

**UNESP**  
**Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá**

**Guaratinguetá**  
**2014**

Wagner Maciel Castilho

Espalhamento e estados ligados de partículas de spin  $1/2$  em  
um potencial degrau suave com acoplamentos  
escalar e vetorial

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Mestre em Física na área de Partículas e Campos

Orientador: Prof. Dr. Antonio Soares de Castro

Guaratinguetá  
2014

C352e Castilho, Wagner Maciel  
Espalhamento e estados ligados de partículas de spin 1/2 em um potencial degrau suave com acoplamentos escalar e vetorial / Wagner Maciel Castilho – Guaratinguetá : [s.n], 2014.  
90 f : il.  
Bibliografia: f. 79-85

Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2014.  
Orientador: Prof. Dr. Antonio Soares de Castro

1. Dirac, Equações de 2. Estados ligados (Mecânica quântica)  
I. Título

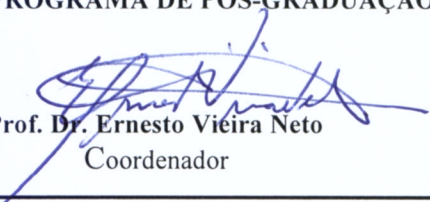
CDU 530.145(043)

*WAGNER MACIEL CASTILHO*

ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE  
“MESTRE EM FÍSICA”

PROGRAMA: FÍSICA

APROVADA EM SUA FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO

  
Prof. Dr. Ernesto Vieira Neto  
Coordenador

*BANCA EXAMINADORA:*

  
Prof. Dr. ANTONIO SOARES DE CASTRO  
Orientador / UNESP/FEG

  
MARCELO BATISTA HOTT  
UNESP/FEG

  
Prof. Dr. LUIS RAFAEL BENITO CASTRO  
Universidade Federal de Santa Catarina

*Fevereiro de 2014*

## DADOS CURRICULARES

### WAGNER MACIEL CASTILHO

NASCIMENTO 07.05.1983 / JACAREÍ-SP

FILIAÇÃO Dioscorides Castilho  
Maria Aparecida de Fátima Maciel Castilho

2005 / 2007 Curso de Graduação - Licenciatura em Física  
Centro de Tecnologia e Ciências  
Instituto Superior de Educação

2012 / 2014 Curso de Pós-Graduação em Física, nível Mestrado,  
Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá  
Universidade Estadual Paulista - UNESP, Guaratinguetá-SP  
Brasil.

Esta dissertação é dedicada aos meus filhos,  
nos quais deposito minha fé.

## AGRADECIMENTOS

Eu ofereço a minha mais profunda gratidão àqueles que participaram na culminação desta dissertação da qual estou orgulhoso. E a todos aqueles que incentivam a busca pelo tão importante conhecimento.

- À minha família: especialmente aos meus pais Dioscorides e Maria Aparecida, e ao meu irmão Rodrigo.
- À Paula Daniela da Motta Yanase por todo apoio e dedicação.
- Ao meu orientador: Antonio Soares de Castro, quem refletindo a sua alta formação acadêmica, me dá as pautas para formar a minha.
- Claudio Antonio Federico pelo incentivo em minha formação acadêmica e pela amizade que me alimenta com certezas e força.
- Alexandre David Caldeira pela amizade e incentivo ímpar em minha formação acadêmica.
- Angel Eduardo Obispo Vásquez pelo incentivo e apoio constantes.
- E por último e o mais importante, meu agradecimento a **Deus, Nosso Senhor, JEová.**

Que homem é o homem que  
não torna o Mundo melhor?



CASTILHO, W. M. **Espalhamento e estados ligados de partículas de spin 1/2 em um potencial degrau suave com acoplamentos escalar e vetorial.** 2014. 90 f. Dissertação de Mestrado em Física – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2014.

## RESUMO

Neste trabalho são analisadas as equações de Dirac e Klein-Gordon com a estrutura de Lorentz mais geral para potenciais externos em  $3 + 1$  dimensões do espaço-tempo e os correspondentes limites não-relativísticos para o potencial eletromagnético, obtendo-se as equações de Pauli para partículas de spin  $1/2$  e de Schrödinger para partículas de spin  $0$ , respectivamente. Ainda na equação de Dirac em  $1 + 1$  dimensões são discutidas as transformações: conjugação de carga, transformação quiral e transformação quiral contínua. Esta última transformação juntamente com a criação de um vínculo entre os potenciais escalar e vetorial permitiram desacoplar e mapear as soluções do componente superior do espinor de Dirac sob a perspectiva de um problema de Sturm-Liouville.

O problema intrinsecamente relativístico de férmions massivos e não massivos em  $1 + 1$  dimensões sujeitos a potenciais degrau abrupto e degrau suave é considerado com uma mistura vetorial e escalar na estrutura de Lorentz com o acoplamento escalar maior ou igual ao acoplamento vetorial. Na perspectiva Sturm-Liouville o potencial efetivo possui uma função delta na origem quando o potencial escalar é um degrau abrupto, e o consagrado potencial de Rosen-Morse quando o potencial escalar é um degrau suave. Neste último potencial as soluções foram mapeadas por meio de uma equação diferencial hipergeométrica. Em ambos os casos são analisados espalhamento e estados ligados.

Uma solução isolada da perspectiva Sturm-Liouville também está presente nos potenciais analisados e demonstra que o férmion pode ser armadilhado em uma região altamente localizada quando os potenciais vetorial e escalar possuem diferentes magnitudes. Ocorre ainda, o surgimento de uma simetria entorno da origem para o caso de férmions não massivos. Um aparente paradoxo no princípio de incerteza é resolvido pela recorrência de conceitos de massa efetiva e comprimento de onda Compton efetivo. Soluções de estados ligados não se manifestam sob as condições das simetrias de spin e pseudospin, nem em uma aproximação não-relativística.

**PALAVRAS-CHAVE:** equação de Dirac, estados ligados, potencial tipo kink.

CASTILHO, W. M. **Scattering and bound states of spin-1/2 particles in a smooth step potential with a mixing of scalar and vector couplings.** 2014. 90 f. Dissertation (Master in Physics) – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2014.

## ABSTRACT

In this work we analyze the equations of Dirac and Klein-Gordon with the more general Lorentz structure for external potential in  $3 + 1$  dimensions of space-time and the corresponding non-relativistic limits for the electromagnetic potential, which was obtained the equations of Pauli for spin  $1/2$  particles and Schrodinger to spin  $0$  particles, respectively. Also in the Dirac equation in  $1 + 1$  dimension is discussed the transformation: charge-conjugation, chiral-conjugation and continuous chiral transformation. This last transformation plus create of a link in scalar and vector potential enabling to decouple and mapping the solutions of the upper and lower parts of the Dirac spinor in a Sturm-Liouville perspective.

The intrinsically relativistic problem for massive or massless fermions in  $1 + 1$  dimension subject to abrupt step and smooth step potential is considered with a mixing of vector and scalar Lorentz structures with the scalar coupling stronger than or equal to the vector coupling. In the Sturm-Liouville perspective the effective potential to become to appear a delta function at the origin for the case is a scalar potential is abrupt step and the consecrated Rosen-Morse potential for the case scalar potential is a smooth step. This is last potential the solutions are found through of a hypergeometric differential equation. In both the cases scattering and bound states are analyzed.

An isolated solution from the Sturm-Liouville perspective is also present and shows that the fermions can be trapped in a highly localized region when the vector potential and the scalar potential have different magnitudes. Also occurs appear of a symmetry around the origin for the case massless fermions. An apparent paradox on the uncertainty principle is solved by recurring to the concepts of effective mass and effective Compton wavelength. That bounded solution does not manifest under the condition of the spin and pseudospin, neither in a nonrelativistic approach.

**KEYWORDS:** Dirac equation, bound states, kink-like potential.

# Lista de Figuras

5.1	Esboço do potencial degrau abrupto $V_s = V_0 \operatorname{sgn}(x)$ . . . . .	39
5.2	Densidade de probabilidade de posição da solução isolada para $V_s = V_0 \operatorname{sgn}(x)$ com $\theta = 3\pi/8$ . Linha contínua (pontilhada) em $V_0/mc^2 = 2$ ( $-2$ ). Aqui $\lambda = \hbar/(mc)$ e $\lambda_M = \hbar/(Mc)$ . . . . .	41
5.3	Valores permitidos para as energias em função do ângulo de mistura $\theta$ . A linha contínua (pontilhada) está relacionada a férmions massivos (não massivos) . . . . .	42
5.4	Potencial efetivo para $V_s = V_0 \operatorname{sgn}(x)$ com $\theta = 3\pi/8$ . Linha contínua (pontilhada) para $V_0/mc^2 = 1$ ( $-1$ ). . . . .	44
5.5	Coefficiente de transmissão em função da energia para o potencial $V_s = V_0 \operatorname{sgn}(x)$ com $V_0/mc^2 = 1$ e $\theta = 3\pi/8$ . . . . .	46
5.6	Coefficiente de transmissão em função do ângulo de mistura $\theta$ para o potencial $V_s = V_0 \operatorname{sgn}(x)$ . Altos coeficientes são relacionados a altas energias. A curva inferior corresponde a $E/mc^2 = 1, 15$ , tanto em (a) como em (b). . . . .	48
6.1	Esboço do potencial degrau suave $V_s = V_0 \tanh \gamma x$ . Maior suavidade na curva corresponde a menores valores de $\gamma$ . . . . .	50
6.2	Densidade de probabilidade de posição da solução isolada para $V_s = V_0 \tanh \gamma x$ com $V_0/(Mc^2) = 2$ e $\theta = 3\pi/8$ . Linha contínua (pontilhada) para $\gamma\hbar/Mc = 1/10$ ( $\gamma\hbar/Mc = 1$ ). Aqui $\lambda = \hbar/(mc)$ e $\lambda_M = \hbar/(Mc)$ . . . . .	53
6.3	Potencial efetivo para $V_s = V_0 \tanh \gamma x$ com $\theta = 3\pi/8$ e $\gamma\hbar/mc = 1/2$ . Linha contínua (pontilhada) para $V_0/mc^2 = 6$ ( $-6$ ). . . . .	60
6.4	Coefficiente de transmissão em função de $E/(mc^2)$ e do parâmetro $\gamma\hbar/(mc)$ para o potencial $V_s = V_0 \tanh \gamma x$ com $V_0 = 1$ e $\theta = 3\pi/8$ . Altos coeficientes correspondem a baixos valores de $\gamma\hbar/(mc)$ . A curva inferior corresponde a $\gamma \rightarrow \infty$ . . . . .	64
6.5	Coefficiente de transmissão em função do ângulo de mistura $\theta$ e do parâmetro $\gamma\hbar/mc$ para o potencial $V_s = V_0 \tanh \gamma x$ . Altos coeficientes correspondem a baixos valores de $\gamma\hbar/mc$ . A curva inferior corresponde a $\gamma \rightarrow \infty$ ( $\theta = \pi/4$ e $ E /mc^2 = 1, 2$ ). . . . .	65

6.6	Níveis de energia para os três primeiros números quânticos ( $n = 1, 2, 3$ e $V_0 > 0$ ) com $\theta = 3\pi/8$ e $\gamma\hbar/Mc = 1/10$ . As curvas internas são relacionadas aos menores números quânticos. A linha pontilhada corresponde à solução isolada. . . . .	70
6.7	Níveis de energia para os três primeiros números quânticos ( $n = 1, 2, 3$ e $V_0 > 0$ ) com $ V_0 /Mc^2 = 2$ e $\gamma\hbar/Mc = 1/10$ . As curvas internas são relacionadas aos menores números quânticos. A linha pontilhada corresponde à solução isolada. . . . .	72
6.8	Níveis de energia para os três primeiros números quânticos ( $n = 1, 2, 3$ e $V_0 > 0$ ) com $ V_0 /Mc^2 = 2$ e $\theta = 3\pi/8$ . As curvas internas são relacionadas aos menores números quânticos. A linha pontilhada corresponde à solução isolada. . . . .	73
6.9	Densidade de probabilidade de posição para a solução do tipo Sturm-Liouville com $n = 1$ , $ V_0 /Mc^2 = 2$ , $\gamma\hbar/Mc = 1/10$ e $\theta = 3\pi/8$ . Foi utilizado em (a) $E/Mc^2 = -0,549(0,549)$ e em (b) $E/Mc^2 = -0,888(0,047)$ na linha contínua (pontilhada), $\lambda = \hbar/(mc)$ e $\lambda_M = \hbar/(Mc)$ . . . . .	75
6.10	Densidade de probabilidade de posição para a solução do tipo Sturm-Liouville (linha pontilhada $ \psi_+ ^2$ , linha tracejada $ \psi_- ^2$ ), com $n = 1$ , $ V_0 /Mc^2 = 2$ , $\gamma\hbar/Mc = 1/10$ e $\theta = \pi/2$ . Aqui $\lambda = \hbar/(mc)$ e $\lambda_M = \hbar/(Mc)$ . . . . .	76

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>14</b>
<b>2</b>	<b>Notação relativística</b>	<b>17</b>
<b>3</b>	<b>A equação de Klein-Gordon</b>	<b>19</b>
3.1	Equação da continuidade . . . . .	20
3.2	A equação de Klein-Gordon na presença de potenciais externos . . . . .	21
3.2.1	Limite não-relativístico em um potencial eletromagnético . . . . .	23
<b>4</b>	<b>A equação de Dirac</b>	<b>25</b>
4.1	Equação da continuidade . . . . .	27
4.1.1	Valor esperado . . . . .	28
4.2	Equação de Dirac na presença de potenciais externos . . . . .	28
4.2.1	Limite não-relativístico em um potencial eletromagnético . . . . .	29
4.3	Equação de Dirac em 1+1 . . . . .	32
4.3.1	Transformações na equação de Dirac . . . . .	32
4.3.1.1	Conjugação de carga . . . . .	32
4.3.1.2	Transformação quiral . . . . .	33
4.3.1.3	Transformação quiral contínua . . . . .	33
4.3.1.3.1	Limite não-relativístico . . . . .	34
4.3.2	Perspectiva Sturm-Liouville . . . . .	35
4.3.2.1	Classe $E = -mc^2 \cos \theta$ . . . . .	36
4.3.2.2	Classe $E \neq -mc^2 \cos \theta$ . . . . .	36
<b>5</b>	<b>Potencial degrau abrupto</b>	<b>38</b>
5.1	Classe $E = -mc^2 \cos \theta$ . . . . .	38
5.2	Classe $E \neq -mc^2 \cos \theta$ . . . . .	43
5.2.1	Espalhamento . . . . .	44
5.2.2	Estados ligados . . . . .	47

<b>6</b>	<b>Potencial degrau suave</b>	<b>49</b>
6.1	Classe $E = -mc^2 \cos \theta$ . . . . .	49
6.2	Classe $E \neq -mc^2 \cos \theta$ . . . . .	56
6.2.1	Equação diferencial hipergeométrica . . . . .	59
6.2.2	Espalhamento . . . . .	62
6.2.3	Estados ligados . . . . .	66
<b>7</b>	<b>Conclusões e comentários</b>	<b>77</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>79</b>
	<b>Apêndice A</b>	<b>86</b>
	<b>Apêndice B</b>	<b>89</b>

# Capítulo 1

## Introdução

A mecânica quântica relativística estuda o comportamento da dinâmica de altas energias, onde o comprimento de onda das partículas é menor ou da ordem do comprimento de onda Compton  $\hbar/mc$ . Um férmion, partícula de spin  $1/2$ , pode ser descrito pela equação de Dirac que permite modelar o comportamento da partícula interagindo com diferentes tipos de potenciais externos. Para o estudo da dinâmica de partículas em três dimensões espaciais mais a dimensão temporal ( $3 + 1$ ) os potenciais externos que podem ser acoplados na equação são escalar, pseudoescalar, vetorial, pseudovetorial e tensorial. Ao passo que, para uma partícula viajando em uma direção privilegiada, ou seja, em uma dimensão espacial e uma temporal ( $1 + 1$ ) os acoplamentos poderão ser escalar, pseudoescalar e vetorial. Esta classificação dos acoplamentos depende do comportamento do potencial perante as transformações de Lorentz.

Potenciais relativísticos envolvendo misturas de acoplamentos vetorial e escalar têm sido apreciados na literatura. Espectros de mésons pesados podem ser explorados por meio da solução da equação de Dirac com uma conveniente mistura de potenciais vetorial e escalar [1]. O mesmo pode ser dito sobre fenômenos nucleares descrevendo a influência do meio nuclear nos núcleons [2]. Simetrias de spin e pseudospin são simetrias do grupo  $SU(2)$  da equação de Dirac com potenciais vetorial e escalar, quando a diferença entre os potenciais, ou a soma, é uma constante. A realização destas simetrias permite explorar a degenerescência em alguns espectros de mésons pesados (simetria spin) [3]-[4] ou níveis de energia de partícula única no núcleo (simetria pseudospin) [4]-[24], quando estes sistemas são descritos por teoria de campo médio relativístico com potenciais vetorial e escalar. Quando estas simetrias são realizadas, os componentes superiores e inferiores da equação de Dirac podem ser desacoplados. Consequentemente o espectro de energia não dependerá da estrutura espinorial, sendo idêntico ao espectro de energia de partícula sem spin [25].

Embora o potencial escalar seja usado majoritariamente nas aplicações em física nuclear e de partículas, este possibilita simular a massa efetiva de elétrons também em física do estado sólido, permitindo sua utilização para modelamento de transição entre

duas estruturas assim como junção Josephson [26]. De fato, há interesse em resolver a equação de Dirac em quatro dimensões do espaço-tempo, bem como em menores dimensões para uma variedade de potenciais e acoplamentos. Um fluxo de trabalhos tem sido dedicado a investigar as soluções da equação de Dirac assumindo o potencial vetorial com a mesma magnitude do potencial escalar [27]-[46] e outros assumindo uma mistura mais geral [46]-[53].

O potencial degrau unidimensional é de interesse por modelar a transição entre duas estruturas. Em física do estado sólido, por exemplo, um potencial que varia continuamente em um intervalo cuja dimensão é da ordem das distâncias interatômicas no metal [54], ou seja, potencial descrito por um degrau suave pode ser usado para modelar o potencial médio que segura os elétrons de condução no metal chamado de potencial interno do metal.

Na presença de potenciais fortes, a equação de Schrödinger precisa ser substituída por equações relativísticas. A configuração kink do modelo  $\phi^4$  [55] é de interesse em teoria quântica de campos, onde o campo topológico clássico é responsável por induzir número fermiônico fracionário no vácuo. Modelos deste tipo, conhecidos como modelos kink são obtidos em teoria quântica de campos, como o limite contínuo de modelos de polímeros lineares [56]-[57]. Em trabalhos recentes, o potencial degrau suave do tipo  $\tanh x$  tem sido explorado em teorias relativísticas, tanto com a equação de Dirac quanto com a equação de Klein-Gordon. No caso da equação de Dirac se explorou os estados ligados de férmions com acoplamento pseudoescalar [58] e vetorial [59] e no caso da equação de Klein-Gordon o espalhamento e os estados ligados de bósons com uma mistura de acoplamentos escalar e vetorial [60]. Uma característica peculiar destes potenciais degraus é a completa ausência de soluções de estados ligados na teoria não-relativística.

Nesta dissertação foram analisados espalhamento e estados ligados de férmions em potenciais tipo degrau abrupto e degrau suave com uma mistura escalar e vetorial na estrutura de Lorentz. Em ambos os casos foi considerado o acoplamento escalar maior ou igual ao acoplamento vetorial. Por meio de uma transformação unitária é possível desacoplar os componentes superior e inferior do espinor de Dirac preservando a forma da corrente. O potencial degrau suave com o comportamento  $\tanh \gamma x$ , conhecido como potencial tipo-kink, tem sido considerado na literatura no contexto relativístico [58]-[61] e não-relativístico [62].

Aqui o problema de espalhamento é acessado sob uma perspectiva de Sturm-Liouville com a identificação de polos complexos. As soluções da equação diferencial para as autoenergias correspondentes a estados ligados são transmutadas em resolver uma equação algébrica de segundo grau, onde o espectro de energia exhibe um conjunto finito de soluções para o potencial degrau suave. O único polo na amplitude de transmissão não demonstra propriedade de estado ligado para o potencial degrau abrupto. O potencial degrau suave é mapeado em uma equação tipo Schrödinger com um potencial efetivo de Rosen-Morse



que é aplicado na discussão do estado vibracional de uma molécula poliatômica [63]-[66]. Uma solução isolada da perspectiva Sturm-Liouville está também presente no limite extremamente relativístico em ambos os potenciais analisados. Soluções de estados ligados tendem a desaparecer tanto quando as condições de simetrias de spin e pseudospin se aproximam, bem como no limite não-relativístico.

A dissertação é dividida em 7 capítulos com uma introdução compreendida no capítulo 1. No capítulo 2 são descritas algumas notações relativísticas utilizadas no trabalho. No capítulo 3 foi abordado a origem da equação de Klein-Gordon com a estrutura de Lorentz mais geral para potenciais externos em  $3 + 1$  dimensões do espaço-tempo e o correspondente limite não-relativístico para partículas interagindo em um potencial de origem eletromagnética onde obtém-se a equação de Schrödinger para partículas sem spin. No capítulo 4 são discutidos: a origem da equação de Dirac com a estrutura de Lorentz mais geral em  $3 + 1$  dimensões e o correspondente limite não-relativístico para partículas interagindo em um potencial de origem eletromagnética onde obtém-se a equação de Pauli para partículas de spin  $1/2$ , algumas transformações da equação de Dirac em  $1 + 1$  dimensões como a conjugação de carga, transformação quiral e transformação quiral contínua. Esta última transformação juntamente com a criação de um vínculo entre os potenciais escalar e vetorial permite desacoplar as equações para os componentes superior e inferior do espinor de Dirac, e também mapear as soluções do componente superior do espinor sob uma perspectiva Sturm-Liouville. Solução isolada do problema Sturm-Liouville está também presente e é discutida em detalhes nos capítulos subsequentes. Os capítulos 5 e 6 são destinados às soluções e análises de espalhamento e estados ligados dos potenciais degrau abrupto e degrau suave em  $1 + 1$  dimensões com acoplamentos escalar e vetorial, respectivamente. No capítulo 7 são apresentadas as conclusões e perspectivas futuras.

Esta dissertação aborda aspectos originais do comportamento de férmions. Uma parte, aquela relacionada com o potencial degrau abrupto, encontra-se publicada no *Annals of Physics* (veja [67]). A parte relacionada com o potencial degrau suave exibe o cálculo de integrais e limites de funções especiais ainda não disponíveis na literatura, mas já se encontra submetida à publicação.

## Capítulo 2

### Notação relativística

Com o estudo da Mecânica Quântica Relativística (MQR) é possível compreender fenômenos relacionados com a dinâmica de partículas de altas energias. Tais como, a criação e aniquilação de partículas, polarização do vácuo, conversão de partículas [68]-[69].

Para melhor entender a MQR devemos lançar mão de algumas notações utilizadas como as magnitudes físicas dos diferentes observadores e a unificação do espaço-tempo, o que implica na utilização de quadrivetores na teoria, onde a parte espacial coincide com os vetores da teoria não-relativística. Na equação (2.1) são descritos alguns vetores quadridimensionais contravariantes:

$$\begin{aligned}
 x^\mu &= (x^0, x^i) = (ct, \vec{x}) \\
 p^\mu &= (p^0, p^i) = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right) \\
 A^\mu &= (A^0, A^i) = \left(A^0, \vec{A}\right) \\
 \partial^\mu &= (\partial^0, \partial^i) = \left(\frac{\partial}{\partial x_0}, \frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \left(\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\vec{\nabla}\right)
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

onde  $c$  é a velocidade da luz no vácuo, necessária para manter a dimensão espacial e de momento, e  $\partial^\mu$  é a derivada contravariante.

O intervalo entre dois eventos infinitesimalmente próximos, com coordenadas  $(ct, \vec{x})$  e  $(ct + cdt, \vec{x} + d\vec{x})$  é definido por  $ds^2 = c^2 dt^2 - d\vec{x}^2$ . Este intervalo é também conhecido como escalar de Lorentz, por ser invariante sob transformações de Lorentz. Quando o intervalo  $ds^2 > 0$  é denominado como tipo-tempo,  $ds^2 < 0$  tipo-espaço e  $ds^2 = 0$  tipo-luz. Definimos uma matriz  $G$ , cujos componentes covariantes são  $g_{\mu\nu}$ :

$$G = (g_{\mu\nu}) = \begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

A matriz  $G$  define a métrica no espaço de Minkowski e seus elementos  $g_{\mu\nu}$  com índices embaixo são chamados de covariantes e índices acima de contravariantes. A forma contravariante dos componentes pode ser definida pela inversa da matriz  $G$ , onde a matriz  $G$  multiplicada pela sua inversa é a própria matriz identidade  $GG^{-1} = I$ , o que implica em  $g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}$ . Os componentes do vetor posição  $x_\mu = (x_0, x_i) = (ct, -\vec{x})$ , cujo índice  $i = 1, 2$  e  $3$  representa as coordenadas espaciais e  $0$  a coordenada temporal do quadrivetor posição, pode ser transformado para o espaço vetorial dual por intermédio da métrica  $g^{\mu\nu}$  ( $g_{\mu\nu}$ ), ou seja, é possível realizar o abaixamento (levantamento) dos índices dos quadrivetores

$$x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu = (x^0, x^1, x^2, x^3). \quad (2.3)$$

O abaixamento (levantamento) dos índices  $\mu$  altera apenas o sinal das coordenadas espaciais, ou seja,  $x^0 = x_0$ ,  $x^i = -x_i$ . Na equação (2.3) foi utilizada a convenção de Einstein para a soma de índices repetidos: sempre que houver índices repetidos contraídos subentende-se a soma sobre os mesmos. Será convencionado também, índices gregos assumirem valores de  $0, 1, 2, 3$  e índices latinos valores  $1, 2, 3$ . O produto escalar invariante de Lorentz entre dois vetores  $A^\mu$  e  $B^\mu$  é

$$g^{\mu\nu} A_\mu B_\nu = A^\nu B_\nu = A^0 B_0 + A^i B_i = A^0 B^0 - \vec{A} \cdot \vec{B}. \quad (2.4)$$

A relação de dispersão momento-energia da partícula livre,  $E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4$ , pode ser escrita em termos do quadrivetor momento

$$p_\mu p^\mu = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 = m^2 c^2. \quad (2.5)$$

Por meio da substituição do quadrimomento por operadores diferenciais obtemos

$$\hat{p}_\mu \hat{p}^\mu \rightarrow \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right) \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial x_\mu} \right) = -\hbar^2 \partial_\mu \partial^\mu = -\hbar^2 \square \quad (2.6)$$

onde  $\hbar = h/2\pi$ ,  $h$  é a constante de Planck e  $\square$  é conhecido como D'Alembertiano que é escrito da seguinte forma

$$\partial_\mu \partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2. \quad (2.7)$$

## Capítulo 3

### A equação de Klein-Gordon

A equação de Klein-Gordon é uma equação de movimento que descreve um campo escalar ou pseudoescalar para partículas sem spin. Tal equação pode ser obtida por meio da analogia com a derivação da equação de Schrödinger da mecânica quântica não-relativística, substituindo na relação momento-energia, os operadores diferenciais

$$\hat{E} = i\hbar\partial_t = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}, \quad \vec{\hat{p}} = -i\hbar\vec{\nabla}. \quad (3.1)$$

A relação da energia com o momento, também conhecida como relação de dispersão, para uma partícula livre relativística com massa de repouso  $m$  e momento  $\vec{p}$  é descrita como sendo

$$E^2 = \vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4. \quad (3.2)$$

Substituindo os operadores na relação de dispersão e atuando na autofunção encontramos

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi = (-\hbar^2 c^2 \nabla^2 + m^2 c^4) \Psi. \quad (3.3)$$

Por intermédio da equação (2.6) é possível descrever a equação (3.3) como sendo

$$(\hat{p}_\mu \hat{p}^\mu - m^2 c^2) \Psi = \left( \square + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \Psi = 0. \quad (3.4)$$

Esta equação é conhecida como a equação de Klein-Gordon para uma partícula livre. É possível observar que a parte espacial e temporal são tratadas de maneira simétrica, pois ambas possuem a derivada de segunda ordem; diferentemente da equação de Schrödinger em que a evolução temporal é de primeira ordem, e a espacial de segunda ordem.

### 3.1 Equação da continuidade

De forma análoga à equação de Schrödinger é possível obter a equação da continuidade. Para isso, podemos tomar o complexo conjugado de (3.4)

$$(\hat{p}_\mu \hat{p}^\mu - m^2 c^2) \Psi^* = 0. \quad (3.5)$$

Multiplicando as equações (3.4) por  $\Psi^*$  e (3.5) por  $\Psi$ , e logo após realizando a subtração de ambas, temos

$$\Psi (\hat{p}_\mu \hat{p}^\mu - m^2 c^2) \Psi^* - \Psi^* (\hat{p}_\mu \hat{p}^\mu - m^2 c^2) \Psi = 0, \quad (3.6)$$

ou seja

$$\Psi \partial_\mu \partial^\mu \Psi^* - \Psi^* \partial_\mu \partial^\mu \Psi = \partial_\mu (\Psi^* \partial^\mu \Psi - \Psi \partial^\mu \Psi^*) = 0. \quad (3.7)$$

Definindo convenientemente

$$J^\mu = \frac{i\hbar}{2m} (\Psi^* \partial^\mu \Psi - \Psi \partial^\mu \Psi^*). \quad (3.8)$$

Vemos que esta é a quadricorrente

$$\partial_\mu J^\mu = \partial_0 J^0 + \partial_i J^i = 0. \quad (3.9)$$

Com  $J^\mu$  dado por

$$J^\mu = (c\rho, \vec{J}), \quad (3.10)$$

a expressão (3.9) possui a forma da equação da continuidade

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0, \quad (3.11)$$

onde

$$\rho = \frac{i\hbar}{2mc^2} \left( \Psi^* \frac{\partial}{\partial t} \Psi - \Psi \frac{\partial}{\partial t} \Psi^* \right) = \frac{i\hbar}{2mc^2} \Psi^* \overleftrightarrow{\partial}_t \Psi \quad (3.12)$$

e

$$\vec{J} = \frac{\hbar}{2mi} \left( \Psi^* \overrightarrow{\nabla} \Psi - \Psi \overleftarrow{\nabla} \Psi^* \right) = \frac{\hbar}{2mi} \Psi^* \overleftrightarrow{\nabla} \Psi. \quad (3.13)$$

Conforme observado na equação (3.12), para um dado tempo  $t$  é preciso conhecer tanto  $\Psi$  como  $\partial_t \Psi$  e estes podem assumir valores arbitrários, ou seja, não serem necessariamente positivos. Mesmo nos propondo a escrever  $\Psi = \chi(\vec{x}) \exp(-iEt/\hbar)$  como tipicamente é utilizado em estados estacionários, temos

$$\rho = \frac{E}{mc^2} |\chi|^2 \quad (3.14)$$

mas

$$E = \pm c\sqrt{\vec{p}^2 + m^2c^2}. \quad (3.15)$$

Portanto, não é possível interpretar  $\rho$  como densidade de probabilidade.

Em 1934, Pauli e Weisskopf [70] propuseram que as quantidades  $\rho$  e  $\vec{J}$  poderiam ser interpretadas como sendo densidade de carga e densidade de corrente de carga ao multiplicar as equações (3.12) e (3.13) pela carga elementar  $e$ :

$$\rho = \frac{i\hbar e}{2mc^2} \Psi^* \overleftrightarrow{\partial}_t \Psi \quad (3.16)$$

$$\vec{J} = \frac{\hbar e}{2mi} \Psi^* \overleftrightarrow{\nabla} \Psi. \quad (3.17)$$

Desta forma, a expressão (3.16) poderia descrever a densidade de carga positiva, negativa ou nula. Este fato está vinculado à existência de antipartículas. Antipartícula é a estrutura fundamental da antimatéria e é simétrica a partícula elementar da matéria, possuindo a mesma massa, porém de carga oposta.

## 3.2 A equação de Klein-Gordon na presença de potenciais externos

A equação de Klein-Gordon permite modelar o comportamento de partículas de spin zero com dois acoplamentos distintos: escalar e vetorial. Esta classificação depende do comportamento do potencial perante as transformações de Lorentz. Tais acoplamentos podem ser realizados por meio das substituições

$$\hat{p}^\mu \rightarrow \hat{p}^\mu - \frac{A^\mu}{c}, \quad A^\mu = \begin{cases} V_t, & \mu = 0 \\ (V_e)^i, & \mu = i \end{cases} \quad (3.18)$$

para acoplamento vetorial, onde  $V_t$  e  $\vec{V}_e$  são os componentes temporal e espacial do quadrivetor, respectivamente, e

$$m \rightarrow m + \frac{V_s}{c^2}. \quad (3.19)$$

para acoplamento escalar.

Realizando as substituições (3.18) e (3.19) em (3.4) temos

$$\left[ \left( \hat{p}_\mu - \frac{A_\mu}{c} \right) \left( \hat{p}^\mu - \frac{A^\mu}{c} \right) - c^2 \left( m + \frac{V_s}{c^2} \right)^2 \right] \Psi = 0 \quad (3.20)$$

ou

$$(i\hbar\partial_t - V_t)^2 \Psi = c^2 \left[ \left( \vec{p} - \frac{\vec{V}_e}{c} \right)^2 + c^2 \left( m + \frac{V_s}{c^2} \right)^2 \right] \Psi. \quad (3.21)$$

Por meio da equação (3.21) podemos verificar a relação de dispersão, substituindo os operadores

$$(E - V_t)^2 = c^2 \left( \vec{p} - \frac{\vec{V}_e}{c} \right)^2 + c^4 \left( m + \frac{V_s}{c^2} \right)^2 \quad (3.22)$$

observando que houve acoplamentos do tipo  $E \rightarrow E - V_t$ ,  $\vec{p} \rightarrow \vec{p} - \vec{V}_e/c$  e  $m \rightarrow m + V_s/c^2$  na relação de dispersão.

A corrente  $J^\mu$  com interação é expressa por

$$\rho = \frac{i\hbar}{2mc^2} \Psi^* \overleftrightarrow{\partial}_t \Psi - \frac{V_t}{mc^2} |\Psi|^2 \quad (3.23)$$

$$\vec{j} = \frac{\hbar}{2im} \Psi^* \overleftrightarrow{\nabla} \Psi - \frac{\vec{V}_e}{mc} |\Psi|^2. \quad (3.24)$$

Para potenciais independentes do tempo podemos recorrer ao *Ansatz*

$$\Psi(\vec{x}, t) = \psi(\vec{x}) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} Et\right), \quad (3.25)$$

onde  $E$  é o fator de evolução temporal, e obter a equação de Klein-Gordon independente do tempo

$$(E - V_t)^2 \psi = \left[ c^2 \left( \vec{p} - \frac{\vec{V}_e}{c} \right)^2 + c^4 \left( m + \frac{V_s}{c^2} \right)^2 \right] \psi. \quad (3.26)$$

O componente espacial do vetor pode ser eliminado por meio de uma redefinição na autofunção. Propondo

$$\psi(\vec{x}) = \varphi(\vec{x}) \exp[\lambda(\vec{x})], \quad (3.27)$$

onde  $\lambda$  é obtido por meio da substituição (3.27) em (3.26). O termo que atua na autofunção,

$$\left(\vec{p} - \frac{\vec{V}_e}{c}\right) \varphi \exp(\lambda) = \exp(\lambda) \left(-i\hbar \vec{\nabla} \lambda - \frac{\vec{V}_e}{c} - i\hbar \vec{\nabla}\right) \varphi. \quad (3.28)$$

Se

$$\vec{V}_e = -i\hbar c \vec{\nabla} \lambda \quad (3.29)$$

ou seja,  $\vec{\nabla} \times \vec{V}_e = 0$ , podemos escrever

$$\lambda(\vec{x}) = \frac{i}{\hbar c} \int^{\vec{x}} d\vec{\xi} \cdot \vec{V}_e(\vec{\xi}). \quad (3.30)$$

Consequentemente, a equação (3.26) torna-se

$$(E^2 - 2EV_t + V_t^2)\varphi = [-(\hbar c)^2 \nabla^2 + V_s^2 + m^2 c^4 + 2mc^2 V_s] \varphi. \quad (3.31)$$

Omitindo detalhes algébricos, temos

$$\left(\frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V_{ef}\right) \varphi = E_{ef} \varphi \quad (3.32)$$

onde

$$V_{ef} = \frac{V_s^2 - V_t^2}{2mc^2} + V_s + \frac{EV_t}{mc^2}, \quad E_{ef} = \frac{E^2 - m^2 c^4}{2mc^2}. \quad (3.33)$$

Com a equação (3.32) é possível mapear as soluções da equação de Klein-Gordon nas soluções da equação de um problema estilo Sturm-Liouville.

### 3.2.1 Limite não-relativístico em um potencial eletromagnético

No limite não-relativístico a energia potencial é muito menor que  $mc^2$ , o que nos permite realizar as seguintes aproximações

$$|i\hbar \partial_t \Psi| \ll mc^2 |\Psi|, \quad |e\phi \Psi| \ll mc^2 |\Psi|. \quad (3.34)$$

Redefinindo  $V_t = e\phi$  e  $\vec{V}_e = e\vec{A}$  na equação (3.21) com  $V_s = 0$ , temos

$$(i\hbar \partial_t - e\phi)^2 \Psi = \left[ c^2 \left( \vec{p} - \frac{e\vec{A}}{c} \right)^2 + m^2 c^4 \right] \Psi. \quad (3.35)$$

Recorrendo ao *Ansatz* para a função de onda não-relativística

$$\Psi(\vec{x}, t) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} mc^2 t\right) \tilde{\Psi}(\vec{x}, t) \quad (3.36)$$

a equação (3.35) torna-se



$$(m^2c^4 - 2mc^2e\phi + 2mc^2i\hbar\partial_t - i\hbar e\partial_t\phi)\tilde{\Psi} = \left[ c^2 \left( \vec{p} - \frac{e\vec{A}}{c} \right)^2 + m^2c^4 \right] \tilde{\Psi}. \quad (3.37)$$

Negligenciando o termo quadrático em  $\vec{A}$  temos

$$\left( \vec{p} - \frac{e\vec{A}}{c} \right)^2 \approx \vec{p}^2 - \frac{e}{c} (\vec{p} \cdot \vec{A} + 2\vec{A} \cdot \vec{p}). \quad (3.38)$$

Substituindo (3.38) em (3.37) obtemos

$$i\hbar\partial_t\tilde{\Psi} = \left[ \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{e}{mc} \vec{A} \cdot \vec{p} + e\phi + \frac{i\hbar e}{2mc} \left( \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \phi + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \right) \right] \tilde{\Psi}. \quad (3.39)$$

Utilizando a condição de Lorentz  $\partial_t\phi/c + \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ , também conhecida como o *gauge* de Lorentz [68]-[69], e assumindo um campo magnético homogêneo, cujo potencial vetorial magnético pode ser escrito como  $\vec{A} = \vec{B}/2 \times \vec{x}$ , a equação (3.39) torna-se

$$i\hbar\partial_t\tilde{\Psi} = \left( \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{e}{2mc} \vec{B} \cdot \vec{L} + e\phi \right) \tilde{\Psi} \quad (3.40)$$

onde  $\vec{L} = \vec{x} \times \vec{p}$  é o operador momento angular orbital da partícula. Esta é a equação de Schrödinger para partículas sem spin interagindo em potenciais eletromagnéticos.

## Capítulo 4

### A equação de Dirac

Em 1928, Dirac procurou uma equação relativística que fosse capaz de reproduzir o espectro de energia de partículas de spin meio [71]-[72] e levasse a uma densidade de probabilidade positiva definida. No capítulo 3 vimos que a equação relativística de Klein-Gordon não resulta em uma densidade de probabilidade positiva definida.

Na busca de uma densidade de probabilidade positiva definida, Dirac propôs que a equação não deveria possuir uma ordem superior à primeira na derivada temporal, assim como encontrado por Schödinger na equação não-relativística. No entanto, a covariância relativística requer que as coordenadas espaciais e temporais sejam tratadas de maneira simétrica, ou seja, as derivadas espaciais devem possuir a mesma ordem das temporais. Além da simetria nas coordenadas espaciais e temporais a equação deveria respeitar a relação de dispersão relativística. Dirac propôs para uma partícula livre a seguinte equação de primeira ordem

$$(\gamma^\mu \hat{p}_\mu - mc)\Psi(\vec{x}, t) = 0. \quad (4.1)$$

A relação de dispersão pode ser verificada multiplicando a equação (4.1) por  $\gamma^\nu \hat{p}_\nu$

$$\gamma^\nu \gamma^\mu \hat{p}_\nu \hat{p}_\mu \Psi = m^2 c^2 \Psi \quad (4.2)$$

e exigindo que

$$\frac{\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu}{2} = g^{\mu\nu} I \quad (4.3)$$

a equação (4.2), torna-se

$$(\hat{p}_\mu \hat{p}^\mu - m^2 c^2)\Psi = 0. \quad (4.4)$$

Note a semelhança com a equação de Klein-Gordon (3.4), que respeita a relação de dispersão. A condição (4.3) resulta em

$$\frac{\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu}{2} = \begin{cases} (\gamma^0)^2 = +I, & \mu = \nu = 0 \\ (\gamma^i)^2 = -I, & \mu = \nu = i \\ 0, & \mu \neq \nu \end{cases} \quad (4.5)$$

Desta forma  $\gamma^\mu$  não deve ser apenas número, mas sim matriz. As matrizes devem ser quadradas de ordem  $N \times N$ , e  $\Psi$  é um objeto representado por uma matriz coluna de ordem  $N$ . Conseqüentemente o operador entre parênteses na equação (4.4) é uma matriz de ordem  $N \times N$  que não deve possuir inversa, caso contrário a solução de  $\Psi$  é trivial. Cada componente de  $\Psi$  respeita a equação de Klein-Gordon, conforme a equação (4.4). As matrizes podem ser construídas por meio da equação (4.3)

$$\gamma^\mu \gamma^\nu = -I \gamma^\nu \gamma^\mu, \quad \mu \neq \nu \quad (4.6)$$

onde  $I$  é a matriz identidade  $N \times N$ . Aplicando o determinante na equação (4.6)

$$\det(\gamma^\mu) \det(\gamma^\nu) = \det(-I) \det(\gamma^\nu) \det(\gamma^\mu) \quad (4.7)$$

como os determinantes são números ordinários, a equação (4.7) torna-se

$$1 = \det(-I) = (-1)^N \Rightarrow N = \text{par}. \quad (4.8)$$

Podemos verificar a propriedade do traço nas matrizes gama multiplicando a equação (4.6) por  $\gamma^\nu$  pela direita

$$\gamma^\mu = \begin{cases} -\gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\nu, & \nu = 0 \\ +\gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\nu, & \nu = i \end{cases} \quad (4.9)$$

e utilizando a propriedade de ciclicidade do traço  $tr(ABC) = tr(CAB)$  temos

$$tr(\gamma^\mu) = \begin{cases} -tr(\gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\nu) = -tr(\gamma^\mu), & \nu = 0 \\ +tr(\gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\nu) = -tr(\gamma^\mu), & \nu = i \end{cases} \Rightarrow 2tr(\gamma^\mu) = 0. \quad (4.10)$$

Portanto, as matrizes gama possuem ordem par e traço nulo.

Como não há quatro matrizes de ordem  $N = 2$  que satisfaçam simultaneamente a independência linear e a relação (4.3) a menor ordem para as matrizes no caso mais geral em  $3 + 1$  dimensões é  $N = 4$ , assim são necessárias 16 matrizes que sejam linearmente independentes. Tais matrizes, podem ser construídas por meio das matrizes  $2 \times 2$  de Pauli  $\sigma_i$ , cuja álgebra é representada por

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i \sum_k \varepsilon_{ijk} \sigma_k, \quad (4.11)$$

onde  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker e  $\varepsilon_{ijk}$  é o símbolo de Levi-Civita, mais a identidade  $I_{2 \times 2}$ . Utilizando como representações

$$\gamma^\mu = \begin{cases} \begin{pmatrix} +I_{2 \times 2} & 0_{2 \times 2} \\ 0_{2 \times 2} & -I_{2 \times 2} \end{pmatrix}, & \mu = 0 \\ \begin{pmatrix} 0_{2 \times 2} & +\sigma^i \\ -\sigma^i & 0_{2 \times 2} \end{pmatrix}, & \mu = i \end{cases} \quad (4.12)$$

onde  $0_{2 \times 2}$  representa uma matriz nula e  $I_{2 \times 2}$  é a matriz identidade (ambas matrizes  $2 \times 2$ ). Para as matrizes de Pauli foi utilizada a representação usual

$$\sigma^i = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & +1 \\ +1 & 0 \end{pmatrix}, & i = 1 \\ \begin{pmatrix} 0 & -i \\ +i & 0 \end{pmatrix}, & i = 2 \\ \begin{pmatrix} +1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, & i = 3 \end{cases} \quad (4.13)$$

Note que com a representação escolhida para as matrizes gama (4.12) temos a seguinte identidade

$$\gamma^\mu = \gamma^0 \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0. \quad (4.14)$$

## 4.1 Equação da continuidade

A densidade de corrente e a equação da continuidade no caso de Dirac podem ser construídas por intermédio da equação (4.1). Aplicando o conjugado hermitiano na equação e multiplicando por  $\gamma^0 \Psi$  pela direita

$$[i\hbar(\partial_\mu \Psi^\dagger) \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 + mc \Psi^\dagger \gamma^0] \Psi = 0. \quad (4.15)$$

Definindo  $\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0$  e inserindo uma identidade  $(\gamma^0)^2$  entre  $\Psi^\dagger \gamma^{\mu\dagger}$

$$[i\hbar(\partial_\mu \bar{\Psi}) \gamma^0 \gamma^{\mu\dagger} \gamma^0 + mc \bar{\Psi}] \Psi = 0 \quad (4.16)$$

e utilizando (4.14) temos

$$[i\hbar(\partial_\mu \bar{\Psi}) \gamma^\mu + mc \bar{\Psi}] \Psi = 0. \quad (4.17)$$

Multiplicando a equação (4.1) por  $\bar{\Psi}$  pela esquerda e somando com a equação (4.17), obtemos a equação da continuidade

$$\partial_\mu(c\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi) = \partial_\mu J^\mu = 0 \quad (4.18)$$

onde  $J^\mu = c\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi = (c\rho, \vec{J})$  é a quadricorrente. Portanto a função  $\rho = |\Psi|^2$  é positiva definida e é interpretada como densidade de probabilidade de posição cuja normalização é  $\int dV |\Psi|^2 = 1$ . Ou ainda, a equação da continuidade pode ser representada como

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0 \quad (4.19)$$

note ainda que,  $\vec{J} = c\bar{\Psi}\vec{\gamma}\Psi$  e possui dependência apenas do espinor e das matrizes gama.

### 4.1.1 Valor esperado

No decorrer do trabalho será calculado o valor esperado de quantidades físicas. O valor esperado representa a média de um observável obtida em uma série de experimentos preparados sob as mesmas condições, ou seja, no mesmo estado  $\Psi$ . Portanto, é possível definir o valor esperado de qualquer variável dinâmica  $\langle O \rangle$ , como sendo

$$\langle O \rangle = \frac{\langle \Psi | O | \Psi \rangle}{\langle \Psi | \Psi \rangle} \quad (4.20)$$

ou ainda

$$\langle O \rangle = \frac{\int \Psi^\dagger O \Psi d^3x}{\int \Psi^\dagger \Psi d^3x} = \frac{\int \Psi^\dagger O \Psi d^3x}{\int \rho d^3x} \quad (4.21)$$

A variância  $\sigma_x^2$  na posição é obtida por meio do valor esperado de  $x$  e  $x^2$

$$\langle x \rangle = \frac{\int x \rho d^3x}{\int \rho d^3x}, \quad \langle x^2 \rangle = \frac{\int x^2 \rho d^3x}{\int \rho d^3x} \quad (4.22)$$

$$\sigma_x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \quad (4.23)$$

## 4.2 Equação de Dirac na presença de potenciais externos

Na presença de potenciais externos a equação de Dirac pode ser escrita na forma

$$(\gamma^\mu \hat{p}_\mu - mc - V/c) \Psi = 0 \quad (4.24)$$

e a corrente obedece à equação [73]

$$\partial_\mu J^\mu = \frac{i}{\hbar} \bar{\Psi} (\gamma^0 V^\dagger \gamma^0 - V) \Psi. \quad (4.25)$$

A corrente  $J^\mu$  será conservada desde que  $V^\dagger = \gamma^0 V \gamma^0$ . O potencial mais geral que preserva a conservação da corrente pode ser escrito em termos de estruturas de Lorentz bem definidas:

$$V = \gamma^\mu A_\mu + IV_s + \gamma^5 V_p + \gamma^5 \gamma^\mu A'_\mu + \sigma^{\mu\nu} T_{\mu\nu} \quad (4.26)$$

onde  $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$  e  $\sigma^{\mu\nu} = i [\gamma^\mu, \gamma^\nu]/2$ . As quantidades  $A_\mu$ ,  $V_s$ ,  $V_p$ ,  $A'_\mu$  e  $T_{\mu\nu}$  são potenciais vetorial, escalar, pseudoescalar, pseudovetorial e tensorial, respectivamente, devido ao comportamento das formas bilineares [68]-[69]  $\bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi$ ,  $\bar{\Psi}I\Psi$ ,  $\bar{\Psi}\gamma^5\Psi$ ,  $\bar{\Psi}\gamma^\mu\gamma^5\Psi$  e  $\bar{\Psi}\sigma^{\mu\nu}\Psi$  sob transformações de Lorentz.

Para potenciais independentes do tempo é possível escrever

$$\Psi(\vec{x}, t) = \psi(\vec{x}) \exp(-iEt/\hbar) \quad (4.27)$$

e assim obter a equação de Dirac independente do tempo  $H\psi = E\psi$ , com o hamiltoniano

$$H = -c\gamma^0\gamma^i\hat{p}_i + \gamma^0 m c^2 + \gamma^0 V \quad (4.28)$$

e  $E$  é o fator de evolução temporal. Enquanto isso,  $J^\mu$  será independente do tempo e  $J^i$  uniforme.

Concentrando nossa atenção para interações com potenciais vetorial e escalar, a equação de Dirac torna-se

$$\left[ \gamma^\mu \left( \hat{p}_\mu - \frac{A_\mu}{c} \right) - \left( m + \frac{V_s}{c^2} \right) c \right] \Psi = 0. \quad (4.29)$$

Esta, pode ainda, ser obtida por meio da substituição das equações (3.18) e (3.19) em (4.1), conforme realizada na equação de Klein-Gordon.

### 4.2.1 Limite não-relativístico em um potencial eletromagnético

O limite não-relativístico pode ser obtido mediante a equação (4.29), com a substituição do potencial  $A_\mu$  por  $eA_\mu$  e multiplicando por  $c\gamma^0$  pela esquerda

$$i\hbar\partial_t\Psi = \left[ c\gamma^0\vec{\gamma} \cdot \left( \vec{p} - \frac{e\vec{A}}{c} \right) + \gamma^0 m_0 c^2 + e\phi \right] \Psi \quad (4.30)$$

onde  $e\phi = A_0$  representa a parte temporal do vetor e  $m_0 = m + V_s/c^2$ .

Propondo um espinor do tipo

$$\Psi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}, \quad (4.31)$$

onde

$$\varphi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad \chi = \begin{pmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}. \quad (4.32)$$

Substituindo na equação (4.30)

$$i\hbar\partial_t \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = c\vec{\sigma} \cdot \left( \vec{p} - \frac{e\vec{A}}{c} \right) \begin{pmatrix} \chi \\ \varphi \end{pmatrix} + m_0c^2 \begin{pmatrix} \varphi \\ -\chi \end{pmatrix} + e\phi \begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix}. \quad (4.33)$$

Recorrendo ao *Ansatz* para a função de onda não-relativística

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ \chi \end{pmatrix} = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}m_0c^2t\right) \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\chi} \end{pmatrix} \quad (4.34)$$

e substituindo-o em (4.33) teremos as seguintes equações acopladas,

$$i\hbar\partial_t\tilde{\chi} = c\vec{\sigma} \cdot \left( \vec{p} - \frac{e\vec{A}}{c} \right) \tilde{\varphi} - 2m_0c^2\tilde{\chi} + e\phi\tilde{\chi}, \quad (4.35)$$

$$i\hbar\partial_t\tilde{\varphi} = c\vec{\sigma} \cdot \left( \vec{p} - \frac{e\vec{A}}{c} \right) \tilde{\chi} + e\phi\tilde{\varphi}. \quad (4.36)$$

No limite não-relativístico a energia potencial é muito menor que  $m_0c^2$ , portanto é possível realizar as seguintes aproximações

$$|i\hbar\partial_t\tilde{\chi}| \ll m_0c^2|\tilde{\chi}|, \quad |e\phi\tilde{\chi}| \ll m_0c^2|\tilde{\chi}|. \quad (4.37)$$

Utilizando as restrições acima em (4.35) obtemos

$$\tilde{\chi} = \frac{\vec{\sigma} \cdot \left( \vec{p} - e\vec{A}/c \right)}{2m_0c} \tilde{\varphi}. \quad (4.38)$$

É possível verificar que no limite não-relativístico  $\vec{A}/c \approx \vec{0}$  e o componente  $\tilde{\chi}$  se torna bem menor que o componente  $\tilde{\varphi}$  por um fator  $v/c \ll 1$ . Substituindo a equação (4.38) em (4.36)

$$i\hbar\partial_t\tilde{\varphi} = \frac{\vec{\sigma} \cdot \left( \vec{p} - e\vec{A}/c \right) \vec{\sigma} \cdot \left( \vec{p} - e\vec{A}/c \right)}{2m_0} \tilde{\varphi} + e\phi\tilde{\varphi} \quad (4.39)$$

Por meio da propriedade das matrizes de Pauli,

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{a} \quad \vec{\sigma} \cdot \vec{g} = \vec{a} \cdot \vec{g} + i\vec{\sigma} \cdot \vec{a} \times \vec{g} \quad (4.40)$$

temos

$$\begin{aligned} & \vec{\sigma} \cdot \left( \vec{p} - e\vec{A}/c \right) \quad \vec{\sigma} \cdot \left( \vec{p} - e\vec{A}/c \right) \\ &= \left( \vec{p} - e\vec{A}/c \right)^2 + i\vec{\sigma} \cdot \left[ \left( \vec{p} - e\vec{A}/c \right) \times \left( \vec{p} - e\vec{A}/c \right) \right] \\ &= \left( \vec{p} - e\vec{A}/c \right)^2 + i\vec{\sigma} \cdot \left[ ie\hbar/c \left( \vec{\nabla} \times \vec{A} + \vec{A} \times \vec{\nabla} \right) \right] \\ &= \left( \vec{p} - e\vec{A}/c \right)^2 - e\hbar/c \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{A}, \end{aligned} \quad (4.41)$$

onde  $\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}$  é o campo magnético. Substituindo (4.41) em (4.39)

$$i\hbar\partial_t\tilde{\varphi} = \left[ \frac{\left( \vec{p} - e\vec{A}/c \right)^2}{2m_0} - \frac{e\hbar}{2m_0c} \vec{\sigma} \cdot \vec{B} + e\phi \right] \tilde{\varphi}. \quad (4.42)$$

Esta é a equação de Pauli. Os dois componentes de  $\tilde{\varphi}$  descrevem os graus de liberdade do spin. A equação de Pauli possui o fator giromagnético  $g = 2$  para elétron. Que pode ser demonstrado assumindo um campo magnético homogêneo, cujo potencial vetorial magnético pode ser escrito por  $\vec{A} = \vec{B}/2 \times \vec{x}$ . Negligenciando o termo quadrático em  $\vec{A}$ :

$$\left( \vec{p} - e\vec{A}/c \right)^2 \approx \vec{p}^2 - e/c \left( \vec{B} \times \vec{x} \right) \cdot \vec{p} = \vec{p}^2 - e/c \left( \vec{B} \cdot \vec{L} \right), \quad (4.43)$$

onde  $\vec{L} = \vec{x} \times \vec{p}$  é o operador momento angular orbital da partícula, e o operador momento de spin é

$$\vec{S} = \frac{\hbar\vec{\sigma}}{2}. \quad (4.44)$$

Substituindo (4.43) e (4.44) em (4.42)

$$i\hbar\partial_t\tilde{\varphi} = \left[ \frac{\vec{p}^2}{2m_0} - \frac{e}{2m_0c} \left( \vec{L} + 2\vec{S} \right) \cdot \vec{B} + e\phi \right] \tilde{\varphi}. \quad (4.45)$$

A equação (4.45) é a equação de Pauli com o fator giromagnético  $g = 2$ , a qual descreve o momento angular intrínseco da partícula de spin  $1/2$ . Este é um resultado interessante, pois Pauli partiu da equação de Schrödinger e inseriu o fator  $g = 2$  na equação para satisfazer os resultados experimentais. No entanto, na equação de Dirac este fator aparece naturalmente.



### 4.3 Equação de Dirac em 1+1

O potencial matricial mais geral em 1 + 1 dimensões pode ser escrito como sendo

$$V = \gamma^\mu A_\mu + IV_s + i\gamma^5 V_p \quad (4.46)$$

aqui  $\gamma^5 = \gamma^0\gamma^1$  com as matrizes gama de ordem  $N = 2$ . Note que um potencial pseudovetorial seria escrito como  $-\gamma^\mu A'_\mu$ , e um potencial tensorial seria escrito como  $i\gamma^5 (T_{01} - T_{10})$ . Sendo assim, esses potenciais podem ser pensados como sendo os potenciais vetorial e pseudoescalar, respectivamente. Neste caso  $(\gamma^5)^2 = I$ , e o hamiltoniano pode ser escrito como

$$H = \gamma^5 c \left( \hat{p}_1 + \frac{A_1}{c} \right) + IA_0 + \gamma^0 (mc^2 + V_s) + i\gamma^1 V_p. \quad (4.47)$$

Entretanto, se os potenciais forem independente do tempo poderemos escrever  $\Psi(x, t) = \tilde{\psi}(x) \exp(-iEt/\hbar)$  e obter a equação de Dirac independente do tempo  $H\tilde{\psi} = E\tilde{\psi}$ . O componente espacial do potencial vetorial pode ser eliminado com uma redefinição do espinor, tal como

$$\tilde{\psi}(x) = \phi(x) \exp[\lambda(x)], \quad \lambda(x) = \frac{i}{\hbar c} \int^x d\xi V_e(\xi), \quad (4.48)$$

onde  $A^1 = V_e$  e  $A^0 = V_t$  é o componente espacial e temporal do potencial vetorial, respectivamente. O termo do hamiltoniano que atua no espinor é

$$\left( i\hbar\partial_x + \frac{V_e}{c} \right) \tilde{\psi} = \exp(\lambda) \hat{p}_1 \phi. \quad (4.49)$$

Substituindo o espinor (4.48) na equação de Dirac independente do tempo a equação torna-se

$$H\phi = [\gamma^5 c\hat{p}_1 + IV_t + \gamma^0 (mc^2 + V_s) + i\gamma^1 V_p] \phi = E\phi. \quad (4.50)$$

Neste processo o componente espacial do vetor foi eliminado sem perda de generalidade.

#### 4.3.1 Transformações na equação de Dirac

##### 4.3.1.1 Conjugação de carga

A operação conjugação de carga troca o sinal da interação eletromagnética. Tal operação leva a mudança no sinal dos componentes vetorial  $A_\mu$ , pseudoescalar  $V_p$  e da energia  $E$ . Na equação de Dirac com  $\phi^T = (\phi_+ \phi_-)$ , isto está de acordo com a transformação

$$\phi_c = \gamma^5 \phi^* = \begin{pmatrix} \phi_-^* \\ \phi_+^* \end{pmatrix} \quad (4.51)$$

note que, nesta operação tomamos o complexo conjugado de  $\phi$  com a inversão dos componentes superior pelo inferior.

Aplicando a operação conjugação de carga na equação de Dirac (4.50) temos

$$H_c \phi_c = -E \phi_c \quad (4.52)$$

onde  $H_c = -\gamma^5 H^* \gamma^5$

$$H_c = \gamma^5 c \hat{p}_1 - IV_t + \gamma^0 (mc^2 + V_s) - i\gamma^1 V_p \quad (4.53)$$

observe que a conjugação de carga realiza a seguinte mudança:  $E \rightarrow -E$ ,  $V_t \rightarrow -V_t$  e  $V_p \rightarrow -V_p$ . O hamiltoniano é invariante sob a conjugação de carga caso possua somente acoplamento escalar. De fato,  $V_t$  e  $V_p$  diferem férmions de antiférmions (partículas de antipartículas) mas  $V_s$  não, assim o espectro deve ser simétrico entorno de  $E = 0$  no caso de potencial escalar puro.

#### 4.3.1.2 Transformação quirial

O operador quirial é representado por  $\gamma^5$ , e a transformação quirial é associada com este operador [74]. Na equação de Dirac tal transformação está de acordo com

$$\phi_\chi = \gamma^5 \phi = \begin{pmatrix} \phi_- \\ \phi_+ \end{pmatrix}. \quad (4.54)$$

Note que neste caso há apenas a inversão dos componentes superior pelo inferior do espinor.

Aplicando o operador quirial na equação (4.50) temos

$$H_\chi \phi_\chi = E \phi_\chi, \quad (4.55)$$

onde

$$H_\chi = \gamma^5 c \hat{p}_1 + IV_t - \gamma^0 (mc^2 + V_s) - i\gamma^1 V_p. \quad (4.56)$$

Observe que a transformação quirial realiza a seguinte mudança:  $m \rightarrow -m$ ,  $V_s \rightarrow -V_s$  e  $V_p \rightarrow -V_p$ . O hamiltoniano será invariante caso a massa e os acoplamentos escalar e pseudoescalar sejam nulos.

#### 4.3.1.3 Transformação quirial contínua

Consideremos o operador unitário

$$U = \exp\left(-i\gamma^5 \frac{\theta}{2}\right) \quad (4.57)$$

onde  $\theta$  é uma quantidade real contida no intervalo  $0 \leq \theta \leq \pi$ . Realizando uma expansão, o operador será reescrito como  $U = I \cos \theta/2 - i\gamma^5 \text{sen}\theta/2$ . Definindo o espinor transformado  $\psi = U \phi$  e o novo hamiltoniano  $h = U H U^{-1}$  temos

$$h \psi(x) = E \psi(x), \quad (4.58)$$

onde  $h$  possui a forma

$$h = \gamma^5 c \hat{p}_1 + I V_t + \gamma^0 [(m c^2 + V_s) \cos \theta - V_p \text{sen}\theta] + i \gamma^1 [(m c^2 + V_s) \text{sen}\theta + V_p \cos \theta]. \quad (4.59)$$

Note que sob esta transformação quiral contínua o hamiltoniano é invariante, ou seja, apresenta uma simetria, quando  $m = V_s = V_p = 0$  [75].

Os componentes do espinor  $\psi$  podem ser escritos, como

$$\psi_{\pm} = \cos \frac{\theta}{2} \phi_{\pm} - i \text{sen} \frac{\theta}{2} \phi_{\mp} \quad (4.60)$$

cuja normalização é feita por meio da  $\int_{-\infty}^{+\infty} dx (|\psi_+|^2 + |\psi_-|^2) = 1$ , desta forma,  $\psi_+$  e  $\psi_-$  deverão ser funções quadrado-integráveis. Note que a transformação  $U$  preserva a forma da corrente  $J^\mu = c \bar{\Phi} \gamma^\mu \Phi$ :

$$\Psi = U \Phi \Rightarrow \Phi = U^{-1} \Psi \quad (4.61)$$

$$\bar{\Phi} = \bar{\Psi} \gamma^0 U \gamma^0$$

substituindo (4.61) na corrente  $J^\mu$  temos

$$J^\mu = c \bar{\Psi} \gamma^0 U \gamma^\mu U^{-1} \Psi = c \begin{cases} \bar{\Psi} \gamma^0 \Psi, & \mu = 0 \\ \bar{\Psi} \gamma^1 \Psi, & \mu = 1 \end{cases} \quad (4.62)$$

**4.3.1.3.1 Limite não-relativístico** Fazendo  $V_p = 0$  e utilizando como representações  $\gamma^0 = \sigma_3$  e  $\gamma^1 = i\sigma_2$  de tal forma que  $\gamma^5 = \sigma_1$ . Para potenciais muito menores que  $m c^2$  e  $E \approx \pm m c^2$ , os componentes do espinor e a equação de Dirac tornam-se

$$\psi_{\mp} \approx \pm \frac{\hat{p}_1}{2m c} \psi_{\pm} \quad (4.63)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi_{\pm}}{dx^2} + (V_s \pm V_t) \psi_{\pm} = (E \mp m c^2) \psi_{\pm}. \quad (4.64)$$

A equação (4.63) mostra que  $\psi_{\mp}$  é da ordem de  $v/c \ll 1$  relativo a  $\psi_{\pm}$ , e a equação (4.64) mostra que  $\psi_{\pm}$  obedece a equação de Schrödinger com potencial efetivo  $V_s \pm V_t$  e energia  $E \mp m c^2$ . Isto significa que férmions (antiférmions), em potenciais fracos, são sujeitos ao

potencial efetivo  $V_s + V_t$  ( $V_s - V_t$ ) com energia  $E \approx \pm mc^2$ . Entretanto, uma mistura de potenciais com  $V_t = -V_s$  ( $V_t = +V_s$ ) estará associada com férmions (antiférmions) livres no regime não-relativístico.

### 4.3.2 Perspectiva Sturm-Liouville

De posse das discussões sob transformação quiral contínua, iremos concentrar nossa atenção no desacoplamento dos componentes do espinor.

Em termos dos componentes do novo espinor a equação de Dirac (4.58) torna-se

$$[E - V_t \mp (mc^2 + V_s) \cos \theta] \psi_{\pm} = \pm i [(mc^2 + V_s) \sin \theta \mp \hbar c \partial_x] \psi_{\mp}. \quad (4.65)$$

Além disto,

$$\frac{J^\mu}{c} = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi = \begin{cases} |\psi_+|^2 + |\psi_-|^2, & \mu = 0 \\ 2\text{Re}(\psi_+^* \psi_-), & \mu = 1 \end{cases} \quad (4.66)$$

Escolhendo

$$V_t = V_s \cos \theta \quad (4.67)$$

temos duas equações acopladas com  $|V_s| \geq |V_t|$

$$[E - (mc^2 + 2V_s) \cos \theta] \psi_+ = +i [(mc^2 + V_s) \sin \theta - \hbar c \partial_x] \psi_- \quad (4.68)$$

$$(E + mc^2 \cos \theta) \psi_- = -i [(mc^2 + V_s) \sin \theta + \hbar c \partial_x] \psi_+. \quad (4.69)$$

É possível analisar as simetrias de spin ( $V_t = V_s$ ) e pseudospin ( $V_t = -V_s$ ) e o caso de potencial escalar puro mediante a escolha do parâmetro  $\theta$  por meio da equação (4.67). Estas simetrias quando realizadas na equação de Dirac possuem um espectro de energia idêntico ao espectro de partículas sem spin.

Note ainda que o vínculo representado por (4.67), quando o ângulo de mistura  $\theta$  vai de  $\pi/2 - \varepsilon$  para  $\pi/2 + \varepsilon$  o sinal do espectro sofrerá uma inversão equivalente a operação conjugação de carga e o espectro de um férmion não massivo é invariante sob a operação conjugação quiral. Combinando as operações conjugação de carga e conjugação quiral o espectro de um férmion não massivo deverá ser simétrico sob  $E = 0$  mesmo na presença de um potencial vetorial.

As soluções das equações foram divididas em duas classes para energia  $E$ , sendo uma igual e outra diferente de  $-mc^2 \cos \theta$ .

### 4.3.2.1 Classe $E = -mc^2 \cos \theta$

Analisando as equações (4.68) e (4.69) com  $E = -mc^2 \cos \theta$  iremos obter as soluções isoladas. Estas soluções são excluídas do problema tipo Sturm-Liouville, e podem ser obtidas diretamente das equações originais. De tal forma, que o problema se reduz a resolver equações diferenciais de primeira ordem

$$\psi_- = N_- - 2iN_+ \left[ \cos \theta \left( \frac{x}{\lambda} + \frac{1}{\hbar c} \int^x V_s(\xi) d\xi \right) \right] \quad (4.70)$$

$$\psi_+ = N_+ \quad (4.71)$$

para  $\sin \theta = 0$ , e

$$\psi_- = N_- \exp \left[ \text{sen} \theta \left( \frac{x}{\lambda} + \frac{1}{\hbar c} \int^x V_s(\xi) d\xi \right) \right] + i \cot \theta \psi_+ \quad (4.72)$$

$$\psi_+ = N_+ \exp \left[ -\text{sen} \theta \left( \frac{x}{\lambda} + \frac{1}{\hbar c} \int^x V_s(\xi) d\xi \right) \right] \quad (4.73)$$

para  $\sin \theta \neq 0$ .  $N_+$  e  $N_-$  são constantes de normalização e  $\lambda = \hbar / (mc)$  é o comprimento de onda Compton. Nesta classe de soluções não há espalhamento. Ambos os conjuntos de soluções apresentam como componente espacial da corrente igual a  $2c\text{Re}(N_+^* N_-)$  e as soluções de estados ligados exigem que  $N_+ = 0$  ou  $N_- = 0$ , para que  $\psi_+$  e  $\psi_-$  sejam quadrado-integráveis. Portanto não há soluções para  $\sin \theta = 0$ , ou seja, para simetrias de spin e pseudospin  $V_t = \pm V_s$ . A existência de estados ligados para esta classe de soluções dependerá do comportamento do potencial  $V_s$  [76] e  $\sin \theta \neq 0$ . O conjunto de soluções para  $\cos \theta = 0$  implica no potencial escalar puro e energia  $E = 0$ , com as soluções dadas por

$$\psi_{\pm} = N_{\pm} \exp \left[ \mp \left( \frac{x}{\lambda} + \frac{1}{\hbar c} \int^x V_s(\xi) d\xi \right) \right]. \quad (4.74)$$

Utilizando um potencial  $V_s(x) \ll mc^2$  e a energia  $E \approx mc^2$  teremos  $\cos \theta \approx -1$ , ou seja,  $\sin \theta \approx 0$ . Portanto, no limite não-relativístico não haverá solução nesta classe.

### 4.3.2.2 Classe $E \neq -mc^2 \cos \theta$

Por intermédio da equação (4.69) podemos obter uma expressão para o componente inferior do espinor  $\psi_-$

$$\psi_- = -i \frac{(mc^2 + V_s) \text{sen} \theta + \hbar c \partial_x}{E + mc^2 \cos \theta} \psi_+ \quad (4.75)$$

aqui

$$\frac{J^1}{c} = \bar{\psi} \gamma^1 \psi = \frac{2\hbar c^2}{E + mc^2 \cos \theta} \text{Im} \left( \psi_+^* \frac{d\psi_+}{dx} \right) \quad (4.76)$$

substituindo em (4.68) obteremos uma equação diferencial de segunda ordem para o componente superior do espinor  $\psi_+$ , conforme mostrado na equação (4.77):

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2} \frac{d^2}{dx^2} + V_{ef} \right) \psi_+ = E_{ef} \psi_+ \quad (4.77)$$

onde

$$V_{ef} = \frac{\text{sen}^2 \theta V_s^2 + 2(mc^2 + E \cos \theta) V_s - \hbar c \text{sen} \theta \frac{dV_s}{dx}}{2c^2} \quad (4.78)$$

$$E_{ef} = \frac{E^2 - m^2 c^4}{2c^2} \quad (4.79)$$

A equação (4.77) permite mapear as soluções relativísticas, de partículas de spin 1/2 com ou sem massa, mediante ao problema de Sturm-Liouville para o componente superior do espinor de Dirac. As soluções para  $\psi_-$  podem ser obtidas por meio da relação encontrada na expressão (4.75). Para o caso de potencial escalar puro ( $\theta = \pi/2$ ) com  $E \neq 0$  é possível escrever a equação diferencial de segunda ordem para o componente  $\psi_{\pm}$  diferenciando apenas o sinal do termo envolvendo  $dV_s/dx$

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{V_s^2}{2c^2} + V_s \mp \frac{\hbar}{2c} \frac{dV_s}{dx} \right) \psi_{\pm} = E_{ef} \psi_{\pm} \quad (4.80)$$

Esta estrutura de supersimetria da equação de Dirac em duas dimensões com o acoplamento escalar puro tem sido apreciada na literatura [77]-[78].

## Capítulo 5

### Potencial degrau abrupto

Vamos concentrar nossa atenção nas soluções da equação de Dirac em  $1 + 1$  dimensões com o potencial escalar na forma

$$V_s = V_0 \operatorname{sgn}(x) \quad (5.1)$$

onde  $\operatorname{sgn}(x) = x/|x|$  ( $x \neq 0$ ) é a função sinal, e  $V_0$  é a intensidade do potencial e que define o tamanho do degrau. A análise deste potencial levou a uma recente publicação [67]. Na Figura 4.1 é mostrado o esboço do potencial degrau abrupto  $V_s$ .

Com a escolha do potencial vamos nos concentrar nas soluções das equações (4.68) e (4.69).

#### 5.1 Classe $E = -mc^2 \cos \theta$

Conforme discutido anteriormente, não há solução para  $\operatorname{sen} \theta = 0$ . Realizando a substituição da função  $\int^x V_0 \operatorname{sgn}(\xi) d\xi = V_0 |x|$  nas equações (4.72) e (4.73) teremos:

$$\psi_- = N_- \exp \left[ \operatorname{sen} \theta \left( \frac{V_0}{\hbar c} + \frac{\operatorname{sgn}(x)}{\lambda} \right) |x| \right] + i \cot \theta \psi_+ \quad (5.2)$$

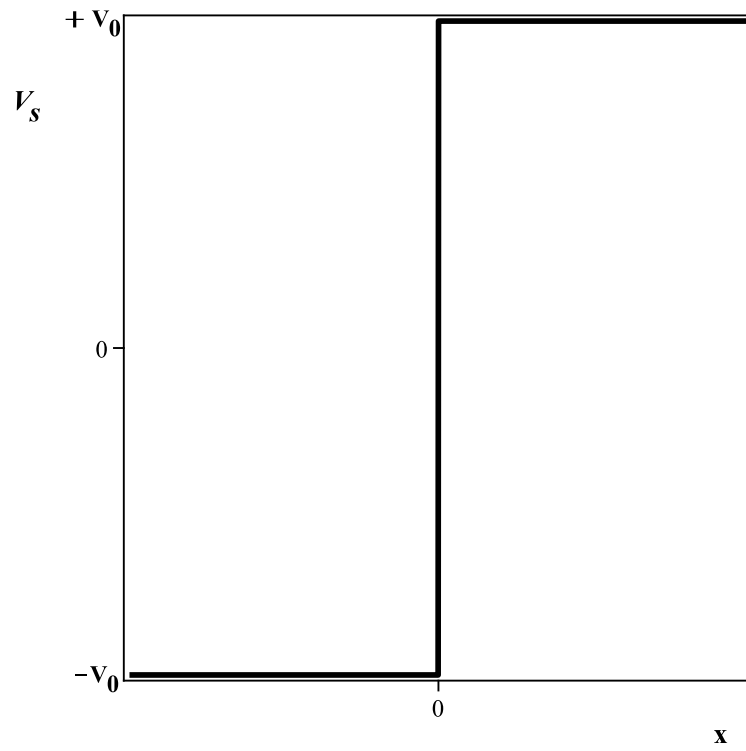
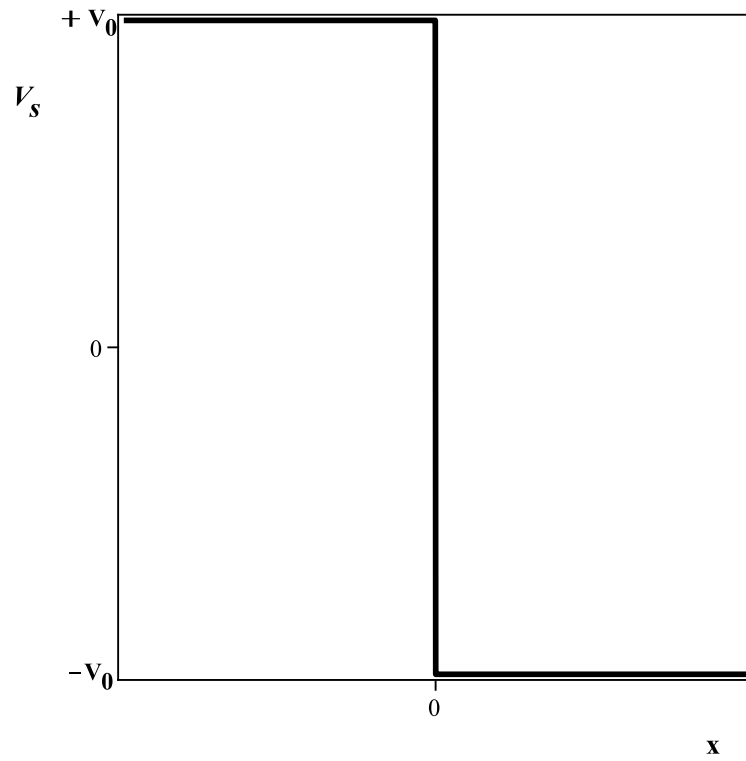
$$\psi_+ = N_+ \exp \left[ -\operatorname{sen} \theta \left( \frac{V_0}{\hbar c} + \frac{\operatorname{sgn}(x)}{\lambda} \right) |x| \right].$$

A solução normalizada para  $\operatorname{sen} \theta \neq 0$  requer que  $|V_0| > mc^2$ . Reforçando que esta classe de soluções existe somente para potenciais fortes, ou seja, no regime estritamente relativístico.

Para  $V_0 > mc^2$ , a constante de normalização  $N_- = 0$ , e o espinor normalizado é

$$\psi = \begin{pmatrix} 1 \\ i \cot \theta \end{pmatrix} N_> f, \quad (5.3)$$

onde

(a)  $V_0 > 0$ (b)  $V_0 < 0$ **Figura 5.1:** *Esboço do potencial degrau abrupto  $V_s = V_0 \operatorname{sgn}(x)$ .*



$$f = \exp \left\{ -\text{sen}\theta \left[ \frac{|V_0|}{\hbar c} + \frac{\text{sgn}(xV_0)}{\lambda} \right] |x| \right\}. \quad (5.4)$$

Observe que para um férmion não massivo  $f$  não depende do sinal nem de  $V_0$  e nem de  $x$ .

Para o caso em que  $V_0 < -mc^2$ , a constante de normalização  $N_+ = 0$ , e o espinor normalizado torna-se

$$\psi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} N_< f. \quad (5.5)$$

A condição de normalização  $\int_{-\infty}^{+\infty} dx (|\psi_+|^2 + |\psi_-|^2) = 1$  permite determinar  $N_{\geq}$ . Para este potencial foi obtido

$$N_> = N_< \text{sen}\theta = \text{sen}\theta \sqrt{\text{sen}\theta \frac{|V_0|^2 - m^2 c^4}{\hbar c |V_0|}}. \quad (5.6)$$

A densidade de probabilidade  $|\psi|^2 = |\psi_+|^2 + |\psi_-|^2$  resulta em

$$|\psi|^2 = (N_< f)^2 = \frac{\text{sen}\theta |V_0|^2 - m^2 c^4}{\hbar c |V_0|} f^2. \quad (5.7)$$

Note que para um férmion não massivo a densidade de probabilidade de posição não depende do sinal de  $V_0$  e deve ser simétrica entorno de  $x = 0$ .

Na Figura 5.2 é mostrado o esboço da densidade de probabilidade. Um termo adicional  $M$ , com dimensão de massa, foi inserido para manter as soluções adimensionais. (a) representa um férmion não massivo com  $M$  sendo uma constante e (b) um férmion massivo, onde  $M$  é a própria massa  $m$ . Para ambos os caso foi utilizado  $|V_0|/mc^2 = 2$  e  $\theta = 3\pi/8$ .

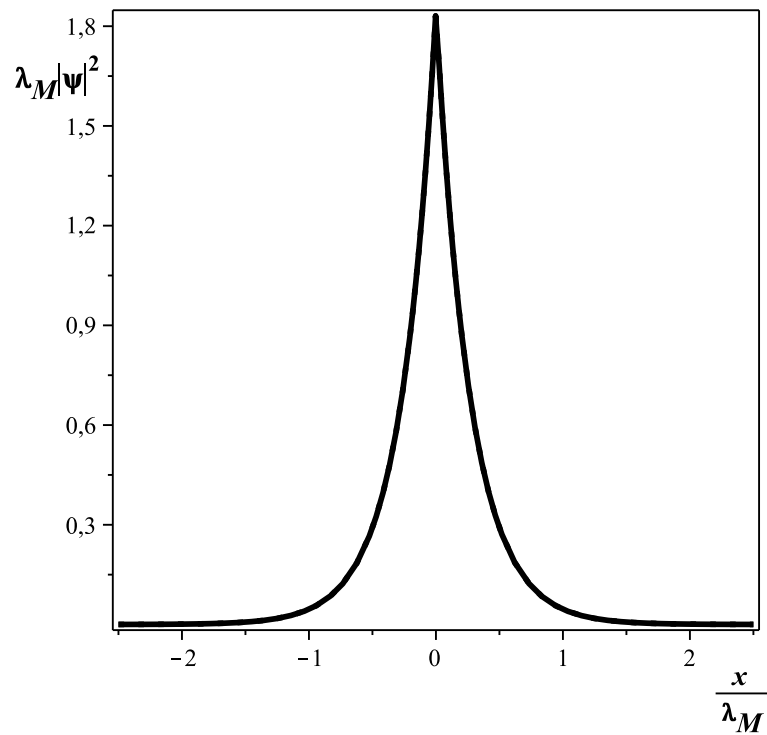
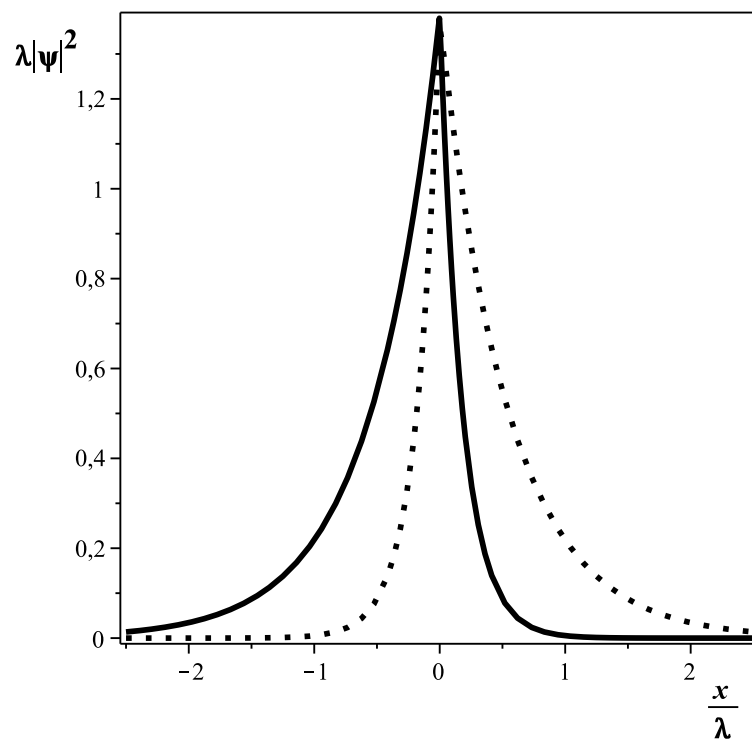
Os valores permitidos para as energias das soluções isoladas é mostrado na Figura 5.3 com  $M$  sendo uma constante que possui dimensão de massa para férmions não massivos e para férmions massivos  $M = m$ .

Acoplamento escalar associa a variação da massa da partícula com a posição. Contudo, em dinâmica de altas energias esta variação massiva pode comprometer a relação de incerteza de Heisenberg. Para isto será calculada a incerteza na posição e verificada a relação de Heisenberg.

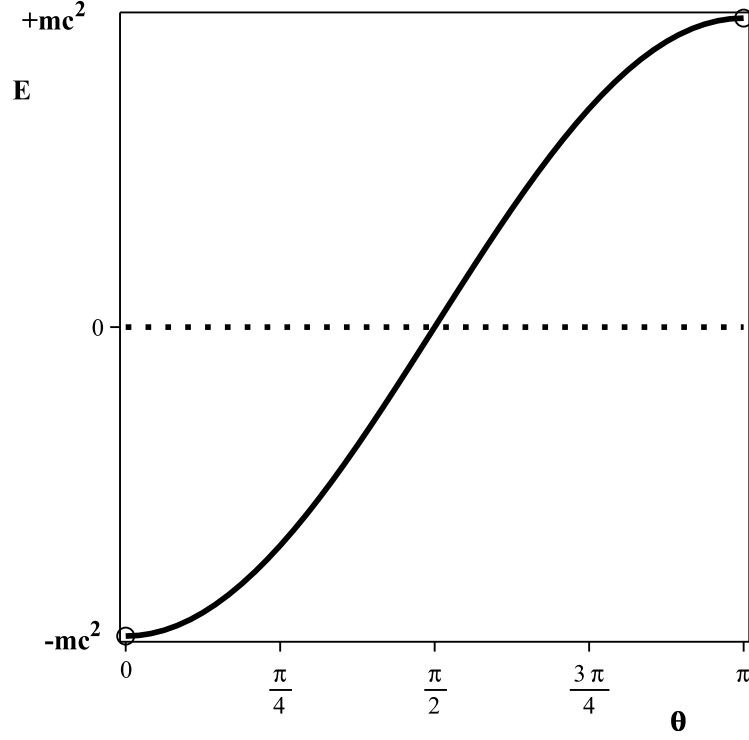
O valor esperado da posição é dado por

$$\langle x \rangle = - \frac{\lambda \text{sgn}(V_0)}{\text{sen}\theta \left[ \left( \frac{|V_0|}{mc^2} \right)^2 - 1 \right]}. \quad (5.8)$$

O férmion tende a se concentrar na região do lado esquerdo (direito) para  $V_0 > 0$  ( $V_0 < 0$ ), e a se afastar mais e mais da origem com a diminuição de  $\text{sen}\theta$ . O valor esperado  $\langle x^2 \rangle$  é

(a)  $m = 0$ (b)  $m \neq 0$ 

**Figura 5.2:** Densidade de probabilidade de posição da solução isolada para  $V_s = V_0 \operatorname{sgn}(x)$  com  $\theta = 3\pi/8$ . Linha contínua (pontilhada) em  $V_0/mc^2 = 2$  ( $-2$ ). Aqui  $\lambda = \hbar/(mc)$  e  $\lambda_M = \hbar/(Mc)$ .



**Figura 5.3:** Valores permitidos para as energias em função do ângulo de mistura  $\theta$ . A linha contínua (pontilhada) está relacionada a férmions massivos (não massivos) .

$$\langle x^2 \rangle = \frac{\lambda^2}{2\text{sen}^2\theta} \frac{|V_0|^2 + 3m^2c^4}{m^2c^4 \left[ \left( \frac{|V_0|}{mc^2} \right)^2 - 1 \right]^2} \quad (5.9)$$

e o desvio padrão  $\Delta x$

$$\Delta x = \frac{\lambda}{\sqrt{2}\text{sen}\theta} \frac{\sqrt{\left( \frac{|V_0|}{mc^2} \right)^2 + 1}}{\left[ \left( \frac{|V_0|}{mc^2} \right)^2 - 1 \right]}. \quad (5.10)$$

A melhor localização ocorre para o caso do acoplamento escalar puro ( $\theta = \pi/2$ ). Caso  $\Delta x$  encolha, a incerteza no momento  $\Delta p$  irá aumentar, em harmonia com a relação de incerteza de Heisenberg. Entretanto, a máxima incerteza no momento é dada por  $mc$ , impondo a impossibilidade de se localizar o férmion em uma região do espaço menor que a metade do comprimento de onda Compton [68]-[69]. Este impasse pode ser solucionado introduzindo o conceito de massa efetiva e comprimento de onda efetivo. Se definirmos uma massa efetiva  $m_{ef} = m\sqrt{1 + (V_0/mc^2)^2}$  e o comprimento de onda Compton efetivo  $\lambda_{ef} = \hbar / (m_{ef}c)$  iremos encontrar

$$\Delta x = \frac{\lambda_{ef}}{\sqrt{2}\text{sen}\theta} \frac{|V_0|^2 + m^2c^4}{|V_0|^2 - m^2c^4}. \quad (5.11)$$

Segue-se que a melhor localização de férmions está relacionada a altos valores de  $V_0$  e com o acréscimo de  $\text{sen}\theta$ , e que com esta definição não há ameaça à interpretação da teoria de Dirac caso os férmions não possuam massa, pois neste caso  $m_{ef} = |V_0|/c^2$ . Note ainda que a equação (5.11) fornece

$$(\Delta x)_{\min} = \frac{\lambda_{ef}}{\sqrt{2}\text{sen}\theta} \quad (5.12)$$

para  $V_0 \gg mc^2$ .

## 5.2 Classe $E \neq -mc^2 \cos \theta$

Substituindo o potencial  $V_s$  na equação (4.78) o potencial efetivo torna-se

$$V_{ef} = V_1 \delta(x) + V_2 \text{sgn}(x) + V_3. \quad (5.13)$$

com

$$V_1 = -\frac{V_0 \hbar \text{sen}\theta}{c}, \quad V_2 = \frac{V_0 (mc^2 + E \cos \theta)}{c^2} \quad \text{e} \quad V_3 = \frac{V_0^2 \text{sen}^2 \theta}{2c^2}. \quad (5.14)$$

Para  $\text{sen}\theta = 0$  o potencial efetivo torna-se um degrau ascendente (descendente) quando  $V_2 > 0$  ( $V_2 < 0$ ). Caso  $\text{sen}\theta \neq 0$  o potencial efetivo é um degrau com uma função delta atrativa (repulsiva) na origem para  $V_0 > 0$  ( $V_0 < 0$ ). É esperado espalhamento em todas as circunstâncias e estados ligados para  $\text{sen}\theta \neq 0$  e  $V_0 > 0$ . Na Figura 5.4 é realizado um esboço do potencial efetivo.

A solução pode ser mapeada em um problema de Sturm-Liouville, utilizando as seguintes condições de contorno. A função deve ser contínua em  $x = 0$

$$\psi_+|_{x=0_+} - \psi_+|_{x=0_-} = 0. \quad (5.15)$$

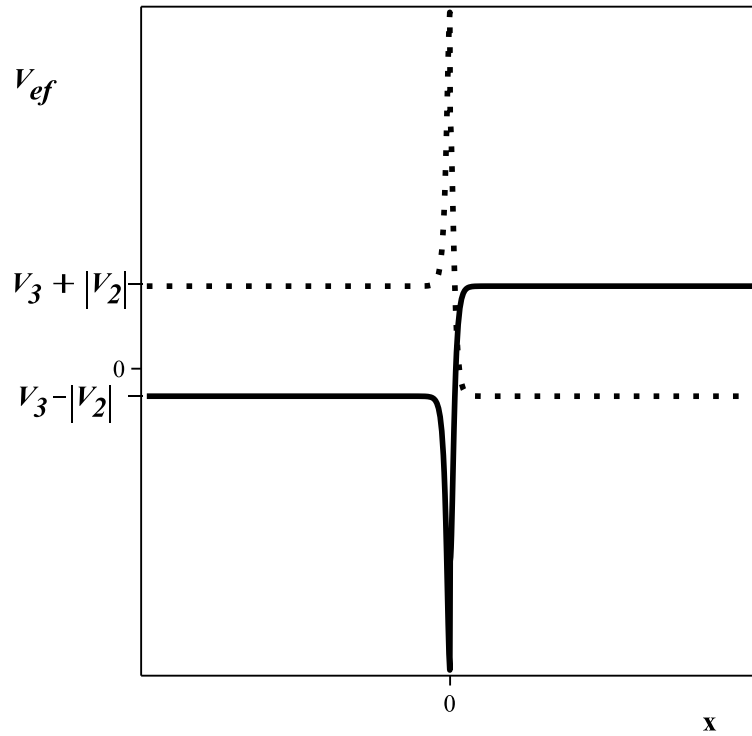
A primeira derivada da função de onda em  $x = 0$  é descontínua, devido à função  $\delta(x)$ , e pode ser encontrada mediante a integração na vizinhança de  $x = 0$  da equação (4.77), conforme mostrado na equação (5.16).

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} dx \left( \frac{d^2}{dx^2} + 2 \frac{E_{ef} - V_{ef}}{\hbar^2} \right) \psi_+ = 0, \quad (5.16)$$

cujas solução tem a forma

$$\left. \frac{d\psi_+}{dx} \right|_{x=0_+} - \left. \frac{d\psi_+}{dx} \right|_{x=0_-} = -\frac{2V_0 \text{sen}\theta}{\hbar c} \psi_+(0). \quad (5.17)$$

Note que a descontinuidade de  $d\psi_+/dx$  ocorre somente para  $\text{sen}\theta \neq 0$ , sendo contínua se  $\text{sen}\theta = 0$ .



**Figura 5.4:** Potencial efetivo para  $V_s = V_0 \operatorname{sgn}(x)$  com  $\theta = 3\pi/8$ . Linha contínua (pontilhada) para  $V_0/mc^2 = 1$  (-1).

### 5.2.1 Espalhamento

Substituindo o potencial efetivo na equação (4.77) iremos obter uma equação do tipo Schrödinger

$$\left\{ \frac{d^2}{dx^2} + \frac{[E - V_0 \cos \theta \operatorname{sgn}(x)]^2 - [mc^2 + V_0 \operatorname{sgn}(x)]^2 + 2V_0 \hbar c \operatorname{sen} \theta \delta(x)}{(\hbar c)^2} \right\} \psi_+ = 0. \quad (5.18)$$

Analisando espalhamento de férmions vindo pela esquerda, temos:  $\psi$  em  $x \rightarrow -\infty$  descrevendo uma onda incidente movendo-se para direita e uma onda refletida movendo-se para esquerda, e  $\psi$  em  $x \rightarrow +\infty$  descrevendo uma onda transmitida movendo-se para direita ou uma onda evanescente. Neste caso o componente superior pode ser escrito como

$$\psi_+ = \begin{cases} A_+ \exp(ik_-x) + A_- \exp(-ik_-x), & x < 0 \\ B_+ \exp(ik_+x) + B_- \exp(-ik_+x), & x > 0 \end{cases} \quad (5.19)$$

onde

$$k_{\pm}^2 = \frac{(E \mp V_0 \cos \theta)^2 - (mc^2 \pm V_0)^2}{(\hbar c)^2}. \quad (5.20)$$

As soluções para o componente inferior  $\psi_-$  podem ser obtidas por meio da relação encontrada em (4.75). Note que  $k_+$  é real para uma onda progressiva e imaginário para uma onda evanescente, e  $k_-$  deve ser real. Caso  $E > -mc^2 \cos \theta$ , a solução expressa por (5.19) descreve ondas planas se propagando com:  $A_+ \exp(ik_-x)$  ( $A_- \exp(-ik_-x)$ ) para partículas incidentes (refletidas) e  $B_- = 0$ . Ao passo que se  $E < -mc^2 \cos \theta$  a solução será  $A_- \exp(-ik_-x)$  ( $A_+ \exp(ik_-x)$ ) para partículas incidentes (refletidas) e  $B_+ = 0$ . O fluxo de partículas ou densidade de corrente  $J^1(x < 0)$ , é dada por

$$J^1(x < 0) = \frac{2\hbar c^2 k_-}{E + mc^2 \cos \theta} (|A_{\pm}|^2 - |A_{\mp}|^2) = J_{inc} - J_{ref} \quad (5.21)$$

onde  $|A_{\pm}|$  representa o módulo da amplitude da onda incidente e  $|A_{\mp}|$  o módulo da amplitude da onda refletida. Por outro lado partículas movendo-se no eixo positivo de  $x$ , partículas transmitidas, serão descritas por  $B_+ \exp(ik_+x)$  e  $B_- = 0$  para  $E > -mc^2 \cos \theta$  ou  $B_- \exp(-ik_+x)$  e  $B_+ = 0$  para  $E < -mc^2 \cos \theta$ . O fluxo de partículas movendo-se para direita em  $x > 0$ , ou densidade de corrente  $J^1(x > 0)$  é

$$J^1(x > 0) = \pm \frac{2\hbar c^2 \text{Re}k_+}{E + mc^2 \cos \theta} |B_{\pm}|^2 = J_{trans}. \quad (5.22)$$

Mediante a continuidade da função de onda em  $x = 0$  temos

$$B_{\pm} = A_{\pm} + A_{\mp} \quad (5.23)$$

e a descontinuidade da primeira derivada em  $x = 0$  chegamos à expressão

$$\pm ik_+ B_{\pm} \mp ik_- (A_{\pm} - A_{\mp}) + \frac{2V_0 \text{sen} \theta}{\hbar c} B_{\pm} = 0. \quad (5.24)$$

A amplitude relativa  $t$  pode ser obtida por intermédio das equações (5.23) e (5.24)

$$t = \frac{B_{\pm}}{A_{\pm}} = \frac{2k_-}{k_+ + k_- \mp \frac{2iV_0 \text{sen} \theta}{\hbar c}}. \quad (5.25)$$

Os coeficientes de transmissão e reflexão podem ser determinados por meio das densidades de corrente  $J^1(x < 0)$  e  $J^1(x > 0)$ . Este é um caso estacionário em que os potenciais não dependem do tempo, e a densidade de corrente é uniforme, ou seja, não dependem das coordenadas, portanto de  $J^1(x < 0) = J^1(x > 0)$  e iremos obter

$$\frac{\text{Re}k_+}{k_-} |B_{\pm}|^2 = |A_{\pm}|^2 - |A_{\mp}|^2 \quad (5.26)$$

dividindo a equação (5.26) por  $|A_{\pm}|^2$

$$\frac{\text{Re}k_+}{k_-} \left| \frac{B_{\pm}}{A_{\pm}} \right|^2 + \left| \frac{A_{\mp}}{A_{\pm}} \right|^2 = 1. \quad (5.27)$$

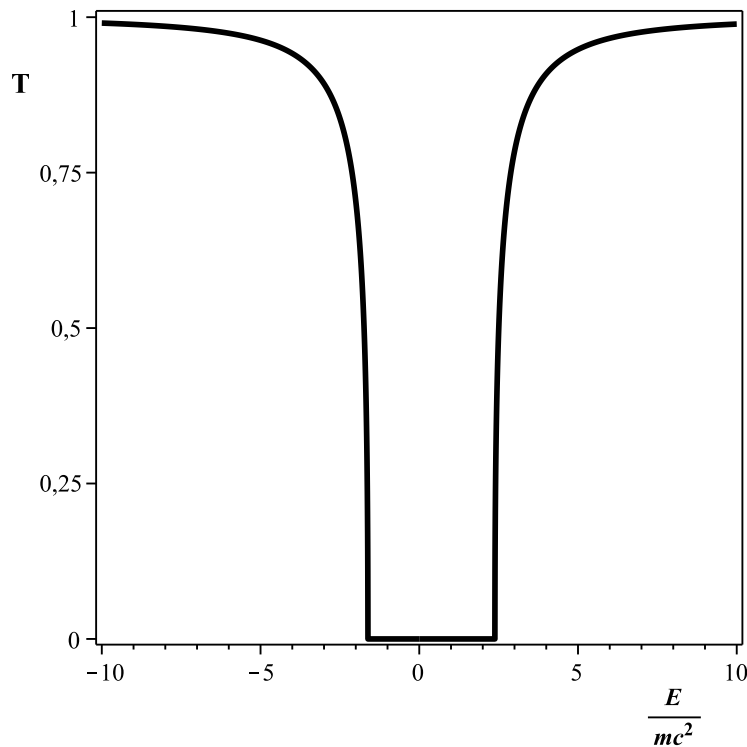
Substituindo a expressão (5.25) em (5.27)

$$R = \left| \frac{A_{\mp}}{A_{\pm}} \right|^2 = \frac{(k_- - k_+)^2 + \left( \frac{2V_0 \text{sen} \theta}{\hbar c} \right)^2}{(k_- + k_+)^2 + \left( \frac{2V_0 \text{sen} \theta}{\hbar c} \right)^2} \quad (5.28)$$

$$T = \frac{\text{Re} k_+}{k_-} \left| \frac{B_{\pm}}{A_{\pm}} \right|^2 = \frac{4k_- \text{Re} k_+}{(k_- + k_+)^2 + \left( \frac{2V_0 \text{sen} \theta}{\hbar c} \right)^2} \quad (5.29)$$

onde  $T$  é o coeficiente de transmissão e  $R$  coeficiente de reflexão, note que o coeficiente de transmissão é o mesmo para  $E \gtrless -mc^2 \cos \theta$ . No entanto, o espalhamento ocorrerá somente se  $k_-$  for uma quantidade real, ou seja,  $|E + V_0 \cos \theta| > |mc^2 - V_0|$ . Para o caso de partículas transmitidas é necessário que  $k_+$  seja real, isso implica  $|E - V_0 \cos \theta| > |mc^2 + V_0|$ . O caso de férmions não massivos e ou potencial escalar puro o coeficiente de transmissão  $T$  apresenta uma simetria com relação a  $E = 0$ .

Na Figura 5.5 é mostrado o comportamento do coeficiente de transmissão em função da energia com  $\theta = 3\pi/8$ . Assim como no caso não-relativístico, com o aumento da energia verifica-se o aumento da transmissão. Em outras palavras, quando  $|E| \rightarrow \infty T \rightarrow 1$ . Para o caso de férmions não massivo o espectro é simétrico com relação a  $E = 0$ .



**Figura 5.5:** Coeficiente de transmissão em função da energia para o potencial  $V_s = V_0 \text{sgn}(x)$  com  $V_0/mc^2 = 1$  e  $\theta = 3\pi/8$ .

Resultados intrigantes ocorrem devido à presença de um potencial degrau ascendente (descendente) para pequenos (grandes) valores de  $\theta$ . Para  $|V_0|/(mc^2) < 1$  o coeficiente de transmissão desaparece para pequenos valores de energia e do ângulo de mistura, pois

o potencial efetivo se torna maior que a energia efetiva, ou seja,  $k_+$  torna-se imaginário. Caso  $|V_0|/(mc^2) > 1$  a ausência de espalhamento ocorre para altos valores do ângulo de mistura e baixos valores da energia, graças à energia efetiva se tornar menor que o potencial efetivo, neste caso tanto  $k_+$  como  $k_-$  tornam-se imaginário. Na Figura 5.6 é mostrado o comportamento do coeficiente de transmissão em função do ângulo de mistura  $\theta$ .

## 5.2.2 Estados ligados

Conforme analisado anteriormente para espalhamento, partículas refletidas e transmitidas ocorrerão somente quando  $k_{\pm}$  for real. A possibilidade de estados ligados deve ocorrer na região onde não há espalhamento que é justamente quando  $k_{\pm}$  for imaginário puro.

Portanto, a solução dada por (5.19) para estados ligados requer  $k_{\pm} = i|k_{\pm}|$  e  $A_+ = 0$ , ou  $k_{\pm} = -i|k_{\pm}|$  e  $A_- = 0$  para que  $\psi_+$  seja uma função quadrado-integrável. No entanto,  $k_-$  será imaginário somente quando  $|mc^2 - V_0| > |E + V_0 \cos \theta|$ , e  $k_+$  será imaginário quando  $|mc^2 + V_0| > |E - V_0 \cos \theta|$ . Considerando a amplitude de transmissão  $t$  como uma função de variáveis complexas de  $k_{\pm}$ , teremos espalhamento para  $k_{\pm} > 0$ , e os estados ligados serão obtidos por polos ao longo dos eixos imaginários dos planos complexos. Estes são obtidos por meio da equação

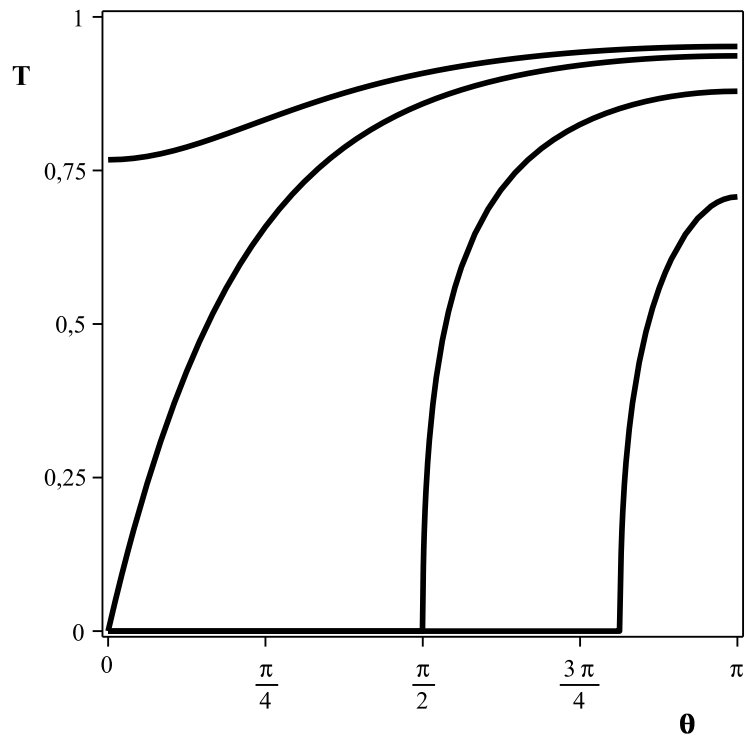
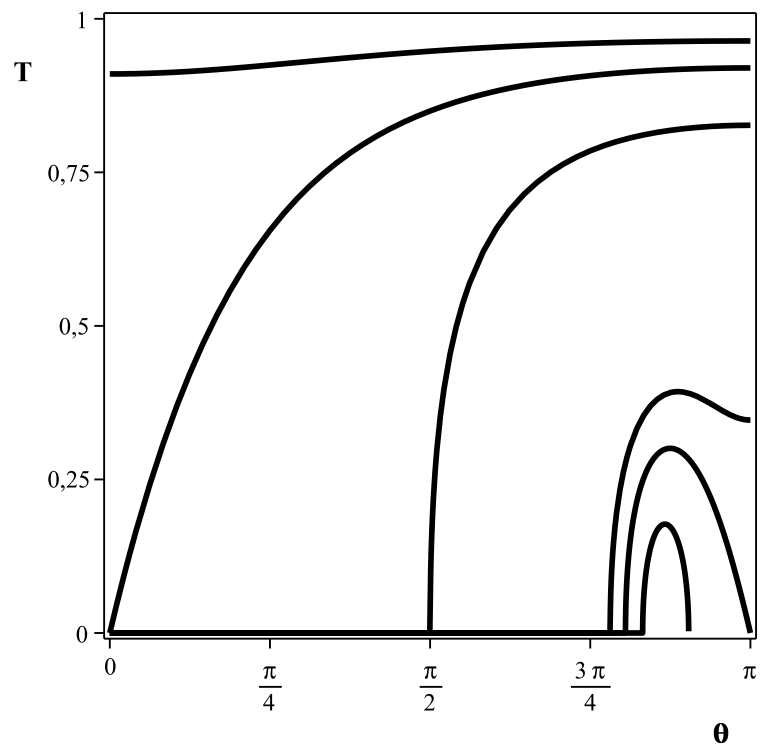
$$|k_+| + |k_-| = \frac{2V_0 \sin \theta}{\hbar c}. \quad (5.30)$$

A equação (5.30) é a condição de quantização. Devido ao fato que  $|k_+| > 0$  e  $|k_-| > 0$ , a existência de estados ligados fica restrita para  $V_0 > 0$  e  $\sin \theta \neq 0$ , ou seja, os estados ligados tendem a desaparecer no limite em que  $\theta \rightarrow 0$  ou  $\theta \rightarrow \pi$ , que é exatamente o caso de simetrias de spin e pseudospin. Entretanto, quando quadramos a equação (5.30) obtemos uma equação de segundo grau

$$E^2 + 2mc^2 \cos \theta E + m^2 c^4 \cos^2 \theta = 0 \quad (5.31)$$

cuja solução é justamente  $E = -mc^2 \cos \theta$ . Evidentemente, esta não é a solução do problema.



(a)  $\frac{V_0}{mc^2} = 0,9$ (b)  $\frac{V_0}{mc^2} = 1,1$ 

**Figura 5.6:** Coeficiente de transmissão em função do ângulo de mistura  $\theta$  para o potencial  $V_s = V_0 \operatorname{sgn}(x)$ . Altos coeficientes são relacionados a altas energias. A curva inferior corresponde a  $E/mc^2 = 1,15$ , tanto em (a) como em (b).

## Capítulo 6

### Potencial degrau suave

Neste capítulo, vamos concentrar nossa atenção no potencial escalar na forma

$$V_s = V_0 \tanh \gamma x \quad (6.1)$$

onde o parâmetro positivo  $\gamma$  está relacionado com o alcance da interação o qual faz  $V_s$  mudar apreciavelmente no intervalo  $-1/\gamma < x < +1/\gamma$ , e  $V_0$  é a altura do potencial em  $x = \infty$ . Quando  $1/\gamma \gg \lambda$  o potencial muda suavemente sob uma grande distância quando comparada com o comprimento de onda Compton, assim devemos esperar a ausência de fenômenos quânticos. Efeitos quânticos típicos ocorrem quando  $1/\gamma$  é comparado ao comprimento de onda Compton, e efeitos quânticos relativísticos são esperados quando  $1/\gamma$  é da mesma ordem ou menor que o comprimento de onda Compton. Note que quando  $\gamma \rightarrow \infty$ , o caso de regime extremamente relativístico, o potencial degrau suave se aproxima de um degrau abrupto. Na Figura 6.1 é mostrado o esboço do potencial degrau suave  $V_s$ .

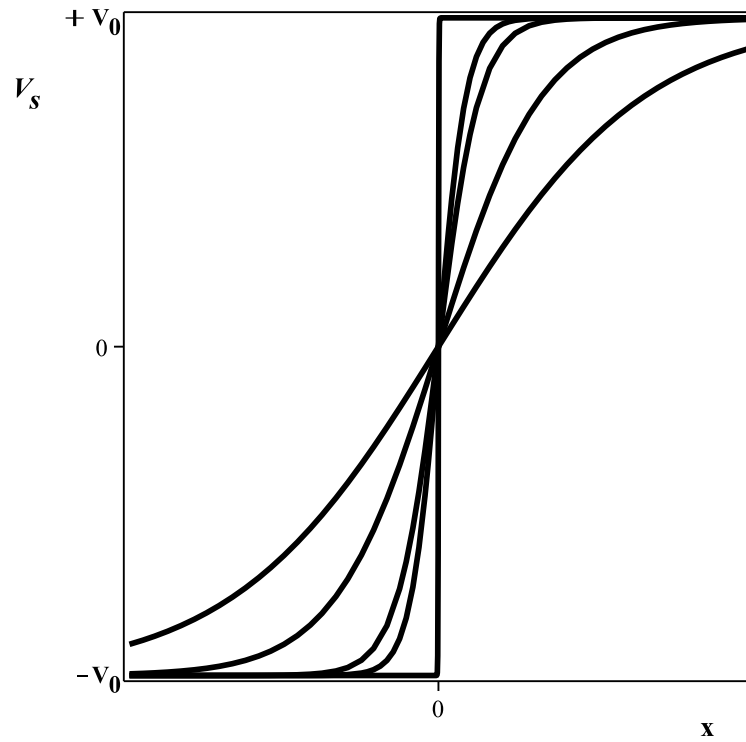
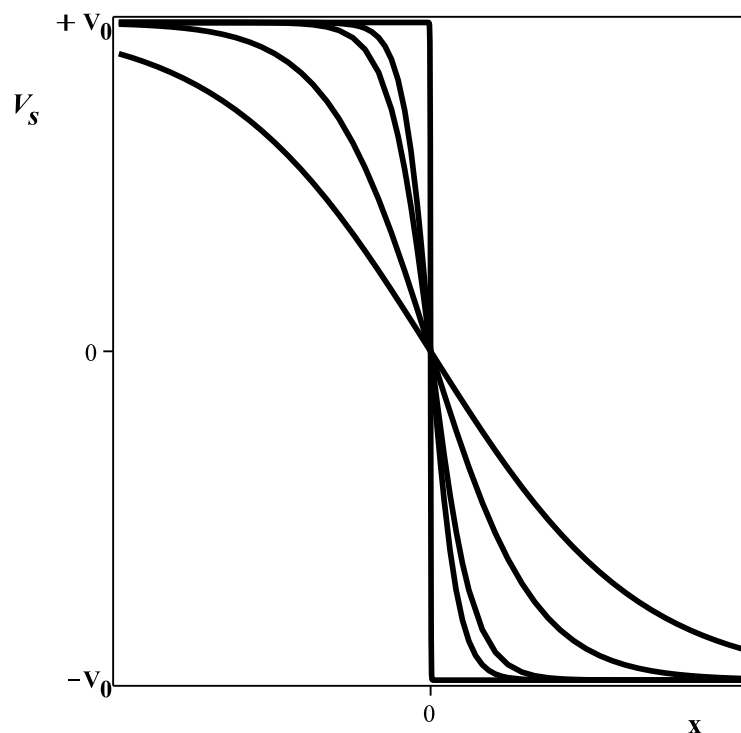
Com a escolha do potencial vamos nos concentrar nas soluções das equações (4.68) e (4.69).

#### 6.1 Classe $E = -mc^2 \cos \theta$

Realizando a substituição da função  $\int^x d\xi V_0 \tanh \gamma \xi = (V_0/\gamma) \ln(\cosh \gamma x)$  nas equações (4.73) e (4.72) teremos:

$$\begin{aligned} \psi_- &= i \cot \theta \psi_+ + N_- \exp \left\{ \text{sen} \theta \left[ \frac{x}{\lambda} + \frac{V_0 \ln(\cosh \gamma x)}{\gamma \hbar c} \right] \right\} \\ \psi_+ &= N_+ \exp \left\{ -\text{sen} \theta \left[ \frac{x}{\lambda} + \frac{V_0 \ln(\cosh \gamma x)}{\gamma \hbar c} \right] \right\} \end{aligned} \quad (6.2)$$

A normalização do espinor requer que  $\psi_{\pm}$  seja bem comportada no limite  $x \rightarrow \pm\infty$ . Note que

(a)  $V_0 > 0$ (b)  $V_0 < 0$ 

**Figura 6.1:** Esboço do potencial degrau suave  $V_s = V_0 \tanh \gamma x$ . Maior suavidade na curva corresponde a menores valores de  $\gamma$ .

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \ln(\cosh \gamma x) = \pm \gamma x. \quad (6.3)$$

Por meio do comportamento (6.3), verifica-se que a solução de (6.2) será normalizável se e somente se  $|V_0| > mc^2$  e  $\text{sen} \theta \neq 0$ , conforme o caso do potencial degrau abrupto, discutido anteriormente.

Para  $V_0 > mc^2$ , a constante de normalização  $N_- = 0$ , o espinor normalizado torna-se

$$\psi = \begin{pmatrix} 1 \\ i \cot \theta \end{pmatrix} N_> f \quad (6.4)$$

onde

$$f = \frac{\exp(-\alpha_1 |x|)}{(\cosh \gamma x)^{\frac{\alpha_2}{\gamma}}} \quad (6.5)$$

com

$$\alpha_1 = \frac{\text{sgn}(V_0 x) \text{sen} \theta}{\lambda}, \quad \alpha_2 = \frac{|V_0| \text{sen} \theta}{\hbar c} \quad (6.6)$$

note que para férmions não massivos  $\alpha_1 = 0$  e  $f$  deve ser simétrico em  $x = 0$ .

Para o caso em que  $V_0 < -mc^2$ , a constante de normalização  $N_+ = 0$ , o espinor normalizado é

$$\psi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} N_< f. \quad (6.7)$$

A condição de normalização  $\int_{-\infty}^{+\infty} dx (|\psi_+|^2 + |\psi_-|^2) = 1$  permite determinar  $N_{\geq}$ . Para este potencial foi obtido

$$N_> = N_< \text{sen} \theta = \frac{\text{sen} \theta}{2^{\frac{\alpha_2}{\gamma}}} \sqrt{\frac{2 \gamma}{B(\alpha_+, \alpha_-)}}. \quad (6.8)$$

Aqui foi utilizada a integral tabulada (veja 3.512.1, em [79]) para o cálculo de  $N_{\geq}$

$$\int_0^{\infty} dx \frac{\cosh 2\beta_1 x}{(\cosh \gamma x)^{2\beta_2}} = \frac{2^{2\beta_2}}{4\gamma} B\left(\beta_2 + \frac{\beta_1}{\gamma}, \beta_2 - \frac{\beta_1}{\gamma}\right) \quad (6.9)$$

onde  $B(z_1, z_2)$  é a função beta<sup>1</sup>, representada por

$$B(z_1, z_2) = \frac{\Gamma(z_1) \Gamma(z_2)}{\Gamma(z_1 + z_2)} \quad (6.10)$$

$\Gamma(z)$  é a função gama,  $\beta_1$  e  $\beta_2$  são constantes arbitrárias e

---

<sup>1</sup>Veja Apêndice A

$$\alpha_{\pm} = \frac{\text{sen}\theta}{\gamma} \left( \frac{|V_0|}{\hbar c} \pm \frac{1}{\lambda} \right) = \frac{\alpha_2 \pm \alpha_1}{\gamma} \quad (6.11)$$

observe que para férmions não massivos  $\alpha_+ = \alpha_- = \alpha_2/\gamma$ .

A densidade de probabilidade de posição pode ser obtida por meio das equações (6.4) e (6.7)

$$|\psi|^2 = (N_{<} f)^2 = \frac{2 \gamma}{B(\alpha_+, \alpha_-)} \frac{f^2}{2^{\frac{\alpha_2}{\gamma}}}. \quad (6.12)$$

O férmion massivo tende a se concentrar do lado esquerdo (direito) para  $V_0 > 0$  ( $V_0 < 0$ ) e com a diminuição de  $\text{sen}\theta$  e ou de  $\gamma$  tende a se afastar mais e mais da origem. Férmions não massivos possuem a densidade de probabilidade de posição simétrica em relação à origem. Podemos observar que a melhor localização ocorre para potencial escalar puro.

Quando  $\gamma \rightarrow \infty$  o potencial degrau suave tende ao potencial degrau abrupto e  $\alpha_{\pm} \rightarrow 0$ , conforme a equação (6.11). Observe que  $\Gamma(z)$  possui polos em  $z = -n$  com resíduo  $(-1)^n/n!$  [80], onde temos  $\Gamma(z) \simeq z^{-1}$  para  $z \simeq 0$ . Como consequência

$$\lim_{\alpha_{\pm} \rightarrow 0} B(\alpha_+, \alpha_-) = \frac{1}{\alpha_+} + \frac{1}{\alpha_-}. \quad (6.13)$$

Em termos de  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  teremos

$$\lim_{\alpha_{\pm} \rightarrow 0} B(\alpha_+, \alpha_-) = \gamma \frac{2\alpha_2}{\alpha_2^2 - \alpha_1^2} \quad (6.14)$$

e

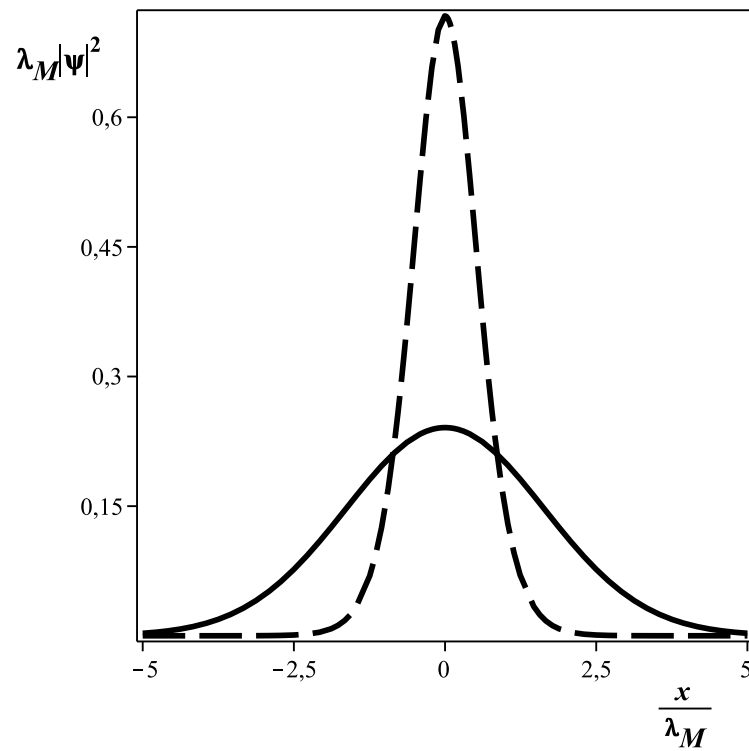
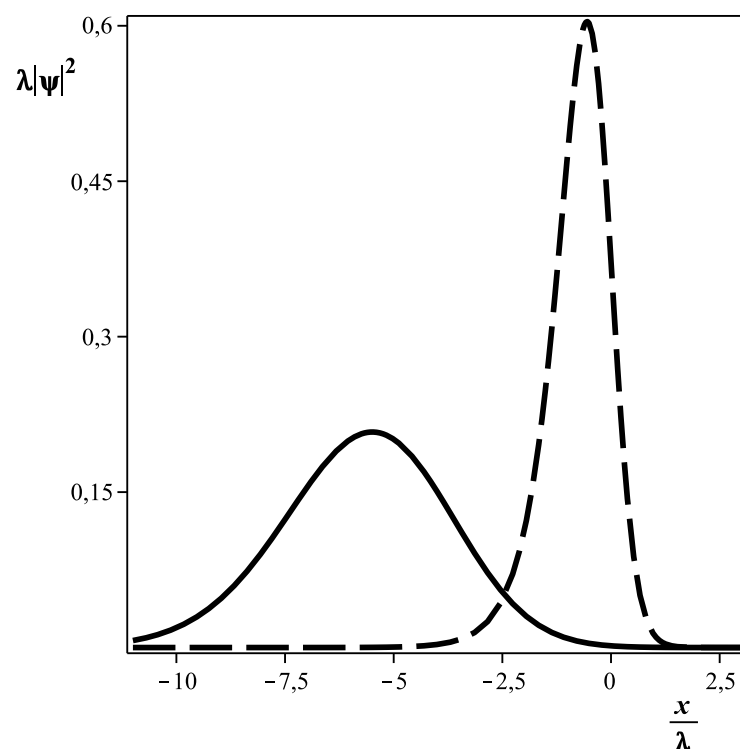
$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} (\cosh \gamma x)^{-\frac{2\alpha_2}{\gamma}} = \exp[-2\alpha_2 \text{sgn}(x)] \quad (6.15)$$

substituindo (6.15) e (6.14) em (6.12)

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} |\psi|^2 = \text{sen}\theta \frac{|V_0|^2 - m^2 c^4}{\hbar c |V_0|} \exp \left\{ -2\text{sen}\theta \left[ \frac{\text{sgn}(V_0 x)}{\lambda} + \frac{|V_0|}{\hbar c} \right] |x| \right\} \quad (6.16)$$

onde  $\text{sen}\theta (|V_0|^2 - m^2 c^4) / (\hbar c |V_0|) = (\alpha_2^2 - \alpha_1^2) / \alpha_2$ . Observe a semelhança da equação (6.16) com a equação (5.7), como esperado no limite de  $\gamma \rightarrow \infty$  retornamos ao caso do potencial degrau abrupto. Na Figura 6.2 é mostrado um esboço da densidade de probabilidade para (a) férmions não massivos com  $M$  sendo uma constante com dimensão de massa e (b) férmions massivos com  $M = m$ . Para ambos os casos  $V_0/Mc^2 = 2$  e  $\theta = 3\pi/8$ .

O valor esperado de  $x$  e  $x^2$  é dado por

(a)  $m = 0$ (b)  $m \neq 0$ 

**Figura 6.2:** Densidade de probabilidade de posição da solução isolada para  $V_s = V_0 \tanh \gamma x$  com  $V_0/(Mc^2) = 2$  e  $\theta = 3\pi/8$ . Linha contínua (pontilhada) para  $\gamma\hbar/Mc = 1/10$  ( $\gamma\hbar/Mc = 1$ ). Aqui  $\lambda = \hbar/(mc)$  e  $\lambda_M = \hbar/(Mc)$ .

$$\langle x \rangle = -\frac{4\gamma}{2^{\frac{2\alpha_2}{\gamma}} B(\alpha_+, \alpha_-)} \int_0^\infty dx \frac{x \sinh 2\alpha_1 x}{(\cosh \gamma x)^{\frac{2\alpha_2}{\gamma}}} \quad (6.17)$$

$$\langle x^2 \rangle = \frac{4\gamma}{2^{\frac{2\alpha_2}{\gamma}} B(\alpha_+, \alpha_-)} \int_0^\infty dx \frac{x^2 \cosh 2\alpha_1 x}{(\cosh \gamma x)^{\frac{2\alpha_2}{\gamma}}}. \quad (6.18)$$

Para resolver as integrações (6.17) e (6.18) utilizaremos o seguinte truque. Iremos introduzir um parâmetro  $\kappa$

$$\int_0^\infty dx \frac{x \sinh 2\kappa\beta_1 x}{(\cosh \gamma x)^{2\beta_2}} = \frac{1}{2\beta_1} \frac{\partial I(\kappa)}{\partial \kappa} \quad (6.19)$$

$$\int_0^\infty dx \frac{x^2 \cosh 2\kappa\beta_1 x}{(\cosh \gamma x)^{2\beta_2}} = \frac{1}{4\beta_1^2} \frac{\partial^2 I(\kappa)}{\partial \kappa^2} \quad (6.20)$$

onde  $\beta_1$  e  $\beta_2$  são constantes arbitrárias, que fazem parte do artifício matemático, e

$$I(\kappa) = \int_0^\infty dx \frac{\cosh 2\kappa\beta_1 x}{(\cosh \gamma x)^{2\beta_2}} = \frac{2^{2\beta_2}}{4\gamma} B(\beta_+, \beta_-) \quad (6.21)$$

com  $\beta_\pm(\kappa) = \beta_2 \pm \kappa\beta_1/\gamma$ . Definindo

$$\Delta(\beta) = \psi(\beta_+) - \psi(\beta_-), \quad \Sigma^{(1)}(\beta) = \psi^{(1)}(\beta_+) + \psi^{(1)}(\beta_-) \quad (6.22)$$

onde  $\psi(z) = d \ln \Gamma(z) / dz$  é a função di-Gama (psi) e  $\psi^{(1)}(z) = d\psi(z) / dz$  é a função tri-Gama [80], podemos escrever

$$\frac{\partial}{\partial \kappa} B(\beta_+, \beta_-) = \frac{\beta_1}{\gamma} B(\beta_+, \beta_-) \Delta(\beta) \quad (6.23)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \kappa^2} B(\beta_+, \beta_-) = \frac{\beta_1^2}{\gamma^2} B(\beta_+, \beta_-) [\Sigma^{(1)}(\beta) + \Delta^2(\beta)]. \quad (6.24)$$

Finalmente, fazendo o parâmetro  $\kappa = 1$  e definindo  $\tilde{\beta}_\pm = \beta_\pm(1)$ , encontramos

$$\int_0^\infty dx \frac{x \sinh 2\beta_1 x}{(\cosh \gamma x)^{2\beta_2}} = \frac{2^{2\beta_2}}{8\gamma^2} B(\tilde{\beta}_+, \tilde{\beta}_-) \Delta(\tilde{\beta}) \quad (6.25)$$

$$\int_0^\infty dx \frac{x^2 \cosh 2\beta_1 x}{(\cosh \gamma x)^{2\beta_2}} = \frac{2^{2\beta_2}}{16\gamma^3} B(\tilde{\beta}_+, \tilde{\beta}_-) [\Sigma^{(1)}(\tilde{\beta}) + \Delta^2(\tilde{\beta})] \quad (6.26)$$

para  $\text{Re } \tilde{\beta}_\pm > 0$ .

Com o artifício matemático obteve-se as equações (6.25) e (6.26). Retornando agora ao problema físico, temos o valor esperado de  $x$  e  $x^2$  como sendo:

$$\langle x \rangle = -\frac{\Delta(\alpha)}{2\gamma}. \quad (6.27)$$

$$\langle x^2 \rangle = \frac{\Sigma^{(1)}(\alpha)}{4\gamma^2} + \langle x \rangle^2 \quad (6.28)$$

aqui o f3ermion 3e confinado em um intervalo  $\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2}$  dado por

$$\Delta x = \frac{\sqrt{\Sigma^{(1)}(\alpha)}}{2\gamma} \quad (6.29)$$

Entretanto, quando  $\gamma \rightarrow \infty$  ( $\alpha_{\pm} \rightarrow 0$ ) devemos recuperar os dados obtidos para o potencial degrau abrupto. Note que, as fun33es di-Gama e tri-Gama podem ser representadas como

$$\psi(z) \simeq -\frac{1}{z}, \quad \psi^{(1)}(z) \simeq \frac{1}{z^2}, \quad \text{para } z \simeq 0 \quad (6.30)$$

e as equa33es (6.27) e (6.29) tornam-se

$$\langle x \rangle = \frac{1}{2\gamma} \left( \frac{1}{\alpha_+} - \frac{1}{\alpha_-} \right) = \frac{\lambda \operatorname{sgn}(V_0)}{\operatorname{sen}\theta \left[ \left( \frac{|V_0|}{mc^2} \right)^2 - 1 \right]} \quad (6.31)$$

$$\Delta x = \frac{1}{2\gamma} \sqrt{\frac{1}{\alpha_+^2} + \frac{1}{\alpha_-^2}} = \frac{\lambda}{\sqrt{2}\operatorname{sen}\theta} \frac{\sqrt{\left( \frac{|V_0|}{mc^2} \right)^2 + 1}}{\left[ \left( \frac{|V_0|}{mc^2} \right)^2 - 1 \right]} \quad (6.32)$$

justamente as equa33es (5.8) e (5.10) do potencial degrau abrupto. O resultado obtido 3e v3alido tamb3em para  $\operatorname{sen}\theta \simeq 0$  ( $\alpha_{\pm} \rightarrow 0$ ). Por outro lado, devido 3a aproxima33o  $\ln \Gamma(z) \simeq z \ln z$  para  $z \gg 1$  [80] teremos:

$$\psi(z) \simeq \ln z, \quad \psi^{(1)}(z) \simeq \frac{1}{z}, \quad \text{para } z \gg 1. \quad (6.33)$$

Portanto, quando  $\gamma \rightarrow 0$  ou  $|V_0| \rightarrow \infty$  ( $\alpha_{\pm} \rightarrow \infty$ ), as equa33es (6.27) e (6.29) tornam-se

$$\langle x \rangle = \frac{1}{2\gamma} (\ln \alpha_- - \ln \alpha_+) = \frac{1}{2\gamma} \ln \frac{|V_0| - mc^2 \operatorname{sgn}(V_0)}{|V_0| + mc^2 \operatorname{sgn}(V_0)} \quad (6.34)$$

$$\Delta x = \frac{1}{2\gamma} \left( \sqrt{\frac{1}{\alpha_+} + \frac{1}{\alpha_-}} \right) = \frac{1}{\gamma} \sqrt{\frac{\gamma \hbar c}{2\operatorname{sen}\theta} \frac{|V_0|}{|V_0|^2 - m^2 c^4}}. \quad (6.35)$$

Novamente, 3e poss3vel notar que o f3ermion tende a se concentrar na origem 3a medida que o acoplamento escalar torna-se maior ( $\theta \rightarrow \pi/2$ ) e a se afastar mais e mais com o aumento do acoplamento vetorial, diminui33o de  $\operatorname{sen}\theta$  (vide Eq. (6.31)). Mais do que isso, 3a medida que  $V_0 \rightarrow mc^2$  o  $|\langle x \rangle| \rightarrow \infty$  e  $\Delta x \rightarrow +\infty$  ao passo que  $V_0 \rightarrow \infty$  iremos encontrar  $\langle x \rangle \rightarrow 0$  e  $\Delta x \rightarrow 0$ .

Como  $\Delta x$  reduz sua extens3o (com o aumento de  $V_0$ ,  $\gamma$  e  $\operatorname{sen}\theta$ )  $\Delta p$  deve expandir,



em harmonia com a relação de incerteza de Heisenberg. Entretanto, a máxima incerteza no momento é dada por  $mc$  requerendo que seja impossível localizar o férmion em uma região do espaço menor que a metade do comprimento de onda Compton [68]. Assim como realizado no potencial degrau abrupto, iremos definir uma massa efetiva  $m_{ef} = m\sqrt{1 + (V_0/mc^2)^2}$  e o comprimento de onda Compton efetivo  $\lambda_{ef} = \hbar / (m_{ef}c)$ , de modo que

$$\Delta x = \frac{\lambda_{ef}}{2\sqrt{2} \sin\theta} \sqrt{(\alpha_+^2 + \alpha_-^2) \Sigma^{(1)}(\alpha)}. \quad (6.36)$$

Segue-se que a melhor localização de férmions está relacionada a altos valores de  $V_0$ ,  $\gamma$  e com o acréscimo de  $\sin\theta$ , e que com esta definição não há ameaça à interpretação da teoria de Dirac caso os férmions não possuam massa ( $m_{ef} = |V_0|/c^2$ ). Este fato é convincente já que o acoplamento escalar excede o vetorial, e a condição para o paradoxo de Klein [81] não se manifesta. Note ainda que, a equação (6.32) fornece

$$(\Delta x)_{\min} = \frac{\lambda_{ef}}{\sqrt{2}\sin\theta} \quad (6.37)$$

para  $V_0 \gg mc^2$  e  $\hbar\gamma \gg mc$ .

## 6.2 Classe $E \neq -mc^2 \cos\theta$

Substituindo o potencial  $V_s$  na equação (4.78) o potencial efetivo torna-se

$$V_{ef} = \frac{V_0^2 \tanh^2 \gamma x \sin^2 \theta + 2V_0 (mc^2 + E \cos \theta) \tanh \gamma x - \hbar c V_0 \gamma \sin \theta \operatorname{sech}^2 \gamma x}{2c^2}. \quad (6.38)$$

Para  $\sin\theta = 0$  o potencial efetivo torna-se um degrau suave ascendente (descendente) quando  $(mc^2 + E \cos\theta) V_0 > 0$  ( $(mc^2 + E \cos\theta) V_0 < 0$ ). Caso  $\sin\theta \neq 0$  um degrau suave com um poço atrativo (repulsivo) gerado pela função  $\operatorname{sech}^2 \gamma x$  na origem se  $V_0 > 0$  ( $V_0 < 0$ ). É esperado espalhamento em todas as circunstâncias e estados ligados para  $\sin\theta \neq 0$  e  $V_0 > 0$ . Observe que

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \gamma \operatorname{sech}^2 \gamma x = 2 \quad (6.39)$$

e que

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \gamma \operatorname{sech}^2 \gamma x = 4\gamma \exp(-2\gamma|x|). \quad (6.40)$$

Como a exponencial decai rapidamente para  $\gamma$  muito grande

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \gamma \exp(-2\gamma|x|) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \infty, & x = 0 \end{cases}. \quad (6.41)$$

Portanto, das equações (6.39) e (6.41) temos

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \gamma \operatorname{sech}^2 \gamma x = 2\delta(x), \quad (6.42)$$

onde  $\delta(x)$  é a função delta de Dirac. Temos ainda

$$\lim_{\gamma \rightarrow \infty} \tanh \gamma x = \operatorname{sgn}(x). \quad (6.43)$$

Consequentemente, ao fazer  $\lim_{\gamma \rightarrow \infty} V_{ef}$  iremos obter (5.13). Mediante esta análise qualitativa, verificamos que  $V_{ef}$  do potencial degrau suave no regime relativístico extremo, quando  $\gamma \rightarrow \infty$ , é exatamente  $V_{ef}$  do potencial degrau abrupto.

Representando o potencial efetivo na forma de Rosen-Morse [63]-[66]

$$V_{ef} = -V_1 \operatorname{sech}^2 \gamma x + V_2 \tanh \gamma x + V_3 \quad (6.44)$$

com os coeficientes escritos da seguinte forma

$$V_1 = V_0 \operatorname{sen} \theta \frac{V_0 \operatorname{sen} \theta + \hbar c \gamma}{2c^2}, \quad (6.45)$$

$$V_2 = V_0 \frac{mc^2 + E \cos \theta}{c^2} \quad (6.46)$$

e

$$V_3 = \frac{V_0^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{2c^2}. \quad (6.47)$$

Substituindo (6.44) em (4.77), temos

$$\left( \frac{d^2}{dx^2} + \frac{E^2 - m^2 c^4 + 2c^2 V_1 \operatorname{sech}^2 \gamma x - 2c^2 V_2 \tanh \gamma x - 2c^2 V_3}{\hbar^2 c^2} \right) \psi_+(x) = 0. \quad (6.48)$$

Analisando as características deste potencial temos que o potencial efetivo  $V_{ef}$  é simétrico caso  $V_2$  seja nulo, o que implica em  $E \cos \theta = -mc^2$ . Por meio do comportamento assintótico podemos estabelecer condições de contorno para a solução completa do problema. Para  $|x| \gg 1/\gamma$  o potencial efetivo é praticamente constante, a região onde ocorre a transição está em  $|x| < 1/\gamma$ . Neste caso, quando  $|x| \gg 1/\gamma$ , a solução para a equação de Dirac pode ser aproximada para uma partícula livre. Por intermédio deste

comportamento encontramos:

$$V_{ef}(\pm\infty) = V_3 \pm V_2. \quad (6.49)$$

Os pontos de máximo e mínimo são obtidos igualando à primeira derivada a zero, o qual fornecerá

$$x_m = \frac{1}{2\gamma} \ln \left( \frac{2V_1 - V_2}{2V_1 + V_2} \right). \quad (6.50)$$

Observe que o ponto de máximo e mínimo  $x_m$  existe se e somente se  $|V_2| < 2|V_1|$ , ou seja

$$|mc^2 + E \cos \theta| < |\gamma \hbar c + V_0 \text{sen} \theta| \text{sen} \theta \quad (6.51)$$

o potencial efetivo e sua segunda derivada em  $x_m$  tornam-se:

$$V_{ef}(x_m) = V_3 - V_1 \left[ 1 + \left( \frac{V_2}{2V_1} \right)^2 \right] \quad (6.52)$$

e

$$V_{ef}''(x_m) = \frac{\gamma^2}{2V_1} \left[ \frac{(2V_1)^2 - V_2^2}{2V_1} \right]^2 \quad (6.53)$$

para  $V_1 > 0$  ( $V_1 < 0$ ) corresponde a um ponto de mínimo (máximo). Para que haja ponto de mínimo  $V_0 > 0$  ou  $V_0 < -\gamma \hbar c / \text{sen} \theta$  e ponto de máximo  $-\gamma \hbar c / \text{sen} \theta < V_0 < 0$ .

Portanto, o potencial com uma estrutura que permite estados ligados pode ser obtido quando  $|V_2| < 2|V_1|$  com  $V_1 > 0$ . Mais ainda, para obter estados ligados é preciso que  $V_{ef}(x_m) < E_{ef} < V_{ef}(\pm\infty)$ . Pela condição  $E_{ef} < V_{ef}(\pm\infty)$  concluímos que

$$(E \mp V_0 \cos \theta)^2 < (mc^2 \pm V_0)^2 \quad (6.54)$$

e  $V_{ef}(x_m) < E_{ef}$  implica em

$$\begin{aligned} (mc^2 \pm V_0)^2 \mp 2V_0 (mc^2 + E \cos \theta) - V_0 \frac{(\gamma \hbar c \text{sen} \theta + V_0 \text{sen}^2 \theta)^2 + (mc^2 + E \cos \theta)^2}{(\gamma \hbar c \text{sen} \theta + V_0 \text{sen}^2 \theta)} \\ < (E \mp V_0 \cos \theta)^2 \end{aligned} \quad (6.55)$$

de tal forma que

$$V_0 > -\frac{E \cos \theta + mc^2}{\text{sen}^2 \theta} - \frac{\hbar c \gamma}{\text{sen} \theta} \quad (6.56)$$

para  $E \cos \theta < mc^2$ , e

$$V_0 > \frac{E \cos \theta + mc^2}{\text{sen}^2 \theta} - \frac{\hbar c \gamma}{\text{sen} \theta} \quad (6.57)$$

para  $E \cos \theta > mc^2$ .

Na Figura 6.3 é mostrado o esboço do potencial efetivo para  $V_0 > 0$  ( $V_0 < 0$ ), onde: (a)  $E \cos \theta \neq -mc^2$  e (b) potencial efetivo simétrico com  $E \cos \theta = -mc^2$ .

Por meio do comportamento assintótico de  $V_{ef}$  iremos analisar uma equação tipo Schrödinger. Substituindo (6.49) em (4.77) encontramos

$$\left[ \frac{d^2}{dx^2} + \frac{(E \mp V_0 \cos \theta)^2 - (mc^2 \pm V_0)^2}{(\hbar c)^2} \right] \psi_{\pm} = 0. \quad (6.58)$$

Note que o comportamento assintótico da equação com o potencial degrau suave é o mesmo que com o potencial degrau abrupto, discutido anteriormente. Para a análise em todo espaço, inclusive na região onde ocorre variação apreciável do potencial, iremos representar a autofunção na forma de uma função hipergeométrica<sup>2</sup>.

### 6.2.1 Equação diferencial hipergeométrica

Com análise qualitativa do comportamento assintótico e com as definições dos coeficientes de reflexão e transmissão, obtidos no caso anterior para o potencial degrau abrupto, podemos pesquisar as soluções em todo o espaço.

Introduzindo a mudança da variável independente  $x$  na equação (6.48) para

$$y = \frac{1}{2} (1 - \tanh \gamma x) \quad (6.59)$$

a equação diferencial para  $\psi_{+}(y)$  torna-se

$$\left[ y(1-y) \frac{d^2}{dy^2} + (1-2y) \frac{d}{dy} + \Theta(y) \right] \psi_{+} = 0, \quad (6.60)$$

onde

$$\Theta(y) = \frac{4V_1 y(1-y) - V_2(1-2y) - V_3 + E_{ef}}{2(\gamma \hbar c)^2 y(1-y)} \quad (6.61)$$

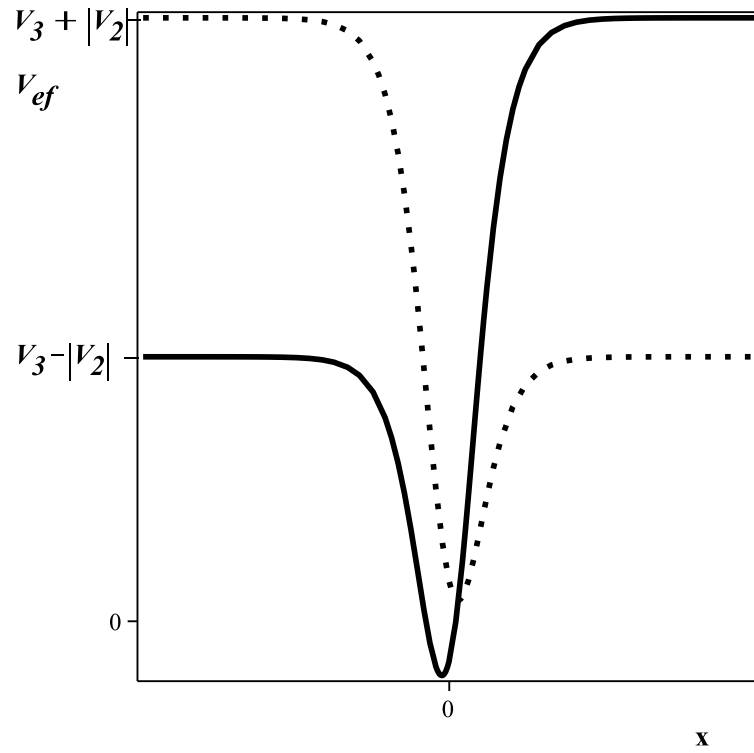
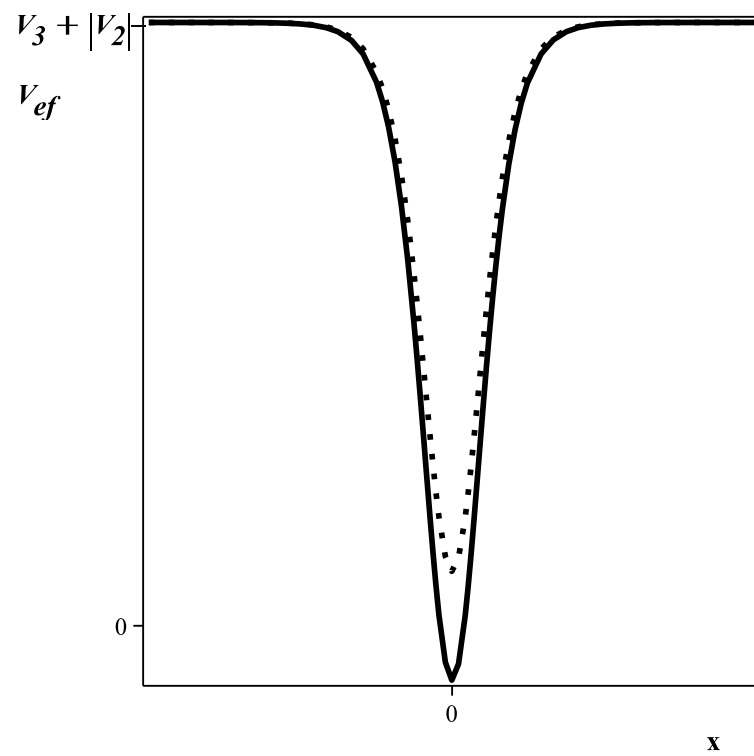
podendo ser reescrito como

$$\Theta(y) = \frac{[E - V_0 \cos \theta (1 - 2y)]^2 - [mc^2 + V_0 (1 - 2y)]^2 + 4y(1-y) \gamma \hbar c V_0 \text{sen} \theta}{(2\gamma \hbar c)^2 y(1-y)}. \quad (6.62)$$

Introduzindo uma nova função  $\varphi(y)$  por meio da relação

---

<sup>2</sup>Veja Apêndice B

(a)  $E \cos \theta \neq -mc^2$ (b)  $E \cos \theta = -mc^2$ 

**Figura 6.3:** Potencial efetivo para  $V_s = V_0 \tanh \gamma x$  com  $\theta = 3\pi/8$  e  $\gamma \hbar/mc = 1/2$ . Linha contínua (pontilhada) para  $V_0/mc^2 = 6$  ( $-6$ ).

$$\psi_+(y) = y^\nu (1-y)^\mu \varphi(y) \quad (6.63)$$

e definindo

$$\begin{aligned} a &= \mu + \nu + \frac{1-\omega}{2}, & b &= \mu + \nu + \frac{1+\omega}{2}, & d &= 2\nu + 1 \\ \mu^2 &= -\left(\frac{k_-}{2\gamma}\right)^2, & \nu^2 &= -\left(\frac{k_+}{2\gamma}\right)^2 & \omega^2 &= \left(1 + \frac{2V_0 \text{sen}\theta}{\gamma hc}\right)^2 \end{aligned} \quad (6.64)$$

a equação (6.60) torna-se uma equação diferencial hipergeométrica [80]:

$$y(1-y)\varphi'' + [d - (a+b+1)y]\varphi' - ab\varphi = 0, \quad (6.65)$$

onde a linha como sobrescrito denota a derivada com respeito a  $y$ . Note que  $\mu$  e  $\nu$  podem ser reais ou imaginários, enquanto  $\omega$  somente real. A solução geral pode ser escrita em termos da série hipergeométrica de Gauss

$${}_2F_1(a, b, d, y) = \frac{\Gamma(d)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(d+n)} \frac{y^n}{n!} \quad (6.66)$$

na forma

$$\varphi = A {}_2F_1(a, b, d, y) + B y^{-2\nu} {}_2F_1(a+1-d, b+1-d, 2-d, y) \quad (6.67)$$

de tal maneira que

$$\psi_+ = A y^\nu (1-y)^\mu {}_2F_1(a, b, d, y) + B y^{-\nu} (1-y)^\mu {}_2F_1(a+1-d, b+1-d, 2-d, y) \quad (6.68)$$

com  $A$  e  $B$  constantes a serem encontradas mediante a análise do comportamento assintótico.

Quando  $x \rightarrow +\infty$  (que é  $y \rightarrow 0$  da seguinte forma  $y = \exp(-2\gamma x) \rightarrow 0$ ), a equação (6.68) reduz para

$$\psi_+(+\infty) = A \exp(-2\gamma\nu x) + B \exp(+2\gamma\nu x) \quad (6.69)$$

devido a  ${}_2F_1(a, b, d, 0) = 1$ . Assim, comparando com o comportamento assintótico (5.19) teremos  $A = B_\pm$ ,  $\nu = \mp ik_+/2\gamma$  e  $B = 0$  correspondendo a  $E \gtrless -mc^2 \cos\theta$ , ou equivalente  $A = 0$  e  $B = B_\mp$  correspondendo a  $E \lesseqgtr -mc^2 \cos\theta$ . Foi adotado neste trabalho  $B = 0$ . O comportamento assintótico para  $x \rightarrow -\infty$  ( $y \rightarrow 1$ ), pode ser obtido utilizando as propriedades da função hipergeométrica

$${}_2F_1(a, b, d, y) = \gamma_- {}_2F_1(a, b, a + b - d + 1, 1 - y) \quad (6.70)$$

$$+ \gamma_+ {}_2F_1(d - a, d - b, d - a - b + 1, 1 - y) (1 - y)^{d-a-b}$$

onde  $\gamma_-$  e  $\gamma_+$  são expressos em termos da função gama,

$$\gamma_- = \frac{\Gamma(d) \Gamma(d - a - b)}{\Gamma(d - a) \Gamma(d - b)}, \quad \gamma_+ = \frac{\Gamma(d) \Gamma(a + b - d)}{\Gamma(a) \Gamma(b)} \quad (6.71)$$

utilizando as relações (6.64), podemos reescrever  $\gamma_{\pm}$  como sendo

$$\gamma_{\pm} = \frac{\Gamma(2\nu + 1) \Gamma(\pm 2\mu)}{\Gamma\left(\frac{1 \mp \omega}{2} + \nu \pm \mu\right) \Gamma\left(\frac{1 \pm \omega}{2} + \nu \pm \mu\right)} \quad (6.72)$$

note que o sinal de  $\omega$  pouco importa nas equações (6.72). Consequentemente, quando  $x \rightarrow -\infty$  ( $1 - y \rightarrow 0$  da seguinte forma  $1 - y = \exp(2\gamma x)$ ) a equação (6.68) torna-se

$$\psi_+(-\infty) = A \gamma_+ \exp(-2\gamma\mu x) + A \gamma_- \exp(2\gamma\mu x) \quad (6.73)$$

comparando com o comportamento assintótico teremos  $A\gamma_+ = A_{\pm}$  ou  $A\gamma_- = A_{\mp}$  para  $\mu = \mp ik_- / (2\gamma)$ , estes resultados estão de acordo com a análise assintótica para valores muito pequenos de  $x$ .

O comportamento assintótico da solução geral determina que  $B = 0$  e estabelece condições sobre  $\mu$ ,  $\nu$  e sobre a indiferença na escolha do sinal de  $\omega$  por meio da equação (6.72).

## 6.2.2 Espalhamento

Os coeficientes de reflexão e transmissão podem ser expressos como

$$R = \left| \frac{A_{\mp}}{A_{\pm}} \right|^2 = \left| \frac{\gamma_-}{\gamma_+} \right|^2 = \left| \frac{\Gamma\left(\frac{1-\omega}{2} + \nu + \mu\right) \Gamma\left(\frac{1+\omega}{2} + \nu + \mu\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\omega}{2} + \nu - \mu\right) \Gamma\left(\frac{1+\omega}{2} + \nu - \mu\right)} \right|^2 \left| \frac{\Gamma(-2\mu)}{\Gamma(+2\mu)} \right|^2 \quad (6.74)$$

e

$$T = \frac{\text{Re}k_+}{k_-} \left| \frac{B_{\pm}}{A_{\pm}} \right|^2 = \left| \frac{\text{Im}\nu}{\mu} \right| \frac{1}{|\gamma_+|^2} = \left| \frac{\text{Im}\nu}{\mu} \right| \left| \frac{\Gamma\left(\frac{1-\omega}{2} + \nu + \mu\right) \Gamma\left(\frac{1+\omega}{2} + \nu + \mu\right)}{\Gamma(2\nu + 1) \Gamma(+2\mu)} \right|^2 \quad (6.75)$$

no caso de espalhamento em que  $\mu$  é imaginário puro  $|\Gamma(-2\mu) / \Gamma(+2\mu)|^2 = 1$ . Percebe-se que  $\nu$  pode ser real ou imaginário puro e que o sinal de  $\omega$  pouco importa nas equações (6.74) e (6.75)

Caso  $\nu = \mp ik_+ / 2\gamma$  e  $\mu = \mp ik_- / 2\gamma$ , os coeficientes de reflexão  $R$  e transmissão  $T$

tornam-se

$$R = \left| \frac{\Gamma(1-u+i\bar{v})\Gamma(u+i\bar{v})}{\Gamma(1-u+iv)\Gamma(u+iv)} \right|^2 \quad (6.76)$$

e

$$T = \frac{\text{Re}k_+}{k_-} \left| \frac{\Gamma(1-u+i\bar{v})\Gamma(u+i\bar{v})}{\Gamma(1\mp ik_+/\gamma)\Gamma(\mp ik_-/\gamma)} \right|^2 \quad (6.77)$$

onde foi utilizado  $u = (1 + \omega)/2$ ,  $\bar{v} = \mp(k_- + k_+)/2\gamma$  e  $v = \mp(k_- - k_+)/2\gamma$ . Utilizando as identidades envolvendo as funções gama [80]

$$|\Gamma(1/2 + iv)|^2 = \frac{\pi}{\cosh \pi v}, \quad |\Gamma(1 + iv)|^2 = \frac{\pi v}{\sinh \pi v}, \quad |\Gamma(iv)|^2 = \frac{\pi}{v \sinh \pi v} \quad (6.78)$$

mais a identidade adicional [60]

$$|\Gamma(1-u+i\bar{v})\Gamma(u+i\bar{v})|^2 = \frac{2\pi^2}{\cosh 2\pi\bar{v} - \cos 2\pi u} \quad (6.79)$$

teremos:

$$R = \frac{\cosh\left(\pi\frac{k_- - k_+}{\gamma}\right) - \cos \pi\omega}{\cosh\left(\pi\frac{k_- + k_+}{\gamma}\right) - \cos \pi\omega} \quad (6.80)$$

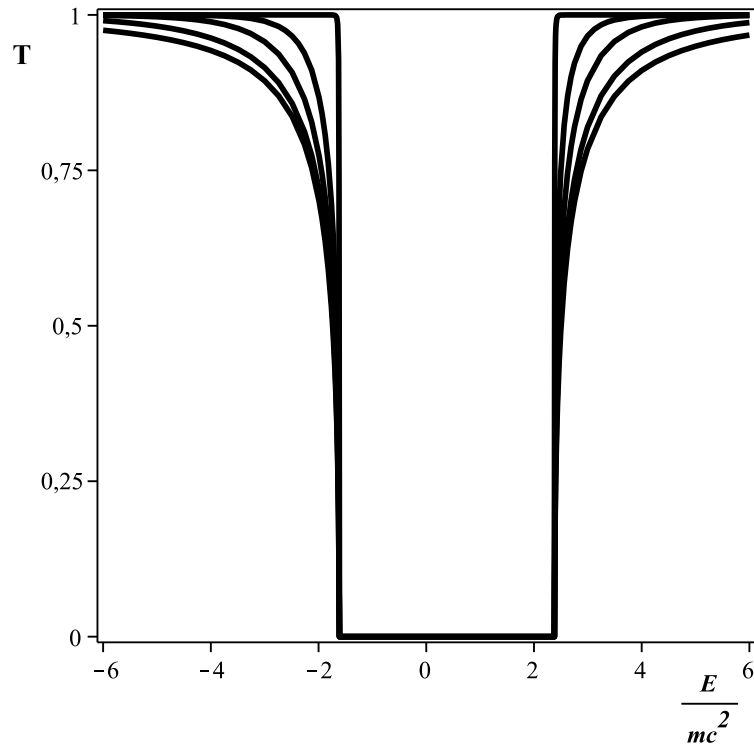
$$T = \frac{2\sinh\left(\frac{\pi k_-}{\gamma}\right)\sinh \text{Re}\frac{\pi k_+}{\gamma}}{\cosh\left(\pi\frac{k_- + k_+}{\gamma}\right) - \cos \pi\omega} \quad (6.81)$$

este resultado leva em consideração tanto  $E > -mc^2 \cos \theta$  quanto  $E < -mc^2 \cos \theta$ . Caso  $\nu$  seja real  $T = 0$  e  $R = 1$

No entanto, o espalhamento ocorrerá somente se  $\mu$  for imaginário, ou seja,  $k_-$  uma quantidade real,  $|E + V_0 \cos \theta| > |mc^2 - V_0|$ . Para o caso de partículas transmitidas é necessário que  $\nu$  seja imaginário,  $k_+$  real, o que implica em  $|E - V_0 \cos \theta| > |mc^2 + V_0|$ . O caso de férmions não massivos e ou potencial escalar puro o coeficiente de transmissão  $T$  apresenta uma simetria com relação a  $E = 0$ . Quando  $|E| \rightarrow \infty$   $T \rightarrow 1$ . O coeficiente de transmissão em função de  $E$ , para  $E > -mc^2 \cos \theta$ , apresenta um perfil típico para espalhamento não-relativístico em um potencial degrau. Na Figura 6.4 é mostrado o comportamento do coeficiente de transmissão em função da energia e da suavidade no potencial. Quanto menor é o parâmetro  $\gamma$ , maior suavidade no potencial, mais abrupto é o coeficiente de transmissão.

Para o coeficiente de transmissão em função do ângulo de mistura são apresentados resultados intrigantes e que são explicados pelo surgimento de um degrau ascendente (descendente) para pequenos (grandes) valores de  $\theta$ . O coeficiente de transmissão de-





**Figura 6.4:** Coeficiente de transmissão em função de  $E/(mc^2)$  e do parâmetro  $\gamma\hbar/(mc)$  para o potencial  $V_s = V_0 \tanh \gamma x$  com  $V_0 = 1$  e  $\theta = 3\pi/8$ . Altos coeficientes correspondem a baixos valores de  $\gamma\hbar/(mc)$ . A curva inferior corresponde a  $\gamma \rightarrow \infty$ .

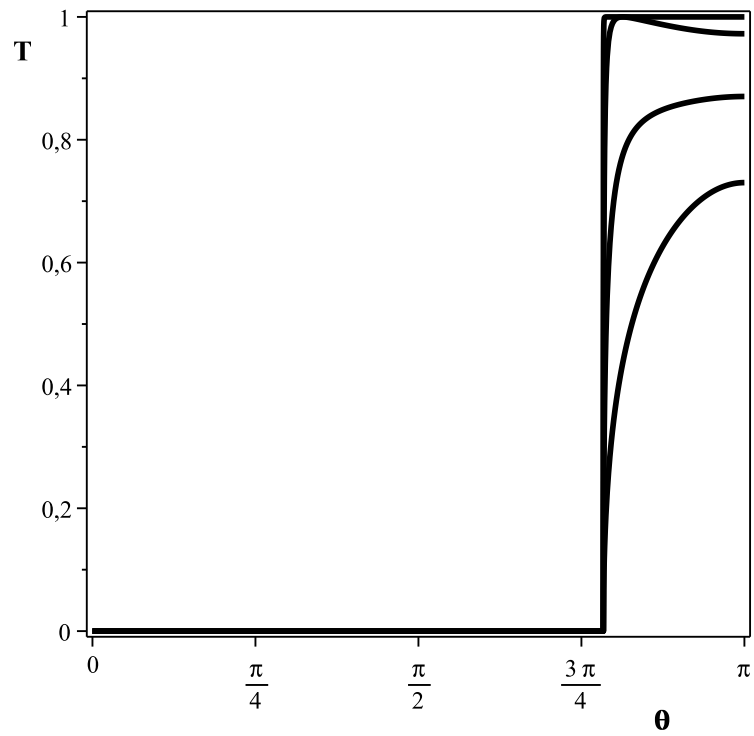
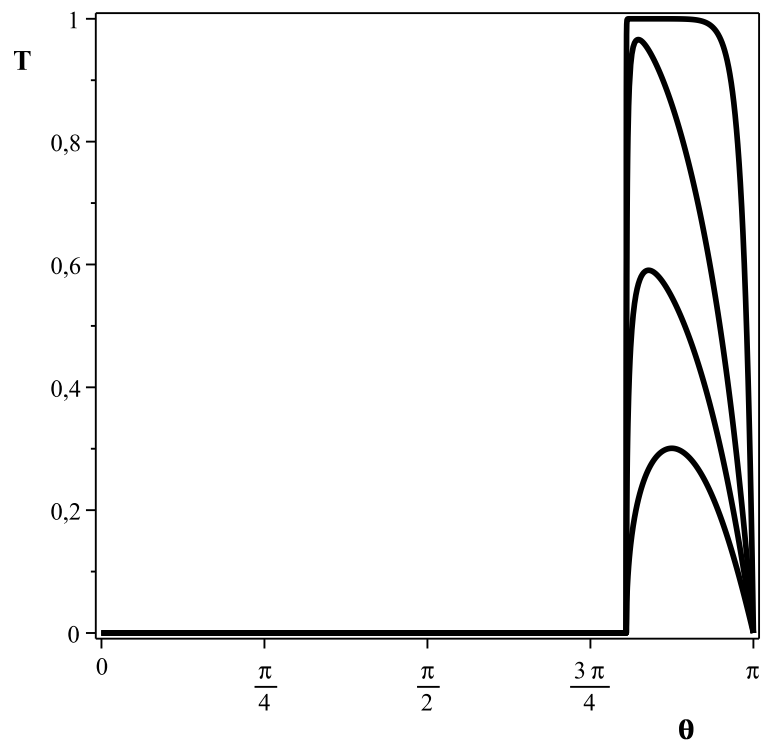
saparece para pequenos ângulos de mistura e energias suficientemente pequena devido à energia efetiva se tornar menor do que altura do degrau no potencial efetivo. Como foi discutido no potencial degrau abrupto, o coeficiente de transmissão desaparece para  $|V_0|/(mc^2) < 1$  quando o ângulo de mistura e a energia são pequenos, tornando a energia efetiva menor que o potencial efetivo. Caso  $|V_0|/(mc^2) > 1$  o coeficiente desaparece para valores suficientemente pequenos de energia e grandes valores do ângulo de mistura por tornar a energia efetiva menor que o potencial efetivo. Na Figura 6.5 é mostrado o comportamento do coeficiente de transmissão em função do ângulo de mistura  $\theta$  e da suavidade no potencial. Quanto menor é o parâmetro  $\gamma$ , maior suavidade no potencial, mais abrupto é o coeficiente de transmissão.

Quando  $\gamma \rightarrow 0$ , encontramos

$$T = \begin{cases} 1, & \text{para } k_+ \in \mathbb{R} \\ 0, & \text{para } k_+ = \pm i|k_+| \end{cases} \quad (6.82)$$

refletindo a exploração sobre a ausência de efeitos quânticos para um potencial cujo intervalo de variação apreciável é muito maior que o comprimento de onda Compton. Este é um notável espalhamento clássico e pode ser representado para férmions não massivos.

Podemos recuperar os resultados para o potencial degrau abrupto no regime relativístico extremo tomando o limite de  $\gamma \rightarrow \infty$ . Por meio da equação (6.64) temos  $\omega =$

(a)  $\frac{V_0}{mc^2} = 0,9$ (b)  $\frac{V_0}{mc^2} = 1,1$ 

**Figura 6.5:** Coeficiente de transmissão em função do ângulo de mistura  $\theta$  e do parâmetro  $\gamma\hbar/mc$  para o potencial  $V_s = V_0 \tanh \gamma x$ . Altos coeficientes correspondem a baixos valores de  $\gamma\hbar/mc$ . A curva inferior corresponde a  $\gamma \rightarrow \infty$  ( $\theta = \pi/4$  e  $|E|/mc^2 = 1,2$ ).

$1 + 2V_0\text{sen}\theta/\gamma\hbar c$  substituindo nas equações (6.80) e (6.81)

$$R = \frac{\cosh \varepsilon_+ - \cos [2\pi (1 + V_0\text{sen}\theta/\gamma\hbar c)]}{\cosh \varepsilon_- - \cos [2\pi (1 + V_0\text{sen}\theta/\gamma\hbar c)]} \quad (6.83)$$

$$T = \frac{2\text{senh}\frac{|\varepsilon_+ - \varepsilon_-|}{2}\text{senh}\frac{\varepsilon_+ + \varepsilon_-}{2}}{\cosh \varepsilon_- - \cos [2\pi (1 + V_0\text{sen}\theta/\gamma\hbar c)]} \frac{\text{Re}k_+}{k_+} \quad (6.84)$$

onde  $\varepsilon_{\pm} = \pi(k_- \mp k_+)/\gamma$ . Como  $\varepsilon_+$  e  $\varepsilon_-$  são  $\ll 1$ , quando  $\gamma \rightarrow \infty$ , podemos expandir os termos trigonométricos

$$\begin{aligned} \cosh \varepsilon_+ &\simeq 1 + \varepsilon_+^2/2 = 1 + 2 \left( \pi \frac{k_- - k_+}{2\gamma} \right)^2 \\ \text{senh}\frac{|\varepsilon_+ - \varepsilon_-|}{2} &\simeq \frac{|\varepsilon_+ - \varepsilon_-|}{2} = \frac{\pi k_+}{\gamma} \end{aligned} \quad (6.85)$$

$$\cos \frac{2\pi V_0\text{sen}\theta}{\gamma\hbar c} \simeq 1 - 2 \left( \pi \frac{V_0\text{sen}\theta}{\gamma\hbar c} \right)^2$$

desta forma iremos obter

$$R = \frac{(k_- - k_+)^2 + \left(\frac{2V_0\text{sen}\theta}{\hbar c}\right)^2}{(k_- + k_+)^2 + \left(\frac{2V_0\text{sen}\theta}{\hbar c}\right)^2} \quad (6.86)$$

$$T = \frac{4k_- \text{Re}k_+}{(k_- + k_+)^2 + \left(\frac{2V_0\text{sen}\theta}{\hbar c}\right)^2}. \quad (6.87)$$

Note a semelhança de (6.87) com (5.29). Como esperado, no limite  $\gamma \rightarrow \infty$  retornamos ao caso do potencial degrau abrupto.

### 6.2.3 Estados ligados

Considerando a amplitude de transmissão como uma função de variáveis complexas de  $k_{\pm}$ , teremos espalhamento para  $k_{\pm} > 0$  com as quantidades  $\mu$  e  $\nu$  imaginárias na equação (6.75) e os estados ligados serão obtidos pela identificação dos polos ao longo dos eixos imaginários dos planos complexos. As possibilidades para a existência de estados ligados serão obtidas caso  $\mu$  e  $\nu$  reais ( $k_{\pm}$  imaginário)

$$\mu = \pm \frac{|k_-|}{2\gamma} = \pm \frac{\sqrt{(mc^2 - V_0)^2 - (E + V_0 \cos\theta)^2}}{2\gamma\hbar c} \quad (6.88)$$

$$\nu = \frac{|k_+|}{2\gamma} = \frac{\sqrt{(mc^2 + V_0)^2 - (E - V_0 \cos\theta)^2}}{2\gamma\hbar c}$$

A solução do comportamento assintótico requer para estados ligados ondas evanescentes, exigindo  $k_{\pm} = i|k_{\pm}|$  e  $A_+ = B_- = 0$  ou  $k_{\pm} = -i|k_{\pm}|$  e  $A_- = B_+ = 0$ , para que  $\psi_+$  seja quadrado-integrável, ou seja

$$E_{ef} < V_3 \pm V_2 \quad (6.89)$$

equivalente a dizer

$$|E \mp V_0 \cos\theta| < |mc^2 \pm V_0| \quad (6.90)$$

esta condição já havia sido pronunciada na análise do potencial efetivo em (6.54).

Conforme analisado anteriormente, a equação (6.68) em  $x \rightarrow \pm\infty$  pode ser escrita na forma (6.69) e (6.73) com  $E \gtrless -mc^2 \cos\theta$ , quando  $\mu$  e  $\nu$  reais ( $k_{\pm}$  imaginário) tornam-se

$$\psi_+(-\infty) = A \gamma_+ \exp(\mp |k_-| x) + A \gamma_- \exp(\pm |k_-| x), \quad \text{para } k_- = \pm i|k_-| \quad (6.91)$$

$$\psi_+(+\infty) = A \exp(-|k_+| x) \quad (6.92)$$

veja que com a escolha de  $B = 0$  em (6.69) tem-se: para  $k_{\pm} = +i|k_{\pm}|$  ( $k_{\pm} = -i|k_{\pm}|$ )  $\mu$  é uma quantidade positiva (negativa) com  $\gamma_+ = 0$  ( $\gamma_- = 0$ ) e  $\nu$  é uma quantidade positiva para que as funções sejam quadrado-integráveis. Buscando os polos no eixo real negativo da função gama podemos fazer com que  $\gamma_{\pm} \rightarrow 0$  quando  $\Gamma(a)\Gamma(b) \rightarrow \infty$  na equação (6.71), esses polos existem em  $\Gamma(z)$  para  $z = -n$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ).

A condição de quantização será dada por  $a = -n$  para  $\omega > 0$  e  $b = -n$  para  $\omega < 0$ . Como  ${}_2F_1(a, b, d, y)$  é invariante sob a troca de  $a$  por  $b$ , a condição de quantização é obtida independente do sinal de  $\omega$

$$\nu + \mu + \frac{1 - |\omega|}{2} = -n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (6.93)$$

a equação (6.93) pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned} & \sqrt{(mc^2 + V_0)^2 - (E - V_0 \cos\theta)^2} + \sqrt{(mc^2 - V_0)^2 - (E + V_0 \cos\theta)^2} \\ & = 2\gamma\hbar c \left( \frac{V_0 \sin\theta}{\gamma\hbar c} - N \right), \text{ para } \frac{V_0 \sin\theta}{\gamma\hbar c} \gtrless -\frac{1}{2} \end{aligned} \quad (6.94)$$

com

$$N = \begin{cases} n, & \text{para } \frac{V_0 \sin\theta}{\gamma\hbar c} > -\frac{1}{2} \\ n + 1, & \text{para } \frac{V_0 \sin\theta}{\gamma\hbar c} < -\frac{1}{2} \end{cases} \quad (6.95)$$

devido a primeira linha de (6.94) e  $n$  serem números inteiros positivo, restrições complementares são impostas sobre  $V_0 \sin\theta / (\gamma\hbar c)$  e  $N$ :

$$N = \begin{cases} \frac{V_0 \sin\theta}{\gamma\hbar c} > 0, & N < +\frac{V_0 \sin\theta}{\gamma\hbar c} \\ \frac{V_0 \sin\theta}{\gamma\hbar c} < -1, & N < -\frac{V_0 \sin\theta}{\gamma\hbar c} \end{cases} \quad (6.96)$$

Note que, as condições obtidas no lado esquerdo da equação (6.96) são as mesmas encontradas na análise do comportamento de  $V_{ef}$  na busca de pontos de máximo e mínimo, onde se estabelece  $V_1 > 0$  para mínimo. Para tanto é necessário que  $V_0 > 0$  ou  $V_0 < -\gamma\hbar c / \sin\theta$ .

Por meio das condições (6.96) é possível verificar que o conjunto de soluções de estados ligados depende do sinal e do tamanho de  $V_0 \sin\theta / (\gamma\hbar c)$ , e o número de soluções permitidas é incrementado com a elevação de  $|V_0| \sin\theta / (\gamma\hbar c)$ . É válido mencionar que o limiar ( $|V_0|_{\min}$ ) é uma função monótona crescente de  $\gamma$  com  $|V_0|_{\min} \rightarrow mc^2$  quando  $\gamma \rightarrow 0$ , assim a existência de soluções de estados ligados não é viável no limite não-relativístico. Este limite pode ainda ser observado na equação (6.94) quando  $|V_0|_{\min} \ll mc^2$  e  $E \approx mc^2$  temos  $\nu + \mu \approx 0$  e  $N = V_0 \sin\theta / (\gamma\hbar c)$ , evidente que não é solução. Para  $\gamma \rightarrow \infty$  não há solução na equação (6.94). Em particular, quando  $V_0 \sin\theta / (\gamma\hbar c) > 0$  no limite  $\gamma \rightarrow \infty$  temos  $n = 0$  com a solução  $E = -mc^2 \cos\theta$ , conforme obtido no potencial degrau abrupto, mas esta não é solução para o problema. Portanto não haverá solução de estados ligados quando  $\sin\theta = 0$  e nem no limite extremamente relativístico quando  $\gamma \rightarrow \infty$ .

A equação irracional (6.94) pode ser resolvida para determinar as autoenergias. No entanto, se quadrarmos a equação (6.94), o resultado da condição de quantização pode ser expresso como uma equação algébrica do segundo grau em  $E$  com duas soluções

$$E = \frac{-c_1 \pm \sqrt{c_1^2 - 4c_2 c_0}}{2c_2} \quad (6.97)$$

onde

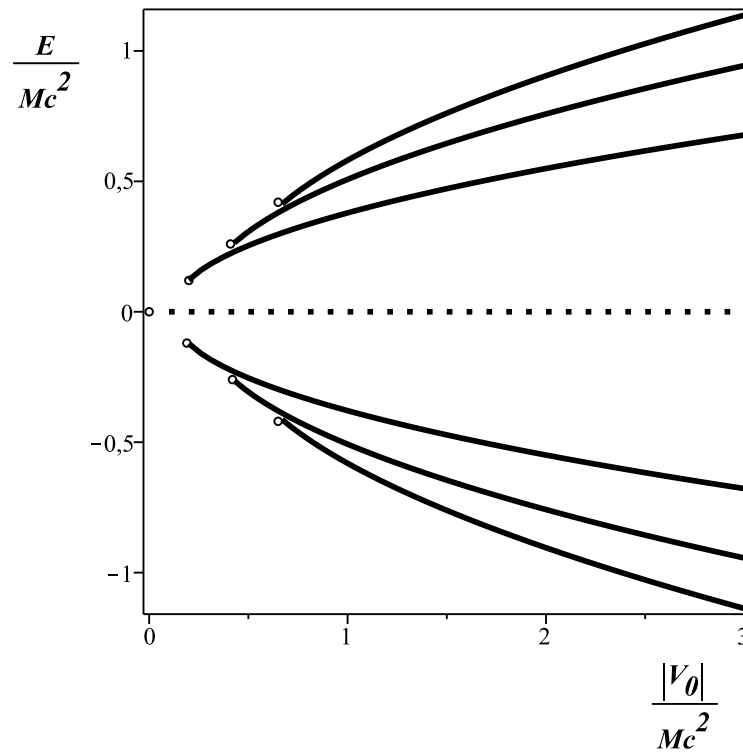
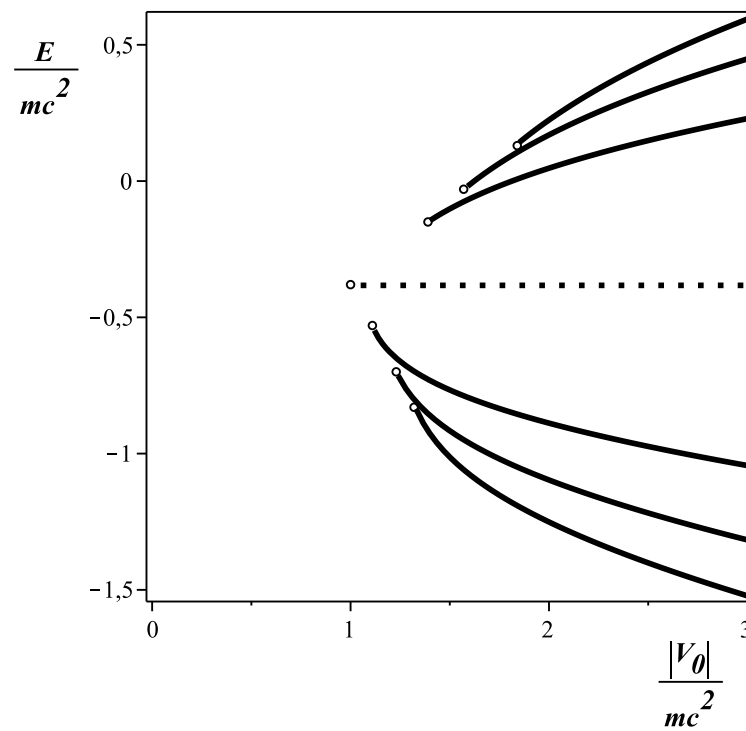
$$\begin{aligned}
c_0 &= (\gamma hcN)^4 - 4(\gamma hcN)^3 |V_0| \text{sen}\theta + (\gamma hcN)^2 (5V_0^2 \text{sen}\theta - m^2 c^4) \\
&+ 2(\gamma hcN) (m^2 c^4 - V_0^2 \text{sen}\theta) |V_0| \text{sen}\theta + m^2 c^4 V_0^2 \cos^2\theta \\
& \\
c_2 &= V_0^2 + (\gamma hcN)^2 - 2(\gamma hcN) |V_0| \text{sen}\theta \\
c_1 &= 2mc^2 V_0^2 \cos\theta
\end{aligned} \tag{6.98}$$

As soluções analíticas podem conter raízes espúrias que poderão ser eliminadas por meio da substituição na equação original. A solução para as autoenergias de Dirac dada por (6.97) apresenta uma dependência em  $|V_0|$ ,  $\gamma$ ,  $\theta$ ,  $m$  e  $N$ . Note que para um acoplamento escalar puro e ou um férmion não massivo a equação (6.97) apresenta um espectro simétrico sobre  $E = 0$ . Os resultados para  $V_0 < 0$  são os mesmos que os obtidos para  $V_0 > 0$  quando realizado as seguintes mudanças:  $|V_0| \text{sen}\theta / (\gamma hc)$  por  $|V_0| \text{sen}\theta / (\gamma \hbar c) + 1$  e  $n$  por  $n - 1$ .

Soluções numéricas para as autoenergias correspondendo aos três menores números quânticos ( $n = 1, 2, 3$  para  $V_0 > 0$ ) são mostrados nas Figuras 6.6, 6.7 e 6.8 para férmions massivos e não massivos. Um termo adicional  $M$ , com dimensão de massa, foi inserido para manter as soluções adimensionais. Nas Figuras, (a) representa um férmion não massivo com  $M$  sendo uma constante e (b) um férmion massivo com  $M = m$ . O caso dos férmions não massivos apresentados nas Figuras (a) apresentam uma simetria sob  $E = 0$  referente a conjugação de carga e a conjugação quiral, uma simetria adicional é exibida para  $\theta = \pi/2$ . Em todas as Figuras, as curvas internas correspondem para os menores números quânticos e a linha tracejada corresponde a solução isolada ( $E = -mc^2 \cos\theta$ ) discutida na seção anterior.

O número de estados ligados permitidos se eleva com o acréscimo de  $V_0$ , aumento do tamanho do degrau, e ou a atenuação de  $\gamma$ , alargamento do poço gerado pela  $\text{sech}^2 \gamma x$ . Na Figura 6.6 é mostrado o espectro de energia como função de  $|V_0| / (Mc^2)$  para  $\theta = 3\pi/8$  e  $\gamma \hbar / (Mc) = 1/10$ . Nota-se que um valor mínimo de  $|V_0|$  é requerido para se obter pelo menos um nível de energia, e devido  $\theta < \pi/2$  as soluções para férmions massivos com  $E < -mc^2 \cos\theta$  é mais favorecida já para férmions não massivos o espectro é simétrico em relação a  $E = 0$ . Em ambos os casos os níveis de energia aumentam mais e mais com o acréscimo de  $|V_0|$ .

Para potencial escalar puro ( $\theta = \pi/2$ ) o espectro é simétrico com um acréscimo nas possibilidades de estados ligados, para o caso de simetrias de spin e pseudospin não há estados ligados. Resultados semelhantes foram obtidos anteriormente para a equação de

(a)  $m = 0$ (b)  $m \neq 0$ 

**Figura 6.6:** Níveis de energia para os três primeiros números quânticos ( $n = 1, 2, 3$  e  $V_0 > 0$ ) com  $\theta = 3\pi/8$  e  $\gamma\hbar/Mc = 1/10$ . As curvas internas são relacionadas aos menores números quânticos. A linha pontilhada corresponde à solução isolada.

Klein-Gordon, onde foram encontrados estados ligados apenas para acoplamento escalar maior que o vetorial [60]. Na Figura 6.7 é mostrada a energia  $E$  em função do ângulo de mistura  $\theta$  para  $|V_0|/(Mc^2) = 2$  e  $\gamma\hbar/(Mc) = 1/10$ . Para férmions massivos (b) fica evidente a troca de  $E$  por  $-E$  quando  $\theta = \pi/2 - \varepsilon$  é trocado por  $\theta = \pi/2 + \varepsilon$ . Todos os níveis de energia tendem a desaparecer a medida que  $\theta$  tende a 0 ou  $\pi$ . O desaparecimento destes níveis é maior para altos valores de  $n$ . As soluções para  $E \geq -mc^2 \cos\theta$  são mais favorecida quando  $\theta \leq \pi/2$ , devido ao surgimento de um potencial atrativo (repulsivo) para partículas (antipartículas).

Na Figura 6.8 as autoenergias são mostradas como função de  $\gamma\hbar/(Mc)$  para  $\theta = 3\pi/8$  e  $|V_0|/(Mc^2) = 2$ . Para  $\gamma \simeq 0$  há um aumento na densidade de níveis de energia. A densidade de energia decresce com o aumento de  $\gamma\hbar/(Mc)$ . Isto mostra que os níveis de energia existem somente para intervalo finito  $\gamma\hbar/(Mc)$ , e este intervalo não existe no regime relativístico extremo para um valor finito  $|V_0|/(Mc^2)$ . Portanto, para  $\gamma\hbar/(Mc) \rightarrow \infty$  quando  $|V_0|/(Mc^2)$  é finito, não há estados ligados.

A série hipergeométrica de Gauss  ${}_2F_1(a, b, d, y)$  se reduz ao polinômio de Jacobi de grau  $n$  em  $y$  quando  $a$  ou  $b$  é igual a  $-n$  [80]. Para  $a = -n$  a equação (6.68) torna-se

$$\begin{aligned} \psi_+ &= A y^\nu (1-y)^\mu {}_2F_1(a, b, d, y) \\ &= \frac{A}{2^{(\alpha+\beta)/2}} (1-\xi)^{\alpha/2} (1+\xi)^{\beta/2} {}_2F_1\left(-n, \alpha + \beta + n + 1, \alpha + 1, \frac{1-\xi}{2}\right) \\ &= \frac{A}{2^{(\alpha+\beta)/2}} (1-\xi)^{\alpha/2} (1+\xi)^{\beta/2} \frac{n!}{(\alpha+1)_n} P_n^{(\alpha, \beta)}(\xi) \end{aligned} \quad (6.99)$$

onde

$$\alpha = 2\nu, \quad \beta = 2\mu, \quad \xi = 1 - 2y = \tanh \gamma x \quad (6.100)$$

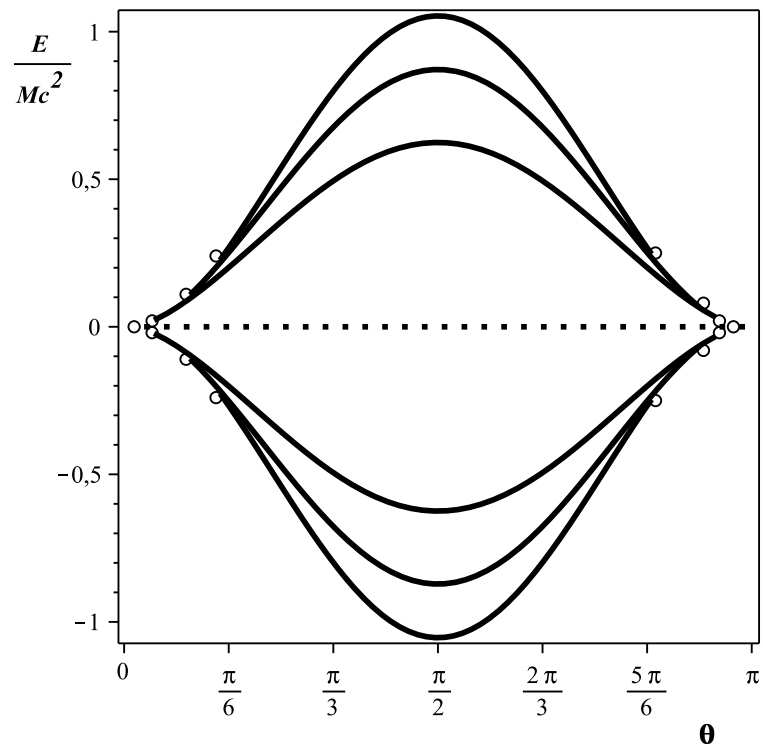
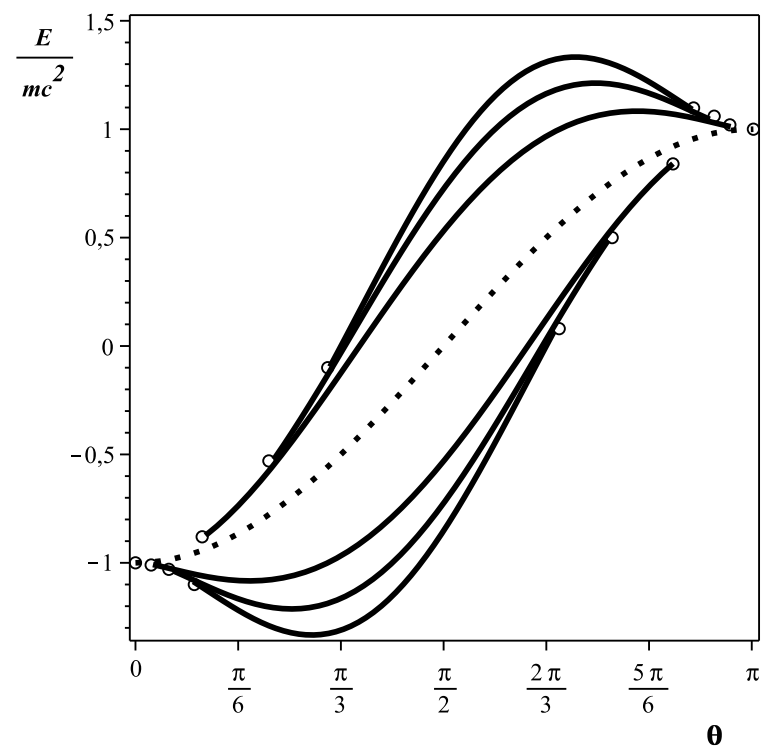
e  $(\alpha)_n = \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n-1)$  com  $(\alpha)_0 = 1$ . O polinômio de Jacobi  $P_n^{(\alpha, \beta)}(\xi)$  é ortogonal com respeito a função  $w^{(\alpha, \beta)}(\xi) = (1-\xi)^\alpha (1+\xi)^\beta$  no intervalo  $[-1, +1]$ , e pode ser normalizado conforme segue

$$\int_{-1}^{+1} d\xi w^{(\alpha, \beta)} P_n^{(\alpha, \beta)}(\xi) P_{n'}^{(\alpha, \beta)}(\xi) = \delta_{nn'} h_n^{(\alpha, \beta)} \quad (6.101)$$

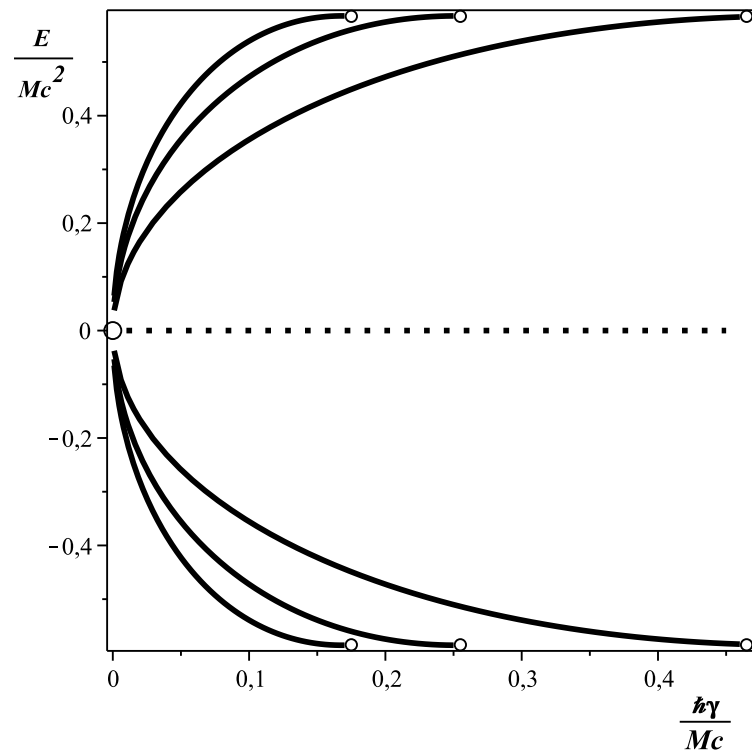
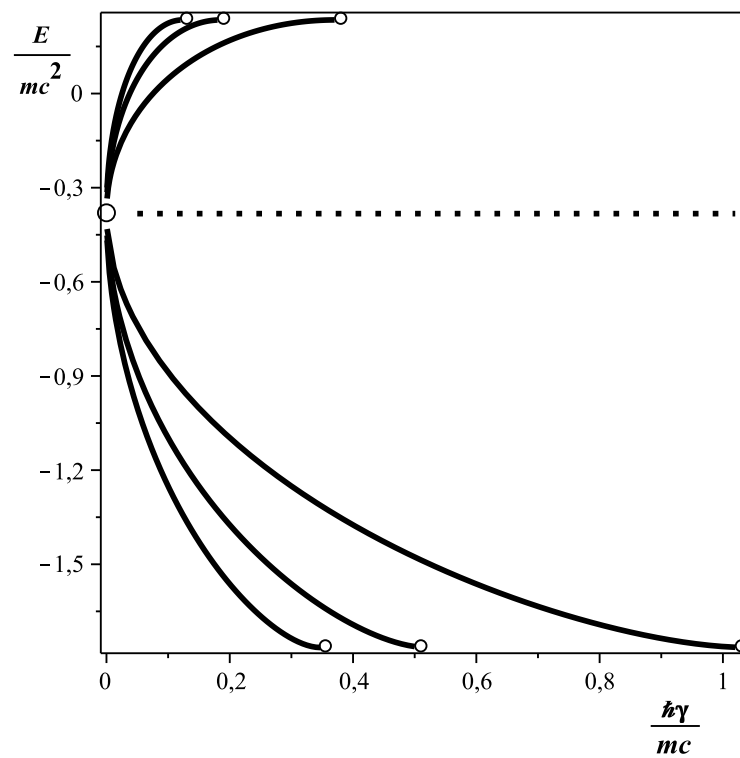
onde  $h_n^{(\alpha, \beta)}$  é dada por [80]

$$h_n^{(\alpha, \beta)} = \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{2n + \alpha + \beta + 1} \frac{\Gamma(n + \alpha + 1) \Gamma(n + \beta + 1)}{n! \Gamma(n + \alpha + \beta + 1)} \quad (6.102)$$



(a)  $m = 0$ (b)  $m \neq 0$ 

**Figura 6.7:** Níveis de energia para os três primeiros números quânticos ( $n = 1, 2, 3$  e  $V_0 > 0$ ) com  $|V_0|/Mc^2 = 2$  e  $\gamma\hbar/Mc = 1/10$ . As curvas internas são relacionadas aos menores números quânticos. A linha pontilhada corresponde à solução isolada.

(a)  $m = 0$ (b)  $m \neq 0$ 

**Figura 6.8:** Níveis de energia para os três primeiros números quânticos ( $n = 1, 2, 3$  e  $V_0 > 0$ ) com  $|V_0|/Mc^2 = 2$  e  $\theta = 3\pi/8$ . As curvas internas são relacionadas aos menores números quânticos. A linha pontilhada corresponde à solução isolada.

e

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(1) = \frac{(\alpha+1)_n}{n!} \quad (6.103)$$

o componente superior do espinor pode agora ser escrito como sendo

$$\psi_+(\xi) = N_n (1-\xi)^{\alpha/2} (1+\xi)^{\beta/2} P_n^{(\alpha,\beta)}(\xi) \quad (6.104)$$

e assim  $\psi_-$  assume a forma

$$\psi_-(\xi) = -\frac{i\gamma\hbar c}{E + mc^2 \cos\theta} \left[ \text{sen}\theta \frac{mc^2 + V_0\xi}{\gamma\hbar c} \psi_+ + (1-\xi^2) \frac{d\psi_+}{d\xi} \right] \quad (6.105)$$

utilizando (6.93), (6.100) e a relação tabulada para  $(1-\xi^2) dP_n^{(\alpha,\beta)}(\xi)/d\xi$  (veja 8.961.3 de [79]),  $\psi_-$  torna-se

$$\psi_-(\xi) = -\frac{i\gamma\hbar c N_n}{E + mc^2 \cos\theta} (1-\xi)^{\alpha/2} (1+\xi)^{\beta/2} \left[ c_3 P_n^{(\alpha,\beta)}(\xi) + c_4 P_{n-1}^{(\alpha,\beta)}(\xi) \right] \quad (6.106)$$

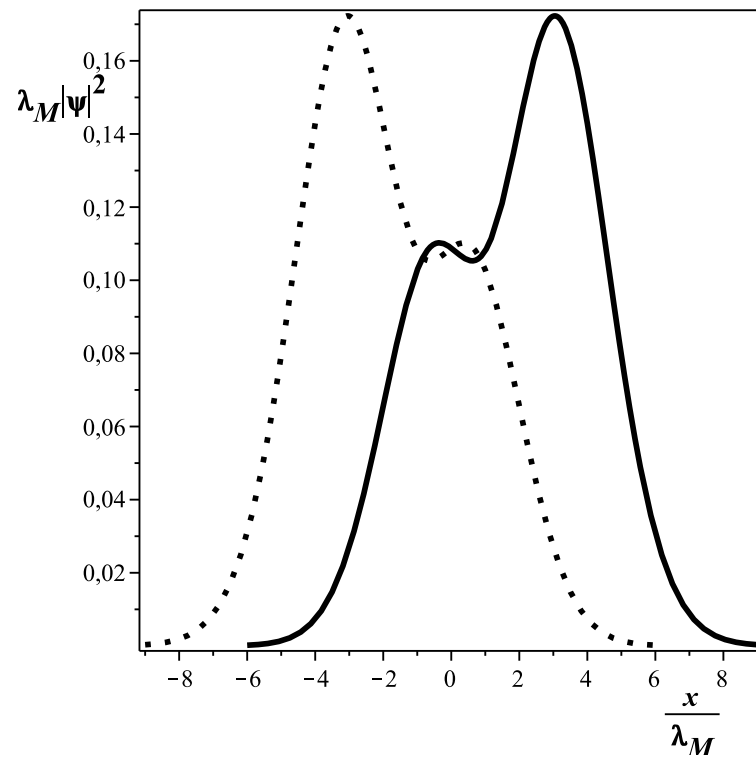
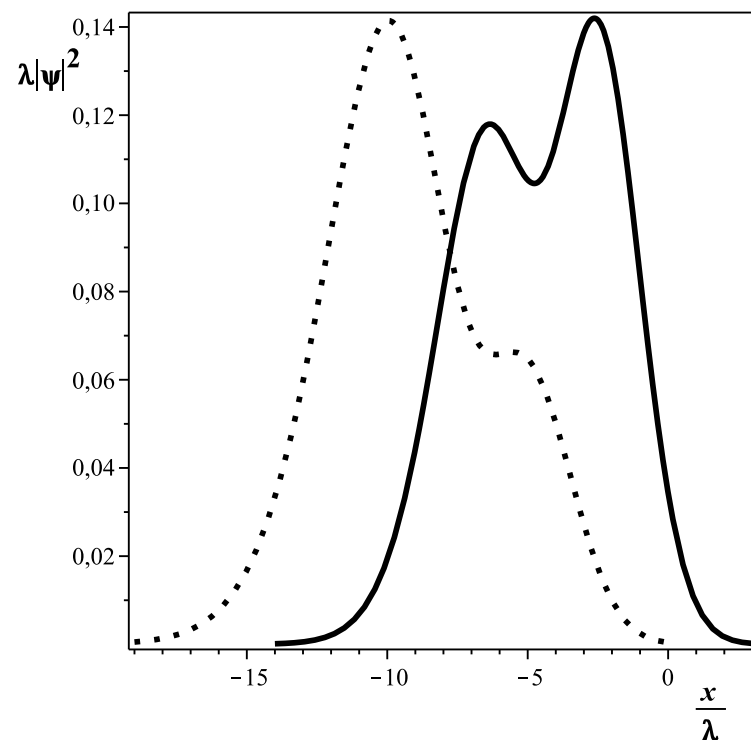
onde

$$c_3 = \frac{\beta^2 - \alpha^2}{2} + \text{sen}\theta \frac{mc}{\gamma\hbar}, \quad c_4 = 2 \frac{(n+\alpha)(n+\beta)}{2n+\alpha+\beta} \quad (6.107)$$

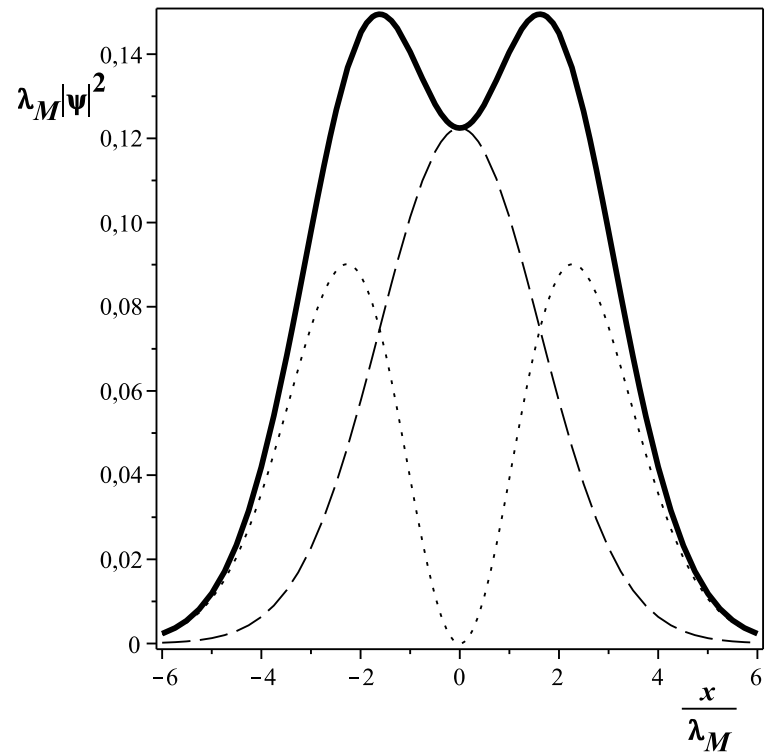
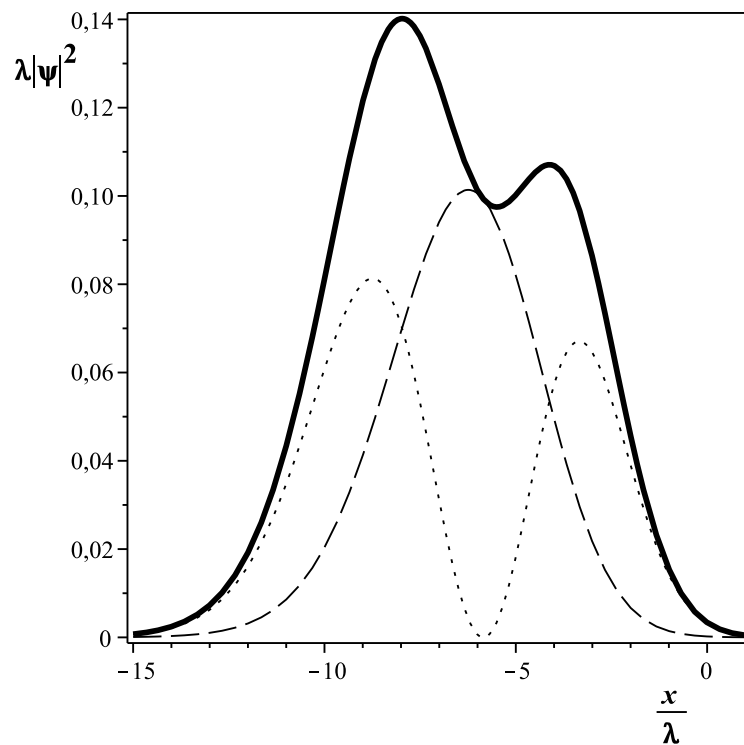
A condição de normalização  $\int_{-\infty}^{+\infty} dx (|\psi_+|^2 + |\psi_-|^2) = 1$  permite determinar  $N_n$ . No entanto, na busca de uma solução analítica de  $N_n$  foi encontrado uma indeterminação na solução de uma das integrais do componente inferior, não permitindo assim sua solução analítica, desta forma ilustrações numéricas são mostradas nas Figuras 6.9 e 6.10. Nas Figuras, (a) representa um férmion não massivo e  $M$  é uma constante com dimensão de massa e em (b) um férmion massivo com  $M$  sendo a própria massa  $m$ .

Na Figura 6.9 é mostrado a densidade de probabilidade de posição para  $n=1$ ,  $V_0/(Mc^2) = 2$  e  $\theta = 3\pi/8$  com as autoenergias de férmions não massivos  $E/(Mc^2) = -0,549$  ( $0,549$ ) e férmions massivos  $E/(Mc^2) = -0,888$  ( $0,047$ ) sendo representado na linha contínua (tracejada). Note que para férmions não massivos a mudança de  $E \rightarrow -E$  é equivalente a troca de  $x \rightarrow -x$ .

Conforme foi discutido, a transformação quiral para  $m=0$  troca o sinal do potencial escalar  $V_s \rightarrow -V_s$ , que é o equivalente trocar  $x \rightarrow -x$ , a conjugação de carga troca  $E \rightarrow -E$  e  $V_t \rightarrow -V_t$ . No potencial escalar puro com  $m=0$ ,  $\alpha = \beta$  e ainda  $E$  aparece ao quadrado nas quantidades  $\alpha$  e  $\beta$ . Assim, férmions não massivos com potencial escalar puro apresenta uma simetria em  $x=0$  para densidade de probabilidade de posição. Na Figura 6.10 (a) ((b)) é mostrada a densidade de probabilidade de posição para férmions não massivos (massivos) com  $|E|/(Mc^2) = 0,6245$  ( $|E|/(Mc^2) = 0,531$ ),  $V_0/(Mc^2) = 2$ ,  $\hbar\gamma/(Mc) = 1/10$ ,  $\theta = \pi/2$  e  $n=1$ . É ilustrado ainda na Figura 6.10  $|\psi_+|^2$  e  $|\psi_-|^2$ .

(a)  $m = 0$ (b)  $m \neq 0$ 

**Figura 6.9:** Densidade de probabilidade de posição para a solução do tipo Sturm-Liouville com  $n = 1$ ,  $|V_0|/Mc^2 = 2$ ,  $\gamma\hbar/Mc = 1/10$  e  $\theta = 3\pi/8$ . Foi utilizado em (a)  $E/Mc^2 = -0,549$  (0,549) e em (b)  $E/Mc^2 = -0,888$  (0,047) na linha contínua (pontilhada),  $\lambda = \hbar/(mc)$  e  $\lambda_M = \hbar/(Mc)$ .

(a)  $m = 0$  e  $|E|/Mc^2 = 0,6245$ (b)  $m \neq 0$  e  $|E|/mc^2 = 0,531$ 

**Figura 6.10:** Densidade de probabilidade de posição para a solução do tipo Sturm-Liouville (linha pontilhada  $|\psi_+|^2$ , linha tracejada  $|\psi_-|^2$ ), com  $n = 1$ ,  $|V_0|/Mc^2 = 2$ ,  $\gamma\hbar/Mc = 1/10$  e  $\theta = \pi/2$ . Aqui  $\lambda = \hbar/(mc)$  e  $\lambda_M = \hbar/(Mc)$ .

## Capítulo 7

### Conclusões e comentários

Foi discutido neste trabalho a solução da equação de Dirac e Klein-Gordon com a estrutura de Lorentz mais geral para potenciais externos em  $3 + 1$  dimensões do espaço-tempo e os correspondentes limites não-relativísticos para o potencial eletromagnético onde obteve-se as equações de Pauli para partículas de spin  $1/2$  e Schrödinger para partículas de spin  $0$ , respectivamente. Ainda na equação de Dirac em  $1 + 1$  dimensões foram discutidas as transformações: conjugação de carga, transformação quiral e transformação quiral contínua. Esta última transformação juntamente com a criação de um vínculo entre os potenciais escalar e vetorial permitiu desacoplar e mapear as soluções do componente superior do espinor sob a perspectiva de um problema de Sturm-Liouville.

Soluções de espalhamento e estados ligados para férmions massivos e não massivos interagindo em uma mistura conveniente de potenciais escalar e vetorial tipo degrau abrupto e degrau suave foram obtidas por meio da equação de Dirac em  $1 + 1$  dimensões do espaço-tempo. Com o auxílio de uma transformação quiral contínua foi possível desacoplar os componentes do espinor e mapear o problema em uma perspectiva Sturm-Liouville preservando a forma da corrente com a restrição  $V_t = V_s \cos \theta$  com  $\pi \leq \theta \leq 0$ . Devido a esta restrição  $|V_t| \leq |V_s|$  não houve a manifestação do paradoxo de Klein [81]. Nesta perspectiva uma função delta surge na origem do potencial efetivo para o caso do potencial degrau abrupto e soluções de espalhamento foram encontradas, este potencial não demonstra propriedade para estados ligados, nesta perspectiva. As soluções deste potencial encontram-se publicada no *Annals of Physics* (veja [67]).

Entretanto, o potencial degrau suave exhibe o cálculo de integrais e limites de funções especiais ainda não disponíveis na literatura, mas já se encontra submetida à publicação. Houve ainda uma completa satisfação na análise deste potencial por permitir sua representação na forma de uma equação diferencial hipergeométrica cujas soluções são bem conhecidas, onde o potencial efetivo torna-se o consagrado potencial de Rosen-Morse utilizado na discussão do estado vibracional de uma molécula poliatômica [63]. Esta análise permitiu encontrar soluções de espalhamento e estados ligados. A solução da equação diferencial para as autoenergias de Dirac com dependência em  $|V_0|$ ,  $\gamma$ ,  $\theta$ ,  $m$  e do número

quântico  $N$  foram obtidas pela identificação dos polos no eixo imaginário dos planos complexos ao considerar a amplitude de transmissão uma função de variáveis complexas e que foi transmutada em resolver uma equação algébrica de segundo grau. Os resultados obtidos no potencial degrau abrupto foram recuperados no limite extremamente relativístico quando  $\gamma \rightarrow \infty$ . É observado o comportamento de espalhamento clássico a medida que  $\gamma \rightarrow 0$ . Não ocorrem estados ligados para  $\gamma \rightarrow \infty$  com  $|V_0|$  finito, mas há um conjunto finito de estados ligados que se eleva com a diminuição de  $\gamma$  e aumento de  $|V_0|$ . Ainda, nota-se que o número de estados ligados se eleva no limite de  $\theta \rightarrow \pi/2$ , conforme observado nas Figuras 6.6, 6.7 e 6.8. Férmions não massivos apresentam uma simetria no espectro de energias em relação  $E = 0$  relacionada a conjugação de carga e a conjugação quiral, uma simetria adicional é exibida para o acoplamento escalar puro  $\theta = \pi/2$ .

Com a representação utilizada para as matrizes gama na equação de Dirac original se observa, na construção do espinor, que para certo número quântico  $n$  o  $|\psi_+|^2$  possui  $n$  corcovas e o  $|\psi_-|^2$  possui  $n + 1$  corcovas, conforme mostrado na Figura 6.10. Mais ainda, nota-se na Figura 6.9 uma simetria na densidade de probabilidade de posição  $|\psi|^2$  para férmions não massivos com uma simetria adicional para o acoplamento escalar puro  $\theta = \pi/2$ , conforme mostrado nas Figuras 6.9 e 6.10.

Uma solução isolada do problema Sturm-Lioville mostra que férmions possuem uma localização bem definida que se eleva com o aumento de  $\sin\theta$  quando os potenciais vetorial e escalar possuem diferentes magnitudes, no potencial degrau suave há um incremento na sua localização com a diminuição na suavidade do degrau. Férmions não massivos demonstram uma simetria em relação à origem na densidade de probabilidade de posição.

Soluções de estados ligados não se manifestaram sob as condições das simetrias de spin e pseudospin, e nem em uma aproximação não-relativística por exigirem potenciais extremamente fortes.

A análise de espalhamento revela resultados intrigantes para  $|V_0| > mc^2$  e energia suficientemente pequena. Neste caso, o coeficiente de transmissão em função do ângulo de mistura desaparece devido ao surgimento de um degrau ascendente (descendente) para pequenos (grandes) valores  $\theta$  por tornar à energia efetiva menor do que a altura do potencial efetivo. Nas Figuras 5.6 e 6.5 são mostrados os comportamentos dos coeficientes de transmissão em função do ângulo de mistura para os potenciais degrau abrupto e suave, respectivamente.

Com a estratégia adotada neste trabalho é possível analisar férmions com ou sem massa interagindo em diversos potenciais cujo comportamento assintótico seja uma constante e a região com variação apreciável esteja ao redor da origem. Está sendo analisado a interação de férmions em potenciais do tipo duplo-degrau cujos resultados serão divulgados posteriormente.

# Referências Bibliográficas

- [1] Lucha, W.; Schöberl F.F.; Gromes, D. Bound States of Quarks. **Physics Reports**, v. 200, p. 127 - 240, fev. 1991.
- [2] Negele, J.W.; Vogt, E.W. **Advances in Nuclear Physics**. Berlim. Springer, 2000, v. 25. 540 p.
- [3] Page, P.R.; Goldman, T.; Ginocchio, J.N. Relativistic Symmetry Suppresses Quark Spin-Orbit Splitting. **Physical Review Letters**, v. 86, p 204 - 207, jan. 2001.
- [4] Ginocchio, J.N. Relativistic symmetries in nuclei and hadrons. **Physics Reports**, v. 414, p. 165 - 261, ago. 2005.
- [5] Ginocchio, J.N. Pseudospin as a Relativistic Symmetry. **Physical Review Letters**, v. 78, p. 436 - 439, jan. 1997.
- [6] Ginocchio, J.N.; Leviatan, A. On the relativistic foundations of pseudospin symmetry in nuclei. **Physics Letters B**, v. 425, p. 1 - 5, abr. 1998.
- [7] Lalazissis, G.A.; et al. Relativistic mean field approach and the pseudospin symmetry. **Physical Review C**, v. 58, p. R45 - R48, jul. 1998.
- [8] Sugawara-Tanabe, K.; Arima, A. Hidden pseudospin symmetry in the Dirac equation. **Physical Review C**, v. 58, p. R3065 - R3068, dez. 1998.
- [9] Ginocchio, J.N. A relativistic symmetry in nuclei. **Physics Reports**, v. 315, p. 231 - 240, jul. 1999.
- [10] Marcos, S.; et al. Pseudo spin-orbit potential in relativistic self-consistent model. **Physical Review C**, v. 62, p. 054309-1 - 054309-6, out. 2000.
- [11] Alberto, P.; et al. Isospin Asymmetry in the Pseudospin Dynamical Symmetry. **Physical Review Letters**, v. 86, p. 5015 - 5018, maio 2001.
- [12] Ginocchio, J.N.; Leviatan, A. Test of Nuclear Wave Functions for Pseudospin Symmetry. **Physical Review Letters**, v. 87, p. 072502-1 - 072502-4, ago. 2001.



- [13] Alberto, P.; et al. Pseudospin symmetry as a relativistic dynamical symmetry in the nucleus. **Physical Review C**, v. 65, p. 034307-1 - 034307-9, fev. 2002.
- [14] Ginocchio, J.N. Pseudospin symmetry and relativistic mean field eigenfunctions. **Physical Review C**, v. 66, p. 064312-1 - 064312-8, dez. 2002.
- [15] Zhou, S.-G.; Meng, J.; Ring, P. Spin Symmetry in the Antinucleon Spectrum. **Physical Review Letters**, v. 91, p. 262501-1 - 262501-4, dez. 2003.
- [16] Mao, G. Effect of tensor couplings in a relativistic Hartree approach for finite nuclei. **Physical Review C**, v. 67, p.044318-1 - 044318-12, abr. 2003.
- [17] Lisboa, R.; et al. Pseudospin symmetry and the relativistic harmonic oscillator. **Physical Review C**, v. 69, p. 024319-1 - 024319-15, fev. 2004.
- [18] Leviatan, A. Supersymmetric Patterns in the Pseudospin, Spin, and Coulomb Limits of the Dirac Equation with Scalar and Vector Potentials. **Physical Review Letters**, v. 92, p. 202501-1 - 202501-4, maio 2004.
- [19] Alberto, P.; et al. Tensor coupling and pseudospin symmetry in nuclei. **Physical Review C**, v. 71, p. 034313-1 - 034313-7, mar. 2005.
- [20] Lisboa, R.; et al. Spin and pseudospin symmetries in the antinucleon spectrum of nuclei. **Physical Review C**, v. 81, p. 064324-1 - 064324-8, jun. 2010.
- [21] Liang, H.; et al. Perturbative interpretation of relativistic symmetries in nuclei. **Physical Review C**, v. 83, p. 041301-1 - 041301-5, abr. 2011.
- [22] Lu, B.-N.; Zhao, E.-G.; Zhou, S.-G. Pseudospin Symmetry in Single Particle Resonant States. **Physical Review Letters**, v. 109, p. 072501-1 - 072501-5, ago. 2012.
- [23] de Castro, A.S.; Alberto, P. Spin and pseudospin symmetries in the Dirac equation with central Coulomb potentials. **Physical Review A**, v. 86, p. 032122-1 - 032122-7, set. 2012.
- [24] Alberto, P.; de Castro, A.S.; Malheiro, M. Spin and pseudospin symmetries of the Dirac equation with confining central potentials. **Physical Review C**, v. 87, p. 031301-1 - 031301-5, mar. 2013.
- [25] Alberto, P.; de Castro, A.S.; Malheiro, M. Spin and pseudospin symmetries and the equivalent spectra of relativistic spin-1/2 and spin-0 particles. **Physical Review C**, v. 75, p. 047303-1 - 047303-4, abr. 2007.
- [26] Braun, O.M.; Kivshar, Y.S. **The Frenkel-Kontorova Model: Concepts, Methods, and Applications**. Berlim. Springer, 2004, 472 p.

- [27] Gumbs, G.; Kiang, D. The relativistic one dimensional square potential. **American Journal of Physics**, v. 54, p. 462 - 463, jan. 1985.
- [28] Domínguez, F.A. Dirac particles in the potential  $-1/|x|$ . **American Journal of Physics**, v. 58, p. 886 - 888, set. 1990.
- [29] de Castro, A.S. Confinement of fermions by mixed vector-scalar linear potentials in two-dimensional space-time. **Physics Letters A**, v. 305, p. 100 - 104, out. 2002.
- [30] Nogami, Y.; Toyama, F.M.; van Dijk, W. The Dirac equation with a confining potential. **American Journal of Physics**, v. 71, p. 950 - 956, jan. 2003.
- [31] Guo, J-Y.; Sheng, Z-Q. Solution of the Dirac equation for the Woods-Saxon potential with spin and pseudospin symmetry. **Physics Letters A**, v. 338, p. 90-96, fev. 2005.
- [32] Jia, C-S.; Guo, P.; Peng, X-L. Exact solution of the Dirac-Eckart problem with spin and pseudospin symmetry. **Journal of Physics A: Mathematical and General**, v. 39, p. 7737 - 7744, maio 2006.
- [33] de Castro, A.S.; et al. Relating pseudospin and spin symmetries through charge conjugation and chiral transformations: The case of the relativistic harmonic oscillator. **Physical Review C**, v. 73, p. 054309-1 - 054309-13, maio 2006.
- [34] de Castro, A.S. Effects of a mixed vector-scalar kink-like potential for spinless particles in two-dimensional space-time. **International Journal of Modern Physics A**, v. 22, p. 2609 - 2618, out. 2005.
- [35] Zhang, L.H.; Li, X.-P.; Jia, C.-S. Analytical approximation to the solution of the Dirac equation with the Eckart potential including the spin-orbit coupling term. **Physics Letters A**, v. 372, p. 2201 - 2207, nov. 2007.
- [36] Zhang, F.-L.; Fu, B.; Chen, J.-L. Dynamical symmetry of Dirac hydrogen atom with spin symmetry and its connection with Ginocchio's oscillator. **Physical Review A**, v. 78, p. 040101-1 - 040101-4, out. 2008.
- [37] Qiang, W.-C.; Zhou, R.-S.; Gao, Y. Application of the exact quantization rule to the relativistic solution of the rotational Morse potential with pseudospin symmetry. **Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical**, v. 40, p. 1677 - 1685, jan. 2007.
- [38] Bayrak, O.; Boztosun, I. The pseudospin symmetric of the Morse potential for any  $\kappa$  state. **Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical**, v. 40, p. 11119 - 11127, ago. 2007.

- [39] Soyly, A.; Bayrak, O.; Boztosun, I.  $\kappa$  state solutions of the Dirac for the Eckart potential with pseudospin and spin symmetry. **Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical**, v. 41, p. 065308-1 - 065308-8, jan. 2008.
- [40] Aydogdu, O.; Sever, R. Exact solution of the Dirac equation with the Mie-type potential under the pseudospin and spin symmetry limit. **Annals of Physics**, v. 325, p. 373 - 383, out. 2009.
- [41] Castro, L.B.; de Castro, A.S.; Hott, M. Relativistic effects of mixed vector-scalar-pseudoscalar potentials for fermions in 1+1 dimensions. **International Journal of Modern Physics E**, v. 16, p. 3002 - 3005, jun. 2007.
- [42] Castro, L.B.; de Castro, A.S.; Hott, M. Bounded solutions of fermions in the background of mixed vector-scalar Pöschl-Teller-like potentials. **Europhysics Letters**, v. 77, p. 20009-1 - 20009-5, jan. 2007.
- [43] Castro, L.B.; de Castro, A.S. Missing solution in a Cornell potential. **Annals of Physics**, v. 338, p. 278 - 282, set. 2013.
- [44] Castro, L.B. Relating pseudospin and spin symmetries through chiral transformation with tensor interaction. **Physical Review C**, v. 86, p. 052201-1 - 052201-4, nov. 2012.
- [45] Hamzavi, M.; Rajabi, A.A.; Hassanabadi, H. Exact pseudospin symmetry solution of the Dirac equation for spatially-dependent mass Coulomb potential including a Coulomb-like tensor interaction via asymptotic iteration method. **Physics Letters A**, v. 374, p. 4303 - 4307, ago. 2010.
- [46] Zarrinkamar, S.; Rajabi, A.A.; Hassanabadi, H. Dirac equation for the harmonic scalar and vector potentials and linear plus Coulomb-like tensor potential; the SUSY approach. **Annals of Physics**, v. 325, p. 2522 - 2528, maio 2010.
- [47] Candemir, N. Pseudospin symmetry in trigonometric Pöschl-Teller potential. **International Journal of Modern Physics E**, v. 21, p. 1250060-1 - 1250060-10, jun. 2012.
- [48] Castro, L.B.; de Castro, A.S. Unified treatment of mixed vector-scalar screened coulomb potentials for fermions. **International Journal of Modern Physics E**, v. 16, p. 2998 - 3001, maio 2007.
- [49] Castro, L.B.; de Castro, A.S. Confinement of spin-0 and spin-1/2 particles in a mixed vector-scalar coupling with unequal shapes for the potentials. **Physica Scripta**, v. 75, p. 170 - 173, jan. 2007.

- [50] Castro, L.B.; de Castro, A.S. Bound states of bosons and fermions in a mixed vector-scalar coupling with unequal shapes for the potentials. **Physica Scripta**, v. 77, p. 045007-1 - 045007-4, mar. 2008.
- [51] Zhang, M.-C.; Huang-Fu, G.-Q. Solution of the Dirac in the tridiagonal representation with pseudospin symmetry for an anharmonic oscillator and electric dipole ring-shaped potential. **Annals of Physics**, v. 327, p. 841 - 850, dez. 2011.
- [52] Liang, H.; et al. Pseudospin symmetry in supersymmetric quantum mechanics: Schrödinger equations. **Physical Review C**, v. 87, p. 014334-1 - 014334-13, jan. 2013.
- [53] de Castro, A.S. Bounded solutions of fermions in the background of mixed vector-scalar inversely linear potentials. **Annals of Physics**, v. 316, p. 414 - 430, jan. 2005.
- [54] Strange, P. **Relativistic Quantum Mechanics with Applications in Condensed Matter and Atomic Physics**. Cambridge. Cambridge University Press, 1998. 594 p.
- [55] Rajaraman, R. **An introduction to Solitons and Instantons in Quantum Field Theory**. Amsterdam. North-Holland Publishing Company, 1982. 409 p.
- [56] Goldstone, J.; Wilczek, F. Fractional Quantum Numbers on Solitons. **Physical Review Letters**, v. 47, p. 986 - 989, jul. 1981.
- [57] Jackiw, R.; Semenoff, G. Continuum Quantum Field Theory for a Linearly Conjugate Diatomic Polymer with Fermion Fractionization. **Physical Review Letters**, v. 50, p. 439 - 442, fev. 1983.
- [58] de Castro, A.S; Hott, M. Trapping neutral fermions with kink-like potentials. **Physics Letters A**, v. 351, p. 379 - 391, nov. 2006.
- [59] Jia, C-S.; et al. Bounded solutions of the Dirac equation with a PT-symmetric kink-like vector potential in two-dimensional space-time. **International Journal of Theoretical Physics**, v.47, p. 664 - 672, set. 2007.
- [60] Garcia, M.G.; de Castro, A.S. Scattering and bound states of spinless particles in a mixed vector-scalar smooth step potential. **Annals of Physics**, v. 324, p 2372 - 2384, jun. 2009.
- [61] Castro, L.B.; Cardoso, T.R.; de Castro, A.S. On the scattering of massive spinless bosons by a nonminimal vector smooth step potential. **Nuclear Physics B (Proceedings Supplements)**, v. 199, p. 207 - 210, fev. 2010.

- [62] Bragov, V.G.; Gitman, D.M. **Exact Solutions of Relativistic Wave Equations**. Dordrecht. Kluwer Academic Publishers, 1990. 401 p.
- [63] Rosen, N.; Morse, P.M. On the Vibrations of Polyatomic Molecules. **Physical Review**, v. 42, p. 210 - 217, out. 1932.
- [64] Stanciu, G.N. Solvable vector and scalar potentials for the Dirac equation. **Physics Letters**, v. 23, p. 232 - 233, out. 1966.
- [65] Stanciu, G.N. Further exact solutions of the Dirac equation. **Journal of Mathematical Physics**, v. 8, p. 2043-1 - 2043-5, out. 1967.
- [66] Nieto, M.M. Exact wave-function normalization constants for the  $B_0 \tanh z - U_0 \cosh^2 z$  and Pöschl-Teller potentials. **Physical Review A**, v. 17, p. 1273 - 1283, abr. 1978.
- [67] Castilho, W.M.; de Castro, A.S. Stationary states of fermions in a sign potential with a mixed vector-scalar coupling. **Annals of Physics**, v. 340, p. 1 - 12, jan. 2014.
- [68] Greiner, W. **Relativistic Quantum Mechanics, Wave Equations**. 3 ed. Berlin. Springer, 1990. 439 p.
- [69] Ryder, L. **Quantum Field Theory**. 2 ed. Nova Iorque. Cambridge University Press, 1996. 504 p.
- [70] Pauli, W.; Weisskopf, V.F. Über die Quantisierung der skalaren relativistischen Wellengleichung. **Helvetica Physica Acta**, v. 7, p. 709 - 731, 1934.
- [71] Dirac, P. A. M. Relativistic Wave Equations. **Proceedings of the Royal Society A**, v. 155, p. 447 - 459, jul. 1936.
- [72] Thaller, B. **The Dirac Equation**. Berlin. Springer-Verlag, 1992. 365 p.
- [73] Castro, L.B. On the Dirac equation with PT-symmetric potentials in the presence of position-dependent mass. **Physics Letters A**, v. 375, p. 2510-2512, 2011.
- [74] Watanabe, S. Chirality of  $K$  Particle. **Physical Review**, v. 106. p. 1306 - 1315, mar. 1957.
- [75] Touschek, B.F. Parity conservation and the mass of the neutrino. **Nuovo Cimento**, v. 5, p. 754 - 755, mar. 1957.
- [76] de Castro, A.S.; Hott, M. Exact closed-form solutions of the Dirac equation with a scalar exponential potential. **Physics Letters A**, v. 342, p. 53 - 59, maio 2005.

- [77] Cooper, F.; et al. Supersymmetry and the Dirac Equation. **Annals of Physics**, v. 187, p. 1 - 28, abr. 1988.
- [78] Nogami, Y.; Toyama, F.M. Supersymmetry aspects of the Dirac equation in one dimension with a Lorentz scalar potential. **Physical Review A**, v. 47, p. 1708 - 1714, mar. 1993.
- [79] Gradshteyn, I.S.; Ryzhik, I.M. **Table of Integrals, Series and Products**. 7 ed. California. Academic Press Elsevier, 2007. 1220 p.
- [80] Abramowitz, M.; Stegun, I.A. **Handbook of Mathematical Functions**. 10 ed. Toronto. Dover, 1965. 1046 p.
- [81] Klein, O Z. Die Reflexion von Elektronen an einem Potentialsprung nach der relativistischen Dynamik von Dirac. **Zeitschrift für Physik**, v. 53, p. 157 - 165, jan. 1929.

# Apêndice A

## Função gama (função fatorial)

A função gama, representada pela letra grega  $\Gamma$ , é uma extensão da função fatorial representada pela integral de Euler

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} \exp(-t) t^{z-1} dt, \quad \operatorname{Re} z > 0 \quad (1)$$

A restrição em  $z$  é imposta para evitar divergência da integral. Observe a função de duas variáveis

$$F(z, n) = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt, \quad \operatorname{Re} z > 0 \quad (2)$$

onde  $n$  é um número inteiro positivo. Visto que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = \exp(-t) \quad (3)$$

pela definição da exponencial

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(z, n) = F(z, \infty) = \int_0^{\infty} \exp(-t) t^{z-1} dt = \Gamma(z) \quad (4)$$

Analisando a função  $F(z, n)$  em sucessivas integrações por partes, temos

$$F(z, n) = n^z \int_0^1 (1-u)^n u^{z-1} du \quad (5)$$

onde  $u = t/n$ .

$$\frac{F(z, n)}{n^z} = (1-u)^n \frac{u^z}{z} \Big|_0^1 + \frac{n}{z} \int_0^1 (1-u)^{n-1} u^z du \quad (6)$$

Repetindo essa operação por diversas vezes, notando que a parte integrada se anula nas

extremidades, obteremos finalmente

$$\begin{aligned}
 F(z, n) &= n^z \frac{n(n-1)\dots 1}{z(z+1)\dots(z+n-1)} \int_0^1 u^{z+n-1} du \\
 &= n^z \frac{1.2.3\dots n}{z(z+1)(z+2)\dots(z+n)}
 \end{aligned} \tag{7}$$

Por conseguinte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(z, n) = F(z, \infty) = \Gamma(z) \tag{8}$$

Além disso

$$\Gamma(1) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(1, n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1.2.3\dots n}{1.2.3\dots n(n+1)} n^1 = 1,$$

$$\Gamma(2) = 1, \quad \Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2, \dots \tag{9}$$

$$\Gamma(z) = 1.2.3\dots(z-1) = (z-1)!$$

Portanto, podemos definir

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty \exp(-t) t^z dt = z!, \quad \text{Re } z > 0 \tag{10}$$

### Função beta

Para introduzir a função beta, vamos trabalhar o produto entre dois fatoriais

$$m!n! = \lim_{a^2 \rightarrow \infty} \int_0^{a^2} \exp(-u) u^m du \int_0^{a^2} \exp(-v) v^n dv, \quad \begin{cases} \text{Re } m > -1 \\ \text{Re } n > -1 \end{cases} \tag{11}$$

Substituindo  $u$  por  $x^2$  e  $v$  por  $y^2$ , obtemos

$$m!n! = \lim_{a \rightarrow \infty} 4 \int_0^a \exp(-x^2) x^{2m+1} dx \int_0^a \exp(-y^2) y^{2n+1} dy \tag{12}$$



Transformando em coordenadas polares, teremos

$$\begin{aligned}
 m!n! &= \lim_{a \rightarrow \infty} 4 \int_0^a \exp(-r^2) r^{2m+2n+3} dr \int_0^{\pi/2} (\cos \theta)^{2m+1} (\operatorname{sen} \theta)^{2n+1} d\theta \\
 &= 2(m+n+1)! \int_0^{\pi/2} (\cos \theta)^{2m+1} (\operatorname{sen} \theta)^{2n+1} d\theta
 \end{aligned} \tag{13}$$

onde o elemento de área  $dx dy$  foi substituído por  $r dr d\theta$ .

A função beta é definida como sendo

$$B(m+1, n+1) = 2 \int_0^{\pi/2} (\cos \theta)^{2m+1} (\operatorname{sen} \theta)^{2n+1} d\theta = \frac{m!n!}{(m+n+1)!} \tag{14}$$

Em termos da função gama, a função beta é escrita como sendo:

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q+1)}, \quad B(p, q) = B(q, p) \tag{15}$$

## Apêndice B

### Equação diferencial hipergeométrica

A equação diferencial hipergeométrica, é uma equação linear, homogênea e de segunda ordem que pode ser expressa na forma

$$y(1-y)\varphi'' + [d - (a+b+1)y]\varphi' - ab\varphi = 0 \quad (16)$$

contém três parâmetros livres  $a$ ,  $b$  e  $d$ , sendo invariante sobre a permutação de  $a \leftrightarrow b$ , com uma grande variedade de soluções. Existem três singularidades em  $y = 0$ ,  $1$  e  $\infty$ . Consideramos uma solução da equação na forma

$$\varphi(y) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n y^{n+s} \quad (17)$$

substituindo (17) em (16),

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+s)(n+s+d-1)d_n y^{n+s-1} - \sum_{n=0}^{\infty} [(n+s)(n+s+a+b)+ab]d_n y^{n+s} = 0 \quad (18)$$

a qual no fornece

(i) Equação indicial:

$$s(s+d-1) = 0 \quad (19)$$

(ii) Relação de recorrência :

$$d_n = \frac{(s+n+a-1)(s+n+b-1)}{(n+s)(s+n+d-1)} d_{n-1} \quad (20)$$

A equação indicial admite duas soluções (raízes da equação)  $s_1 = 0$  e  $s_2 = 1 - d$ . Analizaremos ambos os casos

(1)  $s_1 = 0$ . A solução é a série hipergeométrica

$$\varphi_1(y) = {}_2F_1(a, b; d; y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(d)_n} \frac{y^n}{n!} = \frac{\Gamma(d)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n)}{\Gamma(d+n)} \frac{y^n}{n!} \quad (21)$$

onde  $(d)_n = \Gamma(d+n)/\Gamma(d)$  é o simbolo de Pochhammer e os índices de  ${}_2F_1$  são relacionados com a generalização da série hipergeométrica na forma

$${}_lF_m(a_1, \dots, a_l; b_1, \dots, b_m; y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \dots (a_l)_n y^n}{(b_1)_n \dots (b_m)_n n!} \quad (22)$$

A solução da equação (21) existe somente para  $d \neq k$  onde  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Note que a solução é invariante à permutação dos parâmetros  $a \leftrightarrow b$ . Quando  $a = -n$  ou  $b = -n$  a série define um polinômio de  $n$ -ésimo grau, como por exemplo a relação entre a função hipergeométrica e o polinômio de Jacobi de grau  $n$ :

$${}_2F_1\left(-n, n + a + b + 1; a + 1; \frac{1-y}{2}\right) = \frac{P_n^{(a,b)}(y)}{P_n^{(a,b)}(1)} \quad (23)$$

(2)  $s_2 = 1 - d$ . A segunda solução linearmente independente da equação hipergeométrica pode ser realizada por meio da mudança de parâmetros na equação hipergeométrica

$$\varphi_2(y) = y^{1-d} {}_2F_1(a + 1 - d, b + 1 - d; 2 - d; y) \quad (24)$$

Uma solução geral da equação hipergeométrica pode ser escrita como uma combinação linear das soluções (21) e (24):

$$\varphi(y) = A {}_2F_1(a, b; d; y) + B y^{1-d} {}_2F_1(a + 1 - d, b + 1 - d; 2 - d; y) \quad (25)$$