Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Campus de Rio Claro

Introdução à Teoria de Homotopia

Judith de Paula Araújo

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática Universitária do Departamento de Matemática como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre

Orientador
Prof. Dr. João Peres Vieira

2011

514.2 Araújo, Judith de Paula
A663i Introdução à Teoria de Homotopia/ Judith de Paula Araújo- Rio Claro: [s.n.], 2011.
91 f.:fig.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas.
Orientador: João Peres Vieira

1. Espaços Topológicos. 2. Os grupos $H_0(X)$, $H^0(X)$, $H^1(X)$ e o conjunto $\pi_0(X)$. 3. Homotopia. 4. Um estudo do Círculo. 5. O Teorema de Mayer-Vietoris. I. Título

Ficha Catalográfica elaborada pela STATI - Biblioteca da UNESP
Campus de Rio Claro/SP

TERMO DE APROVAÇÃO

Judith de Paula Araújo
INTRODUÇÃO À TEORIA DE HOMOTOPIA

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática Universitária do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dr. João Peres Vieira
Orientador

Prof. Dr. Daniel Vendrúscolo
Departamento de Matemática - Universidade Federal de São Carlos

Prof. Dr. Thiago de Melo
Departamento de Matemática - Unesp - Rio Claro - SP

Rio Claro, 17 de junho de 2011

A Deus e à Nossa Senhora.
À minha família.
Aos meus professores.
Aos meus amigos.
Dedico

Agradecimentos

A Deus e à Nossa Senhora, por sempre terem olhado por mim, me protegendo e me permitindo chegar até aqui.

Agradeço imensamente à minha mãe Vania pelo amor, carinho, dedicação e principalmente por acreditar em mim, me acompanhando todas as sextas-feiras, deixando seu trabalho para que eu pudesse fazer o meu.

Gostaria de agradecer em especial meu orientador, o professor João Peres, pela paciência e dedicação com que me orientou. Aprendi e amadureci muito graças a este professor brilhante e dedicado.

A todos os professores do DM da UFSCar, em especial o professor Sadao que me ensinou a usar o Latex, e ao professor Daniel que me orientou no TCC, e sem dúvida contribuiu muito para a minha formação.

À professora Alice, por ter ministrado as aulas de Tópicos de Topologia, sem as quais eu não teria base para escrever este trabalho.

A todos os professores e funcionários do IGCE que, direta ou indiretamente, contribuíram para a elaboração deste trabalho.

O único lugar onde o sucesso vem antes do trabalho é no dicionário.

Albert Einstein

Resumo

O principal objetivo deste trabalho é demonstrar teoremas relevantes como o Teorema Fundamental da Álgebra e o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer no plano, além dos problemas de extensão e levantamento e o Teorema de Mayer-Vietoris. Para isto, primeiramente associamos a cada espaço topológico X uma estrutura de grupo ou de conjunto $G(X)$, e a cada função contínua $f : X \to Y$ um homomorfismo de estruturas $f_* : G(X) \to G(Y)$ ou $f^* : G(Y) \to G(X)$ satisfazendo determinadas propriedades.

Palavras-chave: Espaços Topológicos, Os grupos $H_0(X)$, $H^0(X)$, $H^1(X)$ e o conjunto $\pi_0(X)$, Homotopia, Um estudo do Círculo, O Teorema de Mayer-Vietoris.

Abstract

The main objective is to prove relevant theorems as the Fundamental Theorem of Algebra and Brouwer's Fixed Point Theorem in the plane, besides the problems of extension and lifting theorem and the Mayer-Vietoris Theorem. For this, first we associate to each topological space X a group structure or set $G(X)$, and every continuous function $f : X \to Y$ a homomorphism $f_* : G(X) \to G(Y)$ or $f^* : G(Y) \to G(X)$ satisfying certain properties.

Keywords: Topological Spaces , The groups $H_0(X)$, $H^0(X)$, $H^1(X)$ and the set $\pi_0(X)$, Homotopy, A study of a Circle, The Mayer-Vietoris Theorem.

Lista de Figuras

Sumário

1 Introdução

Este trabalho destina-se a alunos de graduação, exigindo do leitor noções de espaços métricos e topológicos. Com este propósito, tentou-se ao máximo construir um texto didático concernente ao estudo da Teoria de Homotopia apresentando teoremas relevantes de outras áreas da Matemática de uma forma elegante e rápida como o Teorema Fundamental da Álgebra e o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, além dos problemas de levantamento e extensão e o Teorema de Mayer-Vietoris.

Topologia é uma abstração de certas ideias geométricas tais como continuidade e limite. De fato, a palavra topologia é derivada do grego, e "topo" quer dizer um lugar, e "logia" um estudo. Foi introduzida em 1847 por Listing, um aluno de Gauss, no título do primeiro livro devotado a ele. Outro nome utilizado antigamente para topologia era análise posicional (analysis situs).

Essencialmente, dois segmentos da topologia podem ser bem distinguidos. Topologia conjuntística, ou topologia geral, é uma teoria geral abstrata de espaços topológicos e de funções contínuas, muito influenciada pela teoria geral de conjuntos, desenvolvida por Cantor por volta de 1880, tendo recebido grandes contribuições da teoria de espaços métricos (espaços abstratos com uma "distância" definida entre pontos) introduzida por Frencht em 1906, e da publicação do livro Grundzüge der Mengenlehre de Hausdorff em 1912. Em seguida Hausdorff estendeu os conceitos de limite e continuidade dos conjuntos de números reais para conjuntos abstratos por meio da ideia de vizinhança de um ponto.

Paralelamente a esta linha de desenvolvimento, e de fato predominando por mais de uma década, Poincaré introduziu durante os anos de 1895-1901 o estudo sistemático de Topologia Algébrica, ou análise posicional. Este foi motivado por certos problemas sobre modelos e superfícies no espaço Euclidiano.

A Topologia Algébrica parte da sub-área Topologia/Geometria, estuda a categoria dos espaços topológicos e das funções contínuas entre estes espaços, através de estruturas algébricas associadas, como grupos e anéis e seus respectivos homomorfismos. Ou seja, procura-se abordar problemas da Topologia através da Álgebra. Exemplos importantes destes mecanismos são: o grupo fundamental de um espaço topológico ou mais geralmente os seus grupos de homotopia.

Este trabalho está organizado da seguinte forma:

Inicialmente, no capítulo 2, introduziremos definições e teoremas necessários para o entendimento dos capítulos posteriores.

O capítulo 3, trata de grupos abelianos, que na maioria das vezes será livre, e veremos a seguir, que a maioria dos problemas topológicos podem ser resolvidos através desta teoria.

No capítulo 4, apresentaremos o grupo $H^0(X)$, o conjunto $\pi_0(X)$ e o grupo $H_0(X)$, de modo a desenvolver algebricamente ideias básicas de conexos e conexos por caminhos.

No capítulo 5, apresentaremos as definições de homotopia, de equivalência de homotopia e dos grupos $H^1(X)$.

No capítulo 6, trataremos inicialmente da função exponencial de $\mathbb{R}$ em S^1, afim de definir o grau de funções contínuas de S^1 em S^1. Feito isto, demonstraremos o Teorema Fundamental da Álgebra e o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer usando grau.

No capítulo 7, abordaremos os problemas de levantamento, e será demonstrado o Teorema de Monodromia. Também trataremos dos problemas de extensão, e demonstraremos o Teorema de extensão de Tietze, além de outros importantes resultados.

Por fim, no capítulo 8, faremos a demonstração do Teorema de Mayer-Vietoris, demonstração esta que abrange toda a teoria desenvolvida nos capítulos anteriores. Encerraremos, ainda, com exemplos de cálculos dos grupos $H^1(X)$, utilizando sequências exatas, assunto apresentado no capítulo 3.

2 Preliminares

Para maiores detalhes desta seção, veja a referência [4].

Neste primeiro capítulo, apresentaremos brevemente, algumas definições, teoremas e proposições de modo a facilitar o entendimento dos capítulos posteriores. Trataremos de espaços topológicos, vizinhanças, conjuntos abertos e fechados, continuidade e homeomorfismo, conjuntos compactos e, por fim, de conjuntos conexos e desconexos.

2.1 Espaços Topológicos

Definição 2.1. *Seja $X \neq \emptyset$ um conjunto. Uma Topologia em X é uma coleção τ de subconjuntos de X satisfazendo:*

(i) $\emptyset \in \tau$, $X \in \tau$;

(ii) Se $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \tau$, *então* $A_1 \cap \cdots \cap A_n \in \tau$;

(iii) Se $\{A_\lambda\}_{\lambda \in L}$ *é uma família de elementos de* τ, *então* $\cup_\lambda A_\lambda \in \tau$.

Os elementos de τ são chamados abertos de X e (X, τ) é um espaço topológico.

Definição 2.2. *Seja (M, d) um espaço métrico. A bola aberta de centro a e raio r em M é dada por $U(a, r) := \{x \in M : d(x, a) < r\}$. O disco de centro a e raio r em M é dado por $D(a, r) := \{x \in M : d(x, a) \leq r\}$.*

Exemplo 2.1. Se (M, d) é um espaço métrico, então a coleção de bolas abertas em M define uma topologia em M.

Definição 2.3. *Seja Y um subconjunto do espaço topológico (X, τ). Então $\tau_Y := \{A \cap Y, A \in \tau\}$ define uma topologia para Y, chamada topologia induzida de X. Neste caso dizemos que (Y, τ_Y) é um subespaço topológico de (X, τ).*

2.2 Vizinhanças, Conjuntos Abertos e Fechados

Definição 2.4. *Um subconjunto W de X é aberto de X se para cada $x \in W$ existe $A \in \tau$ tal que $x \in A \subset W$.*

Exemplo 2.2. Seja (X, d) um espaço métrico. Um subconjunto W de X é aberto se para cada $x \in W$ existe $\epsilon > 0$ tal que $U(x, \epsilon) \subset W$

Definição 2.5. *Dizemos que U é uma vizinhança de $x \in X$ se existir um aberto W de X tal que $x \in W \subset U$.*

Proposição 2.1. *Seja Y um subespaço topológico de X. Se um subconjunto A de X é aberto de Y e Y é um subconjunto aberto de X então A é aberto de X.*

Definição 2.6. *Seja X um espaço topológico. Um subconjunto F de X é um conjunto fechado de X se $X - F$ é um conjunto aberto de X.*

Teorema 2.1. *Seja X um espaço topológico. Então:*

i) $\emptyset$ e X são fechados de X;

ii) Se $\{F_\lambda\}_\lambda$ é uma família de fechados de X, então $\cap_\lambda F_\lambda$ é um fechado de X;

iii) Se $F_1, \ldots, F_n$ são fechados de X então $F_1 \cup \cdots \cup F_n$ é um fechado de X.

Teorema 2.2. *Seja Y um subespaço de X. Um conjunto A é fechado em Y se e somente se, $A = F \cap Y$, onde F é um fechado de X.*

Teorema 2.3. *Se Y é um subconjunto fechado de X e A é fechado de Y então A é fechado de X.*

Definição 2.7. *Seja Y um subconjunto de um espaço topológico X. Um ponto $x \in Y$ é um ponto interior de Y se existir um aberto U de X contendo x e contido em Y, isto é, $x \in U \subset Y$.*

Denotaremos o conjunto dos pontos interiores de Y por $\text{int}(Y)$. Observe que $\text{int}(Y)$ é um subconjunto aberto de X.

Definição 2.8. *Se Y é um subconjunto do espaço topológico X, um ponto $x \in X$ é um ponto aderente a Y se para todo aberto U de X contendo x tivermos $U \cap Y \neq \emptyset$. Se, para todo aberto U de X contendo x, $U \cap Y$ contém algum elemento diferente de x então dizemos que x é um ponto de acumulação de Y.*

Definição 2.9. *Um espaço topológico Y é chamado de Hausdorff se para todos $x, y \in Y$, com $x \neq y$, existem vizinhanças U_x e V_y, respectivamente de x e y, tais que $U_x \cap V_y = \emptyset$.*

2.3 Continuidade e Homeomorfismo

Definição 2.10. *Sejam (X, d) e (Y, d') espaços métricos. Diz-se que a aplicação $f : X \to Y$ é contínua no ponto $x \in X$ quando, dada qualquer bola aberta $U(f(x), \epsilon)$ em Y, pode-se encontrar uma bola aberta $U(x, \delta)$ em X, tal que $f(U(x, \delta)) \subset U(f(x), \epsilon)$. Diz-se que $f : X \to Y$ é contínua quando ela é contínua em todos os pontos $x \in X$.*

Definição 2.11. *Seja $f : X \to Y$ uma aplicação entre espaços topológicos. Dizemos que f é contínua se para todo aberto U de Y, a imagem inversa $f^{\vdash}(U)$ for um aberto de X. Se além disso, f for bijetora e a função inversa $f^{-1} : Y \to X$ for contínua, então dizemos que f é um homeomorfismo e os espaços X e Y são homeomorfos.*

Observação 2.1. Note que $f^{\vdash}$ denota imagem inversa por f e f^{-1} denota função inversa de f.

Exemplo 2.3. Sejam (X, d) e (Y, d') espaços métricos. A fim de que uma aplicação $f : X \to Y$ seja contínua, é necessário e suficiente que a imagem inversa $f^{\vdash}(U)$ de todo subconjunto aberto $U \subset Y$ seja um subconjunto aberto de X.

De fato, para cada $x \in f^{\vdash}(U)$, temos $f(x) \in U$. Pela definição de conjunto aberto, existe $\epsilon > 0$ tal que $U(f(x), \epsilon) \subset U$. Sendo f contínua no ponto x, pode-se encontrar uma bola aberta $U(x, \delta)$ em X, tal que $f(U(x, \delta)) \subset U(f(x), \epsilon)$. Isto quer dizer que $U(x, \delta) \subset f^{\vdash}(U(f(x), \epsilon))$. Logo $f^{\vdash}(U(f(x), \epsilon))$ é aberta.

Reciprocamente, seja $x \in X$ qualquer. Mostraremos que f é contínua no ponto x. Com efeito, como $U(f(x), \epsilon)$ é aberto em Y devemos ter por hipótese que $f^{\vdash}(U(f(x), \epsilon))$ é aberto de X, contendo x. Assim existe $\delta > 0$ tal que $U(x, \delta) \subset f^{\vdash}(U(f(x), \epsilon))$, ou seja, $f(U(x, \delta)) \subset U(f(x), \epsilon)$.

Proposição 2.2. *$f : X \to Y$ é contínua se, e somente se, para todo fechado F de Y, a imagem inversa $f^{\vdash}(F)$ é fechada em X .*

Proposição 2.3. *$f : X \to Y$ é contínua em $x \in X$ se, e somente se, para toda vizinhança N em Y de $f(x)$, a imagem inversa $f^{\vdash}(N)$ é uma vizinhança em X de x.*

Definição 2.12. *Seja $f : X \to Y$ uma função entre espaços topológicos. Dizemos que f é uma aplicação aberta (fechada) se para todo aberto (fechado) U de X tivermos $f(U)$ aberto (fechado) de Y.*

Teorema 2.4. *Seja $f : X \to Y$ uma aplicação contínua e bijetora. Então f é um homeomorfismo se, e somente se, f é uma aplicação aberta (fechada).*

Lema 2.1 (Lema da Colagem). *Se $X = A \cup B$, onde A e B são simultaneamente abertos (fechados) e $f : A \to Y$ e $g : B \to Y$ são contínuas e tais que $f|_{A \cap B} = g|_{A \cap B}$, então $h : X \to Y$ dada por*

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \in A \\ g(x), & \text{se } x \in B \end{cases}$$

é contínua.

Demonstração. Seja C um fechado qualquer de Y. Então $h^{\vdash}(C) = f^{\vdash}(C) \cup g^{\vdash}(C)$. Como$f$ e g são contínuas, segue que $f^{\vdash}(C)$ e $g^{\vdash}(C)$ são fechados em A e B respectivamente. Sendo A e B fechados de X por hipótese, segue pelo teorema 2.3 que $f^{\vdash}(C)$ e $g^{\vdash}(C)$ são fechados de X. Portanto, pela proposição 2.2, h é contínua. □

2.4 Conjuntos Compactos

Definição 2.13. *Seja X um conjunto. Uma cobertura qualquer de X é uma família $\{U_\alpha\}_{\alpha\in L}$ tal que $X = \bigcup U_\alpha$, onde L denota o conjunto de índices.*

Observação 2.2. Se $\{U_\alpha\}_{\alpha\in L}$ for uma família de abertos (fechados) de X dizemos que a cobertura é aberta (fechada).

Definição 2.14. *Seja X um espaço topológico. Dizemos que X é compacto se para toda cobertura aberta de X, existir uma subcobertura finita, isto é, X é compacto se e somente se, $X = \bigcup U_\alpha$, U_α aberto de X implica $X = U_{\alpha_1} \cup U_{\alpha_2} \cup \cdots \cup U_{\alpha_n}$, $\alpha_i \in L$.*

Proposição 2.4. *Se X é compacto e S é fechado de X, então S é compacto.*

Demonstração. Seja $X \subset \bigcup U_\alpha$, U_α abertos de X. Como S é fechado em X, então $X - S$ é aberto de X. Logo, $X = \bigcup U_\alpha \cup (X - S)$. Como X é compacto por hipótese, segue que $X = U_{\alpha_1} \cup U_{\alpha_2} \cup \cdots \cup U_{\alpha_n} \cup (X - S)$. Assim, $S \subset U_{\alpha_1} \cup U_{\alpha_2} \cup \cdots \cup U_{\alpha_n}$ e portanto S é compacto. □

Proposição 2.5. *Seja X um espaço topológico de Hausdorff. Então todo subconjunto compacto K de X é fechado.*

Demonstração. Seja $x \in X - K$. Para cada $y \in K$, tem-se $x \neq y$ e sendo X de Hausdorff, existem abertos U_y e V_x com $y \in U_y$ e $x \in V_x$ e $V_x \cap U_y = \emptyset$. Tem-se também que $K \subset \bigcup_{y\in K} U_y$ e como K por hipótese é compacto, $K \subset U_{y_1} \cup U_{y_2} \cup \cdots \cup U_{y_n}$. Tomando-se os correspondentes $V_{x_1}, V_{x_2}, \ldots, V_{x_n}$ e considerando-se $V = V_{x_1} \cup V_{x_2} \cup \cdots \cup V_{x_n}$ temos que V é um aberto de X e $V \cap K = \emptyset$, ou seja, $x \in V \subset X - K$. Logo, $X - K$ é aberto de X e portanto, K é fechado de X. □

Teorema 2.5. *Um espaço $X \subset \mathbb{R}^n$ é compacto, se e somente se, for fechado e limitado.*

Demonstração. Primeiro suponha que X é compacto, e portanto X é fechado em $\mathbb{R}^n$. Sejam os subconjuntos abertos $X \cap U(0, m)$, para $m > 0$, tais que

$$\bigcup_{m>0} (X \cap U(0, m)) = X.$$

Então conseguimos uma coleção finita com união igual a X, digamos correspondentes a $m_1, m_2, \ldots, m_k$. Mas se $N = \max(m_1, m_2, \ldots, m_k)$, segue que $X \subset U(0, N)$, que é limitado. Portanto X é limitado.

Agora suponha que X é fechado e limitado, com $X \subset U(0, N)$. Então X está contido no cubo C dado por $|x_i| \leq N$ para cada i. Além disso, X é um subconjunto fechado de C. Se mostrarmos que C é compacto, então pela proposição 2.4 teremos X também compacto. Isto é o que provaremos no próximo lema. □

Lema 2.2 (Teorema de Heine-Borel). *Um cubo C em $\mathbb{R}^n$ é compacto.*

Demonstração. Iremos supor que $\bigcup U_\alpha = C$, com U_α aberto em C, não admite subcobertura finita com união C, obtendo uma contradição.

Dividimos C em 2^n cubos idênticos por hiperplanos paralelos às suas faces. Alguns destes pequenos cubos C' poderão ter a propriedade que nos permita encontrar um conjunto finito $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ com $C' \subset U_{\alpha_1} \cup \cdots \cup U_{\alpha_k}$. Entretanto, isto não pode ocorrer com todo C', mas a união de todos estes conjuntos finitos U_{α_i} deve ser C. Assim nós podemos escolher um C' que não possua tal propriedade, chamando-o C_1.

Agora dividiremos C_1 em 2^n pequenos cubos, e repetiremos o procedimento anterior. Obteremos por indução uma sequência de cubos

$$C \supset C_1 \supset C_2 \supset \cdots \supset C_r \supset C_{r+1} \supset \cdots$$

de modo que, para cada r, o comprimento de uma aresta de C_r é 2^{-r} vezes uma aresta de C, e não há conjunto finito $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ com $C_r \subset U_{\alpha_1} \cup \cdots \cup U_{\alpha_k}$. Observemos que estes cubos interceptam-se em um único ponto. Se α_n, β_n são o menor e o maior valor, respectivamente, da primeira coordenada do cubo C_n então a sequência α_n é crescente e limitada, e portanto tende para um limite; como $\beta_{n+1} - \alpha_{n+1} = \dfrac{1}{2}(\beta_n - \alpha_n)$, a sequência β_n tende para o mesmo limite, digamos ξ_1. Analogamente, existem ξ_i únicos para as outras coordenadas, de modo que $P = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ pertence a todos os cubos C_r.

Entretanto o ponto P pertence a algum conjunto aberto U_α. Como U_α é aberto, existe $\varepsilon > 0$, tal que $d(P, Q) < \varepsilon \Rightarrow Q \in U_\alpha$. Agora se C possui diâmetro δ, C_n terá diâmetro $2^{-n}\delta$. Mas, para n suficientemente grande $2^{-n}\delta < \varepsilon$, e portanto para todo $Q \in C_n$,

$$d(P, Q) \leq 2^{-n}\delta < \varepsilon$$

de modo que $Q \in U_\alpha$; e portanto $C_n \subset U_\alpha$. Isto contradiz a forma como C_n foi construído. Assim, concluímos que C possui uma subcobertura finita e portanto é compacto. □

Com isto terminamos a demonstração do teorema 2.5.

Teorema 2.6. *Seja $f : X \to Y$ uma função contínua e sobrejetora. Se X é compacto então Y é compacto.*

Demonstração. Seja $Y = \bigcup_{\alpha \in L} V_\alpha$, V_α abertos de Y. Como f é contínua, $f^{\vdash}(V_\alpha)$ é aberto de X, $\forall\ \alpha \in L$ e $X = \bigcup_{\alpha \in L} f^{\vdash}(V_\alpha)$. Sendo X compacto, segue que $X = f^{\vdash}(V_{\alpha_1}) \cup f^{\vdash}(V_{\alpha_2}) \cup \cdots \cup f^{\vdash}(V_{\alpha_n})$, onde $\alpha_i \in L$. Como f é sobrejetora segue que $Y = f(X) = f(f^{\vdash}(V_{\alpha_1})) \cup f(f^{\vdash}(V_{\alpha_2})) \cup \cdots \cup f(f^{\vdash}(V_{\alpha_n})) \subset V_{\alpha_1} \cup V_{\alpha_2} \cup \cdots \cup V_{\alpha_n}$ e portanto Y é compacto. □

Corolário 2.1. *Se X é compacto e $f : X \to Y$ é uma função contínua e sobrejetora, então f é um homeomorfismo.*

Corolário 2.2. *Se $f : X \to Y$ é contínua, X é compacto e Y é de Hausdorff, então f é uma aplicação fechada.*

Corolário 2.3. *Se X é compacto, Y é de Hausdorff e $f : X \to Y$ é contínua e bijetora então f é homeomorfismo.*

Teorema 2.7. *Suponha que A, B são subconjuntos fechados e disjuntos de $\mathbb{R}^n$, com A compacto. Então*

$$d(A, B) = inf\{d(a, b) : a \in A, b \in B\} > 0.$$

Demonstração. Considere a coleção de subconjuntos abertos $\{U_A(a, \frac{1}{2}d(a, B)) : a \in A\}$ de A, com união A. Como A é compacto existe um conjunto finito $a_1, \ldots, a_k \in A$ tal que, os correspondentes conjuntos abertos tem união A. Agora para cada $a \in A$, existe i $(1 \leq i \leq k)$ com $d(a, a_i) < \frac{1}{2}d(a_i, B)$ e portanto,

$$d(a, B) > \frac{1}{2}d(a_i, B) \geq \frac{1}{2}min_{1 \leq i \leq k}d(a_i, B) = \delta,$$

digamos, com $\delta > 0$. Assim, segue que $d(A, B) \geq \delta > 0$. $\square$

2.5 Espaços Conexos ou Desconexos

2.5.1 Conjuntos Conexos

Definição 2.15. *Seja X um espaço topológico. Suponha que X seja expresso como a união disjunta de dois subconjuntos não-vazios U e V, isto é, $U \cup V = X$, $U \cap V = \emptyset$. e U e V sejam subconjuntos abertos (fechados) de X. Então (U, V) é chamada uma partição de X, e neste caso X é desconexo. Se X não possuir partição, então X é dito conexo, em outras palavras, sempre que $X = U \cup V$ e $U \cap V = \emptyset$, onde U e V são abertos (fechados) de X então $U = \emptyset$ ou $V = \emptyset$.*

Equivalentemente, X é *conexo* se, e somente se, os únicos subconjuntos de X que são simultâneamente abertos e fechados são X e $\emptyset$.

De fato, seja $U \subset X$ um subconjunto aberto e fechado. Assim, $X - U$ é aberto pois U é fechado. Mas $X = U \cup (X - U)$, e portanto $U = \emptyset$ ou $X - U = \emptyset$, pois por hipótese X é conexo. Logo, $U = X$ ou $U = \emptyset$.

Por outro lado, considere $X = U \cup V$, com U e V abertos em X e $U \cap V = \emptyset$. Então $U = X - V$ é fechado, pois V é aberto, e analogamente, $V = X - U$ é fechado pois U é aberto. Segue da hipótese que, $U = \emptyset$ ou $U = X$, ou equivalentemente, $U = \emptyset$ ou $V = \emptyset$.

Lema 2.3. *O subconjunto $\{0, 1\}$ de $\mathbb{R}$ é desconexo.*

Demonstração. Sejam $U = \{0\}$ e $V = \{1\}$. Claramente estes conjuntos são disjuntos e não-vazios, e sua união resulta no espaço $\{0, 1\}$. Ainda é fácil ver que ambos, U e V, são abertos em $\{0, 1\}$, pois podemos escrever,

$$U = \{0, 1\} \cap \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[\text{ e } V = \{0, 1\} \cap \left]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right[.$$

□

Observamos que não somente $\{0,1\}$, mas todo espaço que contém apenas dois pontos é desconexo com a topologia induzida de $\mathbb{R}$ (aqui estamos tomando $\mathbb{R}$ com a topologia usual da reta na qual os abertos são os intervalos abertos de $\mathbb{R}$).

Seja (U,V) uma partição de X. Definimos uma função $f : X \to \{0,1\}$ por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \in U \\ 1 & \text{se} \quad x \in V \end{cases}.$$

Então f é contínua. De fato, para qualquer subconjunto aberto S de $\{0,1\}$, $f^{\vdash}(S)$ é aberto de X. De fato, existem somente quatro subconjuntos abertos de $\{0,1\}$: $\emptyset$, $\{0\}$, $\{1\}$ e $\{0,1\}$. Assim, as imagens inversas destes, respectivamente, são $\emptyset$, U, V e X; e todos estes são abertos em X por hipótese.

Por outro lado, seja $f : X \to \{0,1\}$ uma aplicação contínua e sobrejetora. Tomemos $U = f^{-1}\{0\}$ e $V = f^{-1}\{1\}$. Então U e V são abertos em X desde que f é contínua e $\{0\}$ e $\{1\}$ são abertos em $\{0,1\}$. Ambos são não vazios por hipótese e, claramente, $U \cup V = X$ e $U \cap V = \emptyset$. Assim, provamos:

Lema 2.4. *O espaço X é desconexo se, e somente se, existir uma aplicação contínua sobrejetora do espaço X no espaço $\{0,1\}$.*

Teorema 2.8. *O intervalo $[0,1]$ de $\mathbb{R}$ é conexo.*

Demonstração. Suponha que não. Então existe uma função contínua e sobrejetora $f : [0,1] \to \{0,1\}$, assumindo somente os valores 0 e 1. Suponha $f(1) = 1$. Por hipótese, f assume o valor 0. Seja ξ o menor dos limitantes superiores para o conjunto dos pontos $x \in [0,1]$ com $f(x) = 0$. A contradição será obtida, aplicando f em ξ.

Como f é contínua em ξ, existe um número $\delta > 0$ tal que se $x \in [0,1]$ e $x \in U(\xi,\delta)$ então $f(x) \in U(f(\xi),1)$.

Como f assume somente os valores 0 e 1, segue que $f(x) = f(\xi)$. Agora $f(x) = 1$ para $\xi < x \leq 1$, assim $f(\xi) = 1$ (se $\xi = 1$, estamos de acordo com a hipótese). Por outro lado, para x no intervalo $(\xi - \delta, \xi)$, $f(x) = 0$. Então, $f(\xi) = 0$ (se $\xi = 0$, como $f(x) = 1$ para $0 < x \leq 1$, segue que f assume ambos os valores pela hipótese). Assim, chegamos a uma contradição, pois $f(\xi)$ assume dois valores distintos, o que é um absurdo. Portanto $[0,1]$ é conexo. □

2.5.2 Conexo por Caminhos

Definição 2.16. *Um espaço topológico X é dito conexo por caminhos se para quaisquer dois pontos $x, y \in X$, existir uma aplicação contínua $f : I \to X$ com $f(0) = x$, $f(1) = y$, onde $I = [0,1]$. Em geral, uma aplicação contínua $f : I \to X$ é chamada um caminho em X, e diremos que o caminho f une x a y.*

Teorema 2.9. *Todo espaço conexo por caminhos é conexo, mas nem todo espaço conexo é conexo por caminhos.*

Demonstração. Primeiramente, suponha que X seja conexo por caminhos, mas não conexo. Como X não é conexo, existe uma função contínua e sobrejetora $f : X \to \{0,1\}$. Tomemos dois pontos $x, y \in X$ com $f(x) = 0, f(y) = 1$. Do fato de X ser conexo por caminhos, podemos escolher um caminho $g : I \to X$ com $g(0) = x, g(1) = y$. Então $f \circ g : I \to \{0,1\}$ é uma aplicação contínua com $f \circ g(0) = 0$ e $f \circ g(1) = 1$. Assim, segundo o lema 2.4 $I = [0,1]$ é desconexo, contradizendo o teorema 2.8. Portanto X é conexo.

Para mostrar a segunda parte, devemos construir um espaço conexo que não seja conexo por caminhos. Seja $Y = U \cup V$, onde

$$U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, -1 \leq y \leq 1\},$$

$$V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1, y = sen\frac{1}{x}\}.$$

Claramente U é um intervalo fechado, e portanto conexo por caminhos. V tem a parametrização $(x, sen\dfrac{1}{x})$, e como $sen(\frac{1}{x})$ é uma função contínua para $0 < x \leq 1$, portanto V também é conexo por caminhos. Assim se Y for desconexo, (U,V) será a única partição possível, caso contrário teríamos uma partição para os espaços conexos U ou V. Definamos $f : Y \to \{0,1\}$ por $f(U) = \{0\}$, $f(V) = \{1\}$. Vamos mostrar que f não é contínua em todos os pontos de U. É suficiente verificar na origem (para os demais pontos de U a verificação é análoga). De fato, $f(0,0) = 0$ mas, $f((k\pi)^{-1}, 0) = 1$, para todo inteiro positivo k. Qualquer vizinhança de $(0,0)$ contém pontos $((k\pi)^{-1}, 0)$, de modo que f é descontínua e Y é conexo. Por outro lado, veremos que não há caminhos em Y ligando pontos de U aos pontos de V. Suponha que exista um caminho $f : I \to Y$ tal que $f(0) \in U$ e $f(1) \in V$. Seja ξ o menor dos limitantes superiores de $x \in I$, para os quais $f(x) \in U$. Como f é contínua e U é fechado (em $\mathbb{R}^2$, e portanto em Y), $f(\xi) \in U$. Por outro lado, a continuidade de f nos garante que existe $\delta > 0$ tal que $f([\xi, \xi + \delta]) \subset U(f(\xi), 1)$. Considere a intersecção J de V com o disco $D(f(\xi), \frac{1}{2})$.

Se K é um intervalo dessa intersecção, contendo $f(\xi + \delta)$, então $(K, J - K)$ é uma partição de J, de modo que $f(\xi) \in K$, o que é uma contradição. Portanto Y não é conexo por caminhos. □

2.5.3 Localmente Conexo por Caminhos

Definição 2.17. *Um espaço topológico X é localmente conexo por caminhos em a, se toda vizinhança U de a contiver uma vizinhança V de a de modo que quaisquer dois pontos de V podem ser ligados por um caminho em U.*

Se W é o conjunto de pontos de U que podem ser ligados a a por um caminho em U, então evidentemente $V \subset W \subset U$ e W é conexo por caminhos. Assim, podemos dizer que um espaço topológico X é localmente conexo por caminhos em a, se toda vizinhança U de a contiver uma vizinhança W de a conexa por caminhos.

Diremos que X é localmente conexo por caminhos se isto ocorrer em todos os pontos de X. Podemos construir espaços conexos por caminhos utilizando o próximo lema.

Lema 2.5.

i) *$\mathbb{R}^n$ é localmente conexo por caminhos.*

ii) *Se X é localmente conexo por caminhos e U é aberto de X, então U é localmente conexo por caminhos.*

iii) *Se os conjuntos U_α são localmente conexos por caminhos e abertos em X e $X = \bigcup_\alpha U_\alpha$, então X é localmente conexo por caminhos.*

Demonstração.

i) Cada ponto de $\mathbb{R}^n$ possui arbitrariamente pequenas vizinhanças convexas (digamos discos), as quais são conexas por caminhos.

ii) Se $a \in U$ e V é uma vizinhança de a em U, então (como U é aberto de X), V é também uma vizinhança de a em X. Como X por hipótese é localmente conexo por caminhos, V contém uma vizinhança conexa por caminhos.

iii) Se $x \in X$, então $x \in U_\alpha$ para algum α, e qualquer vizinhança N de x em X contém $N \cap U_\alpha$, o qual contém uma vizinhança M de x conexa por caminhos em U_α. Como U_α é aberto, M é uma vizinhança de x em X. $\square$

As partes *ii*) e *iii*) do lema 2.5 formalizam a vaga ideia de que, ser localmente conexo por caminhos, depende somente do comportamento de X próximo a um ponto, isto é, de sua propriedade local.

Teorema 2.10. *Se X é localmente conexo por caminhos, e conexo, então ele é conexo por caminhos.*

Demonstração. Suponha X localmente conexo por caminhos, mas não conexo por caminhos. Iremos construir uma partição e chegar a uma contradição. Suponha que $x, y \in X$ não possam ser ligados por um caminho. Seja U o conjunto de pontos de X, os quais podem ser unidos a x por um caminho em X. Escrevemos $V = X - U$, de modo a construirmos U e V disjuntos. Então para mostrar que (U, V) é uma partição, resta somente mostrar que U e V são abertos.

Seja $u \in U$. Então u possui uma vizinhança W em X conexa por caminhos. Se $w \in W$, existe um caminho em W unindo w a u e um outro caminho em X unindo u a x. Assim w pode ser unido a x; $w \in U$, e portanto $W \subset U$. Como U contém uma vizinhança para cada um de seus pontos, ele é aberto. Analogamente, $v \in V$ possui uma vizinhança N em X conexa por caminhos. Se $n \in N \cap U$, v pode ser unido a x por um caminho através de n, uma contradição. Portanto $N \subset X - U = V$ e V é aberto. Assim, conseguimos uma partição (U, V) em X, contradizendo a hipótese de que X é conexo. Portanto, se X é localmente conexo por caminhos e conexo, X é conexo por caminhos. $\square$

As noções de conexos e conexos por caminhos referem-se essencialmente aos pontos, e por isso são "propriedades zero-dimensional". Estas podem ser generalizadas para "n-(caminhos)-conexos", substituindo os pontos por poliedros de dimensão, no máximo, n. O caso $n = 1$ será estudado nos próximos capítulos.

3 Grupos Abelianos

Iniciamos este capítulo com algumas definições.

Definição 3.1. *Um grupo abeliano é um conjunto A munido de uma aplicação $A \times A \to A$, usualmente denotada por*

$$(a, b) \mapsto a + b,$$

de modo que

G1 Existe um elemento $0 \in A$ com $0 + a = a$ para todo $a \in A$.

G2 Para cada $a \in A$ existe $(-a) \in A$ com $(-a) + a = 0$.

G3 Para todos $a, b, c \in A$, $(a + b) + c = a + (b + c)$.

G4 Para todos $a, b \in A$, $a + b = b + a$.

Os axiomas $G1$ a $G3$ definem o conceito de grupo. O mais importante exemplo, para nós, será o grupo dos inteiros $\mathbb{Z}$ com a operação de adição usual. Outros exemplos são os grupos aditivos dos reais $\mathbb{R}$, ou dos números complexos $\mathbb{C}$. Notemos que o grupo trivial consiste do conjunto unitário $\{0\}$. Usualmente escrevemos $a - b$ para $a + (-b)$, $a + b + c$ para $a + (b + c)$, e assim por diante.

Também usaremos a notação multiplicativa, isto é, definiremos a aplicação por

$$(a, b) \mapsto ab,$$

satisfazendo

1) Existe um elemento $1 \in A$ com $1a = a$ para todo $a \in A$.

2) Para cada $a \in A$ existe $a^{-1} \in A$ tal que $a^{-1}a = 1$.

3) Para todos $a, b, c \in A$, $(ab)c = a(bc)$.

4) Para todos $a, b \in A$, $ab = ba$.

Exemplos de grupos com esta notação são os grupos multiplicativos $\mathbb{R}^*$, dos números reais não nulos, ou o conjunto $\mathbb{C}^*$, dos números complexos não nulos. Note que o zero foi excluído para que o axioma 2) não fosse violado. Neste contexto, o grupo mais importante será o grupo S^1 dos números complexos de módulo 1, com a multiplicação usual de números complexos.

Definição 3.2. *Seja A um grupo abeliano. Um subconjunto B de A será um subgrupo se*

S1) $0 \in B$.

S2) Se $b \in B$, então $(-b) \in B$.

S3) Se $a, b \in B$, então $(a + b) \in B$.

Observemos que $S3$ afirma que a adição em A restrita a B será uma aplicação $B \times B \to B$; S1 e S2 implicam que esta restrição satisfaz $G1$ e $G2$. Como estas também satisfazem $G3$ e $G4$, B é um grupo. Por exemplo, $\mathbb{Z}$ é um subgrupo de $\mathbb{R}$, e ambos são subgrupos de $\mathbb{C}$; $\{0\}$ pode ser considerado um subgrupo de qualquer grupo. Este conjunto algumas vezes será denotado simplesmente por 0.

Definição 3.3. *Dados dois grupos A, X, uma aplicação $\phi : A \to X$ é um homomorfismo se (**H1**) para todos $a, b \in A$, $\phi(a + b) = \phi(a) + \phi(b)$.*

Propriedades elementares de homomorfismos:

1) $\phi(0) = 0$.

   De fato, $\phi(0) = \phi(0 + 0) = \phi(0) + \phi(0)$. Portanto, $\phi(0) = 0$.

2) $\phi(-a) = -\phi(a)$.

   De fato, $0 = \phi(0) = \phi(a + (-a)) = \phi(a) + \phi(-a)$. Portanto $\phi(-a) = -\phi(a)$.

Claramente se $\phi : A \to X$ e $\psi : B \to A$ são homomorfismos, então $\phi \circ \psi : B \to X$ também é um homomorfismo. Utilizaremos $Hom(A, X)$ para designar o conjunto de todos os homomorfismos $A \to X$.

Um homomorfismo bijetor $\phi : A \to X$ é chamado um *isomorfismo* (entre A e X). Isomorfismos desempenham o mesmo papel, na Teoria de Grupos, que os homeomorfismos em Topologia. Se ϕ é um isomorfismo, ϕ^{-1} também será, e qualquer propriedade algébrica que A possua (por exemplo número de elementos, de subgrupos, etc.), X também possuirá; diremos então que A e X não são abstratamente distinguíveis. Por exemplo, qualquer grupo isomorfo a $\mathbb{Z}$ é chamado um grupo cíclico infinito.

Definição 3.4. *Se $\phi : A \to X$ é um homomorfismo, definimos seu kernel (ou núcleo) e sua imagem por*

$$Ker\ \phi = \phi^{-1}\{0\} = \{a \in A : \phi(a) = 0\},$$
$$Im\ \phi = \phi(A) = \{\phi(a) : a \in A\}.$$

Lema 3.1. *Se $\phi : A \to X$ é um homomorfismo, então Ker ϕ é um subgrupo de A e Im ϕ é um subgrupo de X. ϕ é injetora se, e somente se, Ker $\phi = \{0\}$ e ϕ é sobrejetora se, e somente se, Im $\phi = X$.*

Demonstração. Mostremos primeiramente que Ker ϕ é um subgrupo de A, verificando que ele satisfaz as propriedades $S1$, $S2$ e $S3$.

$S1)$ $0 \in$ Ker ϕ, pois como ϕ é um homomorfismo e $0 \in A$, segue que $\phi(0) = 0$.

$S2)$ Se $b \in$ Ker ϕ então $(-b) \in$ Ker ϕ, pois como por hipótese, ϕ é um homomorfismo $\phi(-b) = -\phi(b)$. Se $b \in$ Ker ϕ, então $\phi(b) = 0$ e portanto, $\phi(-b) = -\phi(b) = -0 = 0$ o que mostra que $-b \in$ Ker ϕ.

$S3)$ Se $a, b \in$ Ker ϕ, então $(a + b) \in$ Ker ϕ, pois sendo ϕ um homomorfismo, temos que $\phi(a + b) = \phi(a) + \phi(b)$. Se $a, b \in$ Ker ϕ, então $\phi(a + b) = \phi(a) + \phi(b) = 0 + 0 = 0$, e portanto $(a + b) \in$ Ker ϕ.

Como Ker ϕ satisfaz as três propriedades acima, segue que Kerϕ é um subgrupo de A.

A demonstração que Im ϕ é um subgrupo de X é análoga.

Vamos mostrar agora que ϕ é injetora se, e somente se, Ker $\phi = \{0\}$. Suponha primeiramente que ϕ é injetora. Então, se $a \in$ Ker ϕ,

$$\phi(a) = 0 = \phi(0),$$

e como ϕ por hipótese é injetora, $a = 0$. Assim, Ker $\phi = \{0\}$. Reciprocamente, se Ker$\phi = \{0\}$, suponha que $\phi(a) = \phi(b)$. Então,

$$\begin{aligned}
\phi(a - b) &= \phi(a + (-b)) \\
&= \phi(a) + \phi(-b) \\
&= \phi(a) - \phi(b) \\
&= \phi(a) - \phi(a) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Como por hipótese Ker $\phi = \{0\}$, $a - b = 0$, e daí segue que $a = b$, o que prova que ϕ é injetora.

Resta mostrar a última afirmação: ϕ é sobrejetora se, e somente se, Im $\phi = X$. Primeiramente, suponha que ϕ é sobrejetora, e mostremos que Im $\phi \subset X$ e $X \subset$ Im ϕ. A primeira inclusão é óbvia. Mostremos que $X \subset$ Im ϕ. Seja $b \in X$. Por hipótese ϕ é sobrejetora, então existe $a \in A$ tal que $\phi(a) = b$. Portanto, $b = \phi(a) \in$ Im ϕ e assim $X \subset$ Im ϕ.

Por fim, suponha que Im $\phi = X$. Para mostrarmos que ϕ é sobrejetora, tomemos $b \in X$. Por hipótese, Im $\phi = X$, então existe $a \in A$ tal que $b = \phi(a)$. Portanto ϕ é sobrejetora.

$\square$

Proposição 3.1. *Se $\phi : A \to X$ e $\psi : A \to X$ são homomorfismos, definindo $\phi + \psi$ por* ***(H2)*** *$(\phi + \psi)(a) = \phi(a) + \psi(a)$, temos que $\phi + \psi$ é um homomorfismo.*

Demonstração. De fato, aplicando-se as propriedades H2, H1, G4 e H2 novamente obtemos

$$\begin{aligned}(\phi + \psi)(a + b) &= \phi(a + b) + \psi(a + b)\\ &= \phi(a) + \phi(b) + \psi(a) + \psi(b)\\ &= \phi(a) + \psi(a) + \phi(b) + \psi(b)\\ &= (\phi + \psi)(a) + (\phi + \psi)(b).\end{aligned}$$

□

Assim o conjunto $Hom(A, X)$ é dotado da operação de adição de homomorfismos. Não há dificuldade em provar que tal operação satisfaz as propriedades G1 a G4, mostrando que $Hom(A, X)$ é um grupo abeliano. Por exemplo, temos o homomorfismo nulo, $0 \in Hom(A, X)$ dado por $0(a) = 0$ para todo $a \in A$.

3.1 Soma Direta

Definição 3.5. *Sejam A, B dois grupos. A soma direta $A \oplus B$ consiste do conjunto $A \times B$ com a adição dada por*

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2).$$

Verifiquemos que $A \oplus B$ satisfaz os axiomas G1 a G4:

G1 $(0, 0) + (a, b) = (0 + a, 0 + b) = (a, b)$.

G2 $(-a, -b) + (a, b) = ((-a) + a, (-b) + b) = (0, 0)$.

G3

$$\begin{aligned}((a_1, b_1) + (a_2, b_2)) + (a_3, b_3) &= (a_1 + a_2, b_1 + b_2) + (a_3, b_3)\\ &= ((a_1 + a_2) + a_3, (b_1 + b_2) + b_3)\\ &= (a_1 + (a_2 + a_3), b_1 + (b_2 + b_3))\\ &= (a_1, b_1) + (a_2 + a_3, b_2 + b_3)\\ &= (a_1, b_1) + ((a_2, b_2) + (a_3 + b_3)).\end{aligned}$$

G4

$$\begin{aligned}(a_1, b_1) + (a_2, b_2) &= (a_1 + a_2, b_1 + b_2)\\ &= (a_2 + a_1, b_2 + b_1) = (a_2, b_2) + (a_1, b_1).\end{aligned}$$

Observação 3.1. Por indução - ou analogia - pode-se definir a soma direta de um conjunto finito de grupos (abelianos).

A seguir descreveremos homomorfismos envolvendo somas diretas.

Lema 3.2. *Sejam A, B, X grupos (abelianos), e seja a aplicação $\phi : X \to A \oplus B$ com componentes $\phi_1 : X \to A$, $\phi_2 : X \to B$, tais que,*

$$\phi(x) = (\phi_1(x), \phi_2(x)), \text{ para todo } x \in X.$$

Então, ϕ é um homomorfismo se, e somente se, ϕ_1 e ϕ_2 o são.

Demonstração. Por definição,

$$\phi(x + y) = (\phi_1(x + y), \phi_2(x + y)),$$

e

$$\begin{aligned} \phi(x) + \phi(y) &= (\phi_1(x), \phi_2(x)) + (\phi_1(y), \phi_2(y)) \\ &= (\phi_1(x) + \phi_1(y), \phi_2(x) + \phi_2(y)) \ , \\ &= (\phi_1(x + y), \phi_2(x + y)) \end{aligned}$$

assim ϕ é um homomorfismo se, e somente se, para todos $x, y \in X$ os lados esquerdos das equações acima são iguais, se, e somente se, os lados direitos das equações acima são iguais, se, e somente se, ϕ_1 e ϕ_2 são homomorfismos. □

Este lema pode ser interpretado como um isomorfismo

$$Hom(X, A \oplus B) \cong Hom(X, A) \times Hom(X, B).$$

Utilizaremos um símbolo para a aplicação ϕ com as componentes ϕ_1 e ϕ_2. Nós a escreveremos como uma matriz coluna ou como uma matriz linha, assim:

$$\phi = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} = \{\phi_1, \phi_2\}.$$

O próximo resultado será de grande importância na construção de homomorfismos a partir de uma soma direta.

Lema 3.3. *Sejam A, B, Y grupos abelianos. Para todos homomorfismos $\psi_1 : A \to Y$, $\psi_2 : B \to Y$, a aplicação $(\psi_1, \psi_2) : A \oplus B \to Y$ definida por*

$$(\psi_1, \psi_2)(a, b) = \psi_1(a) + \psi_2(b)$$

é um homomorfismo. Reciprocamente, todo homomorfismo $\psi : A \oplus B \to Y$ pode ser (unicamente) expresso como um par (ψ_1, ψ_2).

Demonstração. Para mostrar que (ψ_1, ψ_2) é um homomorfismo, sejam $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in A \oplus B$. Então,

$$\begin{aligned} (\psi_1, \psi_2)((a_1, b_1) + (a_2, b_2)) &= (\psi_1, \psi_2)(a_1 + a_2, b_1 + b_2) \text{ (Definição de Soma Direta)} \\ &= \psi_1(a_1 + a_2) + \psi_2(b_1 + b_2) \text{ (Definição de } (\psi_1, \psi_2)) \\ &= \psi_1(a_1) + \psi_1(a_2) + \psi_2(b_1) + \psi_2(b_2) \text{ } (\psi_1, \psi_2 \text{ são homo} \\ &\quad \text{morfismos por hipótese)} \\ &= \psi_1(a_1) + \psi_2(b_1) + \psi_1(a_2) + \psi_2(b_2) \text{ } (Y \text{ é um grupo} \\ &\quad \text{abeliano)} \\ &= (\psi_1, \psi_2)(a_1, b_1) + (\psi_1, \psi_2)(a_2, b_2) \text{ (Definição de } (\psi_1, \psi_2)). \end{aligned}$$

Portanto (ψ_1, ψ_2) é um homomorfismo.

Reciprocamente, dado qualquer ψ, definimos ψ_1 e ψ_2 por

$$\psi_1(a) = \psi(a, 0),$$

$$\psi_2(b) = \psi(0, b).$$

É facil ver que estes são homomorfismos, e teremos

$$\begin{array}{rcl} \psi(a,b) & = & \psi((a,0)+(0,b)) \\ & = & \psi(a,0)+\psi(0,b) \\ & = & \psi_1(a)+\psi_2(b) \\ & = & (\psi_1,\psi_2)(a,b) \end{array}.$$

Assim $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ e claramente esta decomposição é única (porque a forma de representar (a, b), na soma direta, como $(a, 0) + (0, b)$ é única). □

A notação acima generaliza a notação usual de matrizes. Observe que a composição de duas aplicações

$$X \xrightarrow{\{\phi_1,\phi_2\}} A \oplus B \xrightarrow{(\psi_1,\psi_2)} Y$$

é dada por

$$(\psi_1, \psi_2) \begin{bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{bmatrix} = (\psi_1\phi_1 + \psi_2\phi_2),$$

pois

$$\begin{array}{rcl} (\psi_1,\psi_2)\{\phi_1,\phi_2\}(x) & = & (\psi_1,\psi_2)(\phi_1(x),\phi_2(x)) \\ & = & \psi_1\phi_1(x)+\psi_2\phi_2(x) \\ & = & (\psi_1\phi_1+\psi_2\phi_2)(x). \end{array}$$

Isto ilustra a lei de multiplicação usual de matrizes em um caso especial. Observe agora que uma aplicação

$$\phi : X \oplus Y \to A \oplus B$$

será da forma $\{\phi_1, \phi_2\}$, onde $\phi_1 : X \oplus Y \to A$ e $\phi_2 : X \oplus Y \to B$. Podemos continuar, e escrever $\phi_1 = (\alpha_{11}, \alpha_{12})$ e $\phi_2 = (\alpha_{21}, \alpha_{22})$. Em seguida, fica claro que ϕ possa ser representada pela matriz

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix}.$$

Isto é confirmado pelo fato de que, se

$$\psi_1 = \{\alpha_{11}, \alpha_{21}\} : X \to A \oplus B$$

e

$$\psi_2 = \{\alpha_{12}, \alpha_{22}\} : Y \to A \oplus B,$$

então $\phi = (\psi_1, \psi_2)$.

A matriz será útil para não haver confusão em saber o domínio e contradomínio das aplicações $\alpha_{ij}, i, j \in \{1, 2\}$, sendo que suas colunas correspondem aos domínios X, Y e as linhas ao contradomínio A e B. Assim,

$$\begin{array}{cc}
\begin{array}{cc} X & Y \\ \downarrow & \downarrow \end{array} & \\
\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \to A \\ \to B \end{array}
\end{array}$$

Lema 3.4. *Seja A um grupo abeliano (aditivo) qualquer. Definamos uma relação entre os elementos de A por:*

$$a\Re b \quad \textit{se existe } c \in A \quad \textit{com } a - b = c + c.$$

Então $\Re$ é uma relação de equivalência.

Demonstração. De fato, temos

(i) $a\Re a$, desde que $a - a = 0 = 0 + 0$;

(ii) $a\Re b$, implica que $a - b = c + c$; mas então

$$b - a = -(a - b) = (-c) + (-c),$$

de modo que $b\Re a$;

(iii) $a\Re a'$ e $a'\Re a''$ implica que

$$a - a' = b + b \text{ e } a' - a'' = b' + b'.$$

Então

$$a - a'' = (a - a') + (a' - a'') = (b + b) + (b' + b') = (b + b') + (b + b')$$

de modo que $a\Re a''$. □

Assim A está dividido em classes de equivalência. Denotaremos por $t(A)$ o número de tais classes e por $[a] = \{b \in A | b\Re a\}$ a classe do elemento $a \in A$.

Observação 3.2. Se $\phi : A \to B$ é um homomorfismo e $a, a' \in A$, a definição de $\Re$ dada no lema 3.4 nos mostra que se $a\Re a'$, então $\phi(a)\Re\phi(a')$. Assim, se ϕ é um isomorfismo, $a\Re a'$ se, e somente se, $\phi(a)\Re\phi(a')$. Neste caso, a aplicação ϕ induz um isomorfismo entre $\frac{A}{\Re}$ e $\frac{B}{\Re}$ que a cada $[a] \in \frac{A}{\Re}$ associa $[\phi(a)] \in \frac{B}{\Re}$. Portanto, $t(A) = t(B)$.

No nosso estudo o exemplo mais relevante será o subgrupo $\mathbb{Z}^n$ de $\mathbb{R}^n$, dado pela soma direta de n grupos, cada um, uma cópia de $\mathbb{Z}$.

Proposição 3.2. *Se $m \neq n$ são inteiros positivos, os grupos $\mathbb{Z}^m$ e $\mathbb{Z}^n$ não são isomorfos.*

Demonstração. Pelo lema 3.4, se $A = \mathbb{Z}^n$, diremos que $(r_1, \ldots, r_n)\Re(s_1, \ldots, s_n)$ se, e somente se, cada $r_i - s_i$ for par. Como para cada r_i existem duas possibilidades (par ou ímpar), segue que $t(\mathbb{Z}^n) = 2^n$.

Finalmente, se $m \neq n$, então $t(\mathbb{Z}^m) = 2^m \neq 2^n = t(\mathbb{Z}^n)$, não possibilitando um isomorfismo entre $\mathbb{Z}^m$ e $\mathbb{Z}^n$ conforme observação 3.2. □

3.2 Sequências Exatas

Dados três grupos e dois homomorfismos, formando uma sequência

$$A_1 \xrightarrow{\phi_1} A_2 \xrightarrow{\phi_2} A_3,$$

a sequência será dita *exata* se Ker ϕ_2 = Im ϕ_1. Isto pode ser expresso por meio de duas afirmações:

i) Im$\phi_1 \subset$ Kerϕ_2, que significa, que para todo y da forma $\phi_1(x)$, temos $\phi_2(y) = 0$; ou equivalentemente, para cada $x \in A_1$ temos $\phi_2\phi_1(x) = 0$.

ii) Ker$\phi_2 \subset$ Imϕ_1, que significa, que se $y \in A_2$ satisfaz $\phi_2(y) = 0$, então existe $x \in A_1$, tal que $y = \phi_1(x)$.

Uma sequência de grupos e homomorfismos é chamada exata, se quaisquer dois homomorfismos consecutivos da sequência, satisfizer a condição acima. Neste caso, a afirmação acima nos diz que a sequência é *exata* em A_2.

Teorema 3.1. *Dada uma sequência exata*

$$P \xrightarrow{\alpha} Q \xrightarrow{\beta} R \xrightarrow{\gamma} S \to \{0\}$$

e um homomorfismo $\delta : S \to R$ com $\gamma\delta = 1$, então a sequência

$$P \xrightarrow{\{\alpha,0\}} Q \oplus S \xrightarrow{(\beta,\delta)} R \to \{0\}$$

é exata.

Demonstração. Temos que provar que a sequência é exata em $Q \oplus S$ e em R.

Im $\{\alpha, 0\} \subset$ Ker (β, δ), pois $(\beta, \delta)\{\alpha, 0\} = \beta\alpha = 0$.

Verifiquemos que Ker $(\beta, \delta) \subset$ Im $\{\alpha, 0\}$. Suponha $(\beta, \delta)(q, s) = 0$. Então

$$0 = \gamma(\beta, \delta)(q, s) = (\gamma\beta, \gamma\delta)(q, s) = (0, 1)(q, s) = s,$$

e assim, substituindo $s = 0$,

$$0 = (\beta, \delta)(q, 0) = \beta(q).$$

Pela exatidão em Q da sequência dada, existe $p \in P$ com $q = \alpha(p)$. Mas então

$$(q, s) = (q, 0) = (\alpha(p), 0) = \{\alpha, 0\}(p),$$

e portanto Ker $(\beta, \delta) \subset$ Im $\{\alpha, 0\}$. Assim, Ker $(\beta, \delta) =$ Im $\{\alpha, 0\}$, mostrando que a sequência é exata em $Q \oplus S$.

Falta mostrar que Im $(\beta, \delta) = R$. Uma vez que $\gamma\delta = 1$, temos que, para qualquer $r \in R$, $\gamma(r) = \gamma\delta\gamma(r)$. Assim, $r - \delta\gamma(r) \in$ Ker γ. Mas pela exatidão (em R) da sequência dada, Ker$\gamma =$ Im β. Assim, para algum $q \in Q$,

$$r - \delta\gamma(r) = \beta(q).$$

Portanto,

$$r = (\beta, \delta)(q, \gamma(r)).$$

□

Corolário 3.1. *Dada uma sequência exata*

$$\{0\} \to Q \xrightarrow{\beta} R \xrightarrow{\gamma} S \to \{0\}$$

e $\delta : S \to R$ *com* $\gamma\delta = 1$*, a aplicação* $(\beta, \delta) : Q \oplus S \to R$ *é um isomorfismo.*

Demonstração. Colocando $P = 0$, no teorema 3.1, temos uma sequência exata

$$\{0\} \to Q \oplus S \xrightarrow{(\beta,\gamma)} R \to \{0\};$$

e assim, segue o resultado. □

Quando existe um homomorfismo como γ no corolário acima, dizemos que a sequência exata *cinde*, e também diremos que R se decompõe como a soma direta de Q e S.

Teorema 3.2. *Dada uma sequência exata*

$$X \xrightarrow{\{\alpha,\beta\}} A \oplus B \xrightarrow{\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]} A' \oplus B' \xrightarrow{(\alpha',\beta')} X'$$

de modo que, $d : B \to B'$ *é um isomorfismo, então a sequência*

$$X \xrightarrow{\alpha} A \xrightarrow{a - bd^{-1}c} A' \xrightarrow{\alpha'} X'$$

é exata, e portanto Ker $\alpha =$ *Ker*$\{\alpha, \beta\}$*, Im*$\alpha' =$ *Im*(α', β')*.*

Demonstração. Pela exatidão em $A \oplus B$, da sequência dada, temos

$$0 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\alpha + b\beta \\ c\alpha + d\beta \end{bmatrix}.$$

Como d é um isomorfismo, possui inversa. Então, como $0 = c\alpha + d\beta$, podemos deduzir que $0 = d^{-1}(c\alpha + d\beta) = d^{-1}c\alpha + \beta$, resultando em $\beta = -d^{-1}c\alpha$. Disto, segue que, para $x \in X$, $\alpha x = 0$ implica $\beta x = 0$, de modo que $\alpha x = 0$ se, e somente se, $\alpha x = 0$ e $\beta x = 0$; daí $\mathrm{Ker}\alpha = \mathrm{Ker}\{\alpha, \beta\}$.

Analogamente temos $a\alpha + b\beta = 0$ ou, substituindo $\beta = -d^{-1}c\alpha$,

$$0 = a\alpha + b(-d^{-1}c\alpha) = (a - bd^{-1}c)\alpha,$$

provando que $\mathrm{Im}\alpha \subset \mathrm{Ker}(a - bd^{-1}c)$. Para mostrar que $\mathrm{Ker}(a - bd^{-1}c) \subset \mathrm{Im}\alpha$, suponha $u \in A$ com $(a - bd^{-1}c)u = 0$. Escrevendo $v = -d^{-1}c(u)$, temos $c(u) + d(v) = 0$ e também $a(u) + b(v) = 0$. Assim, (u, v) pertence ao Kernel da aplicação central da sequência dada; e pela exatidão, está na imagem de $\{\alpha, \beta\}$. Assim para algum $x \in X$, temos $\alpha(x) = u$ (analogamente $\beta(x) = v$), provando a exatidão em A.

A demonstração da outra parte do teorema é similar a esta. Primeiro,

$$0 = (\alpha', \beta') \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = (\alpha' a + \beta' c, \alpha' b + \beta' d),$$

de modo que $\beta' = -\alpha' bd^{-1}$ e $\alpha'(a - bd^{-1}c) = 0$. A segunda igualdade demonstra parte da exatidão em A', a saber que $\mathrm{Im}(a - bd^{-1}c) \subset \mathrm{Ker}\alpha'$; a primeira implica que $\mathrm{Im}\alpha' = \mathrm{Im}(\alpha', \beta')$. Claramente, $\mathrm{Im}\alpha' \subset \mathrm{Im}(\alpha', \beta')$ pois $\alpha'(p) = (\alpha', \beta')(p, 0), \forall p \in A'$; reciprocamente, qualquer elemento de $\mathrm{Im}(\alpha', \beta')$ é da forma

$$\alpha'(p) + \beta'(q) = \alpha'(p - bd^{-1}(q)),$$

e portanto pertecem a $\mathrm{Im}\alpha'$. Finalmente, se $p \in A'$ com $\alpha'(p) = 0$, então

$$(\alpha', \beta')(p, 0) = \alpha'(p) = 0,$$

e pela exatidão da sequência dada, existe $(u, v) \in A \oplus B$, com

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} (u, v) = (p, 0),$$

ou equivalentemente,

$$\begin{aligned} a(u) + b(v) &= p, \\ c(u) + d(v) &= 0, \end{aligned}$$

donde, $v = -d^{-1}c(u)$ e $p = (a - bd^{-1}c)(u)$. Logo $\mathrm{Ker}\alpha' \subset \mathrm{Im}(a - bd^{-1}c)$ e a sequência é exata em A'. □

Corolário 3.2. *Se* $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : A \oplus B \to A' \oplus B'$ *e* $d : B \to B'$ *são isomorfismos, então* A *e* A' *são isomorfos; em particular se* b *(ou* c*) for* 0*,* a *é um isomorfismo.*

Demonstração. Este resultado segue do teorema 3.2, tomando $X = X' = \{0\}$. □

3.3 Grupos Abelianos Livres

Definição 3.6. *Dados um conjunto X, um grupo abeliano G e uma função $i : X \longrightarrow G$. Então (G, i) tem a propriedade universal para X se, para qualquer grupo abeliano A e função $j : X \longrightarrow A$, existe um único homomorfismo $\phi : G \longrightarrow A$, com $j = \phi \circ i$. Quando isto acontece, dizemos que G é um grupo abeliano livre sobre os geradores $i(X)$. O número cardinal de X é chamado posto de G.*

Proposição 3.3. *Seja $X = \{x\}$, $\mathbb{Z}$ o grupo abeliano aditivo e $i : X \longrightarrow \mathbb{Z}$ definida por $i(x) = 1$. Então $(\mathbb{Z}, i)$ tem a propriedade universal para X. Neste caso dizemos que $\mathbb{Z}$ é um grupo abeliano livre sobre $i(X) = \{1\}$ e, como o número cardinal de X é 1, dizemos que $\mathbb{Z}$ tem posto 1.*

Demonstração. Seja A um grupo abeliano qualquer e $j : X = \{x\} \longrightarrow A$ uma função, isto é, existe um único $a \in A$ tal que $j(x) = a$.

Considere $\phi : \mathbb{Z} \longrightarrow A$ definido por:

$\phi(0) = 0$

$$\phi(n) = na, \text{ onde } na = \begin{cases} \underbrace{a + \ldots + a}_{n \text{ vezes}}, & \text{se } n > 0 \\ \underbrace{(-a) + \ldots + (-a)}_{(-n) \text{ vezes}}, & \text{se } n < 0 \end{cases}$$

Então ϕ é homomorfismo. Além disso, temos

$\phi \circ i(x) = \phi(1) = a = j(x) \Longrightarrow \phi \circ i = j$.

Agora, resta mostrar que ϕ é único. Para isto, suponha que exista ψ homomorfismo tal que $\psi \circ i(x) = j(x)$. Então:

$\psi(1) = a = \phi(1)$ e $\psi(0) = 0 = \phi(0)$.

$$\text{Se } n > 0,\ \psi(n) = \psi(\underbrace{1 + \ldots + 1}_{n\ vezes}) = \underbrace{\psi(1) + \ldots \psi(1)}_{n\ vezes} = \underbrace{a + \ldots + a}_{n\ vezes} = na = \phi(n)$$

$$\begin{aligned} \text{Se } n < 0, \psi(-n) &= \psi(\underbrace{(-1) + \ldots + (-1)}_{n\ vezes}) \\ &= \underbrace{\psi(-1) + \ldots + \psi(-1)}_{n\ vezes} \\ &= \underbrace{(-\psi(1)) + \ldots + (-\psi(1))}_{n\ vezes} \\ &= \underbrace{(-a) + \ldots + (-a)}_{n\ vezes} = (-n)a \\ &= \phi(-n) \end{aligned}$$

Portanto $\psi = \phi$.

Logo, por definição, $(\mathbb{Z}, i)$ tem a propriedade universal para X. □

Lembremos que $Hom(\mathbb{Z}, A)$ é o conjunto de todos os homomorfismos $f : \mathbb{Z} \to A$.

Corolário 3.3. *Para qualquer grupo abeliano A, a função $ev : Hom(\mathbb{Z}, A) \to A$, definida por $ev(f) = f(1)$ é um isomorfismo.*

Demonstração. Temos que mostrar que ev é um homomorfismo bijetor.

Primeiramente, temos

$$ev(f+g) = (f+g)(1) = f(1) + g(1) = ev(f) + ev(g).$$

Portanto ev é homomorfismo.

Agora mostremos que ev é bijetor.

Para qualquer $a \in A$, considere o diagrama

$$\begin{tikzcd} & \{a\} \arrow[dl, hook', "j"'] \arrow[dr, "i"] & \\ A & & \mathbb{Z} \arrow[ll, "\exists! f"'] \end{tikzcd}$$

onde $i(a) = 1$ e $j(a) = a$, para todo $a \in A$. Segundo a proposição 3.3, $(\mathbb{Z}, i)$ tem a propriedade universal para $\{a\}$, então existe um único homomorfismo $f : \mathbb{Z} \longrightarrow A$ tal que $f \circ i = j$.

Logo, existe um único $f \in Hom(\mathbb{Z}, A)$ tal que $f \circ i(a) = j(a)$, isto é, $ev(f) = f(1) = f \circ i(a) = j(a) = a$. Portanto ev é bijetor. Logo ev é isomorfismo. □

Definição 3.7. *Uma sequência exata do tipo*

$$0 \to X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \to 0$$

é dita uma sequência exata curta.

Definição 3.8. *Considere a seguinte sequência exata curta*

$$0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0.$$

Dizemos que a sequência cinde se β possui inversa, isto é, existe $\delta : C \to B$ tal que $\beta \circ \delta = 1_C$, onde 1_C denota a identidade de C.

Proposição 3.4. *Sejam A e G grupos abelianos. Se a sequência $0 \to A \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} B \to 0$ é exata curta e B é um grupo abeliano livre, então a sequência cinde.*

Demonstração. Para mostrar que a sequência cinde, temos que encontrar uma função $\phi : B \to G$ tal que, $p \circ \phi = 1_B$.

Então, dado um conjunto X e uma função $b : X \to B$, definiremos $g : X \to G$, de modo que $\forall x \in X, g(x)$ é o elemento de G tal que $p(g(x)) = b(x)$.

Como B é abeliano livre, (B, b) tem a propriedade universal para X. Então para o grupo abeliano G e a função $g : X \to G$, existe um único homomorfismo $\phi : B \to G$ tal que $\phi \circ b = g$. Então, $p \circ \phi \circ b = p \circ g = b$.

Como (B, b) tem a propriedade universal para X, para o grupo abeliano B e a função $b : X \to B$, existe um único homomorfismo $\psi : B \to B$ tal que $\psi \circ b = b$. Como $1_B \circ b = b$ e $(p \circ \phi) \circ b = b$ então $p \circ \phi = 1_B$. Portanto a sequência cinde. □

Assim, se a sequência de grupos abelianos $0 \to A \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} B \to 0$ é exata, com B abeliano livre, segue pelo corolário 3.1 que $G \cong A \oplus B$.

Proposição 3.5. *Suponha que (G, i) e (H, j) tenham ambos a propriedade universal para X. Então existe um único isomorfismo $\phi : G \longrightarrow H$, com $j = \phi \circ i$.*

Demonstração. Como (G, i) tem a propriedade universal para X, para o grupo abeliano H e função $j : X \longrightarrow H$ existe um único homomorfismo $\phi : G \longrightarrow H$ tal que $\phi \circ i = j$. Também, como (H, j) tem a propriedade universal para X, para o grupo abeliano G e função $i : X \longrightarrow G$ existe um único homomorfismo $\psi : H \longrightarrow G$ tal que $\psi \circ j = i$. Além disso, temos que $(\phi \circ \psi) \circ j = \phi \circ (\psi \circ j) = \phi \circ i = j$ e $1_H \circ j = j$. Assim $\phi \circ \psi = 1_H$. Também, $(\psi \circ \phi) \circ i = \psi \circ (\phi \circ i) = \psi \circ j = i$ e $1_G \circ i = i$. Desse modo, $\psi \circ \phi = 1_G$, pois (G, i) tem a propriedade universal para X. Logo ϕ é bijetor. Portanto ϕ é um isomorfismo e G e H são isomorfos. □

Proposição 3.6. *Suponha que $X_1 \cap X_2 = \varnothing$ e que (G_1, i_1) tem a propriedade universal para X_1 e (G_2, i_2) tem a propriedade universal para X_2. Então $(G_1 \oplus G_2, i)$ tem a propriedade universal para $X_1 \cup X_2$ onde $i : X_1 \cup X_2 \longrightarrow G_1 \oplus G_2$ é definida por:*

$$i(x) = \begin{cases} (i_1(x), 0), & se\ x \in X_1 \\ (0, i_2(x)), & se\ x \in X_2 \end{cases}$$

Demonstração. Dado um grupo abeliano A qualquer e uma função $j : X_1 \cup X_2 \longrightarrow A$, devemos provar que existe um único homomorfismo $\phi : G_1 \oplus G_2 \longrightarrow A$ tal que $\phi \circ i = j$. Considere $k_i : X_i \longrightarrow X_1 \cup X_2$, $i = 1, 2$ as inclusões naturais.

Para a aplicação $j \circ k_1 : X_1 \longrightarrow A$, existe um único homomorfismo $\phi_1 : G_1 \longrightarrow A$ tal que $\phi_1 \circ i_1 = j \circ k_1$ e para a aplicação $j \circ k_2 : X_2 \longrightarrow A$, existe um único homomorfismo $\phi_2 : G_2 \longrightarrow A$ tal que $\phi_2 \circ i_2 = j \circ k_2$.

Defina $\phi = (\phi_1, \phi_2) : G_1 \oplus G_2 \longrightarrow A$ por $\phi(x, y) = \phi_1(x) + \phi_2(y)$. Então

$$\phi \circ i(x) = \begin{cases} \phi(i_1(x), 0), & \text{se } x \in X_1 \\ \phi(0, i_2(x)), & \text{se } x \in X_2 \end{cases} = \begin{cases} \phi_1 \circ i_1(x), & \text{se } x \in X_1 \\ \phi_2 \circ i_2(x), & \text{se } x \in X_2 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} j \circ k_1(x), & \text{se } x \in X_1 \\ j \circ k_2(x), & \text{se } x \in X_2 \end{cases} = \begin{cases} j(x), & \text{se } x \in X_1 \\ j(x), & \text{se } x \in X_2 \end{cases} = j(x), \text{ se } x \in X_1 \cup X_2$$

Resta mostrar que ϕ é única. Suponha que exista $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ tal que $\psi \circ i = j$. Então

$$\psi \circ i(x) = \begin{cases} \psi(i_1(x), 0), & \text{se } x \in X_1 \\ \psi(0, i_2(x)), & \text{se } x \in X_2 \end{cases} = \begin{cases} \psi_1 \circ i_1(x), & \text{se } x \in X_1 \\ \psi_2 \circ i_2(x), & \text{se } x \in X_2 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} j(x), & \text{se } x \in X_1 \\ j(x), & \text{se } x \in X_2 \end{cases} = \begin{cases} j \circ k_1(x), & \text{se } x \in X_1 \\ j \circ k_2(x), & \text{se } x \in X_2 \end{cases}$$

Então $\psi_1 \circ i_1 = j \circ k_1$ e portanto $\psi_1 = \phi_1$. Analogamente, $\psi_2 \circ i_2 = j \circ k_2$ e portanto $\psi_2 = \phi_2$. Logo $\psi = \phi$ e portanto existe um único homomorfismo ϕ tal que $\phi \circ i = j$. □

Proposição 3.7. *Se X é finito, existe (G, i) com a propriedade universal para X.*

Demonstração. Se $X = \{x\}$ e $i : X \longrightarrow \mathbb{Z}$ tal que $i(x) = 1$, pela proposição 3.3, $(\mathbb{Z}, i)$ tem a propriedade universal para X.

Se $X_1 = \{x\}$ e $i_1 : X_1 \longrightarrow \mathbb{Z}$ tal que $i_1(x) = 1$, pela proposição 3.3, $(\mathbb{Z}, i_1)$ tem a propriedade universal para X_1 e se $X_2 = \{y\}$ e $i_2 : X_2 \longrightarrow \mathbb{Z}$ tal que $i_2(y) = 1$, pela proposição 3.3, $(\mathbb{Z}, i_2)$ tem a propriedade universal para X_2. Seja $X = \{x, y\} = X_1 \cup X_2$, $G = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ e $i : X \longrightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ tal que $i(x) = (1, 0)$ e $i(y) = (0, 1)$. Pela proposição 3.6 $(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, i)$ tem a propriedade universal para X.

Por indução, podemos mostrar que se $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $G = \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}}_{\text{n vezes}} = \mathbb{Z}^n$ e $i : X \longrightarrow G$, com $i(x_j) = (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{j}, 0, \ldots, 0)$ então $(\mathbb{Z}^n, i)$ tem a propriedade universal para X. □

Seja X um conjunto qualquer e definamos $F(X) = \{\xi : X \to \mathbb{Z}; \xi(x) = 0$, exceto possivelmente por um número finito de elementos $x \in X\}$. Dados $\xi, \eta \in F(X)$ definamos $-\xi, \xi + \eta$ por $(-\xi)(x) = -\xi(x)$ e $(\xi + \eta)(x) = \xi(x) + \eta(x)$. Então $(F(X), +)$ é um grupo abeliano. Defina $i_X : X \to F(X)$ por

$$i_X(x)(y) = \begin{cases} 1, & \text{se } x = y \\ 0, & \text{se } x \neq y. \end{cases}$$

Teorema 3.3. *$(F(X), i_X)$ tem a propriedade universal para X.*

Demonstração. Se $Y \subset X$, podemos fazer a identificação $F(Y) \equiv \{\xi \in F(X); \xi(X - Y) = 0\}$ de modo que, dado $\eta \in F(Y)$, definimos $\xi : X \to \mathbb{Z}$ tal que $\xi(Y) = \eta(Y)$ e $\xi(X - Y) = 0$ e, dado $\xi \in \{\xi \in F(X); \xi(X - Y) = 0\}$, definimos $\eta : Y \to \mathbb{Z}$ por $\eta = \xi|_Y$.

Se $\xi \in F(X)$, existe algum subconjunto Y de X, finito, com $\xi(X - Y) = 0$, então $\xi \in F(Y)$. Assim $F(X) = \bigcup\{F(Y); Y \subset X, Y \text{ finito}\}$.

Se Y é finito, $(F(Y), i_Y)$ tem a propriedade universal para Y, visto que $(F(Y), i_Y)$ pode ser identificado com $(\mathbb{Z}^n, i)$, onde n é o número de elementos de Y e, pela proposição 3.7, $(\mathbb{Z}^n, i)$ tem a propriedade universal para Y.

Seja A um grupo abeliano qualquer e $j : X \to A$, uma função. Vimos que se $Y \subset X$ é finito, então existe um único homomorfismo $\phi_Y : F(Y) \to A$ tal que $\phi_Y \circ i_Y = j|_Y$.

Se $Z \subset Y$, então $F(Z) \subset F(Y)$, $i_Z = i_Y|_Z$ e $(\phi_Y|_{F(Z)}) \circ i_Z = j|_Z$. De fato, se $Z \subset Y$, observamos que $F(Z) \equiv \{\xi \in F(Y); \xi(Y - Z) = 0\}$. Logo $F(Z) \subset F(Y)$. Para qualquer $x \in Z, i_Z(x) \in F(Z)$ pode ser vista, pela identificação acima, como uma função $i_Z(x) : Y \to \mathbb{Z}$ satisfazendo $i_Z(x)(Y - Z) = 0$.

Para provarmos que $i_Z = i_Y|_Z$ basta verificarmos que, para qualquer $x \in Z, i_Y(x) : Y \to \mathbb{Z}$ satisfaz $i_Y(x)(Y - Z) = 0$. Mas, de fato, se $w \in Y - Z$, como $x \in Z, w \neq x$ e portanto $i_Y(x)(w) = 0$ por definição de $i_Y(x)$. Logo $i_Z = i_{Y|Z}$. Por outro lado, para qualquer $x \in Z, (\phi_Y|_{F(Z)}) \circ i_Z(x) = (\phi_Y|_{F(Z)})(i_Z(x)) = \phi_Y(i_Z(x)) = \phi_Y(i_Y|_Z(x)) = j|_Z(x)$.

Como Z é finito, $(F(Z), i_Z)$ tem a propriedade universal para Z. Assim existe um único homomorfismo $\phi_Z : F(Z) \to A$; $\phi_Z \circ i_Z = j|_Z$. Portanto $\phi_Z = \phi_Y|_{F(Z)}$.

Definamos, agora $\phi : F(X) \to A$. Para qualquer $\xi \in F(X)$ escolha $Y \subset X$, finito, com $\xi \in F(Y)$ e defina $\phi(\xi) = \phi_Y(\xi)$. Note que isto não depende de Y, pois se também $\xi \in F(Y')$, temos $\phi_Y(\xi) = \phi_{Y \cup Y'}(\xi) = \phi_{Y'}(\xi)$. Temos que ϕ é um homomorfismo, pois, dados $\xi_1, \xi_2 \in F(X)$, escolha $Y_1, Y_2 \subset X$, finitos, com $\xi_1 \in F(Y_1)$ e $\xi_2 \in F(Y_2)$. Seja $Y = Y_1 \cup Y_2$. Então $\phi(\xi_1 + \xi_2) = \phi_Y(\xi_1 + \xi_2) = \phi_Y(\xi_1) + \phi_Y(\xi_2) = \phi(\xi_1) + \phi(\xi_2)$, pois ϕ_Y é homomorfismo. Para todo $x \in X$, temos $\phi(i_X(x)) = \phi_{\{x\}}(i_{\{x\}}(x)) = j(x)$. Assim $\phi \circ i_X = j$.

Dado qualquer homomorfismo $\psi : F(X) \to A$, com $\psi \circ i_X = j$, temos para qualquer $Y \subset X$, finito, $\psi|_{F(Y)} \circ i_Y = \psi \circ (i_X|_Y) = j|_Y = \phi_Y \circ i_Y = \phi|_{F(Y)} \circ i_Y$ e portanto $\psi|_{F(Y)} = \phi|_{F(Y)}$. Como $F(X)$ é a união desses subgrupos $F(Y)$, segue que $\psi = \phi$. $\square$

Para cada conjunto X, construímos $(F(X), i_X)$ com a propriedade universal para X. Usualmente, escrevemos apenas i para designar i_X, e chamamos $F(X)$ o grupo abeliano livre sobre X. Agora dada qualquer função $f : X \to Y$, existe (pela propriedade universal) um único homomorfismo $F(f) : F(X) \to F(Y)$ tal que $F(f) \circ i_X = i_Y \circ f$, ou seja, comuta o diagrama

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_X"'] & Y \arrow[d, "i_Y"] \\ F(X) \arrow[r, "F(f)"] & F(Y). \end{tikzcd}$$

4 O grupo $H^0(X)$, o conjunto $\pi_0(X)$ e o grupo $H_0(X)$

Geralmente, ao estudar topologia algébrica, necessita-se começar com uma noção geométrica relativamente simples, e em seguida, construir aparatos através de métodos algébricos. Neste capítulo, iremos desenvolver algebricamente as ideias básicas de conexos e conexos por caminhos.

4.1 O Grupo $H^0(X)$

Definição 4.1. *$H^0(X)$ é o conjunto das aplicações contínuas $X \to \mathbb{Z}$.*

A razão pela qual se usa o símbolo zero na notação é que H^0 é o primeiro de uma sequência de construções análogas, baseada em várias dimensões. H^0 é o caso zero-dimensional.

Lema 4.1. *Se $f, g : X \to \mathbb{Z}$ são aplicações contínuas, definimos $(f+g) : X \to \mathbb{Z}$ por $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $(x \in X)$. Então $f+g$ é contínua e $(H^0(X), +)$ é um grupo.*

Demonstração. De fato, como $\mathbb{Z}$ é associativo, a operação $+$ é associativa, o elemento oposto é a funçao contínua $-f : X \to \mathbb{Z}$ definida por $(-f)(x) = -f(x)$ e o elemento neutro é a função nula $O : X \to \mathbb{Z}$ definida por $O(x) = 0$. □

Observação 4.1. Desde que $(\mathbb{Z}, +)$ é um grupo abeliano, $(H^0(X), +)$ também é um grupo abeliano.

Lema 4.2. *X é conexo se, e somente se, toda aplicação $X \to \mathbb{Z}$ for constante.*

Demonstração. Com efeito, se X não for conexo, existe uma aplicação não constante de X em $\{0, 1\} \subset \mathbb{Z}$. Reciprocamente, se existir uma aplicação não constante $X \xrightarrow{f} \mathbb{Z}$ com $n \in f(X)$, definimos $r : \mathbb{Z} \to \{0, 1\}$ por

$$r(n) = 0,$$

$$r(\mathbb{Z} - \{n\}) = 1;$$

e então r é contínua. Assim, $r \circ f : X \to \{0, 1\}$ é contínua e sobrejetora, e segue do lema 2.4 que X é desconexo. □

Definição 4.2. *Seja $f : X \to Y$ uma aplicação contínua. Definimos $f^* : H^0(Y) \to H^0(X)$ por $f^*(g) = g \circ f$.*

Lema 4.3. *f^* é um homomorfismo. Se 1 é a aplicação identidade de X, 1^* é a identidade de $H^0(X)$. Se $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$, então $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.*

Demonstração. Com efeito, $\forall g_1, g_2 \in H^0(Y)$,$\forall x \in X$,

$$\begin{aligned} f^*(g_1 + g_2)(x) &= ((g_1 + g_2) \circ f)(x) \\ &= (g_1 + g_2)(f(x)) \\ &= g_1(f(x)) + g_2(f(x)) \\ &= g_1 \circ f(x) + g_2 \circ f(x) \\ &= f^*(g_1)(x) + f^*(g_2)(x) \\ &= (f^*(g_1) + f^*(g_2))(x), \end{aligned}$$

e portanto, temos um homomorfismo. A segunda afirmação é simples, pois $\forall g \in H^0(X)$, $1^*(g) = g \circ 1 = g$. Assim 1^* é a identidade de $H^0(X)$.

Resta mostrar a terceira afirmação:

$$(g \circ f)^*(h) = h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f = f^*(h \circ g) = f^*(g^*(h)) = (f^* \circ g^*)(h).$$

□

Essas propriedades parecem triviais, e neste caso, realmente são. No entanto, vale a pena destacá-las, pois precisaremos delas futuramente em demonstrações análogas não tão triviais.

4.2 O Conjunto $\pi_0(X)$

Vamos retomar as investigações sobre conjuntos conexos por caminhos. Definimos uma relação binária $\sim$ entre dois pontos de um espaço X por $x \sim y$, quando existir um caminho em X, unindo x a y. A seguir provaremos importantes propriedades.

Lema 4.4. *A relação $\sim$ acima é uma relação de equivalência em X.*

Demonstração. Definimos $f_x : I \to X$ por $f_x(t) = x$ para todo $t \in I$. Evidentemente, f_x é contínua. Como $f_x(0) = f_x(1) = x$, está demonstrado a propriedade reflexiva $x \sim x$.

Agora definimos $R : I \to I$ por $R(t) = 1 - t$. Então R é contínua. Se $f : I \to X$ é um caminho unindo x a y, $f(0) = x, f(1) = y$, então $f \circ R : I \to X$ une y a x, e é contínua, pois f e R também o são. Assim $\sim$ é simétrica.

Finalmente, seja $f : I \to X$ um caminho unindo x a y e $g : I \to X$ um caminho unindo y a z, de modo que

$$f(0) = x, f(1) = g(0) = y \text{ e } g(1) = z.$$

Definimos a função $h : I \to X$ por,

$$h(t) = \begin{cases} f(2t), & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ g(2t-1), & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

As duas definições são satisfeitas em $t = \dfrac{1}{2}$, pois $f(1) = g(0) = y$. Assim, pelo Lema da colagem h é contínua e, evidentemente, $h(0) = x$ e $h(1) = z$. Portanto h representa um caminho ligando x a z e assim $x \sim z$, de modo que $\sim$ é transitiva. □

Chamaremos $\pi_0(X)$ o conjunto das classes de equivalência dos pontos de X relacionados por $\sim$. As classes de equivalência são chamadas **componentes conexas por caminhos** de X.

Lema 4.5. *X é conexo por caminhos se, e somente se, $\pi_0(X)$ possui um único elemento.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Se X for conexo por caminhos devemos mostrar que para quaisquer dois elementos $x, y \in X$, $[x] = [y]$. De fato, como X é conexo por caminhos, para quaisquer dois elementos $x, y \in X$, existe um caminho que os une, e portanto $x \sim y$ e $y \sim x$. Assim, $x' \in [x] \Leftrightarrow x' \sim x \Leftrightarrow x' \sim y \Leftrightarrow x' \in [y]$. Logo $[x] = [y]$, para todos $x, y \in X$.

($\Leftarrow$) Sejam $x, y \in X$. Como $\pi_0(X)$ possui um único elemento, então $[x] = [y]$. Logo $x \sim y$ e assim existe um caminho ligando x a y. Portanto X é conexo por caminhos. □

A aplicação canônica será $X \overset{p_X}{\to} \pi_0(X)$, e esta levará cada ponto de X na sua classe de equivalência. Quando não houver confusão escreveremos simplesmente p. Além disso, em analogia com o lema 4.2 teremos as aplicações induzidas. Assim, seja $f : X \to Y$ uma aplicação contínua entre espaços topológicos. Então, se $x \sim x'$, x, x' pontos de X, existe um caminho $q : I \to X$ que os une. Deste modo, $f \circ q : I \to Y$ é um caminho unindo $f(x)$ a $f(x')$, de modo que $f(x) \sim f(x')$ em Y. Portanto, a aplicação f induz uma aplicação bem definida

$$f_* : \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$$

dada por

$$f_*([x]) = [f(x)].$$

Assim, temos o diagrama (comutativo) a seguir

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ {\scriptstyle p_X}\big\downarrow & & {\scriptstyle p_Y}\big\downarrow \\ \pi_0(X) & \xrightarrow{f_*} & \pi_0(Y) \end{array}$$

isto é $f_* \circ p_X = p_Y \circ f$.

Lema 4.6. *Se 1 é a aplicação identidade de X, 1_* é a aplicação identidade de $\pi_0(X)$. Se $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$, então $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$.*

Demonstração. A prova é simples. Por definição,

$$(g \circ f)_*([x]) = [(g \circ f)(x)]$$

e

$$(g_* \circ f_*)([x]) = g_*(f_*([x])) = g_*([f(x)]) = [g(f(x))] = [(g \circ f)(x)],$$

e portanto temos a igualdade. Analogamente, se 1 é a identidade de X, segue que

$$1_*([x]) = [1(x)] = [x].$$

□

Agora, mostraremos que se $\pi_0(X)$ contém apenas um elemento, então $H^0(X)$ contém apenas aplicações constantes.

Definição 4.3. *Denotaremos por $MAP(\pi_0(X), \mathbb{Z})$ o conjunto das funções contínuas com valores inteiros definidas em $\pi_0(X)$.*

Teorema 4.1. *Seja $f : X \longmapsto \mathbb{Z}$ pertencente a $H^0(X)$. Então se $x \sim x'$ como pontos de X, $f(x) = f(x')$. Assim f pode ser fatorada da seguinte forma:*

$$\overbrace{X \xrightarrow{p} \pi_0(X) \xrightarrow{c(f)} \mathbb{Z}}^{f}.$$

A operação de soma de funções dá uma estrutura de um grupo abeliano à $MAP(\pi_0(X), \mathbb{Z})$. A aplicação definida acima

$$c : H^0(X) \longmapsto MAP(\pi_0(X), \mathbb{Z})$$

é um homomorfismo injetor de grupos abelianos.

Demonstração. Se $x \sim x'$, existe um caminho $q : I \to X$ unindo x a x'. Então $f \circ q : I \to \mathbb{Z}$ é um caminho ligando $f(x)$ a $f(x')$. Como I é conexo, pelo lema 4.2, $f \circ q$ é constante e portanto $f(x) = f(x')$. Para garantir que f se fatora como $f = c(f) \circ p$, defina $c(f) : \pi_0(X) \to \mathbb{Z}$ por $c(f)[x] = f(x)$, e observe que dados x e x' pertencentes a X, com $[x] = [x']$, temos pela primeira parte da demonstração que $f(x) = f(x')$, e portanto $c(f)$ está bem definida. Além disso $c(f) \circ p(x) = c(f)[x] = f(x)$. Agora $\text{MAP}(\pi_0(X), \mathbb{Z})$ com a operação de soma de funções é um grupo abeliano, pois satisfaz:

i) Associatividade: Dados f, g, h pertencentes a $MAP(\pi_0(X), \mathbb{Z})$, temos

$$\begin{aligned} ((f+g)+h)[x] &= (f+g)[x] + h[x] \\ &= (f[x] + g[x]) + h[x] \\ &\overset{*}{=} f[x] + (g[x] + h[x]) \\ &= f[x] + (g+h)[x] \\ &= (f + (g+h))[x]. \end{aligned}$$

Logo $(f+g)+h = f+(g+h)$ ($*$: em $\mathbb{Z}$ vale a associatividade).

ii) Elemento neutro: Considere $f : \pi_0(X) \longmapsto \mathbb{Z}$ dada por $f[x] = 0, \forall [x] \in \pi_0(X)$. Então, $\forall\ g \in MAP(\pi_0(X), \mathbb{Z})$,

$$\begin{aligned} (f+g)[x] &= f[x] + g[x] \\ &= 0 + g[x] \\ &= g[x] \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} (g+f)[x] &= g[x] + f[x] \\ &= g[x] + 0 \\ &= g[x]. \end{aligned}$$

Logo $MAP(\pi_0(X), \mathbb{Z})$ possui elemento neutro.

iii) Elemento oposto: Dada $f \in MAP(\pi_0(X), \mathbb{Z})$, tomemos $-f : \pi_0(X) \longmapsto \mathbb{Z}$ dada por $(-f)[x] = -f[x], \forall\ [x] \in \pi_0(X)$. Então,

$$\begin{aligned} ((-f)+f)[x] &= (-f)[x] + f[x] \\ &= -f[x] + f[x] \\ &= 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} (f+(-f))[x] &= f[x] + (-f)[x] \\ &= f[x] - f[x] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo $MAP(\pi_0(X), \mathbb{Z})$ possui elemento oposto.

iv) Comutatividade: Dados f, g pertencentes a $MAP(\pi_0(X), \mathbb{Z})$, temos

$$\begin{aligned} (f+g)[x] &= f[x] + g[x] \\ &\overset{*}{=} g[x] + f[x] \\ &= (g+f)[x]. \end{aligned}$$

Logo $f + g = g + f$. ($*$: em $\mathbb{Z}$ vale a comutatividade)

Mostremos agora que $c : H^0(X) \longmapsto MAP(\pi_0(X), \mathbb{Z})$ é um monomorfismo de grupos abelianos. De fato, dados $f, g \in H^0(X)$ temos

$$\begin{aligned} c(f+g)[x] &= (f+g)(x) \\ &= f(x) + g(x) \\ &= c(f)[x] + c(g)[x] \\ &= (c(f) + c(g))[x]. \end{aligned}$$

Logo $c(f+g) = c(f) + c(g)$. Além disso, Se $f, g \in H^0(X)$, como $f = c(f) \circ p$ e $g = c(g) \circ p$ então, se $c(f) = c(g)$ temos $f = c(f) \circ p = c(g) \circ p = g$, e portanto c é injetor. $\square$

O teorema 4.1 contém a primeira afirmação do teorema 2.9, pois se X é conexo por caminhos, $\pi_0(X)$ possui apenas um elemento, e assim todas as funções $\pi_0(X) \to \mathbb{Z}$ são constantes, e segue da decomposição de f, mencionada no teorema anterior, que $H^0(X)$ possui apenas funções constantes, ou seja, X é conexo (veja lema 4.2). Investiguemos a segunda afirmação do teorema 2.9.

Tínhamos um espaço $Y = U \cup V$ que era conexo, mas não era conexo por caminhos, embora U e V os fossem. Não é difícil ver que $\pi_0(Y) = \{U, V\}$, pois U e V são conexos por caminhos. A imagem de c contém apenas funções constantes $\pi_0(Y) \to \mathbb{Z}$, pois Y é conexo. Logo c não é sobrejetora.

Do mesmo modo que esperamos que um espaço conexo seja conexo por caminhos para, digamos, "espaços bem comportados", aqui podemos esperar que c seja sobrejetora. Para garantir que X seja conexo por caminhos, é necessário que X seja localmente conexo por caminhos. Analogamente, precisaremos que X seja localmente conexo por caminhos para garantir a sobrejetividade de c. Antes disso, demonstraremos um lema, cujo resultado está contido implicitamente no teorema 2.10.

Lema 4.7. *Seja X localmente conexo por caminhos. Então suas componentes conexas por caminhos são abertas em X.*

Demonstração. Seja ξ uma componente conexa por caminhos e $x \in \xi$. Como X é localmente conexo por caminhos em x, x possui uma vizinhança conexa por caminhos W. Todos os pontos de W podem ser unidos a x por um caminho, então $W \subset \xi$. Como ξ contém uma vizinhança para cada um de seus pontos, ξ é aberto. □

Teorema 4.2. *Se X é localmente conexo por caminhos então $c : H^0(X) \longmapsto MAP(\pi_0(X), \mathbb{Z})$ é um isomorfismo.*

Demonstração. Pelo teorema 4.1 sabemos que c é um homomorfismo injetor. Resta mostrar que c é sobrejetor.

Se uma função $F : \pi_0(X) \longmapsto \mathbb{Z}$ está na imagem de c, então existe $f \in H^0(X)$ com $c(f) = F$. Como c foi caracterizado por $f = c(f) \circ p$, temos que $f = F \circ p : X \longmapsto \mathbb{Z}$ é contínua, e reciprocamente, se $f = F \circ p : X \longmapsto \mathbb{Z}$ é contínua, temos que F está na imagem de c. Assim, para mostrar a sobrejetividade de c, basta mostrar que f é contínua. Agora, para cada $n \in \mathbb{Z}$, $F^{\vdash}\{n\}$ será a união de componentes conexas por caminhos ξ, tais que $F(\xi) = n$.

Como X é localmente conexo por caminhos, segue do lema 4.7 que essas componentes são todas abertas. Assim $F^{\vdash}\{n\}$ é um aberto, de onde segue que $f^{\vdash}\{n\}$ é aberto, e portanto f é contínua. □

4.3 O Grupo $H_0(X)$

Agora, vamos introduzir mais um elemento da álgebra, retomando os grupos abelianos livres do capítulo 3. Recordemos que $F(X)$ é o grupo abeliano sobre (X, i), onde

$$i : X \to F(X),$$

e para qualquer grupo abeliano A, a função

$$\text{Hom}(F(X), A) \xrightarrow{i^*} MAP(X, A)$$

definida por $h \xrightarrow{i^*} h \circ i$ é bijetora.

Além disso, dado um conjunto X, $F(X)$ denota o conjunto das funções $\xi : X \to \mathbb{Z}$ com $\xi(x) = 0$ para todo $x \in X$, exceto um número finito de elementos, o qual, com a operação usual de soma de funções, torna-se um grupo abeliano. Ainda, definindo $i : X \to F(X)$ por

$$i(x)(y) = \begin{cases} 0, & se\ x \neq y \\ 1, & se\ x = y \end{cases}$$

temos que $F(X)$ é abeliano livre sobre (X, i).

Definição 4.4. $H_0(X) = F(\pi_0(X))$

A projeção $p : X \to \pi_0(X)$ induz um homomorfismo $F(p) : F(X) \to F(\pi_0(X)) = H_0(X)$, o qual é caracterizado pelo diagrama comutativo a seguir

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{p} & \pi_0(X) \\ {\scriptstyle i}\big\downarrow & & {\scriptstyle i}\big\downarrow \\ F(X) & \xrightarrow{F(p)} & H_0(X) \end{array}$$

Logo, como $F(\pi_0(X))$ é um grupo abeliano livre,

$$i^* : \text{Hom}(H_0(X), \mathbb{Z}) \to MAP(\pi_0(X), \mathbb{Z})$$

é um isomorfismo.

De fato, já sabemos que i^* é bijetora, assim, basta mostrar que é um homomorfismo.

Dados $h_1, h_2 \in \text{Hom}(H_0(X), \mathbb{Z})$

$$\begin{aligned} i^*(h_1 + h_2)[x] &= ((h_1 + h_2) \circ i)([x]) \\ &= (h_1 + h_2)(i[x]) \\ &= h_1(i[x]) + h_2(i[x]) \\ &= ((h_1 \circ i)[x] + (h_2 \circ i))[x] \\ &= i^*(h_1)[x] + i^*(h_2)[x] \\ &= (i^*(h_1) + i^*(h_2))[x]. \end{aligned}$$

Logo $i^*(h_1 + h_2) = i^*(h_1) + i^*(h_2)$ e i^* é um isomorfismo.

Combinando este resultado com os teoremas 4.1 e 4.2, temos demonstrado o teorema a seguir.

Teorema 4.3. *Para todo conjunto X, $(i^*)^{-1} \circ c = k : H^0(X) \to Hom(H_0(X), \mathbb{Z})$ é um homomorfismo injetor de grupos abelianos. Se X é localmente conexo por caminhos então k é um isomorfismo.*

No próximo capítulo generalizaremos a relação $\sim$ de equivalência.

5 Homotopia

Agora generalizaremos a construção de $\pi_0(X)$ feita no capítulo anterior. Esta foi obtida através de uma relação de equivalência nos pontos de X. Agora se $\{0\}$ é um conjunto com um único elemento, uma função $\{0\} \to X$ determina um ponto de X, e pode ser identificado com este ponto. A generalização será feita substituindo $\{0\}$ por um espaço arbitrário. Naturalmente, isto fará com que o nosso objeto de estudo seja visualizado com mais facilidade. Observamos que em todo este capítulo, $I = [0, 1]$.

Definição 5.1. *Duas funções contínuas $f, g : Y \to X$ são chamadas homotópicas, se existe uma função contínua $F : Y \times I \to X$ onde para todo $y \in Y$, temos*

$$\begin{cases} F(y,0) = f(y) \\ F(y,1) = g(y) \end{cases}.$$

Quando isto ocorre, dizemos que F é uma homotopia entre f e g, e denotamos por $F : f \simeq g$.

Por exemplo, se f é homotópica a uma função constante, ela é chamada *homotopicamente nula*. Será conveniente, muitas vezes, usar uma notação diferente para F, e escrever, para $y \in Y, t \in I$,

$$f_t(y) = F(y,t).$$

Nesta notação a homotopia é menos clara, mas é mais fácil para reconhecer $f_t : Y \to X$ (contínua) como uma deformação contínua de $f = f_0$ em $f_1 = g$.

A justificativa para a afirmação de que f_t é contínua é o fato de f_t poder ser escrita como uma composição de funções contínuas

$$Y \xrightarrow{i_t} Y \times I \xrightarrow{F} X,$$

onde i_t é a função $i_t(y) = (y,t)$.

Lema 5.1. *Homotopia é uma relação de equivalência entre funções contínuas $Y \to X$.*

Demonstração. i) Reflexiva: Se $f : Y \to X$, tomemos $F : Y \times I \to X$ com $F(y,t) = f(y)$, $\forall t \in I$. F é contínua, pois se escreve como composta de funções contínuas, a saber, $F = f \circ p_1$, onde $p_1 : Y \times I \to Y$, definida por $p_1(y,t) = y, \forall y \in Y$, denota a projeção no primeiro fator. Como $F(y,0) = f(y), F(y,1) = f(y)$, segue que $f \simeq f$.

ii) Simétrica: Sejam $f, g : Y \to X$ com $f \simeq g$, e $F : Y \times I \to X$ a homotopia entre f e g.

Tomemos $R : Y \times I \to Y \times I$, dada por $R(y,t) = (y, 1-t)$, que é contínua. Então $F \circ R : Y \times I \to X$ é contínua, e

$$\begin{aligned} F \circ R(y,0) &= F(R(y,0)) = F(y,1) = g(y) \\ F \circ R(y,1) &= F(R(y,1)) = F(y,0) = f(y) \end{aligned}$$

e portanto $g \simeq f$.

iii) Transitiva: Sejam $f, g, h : Y \to X$ onde $f \simeq g$, $g \simeq h$, com $F : Y \times I \to X$, $G : Y \times I \to X$ homotopias entre f e g, e g e h respectivamente. Tomemos $H : Y \times I \to X$ com

$$H(y,t) = \begin{cases} F(y, 2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(y, 2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}.$$

H é contínua segundo o lema da colagem, e como $H(y,0) = F(y,0) = f(y)$ e $H(y,1) = G(y,1) = h(y)$, segue que $f \simeq h$.

Portanto, homotopia é uma relação de equivalência entre funções contínuas. □

Classes de equivalência criadas a partir da relação de homotopia, são chamadas *classes de homotopia*. Denotaremos por $[Y, X]$ o conjunto das classes de homotopia das funções contínuas $f : Y \to X$ e $[f]$ a classe de equivalência contendo a função f.

Para o lema a seguir, para dois conjuntos quaisquer A, B, $p_1 : A \times B \to A$ e $p_2 : A \times B \to B$ definidas por $p_1(a,b) = a, \forall (a,b) \in A \times B$ e $p_2(a,b) = b, \forall (a,b) \in A \times B$, denotam as projeções no primeiro e segundo fator, respectivamente.

Lema 5.2. *Dadas $h : Z \to Y$; $g_0, g_1 : Y \to X$, e $f : X \to W$ funções contínuas, se $g_0 \simeq g_1$, então,*

$$g_0 \circ h \simeq g_1 \circ h \ \text{ e } \ f \circ g_0 \simeq f \circ g_1.$$

Demonstração. Seja $G : Y \times I \to X$ uma homotopia de g_0 a g_1. Então $f \circ G : Y \times I \to W$ é uma homotopia de $f \circ g_0$ a $f \circ g_1$, pois $f \circ G$ é contínua e

$$\begin{aligned} (f \circ G)(y,0) &= f(G(y,0)) = f(g_0(y)) = (f \circ g_0)(y) \\ (f \circ G)(y,1) &= f(G(y,1)) = f(g_1(y)) = (f \circ g_1)(y) \end{aligned}.$$

Para a outra parte definimos $h \times 1 : Z \times I \to Y \times I$ por $(h \times 1)(z,t) = (h(z), t)$, que possui componentes contínuas $p_1 \circ (h \times 1) = h \circ p_1$ e $p_2 \circ (h \times 1) = p_2$, sendo p_1 e p_2 as projeções nos primeiro e segundo fatores, respectivamente. Segue que $h \times 1$ é contínua e $G \circ (h \times 1) : Z \times I \to X$ é uma homotopia de $g_0 \circ h$ a $g_1 \circ h$, pois $G \circ (h \times 1)$ é contínua e

$$\begin{aligned} (G \circ (h \times 1))(z,0) &= G((h \times 1)(z,0)) = G(h(z),0) = (g_0 \circ h)(z) \\ (G \circ (h \times 1))(z,1) &= G((h \times 1)(z,1)) = G(h(z),1) = (g_1 \circ h)(z). \end{aligned}$$

□

Corolário 5.1. *Se* $g_0 \simeq g_1 : Y \to X$ *e* $f_0 \simeq f_1 : X \to W$ *então* $f_0 \circ g_0 \simeq f_1 \circ g_1 : Y \to W$*.*

Demonstração. Usando ambas as partes do lema 5.2, temos $f_0 \circ g_0 \simeq f_0 \circ g_1 \simeq f_1 \circ g_1$. Pela transitividade do lema 5.1 segue que $f_0 \circ g_0 \simeq f_1 \circ g_1$. □

Esse corolário mostra que as classes de homotopia $[f \circ g]$, dependem somente das classes de homotopia $[f]$ e $[g]$. Podemos, desta forma, definir a composição de classes de homotopia por

$$[f] \circ [g] = [f \circ g].$$

Para constatar que a operação $\circ$ está bem definida, temos que mostrar que dados f e f^*, g e g^*, com $[f] = [f^*]$ e $[g] = [g^*]$, então $[f^* \circ g^*] = [f \circ g]$.

De fato, se $[f] = [f^*]$ então $f \simeq f^*$ e, se $[g] = [g^*]$ então $g \simeq g^*$. Aplicando o corolário 5.1, temos $f \circ g \simeq f^* \circ g^*$, ou seja, $[f^* \circ g^*] = [f \circ g]$.

Lema 5.3. *Sejam* $h : Z \to Y$*,* $g : Y \to X$ *e* $f : X \to W$*, então*

$$[g] \circ [1_Y] = [g] = [1_X] \circ [g],$$
$$([f] \circ [g]) \circ [h] = [f] \circ ([g] \circ [h]).$$

Demonstração. Estes resultados seguem imediatamente, pois

$$\begin{aligned} [g] \circ [1_Y] &= [g \circ 1_Y] = [g] \\ [1_X] \circ [g] &= [1_X \circ g] = [g] \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} ([f] \circ [g]) \circ [h] &= [f \circ g] \circ [h] \\ &= [(f \circ g) \circ h] \\ &= [f \circ (g \circ h)] \\ &= [f] \circ [g \circ h] \\ &= [f] \circ ([g] \circ [h]). \end{aligned}$$

□

5.1 Equivalência de Homotopia

Uma função $f : Y \to X$ contínua é chamada uma *equivalência de homotopia*, com homotopia inversa $e : X \to Y$ contínua, se $[f] \circ [e] = [1_X]$ e $[e] \circ [f] = [1_Y]$, ou equivalentemente, $f \circ e \simeq 1_X$ e $e \circ f \simeq 1_Y$. Quando isso ocorrer, as funções F e G definidas abaixo

$$\begin{array}{cc} [Z,Y] \xrightarrow{F} [Z,X] & \qquad [Z,X] \xrightarrow{G} [Z,Y] \\ [h] \to [f] \circ [h] & \qquad [k] \to [e] \circ [k] \end{array}$$

serão bijetoras.

De fato,

i) dado $[h] \in [Z, X]$,

$$\begin{aligned} (F \circ G)[h] &= F(G([h])) \\ &= F([e] \circ [h]) \\ &= [f] \circ ([e] \circ [h]) \\ &= ([f] \circ [e]) \circ [h] \\ &= [1_X] \circ [h] \\ &= [h]. \end{aligned}$$

Segue que G é injetora e F é sobrejetora.

ii) dado $[k] \in [Z, Y]$,

$$\begin{aligned} (G \circ F)[k] &= G(F([k])) \\ &= G([f] \circ [k]) \\ &= [e] \circ ([f] \circ [k]) \\ &= ([e] \circ [f]) \circ [k] \\ &= [1_Y] \circ [k] \\ &= [k]. \end{aligned}$$

Segue que F é injetora e G é sobrejetora.

Por i) e ii), F e G são bijetoras.

Analogamente, existe bijeção entre $[Y, W]$ e $[X, W]$.

Definição 5.2. *Quando existe uma equivalência de homotopia entre espaços X e Y, dizemos que estes espaços são homotopicamente equivalentes.*

Exemplo 5.1. Sejam Y a esfera $S^{p-1} \subset \mathbb{R}^p \subset \mathbb{R}^{p+q}$ e X o subconjunto de $\mathbb{R}^{p+q}$ dos pontos que **não** estão contidos no plano $x_1 = x_2 = \cdots = x_p = 0$. Então a inclusão $i : Y \to X$ é uma equivalência de homotopia.

Definimos $e : X \to Y$ por

$$e(x_1, x_2, \ldots, x_p, \ldots, x_{p+q}) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_p),$$

onde $\lambda = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_p^2)^{-\frac{1}{2}} \neq 0$.

Temos que $e \circ i \simeq 1_Y$, pois dado $(x_1, x_2, \ldots, x_p) \in Y = S^{p-1}$,

$$\begin{aligned} e(i(x_1, x_2, \ldots, x_p)) &= e(x_1, x_2, \ldots, x_p, 0, \ldots 0) \\ &= (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_p) \\ &\overset{(*)}{=} (x_1, x_2, \ldots, x_p) \end{aligned}$$

$(*) \lambda = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_p^2)^{-1/2} = 1$, pois $(x_1, x_2, \ldots, x_p) \in S^{p-1}$.

Resta mostrar que $i \circ e \simeq 1_X$.

Definimos $H : X \times I \to X$ por

$$H((x_1, x_2, \ldots, x_{p+q}), t) = (\lambda^{1-t} x_1, \lambda^{1-t} x_2, \ldots, \lambda^{1-t} x_p, t x_{p+1}, \ldots, t x_{p+q}).$$

Assim,

$$\begin{aligned} H(x_1, x_2, \ldots, x_{p+q}, 0) &= (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_p, 0, \ldots, 0) \\ &= i \circ e(x_1, x_2, \ldots, x_p, \ldots, x_{p+q}) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} H(x_1, x_2, \ldots, x_{p+q}, 1) &= (x_1, x_2, \ldots, x_p, \ldots, x_{p+q}) \\ &= 1_X(x_1, x_2, \ldots, x_p, \ldots, x_{p+q}). \end{aligned}$$

Portanto, H é uma homotopia entre $i \circ e$ e 1_X, ou seja, $i \circ e \simeq 1_X$.

Um outro exemplo importante de equivalência de homotopia ocorre quando X tem apenas um ponto x. Se Y é homotopicamente equivalente a um ponto, Y é chamado *contrátil*.

A construção acima generaliza àquelas feitas no capítulo anterior, de modo que $[\{x\}, Z]$ está em correspondência biunívoca com $\pi_0(Z)$, onde $[\{x\}, Z] = \{[f] | f : \{x\} \to Z\}$ e $[f] = \{g : \{x\} \to Z | g \simeq f\}$. Esta correspondência é justificada pelo fato de que uma homotopia $H : \{x\} \times I \to Z$, entre f e g, pode ser vista como um caminho H_x, entre $f(x)$ e $g(x)$, onde $H_x : I \to Z$ é dado por $H_x(s) = H(x, s), \forall s \in I$. Assim $[f(x)] = [g(x)]$ em $\pi_0(Z)$, e portanto $[f]$ pode ser identificado com $[f(x)]$ em $\pi_0(Z)$.

Em outras palavras $\phi : [\{x\}, Z] \to \pi_0(Z)$ definida por $\phi([f]) = [f(x)]$ é uma bijeção.

Com efeito, $\phi([f]) = \phi([g]) \Rightarrow [f(x)] = [g(x)] \Rightarrow f(x) \sim g(x)$. Logo $\exists \alpha : I \to Z$ caminho unindo $f(x)$ a $g(x)$. Definamos $H : \{x\} \times I \to Z$ por $H(x, t) = \alpha(t)$. Então H é uma homotopia entre f e g e portanto $[f] = [g]$, mostrando que ϕ é injetora.

Agora, dada $[z_0] \in \pi_0(Z)$ tome $f : \{x\} \to Z$ definida por $f(x) = z_0$. Então $\phi([f]) = [z_0]$ e ϕ é sobrejetora.

Por outro lado, $[Z, \{x\}]$ tem apenas um elemento, a saber, o elemento $[f]$, onde $f : Z \to \{x\}$ é a função que associa a cada elemento $z \in Z$ o elemento x.

Assim, podemos concluir que para qualquer espaço Y contrátil, $[Z, Y]$ tem apenas um elemento, e $[Y, Z]$ está em correspondência biunívoca com $\pi_0(Z)$, pois se Y é contrátil, $[Z, Y]$ está em correspondência biunívoca com $[Z, \{x\}]$ que tem apenas um elemento e $[Y, Z]$ está em correspondência biunívoca com $[\{x\}, Z]$ que por sua vez está em correspondência biunívoca com $\pi_0(Z)$.

Também $H^0(X)$ está em correspondência biunívoca com $[X, \mathbb{Z}]$, onde $\mathbb{Z}$ denota o conjunto dos inteiros. Esta correspondência é justificada pelo fato de que uma homotopia H: $\{x\} \times I \to \mathbb{Z}$, entre f e g, pode ser vista como um caminho H_x, entre $f(x)$ e $g(x)$, onde $H_x : I \to \mathbb{Z}$ é dado por $H_x(s) = H(x, s), \forall s \in I$. Assim $f(x) = g(x), \forall x \in X$ conforme lema 4.2 e portanto $[f]$ pode ser identificada com f.

Em outras palavras $\psi : [X, \mathbb{Z}] \to H^0(X)$ definida por $\psi[f] = f$ é bijetora.

Com efeito, $\psi[f] = \psi[g] \Rightarrow f = g \Rightarrow [f] = [g]$ e portanto ψ é injetora.

Também, dado $h \in H^0(X)$ temos $\psi[h] = h$ e ψ é sobrejetora.

Exemplo 5.2. O intervalo aberto $]0, 1[$ é homotopicamente equivalente a $\{\frac{1}{2}\}$ e portanto $]0, 1[$ é contrátil.

De fato, definindo-se $f :]0,1[\to \{\frac{1}{2}\}$ por $f(t) = \frac{1}{2}, \forall t \in]0,1[$ e $g : \{\frac{1}{2}\} \to]0,1[$ por $g(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ temos $f \circ g(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} = id_{\{\frac{1}{2}\}}(\frac{1}{2})$ e $g \circ f(t) = g(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$.

Considere $H : I \times]0,1[\to]0,1[$ definida por $H(s,t) = \frac{1}{2}(1-s) + ts$. Então $H(0,t) = \frac{1}{2} = g \circ f(t), \forall t \in]0,1[$ e $H(1,t) = t = id_{]0,1[}(t), \forall t \in]0,1[$ e portanto $g \circ f$ é homotópica a $id_{]0,1[}$ e assim $]0,1[$ é homotopicamente equivalente a $\{\frac{1}{2}\}$ e consequentemente é contrátil.

5.2 Conjuntos de Homotopia e os Grupos $H^1(X)$

A notação $[X, Y]$ enfatiza a dependência simétrica do conjunto de homotopia sobre ambos os espaços X e Y. No entanto, será conveniente fixar um dos espaços, e fazer com que o conjunto de homotopia dependa do outro espaço. Quando fazemos isto, definimos uma nova notação para composição de funções,

$$[f] \circ [g] = g^*[f] = f_*[g].$$

Podemos então, reescrever o lema 5.3 como

Lema 5.4. *Sejam $h : Z \to Y, g : Y \to X$, e W um outro espaço. Então temos uma aplicação*

$$g^* : [X, W] \to [Y, W];$$

1_X^* é a aplicação identidade de $[X, W]$ e $h^* \circ g^* = (g \circ h)^*$. Temos também uma aplicação

$$g_* : [W, Y] \to [W, X];$$

1_{Y*} é a identidade de $[W, Y]$ e $g_* \circ h_* = (g \circ h)_*$. Ainda, se $f : A \to B$ então

$$f_* \circ g^* = g^* \circ f_* : [X, A] \to [Y, B].$$

Demonstração. 1_X^* é a aplicação identidade de $[X, W]$ pois, dado $[f] \in [X, W]$,

$$1_X^*([f]) \;=\; [f] \circ [1_X] = [f],$$

segundo o lema 5.3.

Também $h^* \circ g^* = (g \circ h)^*$ pois dado $[f] \in [X, W]$,

$$\begin{aligned} h^* \circ g^*([f]) &= h^*(g^*([f])) \\ &= h^*([f] \circ [g]) \\ &= h^*([f \circ g]) \\ &= [f \circ g] \circ [h] \\ &= [(f \circ g) \circ h] \\ &= [f \circ (g \circ h)] \\ &= [f] \circ [g \circ h] \\ &= [f] \circ ([g] \circ [h]) \\ &= [f] \circ [g \circ h] \\ &= (g \circ h)^*[f]. \end{aligned}$$

Agora $1_{Y*} : [W, Y] \to [W, Y]$ é a aplicação identidade de $[W, Y]$ pois, dado $[h] \in [W, Y]$, $1_{Y*}[h] = [1_Y] \circ [h] = [h]$ segundo o lema 5.3.

Além disso, $g_* \circ h_* = (g \circ h)_*$ pois, dado $[f] \in [W, Z]$,

$$\begin{aligned}
(g_* \circ h_*)[f] &= g_*(h_*([f])) \\
&= g_*([h] \circ [f]) \\
&= g_*([h \circ f]) \\
&= [g] \circ ([h \circ f]) \\
&= [g] \circ ([h] \circ [f]) \\
&= ([g] \circ [h]) \circ [f] \\
&= [g \circ h] \circ [f] \\
&= (g \circ h)_*[f].
\end{aligned}$$

Finalmente $f_* \circ g^* = g^* \circ f_*$ pois, dado $[k] \in [X, A]$,

$$\begin{aligned}
(f_* \circ g^*)[k] &= f_*(g^*([k])) \\
&= f_*([k] \circ [g]) \\
&= f_*[k \circ g] \\
&= [f] \circ [k \circ g] \\
&= [f] \circ ([k] \circ [g]) \\
&= ([f] \circ [k]) \circ [g] \\
&= g^*([f] \circ [k]) \\
&= g^*(f_*[k]) \\
&= g^* \circ f_*[k].
\end{aligned}$$

□

Observe que o lema 4.3 é um caso especial da primeira afirmação, fazendo $W = \mathbb{Z}$, e o lema 4.6 da segunda afirmação, fazendo $W = \{x\}$.

Agora analisaremos o caso em que W é um círculo.

Colocando $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z| = 1\}$, segue das propriedades dos números complexos que, S^1 é um grupo com relação à multiplicação, e que as funções, multiplicação $m : S^1 \times S^1 \to S^1$, dada por $m(x, y) = x \cdot y$, e a inversão $i : S^1 \to S^1$, dada por $i(z) = z^{-1}$, são contínuas. Um espaço topológico que é também um grupo, e possui tais propriedades, é chamado um *grupo topológico.*

Lema 5.5. *O conjunto $MAP(X, S^1)$ com a operação $MAP(X, S^1) \times MAP(X, S^1) \xrightarrow{*} MAP(X, S^1)$ dada por $(f, g) \to f * g : X \to S^1$, onde $(f * g)(x) = f(x) \cdot g(x)$, é um grupo abeliano. Esta operação é compatível com homotopias. O conjunto $[X, S^1]$ com a operação $[X, S^1] \times [X, S^1] \xrightarrow{\Delta} [X, S^1]$ dada por $\Delta([f], [g]) = [f * g]$, adquire a estrutura de um grupo. Se $f : Y \to X$ é contínua, $f^* : [X, S^1] \to [Y, S^1]$ é um homomorfismo.*

Demonstração. A operação $*$ está bem definida, pois dadas $c, d : X \to S^1$ aplicações contínuas, o produto $c * d$ pode ser definido como a composição $X \xrightarrow{(c,d)} S^1 \times S^1 \xrightarrow{m} S^1$

onde (c,d) denota a função com componentes c e d. Segue da continuidade de c e d que (c,d) é contínua e portanto $c*d$ é contínua, como composta de funções contínuas.

Agora, mostremos que $(MAP(X,S^1),*)$ é um grupo abeliano.

De fato, temos

i) Elemento neutro: $e : X \to S^1$ dada por $e(x) = 1,\ \forall\ x \in X$ é claramente contínua, e é o elemento neutro, pois, dada $f \in MAP(X,S^1)$, $e*f : X \to S^1$ é dada por $(e*f)(x) = e(x)\cdot f(x) = 1\cdot f(x) = f(x), \forall\ \ x \in X$, e portanto $e*f = f$.

ii) Elemento inverso: considerando $c \in MAP(X,S^1)$, segue da continuidade de c, que $c^{-1} : X \to S^1$ dada por $c^{-1}(x) = c(x)^{-1}$ é contínua.
Agora, $c^{-1}*c : X \to S^1$ é dada por $(c^{-1}*c)(x) = c^{-1}(x)\cdot c(x) = \frac{1}{c(x)}\cdot c(x) = 1 = e(x),\ \forall\ x \in X$, e portanto $c^{-1}*c = e$.

iii) Associatividade: Dados $c,d,e \in MAP(X,S^1)$, temos que

$$\begin{aligned}((c*d)*e)(x) &= (c*d)(x)\cdot e(x)\\ &= (c(x)\cdot d(x))\cdot e(x)\\ &\overset{\nabla}{=} c(x)\cdot(d(x)\cdot e(x))\\ &= c(x)\cdot(d*e)(x)\\ &= (c*(d*e))(x),\end{aligned}$$

$\forall\ x \in X$, e portanto $(c*d)*e = c*(d*e)$.

iv) Comutatividade: Dados $c,d \in MAP(X,S^1)$, temos $(c*d)(x) = c(x)\cdot d(x) \overset{\nabla}{=} d(x)\cdot c(x) = (d*c)(x), \forall\ x \in X$, e portanto $c*d = d*c$.

Observemos que em iii) e iv), ∇ refere-se ao fato de $(S^1,\cdot)$ ser um grupo abeliano.

Dados $C : c \simeq c^{'}$ e $D : d \simeq d^{'}$, então $C*D$ é contínua (como observado acima) e $C*D : c*d \simeq c^{'}*d^{'}$. De fato, temos $C : X\times I \to S^1$ com $C(x;0) = c(x), C(x;1) = c^{'}(x)$, e $D : X\times I \to S^1$ com $D(x,0) = d(x), D(x,1) = d^{'}(x)$. Logo $C*D : X\times I \to S^1$ é uma homotopia entre $c*d$ e $c^{'}*d^{'}$, pois

$$\begin{aligned}(C*D)(x,0) &= C(x,0)\cdot D(x,0)\\ &= c(x)d(x)\\ &= (c*d)(x)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}(C*D)(x,1) &= C(x,1)\cdot D(x,1)\\ &= c^{'}(x)\cdot d^{'}(x)\\ &= (c^{'}*d^{'})(x).\end{aligned}$$

Assim fica bem definida $[c]\Delta[d] = [c*d]$.

Agora $[X,S^1]$ com a operação Δ tem a estrutura de um grupo abeliano, pois

$$[e]\Delta[c] = [e*c] = [c],$$

$$[c^{-1}]\Delta[c] = [c^{-1} * c] = [e],$$

$$[c]\Delta[d] = [c * d] = [d * c] = [d]\Delta[c]$$

e

$$([c_1]\Delta[c_2])\Delta[c_3] = [c_1 * c_2 * c_3] = [c_1]\Delta([c_2]\Delta[c_3]).$$

Resta mostrar que $f^* : [X, S^1] \to [Y, S^1]$ é um homomorfismo.

De fato, dados $[c]$ e $[d] \in [X, S^1]$, temos que

$$\begin{aligned} ((c \circ f) * (d \circ f))(y) &= (c \circ f)(y) \cdot (d \circ f)(y) \\ &= c(f(y)) \cdot d(f(y)) \\ &= (c * d)(f(y)) \\ &= ((c * d) \circ f)(y). \end{aligned}$$

Como $f^*([c]\Delta[d]) = [c * d] \circ [f] = [(c * d) \circ f]$ e $f^*[c]\Delta f^*[d] = ([c] \circ [f])\Delta([d] \circ [f]) = [c \circ f]\Delta[d \circ f] = [(c \circ f) * (d \circ f)] = [(c * d) \circ f]$, segue o resultado. $\square$

Denotamos $[X, S^1]$, com a estrutura de grupo acima, por $H^1(X)$.

Exemplo 5.3. Se $X = \{x\}$ então $[\{x\}, S^1]$ está em correspondência biunívoca com $\pi_0(S^1)$. Como S^1 é conexo por caminhos, $\pi_0(S^1)$ possui um único elemento e assim $H^1(\{x\})$ é o grupo trivial.

6 O estudo do círculo

Iniciaremos este capítulo examinando a função exponencial de $\mathbb{R}$ em S^1. Esta nos permitirá, definir o importante conceito de grau de uma função contínua de S^1 em S^1. Em seguida, estabelecendo as propriedades básicas de grau, aplicaremos as mesmas para provar o *Teorema fundamental da álgebra* e o *Teorema do Ponto Fixo de Brouwer no plano.*

6.1 Levantamento de funções de S^1 para $\mathbb{R}$

Definamos a função $e : \mathbb{R} \to S^1$ por $e(t) = \exp(2\pi i t)$. A função e é contínua e sobrejetora. Ainda, e é um homomorfismo do grupo aditivo $\mathbb{R}$ no grupo multiplicativo S^1, pois dados $t, u \in \mathbb{R}$, temos

$$e(t+u) = \exp(2\pi i(t+u)) = \exp(2\pi i t + 2\pi i u) = \exp(2\pi i t)\exp(2\pi i u) = e(t)e(u);$$

e o Kernel deste homomorfismo é o subgrupo $\mathbb{Z}$ dos inteiros, pois

$$\begin{aligned} \text{Ker } e &= \{x \in \mathbb{R}; e(x) = 1 + 0i\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}; \exp(2\pi i x) = 1 + 0i\} \end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned} \exp(2\pi i x) = 1 + 0i &\iff \cos(2\pi x) + i\,\text{sen}(2\pi x) = 1 + 0i \\ &\iff \cos(2\pi x) = 1 \text{ e } \text{sen}(2\pi x) = 0 \\ &\iff 2\pi x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ &\iff x = k,\ k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Portanto Ker $e = \{x; x \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{Z}$.

A função e será utilizada para estudar as propriedades topológicas do círculo, e veremos $\mathbb{R}$ como "uma extensão sobre o círculo", mais propriamente como a hélice que representa o gráfico de e (Fig 6.1).

Figura 6.1: $\mathbb{R}$ como uma extensão sobre o círculo.

Consideremos agora o seguinte problema: Seja X um espaço topológico e $f : X \to S^1$ uma função contínua. Existe uma função contínua $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$, com $f = e \circ \tilde{f}$?

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} \arrow[d, "e"] \\ X \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & S^1. \end{tikzcd}$$

Se for possível encontrar $\tilde{f}$, nós a chamaremos um *levantamento* de f e diremos que f pode ser *levantada*.

O problema de existência de $\tilde{f}$ é conhecido como o *problema do levantamento*. Consideraremos casos específicos neste capítulo, e faremos o caso geral posteriormente.

Os resultados que seguem dão detalhes sobre as propriedades topológicas de e.

Lema 6.1. *A aplicação $e' :]0,1[\to S^1 - \{1\}$ obtida pela restrição de e é um homeomorfismo. Reciprocamente, se B é um subconjunto qualquer de $S^1 - \{1\}$ e $A = I \cap e^{\vdash}(B)$, então $e^{\vdash}(B)$ é a união dos conjuntos $A + n$ ($n \in \mathbb{Z}$), onde cada um desses conjuntos é aberto de $e^{\vdash}(B)$, e e induz um homeomorfismo de cada um desses conjuntos em B.*

Demonstração. Primeiro, observemos que e' é contínua e sobrejetora, pois é uma restrição de e, e ainda como o contradomínio de e' é $S^1 - \{1\}$, segue que e' também é injetora, e portanto bijetora. Assim basta mostrar que $(e')^{-1}$ é contínua.

Para cada $x \in S^1 - \{1\}$, tomemos um fechado $A \subset]0,1[$, com $(e')^{-1}(x) \in \operatorname{int}(A)$. Como A é compacto, segundo o corolário 2.3, e' induz um homeomorfismo de A em $e'(A)$, e pelo fato de que $(e')^{-1}(x) \in \operatorname{int}(A)$, $(e'^{-1})^{\vdash}(A) = e'(A)$ é uma vizinhança de x em $S^1 - \{1\}$. Assim, segue pela proposição 2.3, que $(e')^{-1}$ é contínua em x.

Para provar a segunda parte, é suficiente mostrar que o resultado é válido para $B_0 = S^1 - \{1\}$ (os outros casos seguem analogamente). Mas $e^{\vdash}(B_0)$ é a união disjunta de intervalos abertos $]n, n+1[= A_0 + n$ ($n \in \mathbb{Z}$), onde $A_0 =]0,1[$ e pela primeira parte da demonstração, e induz um homeomorfismo de cada um destes em B_0. $\square$

Observação 6.1. No lema acima, o conjunto $\{1\} \subset S^1$ pode ser substituído por qualquer subconjunto próprio B fechado de S^1.

Corolário 6.1. *Se $f : X \to S^1$ é contínua e não sobrejetora, então f é homotopicamente nula.*

Demonstração. Como f não é sobrejetora, podemos escrever sua imagem como $f(X) = S^1 - B$, onde B é um subconjunto próprio de S^1. Pelo lema 6.1, $S^1 - B$ é homeomorfo a $]0, 1[$, donde segue que $S^1 - B$ é contrátil, pois $]0, 1[$ é contrátil (vide exemplo 5.2).

Agora temos $f : X \to S^1 - B$ contínua, com $S^1 - B$ contrátil. Assim, existem $g : S^1 - B \to \{y_0\}$ e $h : \{y_0\} \to S^1 - B$ tais que, $h \circ g \simeq 1_{S^1-B}$ e $g \circ h \simeq 1_{\{y_0\}}$, com $y_0 \in S^1 - B$. Segue do corolário 5.1 que $f = 1_{S^1-B} \circ f \simeq h \circ g \circ f$ onde $h \circ g \circ f : X \to S^1 - B$ é a função constante $h(y_0)$. □

Teorema 6.1. *Toda função contínua $f : I \to S^1$ possui um levantamento $\tilde{f} : I \to \mathbb{R}$, único a menos de uma translação por um inteiro. Então, dado $a_0 \in \mathbb{R}$ com $e(a_0) = f(0)$, existe um único levantamento $\tilde{f}$ com $\tilde{f}(0) = a_0$.*

Demonstração. Para cada $t \in I$, a continuidade de f em t implica que podemos encontrar um $\epsilon > 0$ tal que $f([t - \epsilon, t + \epsilon])$ é um subconjunto próprio de S^1. Pelo teorema de Heine-Borel (lema 2.2), podemos encontrar um conjunto finito de intervalos $[t-\epsilon, t+\epsilon]$, os quais cobrem I. Denotemos o conjunto de todos os pontos finais desses intervalos em I por

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1.$$

Então cada $[t_{i-1}, t_i]$ está contido em um intervalo $[t - \epsilon, t + \epsilon]$, e assim a imagem de $[t_{i-1}, t_i]$ por f é um subconjunto próprio S_i de S^1.

Provemos por indução em i que existe um único levantamento de $f|_{[0,t_i]}$, tal que $\tilde{f} : [0, t_i] \to \mathbb{R}$ satisfaz $\tilde{f}(0) = a_0$. Para $i = 0$, definimos $\tilde{f}_0 : \{0\} \to \mathbb{R}$ por $\tilde{f}_0(0) = a_0$. Este é um levantamento de $f : \{0\} \to S^1$, pois $\tilde{f}_0$ é contínua e $(e \circ \tilde{f}_0)(0) = e(a_0) = f(0)$.

Agora suponha válido para $i - 1$. Então, para a aplicação $f|_{[0,t_{i-1}]} : [0, t_{i-1}] \to S^1$, existe um único levantamento $\tilde{f}|_{[0,t_{i-1}]} : [0, t_{i-1}] \to \mathbb{R}$, tal que $(e \circ \tilde{f})(t_{i-1}) = f(t_{i-1})$ e $\tilde{f}|_{[0,t_{i-1}]}(0) = a_0$.

Como S_i é um subconjunto próprio de S^1, podemos escolher $b_i \notin S_i$, e como e é sobrejetora existe $c_i \in \mathbb{R}$ tal que $e(c_i) = b_i$.

Considere agora $A_i = e^{\vdash}(S_i) \cap [c_i, c_i + 1]$. Segue do lema 6.1 que $e^{\vdash}(S_i)$ é união disjunta de conjuntos abertos $A_i + n$, cada um dos quais é homeomorfo a S_i.

Seja $n_i \in \mathbb{Z}$ tal que $\tilde{f}|_{[0,t_{i-1}]}(t_{i-1}) \in A_i + n_i$, e considere $e_i : A_i + n_i \to S_i$ o homeomorfismo induzido por e. Então podemos definir $\tilde{f}|_{[t_{i-1},t_i]} : [t_{i-1}, t_i] \to \mathbb{R}$ como $\tilde{f}|_{[t_{i-1},t_i]} = e_i^{-1} \circ f|_{[t_{i-1},t_i]}$.

Aplicando $\tilde{f}|_{[t_{i-1},t_i]}$ em t_{i-1}, temos

$$\tilde{f}|_{[t_{i-1},t_i]}(t_{i-1}) = (e_i^{-1} \circ f)(t_{i-1}) = e_i^{-1}(f(t_{i-1})) = e_i^{-1}(e_i \circ \tilde{f}|_{[0,t_{i-1}]}(t_{i-1})) = \tilde{f}|_{[0,t_{i-1}]}(t_{i-1}).$$

Pelo lema da colagem (lema 2.1), combinando $\tilde{f}|_{[t_{i-1},t_i]}$ com $\tilde{f}_{[0,t_{i-1}]}$ temos uma função contínua em $[0,t_i]$, que claramente é um levantamento de f em $[0,t_i]$.

Ainda

$$\tilde{f}|_{[0,t_i]}(0)=\tilde{f}|_{[0,t_{i-1}]}(0)=a_0.$$

Resta mostrar a unicidade deste levantamento. Pelo fato de $[t_{i-1},t_i]$ ser conexo, temos que todo levantamento de $[t_{i-1},t_i]$ a $\bigcup_n A_i+n$, deve possuir imagem em um único A_i+n_i (pois estes são abertos disjuntos), e como a imagem de t_{i-1} está em A_i+n_i, o mesmo acontece com todos os pontos de $[t_{i-1},t_i]$. Assim segue que o levantamento é unicamente determinado. Isto completa a indução e a demonstração do teorema. □

Lema 6.2. *Toda função contínua $F: I\times I\to S^1$ tem um levantamento $\tilde{F}: I\times I\to\mathbb{R}$, unicamente determinado a menos de uma translação por um inteiro. Então, se $a_0\in\mathbb{R}$, com $e(a_0)=F(0,0)$, existe um único levantamento $\tilde{F}$ com $\tilde{F}(0,0)=a_0$.*

Demonstração. Conforme foi feito no teorema 6.1, podemos aplicar o Teorema de Heine-Borel, para encontrar retângulos $R_{i,j}=[t_i,t_{i+1}]\times[u_j,u_{j+1}]$, com $0=t_0<t_1<\cdots<t_n=1$ e $0=u_0<u_1<\cdots<u_m=1$, de forma que $F(R_{i,j})$ seja um subconjunto próprio de S^1.

Assim temos os retângulos:

$$\begin{array}{lllll}
R_{0,0} & = & [t_0,t_1]\times[u_0,u_1], & R_{0,1}= [t_0,t_1]\times[u_1,u_2],\ldots, & R_{0,m-1}=[t_0,t_1]\times[u_{m-1},u_m];\\
R_{1,0} & = & [t_1,t_2]\times[u_0,u_1], & R_{1,1}= [t_1,t_2]\times[u_1,u_2],\ldots, & R_{1,m-1}=[t_1,t_2]\times[u_{m-1},u_m];\\
 & & & \vdots & \\
R_{n-1,0} & = & [t_{n-1},t_n]\times[u_0,u_1], & R_{n-1,1}= [t_{n-1},t_n]\times[u_1,u_2]\ldots, & R_{n-1,m-1}=[t_{n-1},t_n]\times[u_{m-1},u_m].
\end{array}$$

Estes cobrem $I\times I$, e podemos ordenar esses retângulos de modo que $R_{i,j}\prec R_{k,l}$, se $j<l$ ou se $j=l$ e $i<k$.

A demonstração será feita por indução em (i,j).

Considere $S_{i,j}=F(R_{i,j})$, um subconjunto próprio de S^1. Então existe $b_{i,j}\notin S_{i,j}$, e devido a sobrejeção de e, existe $c_{i,j}\in\mathbb{R}$, tal que $e(c_{i,j})=b_{i,j}$.

Considere agora $A_{i,j}=e^{\vdash}(S_{i,j})\cap[c_{i,j},\ c_{i,j}+1]$. Segue do lema 6.1 que $e^{\vdash}(S_{i,j})$ é união disjunta de conjuntos abertos $A_{i,j}+n$, onde cada um deles é homeomorfo a $S_{i,j}$.

Para $(i,j)=(0,0)$, definimos $\tilde{F}_{0,0}$: $R_{0,0}\to\mathbb{R}$ por $\tilde{F}_{0,0}(t,u)=(e_{0,0}^{-1}\circ F|_{0,0})(t,u)$, onde $F|_{0,0}: R_{0,0}\to S^1$ é a restrição de F ao retângulo $R_{0,0}$, e $e_{0,0}^{-1}$ é a inversa do homeomorfismo $e: A_{0,0}+n_{0,0}\to S_{0,0}$ induzido por e, onde $n_{0,0}\in\mathbb{Z}$ é tal que $A_{0,0}+n_{0,0}$ contem a_0. Então $\tilde{F}_{0,0}$ é um levantamento de $F|_{0,0}$, pois $\tilde{F}_{0,0}$ é contínua e $e\circ\tilde{F}_{0,0}(t,u)=e\circ e_{0,0}^{-1}(F|_{0,0}(t,u))=(e\circ e^{-1})(F|_{0,0}(t,u))=F|_{0,0}(t,u),\forall(t,u)\in R_{0,0}$. Além disso, $\tilde{F}_{0,0}(0,0)=e_{0,0}^{-1}(F|_{0,0}(0,0))=e_{0,0}^{-1}(e(a_0))=e^{-1}\circ e(a_0)=a_0$.

Pelo fato de $R_{0,0}$ ser conexo, temos que todo levantamento de $R_{0,0}$ a $\bigcup_n A_{0,0}+n$, deve possuir imagem em um único $A_{0,0}+n_{0,0}$ (pois estes são abertos disjuntos), e como a imagem $\tilde{F}_{0,0}(0,0)=a_0$ está em $A_{0,0}+n_{0,0}$, o mesmo acontece com todos os pontos de $R_{0,0}$. Assim segue que o levantamento é unicamente determinado.

Para definirmos um levantamento sobre $R_{i,j}$, assumiremos como hipótese de indução que já temos definido o levantamento $\tilde{F}|_{\bigcup_{k,l} R_{k,l}}$, onde $R_{k,l}$ denotam todos os retângulos que precedem $R_{i,j}$. Assim, $e \circ \tilde{F}|_{\bigcup_{k,l} R_{k,l}} = F|_{\bigcup_{k,l} R_{k,l}}$ e portanto $e_{k,l} \circ \tilde{F}_{k,l} = F|_{k,l}$ onde $e_{k,l}$ é a restrição do homeomorfismo, induzido por e, $e : A_{k,l} + n_{k,l} \to S_{k,l}$, $F|_{k,l}$ é a restrição de F ao retângulo $R_{k,l}$ e $\tilde{F}_{k,l}$ é a restrição de F ao retângulo $R_{k,l}$.

Considere $n_{i,j} \in \mathbb{Z}$ tal que $\tilde{F}(p) \in A_{i,j} + n_{i,j}$, onde p é um ponto da intersecção de $R_{i,j}$ com os retângulos que o precedem.

Defina $\tilde{F}_{i,j} : R_{i,j} \to \mathbb{R}$ por $\tilde{F}_{i,j} = e_{i,j}^{-1} \circ F|_{i,j}$, onde $e_{i,j}^{-1}$ é a inversa do homeomorfismo, induzido por e, $e : A_{i,j} + n_{i,j} \to S_{i,j}$, e $F|_{i,j}$ é a restrição de F ao retângulo $R_{i,j}$.

Aplicando $\tilde{F}_{i,j}$ em p, onde p é um ponto da intersecção de $R_{i,j}$ com os retângulos que o precedem (a saber: $R_{k,l}$ é da forma $R_{i-1,j}$ ou $R_{i-1,j-1}$ ou $R_{i,j-1}$), temos

$\tilde{F}_{i,j}(p) = e_{i,j}^{-1} \circ F|_{i,j}(p) = e_{i,j}^{-1}(F|_{i,j}(p)) = e_{k,l}^{-1}(F|_{k,l}(p)) = e_{k,l}^{-1}(e_{k,l} \circ \tilde{F}_{k,l}(p)) = e_{k,l}^{-1} \circ e_{k,l}(\tilde{F}_{k,l}(p)) = \tilde{F}_{k,l}(p)$.

Pelo lema da colagem (lema 2.1), combinando $\tilde{F}|_{\bigcup_{k,l} R_{k,l}}$ com $\tilde{F}_{i,j}$ temos uma função contínua em $[0, t_{i+1}] \times [0, u_{j+1}]$, que claramente é um levantamento de F em $[0, t_{i+1}] \times [0, u_{j+1}]$.

Ainda

$$\tilde{F}|_{[0,t_{i+1}]\times[0,u_{j+1}]}(0,0) = \tilde{F}|_{\bigcup_{k,l} R_{k,l}}(0,0) = a_0.$$

Pelo fato de $R_{i,j}$ ser conexo, temos que todo levantamento de $R_{i,j}$ a $\bigcup_n A_{i,j} + n$, deve possuir imagem em um único $A_{i,j} + n_{i,j}$ (pois estes são abertos disjuntos), e como a imagem de p está em $A_{i,j} + n_{i,j}$, o mesmo acontece com todos os pontos de $R_{i,j}$. Assim segue que o levantamento é unicamente determinado. Isto completa a indução e a demonstração do lema. □

6.2 O grau de uma função contínua de S^1 em S^1

A partir de agora estudaremos funções contínuas de S^1 em S^1. Seja $f : S^1 \to S^1$, e considere o diagrama

$$\begin{array}{ccc} I & \overset{g}{\dashrightarrow} & \mathbb{R} \\ \downarrow{\scriptstyle e|I} & & \downarrow{\scriptstyle e} \\ S^1 & \xrightarrow{f} & S^1. \end{array}$$

Segundo o teorema 6.1, $f \circ (e|_I)$ é levantada por uma função g (como no diagrama). Como $e(0) = e(1) = 1$, pois $e(0) = \exp(2\pi i 0) = \exp(0) = 1$ e $e(1) = \exp(2\pi i 1) = \exp(2\pi i) = 1$, temos

$$e(g(1)) = f(e(1)) = f(e(0)) = e(g(0)).$$

Então, como Ker $e = \mathbb{Z}$, $g(1) - g(0)$ é um inteiro, pois

$$\begin{aligned} e(g(1)) &= e(g(0)) \Rightarrow \\ e(g(1)) \cdot e(-g(0)) &= e(g(0)) \cdot e(-g(0)) \Rightarrow \\ e(g(1) - g(0)) &= e(0) = 1. \end{aligned}$$

Este inteiro é chamado de *grau de f*, e é denotado por deg f. Qualquer outro levantamento $\overline{g}$ é obtido de g por uma translação por um inteiro n, então

$$\overline{g}(1) - \overline{g}(0) = g(1) + n - (g(0) + n) = g(1) - g(0).$$

Deste modo, o grau independe da escolha do levantamento.

A seguir mostraremos que a noção de grau é adequada para resolver todos nossos problemas relacionados a aplicações de S^1 em S^1.

Teorema 6.2. *O grau define um isomorfismo de grupos*

$$deg : H^1(S^1) \cong \mathbb{Z}.$$

Sobre funções contínuas $f : S^1 \to S^1$, são equivalentes as seguintes condições:

i) f é homotopicamente nula;

ii) f tem grau zero;

iii) f tem um levantamento $\widetilde{f} : S^1 \to \mathbb{R}$.

Demonstração. Provaremos primeiramente que aplicações homotópicas têm o mesmo grau, mostrando que deg está bem definido. Dada $F : S^1 \times I \to S^1$ uma homotopia entre f e $\overline{f}$, considere o diagrama:

$$\begin{tikzcd} I \times I \arrow[r, dashed, "G"] \arrow[d, "(e|I)\times 1"'] & \mathbb{R} \arrow[d, "e"] \\ S^1 \times I \arrow[r, "F"] & S^1, \end{tikzcd}$$

onde "1" denota a identidade de I. Pelo lema 6.2, um levantamento G pode ser construído(como no diagrama). Usaremos (t, u) como coordenadas em $I \times I$.

Observe que $f \circ e|_I$ é levantada por g, onde $g(t) = G(t, 0)$. Então deg $f = G(1, 0) - G(0, 0)$.

Similarmente, deg $\overline{f} = G(1, 1) - G(0, 1)$, pois $\bar{f} \circ e|_I$ é levantada por h, onde $h(t) = G(t, 1)$.

Considere a função definida em I por $d(u) = G(1, u) - G(0, u)$. Como $e(G(1, u)) = F(1, u) = e(G(0, u))$, d assume valores inteiros. Além disso, d é contínua e segue do fato de I ser conexo que d é constante. Então deg $f = d(0) = d(1) = $ deg $\overline{f}$. Assim a função $deg : H^1(S^1) \to \mathbb{Z}$ está bem definida.

Afirmação: deg é um homomorfismo.

Dadas f, $\overline{f} : S^1 \to S^1$ funções contínuas, e $g, \overline{g} : I \to \mathbb{R}$ levantamentos de $f \circ (e|_I)$ e $\overline{f} \circ (e|_I)$, respectivamente, como e é um homomorfismo, $g + \overline{g}$ levanta $(f \cdot \overline{f}) \circ (e|_I)$, pois

$$\begin{aligned}(e \circ (g + \overline{g}))(t) &= e(g(t) + \overline{g}(t)) \\ &= e(g(t)) \cdot e(\overline{g}(t)) \\ &= (f \circ e|_I)(t) \cdot (\overline{f} \circ e|_I)(t) \\ &= (f \cdot \overline{f}) \circ (e|_I)(t),\ \forall\, t \in I.\end{aligned}$$

Então,

$$deg\ (f \cdot \overline{f}) = (g + \overline{g})(1) - (g + \overline{g})(0) = g(1) - g(0) + \overline{g}(1) - \overline{g}(0) = deg\ f + deg\ \overline{f}.$$

Mostremos agora que deg é sobrejetora.

De fato, dado um inteiro n, considere a função $p_n : S^1 \to S^1$ dada por $p_n(z) = z^n$. Logo, p_n é bem definida, pois $|z^n| = |\overbrace{z.z \ldots z}^{n\ vezes}| = \overbrace{|z|.|z| \ldots |z|}^{n\ vezes} = 1$, pois $|z| = 1$.

Novamente, como e é um homomorfismo, $p_n \circ (e|_I)$ é levantada pela função $g : I \to \mathbb{R}$ dada por $g(t) = nt$. Segue que deg $p_n = g(1) - g(0) = n - 0 = n$.

Para mostrar que deg é injetora, é suficiente mostrar que o seu kernel é zero, isto é, que uma função de grau zero é homotopicamente nula, ou seja, $(ii) \Rightarrow (i)$. Então provemos as implicações:

$(i) \Rightarrow (ii)$ Se f é homotópica a f_0, pela primeira parte da demonstração deg f = deg f_0, e uma função constante tem grau zero. De fato, seja $f : S^1 \to S^1$ função constante com $f(x) = c$. Se $c = 1$, $g : I \to \mathbb{R}$ dada por $g(t) = 0$, é um levantamento para $f \circ (e|_I)$. Se $c \neq 1$, então $g : I \to \mathbb{R}$ dada por $g(t) = e^{\vdash}(\{c\}) \cap I$ é um levantamento de $f \circ (e|_I)$, e portanto, em ambos os casos, deg $f = g(1) - g(0) = 0$.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Se f tem grau zero, então temos um levantamento g de $f \circ (e|_I)$ com $g(1) = g(0)$.

Assim, $g \circ (e|_I)^{-1} = \widetilde{f} : S^1 \to \mathbb{R}$ é um levantamento bem definido de f, já que em 1, $(e|_I)^{-1} = \{0, 1\}$, mas $g(0) = g(1)$.

A continuidade de $\widetilde{f}$ nos pontos distintos de 1 segue da continuidade de g e de $(e|_I)^{-1}$(mostrada no lema 6.1). A continuidade de $\widetilde{f}$ em 1 também é satisfeita, pois dividindo S^1 em dois semicírculos, como $\widetilde{f}$ é contínua em cada semicírculo, segue do lema da colagem (lema 2.1) que $\widetilde{f}$ é contínua em S^1.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Como $\mathbb{R}$ é contrátil, então toda função $\widetilde{f} : S^1 \to \mathbb{R}$ é homotópica a uma função constante $\widetilde{f}_0$. De fato, como $\mathbb{R}$ é contrátil, então existem $\phi : \mathbb{R} \to \{x_0\}$ e $\psi : \{x_0\} \to \mathbb{R}$, com $\phi \circ \psi \simeq 1_{\{x_0\}}$ e $\psi \circ \phi \simeq 1_{\mathbb{R}}$. Temos que $\widetilde{f} = 1_{\mathbb{R}} \circ \widetilde{f} \simeq (\psi \circ \phi) \circ \widetilde{f} = \widetilde{f}_0$, pois, para todo $x \in S^1$, $(\psi \circ \phi) \circ \widetilde{f}(x) = \psi(\phi(\widetilde{f}(x))) = \psi(x_0) = cte$. Segue do lema 5.2 que $f = e \circ \widetilde{f} \simeq e \circ \widetilde{f}_0$. $\square$

6.3 Aplicações

Apresentaremos nesta seção dois teoremas clássicos onde se utiliza a noção de grau de funções.

Teorema 6.3 (Teorema Fundamental da Álgebra)**.** *Toda equação polinomial em $\mathbb{C}$ possui uma raiz.*

Demonstração. A prova será feita por redução ao absurdo. Suponha que não, e considere o polinômio $P(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i$, com $a_n \neq 0$. Podemos supor $a_n = 1$, caso contrário, podemos dividir o polinômio por a_n, e conseguir um novo polinômio com o coeficiente do maior grau igual a 1.

Defina uma função $F : S^1 \times \mathbb{R}_+ \to S^1$ por $F(z,r) = \frac{P(rz)}{|P(rz)|}$. F está bem definida pois P por hipótese não se anula, e temos $|F(z,r)| = 1$.

F é claramente contínua, pois P é contínua. Fazendo $f_r(z) = F(z,r)$, F pode ser visto como uma homotopia entre as funções f_r (veja figura 6.2).

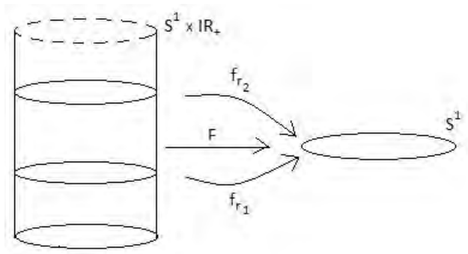

Figura 6.2: Homotopia entre as funções f_r

Dados f_{r_1} e f_{r_2} consideremos a composição

$$\begin{aligned} G : S^1 \times I &\overset{id\times\varphi}{\longmapsto} S^1 \times [r_1, r_2] \overset{F_|}{\longmapsto} S^1 \\ (z,t) &\longmapsto (z, r_1 + t(r_2 - r_1)) \longmapsto F_|(z, r_1 + t(r_2 - r_1)), \end{aligned}$$

onde id é a função identidade de S^1 e $\varphi : I \to [r_1, r_2]$ é dada por $\varphi(t) = r_1 + t(r_2 - r_1)$. Então $G = F_| \circ (id \times \varphi) : S^1 \times I \longmapsto S^1$ é uma homotopia entre f_{r_1} e f_{r_2}, pois $G(z,0) = F_|((id \times \varphi)(z,0)) = F(z,r_1) = f_{r_1}(z)$ e $G(z,1) = F_|((id \times \varphi)(z,1)) = F(z,r_2) = f_{r_2}(z)$. Ainda, f_0 é constante, pois $f_0(z) = F(z,0) = \frac{P(0z)}{|P(0z)|} = \frac{a_0}{|a_0|} = c \neq 0$, desde que $a_0 \neq 0$, senão o polinômio teria raiz, contradizendo a nossa suposição. Portanto f_0 tem grau zero.

Mostraremos que para r suficientemente grande, f_r tem grau n, chegando a um absurdo, pois funções homotópicas têm o mesmo grau.

Escolhendo $R > \max\left(\sum_{i=0}^{n-1}|a_i|, 1\right)$, para $|z| = 1$ segue que,

$$\left|\sum_{i=0}^{n-1} a_i(Rz)^i\right| \leq \sum_{i=0}^{n-1}|a_i|R^i \leq R^{n-1}\sum_{i=0}^{n-1}|a_i| < R^n = |(Rz)^n|.$$

Então $\frac{\left|\sum_{i=0}^{n-1} a_i(Rz)^i\right|}{|(Rz)^n|} < 1$. Fazendo $\tilde{z} = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} a_i(Rz)^i}{(Rz)^n}$, temos $-1 < Re(\tilde{z}) < 1$ desde que $|Re(\tilde{z})| < |\tilde{z}| < 1$. Isso mostra, particularmente, que $\frac{P(Rz)}{(Rz)^n}$ tem parte real positiva pois,

$$\frac{P(Rz)}{(Rz)^n} = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} a_i(Rz)^i + a_n(Rz)^n}{(Rz)^n} = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} a_i(Rz)^i}{(Rz)^n} + a_n = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} a_i(Rz)^i}{(Rz)^n} + 1 = \tilde{z} + 1.$$

Logo $Re(\frac{P(Rz)}{(Rz)^n}) = Re(\tilde{z}) + 1 > 0$.

Segue que

$$\frac{P(Rz)}{(Rz)^n}\left|\frac{(Rz)^n)}{P(Rz)}\right| = \frac{f_R(z)}{z^n} = f_R(z) \cdot z^{-n}$$

tem parte real positiva. Assim, a função $h : S^1 \to S^1$ dada por $h(z) = f_R(z) \cdot z^{-n}$ não é sobrejetora (por exemplo, não existe $z \in S^1$, tal que $h(z) = -1$). Logo, pelo corolário 6.1, segue que a função h tem grau zero. Assim o deg $f_R = n$, pois $0 = \deg(h) = \deg(f_R) + \deg(z^{-n}) = \deg(f_R) - n$.

□

Teorema 6.4 (Teorema do Ponto Fixo de Brouwer no plano)**.** *Toda função contínua $f : D^2 \to D^2$ tem um ponto fixo.*

Demonstração. Suponha que não. Então para $x \in D^2$, x e $f(x)$ são distintos . Defina $\phi(x)$ o ponto de interseção da semireta, partindo de $f(x)$ e passando por x, com S^1(veja a figura 6.3).

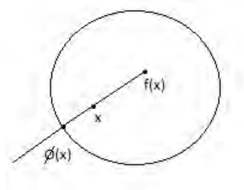

Figura 6.3: Definição de $\phi(x)$

Claramente ϕ depende continuamente de x. Então $\phi : D^2 \to S^1$ é uma função contínua. Agora, $\phi|_{S^1}$ é a identidade (veja a figura 6.4), que tem grau 1.

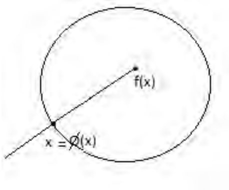

Figura 6.4: $\phi|_{S^1}$ é a identidade de S^1

Por outro lado, D^2 é contrátil, e então ϕ é homotópica a uma função constante.

De fato, se D^2 é contrátil, então existem $f : D^2 \to \{x_0\}$ e $g : \{x_0\} \to D^2$, com $f \circ g \simeq 1_{\{x_0\}}$ e $g \circ f \simeq 1_{D^2}$. Temos que $\phi = \phi \circ 1_{D^2} \simeq \phi \circ (g \circ f)$, onde $(\phi \circ (g \circ f))(x) = \phi(g(f(x))) = \phi(g(x_0)) = cte$.

Em particular, $\phi|_{S^1}$ também é homotópica a uma função constante. Portanto seu grau é zero, o que é um absurdo. $\square$

7 Problemas de Levantamento e Extensão

Topologia é o estudo de espaços topólogicos e funções contínuas, e a construção e classificação de espaços e funções contínuas têm um papel importante no desenvolvimento deste assunto. Um dos problemas chave na construção de funções é a fatorização. Há duas formas de fatorização:

i) *Problemas de levantamento.* Dadas $f : X \to Y$, $g : Z \to Y$ contínuas, quando existe $h : X \to Z$ contínua com $g \circ h = f$?

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[d, "g"] \\ X \arrow[ur, dashed, "h"] \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

ii) *Problemas de extensão.* Dadas $g : B \to A, f : B \to C$ contínuas, quando existe $h : A \to C$ contínua com $h \circ g = f$?

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & A \arrow[dl, dashed, "h"] \\ C & \end{tikzcd}$$

Este último é chamado de problema de extensão, pois na prática, B é um subespaço de A, g é a inclusão e h, se existir, estende a função f, definida em B, para todo A.

Em topologia algébrica temos um procedimento padrão para provar a **não existência** da fatorização. Faremos um exemplo disso a seguir.

Exemplo 7.1. Sejam $B = C = S^1$, $A = D^2$, $f = 1 =$ identidade, $g =$ inclusão. Não existe extensão de $1 : S^1 \to S^1$ para uma função $D^2 \to S^1$.

Demonstração. Supondo que exista, temos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z} \cong H^1(B) & H^1(A) = \{0\} \arrow[l, "g^*"'] \\ \mathbb{Z} \cong H^1(C). \arrow[u, "f^*=1"] \arrow[ur, "h^*"'] & \end{tikzcd}$$

Desse modo $1 = f^* = g^* h^* = 0$, o que dá uma contradição. □

Em geral, podemos perguntar primeiramente, se existe h^* que satisfaz o problema de fatorização $h^* \circ g^* = f^*$ (para o problema de levantamento) e $g^* \circ h^* = f^*$ (para o problema de extensão). Se não for possível encontrar h^* que satisfaça, certamente não existe tal função contínua h.

7.1 O Problema de Levantamento

Para o problema de levantamento, consideraremos o caso em que $g : Z \to Y$ é $e : \mathbb{R} \to S^1$. Apresentaremos a seguir dois resultados deste caso.

Teorema 7.1 (Teorema de Monodromia)**.** *Sejam X um espaço localmente conexo por caminhos e $f : X \to S^1$ uma função contínua. Então f possui um levantamento $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$ se, e somente se, para toda função contínua $l : S^1 \to X$, deg $(f \circ l) = 0$. Cada função l é chamada laço (em X).*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Supondo que $\widetilde{f}$ exista, então $\widetilde{f} \circ l$ é um levantamento de $f \circ l$. De fato, se $t \in S^1$, então $(e \circ (\widetilde{f} \circ l))(t) = (e \circ \widetilde{f})(l(t)) = (f \circ l)(t)$.

Assim, segue do teorema 6.2, que deg $(f \circ l) = 0$.

($\Leftarrow$) Segundo o lema 4.7, as componentes conexas por caminho são abertas em X. Se para cada componente conexa por caminho C, pudermos levantar $f|_C$ a uma função $\widetilde{f}|_C$, então a função $\widetilde{f} : X \to \mathbb{R}$ será contínua quando todas $\widetilde{f}|_C$ o forem.

Escolha $x_0 \in X$ e $a_0 \in \mathbb{R}$, com $e(a_0) = f(x_0)$. Para cada $x \in X$, escolha um caminho $p : I \to X$ unindo x_0 a x. Pelo teorema 6.1 podemos levantar $f \circ p$ unicamente a $\widetilde{f \circ p} : I \to \mathbb{R}$, com $\widetilde{f \circ p}(0) = a_0$.

Agora se $\widetilde{f}$ existe, $\widetilde{f} \circ p$ levanta $f \circ p$, pois $e \circ (\widetilde{f} \circ p) = (e \circ \widetilde{f}) \circ p = f \circ p$, e temos $\widetilde{f}(x) = \widetilde{f}(p(1)) = \widetilde{f \circ p}(1)$. Assim definimos $\widetilde{f}(x) = \widetilde{f \circ p}(1)$.

Temos que mostrar que esse valor independe da escolha do caminho p. Seja $q : I \to X$ um outro caminho unindo x_0 a x. Então p e q definem um laço $l : S^1 \to X$ dado por

$$l(e(t)) = \begin{cases} p(1-2t), & se\ 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ q(2t-1), & se\ \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Note que em $t = \frac{1}{2}$ temos $p(0) = x_0 = q(0)$, e que $l(e(0)) = p(1) = x = q(1) = l(e(1))$. Como e^{-1} é contínua (lema 6.1), l é contínua em cada um dos semi-círculos $\text{Im}(z) \geq 0$, $\text{Im}(z) \leq 0$. Segue do lema da colagem (lema 2.1) que l é contínua. Por hipótese temos deg $(f \circ l) = 0$. Mas g, definida por

$$g(t) = \begin{cases} \widetilde{f \circ p}(1-2t), & se\ 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \widetilde{f \circ q}(2t-1), & se\ \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

é um levantamento de $(f \circ l) \circ e|_I$. Note que em $t = \frac{1}{2}$, também se tem a igualdade $\widetilde{f \circ p}(0) = \widetilde{f \circ q}(0) = a_0$. Assim temos que $g(0) = g(1)$, isto é $\widetilde{f \circ p}(1) = \widetilde{f \circ q}(1)$ como queríamos mostrar.

Segue que $\widetilde{f} : X \to \mathbb{R}$ é uma função bem definida, com $e \circ \widetilde{f}(x) = e \circ \widetilde{f \circ p}(1) = f \circ p(1) = f(x)$, ou seja, $e \circ \widetilde{f} = f$.

Falta mostrar que $\widetilde{f}$ é contínua.

Dado $x \in X$, como p é contínua, x tem uma vizinhança W, tal que $f(W)$ é um subconjunto próprio de S^1. Como X é localmente conexo por caminhos, é possível encontrar uma vizinhança conexa por caminhos $U \subset W$ de x. Se $f(U) = S \subset S^1$, então pelo lema 6.1, podemos escrever $e^{\vdash}(S)$ como união disjunta de translações de algum conjunto. Denotemos por A a parte transladada contendo $\widetilde{f}(x)$.

Mostraremos que $\widetilde{f}(U) \subset A$, provando assim, que $\widetilde{f}|_U$ é uma composição de f com o homeomorfismo induzido por e^{-1} de S em A.

Para provar que $\widetilde{f}(U) \subset A$, considere $y \in U$ e escolha um caminho p de x_0 a x em X e de x a y em U. Temos que $f \circ p$ vai de $f(x_0)$ a $f(x)$ em S^1 e de $f(x)$ a $f(y)$ em $S \subset S^1$. Segue que $\widetilde{f \circ p}$ vai de $a_0 = \widetilde{f}(x_0)$ a $\widetilde{f}(x)$ em $\mathbb{R}$, e de $\widetilde{f}(x)$ a $\widetilde{f}(y)$ em $e^{\vdash}(S)$. Agora, um caminho em $e^{\vdash}(S)$ que começa em A deve permanecer em A (vide prova do teorema 6.1) e então $\widetilde{f}(y) \in A$. $\square$

Teorema 7.2. *Sejam X um espaço, $\widetilde{f_0} : X \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $F : X \times I \to S^1$ uma homotopia tal que, para cada $x \in X$, $F(x,0) = e(\widetilde{f_0}(x))$. Então existe uma única homotopia $\widetilde{F} : X \times I \to \mathbb{R}$, com $e \circ \widetilde{F} = F$ e $\widetilde{F}(x,0) = \widetilde{f_0}(x)$.*

Demonstração. Para cada $x \in X$, considere a função contínua $f : I \to S^1$, dada por $f(t) = F(x,t)$. Como $e(\widetilde{f_0}(x)) = F(x,0) = f(0)$, pelo teorema 6.1 existe um único levantamento $\widetilde{f} : I \to \mathbb{R}$ de f, com $\widetilde{f}(0) = \widetilde{f_0}(x)$. Definamos para cada $x \in X$, $\widetilde{F} : X \times I \to \mathbb{R}$ por $\widetilde{F}(x,t) = \widetilde{f}(t)$. As propriedades $e \circ \widetilde{F} = F$, $\widetilde{F}(x,0) = \widetilde{f_0}(x)$ e a unicidade, seguem da própria definição de $\widetilde{F}$. Resta mostrar a sua continuidade.

Para cada $(x,t) \in X \times I$, escolha $\epsilon_{x,t}$, tal que

$$d((x',t'),(x,t)) < \epsilon_{x,t} \Rightarrow |F(x',t') - F(x,t)| < 1. \qquad (*)$$

Os intervalos $]t - \frac{1}{4}\epsilon_{x,t}, t + \frac{1}{4}\epsilon_{x,t}[$ formam uma cobertura aberta do espaço compacto I. Selecione uma subcobertura finita correspondente a $t_1 < \cdots < t_n$, e considere ϵ o menor dos $\epsilon_i = \frac{1}{4}\epsilon_{x,t_i}$, e $U = U_\epsilon(x) \cap X$.

Mostraremos, por indução em i, que $\widetilde{F}$ é contínua em (x,t), para $|t - t_i| < \epsilon_i$.

Por formarem uma cobertura temos que os intervalos

$$]t_{i-1} - \epsilon_{i-1}, t_{i-1} + \epsilon_{i-1}[\ \text{ e } \ ]t_i - \epsilon_i, t_i + \epsilon_i[$$

se interceptam. Considere u_i o ponto em comum e escolha $u_1 = 0$. Por hipótese de indução devemos ter $\widetilde{F}|_{U \times \{u_i\}}$ contínua em (x, u_i). Por construção, $F(U \times]t - \epsilon_i, t + \epsilon_i[\,)$ é um subconjunto próprio S de S^1, pois para $(x',t') \in U \times]t - \epsilon_i, t + \epsilon_i[$,

$$d((x',t'),(x,t_i)) \leq d((x,t_i),(x',t_i)) + d((x',t'),(x',t_i)) < \epsilon + 2\epsilon_i < \frac{1}{4}\epsilon_{x,t_i} + 2\frac{1}{4}\epsilon_{x,t_i} < \epsilon_{x,t_i}.$$

Por $(*)$ temos que $|F(x', t') - F(x, t_i)| < 1$, e como existem pontos em S^1, cuja distância a $F(x, t_i)$ é maior que 1, $F(U\times\ ]t - \epsilon_i, t + \epsilon_i[) = S \subsetneq S^1$.

Escrevamos

$$e^{\vdash}(S) = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} A + n$$

com $\widetilde{F}(x, u_i) \in A$, tal como no lema 6.1. Como $\widetilde{F}|_{U\times\{u_i\}}$ é contínua em (x, u_i), existe uma vizinhança V de x em U, com $\widetilde{F}(V \times \{u_i\}) \subset A$.

Agora, para cada $y \in V$, $\widetilde{F}(\{y\}\times\ ]t - \epsilon_i, t + \epsilon_i[) \subset A$, pois $]t - \epsilon_i, t + \epsilon_i[$ é conexo. Então

$$\widetilde{F}(V\times\ ]t - \epsilon_i, t + \epsilon_i[) \subset A.$$

Considere $e' : A \to S$ a restrição de e, o qual, segundo o lema 6.1, é um homeomorfismo. Então

$$\widetilde{F}|_{(V\times\ ]t-\epsilon_i,t+\epsilon_i[)} = e'^{-1} \circ F|_{(V\times\ ]t-\epsilon_i,t+\epsilon_i[)}.$$

Segue que $\widetilde{F}$ é contínua, pois é a composta de funções contínuas. Isto completa a indução e portanto a demonstração do teorema. □

Corolário 7.1. *Para todo espaço X, uma função contínua $f : X \to S^1$ possui um levantamento $\widetilde{f} : X \to \mathbb{R}$ se, e somente se, f é homotópica a uma função constante.*

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Como $\mathbb{R}$ é contrátil, $\widetilde{f}$ é homotopicamente nula, assim $e \circ \widetilde{f} = f$ é homotopicamente nula (vide prova de $(iii) \Rightarrow (i)$ do teorema 6.2).

$(\Leftarrow)$ Seja $F : f_0 \simeq f$, com f_0 uma função constante com imagem z. Tomemos $a_0 \in \mathbb{R}$, com $e(a_0) = z$, e considere $\widetilde{f_0}$ como a função constante com imagem a_0. Assim, segundo o teorema 7.2, podemos levantar a homotopia F a $\widetilde{F} : X \times I \to \mathbb{R}$. Segue que a função contínua $\widetilde{f} : X \to \mathbb{R}$ definida por $\widetilde{f}(x) = \widetilde{F}(x, 1)$ levanta f, pois $(e \circ \widetilde{f})(x) = e \circ \widetilde{F}(x, 1) = F(x, 1) = f(x)$. □

7.2 O Problema de Extensão

Vamos tratar do segundo problema mencionado: Dadas $g : A \to B$, $f : A \to C$, quando existe $h : B \to C$ comutando o diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[dl, dashed, "h"] \\ C & \end{tikzcd}$$

isto é, satisfazendo $h \circ g = f$.

Claramente, se h existe, $g(x) = g(y)$ implica $f(x) = h(g(x)) = h(g(y)) = f(y)$.

Uma razoável hipótese a fazer é portanto que g seja injetiva, ou ainda considerar A um subespaço de B.

Mostraremos um importante resultado que resolverá o problema de extensão em um caso particular.

Lema 7.1. *Sejam B um espaço, e A um subespaço fechado de B e $h : A \to \mathbb{R}$, com $|h(x)| \leq k$, $\forall x \in A$. Então existe uma função contínua $H : B \to \mathbb{R}$, com $|H(x)| \leq \frac{1}{3}k$, para $x \in B$ e $|h(x) - H(x)| \leq \frac{2}{3}k$, para $x \in A$.*

Demonstração. Sejam $A^+ = h^{\vdash}[\frac{1}{3}k, k]$ e $A^- = h^{\vdash}[-k, -\frac{1}{3}k]$. Como h é contínua, A^+ e A^- são fechados em A. Como A é fechado em B, temos que A^+ e A^- também são fechados em B. A função $x \to d(x, A^+)$ definida de B em $\mathbb{R}_+$ é contínua, e se anula somente em A^+; similarmente para A^-. Portanto, $d(x, A^+) + d(x, A^-)$ nunca se anula em B e a função

$$H(x) = \frac{1}{3}k\frac{d(x, A^-) - d(x, A^+)}{d(x, A^+) + d(x, A^-)}$$

está bem definida, e é contínua em B.

Temos que $|H(x)| \leq \frac{1}{3}k$, pois $|d(x, A^-)-d(x, A^+)| \leq d(x, A^+)+d(x, A^-)$. Portanto,

$$\frac{|d(x, A^+) - d(x, A^-)|}{d(x, A^+) + d(x, A^-)} \leq 1.$$

Agora se $x \in A$ e $h(x) \geq \frac{1}{3}k$, então $x \in A^+$. Assim $d(x, A^+) = 0$, $H(x) = \frac{1}{3}k$ e $0 \leq h(x) - H(x) \leq k - \frac{1}{3}k = \frac{2}{3}k \Rightarrow |h(x) - H(x)| \leq \frac{2}{3}k$.

Se $x \in A$ e $h(x) \leq -\frac{1}{3}k$, então $x \in A^-$. Assim $d(x, A^-) = 0$,$H(x) = -\frac{1}{3}k$ e $-\frac{2}{3}k = -k + (\frac{k}{3}) \leq h(x) - H(x) \leq 0$. Logo $|h(x) - H(x)| = H(x) - h(x) \leq \frac{2}{3}k$ e assim $|h(x) - H(x)| \leq \frac{2}{3}k$.

Se $-\frac{1}{3}k \leq h(x) \leq \frac{1}{3}k$, então $|H(x) - h(x)| \leq |H(x)| + |h(x)| \leq \frac{k}{3} + \frac{k}{3} = \frac{2}{3}k$. □

Teorema 7.3 (Teorema de extensão de Tietze)**.** *Sejam B um espaço, A um subespaço fechado de B e J um intervalo fechado dos números reais. Então toda função contínua $f : A \to J$ tem uma extensão contínua, $F : B \to J$. (Como todos os intervalos fechados são homeomorfos, podemos trocar J pelo intervalo $[-1, 1]$).*

Demonstração. Dada $f : A \to [-1, 1]$, pelo lema 7.1, com $k = 1$, $h = f$, podemos encontrar $F_1 : B \to [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$, com $|f(x) - F_1(x)| \leq \frac{2}{3}, \forall x \in A$. Aplicando o lema 7.1 novamente para $k = \frac{2}{3}$ e $h = f - F_1|_A$, obtemos $F_2 : B \to [\frac{-2}{3^2}, \frac{2}{3^2}]$, com $|(f - F_1)(x) - F_2(x)| \leq (\frac{2}{3})^2$, $\forall x \in A$. Suponha indutivamente que as funções $F_i : B \to \mathbb{R}$ tenham sido construídas com $|F_i(x)| \leq \frac{2^{i-1}}{3^i}$ em B e

$$|f(x) - \sum_{r=1}^{i} F_r(x)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^i, \ \forall x \in A$$

para $i \leq n-1$. Aplicando o lema 7.1 com $h = f-\sum\limits_{r=1}^{n-1}(F_r|A)$ e $k = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$, obtemos uma função $F_n : B \to \mathbb{R}$, com $|F_n(x)| \leq \frac{2^{n-1}}{3^n}$ e $|(f - \sum\limits_{r=1}^{n-1} F_i)(x) - F_n(x)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n, \forall\, x \in A$. Por indução temos F_i construída para todo i. Como $|F_i(x)| \leq \frac{2^{i-1}}{3^i}$, a série $\sum F_i$

converge uniformemente em B (pelo teste M de Weirstrass). Sendo F a convergência da série, temos $F : B \to \mathbb{R}$ contínua com

$$|F(x)| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2^{i-1}}{3^i} = 1.$$

Fazendo i tender ao infinito na inequação $|f(x) - \sum_{r=1}^{i} F_r(x)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^i$ obtemos $f(x) = F(x)$, $\forall x \in A$. Logo F satisfaz os requisitos do teorema. $\square$

Corolário 7.2. *Sejam J um intervalo aberto de $\mathbb{R}$ e A, B como no teorema anterior. Então qualquer função contínua $f : A \to J$ tem uma extensão contínua $F : B \to J$.*

Demonstração. Como todos os intervalos abertos são homeomorfos, podemos supor $J =]-1, 1[$. Pelo teorema 7.3, $i \circ f : A \to [-1, 1]$ tem uma extensão $g : B \to [-1, 1]$, onde $i : J \to [-1, 1]$ é a inclusão. Dado $C = g^{\vdash}(\{-1, 1\})$, então C é um subespaço fechado de B (pois $\{-1, 1\}$ é fechado em $[-1, 1]$ e g é contínua) e disjunto de A.

Defina $h : A \cup C \to I$ por $h|_A = \{1\}, h|_C = \{0\}$. Como A e C são fechados e disjuntos, temos pelo lema da colagem (lema 2.1) que h é contínua e assim pelo teorema 7.3, h tem uma extensão contínua $k : B \to I$.

Mostremos que $F(x) = g(x).k(x)$ estende f.

1) Verifiquemos que F está bem definida:

i) para $x \in A$, $F(x) = g(x) \neq \pm 1$, pois $g(x) = i \circ f(x) \in]-1, 1[$, $\forall\ x \in A$;

ii) para $x \in C$, $F(x) = 0$, pois $k(x) = h(x) = 0$, $\forall x \in C$;

iii) para $x \in B - (A \cup C)$, $k(x) = 0$ ou $k(x) = 1$ ou $k(x) \in (0, 1)$.

Então

iii_1) $k(x) = 0 \Rightarrow F(x) = 0$; $k(x) = 1 \Rightarrow F(x) = g(x) \neq \pm 1$;

iii_2) $k(x) \in (0, 1) \Rightarrow F(x) = g(x).k(x) \in]-k(x), k(x)[\subset]-1, 1[$.

2) F estende f, pois para $x \in A, F(x) = i \circ f(x) = f(x)$. $\square$

Proposição 7.1. *Sejam B um espaço, A um subespaço fechado de B, $f_0 : B \to S^1$ e $g_t : A \to S^1$ uma homotopia com $g_0 = f_0|_A$. Então g_t pode ser estendida a uma homotopia $\tilde{f}_t$ com $\tilde{f}_0 = f_0$.*

Demonstração. Definamos $h : A \times I \to S^1$ por

$$h(a, t) = \frac{g(a, t)}{g(a, 0)}.$$

Desta forma h é uma homotopia da função constante $A \to \{1\}$. Pelo teorema 7.2, h se levanta a uma homotopia $\bar{h} : A \times I \to \mathbb{R}$ da função $A \to \{0\}$.

Pelo corolário 7.2 , com $J = \mathbb{R}$ e $f : B \times \{0\} \cup A \times I \to \mathbb{R}$ definida por $f(b, 0) = 0$, $f(a, t) = \bar{h}(a, t)$, temos que existe uma extensão contínua $F : B \times I \to \mathbb{R}$ de f. Esta extensão determina uma homotopia $k : B \times I \to S^1$ dada por $k(x, t) = (e \circ F)(x, t)$.

Agora, definindo $\tilde{f} = k.f_0 : B \times I \to S^1$ por $\tilde{f}(x, t) = k(x, t).f_0(x)$, temos

$$\tilde{f}_0(x) = \tilde{f}(x, 0) = k(x, 0).f_0(x) = e(F(x, 0)).f_0(x) = e(0).f_0(x) = f_0(x), \forall x \in B,$$

o que demonstra o teorema. $\square$

Corolário 7.3. *Sejam B um espaço, A um subespaço fechado de B e $g : A \to S^1$ uma função homotopicamente nula. Então g é estendida a uma função contínua $f : B \to S^1$.*

Demonstração. Se g é homotopicamente nula, então existe uma homotopia $g_t : A \to S^1$ com $g_1 = g$ e g_0 uma função constante. Pela proposição 7.1, com f_0 e $g_0 = f_0|A$ funções constantes, g_t pode ser estendida a uma homotopia $\tilde{f}_t : B \to S^1$, onde $\tilde{f}_0 = f_0$. Agora, $f = \tilde{f}_1$ é a extensão de g procurada, pois $\forall\ a \in A$, $\tilde{f}_1(a) = ((e \circ F_1).f_0)(a) = (e \circ F_1)(a).f_0(a) = e(F(a, 1)).g_0(a) = e(\bar{h}(a, 1)).g_0(a) = h(a, 1).g_0(a) = g(a, 1) = g_1(a) = g(a)$. $\square$

8 O Teorema de Mayer-Vietoris e Aplicações

Neste capítulo daremos exemplos de cálculos dos grupos $H^1(X)$. Primeiramente provaremos um resultado geral, e este tomará a forma de uma sequência exata: isto é típico de resultados em topologia algébrica. O grupo procurado não será determinado explicitamente, mas informações suficientes serão dadas para sua determinação através de exemplos simples.

8.1 O Teorema de Mayer-Vietoris

Nesta seção utilizaremos as seguintes notações: Y é um espaço; X_1, X_2 são subespaços fechados, com $Y = X_1 \cup X_2$ e $W = X_1 \cap X_2$ (o qual também é fechado). Denotaremos as funções inclusões como no diagrama

$$\begin{tikzcd}
& X_1 \arrow[dr, "j_1"] & \\
W \arrow[ur, "i_1"] \arrow[rr, "k"] \arrow[dr, "i_2"'] & & Y \\
& X_2 \arrow[ur, "j_2"'] &
\end{tikzcd}$$

tais que $k = j_1 \circ i_1 = j_2 \circ i_2$.

Teorema 8.1. *Existe um homomorfismo $\delta^* : H^0(W) \to H^1(Y)$ que torna exata a sequência:*

$$0 \longrightarrow H^0(Y) \xrightarrow{\{j_1^*, -j_2^*\}} H^0(X_1) \oplus H^0(X_2) \xrightarrow{(i_1^*, i_2^*)} H^0(W) \xrightarrow{\delta^*} H^1(Y) \xrightarrow{\{j_1^*, -j_2^*\}}$$
$$\xrightarrow{\{j_1^*, -j_2^*\}} H^1(X_1) \oplus H^1(X_2) \xrightarrow{(i_1^*, i_2^*)} H^1(W).$$

Demonstração. i) *Exatidão em $H^0(Y)$.*

Seja $h \in \mathrm{Ker}\{j_1^*, -j_2^*\}$. Então $\{j_1^*, -j_2^*\}(h) = (j_1^*(h), -j_2^*(h)) = (0, 0)$, ou seja,

$$0 = j_1^*(h) = h \circ j_1 = h|_{X_1},$$

e também $0 = -j_2^*(h)$, o que implica $0 = j_2^*(h) = h \circ j_2 = h|_{X_2}$. Como $Y = X_1 \cup X_2$ temos $h = 0$, e portanto Ker $\{j_1^*, -j_2^*\} = \{0\}$.

ii) *Exatidão em* $H^0(X_1) \oplus H^0(X_2)$.

Seja $(j_1^*(f), -j_2^*(f)) \in \mathrm{Im}\{j_1^*, -j_2^*\}$. Então

$$(i_1^*, i_2^*)(j_1^*(f), -j_2^*(f)) = i_1^* \circ j_1^*(f) + i_2^* \circ (-j_2)^*(f)$$

$$= (j_1 \circ i_1)^*(f) - (j_2 \circ i_2)^*(f) = k^*(f) - k^*(f) = 0.$$

Logo $Im\{j_1^*, -j_2^*\} \subseteq \mathrm{Ker}(i_1^*, i_2^*)$. **(1)**

Reciprocamente, dado $(g_1, g_2) \in \mathrm{Ker}(i_1^*, i_2^*)$, então

$$0 = (i_1^*, i_2^*)(g_1, g_2) = i_1^*(g_1) + i_2^*(g_2) = g_1|_W + g_2|_W.$$

Queremos encontrar $h \in H^0(Y)$ tal que $\{j_1^*, -j_2^*\}(h) = (g_1, g_2)$. Defina $h : Y \to Z$, por $h|_{X_1} = g_1$ e $h|_{X_2} = -g_2$. Assim, h está bem definida, pois $g_1|_W = -g_2|_W$, isto é, g_1 e $-g_2$ coincidem em $W = X_1 \cap X_2$. Como g_1 e g_2 são contínuas, e X_1 e X_2 são fechados, pelo lema da colagem (lema 2.1), h é contínua. Agora,

$$g_1 = h|_{X_1} = j_1^*(h) \text{ e } g_2 = -h|_{X_2} = -j_2^*(h).$$

Então $(g_1, g_2) = \{j_1^*, -j_2^*\}(h)$, e portanto $\mathrm{Ker}(i_1^*, i_2^*) \subseteq \mathrm{Im}\ \{j_1^*, -j_2^*\}$. **(2)**

Por **(1)** e **(2)** temos $\mathrm{Ker}(i_1^*, i_2^*) = \mathrm{Im}\{j_1^*, -j_2^*\}$.

iii) *Definição de* δ^*.

Dado $l : W \to \mathbb{Z}$ contínua, compondo-a com a inclusão $i : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$, obtemos $i \circ l : W \to \mathbb{R}$ contínua, e pelo corolário 7.2 podemos estender $i \circ l$ a uma função contínua $g : X_1 \to \mathbb{R}$. Definamos $h : Y \to S^1$ por

$$h|_{X_1} = e \circ g,\ \ h|_{X_2} = \{1\}.$$

Segue que $e \circ g : X_1 \to S^1$ e $c : X_2 \to S^1$, com $c(x) = 1$, $\forall x \in X_2$, são contínuas e ainda que elas coincidem em $W = X_1 \cap X_2$. De fato, dado $y \in W = X_1 \cap X_2$, temos $g(y) = l(y) \in \mathbb{Z}$, daí $(e \circ g)(y) = e(g(y)) = 1 = c(y)$, e assim, pelo lema da colagem (lema 2.1), segue que h é contínua . Defina $\delta^*(l) = [h]$.

iii_1) δ^* está bem definida.

De fato, suponha que exista outra extensão de $i \circ l$, $g' : X_1 \to \mathbb{R}$. Então $\delta^*(l) = [h']$, onde $h' : Y \to S^1$ é dada por $h'|_{X_1} = e \circ g'$ e $h'|_{X_2} = \{1\}$. Temos que mostrar que $h \simeq h'$.

Seja $G : X_1 \times I \to \mathbb{R}$ dada por $G(x,t) = (1-t)g(x) + tg'(x)$. Então G é contínua, pois é soma de funções contínuas, e $G(W \times I) = (i \circ l)(W) \subseteq \mathbb{Z}$, pois dado $(w,t) \in W \times I$, $G(w,t) = (1-t)g(w) + tg'(w)$, e como g e g' são extensões de

$i \circ l$, segue que $G(w,t) = (1-t)(i \circ l)(w) + t(i \circ l)(w) = (i \circ l)(w)$. Assim podemos definir $H : Y \times I \to S^1$ por

$$H(x,t) = \begin{cases} e \circ G(x,t), & \text{se} \quad x \in X_1 \\ 1, & \text{se} \quad x \in X_2 \end{cases}$$

H é uma homotopia entre h e $h^{'}$, pois é contínua pelo lema da colagem (lema 2.1) e

$$H(x,0) = \begin{cases} e \circ G(x,0), & \text{se} \quad x \in X_1 \\ 1, & \text{se} \quad x \in X_2 \end{cases} = h(x)$$

$$H(x,1) = \begin{cases} e \circ G(x,1), & \text{se} \quad x \in X_1 \\ 1, & \text{se} \quad x \in X_2 \end{cases} = h^{'}(x).$$

Portanto $h \simeq h^{'}$.

iii_2) δ^* é um homomorfismo.

Dados $f : W \to \mathbb{Z}$ e $f^{'} : W \to \mathbb{Z}$ funções contínuas, $g : X_1 \to \mathbb{R}$ e $g^{'} : X_1 \to \mathbb{R}$ extensões contínuas de $i \circ f$ e $i \circ f^{'}$, respectivamente, então $\delta^*(f) = [h]$, onde $h : Y \to S^1$ é dada por $h|_{X_1} = e \circ g$; $h|_{X_2} = \{1\}$, e $\delta^*(f^{'}) = [h^{'}]$, onde $h^{'} : Y \to S^1$ é dada por $h^{'}|_{X_1} = e \circ g^{'}$; $h^{'}|_{X_2} = \{1\}$.

Temos que $g + g^{'} : X_1 \to \mathbb{R}$, definida por $(g + g^{'})(x) = g(x) + g^{'}(x)$, para todo $x \in X_1$, é uma extensão contínua de $i \circ (f + f^{'}) : W \to \mathbb{R}$, dada por $i \circ (f + f^{'})(x) = i \circ f(x) + i \circ f^{'}(x)$, pois para $x \in W$, $(g+g^{'})(x) = g(x) + g^{'}(x) = i \circ f(x) + i \circ f^{'}(x) = i \circ (f + f^{'})(x)$. Também $g + g^{'}$ é contínua, pois é soma de funções contínuas.

Assim $\delta^*(f + f^{'}) = [h^{''}]$, onde $h^{''} : Y \to S^1$ é definida por

$$h^{''}|_{X_1} = e \circ (g + g^{'}), \; h^{''}|_{X_2} = \{1\}.$$

Agora, $e \circ (g + g^{'}) = (e \circ g).(e \circ g^{'}) = h|_{X_1}.h^{'}|_{X_1} = (h.h^{'})|_{X_1}$ e $h^{''}|_{X_2} = \{1\} = (h.h^{'})|_{X_2}$. Logo $h^{''} = h.h^{'}$, onde $h.h^{'} : Y \to S^1$ é dada por $(h.h^{'})(x) = h(x).h^{'}(x)$, para todo $x \in Y$. Assim, $\delta^*(f + f^{'}) = [h^{''}] = [h.h^{'}] = [h].[h^{'}] = \delta^*(f).\delta^*(f^{'})$.

iv) *Exatidão em* $H^0(W)$.

iv_1) $\mathrm{Im}(i_1^*, i_2^*) \subseteq \mathrm{Ker}(\delta^*)$.

Dados $g_1 : X_1 \to \mathbb{Z} \in H^0(X_1)$ e $g_2 : X_2 \to \mathbb{Z} \in H^0(X_2)$, chamemos $i_1^* \circ g_1 = f_1$ e $i_2^* \circ g_2 = f_2$. Queremos mostrar que $\delta^*((i_1^*, i_2^*)(g_1, g_2)) = [k]$, onde $k : Y \to S^1$ é dada por $k(x) = 1$, $\forall x \in Y$.

Como $i \circ g_1$ é uma extensão de $i \circ f_1$, temos que $\delta^*(f_1) = [h_1]$, onde $h_1 : Y \to S^1$ é dada por $h_1|_{X_1} = e \circ (i \circ g_1)$; $h_1|_{X_2} = \{1\}$. Como $i \circ g_1(X_1) \subseteq \mathbb{Z}$, temos $e \circ (i \circ g_1(X_1)) = \{1\}$. Assim $h_1 : Y \to S^1$ é igual a função k, e portanto $\delta^*(f_1) = [h_1] = [k]$.

Seja $g_2' : X_1 \to \mathbb{R}$, uma extensão de $i \circ f_2 : W \to \mathbb{R}$. Então $g_2'(x) = (i \circ g_2)(x), \forall x \in W$, pois ambas as funções estendem $i \circ f_2$. Definamos então

$$\tilde{h}_2 : Y \to \mathbb{R} \quad \text{por } \tilde{h}_2|_{X_1} = g_2'; \ \tilde{h}_2|_{X_2} = i \circ g_2$$

que é contínua segundo o lema da colagem (lema 2.1). Assim g_2' é uma extensão de $i \circ f_2$, e $\delta^*(f_2) = [h_2]$, onde $h_2 : Y \to S^1$, e dado por $h_2|_{X_1} = e \circ g_2'$ e $h_2|_{X_2} = \{1\}$.

Afirmamos que $\tilde{h}_2$ é um levantamento de h_2, pois para $x \in X_1$, $e \circ \tilde{h}_2(x) = e \circ g_2'(x) = h_2(x)$, e para $x \in X_2$, $e \circ \tilde{h}_2(x) = e \circ (i \circ g_2(x)) = 1 = h_2(x)$. Como h_2 possui um levantamento, pelo corolário 7.1 segue que h_2 é homotopicamente nula. Assim $h_2 \simeq c$, onde c é uma função constante, e como a função constante c é homotópica a função constante k, temos $[h_2] = [k]$, implicando em

$$\delta^*((i_1^*, i_2^*)(g_1, g_2)) = \delta^*(f_1 + f_2) = \delta^*(f_1).\delta^*(f_2) = [h_1].[h_2] = [k].[k] = [k].$$

$iv_2)$ $\mathrm{Im}(i_1^*, i_2^*) \supseteq \mathrm{Ker}(\delta^*)$.

Dado $f : W \to \mathbb{Z} \in \mathrm{Ker}(\delta^*)$, seja $g : X_1 \to \mathbb{R}$ uma extensão de $i \circ f$ e h como na definição de $\delta^*(f)$. Então h é homotopicamente nula, pois $[k] = \delta^*(f) = [h]$. Desse modo, segundo o corolário 7.1 podemos encontrar um levantamento $\widetilde{h} : Y \to \mathbb{R}$ de h. Como $h(X_2) = \{1\}$, devemos ter $e \circ \widetilde{h}(X_2) = h(X_2) = \{1\}$, ou seja $\widetilde{h}(X_2) \subseteq \mathbb{Z}$. Desta forma $\widetilde{h}$ define uma função $g_2 = \widetilde{h}|_{X_2} : X_2 \to \mathbb{Z}$.

Temos também que ambas as funções $\widetilde{h}|_{X_1}$ e g levantam a função $h|_{X_1} = e \circ g$, ficando assim bem definida a função $g_1 : X_1 \to \mathbb{Z}$ dada por $g_1(y) = g(y) - \widetilde{h}(y)$, pois para $y \in X_1$, $e \circ g_1(y) = e(g(y) - \widetilde{h}(y)) = e(g(y)).e(-\widetilde{h}(y)) = (h|_{X_1})(y).(e(\widetilde{h}(y))^{-1} = (h|_{X_1})(y).((h|_{X_1})(y))^{-1} = 1$, ou seja $g_1(y) \in \mathbb{Z}$.

Agora, para $w \in W$, g_1 e g_2 estão definidas e $f(w) = g(w) = g_1(w) + \widetilde{h}(w)$, ou seja, $(i_1^*, i_2^*)(g_1, g_2) = i_1^* \circ g_1 + i_2^* \circ g_2 = g_1|_W + g_2|_W = g_1|_W + \widetilde{h}|_W = f$.

v) *Exatidão em $H^1(Y)$.*

Inicialmente observemos que $(-j_2^*) : H^1(Y) \to H^1(X_2)$ é definida por $(-j_2^*)[h] = [h \circ j_2]^{-1}$ (inversa da classe $[h \circ j_2]$).

$v_1)$ $\mathrm{Im}(\delta^*) \subseteq \mathrm{Ker}\{j_1^*, -j_2^*\}$.

Dado $f : W \to \mathbb{Z} \in H^0(W)$, queremos mostrar que $\{j_1^*, -j_2^*\} \circ \delta^*(f) = ([e_1], [e_2])$, onde $e_1 : X_1 \to S^1$ é dada por $e_1(x) = 1$, $\forall x \in X_1$ e $e_2 : X_2 \to S^1$ é dada por $e_2(x) = 1$, $\forall x \in X_2$.

Seja $g : X_1 \to \mathbb{R}$ uma extensão de $i \circ f$ e h como na definição de $\delta^*(f)$. Então $\{j_1^*, -j_2^*\} \circ \delta^*(f) = (j_1^*(\delta^*(f)), -j_2^*(\delta^*(f))) = (j_1^*([h]), -j_2^*([h])) = ([h \circ j_1], [h \circ j_2]^{-1})$.

Mas, $h \circ j_1 = h|_{X_1} : X_1 \to S^1$ e portanto $h \circ j_1 = e \circ g$, ou seja, $h \circ j_1$ possui um levantamento $g : X_1 \to \mathbb{R}$. Segue novamente pelo corolário 7.1 que $h \circ j_1$

é homotopicamente nula, e pelos mesmos argumentos feitos anteriormente temos $[h \circ j_1] = [e_1]$.

Ainda $h \circ j_2 = h|_{X_2} = \{1\}$, logo $[h \circ j_2]^{-1} = [e_2]^{-1} = [e_2]$.

Finalmente temos que $\{j_1^*, -j_2^*\}\delta^*(f) = ([h \circ j_1], [h \circ j_2]^{-1}) = ([e_1], [e_2])$.

v_2) Ker $\{j_1^*, -j_2^*\} \subseteq \mathrm{Im}(\delta^*)$.

Dado $[h] \in Ker\{j_1^*, -j_2^*\}$, queremos encontrar $f \in H^0(W)$, com $\delta^*(f) = [h]$. Temos que $([e_1], [e_2]) = \{j_1^*, -j_2^*\}[h] = ([h \circ j_1], [h \circ j_2]^{-1})$. Assim $h \circ j_1 \simeq e_1$ e $h \circ j_2 \simeq e_2$, e portanto as restrições $h|_{X_1} = h \circ j_1$ e $h|_{X_2} = h \circ j_2$ são funções homotópicas as funções constantes e_1 e e_2, respectivamente.

Pela proposição 7.1, a homotopia entre $h|_{X_2}$ e e_2 pode ser estendida à uma homotopia entre h e $h' : Y \to S^1$ com $h'|_{X_2} = \{1\}$.
Agora $h'|_{X_1}$ é homotópica a $h|_{X_1}$ e como $h|_{X_1}$ é homotópica a e_1, temos que $h'|_{X_1}$ é homotópica a e_1, e portanto segue pelo corolário 7.1 que $h'|_{X_1}$ possui um levantamento $g : X_1 \to \mathbb{R}$.

Seja $f = g|_W$. Então f levanta a função $W \to \{1\}$, pois para $x \in W$, $e \circ f(x) = e \circ g(x) = h'(x) = 1$. Logo f assume valores em $\mathbb{Z}$. Agora, pela construção de f, temos que $\delta^*(f) = [h'] = [h]$.

vi) *Exatidão em* $H^1(X_1) \oplus H^1(X_2)$.

vi_1) $\mathrm{Im}\{j_1^*, -j_2^*\} \subseteq$ Ker (i_1^*, i_2^*).

Temos que $(i_1^*, i_2^*) \circ \{j_1^*, -j_2^*\} = i_1^* \circ j_1^* - i_2^* \circ j_2^* = (j_1 \circ i_1)^* - (j_2 \circ i_2)^* = k^* - k^* = 0$.

vi_2) $\mathrm{Ker}(i_1^*, i_2^*) \subseteq \mathrm{Im}\{j_1^*, -j_2^*\}$.
Dado $([g_1], [g_2]) \in \mathrm{Ker}(i_1^*, i_2^*)$, então $[e] = (i_1^*, i_2^*)([g_1], [g_2]) = i_1^*([g_1]).i_2^*([g_2]) = [g_1 \circ i_1].[g_2 \circ i_2] = [g_1|_W].[g_2|_W]$. Assim $[g_1|_W] = [g_2|_W]^{-1} = [(g_2|_W)^{-1}]$ e $g_1|_W \simeq (g_2|_W)^{-1}$.

Pela proposição 7.1 a homotopia entre $g_1|_W$ e $(g_2|_W)^{-1}$ pode ser estendida a uma homotopia entre g_1 e g_1', com $g_1'(w) = (g_2(w))^{-1}$, para todo $w \in W$.

Defina $h : Y \to S^1$ por $h|_{X_1} = g_1'$ e $h(y) = g_2(y)^{-1}$, para todo $y \in X_2$. Então pelo lema da colagem (lema 2.1) h é contínua.

Por fim, temos $\{j_1^*, -j_2^*\}[h] = ([h \circ j_1], [h \circ j_2]^{-1}] = ([h \circ j_1], [(h \circ j_2)^{-1}]) = ([g_1'], [g_2]) = ([g_1], [g_2])$.

□

8.2 Primeiros Cálculos

Daremos alguns exemplos para ilustrar como este último resultado pode ser usado para a realização de alguns cálculos.

Lema 8.1. *Se $X = X_1 \cup X_2$ é uma partição de X então:*

$$H^0(X) \cong H^0(X_1) \oplus H^0(X_2),$$

$$H^1(X) \cong H^1(X_1) \oplus H^1(X_2).$$

Demonstração. Por hipótese, X_1 e X_2 são fechados em X e então podemos aplicar o teorema 8.1 para obter uma sequência exata. Desde que $X_1 \cap X_2$ é vazio, então $H^0(X_1 \cap X_2)$ e $H^1(X_1 \cap X_2)$ são nulos, e assim temos as sequências exatas

$$0 \to H^0(X) \longrightarrow H^0(X_1) \oplus H^0(X_2) \to 0,$$

$$0 \to H^1(X) \longrightarrow H^1(X_1) \oplus H^1(X_2) \to 0.$$

Assim $H^0(X) \cong H^0(X_1) \oplus H^0(X_2)$ e $H^1(X) \cong H^1(X_1) \oplus H^1(X_2)$. □

Usando indução podemos estender o lema 8.1 para um número finito de componentes de X. Considere o caso quando $X_1 \cap X_2 = \{P\}$. Como cada função contínua $\{P\} \to \mathbb{Z}$ se estende a uma função contínua (por exemplo constante) $X_1 \to \mathbb{Z}$, temos que $H^0(X_1) \xrightarrow{i_1^*} H^0(P)$ é sobrejetora. Assim $(i_1^*, i_2^*) : H^0(X_1) \oplus H^0(X_2) \to H^0(P)$ é sobrejetora. Segue da exatidão que Ker $\delta^* = H^0(P)$, e $\delta^* : H^0(P) \to H^1(X_1 \cup X_2)$ é nula.

Lema 8.2. *Suponha X_1 e X_2 fechados em X, tais que $X_1 \cup X_2 = X$ e $X_1 \cap X_2 = \{P\}$. Neste caso, escrevemos $X = X_1 \vee X_2$. Então existem isomorfismos*

$$H^1(X) = H^1(X_1 \vee X_2) \cong H^1(X_1) \oplus H^1(X_2),$$

$$H^0(X) \oplus \mathbb{Z} \cong H^0(X_1) \oplus H^0(X_2).$$

Além disso, se X_2 for conexo, então $H^0(X) \cong H^0(X_1)$.

Demonstração. Temos a sequência exata

$$0 \to H^0(X) \longrightarrow H^0(X_1) \oplus H^0(X_2) \to H^0(P) \to 0.$$

Mostremos que $H^0(P)$ é isomorfo a $\mathbb{Z}$. Seja $h : H^0(P) \to \mathbb{Z}$, dada por $h(f) = f(P)$. Então h é um homomorfismo, pois $h(f+g) = (f+g)(P) = f(P)+g(P) = h(f)+h(g)$; h é injetora, pois Ker $h = \{f \in H^0(P) | h(f) = 0\} = \{f \in H^0(P) | f(P) = 0\} = \{0\}$; e h é sobrejetora, pois dado $x_0 \in \mathbb{Z}$, tomando $f \in H^0(P)$ definida por $f(P) = x_0$, temos $h(f) = f(P) = x_0$.

Como $\mathbb{Z}$ é abeliano livre, segue da proposição 3.4 que a sequência cinde. Portanto,

$$H^0(X_1) \oplus H^0(X_2) \cong H^0(X) \oplus H^0(P) \cong H^0(X) \oplus \mathbb{Z}.$$

Agora, se X_2 é conexo, a função $H^0(X_2) \xrightarrow{i_2^*} H^0(P)$ é um isomorfismo, e assim o resultado segue do corolário 3.2. □

Teorema 8.2. *Seja $Y = X \cup A$, onde X é fechado em Y, A é um arco com extremos P e Q, e $X \cap A = \{P, Q\}$. Se X possui uma partição que separa P de Q, então:*

$$H^0(X) \cong H^0(Y) \oplus \mathbb{Z} \quad e \quad H^1(Y) \cong H^1(X).$$

Caso contrário, temos um isomorfismo $H^0(Y) \cong H^0(X)$ e uma sequência exata

$$0 \to \mathbb{Z} \to H^1(Y) \to H^1(X) \to 0.$$

Se existe um caminho em X unindo P a Q, esta sequência cinde, e então

$$H^1(Y) \cong H^1(X) \oplus \mathbb{Z}.$$

Demonstração. Como A é um arco, é compacto e portanto fechado. Então podemos aplicar o teorema 8.1. Agora:

i) $H^1(P) \cong 0$.

Dado $[f] \in H^1(P)$, com $f : \{P\} \to S^1$ dada por $f(P) = z_0$, definimos $H : \{P\} \times I \to S^1$ por $H(P, t) = \gamma(t)$, onde γ é o caminho sobre S^1, ligando z_0 a $1 = (1, 0) \in S^1$. Temos H contínua, pois γ é contínua e $H(P, 0) = \gamma(0) = z_0$, $H(P, 1) = \gamma(1) = 1$, ou seja, H é um homotopia entre f e $e : \{P\} \to \{1\}$. Segue que $[f] = [e]$.

Sendo A contrátil, toda função $f : A \to S^1$ é homotopicamente nula (vide teorema 6.4 trocando D^2 por A) donde segue que $H^1(A) = 0$.

Pelo lema 8.1

$$H^0(X \cap A) \cong H^0(P) \oplus H^0(Q) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

$$H^1(X \cap A) \cong H^1(P) \oplus H^1(Q) \cong 0.$$

Então a sequência exata tem a forma

$$0 \to H^0(Y) \to H^0(X) \oplus H^0(A) \to H^0(P) \oplus H^0(Q) \xrightarrow{\delta^*} H^1(Y) \to H^1(X) \to 0.$$

Mas, como A é contrátil, existe $c : A \to \{Q\}$ e $i : \{Q\} \to A$ a inclusão, com $i \circ c = 1_A$ e $c \circ i = 1_{\{Q\}}$. Assim, $(i \circ c)^* = 1_{H^0(A)} \Rightarrow c^* \circ i^* = 1_{H^0(A)}$ e $(c \circ i)^* = 1_{H^0(Q)} \Rightarrow i^* \circ c^* = 1_{H^0(Q)}$, ou seja, a função restrição $i^* : H^0(A) \to H^0(Q)$ é um isomorfismo.

Então podemos aplicar o teorema 3.2 para "cancelar" estes termos, e obtermos a sequência exata

$$0 \to H^0(Y) \to H^0(X) \xrightarrow{\lambda} \mathbb{Z} \xrightarrow{\delta} H^1(Y) \to H^1(X) \to 0. \tag{8.1}$$

Para ver como é definido λ voltemos ao teorema 3.2.

Primeiro vamos determinar a, b, c, d do teorema 3.2. Denotando por R_2 o isomorfismo $H^0(X \cap A) \cong H^0(P) \oplus H^0(Q)$, teremos

$$
\begin{array}{c}
H^0(X) \oplus H^0(A) \overset{R_1}{\rightarrow} H^0(X \cap A) \overset{R_2}{\rightarrow} H^0(P) \oplus H^0(Q) \\
(f, g) \overset{R_1}{\rightarrow} f|_{X \cap A} + g|_{X \cap A} \overset{R_2}{\rightarrow} ((f|_{X \cap A} + g|_{X \cap A})|_{\{P\}}, (f|_{X \cap A} + g|_{X \cap A})|_{\{Q\}}),
\end{array}
$$

daí

$$
H^0(X) \oplus H^0(A) \xrightarrow{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}} H^0(P) \oplus H^0(Q),
$$

onde $a : H^0(X) \to H^0(P)$ com $a(f) = f|_{\{P\}}$, $b : H^0(A) \to H^0(P)$ com $b(g) = g|_{\{P\}}$, $c : H^0(X) \to H^0(Q)$ com $c(f) = f|_{\{Q\}}$ e $d : H^0(A) \to H^0(Q)$ com $d(g) = g|_{\{Q\}}$.

ii) Determinar $\lambda = a - b \circ d^{-1} \circ c$.

Temos $d^{-1} : H^0(Q) \to H^0(A)$, onde $d^{-1}(f) : A \to \mathbb{Z}$ é dada por $d^{-1}(f)(x) = f(Q)$, $\forall x \in A$.

Assim $a - b \circ d^{-1} \circ c : H^0(X) \to H^0(P) \cong \mathbb{Z}$ é dada por $(a - b \circ d^{-1} \circ c)(f) = a(f) - (b \circ d^{-1})(c(f)) = f|_{\{P\}} - (b \circ d^{-1})(f|_{\{Q\}})$.

Temos que $d^{-1}(f|_{\{Q\}}) = g : A \to \mathbb{Z}$ definida por $g(x) = f(Q)$, $\forall x \in A$. Desse modo $(b \circ d^{-1})(f|_{\{Q\}}) = h : \{P\} \to \mathbb{Z}$ é dada por $h(P) = f(Q)$. Segue que $(a - b \circ d^{-1} \circ c)(f)(P) = f(P) - f(Q)$.

Portanto λ é definida por $\lambda(f) = f(P) - f(Q)$.

Agora distinguiremos os dois casos. Primeiro vamos supor que haja uma partição $X = X_1 \cup X_2$, com $P \in X_1$ e $Q \in X_2$ (figura 8.1).

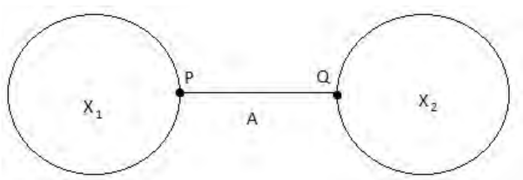

Figura 8.1: Caso em que X possui uma partição que separa P de Q

Então toda função $g : \{P, Q\} \to \mathbb{Z}$ pode ser estendida a X, definindo $g(X_1) = g(P), g(X_2) = g(Q)$. Em particular, λ é sobrejetora, pois dado $c \in \mathbb{Z}$, tomando $f : X \to \mathbb{Z} \in H^0(X)$ definida por $f(X_1) = c$ e $f(X_2) = 0$, temos que $\lambda(f)(P) = f(P) - f(Q) = c - 0 = c$. Segue da exatidão que $\delta = 0$.

Da sequência exata (8.1) segue que $0 \to H^1(Y) \to H^1(X) \to 0$ e $0 \to H^0(Y) \to H^0(X) \to \mathbb{Z} \to 0$ são exatas. Assim, pelos mesmos argumentos do lema 8.2, e exatidão das sequências, temos $H^0(X) \cong H^0(Y) \oplus \mathbb{Z}$ e $H^1(Y) \cong H^1(X)$.

Agora, suponhamos não haver uma partição (figura 8.2).

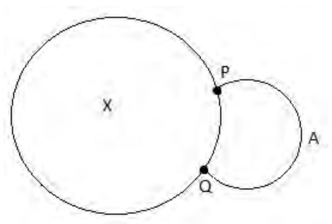

Figura 8.2: Caso em que X não possui uma partição que separa P de Q

Então $\lambda = 0$, pois se existisse $f : X \to \mathbb{Z} \in H^0(X)$, com $f(P) \neq f(Q)$, obteríamos uma partição de $X = X_1 \cup X_2$, com $X_1 = f^{\vdash}(f(P))$ e $X_2 = f^{\vdash}(\mathbb{Z} - \{f(P)\})$. Segue da sequência exata (8.1) que $0 \to \mathbb{Z} \to H^1(Y) \to H^1(X) \to 0$ é exata, e $0 \to H^0(Y) \to H^0(X) \to 0$ é exata, ou $H^0(Y) \cong H^0(X)$.

Suponhamos finalmente que há um caminho em X, unindo P à Q. Podemos ver este caminho como um arco B em X com extremos P e Q. Consideremos agora a inclusão $i^{'} : B \to X$. Temos que $A \cap B = \{P, Q\}$ e assim $i^{'}$ se estende à uma função,

$$j : A \cup B \to A \cup X = Y$$

definida por $j(x) = \begin{cases} x, & x \in A \\ i^{'}(x), & x \in B. \end{cases}$

Como $A \cup B$ é homeomorfo à S^1, temos $j^* : H^1(Y) \to H^1(A \cup B) \cong H^1(S^1) \cong \mathbb{Z}$.

Aplicando o que provamos anteriormente, mas com B no lugar de X, temos

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\delta^{'}} H^1(A \cup B) \to H^1(B) \to 0.$$

iii) $j^* \circ \delta = \delta^{'}$.

Usaremos a identificação $H^0(P) \cong \mathbb{Z}$ via $f \equiv f(P)$. Temos $\delta : \mathbb{Z} \to H^1(A \cup X)$, definida por $\delta(f) = [h]$, onde $h : A \cup X \to S^1$ é dada por $h|_X = e \circ g$, $h|_A = \{1\}$ e $g : X \to \mathbb{R}$ é uma extensão de $i \circ f : \{P\} \to \mathbb{R}$.

Temos $\delta^{'} : \mathbb{Z} \to H^1(A \cup B)$, definida por $\delta^{'}(f) = [h^{'}]$, onde $h^{'} : A \cup B \to S^1$ é dada por $h^{'}|_B = e \circ g|_B$, $h^{'}|_A = \{1\}$ e $g|_B$ é a restrição da g anterior a B.

Assim $j^* \circ \delta : H^0(P) \to H^1(A \cup B)$ é dada por $(j^* \circ \delta)(f) = [h \circ j]$.

Agora olhemos para $h \circ j : A \cup B \to S^1$. Temos que

$$(h \circ j)|_A = h|_A = \{1\} = h^{'}|_A,$$
$$(h \circ j)|_B = (h \circ i^{'})|_B = h|_B = e \circ g|_B = h^{'}|_B.$$

Assim, $h \circ j = h'$.

Segue que $j^* \circ \delta(f) = [h \circ j] = [h'] = \delta'(f)$ e $j^* \circ \delta = \delta'$.

iv) δ admite inversa a esquerda.

Como B é um arco, $H^1(B) = 0$ e δ' é um isomorfismo. Considere o diagrama

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "id"] & H^1(A \cup X) \arrow[r] \arrow[d, "j^*"] & H^1(X) \arrow[r] \arrow[d, "i'^*"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \arrow[r, "\delta'"] & H^1(A \cup B) \arrow[r] & H^1(B) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Como $j^* \circ \delta = \delta'$, e δ' é um isomorfismo, segue que $(\delta')^{-1} \circ j^*$ é a inversa de δ a esquerda.

Portanto a sequência

$$0 \to \mathbb{Z} \to H^1(Y) \to H^1(X) \to 0$$

cinde. Então, pelo corolário 3.2

$$H^1(Y) \cong H^1(X) \oplus \mathbb{Z}.$$

$\square$

Referências

[1] WALL, C. T. C. *A Geometric Introduction to Topology.* London: Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1972.

[2] CROOM, F. H. *Basic Concepts of Algebraic Topology.* New York: Springer, 1978.

[3] WALLACE, A. H. *An introduction to algebraic Topology.* London: Pergamon Press, 1967.

[4] MUNKRES, J. R. *Topology A First Course.* New Jersey: Prentice Hall, Inc., 1975.