 e 2, respectivamente.

1 Preliminares

1.1 Princípio dos Intervalos Fechados Encaixados

Se uma sequência de intervalos fechados $(I_1, I_2, \dots, I_n, \dots)$ é tal que $I_{n+1} \subset I_n$, para todo n em \mathbb{N} , com o comprimento de cada intervalo I tendendo a zero quando n tende a infinito, então a interseção de todos os intervalos fechados I_n contém um único ponto x_0 .

1.2 Homeomorfismo

Homeomorfismo é um conceito topológico relacionando conjuntos com uma estrutura definida (como espaços métricos ou espaços topológicos) através de uma aplicação. Algumas propriedades, como compacidade e conexidade, são preservadas por homeomorfismos.

Definição 1.1. Uma aplicação $f : A \rightarrow B$ onde A e B são espaços topológicos é dita um homeomorfismo se f é contínua, bijetora e tem inversa f^{-1} contínua. Dizemos nesse caso que A e B são homeomorfos (notação: $A \approx B$).

A importância desse conceito pode ser entendida, por exemplo, no seguinte resultado: sejam A e B espaços topológicos e $f : A \rightarrow B$ um homeomorfismo. Então A é conexo se, e somente se, B é conexo. Este resultado também é válido para conjuntos compactos.

A partir daqui, quando nos referirmos a um espaço topológico, se não houver margem para confusão, faremos referência apenas ao conjunto. Por exemplo, diremos que um quadrado e um disco são homeomorfos, devendo ficar claro que a propriedade não é definida sobre dois conjuntos, mas sobre os dois espaços topológicos.

1.3 Homotopia

Definição 1.2. *Sejam duas aplicações contínuas $f, g : X \rightarrow Y$ onde X e Y denotam espaços topológicos quaisquer. Dizemos que f é homotópica a g ($f \sim g$) se f pode ser deformada continuamente em g , isto é, se existe uma aplicação $H : X \times I \rightarrow Y$, $I = [0, 1]$, tal que $H(x, 0) = f(x)$ e $H(x, 1) = g(x)$, para todo $x \in X$.*

1.4 Variedade

Definição 1.3. *Seja M um espaço topológico de Hausdorff. Se para cada ponto x de M existe uma vizinhança V que é homeomorfa a um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, então dizemos que M é uma variedade de dimensão n ou uma n -variedade. A Figura 1.1 ilustra o caso da S^2 , na qual para todo ponto existe uma vizinhança homeomorfa a um aberto do \mathbb{R}^2 , dessa forma a S^2 , assim como uma superfície qualquer (toro, garrafa de Klein e outros) é uma 2-variedade.*

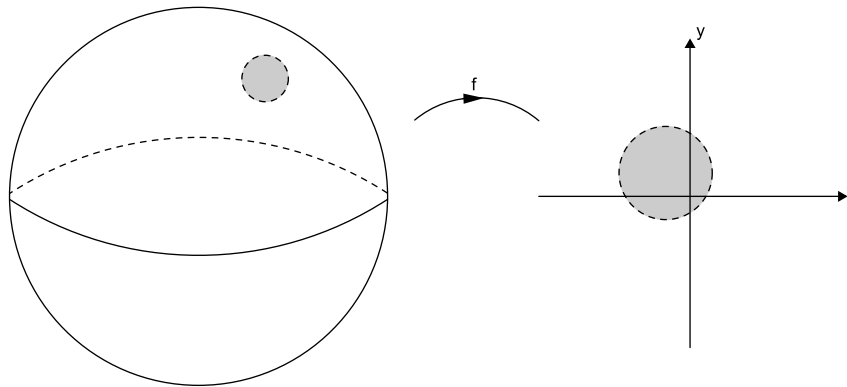


Figura 1.1

1.5 Grupo Abelianho Livre

Definição 1.4. *Seja G um grupo abeliano. Dizemos que G é livre se existe um subconjunto A de G tal que cada elemento $g \in G$ tem representação única dada por $g = \sum_{x \in A} n_x \cdot x$, onde o inteiro n_x é igual a zero exceto para um número finito de pontos $x \in A$. O conjunto A é uma base para G .*

Notemos que se G é abeliano livre cuja base é A e H é abeliano, então toda aplicação $f : A \rightarrow H$ pode ser estendida univocamente a um homomorfismo $f : G \rightarrow H$.

1.6 Sequências Exatas

Definição 1.5 (Sequência exata). *Sejam A , B e C grupos abelianos e f, g homomorfismos. Dizemos que a terna*

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

é uma sequência exata se $\text{Im}(f) = \ker(g)$. No caso em que $\text{Im}(f) \subset \ker(g)$, diremos que a sequência é semiexata.

Definição 1.6 (Sequência exata longa). *Dizemos que uma sequência qualquer*

$$\xrightarrow{f_k} G_{k+1} \xrightarrow{f_{k+1}} G_{k+2} \xrightarrow{f_{k+2}} \dots \xrightarrow{f_{l-1}} G_l \xrightarrow{f_l} \dots, \quad k < l$$

na qual G_i e f_i denotam grupos abelianos e homomorfismos, respectivamente, é exata se cada terna representa uma sequência exata.

Definição 1.7 (Sequência exata curta). *Chamamos a sequência exata*

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

uma sequência exata curta. Notemos que nesse caso f é um monomorfismo e g é um epimorfismo, que nos conduz ao caso particular de sequência exata curta

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \longrightarrow 0, \quad (1.1)$$

na qual f é um isomorfismo. Assim, f é um isomorfismo se, e somente se, a sequência 1.1 é exata.

Lema 1.8. *Se X e Y são matrizes quadradas de ordem 2, então:*

$$\det(X - Y) = \det X - \det X_{Y,1} - \det X_{Y,2} + \det Y$$

onde $X_{Y,i}$, $i = 1, 2$, significa que a i -ésima coluna da matriz X foi substituída pela i -ésima coluna da matriz Y .

Demonstração. Sejam $X = \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}$. Então:

$$\begin{aligned} \det(X - Y) &= \begin{vmatrix} m - r & n - s \\ p - t & q - u \end{vmatrix} \\ &= (m - r)(q - u) - (p - t)(n - s) \\ &= mq - pn - rq + tn - mu + ps + ru - ts \\ &= \begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} r & n \\ t & q \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} m & s \\ p & u \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} r & s \\ t & u \end{vmatrix} \\ &= \det X - \det X_{Y,1} - \det X_{Y,2} + \det Y. \end{aligned}$$

□

2 Lemas Combinatórios de Sperner

2.1 Primeiro Lema Combinatório de Sperner

Seja $I = [a, b]$ um intervalo fechado de \mathbb{R} , com extremos identificados por 0 e 1. Um intervalo é dito ser completo se seus extremos são identificados por números diferentes. Quando um subintervalo completo é do tipo $(0, 1)$, isto é, tem extremo esquerdo identificado por zero e direito por um, dizemos que é um intervalo ímpar e se do tipo $(1, 0)$, é um intervalo par, como ilustra a Figura 2.1.



Figura 2.1

Lema 2.1 (Lema de Sperner para um intervalo fechado). *Seja I em \mathbb{R} um intervalo do tipo $(0, 1)$. Usando um número finito de pontos, subdividamos o intervalo I e identifiquemos seus extremos por 1 ou 0, aleatoriamente. Então, existe pelo menos um intervalo completo. Além disso, se esse número for superior a 1, então este número é ímpar.*

Na Figura 2.2, α e γ são intervalos completos ímpares, ao passo que β é do tipo par.

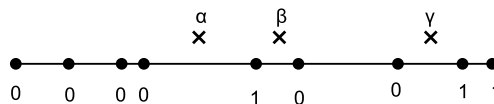


Figura 2.2

Demonstração. Primeiro observemos que existem duas possibilidades na identificação dos finitos pontos marcados em I :

- i. Todos os pontos são iguais a zero. Nesse caso, o único intervalo completo é o último, cujo extremo direito é também extremo direito de I e sendo este o último ponto que particiona I . Então existe somente um intervalo completo.
- ii. Pelo menos um dos pontos é igual a zero. Observemos que, sendo o extremo esquerdo do intervalo original 0 , o primeiro completo é ímpar. Da mesma forma, como o extremo direito de I é 1 , temos que o último completo é também ímpar. Assim os completos ímpares e pares se intercalam, isto é, se um intervalo k é ímpar, então o intervalo $k + 1$ é par, $k + 2$ é ímpar e assim sucessivamente até o último intervalo completo. Dessa maneira o número de intervalos ímpares supera em 1 o número de pares. Denotando por p o número de intervalos ímpares no intervalo I , conseqüentemente o número de intervalos pares é $p - 1$. Então, o número total de intervalos completos em I é dado por

$$p + (p - 1) = 2p - 1$$

que representa um número ímpar.

□

2.2 Segundo Lema Combinatório de Sperner

Consideremos agora uma casa subdividida em cômodos de forma que cada cômodo tenha 0 , 1 ou 2 portas. As portas são categorizadas em dois tipos: porta externa, que permite entrar e sair da casa, e porta de comunicação, que é comum a dois cômodos. Um cômodo qualquer pode ter apenas uma porta, nesse caso é chamado de cômodo sem saída; duas portas, uma porta exterior e uma porta de comunicação; ou simplesmente não ter porta. É importante destacar que um cômodo não pode ter mais do que uma porta exterior e também que dois cômodos não podem ter mais que uma porta em comum.

Lema 2.2. *Nas condições acima suponhamos que pelo menos um cômodo da casa tenha 0 , 1 ou 2 portas. Então os números de cômodos do tipo sem saída e de cômodos com porta exterior são da mesma paridade.*

Demonstração. A demonstração será feita através do *processo de caminho*, que deverá obedecer dois princípios básicos ao se percorrer um caminho na casa:

- i. Um caminho se inicia na casa por uma porta exterior ou por um cômodo sem saída e continua através de portas de comunicação, podendo terminar em uma porta exterior ou em um cômodo sem saída.
- ii. Toda porta deve ser transpassada uma única vez.

A Figura 2.3 representa uma casa subdividida em cômodos e indica um dos caminhos que se pode percorrer. Nesse caso inicia-se por um cômodo sem saída e termina-se em uma porta exterior.

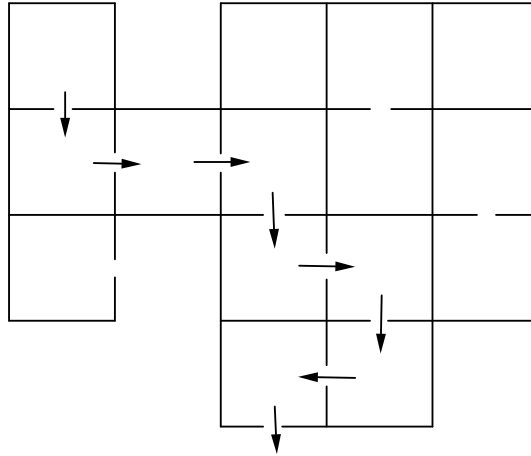


Figura 2.3

Nossa restrição em relação ao número de portas em cada cômodo faz com que cada caminho seja único. Depois de terminado um caminho começamos outro e prosseguimos dessa maneira até que não mais restem portas exteriores ou cômodos sem saída dos quais possamos iniciar. Assim, três tipos de caminhos podem ser percorridos:

- i. Começando e terminando através de portas exteriores;
- ii. Começando e terminando em cômodos sem saída;
- iii. Começando através de uma porta exterior (respectivamente por um cômodo sem saída) e terminando em um cômodo sem saída (respectivamente numa porta exterior).

Denotemos por α , β , e γ o número de caminhos dos tipos (i), (ii) e (iii), respectivamente. Então cada caminho do tipo (i) implica em duas portas exteriores, enquanto (iii) implica em uma, o que nos dá como número total de portas exteriores

$$2\alpha + \gamma.$$

Analogamente o número total de cômodos sem saída é

$$2\beta + \gamma.$$

Observando que 2α e 2β representam números pares, temos que a paridade de ambos é definida pelo termo comum γ . □

2.3 Lema de Sperner para um Triângulo

Esse Lema pode ser visto como uma expansão do Lema 2.1 para um triângulo. Vamos primeiramente definir o conceito de *triangulação* que será útil para o desenvolvimento do trabalho.

Definição 2.3 (Triangulação). *Seja δ um triângulo qualquer subdividido em triângulos menores δ'_i (chamados subtriângulos) de tal forma que para quaisquer dois subtriângulos δ'_1 e δ'_2 seja satisfeita uma, e apenas uma, das situações:*

- i. δ'_1 e δ'_2 não tem nenhum ponto em comum;
- ii. δ'_1 e δ'_2 tem exatamente um vértice em comum;
- iii. δ'_1 e δ'_2 tem exatamente uma aresta em comum.

Nessas condições dizemos que essa subdivisão é uma *triangulação* (denotada aqui por σ) do triângulo δ . Dizemos ainda que os vértices e as arestas dos subtriângulos são, respectivamente, os vértices e as arestas de σ .

A Figura 2.4 representa uma triangulação, enquanto que a Figura 2.5 não.

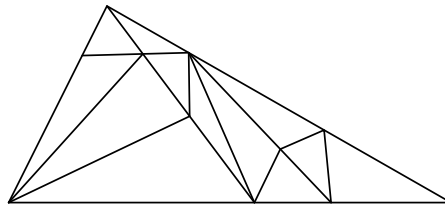


Figura 2.4

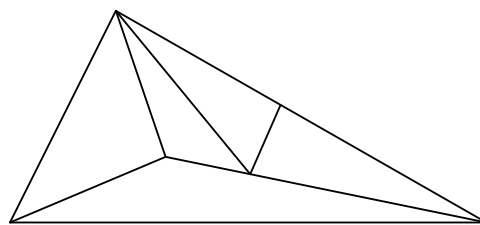


Figura 2.5

Lema 2.4 (Lema de Sperner para um triângulo). *Seja δ um triângulo qualquer e σ uma triangulação de δ . Rotulemos os vértices de δ pelos números 1, 2 e 3. Rotulemos ainda os vértices dos subtriângulos pelos mesmos números, de forma aleatória, seguindo*

apenas um princípio: todo vértice v de qualquer subtriângulo, tal que v pertença ao bordo de δ , recebe um rótulo igual a um dos que rotula as extremidades da aresta de δ a qual v pertence. Então, existe pelo menos um subtriângulo cujos vértices são rotulados por números diferentes (chamado subtriângulo completo). Além disso, se esse número for maior que 1 então ele é ímpar.

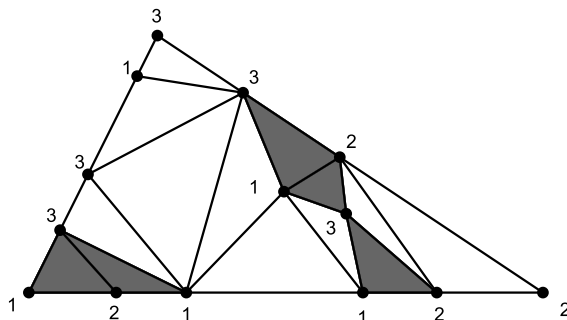


Figura 2.6

Demonstração. É conveniente identificar alguns termos deste lema com os seus correspondentes no Lema 2.2, uma vez que nossa demonstração recorrerá a ele:

casa	—	triângulo δ
cômodo	—	subtriângulo δ'
cômodo sem saída	—	subtriângulo completo
porta	—	aresta de σ do tipo (1,2) ou (2,1)
porta exterior	—	aresta de σ do tipo (1,2) ou (2,1) no bordo de δ

Temos então que demonstrar que o número de subtriângulos completos é ímpar. Aten-temos para o fato de que, em contraste com o Lema 2.1 é comutativa a apresentação dos rótulos, por exemplo, não há distinção em dizer que um subtriângulo é do tipo (1, 2, 3) ou (2, 1, 3).

De fato, estamos nas condições do Lema 2.2 pois é possível perceber que cada cômodo (subtriângulo) tem 0, 1 ou 2 portas (arestas do tipo (1,2) ou (2,1)), temos então que o número de portas exteriores e o número de cômodos sem saída são da mesma paridade. Agora pelo modo como fizemos a construção só podemos ter portas exteriores no bordo de δ , mas, observando que uma porta é um intervalo cujos extremos são identificados por 1 e 2, a única aresta do bordo de δ que contém portas exteriores é aquela que tem rótulos 1 e 2 para seus extremos, o que nos remete ao Lema 2.1 o qual indica que o número p de arestas do tipo (1,2) supera em 1 o número de arestas do tipo (2,1), temos então

$$p + p - 1 = 2p - 1$$

subintervalos (arestas) completos, do que resulta que o número de subtriângulos completos é ímpar. \square

2.4 Lema de Sperner para um Quadrado

Lema 2.5. *Seja δ um quadrado subdividido em subquadrados δ' através de semirretas paralelas às arestas de δ . Rotulemos os vértices de δ pelos números 1, 2, 3 e 4 e os vértices dos subquadrados pelos mesmos números de forma aleatória seguindo apenas um princípio: todo vértice v de qualquer subquadrado, tal que v pertence ao bordo de δ , recebe um rótulo igual a um dos que rotula as extremidades da aresta de δ à qual v pertence. Então existe pelo menos um subquadrado cujos vértices são rotulados por pelo menos três números diferentes (subquadrado completo).*

Notemos que em contraste aos outros lemas aqui apresentados, neste caso nada se pode afirmar com relação à paridade do número de subquadrados completos.

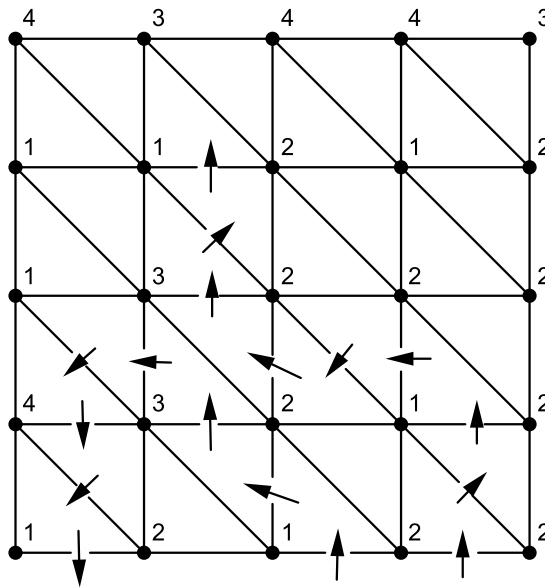


Figura 2.7

Demonstração. Novamente usaremos o processo de caminho para a demonstração deste lema, mas para isso é necessário que tenhamos uma figura triangulada. Então subdividamos cada subquadrado em dois triângulos através de semirretas, de tal forma que todas elas sejam paralelas a apenas uma diagonal de δ , como ilustra a Figura 2.7. Assim, temos δ triangulado com todos os vértices rotulados por 1, 2, 3 ou 4. Definindo que uma porta é uma aresta do tipo (1,2) que pertence ao bordo de δ , temos que um cômodo sem saída é um subtriângulo do tipo (1,2,3) ou (1,2,4). Pelo Lema 2.4 temos que todas as portas exteriores pertencem necessariamente à aresta cujas extremidades

são rotulada por 1 e 2, pelo Lema 2.1 sabemos que o número de portas exteriores é ímpar.

Se um caminho começa por uma porta exterior então ele termina necessariamente em outra porta exterior ou num cômodo sem saída, mas o número de portas exteriores é ímpar, então pelo menos um caminho começa numa porta exterior e termina num cômodo sem saída, isto é, termina um subtriângulo cujos vértices são (1,2,3) ou (1,2,4), então pelo menos um subquadrado tem vértices (1,2,3) ou (1,2,4). Logo existe pelo menos um subquadrado completo. \square

3 Espaços de Ponto Fixo

A Teoria do Ponto Fixo foi sempre um ramo importante da Topologia, desde os trabalhos de Poincaré na década de 1880. Poincaré entendia que as soluções para certos problemas em Análise poderiam ser estudados através da definição de um conjunto X e uma aplicação $f : X \rightarrow X$ de tal forma que as soluções corresponderiam aos pontos fixos da aplicação f , isto é, aos pontos $x \in X$ tais que $f(x) = x$.

A partir daqui, quando indicarmos um espaço e não houver menção de sua estrutura, estaremos nos referindo a um espaço topológico.

Definição 3.1. *Seja A um espaço topológico. Dizemos que A é um espaço de ponto fixo (EPF) se qualquer aplicação contínua $f : A \rightarrow A$ tem um ponto fixo.*

Proposição 3.2. *A propriedade definida acima é um invariante topológico, ou seja, se A é espaço de ponto fixo, então qualquer espaço B homeomorfo a A também é um espaço de ponto fixo.*

Demonstração. De fato, sejam A e B espaços topológicos, com $B \approx A$ e $\varphi : A \rightarrow B$ o homeomorfismo. Seja ainda uma aplicação contínua $\bar{f} : B \rightarrow B$. Definamos a função

$$\begin{aligned} f : A &\rightarrow A \\ x &\mapsto (\varphi^{-1} \circ \bar{f} \circ \varphi)(x) \end{aligned}$$

Temos então o seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & A \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ B & \xrightarrow{\bar{f}} & B \end{array}$$

Observamos que, pela forma como construímos esse diagrama, ele comuta, isto é $\varphi \circ f = \bar{f} \circ \varphi$. Como A é espaço de ponto fixo, temos que existe $x_0 \in A$ tal que $f(x_0) = x_0$. Então

$$\begin{aligned} \varphi \circ f(x_0) &= \bar{f} \circ \varphi(x_0) \\ \varphi(x_0) &= \bar{f}(\varphi(x_0)) \end{aligned}$$

que nos mostra que \bar{f} também tem ponto fixo. Como $\bar{f} : B \rightarrow B$ é uma aplicação arbitrária resulta que B também é um espaço de ponto fixo. \square

Dessa forma para um conjunto de espaços homeomorfos, basta que mostremos que um deles é de ponto fixo e automaticamente teremos esta validade estendida para os demais espaços.

3.1 Teorema do Valor Intermediário

O mais conhecido teorema do ponto fixo é um corolário do famoso teorema do valor intermediário. Tal teorema foi demonstrado por Bernard Bolzano(1781-1848) em 1817.

Teorema 3.3. *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação contínua. Se p está entre $f(a)$ e $f(b)$ então existe p' entre a e b tal que $f(p') = p$.*

Demonstração. Sabemos que qualquer intervalo da reta real é conexo, e como por hipótese f é contínua, $f([a, b])$ é conexo em \mathbb{R} . Logo é um intervalo contendo $f(a)$ e $f(b)$. Portanto, qualquer ponto p entre $f(a)$ e $f(b)$ é imagem de um ponto p' de (a, b) . \square

Corolário 3.4. *Seja a aplicação $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ contínua. Então existe $p \in [a, b]$ tal que $f(p) = p$.*

Demonstração. Consideremos a aplicação $g : [a, b] \rightarrow [a, b]$ definida por $g(x) = x - f(x)$ que obviamente é contínua em $[a, b]$. Se $g(a) = 0$ ou $g(b) = 0$ o corolário está demonstrado. Caso contrário temos $g(a) = a - f(a)$, como $a < f(a) < b$, segue que $g(a) < 0$. Por outro lado $g(b) = b - f(b)$, como $a < f(b) < b$, segue que $g(b) > 0$. Pelo Teorema 3.3, existe $p \in [a, b]$ tal que $g(p) = 0$, isto é, p é um ponto fixo para f . \square

3.2 Teorema de Borsuk-Ulam para S^1

O seguinte teorema trata de pontos antípodas sobre uma esfera n -dimensional S^n . Ele foi cojecturado pelo matemático americano de origem polonesa Stanislaw Ulam (1909-1984) e posteriormente demonstrado pelo matemático polonês Karol Borsuk (1905-1982). Apresentamos aqui o enunciado e demonstração para o caso da S^1 .

Teorema 3.5 (Teorema de Borsuk-Ulam para S^1). *Seja $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação contínua. Então existe um ponto $x \in S^1$ (cuja antípoda denotamos por $-x$) tal que $f(x) = f(-x)$.*

Demonstração. Dada a circunferência $S^1 \subset \mathbb{R}^2$, consideremos um ponto x sobre S^1 e definamos como a *coordenada angular* α de x a medida (no sentido anti-horário) do arco formado entre o raio orientado na horizontal do lado direito e o raio que liga o centro de S^1 e x como na Figura 3.1. Definamos uma autoaplicação contínua g no intervalo fechado $I = [-1, 1]$ dada por

$$g(y) = f(x) - f(-x) = f(\alpha) - f(\alpha \pm \pi),$$

na qual para cada $y \in I$ tomamos uma reta perpendicular ao eixo horizontal passando por y associando o ponto x ao seu simétrico x^* em relação ao eixo horizontal, como na Figura 3.2.

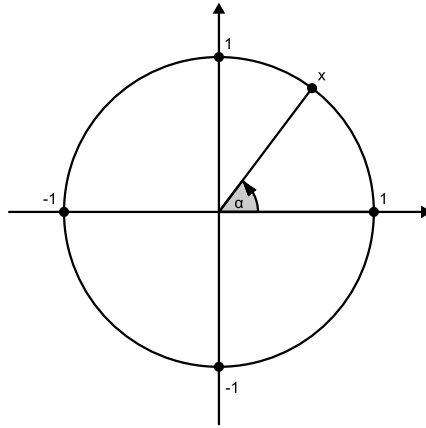


Figura 3.1

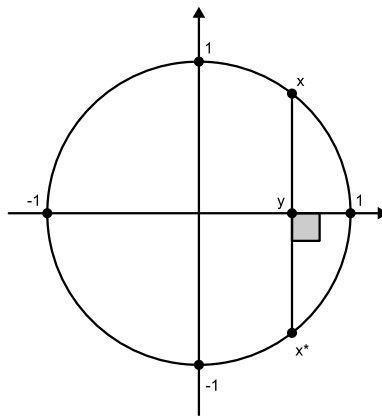


Figura 3.2

Aplicamos agora g nas fronteiras do intervalo fechado $I = [-1, 1]$

$$\begin{aligned} g(1) &= f(0) - f(\pi) \\ g(-1) &= f(\pi) - f(0) \implies g(1) = -g(-1). \end{aligned}$$

Se $g(1) = 0$ o teorema está demonstrado. Caso contrário, temos como decorrência direta do teorema do valor intermediário que existe $y_0 \in I$ tal que $g(y_0) = 0$, e, portanto, existe $x_0 \in S^1$ tal que $f(x_0) - f(-x_0) = 0$, o que implica $f(x_0) = f(-x_0)$. \square

3.3 Teorema do Ponto Fixo de Brouwer

Apresentaremos agora um teorema que garante que qualquer autoaplicação de um intervalo fechado ou do disco D^2 tem ponto fixo. Através de homeomorfismos, o teorema se estende automaticamente a qualquer polígono, isto é, qualquer polígono é um espaço de ponto fixo. Com base nisso faremos a demonstração para um quadrado.

Este teorema é conhecido como o Teorema do ponto fixo de Brouwer, em homenagem ao matemático holandês Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1996).

Teorema *Seja f uma autoaplicação contínua qualquer em A , onde A denota o disco D^2 ou um intervalo fechado da reta real. Então f tem pelo menos um ponto fixo, isto é, A é um espaço de ponto fixo*

Demonstração. Seja $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ uma aplicação contínua. Se $f(a) = a$ ou $f(b) = b$ o teorema está demonstrado. Caso contrário temos que f desloca o ponto a para a direita e o ponto b para a esquerda no intervalo $[a, b]$. Agora consideremos um ponto $m_1 = \frac{a+b}{2}$ dividindo o intervalo I_1 em duas metades. Se $f(m_1) = m_1$ o teorema está demonstrado, senão o ponto m_1 é deslocado para a direita ou para a esquerda. Dessa forma temos que uma das metades é deslocada dentro do intervalo correspondente, isto é, um dos intervalos é levado no interior dele mesmo através da f . Chamemos esse novo intervalo de I_2 , então f leva pelo menos uma das extremidades nela mesma (o que conclui a demonstração) ou as extremidades são deslocadas dentro do intervalo. Nesse caso subdividimos esse intervalo em duas metades através de um ponto m_2 . Se $f(m_2) = m_2$ encontramos um ponto fixo, senão devemos continuar o processo. O resultado é que ou encontramos um ponto fixo ou obtemos uma sequência infinita de intervalos fechados encaixados $(I_1, I_2, \dots, I_n, \dots)$. Pelo Princípio dos Intervalos Fechados Encaixados (Seção 1.1) temos que existe x_0 tal que $\bigcap I_n = x_0$. Mostremos que x_0 é ponto fixo, isto é, $f(x_0) = x_0$.

Suponhamos que $f(x_0) = y_0$ onde $y_0 \neq x_0$ e y_0 está à direita de x_0 . Pela continuidade da f temos que dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $f(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$. Tomemos ε suficientemente pequeno para que $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ e $(y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon)$ sejam disjuntos. Agora tomemos n suficientemente grande de forma que o intervalo fechado I_n esteja inteiramente contido em $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Então as extremidades de I_n são ambas levadas em pontos às suas respectivas direitas, o que contradiz o fato de que a extremidade da direita do intervalo se move para sua esquerda. Temos então que $f(x_0) = x_0$, o que conclui a demonstração do teorema para um intervalo fechado.

Observemos agora o caso em que a aplicação está definida sobre um quadrado. Como é sabido, um quadrado, um triângulo ou qualquer outro polígono são homeomorfos, assim, a partir dessa demonstração, teremos a validade da propriedade para qualquer espaço homeomorfo a um quadrado.

Seja um quadrado Ξ subdividido em subquadrados Ξ'_i como no Lema 2.5. Rotulemos os vértices de Ξ por 1, 2, 3 e 4. Pelo fato de termos domínio e contradomínio coincidentes podemos ver a aplicação movendo cada ponto do quadrado em outro ponto do mesmo quadrado através de vetores (chamados *vetores deslocamento*) sendo o ponto inicial o x do domínio e o ponto final $f(x)$. Para ficar mais claro, sejam pontos p e $q = f(p)$, então o vetor deslocamento é dado como $\vec{v} = (p, q)$.

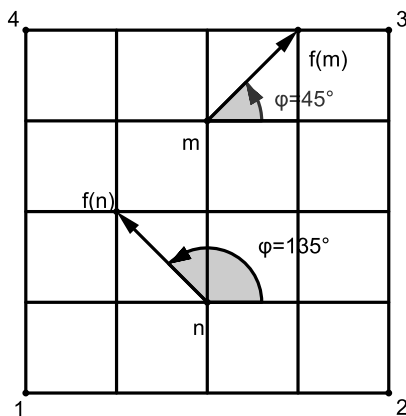


Figura 3.3

Se pelo menos um vértice da subdivisão não se move o teorema está provado. Suponhamos então que todos os vértices se deslocam para outros vértices dentro do quadrado, o que implica que todos são rotulados. Os vértices dos subquadrados que pertencem ao bordo de Ξ são dados de acordo com seu deslocamento (isto é, de acordo com o ângulo φ formado por \vec{v} e o eixo coordenado horizontal do lado direito que passa pela origem de \vec{v} medido no sentido anti-horário) de acordo com a Tabela 3.1 de forma a satisfazer, em última instância, às condições descritas no Lema 2.5, isto é, quando houver a possibilidade de escolha de rótulos para um vértice, essa escolha deve ser feita observando-se tal Lema. Os vértices internos são rotulados apenas de acordo com a Tabela 3.1 sem que precisemos nos preocupar com as hipóteses do Lema 2.5.

Estando obviamente de acordo com as hipóteses do Lema 2.5, temos que pelo menos um Ξ' tem três rótulos diferentes. Esse fato é verdadeiro para qualquer subdivisão σ_n do quadrado Ξ . Consideremos então a sequência $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \dots, \sigma_n, \dots)$ de subdivisões de Ξ . Construamos σ_n dividindo cada lado de Ξ em 2^n partes iguais por pontos e ligando esses pontos através de segmentos paralelos aos lados de Ξ . É importante observar que as medidas das arestas dos Ξ' tendem a zero quando n tende a infinito. Tomemos ainda em cada subdivisão σ_n um quadrado que tenha pelo menos três vértices diferentes que será denotado por Ξ'_n e denotemos seus vértices por x_n, y_n, z_n e w_n .

O quadrado Ξ é limitado e fechado em \mathbb{R}^2 , logo é compacto. Então podemos considerar uma sequência de vértices $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ convergindo para um ponto $p \in \Xi$ (se essa sequência não convergir, por compacidade, podemos tomar uma subsequência de (x_n) convergindo para p). Como as medidas dos lados dos Ξ' tendem a zero para n

Ângulo	rótulo
$\varphi = 0$	1 ou 4
$0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$	1
$\varphi = \frac{\pi}{2}$	1 ou 2
$\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$	2
$\varphi = \pi$	2 ou 3
$\pi < \varphi < \frac{3\pi}{2}$	3
$\varphi = \frac{3\pi}{2}$	3 ou 4
$\frac{3\pi}{2} < \varphi < 2\pi$	4

Tabela 3.1

tendendo a infinito, temos que as sequências (y_n) , (z_n) e (w_n) também convergem para p (se não forem convergentes podemos tomar novamente pela compacidade respectivas subsequências convergindo para p). Mostraremos que p é um ponto fixo.

Suponhamos que $f(p) = q$ com $p \neq q$ e que o ponto q esteja acima de p , isto é, o vetor \vec{pq} tem ângulo entre 0 e π , e portanto, de acordo com a Tabela 3.1, p é rotulado por 1 ou 2. Separemos então os pontos p e q por uma reta r . Como f é contínua, para cada vizinhança ε de q é possível encontrar uma vizinhança δ de p de tal forma que as imagens dessa última pertençam à primeira. Tomemos ε suficientemente pequeno para que as duas vizinhanças não tenham nenhum ponto em comum com r . Para n suficientemente grande temos que todos os vértices de Ξ_n pertencem a vizinhança de δ , pela continuidade todos os pontos dessa vizinhança são deslocados para pontos na vizinhança ε , então todos os vetores deslocamento tem ângulo entre 0 e π , o que implica que todos os vértices são rotulados por 1 ou 2. Contradição, uma vez que pelo menos três rótulos desse quadrado são diferentes. Os casos em que a imagem q está abaixo, estritamente à direita ou estritamente à esquerda de p são análogos, chegando à mesma contradição. Logo o ponto p não se move, isto é, é um ponto fixo. \square

3.4 Retração

O conceito de retração está intimamente ligado à ideia de ponto fixo. Na verdade, como veremos a seguir, é possível definir a retração através de ponto fixo.

Definição 3.6. *Seja X um conjunto e $Y \subset X$. Dizemos que Y é uma retração de X se é possível determinar uma aplicação contínua $f : X \rightarrow Y$ de tal forma que são preservados os pontos de Y através da f , isto é, $f|_Y = \text{Id}_Y$, ou seja, $f \circ i = \text{Id}_Y$, onde $i : Y \hookrightarrow X$ é a aplicação inclusão. Ou, equivalentemente, todos os pontos de Y são*

pontos fixos através da f . Neste caso, f é uma retração.

A importância do conceito de retração pode ser vista claramente no teorema que segue:

Teorema 3.7. *Seja Y uma retração de X . Se X é um espaço de ponto fixo então Y também goza da propriedade.*

Demonstração. Seja $f : Y \rightarrow Y$ uma aplicação contínua qualquer e $g : X \rightarrow Y$ uma retração. Definamos $\varphi : X \rightarrow Y$ por $\varphi = f \circ g$ que é obviamente uma aplicação contínua por ser composta de contínuas. Uma vez que por hipótese $Y \subset X$ podemos considerar $\varphi : X \rightarrow X$. Como X tem a propriedade do ponto fixo a aplicação φ possui pelo menos um ponto fixo p , cuja imagem $\varphi(p) \in Y$ e, portanto, $p \in Y$. Agora como g é a identidade em Y temos que $\varphi = f \circ g = f$, isto é, φ e f coincidem em Y . Assim, p é um ponto fixo através de qualquer aplicação contínua $f : Y \rightarrow Y$, logo Y é um espaço de ponto fixo. \square

Corolário 3.8. *Não há retração entre D^2 ou polígono qualquer e seus respectivos bordos.*

Demonstração. Inicialmente vamos fazer a demonstração para D^2 e seu bordo S^1 . Observemos que S^2 não é um espaço de ponto fixo, pois a aplicação rotação por um ângulo $\theta \neq 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, desloca todos seus pontos. Enquanto que D^2 é um espaço de ponto fixo, uma vez que D^2 é homeomorfo a um quadrado (que é um espaço de ponto fixo como demonstrado na Seção 3.3). A contra-positiva do Teorema 3.7 garante que se Y não é um espaço de ponto fixo então X não é um espaço de ponto fixo ou Y não é uma retração em X . Desde que $S^1 \subset D^2$ não é um espaço de ponto fixo decorre que ou D^2 não é espaço de ponto fixo ou S^1 não é uma retração de D^2 . Visto que D^2 é um espaço de ponto fixo, então segue o resultado. Agora, como quaisquer polígonos são homeomorfos uns aos outros, como já citado no início desta seção, temos a demonstração estendida para os outros casos. \square

4 Grau de Uma Aplicação

4.1 Aplicações Contínuas da S^1

Como já definimos na Seção 3.2, um ponto qualquer da S^1 pode ser expresso em termos de sua coordenada angular α , onde $\alpha \in [0, 2\pi]$.

Seja $f : S^1 \rightarrow S^1$ levando um ponto $x \in S^1$ com coordenada angular α em um ponto $y = f(x)$ com coordenada angular β , como ilustra a Figura 4.1. Então β pode ser dado em função de α , isto é $\beta = \varphi(\alpha)$ onde a $\varphi : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma aplicação que leva o ângulo α no β definida para valores de α no intervalo $[0, 2\pi]$. Como β pode assumir diversos valores para um mesmo α temos que φ é multivaluada e está definida a menos de $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Esta aplicação é chamada aplicação correspondente a f .

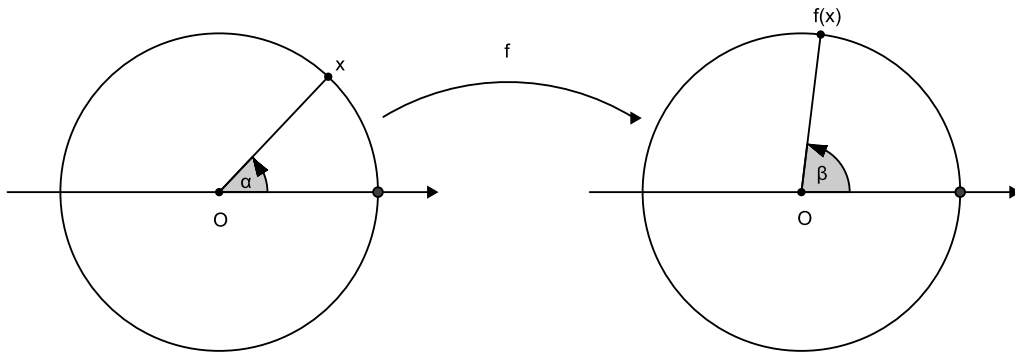


Figura 4.1

Um exemplo é dado na Figura 4.2 para a aplicação identidade $f = \text{Id} : S^1 \rightarrow S^1$ e a aplicação correspondente $\varphi(\alpha) = \alpha + 2n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ definida em $[0, 2\pi]$, a qual pode ser entendida como tendo vários ramos. Consideremos apenas um ramo contínuo unicamente *valuado* dessa aplicação, tomando-o com a aplicação φ e obtemos a equação

$$\varphi(2\pi) - \varphi(0) = 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (4.1)$$

que nos diz que $\varphi(0)$ e $\varphi(2\pi)$ são coordenadas angulares do mesmo do mesmo ponto da S^1 . O sentido geométrico da equação 4.1 é que quando o ponto x dá uma única volta em torno da S^1 , sua imagem $f(x)$ também se move continuamente sobre a S^1 , contudo

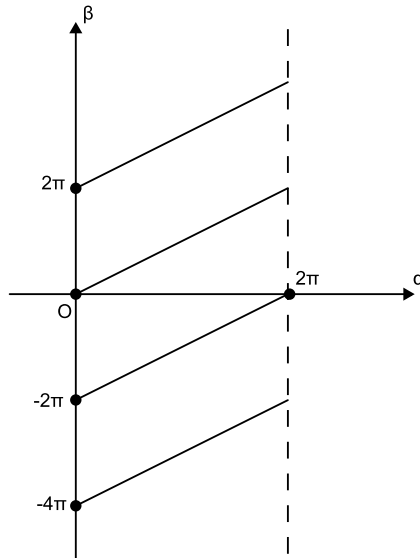


Figura 4.2

não necessariamente de maneira uniforme, isto é, a imagem de x pode “acelerar”, “desacelerar” ou mesmo “parar por algum tempo”. Essa imagem pode também dar várias voltas (isto é, um número $n \in \mathbb{N}$ de voltas) em torno de S^1 , mas, ao fim, retorna ao ponto inicial.

4.2 Primeira Definição de Grau de uma Aplicação

Definição 4.1. *No exposto acima dizemos que n , que representa o número de voltas da imagem de um ponto $x \in S^1$ qualquer através de uma aplicação f , é o grau de f .
Notação: $\deg f = n$.*

Dessa forma, a uma aplicação $f : S^1 \rightarrow S^1$ não corresponde apenas uma aplicação $\beta(\alpha)$ definida em $[0, 2\pi]$ satisfazendo a condição da equação 4.1 em suas extremidades.

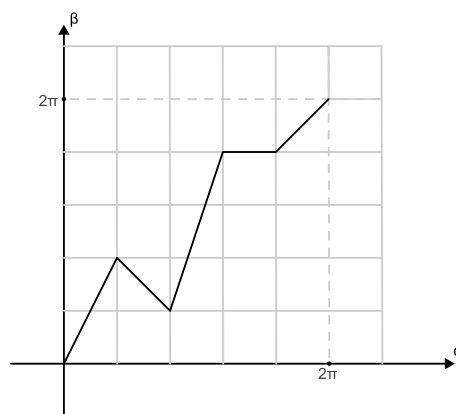


Figura 4.3

Reciprocamente, qualquer aplicação φ define uma autoaplicação contínua de S^1 . A Figura 4.3 é um exemplo que mostra como x e $f(x)$ se movem ao longo da S^1 .

Proposição 4.2. *Dadas duas aplicações f_0 e f_1 nas condições da definição, sejam $\varphi_0, \varphi_1 : [a, b] \rightarrow [a, b]$ as aplicações correspondentes. Então φ_0 e φ_1 são homotópicas.*

Demonstração. De fato basta que tomemos entre as duas aplicações a seguinte homotopia:

$$\varphi_t(\alpha) = (1 - t)\varphi_0(\alpha) + t\varphi_1(\alpha), \quad t \in [0, 1] \quad (4.2)$$

O parâmetro t deve ser entendido como o tempo decorrido após a deformação iniciar, a deformação, por sua vez, pode ser entendida como um movimento vertical uniforme que desloca, para cada α , cada ponto de um gráfico em seu ponto correspondente em outro gráfico. \square

Proposição 4.3. *Duas autoaplicações $f_0, f_1 : S^1 \rightarrow S^1$ são homotópicas se, e somente se, $\deg f_0 = \deg f_1$.*

Demonstração. Inicialmente assumamos que existe uma homotopia entre f_0 e f_1 . Então essa homotopia também deforma as aplicações correspondentes $\varphi_0(\alpha)$ e $\varphi_1(\alpha)$ e as diferenças $\varphi_0(2\pi) - \varphi_0(0)$ e $\varphi_1(2\pi) - \varphi_1(0)$ coincidem porque cada diferença descreve a mudança de coordenadas angulares de um mesmo ponto sobre a S^1 , isto é, suas coordenadas diferem por $2n\pi$. Assim, qualquer deformação contínua preserva o grau da aplicação.

Reciprocamente, sejam aplicações f_0 e f_1 tais que $\deg f_0 = \deg f_1 = n$. Consideremos as aplicações correspondentes $\varphi_0(\alpha)$ e $\varphi_1(\alpha)$ ligando-as com a homotopia descrita pela equação 4.2. Então a família de aplicações $\varphi_t(\alpha)$ satisfaz a equação 4.1 pois:

$$\begin{aligned} \varphi_t(2\pi) - \varphi_t(0) &= (1 - t)\varphi_0(2\pi) + t\varphi_1(2\pi) - (1 - t)\varphi_0(0) - t\varphi_1(0) \\ &= (1 - t)[\varphi_0(2\pi) - \varphi_0(0)] + t[\varphi_1(2\pi) - \varphi_1(0)] \\ &= (1 - t)[2n\pi] + t[2n\pi] \\ &= 2n\pi. \end{aligned}$$

Isso quer dizer que a família de aplicações $\varphi_t(\alpha)$, $t \in [0, 1]$, corresponde à família de aplicações contínuas f_t da S^1 em si mesma. Quando o parâmetro t muda de 0 para 1, o ponto $f_t(x)$ é movido ao longo do arco circular do ponto $f_0(x)$ para o ponto $f_1(x)$ de maneira uniforme, isto é, uma é deformada continuamente na outra. \square

Concluimos dessa proposição que o grau de uma aplicação é um invariante homotópico.

Proposição 4.4. *Toda aplicação contínua $f : S^1 \rightarrow S^1$ de grau n , $n \neq 1$ tem pelo menos $|n - 1|$ pontos fixos.*

Demonstração. Seja a aplicação $F(\alpha) : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $F(\alpha) = \varphi(\alpha) - \alpha$, onde α é um ramo com único valor. Da equação 4.1 vem:

$$\begin{aligned} F(2\pi) - F(0) &= \varphi(2\pi) - 2\pi - \varphi(0) \\ &= 2n\pi - 2\pi \\ &= 2(n-1)\pi \end{aligned}$$

Tomemos $F(0) = \varphi(0) = \beta_0$. Temos que

$$F(2\pi) = \beta_0 + 2(n-1)\pi.$$

Suponhamos $\beta_0 < \beta_0 + 2\pi(n-1)$ e analisemos agora o intervalo fechado $[\beta_0, \beta_0 + 2\pi(n-1)]$. Sem perda de generalidade, façamos $\beta_0 = 0$, então temos que o comprimento do intervalo $[0, 2\pi(n-1)]$ é $2\pi|n-1|$ que implica que o intervalo tem pelo menos $|n-1|$ pontos que distam um do outro um múltiplo de 2π . Pelo teorema do valor intermediário existem pontos $\alpha_i \in [0, 2\pi]$, $i = 1, 2, \dots, |n-1|$ para os quais a aplicação $F(\alpha)$ assume valores iguais aos números acima, isto é $F(\alpha_i) = 2\pi k_i$, onde k_i é inteiro. Temos então que

$$F(\alpha_i) = \varphi(\alpha_i) - \alpha_i = 2\pi k_i \implies \varphi(\alpha_i) = \alpha_i + 2\pi k_i \quad (4.3)$$

ou seja, os $|n-1|$ pontos α_i são pontos fixos da aplicação φ . \square

O caso em que $\deg f = 1$ é especial. Existem aplicações contínuas de grau 1 que têm pontos fixos e outras que não têm. Por exemplo consideremos as aplicações r_θ , $0 < \theta < 2\pi$, e $\text{Id} : S^1 \rightarrow S^1$, onde r_θ é a aplicação rotação e Id é a aplicação identidade. Sabemos que $\deg r_\theta = \deg \text{Id} = 1$. Porém r_θ claramente não possui pontos fixos, ao passo que, pela aplicação identidade, todos os pontos da S^1 são fixos.

Após definir o grau de uma autoaplicação contínua da S^1 , é natural que o definamos para uma autoaplicação contínua $f : S^2 \rightarrow S^2$, onde S^2 representa a esfera unitária no \mathbb{R}^3 . Todavia a extensão da definição anterior torna-se inviável dada a sua dificuldade, dessa forma devemos fornecer uma nova definição para o grau de uma autoaplicação contínua da S^1 que admite uma generalização para o caso da esfera S^2 .

4.3 Segunda Definição de Grau de uma Aplicação

A ideia principal aqui é contar o número de imagens inversas para cada ponto da S^1 . Baseia-se na observação de que em algum sentido (algébrico) esse número é o mesmo para todos os pontos.

Como na Definição 4.1 consideremos a aplicação $\beta = \varphi(\alpha) = n\alpha$, $n \neq 0$, onde n denota o grau da aplicação contínua $f : S^1 \rightarrow S^1$. Essa aplicação leva no mesmo ponto da imagem os pontos da S^1 que diferem suas coordenadas angulares a menos de

$\frac{k}{|n|}2\pi, k = 0, 1, \dots, |n| - 1$. Isso quer dizer que cada ponto da imagem tem exatamente $|n|$ imagens inversas. Para um determinado ponto $\beta' \in S^1$ fazemos o seguinte procedimento para encontrar suas imagens inversas. Tracemos retas paralelas ao eixo α através da equação $\beta = \beta' + 2k\pi, k = 0, 1, \dots, |n| - 1$ e identifiquemos suas interseções com o gráfico da aplicação $\varphi(\alpha)$ como na Figura 4.4. Tomando, por exemplo, $\beta' = \pi$ e $n = 3$ desenhamos as retas $\beta = \pi, \beta = 3\pi$ e $\beta = 5\pi$. A cada ponto da interseção

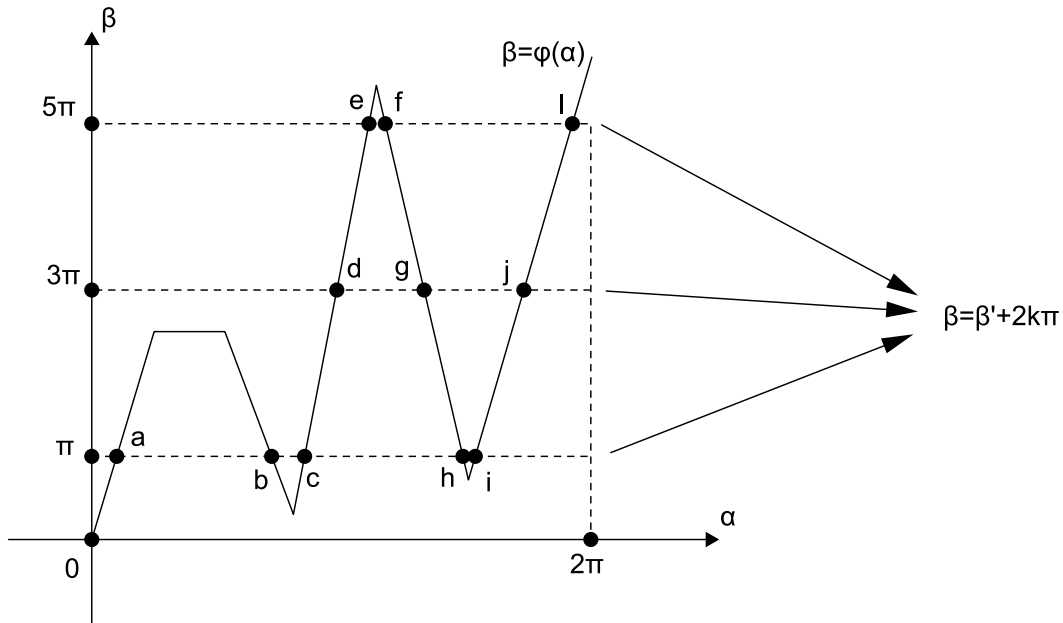


Figura 4.4

associemos o valor $+1$ se nesse ponto a aplicação é crescente, -1 se for decrescente e 0 se for constante. Observemos que se um vértice tocar a linha horizontal ele deveria receber simultaneamente $+1$ e -1 , o que, obviamente, não afeta a soma algébrica (a soma dos números com seus respectivos sinais). Assim obtemos:

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	l
+1	-1	+1	+1	+1	-1	-1	-1	+1	+1	+1

Agora contemos o número de imagens inversas para $\beta' = \pi$ fazendo a soma algébrica:

$$1 - 1 + 1 + 1 + 1 - 1 - 1 - 1 + 1 + 1 + 1 = 7 - 4 = 3$$

que é exatamente o grau da f .

Apesar de não ser regra, temos que, em geral, a soma algébrica das imagens inversas é a mesmo para todos os pontos, sendo essa afirmação válida para qualquer aplicação linear por partes como $\varphi(\alpha) = n\alpha, n \neq 0$. Mas qualquer aplicação linear por partes pode ser obtida a partir de uma aplicação linear através de uma homotopia. Com a

homotopia, para alguns pontos, tem-se que imagens inversas podem surgir ou desaparecer, mas isso sempre acontece em pares com sinais opostos, o que não afeta a soma algébrica das imagens inversas de um ponto, sendo então exatamente igual ao grau da aplicação (definido acima). Assim fazemos nossa segunda definição de grau de uma autoaplicação contínua da S^1 :

Definição 4.5. *O grau de uma autoaplicação contínua da S^1 é a soma algébrica das imagens inversas de um ponto qualquer sobre S^1 .*

Observação 4.6. Nos casos para os quais os pontos de $f : S^1 \rightarrow S^1$ tem infinitas imagens inversas fazendo a Definição 4.5 perder seu sentido, substituímos f por uma outra aplicação contínua g homotópica à f cujo grau esteja bem definido. Pela Proposição 4.3 se f e g são homotópicas, então $\deg f = \deg g$.

4.4 Aplicações Contínuas da S^2

Definição 4.7 (Circunferência máxima). *Sejam S^2 e $S \subset S^2$. Dizemos que S é uma circunferência máxima de S^2 se S é obtida através da interseção de S^2 com um plano π que contém a origem da S^2 , como ilustrado na Figura 4.5*

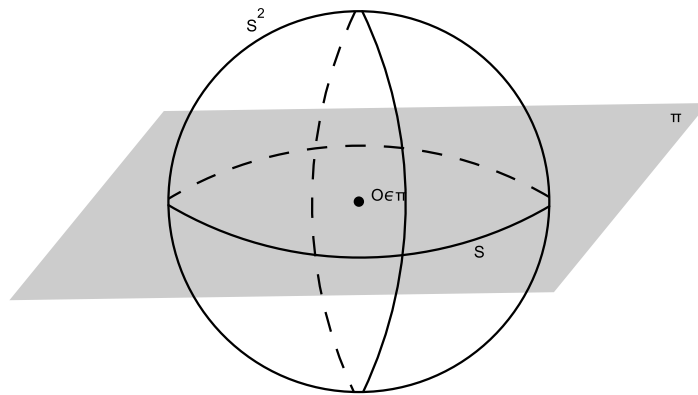


Figura 4.5

Definição 4.8 (Triangulação da S^2). *Uma triangulação σ de S^2 é sua decomposição em triângulos que satisfazem às condições da Definição 2.3. Observemos que uma aresta qualquer de um triângulo é sempre um arco de uma circunferência máxima.*

Um exemplo de triangulação pode ser observado na Figura 4.6, obtida através da projeção de um icosaedro em S^2 . Observemos que S^2 e um icosaedro são topologicamente equivalentes uma vez que são homeomorfos.

Definição 4.9 (Autoaplicação linear por partes da S^2). *Uma autoaplicação contínua linear por partes da S^2 é uma aplicação contínua tal que, dadas duas triangulações σ_1*

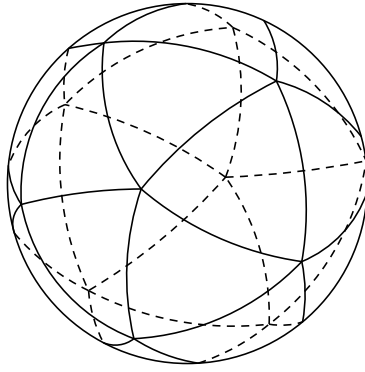


Figura 4.6

e σ_2 de S^2 , em geral distintas, leva linearmente cada triângulo de σ_1 em um triângulo, aresta ou vértice de σ_2 .

Definição 4.10 (Orientação da S^2). Consideremos x um ponto sobre a superfície da S^2 movendo-se ao longo de pequenas circunferências sobre a S^2 , enquanto, de perto, um observador vê a esfera do lado de fora. Dizemos que o ponto move-se na direção positiva se o observador o vê se movimentar no sentido anti-horário.

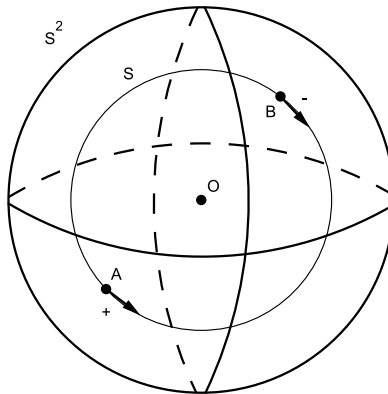


Figura 4.7

Seja a face ABC da triangulação σ_1 da S^2 levada através da aplicação f na face $A'B'C'$ de σ_2 de tal forma que $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ e $f(C) = C'$. Seja a sequência $ABCA$ (observada no sentido anti-horário) com orientação positiva no bordo do triângulo ABC . O triângulo ABC é positivo se sua orientação é preservada por f , isto é, se a sequência $A'B'C'A'$ tem orientação positiva. Por outro lado se a orientação é alterada através de f dizemos que o triângulo ABC é negativo.

Definição 4.11. Seja $f : \sigma_1 \rightarrow \sigma_2$ uma aplicação linear por partes qualquer da esfera S^2 . Consideremos agora um triângulo Δ' de σ_2 com os respectivos triângulos Δ_i de σ_1 que são aplicados em Δ' . Definimos o grau da aplicação f como sendo a soma algébrica dos triângulos Δ_i .

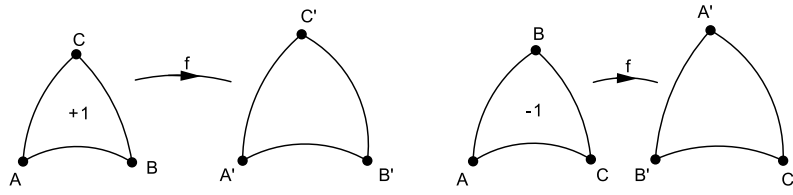


Figura 4.8

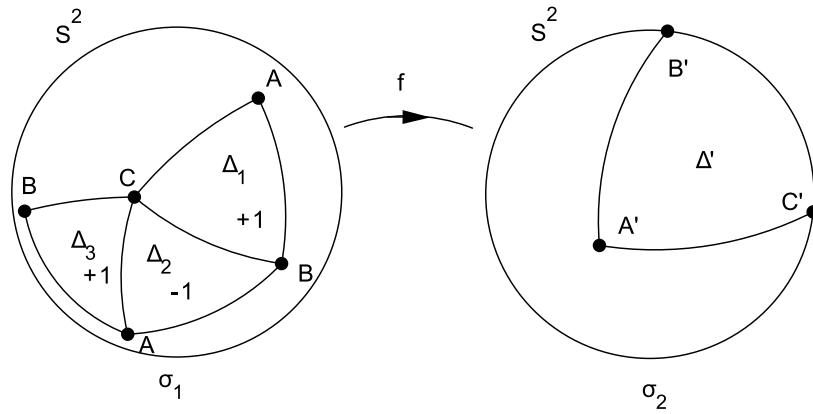


Figura 4.9

No exemplo da Figura 4.9 temos $\deg f = 1 - 1 + 1 = 1$.

Proposição 4.12. *Para quaisquer dois triângulos Δ'_1 e Δ'_2 adjacentes de σ_2 as somas algébricas dos triângulos neles aplicados são iguais.*

Demonstração. Rotulemos os vértices dos triângulos de σ_2 por A' , B' , C' e D' e tomemos dois triângulos $A'B'C'$ e $A'D'B'$ adjacentes como na Figura 4.10. Queremos mostrar que as somas algébricas das imagens inversas de cada triângulo são iguais.

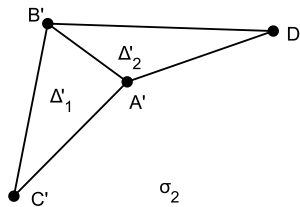


Figura 4.10

Pelo fato da aplicação ser linear por partes, decorre imediatamente da definição que se Δ_1 representa uma face de σ_1 levada sobre ABC então existe uma cadeia de faces $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{n-1}, \Delta_n$ na triangulação que goza das seguintes propriedades:

- i. Quaisquer dois triângulos subsequentes na cadeia tem uma aresta em comum;

- ii. O último triângulo Δ_n é levado em $A'B'C'$ ou em $A'D'B'$;
- iii. Cada um dos triângulos intermediários $\Delta_2, \dots, \Delta_{n-1}$ (se existirem) são aplicados sobre a aresta $A'B'$.

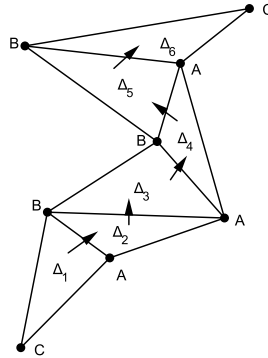


Figura 4.11

A Figura 4.11 exemplifica a ideia apresentada. Os rótulos A , B e C se referem a suas imagens, isto é, cada vértice com rótulo A (respectivamente B e C) é aplicado no vértice A' (respectivamente B' e C') da Figura 4.10. Se Δ_1 é aplicado em $A'B'C'$ preservando a orientação, então Δ_n , quando aplicado em $A'B'C'$ inverte a orientação. Assim, a cadeia de faces apresentada de Δ_1 para Δ_k define um caminho unindo $+ABC$ com $-ABC$ ($+ABC \rightarrow -ABC$). Pela construção, se uma cadeia começa com cada triângulo da primeira triangulação aplicada em $A'B'C'$ ou $A'D'B'$, obtemos os seguintes quatro tipos de caminhos:

$$\begin{aligned}
 +ABC &\rightarrow -ABC \\
 +ABC &\rightarrow +ADB \\
 -ABC &\rightarrow -ADB \\
 +ADB &\rightarrow -ADB
 \end{aligned}$$

O primeiro caso está explicitado na Figura 4.11, os demais na Figura 4.12, respectivamente.

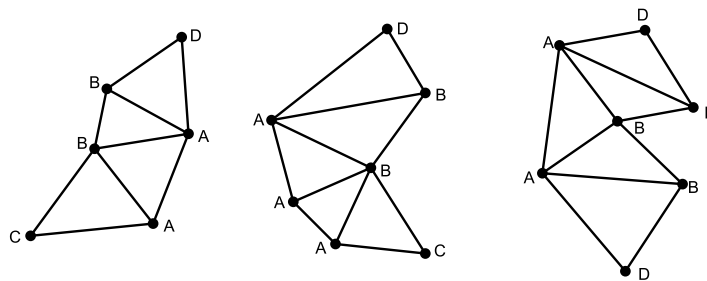


Figura 4.12

Agora denotemos por α , β , γ e δ , respectivamente, os números de caminhos dos tipos apresentados acima. A soma algébrica das imagens inversas de $A'B'C'$ é $\alpha - \alpha +$

$\beta - \gamma = \beta - \gamma$ igual à soma de $A'D'B'$ ($\beta - \gamma + \delta - \delta = \beta - \gamma$). O caso $A'D'B'$ e $A'E'D'$ com o vértice comum $A'D'$ é análogo. Pela transitividade o resultado também está verificado para o par $A'B'C'$ e $A'E'B'$. \square

Lema 4.13. *Sejam f e g autoaplicações contínuas da S^2 , tais que para um ponto x qualquer tenhamos $f(x) \neq -g(x)$, isto é, as imagens de x por f e g não são antípodas. Então f e g são homotópicas e, além disso, $\deg f = \deg g$.*

Demonstração. Podemos ligar os pontos $f(x)$ e $g(x)$ através de um arco de uma circunferência máxima da S^2 , cujo comprimento é menor que o de uma semicircunferência, como na Figura 4.13, uma vez que os pontos não são antípodas. Movendo o ponto $f(x)$ continuamente ao longo desse arco até o ponto $g(x)$ obtemos uma homotopia de f para g , estando portanto nas hipóteses da Proposição 4.3. Uma vez que f e g estão restritas a S^1 , temos que $\deg f = \deg g$. \square

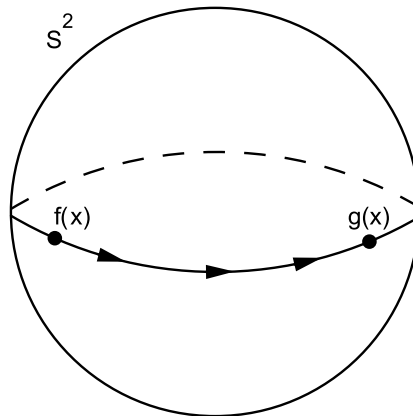


Figura 4.13

Teorema 4.14. *Seja f uma autoaplicação contínua da S^2 . Então:*

- i. Se $\deg f \neq -1$ então f tem ponto fixo.
- ii. Se $\deg f \neq 1$ então existe um ponto na S^2 que é levado em sua antípoda.

Demonstração.

- i. Suponhamos que $\deg f \neq -1$ e que f não tem ponto fixo. Consideremos g a aplicação antípoda, isto é, $g(x) = -x$ para todo x , cujo grau é 1. Como f não tem ponto fixo temos $f(x) \neq -g(x)$ para qualquer x , o que nos conduz ao Lema 4.13. Então, o fato de $\deg g = -1$ implica que $\deg f = -1$, que contradiz a hipótese. Logo, f tem ponto fixo.

- ii. Consideremos agora $\deg f \neq 1$ e $f(x) \neq -x$, para todo $x \in S^2$ e g a aplicação identidade, isto é, $g(x) = x$, cujo grau é 1. Novamente pelas condições do Lema 4.13 vem que $\deg f = 1$, o que contradiz a hipótese. Logo, a aplicação leva um ponto em seu antípoda.

□

Agora suponhamos que nenhuma informação prévia a respeito da aplicação f seja fornecida. Neste caso, temos o seguinte resultado:

Teorema 4.15. *Seja f uma autoaplicação contínua da S^2 . Então f tem ponto fixo ou leva um ponto em seu antípoda.*

Demonstração. Se f não tem ponto fixo temos que $\deg f = -1$. Assumindo que nenhum ponto x é levado em seu antípoda $-x$ podemos novamente utilizar o Lema 4.13 para a aplicação f e a identidade g . Neste caso, $\deg g = 1 \implies \deg f = 1$, o que contradiz a hipótese.

□

5 Homologia Singular

Dado um espaço topológico, associamos um grupo ou uma sequência de grupos chamados grupos de homologia do espaço, com a finalidade de estudar propriedades dos espaços envolvidos. No nosso caso estamos interessados nos grupos de homologia para definirmos o índice de coincidência e, posteriormente, o número de coincidência de Lefschetz entre duas aplicações contínuas.

A Álgebra Homológica originou-se por volta do século XIX através dos trabalhos de Bernhard Riemann, Enrico Betti e de Emmy Noether. A partir disso, técnicas algébricas foram desenvolvidas com aplicações em diversos ramos da Matemática.

A seguir apresentaremos alguns conceitos e resultados de homologia singular e cohomologia que nos possibilitarão definir o conceito de índice de coincidência. Tal índice será utilizado para definir o número de coincidência de Lefschetz para aplicações contínuas entre duas superfícies fechadas, conexas e orientadas.

5.1 Grupo de Homologia Singular

Definição 5.1 (Convexidade). *Seja $C \subset \mathbb{R}^n$. Dizemos que C é convexo se para quaisquer $x, y \in C$ o segmento r que liga x a y está inteiramente contido em C . O fecho convexo de um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é a interseção de todos os conjuntos convexos que contém A .*

Definição 5.2 (Simplexo padrão). *Um p -simplexo padrão (ou um p -simplexo) S em \mathbb{R}^n é o fecho convexo de uma coleção de $p + 1$ pontos $\{x_0, \dots, x_p\}$ na qual $x_1 - x_0, \dots, x_p - x_0$, para qualquer que seja x_0 , formam um conjunto linearmente independente.*

Exemplo 5.3. No \mathbb{R}^n ,

- Um 0-simplexo é um ponto;
- Um 1-simplexo é um segmento;
- Um 2-simplexo é um triângulo;
- Um 3-simplexo é um tetraedro;
- ⋮

A Figura 5.1 representa um 3–simplexo.

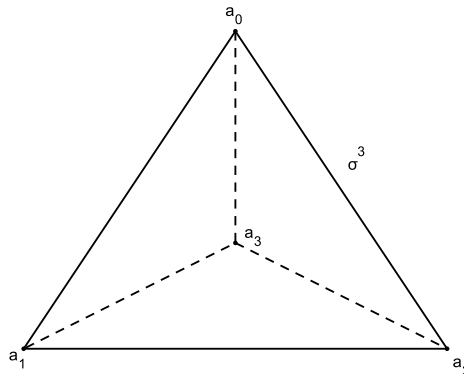


Figura 5.1

Definição 5.4 (Face de um simplexo). *Uma simplexo σ^k é uma face de um simplexo σ^n , $k \leq n$, se cada vértice de σ^k é um vértice de σ^n .*

$$\left. \begin{aligned} \sigma^0 &= \langle a_0 \rangle \\ \sigma^1 &= \langle a_0 a_1 \rangle \\ \sigma^2 &= \langle a_0 a_1 a_2 \rangle \\ \sigma^3 &= \langle a_0 a_1 a_2 a_3 \rangle \end{aligned} \right\} \text{algumas faces de } \sigma^3.$$

Definição 5.5 (Simplexo singular). *Sejam X um espaço topológico e σ^p um simplexo padrão como na Definição 5.2. Definimos como um p –simplexo singular qualquer aplicação contínua:*

$$\varphi : \sigma^p \longrightarrow X.$$

Definição 5.6. *Sejam φ um p –simplexo singular e um inteiro $0 \leq i \leq p$. Definimos $\partial_i(\varphi)$, um $(p - 1)$ simplexo singular em X , como:*

$$\partial_i \varphi(t_0, \dots, t_{p-1}) = \varphi(t_0, t_1, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{p-1}).$$

Dizemos que $\partial_i \varphi$ é a i –ésima face de φ .

Definição 5.7 (Complexo singular). *Seja X um espaço topológico. Um complexo singular $S_n(X)$ é um grupo abeliano livre cuja base contém todos os n –simplexos singulares de X . Um elemento de $S_n(X)$, dito uma n –cadeia singular de X , é da forma $\sum_{\varphi} n_{\varphi} \cdot \varphi$, onde n_{φ} é zero exceto para um número finito de φ .*

Definição 5.8 (Operador bordo). *Uma vez que o i –ésimo operador bordo ∂_i é uma função do conjunto de $(n - 1)$ –simplexos singulares, existe uma única extensão a um*

homomorfismo $\partial_i : S_n(X) \longrightarrow S_{n-1}(X)$ dado por $\partial_i(\sum n_\varphi \cdot \varphi) = \sum n_\varphi \cdot \partial_i \varphi$. Definimos o operador bordo pelo homomorfismo $\partial : S_n(X) \longrightarrow S_{n-1}(X)$ dado por

$$\partial = \partial_0 - \partial_1 + \partial_2 - \cdots + (-1)^n \partial_n = \sum_{i=0}^n (-1)^i \partial_i.$$

Definição 5.9 (Complexo de cadeias). Definimos um complexo de cadeias como a seguinte sequência semiexata de grupos abelianos e homomorfismos

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{n+2}} C_{n+1} \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} C_{n-2} \xrightarrow{\partial_{n-2}} \cdots$$

onde a composição $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$, ou seja, a imagem está contida no núcleo.

Definição 5.10 (Grupo de homologia singular). Denotaremos por $Z_n(X) \subset S_n(X)$ o núcleo de ∂_n , ou seja, o conjunto dos $z \in S_n(X)$ tais que $\partial_n z = 0$. Z_n é chamado um n -ciclo. Denotaremos também por $B_n(X) \subset S_n(X)$ a imagem $\partial_{n+1}(C_{n+1})$, chamada conjunto dos n -bordos. O grupo quociente

$$H_n(X) = \frac{Z_n(X)}{B_n(X)}$$

é chamado o n -ésimo grupo de homologia singular de X .

Em nosso estudo, quando não houver menção, consideraremos os grupos tomando coeficientes em \mathbb{Z} .

Definição 5.11 (Aplicação de cadeias). Sejam C e C' complexos de cadeias cujos operadores bordo são ∂ e ∂' , respectivamente. Definimos a aplicação de cadeias de C em C' como o homomorfismo $f : C \longrightarrow C'$, tal que $\partial' \circ f_n = f_{n-1} \circ \partial$ para cada n . Notemos que se f é uma aplicação de cadeias, $f[Z_n(C)] \subseteq Z_n(C')$ e $f[B_n(C)] \subseteq B_n(C')$ para cada n . Portanto, f induz um homomorfismo em grupos de homologia $f_* : H_n(C) \longrightarrow H_n(C')$.

5.2 Aplicações Induzidas em Homologia Singular

Tomando os grupos graduados $S_*(X) = \{S_i(X)\}$ e os operadores bordos como homomorfismos, obtemos um complexo de cadeias. Assim o grupo de homologia de X é a homologia desse complexo de cadeias. Sejam $f : X \longrightarrow Y$ uma aplicação contínua e φ um n -simplexo singular em X , então existe o n -simplexo singular $f_\#(\varphi) = f \circ \varphi$ em Y . Isto se estende unicamente a um homomorfismo $f_\# : S_n(X) \longrightarrow S_n(Y)$, para todo n .

Proposição 5.12. No exposto acima $f_\# : S_*(X) \longrightarrow S_*(Y)$ é uma aplicação de cadeias.

Demonstração. É suficiente provar que para cada n , o seguinte diagrama é comutativo.

$$\begin{array}{ccc} S_n(X) & \xrightarrow{f_{\#}} & S_n(Y) \\ \downarrow \partial & & \downarrow \partial \\ S_{n-1}(X) & \xrightarrow{f_{\#}} & S_{n-1}(Y) \end{array}$$

Para tanto, observemos que a afirmação é válida em n -simplexos φ e que basta mostrar que $\partial_i f_{\#}(\varphi) = f_{\#} \partial_i(\varphi)$:

- a. $f_{\#} \partial_i(\varphi)(t_0, \dots, t_{n-1}) = f(\varphi(t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{n-1}))$
- b. $\partial_i f_{\#}(\varphi)(t_0, \dots, t_{n-1}) = f_{\#}(\varphi)(t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{n-1}) = f(\varphi(t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{n-1}))$.

Assim, $f_{\#} : S_*(X) \rightarrow S_*(Y)$ é uma aplicação de cadeias e portanto induz um homomorfismo $f_* : H_*(X) \rightarrow H_*(Y)$. □

Teorema 5.13. *Seja $f : X \rightarrow Y$ um homeomorfismo. Então $f_* : H_p(X) \rightarrow H_p(Y)$ é um isomorfismo, para todo n .*

Demonstração. Por hipótese f é homeomorfismo, logo contínua, o que implica a existência de um homomorfismo induzido $f_* : H_*(X) \rightarrow H_*(Y)$, isto é, $f_* : H_p(X) \rightarrow H_p(Y)$ é um homomorfismo para cada p .

Pelo mesmo argumento temos que f^{-1} é contínua, implicando na existência de um homomorfismo induzido $f_*^{-1} : H_*(Y) \rightarrow H_*(X)$, ou seja, para cada p , $f_*^{-1} : H_p(Y) \rightarrow H_p(X)$ é um homomorfismo.

Para provar que f_* é uma isomorfismo resta mostrar que o homomorfismo é bijetor. Para quaisquer x e y em $H_*(X)$ e $H_*(Y)$, respectivamente, vem:

$$\begin{aligned} (f_* \circ f_*^{-1})(y) &= (f \circ f^{-1})_*(y) = Id_*(y) = y, \\ (f_*^{-1} \circ f_*)(x) &= (f^{-1} \circ f)_*(x) = Id_*(x) = x. \end{aligned}$$

Portanto, f_* é bijetora. □

5.3 Sequências Exatas de Homologias

Sejam $A = \{A_n\}$, $B = \{B_n\}$ e $C = \{C_n\}$ complexos de cadeias e

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

uma sequência exata cujos homomorfismos são aplicações de cadeias. Então para cada p existe uma terna associada de grupos de homologia e homomorfismos

$$H_p(A) \xrightarrow{f_*} H_p(B) \xrightarrow{g_*} H_p(C) .$$

Sabemos que essa não é uma sequência exata curta, surge-nos então um questionamento: “o quanto a sequência diverge de ser exata curta?” Estamos pressupondo a existência de um diagrama infinito, como abaixo, cujos diagramas menores (quadrados) comutam.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\
 0 & \longrightarrow & A_n & \xrightarrow{f} & B_n & \xrightarrow{g} & C_n \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial \\
 0 & \longrightarrow & A_{n-1} & \xrightarrow{f} & B_{n-1} & \xrightarrow{g} & C_{n-1} \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots
 \end{array}$$

Consideremos um elemento z no núcleo de C , isto é, $z \in Z_n(C)$, ou seja, $z \in C_n$ e $\partial z = 0$. Como g é um epimorfismo, existe $b \in B_n$ tal que $g(b) = z$. Como consequência de g ser uma aplicação de cadeias vem $g(\partial b) = \partial(g(b)) = \partial z = 0$. O fato de ser exata implica que ∂b está na imagem de f , então seja $a \in A_{n-1}$ com $f(a) = \partial b$. Observemos que $f(\partial a) = \partial f(a) = \partial(\partial b) = 0$, e como f é um monomorfismo, ∂a deve ser zero, e $a \in Z_{n-1}(A)$.

A correspondência $z \longrightarrow a$ de $Z_n(C)$ em $Z_{n-1}(A)$ não está bem definida, observando o número de possibilidades para escolha na construção. É possível, porém, mostrar que a correspondência associada nos grupos de homologia é um homomorfismo bem definido.

Sejam $z, z' \in Z_n(C)$ ciclos homólogos. Então existe $c \in C_{n+1}$ tal que $\partial(c) = z - z'$. Sejam ainda $b, b' \in B_n$ com $g(b) = z$, $g(b') = z'$, e $a, a' \in A_{n-1}$ tal que $f(a) = \partial b$ e $f(a') = \partial b'$. Devemos mostrar que a e a' são ciclos homólogos.

Existe $p \in B_{n+1}$ tal que $g(p) = c$. Pela comutatividade, $g(\partial p) = \partial g(p) = \partial c = z - z'$, então temos que $(b - b') - \partial p \in \ker(g)$, de onde concluímos que $(b - b') - \partial p \in \text{Im}(f)$. Seja ainda $q \in A_n$ tal que $f(q) = (b - b') - \partial p$. Então $f(\partial q) = \partial f(q) = \partial(b - b' - \partial p) = \partial b - \partial b' = f(a) - f(a') = f(a - a')$. Pela injetividade da f , obtemos que $a - a' = \partial q$ e a e a' são ciclos homólogos. Logo, a correspondência induzida nos grupos de homologia está bem definida, portanto é um homomorfismo.

Definição 5.14 (Homomorfismo conectante). *Definimos o homomorfismo obtido acima como homomorfismo conectante para a sequência $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ e o denotamos por*

$$\Delta : H_n(C) \longrightarrow H_{n-1}(A).$$

Teorema 5.15. *Seja $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ uma sequência exata curta de complexos de cadeias. Então a sequência*

$$\dots \xrightarrow{f_*} H_n(B) \xrightarrow{g_*} H_n(C) \xrightarrow{\Delta} H_{n-1}(A) \xrightarrow{f_*} H_{n-1}(B) \xrightarrow{g_*} \dots$$

é exata.

Demonstração. Com base nas Definições 1.5 e 1.6 é necessário mostrar que:

- i. $\text{Im}(f_*) = \ker(g_*)$;
- ii. $\text{Im}(g_*) = \ker(\Delta)$;
- iii. $\text{Im}(\Delta) = \ker(f_*)$.

- i. Iniciaremos a demonstração provando que $g \circ f$, isto é, a composição de dois homomorfismos $f : A \rightarrow B$ e $g : B \rightarrow C$ é o homomorfismo trivial se, e somente se, $\text{Im}(f) \subset \ker(g)$.

Consideremos $g \circ f = 0$ e seja $y \in \text{Im}(f)$. Por definição, existe $x \in A$ com $f(x) = y$, então $g(y) = g[f(x)] = (g \circ f)(x) = 0$, de onde concluimos que $y \in \ker(g)$. Logo $\text{Im}(f) \subset \ker(g)$.

Consideremos agora $\text{Im}(f) \subset \ker(g)$ e seja $x \in A$ arbitrário. Visto que $f(x) \in \text{Im}(f) \subset \ker(g)$, então $g[f(x)] = (g \circ f)(x) = 0$, que indica que $g \circ f = 0$.

Como por hipótese a sequência curta

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

é exata, temos $\text{Im}(f) = \ker(g)$ (particularmente $\text{Im}(f) \subset \ker(g)$), que implica que $g \circ f = 0$. Além disso, $g_* \circ f_* = (g \circ f)_* = 0_*$, portanto $\text{Im}(f_*) \subset \ker(g_*)$.

Mostremos finalmente que $\ker(g_*) \subset \text{Im}(f_*)$. Seja $\alpha \in \ker(g_*) \subset H_n(A)$ e tomemos um ciclo $z \in \alpha \subset Z_n(B) \subset B_n$. Como $g_*(\alpha) = 0$, vem que $g(z) \in B_n(C)$. Dessa forma existe $y \in C_{n+1}$ tal que $\partial(y) = g(z)$, e como g é epimorfismo, existe $x \in B_{n+1}$ com $g(x) = y$. Assim:

$$g[z - \partial x] = g(z) - g[\partial x] = g(z) - \partial[g(x)] = g(z) - \partial(y) = g(z) - g(z) = 0.$$

Logo, $z - \partial x \in \ker(g) = \text{Im}(f)$, então existe $w \in A_n$ tal que $f(w) = z - \partial x$. Temos então $f[\partial(w)] = \partial f(w) = \partial(z - \partial x) = \partial z = 0$. Do fato de f ser monomorfismo, temos que $\partial w = 0$, isto é, $w \in Z_n(A)$. Seja $\beta = p(w) \in H_n(A)$, onde p é a projeção natural $p : Z_n(A) \rightarrow H_n(A)$. Como $z \in \alpha$ e $\partial x \in B_n(B)$, temos $f(w) = z - \partial x \in \alpha$. Portanto, $f_*(\beta) = \alpha$, ou seja, $\ker(g_*) \subset \text{Im}(f_*)$.

- ii. $\text{Im}(g_*) = \ker(\Delta)$

Se $\alpha \in \text{Im}(g_*) \subset H_n(C)$, então existe $\beta \in H_n(B)$ tal que $g_*(\beta) = \alpha$. Tomemos um ciclo $z \in \beta \subset Z_n(B) \subset B_n$ e, pela definição de g_* , temos $g(z) \in \alpha \subset C_n$. Uma vez que $z \in Z_n(B)$, $\partial z = 0$. Podemos então escolher $v = 0 \in A_{n-1}$ de forma a satisfazer $f(v) = 0 = \partial z$. Da definição de $\Delta : H_n(C) \rightarrow H_{n-1}(A)$ vem que $\Delta(\alpha) = p(v) = 0$ e então $\alpha \in \ker(\Delta)$, isto é, $\text{Im}(g_*) \subset \ker(\Delta)$.

Consideremos agora $\alpha \in \ker(\Delta) \subset H_n(C)$. Tomemos um ciclo $z \in \alpha \subset Z_n(C) \subset C_n$. Pela definição de $\Delta(\alpha)$, existe $u \in B_n$ e $v \in A_{n-1}$ tais que $g(u) = z$ e $f(v) = \partial u$, onde $v \in \Delta(\alpha) \subset Z_{n-1}(A)$. Como $\Delta(\alpha) = 0 \in H_{n-1}(A)$, temos $v \in B_{n-1}(A)$. Logo, existe $w \in A_n$ tal que $\partial w = v$. Então seja $y = u - f(w) \in B_n$, que implica que $\partial y = \partial u - \partial f(w) = \partial u - f(\partial w) = \partial u - f(v) = \partial u - \partial u = 0$, logo $y \in Z_n(B)$. Seja $\beta \in H_n(B)$ tal que $y \in \beta$, como $g(y) = g[u - f(w)] = g(u) - g[f(w)] = g(u) = z$ temos $g_*(\beta) = \alpha \in \text{Im}(g_*)$. Portanto, $\ker(\Delta) \subset \text{Im}(g_*)$.

iii. $\text{Im}(\Delta) = \ker(f_*)$

Seja $\alpha \in \text{Im}(\Delta) \subset H_{n-1}(A)$. Então existe $\beta \in H_n(C)$ tal que $\Delta(\beta) = \alpha$. Tomemos um ciclo $z \in \beta \subset Z_n(C) \subset C_n$. Pela definição de Δ , existem $u \in B_n$ e $v \in A_{n-1}$ com $g(u) = z$, $v \in \alpha$, $f(v) = \partial u$. Daí $f_*(\alpha) = 0$, então $\alpha \in \ker(f_*)$. Portanto, $\text{Im}(\Delta) \subset \ker(f_*)$.

Consideremos agora $\alpha \in \ker(f_*) \subset H_{n-1}(A)$. Tomemos um ciclo $z \in \alpha \subset Z_{n-1}(A) \subset A_{n-1}$. Como $f_*(\alpha) = 0$, existe $u \in B_n$ tal que $\partial u = f(z)$. Seja $y = g(u) \in C_n$. Então, temos $\Delta(y) = \Delta[g(u)] = g(\partial u) = g[f(z)] = 0$. Logo, $y \in Z_n(C)$. Seja $\beta \in H_n(C)$ tal que $y \in \beta$. Como $g(u) = y$, $f(z) = \partial u$, concluímos pela definição de $\Delta(\beta)$ que $\Delta(\beta) = \alpha \in \text{Im}(\Delta)$. Portanto, $\ker(f_*) \subset \text{Im}(\Delta)$.

Atendendo aos itens (i.), (ii.) e (iii.) temos que a sequência é exata. □

Destacamos que a construção do homomorfismo conectante é (convenientemente) natural, isto é, se

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & C & \xrightarrow{f} & D & \xrightarrow{g} & E & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta & & \downarrow \gamma & & \\ 0 & \longrightarrow & C' & \xrightarrow{f'} & D' & \xrightarrow{g'} & E' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

é um diagrama de complexos de cadeias e aplicações de cadeias de grau zero no qual as linhas são exatas e os retângulos são comutativos, então vale a comutatividade em cada retângulo do diagrama associado:

$$\begin{array}{ccccccccccc} \cdots & \longrightarrow & H_n(D) & \xrightarrow{g_*} & H_n(E) & \xrightarrow{\Delta} & H_{n-1}(C) & \xrightarrow{f_*} & H_{n-1}(D) & \longrightarrow & \cdots \\ & & \downarrow \beta_* & & \downarrow \gamma_* & & \downarrow \alpha_* & & \downarrow \beta_* & & \\ \cdots & \longrightarrow & H_n(D') & \xrightarrow{g'_*} & H_n(E) & \xrightarrow{\Delta'} & H_{n-1}(C') & \xrightarrow{f'_*} & H_{n-1}(D) & \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

5.4 Grupo de Cohomologia

Nesta seção faremos uma breve introdução à Teoria de Cohomologia Singular de acordo com [7] (p.88).

Sejam A e G dois grupos abelianos e denotemos por $\text{Hom}(A, G)$ o grupo abeliano de homomorfismos de A para G . Se $\phi : A \longrightarrow B$ é um homomorfismo, então existe um

homomorfismo induzido

$$\phi^\# : \text{Hom}(B, G) \longrightarrow \text{Hom}(A, G)$$

definido por $\phi^\#(f) = f \circ \phi$. Notemos que se $\psi : B \longrightarrow C$ é um homomorfismo, então $(\psi \circ \phi)^\# = \phi^\# \circ \psi^\#$.

Para um complexo de cadeias $\{C_n, \partial\}$ e um grupo abeliano G , definimos os grupos abelianos

$$C^n = \text{Hom}(C_n, G).$$

Então o operador bordo $\partial : C_{n+1} \longrightarrow C_n$ induz

$$\partial^\# : C^n \longrightarrow C^{n+1}$$

e a composição $\partial^\# \circ \partial^\# = (\partial \circ \partial)^\# = 0$. Definimos um complexo de cocadeias como sendo uma coleção de grupos abelianos e homomorfismos $\{C^n, \delta\}$ onde $\delta : C^n \longrightarrow C^{n+1}$ e $\delta \circ \delta = 0$. O homomorfismo δ é chamado operador cobordo.

Notemos que se $\{C^n, \delta\}$ é um complexo de cocadeias e se definirmos $D_n = C^{-n}$ e $\partial = \delta : D_n \longrightarrow D_{n-1}$, então $\{D_n, \partial\}$ torna-se um complexo de cadeias. Logo, as duas noções são duais uma da outra.

As definições básicas para complexos de cadeias podem ser repetidas para complexos de cocadeias. Se $\{C^n, \delta\}$ e $\{D^n, \delta'\}$ são complexos de cocadeias, uma aplicação de cocadeias f de grau k é uma coleção de homomorfismos

$$f : C^n \longrightarrow D^{n+k}$$

tal que $f \circ \delta = \delta' \circ f$. Duas aplicações de cocadeias f e g de grau zero são homotopias de cocadeias se existe uma coleção de homomorfismos

$$T : C^n \longrightarrow D^{n-1}$$

tal que $\delta'T + T\delta = f - g$. T é uma homotopia de cocadeias.

Notemos que se $\{C_n, \partial\}$ e $\{D_n, \partial'\}$ são complexos de cadeias e $f, g : \{C_n, \partial\} \longrightarrow \{D_n, \partial'\}$ são homotopias de cadeias de aplicações de cadeias, então para cada grupo abeliano G as aplicações de cadeias

$$f^\#, g^\# : \{\text{Hom}(D_n, G), \partial'^\#\} \longrightarrow \{\text{Hom}(C_n, G), \partial^\#\}$$

são homotopias de cocadeias.

Seja $C = \{C^n, \delta\}$ um complexo de cocadeias e definamos $Z^n(C) = \ker(\delta) : C^n \longrightarrow C^{n+1}$, o grupo dos n -cociclos e $B^n(C) = \text{Im}(\delta) : C^{n-1} \longrightarrow C^n$, o grupo dos n -cobordos. O n -ésimo grupo de cohomologia de C é o grupo quociente

$$H^n(C) = \frac{Z^n(C)}{B^n(C)}.$$

Se $A = \{A^n\}$, $B = \{B^n\}$ e $C = \{C^n\}$ são complexos de cocadeias e

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

é uma sequência exata curta de aplicações de cocadeias de grau zero, então existe uma sequência exata longa de grupos de cohomologia

$$\cdots \longrightarrow H^n(A) \longrightarrow H^n(B) \longrightarrow H^n(C) \xrightarrow{\Delta} H^{n+1}(A) \longrightarrow \cdots,$$

onde o homomorfismo conectante Δ é definido de maneira análoga ao homomorfismo conectante de homologia (Definição 5.14).

Agora, sejam (X, A) um par de espaços e G um grupo abeliano. Definamos

$$S^n(X, A; G) = \text{Hom}(S_n(X, A); G)$$

como um n -grupo de cocadeias de (X, A) com coeficientes em G . Seja

$$\delta : S^n(X, A; G) \longrightarrow S^{n+1}(X, A; G)$$

dado por $\delta = \partial^\#$, que define um complexo singular de cocadeias de (X, A) cuja homologia é o grupo graduado

$$H^*(X, A; G)$$

como um grupo de cohomologia singular de (X, A) com coeficientes em G . Cada uma das propriedades covariantes de homologia singular torna-se uma propriedade contravariante de cohomologia singular. Em particular, se $f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ é uma aplicação de pares, então existe um homomorfismo induzido

$$f^* : H^*(Y, B; G) \longrightarrow H^*(X, A; G).$$

Se $g : (Y, B) \longrightarrow (W, C)$ é uma outra aplicação de pares, então $(gf)^* = f^* \circ g^*$.

Definição 5.16 (Produto cup). *Sejam X um espaço topológico e $d : X \longrightarrow X \times X$ a aplicação diagonal dada por $d(x) = (x, x)$. Então a composição*

$$H^p(X, R) \otimes H^q(X, R) \longrightarrow H^{p+q}(X \times X, R) \xrightarrow{d^*} H^{p+q}(X, R)$$

define uma multiplicação no R -módulo $H^*(X, R)$ chamada de produto cup que é denotado por \cup .

5.5 Dualidade de Poincaré

Para cada n -variedade fechada, conexa e orientada, a dualidade de Poincaré é o isomorfismo

$$\lambda : H^k(M, \mathbb{Q}) \longrightarrow H_{n-k}(M, \mathbb{Q})$$

dado por $\lambda(x) = x \cap z_M$, onde \cap denota o produto cap, cujas definição e propriedades podem ser encontradas em [4] (p.9, Definição 1.1.3).

6 Coincidências de Aplicações

Dentre os trabalhos de Solomon Lefschetz (1884-1972), destacado matemático que iniciou na Universidade de Princeton na década de 1920, destacamos (I) *Continuous transformations of manifolds* (1923), (II) *Intersections of complexes on manifolds* (1925), (III) *Continuous transformations on manifolds* (1925), (IV) *Intersections and transformations of complexes and manifolds* (1926) e (V) *Manifolds with boundary and their transformations* (1927), todos publicados nos *Proceedings of U.S. National Academy of Sciences*.

No primeiro dos artigos citados anteriormente Lefschetz indicou seus “novos e antigos métodos” para estudar aplicações contínuas de variedades e, em particular, seus pontos fixos. Para uma variedade orientada V e subvariedades M e N de V tais que $\dim M + \dim N = \dim V$, Lefschetz estudou as interseções de M e N encontrando-se num número finito de pontos, atribuiu para cada ponto na interseção um sinal (+1 ou -1). Esse número é o que hoje conhecemos como número de Lefschetz local. Lefschetz, então, definiu a diferença entre os números de Lefschetz locais positivos e negativos como número algébrico de interseções. É importante observar que Lefschetz usou homologia para investigar tal número algébrico de interseções, nesse sentido ele relacionou a teoria da interseção, digamos para duas aplicações contínuas f e g , com o significado de seu gráfico denotado por (Γ_f, Γ_g) dentro da variedade $X \times X$, onde este gráfico é visto como uma subvariedade. Um ponto desta interseção é chamado um ponto de coincidência das aplicações f e g . O significado de coincidência de duas aplicações contínuas f e g é natural, isto é, os pontos que tem a mesma imagem através da f e da g . Observemos que se, por exemplo, tomarmos g como a aplicação identidade a ideia de coincidência se particulariza, vindo de encontro com a noção de ponto fixo.

Em (II) e (III), respectivamente, Lefschetz retoma a questão bastante técnica de determinar a interseção algébrica dos gráficos e apresenta uma fórmula para calcular o número algébrico de interseções dos gráficos de $f, g : X \rightarrow X$, usando os homomorfismos induzidos em homologia racional. A fórmula, tomando uma base apropriada para homologia de uma n -variedade fechada e orientável X , é dada por:

$$(\Gamma_f, \Gamma_g) = \sum_{\mu=0}^n (-1)^\mu \sum_{i,j=1}^{R_\mu} \alpha_\mu^{ij} \beta_{n-\mu}^{ij},$$

onde os R_μ são os números de Betti de X , α depende do homomorfismo induzido por f e β vem da dualidade de Poincaré do homomorfismo induzido por g .

Em (IV) foram publicadas demonstrações detalhadas das proposições acima e em (V) Lefschetz apresentou uma extensão de (IV) para uma variedade com bordo, mas, mais do que isso, ele utilizou matrizes para simplificar as fórmulas apresentadas anteriormente.

No que segue, apresentaremos resultados a respeito de coincidências entre duas aplicações contínuas f e g entre variedades n -dimensionais e, também, do número de Lefschetz $\Lambda(f, g)$ cujo não-anulamento garante que f e g possuem ponto de coincidência. Particularmente, se f é uma autoaplicação contínua de uma variedade n -dimensional M e g é a identidade, esta conclusão resulta no teorema do ponto fixo de Lefschetz que afirma que se $\Lambda(f, \text{Id})$ denotado simplesmente por $\Lambda(f)$ é não nulo, então f tem ponto fixo.

6.1 Orientação em Variedades e Classe de Thom

Definição 6.1 (Homomorfismo induzido da aplicação inclusão). *Sejam M uma n -variedade sem bordo e $M^0 = \{(x, \alpha_x) \text{ tal que } x \in M \text{ e } \alpha_x \in H_n(M, M - x) \approx \mathbb{Z}\}$. Para cada aberto U de M , definimos $\langle U, \alpha_U \rangle = \{(x, \alpha_x) \text{ tal que } x \in U \text{ e } \alpha_x = j_x^U(\alpha_U)\}$, onde $j_x^U : H_n(M, M - U) \rightarrow H_n(M, M - x)$ é o homomorfismo induzido da aplicação inclusão.*

Esses conjuntos formam uma base para a topologia de M^0 de forma que $p : M^0 \rightarrow M$, $p(x, \alpha_x) = x$ é uma aplicação de recobrimento cuja fibra sobre um ponto x é o módulo $H_n(M, M - x)$.

Teorema 6.2. *M é orientável se, e somente se, existe uma aplicação contínua $s : M \rightarrow M^0$ com $p \circ s = \text{Id}_M$ tal que $s(x)$ é um gerador de $H_n(M, M - x) \approx \mathbb{Z}$, para cada $x \in M$. A aplicação s é chamada uma orientação de M .*

Teorema 6.3. *Se M é uma n -variedade fechada, conexa, orientável e com orientação s , então existe uma única classe $\mu_M \in H_n(M)$ tal que $i_{x*}(\mu_M) = s(x)$ para cada $x \in M$, onde $i_{x*} : H_n(M) \rightarrow H_n(M, M - x)$ é o homomorfismo da Definição 6.1. Dizemos que a classe $\mu_M \in H_n(M)$ é a classe fundamental de M .*

Seja $M^{0*} = \{(x, \alpha_x) \text{ tal que } x \in M \text{ e } \alpha_x \in H^n(M, M - x)\}$ e consideremos $p : M^{0*} \rightarrow M$, $p(x, \alpha_x) = x$. A orientação $s : M \rightarrow M^0$ determina uma aplicação dual $s^* : M \rightarrow M^{0*}$ com $p \circ s^* = \text{Id}_M$ tal que $\langle s^*(x), s(x) \rangle = 1$, para todo $x \in M$. Consideremos a aplicação

$$\ell_x : (M, M - x) \rightarrow (M \times M, M \times M - \Delta(M))$$

definida por $\ell_x(a) = (a, x)$ para todo $a \in M$, $a \neq x$.

Teorema 6.4 (Classe de Thom). *Seja M uma n -variedade fechada e orientada. Então existe uma única classe de cohomologia u_M em $H^n(M \times M, M \times M - \Delta(M))$ tal que para todo $x \in M$, $s^*(x) = \ell_x^*(u_M)$. Esta classe é a classe de Thom associada à orientação s de M .*

Mais informações e demonstrações podem ser encontradas em [5].

6.2 Índice de Pontos de Coincidência

Sejam M e N variedades fechadas, conexas e orientadas de dimensão n e com classes fundamentais $\mu_M \in H_n(M)$ e $\mu_N \in H_n(N)$. Suponhamos que W é um subconjunto aberto de M e $f, g : W \rightarrow N$ são aplicações contínuas tais que

$$\text{Coinc}(f, g) = \{x \in M \text{ tal que } f(x) = g(x)\}$$

é um subconjunto compacto de W . Pela normalidade de M , existe um subconjunto aberto V de M com $\text{Coinc}(f, g) \subset V \subset \bar{V} \subset W$. Tomemos a composição onde os coeficientes das homologias são tomados em \mathbb{Z} :

$$H_n(M) \longrightarrow H_n(M, M - V) \xleftarrow{j_*} H_n(W, W - V) \xrightarrow{(f, g)_*} H_n(N \times N, N \times N - \Delta(N)) \xrightarrow{\varphi} \mathbb{Z}$$

em que j_* é o isomorfismo dado pelo Teorema da Excisão ([7] p.54, Teorema 2.11), $(f, g) : (W, W - V) \rightarrow (N \times N, N \times N - \Delta(N))$ é definida por $(f, g)(x) = (f(x), g(x))$ e $\varphi : H_n(N \times N, N \times N - \Delta(N)) \rightarrow \mathbb{Z}$ é dada por $\varphi(\alpha) = \langle u_N, \alpha \rangle$, onde $u_N \in H^n(N \times N, N \times N - \Delta(N))$ é a classe de Thom associada à orientação de N . A aplicação φ é um isomorfismo ([7] p.150 e p.177).

Definição 6.5 (Índice de coincidência). *Definimos o índice de coincidência do par (f, g) como sendo o inteiro, denotado por $I(f, g, W)$, imagem da classe fundamental μ_M pela composição acima.*

Observemos que a definição independe da escolha do aberto V . Além disso, o índice $I(f, g, W)$ é um invariante homotópico. ([7] p.177)

Proposição 6.6. *Sejam $f_t, g_t : W \rightarrow N$, $0 \leq t \leq 1$ homotopias e denotemos por $K_t = \{x \in W \text{ tal que } f_t(x) = g_t(x)\}$ para $0 \leq t \leq 1$. Se*

$$K = \bigcup K_t = \bigcup_{t \in [0,1]} [\text{Coinc}(f_t, g_t) \cap W]$$

é um subconjunto compacto de W , então

$$I(f_0, g_0, W) = I(f_1, g_1, W).$$

O não anulamento do índice garante a existência de ponto de coincidência.

Demonstração. Seja V um conjunto aberto com $K \subset V \subset \bar{V} \subset W$. Então as aplicações

$$(f_t, g_t) : (W, W - V) \longrightarrow (N \times N, N \times N - \Delta(N))$$

para $0 \leq t \leq 1$ são dadas por uma homotopia de aplicações de pares; portanto

$$(f_0, g_0)_* = (f_1, g_1)_* \text{ e } I(f_0, g_0, W) = I(f_1, g_1, W).$$

□

Lema 6.7. *Se $\text{Coinc}(f, g) = \emptyset$, então $I(f, g, W) = 0$.*

Demonstração. Suponha que f e g não têm ponto de coincidência no conjunto aberto W . Então, para qualquer V , a aplicação

$$(f, g) : (W, W - V) \longrightarrow (N \times N, N \times N - \Delta(N))$$

pode ser fatorada através do par $(N \times N - \Delta(N), N \times N - \Delta(N))$ de modo que o homomorfismo induzido $(f, g)_*$ deve ser zero. □

Corolário 6.8. *Se $I(f, g, W) \neq 0$ então f e g possuem uma coincidência em W .*

6.3 Índice como Grau de uma Autoaplicação Contínua da Esfera

Seja W um aberto de M e suponhamos que $f, g : W \longrightarrow N$ tenham um único ponto de coincidência x em W . Denotando o disco unitário n -dimensional por D^n , a aplicação

$$\begin{aligned} F : D^n \times D^n &\longrightarrow D^n \\ (x, y) &\longrightarrow F(x, y) = \frac{1}{2}(y - x) \end{aligned}$$

induz uma equivalência de homotopia de pares:

$$F : (D^n \times D^n, D^n \times D^n - \Delta(D^n)) \longrightarrow (D^n, D^n - 0)$$

([7] p.181).

Tomemos $Y \subset M$ um disco fechado contendo y tal que $h : Y \longrightarrow D^n$ é um homeomorfismo levando y na origem. Existe um disco aberto V de M com $y \in V$, $\bar{V} \subset W \cap f^{-1}(Y) \cap g^{-1}(Y)$ e um homeomorfismo $k : \bar{V} \longrightarrow D$. Assumamos que h e k preservam a orientação.

Definamos a aplicação contínua $\phi : S^{n-1} \longrightarrow S^{n-1}$ como a composta

$$S^{n-1} \xrightarrow{k^{-1}} \partial \bar{V} \xrightarrow{(f,g)} Y \times Y - \Delta(Y) \xrightarrow{h \times h} D^n \times D^n - \Delta(0) \xrightarrow{F} D^n - 0 \xrightarrow{\Pi} S^{n-1}$$

em que $(h \times h)(x, y) = (h(x), h(y))$ e Π é a projeção radial ([7] p.182).

O resultado a seguir tem uma demonstração similar à prova da Proposição 6.9 de [7] (p.182).

Teorema 6.9 (Índice de pontos de coincidência isolados). *Nas condições acima:*

$$I(f, g, W) = \deg \phi$$

Exemplo 6.10. Sejam $f, g : M \rightarrow N$ onde M, N são variedades n -dimensionais, fechadas, conexas e orientadas. Seja $y \in N$ e $f(M) = y$ e suponhamos que g tenha a propriedade de que sua induzida $g_* : H_n(M) \rightarrow H_n(N)$ seja dada por $g_*(\mu_M) = m\mu_N$. Então $I(f, g, M) = m$.

6.4 Teoremas de Lefschetz

Sejam $f, g : M \rightarrow N$ onde M, N são variedades n -dimensionais, fechadas, conexas e orientadas. Utilizando o homomorfismo de coeficientes $\varepsilon : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ denotemos por $\bar{\mu}_M$ e $\bar{\mu}_N$ as imagens das classes fundamentais $\mu_M \in H_n(M)$ e $\mu_N \in H_n(N)$ na homologia racional, ou seja, $\bar{\mu}_M = \varepsilon_*(\mu_M) \in H_n(M, \mathbb{Q})$ e $\bar{\mu}_N = \varepsilon_*(\mu_N) \in H_n(N, \mathbb{Q})$.

Consideremos $\theta_q : H_q(M, \mathbb{Q}) \rightarrow H_q(N, \mathbb{Q})$ como a composta

$$\begin{array}{ccccccc} H_q(M, \mathbb{Q}) & \xrightarrow{f_*} & H_q(N, \mathbb{Q}) & \xrightarrow{\lambda^{-1}} & H^{n-q}(N, \mathbb{Q}) & \xrightarrow{g^{n-q*}} & H^{n-q}(M, \mathbb{Q}) \\ & & & \searrow \theta_q & & & \downarrow \lambda \\ & & & & & & H_q(M, \mathbb{Q}) \end{array}$$

em que λ denota a dualidade de Poincaré.

Definição 6.11 (Número de Lefschetz). *Definimos o número de Lefschetz do par (f, g) , denotado por $\Lambda(f, g)$, como o número racional:*

$$\Lambda(f, g) = \sum_{q=0}^n (-1)^q \operatorname{tr} \theta_q$$

onde $\operatorname{tr} \theta_q$ significa o traço de θ_q como uma transformação linear do espaço vetorial racional de dimensão finita $H_q(M, \mathbb{Q})$ em si próprio.

Se $M = N$ e g é a aplicação identidade, então $\Lambda(f, g) = \Lambda(f)$ é o número de Lefschetz utilizado para ponto fixo.

Definição 6.12 (Classe de Lefschetz). *Sejam M e N variedades fechadas, conexas, de dimensão $n \geq 1$ e orientáveis. Consideremos aplicações contínuas $f, g : M \rightarrow N$. A partir da composta:*

$$M \xrightarrow{d} M \times M \xrightarrow{f \times g} N \times N \xrightarrow{j} (N \times N, N \times N - \Delta(N))$$

em que $d(x) = (x, x)$ e j é a inclusão, definimos a classe de Lefschetz ou classe de coincidência do par (f, g) como a classe

$$L(f, g) = d^*(f \times g)^* j^*(\mu_N).$$

A relação existente entre o número de Lefschetz $\Lambda(f, g)$ e a classe $L(f, g)$ é dada pelo teorema a seguir:

Teorema 6.13. *Se $f, g : M \rightarrow N$ são como na Definição 6.12, então*

$$\Lambda(f, g) = \langle L(f, g), \bar{\mu}_M \rangle$$

Demonstração. Ver [7] (p.186, Teorema 6.12). □

O resultado a seguir, cuja demonstração encontra-se em [7] (p.187, Teorema 6.13), relaciona o índice com o número de Lefschetz $\Lambda(f, g)$.

Teorema 6.14. *Sejam $f, g : M \rightarrow N$ em que M e N são n -variedades fechadas, conexas e orientadas. Então*

$$I(f, g, W) = \Lambda(f, g).$$

Teorema 6.15. *Sejam M e N n -variedades, fechadas, conexas e orientadas e $f, g : M \rightarrow N$ duas aplicações contínuas. Se $\Lambda(f, g) \neq 0$ então $\text{Coinc}(f, g) \neq \emptyset$, isto é, f e g têm pontos de coincidência.*

Demonstração. Segue do Teorema 6.14 e da Proposição 6.8. □

Corolário 6.16. *Seja $f : M \rightarrow M$ em que M é uma n -variedade fechada, conexa e orientada. Se $\Lambda(f) \neq 0$ então f tem um ponto fixo.*

6.5 Número de Lefschetz para Aplicações entre Superfícies T_h , de Genus $h \geq 1$

Sejam T_h a superfície orientável de genus $h \geq 1$ e \mathbb{Q} o corpo dos números racionais. Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2h-1}, \alpha_{2h}$ os geradores de $H^1(T_h, \mathbb{Q})$.

A Figura 6.1 representa um toro de genus $h = 2$ com seus geradores $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$.

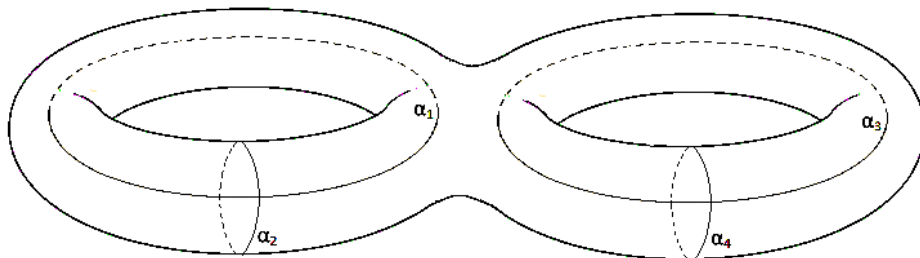


Figura 6.1

Conhecemos que :

$$\alpha_i \cup \alpha_j = \begin{cases} \alpha_1 \cup \alpha_2, & i = 2r - 1 \text{ e } j = 2r, r = 2, \dots, h \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Os elementos $1 \in H^0(T_h, \mathbb{Q})$, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2g-1}, \alpha_{2h} \in H^1(T_h, \mathbb{Q})$ constituem uma base para $H^*(T_h, \mathbb{Q})$ como um espaço vetorial graduado sobre \mathbb{Q} . Sejam $f, g : T_h \rightarrow T_r$ aplicações contínuas com matrizes A e B associadas às induzidas $f^{1*}, g^{1*} : H^1(T_r, \mathbb{Q}) \rightarrow H^1(T_h, \mathbb{Q})$, respectivamente.

Em [3], é apresentado uma fórmula para o cálculo do número de Lefschetz $\Lambda(f, g)$ em termos das matrizes A e B . Particularmente se $h = r = 1$, ou seja, $f, g : T_2 \rightarrow T_2$ então $\Lambda(f, g) = \det(B - A)$.

Os resultados a seguir são necessários para a pretendida aplicação que apresentaremos na Seção 6.6.

Teorema 6.17 (Dualidade de Milnor). *Consideremos $\alpha_0 = 1, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n = z_M$ uma base para $H^*(M, \mathbb{Q})$ em ordem crescente de dimensão e seja K_p o conjunto dos números inteiros utilizados na indexação dos elementos α_i^p que compoem α^p . Então existe uma base dual $\beta_0 = 1, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n = z_m$ correspondente para $H^*(M, \mathbb{Q})$ satisfazendo:*

$$\langle \alpha_i^p \cup \beta_j^{n-p}, z_M \rangle = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

Demonstração. Ver [4] (p.57. Teorema 4.1.2). □

Em [2], Fadell estabeleceu uma fórmula para $L(f, g)$ em termos de bases duais.

Teorema 6.18 (Fórmula de Fadell). *Se α e β são bases duais para $H^*(M, \mathbb{Q})$ conforme o Teorema 6.17, então:*

$$L(f, g) = \sum_{p=0}^n (-1)^p \left[\sum_{i \in K_p} f^*(\alpha_i^p) \cup g^*(\beta_i^{n-p}) \right]$$

Demonstração. Ver [4] (p.59, Teorema 4.14). □

6.6 Aplicação

Como aplicação da teoria desenvolvida, apresentaremos o cálculo do número de Lefschetz de aplicações contínuas $f, g : T_2 \rightarrow T_3$.

Sejam $f, g : T_2 \rightarrow T_3$ aplicações contínuas que induzem homomorfismos

$$f^{1*}, g^{1*} : H^1(T_3, \mathbb{Q}) \rightarrow H^1(T_2, \mathbb{Q}).$$

No que segue omitiremos o índice superior da cohomologia, ou seja, indicaremos f^{1*} simplesmente por f^* .

Suponhamos que $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ e β_4 são os geradores de $H^1(T_2, \mathbb{Q})$ e $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ e α_6 os geradores de $H^1(T_3, \mathbb{Q})$ e

$$f^*(\alpha_s) = \sum_{k=1}^4 a_{ks} \beta_k, \quad s = 1, 2, 3, 4, 5, 6$$

$$g^*(\alpha_s) = \sum_{k=1}^4 b_{ks} \beta_k$$

Sejam $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ as matrizes associadas a f^* e g^* , respectivamente. Observemos que a matriz A pode ser escrita:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1,2}^{1,2} & A_{1,2}^{3,4} & A_{1,2}^{5,6} \\ A_{3,4}^{1,2} & A_{3,4}^{3,4} & A_{3,4}^{5,6} \end{pmatrix}$$

onde $A_{z,w}^{u,v}$ representa a submatriz quadrada de A , de ordem 2, constituída das colunas u e v , e linhas z e w .

Analogamente, a matriz B pode ser escrita como:

$$B = \begin{pmatrix} B_{1,2}^{1,2} & B_{1,2}^{3,4} & B_{1,2}^{5,6} \\ B_{3,4}^{1,2} & B_{3,4}^{3,4} & B_{3,4}^{5,6} \end{pmatrix}.$$

Vamos mostrar que

$$\begin{aligned} \Lambda(f, g) &= [\det(B_{1,2}^{1,2} - A_{1,2}^{1,2}) + \det(B_{3,4}^{1,2} - A_{3,4}^{1,2}) + \det(B_{1,2}^{3,4} - A_{1,2}^{3,4}) + \\ &+ \det(B_{3,4}^{3,4} - A_{3,4}^{3,4}) + \det(B_{1,2}^{5,6} - A_{1,2}^{5,6}) + \det(B_{3,4}^{5,6} - A_{3,4}^{5,6})] - [\det A_{1,2}^{3,4} + \det A_{3,4}^{3,4} + \\ &+ \det A_{1,2}^{5,6} + \det A_{3,4}^{5,6} + \det B_{1,2}^{3,4} + \det B_{3,4}^{3,4} + \det B_{1,2}^{5,6} + \det B_{3,4}^{5,6}] \end{aligned}$$

ou seja, $\Lambda(f, g)$ é a soma dos determinantes de todas as submatrizes quadradas de ordem 2 da matriz $B - A$, descontando a soma dos determinantes de todas as submatrizes quadradas de ordem 2 das matrizes A e B formadas a partir da terceira coluna.

De fato, sejam $\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3, \alpha'_4, \alpha'_5, \alpha'_6$ elementos de $H^1(T_3, \mathbb{Q})$ onde

$$\alpha'_1 = \alpha_2, \quad \alpha'_2 = -\alpha_1, \quad \alpha'_3 = \alpha_4, \quad \alpha'_4 = -\alpha_3, \quad \alpha'_5 = \alpha_6, \quad \alpha'_6 = -\alpha_5.$$

Então $\alpha_1 \cup \alpha_2 \in H^2(T_3, \mathbb{Q})$, os elementos $\alpha'_1, \alpha'_2, \alpha'_3, \alpha'_4, \alpha'_5, \alpha'_6 \in H^1(T_3, \mathbb{Q})$ e $1 \in H^0(T_3, \mathbb{Q})$ constituem uma base dual para $H^*(T_3, \mathbb{Q})$, como um espaço vetorial graduado sobre \mathbb{Q} . De acordo com o Teorema 6.14 de [2]:

$$\begin{aligned} L(f, g) &= g^*(\alpha_1 \cup \alpha_2) - f^*(\alpha_1) \cup g^*(\alpha'_1) - f^*(\alpha_2) \cup g^*(\alpha'_2) - f^*(\alpha_3) \cup g^*(\alpha'_3) \\ &- f^*(\alpha_4) \cup g^*(\alpha'_4) - f^*(\alpha_5) \cup g^*(\alpha'_5) - f^*(\alpha_6) \cup g^*(\alpha'_6) + f^*(\alpha_1 \cup \alpha_2), \end{aligned}$$

ou seja,

$$L(f, g) = g^*(\alpha_1 \cup \alpha_2) - f^*(\alpha_1) \cup g^*(\alpha_2) + f^*(\alpha_2) \cup g^*(\alpha_1) - f^*(\alpha_3) \cup g^*(\alpha_4) \\ + f^*(\alpha_4) \cup g^*(\alpha_3) - f^*(\alpha_5) \cup g^*(\alpha_6) + f^*(\alpha_6) \cup g^*(\alpha_5) + f^*(\alpha_1 \cup \alpha_2).$$

Apliquemos f^* e g^* nos α_i , $i = 1, \dots, 6$, geradores de $H^1(T_3, \mathbb{Q})$.

$$\begin{aligned} f^*(\alpha_1) &= a_{11}\beta_1 + a_{21}\beta_2 + a_{31}\beta_3 + a_{41}\beta_4 = \sum_{v=1}^4 a_{v1}\beta_v \\ f^*(\alpha_2) &= a_{12}\beta_1 + a_{22}\beta_2 + a_{32}\beta_3 + a_{42}\beta_4 = \sum_{v=1}^4 a_{v2}\beta_v \\ f^*(\alpha_3) &= a_{13}\beta_1 + a_{23}\beta_2 + a_{33}\beta_3 + a_{43}\beta_4 = \sum_{v=1}^4 a_{v3}\beta_v \\ f^*(\alpha_4) &= a_{14}\beta_1 + a_{24}\beta_2 + a_{34}\beta_3 + a_{44}\beta_4 = \sum_{v=1}^4 a_{v4}\beta_v \\ f^*(\alpha_5) &= a_{15}\beta_1 + a_{25}\beta_2 + a_{35}\beta_3 + a_{45}\beta_4 = \sum_{v=1}^4 a_{v5}\beta_v \\ f^*(\alpha_6) &= a_{16}\beta_1 + a_{26}\beta_2 + a_{36}\beta_3 + a_{46}\beta_4 = \sum_{v=1}^4 a_{v6}\beta_v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g^*(\alpha_1) &= b_{11}\beta_1 + b_{21}\beta_2 + b_{31}\beta_3 + b_{41}\beta_4 = \sum_{v=1}^4 b_{v1}\beta_v \\ g^*(\alpha_2) &= b_{12}\beta_1 + b_{22}\beta_2 + b_{32}\beta_3 + b_{42}\beta_4 = \sum_{v=1}^4 b_{v2}\beta_v \\ g^*(\alpha_3) &= b_{13}\beta_1 + b_{23}\beta_2 + b_{33}\beta_3 + b_{43}\beta_4 = \sum_{v=1}^4 b_{v3}\beta_v \\ g^*(\alpha_4) &= b_{14}\beta_1 + b_{24}\beta_2 + b_{34}\beta_3 + b_{44}\beta_4 = \sum_{v=1}^4 b_{v4}\beta_v \\ g^*(\alpha_5) &= b_{15}\beta_1 + b_{25}\beta_2 + b_{35}\beta_3 + b_{45}\beta_4 = \sum_{v=1}^4 b_{v5}\beta_v \\ g^*(\alpha_6) &= b_{16}\beta_1 + b_{26}\beta_2 + b_{36}\beta_3 + b_{46}\beta_4 = \sum_{v=1}^4 b_{v6}\beta_v \end{aligned}$$

Como os coeficientes são tomados sobre o corpo dos racionais \mathbb{Q} , temos espaços vetoriais cujos homomorfismos induzidos são dados, respectivamente, pelas matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} & b_{16} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} & b_{26} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & b_{35} & b_{36} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} & b_{45} & b_{46} \end{pmatrix}$$

Pela propriedade distributiva do produto cup, $g^*(\alpha_1 \cup \alpha_2) = g^*(\alpha_1) \cup g^*(\alpha_2)$ e $f^*(\alpha_1 \cup \alpha_2) = f^*(\alpha_1) \cup f^*(\alpha_2)$. Desenvolvendo os termos descritos na Fórmula de Fadell ([2]) e observando que $\alpha_1 \cup \alpha_2 = \alpha_3 \cup \alpha_4 = \alpha_5 \cup \alpha_6$, temos:

$$\begin{aligned}
g^*(\alpha_1) \cup g^*(\alpha_2) &= \left(\sum_{v=1}^4 b_{v1} \beta_v \right) \cup \left(\sum_{v=1}^4 b_{v2} \beta_v \right) \\
&= (b_{11}\beta_1 + b_{21}\beta_2 + b_{31}\beta_3 + b_{41}\beta_4) \cup (b_{12}\beta_1 + b_{22}\beta_2 + b_{32}\beta_3 + b_{42}\beta_4) \\
&= (b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12} + b_{31}b_{42} - b_{41}b_{32})\beta_1 \cup \beta_2 \\
&= \left(\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{vmatrix} \right) \beta_1 \cup \beta_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f^*(\alpha_1) \cup g^*(\alpha_2) &= \left(\sum_{v=1}^4 a_{v1} \beta_v \right) \cup \left(\sum_{v=1}^4 b_{v2} \beta_v \right) \\
&= (a_{11}\beta_1 + a_{21}\beta_2 + a_{31}\beta_3 + a_{41}\beta_4) \cup (b_{12}\beta_1 + b_{22}\beta_2 + b_{32}\beta_3 + b_{42}\beta_4) \\
&= (a_{11}b_{22} - a_{21}b_{12} + a_{31}b_{42} - a_{41}b_{32})\beta_1 \cup \beta_2 \\
&= \left(\begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} \\ a_{21} & b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{31} & b_{32} \\ a_{41} & b_{42} \end{vmatrix} \right) \beta_1 \cup \beta_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f^*(\alpha_2) \cup g^*(\alpha_1) &= \left(\sum_{v=1}^4 a_{v2} \beta_v \right) \cup \left(\sum_{v=1}^4 b_{v1} \beta_v \right) \\
&= (a_{12}\beta_1 + a_{22}\beta_2 + a_{32}\beta_3 + a_{42}\beta_4) \cup (b_{11}\beta_1 + b_{21}\beta_2 + b_{31}\beta_3 + b_{41}\beta_4) \\
&= (a_{12}b_{21} - a_{22}b_{11} + a_{32}b_{41} - a_{42}b_{31})\beta_1 \cup \beta_2 \\
&= \left(\begin{vmatrix} a_{12} & b_{11} \\ a_{22} & b_{21} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{32} & b_{31} \\ a_{42} & b_{41} \end{vmatrix} \right) \beta_1 \cup \beta_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f^*(\alpha_3) \cup g^*(\alpha_4) &= \left(\sum_{v=1}^4 a_{v3} \beta_v \right) \cup \left(\sum_{v=1}^4 b_{v4} \beta_v \right) \\
&= (a_{13} \beta_1 + a_{23} \beta_2 + a_{33} \beta_3 + a_{43} \beta_4) \cup (b_{14} \beta_1 + b_{24} \beta_2 + b_{34} \beta_3 + b_{44} \beta_4) \\
&= (a_{13} b_{24} - a_{23} b_{14} + a_{33} b_{44} - a_{43} b_{34}) \beta_1 \cup \beta_2 \\
&= \left(\begin{vmatrix} a_{13} & b_{14} \\ a_{23} & b_{24} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & b_{34} \\ a_{43} & b_{44} \end{vmatrix} \right) \beta_1 \cup \beta_2 \\
f^*(\alpha_4) \cup g^*(\alpha_3) &= \left(\sum_{v=1}^4 a_{v4} \beta_v \right) \cup \left(\sum_{v=1}^4 b_{v3} \beta_v \right) \\
&= (a_{14} \beta_1 + a_{24} \beta_2 + a_{34} \beta_3 + a_{44} \beta_4) \cup (b_{13} \beta_1 + b_{23} \beta_2 + b_{33} \beta_3 + b_{43} \beta_4) \\
&= (a_{14} b_{23} - a_{24} b_{13} + a_{34} b_{43} - a_{44} b_{33}) \beta_1 \cup \beta_2 \\
&= \left(\begin{vmatrix} a_{14} & b_{13} \\ a_{24} & b_{23} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{34} & b_{33} \\ a_{44} & b_{43} \end{vmatrix} \right) \beta_1 \cup \beta_2 \\
f^*(\alpha_5) \cup g^*(\alpha_6) &= \left(\sum_{v=1}^4 a_{v5} \beta_v \right) \cup \left(\sum_{v=1}^4 b_{v6} \beta_v \right) \\
&= (a_{15} \beta_1 + a_{25} \beta_2 + a_{35} \beta_3 + a_{45} \beta_4) \cup (b_{16} \beta_1 + b_{26} \beta_2 + b_{36} \beta_3 + b_{46} \beta_4) \\
&= (a_{15} b_{26} - a_{25} b_{16} + a_{35} b_{46} - a_{45} b_{36}) \beta_1 \cup \beta_2 \\
&= \left(\begin{vmatrix} a_{15} & b_{16} \\ a_{25} & b_{26} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{35} & b_{36} \\ a_{45} & b_{46} \end{vmatrix} \right) \beta_1 \cup \beta_2 \\
f^*(\alpha_6) \cup g^*(\alpha_5) &= \left(\sum_{v=1}^4 a_{v6} \beta_v \right) \cup \left(\sum_{v=1}^4 b_{v5} \beta_v \right) \\
&= (a_{16} \beta_1 + a_{26} \beta_2 + a_{36} \beta_3 + a_{46} \beta_4) \cup (b_{15} \beta_1 + b_{25} \beta_2 + b_{35} \beta_3 + b_{45} \beta_4) \\
&= (a_{16} b_{25} - a_{26} b_{15} + a_{36} b_{45} - a_{46} b_{35}) \beta_1 \cup \beta_2 \\
&= \left(\begin{vmatrix} a_{16} & b_{15} \\ a_{26} & b_{25} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{36} & b_{35} \\ a_{46} & b_{45} \end{vmatrix} \right) \beta_1 \cup \beta_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f^*(\alpha_1) \cup f^*(\alpha_2) &= \left(\sum_{v=1}^4 a_{v1} \beta_v \right) \cup \left(\sum_{v=1}^4 a_{v2} \beta_v \right) \\
&= (a_{11} \beta_1 + a_{21} \beta_2 + a_{31} \beta_3 + a_{41} \beta_4) \cup (a_{12} \beta_1 + a_{22} \beta_2 + a_{32} \beta_3 + a_{42} \beta_4) \\
&= (a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12} + a_{31} a_{42} - a_{41} a_{32}) \beta_1 \cup \beta_2 \\
&= \left(\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix} \right) \beta_1 \cup \beta_2
\end{aligned}$$

Agora, substituindo os resultados encontrados na Fórmula de Fadell ([2]) temos que a classe de Lefschetz do par (f, g) é dada por:

$$\begin{aligned}
L(f, g) &= \left[\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} \\ a_{21} & b_{22} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{31} & b_{32} \\ a_{41} & b_{42} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12} & b_{11} \\ a_{22} & b_{21} \end{vmatrix} \right. \\
&+ \begin{vmatrix} a_{32} & b_{31} \\ a_{42} & b_{41} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{13} & b_{14} \\ a_{23} & b_{24} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{33} & b_{34} \\ a_{43} & b_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{14} & b_{13} \\ a_{24} & b_{23} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{34} & b_{33} \\ a_{44} & b_{43} \end{vmatrix} \\
&- \begin{vmatrix} a_{15} & b_{16} \\ a_{25} & b_{26} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{35} & b_{36} \\ a_{45} & b_{46} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{16} & b_{15} \\ a_{26} & b_{25} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{36} & b_{35} \\ a_{46} & b_{45} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \\
&\left. + \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix} \right] \beta_1 \cup \beta_2
\end{aligned}$$

Por outro lado, desenvolvendo a fórmula do número de Lefschetz do par (f, g)

$$\begin{aligned}
\Lambda(f, g) &= [\det(B_{1,2}^{1,2} - A_{1,2}^{1,2}) + \det(B_{3,4}^{1,2} - A_{3,4}^{1,2}) + \det(B_{1,2}^{3,4} - A_{1,2}^{3,4}) + \\
&+ \det(B_{3,4}^{3,4} - A_{3,4}^{3,4}) + \det(B_{1,2}^{5,6} - A_{1,2}^{5,6}) + \det(B_{3,4}^{5,6} - A_{3,4}^{5,6})] - [\det A_{1,2}^{3,4} + \det A_{3,4}^{3,4} + \\
&+ \det A_{1,2}^{5,6} + \det A_{3,4}^{5,6} + \det B_{1,2}^{3,4} + \det B_{3,4}^{3,4} + \det B_{1,2}^{5,6} + \det B_{3,4}^{5,6}]
\end{aligned}$$

obtemos:

$$\begin{aligned}
\Lambda(f, g) = & \left[\left| \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \right| + \left| \begin{pmatrix} b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{pmatrix} \right| \\
& + \left| \begin{pmatrix} b_{13} & b_{14} \\ b_{23} & b_{24} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{pmatrix} \right| + \left| \begin{pmatrix} b_{33} & b_{34} \\ b_{43} & b_{44} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \right| \\
& + \left| \begin{pmatrix} b_{15} & b_{16} \\ b_{25} & b_{26} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{15} & a_{16} \\ a_{25} & a_{26} \end{pmatrix} \right| + \left| \begin{pmatrix} b_{35} & b_{36} \\ b_{45} & b_{46} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{35} & a_{36} \\ a_{45} & a_{46} \end{pmatrix} \right| \Big] \\
& - \left[\begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{15} & a_{16} \\ a_{25} & a_{26} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{35} & a_{36} \\ a_{45} & a_{46} \end{vmatrix} \right] \\
& + \left[\begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{15} & a_{16} \\ a_{25} & a_{26} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{35} & a_{36} \\ a_{45} & a_{46} \end{vmatrix} \right]
\end{aligned}$$

Pelo Lema 1.8:

$$\begin{aligned}
\Lambda(f, g) = & \begin{vmatrix} b_{12} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} \\ a_{21} & b_{22} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} \\ b_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{vmatrix} \\
& - \begin{vmatrix} a_{31} & b_{32} \\ a_{41} & b_{42} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b_{31} & a_{32} \\ b_{41} & a_{42} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{13} & b_{14} \\ b_{23} & b_{24} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{13} & b_{14} \\ a_{23} & b_{24} \end{vmatrix} \\
& - \begin{vmatrix} b_{13} & a_{14} \\ b_{23} & a_{24} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{33} & b_{34} \\ b_{43} & b_{44} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{33} & b_{34} \\ a_{43} & b_{44} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b_{33} & a_{34} \\ b_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \\
& + \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{15} & b_{16} \\ b_{25} & b_{26} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{15} & b_{16} \\ a_{25} & b_{26} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b_{15} & a_{16} \\ b_{25} & a_{26} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{15} & a_{16} \\ a_{25} & a_{26} \end{vmatrix} \\
& + \begin{vmatrix} b_{35} & b_{36} \\ b_{45} & b_{46} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{35} & b_{36} \\ a_{45} & b_{46} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b_{35} & a_{36} \\ b_{45} & a_{46} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{35} & a_{36} \\ a_{45} & a_{46} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{vmatrix} \\
& - \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{15} & a_{16} \\ a_{25} & a_{26} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{35} & a_{36} \\ a_{45} & a_{46} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b_{13} & b_{14} \\ b_{23} & b_{24} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b_{33} & b_{34} \\ b_{43} & b_{44} \end{vmatrix} \\
& - \begin{vmatrix} b_{15} & b_{16} \\ b_{25} & b_{26} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b_{35} & b_{36} \\ b_{45} & b_{46} \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

Simplificando os termos repetidos:

$$\begin{aligned} \Lambda(f, g) = & \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} \\ a_{21} & b_{22} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b_{11} & a_{12} \\ b_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{vmatrix} \\ & - \begin{vmatrix} a_{31} & b_{32} \\ a_{41} & b_{42} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b_{31} & a_{32} \\ b_{41} & a_{42} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{13} & b_{14} \\ a_{23} & b_{24} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b_{13} & a_{14} \\ b_{23} & a_{24} \end{vmatrix} \\ & - \begin{vmatrix} a_{33} & b_{34} \\ a_{43} & b_{44} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b_{33} & a_{34} \\ b_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{15} & b_{16} \\ a_{25} & b_{26} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} b_{15} & a_{16} \\ b_{25} & a_{26} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{35} & b_{36} \\ a_{45} & b_{46} \end{vmatrix} \\ & - \begin{vmatrix} b_{35} & a_{36} \\ b_{45} & a_{46} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

E reorganizando:

$$\begin{aligned} \Lambda(f, g) = & \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} \\ a_{21} & b_{22} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{31} & b_{32} \\ a_{41} & b_{42} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12} & b_{11} \\ a_{22} & b_{21} \end{vmatrix} \\ & + \begin{vmatrix} a_{32} & b_{31} \\ a_{42} & b_{41} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{13} & b_{14} \\ a_{23} & b_{24} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{33} & b_{34} \\ a_{43} & b_{44} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{14} & b_{13} \\ a_{24} & b_{23} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{34} & b_{33} \\ a_{44} & b_{43} \end{vmatrix} \\ & - \begin{vmatrix} a_{15} & b_{16} \\ a_{25} & b_{26} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{35} & b_{36} \\ a_{45} & b_{46} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{16} & b_{15} \\ a_{26} & b_{25} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{36} & b_{35} \\ a_{46} & b_{45} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \\ & + \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Logo,

$$L(f, g) = \Lambda(f, g)\beta_1 \cup \beta_2.$$

□

Referências Bibliográficas

- [1] BROWN, R. F. Fixed Points Theory. In JAMES, I. M. (Org). **History of Topology**. Amsterdam: Elsevier, 1999. p.271-297.
- [2] FADELL, E. On a Coincidence Theorem of F. B. Fuller. **Pacific Journal of Mathematics**, Berkeley, v.15, n.3, p.825-834, 1965.
- [3] GONÇALVES, D. L.; OLIVEIRA, E. de. The Lefschetz Coincidence Number for Maps among Compact Surfaces. **Far East Journal of Mathematical Sciences**, Mumfordganj, volume especial, p.147-166, 1996.
- [4] LEITE, S. **Coincidências para Iteradas de Aplicações entre Superfícies de Genus g** . 1999. 70f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Departamento de Matemática, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos. 1999.
- [5] OLIVEIRA, E. de. **Teoria de Nielsen para Coincidência e algumas Aplicações**. 1987. 134f. Tese (Doutorado em Matemática) - Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos. 1987.
- [6] SHASHKIN, Yu. A. **Fixed Point Theory**. 2ed. Translated by Victor Minachim. Mockba: Mathematical World, 1989.
- [7] VICK, J. W. **Homology Theory**. New York: Academic Press, 1973.
- [8] WONG, P. **Lectures on Fixed Point Theory**. In: XV Encontro Brasileiro de Topologia, 10 - 14 de Julho de 2006, Rio Claro/SP.