

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA DE BAURU  
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

# **Análise do Comportamento Dinâmico de um Rotor Vertical Através do Método dos Elementos Finitos**

Autor: **Cristiano Eduardo Agostini**

Orientador: **Prof. Dr. Edson Antonio Capello Sousa**

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”  
FACULDADE DE ENGENHARIA MECÂNICA DE BAURU  
COMISSÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

# **Análise do Comportamento Dinâmico de um Rotor Vertical Através do Método dos Elementos Finitos**

Autor: **Cristiano Eduardo Agostini**

Orientador: **Prof. Dr. Edson Antonio Capello Sousa**

Curso: **Engenharia Mecânica**

Área de concentração: **Projeto Mecânico**

Dissertação de mestrado apresentada à comissão de Pós-Graduação da Faculdade de Engenharia Mecânica, como requisito para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Bauru, 2011

SP – Brasil

Agostini, Cristiano Eduardo.

Análise do comportamento dinâmico de um rotor vertical através do método dos elementos finitos / Cristiano Eduardo Agostini, 2011.

118 f.

Orientador: Edson Antonio Capello Sousa

Dissertação (Mestrado)-Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Bauru, Bauru, 2011

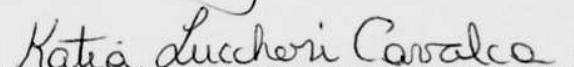
1. Elementos finitos. 2. Dinâmica de rotores. 3. Vibrações mecânicas. I. Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Bauru. II. Título.

**ATA DA DEFESA PÚBLICA DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DE CRISTIANO EDUARDO AGOSTINI, DISCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA, DO(A) FACULDADE DE ENGENHARIA DE BAURU.**

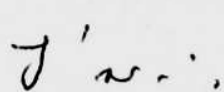
Aos 14 dias do mês de fevereiro do ano de 2011, às 14:00 horas, no(a) ANFITEATRO DA SEÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO DA FACULDADE DE ENGENHARIA, reuniu-se a Comissão Examinadora da Defesa Pública, composta pelos seguintes membros: Prof. Dr. EDSON ANTONIO CAPELLO SOUSA do(a) Departamento de Engenharia Mecânica / Faculdade de Engenharia de Bauru, Profa. Dra. KÁTIA LUCHESE CAVALCA DEDINI do(a) Departamento de Projeto Mecânico / Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP, Prof. Dr. JOSE MANOEL BALTHAZAR do(a) O Departamento de Estatística, Matemática Aplicada e Computação / Instituto de Geociências e Ciências Exatas - UNESP, sob a presidência do primeiro, a fim de proceder a arguição pública da DISSERTAÇÃO DE MESTRADO de CRISTIANO EDUARDO AGOSTINI, intitulado "ANÁLISE DO COMPORTAMENTO DINÂMICO DE UM ROTOR VERTICAL ATRAVÉS DO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS". Após a exposição, o discente foi argüido oralmente pelos membros da Comissão Examinadora, tendo recebido o conceito final: APROVADO. Nada mais havendo, foi lavrada a presente ata, que, após lida e aprovada, foi assinada pelos membros da Comissão Examinadora.



Prof. Dr. EDSON ANTONIO CAPELLO SOUSA



Profa. Dra. KÁTIA LUCHESE CAVALCA DEDINI



Prof. Dr. JOSE MANOEL BALTHAZAR

# Agradecimentos

Gostaria de agradecer as pessoas e instituições que colaboraram para o sucesso deste trabalho:

Ao Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” de Bauru por ter me dado condições para meu aprimoramento profissional e elaboração desta dissertação de mestrado.

A secretaria de Pós-Graduação da Faculdade de Engenharia de Bauru.

Ao meu orientador Prof. Dr. Edson Antonio Capello Sousa pela competência e auxílio com a qual me conduziu no desenvolvimento desse trabalho.

Aos meus pais Tim e Regina que sempre acreditaram que o conhecimento e estudo são fundamentais para a vida.

À minha esposa Adriana pelo amor, paciência e incentivo na elaboração dessa dissertação.

Ao meu filho Bruno pelos momentos de alegria em seu primeiro ano de vida.

E a Deus, por estar sempre ao meu lado, iluminando todos os meus passos.

**“Se fiz descobertas valiosas, foi mais por ter paciência do que qualquer outro talento”.**

-Isaac Newton-

## Resumo

Agostini, C. E., *Análise do Comportamento Dinâmico de um Rotor Vertical Através do Método dos Elementos Finitos*, Bauru: Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, 2011, 118 pp., Dissertação (Mestrado).

Neste trabalho, analisaram-se as frequências naturais (axiais, torsionais e de flexão) e as respostas em frequência de um rotor vertical com um disco rígido na extremidade através da análise modal clássica e complexa. A equação que governa o movimento foi obtida através da formulação Lagrangeana. O modelo considerou os efeitos à flexão, torção e deformação axial do eixo, além dos efeitos giroscópicos e gravitacionais. O método dos elementos finitos foi utilizado para discretização da estrutura em elementos cilíndricos vazados com 12 graus de liberdade. As matrizes de massa, rigidez e giroscópica foram explicitadas de forma consistente. A análise modal tradicional, normalmente aplicada a estruturas estacionárias, não considera uma importante característica das máquinas rotativas que são os modos de precessão direta e retrógrada. Inicialmente, através da análise modal clássica, foram obtidas as frequências naturais axiais e torsionais no eixo estacionário, já que estas não sofrem influência dos efeitos giroscópicos. Posteriormente a investigação foi executada através da análise modal complexa. Este tipo de ferramenta, que se baseia na utilização de coordenadas direcionais para descrever o comportamento dinâmico do eixo rotativo, permite a decomposição dos modos do sistema em dois submodos, sendo um direto e o outro retrógrado. Dessa forma, consegue-se visualizar de maneira clara a órbita e a direção do movimento precessional em torno da linha não deformada do eixo rotativo. Um programa de elementos finitos foi desenvolvido utilizando o software MATLAB® e simulações numéricas foram efetuadas de forma a validar o modelo construído. Foram obtidas as frequências naturais e a resposta forçada em frequência direcional (dFRF), com o uso da análise modal complexa, para um rotor vertical simples e também para uma coluna de perfuração típica utilizada na construção de poços de petróleo.

**Palavras chaves:** Elementos Finitos, Dinâmica de Rotores, Vibrações Mecânicas.

# Abstract

Agostini, C. E., Analysis of the Dynamic Behavior of a Vertical Rotor Through Finite Element Method, Bauru: Faculty of Mechanical Engineering, São Paulo State University “Júlio de Mesquita Filho”, 2011, 118 pp., Dissertation (Master Degree).

In this study, natural frequencies were analyzed (axial, torsional and flexural) and frequency response of a vertical rotor with a hard disk at the edge through the classical modal and complex analysis. The equation that rules the movement was obtained through the Lagrangian formulation. The model considered the effects of bending, torsion and axial deformation of the shaft, besides the gravitational and gyroscopic effects. The finite element method was used to discretize the structure into hollow cylindrical elements with 12 degrees of freedom. Mass, stiffness and gyroscopic matrices were explained consistently. The classical modal analysis, usually applied to stationary structures, does not consider an important characteristic of rotating machinery which are the methods of forward and backward whirl. Initially, through the traditional modal analysis, axial and torsional natural frequencies were obtained in a static shaft, since they do not suffer the influence of gyroscopic effects. Later research was performed by complex modal analysis. This type of tool, based on the use of complex coordinates to describe the dynamic behavior of rotating shaft, allows the decomposition of the system in two submodes, backward and forward. Thus, it is possible to clearly visualize that the orbit and direction of the precessional motion around the line of the rotating shaft is not deformed. A finite element program was developed using MATLAB®, and numerical simulations were performed to validate this model. Natural frequencies and directional frequency forced response (dFRF) were obtained using the complex modal analysis for a simple vertical rotor and also for a typical drill string used in the construction of oil wells.

**Keywords:** Finite Elements, Rotor Dynamics, Mechanical Vibrations.



# Índice

<b>Resumo</b>	<b>i</b>
<b>Abstract</b>	<b>ii</b>
<b>Índice</b>	<b>iii</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>vi</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>vii</b>
<b>Nomenclatura</b>	<b>ix</b>
<b>1. Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Motivações e Objetivos	1
1.2 Revisão Bibliográfica	5
1.3 Conceitos e Fundamentos	15
<b>2. Modelagem Matemática da Dinâmica de um Rotor Vertical</b>	<b>22</b>
2.1 Considerações gerais	22
2.2 Obtenção das Equações Governantes do Movimento	22
2.2.1 Energia Cinética do Eixo .....	25
2.2.2 Energia Cinética do Disco .....	29
2.2.3 Energia Potencial do Eixo devido à Flexão .....	30
2.2.4 Energia Potencial do Eixo devido à Torção.....	31
2.2.5 Energia Potencial do Eixo devido à Deformação Axial .....	31
2.2.6 Energia Potencial do Eixo devido ao Campo Gravitacional.....	32
2.2.7 Energia Potencial Total do Sistema .....	32
2.2.8 Equação do Movimento .....	34
<b>3. Formulação Através do Método dos Elementos Finitos</b>	<b>35</b>
3.1 Modelo de Elementos Finitos	35
3.2 Matriz de Rigidez do Eixo	38
3.2.1 Matriz de Rigidez Elástica .....	38
3.2.2 Matriz de Rigidez Torcional .....	39
3.2.3 Matriz de Rigidez Axial.....	40

3.2.4	Matriz de Rigidez Devido ao Peso Próprio.....	41
3.3	Matriz de Inércia do Eixo	45
3.3.1	Matriz de Inércia de Translação.....	45
3.3.2	Matriz de Inércia de Rotação .....	46
3.3.3	Matriz de Inércia de Torsão .....	47
3.4	Matriz Giroscópica	48
3.5	Matriz do Sistema Mecânico	49
<b>4.</b>	<b>Análise Modal</b>	<b>51</b>
4.1	Introdução	51
4.2	Análise Modal Clássica	53
4.2.1	Análise Modal em Estruturas Estacionárias .....	53
4.2.2	Análise Modal em Sistemas Rotativos .....	57
<b>5.</b>	<b>Análise Modal Complexa</b>	<b>61</b>
5.1	Vibração Livre em Sistemas Rotativos	61
5.2	Vibração Forçada em Sistemas Rotativos	69
<b>6.</b>	<b>Simulações Numéricas e Validação</b>	<b>74</b>
6.1	Considerações Gerais	74
6.2	Resultados Comparados com a Bibliografia	76
6.2.1	Eixo Rotativo com Extremidade Livre .....	76
6.2.2	Eixo Rotativo com Disco Rígido na Extremidade Livre .....	81
6.3	Resultados Comparando Análise Modal Clássica e Complexa	86
<b>7.</b>	<b>Estudo para um Rotor Vertical em Balanço</b>	<b>90</b>
7.1	Discretização e Configuração do Rotor	90
7.2	Análise Modal	94
7.3	Análise do Comprimento Vertical do Rotor	100
7.4	Análise da Influência do Campo Gravitacional	104
<b>8.</b>	<b>Conclusões</b>	<b>106</b>

<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>108</b>
<b>Apêndice A - Resultados Comparando a Convergência pelo Número de Elementos</b>	<b>113</b>
<b>Apêndice B - Fluxograma Rotina Computacional</b>	<b>117</b>
<b>Súmula Curricular</b>	<b>118</b>

## Lista de Tabelas

Tabela 5.1 – Relações entre módulos $Pf$ e $Pb$ e tipos de movimento e órbitas.	63
Tabela 6.1 - Dados mecânicos dos rotores para simulações.	74
Tabela 6.2 - Frequências naturais de vibração lateral.	78
Tabela 6.3 - Frequências naturais de vibração torcional e axial.	79
Tabela 6.4 – Deslocamentos laterais da viga no eixo $y$ .	80
Tabela 6.4 - Dados mecânicos do rotor para simulação, Alamo (2003).	81
Tabela 6.5 - Velocidades críticas obtidas com a formulação coordenadas direcionais.	85
Tabela 6.6 - Resultados com MEF e análise modal clássica e complexa.	87
Tabela 6.7 – Autovalores para análise modal clássica e complexa.	88
Tabela 7.1 – Dados de entrada para a coluna de perfuração.	93
Tabela 7.2 – Resultados frequência natural axial e torcional para coluna de perfuração.	94
Tabela 7.3 – Resultados frequência natural lateral para coluna de perfuração.	95
Tabela 7.4 – Frequências naturais axiais para diferentes profundidades da coluna de perfuração.	100
Tabela 7.5 – Frequências naturais torsionais para diferentes profundidades da coluna de perfuração.	101
Tabela 7.6 – Frequências naturais laterais para diferentes profundidades da coluna de perfuração.	101
Tabela 7.7 – Frequências naturais laterais sob influência da matriz de rigidez gravitacional.	104
Tabela A.1 – Frequências naturais axiais para o rotor em estudo.	113
Tabela A.2 – Frequências naturais torsionais para o rotor em estudo.	114
Tabela A.3 – Frequências naturais laterais (estática) para o rotor em estudo.	114

## Lista de Figuras

Figura 1.1 – Fases de construção de um poço vertical na Bacia de Campos.	2
Figura 1.2 – Os três modos de vibrações em colunas de perfuração, Bashmal (2004).	6
Figura 1.3 – Tipos de vibrações em colunas de perfuração, Alamo (2003).	7
Figura 1.4 – Modelo utilizado por Shyu (1989).	8
Figura 1.5 – Esquema coluna utilizado por Christofouru e Yigit (1997).	9
Figura 1.6 – Seção A-A utilizado pelo modelo de Christofouru e Yigit (1997).	9
Figura 1.7 – Modelo 3D da coluna com software BHASYS ® por Schmalhorst e Neubert (2003).	11
Figura 1.8 – Modelo utilizado por Hakimi e Moradi (2010).	12
Figura 1.9 – Modelo massa/mola rígido, Pereira (2003).	16
Figura 1.10 – Modelo rotor rígido, Pereira (2003).	16
Figura 1.11 – Modelo rotor flexível, Pereira (2003).	17
Figura 1.12 – Combinações dos movimentos em X e Y produzindo órbitas: (b) circular, (c) elíptica e (d) translacional, Pereira (2003).	18
Figura 1.13 – Modelo rotor Jettcoff, Alamo (2003).	19
Figura 1.14 – Giro síncrono (a) e Giro não síncrono (b), Pereira (2003).	20
Figura 1.15 – Coluna de perfuração sob efeitos torsionais, Bashmal (2004).	20
Figura 1.16 – Movimentos de precessão direta e retrógrada, Bashmal (2004).	21
Figura 2.1 - Sistema de coordenadas generalizadas, Bashmal (2004).	23
Figura 2.2 - Eixos em rotação nas coordenadas generalizadas, Khulief (2007).	24
Figura 3.1 - Graus de liberdade do elemento de viga 3D.	35
Figura 3.2 – Esquema coluna sob tensão, Alnaser (2002).	42
Figura 5.1 – Movimento planar do ponto P, Kessler (1999).	61
Figura 6.1 – Viga simples em balanço.	76
Figura 6.2 - Modelo do sistema rotativo para simulação.	82
Figura 6.3 - Diagrama de Campbell e velocidade crítica obtida com a formulação complexa.	83
Figura 6.4 - Diagrama de Campbell e velocidade crítica, Alamo (2003).	83
Figura 6.5 – Modos de vibração em um sistema estático, Alamo (2003).	84
Figura 6.6 - Análise modal clássica (FRF) e direcional (dFRF).	88
Figura 6.7 - Análise modal clássica (FRF) e direcional (dFRF) para rotação constante de 100 rad/s.	89

Figura 7.1 – Discretização da coluna de perfuração, LandMark ®.	92
Figura 7.2 – Função de resposta em frequência (FRF) para coluna de perfuração.	96
Figura 7.3 – Função de resposta em frequência direcional normal (dFRF) e função de resposta em frequência (FRF) para coluna de perfuração.	97
Figura 7.4 – Função de resposta em frequência direcional (dFRF) direta e função de resposta em frequência (FRF) para coluna de perfuração.	98
Figura 7.5 – Função de resposta em frequência direcional (dFRF) retrógrada e função de resposta em frequência (FRF) para coluna de perfuração.	98
Figura 7.6 – Função de resposta em frequência direcional (dFRF) e função de resposta em frequência (FRF) na região de diferentes picos de ressonância.	99
Figura 7.7 – Variação das frequências naturais axiais para diferentes profundidades da coluna de perfuração.	102
Figura 7.8 – Variação das frequências naturais torsionais para diferentes profundidades da coluna de perfuração.	102
Figura 7.9 – Variação das frequências naturais laterais para diferentes profundidades da coluna de perfuração.	103
Figura 7.10 – Efeito da matriz de rigidez gravitacional na frequência natural lateral.	105
Figura A.1 – Frequência natural axial em função do número de elementos discretizados.	115
Figura A.2 – Frequência natural torcional em função do número de elementos discretizados.	115
Figura A.3 – Frequência natural lateral em função do número de elementos discretizados.	116

# Nomenclatura

## Letras Latinas

$X, Y, Z$  - sistema de coordenadas para plano fixo.

$X^i Y^j Z^k$  - sistema de coordenadas para o elemento indeformado.

$x, y, z$  - sistema de coordenadas para plano rotativo e elemento deformado.

$i, j, k, J, K$  - vetores unitários ao longo do eixo indicado.

$u$  - deslocamento na direção  $x$ .

$v$  - deslocamento na direção  $y$ .

$w$  - deslocamento na direção  $z$ .

$[N_u]$  - função de forma para efeito axial na direção  $x$ .

$[N_v]$  - função de forma para efeito de translação na direção  $v$ .

$[N_w]$  - função de forma para efeito de translação na direção  $w$ .

$[N_{\theta_y}]$  - função de forma para efeito de flexão no eixo  $y$ .

$[N_{\theta_z}]$  - função de forma para efeito de flexão no eixo  $z$ .

$[N_\varphi]$  - função de forma para efeito de torção no eixo  $x$ .

$\{e\}$  - vetor coordenadas nodais.

$T$  - energia cinética.

$U$  - energia potencial.

$I$  - segundo momento de inércia.

$I_D$  - momento de inércia diametral.

$I_P$  - momento polar de inércia.

$[M]$  - matriz de massa.

$[G]$  - matriz giroscópica.

$[K]$  - matriz de rigidez.

$[C]$  - matriz de amortecimento.

$[A], [B]$  - matriz do sistema em espaço de estado.

$[M_e]$  - matriz de massa com acoplamento torcional e transversal dependente do tempo.

$[M_t]$  - matriz de massa para a translação.

$[M_r]$  - matriz de massa para a rotação.

$[M_\varphi]$  - matriz de massa para a torção.

$U_1$  - energia potencial devido à flexão.  
 $U_2$  - energia potencial devido à torsão.  
 $U_3$  - energia potencial devido à deformação axial.  
 $U_4$  - energia potencial devido às forças gravitacionais.  
 $[K_a]$  - matriz de rigidez axial.  
 $[K_e]$  - matriz de rigidez de flexão.  
 $[K_\varphi]$  - matriz de rigidez de torção.  
 $[K_g]$  - matriz de rigidez devido ao campo gravitacional.  
 $L$  - Função Lagrangeana.  
 $q$  - coordenadas generalizadas.  
 $Q$  - vetor forças generalizadas.  
 $A$  - área da seção transversal do elemento.  
 $M_D$  - massa do disco rígido.  
 $R$  - raio externo do disco rígido.  
 $r$  - raio interno do disco rígido.  
 $E$  - módulo de elasticidade.  
 $G$  - módulo do cisalhamento.  
 $l$  - comprimento do elemento.  
 $V$  - volume do elemento.  
 $L_t$  - comprimento da estrutura suspensa sob tração.  
 $i$  - número complexo.  
 $x(t)$  - deslocamentos em função do tempo.  
 $y(t)$  - deslocamentos em função do tempo no espaço de estado.  
 $f(t)$  - força de excitação.  
 $F$  - força devido ao peso próprio.  
 $I(n)$  - matriz identidade de ordem  $n$ .  
 $\{R\}$  - autovetores à direita.  
 $\{L\}$  - autovetores à esquerda.  
 $p(t)$  - vetor rotativo em coordenadas direcionais.  
 $[T]$  - matriz transformação para coordenadas direcionais.  
 $[M_c]$  - matriz de massa complexa.  
 $[D_c]$  - matriz de amortecimento e giroscópica complexas.  
 $[K_c]$  - matriz de rigidez complexa.



$\{P_f\}$ ,  $\{P_b\}$  - componente de precessão direta e retrógrada.

$\{G\}$  - força de excitação complexa.

$[H(\omega)]$  - matriz função de resposta em frequência direcional.

$H_{PG}(\omega)$ ,  $H_{\overline{PG}}(\omega)$  - função de resposta em frequência direcional normal.

$H_{\overline{PG}}(\omega)$ ,  $H_{P\overline{G}}(\omega)$  - função de resposta em frequência direcional reversa.

$F_i$  - frequências naturais  $i$ .

## Letras Gregas

$\varphi$  - Giro em torno do eixo  $x$ .

$\theta_y$  - Giro em torno do eixo  $y$ .

$\theta_z$  - Giro em torno do eixo  $z$ .

$\omega$  - velocidade angular instantânea.

$[\omega]$  - matriz anti-simétrica de velocidades angulares.

$\dot{\varphi}$  - velocidade angular.

$\rho$  - massa específica do material.

$\lambda$  - autovalores.

$\theta$  - autovetores.

$\Omega$  - velocidade de rotação do rotor.

$\{\varphi\}$  - autovetores à direita do sistema no espaço de estado.

$\{\phi\}$  - autovetores à esquerda do sistema no espaço de estado.

$[\alpha(\omega)]$  - matriz função de resposta em frequência.

$[\Lambda]$  - matriz diagonal composta por autovalores.

$\omega_{ci}$  - velocidade crítica  $i$ .

# Capítulo 1

## Introdução

Neste capítulo, inicialmente, apresentam-se as motivações e os objetivos desta dissertação. A seguir, realiza-se uma revisão bibliográfica contextualizando o trabalho na literatura, focando sobre vibrações em colunas de perfuração de poços de petróleo e análise modal complexa de máquinas rotativas. Finalmente, alguns conceitos fundamentais sobre dinâmica de rotores são apresentados.

### 1.1 Motivações e Objetivos

O estudo de vibrações em rotores verticais tem assumido, cada vez mais, um importante papel na indústria em geral, devido aos altos custos envolvidos e, principalmente, aos riscos operacionais presentes nas máquinas rotativas.

Existe uma enorme quantidade de aplicações para rotores verticais, mas a que representa maior notabilidade na indústria atualmente, são as colunas de perfuração de poços de petróleo. Há vários estudos sobre o tema vibrações em colunas de perfuração e estas podem ser modeladas como rotores verticais em balanço.

A área de dinâmica de rotores pode ser considerada como um caso especial dentro do estudo das vibrações mecânicas. Nos problemas de dinâmica de rotores, os deslocamentos de resposta forçada e os modos naturais de vibração estão todos associados com movimentos rotativos.

Existe uma grande necessidade em se identificar a direcionalidade dos modos de vibração do sistema rotativo, pois estes movimentos podem afetar diretamente a vida útil do sistema. Os movimentos de precessão retrógrada causam alternância das tensões no eixo, o que pode levá-lo à ruptura por fadiga. Neste contexto, o uso de coordenadas direcionais na descrição destes movimentos rotativos tem-se mostrado com uma alternativa muito eficiente em relação ao uso de coordenadas cartesianas, ou análise modal clássica.

O uso das coordenadas direcionais traz a vantagem de possibilitar a identificação da direção do modo, pois esta separa claramente os movimentos de precessão direta e retrógrada.

O processo de perfuração de poços de petróleo possui comportamento dinâmico onde as vibrações mecânicas são inerentes ao trabalho. Cabe ao projetista e ao operador lidar com as mesmas a fim de evitar desgastes prematuros ou falhas nos equipamentos eletrônicos que estão embutidos na coluna de perfuração.

Os trabalhos de perfurações envolvem custos financeiros consideráveis na indústria do petróleo, e o entendimento da dinâmica das vibrações nas mesmas torna-se essencial para tentar mitigar falhas e melhorar o desempenho nas construções de poços.

Os poços de petróleo são construídos em fases, inicia-se com o maior diâmetro da broca, seguida de um revestimento de aço. A medida que a profundidade avança o diâmetro da fase seguinte é menor, de forma a atingir o objetivo com o diâmetro adequado para a produção ou exploração. A figura 1.1 apresenta um poço vertical convencional construído na Bacia de Campos.

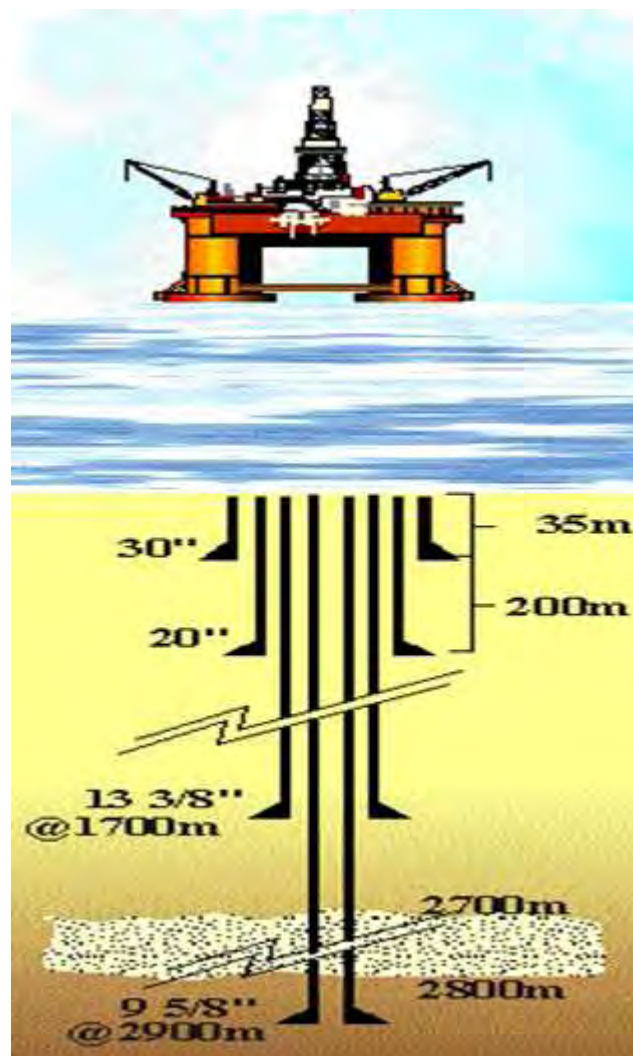


Figura 1.1 – Fases de construção de um poço vertical na Bacia de Campos.

O objetivo principal desta dissertação foi estudar o comportamento das vibrações mecânicas em rotores verticais em balanço e efetuar comparações com a análise modal clássica e complexa, além de apresentar a possibilidade de estudo de vibrações em uma coluna de perfuração de poços de petróleo.

Para atingir o objetivo principal deste trabalho foi necessário, inicialmente, construir uma rotina computacional utilizando o método dos elementos finitos com a sua implementação através do software MATLAB®.

Após a construção da rotina computacional, foi necessária a sua validação através da comparação com resultados existentes na literatura. Com a confirmação do funcionamento da rotina computacional, procedeu-se com a análise de uma coluna de perfuração utilizada normalmente em operações na Bacia de Campos, onde se estudou as frequências naturais axiais, torsionais e laterais, orientação do modo de precessão, influência do comprimento do rotor e efeito gravitacional nos resultados.

O presente trabalho foi dividido em oito capítulos. Neste capítulo inicial são apresentados os principais motivos e objetivos desta dissertação. A seguir, apresenta-se a revisão bibliográfica sobre vibrações em colunas de perfuração e análise modal complexa em máquinas rotativas. Finalmente, serão apresentados alguns conceitos fundamentais em dinâmica de rotores.

No capítulo 2 é apresentado o modelo matemático da dinâmica de um rotor vertical que consiste em um eixo vertical com uma extremidade livre e outra engastada. A formulação utiliza a teoria da viga de Euler-Bernouli para barra homogênea. Efetua-se a obtenção das equações governantes do sistema através do método da energia (Equação de Lagrange) com a descrição da energia cinética e potencial de todos os elementos envolvidos no rotor.

No capítulo 3 é descrita a formulação do problema através do método dos elementos finitos. São apresentados os graus de liberdade e o elemento de construção para o método. As matrizes de massa, rigidez e giroscópica são explicitadas para o elemento de viga cilíndrico que pode ser considerado vazado. Os elementos possuem 12 graus de liberdade, sendo 6 graus de liberdade para cada nó. Ao final é apresentada a equação do movimento na forma matricial para permitir a resolução do problema de vibrações.

No capítulo 4 é apresentada, de forma breve, a teoria clássica da análise modal. Inicialmente estuda-se a análise modal para estruturas estacionárias e em seguida para estruturas rotativas para vibrações livres e forçadas.

No capítulo 5, a análise modal complexa é descrita. No estudo focam-se as

vantagens na utilização de coordenadas direcionais para obtenção dos modos de precessão direta e retrógrada. O embasamento teórico é descrito para o caso de vibrações livres e forçadas.

No capítulo 6 são efetuadas simulações numéricas de forma a validar a rotina computacional criada em ambiente MATLAB ®. Os estudos iniciam com a validação do sistema através da comparação com literatura existente. Estudaram-se dois rotores, sendo um composto somente por um eixo rotativo e outro por um eixo rotativo com um disco solidário na extremidade. Neste mesmo capítulo, efetua-se a comparação entre as metodologias de análise modal complexa e a clássica para validação da metodologia complexa.

No capítulo 7 utiliza-se o sistema criado para demonstrar uma possível utilização em rotores verticais flexíveis de longo comprimento. Realizam-se estudos para uma coluna de perfuração de poços de petróleo, onde são avaliadas as frequências naturais (axiais, torsionais e laterais), obtidos gráficos de função de resposta forçada, através da análise modal clássica e a função de resposta forçada direcional, através da análise modal complexa. Por fim, são analisados casos onde se estudam a influência da profundidade da broca, ou o comprimento total do rotor e a influência da matriz de rigidez gravitacional nos resultados finais das frequências naturais.

No capítulo 8 são apresentadas as discussões finais, conclusões e sugestões para trabalhos futuros.

A dissertação prossegue com a listagem das principais referências bibliográficas utilizadas no decorrer desta pesquisa. A seguir, são apresentados os apêndices com alguns aspectos considerados importantes para o entendimento do trabalho.

## 1.2 Revisão Bibliográfica

A revisão bibliográfica trata dos assuntos pertinentes desta dissertação. Inicialmente faz-se uma breve explanação sobre vibrações mecânicas em colunas de perfuração de poços de petróleo, onde são descritos os tipos de vibrações e suas influências nas operações de perfuração. Em seguida, apresenta-se uma síntese sobre a literatura que trata da técnica de análise modal complexa em máquinas rotativas.

- **Vibrações em Colunas de Perfuração**

Vibrações em colunas de perfuração consistem em uma das maiores preocupações das empresas operadoras de petróleo em todo o mundo. A coluna de perfuração é composta por uma série de elementos com características mecânicas diferentes, tais como: diâmetro, peso e rigidez. Estas características quando combinadas com os efeitos rotativos e as reações no interior do poço causam vibrações as quais devem ser controladas.

Os efeitos da vibração consomem energia com a conseqüente perda de eficiência na taxa de penetração do sistema. Os efeitos causados na coluna devido às excessivas vibrações podem causar efeitos catastróficos nos próprios componentes da coluna e nas paredes do poço que está sendo perfurado. Dessa forma, torna-se imperativo o devido controle no projeto e execução da perfuração de poços.

O entendimento do comportamento dinâmico das vibrações nas colunas permite o seu devido controle para mitigar possíveis falhas operacionais. Controles em tempo real são necessários durante o processo devido à alta sensibilidade na mudança de parâmetros de perfuração e somente com o entendimento do fenômeno em si, é que se tornam possíveis a interpretação e ação com os dados de superfície, já que os dados obtidos dos sensores no fundo em tempo real são muito limitados em função da taxa de envio de dados para a superfície.

Uma das características deste tipo de rotor propriamente dito é sua alta flexibilidade, ou seja, a relação diâmetro e comprimento atinge a ordem entre  $1:10^4$  e  $1:10^5$ , Bashmal (2004). Usualmente a classificação dos tipos de vibrações em colunas baseia-se em sua direção, dessa forma tem-se: vibração axial, torcional e transversal, conforme visto na figura 1.2.

A vibração axial é considerada quando esta surge paralela ao comprimento da

coluna, já a transversal é perpendicular ao mesmo comprimento. A vibração torcional ocorre em torno do eixo longitudinal da coluna.

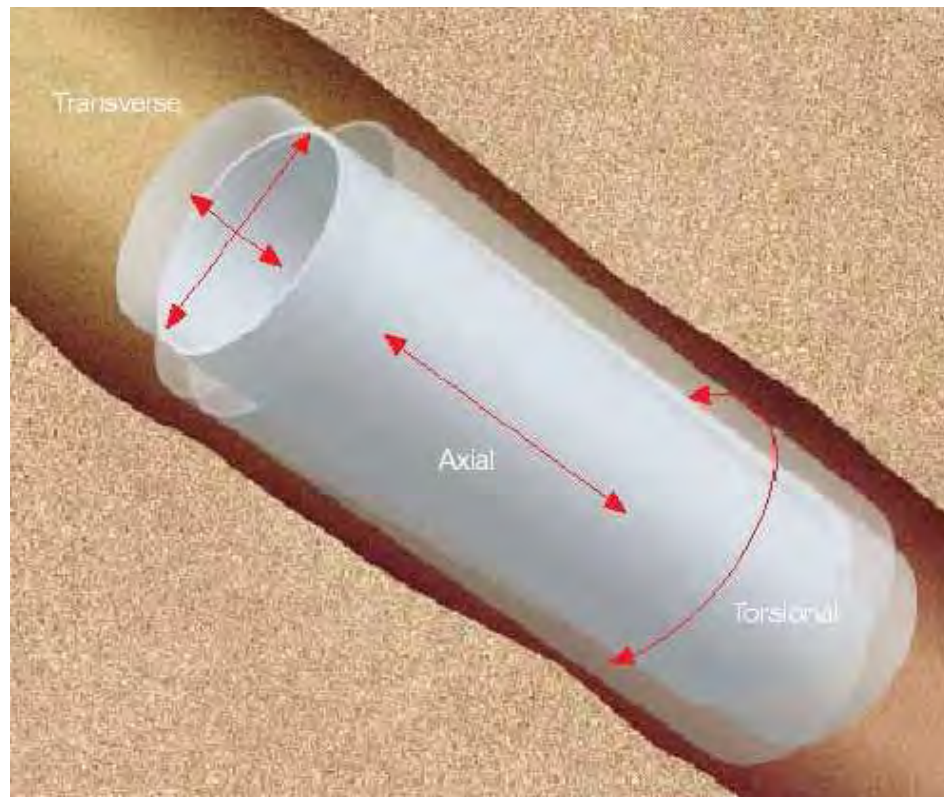


Figura 1.2 – Os três modos de vibrações em colunas de perfuração, Bashmal (2004).

Como a coluna de perfuração consiste em um elemento esbelto que possui um diâmetro menor que a parede do poço, ela pode vibrar lateralmente. A vibração lateral é mais importante no tramo inferior, neste trecho a coluna pode entrar em contato com a parede do poço em diferentes partes.

As forças desbalanceadas na coluna podem causar vibrações laterais, estas por sua vez são capazes de excitar a precessão retrógrada quando existe uma assimetria na rigidez ou amortecimento do sistema.

A vibração lateral também é induzida pelo atrito existente entre a coluna rotativa e a parede do poço, o que pode originar uma precessão retrógrada. Valores típicos de frequências da vibração lateral são encontrados entre 0,5 e poucas dezenas de hertz.

Outro tipo de vibração, a torcional, consiste-se no caso mais crítico, pois a broca que está em contato com a rocha fica sem girar, enquanto a parte superior da coluna continua girando com velocidade de rotação constante, o que acrescenta mais torque na coluna de perfuração, até que a broca repentinamente se solta, este fenômeno é conhecido como efeito

*Stick-Slip*. Este tipo de vibração torcional possui frequências típicas entre 0,05 a 0,5 Hz, Jansen (1992).

O terceiro tipo de vibração que pode ocorrer na coluna é a vibração axial, no caso mais crítico, a broca periodicamente perde contato com a parte inferior do poço. Esta forma de movimento é conhecido como *Bit-Bounce*.

Uma análise dinâmica global da coluna de perfuração geralmente é complicada, visto que os três tipos de vibrações citadas anteriormente podem estar presentes, assim como as disfunções associadas a cada tipo de vibração: precessão direta e retrógrada (*Forward or Backward Whirl*) associada à vibração lateral, *Stick-Slip* associada à vibração torcional e *Bit-Bounce* associada à vibração axial, conforme visto na figura 1.3.

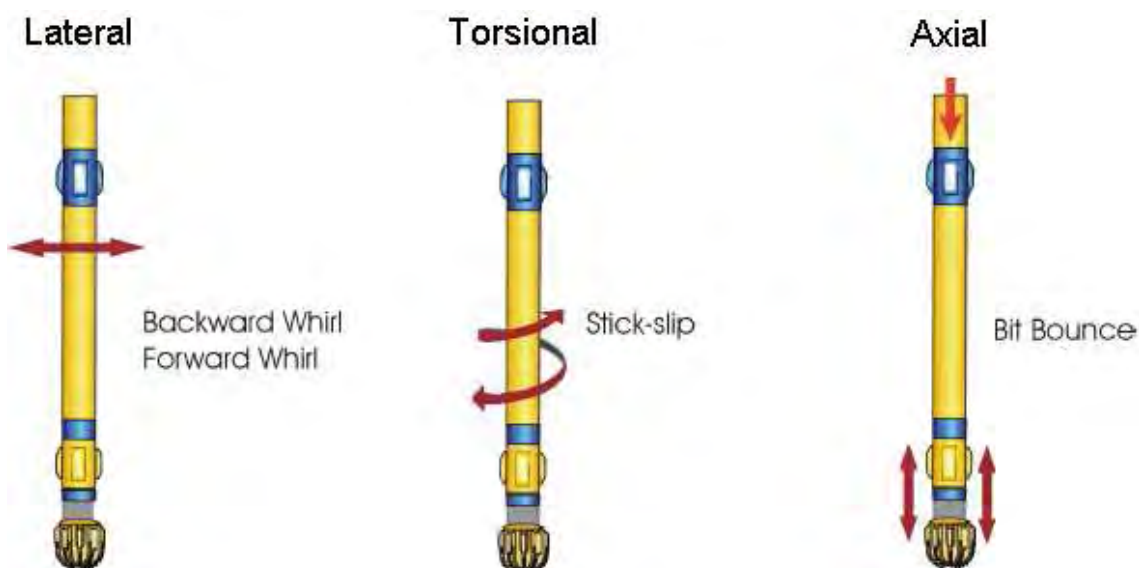


Figura 1.3 – Tipos de vibrações em colunas de perfuração, Alamo (2003).

Modelos de vibrações em colunas de perfuração de poços de petróleo têm sido amplamente estudadas desde a década de 60. Pasley e Bogy (1963) estudaram as vibrações em colunas de perfuração devido ao contato intermitente dos dentes da broca na rocha. Fischer (1974) analisou a deformação elástica devido ao peso sobre a broca em uma coluna bidimensional em um poço inclinado. Shyu (1989) identificou em testes de laboratório e no campo, em parceria com a Shell, o acoplamento entre a força axial e as vibrações transversais em colunas. O conjunto de dados evidenciou a existência dos modos de precessão direta e retrógrada. Ainda segundo este estudo, o efeito da rotação na coluna impõe um efeito crucial nas vibrações laterais.



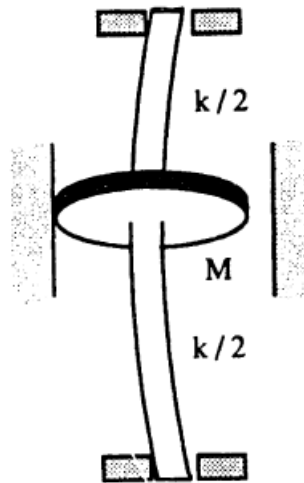


Figura 1.4 – Modelo utilizado por Shyu (1989).

A técnica de superposição modal, como forma de obtenção da resposta dinâmica da coluna de perfuração foi estudada por Cordovil (1991), onde o autor realiza uma análise no domínio da frequência com carregamentos simples e transientes. A utilização do método dos elementos finitos tem sido amplamente utilizada nas análises mecânicas de colunas. Czerwinski (1994) utilizou o método para análise dinâmica de colunas, incluindo a obtenção de esforços solicitantes, frequências naturais, modos de vibração e resposta dinâmica no tempo. O estudo, porém, não contempla os efeitos giroscópicos a que as colunas estão submetidas durante os trabalhos normais de perfuração.

Christofouru e Yigit (1997) propuseram em seu trabalho uma modelagem mais sofisticada, que inclui de forma mais realista os efeitos presentes na coluna, tais como: efeitos giroscópicos, contato com a parede do poço, excitação axial devido ao contato com a broca, amortecimento hidrodinâmico devido à influência do fluido de perfuração que percorre o interior e o exterior da coluna. Segundo este mesmo autor, o comportamento dinâmico da coluna é demasiadamente complicado, podendo tornar-se não periódico, sugerindo um comportamento caótico.

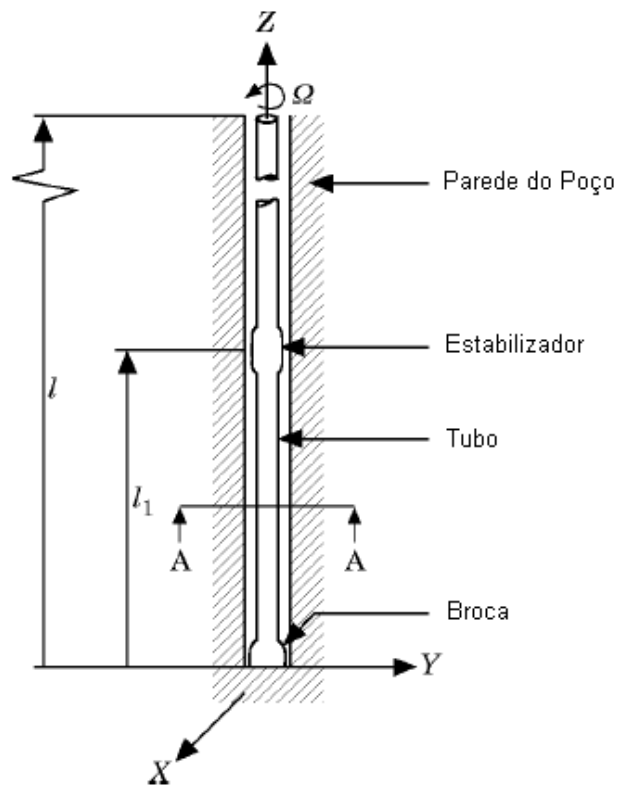


Figura 1.5 – Esquema coluna utilizado por Christofouru e Yigit (1997).

A equação do movimento foi obtida através do método dos modos assumidos e com a abordagem Lagrangeana. Neste estudo não são considerados os efeitos torsionais e a rotação axial da coluna é constante.

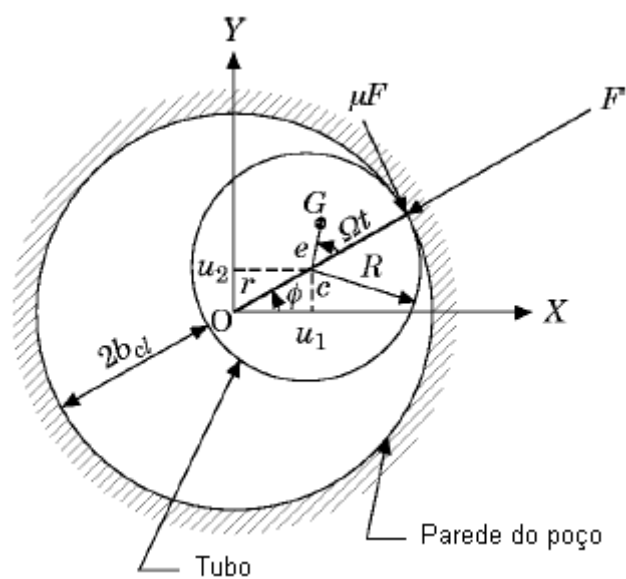


Figura 1.6 – Seção A-A utilizado pelo modelo de Christofouru e Yigit (1997).

Heisig e Neubert (2000) estudaram o problema de vibrações laterais em poços de longa extensão horizontal. Neste caso, a coluna permanece na horizontal e apoiada em toda a sua extensão no poço perfurado. Valores usuais de perfuração de extensão horizontal são na ordem de centenas de metros, e podem ser facilmente encontrados em projetos executados pela Petrobras na Bacia de Campos no Estado do Rio de Janeiro. O trabalho compara três métodos de solução: analítica, elementos finitos com formulação linear e não-linear. Os resultados analíticos e os obtidos pela técnica dos elementos finitos com formulação linear exibem uma não ocorrência da dependência das condições de contorno para longas seções horizontais, no caso acima, para extensões acima de 1000 m. Soluções não lineares obtidas, confirmaram os resultados analíticos e exibiram o comportamento do modo de precessão direta.

Mais recentemente, os pesquisadores tem se beneficiado, além dos modernos softwares para simulações, de sensores de vibrações instalados diretamente nas colunas de perfuração, os quais fornecem dados das vibrações ao longo de toda a perfuração, o que permite um melhor ajuste aos modelos atuais. Há atualmente no mercado, softwares de análise de vibrações que permitem, não só auxiliar o projetista, como também, a operadora durante o processo de perfuração. Schmalhorst e Neubert (2003) mostraram em seu trabalho o uso do software BHASYS ® e suas aplicações práticas com estudos de casos no Golfo do México (*offshore*) e na Lousiana (*onshore*).



Figura 1.7 – Modelo 3D da coluna com software BHASYS ® por Schmalhorst e Neubert (2003).

Um efeito mais complexo e de certa forma comum nas operações de perfuração é o efeito de, como chamado na literatura de petróleo, *stick and slip*. O fenômeno pode ser traduzido como uma vibração torcional onde a aceleração da coluna não é constante, ou seja, a coluna gira e em certo momento interrompe seu movimento rotacional para posteriormente descarregar, de maneira repentina e abrupta a energia acumulada, criando uma aceleração na velocidade angular da coluna. Khulief et al (2006) estudaram este efeito através da modelagem com oscilações devido ao contato da broca com a rocha, onde o comportamento devido ao *stick and slip* foi analisado no domínio do tempo.

Bayley et al (2008) exploram a utilização do software Vybs ® para diversas situações de projeto mecânico de colunas de perfuração. Os dados foram comparados com situações reais de perfuração, onde a alta gama de informações provenientes dos sistemas de monitoramento, auxiliaram nessa etapa de validação do sistema. A vantagem do sistema é a facilidade para a verificação da tendência de vibrações nas colunas com o mínimo de esforço computacional e a possibilidade de se estudar o melhor posicionamento dos estabilizadores na coluna.

Alguns autores cientes dos efeitos não-lineares a que as colunas de perfuração estão

submetidas propõem métodos de análise que contemplam esses efeitos. Jansen (1992) utilizou a teoria da dinâmica de rotores para analisar o comportamento de colunas de perfuração sob aspectos não-lineares. Em seu trabalho, ele conclui que os efeitos não lineares associados às forças devido ao fluido de perfuração, a diferença entre diâmetros dos estabilizadores e a parede do poço e o próprio contato com a parede do poço perfurado, são altamente significativas, surgindo em casos extremos comportamento caótico e irregular, com a presença de movimentos de precessão direta e retrógrada na coluna.

Hakimi e Moradi (2010) utilizaram o método da quadratura diferencial para análise de vibrações de coluna considerando impacto na parede de poços próximos à verticalidade. A parede do poço é modelada através de uma série de molas. O sistema de equações não lineares é resolvido através do método de Newton-Raphson, onde são obtidas as frequências naturais laterais, axiais e torsionais.

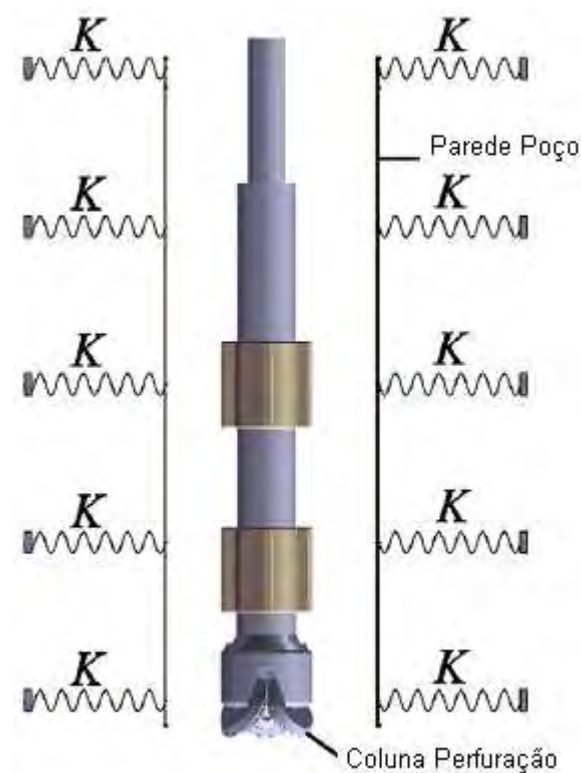


Figura 1.8 – Modelo utilizado por Hakimi e Moradi (2010).

O estudo apresentado por Aguiar (2010) apresenta uma possível forma positiva de se utilizar as vibrações nas colunas de perfuração. O efeito da vibração axial é tratado como um auxiliar no incremento da taxa de perfuração, como se fosse um martelo embutido na

coluna. O objetivo é tentar incrementar a taxa de penetração através dos efeitos de vibro-impacto da broca em rochas duras. O sistema é analisado através da dinâmica não-linear com ensaios experimentais e comprovam a eficiência do efeito da força de impacto durante a perfuração.

- **Análise Modal Complexa de Sistemas Rotativos**

A ferramenta de análise modal clássica fornece resultados confiáveis em estruturas estacionárias e tem sido amplamente utilizada com esta finalidade. Já no caso de máquinas rotativas, este tipo de abordagem implica em uma série de limitações quanto ao seu uso na determinação de características vibratórias do sistema, Ewins (1999). A utilização da análise modal em máquinas rotativas requer um aprimoramento teórico mais aprofundado. Isso se deve fundamentalmente ao efeito rotativo sobre o qual a estrutura está submetida.

Meirovitch (1970) define os sistemas dinâmicos giroscópicos encontrados na engenharia como sendo termos lineares das velocidades na expressão da energia cinética gerando forças que também serão lineares nas coordenadas generalizadas de tal forma que os coeficientes da  $j$ -ésima componente da velocidade (denotadas por  $\dot{q}_j$ ) que aparece na expressão da  $k$ -ésima força generalizada (denotada por  $F_k$ ) são negativas relativamente ao coeficiente da  $k$ -ésima componente da velocidade  $\dot{q}_k$  aparecendo na  $j$ -ésima força generalizada  $F_j$ , isto é,  $\dot{q}_j = -\dot{q}_k$ .

Logo a matriz das velocidades geométricas será antissimétrica. Em outras palavras, se as coordenadas generalizadas correspondentes do sistema forem dados por  $q_i, i = 1, 2, \dots, n$  então essas coordenadas definem um sistema dinâmico giroscópico se as equações diferenciais do movimento tiverem os termos da forma  $G_{ij}(q) \dot{q}_j$ , onde  $G_{ij} = -G_{ji}, i = 1, 2, \dots, n$  de ordem  $n \times n$ .

A implicação direta ao sistema rotativo que considera os efeitos giroscópicos é que elas são dependentes da velocidade de rotação da máquina. Dessa forma a equação de movimento do sistema também será função da velocidade de rotação. Consequentemente, as frequências naturais, fatores de amortecimento e formas modais também serão dependentes dessa mesma rotação da estrutura.

Conforme exposto, as forças giroscópicas podem ser modeladas e incorporadas na equação do movimento como matrizes anti-simétricas proporcionais à velocidade de rotação. De forma a descrever o comportamento vibratório, a solução da equação do

movimento constitui-se em um problema de autovalores complexos. A forma padrão para solução de problemas de autovalores obriga colocar o autoproblema na forma de equação estado, ou seja, uma transformação de coordenadas colocando a equação do movimento com uma ordem de derivada a menos. Devido ao fato da matriz no espaço estado ser anti-simétrica, o problema de autovalores é não-adjunto. Assim o sistema é resolvido através da obtenção dos autovalores à direita e à esquerda com os respectivos autovetores associados.

A técnica de análise modal complexa foi desenvolvida por Lee (1990, 1991). Kessler (1998) e Souto (2000) tratam a metodologia de uma forma mais compreensível com exemplos e aplicações, porém com uma abordagem mais superficial. Basicamente a metodologia consiste em se utilizar coordenadas direcionais para descrever o movimento do nó da estrutura. Este novo sistema de coordenada permite incorporar a direcionalidade dos modos, ou seja, desmembrá-los em dois submodos (precessão direta e retrógrada). Esta é uma das vantagens dessa metodologia, onde a identificação dos movimentos de precessão é uma etapa muito importante na análise de uma máquina rotativa, pois estes movimentos afetam diretamente a vida útil do rotor. Outra característica importante das máquinas rotativas, é que, geralmente, estas apresentam simetria radial, o que implica em frequências naturais diretas e retrógradas muito próximas. Esta alta densidade modal cria uma dificuldade ainda maior para aplicação dos métodos tradicionais de análise modal. Nestes casos, pode ser necessário utilizar múltiplas excitações simultâneas para se obter estes modos de forma separada, Souto (2000).

A identificação dos modos de precessão direta e retrógrada torna-se um fator de grande relevância na análise de uma máquina rotativa, pois isso afeta diretamente a vida útil do sistema. Ainda que muitas pesquisas exibam o estudo dos modos de precessão direta e retrógrada, a direção dos mesmos é negligenciada, já que estes estudos baseiam-se nas formulações tradicionais de dinâmica de rotores.

Kessler (1999) em seu trabalho propõe um novo conceito sobre a formulação original apresentada por Lee (1990), o modo complexo natural que consiste em, compor a soma dos submodos rotativos diretos e os submodos retrógradados. Este tipo de abordagem facilita em muito a compreensão da análise modal complexa, permitindo assim, uma ampliação na utilização desta técnica no estudo da dinâmica dos rotores.

A análise modal complexa está baseada na mudança das variáveis cartesianas para as coordenadas direcionais, sendo utilizado para isso, um vetor no plano que pode ser representado por somente uma variável complexa, o Capítulo 5 apresentará com maiores detalhes esta formulação.

## 1.3 Conceitos e Fundamentos

As máquinas rotativas mais comuns, também denominadas de rotores, podem ser turbo-compressores, turbinas de aviões, turbinas a vapor para a produção de energia elétrica, colunas de perfuração, etc.

A grande capacidade dos rotores de gerar energia mecânica vem da alta velocidade a qual seus eixos são submetidos. Associado a essa alta velocidade estão altas cargas devido à inércia de seus componentes e potenciais problemas de vibração e instabilidade dos rotores. A previsão do comportamento de rotores através de modelos matemáticos é relativamente bem sucedida quando comparado com medições experimentais. No entanto, a intuição humana pode muitas vezes levar a conclusões incorretas, como por exemplo, a massa desbalanceadora permanecerá internamente à órbita realizada pelo eixo do rotor em altas velocidades, assim como o aumento do amortecimento interno pode causar instabilidade também em altas velocidades, Pereira (2003).

Em análises do comportamento dinâmico de rotores, os estudos mais frequentemente realizados são:

- Previsão das velocidades críticas, onde as velocidades nas quais a vibração devido ao desbalanceamento do rotor é máxima;
- Prever as frequências naturais das vibrações torsionais quando vários eixos estão acoplados (por exemplo, caixa de engrenagens) e estes eixos são excitados pelas pulsações do motor durante o *start-up*;
- Calcular as massas de correção e suas localizações a partir de dados de vibração (balanceamento de rotores);
- Prever as amplitudes de vibração causadas pelo desbalanceamento do rotor;
- Prever as frequências de vibração nas instabilidades dinâmicas;
- Modificações de projeto para eliminar instabilidades dinâmicas.

O modelo mais simples para análise de vibrações de rotores é o modelo massa/mola, com somente um grau de liberdade, no qual a massa é considerada rígida, como pode ser visto na figura 1.9.



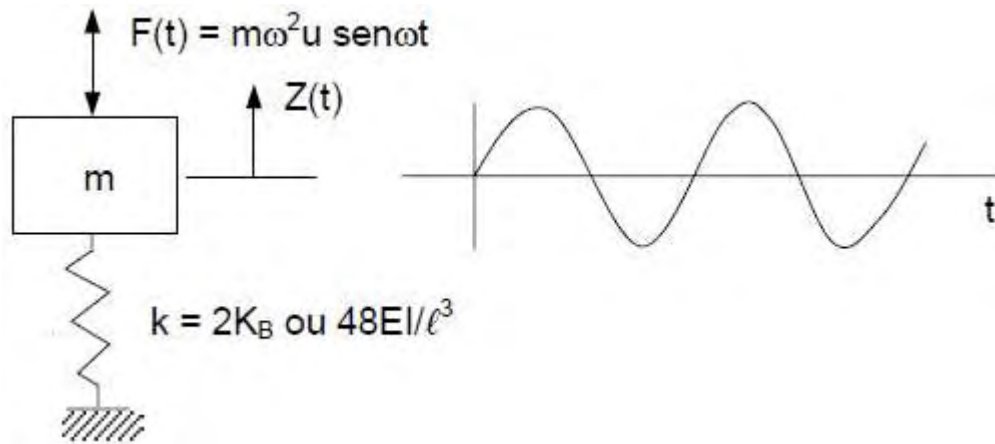


Figura 1.9 – Modelo massa/mola rígido, Pereira (2003).

A primeira velocidade crítica de um sistema rotor/mancais pode ser aproximada por um modelo massa/mola, da forma:

$$N_1 = \frac{60}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ rpm} \quad (1.1)$$

Onde:

$k$  é a rigidez efetiva do rotor para o primeiro modo e  $m$  é a massa efetiva.

Para um rotor que é relativamente rígido comparado à rigidez do mancal, a massa efetiva é a massa do disco e do eixo, e a rigidez efetiva é a rigidez de todos os mancais trabalhando em paralelo, figura 1.10.

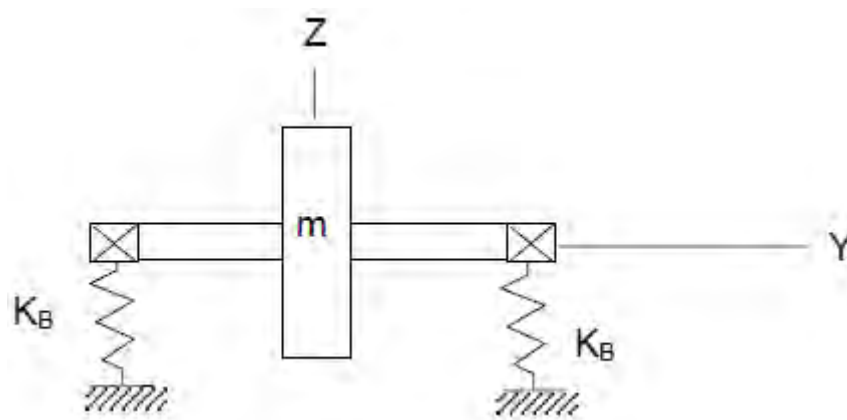


Figura 1.10 – Modelo rotor rígido, Pereira (2003).

Para um rotor que é relativamente flexível comparado à rigidez do mancal, a rigidez efetiva é determinada pela rigidez em flexão do eixo. Neste caso somente uma porção da massa do eixo contribui para a massa efetiva no modelo, já que a massa do rotor próxima dos mancais quase não participa do movimento de vibração, figura 1.11.

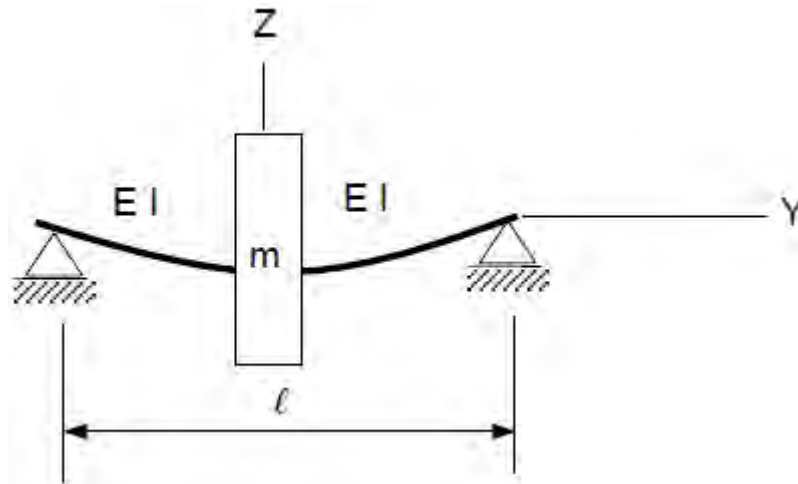


Figura 1.11 – Modelo rotor flexível, Pereira (2003).

Deve ser enfatizado que este modelo simples não pode ser utilizado em análises mais complexas de dinâmica de rotores, já que neste modelo se executa um movimento em uma única direção, enquanto que, um rotor executa movimentos em duas direções ortogonais  $X$  e  $Z$ , formando uma órbita de diferentes formas. A forma da órbita depende das amplitudes e das fases entre os movimentos em  $X$  e  $Z$ , figura 1.12.

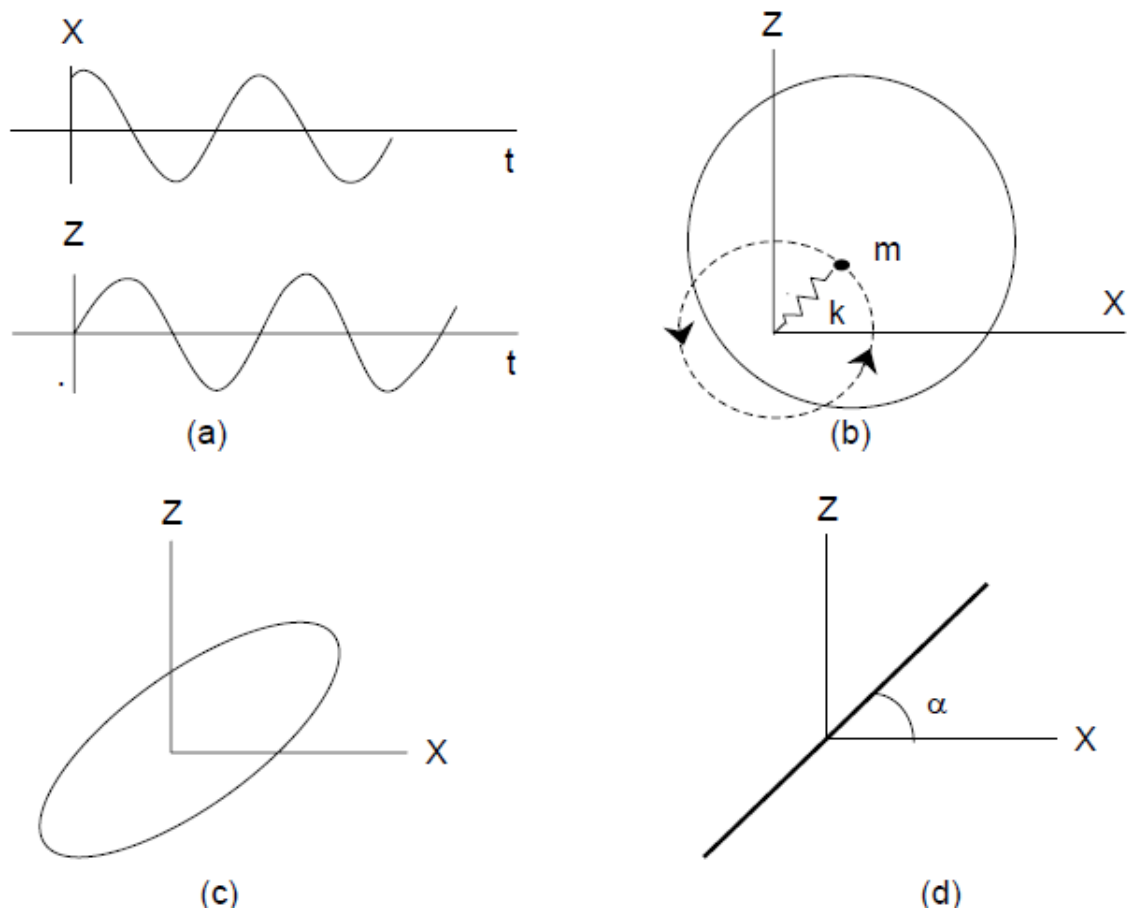


Figura 1.12 – Combinações dos movimentos em X e Y produzindo órbitas: (b) circular, (c) elíptica e (d) translacional, Pereira (2003).

Um modelo mais elaborado para evidenciar o surgimento das velocidades críticas em rotores consiste de um disco rígido desbalanceado montado sobre um eixo flexível e mancais rígidos, figura 1.13. Este modelo de rotor chamado de Rotor de Jeffcott, explica como a amplitude se torna máxima na velocidade crítica e porque a massa desbalanceadora se movimentava internamente à órbita do rotor.

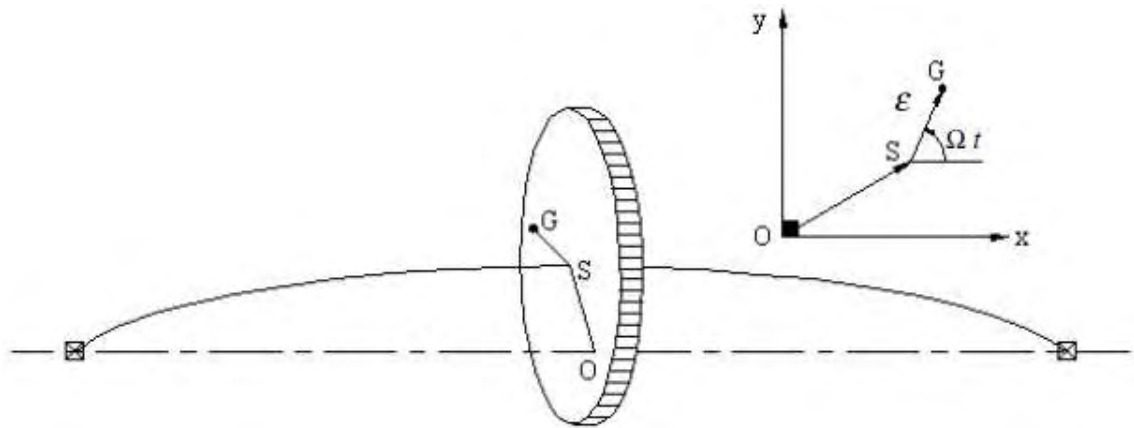


Figura 1.13 – Modelo rotor Jettcoff, Alamo (2003).

O giro síncrono é o movimento realizado normalmente por um rotor desbalanceado e está sincronizado com o movimento de rotação do eixo. No entanto, nem todos os giros são síncronos. Os problemas mais destrutivos encontrados em dinâmica de rotores são não síncronos.

Para exemplificar o comportamento do rotor, considere a figura 1.14 na qual é mostrado o giro do rotor a partir da vista de uma de suas extremidades. O elemento hachurado representa uma massa desbalanceadora. Na figura 1.14.(a), a taxa de variação do ângulo  $\phi$  é a velocidade de giro, representada pela derivada com relação ao tempo por  $\dot{\phi}$ . O ângulo  $\beta$  permanece constante, portanto, a velocidade do giro e a velocidade de rotação do eixo  $\Omega$  são as mesmas, representando o giro síncrono. Na figura 1.14.(b), a taxa de variação do ângulo  $\beta$  é a velocidade de rotação do rotor, representada por  $\dot{\beta}$  relativa ao vetor velocidade de giro  $V$ . Portanto, a velocidade do rotor é a soma de  $\Omega = \dot{\phi} + \dot{\beta}$ . Neste caso, a velocidade de giro  $\dot{\phi}$  e a velocidade do rotor  $\Omega$  não são as mesmas, apresentando o giro não síncrono.

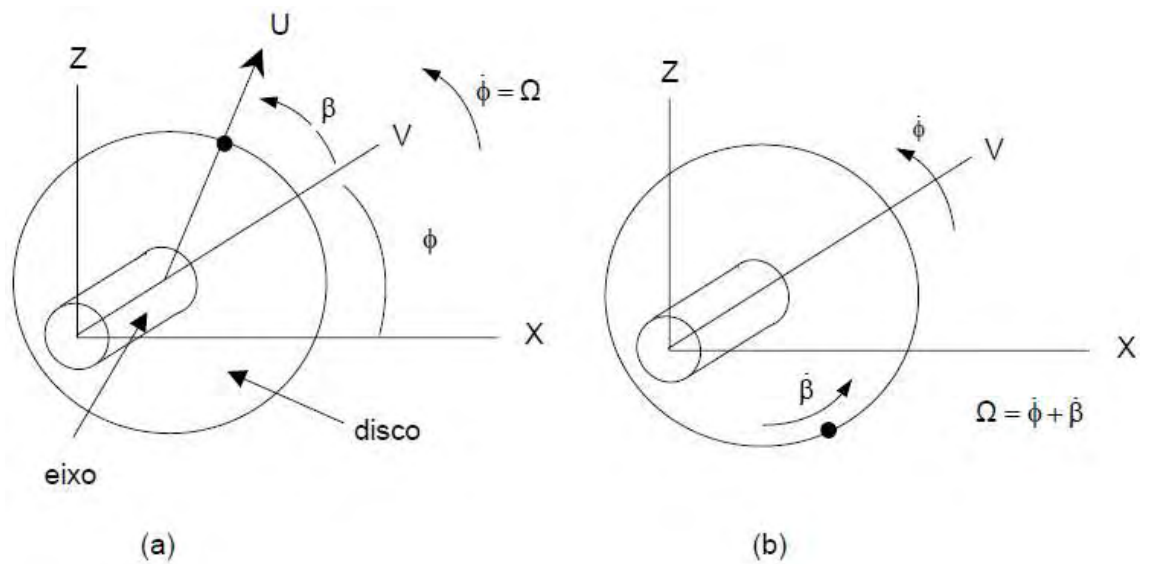


Figura 1.14 – Giro síncrono (a) e Giro não síncrono (b), Pereira (2003).

A figura 1.15 apresenta um exemplo de rotor, no caso uma coluna de perfuração, exibindo vibração torcional com os movimentos síncronos e não síncronos vistos na figura 1.14.

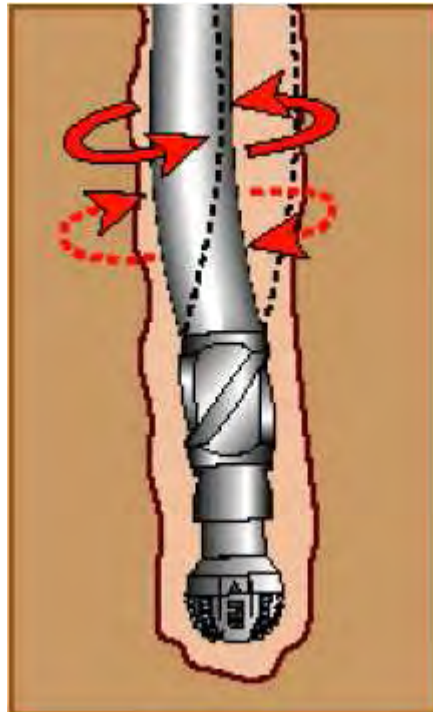


Figura 1.15 – Coluna de perfuração sob efeitos torcionais, Bashmal (2004).

Outro fenômeno importante a ser conhecido é o escorregamento, ou seja, ocorre a alternância entre o atrito estático e dinâmico, neste caso, o movimento pode apresentar o efeito retrógrado, de maneira que a coluna gira em um sentido e o eixo do corpo do tubo em sentido contrário, conforme figura 1.16.

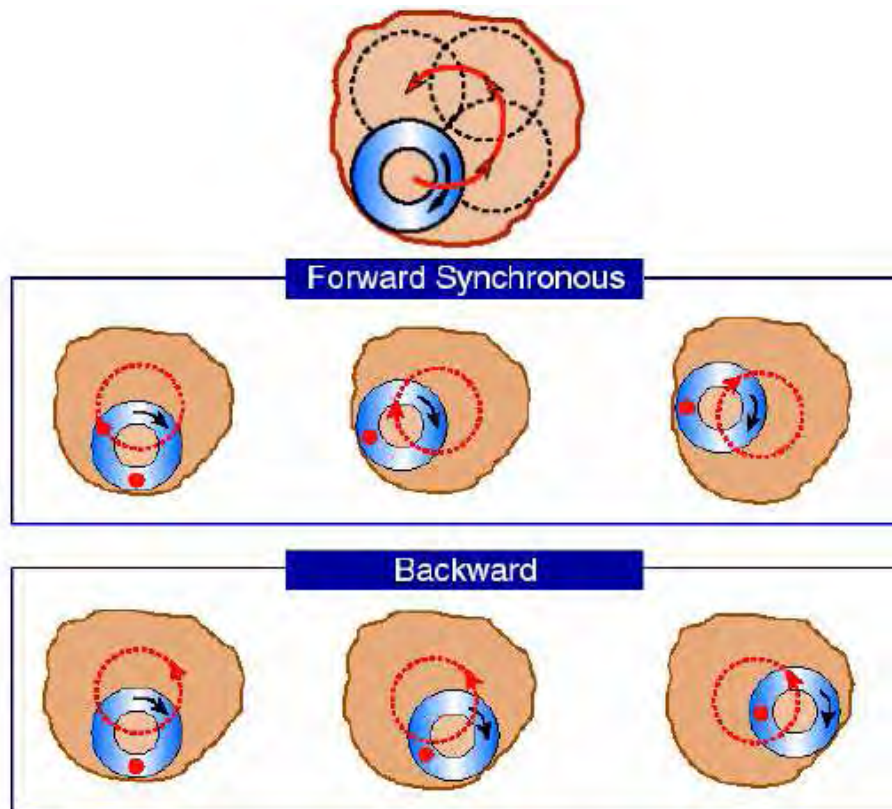


Figura 1.16 – Movimentos de precessão direta e retrógrada, Bashmal (2004).

Alguns trabalhos encontrados na literatura de dinâmica de rotores tratam de casos específicos de sistemas rotativos verticais. Lucchese (1988) apresentou em seu trabalho o estudo de rotores verticais sujeitos ao atrito seco, utilizando para isso um sistema adicional de redução de amplitude de vibração. Espírito Santo (1998), estendeu o trabalho de Lucchese (1988) e incorporou um modelo não linear para estudo do atrito seco e restituição cúbica. O estudo não linear do sistema permite estudar vários aspectos importantes no projeto de máquinas rotativas, tais como o torque mínimo necessário para passagem pela velocidade crítica, a amplitude de vibração durante a passagem e a estabilidade da rotação em regime permanente. Este tipo de modelagem permite, também, efetuar estudos em colunas verticais de perfuração, onde o efeito do atrito com a parede do poço pode ser considerado no estudo.

## Capítulo 2

# Modelagem Matemática da Dinâmica de um Rotor Vertical

Este capítulo está dividido em duas partes. Na primeira parte, apresentam-se as considerações gerais sobre o modelo estudado. Na segunda parte, obtêm-se as equações governantes do movimento através do método de energia.

### 2.1 Considerações gerais

Nesta formulação, assume-se que o material a ser utilizado é elástico, homogêneo, isotrópico e sem deformações iniciais. As deflexões do eixo rotativo são produzidas pelo deslocamento dos pontos do eixo central e os efeitos de amortecimento interno são desprezados. O sistema de vinculação considerado será engastado em uma extremidade e livre na outra, onde será unida uma massa circular homogênea rígida solidariamente à barra em rotação. O elemento em estudo será de uma viga considerando três deslocamentos e três rotações em cada nó, perfazendo, dessa forma, um sistema com 12 graus de liberdade para cada elemento. Não serão considerados efeitos acoplados entre torsão e deflexões, devido as baixas faixas de rotação a serem utilizados no modelo, na ordem de 100 a 300 rpm. A velocidade de rotação axial será considerada constante em todas as simulações.

### 2.2 Obtenção das Equações Governantes do Movimento

A presente formulação baseou-se nos trabalhos de Alnaser (2002), Bazoune et al (1992) e Khulief et al (1997). A figura 2.1 ilustra o sistema de coordenadas adotado para a modelagem do sistema rotativo. O sistema de referência  $X Y Z$  se refere ao plano fixo e o sistema de referência  $x y z$  ao plano rotativo. Adota-se o sistema de coordenadas  $X^i Y^i Z^i$  com a origem fixa no ponto do elemento indeformado e o sistema de coordenadas  $x y z$  após a deformação do elemento.

Considera-se o ponto arbitrário  $p^i$  no elemento indeformado e com respeito ao

sistema de coordenadas  $X^i Y^i Z^i$ , o ponto  $p^i$  pode ser representado pelo vetor  $\bar{r}_0$ . Aplicando a transformação do ponto  $p^i$  para o estado deformado do elemento, obtém-se o ponto  $p$ . A localização do ponto  $p$  com relação ao sistema de coordenadas  $X^i Y^i Z^i$  pode ser representado pelo vetor  $\bar{r}$ . A posição global do ponto  $p$  é definida pelo vetor  $\bar{r}_p$  como:

$$\bar{r}_p = \bar{R} + \bar{r} \quad (2.1)$$

Onde o vetor  $\bar{R}$  define a origem do sistema de coordenadas  $X^i Y^i Z^i$  com respeito ao sistema global de coordenadas  $X Y Z$ . O vetor  $\bar{r}$  pode ser representado como:

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + \bar{u} \quad (2.2)$$

Onde  $\bar{u}$  é o vetor deformação do ponto  $p^i$  para o ponto  $p$ . Utilizando a equação (2.1) e a equação (2.2) tem-se a representação do vetor  $\bar{r}_p$  como:

$$\bar{r}_p = \bar{R} + \bar{r}_0 + \bar{u} \quad (2.3)$$

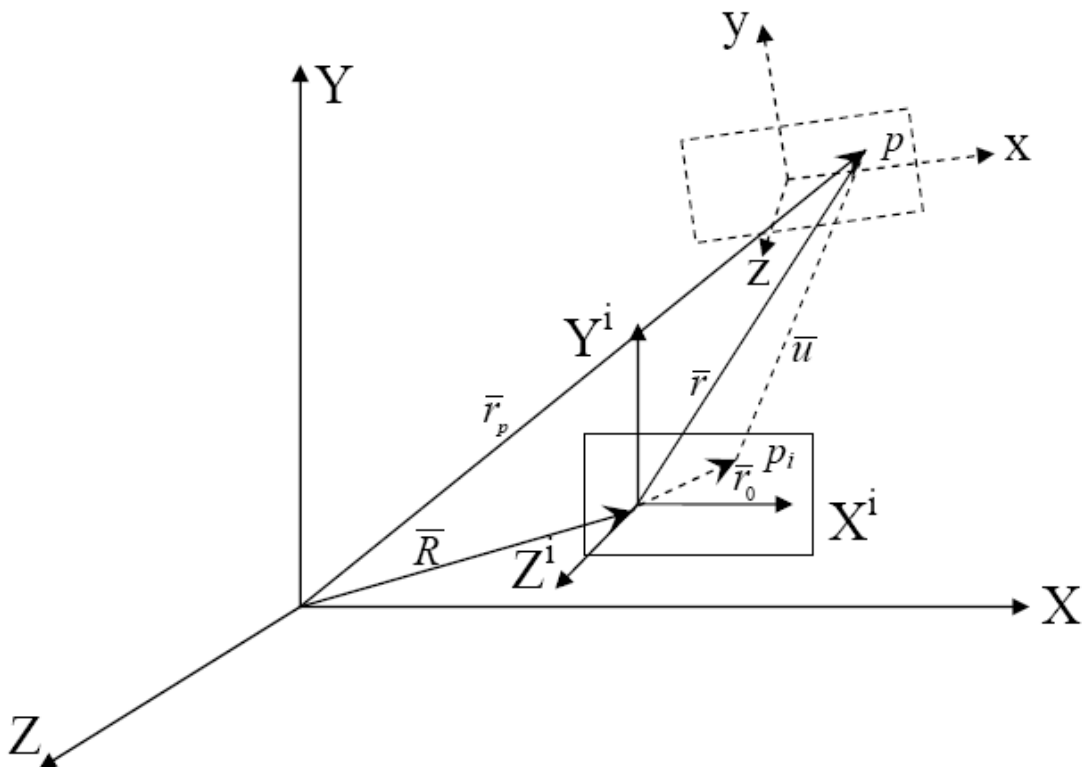


Figura 2.1 - Sistema de coordenadas generalizadas, Bashmal (2004).



O sistema de coordenadas  $x y z$  é rotacionado em relação ao sistema  $X Y Z$  conforme o conjunto de ângulos exibido na figura 2.2, onde a orientação geral da seção transversal do elemento de viga pode ser obtida através da rotação em torno do eixo  $X$  com o ângulo  $\varphi$ , depois por um ângulo  $\theta_y$  em torno do novo eixo  $y_1$  e posteriormente por um ângulo  $\theta_z$  em torno do eixo final  $z_2$ . O sistema também é conhecido na literatura como ângulos de Euler.

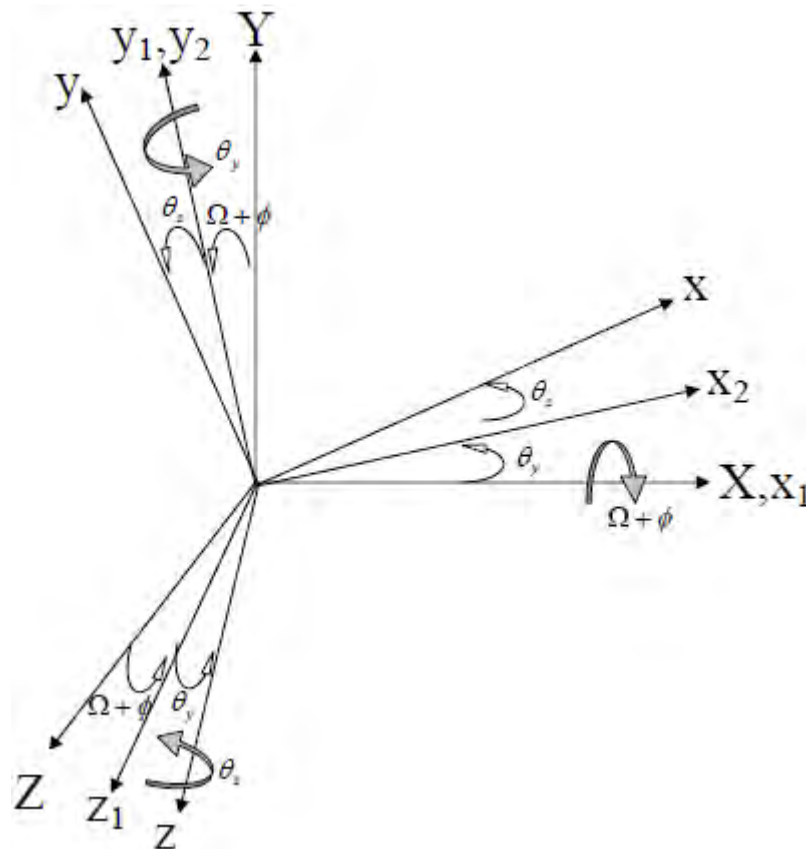


Figura 2.2 - Eixos em rotação nas coordenadas generalizadas, Khulief (2007).

A velocidade angular instantânea  $\omega$  com relação ao sistema de coordenadas  $x y z$  pode ser vista na equação (2.4).

$$\omega = \dot{\varphi} i + \dot{\theta}_y j_1 + \dot{\theta}_z k_2 \quad (2.4)$$

Onde:

$i, j_1$  e  $k_2$  são os vetores unitários ao longo dos eixos  $X, y_1$  e  $z_2$ .

Transformando a equação (2.4) para o sistema de coordenadas  $X Y Z$  tem-se:

$$\omega = \dot{\varphi} i + \dot{\theta}_y [\cos(\varphi) J + \text{sen}(\varphi) K] + \dot{\theta}_z [-\text{sen}(\theta_y) i - \text{sen}(\varphi) \cos(\theta_y) J + \cos(\theta_y) \cos(\varphi) K] \quad (2.5)$$

Assumindo pequenos valores para  $\theta_y$  e  $\theta_z$ , uma vez que as deformações angulares em torno do eixo  $y$  e  $z$  são desprezíveis, obtém-se as seguintes simplificações:

$$\cos(\theta_y) = \cos(\theta_z) = 1 \quad (2.6)$$

$$\text{sen}(\theta_y) = \theta_y, \text{sen}(\theta_z) = \theta_z \quad (2.7)$$

Substituindo as equações (2.6) e (2.7) na equação (2.5) tem-se:

$$\begin{aligned} \omega &= \dot{\varphi} i + \dot{\theta}_y [\cos(\varphi) J + \text{sen}(\varphi) K] + \dot{\theta}_z [-\theta_y i - \text{sen}(\varphi) J + \cos(\varphi) K] \\ &= (\dot{\varphi} - \dot{\theta}_z \theta_y) i + (\dot{\theta}_y \cos(\varphi) - \dot{\theta}_z \text{sen}(\varphi)) J + (\dot{\theta}_z \cos(\varphi) + \dot{\theta}_y \text{sen}(\varphi)) K \end{aligned} \quad (2.8)$$

Representando em forma matricial tem-se:

$$\omega = \begin{Bmatrix} \omega_X \\ \omega_Y \\ \omega_Z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\varphi} - \dot{\theta}_z \theta_y \\ \dot{\theta}_y \cos \varphi - \dot{\theta}_z \text{sen} \varphi \\ \dot{\theta}_z \cos \varphi + \dot{\theta}_y \text{sen} \varphi \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

### 2.2.1 Energia Cinética do Eixo

O vetor  $\bar{u}$  que representa a deformação do ponto  $p^i$  para o ponto  $p$ , conforme visto na figura 2.1, pode ser escrito utilizando a análise por elementos finitos, da seguinte forma:

$$u = [N_v] \{e\} \quad (2.10)$$

Onde  $[N_v]$  é a matriz função de forma de translação para o elemento de viga 3D, que

pode ser encontrada na forma explícita no capítulo 3 através das equações (3.5) a (3.8) e o vetor  $\{e\}$  contendo os deslocamentos nodais do elemento.

A derivada em relação ao tempo da equação (2.10) pode ser expressa da seguinte forma:

$$\frac{dr_p}{dt} = \dot{r}_p + \omega \times r_p = \dot{r}_p + [\omega]\{r_p\} \quad (2.11)$$

Onde a matriz anti-simétrica  $[\omega]$  é dada por:

$$[\omega] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Uma vez que a magnitude de  $\bar{R}$  e  $\bar{r}_o$  não variam com a deformação do elemento tem-se:

$$\dot{r}_p = \dot{u} = [N_v]\{\dot{e}\} \quad (2.13)$$

Substituindo a equação (2.13) na equação (2.11) obtém-se:

$$\frac{dr_p}{dt} = [N_v]\{\dot{e}\} + [\omega]\{r_p\} \quad (2.14)$$

A expressão para a energia cinética do elemento de viga pode ser escrita como:

$$T = \frac{1}{2} \int_V \mu \left\{ \frac{dr_p}{dt} \right\}^T \left\{ \frac{dr_p}{dt} \right\} dV \quad (2.15)$$

Onde  $\mu$  é a massa específica do elemento. Substituindo a equação (2.11) na equação (2.15) tem-se, Alnaser (2002):

$$T = \frac{1}{2} \int_V \mu \left[ \begin{array}{l} \{\dot{e}\}^T [N_v]^T [N_t] \{\dot{e}\} + \{\dot{e}\}^T [N_v]^T [\omega] \{r_p\} + \\ \{r_p\}^T [\omega]^T [N_t] \{\dot{e}\} + \{r_p\}^T [\omega]^T [\omega] \{r_p\} \end{array} \right] dV \quad (2.16)$$

O segundo e terceiro termos da equação (2.14) são igualmente nulos, pois o momento de inércia é calculado com relação ao centro de massa do elemento. O primeiro termo representa a energia cinética devido ao efeito de translação e o último termo à energia cinética devido ao efeito rotacional, já incluindo os efeitos giroscópicos. Uma parte da última parcela pode ser escrita como, Alnaser (2002):

$$[\omega]^T[\omega] = \begin{bmatrix} \omega_z^2 + \omega_y^2 & -\omega_x\omega_y & -\omega_z\omega_x \\ -\omega_x\omega_y & \omega_z^2 + \omega_x^2 & -\omega_y\omega_z \\ -\omega_x\omega_z & -\omega_y\omega_z & \omega_y^2 + \omega_x^2 \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Conseqüentemente, o último termo da equação (2.16) pode ser reescrito como:

$$\int_V \rho \{r_p\}^T [\omega]^T [\omega] \{r_p\} dV = \int_0^l \rho (I_x \omega_x^2 + I_y \omega_y^2 + I_z \omega_z^2) dx \quad (2.18)$$

Substituindo a equação (2.6) na equação (2.16) tem-se:

$$\int_V \rho \{r_p\}^T [\omega]^T [\omega] \{r_p\} dV = \int_0^l \rho \left( I_x (\dot{\varphi} - \dot{\theta}_z \theta_y)^2 + I_y (\dot{\theta}_y \cos \varphi - \dot{\theta}_z \sin \varphi)^2 + I_z (\dot{\theta}_z \cos \varphi + \dot{\theta}_y \sin \varphi)^2 \right) dx \quad (2.19)$$

Definindo,

$$\rho I_z = \rho I_y = I_D \text{ e } \rho I_x = I_P \quad (2.20)$$

Expressando as variáveis e suas derivadas com relação às matrizes de forma, tem-se:

$$\varphi = [N_\varphi] \{e\} \quad ; \quad \dot{\varphi} = [N_\varphi] \{\dot{e}\} \quad (2.21)$$

$$\theta_y = [N_{\theta_y}] \{e\} \quad ; \quad \dot{\theta}_y = [N_{\theta_y}] \{\dot{e}\} \quad (2.22)$$

$$\theta_z = [N_{\theta_z}] \{e\} \quad ; \quad \dot{\theta}_z = [N_{\theta_z}] \{\dot{e}\} \quad (2.23)$$

Onde  $[N_\varphi]$  representa a matriz de forma para o efeito de torção,  $[N_{\theta_y}]$  e  $[N_{\theta_z}]$  as

matrizes de forma para o efeito de flexão. No capítulo 3 as funções de forma estão explicitadas pelas equações (3.9) a (3.16).

Utilizando as relações definidas na equação (2.20) e as obtidas nas equações (2.21), (2.22) e (2.23) e substituindo na equação (2.19) tem-se:

$$\frac{1}{2} \int_V \rho \{r_p\}^T [\omega]^T [\omega] \{r_p\} dV = \frac{1}{2} C \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} \{\dot{e}\}^T [M_\varphi] \{\dot{e}\} - \dot{\varphi} \{\dot{e}\}^T [G] \{\dot{e}\} - \{\dot{e}\}^T [M_e] \{\dot{e}\} + \{\dot{e}\}^T [M_r] \{\dot{e}\} \quad (2.24)$$

Onde:

$$C = \int_0^l I_P dx \quad (\text{Momento de Inércia Polar}) \quad (2.25)$$

$$[M_\varphi] = \int_0^l [N_\varphi]^T I_P [N_\varphi] dx \quad (\text{Matriz de massa com inércia torcional}) \quad (2.26)$$

$$[G] = \int_0^l I_P [N_{\theta_y}]^T [N_{\theta_z}] dx \quad (\text{Matriz Giroscópica}) \quad (2.27)$$

$$[M_e] = \int_0^l I_P \left( [N_\varphi]^T [N_{\theta_z}] \{e\} [N_{\theta_y}] - [N_\varphi]^T [N_{\theta_y}] \{e\} [N_{\theta_z}] \right) dx \quad (2.28)$$

(Matriz de massa com inércia de translação e torsão acopladas)

$$[M_r] = \int_0^l I_D \begin{bmatrix} N_{\theta_y} \\ N_{\theta_z} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} N_{\theta_y} \\ N_{\theta_z} \end{bmatrix} dx \quad (\text{Matriz de massa com inércia de rotação}) \quad (2.29)$$

Retornando para equação (2.16) e reescrevendo obtem-se a equação para a energia cinética:

$$T = \frac{1}{2} \{\dot{e}\}^T [M_t] \{\dot{e}\} + \frac{1}{2} C \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} \{\dot{e}\}^T [M_\varphi] \{\dot{e}\} - \dot{\varphi} \{\dot{e}\}^T [G] \{\dot{e}\} - \{\dot{e}\}^T [M_e] \{\dot{e}\} + \frac{1}{2} \{\dot{e}\}^T [M_r] \{\dot{e}\} \quad (2.30)$$

Sendo  $[M_t]$  visto na equação (2.31), onde  $\mu$  e  $A$  são massa específica e área da seção transversal respectivamente.

$$[M_t] = \int_0^1 [N_v]^T \mu A [N_v] dx \quad (\text{Matriz de massa de transla\c{c}\~{a}o}) \quad (2.31)$$

Pode-se escrever a equa\c{c}\~{a}o (2.30) de maneira compacta, utilizando a forma matricial como visto na equa\c{c}\~{a}o (2.32).

$$T = \frac{1}{2} \{\dot{e}\}^T [M] \{\dot{e}\} + \frac{1}{2} C \dot{\phi}^2 + \dot{\phi} \{\dot{e}\}^T [G] \{\dot{e}\} \quad (2.32)$$

Onde:

$$M = [M_t] + [M_r] + [M_\phi] - 2[M_e] \quad (2.33)$$

$M$  representa a matriz de massa do elemento de viga 3D; sendo  $[M_e]$  a matriz de massa com acoplamento torcional e transversal, o qual ser\~{a} desconsiderado neste trabalho, j\~{a} que a mesma \c{e} dependente do tempo;  $[M_t]$  a matriz de massa para a transla\c{c}\~{a}o;  $[M_r]$  a matriz de rota\c{c}\~{a}o e  $[M_\phi]$  a matriz de tors\~{a}o.

## 2.2.2 Energia Cin\c3tica do Disco

O modelo em estudo considera em sua extremidade um disco r\~{i}gido solidariamente acoplado ao eixo rotativo. Dessa forma, ser\~{a} utilizada nesta modelagem somente a parcela correspondente \c{a} energia cin\c3tica do mesmo. O fato de desprezar a deforma\c{c}\~{a}o do disco n\~{a}o implica em um erro consider\~{a}vel na solu\c{c}\~{a}o, j\~{a} que a deforma\c{c}\~{a}o do disco \c{e} muito pequena em rela\c{c}\~{a}o ao eixo. A geometria adotada para identificar o disco segue as equa\c{c}\~{a}oes (2.34) a (2.36) onde  $R$  corresponde ao raio externo,  $r$  ao raio interno,  $h$  a espessura e  $\rho$  a densidade.

Assim, pode-se calcular a massa e os momentos de in\c3rcia do disco como segue:

$$M_D = \pi (R^2 - r^2) h \rho \quad (2.34)$$

$$I_z = I_y = \frac{M_D}{12} (3r^2 + 3R^2 + h^2) \quad (2.35)$$

$$I_x = \frac{M_D}{2} (r^2 + R^2) \quad (2.36)$$

### 2.2.3 Energia Potencial do Eixo devido à Flexão

As variáveis relacionadas com os movimentos de translação são  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , sendo  $v$  e  $w$  referentes ao movimento de flexão e  $u$  com o movimento axial. As rotações do elemento estão relacionadas com as deformações devido às flexões segundo as equações (2.37) e (2.38).

$$\theta_y = \frac{\partial v(x,t)}{\partial x} \quad (2.37)$$

$$\theta_z = -\frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \quad (2.38)$$

A energia potencial devido à flexão pode ser escrita como:

$$U_1 = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon \sigma dV \quad (2.39)$$

Onde:

$$\sigma = E \varepsilon \quad (2.40)$$

$$\varepsilon = -y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2.41)$$

Substituindo a equação (2.40) na equação (2.39) tem-se, Alnaser (2002):

$$U_1 = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon^2 E dV \quad (2.42)$$

Substituindo a equação (2.41) na equação (2.42) obtem-se a relação que expressa a energia potencial devido à flexão como:

$$\begin{aligned}
U_1 &= \frac{1}{2} E \int_0^l \int_A \left[ -y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right]^2 dA dx = \\
&= \frac{1}{2} E \int_0^l \int_A \left[ -y^2 \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 + z^2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2yz \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] dA dx
\end{aligned} \tag{2.43}$$

Devido à simetria do elemento em estudo, o último termo da equação (2.43) é nulo. De posse dos momentos de inércia de área definidos nas equação (2.44) e substituindo na equação (2.43), obtem-se a expressão para a parcela correspondente a energia potencial devido à flexão, visto na equação (2.45).

$$I_z = \int_A y^2 dA \quad \text{e} \quad I_y = \int_A z^2 dA \tag{2.44}$$

$$U_1 = \frac{1}{2} E \int_0^l \left[ I_z \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 + I_y \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 \right] dx \tag{2.45}$$

#### 2.2.4 Energia Potencial do Eixo devido à Torção

A energia potencial devido à torsão, definida aqui como  $U_2$  pode ser expressa como, Alnaser (2002):

$$U_2 = \frac{1}{2} \int_0^l G I_P \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 dx \tag{2.46}$$

Onde  $G$  é o modulo de elasticidade transversal e  $I_P$  o momento de inércia polar para um eixo cilíndrico.

#### 2.2.5 Energia Potencial do Eixo devido à Deformação Axial

A energia potencial devido à deformação axial  $U_3$  pode ser expressa pela equação (2.45).

$$U_3 = \frac{1}{2} \int_V \varepsilon \sigma dV \tag{2.47}$$



Onde:

$$\sigma = E \varepsilon \quad \text{e} \quad \varepsilon = \frac{du}{dx} \quad (2.48)$$

Substituindo a equação (2.46) na equação (2.45) tem-se:

$$U_3 = \frac{1}{2} E \int_0^l \int_A \left( \frac{du}{dx} \right)^2 dA dx \quad (2.49)$$

Como a seção do elemento em estudo possui área transversal constante, a equação (2.47) pode ser reduzida conforme visto na equação (2.48), Alnaser (2002).

$$U_3 = \frac{1}{2} EA \int_0^l \left( \frac{du}{dx} \right)^2 dx \quad (2.50)$$

## 2.2.6 Energia Potencial do Eixo devido ao Campo Gravitacional

Para possibilitar a utilização de longos eixos verticais, a presente formulação considera os efeitos devido ao campo gravitacional, conforme descrito a seguir. A energia potencial devido às forças gravitacionais pode ser expressa por, Alnaser (2002):

$$U_4 = \frac{1}{2} \int_0^l F(x) \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] dx \quad (2.51)$$

Onde  $F(x)$  representa a força gravitacional dada pela equação (2.50).

$$F(x) = EA \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.52)$$

## 2.2.7 Energia Potencial Total do Sistema

A energia potencial total pode ser obtida somando-se as parcelas intermediárias obtidas nas equações (2.45), (2.46), (2.50) e (2.51), assim tem-se:

$$U = U_1 + U_2 + U_3 + U_4 \quad (2.53)$$

$$U = \frac{1}{2}E \int_0^l \left[ I_z \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 + I_y \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + A \left( \frac{du}{dx} \right)^2 \right] dx + \frac{1}{2} \int_0^l GI_P \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l F(x) \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] dx \quad (2.54)$$

Devido a simetria do elemento cilíndrico utilizado no modelo tem-se:

$$I_z = I_y = I(x) \quad (2.55)$$

Utilizando as relações encontradas nas equações (2.37), (2.38) e (2.55) na equação (2.54) tem-se:

$$U = \frac{E}{2} \int_0^l I(x) \left[ \left( \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \theta_z}{\partial x} \right)^2 \right] dx + \frac{EA}{2} \int_0^l \left( \frac{du}{dx} \right)^2 dx + \frac{GJ}{2} \int_0^l \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l F(x) \left[ \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] dx \quad (2.56)$$

Pode-se escrever a equação (2.56) de maneira compacta, utilizando a forma matricial como visto na equação (2.57).

$$U = \frac{1}{2} \{e\}^T [K] \{e\} \quad (2.57)$$

Onde:

$$K = [K_a] + [K_e] + [K_\varphi] + [K_g] \quad (2.58)$$

$K$  representa a matriz de rigidez do elemento de viga 3D; sendo  $[K_a]$  a matriz de rigidez axial,  $[K_e]$  matriz de flexão,  $[K_\varphi]$  matriz de torção e  $[K_g]$  matriz devido ao efeito gravitacional (peso próprio).

## 2.2.8 Equação do Movimento

A expressão para o movimento do sistema mecânico é derivada através da equação de Lagrange, dada pela equação (2.57).

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = Q \quad (2.59)$$

Onde:

$L = T - U$	Função Lagrangeana
$q$	Coordenadas Generalizadas
$Q$	Vetor Forças Generalizadas
$T$	Energia Cinética Total
$U$	Energia Potencial Total

Substituindo  $q$  e  $L$  na equação (2.57) obtém-se a formulação para elementos finitos da dinâmica do movimento dada pela equação (2.58) para o elemento de viga 3D.

$$[M]\{\ddot{e}\} + \dot{\varphi}[G]\{\dot{e}\} + [K]\{e\} = Q \quad (2.60)$$

Onde:

$[M]$	Matriz de Massa
$[G]$	Matriz Giroscópica
$[K]$	Matriz de Rigidez
$\dot{\varphi}$	Velocidade Angular
$\{e\}$	Coordenadas nodais

## Capítulo 3

### Formulação Através do Método dos Elementos Finitos

Este capítulo está dividido em cinco partes. Na primeira parte, apresenta-se o modelo de elementos finitos propriamente dito. Nas partes subsequentes são descritas as matrizes de rigidez do eixo, a matriz de rigidez sob efeito gravitacional, matriz de inércia do eixo rotativo e a montagem da matriz global do sistema.

#### 3.1 Modelo de Elementos Finitos

O método dos elementos finitos será utilizado para resolver a equação do movimento obtida no capítulo anterior para estruturas mais complexas. O conceito básico do método dos elementos finitos é subdividir estruturas complexas em elementos simples, cujas soluções são conhecidas na forma analítica, como por exemplo, vigas, chapas, eixos etc. No caso do presente estudo, um número  $n$  de equações diferenciais será obtido em função do número de graus de liberdade da estrutura. Nesta formulação, utilizou-se o elemento de viga com seção transversal cilíndrica como elemento básico, com este possuindo dois nós, onde cada nó contém 6 graus de liberdade, sendo compostos por dois deslocamentos transversais, duas rotações de flexão, uma rotação torcional e um deslocamento axial, maiores detalhes sobre a formulação pode ser encontrada em Alnaser (2002) e Nelson (1992), conforme visto na figura 3.1.

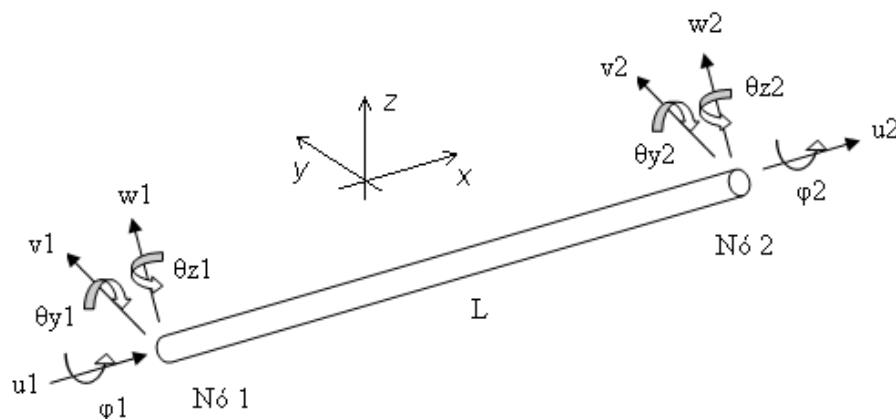


Figura 3.1 - Graus de liberdade do elemento de viga 3D.

O vetor de deformação para o elemento de viga a ser utilizado na formulação pode ser visto na equação (3.1).

$$e = \{u_1 \ v_1 \ w_1 \ \theta_{y_1} \ \theta_{z_1} \ \varphi_1 \ u_2 \ v_2 \ w_2 \ \theta_{y_2} \ \theta_{z_2} \ \varphi_2\}^T \quad (3.1)$$

Utilizando o método dos modos assumidos, a deformação axial e transversal de um elemento pode ser representada em termos de funções de forma como:

$$\begin{Bmatrix} u(x, t) \\ v(x, t) \\ w(x, t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{u_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{u_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_{v_1} & 0 & 0 & N_{v_2} & 0 & 0 & N_{v_3} & 0 & 0 & N_{v_4} & 0 \\ 0 & 0 & N_{v_1} & N_{v_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{v_3} & -N_{v_4} & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} N_u \\ N_v \\ N_w \end{bmatrix} \{e\} = [N_t(x)] \{e(t)\} \quad (3.2)$$

Da mesma forma, a rotação elástica do elemento pode ser aproximada em termos de funções de forma como:

$$\begin{Bmatrix} \theta_y \\ \theta_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & N_{\theta_1} & 0 & 0 & N_{\theta_2} & 0 & 0 & N_{\theta_3} & 0 & 0 & N_{\theta_4} & 0 \\ 0 & 0 & -N_{\theta_1} & N_{\theta_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & -N_{\theta_3} & N_{\theta_4} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{\theta_y} \\ N_{\theta_z} \end{bmatrix} \{e\} = [N_\theta(x)] \{e(t)\} \quad (3.3)$$

E para deformação torcional tem-se:

$$\varphi(x, t) = \{0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ N_{\varphi_1} \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ N_{\varphi_2}\} e = [N_\varphi] \{e(t)\} \quad (3.4)$$

Onde  $N_u$ ,  $N_v$  e  $N_w$  representam o deslocamento estático associado com o deslocamento do primeiro e do último ponto. As matrizes  $N_{\theta_y}$  e  $N_{\theta_z}$  representam as funções de forma para rotação devido à flexão e  $N_\varphi$  representa a função de forma para o efeito de rotação devido à torsão. As expressões explícitas para as funções de forma foram obtidas de Khulief (1992) e estão aqui reproduzidas pelas equações (3.5) a (3.16).

$$N_{v1} = 1 - 3 \left(\frac{x}{l}\right)^2 + 2 \left(\frac{x}{l}\right)^3 \quad (3.5)$$

$$N_{v2} = l \left[ \frac{x}{l} - 2 \left(\frac{x}{l}\right)^2 + \left(\frac{x}{l}\right)^3 \right] \quad (3.6)$$

$$N_{v3} = 3 \left(\frac{x}{l}\right)^2 - 2 \left(\frac{x}{l}\right)^3 \quad (3.7)$$

$$N_{v4} = l \left[ - \left(\frac{x}{l}\right)^2 + \left(\frac{x}{l}\right)^3 \right] \quad (3.8)$$

$$N_{u1} = 1 - \frac{x}{l} \quad (3.9)$$

$$N_{u2} = \frac{x}{l} \quad (3.10)$$

$$N_{\theta1} = \frac{6}{l} \left[ \left(\frac{x}{l}\right)^2 - \frac{x}{l} \right] \quad (3.11)$$

$$N_{\theta2} = 1 - 4 \left(\frac{x}{l}\right) + 3 \left(\frac{x}{l}\right)^2 \quad (3.12)$$

$$N_{\theta3} = \frac{6}{l} \left[ \frac{x}{l} - \left(\frac{x}{l}\right)^2 \right] \quad (3.13)$$

$$N_{\theta4} = 3 \left(\frac{x}{l}\right)^2 - 2 \frac{x}{l} \quad (3.14)$$

$$N_{\varphi1} = 1 - \frac{x}{l} \quad (3.15)$$

$$N_{\varphi2} = \frac{x}{l} \quad (3.16)$$

## 3.2 Matriz de Rigidez do Eixo

A seguir serão explicitadas as matrizes de rigidez para o elemento de viga através da equação (2.55). A convenção adotada segue a apresentada pela equação (3.1) e figura 3.1. As equações foram retiradas dos trabalhos de Alnaser (2002) e Bashmal (2004). As matrizes foram checadas em outras literaturas existentes, Craig (1981) e Nelson (1992).

### 3.2.1 Matriz de Rigidez Elástica

A contribuição elástica devido à flexão no sistema é apresentada pela equação (3.17) e (3.18).

$$[K_e] = \int_0^l [B_e]^T EI [B_e] dx \quad (3.17)$$

Onde:

$$[B_e] = \frac{\partial}{\partial x} [N_\theta] \quad (3.18)$$

Com a integração da equação (3.17) ao longo do eixo vertical  $x$  e utilizando a função de forma  $[N_\theta]$  vista nas equações (3.11) a (3.14), obtem-se a matriz de rigidez elástica de ordem 12 para um elemento de viga 3D de comprimento  $l$  de forma explícita:

$$K_e = EI \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12/l^3 & 0 & 0 & 6/l^2 & 0 & 0 & -12/l^3 & -12/l^3 & 0 & 6/l^2 & 0 \\ 0 & 0 & 12/l^3 & -6/l^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6/l^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6/l^2 & 4/l & 0 & 0 & 0 & 0 & 6/l^2 & 2/l & 0 & 0 \\ 0 & 6/l^2 & 0 & 0 & 4/l & 0 & 0 & -6/l^2 & 0 & 0 & 2/l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12/l^3 & 0 & 0 & -6/l^2 & 0 & 0 & 12/l^3 & 0 & 0 & -6/l^2 & 0 \\ 0 & -12/l^3 & 0 & 6/l^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12/l^3 & 6/l^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6/l^2 & 2/l & 0 & 0 & 0 & 0 & 6/l^2 & 4/l & 0 & 0 \\ 0 & 6/l^2 & 0 & 0 & 2/l & 0 & 0 & -6/l^2 & 0 & 0 & 4/l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

### 3.2.2 Matriz de Rigidez Torcional

A contribuição devido ao efeito torcional no sistema é apresentada pela equação (3.20) e (3.21).

$$[K_\varphi] = \int_0^l [B_\varphi]^T GI_p [B_\varphi] dx \quad (3.20)$$

Onde:

$$[B_\varphi] = \frac{\partial}{\partial x} [N_\varphi] \quad (3.21)$$

Com a integração da equação (3.20) ao longo do eixo vertical  $x$  e utilizando a função de forma  $[N_\varphi]$  vista nas equações (3.15) e (3.16), obtem-se a matriz de rigidez torcional de ordem 12 para um elemento de viga 3D de comprimento  $l$  de forma explícita, apresentada pela equação (3.22).

$$K_\varphi = GI_p \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/l \end{bmatrix}$$

(3.22)



### 3.2.3 Matriz de Rigidez Axial

A contribuição devido ao efeito axial no sistema é apresentada pela equação (3.23) e (3.24).

$$[K_a] = \int_0^l [B_a]^T EA [B_a] dx \quad (3.23)$$

Onde:

$$[B_a] = \frac{\partial}{\partial x} [N_u] \quad (3.24)$$

Com a integração da equação (3.23) ao longo do eixo vertical  $x$  e utilizando a função de forma  $[N_u]$  vista nas equações (3.9) e (3.10), obtém-se a matriz de rigidez axial de ordem 12 para um elemento de viga 3D de comprimento  $l$  de forma explícita, apresentada pela equação (3.25).

$$K_a = EA \begin{bmatrix} 2/l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2/l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

### 3.2.4 Matriz de Rigidez Devido ao Peso Próprio

A presente formulação leva em consideração o efeito gravitacional do elemento, permitindo assim, o cálculo para longas estruturas delgadas já que o comprimento exerce uma influência significativa devido ao peso próprio da estrutura. Dessa forma, a matriz de rigidez gravitacional é desenvolvida e adicionada na matriz global de rigidez do elemento, como apresentada pelas equações (3.26) e (3.27).

$$[K_g] = \int_0^l F [B_{as}]^T [B_{as}] dx \quad (3.26)$$

Onde:

$$[B_{as}] = \frac{\partial}{\partial x} [N_v] \quad (3.27)$$

A força  $F$  a ser considerada denota o esforço gravitacional, considerando toda a estrutura suspensa, ou seja, todo sistema submetido ao esforço de tração.

A força axial  $F$  devido ao peso associado a um elemento  $i$  num ponto  $p$  pode ser escrita como:

$$dF = \rho g A dr_p \quad (3.28)$$

Onde:

$A$	Área da seção transversal
$g$	Aceleração da gravidade
$\rho$	Massa específica do material

Através da figura 3.2, para a estrutura suspensa, tem-se que o comprimento  $r_p$  do ponto neutro até o ponto  $p$  pode ser escrito como:

$$r_p = L_t + (l_i - x) \quad (3.29)$$

Onde  $l_i$  representa o comprimento do elemento  $i$  e  $L_t$  é dado pela equação (3.30).

$$L_t = \sum_{j=i}^{n-1} l_j \quad (3.30)$$

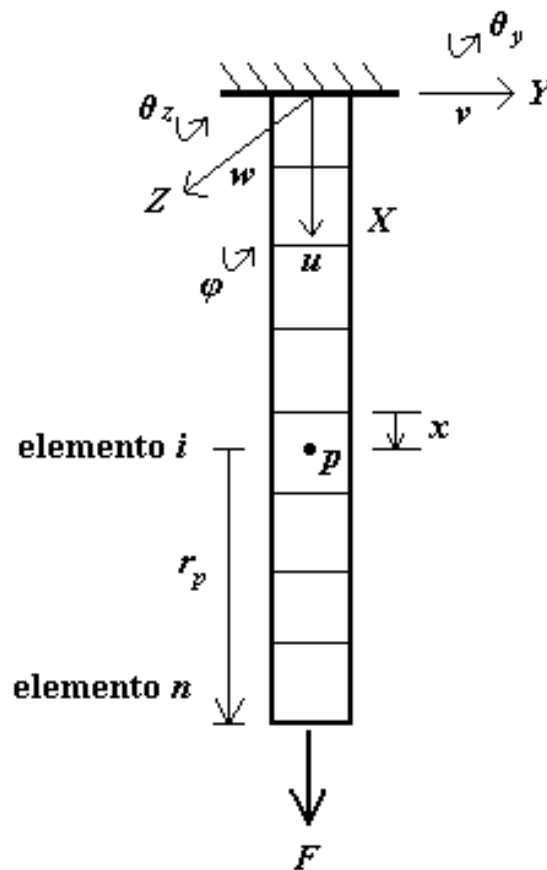


Figura 3.2 – Esquema coluna sob tensão, Alnaser (2002).

Diferenciando a equação (3.29) com relação à  $x$  tem-se:

$$dr_p = -dx \quad (3.31)$$

Substituindo a equação (3.31) na equação (3.28) tem-se:

$$dF = \rho g A (-dx) \quad (3.32)$$

Integrando a equação (3.32) tem-se a força  $F$  devido ao peso próprio atuando no ponto  $p$  até o ponto neutro, que neste caso é a extremidade da estrutura, conforme pode ser

visto na equação (3.33).

$$F = - \left[ \int_{L_t - L_i}^{L_t} \rho g A dx + \int_x^{L_i} \rho g A dx \right] \quad (3.33)$$

Resolvendo a integral da equação (3.33) e considerando  $\rho, g$  e  $A$  como constantes, obtém-se a seguinte expressão:

$$F = -\rho g A [L_t - (l_i - x)] \quad (3.34)$$

Com a integração da equação (3.26) ao longo do eixo vertical  $x$  e utilizando a função de forma  $[N_v]$  vista nas equações (3.5) a (3.8), e a equação (3.34), obtém-se a matriz de rigidez devido ao campo gravitacional de ordem 12 para um elemento de viga 3D de comprimento  $l$  de forma explícita, apresentada pela equação (3.35).



### 3.3 Matriz de Inércia do Eixo

A seguir serão explicitadas as matrizes de inércia para o elemento de viga através da equação (2.30). A convenção adotada segue a apresentada pela equação (3.1) e figura 3.1. As equações foram retiradas dos trabalhos de Alnaser (2002) e Bashmal (2004). As matrizes foram checadas em outras literaturas existentes, Craig (1981) e Nelson (1992).

#### 3.3.1 Matriz de Inércia de Translação

Com a integração da equação (2.29) ao longo do eixo vertical  $x$  e com a utilização das funções de forma  $[N_v]$  vista nas equações (3.5) a (3.8), obtém-se a matriz de inércia devido ao efeito de translação, de ordem 12, para um elemento de viga 3D de comprimento  $l$  de forma explícita, apresentada pela equação (3.36).

$$M_t = \rho A$$

$$\begin{bmatrix} l/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 13l/35 & 0 & 0 & 11l^2/210 & 0 & 0 & 9l/70 & 0 & 0 & -13l^3/420 & 0 \\ 0 & 0 & 13l/35 & -11l^2/210 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 13l^3/420 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -11l^2/210 & l^3/105 & 0 & 0 & 0 & 0 & 13l^3/420 & -l^3/140 & 0 & 0 \\ 0 & 11l^2/210 & 0 & 0 & l^3/105 & 0 & 0 & 13l^3/420 & 0 & 0 & -l^3/140 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9l/70 & 0 & 0 & 13l^3/420 & 0 & 0 & 13l/35 & 0 & 0 & -11l^2/210 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 13l^3/420 & 0 & 0 & 0 & 0 & 13l/35 & 11l^2/210 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 13l^3/420 & -l^3/140 & 0 & 0 & 0 & 0 & 11l^2/210 & l^3/105 & 0 & 0 \\ 0 & -13l^3/420 & 0 & 0 & -l^3/140 & 0 & 0 & -11l^2/210 & 0 & 0 & l^3/105 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(3.36)

### 3.3.2 Matriz de Inércia de Rotação

Com a integração da equação (2.27) ao longo do eixo vertical  $x$  e com a utilização das funções de forma  $[N_\theta]$  vista nas equações (3.11) a (3.14), obtem-se a matriz de inércia devido ao efeito de rotação, de ordem 12, para um elemento de viga 3D de comprimento  $l$  de forma explícita, apresentada pela equação (3.37).

$$M_r = I_D \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6/5l & 0 & 0 & 1/10 & 0 & 0 & -6/5l & 0 & 0 & 1/10 & 0 \\ 0 & 0 & 6/5l & -1/10 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6/5l & -1/10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/10 & 2l/15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -l/30 & 0 & 0 \\ 0 & 1/10 & 0 & 0 & 2l/15 & 0 & 0 & 0 & -1/10 & 0 & -l/30 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6/5l & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6/5l & 0 & 0 & -1/10 & 0 \\ 0 & 0 & -6/5l & 0 & -1/10 & 0 & 0 & 0 & 6/5l & -1/10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/10 & -l/30 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/10 & 2l/15 & 0 & 0 \\ 0 & 1/10 & 0 & 0 & -l/30 & 0 & 0 & -1/10 & 0 & 0 & 2l/15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

### 3.3.3 Matriz de Inércia de Torsão

Com a integração da equação (2.24) ao longo do eixo vertical  $x$  e com a utilização das funções de forma  $[N_\varphi]$  vista nas equações (3.15) e (3.16), obtem-se a matriz de inércia devido ao efeito de torsão, de ordem 12, para um elemento de viga 3D de comprimento  $l$  de forma explícita, apresentada pela equação (3.38).

$$M_\varphi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l/6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & l/3 \end{bmatrix}$$

(3.38)



### 3.4 Matriz Giroscópica

A matriz giroscópica pode ser obtida a partir da seguinte expressão, Alnaser (2002):

$$[G] = [G^*] - [G^*]^T \quad (3.39)$$

Onde  $[G]$  é a matriz giroscópica apresentada na equação (2.27) e  $[G^*]$  a matriz giroscópica que pode ser vista na equação (3.40). A velocidade de rotação e o momento polar de inércia foram considerados constantes para a obtenção da equação (3.40).

$$[G^*] = I_P \int_0^l [N_{\theta_z}]^T [N_{\theta_y}] dx \quad (3.40)$$

Com a integração da equação (3.40) ao longo do eixo vertical  $x$  e com a utilização das funções de forma  $[N_{\theta}]$  encontradas nas equações (3.11) a (3.14), obtem-se a matriz giroscópica, de ordem 12, para um elemento de viga 3D de comprimento  $l$  de forma explícita, apresentada pela equação (3.41).

Procurou-se manter a abordagem vista em Alnaser (2002) para a obtenção da matriz giroscópica através de  $[G^*]$ . Porém, pode-se encontrar esta matriz de forma direta em outros trabalhos, Craig (1981). Entretanto, todas as variáveis foram checadas e o resultado final permanece inalterado.

$$G^* = I_P \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6/5l & 1/10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6/5l & 1/10 & 0 & 0 \\ 0 & 6/5l & 0 & 0 & 1/10 & 0 & 0 & -6/5l & 0 & 0 & 1/10 & 0 \\ 0 & -1/10 & 0 & 0 & -2/15l & 0 & 0 & 1/10 & 0 & 0 & -1/30l & 0 \\ 0 & 0 & -1/10 & 2/15l & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/10 & 1/30l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6/5l & -1/10 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6/5l & -1/10 & 0 & 0 \\ 0 & -6/5l & 0 & 0 & -1/10 & 0 & 0 & 6/5l & 0 & 0 & -1/10 & 0 \\ 0 & -1/10 & 0 & 0 & -1/30l & 0 & 0 & 1/10 & 0 & 0 & -2/15l & 0 \\ 0 & 0 & -1/10 & 1/30l & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/10 & 2/15l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

### 3.5 Matriz do Sistema Mecânico

Reescrevendo a equação do movimento obtida através da equação (2.60) de forma a incluir somente os parâmetros considerados neste trabalho, tem-se a equação para cada elemento finito  $i$  do sistema mecânico em análise.

$$[M]_i \{\ddot{e}\}_i + \dot{\phi} [G]_i \{\dot{e}\}_i + [K]_i \{e\}_i = 0 \quad (3.42)$$

Sendo  $[M]_i$  a matriz de massa do elemento  $i$ :

$$[M]_i = [M_t]_i + [M_r]_i + [M_\varphi]_i \quad (3.43)$$

Onde:

$[M_t]$             Matriz de massa de translação

$[M_r]$             Matriz de massa de rotação

$[M_\varphi]$           Matriz de massa de torsão

Sendo  $[G]_i$  a matriz giroscópica do elemento  $i$ :

$$[G]_i = [G^*]_i - [G^*]_i^T \quad (3.44)$$

Onde:

$[G^*]$             Matriz giroscópica obtida pela equação (3.41)

Sendo  $[K]_i$  a matriz de rigidez do elemento  $i$ :

$$[K]_i = [K_a]_i + [K_e]_i + [K_\varphi]_i + [K_g]_i \quad (3.45)$$

Onde:

$[K_a]$	Matriz de rigidez axial
$[K_e]$	Matriz de rigidez elástica
$[K_\varphi]$	Matriz de rigidez torcional
$[K_g]$	Matriz de rigidez devido ao peso próprio

Após o cálculo das matrizes dos elementos e montagem da matriz global de massa, rigidez e giroscópica, de acordo com o procedimento padrão de elementos finitos, efetuam-se a vinculação do sistema.

Os primeiros 6 graus de liberdade, correspondente ao nó inicial do primeiro elemento será eliminado das matrizes globais, de forma a criar o engastamento em uma extremidade da estrutura.

Após a montagem das matrizes dos elementos, procede-se o cálculo das características inerciais do disco rígido e sua incorporação na matriz global de massa e giroscópica no último nó correspondente na estrutura, ou seja, na extremidade livre do rotor.

Com a equação (3.42) montada para todos os elementos da estrutura, pode-se aplicar qualquer procedimento para resolução do autoproblema correspondente e obter as frequências naturais do sistema, através dos autovalores, e os modos de vibrar, através dos autovetores.

## Capítulo 4

### Análise Modal

Este capítulo está dividido em duas partes. Na primeira parte, apresenta-se uma breve introdução sobre o assunto análise modal. Na segunda parte, descreve-se a teoria sobre análise modal para estruturas estacionárias e em seguida para estruturas rotativas.

#### 4.1 Introdução

A análise modal é uma ferramenta que permite determinar, de forma analítica ou experimental, os parâmetros modais de um sistema estrutural, ou seja, frequências naturais, formas modais e fatores de amortecimento.

O procedimento padrão para estudo de estruturas de forma analítica requer, inicialmente, um modelo matemático que se adeque às necessidades em questão. Após a modelagem, deve-se resolver o problema de autovalor associado e determinar os modos de vibração, os fatores de amortecimento e as frequências naturais do sistema. As funções de resposta em frequência podem ser calculadas através da superposição modal dos modos naturais de vibração.

Normalmente as máquinas rotativas são estruturas compostas de elementos complexos, contendo vários dispositivos que podem ser extremamente complicados para modelar matematicamente, tais como: selos, mancais, acoplamentos, entre outros, e podem estar sujeitos a desgaste durante a vida útil do equipamento, fazendo com que suas características físicas se alterem com o tempo.

As frequências naturais da estrutura devem ser determinadas para que se conheçam as velocidades críticas e as faixas de rotação seguras para operação, permitindo, assim, melhor eficiência e diminuição dos custos de manutenção.

Os conhecimentos dos modos de vibração de um rotor permitem descrever o seu comportamento dinâmico em resposta a vários tipos de excitações.

Uma característica importante dos sistemas rotativos é a de apresentar modos de precessão direta e retrógrada, que em vários casos, são muito próximos em frequência entre si, tornando assim difícil realizar uma identificação precisa dos parâmetros modais com os

métodos de análise modal clássica.

A análise modal complexa foi desenvolvida por Lee (1990, 1991) para ser aplicada especificamente em máquinas rotativas. A formulação leva em consideração a direção dos modos de precessão, através da utilização das coordenadas direcionais e da divisão dos modos em submodos diretos e retrógrados. Da mesma forma que os modos, os sinais de excitação e as respostas medidas também são tratados com a notação complexa e divididos em componentes diretas e retrógradas.

Para permitir lidar com estes sinais dentro de um sistema com coordenadas direcionais, Lee (1990) desenvolveu as funções de resposta em frequência direcionais, que são capazes de separar, de forma clara, os modos de precessão direta e retrógrada.

## 4.2 Análise Modal Clássica

Nesta seção apresenta-se sucintamente a análise modal em sua forma clássica para estruturas estacionárias e em seguida para estruturas rotativas. São explicitadas as diferenças entre esses dois sistemas através de seu equacionamento.

### 4.2.1 Análise Modal em Estruturas Estacionárias

A equação de movimento de um sistema não rotativo com amortecimento viscoso pode ser expressa da seguinte forma:

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [D]\{\dot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{f(t)\} \quad (4.1)$$

As características das matrizes são: matriz de massa  $[M]$  é simétrica e positivo definida e as matrizes de rigidez  $[K]$  e a de amortecimento  $[D]$ , são simétricas e semi-positivo definidas. Adotando um sistema homogêneo associado a uma resposta harmônica, tem-se o seguinte problema de autovalor de segunda ordem:

$$(\lambda^2[M] + \lambda[D] + [K])\{X\} = \{0\} \quad (4.2)$$

Considerando que a maior disponibilidade de algoritmos confiáveis para a resolução de problemas de autovalor de primeira do que de segunda ordem, Nelson (1992), é mais interessante transformar a equação (4.2) em um sistema de primeira ordem. Para isso pode-se aplicar uma mudança de variáveis conveniente e reduzir a um problema de autovalor simétrico generalizado.

$$[A]\{\dot{y}\} + [B]\{y\} = \{0\} \quad (4.3)$$

Onde:

$$[A] = \begin{bmatrix} [D] & [M] \\ [M] & [0] \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} [K] & [0] \\ [0] & -[M] \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

$$\{y\} = \begin{Bmatrix} x \\ \dot{x} \end{Bmatrix} \quad (4.6)$$

Utilizando a equação (4.3) pode escrever o problema de autovalor da seguinte forma:

$$(\lambda_r[A] + [B])\{\theta\}_r = \{0\} \quad (4.7)$$

Onde:

$\lambda_r$                       r-ésimo autovalor  
 $\{\theta\}_r$                     Autovetor associado

Os  $2n$  autovetores pode ser dispostos em colunas de uma matriz, chamada matriz modal  $[\theta]$ . Os autovetores são ortogonais entre si quando ponderados pelas matrizes  $[A]$  e  $[B]$ , conforme Ewins (1984). As relações de ortogonalidade podem ser expressas pela seguinte forma:

$$[\theta]^T[A][\theta] = [a_r] \quad (4.8)$$

$$[\theta]^T[B][\theta] = [b_r] \quad (4.9)$$

Sendo  $[a_r]$  e  $[b_r]$  matrizes diagonais. Assim, o  $r$ -ésimo autovalor,  $\lambda_r$  é dado por:

$$\lambda_r = -\frac{b_r}{a_r} \quad (4.10)$$

Considerando uma força externa harmônica do tipo:

$$\{f(t)\} = \{F\}e^{i\omega t} \quad (4.11)$$

E uma resposta do sistema também harmônica, obtem-se, pela equação (4.3):

$$(i\omega[A] + [B])\{Y\}e^{i\omega t} = \{F\}e^{i\omega t} \quad (4.12)$$

Dessa forma, pode-se definir a matriz de funções de resposta em frequência (FRF) como:

$$[\alpha(\omega)] = (i\omega[A] + [B])^{-1} \quad (4.13)$$

A matriz das FRFs é igual à inversa da matriz de impedância dinâmica. Nota-se que há a possibilidade de calcular a matriz de FRF através da equação (4.13), porém este procedimento resulta em várias desvantagens, como mostrado a seguir:

- Numericamente custoso, pois é necessário inverter a matriz de rigidez dinâmica para cada frequência;
- O processo não permite que se calcule apenas uma, ou algumas FRF, este método fornece toda a matriz das funções de resposta em frequência do sistema, o que não maioria dos casos não é necessária;
- O procedimento não deixa claro qual é a contribuição de cada modo na resposta do sistema em determinado grau de liberdade;

Devido aos fatos expostos acima, é importante desenvolver um método capaz de calcular as FRFs de forma mais prática. Para isto, invertem-se ambos os lados da equação (4.13), pré multiplica-se o resultado por  $[\theta]^T$  e pós multiplica-se por  $[\theta]$ , resultando em:

$$[\theta]^T [\alpha(\omega)]^{-1} [\theta] = [\theta]^T (i\omega[A] + [B]) [\theta] \quad (4.14)$$

Utilizando as relações de ortogonalidade apresentada na equação (4.8) e equação (4.9), tem-se:

$$[\theta]^T [\alpha(\omega)]^{-1} [\theta] = (i\omega[a_r] + [b_r]) = [a_r](i\omega[I] - [\Lambda]) \quad (4.15)$$

Sendo  $[\Lambda]$  uma matriz diagonal composta pelos autovalores dispostos na diagonal principal. Esta matriz é denominada de matriz espectral. Se os autovalores forem normalizados de tal maneira que sendo  $[a_r] = [I]$  e , por consequencia,  $[b_r] = -[\Lambda]$  , a



equação (4.15) torna-se:

$$[\Phi]^T [\alpha(\omega)]^{-1} [\Phi] = (i\omega[I] - [\Lambda]) \quad (4.16)$$

Sendo  $[\Phi]$  a matriz modal formada pelos autovetores normalizados. Pré multiplicando-se ambos os lados da equação (4.16) por  $[\Phi]^T$  e pós multiplicando-se o resultado por  $[\Phi]^{-1}$ , tem-se:

$$[\alpha(\omega)]^{-1} = [\Phi]^{-T} (i\omega[I] - [\Lambda]) [\Phi]^{-1} \quad (4.17)$$

Calculando-se a inversa de ambos os lados da equação (4.17) obtem-se:

$$[\alpha(\omega)] = [\Phi] (i\omega[I] - [\Lambda])^{-1} [\Phi]^T \quad (4.18)$$

A equação (4.18) apresenta a expressão da matriz de funções de resposta em frequência em relação aos parâmetros modais. A equação da receptância que relaciona uma excitação aplicada no grau de liberdade  $k$  com o deslocamento medido no grau de liberdade  $j$  é dado por:

$$\alpha_{jk}(\omega) = \sum_{r=1}^{2N} \frac{\phi_{jr} \phi_{kr}}{(i\omega - \lambda_r)} \quad (4.19)$$

## 4.2.2 Análise Modal em Sistemas Rotativos

Na análise considerada anteriormente, os estudos se concentraram em estruturas que possuem matrizes de massa e rigidez simétricas e invariantes, ou seja, estacionárias. Normalmente, o modelo matemático de máquinas rotativas possui matrizes que são função da rotação e não simétricas devido ao efeito das forças giroscópicas e dos mancais. Neste trabalho, os efeitos dos mancais serão desconsiderados, já que em uma extremidade a estrutura será considerada fixa (engastamento) e em sua outra extremidade considerada livre, ou seja, apenas os modos próprios serão considerados (não será abordado o efeito de perfuração). A expressão geral da equação do movimento de um sistema rotativo pode ser descrita por:

$$[M]\{\ddot{x}(t)\} + [D(\Omega)]\{\dot{x}(t)\} + [K]\{x(t)\} = \{f(t)\} \quad (4.20)$$

Onde:

$$[D(\Omega)] = [C] - \Omega[G] \quad (4.21)$$

$[C]$  Matriz de amortecimento (simétrica)

$[G]$  Matriz giroscópica (anti-simétrica)

$\Omega$  Velocidade de rotação do rotor

Transformando a equação (4.20) para a forma de estado espaço tem-se, conforme Bucher (1996):

$$[A]\{\dot{q}\} + [B]\{q\} = \{F\} \quad (4.22)$$

Onde:

$$[A] = \begin{bmatrix} [M] & [0] \\ [0] & -[K] \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} [D(\Omega)] & [K] \\ [K] & [0] \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} \{f(t)\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (4.25)$$

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} \dot{x}(t) \\ x(t) \end{Bmatrix} \quad (4.26)$$

O fato de a matriz giroscópica ser anti-simétrica faz com que os autovetores do problema não auto-adjunto (à esquerda) sejam diferentes dos autovetores do problema auto-adjunto (à direita). Dessa forma, têm-se dois problemas de autovalor, o auto-ajunto e o não auto-adjunto, conforme apresentado a seguir:

$$\lambda_i [A] \{R\}_i + [B] \{R\}_i = \{0\} \quad (4.27)$$

$$\lambda_i [A]^T \{L\}_i + [B]^T \{L\}_i = \{0\} \quad (4.28)$$

Sendo que  $\lambda_i$  são os autovalores,  $\{R\}_i$  os autovetores à direita e  $\{L\}_i$  os autovetores à esquerda,  $\{\varphi\}_i$  os autovetores à direita do sistema de segunda ordem e  $\{\phi\}_i$  os autovetores à esquerda do sistema de segunda ordem, conforme apresentado nas equações (4.29) e (4.30).

$$\{R\}_i = \begin{Bmatrix} \lambda_i \{\varphi\}_i \\ \{\varphi\}_i \end{Bmatrix} \quad (4.29)$$

$$\{L\}_i = \begin{Bmatrix} -\lambda_i \{\phi\}_i \\ \{\phi\}_i \end{Bmatrix} \quad (4.30)$$

De forma similar ao que ocorrem com as estruturas estacionárias, os autovalores e os autovetores serão complexos e surgirão em pares complexos conjugados, desde que o sistema seja subamortecido.

Da mesma forma como foi executado para o caso dos sistemas não rotativos, pode-se dispor os autovetores nas colunas de uma matriz formando a matriz modal. Para estruturas rotativas, entretanto, existirão duas matrizes modais, sendo uma à direita  $[R]$  e outra à esquerda  $[L]$ .

No caso de sistemas rotativos, devido a não simetria das matrizes, as propriedades de ortogonalidade dos autovetores se alteram. Normalizando-se os autovetores à direita e à esquerda apropriadamente, as relações de ortogonalidade podem ser expressas da seguinte

forma:

$$[L]^T[A][R] = [I] \quad (4.31)$$

$$[L]^T[B][R] = -[\Lambda] \quad (4.32)$$

De maneira a se obter a expressão da função de resposta em frequência de sistemas rotativos devemos, antes de tudo, expressar o vetor de estado como uma expansão dos autovetores à direita, Nordmann (1982):

$$\{q\} = \sum_{i=1}^{2N} \{R\}_i \eta_i = [R]\{\eta\} \quad (4.33)$$

Substituindo-se a equação (4.33) na equação (4.22) e pré-multiplicando o resultado por  $[L]^T$ , tem-se que:

$$[L]^T[A][R]\{\dot{\eta}\} + [L]^T[B][R]\{\eta\} = [L]^T\{F\} \quad (4.34)$$

Das  $N$  primeiras linhas da equação (4.34) obtêm-se  $N$  equações desacopladas:

$$\dot{\eta}_i(t) - \lambda_i \eta_i(t) = -\lambda_i \{\phi\}_i^T \{f(t)\} \quad (4.35)$$

Supondo uma excitação e uma resposta harmônica e de mesma frequência, tem-se que a resposta em frequência na  $i$ -ésima coordenada generalizada será dada por:

$$\eta_i(\omega) = \frac{-\lambda_i \{\phi\}_i^T}{j\omega - \lambda_i} \{f(\omega)\} \quad (4.36)$$

Substituindo a equação (4.36) no vetor estado da equação (4.33) tem-se:

$$\{q\} = \sum_{i=1}^{2N} \{R\}_i \eta_i = [R]\{\eta\} = \sum_{i=1}^{2N} \{R\}_i \frac{\lambda_i \{\phi\}_i^T}{\lambda_i - j\omega} \{f\} = \sum_{i=1}^{2N} \left\{ \begin{matrix} \lambda_i \{\phi\}_i^T \\ \{\phi\}_i \end{matrix} \right\} \frac{\lambda_i \{\phi\}_i^T}{\lambda_i - j\omega} \quad (4.37)$$

Considerando apenas a resposta em deslocamento, ou seja, a metade inferior do vetor  $\{q\}$ , tem-se:

$$\{x\} = \sum_{i=1}^{2N} \frac{\lambda_i \{\varphi\}_i \{\phi\}_i^T}{\lambda_i - j\omega} \{f\} \quad (4.38)$$

Com a equação (4.38) pode-se calcular a resposta em um grau de liberdade  $k$  devido a uma excitação em um grau de liberdade  $l$ . Para isso, supõe-se um vetor de forças externas não nulas apenas no  $l$ -ésimo grau de liberdade, conforme visto na equação (4.39).

$$\{f(t)\} = \{0 \quad 0 \quad \dots \quad f_l \quad \dots \quad 0 \quad 0\}^T e^{i\omega t} \quad (4.39)$$

Dessa forma obtém-se a equação (4.40) que expressa a resposta em frequência no grau de liberdade  $k$ :

$$x_k = \sum_{i=1}^{2N} \frac{\lambda_i \varphi_{ki} \phi_{li}}{\lambda_i - j\omega} f_l \quad (4.40)$$

Através da equação (4.40) tem-se que a receptância entre os pontos  $l$  e  $k$  pode ser dada por:

$$\alpha_{kl}(\omega) = \sum_{i=1}^{2N} \frac{\lambda_i \varphi_{ki} \phi_{li}}{\lambda_i - j\omega} \quad (4.41)$$

A matriz de funções de resposta em frequência será dada por:

$$[\alpha(\omega)] = \sum_{i=1}^{2N} \frac{\lambda_i \{\varphi\}_i \{\phi\}_i^T}{\lambda_i - j\omega} \quad (4.42)$$

Ou pela forma apresentada pela equação (4.43):

$$[\alpha(\omega)] = \sum_{i=1}^N \frac{\lambda_i \{\varphi\}_i \{\phi\}_i^T}{\lambda_i - j\omega} + \frac{\bar{\lambda}_i \{\bar{\varphi}\}_i \{\bar{\phi}\}_i}{\bar{\lambda}_i - j\omega} \quad (4.43)$$

Nota-se que, para calcular as FRFs através da superposição modal, é necessário calcular os autovetores à direita e os autovetores à esquerda.

## Capítulo 5

### Análise Modal Complexa

Este capítulo está dividido em duas partes. Na primeira parte, discutem-se sistemas rotativos com vibrações livres, com a apresentação inicial dos conceitos fundamentais da análise modal complexa. Na segunda parte, estuda-se o fenômeno para as vibrações forçadas, com a apresentação da obtenção da resposta em frequência direcional.

#### 5.1 Vibração Livre em Sistemas Rotativos

Nesta seção, os conceitos e detalhamento da técnica de análise modal complexa serão explorados. A descrição com maiores detalhes da teoria encontra-se em Kessler (1999). Cabe salientar que, independente da complexidade da estrutura em estudo, a interpretação física das coordenadas direcionais se mantém inalteradas. Considerando o vetor complexo  $p(t)$  visto também na figura 5.1, cuja posição se apresenta ao longo de um trecho arbitrário no plano  $YZ$  em um determinado instante  $t$ , tem-se:

$$p(t) = y(t) + i z(t) \quad (5.1)$$

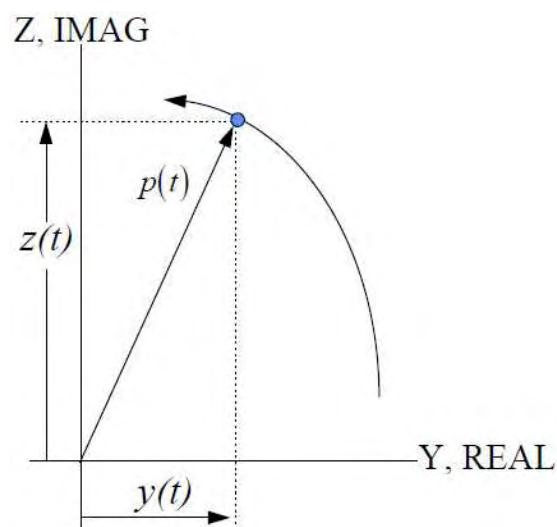


Figura 5.1 – Movimento planar do ponto P, Kessler (1999).

A transformação entre a representação real e imaginária pode ser expressa na forma matricial pela equação (5.2).

$$\begin{cases} y(t) \\ z(t) \end{cases} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix} \begin{cases} p(t) \\ \bar{p}(t) \end{cases} \quad (5.2)$$

Expandindo  $y(t)$  e  $z(t)$  em séries complexas de Fourier tem-se:

$$\begin{aligned} p(t) &= y(t) + i z(t) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \{ (Y_k e^{i\omega_k t} + \bar{Y}_k e^{-i\omega_k t}) + i (Z_k e^{i\omega_k t} + \bar{Z}_k e^{-i\omega_k t}) \} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \{ (Y_k + i Z_k) e^{i\omega_k t} + (\bar{Y}_k + i \bar{Z}_k) e^{-i\omega_k t} \} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \{ P_{f_k} e^{i\omega_k t} + P_{b_k} e^{-i\omega_k t} \} \end{aligned} \quad (5.3)$$

A equação (5.3) mostra que o movimento de um ponto no plano pode ser considerado como a superposição de vários movimentos harmônicos com diferentes frequências. Cada componente harmônica que contribui para o movimento resultante é um modo de vibração.

A equação (5.3) apresenta, também, que cada componente harmônica representada no plano arbitrário de movimento pode ser considerado como a composição de duas componentes independentes, sendo uma de rotação direta e outra de rotação retrógrada. Cabe salientar duas observações importantes que podem ser extraídas da equação (5.3):

- Com a formulação complexa, o termo  $e^{i\omega_k t}$  não é somente uma variável complexa, mas sim um vetor que está realmente em rotação no espaço físico de duas dimensões. O movimento harmônico linear em sistemas não rotativos é um caso particular onde as componentes rotativas diretas e retrógradas tem a mesma amplitude ( $|P_{f_k}| = |P_{b_k}|$ ;  $k = 0, 1, 2, \dots, \infty$ );
- A variável real  $y(t)$ , que define o movimento linear ao longo do eixo Y visto

na figura 5.1, pode ser considerada um caso particular onde as componentes assumem a seguinte condição ( $Y_k = \bar{Y}_k$  e  $Z_k = \bar{Z}_k = 0$ ;  $k = 0,1,2, \dots, \infty$ ).

Pelo exposto na equação (5.3), a descrição complexa dos modos naturais dos rotores é denotada por um movimento planar onde é composta por dois submodos: um de rotação direta e outro de rotação retrógrada. Em outras palavras, a vibração livre do ponto  $P$  será uma composição de dois movimentos circulares, com a mesma velocidade angular, ocorrendo em direções opostas, sendo a primeira na mesma direção da rotação própria do eixo (precessão direta) e o outro na direção oposta (precessão retrógrada).

Em todo o desenvolvimento deste trabalho, a velocidade de rotação própria do rotor será considerada positiva e o amortecimento interono será desconsiderado.

Analizando a questão sob o ponto de vista matemático, pode-se dizer que a relação entre  $|P_f|$  e  $|P_b|$  determina a direção do movimento de precessão, assim como sua órbita. A tabela 5.1 apresenta as relações entre  $|P_f|$  e  $|P_b|$  e os tipos de movimento, órbita e fator de amortecimento. Detalhes podem ser encontrados em Mesquita (2004).

Tabela 5.1 – Relações entre módulos  $|P_f|$  e  $|P_b|$  e tipos de movimento e órbitas.

<i>Relação</i>	<i>Precessão</i>	<i>Órbita</i>	<i>Amortecimento</i>
$ P_f  >  P_b $	Direta	Elíptica	Sim
$ P_f  <  P_b $	Retrógrada	Elíptica	Sim
$ P_f  =  P_b $	Retilínea	Circular	Não
$ P_f  \neq 0$ e $ P_b  = 0$	Direta	Circular	Não
$ P_f  = 0$ e $ P_b  \neq 0$	Retrógrada	Circular	Não

Baseado nestes resultados pode-se concluir de maneira clara, como já exposta pela própria equação (5.3), que o primeiro termo do lado direito representa uma componente de precessão direta, denotado pelo termo  $|P_f|$  e o segundo, uma componente de precessão



retrógrada, representado pelo termo  $|P_b|$ .

Nota-se, assim, que uma das grandes vantagens do uso de coordenadas direcionais no estudo da dinâmica de rotores é a possibilidade de se identificar claramente a direção dos movimentos de precessão, tanto no caso da resposta livre como na resposta forçada.

Analisando-se o movimento descrito por uma estação de um rotor em uma determinada frequência natural, obtém-se, pela equação (5.3), que a forma modal pode ser dada por:

$$p(t) = P_f e^{i\Omega t} + P_b e^{-i\Omega t} \quad (5.4)$$

Consideram-se agora as vibrações transversais de um rotor com  $n$  estações, de forma a permitir a análise pelo método dos elementos finitos, aplicando a transformação apresentada pela equação (5.1) para cada uma das estações e escrevendo o resultado na forma matricial, obtém-se:

$$\begin{Bmatrix} \{y(t)\} \\ \{z(t)\} \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} \{p(t)\} \\ \{\bar{p}(t)\} \end{Bmatrix} \quad (5.5)$$

Sendo que a matriz de transformação de coordenadas  $[T]$  e a sua inversa são dadas por:

$$[T] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} [I(n)] & [I(n)] \\ -i[I(n)] & i[I(n)] \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

$$[T]^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} [I(n)] & i[I(n)] \\ [I(n)] & -i[I(n)] \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

Sendo  $I(n)$  a matriz identidade de ordem  $N$ ,  $\{y(t)\}$  e  $\{z(t)\}$  vetores de ordem  $N \times 1$ .

A mesma transformação pode ser aplicada ao vetor de forças, conforme apresentada pela equação (5.8).

$$\begin{Bmatrix} \{f_y(t)\} \\ \{f_z(t)\} \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} \{g(t)\} \\ \{\bar{g}(t)\} \end{Bmatrix} \quad (5.8)$$

Seja  $\{q(t)\}$  o vetor de deslocamentos transversais de todas as estações do eixo:

$$\{q(t)\} = \begin{Bmatrix} \{y(t)\} \\ \{z(t)\} \end{Bmatrix} \quad (5.9)$$

Substituindo a equação (5.5) e a equação (5.9) na equação (4.1) e pré-multiplicando ambos os lados da equação resultante por  $[T]^{-1}$ , obtém-se que a equação de movimento para as coordenadas direcionais (subíndice  $c$ ) pode ser expressa por:

$$[M_c] \begin{Bmatrix} \{\ddot{p}\} \\ \{\dot{p}\} \end{Bmatrix} + [D_c(\Omega)] \begin{Bmatrix} \{\dot{p}\} \\ \{p\} \end{Bmatrix} + [K_c] \begin{Bmatrix} \{p\} \\ \{\bar{p}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{g\} \\ \{\bar{g}\} \end{Bmatrix} \quad (5.10)$$

Onde:

$$[M_c] = [T]^{-1}[M][T] \quad (5.11)$$

$$[D_c] = [T]^{-1}[D][T] \quad (5.12)$$

$$[K_c] = [T]^{-1}[K][T] \quad (5.13)$$

Da mesma forma como foi feito na equação (5.4), pode-se escrever o deslocamento modal de cada uma das estações do rotor em função dos submodos diretos e retrógrados.

$$\{p(t)\} = \{p_f(t)\} + \{p_b(t)\} = \{P_f\}e^{st} + \{P_b\}e^{\bar{s}t} \quad (5.14)$$

Onde:

$$s = i\omega \quad (5.15)$$

Calculando as derivadas de  $\{p(t)\}$  e de seu complexo conjugado com relação ao tempo e substituindo na equação (5.10), obtém-se dois problemas de autovalores de segunda ordem:

$$[s^2[M_c] + s[C_c] + [K_c]] \begin{Bmatrix} \{P_f\} \\ \{\bar{P}_b\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (5.16)$$

$$[s^2[M_c] + s[C_c] + [K_c]] \begin{Bmatrix} \{\bar{P}_f\} \\ \{P_b\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (5.17)$$

Onde  $\{0\}$  é um vetor nulo de dimensão  $2N$ .

Segundo Kessler (1999), a equação (5.16) e a equação (5.17), contêm as mesmas informações sobre os submodos  $P_f$  e  $P_b$  do sistema, sendo suficiente, assim, resolver apenas uma delas para obtê-los.

Na equação (5.14), os vetores  $\{p_f(t)\}$  e  $\{p_b(t)\}$  são os componentes diretos e retrógrados, respectivamente, dos deslocamentos nas  $N$  estações, já os vetores  $\{P_f\}$  e  $\{P_b\}$  são os componentes diretos e retrógrados dos modos.

A direção de precessão de um modo não pode ser conhecida apenas pelo sinal da parte imaginária dos autovalores da equação (5.16) já que estes aparecem em pares complexos conjugados. Entretanto, comparando as componentes dos submodos diretos e retrógrados, pode saber a direção dos movimentos de precessão.

Partindo do exemplo em estudo neste trabalho, ou seja, um sistema isotrópico sem amortecimento, o problema de autovalor pode ser escrito da seguinte forma:

$$\left( s^2 \begin{bmatrix} [M_{c1}] & [0] \\ [0] & [M_{c2}] \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} [D_{c1}] & [0] \\ [0] & [D_{c2}] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [K_{c1}] & [0] \\ [0] & [K_{c2}] \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} P_f \\ \bar{P}_b \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (5.18)$$

Os autovalores do sistema serão as raízes da equação característica obtida do determinante:

$$\det \left( s^2 \begin{bmatrix} [M_{c1}] & [0] \\ [0] & [M_{c2}] \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} [D_{c1}] & [0] \\ [0] & [D_{c2}] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [K_{c1}] & [0] \\ [0] & [K_{c2}] \end{bmatrix} \right) = 0 \quad (5.19)$$

Neste caso, a equação característica é um polinômio de ordem  $4N$  ( $N$  estações e 4 graus de liberdade por estação) cujas raízes incluem os modos diretos e retrógrados e os seus complexos conjugados.

Este problema de autovalor de ordem  $4N$  pode ser desmembrado em dois problemas

de autovalor de ordem  $2N$ :

$$(s^2[M_{c1}] + s[D_{c1}] + [K_{c1}])\{P_f\} + (s^2[0] + s[0] + [0])\{\bar{P}_b\} = \{0\} \quad (5.20)$$

$$(s^2[0] + s[0] + [0])\{P_f\} + (s^2[M_{c2}] + s[D_{c2}] + [K_{c2}])\{\bar{P}_b\} = \{0\} \quad (5.21)$$

Os autovalores do primeiro termo da equação (5.19) e do segundo termo da equação (5.20) são calculados, respectivamente, a partir de:

$$\det|(s^2[M_{c1}] + s[D_{c1}] + [K_{c1}])| = 0 \quad (5.22)$$

$$\det|(s^2[M_{c2}] + s[D_{c2}] + [K_{c2}])| = 0 \quad (5.23)$$

A equação (5.22) e a equação (5.23) fornecem duas equações características, neste caso, dois polinômios de ordem  $2N$ .

Quando  $s$  assumir valores que são raízes da equação (5.22), obtem-se da equação (5.20) que:

$$\begin{Bmatrix} \{P_f\} \\ \{\bar{P}_b\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{P_f\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (5.24)$$

Da mesma forma, quando  $s$  assumir valores que são raízes da equação (5.23), obtem-se da equação (5.20) que:

$$\begin{Bmatrix} \{P_f\} \\ \{\bar{P}_b\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{\bar{P}_b\} \end{Bmatrix} \quad (5.25)$$

Dessa maneira, conclui-se que, se o rotor for isotrópico e sem amortecimento interno, os modos do sistema serão puramente retrógrados, ou seja,  $\{P_f\} = \{0\}$ , ou puramente diretos,  $\{\bar{P}_b\} = \{0\}$ , Mesquita (2004).

Já para o caso de rotores anisotrópicos, os modos de precessão serão predominantemente diretos ou retrógrados. Assim, um modo será considerado direto se as componentes dos subvetores  $\{P_f\}$  e  $\{P_b\}$  seguirem a relação  $\{P_f\} > \{P_b\}$ , e será considerado

um modo retrógrado se seguirem a relação  $\{P_f\} < \{P_b\}$ .

Os resultados aqui apresentados demonstram que a formulação complexa, que trata da decomposição dos modos em submodos diretos e retrógrados, possibilitam uma melhor análise física dos movimentos de precessão, indicando a direção e o formato da órbita descrita por cada nó da estrutura naquele modo.

## 5.2 Vibração Forçada em Sistemas Rotativos

Aplicando-se forças externas a mesma transformação aplicada aos deslocamentos, o vetor de forças complexas também pode ser expresso em termos de seus componentes diretos e retrógrados, conforme apresentado na equação (5.26).

$$\{g(t)\} = \{g_f(t)\} + \{g_b(t)\} = \{G_f\}e^{st} + \{G_b\}e^{\bar{s}t} = \{G_f\}e^{j\omega t} + \{G_b\}e^{-j\omega t} \quad (5.26)$$

Considerando excitação e resposta harmônica, pode-se reescrever a equação (5.16) para o caso de vibrações forçadas, apresentada na equação (5.27).

$$[-\omega^2[M_c] + j\omega[C_c] + [K_c]] \begin{Bmatrix} \{P_f\} \\ \{\bar{P}_b\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{G_f\} \\ \{\bar{G}_b\} \end{Bmatrix} \quad (5.27)$$

Definindo-se,

$$[B(\omega)] = [-\omega^2[M_c] + j\omega[C_c] + [K_c]] \quad (5.28)$$

Tem-se que,

$$[B(\omega)] \begin{Bmatrix} \{P_f\} \\ \{\bar{P}_b\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{G_f\} \\ \{\bar{G}_b\} \end{Bmatrix} \quad (5.29)$$

E a relação entre os vetores de deslocamento e excitação é então descrita por:

$$\begin{Bmatrix} \{P_f\} \\ \{\bar{P}_b\} \end{Bmatrix} = [B(\omega)]^{-1} \begin{Bmatrix} \{G_f\} \\ \{\bar{G}_b\} \end{Bmatrix} = [H(\omega)] \begin{Bmatrix} \{G_f\} \\ \{\bar{G}_b\} \end{Bmatrix} \quad (5.30)$$

A matriz  $[H(\omega)]$  é a matriz das funções de resposta em frequência direcionais (dFRF) que relacionam excitações e respostas complexas.

Considerando excitações e respostas harmônicas e as suas transformadas de Laplace, tem-se, Souto (2000).

$$\begin{Bmatrix} \{PF(\omega)\} \\ \{\bar{P}B(\omega)\} \end{Bmatrix} = [H(\omega)] \begin{Bmatrix} \{GF(\omega)\} \\ \{\bar{G}B(\omega)\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [H_{PG}(\omega)] & [H_{P\bar{G}}(\omega)] \\ [H_{\bar{P}G}(\omega)] & [H_{\bar{P}\bar{G}}(\omega)] \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

As dFRF  $[H_{PG}(\omega)]$  e  $[H_{\bar{P}\bar{G}}(\omega)]$  são chamadas de dFRF normais e relacionam, respectivamente, excitações diretas com respostas diretas e excitações retrógradas com respostas retrógradas. Já as dFRF  $[H_{\bar{P}G}(\omega)]$  e  $[H_{P\bar{G}}(\omega)]$  são chamadas de dFRF reversas e relacionam, respectivamente, excitações retrógradas com respostas diretas e excitações diretas com respostas retrógradas, Lee (1991). Neste trabalho, somente as dFRF normais serão objeto de estudo, uma vez que as excitações serão na mesma direção da resposta.

A equação (5.10) que apresenta a equação do movimento em coordenadas direcionais pode ser reescrita na forma de equação de estado, conforme a equação (5.32).

$$[A_c]\{\dot{x}(t)\} - [B_c]\{x(t)\} = \{f(t)\} \quad (5.32)$$

Onde:

$$[A_c] = \begin{bmatrix} [0] & [M_c] \\ [M_c] & [C_c] \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

$$[B_c] = \begin{bmatrix} -[M_c] & [0] \\ [0] & [K_c] \end{bmatrix} \quad (5.34)$$

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} \{\dot{p}\} \\ \{\dot{\bar{p}}\} \\ \{p\} \\ \{\bar{p}\} \end{Bmatrix} \quad (5.35)$$

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \\ \{g\} \\ \{\bar{g}\} \end{Bmatrix} \quad (5.36)$$

Considerando forças externas e deslocamentos harmônicos, obtém-se da equação (5.32).

$$(s[A] + [B])\{X\} = \{F\} \quad (5.37)$$

Sendo  $\{X\}$  o autovetor e  $\{F\}$  o vetor de forças dados por:

$$\{X\} = \begin{Bmatrix} s \begin{Bmatrix} P_f \\ \bar{P}_b \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} P_f \\ \bar{P}_b \end{Bmatrix} \end{Bmatrix} \quad (5.38)$$

$$\{F\} = \begin{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} G_f \\ \bar{G}_b \end{Bmatrix} \end{Bmatrix} \quad (5.39)$$

Através da equação (5.37) obtem-se a resposta forçada como apresentada na equação (5.40). O subíndice  $c$  indica que as matrizes estão em coordenadas direcionais.

$$\{X\} = (s[A_c] - [B_c])^{-1}\{F\} \quad (5.40)$$

A equação (5.40) pode ser expressa para o caso de vibrações livres através da equação (5.41).

$$(s[A_c] - [B_c])\{X\} = \{0\} \quad (5.41)$$

Devido a não simetria das matrizes envolvidas no sistema, surgem então dois problemas de autovalor, como apresentado na equação (5.42) e equação (5.43).

$$(s_i[A_c] - [B_c])\{R\}_i = \{0\} \quad (5.42)$$

$$\{L\}_i^T (s_i[A_c] - [B_c]) = \{0\}^T \quad (5.43)$$

Os autovetores à direita e à esquerda são, respectivamente, Kessler (1999).

$$\{R\}_i = \begin{Bmatrix} \lambda_i \{r_i\} \\ \{r_i\} \end{Bmatrix} \quad (5.44)$$



$$\{L\}_i = \begin{Bmatrix} \lambda_i \{l_i\} \\ \{l_i\} \end{Bmatrix} \quad (5.45)$$

Sendo  $\{r_i\}$  e  $\{l_i\}$  os autovetores à direita e à esquerda, respectivamente, do problema de autovalores de segunda ordem, cujas equações são:

$$[-\omega^2[M_c] + j\omega[C_c] + [K_c]] \begin{Bmatrix} \{P_f\} \\ \{\bar{P}_b\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (5.46)$$

$$\begin{Bmatrix} \{L_f\}^T \\ \{\bar{L}_b\}^T \end{Bmatrix} [-\omega^2[M_c] + j\omega[C_c] + [K_c]] = \begin{Bmatrix} \{0\}^T \\ \{0\}^T \end{Bmatrix} \quad (5.47)$$

Onde:

$$\{r\}_i = \begin{Bmatrix} \{P_f\} \\ \{\bar{P}_b\} \end{Bmatrix}_i \quad (5.48)$$

$$\{l\}_i = \begin{Bmatrix} \{L_f\} \\ \{\bar{L}_b\} \end{Bmatrix}_i \quad (5.49)$$

A inversa da matriz de impedância dinâmica pode ser expandida em função dos autovetores à direita e à esquerda, segundo Kessler (1999), sendo  $s \neq \lambda_i$ .

$$(s[A_c] - [B_c])^{-1} = \sum_{i=1}^{4n} \frac{\{R\}_i \{L\}_i^T}{s - \lambda_i} = \sum_{i=1}^{4n} \frac{\begin{Bmatrix} \lambda_i \{r_i\} \\ \{r_i\} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda_i \{l_i\}^T \\ \{l_i\}^T \end{Bmatrix}}{s - \lambda_i} = \sum_{i=1}^{4n} \frac{\begin{bmatrix} \lambda_i^2 \{r_i\} \{l_i\}_i^T & \lambda_i \{r_i\} \{l_i\}_i^T \\ \lambda_i \{r_i\} \{l_i\}_i^T & \{r_i\} \{l_i\}_i^T \end{bmatrix}}{s - \lambda_i} \quad (5.50)$$

Utilizando as equações (5.50), (5.38) e (5.39), obtem-se a resposta forçada, apresentada pela equação (5.51), obtida em Kessler (1999).

$$\begin{Bmatrix} s \begin{Bmatrix} P_f \\ \bar{P}_b \end{Bmatrix} \\ \begin{Bmatrix} P_f \\ \bar{P}_b \end{Bmatrix} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^{4n} \frac{\begin{bmatrix} \lambda_i^2 \{r_i\} \{l_i\}_i^T & \lambda_i \{r_i\} \{l_i\}_i^T \\ \lambda_i \{r_i\} \{l_i\}_i^T & \{r_i\} \{l_i\}_i^T \end{bmatrix}}{s - \lambda_i} \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \\ \{G_f\} \\ \{\bar{G}_b\} \end{Bmatrix} \quad (5.51)$$

Considerando somente a parte relativa ao deslocamento, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \{P_f\} \\ \{\bar{P}_b\} \end{Bmatrix} = \left[ \sum_{i=1}^{4n} \frac{\{r\}_i \{l\}_i^T}{j\omega - \lambda_i} \right] \begin{Bmatrix} \{G_f\} \\ \{\bar{G}_b\} \end{Bmatrix} \quad (5.52)$$

## Capítulo 6

### Simulações Numéricas e Validação

Este capítulo está dividido em três partes. Na primeira parte, apresentam-se as considerações gerais para as simulações. Na segunda parte, efetua-se a validação da rotina computacional desenvolvida através da comparação com dois exemplos encontrados na bibliografia. Na terceira parte, efetua-se a comparação entre a análise modal complexa e a clássica, enfatizando as principais vantagens da análise em coordenadas direcionais.

#### 6.1 Considerações Gerais

As simulações numéricas realizadas nos sistemas estudados foram efetuadas através de uma rotina computacional implementada no software MATLAB ®.

Os dados de entrada geométricos das estruturas são obtidos através de um arquivo do tipo ASCII, manipulado em qualquer editor de texto. Os dados referentes ao tipo de material podem ser acessados diretamente na rotina computacional.

A tabela 6.1 apresenta as características do material utilizado nas simulações, onde em todas elas, o material utilizado foi o aço. A rotina computacional desenvolvida permite a obtenção dos valores das frequências naturais axiais, torsionais e de flexão, através de vetores específicos.

Tabela 6.1 - Dados mecânicos dos rotores para simulações.

Módulo de Young [N/m <sup>2</sup> ]	2,1 x 10 <sup>11</sup>
Módulo de Cisalhamento [N/m <sup>2</sup> ]	7,69 x 10 <sup>10</sup>
Massa específica [Kg/m <sup>3</sup> ]	7850

Os gráficos para o Diagrama de Campbell, Função Resposta em Frequência e Função Resposta em Frequência Direcional são gerados automaticamente, pode-se escolher

qual o tipo de gráfico acessando diretamente a rotina através do software MATLAB ®.

O sistema computacional desenvolvido pode ser dividido em três blocos. Inicialmente a rotina foi implementada através do método dos elementos finitos. A estrutura é discretizada somente ao longo de um eixo com segmentos orientados de forma crescente. As propriedades geométricas de cada elemento são calculadas e as matrizes de massa, rigidez e giroscópica são obtidas. Em seguida, o software faz o agrupamento e calcula a matriz global do sistema.

Com a matriz global na memória, efetua-se a vinculação do sistema, em todos os rotores estudados a estrutura é considerada engastada em uma extremidade e livre na outra. A rotação especificada no início do programa é aplicada à matriz giroscópica e os dados referentes à massa rígida na extremidade do rotor são processados e incluídos na matriz global do sistema.

Ao término do bloco de elementos finitos, efetua-se a transformação para o espaço estado e encontra-se a solução para as frequências naturais através do próprio MATLAB ®, onde são obtidos os autovalores e autovetores do autoproblema gerado.

Com os dados obtidos é possível traçar os gráficos para função resposta em frequência, frequências naturais axiais, torsionais e de flexão através da análise modal clássica.

A terceira parte do programa trata da análise modal complexa. Nesta parte, os efeitos axiais e torsionais são suprimidos da matriz global, para permitir o estudo somente das vibrações laterais do sistema.

Após a eliminação dos graus de liberdade referente aos efeitos axiais e torsionais, o sistema de equações é transformado para o sistema complexo, conforme visto no capítulo 4. Um novo autoproblema é gerado com uma nova matriz global, onde se utiliza o mesmo procedimento de solução através do MATLAB ® para resolver o problema e obter os autovalores e autovetores da estrutura, Kessler (1999).

A seguir podem-se traçar os gráficos da função resposta em frequência direcional para uma rotação específica ou em uma sequência de rotações com apresentação em gráficos 3D.

## 6.2 Resultados Comparados com a Bibliografia

A seguir estudam-se dois casos retirados da literatura para fins de validação do sistema construído através do software MATLAB ® com a metodologia clássica e complexa. No primeiro exemplo, estuda-se o caso de um rotor vertical flexível com seção transversal circular e extremidade livre. Já no segundo caso, estuda-se um mesmo tipo de rotor, porém, com uma massa circular rígida solidária em uma extremidade livre do rotor, onde foram obtidas as velocidades críticas e o diagrama de Campbell.

### 6.2.1 Eixo Rotativo com Extremidade Livre

Nesta simulação utilizou-se como referencial o trabalho de Alnaser (2002) onde o sistema é composto somente por um eixo rotativo circular flexível maciço de 10 m e 0,1 m de diâmetro com engastamento em uma extremidade e livre na outra.

Uma força de 1 N foi aplicada na extremidade livre na direção perpendicular ao eixo rotativo, conforme visto na figura 6.1. A tabela 6.1 apresenta os dados materiais para o rotor em estudo. A estrutura foi discretizada em 10 elementos.

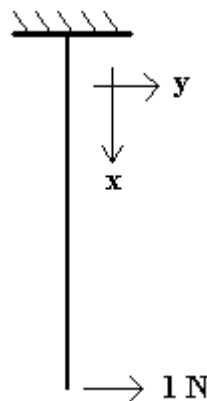


Figura 6.1 – Viga simples em balanço.

Os resultados apresentados na tabela 6.2 e 6.3 apresentam boa precisão em comparação com a solução exata e com as obtida através do estudo de Alnaser (2002) e dos dados referentes ao Ansys ®, também extraídos de Alnaser (2002).

Em seguida, foram efetuadas simulações com o eixo estacionário e sem efeito

gravitacional para permitir a comparação com o software Ansys ®, obtidos por Alnaser (2002).

Prosseguindo a análise, foram efetuadas simulações para o eixo estacionário com o efeito gravitacional e por último com o eixo rotativo com 10,47 rad/s.

A tabela 6.2 apresenta os valores para as frequências naturais de flexão no eixo y, as quais são as mesmas no eixo z, uma vez que o sistema é simétrico.

Tabela 6.2 - Frequências naturais de vibração lateral.

<i>Tipo</i>	<i>Comparações</i>	$F_1$ (rad/s)	$F_2$ (rad/s)	$F_3$ (rad/s)	$F_4$ (rad/s)
Eixo não rotativo (sem gravidade)	Solução Exata	4,5458	28,4910	79,7820	156,3400
	Ansys ® (Alnaser 2002)	4,5459	28,4740	79,6770	156,0600
	Alnaser (2002)	4,5463	28,4897	79,7785	156,4111
	<b>MEF</b>	<b>4,5462</b>	<b>28,4880</b>	<b>79,7710</b>	<b>156,3990</b>
Eixo não rotativo (com gravidade)	Alnaser (2002)	4,8605	28,8949	80,0996	156,6978
	<b>MEF</b>	<b>4,8592</b>	<b>28,8910</b>	<b>80,0900</b>	<b>156,6700</b>
Eixo rotativo 10,47 (rad/s)	Alnaser (2002) (Direto)	4,1161	28,1392	79,4156	156,1155
	Alnaser (2002) (Retrógrado)	5,7395	29,6709	80,7896	157,2824
	<b>MEF (Direto)</b>	<b>4,8592</b>	<b>28,8920</b>	<b>80,0930</b>	<b>156,6800</b>
	<b>MEF (Retrógrado)</b>	<b>6,7577</b>	<b>29,3020</b>	<b>80,2410</b>	<b>156,7700</b>

A tabela 6.3 apresenta as frequências naturais axiais e torsionais para a estrutura, utilizando a metodologia de análise modal clássica, já que na análise modal complexa, foram desprezados os graus de liberdade axiais e torsionais da estrutura.

Tabela 6.3 - Frequências naturais de vibração torcional e axial.

<i>Modo</i>	<i>Comparações</i>	$F_1(rad/s)$	$F_2(rad/s)$	$F_3(rad/s)$	$F_4(rad/s)$
Torcional	Solução Exata	491	1475	2458	3442
	Ansys ® Alnaser (2002)	492	1489	2522	3616
	<b>MEF</b>	<b>492</b>	<b>1489</b>	<b>2522</b>	<b>3616</b>
Axial	Solução Exata	812	2437	4062	5687
	Ansys ® Alnaser (2002)	813	2460	4167	5976
	<b>MEF</b>	<b>813</b>	<b>2460</b>	<b>4167</b>	<b>5976</b>

Dentro deste mesmo exemplo de viga simples, comprova-se que os deslocamentos laterais, apresentados na tabela 6.4, estão com margem de erro inferior a 0,1% da solução exata e pela obtida no Ansys ®.



Tabela 6.4 – Deslocamentos laterais da viga no eixo y.

<i>x [m]</i>	<i>Exata</i>	<i>ANSYS</i> ®	<i>MEF Complexo</i>
	<i>Alnaser (2002)</i>	<i>Alnaser (2002)</i>	
0,00	0,00	0,00	0,00
1,00	4,688510E-06	4,692100E-06	4,688755E-06
2,00	1,810730E-05	1,811500E-05	1,810830E-05
3,00	3,928640E-05	3,929800E-05	3,928853E-05
4,00	6,725580E-05	6,727300E-05	6,725938E-05
5,00	1,010450E-04	1,010700E-04	1,010508E-04
6,00	1,396850E-04	1,397100E-04	1,396926E-04
7,00	1,822050E-04	1,822400E-04	1,822147E-04
8,00	2,276350E-04	2,276700E-04	2,276471E-04
9,00	2,750050E-04	2,750500E-04	2,750197E-04
10,00	3,233450E-04	3,234000E-04	3,233624E-04

## 6.2.2 Eixo Rotativo com Disco Rígido na Extremidade Livre

Nesta simulação utilizou-se como referência o rotor estudado por Alamo (2003). O modelo em análise consiste em um rotor vertical flexível com uma extremidade engastada e outra livre com um disco rígido preso solidariamente ao eixo rotativo. A tabela 6.4 apresenta os dados de entrada para simulação do rotor e a figura 6.2 o desenho esquemático do modelo utilizado para esta simulação.

Tabela 6.4 - Dados mecânicos do rotor para simulação, Alamo (2003).

<i>Disco rígido</i>	
Massa [Kg]	2,46
Raio [m]	0,05
Espessura [m]	0,04
Momento de inércia diametral de massa [Kg.m <sup>2</sup> ]	1,87 x 10 <sup>-3</sup>
Momento de inércia polar de massa [Kg.m <sup>2</sup> ]	3,08 x 10 <sup>-3</sup>
<i>Eixo circular maciço</i>	
Diâmetro [m]	8,0x10 <sup>-3</sup>
Comprimento [m]	0,62
Momento de inércia de área [Kg.m <sup>4</sup> ]	0,2 x 10 <sup>-9</sup>
Módulo de Young [N/m <sup>2</sup> ]	2,1 x 10 <sup>11</sup>
Massa específica [Kg/m <sup>3</sup> ]	7850

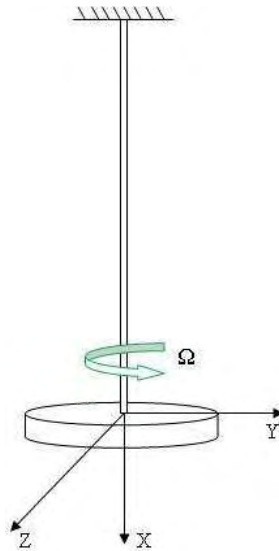


Figura 6.2 - Modelo do sistema rotativo para simulação.

A solução do problema através da modelagem apresentada leva a dois importantes resultados para o sistema mecânico, os autovalores e autovetores. Considerando o sistema subamortecido, os autovalores se apresentam em números complexos, onde a parte imaginária indica a frequência natural e a parte real o fator de amortecimento. Os autovetores por sua vez trazem as informações sobre os modos próprios de vibrar.

Os sistemas rotativos experimentam situações de risco quando operam em certas velocidades de rotação chamadas velocidades críticas. A velocidade é considerada crítica quando esta se iguala a alguma das frequências naturais do sistema, que por sua vez dependem da velocidade de rotação. Para encontrar as velocidades críticas, traçam-se as frequências naturais obtidas através do simulador com a velocidade de rotação do disco, neste mesmo gráfico, traça-se a linha  $\omega_n = \Omega$ . Determina-se as velocidades críticas onde os pontos  $\omega_n = \Omega$  interseptom a curva de frequências naturais.

O diagrama representando na figura 6.3 apresenta os resultados obtidos com o modelo estudado utilizando a formulação com coordenadas direcionais e a figura 6.4 os resultados apresentados por Alamo (2003).

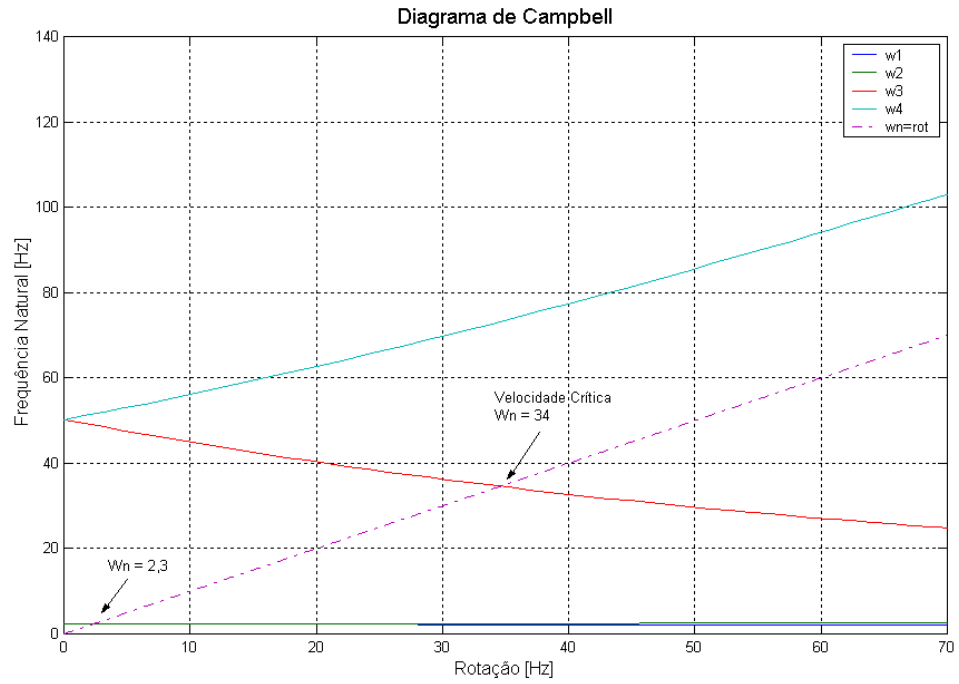


Figura 6.3 - Diagrama de Campbell e velocidade crítica obtida com a formulação complexa.

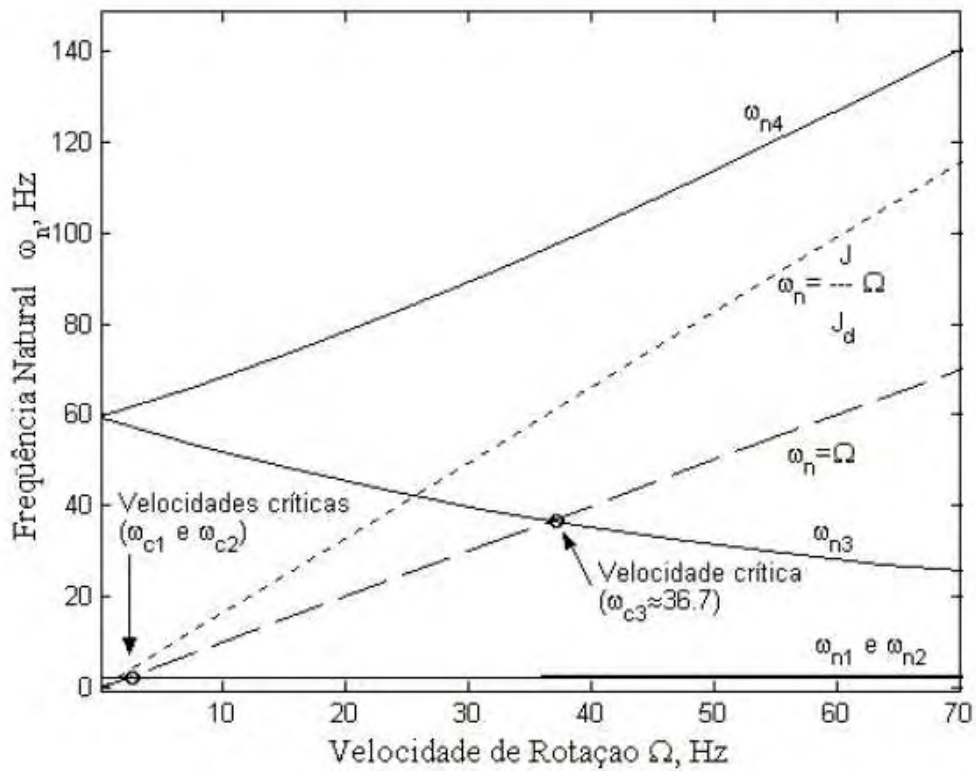


Figura 6.4 - Diagrama de Campbell e velocidade crítica, Alamo (2003).

Para um sistema não rotativo ( $\Omega = 0$ ) os modos próprios de vibrar são compostos por dois modos, conforme figura 6.5. Quando o sistema gira, estes dois modos continuam a existir, mas cada um deles é separado em outros dois, sendo um direto e outro retrógrado. A figura 6.3 apresenta a variação das quatro frequências naturais  $w_1$ ,  $w_2$ ,  $w_3$  e  $w_4$  com a velocidade de rotação  $\Omega$  do sistema rotativo, assim como os pontos das velocidades críticas.

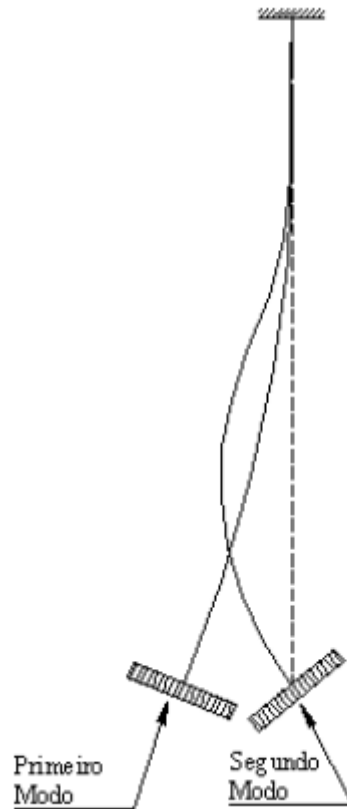


Figura 6.5 – Modos de vibração em um sistema estático, Alamo (2003).

As velocidades críticas  $w_{c1}$ ,  $w_{c2}$  correspondem ao movimento de precessão retrógrada e direta, respectivamente, no primeiro modo de vibração, e a velocidade crítica  $w_{c3}$  corresponde ao movimento de precessão retrógrada no segundo modo de vibração, conforme dados numéricos apresentados na tabela 6.5.

Tabela 6.5 - Velocidades críticas obtidas com a formulação coordenadas direcionais.

<i>Velocidade Crítica (Hz)</i>			<i>Precessão</i>	<i>Modo de Vibração</i>
<i>Freq</i>	<i>MEF</i>	<i>Alamo (2003)</i>		
$\omega_{c1}$	<b>2,3</b>	2,27	Retrógrada	Primeiro
$\omega_{c2}$	<b>2,3</b>	2,29	Direta	Primeiro
$\omega_{c3}$	<b>34,0</b>	36,7	Retrógrada	Segundo
$\omega_{c4}$	<b>Não existe</b>	Não existe	Direta	Segundo

No diagrama de Campbell observa-se que  $w_{c4}$  não existe, além disso,  $w_{c1}$  e  $w_{c3}$  na realidade são “falsas velocidades críticas”. Portanto, somente existirá a velocidade crítica  $w_{c2} = 2,3 \text{ Hz}$  do primeiro modo direto, Alamo (2003).

As frequências naturais  $w_1$  e  $w_2$  estão praticamente sobre retas horizontais, ou seja, elas variam muito pouco com a velocidade de rotação. Isto significa que o efeito giroscópico concentra-se principalmente no segundo modo de vibração, enquanto que o primeiro modo pode ser praticamente analisado por um modelo simplificado que não inclui os ângulos de nutação do disco rígido. O valor da frequência natural estática do sistema rotativo para o primeiro modo  $w_0$ , ou seja, com rotação zero ( $\Omega = 0$ ) é de 2.3 Hz e para o segundo modo, a frequência natural estática é 50 Hz.

### 6.3 Resultados Comparando Análise Modal Clássica e Complexa

De forma a estabelecer uma comparação direta entre os dois métodos de análise modal da estrutura, toma-se como exemplo o rotor apresentado na figura 6.2 com a configuração vista na tabela 6.4. Efetua-se inicialmente uma simulação com uma rotação constante de 400 rad/s e em seguida uma nova simulação com 100 rad/s.

As principais vantagens da análise modal complexa são apresentadas, além da comprovação do funcionamento do software para ambas as formulações, já que elas devem apresentar as mesmas frequências naturais.

A tabela 6.6 apresenta os parâmetros modais obtidos através da formulação da análise modal complexa com velocidade de rotação constante de 400 rad/s.

Diferentemente do que acontece quando se utiliza coordenadas reais na modelagem, onde é preciso pós processar os vetores modais de forma a identificar os modos de precessão, a formulação complexa já fornece este resultado de forma muito clara. Para isso, basta comparar o módulo das componentes diretas e retrógradas dos vetores modais. Além disso, pode-se obter a forma da órbita.

Tabela 6.6 - Resultados com MEF e análise modal clássica e complexa.

<b><i>Movimento Precessão</i></b>	
Direto	Retrógrado
<b><i>Órbita</i></b>	
Circular	Circular
<b><i>Autovalores Análise Modal Clássica [rad/s]</i></b>	
0 + 15.889 i	0 + 13.065 i
<b><i>Frequências Naturais Análise Modal Clássica [Hz]</i></b>	
2.54	2.09
<b><i>Autovalores Análise Modal Complexa [rad/s]</i></b>	
0 + 15.889 i	0 + 13.065 i
<b><i>Frequências Naturais Análise Modal Complexa [Hz]</i></b>	
2.54	2.09
<b><i>Vetores modais à direita { Pf<sub>1</sub> Pf<sub>2</sub> Pb<sub>1</sub> Pb<sub>2</sub> }<sup>T</sup></i></b>	
0.025454	0.00
0.057424	0.00
0.00	0.027662
0.00	0.071127

A figura 6.6 estabelece uma comparação com a análise modal clássica e a complexa no rotor apresentado na tabela 6.4, sob a aplicação de várias velocidades de rotação e excitação na lateral da extremidade livre do rotor.

Pode-se perceber a distinção clara dos picos de precessão direta e retrógrada como o aumento da velocidade nas curvas da função resposta em frequência direcional. Neste mesmo gráficos, utiliza-se a curva através da FRF e da dFRF normal.



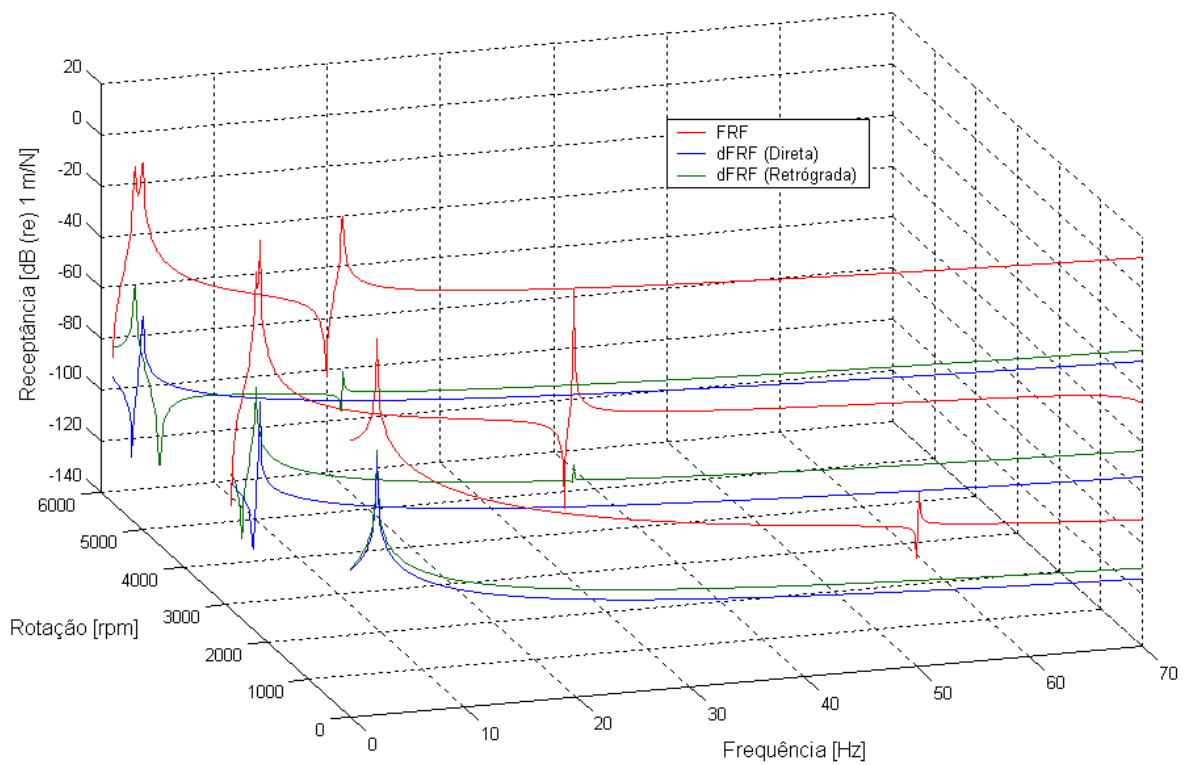


Figura 6.6 - Análise modal clássica (FRF) e direcional (dFRF).

A tabela 6.7 apresenta os autovalores para ambas as formulações extraídas diretamente da rotina computacional construída em MATLAB ®. Podem-se comprovar, como esperado, os mesmos autovalores após a transformação para as coordenadas direcionais.

Tabela 6.7 – Autovalores para análise modal clássica e complexa.

<i>Análise Modal (Autovalores)</i>	
<i>Clássica</i>	<i>Direcional</i>
0 + 263.07i	0 + 263.07i
0 - 263.07i	0 - 263.07i
0 + 14.854i	0 + 14.854i
0 - 14.854i	0 - 14.854i
0 + 14.143i	0 + 14.143i
0 - 14.143i	0 - 14.143i

A figura 6.7 apresenta uma comparação entre a análise modal clássica e direcional para o mesmo rotor em estudo para uma rotação constante de 100 rad/s e excitação na lateral da extremidade livre, nela verificam-se de maneira bem clara a distinção entre as direções de precessão através da análise modal complexa.

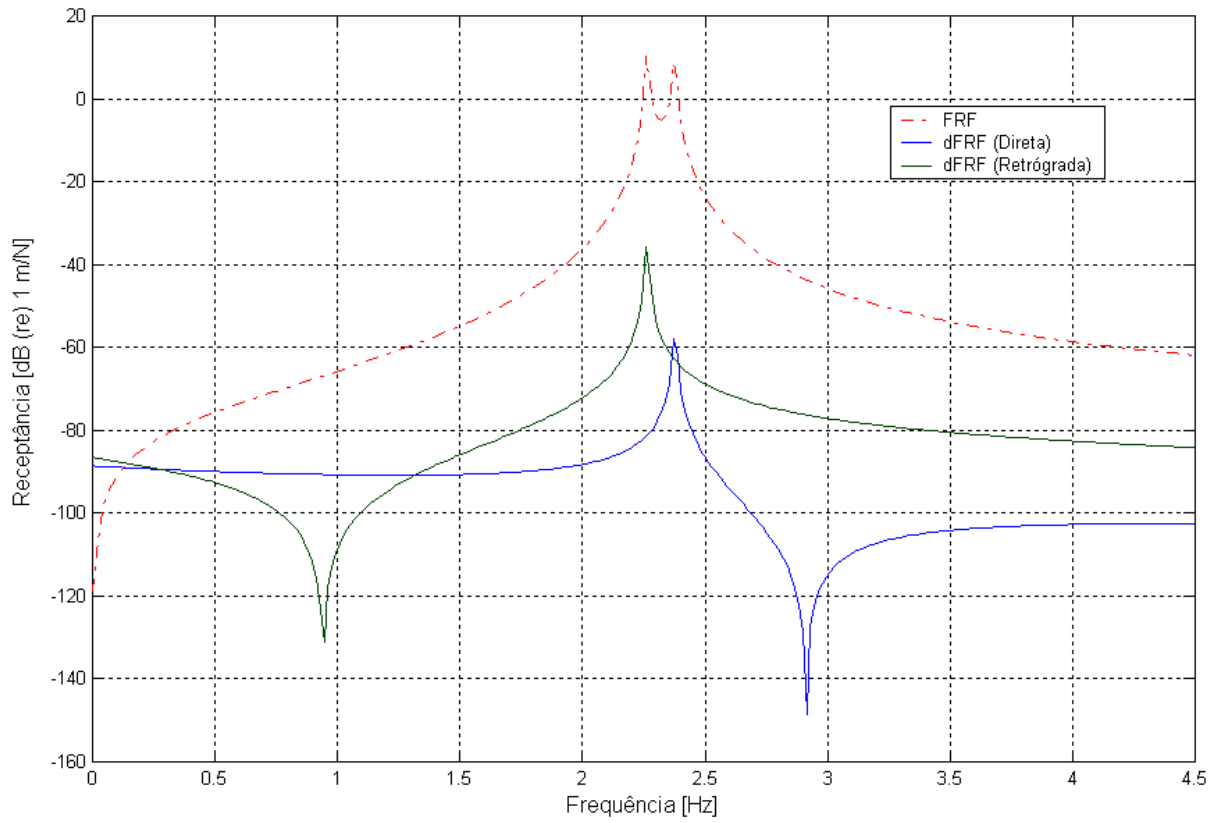


Figura 6.7 - Análise modal clássica (FRF) e direcional (dFRF) para rotação constante de 100 rad/s.

## Capítulo 7

### Estudo para um Rotor Vertical em Balanço

Com o intuito de apresentar os conceitos estudados nas seções anteriores e efetuar uma aplicação com o sistema de elementos finitos desenvolvido, desenvolve-se o estudo para um rotor vertical flexível em balanço. Será tomado como exemplo uma coluna de perfuração típica de poços de petróleo. Serão utilizadas a análise modal clássica e a análise modal complexa de forma a comparar as mesmas por meio de gráficos de função de resposta forçada para uma excitação lateral na extremidade do rotor. As frequências naturais axiais e torsionais serão obtidas primeiramente através da formulação clássica da análise modal. Em seguida, através da análise modal complexa, serão extraídas as frequências naturais laterais e comparadas com os resultados obtidos pela análise modal clássica.

#### 7.1 Discretização e Configuração do Rotor

O exemplo do rotor em estudo trata-se de uma coluna de perfuração de poço de petróleo. A modelagem segue as hipóteses já especificadas nas seções iniciais, portanto, simplificações foram necessárias para permitir a sua utilização.

Uma coluna de perfuração pode ser considerada como um pêndulo rotativo em balanço onde em sua extremidade há uma broca de diâmetro maior que a coluna em que a mesma está conectada.

A parte inferior do rotor, chamada pela literatura de petróleo como BHA (*Bottom Hole Assembly*) é formada pela broca e equipamentos tubulares de maior rigidez, de forma a prover peso suficiente para permitir o apoio e manter toda a coluna em estado de tração e evitar a sua flambagem.

No rotor em estudo, o BHA possui comprimento de 318 m e o restante é composto por tubos de menor diâmetro no total de 3182 m. Percebe-se claramente que o BHA possui na faixa de 10% do comprimento total do rotor. Assim, a discretização será maior no trecho do BHA e menor no conjunto superior, dito de menor rigidez.

Cabe lembrar que o sistema será considerado todo sob tração, ou seja, o conjunto estará suspenso através do engastamento em uma extremidade e na outra extremidade será

acoplado um disco rígido, no caso desta modelagem a broca de perfuração.

As operações normais de perfuração exigem que a broca, ou extremidade do rotor, fique apoiada no fundo, no entanto, nesta análise, procede-se com a broca fora do fundo, ou seja, sem apoio. A operação é conhecida como backreaming é relativamente normal em operações de perfuração, consiste em retirar a coluna do fundo com rotação. Este tipo de operação concentra os maiores problemas de vibrações de colunas de perfuração, Yarim et al (2008).

Será considerado o aço com material em todos os elementos onde as propriedades físicas encontram-se relacionadas na tabela 6.1. Todos os elementos serão considerados tubulares e a broca será modelada como um disco rígido na extremidade livre do rotor.

A figura 7.1 apresenta a discretização do rotor. Conforme pode ser visto, alguns elementos do BHA foram agrupados por serem compostos de propriedades geométricas semelhantes. Os elementos de 2 a 7 compõe o BHA da coluna e o elemento 1 os tubos de menor diâmetro que fazem a ligação do BHA com a superfície, na literatura do petróleo, são chamados de *drill pipes*. O elemento 1 ou os chamados *drill pipes* podem ser discretizados em outros elementos de modo a refinar o resultado numérico, critério natural empregado no método dos elementos finitos. A figura 7.1 exhibe uma forma mais simples de discretização, focando, principalmente, na seção mais rígida da estrutura.

O Apêndice A apresenta maior detalhamento sobre a quantidade ideal de elementos a ser utilizada para obtenção de resultados com precisão adequada.

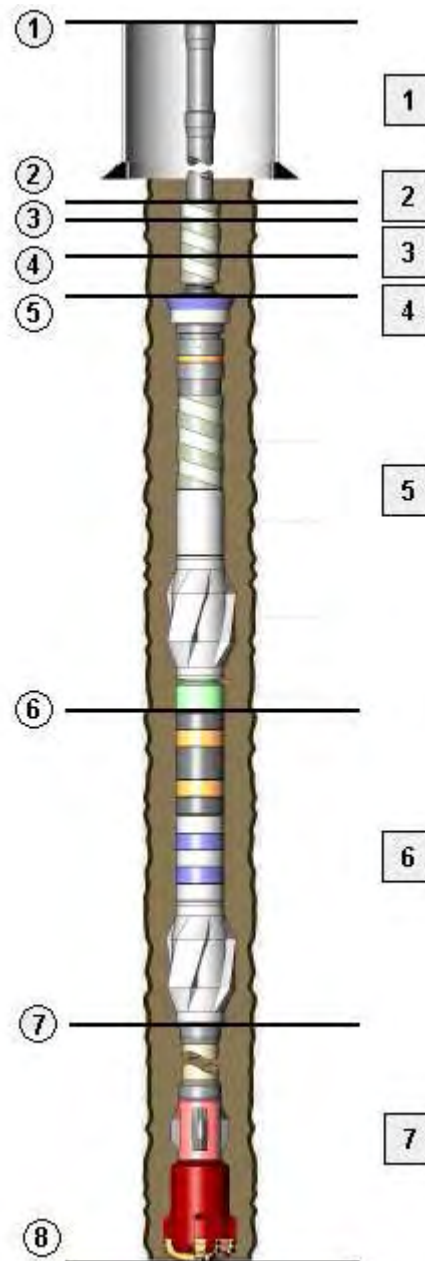


Figura 7.1 – Discretização da coluna de perfuração, LandMark ®.

A tabela 7.1 apresenta uma das discretizações utilizadas neste trabalho contendo 9 elementos. As demais discretizações utilizadas para as simulações consistem em dividir em um número maior de elementos os nós entre 1 e 4, onde estão alocados os *drill pipes*, ou seja, o conjunto de elementos compostos entre os nós 4 e 10 serão mantidos constantes, já que estes pertencem ao BHA, seção de maior rigidez na estrutura rotativa.

Tabela 7.1 – Dados de entrada para a coluna de perfuração.

Elemento	Nó	Coord X (m)	Compr. do Elemento (m)	Diâmetro Interno (m)	Diâmetro Externo (m)	Coluna Perfuração
1	1	0,00	1060,82	0,1086	0,1270	TOP DRIVE (engastamento) / DP 5"
	2	1060,82				
2	3	2121,65	1060,83	0,1086	0,1270	DP 5"
3	4	3182,48	1060,83	0,1086	0,1270	DP 5"
4	5	3209,24	26,76	0,0762	0,1270	3 HWDP 5"
5	6	3293,85	84,61	0,0732	0,1715	9 DC 6.3/4"
6	7	3404,00	110,15	0,0762	0,1270	12 HWDP 5"
7	8	3475,47	71,47	0,0762	0,2032	FS / STAB / KM / PBL / 5 DC 8" / DJAR / XO
8	9	3490,02	14,55	0,0488	0,2032	LWD 8" / MWD 8"
9	10	3500,00	9,98	0,0605	0,2446	RSS 9,63" / BROCA 12.1/4"

## 7.2 Análise Modal

A tabela 7.2 apresenta os resultados para as dez primeiras frequências naturais da coluna de perfuração através da formulação de análise modal clássica. Foram obtidas as frequências naturais axiais, torcional e laterais com discretização por 30 elementos finitos distribuídos em 31 nós, sendo compostos por 354 graus de liberdade após a vinculação da estrutura.

Tabela 7.2 – Resultados frequência natural axial e torcional para coluna de perfuração.

<i>Frequência Natural</i>	<i>Axial</i>	<i>Torcional</i>
	<i>[rad/s]</i>	
F1	1,7318	0,9402
F2	5,8566	3,4121
F3	10,5860	6,2961
F4	15,5340	9,2835
F5	20,5850	12,2890
F6	25,6900	15,1860
F7	30,7290	17,5920
F8	35,2690	19,8330
F9	39,0300	22,7590
F10	43,6050	26,0440

A tabela 7.3 apresenta os resultados para as frequências naturais laterais obtidas com a análise modal complexa, inicialmente com a coluna parada (estática) e em seguida para velocidades de operação de 100, 300 e 500 rpm. Percebe-se que somente nos últimos modos de vibrar a precessão retrógrada torna-se visível. Os primeiros modos não apresentam diferença entre precessão direta e retrógrada, uma vez que não há desbalanceio e o efeito giroscópico é desprezível. Já para os modos maiores o efeito giroscópico é determinante para permitir o efeito retrógrado.

Tabela 7.3 – Resultados frequência natural lateral para coluna de perfuração.

Tipo	Estático		100 rpm		300 rpm		500 rpm	
	[rad/s]	[Hz]	[rad/s]	[Hz]	[rad/s]	[Hz]	[rad/s]	[Hz]
R	0,0312	0,0050	0,0312	0,0050	0,0312	0,0050	0,0312	0,0050
D	0,0312	0,0050	0,0312	0,0050	0,0312	0,0050	0,0312	0,0050
R	0,1398	0,0224	0,1398	0,0224	0,1398	0,0224	0,1398	0,0224
D	0,1398	0,0224	0,1398	0,0224	0,1398	0,0224	0,1398	0,0224
R	0,2722	0,0435	0,2722	0,0435	0,2722	0,0435	0,2721	0,0435
D	0,2722	0,0435	0,2722	0,0435	0,2722	0,0435	0,2722	0,0435
R	0,3766	0,0603	0,3766	0,0603	0,3766	0,0603	0,3766	0,0603
D	0,3766	0,0603	0,3766	0,0603	0,3766	0,0603	0,3766	0,0603
R	0,5758	0,0921	0,5758	0,0921	0,5758	0,0921	0,5758	0,0921
D	0,5758	0,0921	0,5758	0,0921	0,5758	0,0921	0,5758	0,0921
R	0,8275	0,1324	0,8274	0,1324	0,8274	0,1324	0,8274	0,1324
D	0,8275	0,1324	0,8275	0,1324	0,8275	0,1324	0,8275	0,1324
R	1,3296	0,2127	1,3296	0,2127	1,3296	0,2127	1,3295	0,2127
D	1,3296	0,2127	1,3296	0,2127	1,3296	0,2127	1,3296	0,2127
R	4,0178	0,6428	4,0177	0,6428	4,0175	0,6428	4,0173	0,6428
D	4,0178	0,6428	4,0179	0,6429	4,0181	0,6429	4,0183	0,6429
R	5,1833	0,8293	5,1832	0,8293	5,1828	0,8292	5,1825	0,8292
D	5,1833	0,8293	5,1835	0,8294	5,1838	0,8294	5,1841	0,8295
R	6,5966	1,0555	6,5964	1,0554	6,5960	1,0554	6,5957	1,0553
D	6,5966	1,0555	6,5968	1,0555	6,5971	1,0555	6,5975	1,0556
R	8,5420	1,3667	8,5416	1,3667	8,5409	1,3665	8,5402	1,3664
D	8,5420	1,3667	8,5423	1,3668	8,5430	1,3669	8,5438	1,3670
R	10,9050	1,7448	10,9040	1,7446	10,9030	1,7445	10,9020	1,7443
D	10,9050	1,7448	10,9060	1,7450	10,9070	1,7451	10,9080	1,7453
R	13,6410	2,1826	13,6400	2,1824	13,6370	2,1819	13,6340	2,1814
D	13,6410	2,1826	13,6430	2,1829	13,6460	2,1834	13,6490	2,1838
R	18,4290	2,9486	18,4270	2,9483	18,4230	2,9477	18,4190	2,9470
D	18,4290	2,9486	18,4310	2,9490	18,4350	2,9496	18,4390	2,9502
R	26,1200	4,1792	26,1150	4,1784	26,1050	4,1768	26,0960	4,1754
D	26,1200	4,1792	26,1250	4,1800	26,1340	4,1814	26,1440	4,1830
R	52,7640	8,4422	52,7450	8,4392	52,7050	8,4328	52,6650	8,4264
D	52,7640	8,4426	52,7850	8,4456	52,8250	8,4520	52,8660	8,4586
R	113,1600	18,1008	113,0900	18,0944	113,0100	18,0816	112,9200	18,0672
D	113,1500	18,1040	113,1800	18,1088	113,2600	18,1216	113,3500	18,1360
R	301,8300	48,2928	301,5900	48,2544	301,0300	48,1648	300,4800	48,0768
D	301,8300	48,3040	302,1500	48,3440	302,7000	48,4320	303,2700	48,5232



A figura 7.2 apresenta o gráfico da função de resposta em frequência para a coluna de perfuração. Neste caso estuda-se o nó na extremidade livre do eixo rotativo com 100 rpm, neste exemplo, a broca de perfuração. Aplica-se uma força excitadora no eixo y e mede-se a resposta na mesma direção.

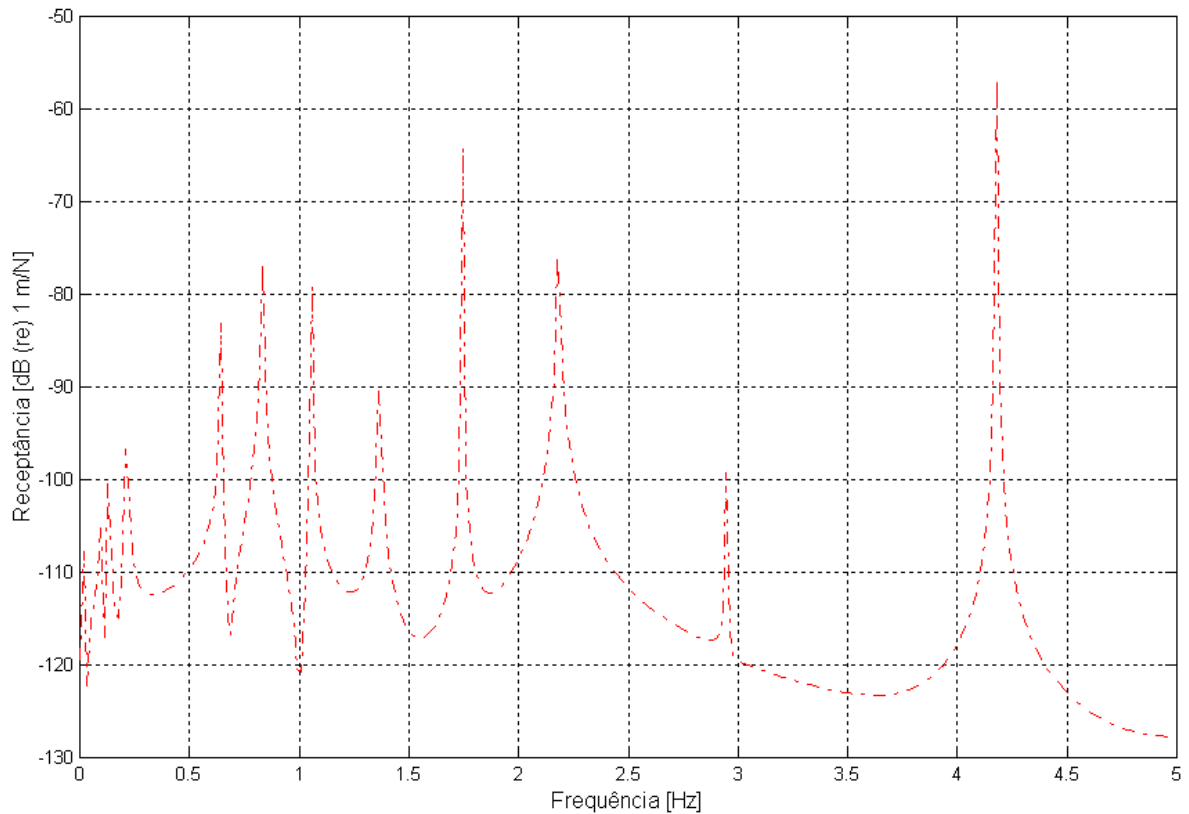


Figura 7.2 – Função de resposta em frequência (FRF) para coluna de perfuração.

A análise modal complexa é efetuada para a mesma coluna de perfuração. No entanto, serão eliminados os graus de liberdade correspondentes ao eixo normal e ao giro, excluindo das matrizes globais os efeitos axiais e torsionais, uma vez que somente os efeitos de flexão serão estudados.

A Figura 7.3 apresenta os gráficos gerados através do software implementado com a função de resposta em frequência (FRF) e a função de resposta em frequência direcional normal (dFRF).

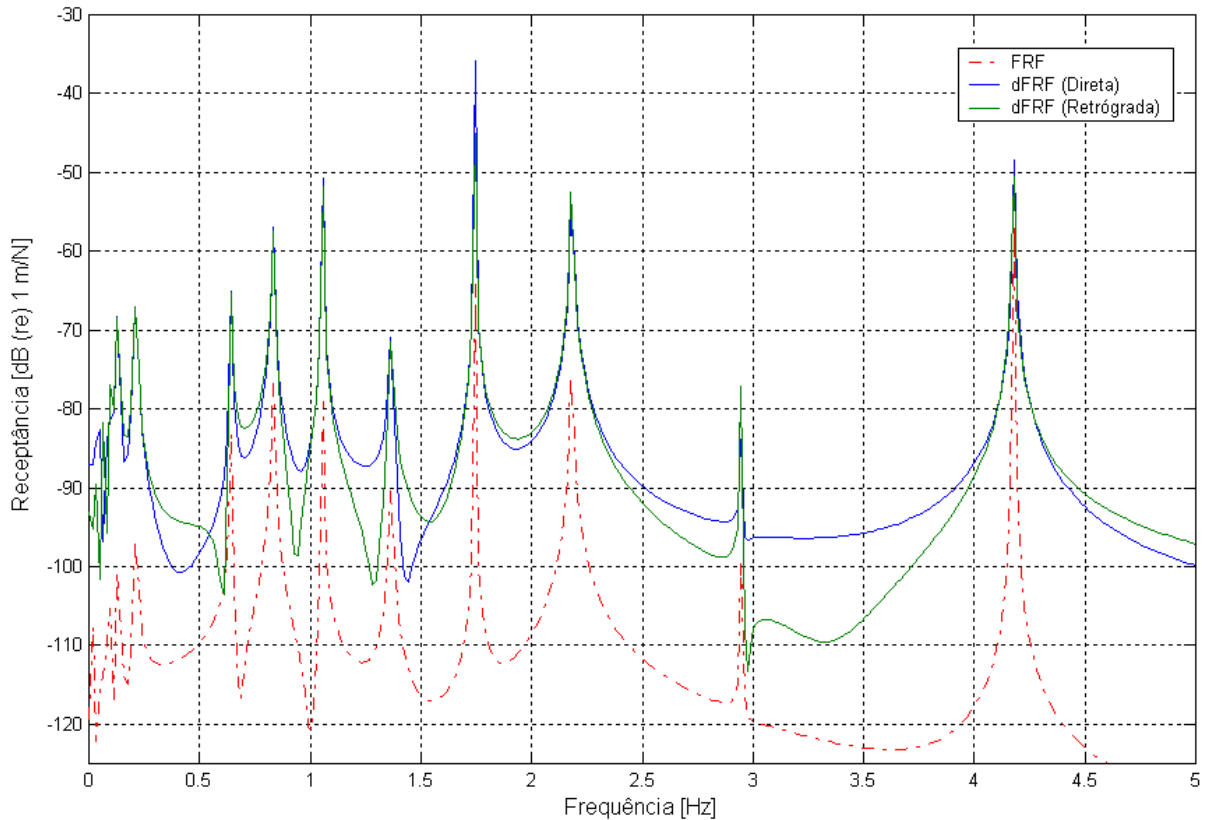


Figura 7.3 – Função de resposta em frequência direcional normal (dFRF) e função de resposta em frequência (FRF) para coluna de perfuração.

Como pode ser visto na figura 7.4, as frequências através das duas formulações se apresentam de forma coerente. Entretanto a grande vantagem da utilização da análise modal complexa reside no fato de que esta apresenta de forma muito clara os efeitos da precessão direta e retrógrada, inseridos no gráfico separadamente.

A figuras 7.5 e 7.6 apresentam uma comparação entre as FRF e a dFRF normais focando cada tipo de movimento de precessão.

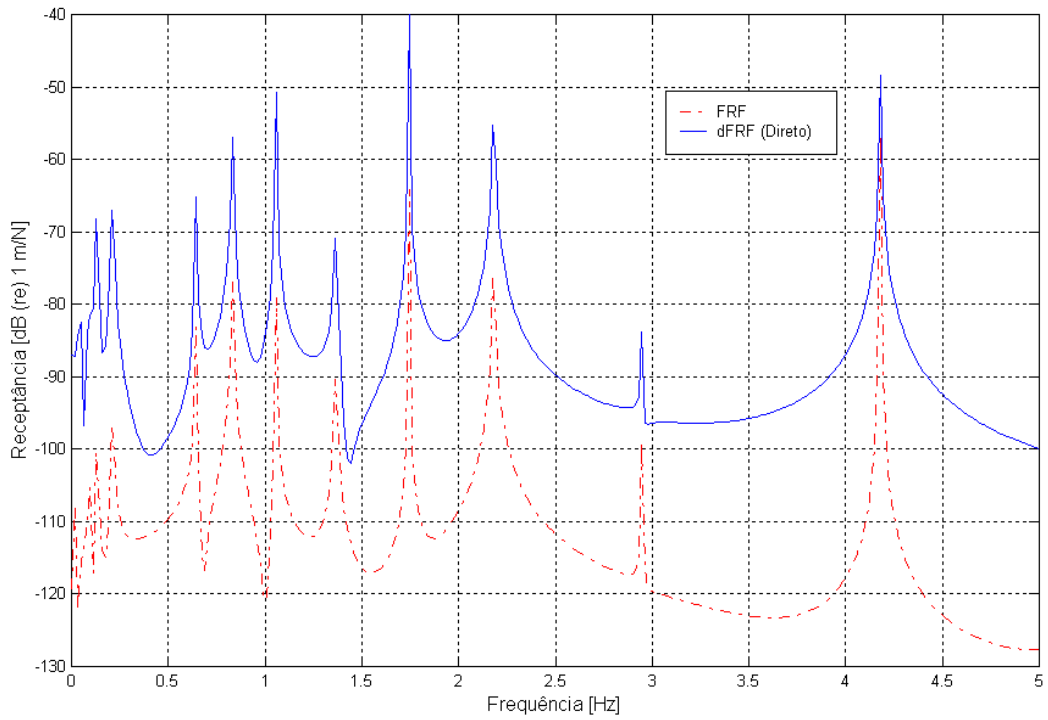


Figura 7.4 – Função de resposta em frequência direcional (dFRF) direta e função de resposta em frequência (FRF) para coluna de perfuração.

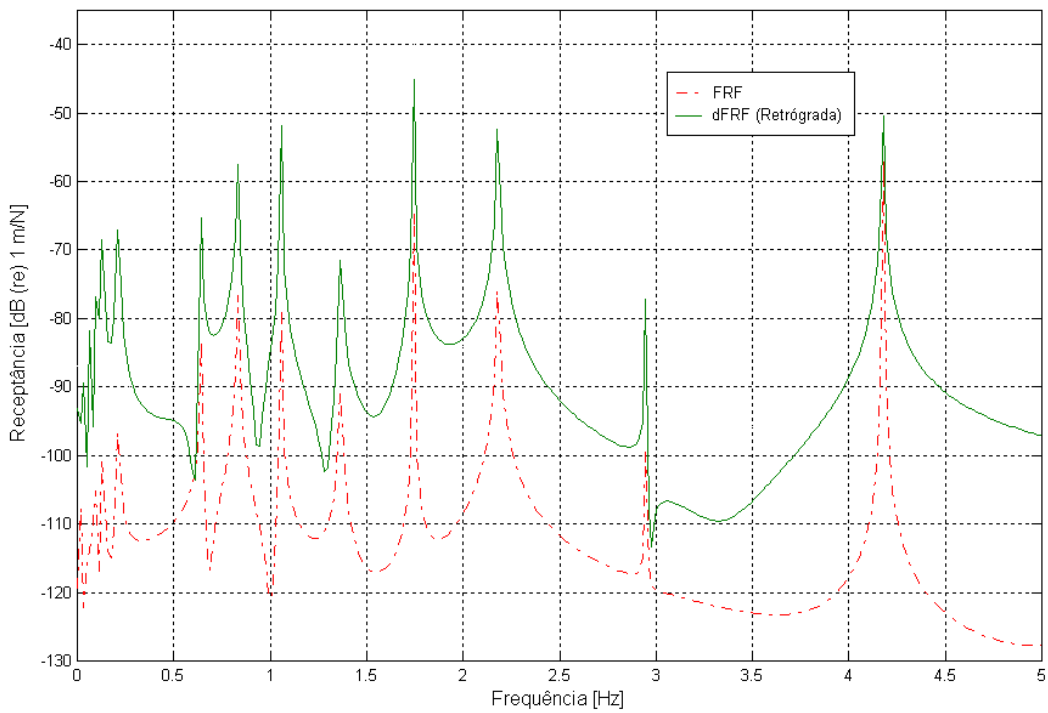


Figura 7.5 – Função de resposta em frequência direcional (dFRF) retrógrada e função de resposta em frequência (FRF) para coluna de perfuração.

A figura 7.6 apresenta uma comparação das funções de resposta em frequência (FRF) e as funções de resposta em frequência direcionais (dFRF), colocando em evidência um ponto de ressonância onde os picos entre o movimento de precessão direta e retrógrada são mais claros.

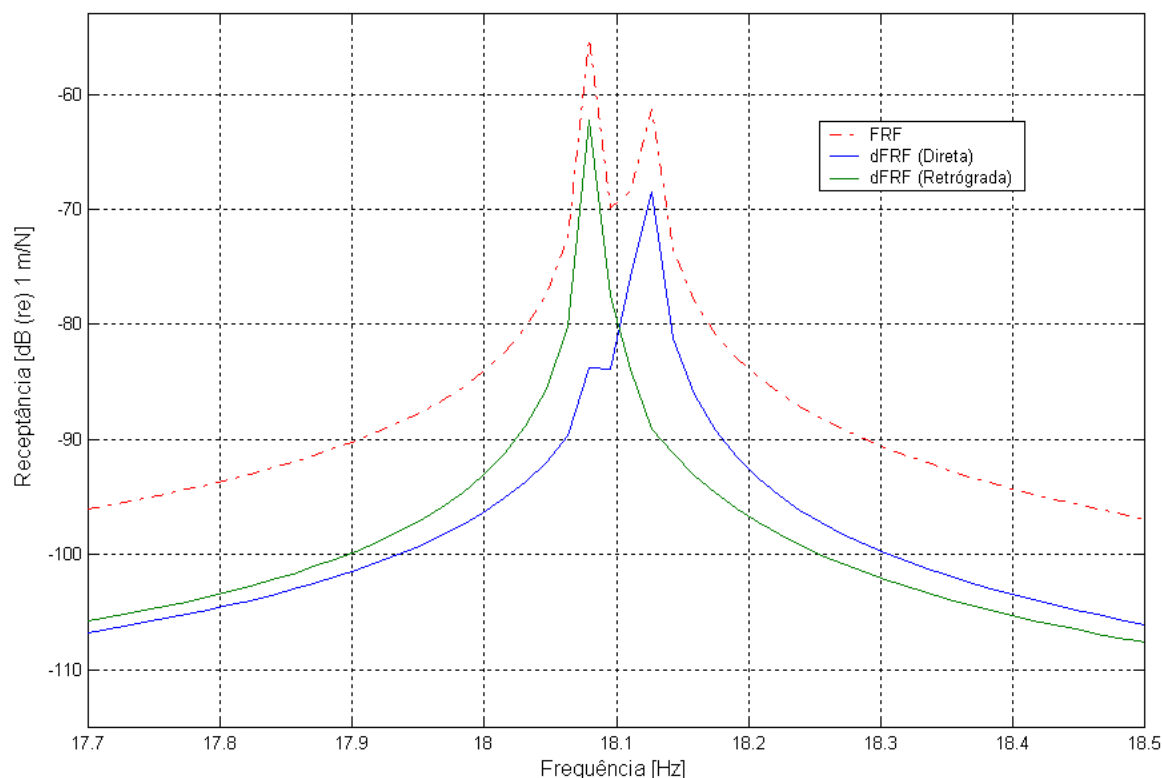


Figura 7.6 – Função de resposta em frequência direcional (dFRF) e função de resposta em frequência (FRF) na região de diferentes picos de ressonância.

Torna-se claro que ao observar somente a FRF é praticamente impossível concluir que o primeiro pico corresponde a dois modos de mesma frequência, sendo um direto e outro retrógrado. Todavia, utilizando a dFRF normal (direta e retrógrada) os picos estão associados somente a um modo, seja ele direto ou retrógrado.

Observa-se que quanto menor for a rotação do rotor, mais próximos estarão os picos correspondentes ao movimento de precessão direta e retrógrada. A figura 7.6 apresenta uma simulação com rotação de 500 rpm, o que representa na prática um valor extremo e não usual. No entanto, cabe salientar, a resposta do simulador exibe como as dFRFs conseguem separar os modos de precessão diretas e retrógradadas em curvas diferentes, o que torna o processo de estimação de parâmetros muito mais preciso e claro.

### 7.3 Análise do Comprimento Vertical do Rotor

Um tipo de análise que pode ser efetuado para a coluna de perfuração apresentada na tabela 7.1, trata o problema do ponto de vista da profundidade final da broca, ou seja, altera-se o comprimento total do rotor vertical e estudam-se as variações das frequências naturais do mesmo.

Do ponto de vista de aplicação, o trecho a ser perfurado varia conforme o avanço da broca, dessa forma, é interessante saber como se comporta o sistema em seguimentos definidos dentro do trecho a ser perfurado.

A entrada de dados é alterada somente na parte correspondente aos *drill pipes* e todos os elementos do BHA serão mantidos constantes.

As tabelas 7.4 a 7.6 apresentam os valores obtidos para as frequências naturais axiais, torsionais e laterais para as três profundidades estudadas da broca de perfuração.

Tabela 7.4 – Frequências naturais axiais para diferentes profundidades da coluna de perfuração.

<i>Frequência Natural Axial [rad/s]</i>			
<i>Modos</i>	<i>3500 m</i>	<i>2500 m</i>	<i>1500 m</i>
1	1,7318	2,2436	3,2875
2	5,8566	8,1902	14,2080
3	10,5860	15,1270	26,6430
4	15,5340	22,2800	36,1600
5	20,5850	29,3360	43,6740
6	25,6900	35,3940	56,1020
7	30,7290	40,1340	69,8110
8	35,2690	46,6540	83,9680
9	39,0300	54,3080	98,4510
10	43,6050	62,4030	113,1500

Tabela 7.5 – Frequências naturais torsionais para diferentes profundidades da coluna de perfuração.

<i>Frequência Natural Torcional [rad/s]</i>			
<i>Modos</i>	<i>3500 m</i>	<i>2500 m</i>	<i>1500 m</i>
1	0,9402	1,1974	1,7145
2	3,4121	4,7897	8,3205
3	6,2961	8,9909	15,2420
4	9,2835	13,1960	19,2570
5	12,2890	16,7910	25,6240
6	15,1860	19,5200	33,6610
7	17,5920	23,3830	42,0460
8	19,8330	27,9120	50,6480
9	22,7590	32,6830	59,4540
10	26,0440	37,6280	68,4550

Tabela 7.6 – Frequências naturais laterais para diferentes profundidades da coluna de perfuração.

<i>Frequência Natural Lateral - Estático [rad/s]</i>			
<i>Modos</i>	<i>3500 m</i>	<i>2500 m</i>	<i>1500 m</i>
1	0,0228	0,0260	0,0319
2	0,1124	0,1316	0,1752
3	0,2023	0,2417	0,3326
4	0,2959	0,3563	0,4941
5	0,3921	0,4735	0,6537
6	0,4904	0,5926	0,7906
7	0,5905	0,7132	0,8944
8	0,6921	0,8342	1,0402
9	0,7951	0,9524	1,2115
10	0,8981	1,0583	1,3912

Nota-se que ao se aumentar a profundidade, ou seja, o comprimento da coluna de perfuração, as frequências naturais tendem a cair, conforme pode ser visto nas figuras 7.7 a 7.9.

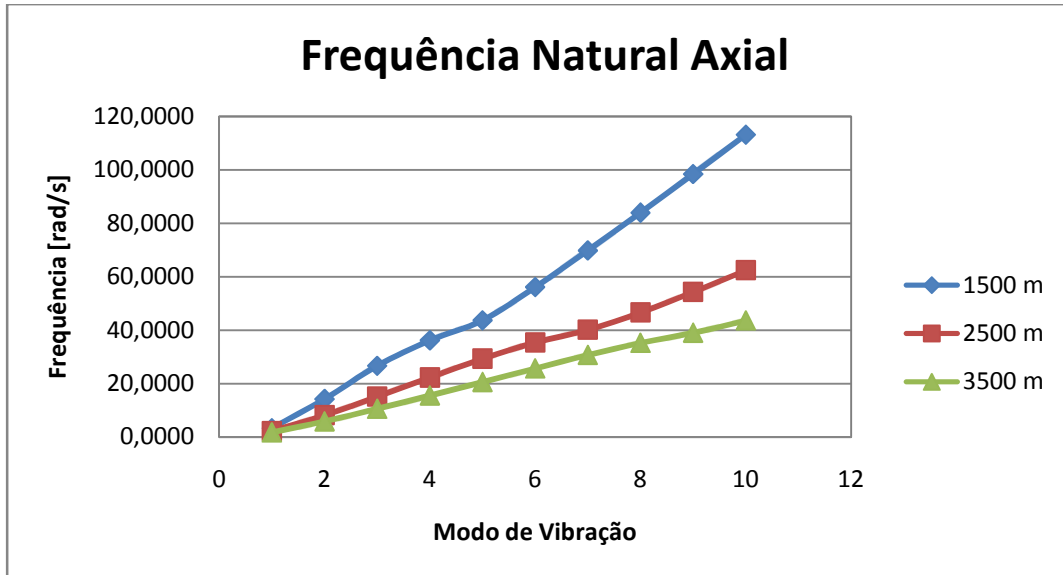


Figura 7.7 – Variação das frequências naturais axiais para diferentes profundidades da coluna de perfuração.

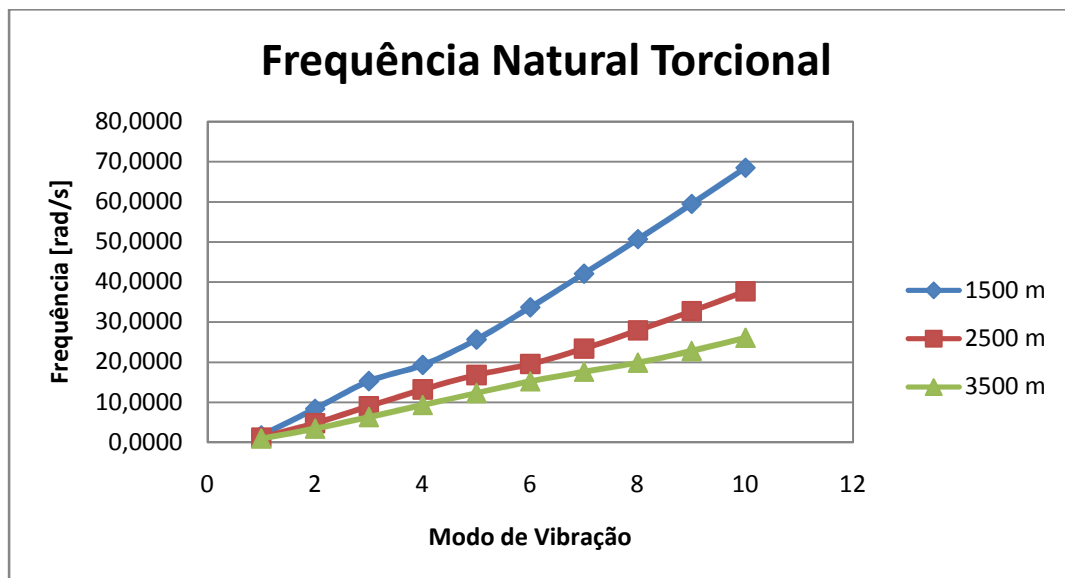


Figura 7.8 – Variação das frequências naturais torcionais para diferentes profundidades da coluna de perfuração.

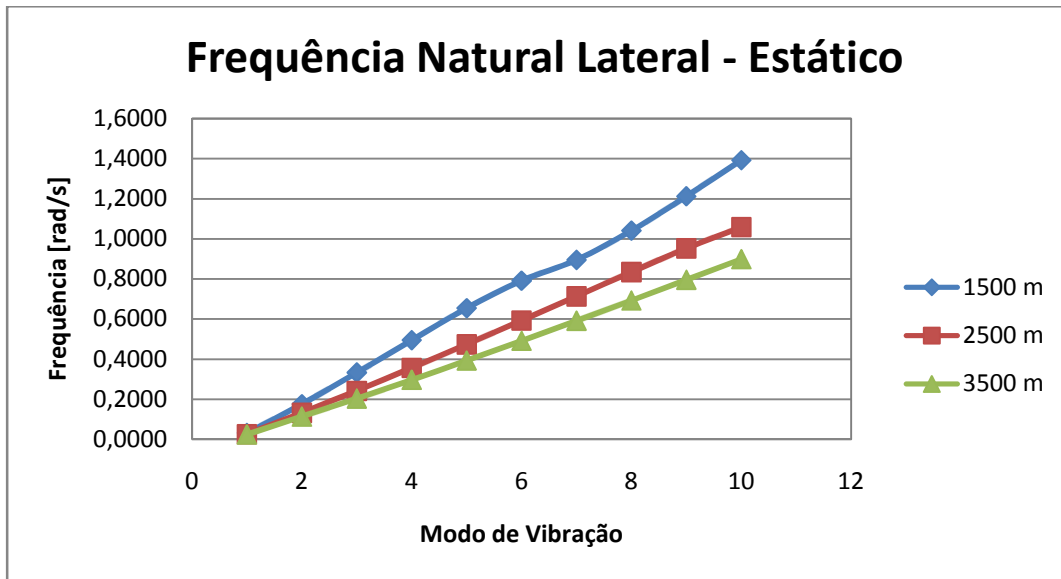


Figura 7.9 – Variação das frequências naturais laterais para diferentes profundidades da coluna de perfuração.

As profundidades estudadas foram tomadas como referência para análise de tendência de comportamento das vibrações na coluna de perfuração, não indicam, porém, que esta seja utilizada nas profundidades mencionadas.

A tendência apresentada nos gráficos mostra que à medida que a coluna se torna mais profunda, torna-se menos rígida, contribuindo, assim, para a diminuição da frequência natural, conforme já esperado.



## 7.4 Análise da Influência do Campo Gravitacional

A seguir efetua-se a análise da influência da matriz que leva em consideração o efeito gravitacional através do modelo com nove elementos e rotação de 300 rpm. A equação (3.26) apresenta a matriz de rigidez para o efeito gravitacional e a equação (2.49) a formulação da energia potencial para o sistema. A matriz com efeito gravitacional foi retirada da matriz global de forma a permitir a análise sem a interferência da mesma.

A simulação mostra que não há influência significativa no resultado para as frequências naturais axiais e torsionais, mas há uma disparidade considerável para as frequências naturais laterais, conforme visto na tabela 7.7 e figura 7.10.

Tabela 7.7 – Frequências naturais laterais sob influência da matriz de rigidez gravitacional.

<i>Frequência Natural Lateral (300 rpm)</i> <i>[rad/s]</i>		
<i>Modos</i>	<i>Sem [ Kg ]</i>	<i>Com [ Kg ]</i>
1	0,0001	0,0312
2	0,0006	0,1398
3	0,0020	0,2722
4	0,0041	0,3766
5	0,0076	0,5758
6	0,0133	0,8275
7	0,0341	1,3296
8	0,1150	4,0181
9	0,2768	5,1838
10	0,7395	6,5971
11	1,0794	8,5430
12	1,8406	10,9070
13	2,7836	13,6460
14	5,0572	18,4350
15	8,0516	26,1340

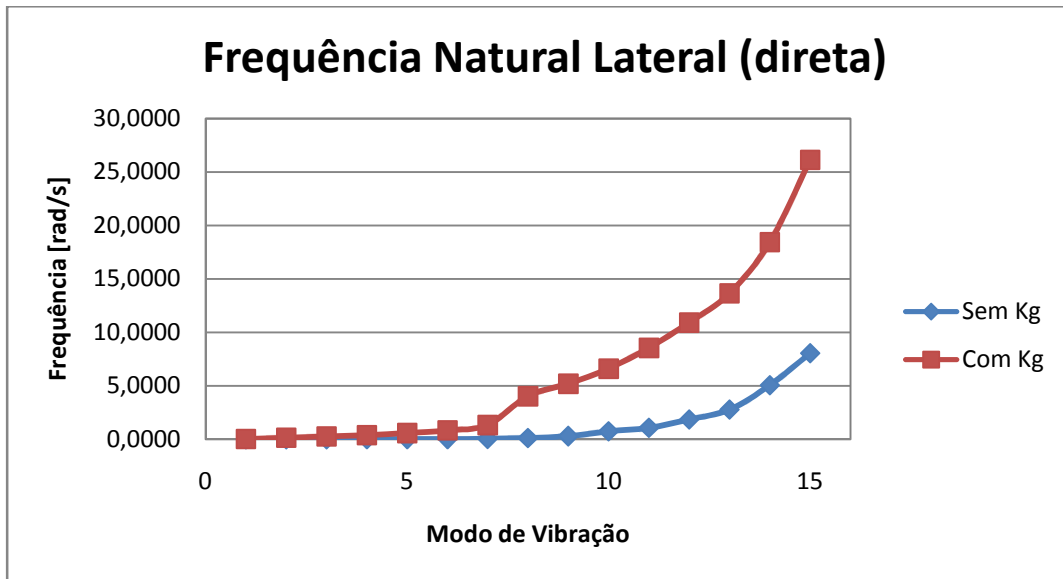


Figura 7.10 – Efeito da matriz de rigidez gravitacional na frequência natural lateral.

Observa-se que a consideração da matriz com efeito gravitacional, para longos rotores verticais, exerce uma influência significativa no resultado para modos mais altos da estrutura.

A tabela 7.11 apresenta os valores obtidos para o rotor analisado no capítulo 6. Neste rotor de somente 10 m de comprimento, a influência do efeito gravitacional é praticamente desprezível. Há somente uma pequena variação na primeira frequência natural.

O peso próprio da estrutura exerce, então, uma importância relevante para rotores verticais do tipo coluna de perfuração para poço de petróleo, onde o comprimento final pode atingir a faixa dos 6.000 m em alguns poços.

## Capítulo 8

### Conclusões

Nesta dissertação modelou-se um rotor vertical sob influência de efeitos giroscópicos e gravitacionais onde se analisou as frequências naturais axiais, torcionais e laterais. Também foram analisadas as respostas em frequência através da análise modal clássica e complexa, nesta incluindo a vantagem da clara definição do modo de precessão do movimento do rotor.

O trabalho visou o desenvolvimento de uma formulação dinâmica de sistemas rotativos através do método dos elementos finitos e sua implementação em ambiente MATLAB® com a consideração de efeitos giroscópicos e gravitacionais. Procurou-se incluir alguns efeitos mais específicos para rotores verticais de comprimento longo como a consideração do peso próprio do eixo e os efeitos giroscópicos, para estudo de vibrações em rotores flexíveis verticais. Foi apresentada a análise modal de forma clássica e com coordenadas direcionais, dando maior ênfase para a análise modal complexa de modo a apresentar as principais vantagens desta, pois, a identificação dos modos de precessão direta e retrógrada é crucial para se evitar falhas mecânicas e eletrônicas em colunas de perfuração de poços.

A validação da rotina computacional desenvolvida foi efetuada através da comparação com exemplos já calculados em trabalhos similares. Todos os resultados encontrados exibiram boa precisão com a literatura existente, comprovando o funcionamento do modelo e da rotina computacional implementada. Realizou-se, também, um estudo específico para um rotor vertical em balanço, no caso uma coluna de perfuração de poço de petróleo, onde foram analisadas as vibrações axiais, torsionais e laterais. Além disso, efetuou-se a análise modal clássica e complexa com apresentação de tabelas e gráficos. Algumas simulações trataram de aspectos específicos operacionais em colunas de perfuração, como a influência no comprimento do rotor vertical, ou em outras palavras, a profundidade da broca em operação na profundidade desejada na simulação. Também foi discutida a consideração do efeito gravitacional no modelo, apresentando a sua interferência no resultado final para as vibrações livres.

O estudo de vibrações em máquinas rotativas, especialmente aquelas empregadas em larga escala na indústria, como o caso de colunas de perfuração de poços de petróleo,

necessitam de uma análise mais cuidadosa, apesar dos inúmeros recursos já disponíveis como sensores em tempo real e softwares de análise durante a fase de projeto, o conhecimento do fenômeno propriamente dito permite uma maior compreensão do movimento aos quais estes tipos de rotores estão sujeitos.

Trabalhos futuros podem ser desenvolvidos com o sistema implementado, pois este permite efetuar estudos mais avançados com eixos longos e esbeltos, como é o usual em colunas de perfuração de poços de petróleo.

Análises mais detalhadas, por meio de inclusão nas matrizes globais, podem ser efetuadas o que permite modelagens mais complexas. Além disso, possibilitam ainda estudos mais avançados com a consideração de efeitos dinâmicos resultantes de contato com a parede do poço, efeitos de amortecimento mecânico, forças de atrito lateral, amortecimento devido às forças hidrostáticas no interior e exterior dos tubos devido ao bombeio de fluido de perfuração.

Pode-se ainda efetuar estudos com a consideração de vibrações forçadas com análises da resposta no domínio do tempo, de forma a investigar movimentos de precessão direta e retrógrada, os quais são altamente nocivos aos sistemas rotativos.

## Referências Bibliográficas

- AGUIAR, R.R., Investigação Experimental e Análise Numérica do Fenômeno de Vibro-Impacto, Tese de Doutorado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Mecânica, 2010.
- ALAMO, J.F.C., Dinâmica de um Rotor Vertical em Balanço com Impacto, Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Mecânica, 2003.
- ALNASER, H.A., 2002, Finite Element Dynamic Analysis of DrillString, Dissertation, King Fahd University of Petroleum and Minerals, Dhahran, Saudi Arabia.
- BASHMAL, S.M., Finite Element Analysis of Stick-slip Vibrations in Drillstrings, Msc Dissertation, King Fahd University of Petroleum and Minerals, Dhahran, Saudi Arabia, 2004.
- BAYLEY, J.R., BIEDIGER, E.A.O. e GUPTA, V., Drilling Vibration Modeling and Field Validation, Society of Petroleum Engineer, IADC/SPE 112650, 2008.
- BUCHER EWINS, D.J., ROBB, A.A., Modal testing of rotating structures: difficulties, assumptions and practical approach IMechE Conference Publications 1996, C500/007/96.
- CHRISTOFOROU, P. e YIGIT, A.S., Dynamic Modelling of Rotating Drillstrings with Borehole Interactions, Journal of Sound and Vibration, 206(2), 1997, 243-260.
- CORDOVIL, A.G.D.P., Análise Dinâmica de Colunas de Perfuração via Superposição Modal, Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Departamento de Engenharia de Petróleo, 1991.

- CRAIG, R. R., *Structural Dynamics: An Introduction to Computer Methods*, John Wiley and Sons, 1981.
- CZERWINSKI, R. J., *Aspectos de Resistência Mecânica de uma Coluna de Perfuração em Análise Tridimensional*, Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Departamento de Engenharia de Petróleo, 1994.
- ESPÍRITO SANTO, I.L., *Estudo dos Efeitos de Atrito Seco e Restituição Cúbica no Comportamento do Rotor Laval Vertical*, Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas, 1998, 97 p. Dissertação (Mestrado).
- EWINS, D.J., *Modal testing: Theory and Practice*. Somersert, Research Studies Press Ltd., 1984, 312 p.
- EWINS, D.J., *Modal Analysis for Rotating Machinery*, Kluwer Academic Publishers, 1999, 549–568.
- FERREIRA, E.M.S., *Modelo de Rotores Dinâmicos com Mancais Flexíveis Utilizando Material Viscoelástico*, Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2005.
- FISCHER, F.J., *Analysis of Drillstrings in Curved Boreholes*, Society of Petroleum Engineers, 1974.
- GABOLDE, G., NGUYEN, J.P., *Drilling Data Handbook*, Paris, Technip Editions, 8ª Edição, 2006.
- HAKIMI, H. e MORADI, S. *Drillstring Vibration Analysis Using Differential Quadrature Method*, *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 70, 2010, 235–242.

HEISIG, G. e NEUBERT, M., Lateral Drillstring Vibrations in Extended-Reach Wells, Society of Petroleum Engineer, IADC/SPE 59235, 2000.

JANSEN, J. D., Nonlinear Dynamics of Oilwell Drillstrings, Delft University, Press, 1993.

JANSEN, J.D., Whirl and Chaotic of Stabilized Drillcollars, Society of Petroleum Engineer, IADC/SPE 20930, 1992.

KESSLER, C.L., Complex Modal Analysis of Rotating Machinery, PhD Thesis, University of Cincinnati, Department of Mechanical, Industrial, and Nuclear Engineering of the College of Engineering, Cincinnati, 1999.

KHULIEF, Y.A. and ALNASER, H., Finite Element Dynamic Analysis of Drillstring, Journal of Finite Elements in Analysis and Design, 41, 2005, 1270-1288.

KHULIEF, Y.A., AL-SULAIMAN, F.A. and BASHMAL, S., Vibration Analysis of Drillstrings with Self-Excited Stick-Slip Oscillations, Journal of Sound and Vibration, 299, 2007, 540-558.

LEE, C.W., A Complex Modal Testing Theory for Rotating Machinery, Mechanical Systems and Signal Processing, 1991, v5, n2, p.119-137.

LEE, C.W., A New Modal Testing in Rotating Machinery, International Conference of Modal Analysis, 17, 1990, Kissimmee, Florida, v.1, p.148-154.

LUCCHESI, K. C., Passagem de um rotor pela velocidade crítica. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas, 1988.

MEIROVITCH, L., Fundamentals of Vibrations, McGraw-Hill Company, College of Engineering, Virginia Polytechnic Institute and State University, 2001.

MEIROVITCH, L., Methods of Analytical Dynamics, McGraw-Hill Company, New York, 1970.

MESQUITA, A.L.A., Identificação de Modos Operacionais e Naturais de Vibração em Máquinas Rotativas Utilizando Coordenadas Complexas, Tese de Doutorado, Universidade Estadual de Campinas, 2004.

NELSON, H. D., CRANDALL, S.H., Analytical prediction of rotordynamics response, Handbook of Rotordynamics, New York, McGraw-Hill, 1992, Cap. 2, p2.1-2.86.

NORDMANN, R., Modal parameter identification and sensitivity analysis in rotating machinery, IFToMM, 1982, Roma, pp.95-102.

PASLAY, P.R. e BOGY, D.B., Drillstring Vibrations due to Intermittent Contact of Bit Teeth, Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, Journal of Engineering for Industry, 1963, 187-194.

PEREIRA, J.C., Introdução à Dinâmica de Rotores, Universidade Federal de Santa Catarina, Departamento de Engenharia Mecânica, Florianópolis, 2003.

RAO, S., Vibrações Mecânicas, Prentice Hall, 4ª Edição, 2009.

SAMPAIO, R., CATALDO, E., RIQUELME, R., Introdução ao MATLAB , Agência Espacial Brasileira, Rio de Janeiro, 1997.

SAMPAIO, R., CATALDO, E., WOLTER, C., Vibrações Mecânicas – Resumo da teoria e exercícios, Agência Espacial Brasileira, Rio de Janeiro, 1998.

SCHMALHORST, B. e Neubert, M., Dynamic Modeling Software, American Association of Drilling Engineers, AADE-03-NTCE-53, 2003.

SETO, W.W., Vibrações Mecânicas, McGraw-Hill, Rio de Janeiro, 1971.



SHYU, R.J., Bending Vibrations of Rotating Drillstrings, Dissertation, Massachusetts Institute of Technology, Department of Ocean Engineering, Cambridge, 1989.

SOUTO, C.A., Estudo do Comportamento Dinâmico de Máquinas Rotativas através da Análise Modal Complexa, Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, 2000.

YARIM, G., RITCHIE, G.M. and MAY, R.B., A Guide to Successful Backreaming: Real-time Case Histories, Society of Petroleum Engineer, IADC/SPE 116555, 2008.

## Apêndice A

### Resultados Comparando a Convergência pelo Número de Elementos

De maneira a checar a convergência do método, gerar menor esforço computacional e resultados confiáveis dentro de uma margem de erro aceitável procede-se a seguir simulações de modo a determinar o número de elementos ideais para prosseguir com as simulações subsequentes. As simulações alteram a quantidade dos elementos menos rígidos do sistema, ou seja, os drill pipes, conforme visto na seção 7.1.

O rotor utilizado nestas simulações está descrito na tabela 7.1 e a sistemática consiste em manter o mesmo tipo de rotor em estudo e variar somente a quantidade de elementos finitos disponíveis para o cálculo.

Como pode ser observado nos gráficos e nas tabelas correspondentes, percebe-se claramente que a partir de 12 elementos as vibrações naturais assumem uma margem de erro desprezível.

As vibrações laterais são mais sensíveis ao número de elementos em todos os modos de vibração, já as vibrações axiais e torsionais iniciam a disparidade nos resultados a partir do 4º modo de vibrar.

Tabela A.1 – Frequências naturais axiais para o rotor em estudo.

<i>Nº elem</i>	<i>Frequência Natural Axial</i>			
	<i>Modo 1</i>	<i>Modo 2</i>	<i>Modo 3</i>	<i>Modo 4</i>
9	1,7356	6,1164	12,1970	32,4010
12	1,7327	5,9208	11,0270	16,9600
18	1,7320	5,8695	10,6750	15,8240
30	1,7318	5,8566	10,5860	15,5340
46	1,7318	5,8538	10,5680	15,4730

Tabela A.2 – Frequências naturais torsionais para o rotor em estudo.

<i>Nº elem</i>	<i>Frequência Natural Torcional</i>			
	<i>Modo 1</i>	<i>Modo 2</i>	<i>Modo 3</i>	<i>Modo 4</i>
9	0,9414	3,5601	7,2754	15,9330
12	0,9405	3,4482	6,5556	10,1250
18	0,9402	3,4193	6,3481	9,4536
30	0,9402	3,4121	6,2961	9,2835
46	0,9401	3,4105	6,2851	9,2476

Tabela A.3 – Frequências naturais laterais (estática) para o rotor em estudo.

<i>Nº elem</i>	<i>Frequência Natural Lateral (Estática)</i>			
	<i>Modo 1</i>	<i>Modo 2</i>	<i>Modo 3</i>	<i>Modo 4</i>
9	0,3766	0,2722	0,1398	0,0312
12	0,3466	0,2299	0,1250	0,0273
18	0,3118	0,2114	0,1169	0,0246
30	0,2959	0,2023	0,1124	0,0228
46	0,2918	0,2000	0,1113	0,0224

Os gráficos apresentados nas figuras A.1 a A.3 exibem os resultados para os quatro primeiros modos de vibração para o rotor em estudo, sempre em função do número de elementos utilizados pela simulação. Constata-se que por se tratar de elementos simples de viga, com poucos elementos já se atinge uma margem aceitável de resultado.

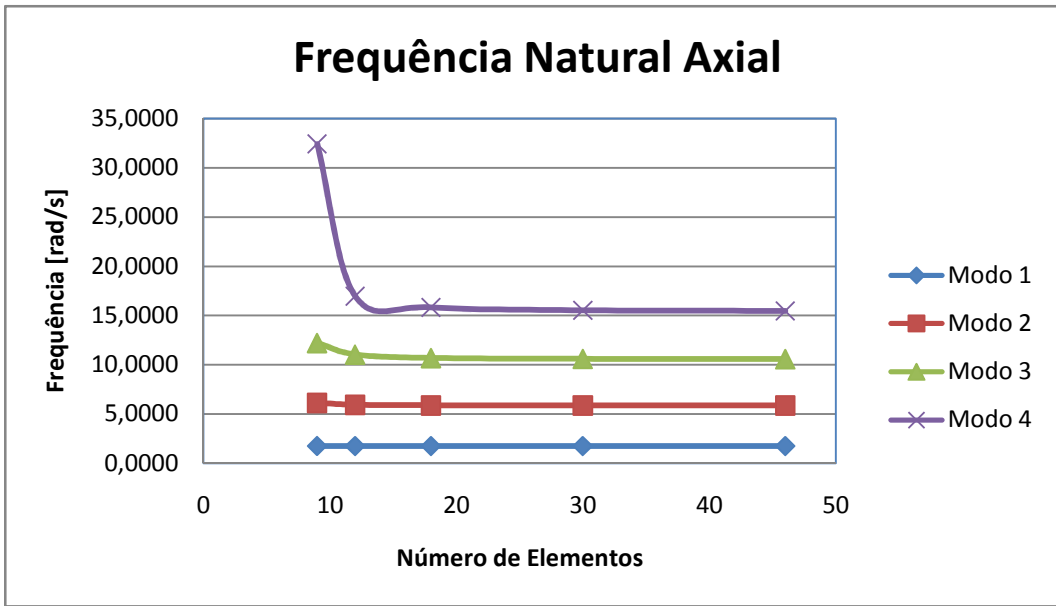


Figura A.1 – Frequência natural axial em função do número de elementos discretizados.

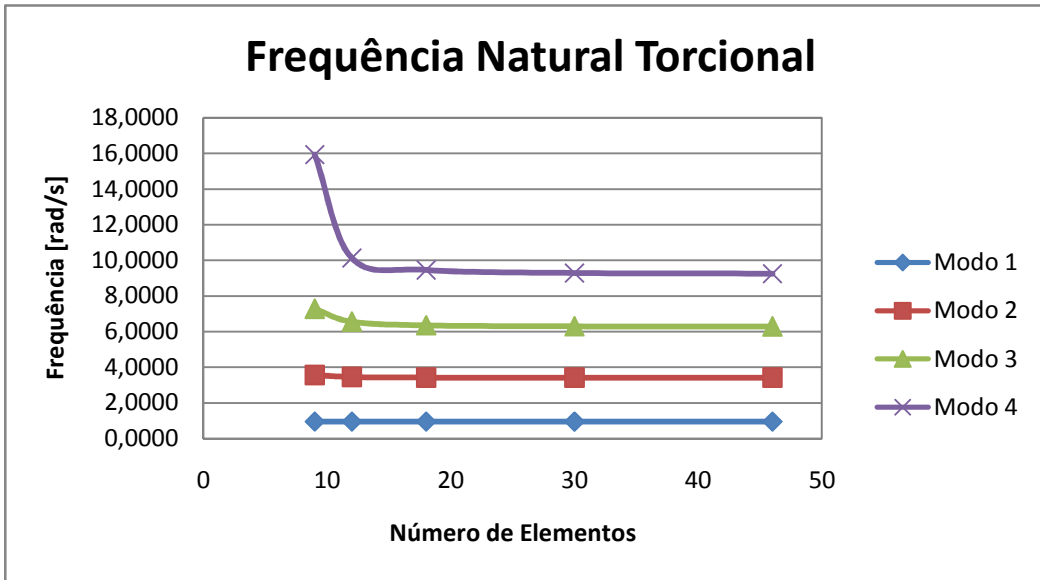


Figura A.2 – Frequência natural torcional em função do número de elementos discretizados.

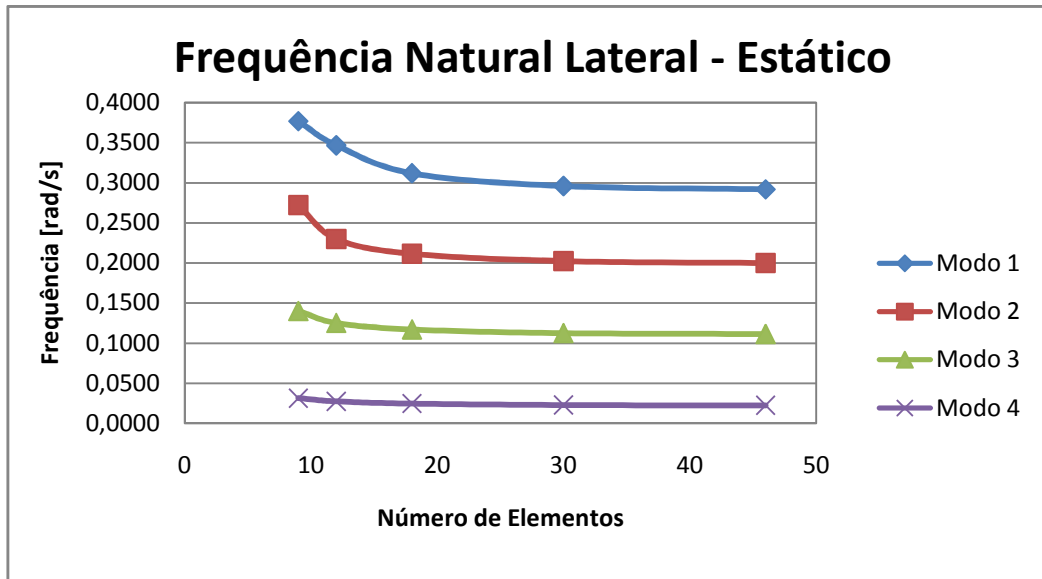
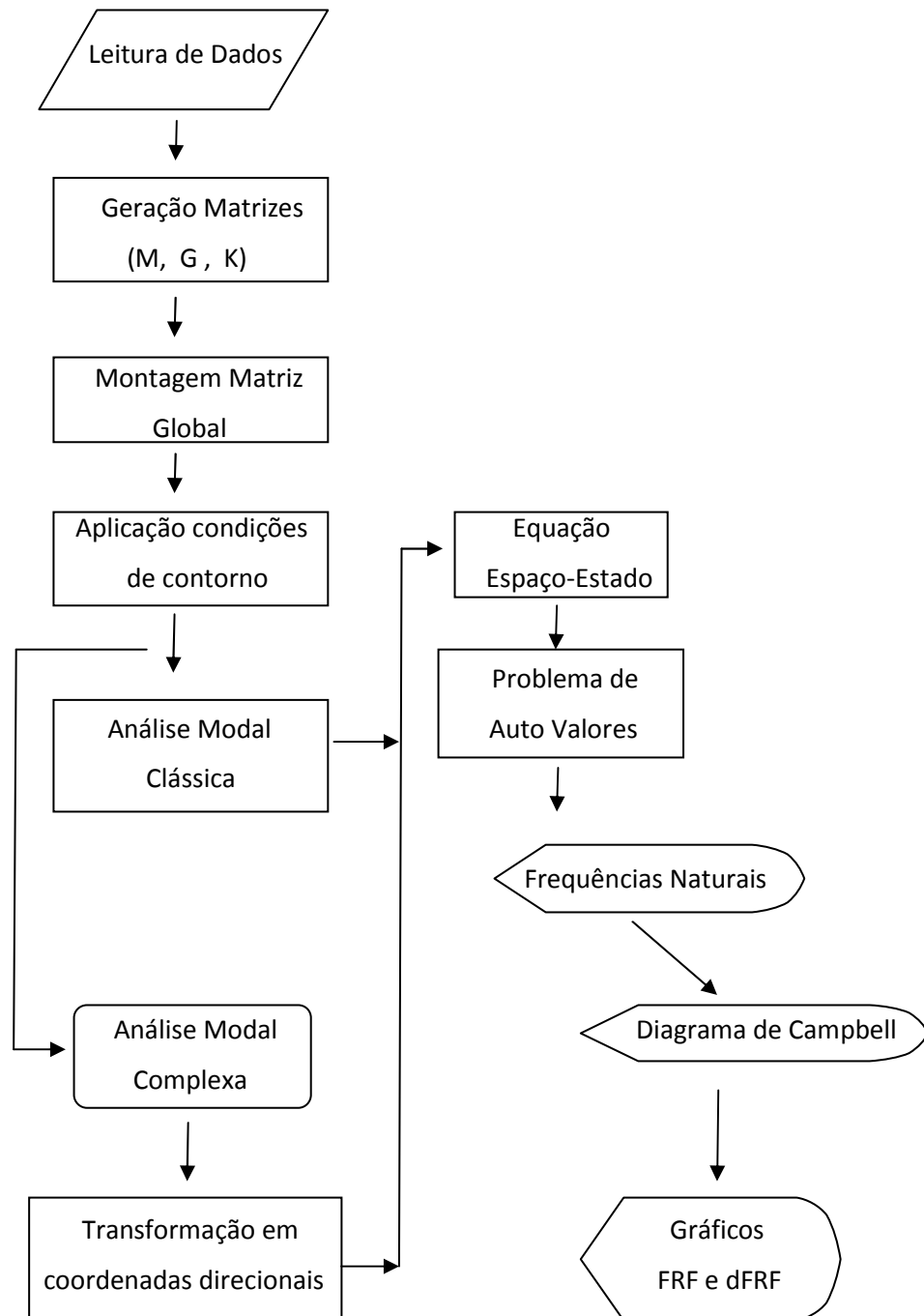


Figura A.3 – Frequência natural lateral em função do número de elementos discretizados.

## Apêndice B

### Fluxograma Rotina Computacional



## **Súmula Curricular**

### **Trabalhos Aceitos em Eventos com Arbitragem**

AGOSTINI, C. E., CAPELLO SOUSA, E.A. Complex Modal Analysis of a Vertical Rotor Through Finite Elements Method. 9 th Brazilian Conference on Dynamics, Control and their Applications, DINCON, 2010, Serra Negra – SP, ISSN 2178-3667, pp. 449-457.

AGOSTINI,C.E., CAPELLO SOUSA,E.A. Modelagem por Elementos Finitos de um Rotor Vertical Flexível sob Efeitos Giroscópicos e Gravitacionais. VI Congresso Nacional de Engenharia Mecânica, 2010, Campina Grande – PB.