



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

***SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE ESCOAMENTOS DE FLUIDOS
PELO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS BASEADO EM
VOLUMES DE CONTROLE COM A TÉCNICA DE PASSO
FRACIONADO***

Marco Donisete de Campos

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos exigidos para obtenção do título de **Mestre em Engenharia Mecânica**.

Orientador: Prof. Dr. João Batista Campos Silva

Ilha Solteira, 29 de agosto de 2005

FICHA CATALOGRÁFICA

Elaborada pela Seção Técnica de Aquisição e Tratamento da Informação/Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação da UNESP-Ilha Solteira

C198s Campos, Marco Donisete de
Simulação numérica de escoamentos de fluídos pelo método de elementos finitos baseado em volumes de controle com a técnica de passo fracionado. -- Ilha Solteira: [s.n.], 2005
91 p. : il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, 2005

Orientador: João Batista Campos Silva
Bibliografia: p. 84-91

1. Método dos elementos finitos. 2. Navier-Stokes, Equações de. 3. Dinâmica dos fluidos.



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
CAMPUS DE ILHA SOLTEIRA
FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO: SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE ESCOAMENTOS DE FLUIDOS PELO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS BASEADO EM VOLUMES DE CONTROLE COM A TÉCNICA DE PASSO FRACIONADO

AUTOR: MARCO DONISETTE DE CAMPOS
ORIENTADOR: Prof. Dr. JOAO BATISTA CAMPOS SILVA

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de MESTRE em ENGENHARIA MECÂNICA pela Comissão Examinadora:

Prof. Dr. JOAO BATISTA CAMPOS SILVA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA DA FACULDADE DE ENGENHARIA DO CAMPUS DE ILHA SOLTEIRA - UNESP

Prof. Dr. CASSIO-ROBERTO MACEDO MAIA
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA MECÂNICA DA FACULDADE DE ENGENHARIA DO CAMPUS DE ILHA SOLTEIRA - UNESP

Prof. Dr. ELCIO NOGUEIRA
UNIVERSIDADE DO VALE DO PARAÍBA - UNIVAP

Data da realização: 29 de agosto de 2005.

Presidente da Comissão Examinadora
Prof. Dr. JOAO BATISTA CAMPOS SILVA

AGRADECIMENTOS

A Deus, “que sustenta os que vacilam” (Sl.144,14), “está perto de todos que O invocam”(Sl.144,18) e “dá ânimo ao cansado e recupera as forças do enfraquecido” (Is. 40, 29);

A meus pais, Antonio e Darci, pela oportunidade de uma educação de qualidade;

Às minhas irmãs, Márcia e Mércia, por abnegarem tantos sonhos em favor dos meus;

À Anísia Marques da Silva, pelo carinho, pelas valiosas conversas e pela rica amizade;

Ao Prof. Dr. João Batista Campos Silva, pela oportunidade da realização deste trabalho. Sobretudo pela amizade, incentivo e constante bom humor;

Aos docentes do DEM/FEIS: Prof. Dr. João Antonio Pereira, Prof. Dr. Emanuel Rocha Woiski, Prof. Dr. André Luiz Seixlack, Prof. Dr. Amarildo Tabone Paschoalini pela convivência e apoio. Em particular, aos professores Dr. João Batista Aparecido e Dr. Cássio Roberto Macedo Maia pelas críticas construtivas durante o exame de qualificação;

Aos professores do IBILCE/UNESP: Dra. Angela Maria Sitta e Dr. Wilson Maurício Tadini, por despertarem o gosto pela pesquisa, pelo exemplo de profissionalismo e dedicação à profissão;

Aos técnicos do DEM/FEIS: Elias, Alex, Jean, Elaine, Reginaldo, Grilo, Lourdes, pelo apoio, disponibilidade e amizade;

Aos técnicos do STRAUD/FEIS: João, Cleide, Neide e Elaine pela competência, prontidão e amizade;

Às técnicas da Seção de Pós-Graduação da FEIS: Adelaide, Fafá e Onilda pelo profissionalismo no desempenho de suas funções;

A dois grandes amigos, Carlos Rodrigues e Cailey Novaes, pela ajuda incondicional em todos os momentos;

Aos amigos de Ilha Solteira - Osvaldo, Deise, Terê, Zuleica -, de Olímpia - Mariza, Márcia, Márcia Elias, Neto, Viviane, Ágüe, Marie, Edith, Magnólia, Lenira,

Sílvia – e de Barra do Garças – Lucely, Águeda, Ana, Veralice, Lídia, Dora, Cilda, Dulcina, Dorinha, , Érika, Solange, Arlete – por tantos momentos bons e pelos muitos que virão;

Ao Mons. Antonio Saint'clements Torras, por tantos anos de amizade e aconselhamento. Por me ensinar que sempre é possível ver o lado bom dos acontecimentos;

À Rúbia Navas por partilhar grande parte deste trabalho, sendo sempre apoio, alegria e confiança;

À grande amiga, Sandra Aparecida Hipólito, por estar presente em todos os momentos, pelo encorajamento, pelas boas conversas, pelo consolo e, principalmente, pela rica amizade;

Ao amigo Adriano Domingos pelo companheirismo, pelo grande número de favores a mim prestado e pelo constante bom humor;

Ao amigo Odacir pelo apoio, incentivo e paciência nos momentos difíceis;

A todos os amigos do PPGEM/FEIS por tantos momentos divididos na amizade e pela partilha de tantos momentos bons.

*“ É preciso ter a coragem de caminhar
numa direção que ninguém trilhou antes.
Em nosso tempo, sem coragem não se conseguiria
aproximar povos e sistemas nem construir a paz.”*
(João Paulo II)

RESUMO

Neste trabalho, desenvolveu-se, implementou e testou-se um modelo numérico para simular escoamentos incompressíveis de fluidos viscosos em regime transiente, usando o *Método de Elementos Finitos baseado em Volumes de Controle* (CVFEM) para a discretização espacial e o *Método de Passo Fracionado* (*time-splitting*) para a discretização temporal, levando em consideração as características parabólicas, elípticas e hiperbólicas das equações de Navier-Stokes. Para a implementação computacional do método numérico, foi desenvolvido um código em linguagem *fortran* para simulação dos escoamentos. Depois da obtenção do código computacional e verificada a estabilidade e convergência da técnica de passo fracionado, foram feitas aplicações para simulação de casos de escoamentos internos em cavidades. Também investigou-se o modelo de viscosidade turbulenta de Smagorinsky com o CVFEM em passo fracionado, através da metodologia de *Simulação de Grandes Escalas* (LES – *Large Eddy Simulation*).

Abstract

In this work, the main purpose has been the development, implementation and test of a numeric model to simulate unsteady, incompressible, viscous fluid flows. The Finite Element Method based on Volumes of Control (CVFEM) has been used for the space discretization and the Fractional Step Method (time-splitting) for the time discretization, taking in consideration the parabolic, elliptic and hyperbolic characteristics of Navier-Stokes equation. For the computational implementation of the numeric method, it was developed a computational code in fortran language. After obtaining the computational code and verified the stability and convergence of the technique of fractional step, simulations for the lid-driven cavity flow have been done for low Reynolds number. The turbulence effect has been considered by the model of turbulent viscosity of Smagorinsky with CVFEM in fractional step, through the methodology of Large Eddy Simulation.

LISTA DE SÍMBOLOS

Letras Latinas

A – área de um volume de controle

C_{ij} – *tensor cruzado*

C_S – constante de Smagorinsky

\bar{f} – componente representativa das grandes escalas

f' – componente submalha

G – filtro espacial baseado no volume de integração

ℓ_c – comprimento característico da função filtro

L – comprimento característico do domínio [m]

L_{ij} – *tensor de Leonard*

p – pressão dimensional [N/m²]

p_0 – pressão de referência [N/m²]

$P = \frac{p - p_0}{\rho u_0^2}$ - pressão adimensional

Re – número de Reynolds

R_{ij} – *tensor de Reynolds submalha*

$\|\bar{s}\|$ – norma do tensor taxa de deformação

S_{u_i} - termo fonte na equação de quantidade de movimento na direção x_i

S_ϕ - termo fonte numa equação de transporte para a variável ϕ

t^* – coordenada do tempo dimensional [s]. Se adimensional: $t = t^* u_0 / L$

T – temperatura [K]

u – componente de velocidade dimensional na direção do eixo x [m/s]

u_0 – velocidade característica do escoamento

u_i – componente de velocidade em notação tensorial cartesiana na direção do eixo x_i [m/s]

v - componente de velocidade dimensional na direção do eixo y [m/s]

$U = u / u_0$. componente de velocidade adimensional na direção do eixo X

U_i – componente de velocidade adimensional em notação tensorial cartesiana na direção do eixo X_i

V - volume de integração para a filtragem

$X = x / L$ - abscissa adimensional no sistema de coordenadas cartesianas

x_i – abscissa no sistema de coordenadas cartesianas em notação tensorial

$X_i = x_i / L$ - eixos do sistema de coordenadas cartesianas em notação tensorial

$Y = y / L$ - ordenada adimensional no sistema de coordenadas cartesianas

y_i – ordenada no sistema de coordenadas cartesianas em notação tensorial

Letras Gregas

α - índice que indica o número do nó local ou do subvolume de controle num elemento

Δ - largura do filtro

η - ordenada do sistema de coordenadas local no elemento de referência

$\theta = (T - T_0) / \Delta T$ - temperatura adimensional

μ_0 - viscosidade absoluta de referência [kg/ms]

μ_e - viscosidade efetiva [kg/ms]

μ_t - viscosidade turbulenta [kg/ms]

ξ - abscissa do sistema de coordenadas local no elemento de referência

ρ - massa específica do fluido [kg/m³]

ρ_0 - densidade de referência [kg/m³]

ϕ - variável qualquer na equação de transporte de um escalar

Superescritos

n - significa grandeza avaliada no tempo t

n+1 - significa grandeza avaliada no tempo t+ Δt

k - iteração anterior no processo de solução num tempo t qualquer

k+1 - iteração k incrementada no processo de solução num tempo t qualquer

Subscritos

I - representa direção do eixo no sistema de coordenadas

α - representa o subvolume de controle associado a um nó de elemento

β - representa a função de interpolação associada ao nó de um elemento

0 - representa uma variável ou propriedade num estado de referência

Abreviações

CFD – Dinâmica de Fluidos Computacional

CVFDM – Método de Diferenças Finitas baseado em Volumes de Controle

CVFEM – Método de Elementos Finitos baseado em Volumes de Controle

FDM - Método de Diferenças Finitas

FEM - Método de Elementos Finitos

FVM – Método de Volumes Finitos

LES – Simulação de Grandes Escalas

WRM – Método de Resíduos Ponderados

Siglas

DEM – Departamento de Engenharia Mecânica

DEMAT – Departamento de Matemática

IBILCE – Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

ICLMA – Instituto de Ciências e Letras do Médio Araguaia

FEIS – Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

STRAUD – Seção Técnica de Referência, Atendimento ao Usuário e Documentação

UNESP – Universidade Estadual Paulista *Júlio de Mesquita Filho*

LISTA DE FIGURAS

Figura 3.1 – Domínio discretizado em triângulos e quadriláteros	46
Figura 3.2 – Elementos triangulares subdivididos em subvolumes de controle	47
Figura 3.3 – Subvolumes de controle compondo um elemento quadrilateral de 9 nós	53
Figura 3.4(a) – Elemento em coordenadas globais, x-y	57
Figura 3.4(b) – Elemento mapeado no elemento mestre em coordenadas locais, ξ - η	58
Figura 3.5 – Elemento subdividido em volumes de controle	47
Figura 3.6 – Definição de frente e nomenclatura usada no método frontal	63
Figura 3.7 – Arranjo das variáveis u, v, p, localmente num elemento	64
Figura 3.8 – Ilustração da formação do índice das variáveis na matriz global	65
Figura 3.9 – Formação do vetor contendo o índice global do primeiro grau de liberdade por nó	65
Figura 3.10 – Formação do vetor contendo o número de graus de liberdade por nó	65
Figura 3.11 – Estrutura do programa computacional	67
Figura 4.1 – Esquema da cavidade bidimensional	70
Figura 4.2 – Velocidade U ao longo da linha central vertical da cavidade no tempo 3.0	71
Figura 4.3 – Velocidade V ao longo da linha central horizontal da cavidade no tempo 3.0	71
Figura 4.4 – Velocidade U ao longo da linha central vertical da cavidade no tempo 5.0	72
Figura 4.5 – Velocidade V ao longo da linha central horizontal da cavidade no tempo 5.0	72
Figura 4.6 – Velocidade U ao longo da linha central vertical da cavidade no tempo 10.0	73
Figura 4.7 – Velocidade V ao longo da linha central horizontal da cavidade no tempo 10.0	73
Figura 4.8 – Velocidade U ao longo da linha central vertical da cavidade no tempo 15.0	74
Figura 4.9 – Velocidade V ao longo da linha central horizontal da cavidade no tempo 15.0	74
Figura 4.10 – Linhas de corrente no instante $t=11.5$ para $Re=400$	75
Figura 4.11 – Linhas de corrente no instante $t=13.2$ para $Re = 400$	76
Figura 4.12 – Linhas de corrente no instante $t=15.0$ para $Re=400$	76
Figura 4.13 – Velocidade U ao longo da linha central vertical da cavidade, $Re=400$	77

Figura 4.14 – Velocidade V ao longo da linha central horizontal da cavidade, Re=400	77
Figura 4.15 – Velocidade U ao longo da linha central vertical da cavidade, Re=400	78
Figura 4.16 – Velocidade V ao longo da linha central horizontal da cavidade, Re=1000	78
Figura 4.17 – Velocidade U ao longo da linha central vertical da cavidade, Re=1000	79
Figura 4.18 – Velocidade V ao longo da linha central horizontal da cavidade, Re=1000	79
Figura 4.19 – Velocidade U ao longo da linha central vertical da cavidade, Re=1000	80
Figura 4.20 – Velocidade V ao longo da linha central horizontal da cavidade, Re=1000	80
Figura 4.21 – Velocidade U ao longo da linha central vertical da cavidade, Re=3200	81

SUMÁRIO

1 Introdução	15
1.1 Introdução	15
1.2 Objetivos	19
1.3 Revisão Bibliográfica	19
2 Formulação Matemática	28
2.1 Introdução	28
2.2 Equações Governantes	29
2.3 Metodologias de Simulação de Escoamentos Turbulentos	29
2.3.1 Introdução	29
2.3.2 Modelos de Turbulência	30
2.3.3 Metodologia LES	31
2.3.3.1 Processo de Filtragem das Equações Governantes	31
2.3.3.2 Equações de Navier-Stokes Filtradas	32
2.3.3.3 Modelagem Submalha	33
2.3.3.4 O Modelo Submalha de Smagorinsky	34
2.4 Adimensionalização das Equações Governantes	35
2.4.1 Introdução	35
2.4.2 Forma Adimensional das Equações do Movimento	36
3 Desenvolvimento do Modelo Numérico	38
3.1 Um Resumo sobre o Método de Resíduos Ponderados	38
3.1.1 Aproximação usando o Método de Resíduos Ponderados	39
3.3.1.1 Método de Elementos Finitos de Bubnov-Galerkin	40
3.3.1.2 Método de Elementos Finitos de Petrov-Galerkin	40
3.3.1.3 Método de Elementos Finitos de Mínimos Quadrados	40
3.3.1.4 Método de Elementos Finitos de Colocação	41
3.3.1.5 Método de Subdomínios	41
3.2 O Método dos Elementos Finitos em CFD	42
3.3 O Método de Passo Fracionado	44
3.4 Discretização dos Domínios para Problemas Bidimensionais	46
3.5 Integração das Equações nos Subvolumes de Controle	47
3.5.1 Discretização Temporal das Equações	47

3.5.2 Discretização Espacial das Equações	49
3.5.3 Funções de Interpolação	51
3.5.4 Cálculo das Matrizes nos Elementos	57
3.5.5 Solução do Sistema de Equações Discretizadas	62
3.6 Estrutura do Programa Computacional	66
4 Resultados	69
Escoamento numa Cavidade Quadrada com Parede Superior Deslizante	69
5 Conclusão e Discussões	82
Referências	84

1

INTRODUÇÃO

1.1 Introdução

Fluidos em movimento estão presentes em toda a natureza e suas características, por vezes extremamente complexas, têm sido objeto de estudo desde os tempos mais remotos. Antigas civilizações, frente ao problema de abastecimento de água e alimentos, desenvolveram eficientes sistemas de irrigação e notáveis embarcações movidas à vela e a remo. Prova disso são os canais de irrigação de cerca de 4000 a.C. encontrados em povoados do Egito e da Mesopotâmia, os grandes aquedutos construídos no Império Romano no século IV a.C. e os navios construídos pelos egípcios e fenícios por volta de 2700 a.C.

Ao longo dos séculos as aplicações dos fluidos em movimento tornaram-se cada vez mais amplas. Os gregos produziram informações quantitativas: Aristóteles (384-322 a.C.) descreveu o *princípio da continuidade* e Arquimedes (285-212 a.C.) formulou as leis do empuxo aplicadas a corpos flutuantes e submersos, deduzindo, como parte da análise, uma forma de cálculo diferencial. Os romanos construíram extensos sistemas de aquedutos, cujas ruínas podem ser encontradas na maioria dos países europeus, mas não deixaram registros mostrando qualquer conhecimento quantitativo acerca dos princípios de projeto.

Do nascimento de Cristo até a Renascença, houve um avanço constante no projeto de tais sistemas de escoamento, como embarcações, canais e dutos de água, mas não se encontraram evidências de avanços fundamentais na análise de escoamentos. No século XV, Leonardo da Vinci (1452-1519) deduziu a equação de conservação de massa para escoamento permanente e unidimensional. Exímio experimentalista, suas anotações contêm descrições precisas de ondas, jatos, ressaltos hidráulicos, formação de vórtices e projetos de baixo arrasto (alinhados com o escoamento) e alto arrasto (pára-quedas) (WHITE, 1999). Simon Stevin

(1548-1620) publicou, em 1586, *Estática e Hidrostática*, um tratado matemático sobre a mecânica dos fluidos como era conhecida até então. Galileu Galilei (1564-1642) estudou a queda dos corpos livres e revisou o conceito de *vácuo* de Aristóteles. René Descartes (1596-1650) estudou os turbilhões do universo. Torricelli (1608-1647) desenvolveu o barômetro e as leis da trajetória de um corpo em queda.

O francês Edme Mariotte (1620-1684) construiu o primeiro túnel de vento e testou alguns modelos. Blaise Pascal (1623-1662) estabeleceu os conceitos de pressão hidráulica e transmissão de pressão em um fluido. Isaac Newton (1642-1727) postulou suas leis do movimento e a lei linear da viscosidade do fluido, hoje chamado de *newtoniano*. Com a primeira teoria produzida para a hipótese de fluido *ideal*, ou com viscosidade nula, os matemáticos do século XVIII, Daniel Bernoulli (1700-1782), Leonhard Euler (1707-1783), Jean d'Alembert (1717-1783), Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) e Pierre-Simon Laplace (1749-1827) produziram muitas soluções para os problemas de escoamento sem viscosidade (WHITE, 1999). Euler desenvolveu a equação diferencial do movimento e sua forma integral, hoje chamada *equação de Bernoulli*.

Mas, uma vez que a hipótese do fluido ideal tem aplicação muito limitada para a maioria dos escoamentos na engenharia, começou-se a rejeitar tal teoria, considerada, por alguns, como totalmente irreal. Baseados quase que inteiramente na experimentação, experimentalistas como Antoine Chézy (1718-1798), Henri de Pitot (1695-1771), Jean Charles de Borda (1733-1799), os irmãos Ernst Heinrich Weber (1795-1878) e Wilhelm Eduard Weber (1804-1891), Francis Murray Dawson (1889-1963), Gotthilf Ludwig Hagen (1797-1884), Jean Louis Poiseuille (1799-1869), Henry Darcy (1803-1858), Robert Manning (1816-1897), Henry Bazin (1729-1917) e Julius Ludwig Weisback (1806-1871) produziram dados sobre uma variedade de escoamentos como canais abertos, resistência em embarcações, escoamentos em dutos e turbinas. Frequentemente utilizavam os dados sem qualquer refinamento, desprezando as características físicas fundamentais do escoamento.

No final do século XIX, a união entre a *hidráulica* – que trata do movimento de líquidos em tubos, canais e outros dispositivos – e da *hidrodinâmica* – que estabelece relações entre o movimento dos fluidos e as forças que causam esse movimento – finalmente aconteceu: William Froude (1810-1879) e seu filho Robert (1846-1924) desenvolveram leis para o modelo testado, Lord Rayleigh (1842-1919) propôs a técnica da análise dimensional e Osborne Reynolds (1842-1912) adaptou as equações de movimento de um fluido viscoso para as condições médias de escoamento e demonstrou a existência de um parâmetro físico

constante - o *número de Reynolds*- a partir do qual ocorre a transição entre os dois tipos de escoamentos possíveis, o laminar e o turbulento.

Enquanto isso, a teoria dos escoamentos viscosos foi sendo melhor avaliada. Os franceses Claude Navier (1785-1836) e Simeon Poisson (1781-1840) e o inglês George Stokes (1819-1903) acrescentaram, com sucesso, os termos viscosos newtonianos à equação do movimento, através das *equações de Navier-Stokes*. Essas, no entanto, por se tratarem de equações diferenciais parciais não-lineares, tiveram as suas soluções analíticas determinadas para somente alguns casos. Ainda hoje, a teoria matemática dessa classe de equações não está suficientemente desenvolvida para permitir a obtenção de soluções analíticas em regiões arbitrárias e condições de contorno gerais. E, dependendo do problema, não se pode utilizar versões simplificadas dessas equações, como as *equações de Bernoulli*, pois essas nem sempre são aplicáveis (FORTUNA, 2000).

Dessa forma, no estudo dos fluidos e de seus efeitos, são utilizados ensaios experimentais, como testes em túneis de vento e tanques d'água. No entanto, devido às limitações de custo, tempo e equipamento, é comum a realização de medidas em apenas alguns pontos da região em que ocorrem os fenômenos de interesse. Uma vez que o fenômeno em estudo nem sempre é passível de reprodução em laboratório, mesmo em escala reduzida, e o custo e o tempo da montagem experimental podem ser proibitivos, nem sempre os tratamentos teóricos e/ou experimentais são satisfatórios.

Após a década de 60, graças ao desenvolvimento de computadores de alta velocidade e a sua grande capacidade de armazenamento, surgiu uma terceira alternativa para o estudo do escoamento de fluidos: a solução numérica das equações de Navier Stokes utilizando técnicas computacionais (MALISKA, 1995). Esse novo ramo do conhecimento, com fortes características interdisciplinares, recebeu o nome de *Dinâmica de Fluidos Computacional* (CFD - *Computational Fluid Dynamics*) e tornou possível obter o campo de velocidades, as pressões, as densidades ou qualquer outra grandeza relevante que compõe o escoamento. A CFD apresenta um conjunto versátil de algoritmos para a solução numérica dos problemas de escoamento sendo que a sua aplicabilidade depende da situação tratada, sendo importante o conhecimento tanto dos aspectos físicos do problema, quanto dos aspectos numéricos da metodologia de solução adotada.

Exemplos de áreas em que a CFD tem forte presença incluem a *indústria petroquímica*: na simulação de diversos equipamentos e processos; a *indústria aeroespacial*, na simulação e desenvolvimento de aeronaves; a *indústria automotiva*, na simulação e

desenvolvimento de motores e automóveis mais aerodinâmicos (HERCKERT e SILVEIRA-NETO, 2004), além da *engenharia ambiental, engenharia costeira, medicina, siderurgia, indústria têxtil e astrofísica* (FORTUNA, 2000).

Segundo Saabas (1991), a simulação dos casos de interesse de escoamento requer:

i) um modelo matemático do problema físico, o qual, em sua forma geral, incluem equações diferenciais parciais, modelos de turbulência e condições de contorno que governam a distribuição das variáveis desconhecidas na região de interesse;

ii) um método numérico para a solução do modelo matemático num domínio de forma regular ou irregular;

iii) uma implementação computacional do método numérico.

O objetivo de um método computacional é obter valores das variáveis dependentes, tais como temperatura, velocidade e pressão, para localizações discretas em um domínio físico. A relação entre estes valores nodais é determinada pela discretização algébrica das equações, as quais são derivadas das equações diferenciais governantes, em conjunto com funções de interpolação disponíveis para as variáveis dependentes. As equações de discretização são então resolvidas de maneira apropriada. O que diferencia um método do outro é maneira com que as equações de discretização algébrica são obtidas.

A aplicação de um método numérico pode ser dividida em três etapas principais denominadas, na nomenclatura de elementos finitos, de *pré-processamento, processamento e pós-processamento* (CAMPOS SILVA, 1998). No pré-processamento, define-se a geometria, ou domínio físico, do problema, bem como as propriedades físicas, condições iniciais e de contorno e outros parâmetros necessários para a solução do problema. No processamento, um programa computacional baseado no modelo numérico é aplicado para a obtenção das grandezas de interesse como velocidade, pressão, temperatura, entre outras, em pontos do domínio denominados de nós dos elementos. Já no pós-processamento, os resultados são analisados a fim de se validar o modelo numérico para o problema a que foi proposto. Nesta fase, o uso de técnicas de visualização gráfica é empregado para análise dos resultados.

Atualmente, os principais métodos numéricos usados para o cálculo de escoamentos de fluidos são o *Método de Diferenças Finitas* (FDM - *Finite Difference Method*), o *Método de Diferenças Finitas baseado em Volumes de Controle* (CVFDM - *Control Volume Finite Difference Method*), o *Método de Volumes Finitos* (FVM - *Finite Volume Method*), o *Método de Elementos Finitos* (FEM - *Finite Element Method*) e o *Método de Elementos Finitos baseado em Volumes de Controle* (CVFEM - *Control Volume-Finite Element Method*). Na

realidade, todos esses métodos numéricos derivam de um único método conhecido como *Método de Resíduos Ponderados* (MWR - *Method of Weighted Residuals*), sendo diferenciados matematicamente pela função peso aplicada na obtenção do resíduo.

O FEM e o CVFEM vêm recebendo atenção de muitos pesquisadores devido à sua flexibilidade para tratar de casos com geometrias complexas, muito freqüentes em casos de escoamentos reais.

1.2 Objetivos

Neste trabalho, o objetivo é desenvolver, implementar e testar um modelo numérico para simular escoamentos incompressíveis de fluidos viscosos em regime transiente, usando o *Método de Elementos Finitos baseado em Volumes de Controle* (CVFEM) para a discretização espacial e o *Método de Passo Fracionado* (*time-splitting*) para a discretização temporal, levando em consideração as características parabólicas, elípticas e hiperbólicas das equações de Navier-Stokes.

Para a implementação computacional do método numérico, será desenvolvido um código computacional para simulação de escoamentos incompressíveis com modelagem de turbulência pela metodologia de simulação de grandes escalas de *Simulação de Grandes Escalas* (LES – *Large Eddy Simulation*). Portanto, a investigação do modelo de viscosidade turbulenta de Smagorinsky com o CVFEM em passo fracionado é um outro objetivo do presente trabalho.

1.3 Revisão Bibliográfica

Dentre os escoamentos que são de interesse e importância para o homem, a categoria dos de baixo número de Mach, os chamados *escoamentos incompressíveis*, são a grande maioria. A maior parte dos produtos utilizados diariamente são escoamentos incompressíveis durante o seu processo de manufatura: extrusão de polímeros, fundição de metais, grande número de produtos alimentícios, entre outros. O ar que nos envolve pode ser considerado, em quase todas as ocasiões, como um fluido incompressível: aviões voando a baixos números de Mach, escoamentos ao redor de carros, caminhões, ônibus, trens e construções. Este mesmo

princípio se aplica à água em barcos, submarinos, torpedos e tubulações, bem como à maioria dos líquidos biomédicos como o sangue, por exemplo (LÖHNER, 2004).

Devido a este grande número de aplicações, nas últimas três décadas os métodos para a solução aproximada das equações de Navier-Stokes incompressíveis têm sido investigados de maneira extensiva. Muitos métodos numéricos foram desenvolvidos para o cálculo de escoamentos permanentes e transientes usando as várias formulações possíveis do problema. Um aspecto importante destes métodos numéricos é a especificação apropriada das condições de contorno, especialmente quando temos a presença de paredes sólidas. Naturalmente, um tratamento apropriado depende de quais variáveis serão escolhidas como incógnitas e, do ponto de vista numérico, a forma específica assumida pelas condições de contorno pode também depender do método adotado para discretização.

Vários métodos têm sido propostos para o cálculo de escoamentos viscosos incompressíveis. Neste trabalho, será considerada uma classe de métodos numéricos baseada na discretização do tempo pelo *método de passo fracionado*, apresentado com detalhes no capítulo 3.

Fortin et al. (1971) apresentaram uma versão explícita do método de passo fracionado com precisão de primeira ordem no tempo, enquanto que Hirt e Cook (1972) apresentaram uma outra variação, conhecida como *método da pressão-velocidade*, que calcula a velocidade intermediária da equação da quantidade de movimento com o termo pressão. Nesta última versão, para obter uma velocidade de divergente zero, a pressão é corrigida seqüencialmente por uma soma proporcional no divergente da velocidade.

Donea et al. (1982) apresentaram um método dependente do tempo para a simulação numérica de escoamentos viscosos incompressíveis, desenvolvido para a integração no tempo das equações de Navier-Stokes nas quais somente a condição de incompressibilidade é tratada implicitamente. Isto leva ao desenvolvimento de um algoritmo de estrutura extremamente simples, particularmente atrativo para soluções de problemas de grande escala. A versatilidade e eficácia do método foram exemplificadas através de alguns resultados numéricos, com aplicações em problemas de convecção forçada e de convecção natural de um fluido gerando calor.

O método original de Chorin foi modificado por Kim e Moin (1985) para o uso de volumes finitos definidos em arranjos desencontrados e, desde então, passou a ser usado por muitos pesquisadores para a simulação de escoamentos permanentes (ZANG et al., 1994). Kim e Moin desenvolveram um método do tipo *método de projeção de pressão livre*, baseado

no passo fracionado em conjunto com a técnica de fatoração aproximada, satisfazendo a conservação da massa e mostraram que o uso das condições de contorno da velocidade para o campo de velocidade intermediária pode levar a uma solução numérica inconsistente e, para tanto, derivaram e testaram as condições de contorno apropriadas para o campo de velocidade intermediário. Além disso, apresentaram vários resultados numéricos. A precisão do método proposto por Kim e Moin (1985) foi analisada de forma rigorosa por Strikwerda e Lee (1999). Eles mostraram que o método não satisfaz as condições de contorno da velocidade e, além disso, a pressão fictícia gera um erro numérico próximo à parede. Dagan (2003) discutiu o resultado das condições de contorno corretas para a equação de Poisson para a formulação proposta por Kim e Moin (1985). Apresentou a velocidade fracionada como soma do gradiente do potencial de Helmholtz que satisfaz o fluxo imposto como uma condição de contorno e um termo corretivo. Inserindo esta representação para as equações fracionadas na forma acoplada e desacoplada, as variáveis físicas que representam o vetor velocidade e pressão normalizados tornam-se independentes do fluxo imposto ao longo do contorno computacional em cada passo fracionado. Tendo isto estabelecido, a mesma distribuição de fluxo foi imposta em cada passo de tempo ao longo do contorno computacional no caso desacoplado.

No trabalho de Karniadakis et al. (1991) foi desenvolvida uma nova formulação da pressão para o método da projeção resultando num método de precisão no tempo de ordem superior para a solução das equações de Navier-Stokes incompressíveis. Em particular, foram introduzidas condições de contorno da pressão melhoradas de ordem superior no tempo para minimizar o efeito de camadas limites numéricas errôneas induzidas pelo método da projeção.

Ramaswamy et al. (1992) desenvolveram um método numérico baseado no método de projeção semi-implícito para resolver as equações de Navier-Stokes incompressíveis bidimensionais. O procedimento numérico, baseado no método de elementos finitos de Galerkin usando o método de passo fracionado, foi validado através da solução de vários problemas testados, como escoamento numa cavidade com tampa deslizante, convecção numa cavidade natural e escoamento oscilatório com e sem transferência de calor.

Shen (1992) apresentou métodos de passo fracionado na forma semi-discretizada para as equações de Navier-Stokes no domínio de contorno bi e tridimensional. Os erros estimados para a velocidade e a pressão do método de projeção clássico foram estabilizados pelo método de energia. Também foi proposto um método de projeção modificado a fim de minimizar os erros estimados.

Perot (1993, 1995) examinou um método de projeção usando a técnica de fatoração LU em que nenhuma condição de contorno é requerida para a velocidade intermediária e a pressão e mostrou que o método era de primeira ordem. Perot atribuiu o comportamento de primeira ordem a um erro de comutação e sugeriu que este era uma característica intrínseca do método de projeção, podendo ser corrigida pela modificação das condições de contorno. Propôs ainda uma modificação para a forma da fatoração LU do método de projeção, produzindo uma precisão de segunda ordem.

Guermond e Quartapelle (1998) analisaram um método de projeção para calcular escoamentos viscosos incompressíveis por meio de aproximação por elementos finitos de Galerkin. Baseado na idéia de que o funcional apropriado para os métodos de projeção pode ser adaptado para dois diferentes espaços a fim de representar campos de velocidade calculados respectivamente nos passos viscosos e incompressíveis do método. Dessa forma, uma distinção teórica leva a um método de projeção por elementos finitos com a equação de Poisson para pressão desconhecida aumentada e para uma implementação muito prática do método com somente a velocidade intermediária aparecendo no algoritmo numérico, sendo dados os erros estimados no tempo finito. Uma extensão do método para um problema com condições de contorno não convencionais foi também considerada para ilustrar a flexibilidade do método proposto.

Armfield e Street (1999) examinaram um grande número de métodos de passo fracionado e mostraram que o método de projeção básico com condições de contorno da velocidade intermediária modificadas, o método de correção da pressão com um único passo e o método iterativo de correção da pressão têm comportamento de segunda ordem no tempo. Compararam a precisão e a eficiência de um método iterativo com dois métodos não iterativos e mostraram que o método de correção da pressão não iterativo atinge a mesma ordem de precisão como o método iterativo, com um considerável aumento na eficiência.

Armfield e Street (2000) resolveram as equações de Navier-Stokes numa malha colocalizada usando um método de passo fracionado semi-implícito iterativo e não-iterativo. Mostraram que o método iterativo na forma padrão tem precisão de segunda ordem no tempo, mas é muito lento para integrar como um resultado da pressão não elíptica acoplado na escala da malha. Além disso, a inclusão de termos adicionais na equação de correção da pressão para o método iterativo garante o acoplamento da pressão elíptica na escala da malha, mas introduz um erro de primeira ordem no tempo do método, conduzindo a uma redução na precisão da solução. Mostraram também que o método não-iterativo tem precisão de segunda

ordem no tempo na forma padrão além de ser consideravelmente mais eficiente que o método iterativo.

Achdou e Guermond (2000) estabeleceram uma análise de convergência para o método de passo fracionado a fim de calcular escoamentos viscosos incompressíveis por meio de aproximações por elementos finitos. Propuseram um algoritmo no qual a convecção, a difusão e a incompressibilidade são tratados em três subpassos distintos. A convecção é tratada primeiramente por meio do método de Lagrange-Galerkin, enquanto que a difusão e a incompressibilidade são tratadas separadamente em dois passos subseqüentes, por meio do método de projeção: os termos difusivos por meio do problema de Helmholtz e a incompressibilidade por meio do problema de Poisson.

Quarteroni et al. (2000) investigaram uma aproximação geral para a solução numérica das equações de Navier-Stokes incompressíveis baseados na divisão do problema original em subproblemas sucessivos mais baratos para serem resolvidos. A divisão foi obtida através de uma fatoração algébrica aproximada da matriz surgida do espaço e a discretização do tempo das equações originais. Muitos métodos baseados na fatoração foram investigados. Para alguns destes foi destacada uma analogia formal com o método da projeção de Chorin-Teman sendo apontadas, ainda, as características e as limitações desta analogia. Por outro lado, novos métodos podem ser formulados partindo desta aproximação. Em particular, introduziram o chamado *método Yosida*, o qual pode ser investigado em métodos de estruturas de quase-compressibilidade. Resultados numéricos ilustram os diferentes desempenhos dos diversos métodos apresentados no artigo e testados alguns casos.

Codina e Blasco (2000a) analisaram uma aproximação de elementos finitos para as equações de Navier-Stokes que permite o uso de uma interpolação pressão-velocidade igual. A idéia foi introduzir como incógnita do problema discreto a projeção do gradiente de pressão multiplicado por parâmetros adequados sobre o espaço do campo de vetores contínuos. A diferença entre os vetores gradiente de pressão e projeção foi introduzida na equação da continuidade. A formulação resultante foi mostrada ser estável e otimamente convergente, ambos numa norma associada ao problema e a norma L^2 para a velocidade e a pressão. Provado, primeiramente, para o problema de Stokes, foi estendido para o caso não-linear.

Codina e Blasco (2000b) apresentaram uma formulação de elementos finitos estabilizados para as equações de Navier-Stokes incompressíveis transientes. A idéia principal foi introduzir como uma nova variável do problema a projeção do gradiente de pressão sobre o espaço velocidade e adicionar à equação da incompressibilidade a diferença entre o

Laplaciano da pressão e a divergência do novo campo de vetores. Isto levou a um efeito de estabilização da pressão que permite o uso de uma interpolação igual para a velocidade e a pressão. No caso das equações transientes, foi considerada a possibilidade de tratar a projeção do gradiente da pressão implicitamente ou explicitamente. No primeiro caso, o número de variáveis do problema foi substancialmente aumentado em relação à formulação de Galerkin padrão. Mesmo assim, técnicas iterativas puderam ser utilizadas na ordem para desacoplar o cálculo da projeção do gradiente da pressão do restante das variáveis (velocidade e pressão). Constatou-se que, quando este vetor foi tratado explicitamente, o aumento do custo computacional da formulação estabilizada com relação ao método de Galerkin foi mais baixo. Estabeleceram ainda uma estabilidade estimada para o caso do método de integração no tempo de Euler para trás e um tratamento explícito da projeção do gradiente da pressão.

Codina (2001) analisou a estabilidade da pressão do método de elementos finitos usando passo fracionado para escoamentos incompressíveis que usam a equação de Poisson. Para o método de projeção clássico de primeira ordem, foi mostrado que há um controle da pressão que depende do tamanho do passo de tempo e, além disso, existe um limite bem menor para este em virtude da estabilidade. A situação piora para um método de segunda ordem em que parte do gradiente de pressão é englobado na equação do momento. A estabilidade da pressão, neste caso, é extremamente fraca. Para superar estas deficiências foi considerado um método de elementos finitos usando a técnica do passo fracionado e analisou-se sua estabilidade. A fim de dar suporte aos resultados teóricos vários exemplos numéricos simples foram apresentados

Brown et al. (2001) analisaram a precisão das aproximações do método de projeção para problemas com condições de contorno iniciais para as equações de Navier-Stokes incompressíveis. Escoamentos com condições de contorno numéricas corretamente especificadas para estes métodos têm sido destacadas desde o nascimento da metodologia de segunda ordem há uma década e meia atrás. Foi observado que, enquanto a velocidade pode ser calculada para a precisão de segunda ordem no tempo e no espaço, a pressão é tipicamente de primeira ordem na norma L_∞ . Foi identificada a origem deste problema na interação da fórmula da pressão atualizada com condições de contorno numéricas e apresentado um algoritmo da projeção aperfeiçoado, o qual é completamente de precisão de segunda ordem, conforme demonstrado por uma análise do método e alguns experimentos numéricos. Além disso, foi discutido um método numérico baseado nas equações de Navier-Stokes incompressíveis, o qual estabelece outra opção para obter convergência de segunda ordem

completa na velocidade e na pressão. Foi apresentada, em detalhes, a conexão entre as condições de contorno para os métodos de projeção e o método padrão.

Kiris e Kwak (2001) apresentaram um método de passo fracionado para as equações de Navier-Stokes incompressíveis transientes e permanentes, baseado na formulação de volumes finitos. Usaram a pressão na célula central e o fluxo de massa através das faces de cada célula como variáveis dependentes. Um tratamento implícito dos termos convectivos e viscosos nas equações da quantidade de movimento possibilitou relaxar as restrições da estabilidade numérica. O erro de linearização da solução implícita da equação da quantidade de movimento foi reduzido usando três subiterações na ordem para realizar precisão temporal de segunda ordem para os cálculos da precisão no tempo.

Lee et al. (2001) apresentaram uma descrição de um método de passo fracionado de segunda ordem e condições de contorno para equações de Navier-Stokes incompressíveis. Identificaram e analisaram a precisão de alguns métodos de passo fracionado e determinaram condições de contorno consistentes que produzem soluções com precisão de segunda ordem. Foi usada a técnica de fatoração em blocos exata e aproximada na construção dos métodos e mostrou-se que tanto o desenvolvimento quanto os resultados obtidos, não dependem de nenhum método particular de melhoramento no tempo, dos métodos de discretização das derivadas espaciais ou da geometria do domínio computacional.

Langtangen et al. (2002) apresentaram um resumo de algumas estratégias de solução numérica para as equações de Navier-Stokes incompressíveis, incluindo formulações implícitas completas, métodos de compressibilidade artificial, formulações desvantajosas e método de passo fracionado como os da correção da pressão/velocidade e os métodos de projeção. Apresentaram também uma estrutura unificada que explica o popular método do passo fracionado como sendo casos especiais de uma aproximação implícita completa, podendo ser usada para uma nova construção e estratégias de solução aperfeiçoadas. Tal exposição é, na maioria dos casos, imparcial para a técnica de discretização espacial, mas inclui a necessidade de arranjos desencontrados e esboça algumas técnicas de estabilização alternativas que permitem o uso de malha padrão.

Chang et al. (2002) analisaram um método de passo fracionado exato para a solução das equações de Navier-Stokes incompressíveis aplicado a sistemas de arranjos desencontrados ou não. O método satisfaz a condição de incompressibilidade para pressão mecânica e reduz o número de variáveis. A técnica de projeção exata foi demonstrada num escoamento em cavidade bidimensional e num escoamento permanente relativamente

complexo num domínio multi-conexo envolvendo o movimento de uma superfície livre. O desempenho foi comparado diretamente com o método do passo fracionado clássico e mostrou ser aproximadamente duas vezes mais eficiente. Foram discutidas ainda as relações entre o método com os métodos de vorticidade das funções de corrente, além das condições de contorno.

Kim e Lee (2002) investigaram as condições de contorno para a pressão fictícia e a velocidade intermediária do método de passo fracionado para as equações de Navier-Stokes. Mostraram que a compatibilidade ou incompatibilidade das condições de contorno pode ser investigada numericamente através do resíduo da equação de Poisson na célula da malha fixada ou através do divergente campo de velocidade calculado. O estudo individual dos métodos de passo fracionado mostrou que as condições de contorno são compatíveis ou aproximadamente compatíveis (para segunda ordem) com a equação de Poisson para a pressão, somente se o par tiver sido derivado pelo mesmo tipo de aproximação; caso contrário, são incompatíveis.

Pozrikidis (2003) apresentou resultados numéricos que sugerem que a equação de Poisson para funções de projeção usando o método das diferenças finitas em malhas localizadas sujeitas às condições de contorno de Neumann homogêneas é correta até mesmo na presença de singularidades no contorno. Em contraste, quando a velocidade no contorno é descontínua, a solução numérica da pressão é comprometida pelo comportamento singular da derivada normal.

Investigações prévias sobre a precisão do campo da pressão obtida com o método do passo fracionado mostraram que ele é de primeira ordem no tempo, independentemente da ordem de precisão do método. Armfield e Street (2003) fizeram uma análise detalhada e investigaram a precisão da pressão para os métodos de passo fracionado do tipo P1 e P2 em grades de volumes finitos bem colocados. Mostraram que a precisão de primeira ordem obtida com o método P1 é uma característica inerente ao método, enquanto que a aparente precisão de primeira ordem obtida com o método P2 é um artefato do modo pelo qual a precisão é testada. Além disso, o método P2 determina uma precisão de segunda ordem no tempo nos campos de velocidade e de pressão. Foram testados alguns resultados para escoamento com convecção natural numa cavidade quadrada.

Guermond e Shen (2003) introduziram uma nova classe de métodos de projeção para escoamentos incompressíveis baseada na forma fraca da equação de Poisson para a pressão a qual, em cada passo tempo, somente requer resolver um conjunto de equações do tipo

Helmholtz para a velocidade e a equação de Poisson, na forma fraca, para a pressão, exatamente como os métodos de correção da pressão e de correção da velocidade. No entanto, esses novos métodos de projeção são livres de erros de projeção e fornece uma precisão completa na vorticidade e pressão.

Denaro (2003) fez uma análise do papel do teorema da decomposição de Helmholtz-Hodge no método de projeção adotado na solução das equações de Navier-Stokes para escoamentos incompressíveis. O artigo destaca ainda o papel da decomposição ortogonal de um campo de vetores num domínio quando as condições de contorno estão em vigor. Na realidade, mesmo sendo procedimento padrão, no método de passo fracionado, desacoplar o gradiente de pressão e o campo de velocidade, muitos problemas surgem nesse desacoplamento com uma precisão maior. Visto que o problema da determinação de uma decomposição única e ortogonal, para ser bem condicionado, requer somente uma condição de contorno e, então, o vetor normal ou o tangente são impostos exatamente no resultado final da projeção. Foram introduzidos erros numéricos nos termos de pressão e velocidade, mas a ortogonalidade da decomposição garantiu que o padrão não contribui para afetar a precisão da velocidade. O escoamento com a ordem de precisão resultante do procedimento é estudado claramente por meio de vários testes, sendo proposta uma estratégia para o melhoramento.

2

FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

2.1 Introdução

Um modelo matemático é uma idealização simplificada de um processo natural com o objetivo de simular suas propriedades. Quando derivado de maneira criteriosa, as soluções do modelo matemático devem ser compatíveis com as propriedades do problema modelado. A busca por soluções numéricas ou aproximadas justifica-se pela impossibilidade de se utilizar hipóteses simplificadoras que permitam a obtenção de uma solução exata.

A análise detalhada de um modelo e suas propriedades permite um melhor entendimento do evento modelado e, além disso, possibilita a simulação de mudança nos parâmetros do modelo e a respectiva análise da resposta, que não seriam possíveis na situação real. Um modelo com várias variáveis independentes envolve necessariamente derivadas com relação à cada uma dessas variáveis ou derivadas parciais, sendo, portanto, denominado uma *equação diferencial parcial* ou um *sistema de equações diferenciais parciais*.

Assim, se estabelece um sistema de equações diferenciais válido para um determinado domínio e impõem-se condições de contorno e condições iniciais. Dessa forma, o modelo matemático está completo e, para aplicações práticas, busca-se encontrar uma solução para um conjunto particular de parâmetros que caracterizam um dado problema. Surge aqui uma dificuldade: apenas formas muito simples de equações, dentro de contornos triviais, são possíveis de serem resolvidas através de métodos matemáticos. Equações diferenciais ordinárias, com coeficientes constantes são alguns exemplos para os quais soluções analíticas são possíveis.

A fim de solucionar tais dificuldades, há a necessidade da utilização de métodos numéricos, obtendo-se assim soluções aproximadas da equação diferencial que se deseja resolver, sujeita a certas condições de contorno e condições iniciais. A idéia básica dos

métodos numéricos para solucionar tal classe de problemas é *discretizar* o problema contínuo, isto é, o conjunto infinito de números que representam a função ou funções desconhecidas é substituído por um conjunto finito de parâmetros desconhecidos, sendo que esse processo requer alguma forma de aproximação.

2.2 Equações Governantes

De uma maneira geral, qualquer escoamento, laminar ou turbulento, pode ser matematicamente representado pelas equações da conservação da massa e da quantidade de movimento escritas em notação indicial, da seguinte forma:

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (2.1)$$

e

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j u_i)}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + S_{u_i} \quad (2.2)$$

com $i, j=1,2$ e sendo u_i as componentes do vetor velocidade ao longo dos eixos coordenados x_i ; p a pressão; ρ a massa específica do fluido; μ a viscosidade dinâmica, definida posteriormente, e S_{u_i} o termo fonte englobando outros termos, inclusive diferenciais, não escritos explicitamente. Na equação (2.1), embora não seja necessária, a massa específica foi deixada dentro da derivada parcial por conveniência na implementação do programa numérico.

2.3 Metodologias de Simulação de Escoamentos Turbulentos

2.3.1 Introdução

A turbulência continua sendo, ainda hoje, um grande desafio para os pesquisadores, uma vez que os escoamentos turbulentos são instáveis e contém flutuações que são dependentes do tempo e do espaço. Dentre as suas características mais importantes, destaca-se

a multiplicidade de escalas que os caracterizam, desde as maiores estruturas, controladas pela geometria que as geram, até as menores estruturas, as quais são controladas pela viscosidade do fluido, além de serem altamente rotacionais. Os aspectos físicos básicos da turbulência podem ser descritos pelas equações de Navier-Stokes. No entanto, as limitações de tecnologia ainda não permitem a resolução direta para escoamentos turbulentos complexos de interesse tecnológico.

Devido à complexidade deste tipo de escoamento, os pesquisadores utilizam ferramentas estatísticas para análise dos mesmos. No entanto, as médias estatísticas não permitem o acesso às mais importantes informações dos mecanismos físicos dos escoamentos, especialmente no que concerne às instabilidades.

Delineando-se o estudo da turbulência, pode-se partir dos trabalhos pioneiros de Osborne Reynolds (1842-1912), que estabeleceu os conceitos iniciais de escoamento turbulento, passando por pesquisas que visaram o aprimoramento destes conceitos, tais como Lord Rayleigh (1842-1919), Valentin Joseph Boussinesq (1842-1929), Ludwig Prandtl (1875-1953), Theodore Von Kármán (1881-1963), tem-se em mais de um século de pesquisas o desenvolvimento de diversos modelos de turbulência (HERCKERT e SILVEIRA NETO, 2004).

2.3.2 Modelos de Turbulência

Escoamentos de fluidos, sejam laminares ou turbulentos, são governados pelas equações da quantidade de movimento, conservação da massa e da energia, acompanhadas de suas respectivas condições de contorno. Nestas condições, mesmo as escalas de Kolmogorov presentes no escoamento, responsáveis pela dissipação viscosa, possuem dimensões bem maiores que o livre caminho médio molecular e a hipótese do contínuo estará perfeitamente satisfeita. Entretanto, a *solução numérica direta* destas equações, raramente pode ser realizada na prática, pois pressupõe o uso de malhas extremamente refinadas, para que todas as escalas turbulentas possam estar convenientemente representadas. Devido às limitações de ordem computacional, seu uso, ainda hoje, restringe-se à solução de escoamentos em geometrias simples e a números de Reynolds relativamente baixos, mostrando-se particularmente adequada para a geração de dados que permitam a validação de experimentos ou de modelos numéricos.

Diante desta dificuldade, dois caminhos alternativos têm sido extensamente explorados no estudo de escoamentos de interesse no campo da engenharia: *a modelagem*

clássica da turbulência e a simulação de grandes escalas. O primeiro implica na manipulação matemática das equações governantes, através de um processo de média, que resulta nas chamadas *equações de Reynolds*. Com este tratamento, é necessária a utilização de modelos de turbulência para contornar o chamado *problema de fechamento*, decorrente da presença das tensões de Reynolds, que surgem como incógnitas adicionais à solução do problema. O segundo método alternativo, a *Simulação de Grandes Escalas* (LES – *Large Eddy Simulation*), pode ser considerado como intermediário entre a *Simulação Direta* (DNS – *Direct Numerical Simulation*) e a *simulação via equações médias de Reynolds* (RANSS – *Reynolds Averaged Navier-Stokes Simulation*). Em linhas gerais, este procedimento permite a resolução numérica explícita das grandes escalas presentes no escoamento e a utilização de modelos submalha para representar a ação das pequenas estruturas turbilhonares sobre o campo de escoamento, ou seja, aquelas que apresentam dimensões menores que o tamanho das malhas.

2.3.3 Metodologia LES

2.3.3.1 Processo de Filtragem das Equações Governantes

Uma das propriedades mais marcantes da turbulência nos fluidos é a multiplicidade de escalas de comprimento e de tempo que a caracteriza. O primeiro passo para a aplicação da metodologia de simulação de grandes escalas, consiste exatamente na separação destas escalas, através de um processo de filtragem. Neste contexto, uma variável f limitada pode ser decomposta em uma componente representativa das grandes escalas \bar{f} e uma componente submalha f' , como segue:

$$f = \bar{f} + f' \quad (2.3)$$

A operação de filtragem serve para diminuir escalas na ordem da largura do filtro, denotada por Δ . A largura é uma característica do comprimento do filtro (TEJADA-MARTÍNEZ, 2002).

A componente de grandes escalas, \bar{f} , é obtida, neste caso, com o auxílio de uma integral de convolução, envolvendo a função a ser filtrada, $f(\vec{x}')$, e uma função filtro, $G(\vec{x} - \vec{x}')$

$$\bar{f}(\bar{x}) = \int_V G(\bar{x} - \bar{x}') f(\bar{x}') d\bar{x}' \quad (2.4)$$

O resultado do processo de filtragem depende fortemente da escolha adequada da função filtro, G . Neste estudo, G é um filtro espacial, baseado no volume de integração e definido como segue

$$G(\bar{x} - \bar{x}') = \begin{cases} \frac{1}{V} & \text{se } \bar{x} - \bar{x}' \leq \ell_c \\ 0 & \text{se } \bar{x} - \bar{x}' > \ell_c \end{cases} \quad (2.5)$$

sendo V o volume de integração para a filtragem. A função filtro contempla um comprimento característico ℓ_c , o qual determina a frequência de corte, que, por sua vez, define quais frequências devem permanecer no sinal filtrado e quais devem ser eliminadas. Em outras palavras, quais frequências serão calculadas e quais serão modeladas. É interessante observar que este filtro espacial baseado no volume de integração realiza uma espécie de filtragem implícita, onde a equação (2.4) reduz diretamente a variável $\bar{f}(\bar{x})$ a $f(\bar{x}')$.

2.3.3.2 Equações de Navier-Stokes Filtradas

Seja a equação (2.1), da conservação de massa para escoamentos incompressíveis e de fluidos newtonianos, escrita em notação tensorial. Aplicando-se o operador filtro sobre esta equação e utilizando a propriedade comutativa entre este operador e o operador derivada parcial, tem-se a conservação da massa para as componentes da velocidade filtradas

$$\frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0, \quad (2.6)$$

sendo $i=1,2$.

Considerando-se, agora, a equação (2.2), da quantidade de movimento para escoamentos incompressíveis e de fluidos newtonianos, escrita em notação tensorial e, aplicando-se o operador filtro sobre esta equação e utilizando a propriedade comutativa entre

este operador e o operador derivada parcial, tem-se a quantidade de movimento para as componentes da velocidade filtradas

$$\frac{\partial(\rho\bar{u}_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho\bar{u}_j\bar{u}_i)}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) + S_{u_i} + \frac{\partial \tau_{ji}^{sgs}}{\partial x_j} \quad (2.7)$$

sendo que

$$\tau_{ji}^{sgs} = \rho(\overline{U_j U_i} - \overline{U_j} \overline{U_i}) \quad (2.8)$$

2.3.3.3 Modelagem Submalha

A modelagem clássica da turbulência apoia-se nas equações médias de Reynolds. Uma das primeiras tentativas de modelar as tensões de Reynolds é atribuída ao matemático francês Boussinesq, no ano de 1877, que, analisando um escoamento bidimensional cisalhante, estabeleceu uma analogia entre as tensões de Reynolds e as tensões viscosas:

$$\tau_{xy} = \overline{u'v'} = -\mu_t \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad (2.9)$$

sendo μ_t a *viscosidade turbulenta*. É interessante ressaltar que, neste caso, enquanto a viscosidade cinemática μ é uma propriedade do fluido, a viscosidade turbulenta, μ_t , é uma propriedade do escoamento, podendo variar no tempo e no espaço. Embora a modelagem submalha não esteja fundamentada necessariamente sobre o conceito da viscosidade turbulenta (*hipótese de Boussinesq*), esta aproximação tem sido utilizada na maior parte dos estudos já realizados, os quais expressam o tensor de Reynolds submalha, em função da taxa de deformação gerada pelo campo de velocidade filtrado e da energia cinética turbulenta (k), como segue

$$\tau_{ij} = \frac{2}{3} k \delta_{ij} - \nu_t \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.10)$$

Com esta aproximação, a energia cinética turbulenta submalha, k , pode ser incorporada ao termo da pressão, gerando, desta forma, uma pressão modificada, dada por

$$\bar{P} = \bar{p} + \frac{2}{3}\rho k. \quad (2.11)$$

2.3.3.4 O Modelo Submalha de Smagorinsky

Um dos mais importantes modelos para o cálculo das tensões de Reynolds submalha é o modelo de Smagorinsky, proposto pelo próprio meteorologista em 1963, para calcular as grandes estruturas encontradas em escoamentos atmosféricos. Em sua essência, este modelo baseia-se na hipótese do equilíbrio local para as pequenas escalas, por intermédio do qual a produção de tensões turbulentas submalha, \wp , é considerada igual à taxa de dissipação, ε , isto é

$$\wp = \varepsilon. \quad (2.12)$$

A produção de tensões turbulentas pode ser descrita em função da taxa de cisalhamento do campo de velocidade filtrado, como

$$\wp = -\overline{u'_i u'_j} S_{ij} = 2\nu_t S_{ij}, \quad (2.13)$$

e a taxa de dissipação, escrita em função da escala característica de velocidade e do comprimento submalha

$$\varepsilon = -c_1 \overline{(u'_i u'_j)^3} / \ell. \quad (2.14)$$

Supõe-se, ainda, que a viscosidade turbulenta submalha seja proporcional a estas duas escalas, conforme a equação

$$\nu_t = c_1 \ell \overline{(u'_i u'_j)}. \quad (2.15)$$

Utilizando-se este conjunto de equações, pode-se exprimir a viscosidade turbulenta em função da taxa de deformação e da escala de comprimento, constituindo-se uma espécie de comprimento de mistura, através da seguinte expressão:

$$\nu_t = (C_S \ell)^2 \|\bar{S}\|. \quad (2.16)$$

sendo C_S a constante de Smagorinsky, ℓ a escala de comprimento, calculado em função da malha de discretização, e $\|\bar{S}\|$ a norma do tensor taxa de deformação, definidos como:

$$\ell = (\Delta x \Delta y)^{1/2}. \quad (2.17)$$

$$\|\bar{S}\| = (2\bar{S}_{ij}\bar{S}_{ij})^{1/2}. \quad (2.18)$$

sendo \bar{S}_{ij}

$$\bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right). \quad (2.19)$$

Para turbulência homogênea e isotrópica, Lilly (1967) determinou analiticamente o valor de 0,23 para a *constante de Smagorinsky* (C_S). A literatura mostra, entretanto, que esta constante pode variar entre 0,1 e 0,23, devendo ser ajustado caso a caso, dependendo do escoamento em estudo. Apesar da necessidade deste ajuste, o modelo de Smagorinsky é razoavelmente simples de ser implementado e pouco exigente em termos computacionais, motivo pelo qual tem sido largamente utilizado ao longo das últimas décadas.

2.4 Adimensionalização das Equações Governantes

2.4.1 Introdução

Como a maioria dos escoamentos que ocorrem na natureza e nas aplicações tecnológicas possui alto grau de complexidade, apenas uma pequena parcela dos modelos elaborados para representá-los matematicamente admitem solução analítica, sendo que, na maior parte dos casos, escoamentos reais só podem ser investigados experimentalmente ou através da solução numérica das equações do movimento. Em ambos os casos, a obtenção de resultados é inevitavelmente lenta e dispendiosa. Por outro lado, na mecânica dos fluidos, a exemplo do que ocorre em vários outros ramos da ciência, sempre se procura extrair o

máximo de informações, com o mínimo de simulações ou experiências. Embora não produza equações que possam ser resolvidas e nem, tampouco, forneça informações acerca da natureza do fenômeno estudado, a análise dimensional coloca-se, neste contexto, como uma ferramenta de inestimável valor, auxiliando no planejamento de experiências, na correlação de dados, na generalização de resultados e, ainda, no estabelecimento de leis de escala entre modelos físicos e protótipos.

Uma abordagem mais rigorosa e ampla na determinação das condições de semelhança entre dois fenômenos físicos quaisquer pode ser obtida considerando-se as equações diferenciais que os governam e suas respectivas condições de contorno. Dois fenômenos apresentam semelhança quando são governados por equações diferenciais e condições de contorno que possuam a mesma *forma adimensional*. Nestas circunstâncias, a semelhança dinâmica é garantida pela reprodução dos coeficientes adimensionais entre modelo e protótipo.

2.4.2 Forma Adimensional das Equações do Movimento

Considerando novamente as equações (2.6) e (2.7) representado as equações da conservação da massa e da quantidade de movimento filtradas escritas em notação indicial

$$\frac{\partial \bar{\rho} \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0, \quad (2.20)$$

e

$$\frac{\partial (\bar{\rho} \bar{u}_i)}{\partial t} + \frac{\partial (\bar{\rho} \bar{u}_j \bar{u}_i)}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) = - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) + S_{u_i} + \frac{\partial \tau_{ji}^{sgs}}{\partial x_j}. \quad (2.21)$$

Considerando as grandezas dimensionais com um asterisco como sobrescrito, definimos as variáveis adimensionais como

$$X_i = \frac{\bar{x}_i}{L^*}; \quad U_i = \frac{\bar{u}_i}{u_0}; \quad P = \frac{\bar{p}_i - p_0}{\rho_0 u_0^2}; \quad t = \frac{t^* u_0}{L}; \quad \rho = \frac{\rho^*}{\rho_0}; \quad \mu = \frac{\mu^*}{\mu_0}; \quad Re = \frac{\rho_0 u_0 L}{\mu_0}$$

sendo L o comprimento característico do domínio; u_0 a velocidade característica do escoamento; p_0 a pressão de referência; ρ_0 a densidade de referência e μ_0 a viscosidade absoluta de referência.

Usando as grandezas adimensionais, as equações (2.20) e (2.21) podem ser reescritas da seguinte forma

$$\frac{\partial(\rho U_i)}{\partial X_i} = 0, \quad (2.22)$$

e

$$\frac{\partial(\rho U_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U_j U_i)}{\partial X_j} - \frac{\partial}{\partial X_j} \left(\frac{\mu_e}{Re} \frac{\partial U_i}{\partial X_j} \right) = -\frac{\partial P}{\partial X_i} + \frac{\partial}{\partial X_j} \left(\frac{\mu_e}{Re} \frac{\partial U_j}{\partial X_i} \right) + S_{u_i}. \quad (2.23)$$

A viscosidade efetiva é definida como

$$\mu_e = \begin{cases} \mu & \text{para escoamentos laminares} \\ \mu + \mu_t & \text{para escoamentos turbulentos.} \end{cases} \quad (2.24)$$

sendo que μ_t pode ser determinada em LES para simulação do efeito da turbulência, pelo modelo de viscosidade turbulenta de Smagorinski, (WILCOX, 1993; JANSEN, 1999).

3

DESENVOLVIMENTO DO MODELO NUMÉRICO

3.1 Um Resumo sobre o Método de Resíduos Ponderados

O *Método de Resíduos Ponderados* (WRM - *Weighted Residual Method*), possibilita obter soluções aproximadas de equações diferenciais que não possuem um funcional associado. Assim, consideremos um sistema físico, contínuo e permanente, o qual pode ser descrito por um sistema de equações diferenciais parciais de ordem m , linear ou não linear, sobre um domínio Ω

$$A(u) - f = 0 \text{ em } \Omega \quad (3.1)$$

sujeita às condições naturais de contorno sobre o contorno Γ_N , dadas por

$$M(u) - g = 0 \text{ em } \Gamma \quad (3.2)$$

sendo $A(u)$ e $M(u)$ operadores diferenciais.

O operador diferencial A , a título de exemplo, pode ser escrito da seguinte forma

$$A(u) = - \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right]. \quad (3.3)$$

Aproximando-se a solução exata u por uma solução aproximada \tilde{u} na equação diferencial (3.1) e na condição de contorno natural (3.2), estas não serão satisfeitas exatamente, gerando *resíduos* R_Ω e R_Γ , respectivamente, no domínio e no contorno, dados por

$$R_{\Omega}(\tilde{u}) = A(\tilde{u}) - f \neq 0 \text{ em } \Omega, \quad (3.4)$$

$$R_{\Gamma}(\tilde{u}) = M(\tilde{u}) - g \neq 0 \text{ em } \Gamma_N. \quad (3.5)$$

A idéia básica do MWR é que seja satisfeita a seguinte condição

$$\int_{\Omega} W R_{\Omega}(\tilde{u}) d\Omega + \int_{\Gamma_N} \bar{W} R_{\Gamma}(\tilde{u}) d\Gamma = 0. \quad (3.6)$$

para um par de funções arbitrárias W e \bar{W} integráveis e não nulas. Casos estas hipóteses sejam satisfeitas, pode-se demonstrar que a função \tilde{u} é a solução aproximada da equação diferencial e de suas condições de contorno naturais.

3.1.1 Aproximação usando o Método de Resíduos Ponderados

A partir desta idéia podemos gerar soluções aproximadas da seguinte forma

$$\tilde{u} = \sum_{i=1}^n a_i N_i(x, y). \quad (3.7)$$

sendo que as funções de interpolação $N_i(x, y)$, mostradas posteriormente pelas tabelas 3.1 e 3.2, satisfazem as condições de contorno essenciais e as n constantes a_i são coeficientes a serem determinados impondo-se n condições

$$\int_{\Omega} W_i R_{\Omega}(\tilde{u}) d\Omega + \int_{\Gamma_N} \bar{W}_i R_{\Gamma}(\tilde{u}) d\Gamma = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.8)$$

sendo as funções W_i e \bar{W}_i chamadas de *funções peso*, definidas em conformidade com o método de aproximação empregado. A seguir serão descritos, resumidamente, alguns destes métodos.

3.1.1.1 Método de Elementos Finitos de Bubnov-Galerkin

Neste caso, as funções peso ($W_i = \bar{W}_i = N_i$) são tomadas iguais às funções de forma, resultando

$$\int_{\Omega} N_i R_{\Omega}(\tilde{u}) d\Omega + \int_{\Gamma_N} N_i R_{\Gamma}(\tilde{u}) d\Gamma = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.9)$$

3.1.1.2 Método de Elementos Finitos de Petrov-Galerkin

Neste caso, as funções de forma são tomadas como sendo

$$W_i = N_i + p_i. \quad (3.10)$$

Assim,

$$\int_{\Omega} (N_i + p) A(\tilde{u}) u_i d\Omega = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.11)$$

sendo p_i uma perturbação para fazer um determinado tipo de *upwind*.

3.1.1.3 Método de Elementos Finitos de Mínimos Quadrados

Neste método, as constantes a_i são determinadas da condição de fazer mínimo um funcional $I = \int_{\Omega} (R_{\Omega}(\tilde{u}))^2 d\Omega + \int_{\Gamma_N} (R_{\Gamma}(\tilde{u}))^2 d\Gamma$

$$\frac{\partial I}{\partial a_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.12)$$

Neste caso as funções peso são iguais à derivada dos resíduos.

3.1.1.4 Método de Elementos Finitos de Colocação

Neste método, impõe-se que o resíduo seja nulo em n pontos (x_i, y_i) do domínio e da parte do contorno onde são impostas as condições naturais. Assim,

$$R_{\Omega}(\tilde{u}(x_i, y_i)) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, p; \quad (3.13)$$

$$R_{\Gamma}(\tilde{u}(x_i, y_i)) = 0, \quad i = k + 1, k + 2, \dots, n. \quad (3.14)$$

Isto equivale a adotar as funções peso como as funções *delta de Dirac* $\delta(x - x_i, y - y_i)$, definidas como

$$\int_{\Omega} f(x, y) \delta(x - x_i, y - y_i) d\Omega = f(x_i, y_i). \quad (3.15)$$

3.1.1.5 Método de Subdomínios

Neste método, impõe-se a integral do resíduo nulo em n subdomínios Ω_i do domínio e Γ_i da parte do contorno onde são impostas as condições naturais de contorno.

$$\int_{\Omega_i} R_{\Omega}(\tilde{u}) d\Omega = 0, \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (3.16)$$

$$\int_{\Gamma_i} R_{\Gamma}(\tilde{u}) d\Omega = 0, \quad i = p + 1, p + 2, \dots, n \quad (3.17)$$

sendo as funções peso definidas como

$$W_i = \begin{cases} 1 & \text{no subdomínio} \\ 0 & \text{fora do subdomínio} \end{cases} \quad (3.18)$$

3.2 O Método dos Elementos Finitos em CFD

A primeira idéia do *Método de Elementos Finitos* (FEM - *Finite Element Method*) surgiu em 1909, quando Walter Ritz (1878-1909) desenvolveu um método para determinar a solução aproximada de problemas em mecânica dos sólidos deformáveis, onde o funcional energia era aproximado por funções conhecidas com coeficientes a serem determinados. Em 1943, Richard Courant (1888-1972) aumentou consideravelmente as possibilidades do método de Ritz introduzindo funções lineares especiais definidas sobre regiões triangulares e aplicou o método para a solução de problemas de torção. Sendo incógnitas, os valores das funções nos pontos nodais das regiões triangulares foram determinados. Assim, a principal restrição das funções de Ritz – a satisfação das condições de contorno – foi eliminada. O método de Ritz, junto com as modificações de Courant, é similar ao FEM proposto por Ray William Clough Jr. muitos anos depois. Coube a Clough (1960) introduzir, pela primeira vez, o termo *elemento finito* no artigo *The finite element method in plane stress analysis*.

Uma importante contribuição para o desenvolvimento do FEM foram os artigos de Hrennikov (1941), Argyris (1954, 1955), Turner et al. (1956). O primeiro livro-texto sobre FEM tinha por título *The finite element method in structural and continuum mechanics*, e foi publicado por Zienkiewicz e Cheung (1967). Apresentava uma ampla interpretação do método e sua aplicabilidade para alguns problemas gerais.

Se, inicialmente, o FEM fora desenvolvido como um método de simulação baseado em computação para análise de estruturas aeroespaciais, no final dos anos 60 passou a ser utilizado para a simulação de problemas não estruturais em fluidos, termomecânica e eletromagnetismo. Embora o método tenha sido extensivamente usado previamente no campo das estruturas mecânicas, hoje tem sido aplicado satisfatoriamente como uma técnica conveniente e bem estabilizada para a solução computacional de problemas complexos em diferentes campos da engenharia: civil, mecânica, nuclear, biomédica, hidrodinâmica, condução de calor, geo-mecânica, entre outros. Por outro lado, FEM pode ser visto como poderosa ferramenta para a solução aproximada de equações diferenciais descrevendo diferentes processos físicos. Atualmente, existem vários programas comerciais bastante completos que permitem aplicar o MEF à análise de diferentes tipos de situações físicas: COSMOS, NASTRAN, ASKA, SAP, TITUS, MARC, ABACUS, ANSYS, ADINA, entre outros. Há ainda programas não comerciais desenvolvidos por universidades, como o MODULEF, por exemplo.

O FEM é uma técnica para resolver equações diferenciais parciais. Sua primeira característica é o *campo contínuo*, ou *domínio*, subdividido em células, chamados *elementos*, os quais formam uma *malha*. Comumente, os elementos têm uma forma triangular ou quadrilateral, podendo ser retilíneos ou curvados. A malha em si não necessita ser estruturada, o que faz com que muitas geometrias complexas possam ser tratadas com facilidade.

A segunda característica do FEM é que a solução do problema discreto é assumida, *a priori*, para ter uma forma prescrita. A solução tem que pertencer a um espaço de funções e este é construído pelos valores da função variando numa dada maneira, por exemplo, linearmente ou quadraticamente, entre os valores dos pontos nodais. Os *pontos nodais*, ou *nós*, são pontos típicos dos elementos como os vértices, os pontos médios dos lados, os pontos médios do elemento, entre outros. Devido à esta escolha, a representação da solução fica fortemente vinculada à representação geométrica do domínio.

A terceira característica do FEM é a procura por uma solução integral da equação diferencial parcial. Numa forma mais geral, a formulação integral é obtida a partir da formulação residual ponderada. Por esta formulação, o método adquire a capacidade para incorporar naturalmente condições de contorno do tipo diferencial. Esta propriedade constitui a segunda importante vantagem do FEM, a qual não é partilhada por nenhum outro método. A combinação da representação da solução num dado espaço de funções com a formulação tratando rigorosamente as condições de contorno, dá ao método uma fundamentação matemática extremamente rigorosa e robusta e permite, por exemplo, uma boa definição da precisão.

Uma característica final do FEM é a maneira com que a discretização é obtida. As equações discretas são construídas a partir das contribuições de cada nível do elemento, os quais, mais tarde, são então reunidos.

Historicamente, o FEM originou-se da mecânica estrutural, o que causa alguns resquícios na terminologia. Na mecânica estrutural, a formulação diferencial parcial do problema pode sempre ser substituída por uma formulação variacional equivalente, isto é, a minimização de alguma energia integral sobre o domínio. Esta formulação constitui uma formulação integral natural para o FEM. Em dinâmica dos fluidos, uma formulação variacional não é possível. Isto torna menos óbvio para formular um método de elementos finitos em dinâmica dos fluidos. A história da CFD nos mostra que, uma vez encontrada uma formulação adequada do FEM para um determinado problema, o FEM é usado, quase que exclusivamente, devido ao seu rigor e elegância.

A evolução do FEM em dinâmica dos fluidos até o momento, no entanto, está longe de ser completa. Provavelmente é mais seguro dizer que para os problemas mais simples, assim como problemas potenciais, tanto compressíveis como incompressíveis, e as equações de Navier-Stokes para baixos e médio-altos números de Reynolds, o FEM é razoavelmente desenvolvido, apesar de que novas evoluções sejam constantes. No entanto, para problemas mais complexos, como os governados pelas equações de Navier-Stokes, a evolução está longe de ser completa (DICK, 1996).

3.3 O Método de Passo Fracionado

O método de passo fracionado para a solução das equações de Navier-Stokes incompressíveis, introduzido originalmente por Harlow e Welch (1965), Chorin (1968a-b, 1969) e Temam (1969a-b, 1984), foi o primeiro a possibilitar uma solução de custo-efetivo para resolver problemas transientes tridimensionais. Desde a sua origem, tem sido repetidamente estudado na literatura da CFD e várias implementações têm sido propostas usando discretização espacial baseada em diferenças finitas (CHORIN, 1968b; SOH e GOODRICH, 1988; FERNANDEZ-FERIA e SANMIGUEL-ROJAS, 2004), elementos finitos (DONEA et al., 1982; RAMASWAMY, 1988; RAMASWAMY, 1990; RAMASWAMY et al., 1990; RAMASWAMY e AKIN, 1991; KOVACS e KAWAHARA, 1991; NATARAJAN, 1992, RAMASWAMY et al. , 1992a-b) ou métodos espectrais.

Com o método de Chorin, em cada passo de tempo uma forma incompleta da equação da quantidade de movimento é integrada para produzir uma aproximação do campo de velocidade, a qual, em geral, não possui divergente zero ou não satisfaz a conservação da massa. Então, uma correção é aplicada para que o campo de velocidade produza um campo de velocidade com divergente zero. A correção para o campo de velocidade é uma projeção ortogonal no sentido que projeta o campo de velocidade inicial sobre o campo de divergência zero, mudando a vorticidade. Este passo é chamado de *passo de projeção* e o método que utiliza esta aproximação é freqüentemente chamado de *método de projeção*. O método de projeção básico elimina o gradiente de pressão das equações da quantidade de movimento e exige o uso de condições de contorno especiais para o campo de velocidades intermediário a fim de garantir o comportamento de segunda ordem no tempo. Uma alternativa para o método de projeção básico é o *método de correção da pressão*, que é similar ao método de projeção básico, mas com o termo do gradiente da pressão conservado nas equações da quantidade de

movimento. A equação de Poisson é, então, resolvida para a correção da pressão, a qual é usada para corrigir o campo de velocidade intermediário e a continuidade imposta.

A classe dos métodos fracionados inclui métodos desenvolvidos sob idéias diversas: métodos de passo fracionado ou *time-splitting* para o desenvolvimento de equações (YANENKO, 1971); métodos baseados na projeção sobre um espaço de campo de vetores solenoidal (TEMAN, 1984) e outros, como os métodos de correção da pressão ou correção da velocidade (HIRT e COOK, 1972; KOVACS e KAWAHARA, 1991) e os métodos de fatoração da matriz aproximada (KIM e MOIN, 1985; PEROT, 1993).

Uma derivação típica do método de passo fracionado para as equações de Navier-Stokes incompressíveis pode seguir dois caminhos distintos. Por um lado, pode-se discretizar primeiramente o tempo e, em seguida, discretizar o espaço. Quando se adota esta aproximação, surge uma controvérsia sobre quais condições de contorno serão impostas em cada passo, de forma que problemas intermediários semidiscretos sejam bem condicionados. Em particular, em muitos métodos de projeção somente a componente normal da condição de contorno da velocidade é imposta no passo da incompressibilidade (QUARTAPELLE, 1993). Este fato, junto com a necessidade de impor uma condição de contorno não-física na pressão, pode gerar um erro numérico próximo à parede (ORZAG et al., 1986; TEMAN, 1991).

Por outro lado, quando a discretização do espaço é realizada antes da discretização do tempo no passo fracionado para o sistema resultante de equações diferenciais ordinárias, as condições de contorno são fixadas previamente. Procedimentos deste tipo, no entanto, resultam numa perda de generalidade.

Uma importante característica dos métodos de passo fracionado é a ordem do sistema global em relação à discretização do tempo. Muitos métodos são de precisão de primeira ordem (FORTIN et al., 1971), embora alguns de segunda ordem também tenham sido desenvolvidos (LEE et al., 2001).

Desde que foi proposto, o *método de passo fracionado* passou a ter uma popularidade cada vez mais difundida devido à sua eficiência computacional, em razão da possibilidade da subdivisão do problema complexo em outros mais simples e de mais fácil implementação computacional, além de permitir o uso de técnicas de solução mais apropriadas, levando em consideração as características elípticas, parabólicas ou hiperbólicas das equações de Navier-Stokes.

3.4 Discretização dos Domínios para Problemas Bidimensionais

Os tipos de elementos mais utilizados para discretização de domínios bidimensionais pelo FEM são triângulos e/ou quadriláteros. Para geometrias bidimensionais, dentre os elementos disponíveis, os triangulares são os mais simples e se adaptam bem a contornos irregulares (BAKER e PEPPER, 1991). Mas, segundo Zienkiewicz e Morgan (1993), elementos quadrilaterais quadráticos também podem ser deformados para representarem contornos irregulares e, em alguns casos, pode ser conveniente uma combinação dos dois tipos de elementos, conforme a Fig. 3.1. A discretização aqui apresentada serve para ambos tipos de elementos. O elemento finito principal neste trabalho é um elemento quadrilateral com nove pontos nodais.

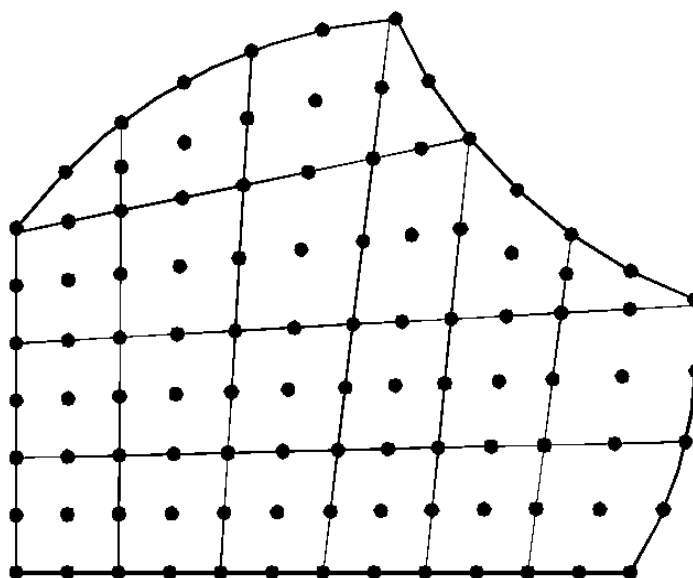


Figura 3.1 - Domínio discretizado em triângulos e quadriláteros

A figura 3.2 ilustra o elemento triangular subdividido em subvolumes de controle. Cada elemento triangular com nós nos vértices pode ser composto por três subvolumes de controle, obtidos, por exemplo, unindo-se seu centróide aos pontos médios dos lados ou por dois subvolumes de controle, simplesmente, unindo-se os pontos médios dos lados (SAABAS, 1991).

O número de lados do volume de controle dependerá de quantos elementos compartilham um determinado nó. Para nós de fronteira do domínio, geralmente, o volume de controle será composto por dois subvolumes de controle. Um determinado elemento será, em geral, subdividido em um número de subvolumes de controle igual ao seu número de nós.

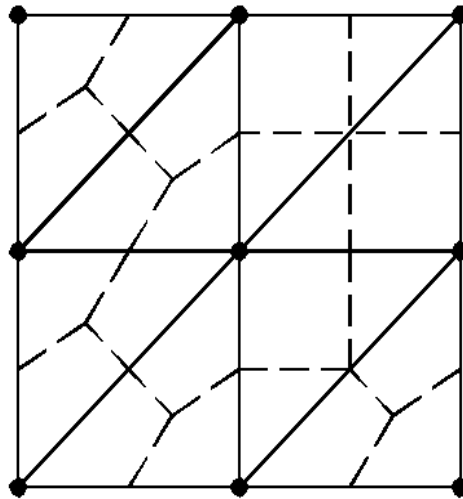


Figura 3.2 - Elementos triangulares subdivididos em subvolumes de controle.

3.5 Integração das Equações nos Subvolumes de Controle

Para obtenção das equações discretizadas, as equações diferenciais parciais governantes devem ser integradas nos subvolumes de controle dentro de cada elemento. Inicialmente, para a discretização no tempo, vários esquemas podem ser utilizados, desde um esquema explícito até um esquema totalmente implícito. O esquema totalmente explícito possui limitação quanto ao passo de tempo, por razões de estabilidade da solução. Já no esquema totalmente implícito, o passo de tempo pode ser fixado de acordo com a precisão da solução que se deseja. Neste esquema, as equações discretizadas precisam, a princípio, ser compatíveis. A discretização no espaço é feita a partir da substituição das funções de interpolação nas equações integrais de conservação (CAMPOS SILVA, 1998). Os passos básicos para obtenção das equações discretizadas são descritos a seguir.

3.5.1 Discretização Temporal das Equações

Usando a técnica de passo fracionado (RAMASWAMY et al., 1992a-b), as equações que governam escoamentos bidimensionais de fluidos newtonianos podem ser escritas na seguinte forma:

$$\frac{\partial(\rho U_i^*)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U_j^* U_i^*)}{\partial X_j} = \frac{\partial}{\partial X_j} \left(\mu_e \frac{\partial U_i^*}{\partial X_j} \right) + F_i, \quad (3.19)$$

$$\frac{\partial(\rho U_i)}{\partial t} = \frac{\partial P}{\partial X_i}, \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial(\rho U_i)}{\partial X_i} = 0, \quad (3.21)$$

sendo F_i o termo fonte.

Pode-se obter uma velocidade intermediária U_i^* , que não satisfaz a equação de continuidade, através da equação:

$$\begin{aligned} & \frac{\rho U_i^*}{\Delta t} - \frac{\rho U_i^n}{\Delta t} + \theta^* \frac{\partial(\rho U_j U_i)^n}{\partial X_j} + (1 - \theta^*) \frac{\partial(\rho U_j U_i)^{n-1}}{\partial X_j} \\ & = \theta \frac{\partial}{\partial X_j} \left(\mu_e \frac{\partial U_i^*}{\partial X_j} \right) + (1 - \theta) \left(\mu_e \frac{\partial U_i}{\partial X_j} \right)^n + \theta^{**} F_i^{n+1} + (1 - \theta^{**}) F_i^n \end{aligned} \quad (3.22)$$

$$\frac{\rho U_i^{n+1}}{\Delta t} - \frac{\rho U_i^*}{\Delta t} = - \frac{\partial P^{n+1}}{\partial X_i} \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial(\rho U_i)^{n+1}}{\partial X_i} = 0 \quad (3.24)$$

na qual θ é um parâmetro que pode ser definido de acordo com o método de discretização no tempo que se deseja. Alguns valores adotados para θ são (REDDY, 1993):

$$\theta = \begin{cases} 0, & \text{esquema de diferenças para frente (ou Euler) - condicionalmente estável} \\ & \text{ordem de precisão} = O(\Delta t) \\ \frac{1}{2}, & \text{esquema Crank - Nicolson (estável); } O((\Delta t)^2) \\ \frac{2}{3}, & \text{método de Galerkin (estável); } O((\Delta t)^2) \\ 1, & \text{esquema de diferenças para trás (estável); } O(\Delta t) \end{cases} \quad (3.25)$$

Calculando-se o divergente na equação (3.23) e usando a equação (3.24), resulta

$$-\frac{\partial}{\partial X_i} \left(\frac{\partial P^{n+1}}{\partial X_i} \right) = -\frac{1}{\Delta t} \frac{\partial (\rho U_i^*)}{\partial X_i}. \quad (3.26)$$

Dessa forma, pode-se calcular o campo de escoamento nos seguintes três passos:

Passo 1

$$\begin{aligned} \frac{\rho U_i^*}{\Delta t} - \theta \frac{\partial}{\partial X_j} \left(\mu_e \frac{\partial U_i^*}{\partial X_j} \right) &= \frac{\rho U_i^n}{\Delta t} - \theta^* \frac{\partial (\rho U_j U_i)^n}{\partial X_j} - (1 - \theta^*) \frac{\partial (\rho U_j U_i)^{n-1}}{\partial X_j} \\ + (1 - \theta) \left(\mu_e \frac{\partial U_i}{\partial X_j} \right)^n &+ \theta F_i^* + (1 - \theta) F_i^n \end{aligned} \quad (3.27)$$

Passo 2

$$\frac{\partial}{\partial X_i} \left(\frac{\partial P^{n+1}}{\partial X_i} \right) = \frac{1}{\Delta t} \frac{\partial (\rho U_i^*)}{\partial X_i} \quad (3.28)$$

Passo 3

$$\frac{\rho U_i^{n+1}}{\Delta t} = \frac{\rho U_i^*}{\Delta t} - \frac{\partial P^{n+1}}{\partial X_i}. \quad (3.29)$$

3.5.2 Discretização Espacial das Equações

No FEM, a discretização espacial das equações é realizada a partir da formulação variacional ou da forma fraca das mesmas, obtida tomando-se o produto escalar dos termos das equações por funções peso e integrando-se por partes sobre o domínio, o que corresponde ao método de resíduos ponderados (MWR). No caso de métodos de elementos finitos por volumes de controle (CVFEM), a função peso é feita constante e unitária dentro do volume de controle, o que corresponde ao método de subdomínios, segundo a equação (3.18).

Integrando-se por partes as equações (3.27), (3.28) e (3.29), temos, respectivamente:

$$\int_V \left(\frac{\rho U_i^*}{\Delta t} \right) dV - \oint_A \theta \left(\mu_e \frac{\partial U_i^*}{\partial X_j} \right) n_j dA = \int_V \left(\frac{\rho U_i^n}{\Delta t} \right) dV - \oint_A \theta^* (\rho U_j U_i)^n n_j dA \quad (3.30)$$

$$- \oint_A (1 - \theta^*) (\rho U_j U_i)^{n-1} n_j dA + \oint_A (1 - \theta) \left(\mu_e \frac{\partial U_i}{\partial X_j} \right)^n n_j dA + \int_V \theta F_i^* dV + \int_V (1 - \theta) F_i^n dV$$

$$\int_A \left(\frac{\partial P^{n+1}}{\partial X_i} \right) n_i dA - \int_V \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{\partial (\rho U_i^*)}{\partial X_i} \right) dV = 0 \quad (3.31)$$

$$\int_V \frac{\rho U_i^{n+1}}{\Delta t} dV = \int_V \frac{\rho U_i^*}{\Delta t} dV - \int_V \frac{\partial P^{n+1}}{\partial X_i} dV \quad (3.32)$$

Na equação (3.30), n_j representa os componentes do vetor normal para fora das áreas de fronteiras dos volumes de controle, apontando na direção do eixo X_j , definido por $\vec{n} dA = (n_1 \vec{i} + n_2 \vec{j}) dA$. Para problemas bidimensionais, com integração no sentido anti-horário, $\vec{n} dA = dy \vec{i} - dx \vec{j}$.

O sistema completo de equações algébricas é obtido somando-se a contribuição de elemento por elemento, aplicando-se as equações (3.30), (3.31) e (3.32) para cada subvolume de controle dentro de um elemento. Este procedimento facilita a obtenção das matrizes globais sem afetar o princípio de conservação; uma vez que quando for levada em consideração a contribuição de cada elemento para todos os nós, a contribuição para os volumes de controle completos terá sido feita. O procedimento adotado na maioria dos trabalhos é integrar as equações para um volume de controle completo, similar ao que é feito no método de volumes finitos. No caso deste trabalho foi seguido o procedimento adotado no método clássico de elementos finitos. A diferença básica será na forma das matrizes globais, o que definirá a melhor maneira de se resolver o sistema global.

3.5.3 Funções de Interpolação

No FEM, as variáveis desconhecidas podem ser interpoladas, dentro de um elemento, na forma:

$$U_i^e(\Omega, t) = \sum_{\alpha=1}^{NNEL} N_{\alpha}^e(\Omega) \bar{U}_{i\alpha}^e(t) \quad (3.33)$$

$$P^e(\Omega, t) = \sum_{\alpha=1}^{NNEL} N_{\alpha'}^e(\Omega) \bar{P}_{i'}^e(t) \quad (3.34)$$

sendo N_{α} e $N_{\alpha'}$ as funções de interpolação bidimensionais dentro de um elemento (vide Tabelas 3.1 e 3.2); $U_{i\alpha}^e$ e $P_{i'}^e$ os valores nodais da velocidade no nó α e da pressão no nó α' , respectivamente. Usa-se α' para considerar que a pressão pode ser interpolada por funções de interpolação de ordem diferente daquela usada para interpolar a velocidade ou outro escalar qualquer. Geralmente, a pressão é interpolada por funções de uma ordem mais baixa do que as funções de interpolação para a velocidade, para evitar a instabilidade numérica.

Tabela 3.1- Funções de interpolação e suas derivadas para elemento com 4 nós.

α	N_{α}	$\partial N_{\alpha}/\partial \xi$	$\partial N_{\alpha}/\partial \eta$
1	$\frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4}$	$\frac{-(1-\eta)}{4}$	$\frac{-(1-\xi)}{4}$
2	$\frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4}$	$\frac{(1-\eta)}{4}$	$\frac{-(1+\xi)}{4}$
3	$\frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4}$	$\frac{(1+\eta)}{4}$	$\frac{(1+\xi)}{4}$
4	$\frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4}$	$\frac{-(1+\eta)}{4}$	$\frac{(1-\xi)}{4}$

Tabela 3.2 - Funções de interpolação e suas derivadas para elemento com 9 nós.

α	N_α	$\partial N_\alpha / \partial \xi$	$\partial N_\alpha / \partial \eta$
1	$\frac{(1-\xi)(1-\eta)\xi\eta}{4}$	$\frac{(1-2\xi)(1-\eta)\eta}{4}$	$\frac{(1-\xi)(1-2\eta)\xi}{4}$
2	$\frac{-(1-\xi^2)(1-\eta)\eta}{2}$	$(1-\eta)\xi\eta$	$\frac{-(1-\xi^2)(1-2\eta)}{2}$
3	$\frac{-(1+\xi)(1-\eta)\xi\eta}{4}$	$\frac{-(1+2\xi)(1-\eta)\eta}{4}$	$\frac{-(1+\xi)(1-2\eta)\xi}{4}$
4	$\frac{(1+\xi)(1-\eta^2)\xi}{2}$	$\frac{(1+2\xi)(1-\eta^2)}{2}$	$-(1+\xi)\xi\eta$
5	$\frac{(1+\xi)(1-\eta^2)\xi}{4}$	$\frac{(1+2\xi)(1+\eta)\eta}{4}$	$\frac{(1+\xi)(1+2\eta)\xi}{4}$
6	$\frac{(1-\xi^2)(1+\eta)\eta}{2}$	$-(1+\eta)\xi\eta$	$\frac{(1-\xi^2)(1+2\eta)}{2}$
7	$\frac{(1-\xi^2)(1+2\eta)}{2}$	$\frac{-(1-2\xi)(1+\eta)\eta}{4}$	$\frac{-(1-\xi)(1+2\eta)\xi}{4}$
8	$\frac{-(1-\xi)(1-\eta^2)\xi}{2}$	$\frac{-(1-2\xi)(1-\eta^2)}{2}$	$(1-\xi)\xi\eta$
9	$(1-\xi^2)(1-\eta^2)$	$-2(1-\eta^2)\xi$	$-2(1-\xi^2)\eta$

Consideremos, agora, um determinado subvolume de controle associado ao nó α de um elemento. Neste trabalho, são considerados elementos quadrilaterais com 9 nós para a discretização das equações (3.30) a (3.32) (SCHNEIDER e RAW, 1987a, b; RAW et al., 1985; SCHNEIDER, 1988). Com exceção da pressão, as velocidades e demais grandezas escalares são interpoladas usando-se os 9 nós do elemento. A pressão é interpolada usando-se, no elemento, apenas os 4 nós de cantos. Este método de interpolação da pressão por funções diferentes daquelas que interpolam a velocidade é conhecido como *formulação mista*. A figura 3.3 mostra um elemento finito e seus respectivos subvolumes de controle, indicados por linhas tracejadas e cada subvolume de controle é identificado pelo número do nó ao qual está associado.

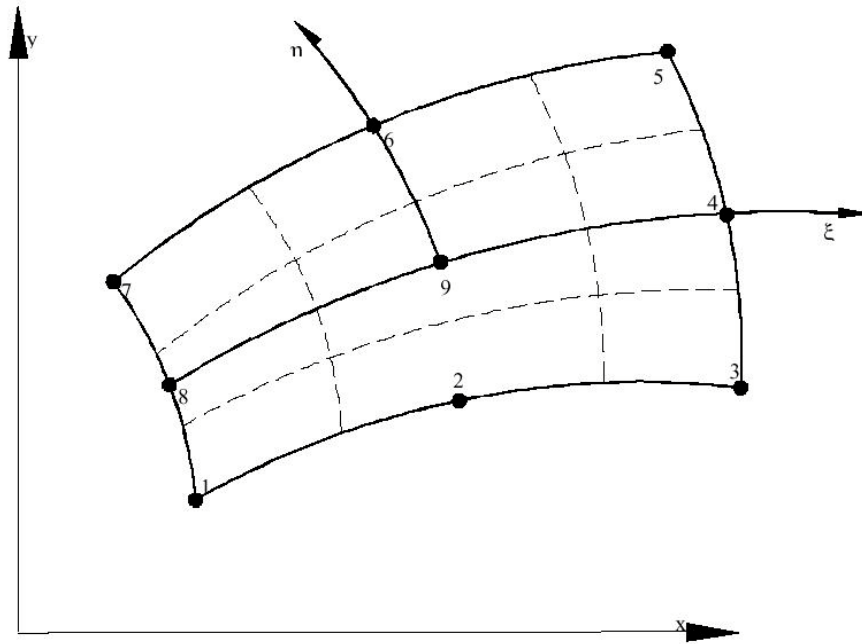


Figura 3.3 - Subvolumes de controle compondo um elemento quadrilateral de 9 nós.

A vantagem do elemento de 9 nós quando comparado com o elemento de 8 nós, conhecido por *elemento serendipity* é o fato de que, no primeiro caso, todas as faces dos subvolumes de controle são linhas de coordenadas constantes dentro do elemento de referência. Isto não seria possível para o segundo elemento o qual, geralmente, é o mais utilizado no método clássico de elementos finitos de Galerkin para cálculo de escoamentos de fluidos.

No caso de problemas bidimensionais, as integrais (equações 3.30 a 3.32) de volume se transformarão em integrais na área e integrais de área serão simplesmente integrais de linha, em contornos dos subvolumes de controle. Considerando, então, as equações para um subvolume de controle associado a um determinado nó de um elemento obtém-se

$$\begin{aligned}
 & \int_{A_\alpha} \frac{\rho U_i^*}{\Delta t} dA + \sum_{K=1}^{NF} \left[\int_{\Gamma_{K\alpha}} \left(\theta^* (\rho U U_i)^n + (1-\theta^*) (\rho U U_i)^{n-1} - (1-\theta) \left(\mu_e \frac{\partial U_i}{\partial X} \right)^n - \theta \left(\mu_e \frac{\partial U_i^*}{\partial X} \right) \right) dY \right] \\
 & - \sum_{K=1}^{NF} \left[\int_{\Gamma_{K\alpha}} \left(\theta^* (\rho V U_i)^n + (1-\theta^*) (\rho V U_i)^{n-1} + (1-\theta) \left(\mu_e \frac{\partial U_i}{\partial Y} \right)^n + \theta \left(\mu_e \frac{\partial U_i^*}{\partial Y} \right) \right) dX \right] - \int_{A_\alpha} \frac{\rho U_i^n}{\Delta t} dA \\
 & - \theta \int_{A_\alpha} F_i^* dA - (1-\theta) \int_{A_\alpha} F_i^n dA + \text{contribuições similares de outros elementos para o nó } \alpha + \\
 & \text{contribuições de contornos se for o caso } = 0
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

$$\sum_{k=1}^{NF} \left[\int_{\Gamma_\alpha} \left(\frac{\partial P^{n+1}}{\partial X} \right) dY - \int_{\Gamma_\alpha} \left(\frac{\partial P^{n+1}}{\partial Y} \right) dX \right] - \int_{A_\alpha} \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{\partial(\rho U_i^*)}{\partial X_i} \right) dA = 0 \quad (3.36)$$

$$\int_{A_\alpha} \frac{\rho U_i^{n+1}}{\Delta t} dA - \int_{A_\alpha} \frac{\rho U_i^*}{\Delta t} dA + \int_{A_\alpha} \frac{\partial P^{n+1}}{\partial X_i} dA + \text{contribuições de outros elementos para o nó } \alpha = 0 \quad (3.37)$$

Substituindo as funções de interpolação definidas pelas equações (3.33) e (3.34) nas equações (3.35) a (3.37) obtém-se o seguinte sistema, na forma escalar, para um elemento:

$$\begin{aligned} \frac{M_{\alpha\beta}}{\Delta t} U_{i\beta}^* - \theta S_{\alpha\beta} U_{i\beta}^* &= \frac{M_{\alpha\beta}}{\Delta t} U_{i\beta}^n - \theta^* C_{\alpha\beta}^n U_{i\beta}^n - (1 - \theta^*) C_{\alpha\beta}^{n-1} U_{i\beta}^{n-1} + \\ &+ (1 - \theta) S_{\alpha\beta} U_{i\beta}^n + \theta^{**} F_{i\alpha}^* + (1 - \theta^{**}) F_{i\alpha}^n \end{aligned} \quad (3.38)$$

$$H_{\alpha'\beta', P_{\beta'}^{n+1}} = \frac{1}{\Delta t} D_{i\alpha'\beta'} U_{i\beta}^* \quad (3.39)$$

$$\frac{M_{\alpha\beta}}{\Delta t} U_{i\beta}^{n+1} = \frac{M_{\alpha\beta}}{\Delta t} U_{i\beta}^* - G_{i\alpha\beta', P_{\beta'}^{n+1}} \quad (3.40)$$

Nas equações (3.38) a (3.40) as matrizes são definidas por:

$$M_{\alpha\beta} = \int_{A_{SVC\alpha}} \rho N_\beta dA \quad (3.41)$$

$$C_{\alpha\beta} = \oint_{\Gamma_{SVC\alpha}} \rho N_\beta U_j n_j d\Gamma \quad (3.42)$$

$$F_{i\alpha} = \int_{\Gamma_{SVC\alpha}} \mu_e \frac{\partial U_j}{\partial X_i} n_j d\Gamma + \int_{A_{SVC\alpha}} \rho g_i dA \quad (3.43)$$

$$H_{\alpha'\beta'} = \int_{\Gamma_{SV\alpha'}} \frac{\partial N_{\beta'}}{\partial X_i} n_i d\Gamma \quad (3.44)$$

$$D_{i\alpha'\beta'} = \int_{A_{SV\alpha'}} \rho \frac{\partial N_{\beta'}}{\partial X_i} dA \quad (3.45)$$

$$G_{i\alpha\beta'} = \int_{A_{SV\alpha'}} \frac{\partial N_{\beta'}}{\partial X_i} dA \quad (3.46)$$

As funções de interpolação podem ser encontradas em livros de elementos finitos, veja por exemplo, Dhatt e Touzot (1984) ou funções de interpolação especiais podem ser obtidas procurando-se modelar adequadamente os vários termos (convectivos, difusivos, pressão, fontes) para se evitar resultados não realísticos. Resultados sem significado físico podem surgir, principalmente, quando o número de Reynolds é muito elevado e o problema se torna convectivo dominante. Uma forma de se remediar isto é utilizar técnicas de *upwind* para se interpolar os termos convectivos. Entretanto, no nosso entendimento, se a malha puder ser suficientemente refinada, não seria necessário nenhuma técnica de *upwind*. Esta técnica, embora não represente exatamente a direção do escoamento e introduza alguma falsa difusão, garante coeficientes positivos nas equações algébricas o que evita resultados espúrios, Saabas (1991). Maliska (1996) em seu livro sobre o método de volumes finitos explica várias técnicas de *upwind*. Saabas (1991) na análise que faz sobre métodos de solução para problemas de escoamentos de fluidos mostra as vantagens e desvantagens de várias técnicas de *upwind* no contexto dos vários métodos.

Uma formulação alternativa da equação de Poisson da pressão pode ser obtida a partir da equação (3.23). Nesse caso, não se calcula o vetor divergente e obtêm-se

$$\frac{M_{\alpha\beta}}{\Delta t} U_i^{n+1} = \frac{M_{\alpha\beta}}{\Delta t} U_{i\beta}^* - G_{i\alpha\beta'} P_{\beta'}^{n+1} \quad (3.47)$$

A partir da equação (3.24) obtêm-se:

$$D_{i\alpha'\beta'} U_{i\beta}^{n+1} = 0 \quad (3.48)$$

Nesse caso, fazendo $M_{\alpha\beta} = \bar{M}_{\alpha\beta}$ na equação (3.47) e usando (3.48), resulta

$$D_{i\alpha'\beta} \bar{M}_{\alpha\beta} G_{i\alpha\beta'} P_{\beta'}^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} D_{i\alpha'\beta} U_{i\beta}^* + F_{p\alpha'} \quad (3.49)$$

$$U_{i\beta}^{n+1} = U_{i\beta}^* - \Delta t \bar{M}_{\alpha\beta} G_{i\alpha\beta'} P_{\beta'}^{n+1} \quad (3.50)$$

Outras formulações podem ser obtidas, como, por exemplo, o método de passo fracionado do tipo D* (BELL et al., 1989; DUKOWICZ e DVINSKY, 1992; KIM e LEE, 2002), no qual, tomando-se $F_{i\alpha} = -G_{i\alpha\beta'} P_{\beta'}$, resolve-se a equação (3.38) com $\theta = \frac{1}{2}$, $\theta^* = \theta^{**} = 0$ e as equações (3.49) e (3.50). Nesse caso, as matrizes são definidas por

$$H_{\alpha'\beta'} = \int_{\Omega} \frac{\partial N_{\alpha'}}{\partial X_i} \frac{\partial N_{\beta'}}{\partial X_i} d\Omega \quad (3.51)$$

$$F_{p\alpha'} = \int_{\Gamma_{sv\alpha}} N_{\alpha'} \frac{\partial P}{\partial X_i} n_i d\Gamma \quad (3.52)$$

$$D_{i\alpha'\beta} = \int_{\Omega} N_{\alpha'} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial X_i} d\Omega \quad (3.53)$$

Uma outra formulação, conhecida por método I (RAMASWAMY, 1988; RAMASWAMY et al, 1992b), no qual resolve-se a equação (3.38) com $\theta = 0$ e $\theta^* = 1$ e as equações (3.49) e (3.50). Nesse caso, as matrizes na equação de Poisson são definidas por

$$M_{\alpha\beta} = \int_{\Omega} \rho N_{\alpha} N_{\beta} d\Omega \quad (3.54)$$

$$H_{i\alpha\beta'} = \int_{\Omega} \frac{\partial N_{\alpha}}{\partial X_i} N_{\beta'} d\Omega \quad (3.55)$$

$$D_{i\alpha\beta} = \int_{\Omega} N_{\alpha'} \frac{\partial N_{\beta}}{\partial X_i} d\Omega \quad (3.56)$$

$$F_{p\alpha} = \int_{\Gamma_{SVC\alpha}} N_{\alpha} P n_i d\Gamma \quad (3.57)$$

3.5.4 Cálculo das Matrizes nos Elementos

Uma vez definida as funções de interpolação, as matrizes definidas nas equações (3.49) podem ser resolvidas para se obter os coeficientes das matrizes nos elementos. Antes de montar a matriz global, necessita-se do cálculo das matrizes nos elementos. Este trabalho é facilitado fazendo-se o mapeamento de cada elemento do domínio real em um elemento de referência denominado de elemento mestre. Este mapeamento é feito em função das coordenadas globais dos nós do elemento e das funções de interpolação definidas em coordenadas locais no elemento. A figura 3.4 ilustra o mapeamento de um elemento qualquer no elemento mestre. O elemento finito mostrado na Figura 3.4 (a), que pode ser deformado em coordenadas globais, será um elemento quadrado de comprimento dos lados igual a 2, em coordenadas locais.

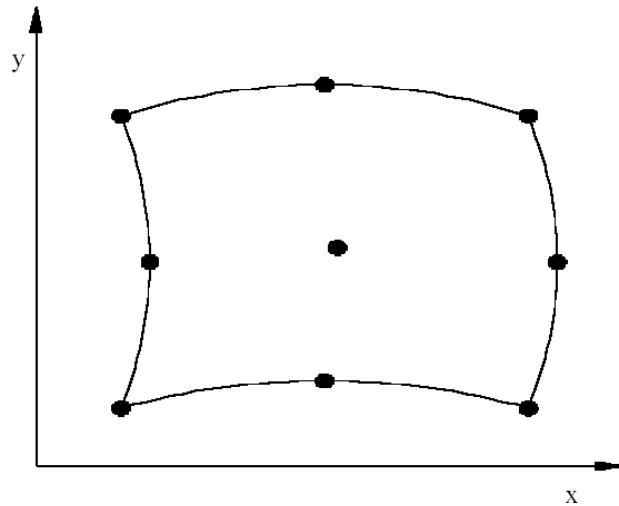


Figura 3.4 (a) - Elemento em coordenadas globais, x-y.

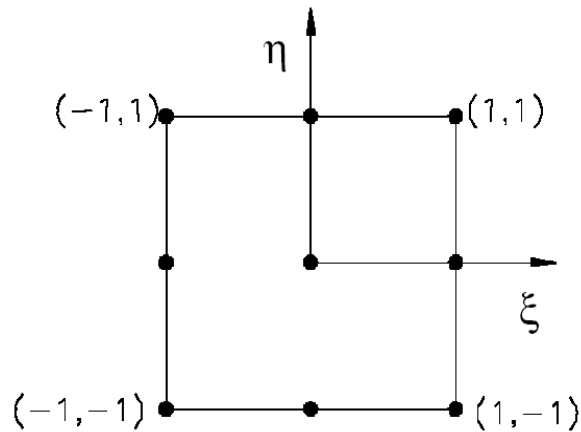


Figura 3.4 (b) - Elemento mapeado no elemento mestre em coordenadas locais, ξ - η .

As coordenadas globais dentro de um elemento são definidas por

$$X_i^e = \sum_{\alpha=1}^{NNEL} N_{\alpha}^e X_{i\alpha} \quad (3.58)$$

sendo $X_{i\alpha}$, $i = 1 \dots N$ dim as coordenadas do nó α e N_{α} as funções de interpolação apresentadas na Tabela 3.1 para elementos lineares e na Tabela 3.2 para elementos quadráticos; nestas tabelas também são apresentadas as derivadas das funções de interpolação que são necessárias na avaliação das matrizes dos elementos. Estas funções de interpolação podem ser encontradas em vários livros de elementos finitos, por exemplo, em Dhatt e Touzot (1984).

As integrais de áreas, em coordenadas locais nos elementos, podem ser representadas, genericamente, por

$$\int_A f(x, y) dx dy = \int_A f(\xi, \eta) |J| d\xi d\eta \quad (3.59)$$

sendo $J = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi}$ o determinante da matriz do jacobiano da transformação de coordenadas globais para as coordenadas locais dada por:

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

As derivadas de qualquer função em relação às coordenadas globais podem ser calculadas por derivadas em coordenadas locais, na forma

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{J} \left(\frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial f}{\partial \xi} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) \quad (3.61)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{J} \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial f}{\partial \xi} - \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) \quad (3.62)$$

As integrais em contornos podem ser transformadas na forma

$$\int_s f dx_i = \int_s f \frac{\partial x_i}{\partial \xi_j} d\xi_j \quad (3.63)$$

sendo

$$\xi_j = \begin{cases} \xi & \text{para } j = 1 \\ \eta & \text{para } j = 2 \end{cases} \quad (3.64)$$

Todas as transformações de coordenadas, para facilitar a integração das equações, são feitas, localmente, em nível de elemento; diferente do que é feito no método de volumes finitos (FVM) em coordenadas generalizadas; em que as equações governantes; escritas em coordenadas cartesianas, são transformadas para equações em coordenadas generalizadas. O cálculo das matrizes pode ser feito elemento por elemento e montando-se a matriz global no final para se obter a solução do sistema completo. As integrais em contornos de subvolumes de controle são efetuadas usando 3 pontos de Gauss e em áreas de subvolumes de controle dentro de elementos finitos, 9 pontos de Gauss.

As matrizes convectivas e difusivas, para um elemento, são construídas na forma:

$$\begin{aligned}
C(1, \beta) &= -FLUC(1, \beta) + FLUC(12, \beta) \\
C(2, \beta) &= FLUC(1, \beta) + FLUC(2, \beta) - FLUC(3, \beta) \\
C(3, \beta) &= FLUC(3, \beta) + FLUC(4, \beta) \\
C(4, \beta) &= -FLUC(4, \beta) + FLUC(5, \beta) + FLUC(6, \beta) \\
C(5, \beta) &= -FLUC(6, \beta) + FLUC(7, \beta) \\
C(6, \beta) &= -FLUC(7, \beta) - FLUC(8, \beta) + FLUC(9, \beta) \\
C(7, \beta) &= -FLUC(9, \beta) - FLUC(10, \beta) \\
C(8, \beta) &= FLUC(10, \beta) - FLUC(11, \beta) + FLUC(12, \beta) \\
C(9, \beta) &= -FLUC(2, \beta) - FLUC(5, \beta) + FLUC(8, \beta) + FLUC(11, \beta)
\end{aligned} \tag{3.65}$$

$$\begin{aligned}
K(1, \beta) &= -FLUD(1, \beta) + FLUD(12, \beta) \\
K(2, \beta) &= FLUD(1, \beta) + FLUD(2, \beta) - FLUD(3, \beta) \\
K(3, \beta) &= FLUD(3, \beta) + FLUD(4, \beta) \\
K(4, \beta) &= -FLUD(4, \beta) + FLUD(5, \beta) + FLUD(6, \beta) \\
K(5, \beta) &= -FLUD(6, \beta) + FLUD(7, \beta) \\
K(6, \beta) &= -FLUD(7, \beta) - FLUD(8, \beta) + FLUD(9, \beta) \\
K(7, \beta) &= -FLUD(9, \beta) - FLUD(10, \beta) \\
K(8, \beta) &= FLUD(10, \beta) - FLUD(11, \beta) + FLUD(12, \beta) \\
K(9, \beta) &= -FLUD(2, \beta) - FLUD(5, \beta) + FLUD(8, \beta) + FLUD(11, \beta)
\end{aligned} \tag{3.66}$$

Nas equações (3.54) e (3.55) os fluxos convectivos e difusivos são definidos por

$$FLUC(ip, \beta) = \int_{ip} \rho \left(U \frac{\partial y}{\partial \eta} - V \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) N_\beta d\eta + \int_{ip} \rho \left(U \frac{\partial y}{\partial \xi} - V \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) N_\beta d\xi \tag{3.67}$$

$$FLUD(ip, \beta) = \int_{ip} \mu_e \left(\frac{\partial N_\beta}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial N_\beta}{\partial y} \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) d\eta + \int_{ip} \mu_e \left(\frac{\partial N_\beta}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial \xi} - \frac{\partial N_\beta}{\partial y} \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) d\xi \tag{3.68}$$

sendo ip um determinado contorno de um sub-volume de controle dentro de um elemento, de acordo com a figura 3.5.

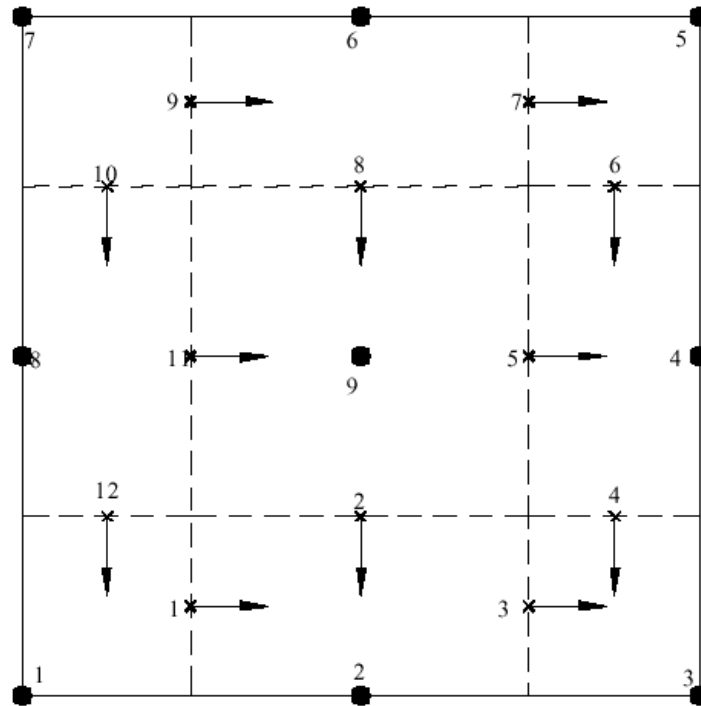


Figura 3.5 - Elemento subdividido em volumes de controle

A matriz de massa é calculada de forma consistente na forma:

$$M(\alpha, \beta) = \int_{A_e} \rho N_\alpha N_\beta J d\xi d\eta \quad (3.69)$$

O arranjo das variáveis dentro de um elemento é mostrado na Figura 3.7. Para os campos de velocidade e pressão, cada elemento conterà 22 graus de liberdade. Em cada nó de canto existirão 3 graus de liberdade: duas componentes de velocidades e uma de pressão. Nos demais nós existirão somente duas componentes de velocidade.

As matrizes nos elementos são calculadas durante o processo de solução num processo iterativo devido às não linearidades dos termos convectivos. Parte dos cálculos requeridos tais como valores das funções de interpolação e suas derivadas em pontos de Gauss, nas áreas e contornos de subvolumes de controle, são feitos uma única vez e armazenados em arquivos temporários que são lidos durante o processo de cálculo das matrizes dos elementos. Este procedimento tem por objetivo reduzir o tempo computacional para compensar em parte o tempo gasto pelo método frontal, o qual faz leitura de dados em disco. Para um sistema computacional com memória de processamento suficientemente grande, poder-se-ia armazenar os dados na própria memória o que aceleraria em muito o processo de cálculo. O método de solução, descrito no próximo item, requer a leitura de muitos dados no disco

rígido, o que eleva o tempo total de processamento. Entretanto, ele é apropriado para sistemas de pequeno porte, em que a capacidade de memória possa ser ainda uma limitação.

3.5.5 Solução do Sistema de Equações Discretizadas

Neste trabalho foi adotada a seguinte estratégia de solução:

(i) os campos de velocidades e pressão são calculados resolvendo-se as equações do movimento e de Poisson para pressão;

(ii) obtido o campo de velocidades, resolve-se uma equação de transporte para cada escalar separadamente.

O método de solução adotado foi o método frontal, descrito por Taylor e Hughes (1981). Neste método, o primeiro objetivo é a eliminação de variáveis logo após sua introdução, via equações apropriadas, dentro da matriz global. Imediatamente após todas as contribuições de todos os elementos para um nó particular terem sido montadas, as variáveis correspondentes e associadas com aquele nó são eliminadas. Desta forma, a matriz completa nunca é montada, visto que todas as equações reduzidas podem ser eliminadas da memória e armazenadas em disco. As equações mantidas na memória, com os nós e variáveis correspondentes, são denominadas *fronte* e o número de variáveis desconhecidas dentro do fronte é denominado largura do *fronte*. A largura do fronte muda continuamente visto que, uma vez que todas as contribuições para um nó tenham sido completamente somadas, a redução da equação correspondente, baseada sobre um pivoteamento diagonal, pode ser executada. Nos métodos de solução para matrizes simétricas, apenas a triangular superior da matriz é armazenada em qualquer tempo. Entretanto, para matriz global assimétrica, que é o caso do presente estudo, um procedimento diferente é adotado. Uma área de memória pré-assinalada para a matriz global é preenchida de contribuições de elementos; a maior entrada diagonal nesta área pré-assinalada de memória é encontrada e usada como pivô num processo de eliminação direta de Gauss. Quando o número máximo pré-determinado de equações é eliminado, as equações reduzidas correspondentes são escritas no disco e mais elementos e equações correspondentes introduzidos na memória. O requerimento mínimo de memória para matrizes assimétricas é quase duas vezes aquele requerido para matrizes simétricas. As equações, nós e variáveis correntemente na memória são denominados *ativos*, aqueles guardados em disco são denominados *desativados* e aqueles para serem ainda introduzidas na memória são denominados *inativos*, conforme a Figura 3.6. Campos-Silva (1998) modificou

para elementos com nove nós e escoamentos laminares, a rotina criada por Taylor e Hughes (1981). Neste trabalho, essa rotina foi modificada e adaptada de forma a modelar o efeito da turbulência.

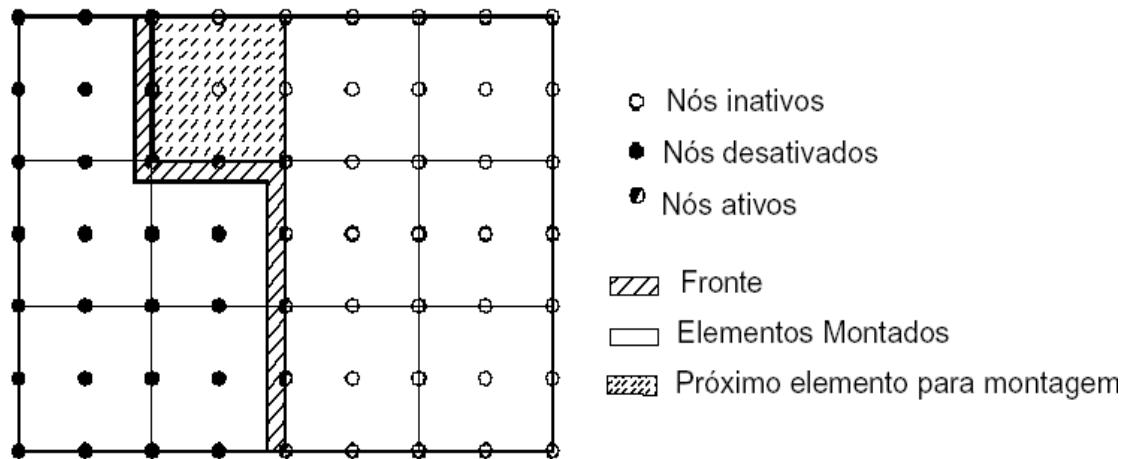


Figura 3.6 - Definição de frente e nomenclatura usada no método frontal

O método frontal tem a vantagem de que em nenhum instante a matriz global necessita ser montada completamente, sendo que a maior matriz montada é definida por um parâmetro que define o tamanho do frente (TAYLOR e HUGHES, 1981). Desta forma, a solução do sistema pode ser realizada em computadores com memórias relativamente pequenas e com média capacidade de armazenamento em disco. O preço a se pagar é um tempo maior para solução, visto que durante o processamento serão lidos dados armazenados em disco e este processo ainda é muito lento. Este método também pode ser adaptado para uma solução segregada, em que cada equação é resolvida separadamente. No caso de problemas tridimensionais, uma solução segregada pode ser mais efetiva em termos de armazenamento de variáveis na memória do computador.

O método frontal de solução foi escolhido também pelo enfoque que se adotou o qual é baseado principalmente no método de montagem da matriz global como no método de elementos finitos de Galerkin. Na maioria dos trabalhos sobre o método de elementos finitos por volumes de controle (CVFEM), o enfoque é similar ao do método de volumes finitos, em que o acoplamento pressão-velocidade é resolvido por métodos baseados no método SIMPLE (PATANKAR, 1980). Assim, soluções segregadas são mais utilizadas. Nos métodos de volumes finitos, os sistemas resultantes, geralmente, são matrizes com três, cinco ou nove diagonais, depende de quantos nós vizinhos são considerados, para calcular os fluxos para os volumes de controle.

Para se identificar cada variável utiliza-se dois vetores: um que contém o número de graus de liberdade por nó e outro que identifica o número do primeiro grau de liberdade em cada nó. Na solução das equações do movimento, o primeiro grau de liberdade corresponde à componente de velocidade U ; o segundo à pressão se for um nó de canto e o terceiro grau de liberdade corresponde à velocidade V . Na solução da equação de grandezas escalares existirá um único grau de liberdade por nó e o processo de montagem das matrizes dos elementos bem como da matriz global é mais simples. Cada nó local num elemento tem um número global que é dado pela matriz de conectividade definida quando se gera a malha. Taylor e Hughes (1981) mostram, numa maneira bem clara, o processo de montagem das matrizes nos elementos e da matriz global.

No presente trabalho, como se adotou o processo de solução misto, isto é, existem mais nós de velocidade do que de pressão, tem-se número de graus de liberdade variável por nó como está mostrado na figura 3.7.

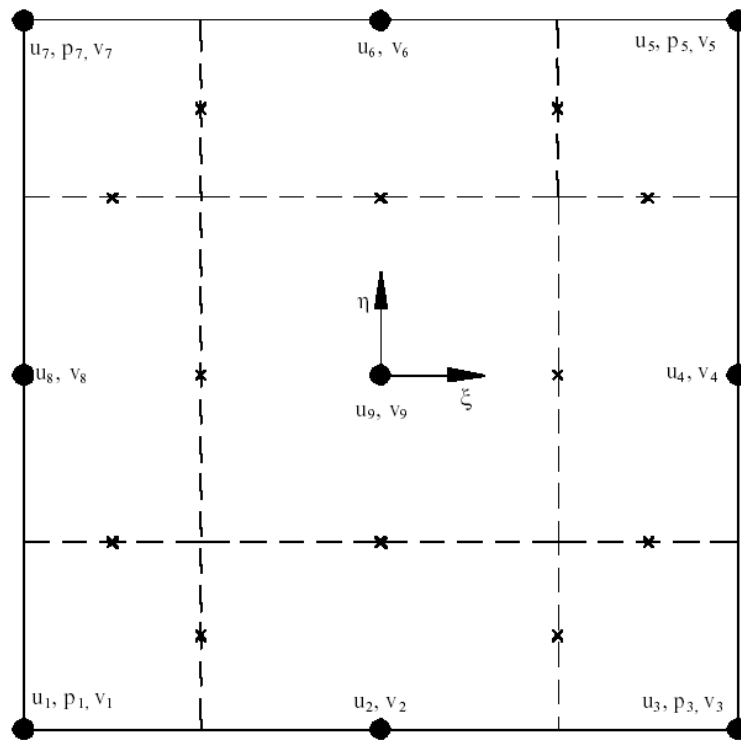


Figura 3.7 - Arranjo das variáveis u, v, p , localmente num elemento.

No contexto global uma variável é identificada por um índice definido na forma, Taylor e Hughes (1981), figura 3.8:

```

itotu = nadf $m$ (no)
itotv = nadf $m$ (no) + nodf $m$ (no) - 1
if (nodf $m$ (no).eq.3) → itotp = nadf $m$ (no) + nodf $m$ (no) - 2

```

Figura 3.8 - Ilustração da formação do índice das variáveis na matriz global

Na figura 3.8, $nadf $m$$ é um vetor que contém o número global do primeiro grau de liberdade em cada nó, que corresponde a velocidade u ; $itotv$ corresponde ao número global do terceiro grau de liberdade em nós onde são calculados (u,v,p) ou ao número global do segundo grau de liberdade onde são calculados (u,v) . $itotp$ representa a variável pressão em nós onde esta é calculada.

No presente caso, o vetor $nadf $m$$ é formado da maneira ilustrada na Figura 3.9, enquanto que o vetor $nodf $m$$, para um elemento quadrático qualquer, pode ser formado seguindo o procedimento mostrado na Figura 3.10.

```

nadf $m$ (1)=1
do ipoin=2, npoin
nadf $m$ (ipoin)=nadf $m$ (ipoin-1) + nodf $m$ (ipoin-1)

```

Figura 3.9 - Formação do vetor contendo o índice global do primeiro grau de liberdade por nó.

```

ndof $m$ =número máximo de graus de liberdade num nó
do ielem=1, nelem
do inodp=1, nnodp-2, 2
nodf $m$ (lnods(ielem, inodp))=ndof $m$ 
nodf $m$ (lnods(ielem, inodp+1))=ndof $m$ -1

```

Figura 3.10 - Formação do vetor contendo o número de graus de liberdade por nó.

Na Figura 3.10, $ndof $m$$ =3 para solução do escoamento, $nelem$ é o número de elementos na malha, $nnodp$ é o número de nós num elemento e $lnods$ é a matriz de conectividade. O critério de convergência é definido por (TAYLOR e HUGHES, 1981)

$$\frac{\phi^{k+1} - \phi^k}{\phi^{k+1}} \leq \varepsilon \quad (3.70)$$

O valor de ε pode ser definido de acordo com o grau de precisão que se deseja na solução, sendo que ϕ representa cada variável dentro do sistema global e k é a iteração no processo de solução. Em cada iteração a nova variável é atualizada usando um fator de relaxação na forma

$$\tilde{\phi}^{k+1} = relax * \phi^k + (1 - relax) * \phi^{k+1}, \quad 0 < relax < 1 \quad (3.71)$$

O valor do fator de relaxação geralmente é tomado entre 0,5 e 0,9.

3.6 Estrutura do Programa Computacional

A figura (3.11) apresenta a estrutura do programa computacional, bem como a seqüência de chamada das várias sub-rotinas, descritas resumidamente a seguir:

i) DIMENS

Nesta sub-rotina são definidas a dimensão máxima da matriz de conectividade (MELEM), o tamanho máximo do fronte (MFRON), o tamanho máximo do fronte para a pressão (MFRONP), bem como o número máximo de pontos da malha (MPOIN) e o número máximo de variáveis (MTOTV) (o número total de variáveis é calculado na sub-rotina **DINPUT**). Pode ser modificada para definir um dimensionamento dinâmico das matrizes e vetores usados no programa.

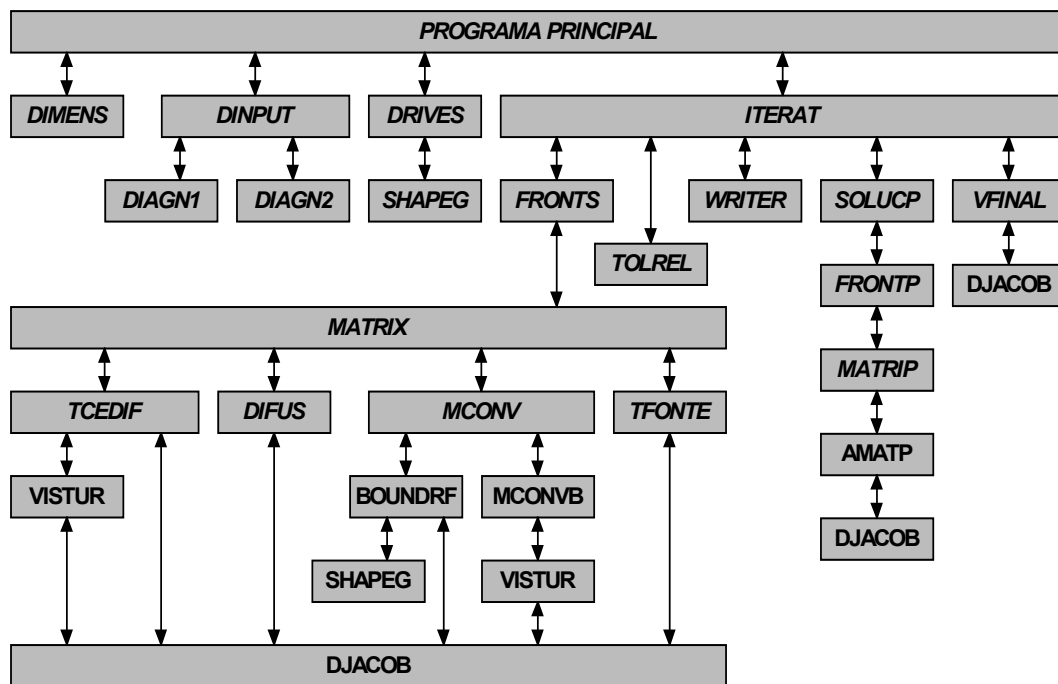


Figura 3.11 – Estrutura do programa computacional

ii) DINPUT

A sub-rotina **DINPUT** lê os dados de controle: coordenadas e numeração dos pontos nodais, numeração dos elementos na matriz de conectividade, condições de contorno e iniciais, propriedades físicas do fluido (**VISCY**, **DENSY**). Os vetores contendo o número de graus de liberdade por nó (**NEVAB**) e o número global do primeiro grau de liberdade por nó (**NDOFM2**) são também definidos nesta rotina. Nesta sub-rotina é feita também a verificação da malha bem como de outros parâmetros de entrada através de duas sub-rotinas:

- **DIAGN1**: faz a checagem da dimensão dos vetores.
- **DIAGN2**: faz a checagem da dimensão checagem de coordenadas e da matriz de conectividade.

iii) DRIVES

Nesta sub-rotina calcula-se as funções de interpolação e suas derivadas em todos os pontos de Gauss em áreas (9 pontos) e contornos (3 pontos) dos subvolumes de controle dentro dos elementos de referência (9 nós para velocidades e outros escalares, 4 nós para pressão) onde as integrações são realizadas, através da sub-rotina **SHAPEG**. Estes dados são armazenados em arquivos no disco rígido e são lidos no cálculo das matrizes dos elementos.

iv) ITERAT

Esta sub-rotina faz a chamada da sub-rotina principal **FRONTS** para solução do problema e verifica se as variáveis calculadas estão dentro de uma tolerância especificada (**TOLER**) por um processo iterativo através da sub-rotina **TOLREL**. Os resultados são impressos pela sub-rotina **WRITER**. A sub-rotina **FRONTS** formula a matriz global, impõe as condições de contorno e resolve o sistema resultante de equações usando o método frontal não simétrico de solução. **FRONTS** chama a sub-rotina **MATRIX** que calcula as matrizes dos elementos de acordo com o modelo numérico proposto e o vetor do lado direito do sistema de equações. **MATRIX** por sua vez chama várias outras sub-rotinas para cálculo dos vários termos das equações.

As sub-rotinas chamadas por **MATRIX** são:

- **TCEDIF**: calcula os fluxos convectivos e difusivos nos contornos dos subvolumes de controle e, por sua vez, chama a sub-rotina **VISTUR** que calcula a viscosidade turbulenta;
- **DIFUS**: monta a matriz dos termos difusivos e calcula a matriz de massa;
- **MCONV**: monta a matriz dos termos convectivos;
- **TFONTE**: calcula os vetores dos termos fontes das equações de quantidade de movimento.

v) **SOLUCP**

De maneira similar à sub-rotina **ITERAT**, a sub-rotina **SOLUCP** resolve a equação de Poisson para o 2º passo de tempo. Chama **FRONTP**, a qual tem a mesma função da sub-rotina **FRONTS**; **FRONTP** chama **MATRIP**, que por sua vez chama a sub-rotina **AMATP**, para calcular as matrizes dos termos de pressão.

vi) **DJACOB**

A sub-rotina **DJACOB**, chamada em várias sub-rotinas, calcula o jacobiano da transformação das integrais no elemento real para o elemento de referência.

vii) **VFINAL**

Esta subrotina faz a correção da velocidade para o 3º passo de tempo.

4

RESULTADOS

Escoamento numa Cavidade Quadrada com Tampa Móvel (*Lid-Driven Cavity*)

Foi simulado um caso teste implementação do CVFEM com a técnica de passo no; o qual forneceu informações sobre a técnica de passo fracionado na metodologia implementada, suas vantagens e desvantagens e como proceder em trabalhos futuros, em outros tipos de escoamentos.

Assim, o problema teste realizado foi o da cavidade quadrada com tampa móvel, conhecido na literatura como *lid-driven cavity*, caracterizado pela recirculação numa área confinada. Este é um problema bastante importante para a validação de códigos computacionais onde as principais dificuldades encontradas em soluções numéricas em mecânica dos fluidos se fazem presentes junto com uma simplicidade geométrica que facilita sua implementação. Trata-se de um clássico teste de interesse permanente na solução computacional das equações de Navier-Stokes, que permite fazer comparações qualitativas e quantitativas entre os diferentes métodos numéricos, tendo sido explorado por vários autores (SMITH e KIDD, 1975; GHIA et al., 1982; KIM e MOIN, 1985; KU et al., 1988; SOH e GOODRICH, 1988; BOTELLA e PEYRET, 1998; BRUNEAU e SAAD, 2005). O *benchmark* (GHIA et al., 1982) foi usado para validar os resultados.

O problema consiste numa cavidade quadrada com a tampa móvel na direção horizontal à esquerda e velocidade constante, em um escoamento de fluido newtoniano sobre o sistema de coordenadas cartesianas bidimensionais em regime transiente, com altura característica do domínio, L_y , comprimento característico do domínio, L_x , e velocidade característica do campo de velocidade, v_0 , conforme ilustra a Fig. 4.1.

A condições de contorno para as velocidades são dadas por:

$$\begin{array}{ll} U=0 \text{ e } V=0 & \text{em } X=0 \\ U=V=0 & \text{em } Y=0 \end{array}$$

$$\begin{aligned} U=1; V=0 & \text{ em } Y=1 \\ U=V=0 & \text{ em } X=1 \end{aligned}$$

Devido ao fato do escoamento ser incompressível, a condição de contorno para a pressão é considerada em apenas um ponto na metade da parede inferior:

$$P=0 \quad \text{em} \quad X=0,5 \text{ e } Y=0$$

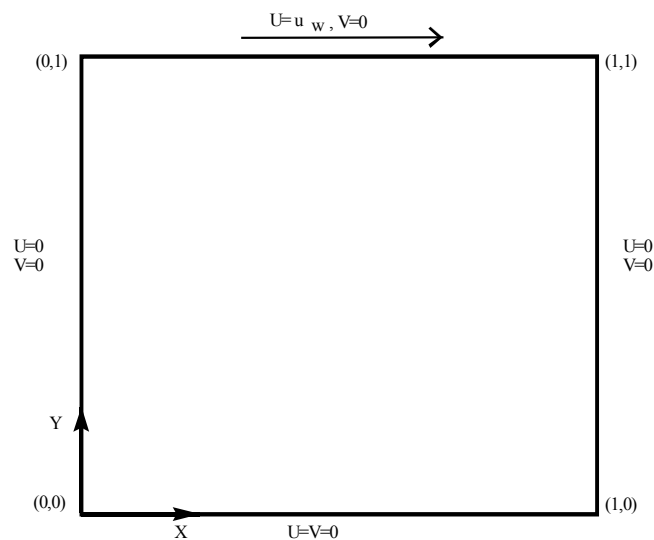


Figura 4.1 – Esquema da cavidade bidimensional

Foi utilizada uma malha regular, não uniforme, gerada usando o pré processador ANSYS 6.0[®], de 40x40 elementos, o que equivale a 81x81 nós ao longo dos eixos coordenados.

As Figuras 4.2 a 4.9 ilustram a evolução dos componentes de velocidade U e V no tempo, para número de Reynolds igual a 400 de duas implementações da técnica de passo fracionado que foram validados quando comparados com Lima (2005). Na primeira implementação, denominada de Método 1, no passo 1, a velocidade intermediária foi avançada de forma explícita. A condição de contorno para solução da equação de Poisson da pressão foi de primeiro tipo (p nulo em um dado ponto). Na segunda implementação, denominada de método D^* , no passo 1, o termo difusivo foi discretizado de forma implícita e condição de contorno para solução da equação de Poisson da pressão foi de segundo tipo (gradiente nulo de pressão nos contornos).

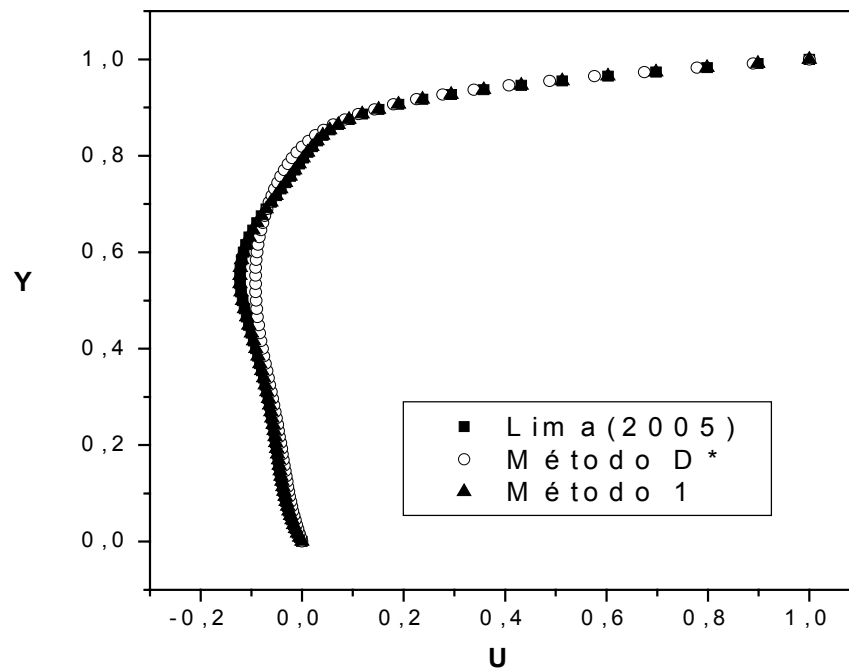


Figura 4.2 – Velocidade U ao longo da linha central vertical da cavidade no tempo 3.0

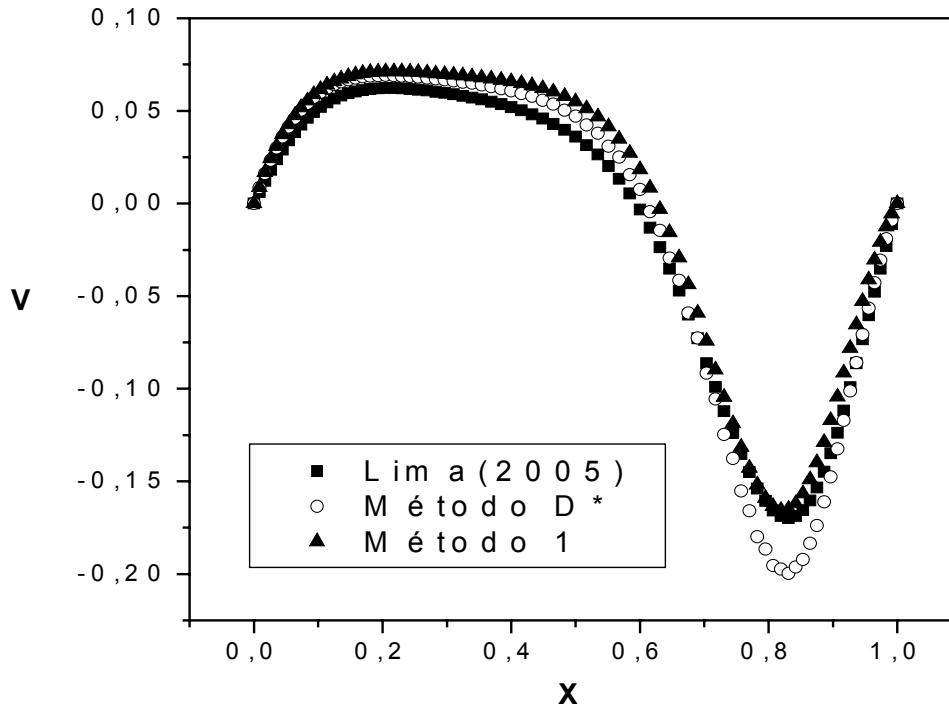


Figura 4.3 – Velocidade V ao longo da linha central horizontal da cavidade no tempo 3.0

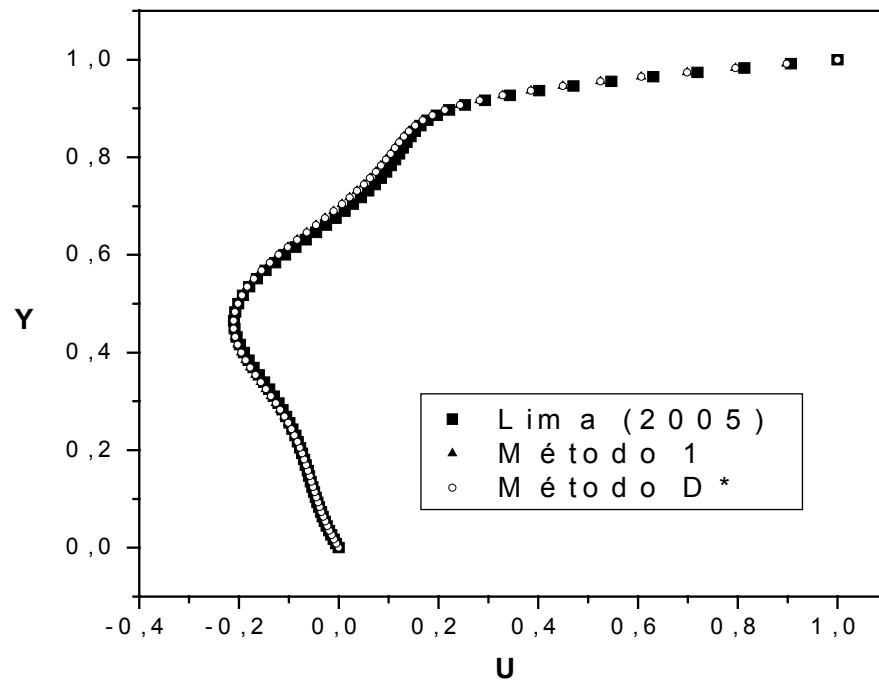


Figura 4.4 – Velocidade U ao longo da linha central vertical da cavidade no tempo 5.0

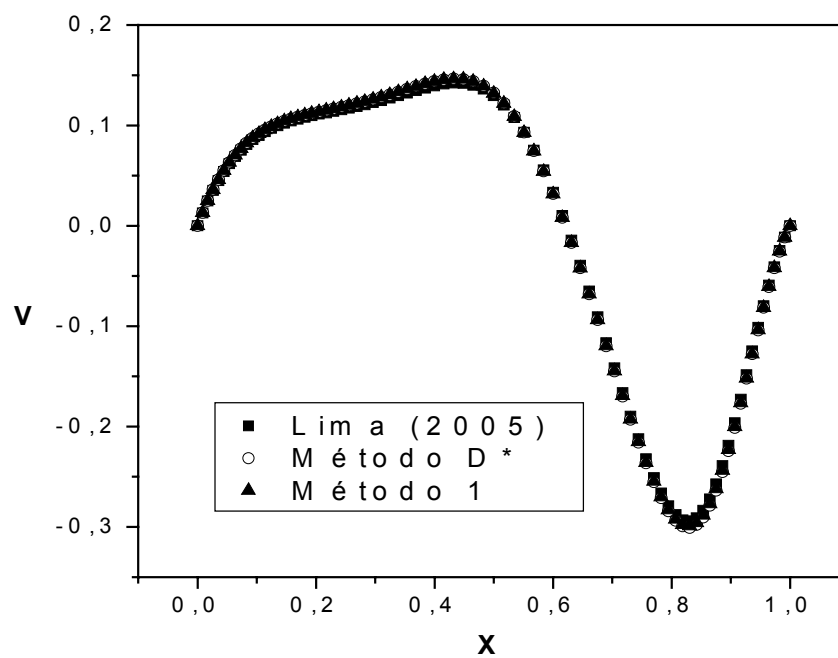


Figura 4.5 – Velocidade V ao longo da linha central horizontal da cavidade no tempo 5.0

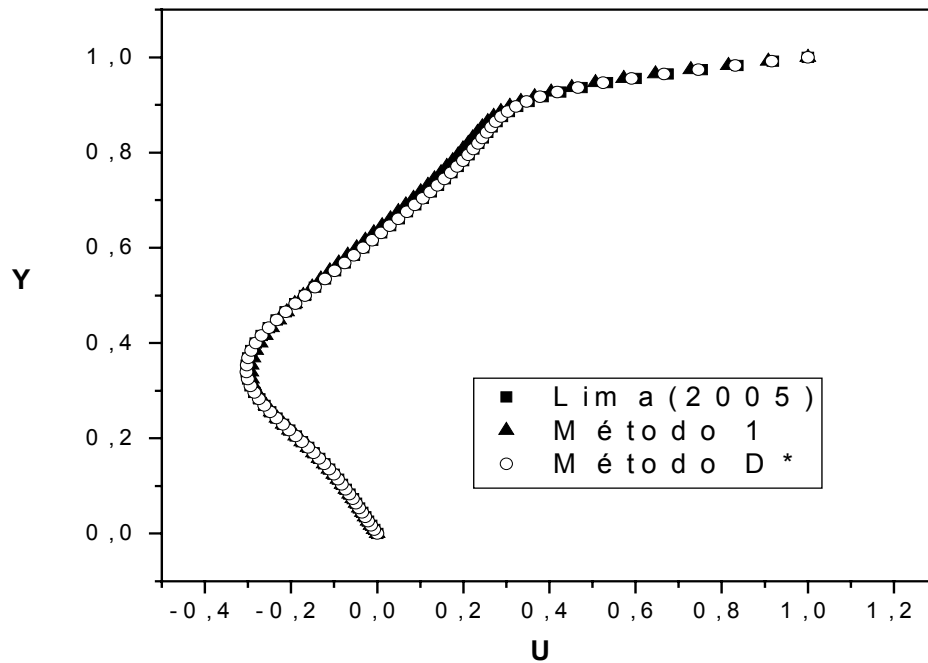


Figura 4.6 – Velocidade U ao longo da linha central vertical da cavidade no tempo 10.0

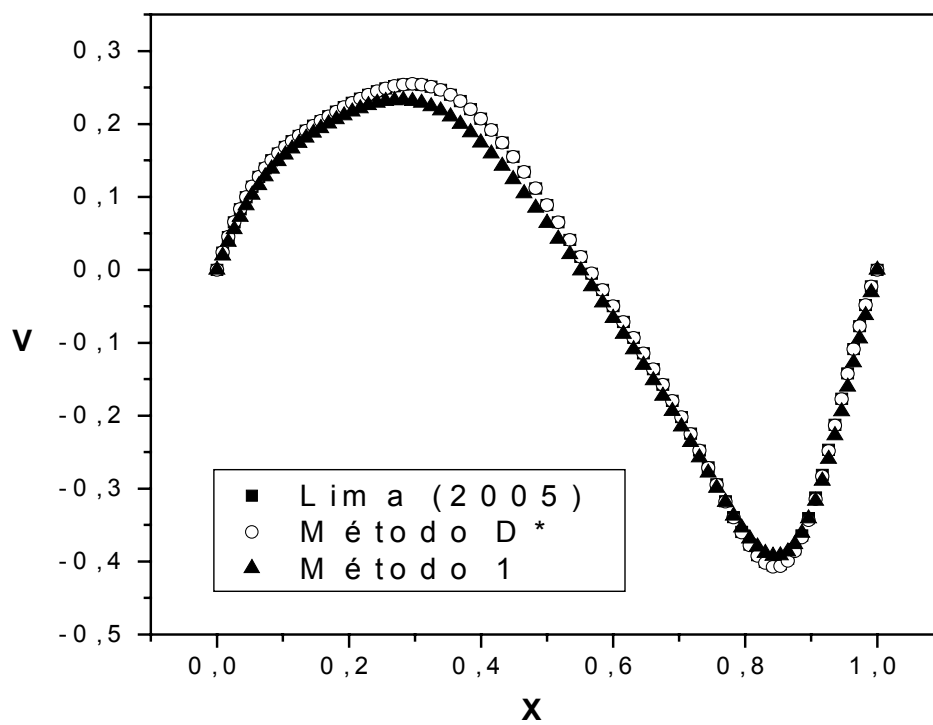


Figura 4.7 – Velocidade V ao longo da linha central horizontal da cavidade no tempo 10.0

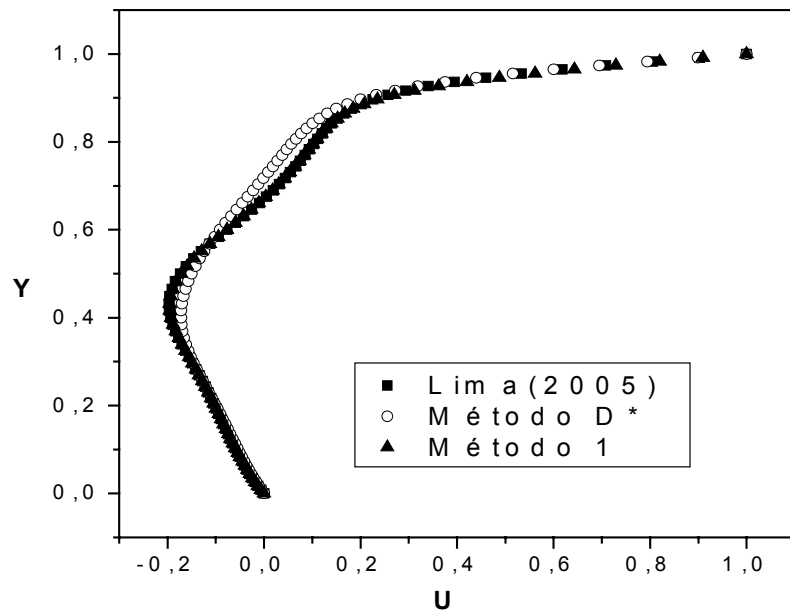


Figura 4.8 – Velocidade U ao longo da linha central vertical da cavidade no tempo 15.0

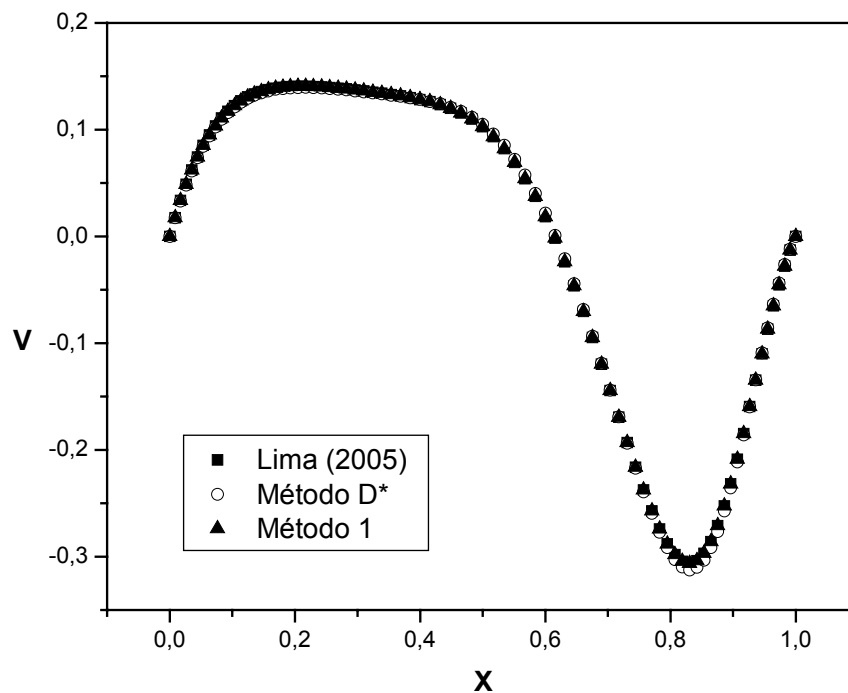


Figura 4.9 – Velocidade V ao longo da linha central horizontal da cavidade no tempo 15.0

No caso do escoamento com baixo número de Reynolds, os resultados concordaram de forma satisfatória com os resultados de Lima (2005).

As Figuras 4.10 a 4.12 mostram as linhas de corrente para diferentes instantes de tempo, para a versão D*. As linhas de corrente são obtidas da solução, pelo CVFEM, da seguinte equação

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \quad (4.1)$$

Em todas as paredes, foi atribuído valor nulo para a função de corrente. As regiões de recirculação, nos cantos inferiores da cavidade, são chamados de *vórtices secundários*. Analisando os resultados para as linhas de corrente, obtidas para números de $Re=400$, observa-se, através dos gráficos das referidas figuras, uma boa concordância com o resultado esperado e pode-se constatar que o método numérico simulou de maneira satisfatória as características esperadas do escoamento.

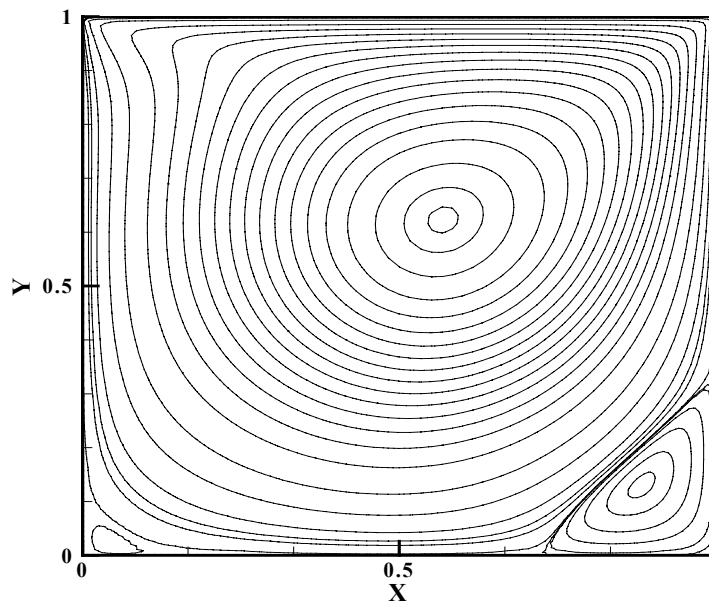


Figura 4.10 – Linhas de corrente no instante $t=11.5$ para $Re = 400$

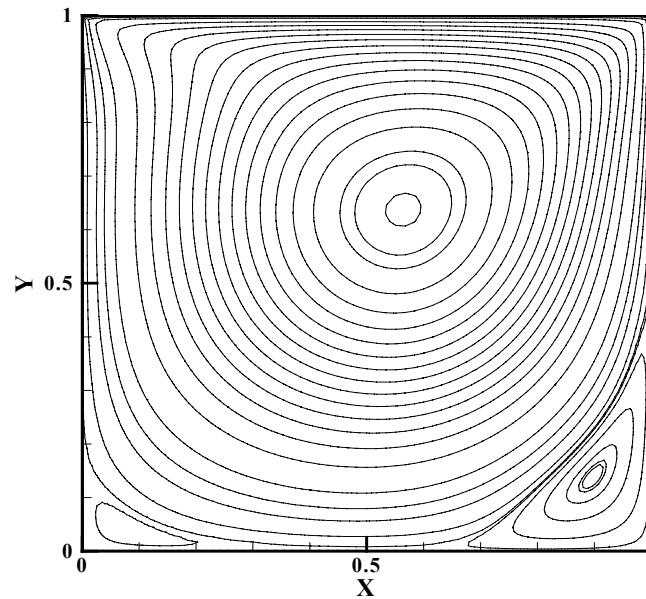


Figura 4.11 – Linhas de corrente no instante $t=13.2$ para $Re = 400$

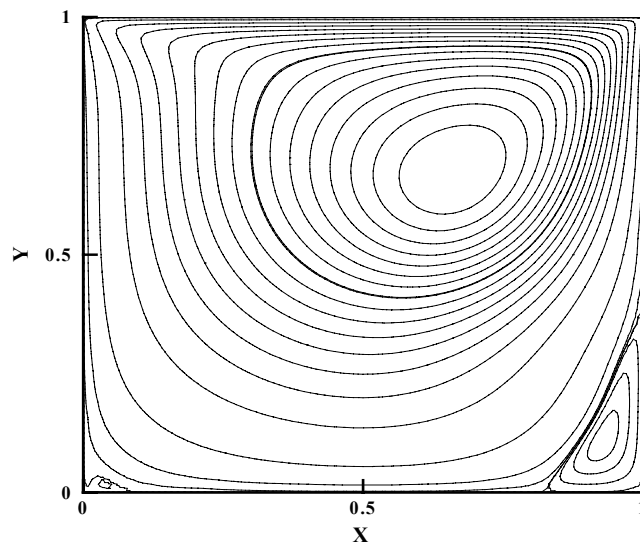


Figura 4.12 – Linhas de corrente no instante $t=15.0$ para $Re=400$

Estes testes preliminares apontam a validade das implementações.

As Figuras 4.13 e 4.14 ilustram os perfis de velocidade U e V , para número de Reynolds igual a 400, da implementação da técnica de passo fracionado do método 1, descrito anteriormente, para regime permanente. Os resultados são comparados com Ghia et al. (1982). Observa-se uma certa discrepância entre os resultados o que deverá ser investigado

em trabalhos futuros. Esta discrepância entre os resultados pode ter sido alguma anomalia do CVFEM com a técnica de passo fracionado, Método 1.

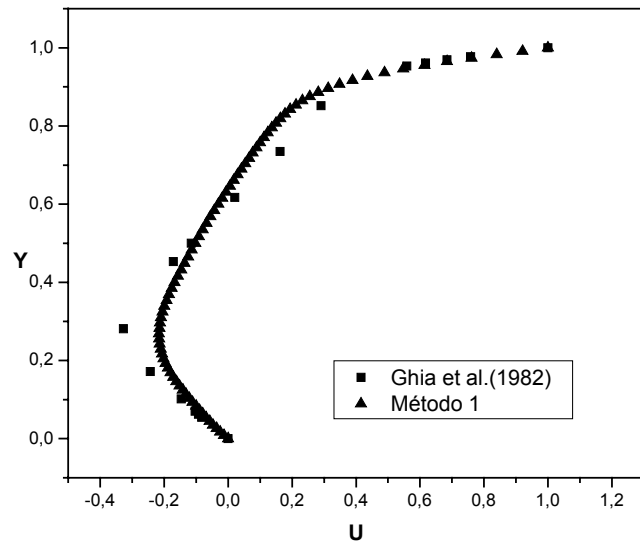


Figura 4.13 – Velocidade U ao longo da linha central vertical da cavidade.

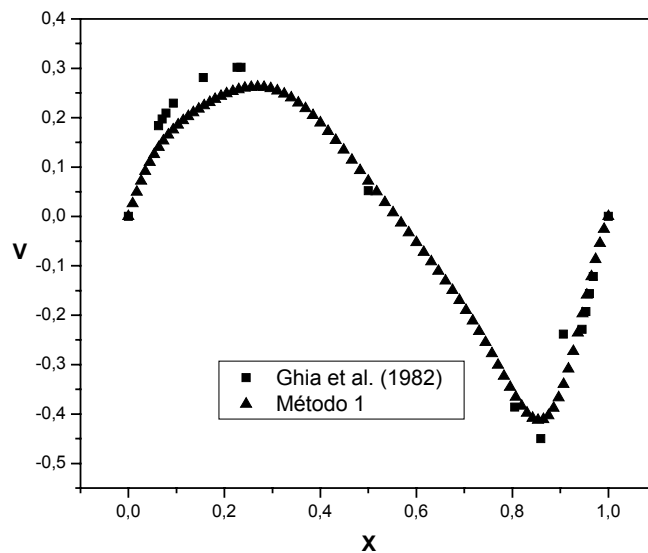


Figura 4.14 – Velocidade V ao longo da linha central horizontal da cavidade.

As Figuras 4.15 e 4.16 ilustram os perfis de velocidade U e V , para número de Reynolds igual a 400, da implementação da técnica de passo fracionado do método D^* , descrito anteriormente, para regime permanente. Os resultados são comparados com Ghia et

al. (1982). Apesar, de alguma instabilidade próximo á parede superior, os resultados do Método D* parecem concordar melhor com os resultados de Ghia et al. (1982) do que os resultados do Método 1.

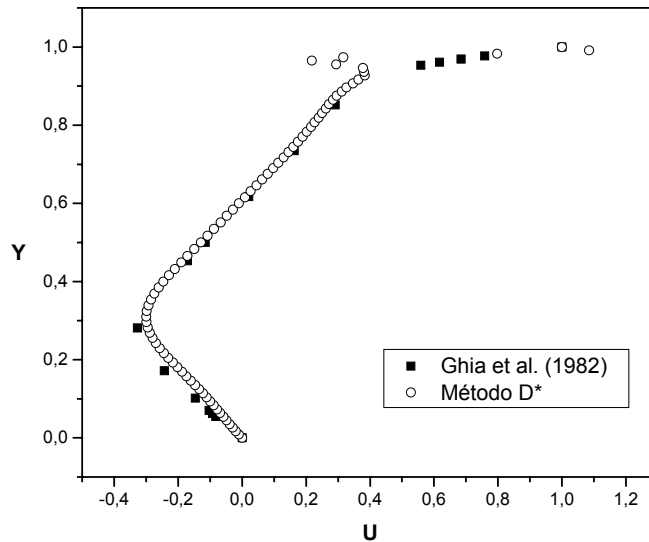


Figura 4.15 – Velocidade U ao longo da linha central vertical da cavidade

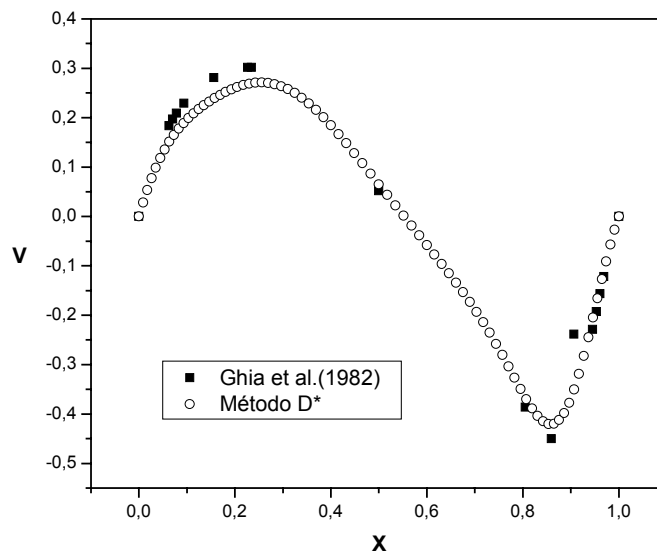


Figura 4.16 – Velocidade V ao longo da linha central vertical da cavidade

As Figuras 4.17 e 4.18 ilustram os perfis de velocidade U e V para número de Reynolds igual a 1000, da implementação da técnica de passo fracionado do método 1, descrito anteriormente, para regime permanente. Os resultados são comparados com Ghia et

al. (1982). Observa-se que próximo ao ponto de inflexão da velocidade os valores foram subestimados no Método 1. Os resultados do componente V de velocidade concordam melhor.

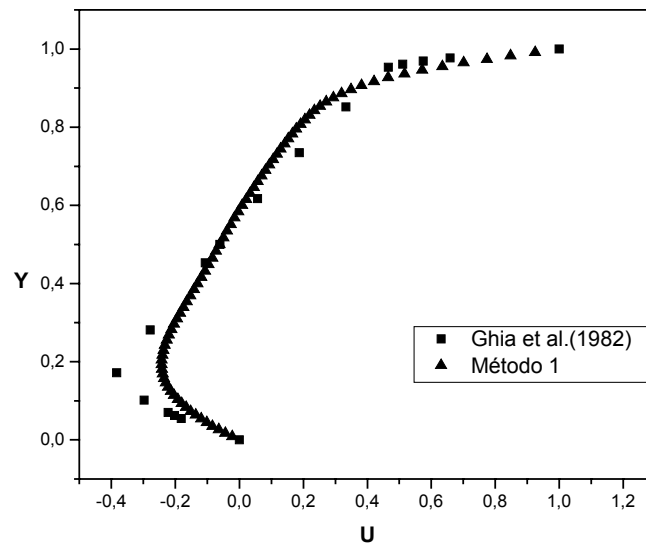


Figura 4.17 – Velocidade U ao longo da linha central vertical da cavidade

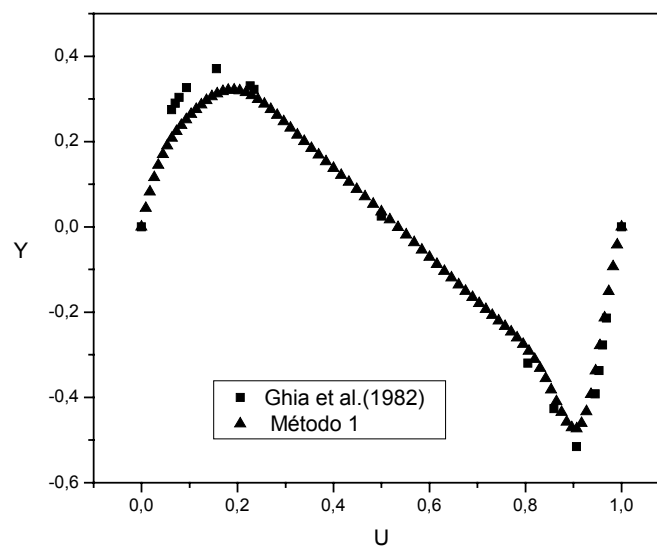


Figura 4.18 – Velocidade V ao longo da linha central horizontal da cavidade

A Figuras 4.19 e 4.20 ilustram os perfis de velocidade U e V para número de Reynolds igual a 1000 da implementação da técnica de passo fracionado do métodos D^* , descrito anteriormente, para regime permanente. Os resultados são comparados com Ghia et al.

(1982). Os resultados do Método D* apresentaram melhor concordância com os resultados e Ghia et. al. (1982) do que o Método 1. Para números de Reynolds relativamente baixos os resultados foram satisfatórios. Entretanto, alguns ajustes do CVFEM com a técnica de passo fracionado devem ser investigados em trabalhos futuros.

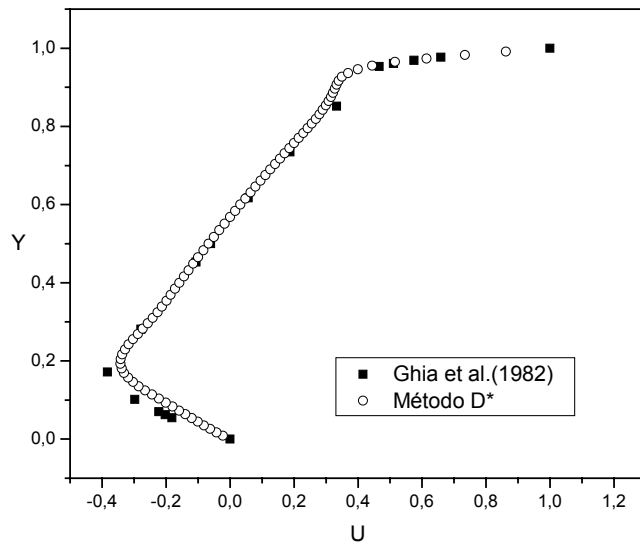


Figura 4.19 – Velocidade U ao longo da linha central vertical da cavidade

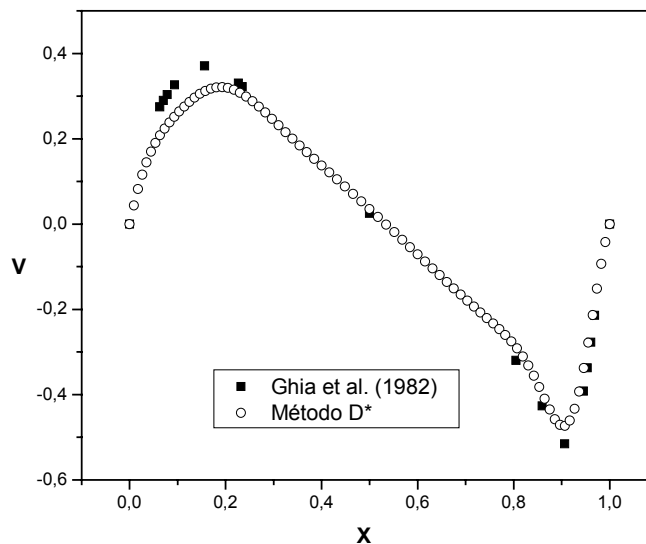


Figura 4.20 – Velocidade V ao longo da linha central horizontal da cavidade

A Figura 4.21 ilustra os perfil de velocidade U para número de Reynolds igual a 3200 das implementações da técnica de passo fracionado do método 1, descritos anteriormente,

para regime permanente. Os resultados são comparados com Ghia et al. (1982). Neste caso, os resultados estão oscilantes e não apresentaram concordância. Desta forma a influência da viscosidade de Smagorinsky, ainda tem de ser melhor investigada. Este Reynolds 3200 corresponde à faixa de transição do laminar para turbulento.

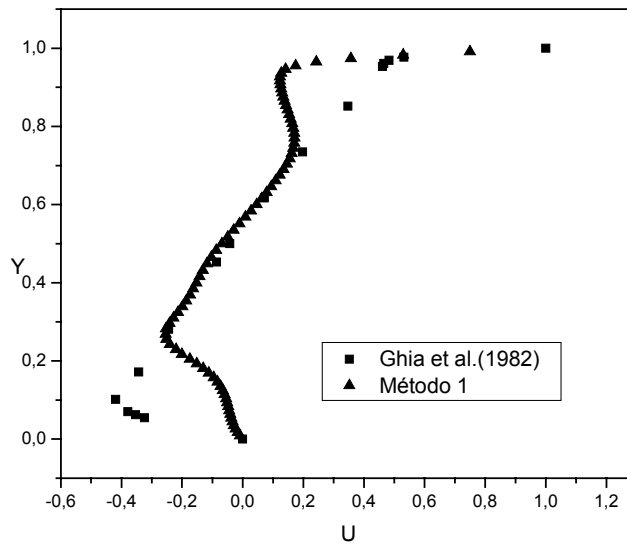


Figura 4.21 – Velocidade U ao longo da linha central vertical da cavidade

5

CONCLUSÕES E SUGESTÕES

O objetivo deste trabalho foi desenvolver, implementar e testar um modelo numérico para simular escoamentos incompressíveis de fluidos viscosos em regime transiente, usando o Método de Elementos Finitos baseado em Volumes de Controle (CVFEM) para a discretização espacial e o Método de Passo Fracionado (*time-splitting*) para a discretização temporal, levando em consideração as características parabólicas, elípticas e hiperbólicas das equações de Navier-Stokes. Foi incluída a metodologia de simulação de grandes escalas de turbulência ao modelo matemático. Foi desenvolvido um pacote computacional baseado no modelo numérico para simulação de escoamentos incompressíveis.

A técnica de passo fracionado, utilizada para a solução da equação de Navier-Stokes mostrou-se bastante complexa. Embora desde a sua origem, na década de 60, tenha sido exaustivamente estudada na literatura da CFD e várias implementações tenham sido propostas, estudos envolvendo sua fundamentação teórica e aspectos de sua aplicação continuam ainda em andamento, conforme trabalhos muito recentes como os de Blasco e Codina (2004), Vijalapura (2005) e Cenedese (2005). A técnica de passo fracionado possui características únicas quando comparadas com todos os outros métodos para a solução numérica das equações de Navier-Stokes (QUARTAPELLE, 1993). Uma delas é o fato de que as condições de contorno impostas na fase incompressível do cálculo são diferentes dependendo da forma assumida pelas equações e do tipo de discretização espacial adotada. Basicamente, faz-se necessário distinguir se a representação discreta é tal que a variável pressão está ou não no contorno. Se a pressão é definida no contorno, uma condição de contorno adicional é requerida para determinar o valor do contorno desta variável. A outra alternativa é quando a variável pressão não está definida no contorno o que ocorre, por exemplo, quando utilizamos aproximações com elementos finitos representando o campo pressão por meio de um polinômio contínuo por partes e que seja descontínuo nos contornos.

A escolha do problema da cavidade com tampa deslizante para o teste do método foi devido a fato dele atender às restrições nos contornos do domínio, além do fluxo de massa ser

nulo através das paredes. Com efeito, este problema enquadra-se no restrito conjunto de problemas que satisfaz as restrições nos contornos do domínio para a aplicação do método.

Neste trabalho, num dos passos da metodologia o campo de velocidades da equação de Navier-Stokes é obtido com a correção do campo de velocidades obtido através da solução da *equação de Burges* que é a versão simplificada das equações de Navier-Stokes para os casos em que o gradiente da pressão pode ser desprezado. No caso-teste *lid-driven cavity*, esta equação produz um campo não-solenoidal, permitindo fazer, na região do escoamento próximo às paredes inferior e superior, adjacentes à parede que contém a tampa deslizante, uma análise do divergente, uma vez que as derivadas nesta região apresentam valores mais significativos devido ao fato de ocorrer uma singularidade nas condições de contorno (CENEDESE, 2005).

O teste realizado permitiu a investigação de alguns aspectos que viriam a influenciar a solução, tais como a relação entre a qualidade da solução numérica e aumento da ordem de discretização e a utilização de condições de contorno apropriadas à solução numérica da equação de Poisson para a pressão.

Futuros trabalhos poderão ser realizados a partir deste, utilizando-se formulações alternativas (RAMASWAMY, 1990; RAMASWAMY et al., 1992a,b; KIM e LEE, 2002); modificações no método de solução do sistema algébrico de equações; simulação de escoamentos em outras geometrias; utilização de malhas desestruturadas para a discretização espacial (KIM e CHOI, 2000) e ainda o cálculo de escoamentos tridimensionais. Permanece também a ser realizada a simulação de escoamentos com altos números de Reynolds para justificar e realmente testar a metodologia de simulação de grandes escalas de turbulência no modelo CVFEM proposto.

REFERÊNCIAS

ACHDOU, Y.; GUERMOND, J. L. Convergence analysis of a finite element projection/ Lagrange-Galerkin method for the incompressible Navier-Stokes equations. *SIAM Journal on numerical analysis*, v.37, n.3, p.799-826, 2000.

ARGYRIS, J.H. Energy theorems and structural analysis. *Aircraft engineering, part I*, London, v.26, 1954.

_____. Energy theorems and structural analysis. *Aircraft engineering, part II*, London, v.27, 1955.

ARMFIELD, S.; STREET, R. The fractional-step method for the Navier-Stokes equations on staggered grids: the accuracy of three variations. *Journal of computational physics*, v.153, p.660-665, 1999.

_____. Fractional step methods for the Navier-Stokes equations on non-staggered grids. *Australian & New Zealand industrial and applied mathematics journal*, v.42, p.134-156, 2000.

_____. The pressure accuracy of fractional step methods for the Navier-Stokes equations on staggered grids. *Australian & New Zealand industrial and applied mathematics journal*, v.44, p.20-39, 2003.

BAKER, A. J.; PEPPER, D. W. *Finite element 1-2-3*. Singapore: McGraw-Hill, 1991.

BELL, J.B. et al. A second-order projection method for the incompressible Navier-Stokes equations. *Journal of computational physics*, v.85, p.257-283, 1989.

BOTELLA, O.; PEYRET, R. Benchmark spectral results on the lid-driven cavity flow *Computers & Fluids*, v. 27, n. 4, p. 421-433, 1998.

- BROWN, D.L. et al. Accurate projection methods for the incompressible Navier-Stokes equations. *Journal of computational physics*, v.168, p.464-499, 2001.
- BRUNEAU, C.H; SAAD, M. The 2 D lid-driven cavity problem revisited. *Computer & Fluids*. Disponível em : <<http://www.sciencedirect.com>>. Acesso em 23 de maio de 2005.
- CAMPOS SILVA, J.B. *Simulação numérica de escoamentos de fluidos pelo método de elementos finitos baseado em volumes de controle*. Campinas, 1998. 159 p. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica/Térmica e Fluidos) - Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas.
- CENEDESE, E. *Solução das equações de Navier-Stokes e equação de Burges utilizando a técnica da transformada integral generalizada*. Ilha Solteira, 2005. 157 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica/Ciências Térmicas) - Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista.
- CHANG, W. et al. Analysis of an exact fractional step method. *Journal of computational physics*, v.180, p.183-199, 2002.
- CHORIN, A.J. Numerical solution of the Navier-Stokes equations. *Mathematics of computation*, v.22, p.745-762, 1968a.
- _____. Numerical solution of incompressible flow problems. *Studies in numerical analysis*, v.2, p.64-71, 1968b.
- _____. On the convergence of discrete approximations to the Navier-Stokes equations. *Mathematics of computation*, v.23, p.341-353, 1969.
- CLARK, T.L. Numerical simulations with a three-dimensional cloud model: lateral boundary condition experiments and multicellular severe storm simulations. *Journal of atmospheric sciences*, v.36, p. 2191-2215, 1979.
- CLOUGH, R.W. The finite finite element method in plane stress analysis. *Proceedings*, 2nd Conference on Electronic Computation, ASCE, Pittsburg, PA, 1960.
- CODINA, R. Pressure stability in fractional step finite element methods for incompressible flows. *Journal of computational physics*, v.170, p.112-140, 2001.
- CODINA, R.; BLASCO, J. Analysis of a pressure-stabilized finite element approximation of the stationary Navier-Stokes equations. *Numerische mathematik*, v.87, p.59-81, 2000a.

_____. Stabilized finite element method for the approximation for the transient Navier-Stokes equations based on a pressure gradient projection. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, v. 182, p. 277-300, 2000b.

_____. Error estimates for an operator-splitting method for incompressible flows. *Applied numerical mathematics*, v.51, n. 1, p.1-17, 2004.

DAGAN, A. Numerical consistency and spurious boundary layer in the projection method. *Computers & Fluids*, v.32, p.1213-1232, 2003.

DENARO, F.M. On the application of the Helmholtz-Hodge decomposition in projection methods for incompressible flows with general boundary conditions. *International journal for numerical methods in fluids*, v.43, p.43-69, 2003.

DHATT, G.; TOUZOT, G. *The finite element method displayed*. Chichester: John Wiley & Sons, 1984.

DICK, E. Introduction to finite element techniques in computational fluid dynamics. In: WENDT, J.F.(Ed.). *Computational fluid dynamics*. 2nd ed. Berlin: Springer-Verlag, 1996. Chap. 10, p. 230-268.

DONEA, J.; GIULIANI, S. et al. Finite element solution of the unsteady Navier-Stokes equations by a fractional-step method. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, v.30, p.53-73, 1982.

DUKOWICZ, J.K.; DVINSKY, A.S. Approximate factorization as a higher-order splitting for the implicit incompressible flow equations. *Journal of a computational physics*, v. 102, p. 336-347, 1992.

FERNANDEZ-FERIA, R.; SANMIGUEL-ROJAS, E. An explicit projection methods for solving incompressible flows driven by a pressure difference. *Computer & fluids*, v.33, p.463-483, 2004.

FINDIKAKIS, A.; STREET, R. An algebraic model for subgrid scale turbulence in stratified flows. *Journal of atmospheric science*, v.36, p.1934-1949, 1979.

FORTIN, M.; PEYRET, R.; TEMAN, R. Résolution numérique des équations de Navier-Stokes pour un fluide incompressible. *Journal de mécanique*, v.10, p.357-390, 1971.

FORTUNA, A.O. *Técnicas computacionais para dinâmica dos fluidos: conceitos básicos e aplicações*. São Paulo: Edusp, 2000.

GHIA, U. et al. High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method. *Journal of a computational physics*, v. 48, p. 387-411, 1982.

- GUERMOND, J.L.; QUARTAPELLE, L. On the approximation of the unsteady Navier-Stokes equations by finite element projection methods. *Numerische mathematik*, v.80, p.207-238, 1998.
- GUERMOND, J.L.; SHEN, J. A new class of truly consistent splitting schemes for incompressible flows. *Journal of computational physics*, v.192, p.262-276, 2003.
- HARLOW, F.; WELCH, E. Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface. *Physics of fluids*, v.8, p.2182-2189, 1965.
- HERCKERT, M.G.R.; SILVEIRA-NETO, A. *Fluidodinâmica computacional e suas aplicações*. Disponível em: <<http://alfinal.com/brasil/fluidodinamica.shtml>>. Acesso em: 16 out. 2004.
- HIRT, W.; COOK, J.L. Calculating three-dimensional flows around structures and over rough terrain. *Journal of computational physics*, v.10, p. 324-340, 1972.
- HRENNIKOV, A. Solution of problems in elasticity by the frame work method. *Journal of applied mechanics*, v.8, p.169-175, 1941.
- JANSEN, K.E. A stabilized finite element for computing turbulence. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, v.174, p.299-317, 1999.
- KARNIADAKIS, G. E. et al. High-order splitting methods for the incompressible Navier-Stokes equations. *Journal of computational physics*, v.97, p.414-443, 1991.
- KIM, D.; CHOI, H. A second-order time-accurate finite volume method for unsteady incompressible flow on hybrid unstructured grids. *Journal of computational physics*, v.162, p.411-428, 2002.
- KIM, Y.B.; LEE, M.J. Boundary-condition pairs for fractional-step method and compatibility with the pressure Poisson equation. *Computational fluid dynamics journal*, v.11, n. 3, p.323-334, 2002.
- KIM, J.; MOIN, P. Application of a fractional-step method to incompressible Navier-Stokes equations. *Journal of computational physics*, v.59, p.308-323, 1985.
- KIRIS, C.; KWAK, D. Numerical solution of incompressible Navier-Stokes equations using a fractional-step approach. *Computers & Fluids*, v.30, p.829-851, 2001.
- KOVACS, A; KAWAHARA, M. A finite-element scheme based on the velocity correction for the solution of time-dependent incompressible Navier-Stokes equations. *International journal for numerical methods fluids*, v.13, p.403-423, 1991.
- KU et al. A pseudospectral method for solution of three-dimensional incompressible Navier-Stokes equations. *Journal of computational physics*, v.70, p.439-462, 1987.

- LANGTANGEN, H.P. Numerical methods for incompressible viscous flow. *Advances in Water Resources*, v.25, p.1125-1146, 2002.
- LEE, M. J. et al. Canonical fractional-step methods and consistent boundary conditions for the incompressible Navier-Stokes equations. *Journal of computational physics*, v.168, p.73-100, 2001.
- LILLY, D. K. The representation of small-scale turbulence in numerical simulations, *Proceedings of the IBM scientific computing symposium on environmental sciences*, IBM form n.320-1951, White Plains, New York, p.195-209, 1967.
- LIMA, R. C. *Simulação de grandes escalas de escoamentos incompressíveis com transferência de calor e massa por um método de elementos finitos de subdomínio*. Ilha Solteira, 2005. 161 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica/Ciências Térmicas) - Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista.
- LÖHNER, R. Multistage explicit advective prediction for projection-type incompressible flow solvers. *Journal of computational physics*, v.195, p.143-152, 2004.
- MALISKA, C. R. *Transferência de calor e mecânica dos fluidos computacional*. Rio de Janeiro: LTC, 1995.
- NATARAJAN, R. A numerical method for incompressible viscous flow simulation. *Journal of computational physics*, v.100, p.384-395, 1992.
- ORZAG, S.A.; ISRAELI, M.; DEVILLE, M.O. Boundary conditions for incompressible Navier-Stokes equations. *Journal of science computational*, v.1, p.75-111, 1986.
- PATANKAR, S.V. *Numerical heat transfer and fluid flow*. Washington: Hemisphere, 1980.
- PEROT, J.B. An analysis of the fractional-step projection method. *Journal of computational physics*, v.108, p.51-58, 1993.
- _____. Comments on the fractional step method. *Journal of computational physics*, v.121, p.190-191, 1995.
- POZRIKIDIS, C. On the relationship between the pressure and the projection function in the numerical computation of viscous incompressible flow. *European journal of mechanics B/fluids*, v.22, p.105-121, 2003.
- QUARTAPELLE, L. *Numerical solution of the incompressible Navier-Stokes equations*. Basel: Birkhäuser Verlag, 1993.

- QUARTERONI, A. et al. Factorization methods for the numerical approximation of Navier-Stokes equations. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, v.188, p.505-526, 2000.
- RAMASWAMY, B. Finite-element solution for advection and natural convection flows. *Computers & fluids*, v.16, n.4, p.349-388, 1988.
- RAMASWAMY, B. et al. Finite-element analysis of unsteady two-dimensional Navier-Stokes equations. *Numerical heat transfer*, v.21, p.147-182, 1992a.
- _____. Semi-implicit and explicit finite element schemes for coupled fluid/thermal problems. *International journal for numerical methods in engineering*, v.34, p.675-696, 1992b.
- RAW, M. J. et al. A nine-model quadratic control-volume-based finite element for heat conduction. *Journal of spacecraft*, v. 22, n. 5, p 523-529, 1985.
- REDDY, J.N. *An introduction to the finite element method*. New York: McGraw-Hill, 1993.
- SAABAS, H. J. *A control volume finite element method for three-dimensional, incompressible, viscous fluid flow*. Montréal, 1991. 404 p. Thesis (Doctor of Philosophy/Mechanical Engineering) - Faculty of Graduate Studies and Research, McGill University.
- SCHENEIDER, G.E. (1988). Elliptic systems: finite-element method I. In: MINKOWYCZ, W. J. et al. (Ed.). *Handbook of numerical heat transfer*. New York: John Wiley & Sons, 1988. Chap. 10, p. 379-420.
- SCHENEIDER, G. E.; RAW, M. J. Control volume finite-element method for heat transfer and Fluid flow using colocated variables - 1.Computational procedure. *Numerical heat transfer*, v. 11, p. 363-390, 1987a.
- _____. Control volume finite-element method for heat transfer and Fluid flow using colocated variables - 2.Application and validation. *Numerical heat transfer*, v. 11, p. 391-416, 1987b.
- SHAANAN, S. et al. *Numerical simulation of turbulence in the presence of shear*, Thermoscience Division. Dept. Mechanical Engineering, Stanford Univ., Report TF-6, Stanford, 1975.
- SHEN, J. On error estimates of projection methods for Navier-Stokes equations: first-order schemes. *SIAM Journal on numerical analysis*, v.29, n.1, p.57-77, 1992.
- SILVEIRA NETO, A. et al. A numerical investigations of the coherent structures of turbulence

- behind a backward-facing step. *Journal of fluid mechanics*, v.256, p.227-238, 1993.
- SMITH, R. E.; KIDD, A. Comparative study of two numerical techniques for the solution of viscous flow in a driven cavity. *NASA SP-378*, p.61-82, 1975.
- SOH, W.Y.; GOODRICH, J.W. Unsteady solution of incompressible Navier-Stokes equations. *Journal of computational physics*, v.79, p.113-134, 1988.
- STRIKWERDA, J.C; LEE, Y.S. The accuracy of the fractional step method. *SIAM Journal on numerical analysis*, v.73, n.1, p.37-47, 1999.
- TAYLOR, C.; HUGHES, T.G. *Finite element programming of the Navier-Stokes equations*. Swansea: Pineridge Press Limited, 1981.
- TEJADA-MARTÍNEZ, A.E. *Dynamic subgrid-scale modeling for large-eddy simulation of turbulent flows with a stabilized finite element method*. New York, 2002. 158 p. Thesis (Doctor of Philosophy/ Applied Mechanics) – Faculty of Rensselaer Polytechnic Institute.
- TEMAM, R. *Navier-Stokes equations: theory and numerical analysis*, 3.ed. Amsterdam: North-Holland, 1984.
- _____. Remark on the pressure boundary condition for the projection method. *Theory of computational fluid dynamics*, v.3, p.181-184, 1991.
- _____. Sur l'approximation de la solution des equations de Navier-Stokes par la méthode des pas fractionnaires(I). *Archive for rational mechanics and analysis*, v.32, p.135-153, 1969a.
- _____. Sur l'approximation de la solution des equations de Navier-Stokes par la méthode des pas fractionnaires(II). *Archive for rational mechanics and analysis*, v.33, p.377-385, 1969b.
- TURNER, M.J. et al. Stiffness and deflection analysis of complex structures. *Journal of aeronautical science*, v.23, n.9, p.805-824, 1956.
- VIJALAPURA, P.K. et al. Fractional step methods for index-1 differential-algebraic equations. *Journal of computational physics*, v. 203, n 1, p. 305-320 , 2005.
- WHITE, F.M. *Mecânica dos fluidos*, 4.ed. Rio de Janeiro: McGraw-Hill, 1999.
- WILCOX, D. C. *Turbulence modeling for CFD*. California: DCW Industries, 1993.
- YANENKO, N.N. *The method of fractional-steps*. Berlin: Springer-Verlag, 1971.
- ZANG, Y. et al. A non-staggered grid, fractional step method for time-dependent incompressible Navier-Stokes equations in curvilinear coordinates. *Journal of computational physics*, v. 114, p. 18-33, 1994.

ZHU, J. The second-order projection method for the backward-facing step flow • *Journal of computational physics*, v. 117, n.2, p. 318-331, 1995.

ZIENKIEWICZ, O. C.; CHEUNG, Y. K. *The finite element method in structural and continuum mechanics*. London: McGraw-Hill, 1967.

ZIENKIEWICZ, O. C.; MORGAN, K. *Finite elements and approximations*. Singapore: John Willey & Sons, 1993.