



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”  
Instituto de Geociências e Ciências Exatas  
Campus de Rio Claro

# Tópicos de Geometria Diferencial

**Ricardo Alexandre Batista**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática Universitária do Departamento de Matemática como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre

Orientador  
Prof. Dr. João Peres Vieira

**2011**

516.36 Batista, Ricardo Alexandre  
B333t Tópicos de geometria diferencial / Ricardo Alexandre  
Batista. - Rio Claro : [s.n.], 2011  
91 f. : il., figs.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista,  
Instituto de Geociências e Ciências Exatas  
Orientador: João Peres Vieira

1. Geometria diferencial. 2. Aplicação de Gauss. 3.  
Curvatura gaussiana. 4. Superfícies mínimas. 5. Teorema  
Egregium de Gauss. 6. Teorema de Gauss Bonnet. I. Título.

# TERMO DE APROVAÇÃO

Ricardo Alexandre Batista  
TÓPICOS DE GEOMETRIA DIFERENCIAL

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática Universitária do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dr. João Peres Vieira  
Orientador

Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>. Elíris Cristina Rizzioli  
Departamento de Matemática  
UNESP - Rio Claro

Prof. Dr. Laércio Aparecido Lucas  
Academia da Força Aérea - Pirassununga

**Rio Claro, 21 de Setembro de 2011**

*Ao meu pai José Aparecido Batista e à minha mãe Maria José*

# Agradecimentos

A Deus por me amparar nos momentos difíceis, me dar força interior para superar as dificuldades, mostrar os caminhos nas horas incertas e me suprir em todas as minhas necessidades.

À minha mãe, Maria José, a qual eu amo, pelo apoio nos momentos difíceis e pela compreensão em todas as minhas decisões.

Às minhas irmãs, Larissa e Leliane, pelo incentivo e apoio de sempre.

À minha namorada, Lidiane, pelo incentivo e compreensão pelo tempo dedicado aos estudos e ausência nos momentos de saudade.

Aos meus amigos (irmãos) de Batatais, pelo companheirismo e amizade prestada ao longo dos anos.

A todos amigos do mestrado, em especial ao Fabrício, Robson, Leda e Ana, pela ajuda nos estudos, bem como nos momentos os quais pensávamos em desistir.

Aos meus amigos e companheiros de trabalho, pelo tempo que estive ausente, dedicando-me ao curso.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Matemática Universitária do Departamento de Matemática do IGCE-UNESP- Rio Claro-SP, pelos ensinamentos e conselhos ao longo de todo o curso.

E, em especial, ao meu orientador, Prof. Dr. João Peres Vieira, agradeço as cobranças, exigências, dinamismo, paciência e tamanha dedicação com tal trabalho.

# Resumo

O principal objetivo deste trabalho é confeccionar um texto para alunos de graduação na área de Ciências Exatas e da Terra concernente ao estudo da Curvatura Gaussiana e Aplicação de Gauss, Superfícies Mínicas, Teorema Egregium de Gauss e o Teorema de Gauss- Bonnet para curvas simples fechadas.

**Palavras-chave:** Aplicação de Gauss, Curvatura Gaussiana, Superfícies Mínicas, Teorema Egregium de Gauss, Teorema de Gauss-Bonnet .

# Abstract

The main objective from this work is to make a text for students of graduation in the area of exact sciences and of the land concerning to the study of the Gaussian Curvature and the Gauss Map, Minimal Surfaces, Gauss's Theorem Egregium and the Gauss-Bonnet Theorem for Simple Closed Curves.

**Keywords:** Gauss Map, Gaussian Curvature , Minimal Surfaces, Gauss's Theorem Egregium, Gauss-Bonnet Theorem .

# Lista de Figuras

3.1	Aplicação de Gauss. . . . .	22
3.2	Curvatura Normal. . . . .	23
3.3	Superfície de Revolução. . . . .	31
3.4	Pseudoesfera. . . . .	40
3.5	Tractrix. . . . .	40
3.6	Superfície paralela. . . . .	41
4.1	Catenóide. . . . .	53
4.2	Helicóide. . . . .	59



# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>15</b>
<b>2</b>	<b>Pré-Requisitos</b>	<b>17</b>
2.1	Curvas regulares . . . . .	17
2.2	Superfícies Regulares . . . . .	18
2.3	Orientação de superfícies . . . . .	19
2.4	Isometrias . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Curvatura Gaussiana e a Aplicação de Gauss</b>	<b>21</b>
3.1	Aplicação de Gauss e suas propriedades fundamentais . . . . .	21
3.2	Aplicação de Gauss em coordenadas locais . . . . .	25
3.3	Exemplos . . . . .	30
3.4	Superfícies de curvatura média constante . . . . .	40
3.5	Curvatura Gaussiana de Superfícies Compactas . . . . .	47
<b>4</b>	<b>Superfícies Mínicas</b>	<b>49</b>
4.1	O problema de Plateau . . . . .	49
4.2	Exemplos de superfícies mínimas . . . . .	53
<b>5</b>	<b>Teorema Egregium de Gauss</b>	<b>71</b>
<b>6</b>	<b>Teorema de Gauss-Bonnet</b>	<b>83</b>
6.1	Gauss-Bonnet para curvas Simples Fechadas . . . . .	83
<b>7</b>	<b>Conclusão</b>	<b>89</b>
	<b>Referências</b>	<b>91</b>

# 1 Introdução

Num curso regular de Geometria Diferencial, o estudo de superfícies mínimas e os Teoremas Egregium de Gauss e de Gauss-Bonnet são tópicos, em geral, abordados de uma forma muito rápida e sem muitos detalhes.

O objetivo desse trabalho é elaborar um texto para alunos de graduação na área de Ciências Exatas e da Terra, concernente ao estudo destes tópicos, evidenciando uma conexão entre as áreas de Geometria, Álgebra e Análise.

Para isso é recomendado que o leitor tenha uma certa familiaridade com Álgebra Linear, Equações Diferenciais Ordinárias e Análise, cujos resultados necessários serão referenciados ao longo do texto.

Esse trabalho está organizado da seguinte forma:

Inicialmente, no capítulo 2, introduzimos algumas definições e resultados sobre curvas e superfícies regulares, orientações de superfícies e isometrias necessários para o entendimento dos capítulos posteriores.

No capítulo 3 estudamos a Aplicação de Gauss, suas propriedades fundamentais e a Curvatura Gaussiana.

No capítulo 4 estudamos superfícies mínimas, mais propriamente, buscamos soluções para o problema de Plateau, bem como vemos alguns exemplos de tais superfícies.

No capítulo 5 provamos o Teorema Egregium de Gauss e alguns corolários deste teorema.

Finalmente, no capítulo 6 provamos o Teorema de Gauss-Bonnet para curvas simples fechada, e fazemos uma aplicação deste teorema.

## 2 Pré-Requisitos

Neste capítulo introduziremos algumas definições e resultados sobre curvas e superfícies regulares, orientações de superfícies e isometrias, que serão usados ao longo do texto.

### 2.1 Curvas regulares

Nesta seção introduziremos alguns conceitos básicos para curvas no espaço e enunciaremos o Teorema Fundamental das curvas planas. Para maiores detalhes veja [6].

**Definição 2.1.** *Uma curva parametrizada diferenciável é uma aplicação diferenciável  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  de um intervalo aberto  $I = ]a, b[$  da reta real  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}^3$ .*

**Definição 2.2.** *Um curva parametrizada  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  é chamada regular se  $\alpha'(t) \neq 0$  para todo  $t \in I$ .*

**Definição 2.3.** *Um curva regular  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  é dita parametrizada pelo comprimento de arco, se para cada  $t_0, t_1 \in I$ ,  $t_0 \leq t_1$  o comprimento do arco da curva  $\alpha$  de  $t_0$  a  $t_1$  é igual a  $t_1 - t_0$ . Isto é*

$$\int_{t_0}^{t_1} \|\alpha'(t)\| dt = t_1 - t_0.$$

**Definição 2.4.** *Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva parametrizada pelo comprimento de arco  $s \in I$ . O número  $\|\alpha''(s)\| = k_\alpha(s)$  chama-se curvatura de  $\alpha$  em  $s$ .*

Nos pontos onde  $k_\alpha(s) \neq 0$ , fica bem definido pela equação  $\alpha''(s) = k_\alpha(s)n_\alpha(s)$ , um vetor unitário  $n_\alpha(s)$  na direção de  $\alpha''(s)$ , chamado o vetor normal em  $s$ .

Indicaremos por  $t_\alpha(s) = \alpha'(s)$  o vetor tangente unitário de  $\alpha$  em  $s$ . Temos então  $t'_\alpha(s) = k_\alpha(s)n_\alpha(s)$ .

O vetor unitário  $b_\alpha(s) = t_\alpha(s) \wedge n_\alpha(s)$  será chamado o vetor binormal em  $s$ .

**Definição 2.5.** *Seja  $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma curva parametrizada pelo comprimento de arco  $s$  tal que  $\alpha''(s) \neq 0$ ,  $s \in I$ . O número  $\tau_\alpha(s)$  definido por  $b'_\alpha(s) = \tau_\alpha(s)n_\alpha(s)$  é chamado torção de  $\alpha$  em  $s$ .*

O teorema a seguir mostra que a curvatura determina uma curva plana a menos de sua posição no plano. Mais precisamente:

**Teorema 2.1. Teorema Fundamental das curvas planas.**

- a) Dada uma função diferenciável  $k(s), s \in I \subset \mathbb{R}$ , existe uma curva regular  $\alpha(s)$ , parametrizada pelo comprimento de arco  $s$ , cuja curvatura é  $k(s)$ .
- b) A curva  $\alpha(s)$  acima é única quando fixamos  $\alpha(s_0) = p_0$  e  $\alpha'(s_0) = v_0$ , onde  $v_0$  é um vetor unitário de  $\mathbb{R}^2$ .
- c) Se duas curvas  $\alpha(s)$  e  $\beta(s)$  têm a mesma curvatura, então diferem por sua posição no plano, isto é, existe uma rotação  $L$  e uma translação  $T$  em  $\mathbb{R}^2$ , tal que

$$\alpha(s) = (L \circ T)(\beta(s))$$

## 2.2 Superfícies Regulares

Nessa seção introduzimos a noção de uma superfície regular em  $\mathbb{R}^3$ . Para maiores detalhes veja [2].

**Definição 2.6.** Um subconjunto  $S \subset \mathbb{R}^3$  é uma superfície regular, se para cada  $p \in S$ , existe uma vizinhança  $V$  de  $p$  em  $\mathbb{R}^3$  e uma aplicação  $\chi : U \rightarrow V \cap S$  de um aberto  $U$  de  $\mathbb{R}^2$  em  $V \cap S$  tal que:

- (i)  $\chi$  é diferenciável;
- (ii)  $\chi$  é um homeomorfismo;
- (iii) para todo  $q \in U$ , a diferencial  $d\chi_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é injetiva.

**Definição 2.7.** A aplicação  $\chi$  é chamada uma parametrização ou um sistema de coordenadas (locais) em uma vizinhança de  $p$ . A vizinhança  $V \cap S$  de  $p$  em  $S$  é chamada uma vizinhança coordenada.

Veremos mais adiante, que a condição (iii) na definição 2.6 garante que para cada  $p \in S$ , o conjunto de vetores tangentes às curvas parametrizadas de  $S$ , passando por  $p$ , constituem um plano.

**Definição 2.8.** Entendemos por vetor tangente a  $S$ , em um ponto  $p \in S$ , ao vetor tangente  $\alpha'(t_0)$  de uma curva parametrizada diferenciável  $\alpha : ]a, b[ \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$  com  $\alpha(t_0) = p$ .

Para a demonstração da proposição a seguir necessitaremos de um Teorema da Álgebra Linear, que pode ser encontrado em [5], conhecido como Teorema do Núcleo e da Imagem: Sejam  $V$  e  $W$  espaços vetoriais de dimensão finita e seja  $T : V \rightarrow W$  uma transformação linear. Então  $\dim V = \dim \text{Ker } T + \dim \text{Im } T$ , onde  $\text{Ker } T = \{v \in V : T(v) = 0\}$  é o Núcleo da transformação linear  $T$  e  $\text{Im } T = T(V) = \{T(v) : v \in V\} \subset W$  é a Imagem da transformação linear  $T$ .

**Proposição 2.1.** *Seja  $\chi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  uma parametrização de uma superfície regular  $S$  e seja  $q \in U$ . Então  $d\chi_q(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}^3$  é um subespaço de dimensão 2, onde  $p = \chi(q)$ .*

*Demonstração.* Pela condição (iii) da definição de superfície regular  $S$ , temos que,  $d\chi_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é injetiva. Logo, o núcleo de  $d\chi_q$  é o subespaço nulo de  $\mathbb{R}^2$ . Assim, pelo teorema do núcleo e da imagem,  $\dim d\chi_q(\mathbb{R}^2) = 2$ . Portanto,  $d\chi_q(\mathbb{R}^2)$  é um plano.  $\square$

**Definição 2.9.** *Chamamos de plano tangente à superfície  $S$  em  $p$ , que denotaremos por  $T_pS$ , ao subespaço  $d\chi_q(\mathbb{R}^2)$ , onde  $p = \chi(q)$ .*

**Proposição 2.2.** *Seja  $\chi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  uma parametrização de uma superfície regular  $S$  e seja  $q \in U$ . Então  $T_pS$  é o subespaço gerado por  $\chi_u(q)$  e  $\chi_v(q)$  onde  $p = \chi(q)$ .*

*Demonstração.* Sendo  $d\chi_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por  $(a, b) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(q) & \frac{\partial x}{\partial v}(q) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(q) & \frac{\partial y}{\partial v}(q) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(q) & \frac{\partial z}{\partial v}(q) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  injetiva, temos que  $\chi_u(q) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(q) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(q) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(q) \end{pmatrix}$  e  $\chi_v(q) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v}(q) \\ \frac{\partial y}{\partial v}(q) \\ \frac{\partial z}{\partial v}(q) \end{pmatrix}$  são linearmente independentes, pois a matriz da transformação linear  $d\chi_q$  tem posto 2.

Sendo  $\{e_1, e_2\}$  base canônica de  $\mathbb{R}^2$  temos que  $\chi_u(q) = d\chi_q(e_1)$  e  $\chi_v(q) = d\chi_q(e_2)$  e como  $d\chi_q(\mathbb{R}^2)$  tem dimensão 2, segue que  $\{\chi_u(q), \chi_v(q)\}$  é uma base de  $T_pS = d\chi_q(\mathbb{R}^2)$ .  $\square$

## 2.3 Orientação de superfícies

Nesta seção vamos discutir em que sentido, e quando, é possível orientar uma superfície. Para maiores detalhes veja [2].

Dada uma parametrização  $\chi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  de uma superfície regular  $S$ , podemos escolher, para cada ponto  $p \in \chi(U) \subset S$ , um vetor normal unitário pela regra  $N(p) = \frac{\chi_u \wedge \chi_v}{\|\chi_u \wedge \chi_v\|}(q)$ , onde  $\chi(q) = p$  e  $\chi_u \wedge \chi_v$  denota o produto vetorial de  $\chi_u$  e  $\chi_v$ .

Assim, temos uma aplicação diferenciável  $N : \chi(U) \rightarrow \mathbb{R}^3$  que associa a cada  $p \in \chi(U)$  um vetor unitário  $N(p)$ .

De maneira geral, temos a seguinte

**Definição 2.10.** *Se  $V \subset S$  é um conjunto aberto em  $S$  e  $N : V \rightarrow \mathbb{R}^3$  é uma aplicação diferenciável que associa a cada  $v \in V$  um vetor normal unitário em  $v$ , dizemos que  $N$  é um campo diferenciável de vetores normais unitários em  $V$ .*

**Definição 2.11.** *Dizemos que uma superfície regular é orientável se ela admite um campo diferenciável de vetores normais unitários definido em toda a superfície. A escolha de um tal campo  $N$  é chamada uma orientação de  $S$ .*

Uma orientação  $N$  em  $S$  induz uma orientação em cada plano tangente  $T_pS$ ,  $p \in S$ , da seguinte maneira: defina a base  $\{v, w\} \subset T_pS$  como sendo positiva se o produto interno  $\langle v \wedge w, N \rangle > 0$ . Então o conjunto de todas as bases positivas de  $T_pS$  é uma orientação para  $T_pS$ .

## 2.4 Isometrias

Nesta seção definimos a noção de isometria. Para maiores detalhes veja [2].

**Definição 2.12.** *Se  $S_1$  e  $S_2$  são superfícies regulares, uma aplicação  $f : S_1 \rightarrow S_2$  é diferenciável se, para cada  $p \in S_1$ , existem parametrizações  $\chi$  e  $\bar{\chi}$  (de  $S_1$  e  $S_2$ , respectivamente),*

$$\chi : U \rightarrow S_1, \quad \bar{\chi} : \bar{U} \rightarrow S_2$$

*com  $p \in \chi(U)$ ,  $f(p) \in \bar{\chi}(\bar{U})$  e  $f(\chi(U)) \subset \bar{\chi}(\bar{U})$  de modo que  $h = \bar{\chi}^{-1} \circ f \circ \chi : U \rightarrow \bar{U}$  seja diferenciável. Diremos que  $f$  é um difeomorfismo de  $S_1$  em  $S_2$  se tanto  $f$  quanto  $f^{-1}$  são diferenciáveis.*

**Definição 2.13.** *Se  $S_1$  e  $S_2$  são superfícies regulares, uma aplicação  $f : S_1 \rightarrow S_2$  é uma isometria se  $f$  é um difeomorfismo e para todo  $p$  em  $S_1$  e todo par  $w_1, w_2 \in T_p S_1$ , temos*

$$\langle w_1, w_2 \rangle = \langle df_p(w_1), df_p(w_2) \rangle .$$

*Se uma isometria  $f : S_1 \rightarrow S_2$  existe, dizemos que  $S_1$  e  $S_2$  são isométricas.*

## 3 Curvatura Gaussiana e a Aplicação de Gauss

### 3.1 Aplicação de Gauss e suas propriedades fundamentais

Nesta seção estudaremos a Aplicação de Gauss e suas propriedades fundamentais bem como definiremos a segunda forma fundamental de uma superfície  $S$  em um ponto  $p$  de  $S$ , curvatura normal, curvaturas principais, Curvatura Gaussiana e Curvatura Média. Para maiores detalhes veja [2].

Ao longo desta seção,  $S$  denotará uma superfície regular orientável, onde foi escolhida uma orientação (isto é, um campo diferenciável de vetores normais unitários  $N$ ) conforme seção 2.3; diremos simplesmente que  $S$  é uma superfície com uma orientação  $N$ .

**Definição 3.1.** *Seja  $S \subset \mathbb{R}^3$  uma superfície com uma orientação  $N$ . A aplicação  $N : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  toma seus valores na esfera unitária  $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ .*

*A aplicação  $N : S \rightarrow S^2$ , assim definida, é chamada a aplicação de Gauss de  $S$ .*

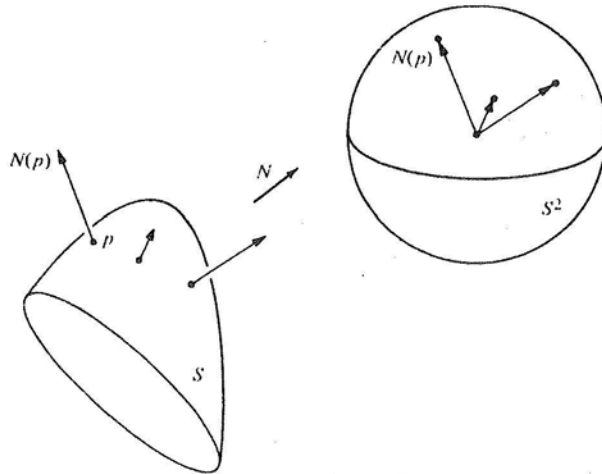


Figura 3.1: Aplicação de Gauss.

É imediato verificar que a aplicação de Gauss é diferenciável. A diferencial  $dN_p$  de  $N$  em  $p \in S$  dá uma aplicação linear de  $T_p S$  em  $T_{N(p)} S^2$ , onde  $T_p S$  e  $T_{N(p)} S^2$  são os mesmos espaços vetoriais (a menos de um isomorfismo), e portanto  $dN_p$  pode ser tratada como uma aplicação linear em  $T_p S$ .

A aplicação linear  $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$  opera da seguinte maneira: para cada curva parametrizada  $\alpha(t)$  em  $S$ , com  $\alpha(0) = p$ , consideremos a curva parametrizada  $N\alpha(t) = N(t)$  na esfera  $S^2$ ; isso equivale a restringir o vetor normal  $N$  à curva  $\alpha(t)$ .

O vetor tangente  $N'(0) = dN_p(\alpha'(0))$  é um vetor de  $T_p S$ . Ele mede a taxa de variação do vetor normal  $N$ , restrito à curva  $\alpha(t)$ , em  $t = 0$ . Assim,  $dN_p$  mede quanto  $N$  se afasta de  $N(p)$  em uma vizinhança de  $p$ .

No caso das curvas, esta medida é dada por um número, denominado *curvatura*. No caso das superfícies, esta medida é caracterizada por uma aplicação linear.

**Proposição 3.1.** *A diferencial  $dN_p : T_p S \rightarrow T_p S$  da aplicação de Gauss é uma aplicação linear auto-adjunta.*

*Demonstração.* Como  $dN_p$  é linear, basta verificarmos que  $dN_p$  é auto-adjunta, ou seja, basta verificarmos que  $\langle dN_p(v), w \rangle = \langle v, dN_p(w) \rangle$ , onde  $\{v, w\}$  é uma base de  $T_p S$ .

Seja  $\chi(u, v)$  uma parametrização de  $S$  em  $p$  e  $\{\chi_u, \chi_v\}$  a base associada de  $T_p S$ .

Se  $\alpha(t) = \chi(u(t), v(t))$  é uma curva parametrizada em  $S$ , com  $\alpha(0) = p$ , temos  $dN_p(\chi_u)u'(0) + dN_p(\chi_v)v'(0) = dN_p(\chi_u u'(0) + \chi_v v'(0)) = dN_p(\alpha'(0)) = \frac{d}{dt} N(u(t), v(t))|_{t=0} = N_u u'(0) + N_v v'(0)$ .

Em particular,  $dN_p(\chi_u) = N_u$  e  $dN_p(\chi_v) = N_v$ . Portanto, para provar que  $dN_p$  é auto-adjunta, é suficiente mostrar que  $\langle N_u, \chi_v \rangle = \langle \chi_u, N_v \rangle$ .

Como  $N = \frac{\chi_u \wedge \chi_v}{\|\chi_u \wedge \chi_v\|}$ , temos:

$$\langle N, \chi_u \rangle = 0 \Rightarrow \langle N_v, \chi_u \rangle + \langle N, \chi_{uv} \rangle = 0 \quad (3.1)$$



$$\langle N, \chi_v \rangle = 0 \Rightarrow \langle N_u, \chi_v \rangle + \langle N, \chi_{vu} \rangle = 0 \quad (3.2)$$

Subtraindo (3.2) de (3.1) temos:

$$\langle N_v, \chi_u \rangle - \langle N_u, \chi_v \rangle = 0, \text{ e portanto } \langle \chi_u, N_v \rangle = \langle N_v, \chi_u \rangle = \langle N_u, \chi_v \rangle.$$

□

O fato de  $dN_p$  ser uma aplicação linear auto-adjunta nos permite associar à  $dN_p$  uma forma quadrática  $Q$  em  $T_pS$ , dada por  $Q(v) = \langle dN_p(v), v \rangle, v \in T_pS$ .

**Definição 3.2.** A forma quadrática  $\mathbb{I}_p$ , definida em  $T_pS$  por  $\mathbb{I}_p(v) = - \langle dN_p(v), v \rangle$  é chamada a segunda forma fundamental de  $S$  em  $p$ .

**Definição 3.3.** Seja  $C$  uma curva regular em  $S$  passando por  $p \in S$ ,  $k$  a curvatura de  $C$  em  $p$ , e  $\cos\theta = \langle n, N \rangle$ , onde  $n$  é o vetor normal a  $C$  e  $N$  é o vetor normal a  $S$  em  $p$ . O número  $k_n = k \cos\theta$  é chamado a curvatura normal de  $C \subset S$  em  $p$ .

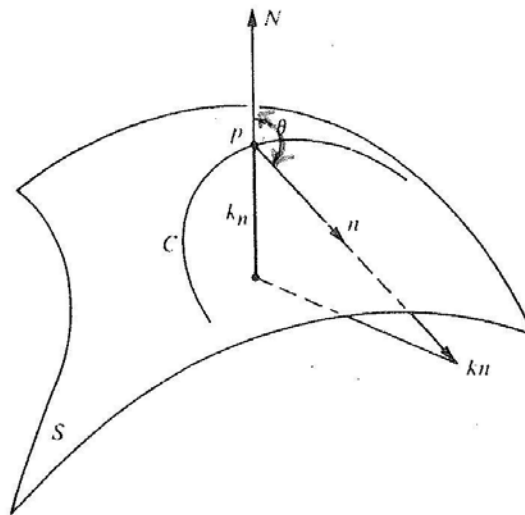


Figura 3.2: Curvatura Normal.

Considere uma curva regular  $C \subset S$  parametrizada por  $\alpha(s)$ , onde  $s$  é o parâmetro comprimento de arco de  $C$ , com  $\alpha(0) = p$ . Se indicarmos por  $N(s)$  a restrição do vetor normal  $N$  à curva  $\alpha(s)$ , teremos  $\langle N(s), \alpha'(s) \rangle = 0$ , donde segue que

$$\langle N'(s), \alpha'(s) \rangle + \langle N(s), \alpha''(s) \rangle = 0, \text{ ou equivalentemente,}$$

$$\langle N(s), \alpha''(s) \rangle = - \langle N'(s), \alpha'(s) \rangle, \forall s$$

Portanto,

$$\mathbb{I}_p(\alpha'(0)) = - \langle dN_p(\alpha'(0)), \alpha'(0) \rangle = - \langle N'(0), \alpha'(0) \rangle = \langle N(0), \alpha''(0) \rangle = \langle N(0), k(0)n(0) \rangle = k(0) \langle N(0), n(0) \rangle = k(0) \cos\theta, \text{ onde } \theta \text{ é o ângulo formado pelos vetores } n(0) \text{ e } N(0).$$

$$\text{Portanto, } \mathbb{I}_p(\alpha'(0)) = k_n(p).$$

Em outras palavras, o valor da segunda forma fundamental  $\prod_p$  em um vetor unitário  $v \in T_p S$  é igual à curvatura normal de uma curva regular passando por  $p$  e tangente a  $v$ .

Em [5] temos o

**Teorema 3.1.** *Se  $A : V \rightarrow V$  é uma aplicação linear auto-adjunta, então existe uma base ortonormal  $\{e_1, e_2\}$  de  $V$  tal que  $A(e_1) = \lambda_1 e_1$  e  $A(e_2) = \lambda_2 e_2$ , isto é,  $e_1$  e  $e_2$  são auto-vetores e  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são auto-valores de  $A$ .*

**Observação 3.1.** Observamos que na base  $\{e_1, e_2\}$  do teorema 3.1, a matriz de  $A$  é diagonal e os elementos  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  (com  $\lambda_1 \geq \lambda_2$ ) da diagonal, são os valores máximo e mínimo, respectivamente, da forma quadrática  $Q(v) = \langle Av, v \rangle$  sobre o círculo unitário de  $V$ , pois para qualquer vetor unitário  $v \in V$  temos que  $v = xe_1 + ye_2$  com  $x^2 + y^2 = 1$ . Assim,

$$Q(v) = \langle Av, v \rangle = \langle xA(e_1) + yA(e_2), xe_1 + ye_2 \rangle = \langle x\lambda_1 e_1 + y\lambda_2 e_2, xe_1 + ye_2 \rangle = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2.$$

Supondo  $\lambda_1 \geq \lambda_2$  temos:

$$Q(v) = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 \geq \lambda_2 (x^2 + y^2) = \lambda_2$$

e

$$Q(v) = \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 \leq \lambda_1 (x^2 + y^2) = \lambda_1$$

e portanto  $\lambda_2 \leq Q(v) \leq \lambda_1$ , para qualquer  $v$  pertencente ao círculo unitário de  $V$  e como  $Q(1, 0) = \lambda_1 \geq Q(0, 1) = \lambda_2$ , segue que  $\lambda_2$  é o mínimo e  $\lambda_1$  é máximo da forma quadrática  $Q(v)$ .

De acordo com o teorema 3.1 e a observação 3.1 (fazendo  $A = -dN_p$ ), podemos dizer que para cada  $p \in S$  existe uma base ortonormal  $\{e_1, e_2\}$  de  $T_p S$  tal que  $-dN_p(e_1) = k_1 e_1$  e  $-dN_p(e_2) = k_2 e_2$ .

Além disso  $k_1$  e  $k_2$  ( $k_1 \geq k_2$ ) são o máximo e o mínimo da segunda forma fundamental  $\prod_p$  restrita ao círculo unitário de  $T_p S$ ; isto é, são os valores extremos da curvatura normal em  $p$ .

**Definição 3.4.** *O máximo da curvatura normal  $k_1$  e o mínimo da curvatura normal  $k_2$ , são chamados curvaturas principais em  $p$ . As direções correspondentes, isto é, as direções dadas pelos auto-vetores  $e_1$  e  $e_2$  são chamadas direções principais em  $p$ .*

Observamos que esses números não dependem da base escolhida, e são portanto, associados à aplicação linear.

Lembramos que o determinante de um operador linear  $T : V \rightarrow V$  é o determinante da matriz desse operador linear em relação à alguma base de  $V$ .

Assim, a matriz do operador linear  $dN_p$  é dada por:

$$\begin{pmatrix} -k_1 & 0 \\ 0 & -k_2 \end{pmatrix}$$

e portanto o determinante de  $dN_p$  é o produto  $(-k_1)(-k_2) = k_1k_2$  das curvaturas principais, e o traço de  $dN_p$  é o negativo da soma das curvaturas principais  $-(k_1 + k_2)$ . Observamos que se mudarmos a orientação da superfície, o determinante não muda, mas o traço, contudo, muda de sinal. Assim temos:

**Definição 3.5.** *Seja  $p \in S$  e seja  $dN_p : T_pS \rightarrow T_pS$  a diferencial da aplicação de Gauss. O determinante de  $dN_p$  é chamado a curvatura Gaussiana  $K$  de  $S$  em  $p$ . O negativo da metade do traço de  $dN_p$  é chamado a curvatura média de  $S$  em  $p$ . Assim, em termos das curvaturas principais  $k_1$  e  $k_2$ , temos  $K = k_1k_2$  e  $H = \frac{k_1+k_2}{2}$ .*

### 3.2 Aplicação de Gauss em coordenadas locais

Agora obteremos as expressões da segunda forma fundamental e da diferencial da aplicação de Gauss em um sistema de coordenadas locais. Deste modo, teremos um método sistemático para o cálculo de exemplos específicos.

Todas as parametrizações  $\chi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$  consideradas neste capítulo são compatíveis com a orientação  $N$  de  $S$ , isto é, em  $\chi(U)$ ,  $N(p) = \frac{\chi_u \wedge \chi_v}{\|\chi_u \wedge \chi_v\|}(q)$  com  $p = \chi(q) \in \chi(U)$ .

Seja  $\chi(u, v)$  uma parametrização em um ponto  $p$  de uma superfície  $S$ , e seja  $\alpha(t) = \chi(u(t), v(t))$  uma curva parametrizada em  $S$ , com  $\alpha(0) = \chi(q) = p$  onde  $q = (u(0), v(0))$ .

O vetor tangente a  $\alpha(t)$  em  $p$  é  $\alpha'(0) = \chi_u(q)u'(0) + \chi_v(q)v'(0)$  e  $dN_p(\alpha'(0)) = N'(0) = N_u(q)u'(0) + N_v(q)v'(0)$  onde  $N(t) = N(\chi(u(t), v(t)))$  que simplesmente escreveremos como  $N(u(t), v(t))$ .

Temos  $\langle N, N \rangle = 1$ . Assim,  $\langle N_u, N \rangle + \langle N, N_u \rangle = 0$  e portanto  $\langle N_u, N \rangle = 0$ . Da mesma forma,  $\langle N_v, N \rangle = 0$ . Assim,  $N_u$  e  $N_v$  pertencem a  $T_pS$ . Logo, podemos escrever

$$N_u = a_{11}\chi_u + a_{21}\chi_v \tag{3.3}$$

$$N_v = a_{12}\chi_u + a_{22}\chi_v \tag{3.4}$$

e portanto,

$$dN_p(\alpha'(0)) = N_u(q)u'(0) + N_v(q)v'(0) = (a_{11}\chi_u(q) + a_{21}\chi_v(q))u'(0) + (a_{12}\chi_u(q) + a_{22}\chi_v(q))v'(0) = (a_{11}u'(0) + a_{12}v'(0))\chi_u(q) + (a_{21}u'(0) + a_{22}v'(0))\chi_v(q)$$

ou seja,

$$dN_p \begin{pmatrix} u'(0) \\ v'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u'(0) \\ v'(0) \end{pmatrix}$$

Isto mostra que na base  $\{\chi_u(q), \chi_v(q)\}$ ,  $dN_p$  é dada pela matriz  $(a_{ij})$ ,  $i, j = 1, 2$ .

Por outro lado, a expressão da segunda forma fundamental na base  $\{\chi_u(q), \chi_v(q)\}$  é dada por

$$\begin{aligned}
\Pi_p(\alpha'(0)) &= - \langle dN_p(\alpha'(0)), \alpha'(0) \rangle \\
&= - \langle N_u(q)u'(0) + N_v(q)v'(0), \chi_u(q)u'(0) + \chi_v(q)v'(0) \rangle \\
&= -u'(0)^2 \langle N_u(q), \chi_u(q) \rangle - u'(0)v'(0) \langle N_u(q), \chi_v(q) \rangle \\
&\quad - v'(0)u'(0) \langle N_v(q), \chi_u(q) \rangle - v'(0)^2 \langle N_v(q), \chi_v(q) \rangle
\end{aligned}$$

Como  $\langle N, \chi_u \rangle = 0 = \langle N, \chi_v \rangle$ , temos:

- $\langle N_u, \chi_u \rangle + \langle N, \chi_{uu} \rangle = 0$  e portanto

$$\langle N, \chi_{uu} \rangle = - \langle N_u, \chi_u \rangle \quad (3.5)$$

- $\langle N_u, \chi_v \rangle + \langle N, \chi_{vu} \rangle = 0$  e portanto

$$\langle N, \chi_{uv} \rangle = \langle N, \chi_{vu} \rangle = - \langle N_u, \chi_v \rangle \quad (3.6)$$

- $\langle N_v, \chi_u \rangle + \langle N, \chi_{uv} \rangle = 0$  e portanto

$$\langle N, \chi_{uv} \rangle = - \langle N_v, \chi_u \rangle \quad (3.7)$$

- $\langle N_v, \chi_v \rangle + \langle N, \chi_{vv} \rangle = 0$  e portanto

$$\langle N, \chi_{vv} \rangle = - \langle N_v, \chi_v \rangle \quad (3.8)$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\Pi_p(\alpha'(0)) &= \langle N(p), \chi_{uu}(q) \rangle u'(0)^2 + 2 \langle N(p), \chi_{uv}(q) \rangle u'(0)v'(0) \\
&\quad + \langle N(p), \chi_{vv}(q) \rangle v'(0)^2
\end{aligned}$$

Lembrando que  $p = \chi(q)$  e fazendo

$$\langle N(p), \chi_{uu}(q) \rangle = e(q)$$

$$\langle N(p), \chi_{uv}(q) \rangle = f(q)$$

$$\langle N(p), \chi_{vv}(q) \rangle = g(q)$$

temos:

$$\Pi_p(\alpha'(0)) = e(q)u'(0)^2 + 2f(q)u'(0)v'(0) + g(q)v'(0)^2$$

Vamos obter o determinante de  $dN(p)$ , isto é,  $\det(a_{ij})$ , a partir das equações

$$N_u(p) = a_{11}\chi_u(q) + a_{21}\chi_v(q)$$

$$N_v(p) = a_{12}\chi_u(q) + a_{22}\chi_v(q)$$

Fazendo

$$E(q) = \langle \chi_u(q), \chi_u(q) \rangle$$

$$F(q) = \langle \chi_u(q), \chi_v(q) \rangle$$

$$G(q) = \langle \chi_v(q), \chi_v(q) \rangle$$

obtém-se

$$\begin{aligned} -e(q) &= \langle N_u(p), \chi_u(q) \rangle \\ &= \langle a_{11}\chi_u(q) + a_{21}\chi_v(q), \chi_u(q) \rangle \\ &= a_{11} \langle \chi_u(q), \chi_u(q) \rangle + a_{21} \langle \chi_v(q), \chi_u(q) \rangle, \end{aligned}$$

ou seja,

$$-e(q) = a_{11}E(q) + a_{21}F(q) \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned} -f(q) &= \langle N_u(p), \chi_v(q) \rangle \\ &= \langle a_{11}\chi_u(q) + a_{21}\chi_v(q), \chi_v(q) \rangle \\ &= a_{11} \langle \chi_u(q), \chi_v(q) \rangle + a_{21} \langle \chi_v(q), \chi_v(q) \rangle, \end{aligned}$$

ou seja,

$$-f(q) = a_{11}F(q) + a_{21}G(q) \tag{3.10}$$

$$\begin{aligned} -f(q) &= \langle N_v(p), \chi_u(q) \rangle \\ &= \langle a_{12}\chi_u(q) + a_{22}\chi_v(q), \chi_u(q) \rangle \\ &= a_{12} \langle \chi_u(q), \chi_u(q) \rangle + a_{22} \langle \chi_v(q), \chi_u(q) \rangle, \end{aligned}$$

ou seja,

$$-f(q) = a_{12}E(q) + a_{22}F(q) \tag{3.11}$$

$$\begin{aligned} -g(q) &= \langle N_v(p), \chi_v(q) \rangle \\ &= \langle a_{12}\chi_u(q) + a_{22}\chi_v(q), \chi_v(q) \rangle \\ &= a_{12} \langle \chi_u(q), \chi_v(q) \rangle + a_{22} \langle \chi_v(q), \chi_v(q) \rangle, \end{aligned}$$

ou seja,

$$-g(q) = a_{12}F(q) + a_{22}G(q) \tag{3.12}$$

As relações de (3.9) à (3.12) podem ser expressas na forma matricial por:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E(q) & F(q) \\ F(q) & G(q) \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} e(q) & f(q) \\ f(q) & g(q) \end{pmatrix}$$

Como  $\|\chi_u(q) \wedge \chi_v(q)\|^2 = \|\chi_u(q)\|^2 \|\chi_v(q)\|^2 \text{sen}^2\theta$  onde  $\theta$  é o ângulo formado por  $\chi_u(q)$  e  $\chi_v(q)$ , tem-se

$$\begin{aligned} \|\chi_u(q) \wedge \chi_v(q)\|^2 &= \|\chi_u(q)\|^2 \|\chi_v(q)\|^2 (1 - \cos^2\theta) \\ &= \|\chi_u(q)\|^2 \|\chi_v(q)\|^2 - (\|\chi_u(q)\| \|\chi_v(q)\| \cos\theta)^2 \\ &= \|\chi_u(q)\|^2 \|\chi_v(q)\|^2 - \langle \chi_u(q), \chi_v(q) \rangle^2 \end{aligned}$$

Logo  $\|\chi_u(q) \wedge \chi_v(q)\|^2 = E(q)G(q) - F^2(q)$  e portanto  $E(q)G(q) - F^2(q) > 0$

Assim, a matriz

$$\begin{pmatrix} E(q) & F(q) \\ F(q) & G(q) \end{pmatrix}$$

é inversível e

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} e(q) & f(q) \\ f(q) & g(q) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E(q) & F(q) \\ F(q) & G(q) \end{pmatrix}^{-1} \quad (3.13)$$

onde  $( )^{-1}$  indica a matriz inversa de  $( )$ .

Logo,

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} e(q) & f(q) \\ f(q) & g(q) \end{pmatrix} \frac{1}{\det \begin{pmatrix} E(q) & F(q) \\ F(q) & G(q) \end{pmatrix}} \\ &= \frac{e(q)g(q) - f^2(q)}{E(q)G(q) - F^2(q)} \end{aligned}$$

Portanto

$$K(q) = \frac{e(q)g(q) - f^2(q)}{E(q)G(q) - F^2(q)} \quad (3.14)$$

Para o cálculo da curvatura média necessita-se dos cálculos de  $a_{11}$  e  $a_{22}$ . De (3.13) tem-se

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} e(q) & f(q) \\ f(q) & g(q) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E(q) & F(q) \\ F(q) & G(q) \end{pmatrix}^{-1}$$

Mas

$$\begin{pmatrix} E(q) & F(q) \\ F(q) & G(q) \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{E(q)G(q) - F^2(q)} \begin{pmatrix} G(q) & -F(q) \\ -F(q) & E(q) \end{pmatrix}^t,$$

onde  $( )^t$  indica a matriz transposta de  $( )$ .

Assim

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = -\frac{1}{E(q)G(q) - F^2(q)} \begin{pmatrix} e(q) & f(q) \\ f(q) & g(q) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G(q) & -F(q) \\ -F(q) & E(q) \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

Logo,

$$a_{11} = \frac{f(q)F(q) - e(q)G(q)}{E(q)G(q) - F^2(q)} \quad (3.16)$$

$$a_{22} = \frac{f(q)F(q) - g(q)E(q)}{E(q)G(q) - F^2(q)} \quad (3.17)$$

Lembremos também que  $-k_1$  e  $-k_2$  são os autovalores de  $dN_p$ . Portanto,  $k_1$  e  $k_2$  satisfazem a equação  $dN_p(v) = -\lambda v = -\lambda I(v)$  para algum  $v \in T_pS$ ,  $v \neq 0$ , onde  $I$  é a aplicação identidade.

Decorre então que  $(dN_p + \lambda I)(v) = 0$  para algum  $v \in T_pS$ ,  $v \neq 0$ . Logo  $\ker(dN_p + \lambda I) \neq 0$  e assim  $dN_p + \lambda I$  não é inversível e portanto tem determinante nulo.

Assim,

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} + \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} + \lambda \end{pmatrix} = 0,$$

ou seja,

$$(a_{11} + \lambda)(a_{22} + \lambda) - a_{21}a_{12} = 0$$

ou

$$\lambda^2 + (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 0$$

ou ainda

$$\lambda^2 + (a_{11} + a_{22})\lambda + K(q) = 0 \quad (3.18)$$

Como  $k_1$  e  $k_2$  são raízes da equação quadrática acima, concluímos que:

$$H(q) = \frac{k_1 + k_2}{2} = \frac{-(a_{11} + a_{22})}{2} = \frac{e(q)G(q) - 2f(q)F(q) + g(q)E(q)}{2(E(q)G(q) - F^2(q))} \quad (3.19)$$

Conhecido então  $H(q)$ , obtemos  $a_{11} + a_{22} = -2H(q)$ . Logo, a equação (3.18) fica

$$\lambda^2 - 2H(q)\lambda + K(q) = 0$$

e como

$$H^2(q) - K(q) = \frac{(k_1 - k_2)^2}{4} \geq 0$$

segue que

$$\lambda = H(q) \pm \sqrt{H^2(q) - K(q)}$$

e portanto as curvaturas principais são

$$H(q) + \sqrt{H^2(q) - K(q)} \text{ e } H(q) - \sqrt{H^2(q) - K(q)} \quad (3.20)$$

### 3.3 Exemplos

Para os exemplos a seguir usaremos a notação  $\langle u \wedge v, w \rangle = (u, v, w)$  para todos  $u, v, w$  em  $\mathbb{R}^3$ , onde  $\langle u \wedge v, w \rangle$  é o produto interno entre  $u \wedge v$  e  $w$ , e  $u \wedge v$  é o produto vetorial entre  $u$  e  $v$ . Lembremos que  $(u, v, w)$  é o determinante de uma matriz  $3 \times 3$  cujas colunas (ou linhas) são as componentes dos vetores  $u, v$  e  $w$  na base canônica  $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$  de  $\mathbb{R}^3$ .

Ainda, faremos uso da

**Proposição 3.2.** *Se  $\chi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$  é uma superfície parametrizada regular com curvatura gaussiana  $K(u, v) = a^2 > 0$ , então  $\bar{\chi}(u, v) = (ax(u, v), ay(u, v), az(u, v))$  tem curvatura gaussiana  $\bar{K}(u, v) = a^{-2}K(u, v) = 1$ . Reciprocamente, se  $\bar{\chi}(u, v)$  tem curvatura gaussiana constante  $\bar{K}(u, v) = 1$ , então  $\chi(u, v)$  tem curvatura gaussiana constante  $K(u, v) = a^2 > 0$ .*

*Demonstração.* Com efeito, temos

$$\bar{K}(q) = \frac{\bar{e}(q)\bar{g}(q) - \bar{f}^2(q)}{\bar{E}(q)\bar{G}(q) - \bar{F}^2(q)}$$

onde

$$\bar{E}(q) = \langle \bar{\chi}_u, \bar{\chi}_u \rangle = \langle a\chi_u, a\chi_u \rangle = a^2 \langle \chi_u, \chi_u \rangle = a^2 E(q)$$

$$\bar{F}(q) = \langle \bar{\chi}_u, \bar{\chi}_v \rangle = \langle a\chi_u, a\chi_v \rangle = a^2 \langle \chi_u, \chi_v \rangle = a^2 F(q)$$

$$\bar{G}(q) = \langle \bar{\chi}_v, \bar{\chi}_v \rangle = \langle a\chi_v, a\chi_v \rangle = a^2 \langle \chi_v, \chi_v \rangle = a^2 G(q)$$

$$\bar{e}(q) = \langle \bar{N}(p), \bar{\chi}_{uu} \rangle$$

$$\bar{f}(q) = \langle \bar{N}(p), \bar{\chi}_{uv} \rangle$$

$$\bar{g}(q) = \langle \bar{N}(p), \bar{\chi}_{vv} \rangle$$

Desde que

$$\begin{aligned} \bar{N}(p) &= \frac{\bar{\chi}_u \wedge \bar{\chi}_v}{\|\bar{\chi}_u \wedge \bar{\chi}_v\|}(q) \\ &= \frac{a\chi_u \wedge a\chi_v}{\|a\chi_u \wedge a\chi_v\|}(q) \\ &= \frac{\chi_u \wedge \chi_v}{\|\chi_u \wedge \chi_v\|}(q) = N(p) \end{aligned}$$



segue que

$$\bar{e}(q) = \langle \bar{N}(p), \bar{\chi}_{uu} \rangle = \langle N(p), a\chi_{uu} \rangle = ae(q)$$

$$\bar{f}(q) = \langle \bar{N}(p), \bar{\chi}_{uv} \rangle = \langle N(p), a\chi_{uv} \rangle = af(q)$$

$$\bar{g}(q) = \langle \bar{N}(p), \bar{\chi}_{vv} \rangle = \langle N(p), a\chi_{vv} \rangle = ag(q)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \bar{K}(u, v) &= \frac{\bar{e}(q)\bar{g}(q) - \bar{f}^2(q)}{\bar{E}(q)\bar{G}(q) - \bar{F}^2(q)} \\ &= \frac{ae(q)ag(q) - (af(q))^2}{a^2E(q)a^2G(q) - (a^2F(q))^2} \\ &= \frac{a^2e(q)g(q) - a^2f^2(q)}{a^4E(q)G(q) - a^4F^2(q)} \\ &= \frac{a^2(e(q)g(q) - f^2(q))}{a^4(E(q)G(q) - F^2(q))} \\ &= a^{-2}K(u, v) \end{aligned}$$

Portanto, se  $K(u, v) = a^2 > 0$  então  $\bar{K}(u, v) = 1$  e reciprocamente, se  $\bar{K}(u, v) = 1$  então  $K(u, v) = a^2 > 0$ .  $\square$

No exemplo a seguir, calculamos a curvatura gaussiana de uma Superfície de Revolução.

**Exemplo 3.1.** (Superfície de Revolução) Considere a superfície de revolução

$\chi(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$  onde  $f(u) > 0$  e  $f'(u)^2 + g'(u)^2 = 1$ , para todo  $u$ .

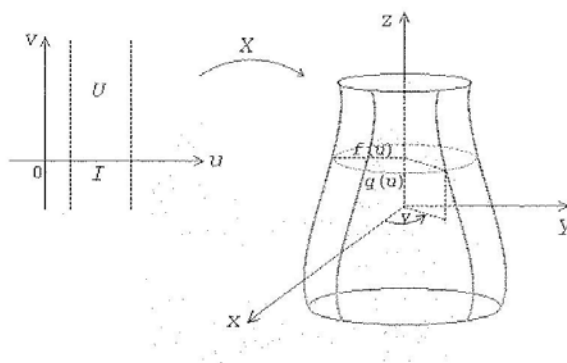


Figura 3.3: Superfície de Revolução.

Então temos:

$$\begin{aligned}
E(u, v) &= \langle \chi_u(u, v), \chi_u(u, v) \rangle \\
&= \langle (f'(u) \cos v, f'(u) \sin v, g'(u)), (f'(u) \cos v, f'(u) \sin v, g'(u)) \rangle \\
&= f'(u)^2 \cos^2 v + f'(u)^2 \sin^2 v + g'(u)^2 \\
&= f'(u)^2 + g'(u)^2 \\
&= 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F(u, v) &= \langle \chi_u(u, v), \chi_v(u, v) \rangle \\
&= \langle (f'(u) \cos v, f'(u) \sin v, g'(u)), (-f(u) \sin v, f(u) \cos v, 0) \rangle \\
&= -f'(u)f(u) \cos v \sin v + f'(u)f(u) \cos v \sin v \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G(u, v) &= \langle \chi_v(u, v), \chi_v(u, v) \rangle \\
&= \langle (-f(u) \sin v, f(u) \cos v, 0), (-f(u) \sin v, f(u) \cos v, 0) \rangle \\
&= f(u)^2 \sin^2 v + f(u)^2 \cos^2 v \\
&= f(u)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e(q) &= \langle N(u, v), \chi_{uu}(u, v) \rangle \\
&= \langle \frac{\chi_u(u, v) \wedge \chi_v(u, v)}{\|\chi_u(u, v) \wedge \chi_v(u, v)\|}, \chi_{uu}(u, v) \rangle \\
&= \frac{(\chi_u(u, v), \chi_v(u, v), \chi_{uu}(u, v))}{\|\chi_u(u, v) \wedge \chi_v(u, v)\|}
\end{aligned}$$

Mas  $\chi_{uu}(u, v) = (f''(u) \cos v, f''(u) \sin v, g''(u))$ . Assim,

$$\begin{aligned}
(\chi_u(u, v), \chi_v(u, v), \chi_{uu}(u, v)) &= \begin{vmatrix} f'(u) \cos v & -f(u) \sin v & f''(u) \cos v \\ f'(u) \sin v & f(u) \cos v & f''(u) \sin v \\ g'(u) & 0 & g''(u) \end{vmatrix} \\
&= f'(u)f(u)g''(u) \cos^2 v - f''(u)f(u)g'(u) \sin^2 v \\
&\quad - f''(u)f(u)g'(u) \cos^2 v + f'(u)f(u)g''(u) \sin^2 v \\
&= f'(u)f(u)g''(u) - f''(u)f(u)g'(u) \\
&= f(u)(f'(u)g''(u) - f''(u)g'(u))
\end{aligned}$$

Ainda

$$\begin{aligned}
\chi_u(u, v) \wedge \chi_v(u, v) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ f'(u) \cos v & f'(u) \sin v & g'(u) \\ -f(u) \sin v & f(u) \cos v & 0 \end{vmatrix} \\
&= (-f(u)g'(u) \cos v, -f(u)g'(u) \sin v, f'(u)f(u) \cos^2 v + f'(u)f(u) \sin^2 v) \\
&= (-f(u)g'(u) \cos v, -f(u)g'(u) \sin v, f'(u)f(u))
\end{aligned}$$

e portanto

$$\begin{aligned}
\|\chi_u(u, v) \wedge \chi_v(u, v)\| &= \sqrt{f(u)^2 g'(u)^2 \cos^2 v + f(u)^2 g'(u)^2 \sin^2 v + f'(u)^2 f(u)^2} \\
&= \sqrt{f(u)^2 g'(u)^2 + f'(u)^2 f(u)^2} \\
&= \sqrt{f(u)^2 (g'(u)^2 + f'(u)^2)} \\
&= f(u)
\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
e(u, v) &= \frac{f(u)(f'(u)g''(u) - f''(u)g'(u))}{f(u)} \\
&= f'(u)g''(u) - f''(u)g'(u) \\
f(u, v) &= \langle N(u, v), \chi_{uv}(u, v) \rangle \\
&= \langle \frac{\chi_u(u, v) \wedge \chi_v(u, v)}{\|\chi_u(u, v) \wedge \chi_v(u, v)\|}, \chi_{uv}(u, v) \rangle \\
&= \frac{(\chi_u(u, v), \chi_v(u, v), \chi_{uv}(u, v))}{\|\chi_u(u, v) \wedge \chi_v(u, v)\|}
\end{aligned}$$

Mas  $\chi_{uv}(u, v) = (-f'(u) \sin v, f'(u) \cos v, 0)$ . Assim,

$$\begin{aligned}
(\chi_u(u, v), \chi_v(u, v), \chi_{uv}(u, v)) &= \begin{vmatrix} f'(u) \cos v & -f(u) \sin v & -f'(u) \sin v \\ f'(u) \sin v & f(u) \cos v & f'(u) \cos v \\ g'(u) & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&= -f'(u)f(u)g'(u) \sin v \cos v + f'(u)f(u)g'(u) \sin v \cos v \\
&= 0
\end{aligned}$$

Logo

$$f(u, v) = 0.$$

$$\begin{aligned}
g(u, v) &= \langle N(u, v), \chi_{vv}(u, v) \rangle \\
&= \langle \frac{\chi_u(u, v) \wedge \chi_v(u, v)}{\|\chi_u(u, v) \wedge \chi_v(u, v)\|}, \chi_{vv}(u, v) \rangle \\
&= \frac{(\chi_u(u, v), \chi_v(u, v), \chi_{vv}(u, v))}{\|\chi_u(u, v) \wedge \chi_v(u, v)\|}
\end{aligned}$$

Mas  $\chi_{vv}(u, v) = (-f(u) \cos v, -f(u) \sin v, 0)$ . Assim,

$$\begin{aligned}
(\chi_u(u, v), \chi_v(u, v), \chi_{vv}(u, v)) &= \begin{vmatrix} f'(u) \cos v & -f(u) \sin v & -f(u) \cos v \\ f'(u) \sin v & f(u) \cos v & -f(u) \sin v \\ g'(u) & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&= f(u)^2 g'(u) \sin^2 v + f(u)^2 g'(u) \cos^2 v \\
&= f(u)^2 g'(u)
\end{aligned}$$

Como  $\|\chi_u(u, v) \wedge \chi_v(u, v)\| = f(u)$ , temos

$$\begin{aligned}
g(u, v) &= \frac{f^2(u)g'(u)}{f(u)} \\
&= f(u)g'(u)
\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
 K(u, v) &= \frac{e(u, v)g(u, v) - f^2(u, v)}{E(u, v)G(u, v) - F^2(u, v)} \\
 &= \frac{(f'(u)g''(u) - f''(u)g'(u))(f(u)g'(u)) - 0^2}{1f(u)^2 - 0^2} \\
 &= \frac{(f'(u)g''(u) - f''(u)g'(u))(f(u)g'(u))}{f(u)^2} \\
 &= \frac{(f'(u)g''(u) - f''(u)g'(u))g'(u)}{f(u)}
 \end{aligned}$$

Podemos simplificar essa fórmula observando que  $f'(u)^2 + g'(u)^2 = 1$  implica que

$$2f'(u)f''(u) + 2g'(u)g''(u) = 0$$

ou

$$f'(u)f''(u) + g'(u)g''(u) = 0$$

ou ainda,

$$g'(u)g''(u) = -f'(u)f''(u)$$

Portanto

$$\begin{aligned}
 (f'(u)g''(u) - f''(u)g'(u))g'(u) &= f'(u)g'(u)g''(u) - f''(u)g'(u)^2 \\
 &= -f'(u)f'(u)f''(u) - f''(u)g'(u)^2 \\
 &= -f'(u)^2f''(u) - f''(u)g'(u)^2 \\
 &= -f''(u)(f'(u)^2 + g'(u)^2) \\
 &= -f''(u)
 \end{aligned}$$

Assim,

$$K(u, v) = \frac{-f''(u)}{f(u)} \quad (3.21)$$

Agora apresentaremos exemplos de superfícies com curvatura gaussiana constante nula, positiva e negativa. Para esse fim,

**Exemplo 3.2.** Consideremos novamente a superfície de revolução

$$\chi(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u)) \quad (3.22)$$

onde  $f(u) > 0$  e  $f'(u)^2 + g'(u)^2 = 1$ , para todo  $u$ .

Vimos no Exemplo 3.1 que a curvatura gaussiana da superfície de revolução (3.22) é dada por

$$K(u, v) = -\frac{f''(u)}{f(u)} \quad (3.23)$$

Suponha primeiro que  $K(u, v) = 0$ ,  $\forall (u, v)$ . Assim da equação(3.23) temos que  $f''(u) = 0$ . Logo  $f'(u) = a$  e portanto  $f(u) = au + b$  para algumas constantes  $a$  e  $b$ .

Como  $f'(u)^2 + g'(u)^2 = 1$ , temos que  $g'(u) = \pm\sqrt{1-a^2}$  (onde  $|a| \leq 1$ ) e portanto  $g(u) = \pm\sqrt{1-a^2}u + c$ , onde  $c$  é uma constante. Assim

$$\chi(u, v) = ((au + b) \cos v, (au + b) \sin v, \pm\sqrt{1-a^2}u + c)$$

Efetutando-se a translação

$$\begin{aligned}x &= x_1 \\y &= y_1 \\z &= z_1 + c\end{aligned}$$

podemos assumir que  $\chi(u, v) = ((au + b) \cos v, (au + b) \sin v, \pm\sqrt{1-a^2}u)$  e se  $z_1 = -\sqrt{1-a^2}u$ , aplicando-se a rotação

$$\begin{aligned}x_1 &= x_2 \\y_1 &= y_2 \\z_1 &= -z_2\end{aligned}$$

podemos finalmente supor que

$$\chi(u, v) = ((au + b) \cos v, (au + b) \sin v, \sqrt{1-a^2}u)$$

Se  $a = 0$ ,  $\chi(u, v) = (b \cos v, b \sin v, u)$  onde  $b > 0$  (pois  $f(u) = b > 0$ ) e portanto a superfície descreve o cilindro circular de raio  $b$ , de equação  $\frac{x_2^2}{b^2} + \frac{y_2^2}{b^2} = 1$

Se  $|a| = 1$ ,  $\chi(u, v) = ((\pm u + b) \cos v, (\pm u + b) \sin v, 0)$  e portanto a superfície descreve o plano  $Ox_2y_2$  de equação  $z_2 = 0$

Se  $0 < |a| < 1$ ,  $\chi(u, v) = ((au + b) \cos v, (au + b) \sin v, \sqrt{1-a^2}u)$ . Colocando  $\tilde{u} = au + b$  e  $\tilde{v} = v$ , obtemos

$$\chi(\tilde{u}, \tilde{v}) = (\tilde{u} \cos \tilde{v}, \tilde{u} \sin \tilde{v}, \frac{\sqrt{1-a^2}}{a}(\tilde{u} - b))$$

Chamando

$$\begin{aligned}X &= \tilde{u} \cos \tilde{v} \\Y &= \tilde{u} \sin \tilde{v} \\Z &= \frac{\sqrt{1-a^2}}{a}(\tilde{u} - b)\end{aligned}$$

obtemos

$$\begin{aligned}X^2 + Y^2 &= \tilde{u}^2 \\&= \left[ \frac{a}{\sqrt{1-a^2}}Z + b \right]^2 \\&= \frac{a^2}{1-a^2} \left( Z + \frac{b\sqrt{1-a^2}}{a} \right)^2\end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{X^2}{\frac{a^2}{1-a^2}} + \frac{Y^2}{\frac{a^2}{1-a^2}} = \left( Z + \frac{b\sqrt{1-a^2}}{a} \right)^2$$

Efetutando-se a translação

$$\begin{aligned} X &= x_3 \\ Y &= y_3 \\ Z &= z_3 - \frac{b\sqrt{1-a^2}}{a} \end{aligned}$$

obtemos

$$\frac{\frac{x_3^2}{a^2}}{1-a^2} + \frac{\frac{y_3^2}{a^2}}{1-a^2} = z_3^2$$

que é a equação de um cone circular.

Podemos supor, sem perda de generalidade, que  $K(u, v) = 1$  para qualquer  $(u, v)$ , uma vez que qualquer superfície com curvatura gaussiana constante positiva, pode ser reduzida a este caso, conforme proposição 3.2 acima.

Então da equação (3.23) temos que  $f''(u) + f(u) = 0$  cujo polinômio associado é  $\lambda^2 + 1 = 0$  com raízes  $\lambda = \pm i$ . Portanto as soluções particulares de  $f''(u) + f(u) = 0$  são a parte real e a parte imaginária do complexo  $e^{iu} = \cos u + i \sin u$ .

Assim a solução geral de  $f''(u) + f(u) = 0$  é  $f(u) = A \cos u + B \sin u$  tal que  $A^2 + B^2 = a^2 > 0$ . Portanto,  $(\frac{A}{a})^2 + (\frac{B}{a})^2 = 1$ . Então  $\frac{A}{a} = \cos b$  e  $\frac{B}{a} = -\sin b$  para alguma constante  $b$ .

Logo

$$\begin{aligned} f(u) &= a \cos b \cos u - a \sin b \sin u \\ &= a(\cos u \cos b - \sin u \sin b) \\ &= a \cos(u + b), a \neq 0. \end{aligned}$$

De  $f'(u)^2 + g'(u)^2 = 1$  segue que

$$\begin{aligned} g'(u)^2 &= 1 - (-a \sin(u + b))^2 \\ &= 1 - a^2 \sin^2(u + b) \end{aligned}$$

e portanto

$$g'(u) = \pm \sqrt{1 - a^2 \sin^2(u + b)}$$

e daí

$$g(u) = \pm \int \sqrt{1 - a^2 \sin^2(u + b)} du + c$$

Assim,

$$\chi(u, v) = (a \cos(u+b) \cos v, a \cos(u+b) \sin v, \pm \int \sqrt{1 - a^2 \sin^2(u + b)} du + c), a \neq 0$$

Fazendo  $\tilde{u} = u + b$  e  $v = \tilde{v}$  obtemos

$$\chi(\tilde{u}, \tilde{v}) = (a \cos \tilde{u} \cos \tilde{v}, a \cos \tilde{u} \sin \tilde{v}, \pm \int \sqrt{1 - a^2 \sin^2 \tilde{u}} d\tilde{u} + c), a \neq 0$$

Efetuando-se a translação

$$\begin{aligned} x &= x_1 \\ y &= y_1 \\ z &= z_1 + c \end{aligned}$$

obtemos

$$\chi(\tilde{u}, \tilde{v}) = (a \cos \tilde{u} \cos \tilde{v}, a \cos \tilde{u} \sin \tilde{v}, \pm \int \sqrt{1 - a^2 \sin^2 \tilde{u}} d\tilde{u}), a \neq 0$$

e se  $z_1 = - \int \sqrt{1 - a^2 \sin^2 \tilde{u}} d\tilde{u}$ , aplicando-se a rotação

$$\begin{aligned} x_1 &= x_2 \\ y_1 &= y_2 \\ z_1 &= -z_2 \end{aligned}$$

podemos assumir que

$$\chi(\tilde{u}, \tilde{v}) = (a \cos \tilde{u} \cos \tilde{v}, a \cos \tilde{u} \sin \tilde{v}, \int \sqrt{1 - a^2 \sin^2 \tilde{u}} d\tilde{u}), a \neq 0$$

A integral  $\int \sqrt{1 - a^2 \sin^2 \tilde{u}} d\tilde{u}$  não pode ser calculada em termos de funções elementares a menos que  $a = \pm 1$  (desde que  $a \neq 0$ )

O caso  $a = -1$  pode ser reduzido ao caso  $a = 1$  efetuando-se a rotação

$$\begin{aligned} x_2 &= -x_3 \\ y_2 &= -y_3 \\ z_2 &= z_3 \end{aligned}$$

Assim basta considerarmos o caso  $a = 1$  em que

$$\chi(\tilde{u}, \tilde{v}) = (\cos \tilde{u} \cos \tilde{v}, \cos \tilde{u} \sin \tilde{v}, \int \sqrt{1 - \sin^2 \tilde{u}} d\tilde{u}).$$

Mas se  $f(\tilde{u}) = \cos \tilde{u} > 0$  então

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1 - \sin^2 \tilde{u}} d\tilde{u} &= \int \sqrt{\cos^2 \tilde{u}} d\tilde{u} \\ &= \int \cos \tilde{u} d\tilde{u} = \sin \tilde{u} \end{aligned}$$

e assim

$$\chi(\tilde{u}, \tilde{v}) = (\cos \tilde{u} \cos \tilde{v}, \cos \tilde{u} \sin \tilde{v}, \sin \tilde{u})$$

que representa a superfície esférica  $x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 = 1$ .

Finalmente, suponha que  $K(u, v) = -1$ . Então da equação 3.23 temos que  $f''(u) - f(u) = 0$ .

O polinômio associado a esta equação é  $\lambda^2 - 1 = 0$ , cujas raízes são  $\pm 1$ . Assim, as soluções particulares da equação  $f''(u) - f(u) = 0$  são  $e^u$  e  $e^{-u}$  e portanto a solução geral é  $f(u) = ae^u + be^{-u}$  com  $a$  e  $b$  constantes.

De  $f'(u)^2 + g'(u)^2 = 1$  temos que  $g'(u) = \pm \sqrt{1 - (ae^u - be^{-u})^2}$  e portanto

$$g(u) = \pm \int \sqrt{1 - (ae^u - be^{-u})^2} du + c$$

para alguma constante  $c$ .

Para muitos valores de  $a$  e  $b$  não podemos expressar  $g(u)$  em termos de funções elementares, pois não é possível resolver

$$\int \sqrt{1 - (ae^u - be^{-u})^2} du$$

por técnicas elementares de integração. Assim, consideraremos somente o caso  $a = 1$  e  $b = 0$

Então  $f(u) = e^u$  e  $g(u) = \pm \int \sqrt{1 - e^{2u}} du + c$  com  $u \leq 0$ .

Aplicando-se a translação

$$\begin{aligned} x &= x_1 \\ y &= y_1 \\ z &= z_1 \end{aligned}$$

obtemos

$$\chi(u, v) = (e^u \cos v, e^u \sin v, \pm \int \sqrt{1 - e^{2u}} du) \text{ com } u \leq 0.$$

Se  $z_1 = - \int \sqrt{1 - e^{2u}} du$ , aplicando-se a rotação

$$\begin{aligned} x_1 &= x_2 \\ y_1 &= y_2 \\ z_1 &= -z_2 \end{aligned}$$

podemos assumir que

$$\chi(u, v) = (e^u \cos v, e^u \sin v, \int \sqrt{1 - e^{2u}} du), u \leq 0$$

Mas, fazendo  $w = e^u$  temos

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1 - e^{2u}} du &= \int \frac{\sqrt{1 - w^2}}{w} dw \\ &= \int \frac{1 - w^2}{w\sqrt{1 - w^2}} dw \\ &= \int \left(\frac{1}{w} - w\right) \frac{1}{\sqrt{1 - w^2}} dw \\ &= \int \frac{1}{w\sqrt{1 - w^2}} dw - \int \frac{w}{\sqrt{1 - w^2}} dw \end{aligned}$$

Agora, calculemos  $A = \int \frac{1}{w\sqrt{1 - w^2}} dw$  e  $B = \int \frac{w}{\sqrt{1 - w^2}} dw$ .

Para o cálculo de  $A$  façamos  $x = w^{-1}$  e portanto



$$\begin{aligned}
A &= \int \frac{w^{-1}}{\sqrt{1-w^2}} dw \\
&= \int -\frac{\frac{dx}{x}}{\sqrt{1-x^{-2}}} \frac{dx}{x^2} \\
&= \int \frac{-x^{-1}}{\sqrt{1-x^{-2}}} dx \\
&= \int -\frac{x^{-1}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} dx \\
&= \int -\frac{x^{-1}}{\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}} dx \\
&= \int -\frac{x^{-1}}{\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}} dx \\
&= -\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx \\
&= -\cos h^{-1}x \\
&= -\cos h^{-1}w^{-1} \\
&= -\cos h^{-1}(e^{-u})
\end{aligned}$$

Para o cálculo de B façamos  $y = 1 - w^2$  e portanto

$$\begin{aligned}
B &= \int \frac{w}{\sqrt{1-w^2}} dw \\
&= \int -\frac{1}{2\sqrt{y}} dy \\
&= -\frac{1}{2} \int y^{-\frac{1}{2}} dy \\
&= -\frac{1}{2} \frac{y^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \\
&= -\sqrt{y} \\
&= -\sqrt{1-w^2} \\
&= -\sqrt{1-e^{2u}}
\end{aligned}$$

Logo

$$\int \sqrt{1-e^{2u}} du = -\cos h^{-1}(e^{-u}) + \sqrt{1-e^{2u}} + d$$

e portanto

$$\chi(u, v) = (e^u \cos v, e^u \sin v, \sqrt{1-e^{2u}} - \cos h^{-1}(e^{-u}) + d), u \leq 0,$$

para alguma constante  $d$ .

Efetuando-se a translação

$$\begin{aligned}
x_2 &= x_3 \\
y_2 &= y_3 \\
z_2 &= z_3 + d
\end{aligned}$$

obtém-se

$$\chi(u, v) = (e^u \cos v, e^u \sin v, \sqrt{1 - e^{2u}} - \cos h^{-1}(e^{-u})), u \leq 0,$$

que é a equação de uma superfície chamada pseudoesfera,

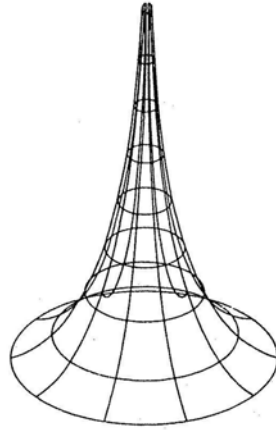


Figura 3.4: Pseudoesfera.

a qual é obtida pela rotação da curva  $\alpha(u) = (e^u, \sqrt{1 - e^{2u}} - \cos h^{-1}(e^{-u})), u \leq 0$  em torno do eixo  $z$ . Esta curva  $\alpha(u)$  é chamada **tractrix** e é dada no plano  $Oxz$  pela equação  $z = \sqrt{1 - x^2} - \cos h^{-1}(\frac{1}{x})$ , com  $0 < x \leq 1$ .

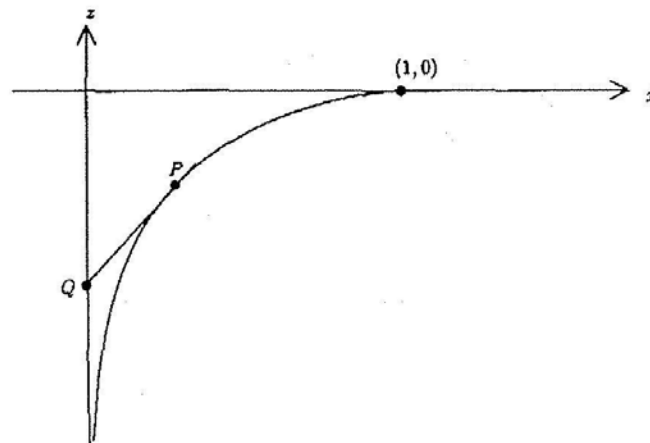


Figura 3.5: Tractrix.

### 3.4 Superfícies de curvatura média constante

Nesta seção, vamos considerar superfícies cuja curvatura média  $H$  é constante e não nula. Estudaremos as superfícies para as quais  $H$  é identicamente nula no próximo capítulo.

Vamos apresentar uma construção que faz correspondência entre superfícies de curvatura média constante não nula e superfícies de curvatura gaussiana constante positiva.

**Definição 3.6.** *Seja  $\chi$  uma superfície parametrizada regular com orientação  $N$  e seja  $\lambda$  uma constante. A superfície paralela  $\chi^\lambda$  de  $\chi$  é definida por  $\chi^\lambda = \chi + \lambda N$*

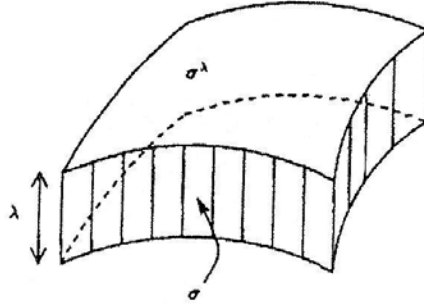


Figura 3.6: Superfície paralela.

A superfície  $\chi^\lambda$  pode ser obtida transladando-se a superfície  $\chi$  uma distância  $\lambda$  perpendicular a ela mesma (mas isso não é uma translação usual sobre a superfície  $\chi$  desde que  $N$  varia).

**Proposição 3.3.** *Sejam  $k_1$  e  $k_2$  as curvaturas principais da superfície parametrizada regular  $\chi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ , e suponha que exista uma constante  $C$  tal que  $|k_1|$  e  $|k_2|$  são ambos  $\leq C$ . Seja  $\lambda$  uma constante com  $|\lambda| < \frac{1}{C}$  e seja  $\chi^\lambda$  a superfície paralela correspondente a  $\chi$ . Então*

- (i)  $\chi^\lambda$  é uma superfície parametrizada regular;
- (ii) a orientação  $N^\lambda$  de  $\chi^\lambda$  em  $\chi^\lambda(u, v)$  é a mesma que a orientação  $N$  de  $\chi$  em  $\chi(u, v)$ , para todo  $(u, v) \in U$ ;
- (iii) as curvaturas principais de  $\chi^\lambda$  são  $\frac{k_1}{(1-\lambda k_1)}$  e  $\frac{k_2}{(1-\lambda k_2)}$  e os vetores principais correspondentes são os mesmos de  $\chi$  para as curvaturas principais  $k_1$  e  $k_2$ , respectivamente;
- (iv) as curvaturas gaussiana e média de  $\chi^\lambda$  são, respectivamente  $\frac{K}{1-2\lambda H+\lambda^2 K}$  e  $\frac{H-\lambda K}{1-2\lambda H+\lambda^2 K}$

*Demonstração.*

- (i) Para mostrarmos que  $\chi^\lambda$  é uma superfície parametrizada regular, devemos verificar que  $\chi^\lambda$  é diferenciável, que  $\chi^\lambda : U \rightarrow \chi^\lambda(U)$  é um homeomorfismo e que o produto vetorial  $\chi_u^\lambda \wedge \chi_v^\lambda \neq 0$ .

De fato,  $\chi^\lambda$  é diferenciável pois  $\chi$  e  $N$  o são;

Considere  $(\chi^\lambda)^{-1} : \chi^\lambda(U) \rightarrow U$  definida por  $(\chi^\lambda)^{-1}(\chi^\lambda(p)) = \chi^{-1}(\chi^\lambda(p) - \lambda N(p))$  para todo  $p \in U$ . Então  $(\chi^\lambda)^{-1}$  é contínua e desde que

$$\chi^\lambda \circ (\chi^\lambda)^{-1}(\chi^\lambda(p)) = \chi^\lambda(\chi^{-1}(\chi^\lambda(p) - \lambda N(p))) = \chi^\lambda(\chi^{-1}(\chi(p))) = \chi^\lambda(p) \text{ e}$$

$$(\chi^\lambda)^{-1} \circ \chi^\lambda(p) = (\chi^\lambda)^{-1}(\chi^\lambda(p)) = \chi^{-1}(\chi^\lambda(p) - \lambda N(p)) = \chi^{-1}(\chi(p)) = p.$$

segue que  $\chi^\lambda$  é um homeomorfismo.

Mostremos agora que  $\chi_u^\lambda \wedge \chi_v^\lambda \neq 0$ .

De fato, temos

$$\chi_u^\lambda = \chi_u + \lambda N_u$$

$$\chi_v^\lambda = \chi_v + \lambda N_v$$

Desde que

$$N_u = a_{11}\chi_u + a_{21}\chi_v$$

$$N_v = a_{12}\chi_u + a_{22}\chi_v$$

temos

$$\chi_u^\lambda = \chi_u + \lambda(a_{11}\chi_u + a_{21}\chi_v) = (1 + \lambda a_{11})\chi_u + \lambda a_{21}\chi_v$$

$$\chi_v^\lambda = \chi_v + \lambda(a_{12}\chi_u + a_{22}\chi_v) = \lambda a_{12}\chi_u + (1 + \lambda a_{22})\chi_v$$

Com isso temos,

$$\begin{aligned} \chi_u^\lambda \wedge \chi_v^\lambda &= [(1 + \lambda a_{11})(1 + \lambda a_{22}) - \lambda^2 a_{12} a_{21}] \chi_u \wedge \chi_v \\ &= [(a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}) \lambda^2 + (a_{11} + a_{22}) \lambda + 1] \chi_u \wedge \chi_v \\ &= [(k_1 k_2) \lambda^2 - (k_1 + k_2) \lambda + 1] \chi_u \wedge \chi_v \\ &= [(1 - \lambda k_1)(1 - \lambda k_2)] \chi_u \wedge \chi_v \neq 0 \end{aligned}$$

pois  $\chi_u \wedge \chi_v \neq 0$  e como  $|k_i| \leq C, i = 1, 2$  e  $|\lambda| < \frac{1}{C}$  então  $\lambda k_i \leq |\lambda k_i| < 1$  e consequentemente  $1 - \lambda k_i > 0, i = 1, 2$ .

(ii)

$$\begin{aligned} N^\lambda &= \frac{\chi_u^\lambda \wedge \chi_v^\lambda}{\|\chi_u^\lambda \wedge \chi_v^\lambda\|} \\ &= \frac{[(1 - \lambda k_1)(1 - \lambda k_2)] \chi_u \wedge \chi_v}{|(1 - \lambda k_1)(1 - \lambda k_2)| \|\chi_u^\lambda \wedge \chi_v^\lambda\|} \\ &= \frac{(1 - \lambda k_1)(1 - \lambda k_2)}{(1 - \lambda k_1)(1 - \lambda k_2)} \cdot \frac{\chi_u \wedge \chi_v}{\|\chi_u \wedge \chi_v\|} \\ &= \frac{\chi_u \wedge \chi_v}{\|\chi_u \wedge \chi_v\|} \\ &= N \end{aligned}$$

(iii) Temos que  $\chi^\lambda = \chi + \lambda N$  e  $N^\lambda = N$ . Logo,

$$N_u^\lambda = N_u = a_{11}\chi_u + a_{21}\chi_v$$

$$N_v^\lambda = N_v = a_{12}\chi_u + a_{22}\chi_v$$

e portanto

$$\chi_u^\lambda = (1 + \lambda a_{11})\chi_u + \lambda a_{21}\chi_v$$

$$\chi_v^\lambda = \lambda a_{12} \chi_u + (1 + \lambda a_{22}) \chi_v$$

Assim,

$$\begin{pmatrix} 1 + \lambda a_{11} & \lambda a_{21} \\ \lambda a_{12} & 1 + \lambda a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_u \\ \chi_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi_u^\lambda \\ \chi_v^\lambda \end{pmatrix}$$

ou equivalentemente

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \chi_u \\ \chi_v \end{pmatrix} &= \frac{1}{\det \begin{pmatrix} 1 + \lambda a_{11} & \lambda a_{21} \\ \lambda a_{12} & 1 + \lambda a_{22} \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 + \lambda a_{22} & -\lambda a_{21} \\ -\lambda a_{12} & 1 + \lambda a_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_u^\lambda \\ \chi_v^\lambda \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{(1 - \lambda k_1)(1 - \lambda k_2)} \begin{pmatrix} 1 + \lambda a_{22} & -\lambda a_{21} \\ -\lambda a_{12} & 1 + \lambda a_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_u^\lambda \\ \chi_v^\lambda \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{(1 - \lambda k_1)(1 - \lambda k_2)} \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \chi_u^\lambda \\ \chi_v^\lambda \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.24)$$

Como  $N^\lambda = N$ ,

$$\begin{pmatrix} N_u^\lambda \\ N_v^\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \chi_u \\ \chi_v \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

onde

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

é a matriz de  $dN_p$  cujos autovalores são  $-k_1$  e  $-k_2$ . Substituindo (3.23) em (3.24), obtemos

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} N_u^\lambda \\ N_v^\lambda \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \left\{ \frac{1}{(1 - \lambda k_1)(1 - \lambda k_2)} \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \chi_u^\lambda \\ \chi_v^\lambda \end{pmatrix} \right\} \\ &= \frac{1}{(1 - \lambda k_1)(1 - \lambda k_2)} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \chi_u^\lambda \\ \chi_v^\lambda \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Assim,

$$\left\{ \frac{1}{(1 - \lambda k_1)(1 - \lambda k_2)} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix} \right] \right\}^t$$

é a matriz de  $dN_p^\lambda$  cujos autovalores são  $-k_1^\lambda$  e  $-k_2^\lambda$ . Mas

$$\left\{ \frac{1}{(1-\lambda k_1)(1-\lambda k_2)} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{pmatrix} \right] \right\}^t$$

$$= \frac{1}{(1-\lambda k_1)(1-\lambda k_2)} \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Mostremos agora que se  $v$  é autovetor de

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

associado aos autovalores  $(-k_1)$  e  $(-k_2)$ , então  $v$  é autovetor de

$$\frac{1}{(1-\lambda k_1)(1-\lambda k_2)} \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

associado aos autovalores  $\frac{-k_1}{1-\lambda k_1}$  e  $\frac{-k_2}{1-\lambda k_2}$ .

Faremos para  $-k_1$ . O caso  $-k_2$  é análogo.

De fato, temos que

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} v = -k_1 v$$

e

$$\frac{1}{(1-\lambda k_1)(1-\lambda k_2)} \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} v$$

$$= \frac{-k_1}{(1-\lambda k_1)(1-\lambda k_2)} \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v + \lambda \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} v \right]$$

Chamando  $v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ , temos que

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = -k_1 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

donde,

$$a_{11}a + a_{12}b = -k_1a \quad (3.26)$$

$$a_{21}a + a_{22}b = -k_1b \quad (3.27)$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{22}a - a_{12}b \\ -a_{21}a + a_{11}b \end{pmatrix} \\
&\stackrel{(3.25);(3.26)}{=} \begin{pmatrix} a_{22}a + k_1a + a_{11}a \\ k_1b + a_{22}b + a_{11}b \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (k_1 + a_{22} + a_{11})a \\ (k_1 + a_{22} + a_{11})b \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (-k_1 - k_2 + k_1)a \\ (k_1 - k_1 - k_2)b \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -k_2a \\ -k_2b \end{pmatrix} \\
&= -k_2 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\
&= -k_2v
\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(1 - \lambda k_1)(1 - \lambda k_2)} \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} v \\
&= \frac{-k_1}{(1 - \lambda k_1)(1 - \lambda k_2)} [v + \lambda(-k_2v)] = \frac{-k_1}{(1 - \lambda k_1)(1 - \lambda k_2)} (1 - \lambda k_2)v = \frac{-k_1}{(1 - \lambda k_1)}v
\end{aligned}$$

Assim, provamos o ítem (iii).

- (iv) Como as curvaturas principais de  $\chi^\lambda$  são  $k_1^\lambda = \frac{k_1}{(1 - \lambda k_1)}$  e  $k_2^\lambda = \frac{k_2}{(1 - \lambda k_2)}$ , temos que:

$$\begin{aligned}
K^\lambda &= \frac{k_1}{(1 - \lambda k_1)} \frac{k_2}{(1 - \lambda k_2)} \\
&= \frac{k_1 k_2}{1 - \lambda k_2 - \lambda k_1 + \lambda^2 k_1 k_2} \\
&= \frac{k_1 k_2}{1 - \lambda(k_1 + k_2) + \lambda^2 k_1 k_2} \\
&= \frac{K}{1 - 2\lambda H + \lambda^2 K}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
H^\lambda &= \frac{\frac{k_1}{(1-\lambda k_1)} + \frac{k_2}{(1-\lambda k_2)}}{\frac{k_1(1-\lambda k_2)^2 + k_2(1-\lambda k_1)}{(1-\lambda k_1)(1-\lambda k_2)}} \\
&= \frac{k_1 - \lambda k_1 k_2 + k_2 - \lambda k_1 k_2}{2(1-\lambda k_1)(1-\lambda k_2)} \\
&= \frac{k_1 + k_2 - 2\lambda k_1 k_2}{2(1-\lambda(k_2+k_1) + \lambda^2 k_1 k_2)} \\
&= \frac{2H - 2\lambda K}{2(1-2\lambda H + \lambda^2 K)} \\
&= \frac{H - \lambda K}{1 - 2\lambda H + \lambda^2 K}
\end{aligned}$$

□

O corolário a seguir nos dá uma correspondência entre superfícies de curvatura média constante não nula e superfícies de curvatura gaussiana constante positiva.

**Corolário 3.1.** *Se  $\chi$  é uma superfície parametrizada regular com curvatura média constante  $H \neq 0$ , então para  $\lambda = \frac{1}{2H}$ ,  $\chi^\lambda$  terá curvatura gaussiana constante  $4H^2 > 0$ . Reciprocamente, se  $\chi$  tiver curvatura gaussiana constante  $K > 0$  com  $K \neq H^2$  então para  $\lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{K}}$ ,  $\chi^\lambda$  terá curvatura média constante  $\mp \frac{1}{2}\sqrt{K} \neq 0$ .*

*Demonstração.* Para  $\lambda = \frac{1}{2H}$  temos

$$\begin{aligned}
K^\lambda &= \frac{K}{1 - 2\lambda H + \lambda^2 K} \\
&= \frac{K}{1 - 2\frac{1}{2H}H + (\frac{1}{2H})^2 K} \\
&= \frac{K}{1 - 1 + \frac{K}{4H^2}} \\
&= \frac{K}{\frac{K}{4H^2}} \\
&= 4H^2
\end{aligned}$$

Reciprocamente, para  $\lambda = \frac{1}{\sqrt{K}}$  temos

$$\begin{aligned}
H^\lambda &= \frac{H - \lambda K}{1 - 2\lambda H + \lambda^2 K} \\
&= \frac{H - \frac{1}{\sqrt{K}}K}{1 - 2\frac{1}{\sqrt{K}}H + (\frac{1}{\sqrt{K}})^2 K} \\
&= \frac{\frac{H\sqrt{K}-K}{\sqrt{K}}}{1 - \frac{2H}{\sqrt{K}} + \frac{K}{K}} \\
&= \frac{\frac{H\sqrt{K}-K}{\sqrt{K}}}{2 - \frac{2H}{\sqrt{K}}} \\
&= \frac{\frac{H\sqrt{K}-K}{\sqrt{K}}}{\frac{2\sqrt{K}-2H}{\sqrt{K}}}
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{H\sqrt{K} - K}{2\sqrt{K} - 2H} \\
 &= \frac{1}{2} \frac{(K - H\sqrt{K})}{(\sqrt{K} - H)} \\
 &= -\frac{1}{2} \frac{K - H\sqrt{K}}{(\sqrt{K} - H)\frac{\sqrt{K}}{\sqrt{K}}} \\
 &= -\frac{1}{2} \frac{K - H\sqrt{K}}{\frac{K - H\sqrt{K}}{\sqrt{K}}} \\
 &= -\frac{1}{2} \sqrt{K}
 \end{aligned}$$

O caso  $\lambda = -\frac{1}{\sqrt{K}}$  é análogo.

□

### 3.5 Curvatura Gaussiana de Superfícies Compactas

Nesta seção, apresentaremos um resultado que mostra como a curvatura gaussiana influencia na forma total de uma superfície. Para maiores detalhes veja [1].

**Proposição 3.4.** *Se  $S$  é uma superfície compacta, existe um ponto  $P$  de  $S$  no qual a curvatura gaussiana  $K$  é  $> 0$ .*

Lembramos que um subconjunto  $X$  de  $\mathbb{R}^3$  é compacto se ele for fechado (isto é, seu complementar é aberto) e limitado (isto é, está contido em alguma bola aberta).

Na prova desta proposição usaremos a seguinte propriedade sobre conjuntos compactos: Se  $X \subset \mathbb{R}^3$  é compacto e  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua, então existem pontos  $P$  e  $Q$  em  $X$  tal que  $f(Q) \leq f(R) \leq f(P)$  para todos os pontos  $R$  em  $X$ , isto é,  $f$  assume um valor máximo em  $X$  no ponto  $P$  e um valor mínimo em  $Q$ . Para uma prova veja [[7],Theorem 6.4,p.175]

*Demonstração.* Defina  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  por  $f(v) = \|v\|^2$ . Então  $f$  é contínua, e como  $S$  é uma superfície compacta, então existe um ponto  $P$  em  $S$  onde  $f$  assume seu valor máximo. Suponha que  $P$  tenha um vetor posição  $\mathbf{p}$ . Então  $S$  está contida em uma bola fechada de raio  $\|\mathbf{p}\|$  e centro na origem, e a intersecção de  $S$  com o bordo dessa bola fechada é o ponto  $P$ .

A idéia é que  $S$  tem localmente em  $P$ , curvatura gaussiana no máximo igual a da esfera de centro na origem e raio  $\|\mathbf{p}\|$ , isto é, no máximo  $\frac{1}{\|\mathbf{p}\|^2}$ , desde que uma parametrização para esta esfera é dada por  $\chi(u, v) = \left( \|\mathbf{p}\| \cos \frac{u}{\|\mathbf{p}\|} \cos v, \|\mathbf{p}\| \cos \frac{u}{\|\mathbf{p}\|} \sin v, \|\mathbf{p}\| \sin \frac{u}{\|\mathbf{p}\|} \right)$  com  $\cos \frac{u}{\|\mathbf{p}\|} > 0$ .

Seja  $\gamma(t)$  uma curva regular em  $S$ , parametrizada pelo comprimento de arco, passando por  $P$  quando  $t = 0$ .

Então  $f(\gamma(t))$  tem um máximo local com  $t = 0$ , isto é,

$$\frac{d}{dt} f(\gamma(t)) |_{t=0} = 0 \text{ e } \frac{d^2}{dt^2} f(\gamma(t)) |_{t=0} \leq 0.$$

Assim  $f'(\gamma(t))\gamma'(t)|_{t=0} = 0$  e  $f''(\gamma(t))(\gamma'(t))^2 + f'(\gamma(t))\gamma''(t)|_{t=0} \leq 0$ .

Como  $f(v) = \|v\|^2 = \langle v, v \rangle$ , temos

$$f'(v) = 2 \langle v', v \rangle \text{ e } f''(v) = 2(\langle v'', v \rangle + \langle v', v' \rangle).$$

Portanto temos:

$$0 = f'(\gamma(0))\gamma'(0) = 2 \langle \gamma'(0), \gamma(0) \rangle \gamma'(0)$$

e

$$0 \geq f''(\gamma(0))(\gamma'(0))^2 + f'(\gamma(0))\gamma''(0) = \\ 2(\langle \gamma''(0), \gamma(0) \rangle + \langle \gamma'(0), \gamma'(0) \rangle)(\gamma'(0))^2 + 2 \langle \gamma'(0), \gamma(0) \rangle \gamma''(0).$$

Mas como  $\gamma(t)$  é uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco,  $\gamma'(t) \neq 0$ , para todo  $t$ , e  $\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle = 1$ , para todo  $t$ . Logo  $\gamma'(0) \neq 0$  e  $\langle \gamma'(0), \gamma'(0) \rangle = 1$ . Logo,

$$\langle \gamma'(0), \gamma(0) \rangle = 0 \text{ e } (\langle \gamma''(0), \gamma(0) \rangle + 1)(\gamma'(0))^2 \leq 0$$

ou equivalentemente

$$\langle \gamma'(0), \gamma(0) \rangle = 0 \text{ e } \langle \gamma''(0), \gamma(0) \rangle + 1 \leq 0 \quad (3.28)$$

A equação (3.28) mostra que  $\mathbf{p} = \gamma(0)$  é perpendicular a todo vetor tangente unitário a  $S$  em  $P$  e portanto é perpendicular ao plano tangente de  $S$  em  $P$ .

Seja  $\mathcal{Y}$  uma parametrização regular de  $S$  em  $P$  e seja  $N$  seu vetor unitário padrão. Assim, pela observação anterior,  $N = \pm \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|}$ .

A desigualdade em (3.28) implica que a curvatura normal  $k_n(P) = \langle \gamma''(0), N \rangle$  de  $\gamma$  em  $P$ , satisfaz

$$k_n(P) \leq \frac{-1}{\|\mathbf{p}\|} \text{ se } N = \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|}$$

ou

$$k_n(P) \geq \frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \text{ se } N = \frac{-\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|}$$

Se  $N = \frac{\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|}$ ,  $k_1$  é o máximo e  $k_2$  é o mínimo da curvatura normal em  $P$ , assim,  $k_2 \leq k_n(P) \leq k_1 \leq \frac{-1}{\|\mathbf{p}\|}$ .

Se  $N = \frac{-\mathbf{p}}{\|\mathbf{p}\|}$ ,  $k_1$  é o mínimo e  $k_2$  é o máximo da curvatura normal em  $P$ , assim,  $\frac{1}{\|\mathbf{p}\|} \leq k_1 \leq k_n(P) \leq k_2$ .

Logo as curvaturas principais de  $\mathcal{Y}$  em  $P$  são ou ambas  $\leq \frac{-1}{\|\mathbf{p}\|}$  ou ambas  $\geq \frac{1}{\|\mathbf{p}\|}$ .

Em qualquer caso, a curvatura gaussiana  $K = k_1 k_2 \geq \frac{1}{\|\mathbf{p}\|^2} > 0$  em  $P$ .

□

## 4 Superfícies Mínimas

As superfícies mínimas são geralmente associadas às películas de sabão, que podem ser obtidas mergulhando uma moldura formada por um arame em uma solução de sabão e retirando-a em seguida com cuidado. Se o experimento for bem executado, obtém-se uma película de sabão que tem o arame como fronteira. Pode-se mostrar, por considerações físicas, que a película assume a posição onde, em seus pontos regulares, a curvatura média é nula.

A conexão entre superfícies mínimas e películas de sabão motivou o famoso Problema de Plateau ( Plateau foi um físico belga que realizou cuidadosos experimentos com películas de sabão por volta de 1850).

O problema pode ser, a grosso modo, descrito da seguinte maneira: fixada uma curva, encontrar dentre todas as superfícies que contém esta curva, aquela cuja área determinada por ela e a curva, seja mínima.

Veremos que as soluções para este problema resultam em superfícies cuja curvatura média se anula em todo lugar.

O estudo destas superfícies, conhecidas como superfícies mínimas, foi iniciado por Euler e Lagrange em meados do século XVIII. Para maiores detalhes veja [1] e [2].

### 4.1 O problema de Plateau

Seja  $\chi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma superfície parametrizada regular. Escolha um domínio limitado  $D \subset U$  e uma função diferenciável  $h : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$  onde  $\bar{D}$  é a união do domínio  $D$  e sua fronteira  $\partial D$ . A variação normal de  $\chi(\bar{D})$ , determinada por  $h$ , é a aplicação  $\varphi : \bar{D} \times ]-\epsilon, \epsilon[ \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por

$$\varphi(u, v, t) = \chi(u, v) + th(u, v)N(u, v) \text{ com } (u, v) \in \bar{D} \text{ e } t \in ]-\epsilon, \epsilon[.$$

Para cada  $t \in ]-\epsilon, \epsilon[$  fixado, a aplicação  $\chi^t : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  dada por  $\chi^t(u, v) = \varphi(u, v, t)$  é uma superfície parametrizada com

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi^t}{\partial u} &= \chi_u + thN_u + th_u N \\ \frac{\partial \chi^t}{\partial v} &= \chi_v + thN_v + th_v N. \end{aligned}$$

Desde que

$$E^t = \langle \chi_u^t, \chi_u^t \rangle,$$

$$F^t = \langle \chi_u^t, \chi_v^t \rangle$$

e

$$G^t = \langle \chi_v^t, \chi_v^t \rangle$$

segue que

$$\begin{aligned} E^t &= \langle \chi_u^t, \chi_u^t \rangle \\ &= \langle \chi_u + thN_u + th_uN, \chi_u + thN_u + th_uN \rangle \\ &= \langle \chi_u, \chi_u \rangle + \langle \chi_u, thN_u \rangle + \langle thN_u, \chi_u \rangle + \langle thN_u, thN_u \rangle \\ &\quad + \langle th_uN, th_uN \rangle \\ &= E + 2th \langle \chi_u, N_u \rangle + t^2h^2 \langle N_u, N_u \rangle + t^2h_u^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F^t &= \langle \chi_u^t, \chi_v^t \rangle \\ &= \langle \chi_u + thN_u + th_uN, \chi_v + thN_v + th_vN \rangle \\ &= \langle \chi_u, \chi_v \rangle + \langle \chi_u, thN_v \rangle + \langle thN_u, \chi_v \rangle + \langle thN_u, thN_v \rangle \\ &\quad + \langle th_uN, th_vN \rangle \\ &= F + th(\langle \chi_u, N_v \rangle + \langle N_u, \chi_v \rangle) + t^2h^2 \langle N_u, N_v \rangle + t^2h_uh_v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G^t &= \langle \chi_v^t, \chi_v^t \rangle \\ &= \langle \chi_v + thN_v + th_vN, \chi_v + thN_v + th_vN \rangle \\ &= \langle \chi_v, \chi_v \rangle + \langle \chi_v, thN_v \rangle + \langle thN_v, \chi_v \rangle + \langle thN_v, thN_v \rangle \\ &\quad + \langle th_vN, th_vN \rangle \\ &= G + 2th \langle \chi_v, N_v \rangle + t^2h^2 \langle N_v, N_v \rangle + t^2h_v^2 \end{aligned}$$

Das equações (3.5), (3.6), (3.7), (3.8) e (3.19) temos:

$$\begin{aligned} -e &= \langle \chi_u, N_u \rangle \\ -2f &= \langle \chi_u, N_v \rangle + \langle \chi_v, N_u \rangle \\ -g &= \langle \chi_v, N_v \rangle \end{aligned}$$

e

$$H = \frac{Eg - 2Ff + Ge}{2(EG - F^2)}.$$

Assim

$$\begin{aligned} E^t &= E - 2the + t^2h^2 \langle N_u, N_u \rangle + t^2h_u^2 \\ F^t &= F - 2thf + t^2h^2 \langle N_u, N_v \rangle + t^2h_uh_v \\ G^t &= G - 2thg + t^2h^2 \langle N_v, N_v \rangle + t^2h_v^2 \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} E^tG^t - (F^t)^2 &= EG - F^2 - 2th(Eg - 2Ff + Ge) + R \\ &= (EG - F^2) - 2th[2H(EG - F^2)] + R \\ &= (EG - F^2)(1 - 4thH) + R \end{aligned}$$

onde  $\lim_{t \rightarrow 0} \left( \frac{R}{t} \right) = 0$  pois todos os termos de  $R$  contém pelo menos um  $t^2$ .

Portanto

$$\|\chi_u^t \wedge \chi_v^t\|^2 = E^t G^t - (F^t)^2 = (EG - F^2)(1 - 4thH) + R$$

onde  $\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{R}{t}\right) = 0$ .

Segue-se que para  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno,  $\chi^t$  é uma superfície parametrizada regular pois

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \|\chi_u^t \wedge \chi_v^t\|^2 &= \lim_{t \rightarrow 0} (EG - F^2)(1 - 4thH) + R \\ &= EG - F^2 + \lim_{t \rightarrow 0} R \\ &= EG - F^2 + \lim_{t \rightarrow 0} t \left(\frac{R}{t}\right) \\ &= EG - F^2 > 0 \end{aligned}$$

Assim, para  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno  $\chi_u^t \wedge \chi_v^t \neq 0$ .

Além disso, a área  $A(t)$  de  $\chi^t(\bar{D})$  é

$$\begin{aligned} A(t) &= \int \int_{\bar{D}} \sqrt{E^t G^t - (F^t)^2} dudv \\ &= \int \int_{\bar{D}} \sqrt{(EG - F^2)(1 - 4thH) + R} dudv \\ &= \int \int_{\bar{D}} \sqrt{(EG - F^2)(1 - 4thH) + \frac{R}{EG - F^2}(EG - F^2)} dudv \\ &= \int \int_{\bar{D}} \sqrt{(EG - F^2)(1 - 4thH + \bar{R})} dudv \end{aligned}$$

onde  $\bar{R} = \frac{R}{(EG - F^2)}$ .

Portanto,

$$A(t) = \int \int_{\bar{D}} \sqrt{1 - 4thH + \bar{R}} \sqrt{EG - F^2} dudv$$

Assim, para  $\epsilon$  suficientemente pequeno,  $A$  é uma função diferenciável e sua derivada em  $t = 0$  é

$$\begin{aligned} A'(0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{A(t) - A(0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \int \int_{\bar{D}} \frac{(\sqrt{1 - 4thH + \bar{R}} - \sqrt{1 + \bar{R}}) \sqrt{EG - F^2}}{t} dudv \\ &= \int \int_{\bar{D}} \left( \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1 - 4thH + \bar{R}} - \sqrt{1 + \bar{R}})}{t} \right) \sqrt{EG - F^2} dudv \end{aligned}$$

Mas

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - 4thH + \bar{R}} - \sqrt{1 + \bar{R}}}{t} =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1 - 4thH + \bar{R}} - \sqrt{1 + \bar{R}})(\sqrt{1 - 4thH + \bar{R}} + \sqrt{1 + \bar{R}})}{t(\sqrt{1 - 4thH + \bar{R}} + \sqrt{1 + \bar{R}})} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - 4thH + \bar{R} - 1 - \bar{R}}{t(\sqrt{1 - 4thH + \bar{R}} + \sqrt{1 + \bar{R}})} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-4hH}{\sqrt{1 + \bar{R}} + \sqrt{1 + \bar{R}}} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-4hH}{2\sqrt{1 + \bar{R}}} \\
&= \frac{-4hH}{2} \\
&= -2hH
\end{aligned}$$

desde que  $\lim_{t \rightarrow 0} \bar{R} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{R}{(EG - F^2)} = 0$  pois  $\lim_{t \rightarrow 0} R = 0$ .

Portanto

$$A'(0) = \int \int_{\bar{D}} -2hH \sqrt{EG - F^2} dudv$$

Dada uma curva  $\gamma$  em  $\mathbb{R}^3$ , consideremos para cada  $t \in ]-\epsilon, \epsilon[$ , a família de superfícies parametrizadas regulares  $\chi^t : D \rightarrow \mathbb{R}^3$  onde  $D = \text{int}(\pi)$ , com  $\pi$  uma curva simples fechada contida em  $U$ , tal que  $\gamma = \chi^t \circ \pi$ .

Então

$$A(t) = \int \int_{\bar{D}} \sqrt{1 - 4thH + \bar{R}} \sqrt{EG - F^2} dudv$$

Se a área determinada por  $\chi = \chi^0$  e a curva  $\gamma$  é mínima dentre todas as superfícies que contém esta curva, então  $A$  deve ter um mínimo absoluto em  $t = 0$ . Assim,  $A'(0) = 0$  para todas as famílias de superfícies como acima.

Portanto  $0 = \int \int_{\bar{D}} 2hH \sqrt{EG - F^2} dudv$  para toda função diferenciável  $h : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Em particular, para  $h : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $h(q) = H(q)$ ,  $q \in \bar{D}$ ,  $hH = H^2$  e portanto  $0 = \int \int_{\bar{D}} 2H^2 \sqrt{EG - F^2} dudv$  e como  $\sqrt{EG - F^2} > 0$  e  $2H^2 \sqrt{EG - F^2} \geq 0$ , isto só é possível se  $H \equiv 0$ .

Isso sugere a seguinte definição:

**Definição 4.1.** *Uma superfície mínima é uma superfície cuja curvatura média é identicamente nula.*

**Teorema 4.1.** *Seja  $\gamma$  uma curva de  $\mathbb{R}^3$  fixada. Se a área determinada por uma superfície  $S$  e a curva  $\gamma$  é mínima dentre todas as superfícies que contém esta curva, então  $S$  é uma superfície mínima.*

*Demonstração.* Se  $\chi$  é uma parametrização regular de  $S$ , segue da hipótese do teorema, que  $A'(0) = 0$  e portanto segue da discussão feita acima da definição 4.1, que  $H \equiv 0$ . Logo  $S$  é uma superfície mínima.  $\square$

## 4.2 Exemplos de superfícies mínimas

A superfície mínima mais simples é o plano, pois suas curvaturas principais são nulas em todo lugar. À parte disto, as primeiras superfícies mínimas descobertas foram as dos dois exemplos abaixo.

### Exemplo 4.1. Catenóide

Um catenóide é uma superfície gerada pela rotação da curva  $x = \frac{1}{a} \cosh az$  no plano  $Oxz$  em torno do eixo  $Oz$ , onde  $a$  é uma constante não nula. Tomemos  $a = 1$  por simplicidade. A catenóide pode ser parametrizada por

$$\chi(u, v) = (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, u), 0 < v < 2\pi, -\infty < u < \infty$$

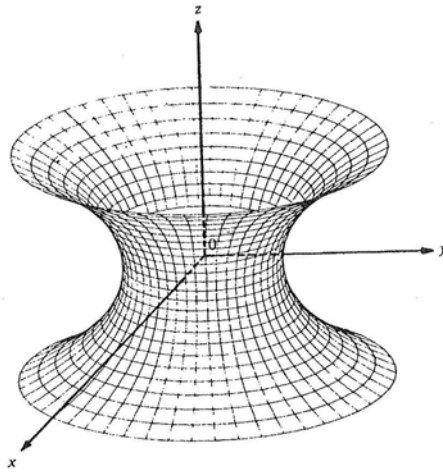


Figura 4.1: Catenóide.

Então,

$$\chi_u = (\sinh u \cos v, \sinh u \sin v, 1)$$

$$\chi_v = (-\cosh u \sin v, \cosh u \cos v, 0)$$

$$\chi_u \wedge \chi_v = (-\cosh u \cos v, -\cosh u \sin v, \sinh u \cosh u)$$

$$N = \frac{\chi_u \wedge \chi_v}{\|\chi_u \wedge \chi_v\|} = (-\operatorname{sech} u \cos v, -\operatorname{sech} u \sin v, \operatorname{tgh} u)$$

$$\chi_{uu} = (\cosh u \cos v, \cosh u \sin v, 0)$$

$$\chi_{uv} = (-\sinh u \sin v, \sinh u \cos v, 0)$$

$$\chi_{vv} = (-\cosh u \cos v, -\cosh u \sin v, 0)$$

Assim,

$$\begin{aligned} E &= \langle \chi_u, \chi_u \rangle \\ &= \sinh^2 u \cos^2 v + \sinh^2 u \sin^2 v + 1 \\ &= \sinh^2 u (\cos^2 v + \sin^2 v) + 1 \\ &= \sinh^2 u + 1 \\ &= \cosh^2 u \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F &= \langle \chi_u, \chi_v \rangle \\
&= -\sinh u \cosh u \sin v \cos v + \sinh u \cosh u \sin v \cos v \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G &= \langle \chi_v, \chi_v \rangle \\
&= \cosh^2 u \sin^2 v + \cosh^2 u \cos^2 v + 0 \\
&= \cosh^2 u (\sin^2 v + \cos^2 v) \\
&= \cosh^2 u
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
e &= \langle N, \chi_{uu} \rangle \\
&= -\operatorname{sech} u \cosh u \cos^2 v - \operatorname{sech} u \cosh u \sin^2 v \\
&= -\operatorname{sech} u \cosh u (\sin^2 v + \cos^2 v) \\
&= -\operatorname{sech} u \cosh u \\
&= -\frac{1}{\cosh u} \cosh u \\
&= -1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f &= \langle N, \chi_{uv} \rangle \\
&= \operatorname{sech} u \sinh u \sin v \cos v - \operatorname{sech} u \sinh u \sin v \cos v \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g &= \langle N, \chi_{vv} \rangle \\
&= \operatorname{sech} u \cosh u \cos^2 v + \operatorname{sech} u \cosh u \sin^2 v \\
&= \operatorname{sech} u \cosh u (\sin^2 v + \cos^2 v) \\
&= \operatorname{sech} u \cosh u \\
&= \frac{1}{\cosh u} \cosh u \\
&= 1
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
H &= \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)} \\
&= \frac{(-1)\cosh^2 u + \cosh^2 u}{2(\cosh^2 u \cosh^2 u - 0^2)} \\
&= \frac{0}{2\cosh^4 u} \\
&= 0
\end{aligned}$$

mostrando que a catenóide é uma superfície mínima

**Proposição 4.1.** *Toda superfície mínima de revolução  $S$  ou é parte de um plano ou, a menos de um movimento rígido, é parte de uma catenóide.*

*Demonstração.* A menos de um movimento rígido podemos assumir que o eixo da superfície  $S$  é o eixo  $z$  e que a curva geradora está no plano  $Oxz$ .

Assim, uma parametrização de  $S$  é

$$\chi(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u)),$$

onde a curva geradora é dada por

$$\alpha(u) = (f(u), 0, g(u))$$



(a qual assumiremos parametrizada pelo comprimento de arco) com  $f(u) > 0$ .

De acordo com o exemplo 3.1 temos que

$$\begin{aligned} E &= 1 \\ F &= 0 \\ G &= f^2(u) \\ e &= f'(u)g''(u) - f''(u)g'(u) \\ f &= 0 \\ g &= f(u)g'(u) \end{aligned}$$

e como  $H = \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)}$ , obtemos:

$$\begin{aligned} H &= \frac{[f'(u)g''(u) - f''(u)g'(u)]f^2(u) + f(u)g'(u)}{2f^2(u)} \\ &= \frac{1}{2}[f'(u)g''(u) - f''(u)g'(u) + \frac{g'(u)}{f(u)}] \end{aligned}$$

Suponhamos agora que, para algum valor de  $u$ , digamos  $u = u_0$ , temos  $g'(u_0) \neq 0$ . Teremos então  $g'(u) \neq 0$  para  $u$  em algum intervalo aberto contendo  $u_0$ . Considere  $]\alpha, \beta[$  o maior tal intervalo.

Suponha agora que  $u \in ]\alpha, \beta[$ . Como  $\alpha$  está parametrizada pelo comprimento de arco temos

$$(f'(u))^2 + (g'(u))^2 = 1.$$

Logo, como vimos no exemplo 3.1, temos

$$f'(u)g''(u) - f''(u)g'(u) = \frac{-f''(u)}{g'(u)}.$$

Assim obtemos

$$H = \frac{1}{2} \left( \frac{g'(u)}{f(u)} - \frac{f''(u)}{g'(u)} \right)$$

Desde que  $(g'(u))^2 = 1 - (f'(u))^2$ , temos que  $S$  é minimal se, e somente se,  $H = 0$ , ou equivalentemente

$$(g'(u))^2 - f(u)f''(u) = 0$$

ou ainda

$$f(u)f''(u) = 1 - (f'(u))^2 \tag{4.1}$$

Para simplificar, escreveremos (4.1) como

$$ff'' = 1 - (f')^2 \tag{4.2}$$

Para resolver a equação diferencial (4.2) coloque  $h = \frac{df}{du}$  e note que

$$f'' = \frac{dh}{du} = \frac{dh}{df} \cdot \frac{df}{du} = h \frac{dh}{df}$$

Portanto a equação (4.2) fica

$$hf \frac{dh}{df} = 1 - h^2 \quad (4.3)$$

Note que, sendo  $g'(u) \neq 0$  e  $h^2 + (g')^2 = 1$ , então  $1 - h^2 = (g')^2 > 0$ .

Assim, podemos integrar essa equação como segue

$$\int \frac{h}{1 - h^2} dh = \int \frac{df}{f} + c$$

onde podemos assumir  $c = \ln a$ ,  $a > 0$ .

Fazendo a mudança de coordenadas  $x = 1 - h^2 > 0$ , obtemos  $dx = -2hdh$  e portanto

$$\int \frac{h}{1 - h^2} dh = \int \frac{dx}{-2x} = \frac{-1}{2} \ln x = \frac{-1}{2} \ln(1 - h^2) = \ln \frac{1}{\sqrt{1 - h^2}}.$$

Logo

$$\ln \frac{1}{\sqrt{1 - h^2}} = \ln f + \ln a$$

ou ainda,

$$\ln \frac{1}{\sqrt{1 - h^2}} = \ln af,$$

e portanto

$$\frac{1}{\sqrt{1 - h^2}} = af$$

Assim,  $1 - h^2 = (\frac{1}{af})^2$ , ou equivalentemente,

$$\begin{aligned} h^2 &= 1 - \left(\frac{1}{af}\right)^2 \\ &= \frac{a^2 f^2 - 1}{a^2 f^2}, \end{aligned}$$

ou ainda,

$$|h| = \frac{\sqrt{a^2 f^2 - 1}}{af}, a > 0.$$

Note que podemos supor  $h > 0$ , pois caso contrário bastaria trocar  $f(u)$  por  $-f(u)$  e  $h$  por  $-h > 0$ . Assim  $h = \frac{\sqrt{a^2 f^2 - 1}}{af}$ .

Substituindo  $h = \frac{df}{du}$  obtemos

$$\frac{df}{du} = \frac{\sqrt{a^2 f^2 - 1}}{af},$$

ou equivalentemente,

$$\frac{af}{\sqrt{a^2 f^2 - 1}} df = du.$$

Integrando, ambos os lados, obtemos:

$$\int \frac{af}{\sqrt{a^2 f^2 - 1}} df = \int du.$$

Fazendo  $x = a^2 f^2 - 1$  temos que  $dx = 2a^2 f df$ , ou ainda,  $\frac{dx}{2a} = a f df$

Logo

$$\begin{aligned} \int \frac{af}{\sqrt{a^2 f^2 - 1}} df &= \int \frac{dx}{2a\sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{2a} \int x^{-\frac{1}{2}} dx \\ &= 2 \frac{1}{2a} x^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{a} x^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{a} \sqrt{a^2 f^2 - 1} \end{aligned}$$

e portanto

$$\frac{\sqrt{a^2 f^2 - 1}}{a} = u + b,$$

com  $b$  constante.

Assim,  $a^2 f^2 - 1 = a^2(u + b)^2$ , ou equivalentemente,  $a^2 f^2 = a^2(u + b)^2 + 1$ , ou ainda,

$$f^2 = \frac{1}{a^2} [a^2(u + b)^2 + 1]$$

e conseqüentemente,

$$f = |f| = \frac{\sqrt{a^2(u + b)^2 + 1}}{a},$$

com  $b$  constante.

Efetuando-se a mudança de parâmetro  $u \rightarrow u - b$  podemos assumir que  $b = 0$ .

Assim,

$$f = \frac{\sqrt{a^2 u^2 + 1}}{a}.$$

Para calcular  $g$ , note que, como  $(g')^2 = 1 - (f')^2 = 1 - h^2 = \frac{1}{a^2 f^2}$  segue-se que,

$$\frac{dg}{du} = \pm \frac{1}{\sqrt{a^2 u^2 + 1}}$$

e portanto

$$g = \pm \int \frac{1}{\sqrt{a^2 u^2 + 1}} du + c,$$

com  $c$  constante.

Vamos calcular  $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 u^2 + 1}} du$ .

Fazendo  $u = \frac{\sinh x}{a}$  temos  $du = \frac{1}{a} \cosh x dx$ .

Assim,

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{a^2 u^2 + 1}} du &= \int \frac{1}{\sqrt{(\sinh x)^2 + 1}} \frac{1}{a} \cosh x dx \\ &= \frac{1}{a} \int \frac{1}{\sqrt{(\cosh x)^2}} \cosh x dx \\ &= \frac{1}{a} \int dx \\ &= \frac{x}{a} \end{aligned}$$

Como  $\sinh x = au$  temos  $x = \operatorname{arcsinh}(au)$  e daí

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 u^2 + 1}} du = \frac{1}{a} \operatorname{arcsinh}(au).$$

Logo,

$$g = \pm \frac{\operatorname{arcsenh}(au) + ca}{a}.$$

e portanto,

$$a(g - c) = \pm \operatorname{arcsenh}(au),$$

ou equivalentemente,

$$\operatorname{arcsenh}(au) = \mp a(g - c),$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} au &= \operatorname{senh}[\mp a(g - c)] \\ &= \mp \operatorname{senh}[a(g - c)]. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} f &= \frac{\sqrt{(\operatorname{senh}[a(g - c)])^2 + 1}}{a} \\ &= \frac{1}{a} \sqrt{(\operatorname{cosh}[a(g - c)])^2} \\ &= \frac{1}{a} \operatorname{cosh}[a(g - c)] \end{aligned}$$

Assim, a curva geradora de  $S$  é

$$\alpha(u) = \left( \frac{1}{a} \operatorname{cosh}[a(g(u) - c)], 0, g(u) \right)$$

que no plano  $Oxz$  é dada por

$$x = \frac{1}{a} \operatorname{cosh}[a(z - c)].$$

Por uma translação ao longo do eixo  $z$ , podemos assumir  $c = 0$ , e assim,

$$x = \frac{1}{a} \operatorname{cosh}(az)$$

e portanto temos um catenóide.

Assim, mostramos que a parte de  $S$  correspondente a  $u \in ]\alpha, \beta[$  é parte do catenóide, pois na prova usamos essencialmente que  $g'(u) \neq 0$ .

Suponha que  $\beta < \infty$ . Então, se a curva geradora é definida para valores  $u \geq \beta$ , devemos ter  $g'(\beta) = 0$ , pois caso contrário  $]\alpha, \beta[$  não seria o maior intervalo contendo  $u_0$  tal que  $g'(u) \neq 0$ .

Por outro lado

$$(g'(u))^2 = \frac{1}{1 + a^2 u^2}, \text{ se } u \in ]\alpha, \beta[$$

e assim, desde que  $g'(u)$  é uma função contínua de  $u$ ,  $g'(\beta) = \pm(1 + a^2 \beta^2)^{-\frac{1}{2}} \neq 0$ , o que é uma contradição.

Logo a curva geradora não é definida para valores  $u \geq \beta$ .

Se  $\beta = \infty$ ,  $g'(u) \neq 0$  para todo  $u > \alpha$  e portanto mostramos que a parte de  $S$  correspondente a  $u \in (\alpha, \infty)$  é parte do catenóide.

Se  $\alpha < \infty$ , então se a curva geradora é definida para valores  $u \leq \alpha$  devemos ter  $g'(\alpha) = 0$ , pois caso contrário  $]\alpha, \beta[$  não seria o maior intervalo contendo  $u_0$ , tal que  $g'(u) \neq 0$ .

Por outro lado, analogamente ao caso  $\beta < \infty$ ,  $g'(u) = \pm(1 + a^2\alpha^2)^{\frac{-1}{2}} \neq 0$ .

Se  $\alpha = -\infty$ ,  $g'(u) \neq 0$  para todo  $u < \beta$  e portanto mostramos que a parte de  $S$  correspondente a  $u \in (-\infty, \beta)$  é parte do catenóide.

Portanto,  $] \alpha, \beta[$  é o domínio todo da nossa curva geradora e assim  $S$  é parte de um catenóide.

O único caso que falta considerar é aquele no qual  $g'(u) = 0$  para todo  $u$  no qual a curva geradora é definida. Mas, então,  $g(u) = d$ , onde  $d$  é constante. E portanto  $S$  é parte do plano  $z = d$ , já que

$$\chi(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, d).$$

□

### Exemplo 4.2. Helicóide

Considere a hélice de passo  $2\pi\alpha$  sobre o cilindro  $x^2 + y^2 = 1$  dada por  $\theta(v) = (\cos \omega v, \sin \omega v, \alpha v)$ , onde  $\omega v$  mede o ângulo que o eixo  $Ox$  faz com a reta que liga a origem  $O = (0, 0, 0)$  à projeção do ponto  $\theta(v)$  sobre o plano  $Oxy$ . Por cada ponto da hélice, trace uma reta paralela ao plano  $Oxy$  e que intercepta o eixo  $Oz$ . A superfície gerada por essas retas é chamada um helicóide. Uma parametrização do helicóide é dada por:

$$\chi(u, v) = (u \cos \omega v, u \sin \omega v, \alpha v), 0 < v < \frac{2\pi}{\omega}, -\infty < u < \infty.$$

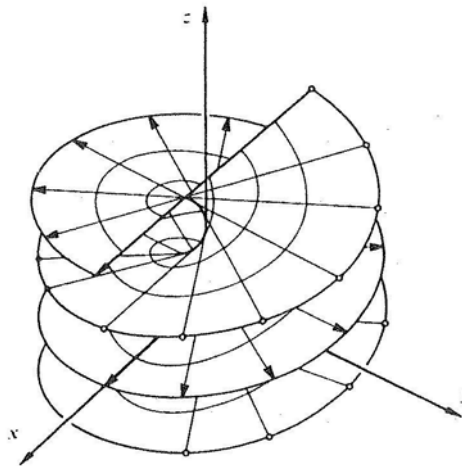


Figura 4.2: Helicóide.

Então,

$$\chi_u = (\cos \omega v, \sin \omega v, 0)$$

$$\chi_v = (-u\omega \sin \omega v, u\omega \cos \omega v, \alpha)$$

$$\chi_u \wedge \chi_v = (\alpha \sin \omega v, -\alpha \cos \omega v, u\omega)$$

$$\begin{aligned}\|\chi_u \wedge \chi_v\| &= \sqrt{\alpha^2 + u^2\omega^2} \\ N &= \frac{\chi_u \wedge \chi_v}{\|\chi_u \wedge \chi_v\|} = \frac{(\alpha \operatorname{sen} \omega v, -\alpha \operatorname{cos} \omega v, u\omega)}{\sqrt{\alpha^2 + u^2\omega^2}} \\ \chi_{uu} &= (0, 0, 0) \\ \chi_{uv} &= (-\omega \operatorname{sen} \omega v, \omega \operatorname{cos} \omega v, 0) \\ \chi_{vv} &= (-u\omega^2 \operatorname{cos} \omega v, -u\omega^2 \operatorname{sen} \omega v, 0)\end{aligned}$$

Assim

$$\begin{aligned}E &= \langle \chi_u, \chi_u \rangle \\ &= \operatorname{cos}^2 \omega v + \operatorname{sen}^2 \omega v \\ &= 1 \\ F &= \langle \chi_u, \chi_v \rangle \\ &= -u\omega \operatorname{sen} \omega v \operatorname{cos} \omega v + u\omega \operatorname{sen} \omega v \operatorname{cos} \omega v \\ &= 0 \\ G &= \langle \chi_v, \chi_v \rangle \\ &= u^2\omega^2 \operatorname{sen}^2 \omega v + u^2\omega^2 \operatorname{cos}^2 \omega v + \alpha^2 \\ &= u^2\omega^2 + \alpha^2 \\ e &= \langle N, \chi_{uu} \rangle \\ &= \langle N, (0, 0, 0) \rangle \\ &= 0 \\ f &= \langle N, \chi_{uv} \rangle \\ &= \frac{-\alpha\omega \operatorname{sen}^2 \omega v - \alpha\omega \operatorname{cos}^2 \omega v}{\sqrt{\alpha^2 + u^2\omega^2}} \\ &= \frac{-\alpha\omega}{\sqrt{\alpha^2 + u^2\omega^2}} \\ g &= \langle N, \chi_{vv} \rangle \\ &= \frac{-\alpha u\omega^2 \operatorname{sen} \omega v \operatorname{cos} \omega v + \alpha u\omega^2 \operatorname{sen} \omega v \operatorname{cos} \omega v}{\sqrt{\alpha^2 + u^2\omega^2}} \\ &= 0\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}H &= \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)} \\ &= \frac{0G - 2f0 + 0E}{2(EG - F^2)} \\ &= 0\end{aligned}$$

mostrando que a helicóide é uma superfície mínima

**Exemplo 4.3.** Uma superfície regrada é uma superfície que é uma união de retas, chamadas de geratrizes da superfície. Suponha que  $C$  é uma curva em  $\mathbb{R}^3$  que encontra cada uma dessas retas. Todo ponto  $P$  da superfície pertence a uma das retas dadas que intercepta  $C$ , digamos em  $Q$ .

Se  $\gamma$  é uma parametrização da curva  $C$  com  $\gamma(u) = Q$ , e se  $\delta(u)$  é um vetor diretor da reta passando por  $\gamma(u)$ ,  $P$  tem um vetor posição da forma

$$\chi(u, v) = \gamma(u) + v\delta(u)$$

Temos que:

$$\chi_u = \gamma'(u) + v\delta'(u)$$

e

$$\chi_v = \delta(u).$$

Assim,  $\chi$  é regular se  $\gamma'(u) + v\delta'(u)$  e  $\delta(u)$  são linearmente independentes. Isso será verdade, por exemplo, se  $\gamma'$  e  $\delta$  são linearmente independente e  $v$  é suficientemente pequeno.

Portanto para obter uma superfície, a curva  $C$  nunca deve ser tangente às geratrizes.

**Proposição 4.2.** *Toda superfície mínima regradada ou é parte de um plano ou é parte de um helicóide.*

*Demonstração.* Tomemos a parametrização usual

$$\chi(u, v) = \gamma(u) + v\delta(u)$$

(veja exemplo acima), onde  $\gamma$  é uma curva que encontra cada uma das geratrizes e  $\delta(u)$  é um vetor paralelo às geratrizes passando por  $\gamma(u)$ .

Iniciaremos a prova fazendo algumas simplificações para a parametrização.

Primeiro, podemos, certamente assumir que  $\|\delta(u)\| = 1$ , para todos os valores de  $u$ .

Assumiremos também que  $\delta'(u) \neq 0$  para todos os valores de  $u$  (consideraremos mais tarde o caso em que  $\delta'(u) = 0$ , para alguns valores de  $u$ ).

Podemos assumir que  $\delta$  é uma curva parametrizada pelo comprimento de arco (não assumiremos que  $\gamma$  é parametrizada pelo comprimento de arco).

De  $\|\delta(u)\| = 1$  temos que  $\langle \delta(u), \delta(u) \rangle = 1$  e portanto  $\langle \delta'(u), \delta(u) \rangle = 0$ . Também como  $\delta$  é parametrizada pelo comprimento de arco, temos  $\langle \delta'(u), \delta'(u) \rangle = 1$  e portanto  $\langle \delta''(u), \delta'(u) \rangle = 0$ .

Podemos assumir também que  $\langle \gamma'(u), \delta'(u) \rangle = 0$ , pois caso contrário basta considerarmos a curva

$$\tilde{\gamma}(u) = \gamma(u) - \langle \gamma'(u), \delta'(u) \rangle \delta(u).$$

Com isso, temos que, fazendo  $\tilde{v} = v + \langle \gamma'(u), \delta'(u) \rangle$  a superfície pode ser reparametrizada usando  $\tilde{\gamma}$  e os parâmetros  $u$  e  $\tilde{v}$  como

$$Y(u, \tilde{v}) = \tilde{\gamma}(u) + \tilde{v}\delta(u),$$

pois

$$\begin{aligned}\chi(u, v) &= \gamma(u) + (\tilde{v} - \langle \gamma'(u), \delta'(u) \rangle) \delta(u) \\ &= \gamma(u) + \tilde{v} \delta(u) + (\tilde{\gamma}(u) - \gamma(u)) \\ &= \tilde{v} \delta(u) + \tilde{\gamma}(u) = Y(u, \tilde{v})\end{aligned}$$

Logo, como

$$\begin{aligned}\tilde{\gamma}'(u) &= \gamma'(u) - [\langle \gamma''(u), \delta'(u) \rangle + \langle \gamma'(u), \delta''(u) \rangle] \delta(u) - \langle \gamma'(u), \delta'(u) \rangle \delta'(u), \\ &\quad \langle \delta(u), \delta'(u) \rangle = 0\end{aligned}$$

e

$$\langle \delta'(u), \delta'(u) \rangle = 1,$$

então

$$\begin{aligned}\langle \tilde{\gamma}'(u), \delta'(u) \rangle &= \langle \gamma'(u), \delta'(u) \rangle - \langle \gamma'(u), \delta'(u) \rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

Para simplificar as notações, de agora em diante, omitiremos o parâmetro  $u$ .

Assim temos,

$$\chi_u = \gamma' + v\delta'$$

$$\chi_v = \delta$$

e portanto,

$$\begin{aligned}E &= \langle \chi_u, \chi_u \rangle \\ &= \|\chi_u\|^2 \\ &= \|\gamma' + v\delta'\|^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F &= \langle \chi_u, \chi_v \rangle \\ &= \langle \gamma' + v\delta', \delta \rangle \\ &= \langle \gamma', \delta \rangle + v \langle \delta', \delta \rangle \\ &= \langle \gamma', \delta \rangle\end{aligned}$$

pois  $\langle \delta', \delta \rangle = 0$

$$\begin{aligned}G &= \langle \chi_v, \chi_v \rangle \\ &= \langle \delta, \delta \rangle \\ &= 1\end{aligned}$$

Colocando  $A = (EG - F^2)^{\frac{1}{2}}$  temos

$$\begin{aligned}N &= \frac{\chi_u \wedge \chi_v}{\|\chi_u \wedge \chi_v\|} \\ &= \frac{(\gamma' + v\delta') \wedge \delta}{A} \\ &= A^{-1}[(\gamma' + v\delta') \wedge \delta]\end{aligned}$$

Temos ainda

$$\chi_{uu} = \gamma'' + v\delta''$$



$$\chi_{uv} = \delta'$$

$$\chi_{vv} = 0$$

Assim,

$$\begin{aligned} e &= \langle N, \chi_{uu} \rangle \\ &= A^{-1} \langle (\gamma' + v\delta') \wedge \delta, \gamma'' + v\delta'' \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f &= \langle N, \chi_{uv} \rangle \\ &= A^{-1} \langle (\gamma' + v\delta') \wedge \delta, \delta' \rangle \\ &= A^{-1} \langle \gamma' \wedge \delta + v\delta' \wedge \delta, \delta' \rangle \\ &= A^{-1} \langle \gamma' \wedge \delta, \delta' \rangle + v \langle \delta' \wedge \delta, \delta' \rangle \\ &= A^{-1} \langle \gamma' \wedge \delta, \delta' \rangle \end{aligned}$$

pois  $\langle \delta' \wedge \delta, \delta' \rangle = 0$

$$\begin{aligned} g &= \langle N, \chi_{vv} \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

Portanto a condição de superfície mínima  $H = \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)} = 0$ , nos dá

$$\langle (\gamma' + v\delta') \wedge \delta, \gamma'' + v\delta'' \rangle = 2 \langle \gamma' \wedge \delta, \delta' \rangle \langle \gamma', \delta \rangle$$

para todo  $(u, v)$ .

Sem perda de generalidade, assumiremos que nosso domínio contém a origem  $(0, 0)$ .

Mas,

$$\begin{aligned} \langle (\gamma' + v\delta') \wedge \delta, \gamma'' + v\delta'' \rangle &= \langle \gamma' \wedge \delta + v\delta' \wedge \delta, \gamma'' + v\delta'' \rangle \\ &= \langle \gamma' \wedge \delta, \gamma'' \rangle + v[\langle \gamma' \wedge \delta, \delta'' \rangle + \langle \delta' \wedge \delta, \gamma'' \rangle] \\ &\quad + v^2 \langle \delta' \wedge \delta, \delta'' \rangle \end{aligned}$$

Assim temos,

$$2 \langle \gamma' \wedge \delta, \delta' \rangle \langle \gamma', \delta \rangle = \langle \gamma' \wedge \delta, \gamma'' \rangle + v[\langle \gamma' \wedge \delta, \delta'' \rangle + \langle \delta' \wedge \delta, \gamma'' \rangle] + v^2 \langle \delta' \wedge \delta, \delta'' \rangle$$

Em particular, para os pares do tipo  $(u, 0)$  temos

$$\langle \gamma' \wedge \delta, \gamma'' \rangle = 2 \langle \gamma' \wedge \delta, \delta' \rangle \langle \gamma', \delta \rangle \quad (4.4)$$

e portanto

$$v[\langle \gamma' \wedge \delta, \delta'' \rangle + \langle \delta' \wedge \delta, \gamma'' \rangle] + v^2 \langle \delta' \wedge \delta, \delta'' \rangle = 0,$$

para qualquer  $(u, v)$ .

Por outro lado, para os pares do tipo  $(0, v_1)$  e  $(0, v_2)$  com  $v_1 \neq v_2$  e  $v_1 v_2 \neq 0$ , colocando

$$x = \langle \gamma' \wedge \delta, \delta'' \rangle + \langle \delta' \wedge \delta, \gamma'' \rangle$$

e

$$y = \langle \delta' \wedge \delta, \delta'' \rangle$$

temos,

$$\begin{pmatrix} v_1 & v_1^2 \\ v_2 & v_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Como  $\det \begin{pmatrix} v_1 & v_1^2 \\ v_2 & v_2^2 \end{pmatrix} = v_1 v_2^2 - v_2 v_1^2 = v_1 v_2 (v_2 - v_1) \neq 0$ , então  $x = y = 0$ , ou equivalentemente,

$$\langle \gamma' \wedge \delta, \delta'' \rangle + \langle \delta' \wedge \delta, \gamma'' \rangle = 0 \quad (4.5)$$

$$\langle \delta' \wedge \delta, \delta'' \rangle = 0 \quad (4.6)$$

A equação (4.6), mostra que  $\delta$ ,  $\delta'$  e  $\delta''$  são linearmente dependentes. Desde que  $\delta$  e  $\delta'$  são vetores unitários perpendiculares, existem funções  $C^\infty$ ,  $\alpha(u)$  e  $\beta(u)$ , tais que

$$\delta'' = \alpha\delta + \beta\delta'.$$

Mas, desde que  $\delta$  é parametrizado pelo comprimento de arco,  $\langle \delta', \delta' \rangle = 1$  e assim  $\langle \delta', \delta'' \rangle = 0$ . Logo  $\beta = 0$  pois como  $\langle \delta', \delta \rangle = 0$  e  $\langle \delta', \delta' \rangle = 1$  temos

$$0 = \langle \delta', \delta'' \rangle = \langle \delta', \alpha\delta + \beta\delta' \rangle = \alpha \langle \delta', \delta \rangle + \beta \langle \delta', \delta' \rangle = \beta$$

Ainda,  $\alpha = -1$ , pois como  $\langle \delta', \delta \rangle = 0$  então  $\langle \delta'', \delta \rangle + \langle \delta', \delta' \rangle = 0$  e assim  $\langle \delta'', \delta \rangle = -\langle \delta', \delta' \rangle = -1$ . Além disso,  $\langle \delta, \delta \rangle = 1$  e  $\langle \delta', \delta \rangle = 0$  e portanto

$$-1 = \langle \delta'', \delta \rangle = \langle \alpha\delta + \beta\delta', \delta \rangle = \alpha \langle \delta, \delta \rangle + \beta \langle \delta', \delta \rangle = \alpha$$

Logo,

$$\delta'' = -\delta \quad (4.7)$$

A equação (4.7), mostra que a curvatura da curva  $\delta$  é 1, pois  $k_\delta = |\delta''| = |-\delta| = |\delta| = 1$  e que seu vetor normal é  $n_\delta = \frac{\delta''}{k_\delta} = -\delta$ .

Portanto, seu vetor binormal é  $b_\delta = t_\delta \wedge n_\delta = \delta' \wedge (-\delta)$  e assim

$$\tau_\delta = \langle b'_\delta, n_\delta \rangle = \langle \delta'' \wedge (-\delta) + \delta' \wedge (-\delta'), n_\delta \rangle = \langle \delta'' \wedge (-\delta), (-\delta) \rangle = 0.$$

Segue portanto que a torção é nula. Logo  $\delta$  é uma curva plana.

Assumindo  $\delta$  no plano  $Oxy$ , pelo Teorema 5.1 (Teorema fundamental das Curvas Planas) de [[6],p.52], temos:

$$\delta(s) = (x(s), y(s), 0)$$

onde

$$x(s) = x_0 + \int_{s_0}^s \cos[\theta(s) + \lambda] ds$$

e

$$y(s) = y_0 + \int_{s_0}^s \sen[\theta(s) + \lambda] ds$$

com  $\theta(s) = \int_{s_0}^s ds = s - s_0$  e portanto

$$x(s) = x_0 + \int_{s_0}^s \cos[s - s_0 + \lambda] ds$$

e

$$y(s) = y_0 + \int_{s_0}^s \sen[s - s_0 + \lambda] ds$$

ou equivalentemente

$$x(s) = x_0 + \sen(s - s_0 + \lambda) - \sen \lambda$$

e

$$y(s) = y_0 - \cos(s - s_0 + \lambda) + \cos \lambda$$

Logo,

$$\delta(s) = (x_0 + \sen(s - s_0 + \lambda) - \sen \lambda, y_0 - \cos(s - s_0 + \lambda) + \cos \lambda, 0)$$

Colocando  $\tilde{x}(s) = x(s) - x_0 + \sen \lambda$  e  $\tilde{y}(s) = y(s) - y_0 - \cos \lambda$  temos

$$\delta(s) = (\sen(s - s_0 + \lambda), -\cos(s - s_0 + \lambda), 0)$$

Agora fazendo  $\bar{s} = s - s_0 + \lambda$ , obtemos

$$\delta(\bar{s}) = (\sen \bar{s}, -\cos \bar{s}, 0)$$

Colocando  $\bar{s} = u + \frac{\pi}{2}$ ,  $\sen \bar{s} = \cos u$  e  $\cos \bar{s} = -\sen u$  obtemos

$$\delta(u) = (\cos u, \sen u, 0),$$

ou seja, mostramos que a menos de um movimento rígido, podemos assumir que  $\delta$  é um círculo de raio 1 e centro na origem do plano  $Oxy$ .

Da equação (4.7), obtemos  $\langle \delta'', \gamma' \wedge \delta \rangle = -\langle \delta, \gamma' \wedge \delta \rangle = 0$  e assim pela equação (4.5),  $\langle \gamma'', \delta' \wedge \delta \rangle = 0$ .

Segue que,  $\gamma''$  é ortogonal a  $\delta' \wedge \delta$ . Como  $\delta(u) = (\cos u, \sen u, 0)$  temos,

$$\delta'(u) = (-\sen u, \cos u, 0)$$

e portanto  $\delta' \wedge \delta = (0, 0, -1)$ .

Escrevendo  $\gamma(u) = (f(u), g(u), z(u))$ , temos

$$\gamma'(u) = (f'(u), g'(u), z'(u))$$

e

$$\gamma''(u) = (f''(u), g''(u), z''(u)).$$

Como  $\gamma''$  é ortogonal à  $(0, 0, -1)$  então  $\langle \gamma'', (0, 0, -1) \rangle = 0$ , ou equivalentemente,  $z''(u) = 0$ .

Logo  $z'(u) = a$  e  $z(u) = au + b$ .

Portanto

$$\gamma(u) = (f(u), g(u), au + b),$$

onde  $f$  e  $g$  são funções  $C^\infty$  e  $a$  e  $b$  são constantes.

Se  $a = 0$ , a superfície é parte do plano  $z = b$ , pois  $\gamma(u) = (f(u), g(u), b)$  e portanto como  $\chi(u, v) = \gamma(u) + v\delta(u)$ , obtemos

$$\begin{aligned}\chi(u, v) &= (f(u), g(u), b) + v(\cos u, \sen u, 0) \\ &= (f(u) + v \cos u, g(u) + v \sen u, b)\end{aligned}$$

Logo  $\chi(u, v)$  é parte do plano  $z = b$ .

Se  $a \neq 0$ , da equação (4.4) temos

$$\begin{aligned}&< (f''(u), g''(u), 0), (f'(u), g'(u), a) \wedge (\cos u, \sen u, 0) >= \\ &= 2 < (\cos u, \sen u, 0), (f'(u), g'(u), a) > < (-\sen u, \cos u, 0), \\ &\quad (f'(u), g'(u), a) \wedge (\cos u, \sen u, 0) > \\ &= 2(f'(u) \cos u + g'(u) \sen u) < (-\sen u, \cos u, 0), \\ &\quad (-a \sen u, a \cos u, f'(u) \sen u - g'(u) \cos u) > \\ &= 2(f'(u) \cos u + g'(u) \sen u)a\end{aligned}$$

com  $a \neq 0$ .

Por outro lado,

$$\begin{aligned}&< (f''(u), g''(u), 0), (f'(u), g'(u), a) \wedge (\cos u, \sen u, 0) >= \\ &= < (f''(u), g''(u), 0), (-a \sen u, a \cos u, f'(u) \sen u - g'(u) \cos u) > \\ &= a(-f''(u) \sen u + g''(u) \cos u)\end{aligned}$$

Portanto,

$$g''(u) \cos u - f''(u) \sen u = 2(f'(u) \cos u + g'(u) \sen u) \quad (4.8)$$

Finalmente fazendo uso da condição  $\langle \gamma', \delta' \rangle = 0$ , obtemos

$$\langle (f'(u), g'(u), a), (-\sen u, \cos u, 0) \rangle = 0$$

ou equivalentemente

$$f'(u) \sen u = g'(u) \cos u \quad (4.9)$$

Derivando (4.9) obtemos

$$f''(u) \sen u + f'(u) \cos u = g''(u) \cos u - g'(u) \sen u \quad (4.10)$$

As equações (4.8) e (4.10) juntas nos dão

$$f'(u) \cos u + g'(u) \sen u = 2(f'(u) \cos u + g'(u) \sen u)$$

ou equivalentemente

$$f'(u) \cos u + g'(u) \sen u = 0 \quad (4.11)$$

Multiplicando (4.11) por  $\sin u$ , obtemos

$$f'(u) \sin u \cos u + g'(u) \sin^2 u = 0$$

e usando (4.9), obtemos

$$g'(u) \cos^2 u + g'(u) \sin^2 u = 0.$$

Logo  $g'(u) = 0$ .

Se multiplicarmos (4.11) por  $\cos u$ , obtemos

$$f'(u) \cos^2 u + g'(u) \sin u \cos u = 0$$

e novamente usando a equação (4.9), obtemos

$$f'(u) \cos^2 u + f'(u) \sin^2 u = 0.$$

Logo  $f'(u) = 0$ .

Portanto  $f(u) = c$  e  $g(u) = d$ , com  $c$  e  $d$  constantes.

Assim,  $\gamma(u) = (c, d, au + b)$  e

$$\begin{aligned} \chi(u, v) &= (c, d, au + b) + v(\cos u, \sin u, 0) \\ &= (c + v \cos u, d + v \sin u, au + b) \\ &= (x(u, v), y(u, v), z(u, v)). \end{aligned}$$

Fazendo as mudanças de coordenadas:

$$\begin{aligned} x'(u, v) &= x(u, v) - c \\ y'(u, v) &= y(u, v) - d \\ z'(u, v) &= z(u, v) - b \end{aligned}$$

obtemos

$$\chi(u, v) = (v \cos u, v \sin u, au)$$

que é um helicóide.

Assumimos no início que  $\delta'(u) \neq 0$ , para todo  $u$ .

Se  $\delta'(u) = 0$  para todos valores de  $u$ , então  $\delta(u) = \bar{a}$  com  $|\bar{a}| = 1$  e podemos supor que  $\gamma(u)$  está num plano perpendicular a  $\bar{a}$ .

De fato, se isso não ocorre, considere a curva

$$\bar{\gamma}(u) = \gamma(u) - \langle \gamma(u), \bar{a} \rangle \bar{a}$$

Então:

$$\begin{aligned} \langle \bar{\gamma}(u), \bar{a} \rangle &= \langle \gamma(u), \bar{a} \rangle - \langle \gamma(u), \bar{a} \rangle |\bar{a}|^2 \\ &= \langle \gamma(u), \bar{a} \rangle - \langle \gamma(u), \bar{a} \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

Portanto,  $\bar{\gamma}(u)$  está num plano perpendicular a  $\bar{a}$ . Além disso,

$$\begin{aligned} \chi(u, v) &= \gamma(u) + v\delta(u) \\ &= \bar{\gamma}(u) + \langle \gamma(u), \bar{a} \rangle \bar{a} + v\bar{a} \\ &= \bar{\gamma}(u) + (\langle \gamma(u), \bar{a} \rangle + v)\bar{a}. \end{aligned}$$

Chamando  $\bar{v} = \langle \gamma(u), \bar{a} \rangle + v$ , temos

$$\chi(u, v) = \bar{\gamma}(u) + \bar{v}\bar{a} = \chi(u, \bar{v}).$$

Logo, podemos supor que  $\chi(u, v) = \gamma(u) + v\bar{a}$ , onde  $\gamma(u)$  está num plano perpendicular a  $\bar{a}$  e  $|\bar{a}| = 1$ .

Por um movimento rígido podemos assumir que  $\gamma(u)$  está no plano  $Oxy$  e  $\bar{a} = (0, 0, 1)$ .

Logo, podemos assumir que  $\gamma(u) = (f(u), g(u), 0)$  e  $\bar{a} = (0, 0, 1)$ . Assim,

$$\begin{aligned} \chi(u, v) &= \gamma(u) + v\bar{a} \\ &= (f(u), g(u), 0) + v(0, 0, 1) \\ &= (f(u), g(u), v) \end{aligned}$$

Podemos assumir também que  $\gamma(u)$  está parametrizada pelo comprimento de arco. Então temos:

$$\begin{aligned} \chi_u &= \gamma'(u) \\ &= (f'(u), g'(u), 0) \end{aligned}$$

e

$$\chi_v = (0, 0, 1)$$

Portanto  $\chi$  é regular se  $\gamma'(u)$  e  $(0, 0, 1)$  são linearmente independentes.

Assim,

$$\begin{aligned} E &= \langle \chi_u, \chi_u \rangle \\ &= \|\gamma'(u)\|^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F &= \langle \chi_u, \chi_v \rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G &= \langle \chi_v, \chi_v \rangle \\ &= 1. \end{aligned}$$

Temos também

$$\begin{aligned}\chi_{uu} &= \gamma''(u) \\ &= (f''(u), g''(u), 0)\end{aligned}$$

$$\chi_{uv} = (0, 0, 0)$$

$$\chi_{vv} = (0, 0, 0)$$

$$\begin{aligned}N &= \frac{\chi_u \wedge \chi_v}{\|\chi_u \wedge \chi_v\|} \\ &= (\gamma'(u) \wedge (0, 0, 1)) \\ &= (g'(u), -f'(u), 0)\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}e &= \langle N, \chi_{uu} \rangle \\ &= \langle (g'(u), -f'(u), 0), (f''(u), g''(u), 0) \rangle \\ &= g'(u)f''(u) - f'(u)g''(u)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f &= \langle N, \chi_{uv} \rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g &= \langle N, \chi_{vv} \rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

Como  $\gamma(u)$  é parametrizada pelo comprimento de arco, temos  $\langle \gamma', \gamma' \rangle = 1$  e portanto  $\langle \gamma''(u), \gamma'(u) \rangle + \langle \gamma'(u), \gamma''(u) \rangle = 0$ , ou ainda  $\langle \gamma''(u), \gamma'(u) \rangle = 0$ .

Logo

$$f'(u)f''(u) + g'(u)g''(u) = 0 \quad (4.12)$$

A condição de superfície mínima  $H = \frac{eG - 2fF + gE}{2A^2} = 0$ , nos dá

$$f''(u)g'(u) - f'(u)g''(u) = 0 \quad (4.13)$$

Portanto, de (4.12) e (4.13) temos

$$\begin{cases} f''(u)g'(u) - g''(u)f'(u) = 0 \\ f'(u)f''(u) + g'(u)g''(u) = 0 \end{cases}$$

ou, equivalentemente,

$$\begin{pmatrix} -f'(u) & g'(u) \\ g'(u) & f'(u) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g''(u) \\ f''(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Como  $\det \begin{pmatrix} -f'(u) & g'(u) \\ g'(u) & f'(u) \end{pmatrix} = -(f'(u)^2 + g'(u)^2) = -1$ , temos que  $g''(u) = 0$  e  $f''(u) = 0$  e assim,  $g(u) = au + b$  e  $f(u) = cu + d$ , com  $a, b, c$  e  $d$  constantes.

Portanto temos dois casos a analisar:

i) Para  $a \neq 0$ , temos

$$\begin{aligned}\chi(u, v) &= (f(u), g(u), 0) + v(0, 0, 1) \\ &= (cu + d, au + b, v) \\ &= (d, b, 0) + u(c, a, 0) + v(0, 0, 1)\end{aligned}$$

que é a equação vetorial de um plano passando por  $(d, b, 0)$  e tendo como vetores diretores  $(c, a, 0)$  e  $(0, 0, 1)$ .

ii) Para  $a = 0$ , temos  $\chi(u, v) = (cu + d, b, v)$  e portanto  $\chi(u, v)$  é parte do plano  $y = b$ .

Vamos supor agora, que para algum valor de  $u$ , digamos  $u = u_0$ , temos que  $\delta'(u_0) = 0$ . Temos então que  $\delta'(u) = 0$  para  $u$  em algum intervalo contendo  $u_0$ . Seja  $] \alpha, \beta [$  o maior destes intervalos.

A prova é agora completada, usando-se um argumento similar ao usado no final da prova da proposição 4.1, que mostra que a superfície toda ou é parte de um plano ou é parte de um helicóide.

□



## 5 Teorema Egregium de Gauss

Uma das mais importantes descobertas de Gauss sobre superfícies é que a curvatura gaussiana é inalterada quando as superfícies se comportam localmente da mesma maneira, no que se refere às questões métricas intrínsecas (comprimento, área, ângulo). Gauss chamou este resultado de egregium e esta palavra, que em latim significa extraordinária, ficou ligada ao seu teorema desde então.

O objetivo desta seção é provar este importante teorema e estudar suas consequências. Para maiores detalhes veja [1].

Necessitaremos do seguinte resultado:

**Teorema 5.1.**  *$f : S_1 \rightarrow S_2$  é uma isometria se, e somente se, para qualquer parametrização  $\sigma^1 : U \rightarrow S_1$ , a aplicação  $\sigma^2 = f \circ \sigma^1 : U \rightarrow S_2$  tem  $E_2, F_2$  e  $G_2$  iguais a  $E_1, F_1$  e  $G_1$ , respectivamente.*

*Demonstração.* ( $\implies$ ) Inicialmente, lembremos que se  $\sigma^i : U \rightarrow S_i$  é uma parametrização, então, para todo  $q \in U$ ,  $d\sigma_q^i : \mathbb{R}^2 \rightarrow T_{\sigma^i(q)}(S_i)$  é dada por

$$d\sigma_q^i(e_1) = \sigma_u^i(q)$$

$$d\sigma_q^i(e_2) = \sigma_v^i(q)$$

onde  $\{e_1, e_2\}$  é a base canônica de  $\mathbb{R}^2$ .

Agora, desde que  $\sigma^2 = f \circ \sigma^1 : U \rightarrow S_2$ , então, para todo  $q \in U$ ,  $d\sigma_q^2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow T_{\sigma^2(q)}S_2$  é dada por  $d\sigma_q^2 : df_{\sigma^1(q)} \circ d\sigma_q^1$  onde  $df_{\sigma^1(q)} : T_{\sigma^1(q)}(S_1) \rightarrow T_{\sigma^2(q)}(S_2)$  é dada por

$$df_{\sigma^1(q)}(\sigma_u^1(q)) = df_{\sigma^1(q)} \circ d\sigma_q^1(e_1) = d\sigma_q^2(e_1) = \sigma_u^2(q)$$

$$df_{\sigma^1(q)}(\sigma_v^1(q)) = df_{\sigma^1(q)} \circ d\sigma_q^1(e_2) = d\sigma_q^2(e_2) = \sigma_v^2(q)$$

Assim, como  $f : S_1 \rightarrow S_2$  é uma isometria,

$$\begin{aligned} E_1(q) &= \langle \sigma_u^1(q), \sigma_u^1(q) \rangle_{\sigma^1(q)} \\ &= \langle df_{\sigma^1(q)}(\sigma_u^1(q)), df_{\sigma^1(q)}(\sigma_u^1(q)) \rangle_{\sigma^2(q)} \\ &= \langle \sigma_u^2(q), \sigma_u^2(q) \rangle_{\sigma^2(q)} \\ &= E_2(q) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_1(q) &= \langle \sigma_u^1(q), \sigma_v^1(q) \rangle_{\sigma^1(q)} \\
&= \langle df_{\sigma^1(q)}(\sigma_u^1(q)), df_{\sigma^1(q)}(\sigma_v^1(q)) \rangle_{\sigma^2(q)} \\
&= \langle \sigma_u^2(q), \sigma_v^2(q) \rangle_{\sigma^2(q)} \\
&= F_2(q)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
G_1(q) &= \langle \sigma_v^1(q), \sigma_v^1(q) \rangle_{\sigma^1(q)} \\
&= \langle df_{\sigma^1(q)}(\sigma_v^1(q)), df_{\sigma^1(q)}(\sigma_v^1(q)) \rangle_{\sigma^2(q)} \\
&= \langle \sigma_v^2(q), \sigma_v^2(q) \rangle_{\sigma^2(q)} \\
&= G_2(q)
\end{aligned}$$

( $\Leftarrow$ ) Suponha a existência de parametrizações  $\sigma^1 : U \rightarrow S_1$  e  $\sigma^2 : U \rightarrow S_2$  tais que  $E_1 = E_2$ ,  $F_1 = F_2$  e  $G_1 = G_2$  em  $U$ . Mostremos que a aplicação  $f = \sigma^2 \circ (\sigma^1)^{-1} : S_1 \rightarrow S_2$  é uma isometria.

Inicialmente lembremos que se  $f = \sigma^2 \circ (\sigma^1)^{-1}$  então  $df_p = d\sigma_{(\sigma^1)^{-1}(p)}^2 \circ d(\sigma^1)_p^{-1}$  e  $d(\sigma^1)_p^{-1} = (d\sigma_q^1)^{-1}$  onde  $p = \sigma^1(q)$ .

Desde que  $T_p(S_1) = \langle \sigma_u^1(q), \sigma_v^1(q) \rangle$  onde  $p = \sigma^1(q)$  temos, para cada  $i = 1, 2$ , que se  $w_i \in T_p(S_1)$  então

$$w_i = a_i \sigma_u^1(q) + b_i \sigma_v^1(q).$$

Logo

$$df_p(w_i) = a_i df_p(\sigma_u^1(q)) + b_i df_p(\sigma_v^1(q)).$$

Mas

$$\begin{aligned}
df_p(\sigma_u^1(q)) &= d\sigma_{(\sigma^1)^{-1}(p)}^2 \circ d(\sigma^1)_p^{-1}(\sigma_u^1(q)) \\
&= d\sigma_{(\sigma^1)^{-1}(p)}^2 \circ (d\sigma_q^1)^{-1}(\sigma_u^1(q)) \\
&= d\sigma_{(\sigma^1)^{-1}(p)}^2((d\sigma_q^1)^{-1}(\sigma_u^1(q))) \\
&= d\sigma_{(\sigma^1)^{-1}(p)}^2(e_1) \\
&= \sigma_u^2((\sigma^1)^{-1}(p))
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
df_p(\sigma_v^1(q)) &= d\sigma_{(\sigma^1)^{-1}(p)}^2 \circ d(\sigma^1)_p^{-1}(\sigma_v^1(q)) \\
&= d\sigma_{(\sigma^1)^{-1}(p)}^2 \circ (d\sigma_q^1)^{-1}(\sigma_v^1(q)) \\
&= d\sigma_{(\sigma^1)^{-1}(p)}^2((d\sigma_q^1)^{-1}(\sigma_v^1(q))) \\
&= d\sigma_{(\sigma^1)^{-1}(p)}^2(e_2) \\
&= \sigma_v^2((\sigma^1)^{-1}(p))
\end{aligned}$$

Portanto,

$$df_p(w_i) = a_i \sigma_u^2((\sigma^1)^{-1}(p)) + b_i \sigma_v^2((\sigma^1)^{-1}(p))$$

Agora,  $f$  é um difeomorfismo, pois  $\sigma_2$  e  $\sigma_1^{-1}$  o são. Assim, basta mostrar que para todo  $p \in S_1$  e para todos os pares  $w_1, w_2 \in T_p S_1$ , temos

$$\langle df_p(w_1), df_p(w_2) \rangle_{f(p)} = \langle w_1, w_2 \rangle_p.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\langle df_p(w_1), df_p(w_2) \rangle_{f(p)} &= \langle a_1\sigma_u^2((\sigma^1)^{-1}(p)) + b_1\sigma_v^2((\sigma^1)^{-1}(p)), a_2\sigma_u^2((\sigma^1)^{-1}(p)) + b_2\sigma_v^2((\sigma^1)^{-1}(p)) \rangle_{f(p)} \\
&= a_1a_2\langle \sigma_u^2((\sigma^1)^{-1}(p)), \sigma_u^2((\sigma^1)^{-1}(p)) \rangle_{f(p)} + a_1b_2\langle \sigma_u^2((\sigma^1)^{-1}(p)), \sigma_v^2((\sigma^1)^{-1}(p)) \rangle_{f(p)} \\
&\quad + b_1a_2\langle \sigma_v^2((\sigma^1)^{-1}(p)), \sigma_u^2((\sigma^1)^{-1}(p)) \rangle_{f(p)} + b_1b_2\langle \sigma_v^2((\sigma^1)^{-1}(p)), \sigma_v^2((\sigma^1)^{-1}(p)) \rangle_{f(p)} \\
&= a_1a_2E_2((\sigma^1)^{-1}(p)) + a_1b_2F_2((\sigma^1)^{-1}(p)) + b_1a_2F_2((\sigma^1)^{-1}(p)) + b_1b_2G_2((\sigma^1)^{-1}(p)) \\
&= a_1a_2E_1((\sigma^1)^{-1}(p)) + a_1b_2F_1((\sigma^1)^{-1}(p)) + b_1a_2F_1((\sigma^1)^{-1}(p)) + b_1b_2G_1((\sigma^1)^{-1}(p)) \\
&= a_1a_2\langle \sigma_u^1((\sigma^1)^{-1}(p)), \sigma_u^1((\sigma^1)^{-1}(p)) \rangle_p + a_1b_2\langle \sigma_u^1((\sigma^1)^{-1}(p)), \sigma_v^1((\sigma^1)^{-1}(p)) \rangle_p \\
&\quad + b_1a_2\langle \sigma_v^1((\sigma^1)^{-1}(p)), \sigma_u^1((\sigma^1)^{-1}(p)) \rangle_p + b_1b_2\langle \sigma_v^1((\sigma^1)^{-1}(p)), \sigma_v^1((\sigma^1)^{-1}(p)) \rangle_p \\
&= \langle a_1\sigma_u^1((\sigma^1)^{-1}(p)) + b_1\sigma_v^1((\sigma^1)^{-1}(p)), a_2\sigma_u^1((\sigma^1)^{-1}(p)) + b_2\sigma_v^1((\sigma^1)^{-1}(p)) \rangle_p \\
&= \langle w_1, w_2 \rangle_p
\end{aligned}$$

□

Isto significa, mais precisamente, que se  $S_1$  e  $S_2$  são duas superfícies e se  $f : S_1 \rightarrow S_2$  é uma isometria entre elas, então para qualquer ponto  $p$  de  $S_1$ , a curvatura gaussiana de  $S_1$  em  $p$  é igual à curvatura gaussiana de  $S_2$  em  $f(p)$ .

Em outras palavras, *a curvatura gaussiana de uma superfície é preservada por isometrias*.

Para provar esse resultado, é suficiente, pelo teorema 5.1, considerar o caso de uma superfície parametrizada regular  $\sigma_1$  sobre  $S_1$  e provar que, se  $\sigma_1$  e  $\sigma_2 = f \circ \sigma_1$  tem  $E_1, F_1, G_1$  e  $E_2, F_2, G_2$ , iguais respectivamente, então elas tem a mesma curvatura gaussiana.

Isto está longe de ser óbvio, pois a fórmula  $K = \frac{eg-f^2}{EG-F^2}$ , que obtivemos para curvatura gaussiana  $K$ , na equação (3.14), depende dos coeficientes  $e, g$  e  $f$ , bem como de  $E, F$  e  $G$ .

Portanto o teorema nos diz que  $eg - f^2$  pode ser expresso em termos de  $E, F$  e  $G$  (embora não diz que  $e, f$  e  $g$ , individualmente, podem ser assim expressados).

Para provar o teorema faremos uso da base ortonormal  $\{e', e''\}$  do plano tangente em cada ponto  $P$  da superfície parametrizada regular  $\sigma$ , onde  $e'(q) = \frac{\sigma_u(q)}{\|\sigma_u(q)\|}$  e se  $w(q) = \sigma_v(q) - \langle \sigma_v(q), e'(q) \rangle e'(q)$  então  $e''(q) = \frac{w(q)}{\|w(q)\|}$  onde  $\sigma(q) = P$ .

Então,  $\{e', e'', N\}$  é uma base ortonormal do  $\mathbb{R}^3$ , onde podemos assumir que

$N(q) = e'(q) \wedge e''(q)$  é o vetor normal à superfície  $S$  em  $q$ , pois caso contrário, bastaríamos trocar a ordem de  $e'(q)$  e  $e''(q)$ , no produto vetorial, para obtermos  $N(q)$ .

Chamando  $q = (u, v)$ , podemos sempre expressar as derivadas parciais de  $e'$  e  $e''$  com respeito a  $u$  e  $v$  em termos da base ortonormal  $\{e', e'', N\}$ .

A partir de agora, omitiremos o  $q$  para simplificar a notação.

Desde que  $\langle e', e' \rangle = 1$  e  $\langle e'', e'' \rangle = 1$ , segue que,  $\langle e'_u, e' \rangle = 0$ ,  $\langle e'_v, e' \rangle = 0$ ,  $\langle e''_u, e'' \rangle = 0$  e  $\langle e''_v, e'' \rangle = 0$ .

Portanto a componente de  $e'_u$  e  $e'_v$  na direção de  $e'$  é zero, bem como a componente de  $e''_u$  e  $e''_v$  na direção de  $e''$  também é zero.

Portanto

$$e'_u = \alpha e'' + \lambda' N$$

$$e'_v = \beta e'' + \mu' N$$

$$e''_u = \gamma e' + \lambda'' N$$

$$e''_v = \delta e' + \mu'' N$$

para alguns escalares  $\alpha, \lambda', \beta, \mu', \gamma, \lambda'', \delta, \mu''$  (que podem depender de  $u$  e  $v$ ).

Além disso, desde que  $\langle e', e'' \rangle = 0$ ,  $\langle e'_u, e'' \rangle + \langle e', e''_u \rangle = 0$  e portanto  $\langle e'_u, e'' \rangle = -\langle e', e''_u \rangle$ , isto é,  $\langle \alpha e'' + \lambda' N, e'' \rangle = -\langle e', \gamma e' + \lambda'' N \rangle$ , ou ainda  $\alpha \langle e'', e'' \rangle + \lambda' \langle N, e'' \rangle = -\gamma \langle e', e' \rangle - \lambda'' \langle e', N \rangle$  e portanto  $\alpha = -\gamma$ .

Similarmente, derivando  $\langle e', e'' \rangle = 0$  em relação a  $v$ , obtemos  $\beta = -\delta$ . Portanto

$$e'_u = \alpha e'' + \lambda' N \quad (5.1)$$

$$e'_v = \beta e'' + \mu' N \quad (5.2)$$

$$e''_u = -\alpha e' + \lambda'' N \quad (5.3)$$

$$e''_v = -\beta e' + \mu'' N \quad (5.4)$$

O lema abaixo é um passo crucial para a prova do teorema 5.2 a seguir.

**Lema 5.1.** *Com a notação acima temos*

$$\begin{aligned} \langle e'_u, e''_v \rangle - \langle e''_u, e'_v \rangle &= \lambda' \mu'' - \lambda'' \mu' \\ &= \alpha_v - \beta_u \\ &= \frac{eg - f^2}{(EG - F^2)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned} \quad (5.5)$$

*Demonstração.* Para provarmos a primeira igualdade da equação do lema 5.1 note que

$$\begin{aligned} \langle e'_u, e''_v \rangle - \langle e''_u, e'_v \rangle &= \langle \alpha e'' + \lambda' N, -\beta e' + \mu'' N \rangle - \langle -\alpha e' + \lambda'' N, \beta e'' + \mu' N \rangle \\ &= -\alpha \beta \langle e'', e' \rangle + \alpha \mu'' \langle e'', N \rangle - \lambda' \beta \langle N, e' \rangle + \lambda' \mu'' \langle N, N \rangle \\ &\quad + \alpha \beta \langle e', e'' \rangle + \alpha \mu' \langle e', N \rangle - \lambda'' \beta \langle N, e'' \rangle - \lambda'' \mu' \langle N, N \rangle \\ &= \lambda' \mu'' - \lambda'' \mu' \end{aligned}$$

Para provar a segunda igualdade da equação do lema 5.1 observe que das equações (5.1) e (5.2) temos

$$\langle e'_u, e'' \rangle = \alpha \langle e'', e'' \rangle + \lambda' \langle N, e'' \rangle = \alpha$$

e

$$\langle e'_v, e'' \rangle = \beta \langle e'', e'' \rangle + \mu' \langle N, e'' \rangle = \beta$$

Portanto

$$\begin{aligned}\alpha_v - \beta_u &= \langle e'_{uv}, e'' \rangle + \langle e'_u, e''_v \rangle - \langle e'_{vu}, e'' \rangle - \langle e'_v, e''_u \rangle \\ &= \langle e'_u, e''_v \rangle - \langle e'_v, e''_u \rangle\end{aligned}$$

Para provarmos a terceira igualdade da equação do lema 5.1 observamos que  $N_u \wedge N_v = K \sigma_u \wedge \sigma_v$

De fato, vimos na seção 3.2, equações (3.3) e (3.4), respectivamente, que podemos escrever  $N_u = a_{11}\sigma_u + a_{21}\sigma_v$  e  $N_v = a_{12}\sigma_u + a_{22}\sigma_v$ , onde  $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$  é dada pela equação (3.15).

Portanto,

$$\begin{aligned}N_u \wedge N_v &= (a_{11}\sigma_u + a_{21}\sigma_v) \wedge (a_{12}\sigma_u + a_{22}\sigma_v) \\ &= a_{11}a_{12}(\sigma_u \wedge \sigma_u) + a_{11}a_{22}(\sigma_u \wedge \sigma_v) \\ &\quad - a_{21}a_{12}(\sigma_u \wedge \sigma_v) + a_{21}a_{22}(\sigma_v \wedge \sigma_v) \\ &= (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})\sigma_u \wedge \sigma_v \\ &= \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \sigma_u \wedge \sigma_v \\ &= \det \left[ -\frac{1}{EG-F^2} \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \right] \sigma_u \wedge \sigma_v \\ &= \left[ \frac{1}{(EG-F^2)^2} \det \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \right] \sigma_u \wedge \sigma_v \\ &= \frac{1}{(EG-F^2)^2} (eg - f^2)(EG - F^2) \sigma_u \wedge \sigma_v \\ &= \frac{eg-f^2}{EG-F^2} \sigma_u \wedge \sigma_v \\ &= K \sigma_u \wedge \sigma_v\end{aligned}$$

(onde  $K = \frac{eg-f^2}{EG-F^2}$ ).

Lembrando que  $N = \frac{\sigma_u \wedge \sigma_v}{\|\sigma_u \wedge \sigma_v\|}$  e que  $\|\sigma_u \wedge \sigma_v\| = (EG - F^2)^{\frac{1}{2}}$  obtemos

$$\begin{aligned}N_u \wedge N_v &= \frac{eg-f^2}{EG-F^2} \sigma_u \wedge \sigma_v \\ &= \frac{eg-f^2}{EG-F^2} \|\sigma_u \wedge \sigma_v\| N \\ &= \frac{eg-f^2}{EG-F^2} (EG - F^2)^{\frac{1}{2}} N \\ &= \frac{eg-f^2}{(EG-F^2)^{\frac{1}{2}}} N\end{aligned}$$

Portanto

$$\langle N_u \wedge N_v, N \rangle = \frac{eg - f^2}{(EG - F^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (5.6)$$

Desde que  $N = e' \wedge e''$  obtemos

$$\langle N_u \wedge N_v, N \rangle = \langle N_u \wedge N_v, e' \wedge e'' \rangle$$

Desde que para quaisquer  $a, b, c, d$  de  $\mathbb{R}^2$ , temos

$$\langle a \wedge b, c \wedge d \rangle = \langle a, c \rangle \langle b, d \rangle - \langle a, d \rangle \langle b, c \rangle$$

então

$$\langle N_u \wedge N_v, e' \wedge e'' \rangle = \langle N_u, e' \rangle \langle N_v, e'' \rangle - \langle N_u, e'' \rangle \langle N_v, e' \rangle$$

Desde que  $\langle N, e' \rangle = 0$ , derivando em relação a  $u$ , obtemos  $\langle N_u, e' \rangle + \langle N, e'_u \rangle = 0$  e portanto

$$\langle N_u, e' \rangle = - \langle N, e'_u \rangle$$

Analogamente, derivando  $\langle N, e' \rangle = 0$  em relação a  $v$ , obtemos

$$\langle N_v, e' \rangle = - \langle N, e'_v \rangle$$

Também de  $\langle N, e'' \rangle = 0$ , temos  $\langle N_v, e'' \rangle + \langle N, e''_v \rangle = 0$  e portanto

$$\langle N_v, e'' \rangle = - \langle N, e''_v \rangle$$

Analogamente, derivando  $\langle N, e'' \rangle = 0$ , em relação a  $u$ , obtemos

$$\langle N_u, e'' \rangle = - \langle N, e''_u \rangle$$

Portanto

$$\begin{aligned} \langle N_u \wedge N_v, e' \wedge e'' \rangle &= \langle N, e'_u \rangle \langle N, e''_v \rangle - \langle N, e''_u \rangle \langle N, e'_v \rangle \\ &= \langle N, \alpha e'' + \lambda' N \rangle \langle N, -\beta e' + \mu'' N \rangle - \\ &\quad \langle N, -\alpha e' + \lambda'' N \rangle \langle N, \beta e'' + \mu' N \rangle \\ &= \lambda' \mu'' - \lambda'' \mu' \end{aligned} \tag{5.7}$$

Da primeira igualdade da equação (5.5) e das equações (5.6) e (5.7), segue

$$\begin{aligned} \langle e'_u, e''_v \rangle - \langle e''_u, e'_v \rangle &= \lambda' \mu'' - \lambda'' \mu' \\ &= \langle N_u \wedge N_v, N \rangle \\ &= \frac{eg - f^2}{(EG - F^2)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

□

Agora podemos provar o

**Teorema 5.2.** *A curvatura gaussiana de uma superfície é preservada por isometrias.*

*Demonstração.* Da segunda e terceira igualdades da equação (5.5) do lema 5.1 obtemos

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \left[ \frac{eg - f^2}{(EG - F^2)^{\frac{1}{2}}} \right] \frac{1}{(EG - F^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\alpha_v - \beta_u}{(EG - F^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (5.8)$$

Assim, para provar o teorema é suficiente mostrar que para a base  $\{e', e''\}$ , definida anteriormente, os escalares  $\alpha$  e  $\beta$  dependem somente de  $E$ ,  $F$  e  $G$ .

Lembramos que  $e' = \frac{\sigma_u}{\|\sigma_u\|} = \frac{\sigma_u}{E^{\frac{1}{2}}} = \epsilon\sigma_u$ , onde  $\epsilon = E^{-\frac{1}{2}}$ , e que  $e'' = \frac{w}{\|w\|}$ , onde  $w = \sigma_v - \langle \sigma_v, e' \rangle e'$ .

Portanto

$$\begin{aligned} w &= \sigma_v - \langle \sigma_v, \epsilon\sigma_u \rangle \epsilon\sigma_u \\ &= \sigma_v - \epsilon^2 \langle \sigma_v, \sigma_u \rangle \sigma_u \\ &= \sigma_v - \epsilon^2 F \sigma_u \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \|w\| &= \langle w, w \rangle^{\frac{1}{2}} \\ &= \langle \sigma_v - \epsilon^2 F \sigma_u, \sigma_v - \epsilon^2 F \sigma_u \rangle^{\frac{1}{2}} \\ &= (\langle \sigma_v, \sigma_v \rangle - \langle \sigma_v, \epsilon^2 F \sigma_u \rangle - \langle \epsilon^2 F \sigma_u, \sigma_v \rangle + \langle \epsilon^2 F \sigma_u, \epsilon^2 F \sigma_u \rangle)^{\frac{1}{2}} \\ &= (G - \epsilon^2 F^2 - \epsilon^2 F^2 + \epsilon^4 F^2 E)^{\frac{1}{2}} \\ &= (G - 2\epsilon^2 F^2 + \epsilon^4 F^2 E)^{\frac{1}{2}} \\ &= (G - 2E^{-1} F^2 + E^{-2} F^2 E)^{\frac{1}{2}} \\ &= (G - 2E^{-1} F^2 + E^{-1} F^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= (G - E^{-1} F^2)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(G - \frac{F^2}{E}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{(EG - F^2)^{\frac{1}{2}}}{E^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

$$\text{Logo } e'' = \frac{E^{\frac{1}{2}}}{(EG - F^2)^{\frac{1}{2}}} \sigma_v - \frac{FE^{-\frac{1}{2}}}{(EG - F^2)^{\frac{1}{2}}} \sigma_u.$$

Chamando  $\gamma = -\frac{FE^{-\frac{1}{2}}}{(EG - F^2)^{\frac{1}{2}}}$  e  $\delta = \frac{E^{\frac{1}{2}}}{(EG - F^2)^{\frac{1}{2}}}$ , temos

$$e'' = \gamma\sigma_u + \delta\sigma_v \quad (5.9)$$

Agora vamos calcular  $\alpha$  e  $\beta$ .

Inicialmente, observemos que de  $E = \langle \sigma_u, \sigma_u \rangle$  segue que  $E_u = 2 \langle \sigma_{uu}, \sigma_u \rangle$  e portanto  $\langle \sigma_{uu}, \sigma_u \rangle = \frac{E_u}{2}$

Também  $E_v = 2 \langle \sigma_{uv}, \sigma_u \rangle$  e portanto  $\langle \sigma_{uv}, \sigma_u \rangle = \frac{E_v}{2}$ .

De  $F = \langle \sigma_u, \sigma_v \rangle$  segue que:

$$\begin{aligned} F_u &= \langle \sigma_{uu}, \sigma_v \rangle + \langle \sigma_u, \sigma_{vu} \rangle \\ &= \langle \sigma_{uu}, \sigma_v \rangle + \langle \sigma_{uv}, \sigma_u \rangle \\ &= \langle \sigma_{uu}, \sigma_v \rangle + \frac{E_v}{2} \end{aligned}$$

Portanto  $\langle \sigma_{uu}, \sigma_v \rangle = F_u - \frac{E_v}{2}$ .

De  $G = \langle \sigma_v, \sigma_v \rangle$  segue que:

$$G_u = 2 \langle \sigma_{vu}, \sigma_v \rangle = 2 \langle \sigma_{uv}, \sigma_v \rangle$$

Portanto  $\langle \sigma_{uv}, \sigma_v \rangle = \frac{G_u}{2}$ .

Também observemos que de  $\langle e', e'' \rangle = 0$ , segue que

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \epsilon \sigma_u, \gamma \sigma_u + \delta \sigma_v \rangle \\ &= \epsilon \gamma E + \epsilon \delta F \\ &= \epsilon (\gamma E + \delta F) \end{aligned}$$

e como  $\epsilon \neq 0$ , temos que  $\gamma E + \delta F = 0$ .

Da equação (5.1) e observações acima, temos

$$\begin{aligned} \alpha &= \langle e'_u, e'' \rangle \\ &= \langle \epsilon_u \sigma_u + \epsilon \sigma_{uu}, \gamma \sigma_u + \delta \sigma_v \rangle \\ &= \epsilon_u \gamma E + \epsilon_u \delta F + \epsilon \gamma \langle \sigma_{uu}, \sigma_u \rangle + \epsilon \delta \langle \sigma_{uu}, \sigma_v \rangle \\ &= \epsilon_u (\gamma E + \delta F) + \epsilon \gamma \frac{E_u}{2} + \epsilon \delta \left( F_u - \frac{E_v}{2} \right) \\ &= \epsilon \gamma \frac{E_u}{2} + \epsilon \delta \left( F_u - \frac{E_v}{2} \right) \end{aligned} \quad (5.10)$$

(desde que  $\gamma E + \delta F = 0$ ), e portanto  $\alpha$  só depende de  $E$ ,  $F$  e  $G$ .

Finalmente,

$$\begin{aligned} \beta &= \langle e'_v, e'' \rangle \\ &= \langle \epsilon_v \sigma_u + \epsilon \sigma_{uv}, \gamma \sigma_u + \delta \sigma_v \rangle \\ &= \epsilon_v \gamma E + \epsilon_v \delta F + \epsilon \gamma \langle \sigma_{uv}, \sigma_u \rangle + \epsilon \delta \langle \sigma_{uv}, \sigma_v \rangle \\ &= \epsilon_v (\gamma E + \delta F) + \epsilon \gamma \frac{E_v}{2} + \epsilon \delta \frac{G_u}{2} \\ &= \epsilon \gamma \frac{E_v}{2} + \epsilon \delta \frac{G_u}{2} \end{aligned} \quad (5.11)$$

(desde que  $\gamma E + \delta F = 0$ ), e portanto  $\beta$  só depende de  $E$ ,  $F$  e  $G$ .

Isto completa a prova do Teorema de Gauss.  $\square$

**Corolário 5.1.** *A curvatura gaussiana é dada por*

$$K = \frac{\begin{vmatrix} -\frac{1}{2}E_{vv} + F_{uv} - \frac{1}{2}G_{uu} & \frac{1}{2}E_u & F_u - \frac{1}{2}E_v \\ F_v - \frac{1}{2}G_u & E & F \\ \frac{1}{2}G_v & F & G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}E_v & E & F \\ \frac{1}{2}G_u & F & G \end{vmatrix}}{(EG - F^2)^2}$$

*Demonstração.* Usando a equação (5.8) temos que  $K = \frac{(\alpha_v - \beta_u)}{(EG - F^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{(\alpha_v - \beta_u)(EG - F^2)^{\frac{3}{2}}}{(EG - F^2)^2}$ .

Assim, basta mostrar que

$$(\alpha_v - \beta_u)(EG - F^2)^{\frac{3}{2}} = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2}E_{vv} + F_{uv} - \frac{1}{2}G_{uu} & \frac{1}{2}E_u & F_u - \frac{1}{2}E_v \\ F_v - \frac{1}{2}G_u & E & F \\ \frac{1}{2}G_v & F & G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}E_v & E & F \\ \frac{1}{2}G_u & F & G \end{vmatrix}$$

Substituindo os valores de  $\gamma$ ,  $\delta$  e  $\epsilon$  nas fórmulas (5.10) e (5.11), respectivamente, e derivando  $\alpha$  em relação a  $v$  e  $\beta$  em relação a  $u$ , obtemos:



$$(EG-F^2)^{\frac{3}{2}}(\alpha_v-\beta_u) = (EG-F^2)^{\frac{3}{2}}\left[\frac{1}{2}(\epsilon\gamma)_v E_u - \frac{1}{2}(\epsilon\gamma)_u E_v + (\epsilon\delta)_v \left(F_u - \frac{1}{2}E_v\right) - \frac{1}{2}(\epsilon\delta)_u G_u + \epsilon\delta \left(F_{uv} - \frac{1}{2}E_{vv} - \frac{1}{2}G_{uu}\right)\right]$$

Mas

$$\epsilon\gamma = -\frac{FE^{-1}}{(EG-F^2)^{\frac{1}{2}}}$$

e

$$\epsilon\delta = (EG-F^2)^{-\frac{1}{2}}$$

Assim,

$$(\epsilon\gamma)_u = -(F_u E^{-1} + F(E^{-1})_u)(EG-F^2)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}(FE^{-1})(EG-F^2)^{-\frac{3}{2}}(E_u G + EG_u - 2FF_u).$$

De modo análogo,

$$(\epsilon\gamma)_v = -(F_v E^{-1} + F(E^{-1})_v)(EG-F^2)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}(FE^{-1})(EG-F^2)^{-\frac{3}{2}}(E_v G + EG_v - 2FF_v).$$

Também

$$(\epsilon\delta)_v = \frac{-1}{2}(EG-F^2)^{-\frac{3}{2}}(E_v G + EG_v - 2FF_v)$$

e de modo análogo

$$(\epsilon\delta)_u = \frac{-1}{2}(EG-F^2)^{-\frac{3}{2}}(E_u G + EG_u - 2FF_u).$$

Ainda, desde que  $E = \|\sigma_u\|^2 \neq 0$ , então  $E^{-1} = \frac{1}{E}$  e  $(E^{-1})_u = \frac{-E_u}{E^2}$ . De modo análogo  $(E^{-1})_v = \frac{-E_v}{E^2}$ .

Assim

$$E_u(E^{-1})_v = E_u \left(-\frac{E_v}{E^2}\right) = \left(-\frac{E_u}{E^2}\right) E_v = (E^{-1})_u E_v \quad (5.12)$$

Portanto

$$\begin{aligned} (EG-F^2)^{\frac{3}{2}}(\alpha_v-\beta_u) &= \frac{1}{4}(FE^{-1})(E_v G + EG_v - 2FF_v)E_u - \frac{1}{2}[F_v E^{-1} + F(E^{-1})_v](EG-F^2)E_u \\ &\quad - \frac{1}{4}(FE^{-1})(E_u G + EG_u - 2FF_u)E_v + \frac{1}{2}(EG-F^2)[F_u E^{-1} + F(E^{-1})_u]E_v \\ &\quad - \frac{1}{2}(E_v G + EG_v - 2FF_v)\left(F_u - \frac{1}{2}E_v\right) + \frac{1}{4}(E_u G + EG_u - 2FF_u)G_u \\ &\quad + (EG-F^2)\left(F_{uv} - \frac{1}{2}E_{vv} - \frac{1}{2}G_{uu}\right) \\ &= -\frac{1}{2}E_u F_v G - \frac{1}{2}E F G [E_u(E^{-1})_v - (E^{-1})_u E_v] + \frac{1}{2}F^3[E_u(E^{-1})_v - (E^{-1})_u E_v] \\ &\quad + \frac{1}{4}E_u F G_v - \frac{1}{4}E_v F G_u - \frac{1}{2}E F_u G_v + F F_u F_v + \frac{1}{4}E_v^2 G + \frac{1}{4}E E_v G_v - \frac{1}{2}E_v F F_v \\ &\quad + \frac{1}{4}E_u G G_u + \frac{1}{4}E G_u^2 - \frac{1}{2}F F_u G_u + (EG-F^2)\left(F_{uv} - \frac{1}{2}E_{vv} - \frac{1}{2}G_{uu}\right). \end{aligned}$$

Como, pela equação (5.12),  $E_u(E^{-1})_v = (E^{-1})_u E_v$  temos

$$\begin{aligned}
(EG-F^2)^{\frac{3}{2}}(\alpha_v-\beta_u) &= (F_{uv}-\frac{1}{2}E_{vv}-\frac{1}{2}G_{uu})(EG-F^2)+\frac{1}{2}E_u(\frac{1}{2}FG_v-F_vG+\frac{1}{2}GG_u) \\
&\quad +\frac{1}{2}E_v(\frac{1}{2}E_vG-\frac{1}{2}FG_u)+F_u(Fv-\frac{1}{2}FG_u-\frac{1}{2}EG_v)-\frac{1}{2}E_v(Fv-\frac{1}{2}EG_v)+\frac{1}{4}EG_u^2 \\
&= (F_{uv}-\frac{1}{2}E_{vv}-\frac{1}{2}G_{uu})(EG-F^2)+\frac{1}{2}E_u(\frac{1}{2}FG_v-F_vG+\frac{1}{2}GG_u) \\
&\quad +\frac{1}{2}E_v(\frac{1}{2}E_vG-\frac{1}{2}FG_u)+F_u(Fv-\frac{1}{2}FG_u-\frac{1}{2}EG_v)-\frac{1}{2}E_v(Fv-\frac{1}{2}EG_v) \\
&\quad +\frac{1}{4}EG_u^2+\frac{1}{4}E_vFG_u-\frac{1}{4}E_vFG_u \\
&= (F_{uv}-\frac{1}{2}E_{vv}-\frac{1}{2}G_{uu})(EG-F^2)+\frac{1}{2}E_u(\frac{1}{2}FG_v-GF_v+\frac{1}{2}GG_u) \\
&\quad + (F_u-\frac{1}{2}E_v)(Fv-\frac{1}{2}FG_u-\frac{1}{2}EG_v)+\frac{1}{2}E_v(\frac{1}{2}E_vG-\frac{1}{2}FG_u)-\frac{1}{2}G_u(\frac{1}{2}E_vF-\frac{1}{2}EG_u) \\
&= (F_{uv}-\frac{1}{2}E_{vv}-\frac{1}{2}G_{uu})(EG-F^2)+\frac{1}{2}E_u \begin{vmatrix} F & F_v - \frac{1}{2}G_u \\ G & \frac{1}{2}G_v \end{vmatrix} \\
&\quad (F_u-\frac{1}{2}E_v) \begin{vmatrix} F_v - \frac{1}{2}G_u & E \\ \frac{1}{2}G_v & F \end{vmatrix} + \frac{1}{2}E_v \begin{vmatrix} \frac{1}{2}E_v & F \\ \frac{1}{2}G_u & G \end{vmatrix} - \frac{1}{2}G_u \begin{vmatrix} \frac{1}{2}E_v & E \\ \frac{1}{2}G_u & F \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} -\frac{1}{2}E_{vv} + F_{uv} - \frac{1}{2}G_{uu} & \frac{1}{2}E_u & F_u - \frac{1}{2}E_v \\ F_v - \frac{1}{2}G_u & E & F \\ \frac{1}{2}G_v & F & G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}E_v & E & F \\ \frac{1}{2}G_u & F & G \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

□

**Corolário 5.2.**(i) Se  $F = 0$ , temos

$$K = \frac{-1}{2\sqrt{EG}} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{G_u}{\sqrt{EG}} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{E_v}{\sqrt{EG}} \right) \right\}$$

(ii) Se  $E = 1$  e  $F = 0$ , temos

$$K = \frac{-1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2}{\partial u^2} (\sqrt{G})$$

*Demonstração.*(i) Se  $F = 0$ , temos que

$$\delta = \frac{E^{\frac{1}{2}}}{(EG-F^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{E^{\frac{1}{2}}}{(EG)^{\frac{1}{2}}} = G^{-\frac{1}{2}}$$

$$\gamma = \frac{-FE^{-\frac{1}{2}}}{(EG-F^2)^{\frac{1}{2}}} = 0$$

$$\epsilon = E^{-\frac{1}{2}}$$

Substituindo nas equações (5.10) e (5.11), temos

$$\alpha = E^{-\frac{1}{2}}G^{-\frac{1}{2}} \left( -\frac{1}{2}E_v \right), \text{ ou equivalentemente, } \alpha = -\frac{1}{2}(EG)^{-\frac{1}{2}}E_v.$$

$$\text{Também } \beta = \frac{1}{2}E^{-\frac{1}{2}}G^{-\frac{1}{2}}G_u, \text{ ou equivalentemente, } \beta = \frac{1}{2}(EG)^{-\frac{1}{2}}G_u$$

Portanto

$$\begin{aligned}
K &= \frac{\alpha_v - \beta_u}{(EG)^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{\frac{1}{4}(EG)^{-\frac{3}{2}}(E_vG+EG_v)E_v - \frac{1}{2}(EG)^{-\frac{1}{2}}E_{vv}}{(EG)^{\frac{1}{2}}} + \frac{\frac{1}{4}(EG)^{-\frac{3}{2}}(E_uG+EG_u)G_u - \frac{1}{2}(EG)^{-\frac{1}{2}}G_{uu}}{(EG)^{\frac{1}{2}}}
\end{aligned}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} \frac{-1}{2(EG)^{\frac{1}{2}}} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{G_u}{(EG)^{\frac{1}{2}}} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{E_v}{(EG)^{\frac{1}{2}}} \right) \right\} &= \frac{-1}{2(EG)^{\frac{1}{2}}} \left\{ \frac{G_{uu}(EG)^{\frac{1}{2}} - G_u \frac{1}{2}(EG)^{-\frac{1}{2}}(E_u G + EG_u)}{EG} + \right. \\ &\quad \left. \frac{E_{vv}(EG)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}(EG)^{-\frac{1}{2}}(E_v G + EG_v)E_v}{EG} \right\} \\ &= K \end{aligned}$$

(ii) Se  $F = 0$  e  $E = 1$ , pelo item (i), temos:

$$K = \frac{-1}{2\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{G_u}{\sqrt{G}} \right).$$

Por outro lado;

$$\begin{aligned} \frac{-1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2}{\partial u^2} (\sqrt{G}) &= \frac{-1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\partial}{\partial u} \sqrt{G} \right) \\ &= \frac{-1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{1}{2} G^{-\frac{1}{2}} G_u \right) \\ &= \frac{-1}{2\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{G_u}{\sqrt{G}} \right) \\ &= K \end{aligned}$$

□

## 6 Teorema de Gauss-Bonnet

O Teorema de Gauss-Bonnet é o resultado mais belo e profundo na teoria das superfícies.

Sua versão mais importante relaciona a integral da curvatura gaussiana de uma superfície com uma propriedade da superfície chamada número de Euler, que é topológica, isto é, é alterada por qualquer deformação contínua da superfície. Tais deformações em geral, mudarão o valor da curvatura gaussiana. Mas o Teorema diz que a integral da curvatura gaussiana da superfície não muda.

A versão mais simples, e que será tratada neste capítulo, é a versão do Teorema de Gauss-Bonnet que envolve curvas simples fechadas sobre uma superfície. Intuitivamente, estas são curvas que começam e terminam num mesmo ponto, mas não tem auto-interseção. Para maiores detalhes veja [1].

### 6.1 Gauss-Bonnet para curvas Simples Fechadas

No caso especial, quando a superfície é um plano, existe um resultado padrão ( veja [[1],p.48] ), mas altamente não trivial, chamado de Teorema da curva de Jordan, que diz que qualquer curva simples fechada no plano tem um “interior” e um “exterior”: mais precisamente, o conjunto de pontos de  $\mathbb{R}^2$  que não estão sobre a curva  $\gamma$  é a união disjunta de dois subconjuntos de  $\mathbb{R}^2$ , denotados por  $int(\gamma)$  e  $ext(\gamma)$  com as propriedades abaixo:

(i)  $int(\gamma)$  é limitado, isto é, está contido dentro de um círculo de raio suficientemente grande;

(ii)  $ext(\gamma)$  não é limitado;

(iii) ambas as regiões  $int(\gamma)$  e  $ext(\gamma)$  são conexas, isto é, tem a propriedade que quaisquer dois pontos na mesma região podem ser ligados por uma curva contida inteiramente na região (mas qualquer curva unindo um ponto de  $int(\gamma)$  à um ponto de  $ext(\gamma)$  deve cruzar a curva  $\gamma$ ).

**Definição 6.1.** *Seja  $a \in \mathbb{R}$  uma constante positiva. Uma curva simples fechada em  $\mathbb{R}^2$ , com período  $a$ , é uma curva regular  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  tal que  $\gamma(t) = \gamma(t')$  se, e somente se,  $t' - t = ka$ , para algum inteiro  $k$ .*

**Definição 6.2.** Dizemos que uma curva simples fechada  $\gamma$  em  $\mathbb{R}^2$  está orientada positivamente se o vetor normal à curva  $\gamma$  aponta para  $\text{int}(\gamma)$  em todo ponto de  $\gamma$ .

**Definição 6.3.** Uma curva  $\gamma(t) = \sigma(u(t), v(t))$  sobre uma superfície parametrizada regular  $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  é chamada uma curva simples fechada com período  $a$ , se  $\pi(t) = (u(t), v(t))$  é uma curva simples fechada em  $\mathbb{R}^2$  com período  $a$ , tal que, a região  $\text{int}(\pi)$  de  $\mathbb{R}^2$ , determinada por  $\pi$ , está inteiramente contida em  $U$ .

A curva  $\gamma$  é dita estar orientada positivamente se  $\pi$  está orientada positivamente. Finalmente, a imagem de  $\text{int}(\pi)$  via  $\sigma$  é definida ser o interior  $\text{int}(\gamma)$  de  $\gamma$ .

Se  $\gamma(t) = \sigma(u(t), v(t))$  é uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco em uma superfície parametrizada regular  $\sigma$ , então  $\gamma'$  é um vetor unitário e é, por definição, um vetor tangente a  $\sigma$ . Portanto  $\gamma'$  é perpendicular ao vetor normal  $N$  de  $\sigma$ , e assim,  $\gamma'$ ,  $N$  e  $N \wedge \gamma'$  são vetores unitários, dois a dois ortogonais.

Desde que  $\gamma$  é parametrizada pelo comprimento de arco,  $\gamma''$  é ortogonal a  $\gamma'$ , e portanto  $\gamma''$  é uma combinação linear de  $N$  e  $N \wedge \gamma'$ , isto é,

$$\gamma'' = k_n N + k_g N \wedge \gamma' \quad (6.1)$$

Os escalares  $k_n$  e  $k_g$  são chamados a curvatura normal e a curvatura geodésica de  $\gamma$ , respectivamente.

Desde que  $N$  e  $N \wedge \gamma'$  são vetores unitários ortogonais, segue da equação 6.1 que

$$k_n = \langle \gamma'', N \rangle \quad (6.2)$$

$$k_g = \langle \gamma'', N \wedge \gamma' \rangle \quad (6.3)$$

$$\|\gamma''\|^2 = k_n^2 + k_g^2 \quad (6.4)$$

Portanto a curvatura  $k = \|\gamma''\|$  de  $\gamma$  é dada por  $k^2 = k_n^2 + k_g^2$ .

Além disso, se  $n$  é o vetor normal da curva  $\gamma$ , segue que  $\gamma'' = kn$ . Portanto

$$k_n = \langle kn, N \rangle = k \langle n, N \rangle = k \cos \psi \quad (6.5)$$

onde  $\psi$  é o ângulo entre  $n$  e  $N$ .

Então das equações (6.4) e (6.5) temos que  $k^2 = \|\gamma''\|^2 = k^2 \cos^2 \psi + k_g^2$  e portanto  $k_g^2 = k^2 \sin^2 \psi$ , ou equivalentemente,  $k_g = \pm k \sin \psi$ .

Agora podemos estabelecer o Teorema de Gauss-Bonnet para curvas simples fechadas.

**Teorema 6.1** (Teorema de Gauss-Bonnet). *Seja  $\gamma(s)$  uma curva simples fechada, parametrizada pelo comprimento de arco, de comprimento  $l(\gamma)$ , sobre uma superfície  $\sigma$*

e suponha que  $\gamma$  está orientada positivamente. Então

$$\int_0^{l(\gamma)} k_g ds = 2\pi - \int \int_{int(\gamma)} K dA_\sigma$$

onde  $k_g$  é a curvatura geodésica de  $\gamma$ ,  $K$  é a curvatura gaussiana de  $\sigma$  e  $dA_\sigma = \|\sigma_u \wedge \sigma_v\| du dv = (EG - F^2)^{\frac{1}{2}} du dv$  é o elemento de área de  $\sigma$ .

Para a prova deste teorema necessitaremos dos teoremas a seguir, os quais enunciaremos sem demonstrações. Para uma prova do Teorema de Green veja [[8],p.283] e para uma ‘prova’ do Teorema da Rotação veja [[1],p.250-251].

**Teorema 6.2** (Teorema de Green). *Para quaisquer funções  $f(x, y)$  e  $g(x, y)$  de classe  $C^\infty$  (isto é, funções contínuas com derivadas parciais contínuas de todas as ordens), temos que*

$$\int \int_{int(\gamma)} \left( \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy = \int_\gamma f(x, y) dx + g(x, y) dy$$

se  $\gamma$  é uma curva simples fechada orientada positivamente.

No Teorema de Green acima e se  $x = x(s)$  e  $y = y(s)$  então

$$\int_\gamma f(x, y) dx + g(x, y) dy = \int_0^{l(\gamma)} \{ f(x(s), y(s)) x'(s) + g(x(s), y(s)) y'(s) \} ds$$

onde  $l(\gamma)$  denota o comprimento da curva  $\gamma$ .

**Teorema 6.3** (Teorema da Rotação). *Seja  $\gamma(s)$  uma curva simples fechada, parametrizada pelo comprimento de arco, de comprimento  $l(\gamma)$  sobre uma superfície  $\sigma$  e suponha que  $\gamma$  está orientada positivamente. Seja  $\theta(s)$  um ângulo entre o vetor tangente unitário  $\gamma'$  de  $\gamma$  em  $\gamma(s)$  e o vetor unitário  $e' = \frac{\sigma_u}{\|\sigma_u\|}$  no mesmo ponto. Então*

$$\int_0^{l(\gamma)} \theta'(s) ds = 2\pi$$

Agora estamos prontos para provar a versão mais simples do Teorema de Gauss-Bonnet.

*Demonstração.* Como na prova do teorema 5.1 escolha uma base ortonormal  $\{e', e''\}$  do plano tangente de  $\sigma$  em cada ponto de modo que  $\{e', e'', N\}$  é uma base ortonormal positiva de  $\mathbb{R}^3$  (isto é, tem a mesma orientação da base canônica), onde  $N$  é o vetor normal unitário de  $\sigma$ .

Considere a seguinte integral

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{l(\gamma)} \langle e'(u(s), v(s)), \frac{d}{ds} e''(u(s), v(s)) \rangle ds \\ &= \int_0^{l(\gamma)} \langle e'(u(s), v(s)), e''_u(u(s), v(s)) u'(s) + e''_v(u(s), v(s)) v'(s) \rangle ds \\ &= \int_0^{l(\gamma)} \{ \langle e'(u(s), v(s)), e''_u(u(s), v(s)) \rangle u'(s) + \langle e'(u(s), v(s)), e''_v(u(s), v(s)) \rangle v'(s) \} ds \\ &= \int_\gamma \langle e'(u, v), e''_u(u, v) \rangle du + \langle e'(u, v), e''_v(u, v) \rangle dv \end{aligned}$$

Pelo Teorema de Green e o lema 5.1, segue que:

$$\begin{aligned}
I &= \int \int_{\text{int}(\gamma)} \left( \frac{\partial}{\partial u} \langle e'(u, v), e''_v(u, v) \rangle - \frac{\partial}{\partial v} \langle e'(u, v), e''_u(u, v) \rangle \right) dudv \\
&= \int \int_{\text{int}(\gamma)} (\langle e'_u(u, v), e''_v(u, v) \rangle + \langle e'(u, v), e''_{vu}(u, v) \rangle \\
&\quad - \langle e'_v(u, v), e''_u(u, v) \rangle - \langle e'(u, v), e''_{uv}(u, v) \rangle) dudv \\
&= \int \int_{\text{int}(\gamma)} (\langle e'_u(u, v), e''_v(u, v) \rangle - \langle e'_v(u, v), e''_u(u, v) \rangle) dudv \quad (6.6) \\
&= \int \int_{\text{int}(\gamma)} \frac{eg-f^2}{(EG-F^2)^{\frac{1}{2}}} \\
&= \int \int_{\text{int}(\gamma)} \frac{eg-f^2}{EG-F^2} (EG-F^2)^{\frac{1}{2}} dudv \\
&= \int \int_{\text{int}(\gamma)} K dA_\sigma
\end{aligned}$$

Agora seja  $\theta(s)$  o ângulo entre o vetor tangente unitário  $\gamma'$  de  $\gamma$  em  $\gamma(s)$  e o vetor unitário  $e'$  no mesmo ponto. Como  $\{e', e''\}$  é uma base do plano tangente de  $\sigma$  em  $\gamma(s)$  e  $\|\gamma'(s)\| = 1$ , então

$$\gamma'(s) = \cos \theta(s) e'(u(s), v(s)) + \text{sen} \theta(s) e''(u(s), v(s)) \quad (6.7)$$

Então

$$\begin{aligned}
N(u(s), v(s)) \wedge \gamma'(s) &= \cos \theta(s) N(u(s), v(s)) \wedge e'(u(s), v(s)) \\
&\quad + \text{sen} \theta(s) N(u(s), v(s)) \wedge e''(u(s), v(s)) \quad (6.8) \\
&= \cos \theta(s) e''(u(s), v(s)) - \text{sen} \theta(s) e'(u(s), v(s))
\end{aligned}$$

Agora da equação (6.7) temos que:

$$\begin{aligned}
\gamma''(s) &= -\theta'(s) \text{sen} \theta(s) e'(u(s), v(s)) + \cos \theta(s) \frac{d}{ds} e'(u(s), v(s)) + \theta'(s) \cos \theta(s) e''(u(s), v(s)) + \text{sen} \theta(s) \frac{d}{ds} e''(u(s), v(s)) \\
&= \cos \theta(s) \frac{d}{ds} e'(u(s), v(s)) + \text{sen} \theta(s) \frac{d}{ds} e''(u(s), v(s)) + \theta'(s) \{ -\text{sen} \theta(s) e'(u(s), v(s)) + \cos \theta(s) e''(u(s), v(s)) \} \quad (6.9)
\end{aligned}$$

Assim por (6.8), (6.9) e (6.3) a curvatura geodésica de  $\gamma$  é

$$\begin{aligned}
k_g &= \langle N(u(s), v(s)) \wedge \gamma'(s), \gamma''(s) \rangle \\
&= \langle \theta'(s) (-\text{sen} \theta(s) e'(u(s), v(s)) + \cos \theta(s) e''(u(s), v(s))), -\text{sen} \theta(s) e'(u(s), v(s)) + \cos \theta(s) e''(u(s), v(s)) \rangle \\
&\quad + \langle -\text{sen} \theta(s) e'(u(s), v(s)) + \cos \theta(s) e''(u(s), v(s)), \cos \theta(s) \frac{d}{ds} e'(u(s), v(s)) + \text{sen} \theta(s) \frac{d}{ds} e''(u(s), v(s)) \rangle \\
&= \theta'(s) (\text{sen}^2 \theta(s) + \cos^2 \theta(s)) + \cos^2 \theta(s) \langle e''(u(s), v(s)), \frac{d}{ds} e'(u(s), v(s)) \rangle - \text{sen}^2 \theta(s) \langle e'(u(s), v(s)), \frac{d}{ds} e''(u(s), v(s)) \rangle \\
&\quad + \text{sen} \theta(s) \cos \theta(s) \{ \langle e''(u(s), v(s)), \frac{d}{ds} e''(u(s), v(s)) \rangle - \langle e'(u(s), v(s)), \frac{d}{ds} e'(u(s), v(s)) \rangle \}
\end{aligned}$$

Desde que  $e'(u(s), v(s))$  e  $e''(u(s), v(s))$  são vetores unitários ortogonais, derivando-se  $\langle e'(u(s), v(s)), e'(u(s), v(s)) \rangle = 1 = \langle e''(u(s), v(s)), e''(u(s), v(s)) \rangle$  obtemos

$$\langle e'(u(s), v(s)), \frac{d}{ds} e'(u(s), v(s)) \rangle = 0 = \langle e''(u(s), v(s)), \frac{d}{ds} e''(u(s), v(s)) \rangle .$$

Por outro lado, derivando-se  $\langle e'(u(s), v(s)), e''(u(s), v(s)) \rangle = 0$  obtemos

$$\left\langle \frac{d}{ds} e'(u(s), v(s)), e''(u(s), v(s)) \right\rangle = - \left\langle e'(u(s), v(s)), \frac{d}{ds} e''(u(s), v(s)) \right\rangle .$$

Portanto  $k_g = \theta'(s) - \left\langle e'(u(s), v(s)), \frac{d}{ds} e''(u(s), v(s)) \right\rangle$  e pela definição de  $I$ , temos

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{l(\gamma)} \left\langle e'(u(s), v(s)), \frac{d}{ds} e''(u(s), v(s)) \right\rangle ds \\ &= \int_0^{l(\gamma)} (\theta'(s) - k_g) ds \end{aligned}$$

Assim,

$$\int_0^{l(\gamma)} (\theta'(s) - k_g) ds = \int \int_{int(\gamma)} K dA\sigma.$$

Portanto

$$\int_0^{l(\gamma)} k_g ds = \int_0^{l(\gamma)} \theta'(s) ds - \int \int_{int(\gamma)} K dA\sigma.$$

Como, pelo Teorema da Rotação  $\int_0^{l(\gamma)} \theta'(s) ds = 2\pi$ , segue o resultado.  $\square$

**Definição 6.4.** *Seja  $\sigma : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  uma superfície parametrizada regular. Uma curva regular  $\gamma(t) = \sigma(u(t), v(t))$  é uma geodésica da superfície  $\sigma$  se, para todo  $t \in I$ ,  $\gamma''(t)$  é um vetor normal a  $\sigma$  em  $(u(t), v(t))$*

Agora, como uma aplicação do Teorema de Gauss-Bonnet para curvas simples fechadas obtemos o

**Corolário 6.1.** *Seja  $S$  uma superfície orientável com curvatura gaussiana  $K \leq 0$ . Então duas geodésicas  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  que partem de um mesmo ponto  $p \in S$  não podem se encontrar novamente em um ponto  $q \in S$  de tal forma que os traços de  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  constituam uma curva simples fechada da superfície  $S$ .*

*Demonstração.* Suponha o contrário, isto é, que os traços de  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  constituam uma curva simples fechada  $\gamma$  a qual suporemos parametrizada pelo comprimento de arco e orientada positivamente.

Então pelo Teorema de Gauss-Bonnet para curvas simples fechadas

$$\int \int_{int(\gamma)} K dA\sigma = 2\pi - \int_0^{l(\gamma)} k_g ds,$$

onde  $l(\gamma)$  denota o comprimento de  $\gamma$ .

Desde que  $\gamma$  é uma geodésica da superfície  $S$ , pois  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  o são, então  $\gamma''(s)$  é paralelo ao vetor normal  $N$  da superfície  $S$ .

Assim, a curvatura geodésica



$$\begin{aligned}k_g &= \langle \gamma'', N \wedge \gamma' \rangle \\ &= \langle \alpha N, N \wedge \gamma' \rangle \\ &= \alpha \langle N, N \wedge \gamma' \rangle \\ &= 0\end{aligned}$$

e portanto  $\int \int_{int(\gamma)} K dA\sigma = 2\pi > 0$ , o que é uma contradição, pois a curvatura gaussiana  $K \leq 0$

□

## 7 Conclusão

Neste trabalho, atendendo ao nosso principal objetivo, elaboramos um texto para alunos de graduação na área de Ciências Exatas e da Terra, concernente ao estudo de alguns tópicos da Geometria Diferencial, que evidenciam uma relação entre as áreas de Geometria, Álgebra e Análise.

As reflexões deste texto podem levar os leitores a descobrirem algumas riquezas da Geometria Diferencial, bem como de Carl Friedrich Gauss (1777-1855), que de um menino prodígio, demonstrou um dos maiores Teoremas da Geometria Diferencial que chamou de egregium, palavra esta que em latim significa extraordinária e que ficou ligada a esse Teorema desde então.

Para um maior aprofundamento desse trabalho, sugerimos que o leitor no capítulo 5 desenvolva mais aplicações do Teorema Egregium de Gauss bem como, no capítulo 6, explore o Teorema de Gauss-Bonnet para Polígonos Curvilíneos e para Superfícies Compactas, os quais podem ser encontrados em [1].

# Referências

- [1] PRESSLEY, A. *Elementary Differential Geometry*. 1. ed. London: Springer-Verlag, 2001.
- [2] CARMO, M. P. do. *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*. 1. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2005.
- [3] CARMO, M. P. do. *Elementos de Geometria Diferencial*. 1. ed. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico S. A. e Editora Universidade de Brasília, 1971.
- [4] ARAÚJO, P. V. *Geometria Diferencial*. 1. ed. Rio de Janeiro: Coleção Matemática Universitária, 1998.
- [5] HOFFMAN, K.; KUNZE, R. *Álgebra Linear*. 2. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1979.
- [6] TENENBLAT, K. *Introdução à Geometria Diferencial*. 2. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2008.
- [7] MUNKRES, J. R. *Topology A First Course*. 1. ed. New Jersey: Prentice Hall, Inc., 1975.
- [8] RUDIN, W. *Principles of Mathematical Analysis*. 3. ed. New York: McGraw-Hill, Inc., 1976.