



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA  
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”  
CAMPUS DE BAURU



GLÁUCIA KELLY SILVESTRE CLARO

**UM ALGORITMO PARA A CONSTRUÇÃO  
DE SUPERFÍCIES POTENCIAIS DE FALHA  
EM SÓLIDOS TRIDIMENSIONAIS**

Bauru  
2011

**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”  
FACULDADE DE ENGENHARIA**

**GLÁUCIA KELLY SILVESTRE CLARO**

**UM ALGORITMO PARA A CONSTRUÇÃO  
DE SUPERFÍCIES POTENCIAIS DE FALHA  
EM SÓLIDOS TRIDIMENSIONAIS**

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia da Universidade Estadual Paulista UNESP – Campus de Bauru, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. Osvaldo Luís Manzoli

Bauru  
2011

Claro, Gláucia Kelly Silvestre.

Um algoritmo para a construção de superfícies  
potenciais de falha em sólidos tridimensionais /  
Gláucia Kelly Silvestre Claro, 2011  
67 f. il.

Orientador: Osvaldo Luís Manzoli

Dissertação (Mestrado)-Universidade Estadual  
Paulista. Faculdade de Engenharia, Bauru, 2011

1. Descontinuidades fortes. 2. Fratura. 3. Análise  
tridimensional. I. Universidade Estadual Paulista.  
Faculdade de Engenharia. II. Título.

**ATA DA DEFESA PÚBLICA DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DE GLAUCIA KELLY SILVESTRE CLARO, DISCENTE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA, DO(A) FACULDADE DE ENGENHARIA DE BAURU.**

Aos 19 dias do mês de agosto do ano de 2011, às 14:00 horas, no(a) ANFITEATRO DA SEÇÃO DE PÓS-GRADUAÇÃO DA FACULDADE DE ENGENHARIA, reuniu-se a Comissão Examinadora da Defesa Pública, composta pelos seguintes membros: Prof. Dr. OSVALDO LUIS MANZOLI do(a) Departamento de Engenharia Civil / Faculdade de Engenharia de Bauru - UNESP, Prof. Dr. TÚLIO NOGUEIRA BITTENCOURT do(a) Departamento de Estruturas / Escola Politécnica da USP, Prof. Dr. ESTEVAM BARBOSA DE LAS CASAS do(a) Departamento de Estruturas / Universidade Federal de Minas Gerais - UFMG, sob a presidência do primeiro, a fim de proceder a arguição pública da DISSERTAÇÃO DE MESTRADO de GLAUCIA KELLY SILVESTRE CLARO, intitulada "UM ALGORITMO PARA A CONSTRUÇÃO DE SUPERFÍCIES POTENCIAIS DE FALHA EM SÓLIDOS TRIDIMENSIONAIS". Após a exposição, a discente foi arguida oralmente pelos membros da Comissão Examinadora, tendo recebido o conceito final: APROVADO. Nada mais havendo, foi lavrada a presente ata, que, após lida e aprovada, foi assinada pelos membros da Comissão Examinadora.



Prof. Dr. OSVALDO LUIS MANZOLI



Prof. Dr. TÚLIO NOGUEIRA BITTENCOURT



Prof. Dr. ESTEVAM BARBOSA DE LAS CASAS

## **AGRADECIMENTOS**

Gostaria de expressar meus sinceros agradecimentos:

A Deus pela minha vida e pelos sonhos realizados, como a conclusão do mestrado.

Ao meu orientador Prof. Dr. Osvaldo Luís Manzoli, pelo total auxílio na construção e concretização deste trabalho.

Ao meu esposo Fábio pelo amor, paciência e por estar ao meu lado diante das dificuldades.

À minha querida mãe Natalina e ao meu pai José por quem sou.

À minha irmã Viviane pelo constante incentivo e confiança.

Aos meus amigos Richael e Fabiana pelo carinho e amizade.

Ao apoio financeiro concedido pela Capes, em forma de bolsa de estudos.

E a todos, professores e funcionários da Unesp, que contribuíram direta e indiretamente para o desenvolvimento deste trabalho.

“O homem erudito é um descobridor de fatos que já existem, mas o homem sábio é um criador de valores que não existem e que ele faz existir.”

(Albert Einstein)

CLARO, G. K. S. **Um algoritmo para a construção de superfícies potenciais de falha em sólidos tridimensionais**. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, 2011.

## RESUMO

Este trabalho tem o propósito de contribuir para a generalização tridimensional de problemas de análise numérica da propagação de fissura, mediante a formulação de elementos finitos com descontinuidade incorporada. Em problemas planos as descontinuidades correspondem a linhas que podem ser elaboradas de uma forma relativamente simples, através da construção sequencial de segmentos retos, orientados conforme a direção de falha no interior de cada elemento finito do sólido. Na análise tridimensional a construção do caminho de descontinuidade é mais complexa, pois devem ser construídas superfícies planas no interior de cada elemento e essas superfícies planas devem ser contínuas entre os elementos. É apresentada, nesse trabalho, uma técnica alternativa de construção do caminho de descontinuidade em análises tridimensionais baseado na solução de um problema análogo ao problema de condução de calor, estabelecido a partir de orientações locais de falha, baseado no estado de tensão do problema mecânico. A solução do problema equivalente é obtida utilizando a mesma malha e interpolações do problema mecânico. Para minimizar o esforço computacional, é proposta uma estratégia na qual a análise para mapear o caminho da descontinuidade é restrita ao domínio formado por alguns elementos próximos à superfície de fissura, que se desenvolve ao longo do processo de carregamento. Para validar a metodologia proposta foram realizadas análises tridimensionais de problemas básicos de fratura experimentais e seus resultados foram contrastados com os resultados encontrados na bibliografia. Realizou-se também a comparação do tempo de processamento entre o algoritmo proposto e o algoritmo global para as mesmas análises mencionadas acima. Como resultado, constatou-se que o algoritmo proposto conseguiu descrever satisfatoriamente as trajetórias de descontinuidade, consumindo menor tempo de processamento.

**PALAVRAS-CHAVE:** Descontinuidades fortes, fratura, análise tridimensional.

CLARO, G. K. S. **An algorithm to construction of potential failure surfaces in three-dimensional solids.** Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, 2011.

## **ABSTRACT**

This work contributes to the generalization to 3D problems of numerical analysis of crack propagation, through finite elements formulation with embedded discontinuity. In plane problems the discontinuities correspond to lines that can be tracked in a relatively simple way, by sequentially constructing straight segments, following the crack orientation inside each solid finite element. In three-dimensional analysis the tracking scheme is more complex since planar surfaces must be constructed inside each element and these planar surfaces must be continuous between elements. It is shown in this work, an alternative version of discontinuity path construction technique in three-dimensional analysis based on the solution of an analogous heat conduction problem, established from the local failure orientation based on the stress state of the mechanical problem. The solution of the equivalent problem is obtained using the same mesh and interpolations of the mechanical problem. To minimize computational effort, a strategy is proposed in which the analysis to track the discontinuity path is restricted to the domain formed by few elements near the crack surface front, which develops along the loading process. To validate the proposed methodology three-dimensional analysis of experimental fracture tests were performed and the results were contrasted with those obtained from the literature. The comparison between the process time of the proposed algorithm and the global algorithm was performed too. It was found that the proposed algorithm was able to describe the discontinuity path satisfactorily with reduced computational time

**KEYWORDS:** Strong discontinuities, fracture, three-dimensional analysis.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1: Tubulação rompida em Washington -----	11
Figura 2.1: Processo de fissura, Chaves e Oliver (2001) -----	14
Figura 2.2: a) Malha com fissura, b) Detalhes da malha com fissura e c) Malha com a fissura emoldurada pela face dos elementos adicionados, Ingraffea et al. (2001) -----	16
Figura 2.3: Elemento bidimensional com descontinuidade incorpora. a) Elemento atravessado por uma interface descontínua $S_e$ e b) Salto resultante no campo de deslocamento, Manzoli (2008)-----	18
Figura 2.4: Construção da trajetória de descontinuidade em 2D, Manzoli, (1998) -----	20
Figura 2.5: Superfícies de fissura tridimensionais contínuas, Chaves (2003) -----	21
Figura 3.1: a) Elemento finito tridimensional, b) Vetor deslocamento relativo à descontinuidade, com deslocamento de um nó, (Claro, Rodrigues e Manzoli, 2010) -	23
Figura 4.1: Elemento finito com superfície de descontinuidade, $S_i$ , descrita pelo plano tangente formado por $s$ e $t$ e normal a $n$ .-----	29
Figura 4.2: Problema de valores de contorno tipo térmico -----	31
Figura 4.3: Construção da superfície potencial de falha, baseada no valor médio $\theta_i$ -----	33
Figura 4.4: Interpolação linear para um elemento finito quadrilátero em 2D, Chaves (2003) -----	34
Figura 5.1: Malha de elementos finitos tetraédricos do cilindro -----	37
Figura 5.2: Campo vetorial $n$ orientado -----	38
Figura 5.3: Superfície potencial de falha no primeiro elemento indicado para atingir o critério de falha-----	38
Figura 5.4: Região analisada pelo algoritmo proposto para construção de trajetória de fissura (em vistas diferentes) -----	39
Figura 5.5: a) Região analisada pelo algoritmo proposto com a superfície de fissura e b) superfície de fissura apenas na região que contém os elementos com falha ativa -----	40
Figura 5.6: Campo vetorial de direções normais à superfície de fissura-----	40
Figura 5.7: a) Isosuperfícies do algoritmo global e b) Superfície potencial de fissura ---	41
Figura 6.1: Geometria (em mm) e condições de contorno de Gálvez et al (1998) -----	43
Figura 6.2: Malha de elementos finitos original com o primeiro elemento candidato a fissurar -----	44

Figura 6.3: Resultado dos primeiros passos de carga, que ocasionou o início da superfície de fissura -----	44
Figura 6.4: Superfície de fissura atravessando os elementos finitos -----	45
Figura 6.5: Deformação ocorrida devido à presença da descontinuidade -----	45
Figura 6.6: Região de análise do algoritmo proposto -----	46
Figura 6.7: Superfície de fissura formada no final da análise -----	46
Figura 6.8: Superfície de fissura formada no final da análise com maior proximidade na imagem -----	47
Figura 6.9: Nó controlado durante o processo de carregamento -----	47
Figura 6.10: Resposta estrutural da viga flexionada submetida a forças em quatro pontos -----	48
Figura 6.11: Geometria (em mm) e condições de contorno de Jäger, Steinmann e Kuhl (2008) -----	49
Figura 6.12: Malha de elementos tetraédricos do bloco retangular -----	50
Figura 6.13: Progressão da construção da superfície de descontinuidade no bloco retangular -----	50
Figura 6.14: Deformação ocorrida no bloco retangular devido à presença da fissura -----	51
Figura 6.15: Resultado obtido por Jäger, Steinmann e Kuhl (2008) -----	51
Figura 6.16: Localização do nó controlado durante o processo de carregamento do bloco retangular -----	52
Figura 6.17: Curva de força vs deslocamento do bloco retangular tracionado -----	52
Figura 6.18: Evolução da região de análise durante o processo de carregamento do bloco retangular -----	53
Figura 6.19: Geometria (em mm) e condições de contorno propostas por Chaves (2003) -----	54
Figura 6.20: Superfície de fissura formada após o processo de carregamento do ensaio brasileiro com vistas diferentes -----	55
Figura 6.21: Superfície de descontinuidade obtida por Chaves (2003). a) Família de direções críticas (plano x-y) e b) Superfície de falha -----	55
Figura 6.22: Deformação ocorrida no final da análise do ensaio brasileiro de fratura -----	56
Figura 6.23: Nó controlado durante a análise do teste brasileiro de fratura -----	56
Figura 6.24: Resposta estrutural do ensaio brasileiro de fratura -----	57
Figura 6.25: Região analisado pelo algoritmo proposto no teste brasileiro de fratura -----	58
Figura 6.26: Geometria (em mm) e condições de contorno da viga de concreto entalhada testada por Peterson (1981) -----	58

Figura 6.27: Malha de elementos finitos utilizada na análise da viga entalhada submetida a forças em três pontos -----	59
Figura 6.28: Superfície de fissura descrita pelo algoritmo proposto-----	59
Figura 6.29: Deformação da viga flexionada com vistas diferentes -----	60
Figura 6.30: Nó controlado durante o processo de carregamento -----	61
Figura 6.31: Curva de força vs deslocamento da viga flexionada-----	61
Figura 6.32: Elementos da viga flexionada submetida a forças em três pontos analisados pelo algoritmo proposto. -----	62

# SUMÁRIO

<b>1 – INTRODUÇÃO</b>	10
1.1 – Objetivo	12
<b>2 – REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b>	13
2.1 – Introdução	13
2.2 – Processo de formação de fissuras	13
2.3 – Métodos de representação da descontinuidade	15
<b>3 – ELEMENTOS FINITOS COM DESCONTINUIDADE INCORPORADA</b>	22
3.1 – Introdução	22
3.2 – Formulação	22
<b>4 – ALGORITMO GLOBAL DE TRAJETÓRIA DE FISSURA</b>	27
4.1 – Introdução	27
4.2 – Passos de solução do algoritmo global de trajetória de fissura	27
4.3 – Formulação do problema térmico equivalente	29
4.4 – Aproximação por elementos finitos	31
4.5 – Traçado da superfície potencial de fissura	32
<b>5 – ALGORITMO DE TRAJETÓRIA DE FISSURA PROPOSTO</b>	35
5.1 – Introdução	35
5.2 – Algoritmo de trajetória de fissura proposto	35
5.3 – Exemplo numérico do método	37
<b>6 – SIMULAÇÕES E RESULTADOS</b>	42
6.1 – Introdução	42
6.2 – Flexão de viga entalhada submetida a forças em quatro pontos	43
6.3 – Bloco retangular submetido à tração	49
6.4 – Ensaio brasileiro de fratura	53
6.5 – Flexão de viga entalhada submetida a forças em três pontos	58

**7 – CONCLUSÕES -----63**

**REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS -----65**

## 1 – INTRODUÇÃO

O interesse no domínio das construções de máquinas ou de edificações sempre foi marcante na civilização. Os avanços obtidos no campo da engenharia potencializam ainda mais a incrível habilidade do homem de criar.

Os estudos mais sistemáticos a respeito do comportamento dos materiais em engenharia iniciam-se em meados do século XIX e vêm agregando, principalmente durante as duas guerras mundiais, grandes saltos tecnológicos.

As primeiras teorias a respeito de fraturas partem do início do século XX motivados por grandes perdas como, por exemplo, naufrágios de navios, edifícios que ruíram e trens danificados.

No meio do século XX a engenharia viveu outro grande salto com o aperfeiçoamento dos computadores e tornou-se ferramenta indispensável no âmbito da engenharia, em especial no seguimento das simulações.

Atualmente, para solucionar problemas de engenharia são utilizados modelos matemáticos equivalentes aos problemas físicos. A utilização de modelos matemáticos equivalentes possibilita ao engenheiro uma melhor compreensão do comportamento de determinada estrutura ou máquina, mediante aos esforços ou requisitos às quais são submetidas, sem ter, na maioria das vezes, que construí-las, economizando recursos e principalmente tempo.

A simulação na solução de problemas de engenharia, como o caso ilustrado na Figura (1.1), que mostra o rompimento de uma tubulação que ocasionou o vazamento de cinco mil barris de gasolina em Washington, permitiria ao profissional da área compreender a causa raiz que provocou a ruptura da estrutura, bem como buscar estratégias para evitar sua ocorrência.

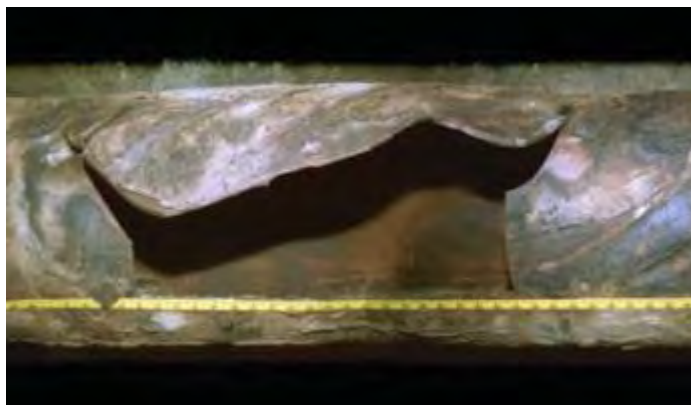


Figura 1.1: Tubulação rompida em Washington.

(Fonte: <<http://www.exponent.com/Gasoline-Creek-Breach-in-an-Olympic-Pipeline>>)

Apesar dos avanços tecnológicos e dos avanços nas pesquisas de propagação de fissura, um dos grandes desafios no campo da modelagem computacional ainda é a representação dos processos de formação e propagação de descontinuidades em meios considerados inicialmente contínuos na escala macroscópica. Isso se deve ao fato de que as formulações convencionais se baseiam nos fundamentos da mecânica de meios contínuos, que deixam de ser válidos na presença de descontinuidades, tais como fissuras ou superfícies de deslizamento.

Uma das primeiras técnicas abordadas para a representação de fissuras foi o método da malha adaptativa, Wawrzynek e Ingraffea (1989) e Bittencourt, Wawrzynek, Ingraffea e Sousa (1996), mas esta estratégia gera um grande volume de dados para os casos bidimensionais, e o volume é ainda maior nos casos de falha tridimensional, remetendo a um esforço computacional elevado.

Outras metodologias surgiram, como os elementos finitos enriquecidos, capazes de representar os efeitos de uma fissura no interior dos elementos, sem necessidade de técnicas de reconstrução adaptativa da malha. Essas metodologias tratam do enriquecimento do campo de deformações ou de deslocamentos dos elementos. Baseiam-se na posição da descontinuidade no interior de cada elemento, que em geral é desconhecida no início da análise, sendo mais uma das incógnitas do problema. Assim, torna-se necessário o emprego de algoritmos de construção progressiva da trajetória de fissura para definir a superfície de falha que se desenvolve durante o processo de carregamento.

## 1.1 – Objetivo

Devido à necessidade de haver algoritmos que descrevam corretamente o caminho da descontinuidade, respeitando sua continuidade entre os elementos, o presente trabalho surge com o objetivo de desenvolver e implementar um algoritmo que permita a construção da trajetória da superfície de falha em sólidos tridimensionais pelo Método de Elementos Finitos (cujo comportamento não-linear é regido pela formação de descontinuidades durante o processo de carregamento) buscando minimizar o tempo gasto durante as análises.

O algoritmo destina-se a representar a propagação de fissuras em materiais quase-frágeis ou superfícies de deslizamento em materiais dúcteis, devendo ser desenvolvido dentro do contexto da aproximação contínua de descontinuidades fortes, proposto por Oliver, Cervera e Manzoli (1999), Oliver, Huespe, Samaniego e Chaves (2004) e Oliver, Linero, Huespe e Manzoli (2008).

Para tanto, propõe-se uma modificação do algoritmo global apresentado por Oliver e Huespe (2004), de maneira a reduzir o tempo de processamento das análises numéricas, restringindo o domínio de análise à região próxima à superfície de fissura, conseqüentemente reduzindo o tempo de processamento das simulações.



## 2 – REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

### 2.1 – Introdução

Neste capítulo serão mostrados alguns conceitos básicos empregados no estudo de descontinuidades. Serão apresentadas também algumas ferramentas empregadas no estudo da propagação de fissuras, tais como o método da malha adaptativa, os métodos de enriquecimento nodal e enriquecimento elementar, e algoritmos para a construção da descontinuidade.

### 2.2 – Processo de formação de Fissuras

O fenômeno de formação de descontinuidade em um material quase-frágil pode ser encarado como um processo transitório de formação e coalescência de micro fissuras dentro da estrutura material. A mesma abordagem pode ser feita para materiais dúcteis, que apresentam a formação e coalescência de vazios no seu interior, podendo em muitos casos colapsar o material, Oliver e Huespe, (2004).

É comum no estudo da mecânica da fratura subdividir em três estágios o processo de formação da fissura, como mostra a Figura (2.1), que ocorre em uma região denominada Zona de Processo de Fratura (*Fracture Process Zone*), e seus estágios são descritos como:

- **Falha Difusa** (*Diffuse Failure*): Região onde a deformação e o campo de deslocamento são contínuos, embora haja uma concentração de tensão na região onde o material começa a amolecer.
- **Descontinuidade Fraca** (*Weak Discountinuity*): O campo de deformação se torna descontínuo, mas o campo de deslocamento permanece contínuo, nos limites de uma banda estreita (banda de localização de deformação).

- **Descontinuidade Forte** (*Strong Discontinuity*): Região onde a banda de localização de deformações colapsa (interface de descontinuidade). O campo de deslocamento se torna descontínuo em toda a superfície e o campo de deformação torna-se infinito.

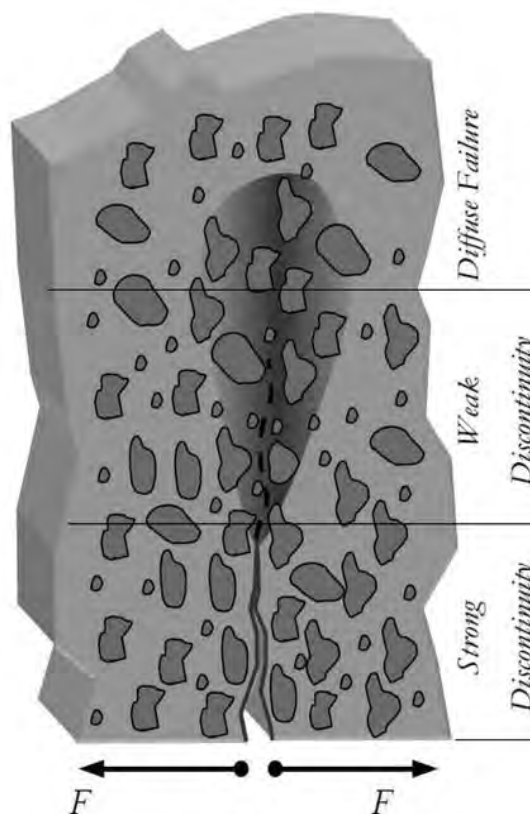


Figura 2.1: Processo de fissura, Chaves e Oliver (2001).

O processo descrito acima nos leva ao estudo da cinemática dos dois tipos básicos de descontinuidades; cinemáticas de descontinuidade forte e fraca. Os estudos das cinemáticas formam as bases teóricas chamadas de Aproximação por Descontinuidade Fraca (*Weak Discontinuity Approach – WDA*) e Aproximação por Descontinuidade Forte (*Strong Discontinuity Approach – SDA*), Oliver e Huespe, (2004). Vale dizer que a Aproximação por Descontinuidade Forte (*SDA*) compõe a base teórica utilizada no desenvolvimento do presente trabalho, entretanto sua descrição pormenorizada não faz parte do escopo do trabalho.

### 2.3 – Métodos de representação da descontinuidade

Os estudos em propagação de fissura remontam à Segunda Guerra Mundial e desde então surgiram várias técnicas para prever o comportamento de uma fissura. A seguir apresentam-se algumas das modernas técnicas, que utilizam os recursos dos elementos finitos, empregadas no estudo de propagação de fissura.

#### – Malha adaptativa

Uma das primeiras ferramentas desenvolvidas para descrever o colapso, ou seja, descrever a formação e propagação de fissuras em sólidos bidimensionais pelo método de elementos finitos foi o método da Malha Adaptativa (também conhecido como remalha), que consiste basicamente em “transformar” a malha de elementos finitos a cada etapa de propagação da fissura, Bittencourt, Wawrzynek, Ingraffea e Sousa (1996). Esse método tem como característica a constante reorganização da malha de elementos finitos de forma que as faces dos elementos se situem na superfície de descontinuidade, e faz com que os nós das faces se dupliquem distribuindo para ambos os lados da fissura. Segundo Blanco (2006), o método gera um grande volume de dados o que dificulta a análise das informações.

Cavalcante, Wawrzynek, Carvalho, Martha e Ingraffea (2001) apresentam a técnica mencionada acima, para análise tridimensional, que consiste também na adaptação da malha na região próxima a descontinuidade, ou seja, excluem-se elementos e adicionam-se novos elementos de diferentes tamanhos na região onde há a fissura de forma que a descontinuidade pertença à face dos elementos adicionados, a fim de melhor representar a progressão da fissura, como mostra a Figura (2.2).

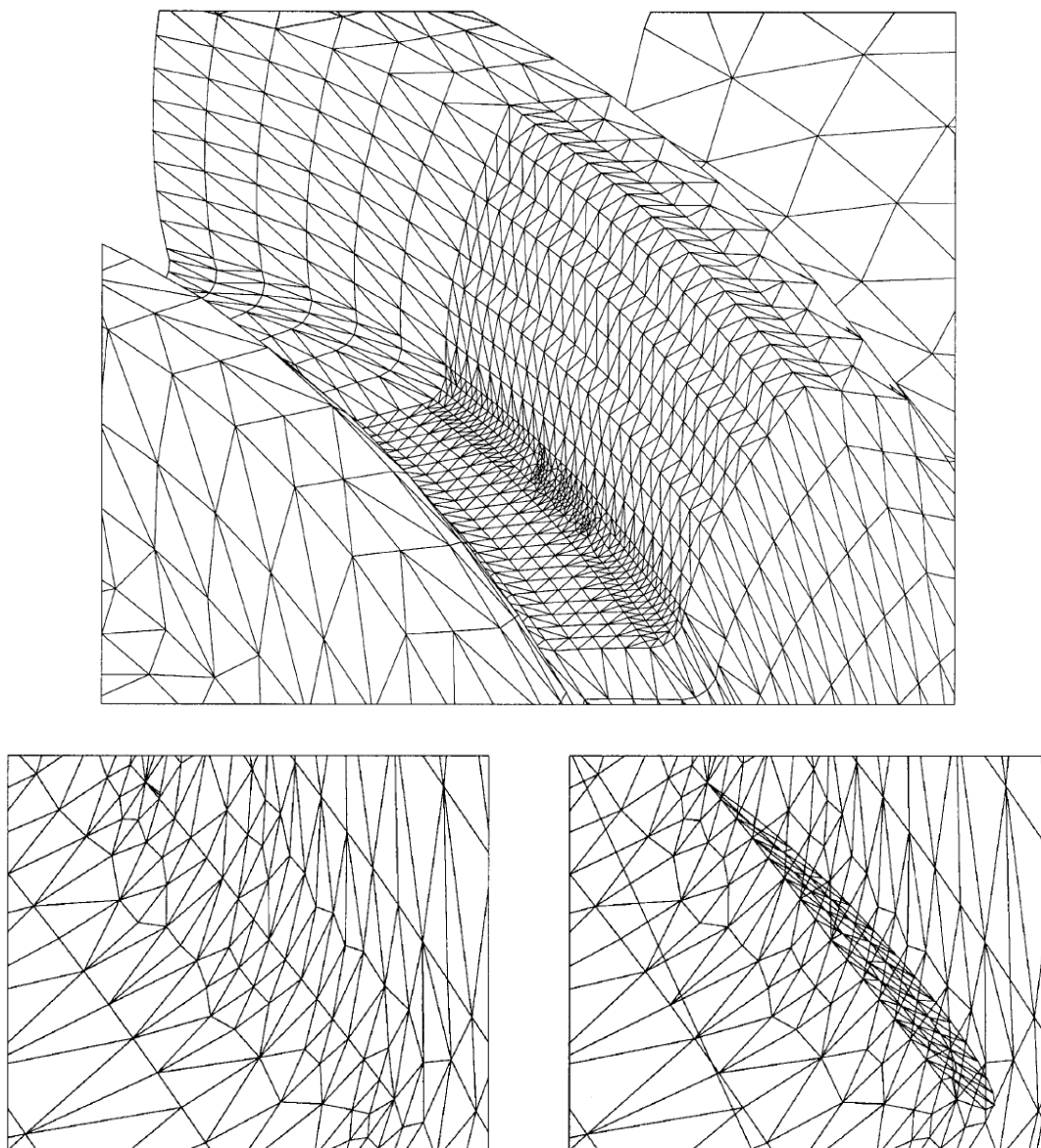


Figura 2.2: a) Malha com fissura. b) Detalhes da malha com fissura e c) Malha com a fissura emoldurada pela face dos elementos adicionados, Ingraffea et al. (2001).

### – Elementos finitos enriquecidos

Para que não seja necessária a reorganização da malha de elementos finitos para descrever o caminho da descontinuidade, foram desenvolvidas metodologias que representam discretamente a descontinuidade sem a necessidade de mudança geométrica da malha de elementos finitos. Tais técnicas estão divididas em dois grupos:

- Enriquecimento elementar: compreendido pelos elementos finitos com descontinuidade incorporada, que se baseiam no enriquecimento no campo de

deformações de cada elemento para representar os efeitos da descontinuidade que o atravessa, conhecido como E-FEM, originalmente descrito por Ortiz, Leroy e Needleman (1987).

- Enriquecimento nodal: compreendido pelos elementos finitos generalizados ou estendidos (X-FEM), que se baseiam no enriquecimento das funções interpoladoras associadas aos nós existentes, tendo como precursores Melenk e Babuska (1996).

Estudos comparativos entre os dois métodos de enriquecimento, realizado por Oliver, Huespe e Sánchez (2006), revelam que não existem diferenças entre os dois métodos quanto à precisão e convergência dos resultados em malhas refinadas. Entretanto, é observada uma maior precisão e suavidade da descontinuidade obtida através do enriquecimento elementar para os casos em que a malha é grosseira. Em relação ao custo computacional, o método elementar é mais vantajoso, sendo que, para os casos de fissura simples o método de enriquecimento nodal é de 1,3 a 2,5 vezes mais lento que o método elementar. Para os casos de múltiplas fissuras o método elementar praticamente não tem seu tempo de processamento aumentado, enquanto que o método nodal tem seu tempo de processamento aumentado em cerca de 20% para cada fissura adicional, em problemas tridimensionais. Ressaltam ainda, que ambos os métodos são passíveis de aperfeiçoamentos.

A seguir tem-se a descrição do conceito empregado na formulação de elementos finitos com descontinuidade incorporada (*E-FEM*), no âmbito bidimensional, apresentado por Manzoli (2008).

O salto de deslocamento,  $[[\mathbf{u}]]$ , ocorrido na região da descontinuidade forte, é dado pela indução de concentração de deformação devido à presença da descontinuidade, de forma que o deslocamento relativo do nó isolado pela descontinuidade representa o salto no deslocamento, como ilustra a Figura (2.3). Assim, o enriquecimento de um elemento finito para representar uma superfície (linha em 2D) de descontinuidade forte em seu interior pode ser feito introduzindo uma banda de localização de deformações em sua cinemática.

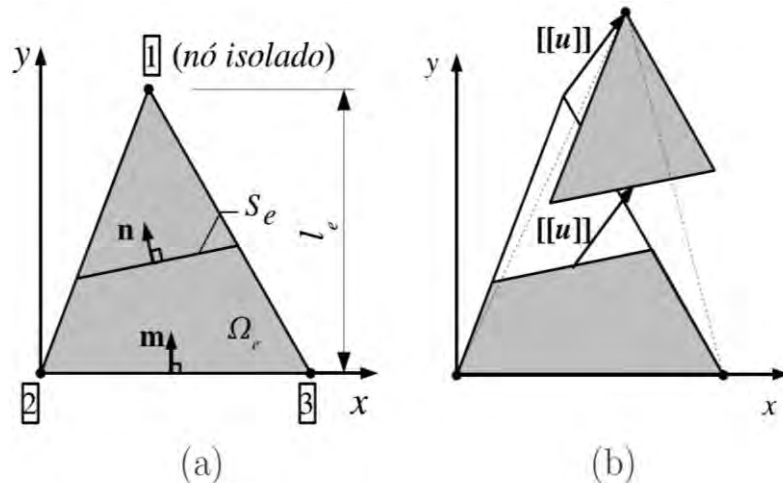


Figura 2.3: Elemento bidimensional com descontinuidade incorporada. a) Elemento atravessado por uma interface descontínua  $S_e$  e b) Salto resultante no campo de deslocamento, Manzoli (2008).

#### – Algoritmos de descrição da trajetória da fissura

Para que os dois tipos de enriquecimento possam representar o efeito da descontinuidade dentro do elemento, faz-se necessário o uso de algoritmos que descrevam o caminho percorrido pela descontinuidade. Dentre os algoritmos existentes destaca-se a trajetória de fissura fixa (*fixed tracking*), trajetória de fissura local (*local tracking*), trajetória de fissura não local (*non-local tracking*), e por fim, trajetória de fissura global (*global tracking*).

Dentre estes algoritmos, o mais simples corresponde à trajetória de fissura fixa, para qual o caminho de fissura tem que ser conhecido *a priori*. Nesse caso, a trajetória deixa de ser uma incógnita do problema e os elementos atravessados pela superfície potencial de descontinuidade, assim como sua posição no interior de cada um desses elementos, estão previamente definidos. Portanto, durante o processo de carregamento, os elementos desse conjunto podem falhar, ou seja, podem ter sua superfície de descontinuidade ativada, à medida que as tensões atingem o critério de falha. Dado que a superfície de falha potencial definida *a priori* é contínua entre elementos finitos, a superfície final, ativa, também será. A análise nesse caso terá interferência apenas da ordem em que os elementos atravessados pela superfície potencial de falha se ativam, em função do nível do carregamento, já que a



trajetória permanece inalterada. Segundo Jäger, Steinmann e Kuhl (2008), do ponto de vista computacional, este algoritmo é particularmente robusto e estável.

Há também a trajetória de fissura local, que pode ser interpretada como a generalização tridimensional de fratura localizada da análise de fratura bidimensional, (Manzoli, 1998). Com a técnica a fissura se estende essencialmente de pontos de descontinuidade em elementos vizinhos ao elemento com fissura ativa e segue na direção normal a tensão principal máxima. Tendo em vista que este conceito poderia render, eventualmente, superfícies não-regulares e descontínuas, Areias e Belytschko (2001) sugeriram ajustar o plano normal de falha baseado nos pontos de intersecção da fissura do elemento vizinho com o elemento que possui a falha ativa.

Outra técnica existente é a trajetória de fissura não local, que calcula a direção média do plano de falha ao longo de uma vizinhança. Gasser e Holzapfel (2006) asseguram que a superfície descontínua gerada é em média regular. Em outras palavras, o vetor normal ao plano de fissura, calculado a partir da direção da máxima tensão principal não é apenas adaptado aos pontos dos elementos da vizinhança. Ao invés disso, o método adicionalmente contabiliza a informação de todos os pontos de fissura dentro de uma esfera em torno do centro do elemento analisado. Embora seja uma metodologia teoricamente elegante, é bastante incômodo incluí-la em códigos de elementos finitos existentes.

Por fim, tem-se a trajetória de fissura global que apresenta uma solução por elementos finitos específica para o problema de fissura, caracterizada por um valor escalar adicional, desconhecido, que define uma ou múltiplas superfícies de fissura como isosuperfícies. Esse algoritmo proposto por Oliver e Huespe (2004) objetiva encontrar um campo escalar  $\theta(\mathbf{x}, t)$ , de modo que as superfícies de isovalores sejam superfícies potenciais de descontinuidade. Portanto, o campo vetorial dado pelos vetores normais às superfícies de isovalores,  $\theta, \nabla\theta$ , deve coincidir com o campo de vetores normais à superfície potencial de falha, estabelecidos pelo critério de falha calculado sobre as tensões (ou deformações) do problema mecânico.

Segundo Jäger, Steinmann e Kuhl (2008), a metodologia de trajetória de fissura global apresenta um esforço computacional elevado, já que requer a solução de um sistema global de equações adicional, além do correspondente ao problema mecânico. Apesar disso, a metodologia é de fácil incorporação em programas de elementos finitos existentes, é flexível e estável, quando comparada as demais estratégias de trajetória de fissura.

Manzoli (1998) utilizou com êxito o algoritmo local cuja solução da análise de problemas de fissuras bidimensionais corresponde a uma linha, que pode ser construída de

maneira relativamente simples, mediante o seqüenciamento de segmentos retos orientados de acordo com a direção de falha no interior de cada elemento, formando uma linha poligonal, conforme a Figura (2.4).

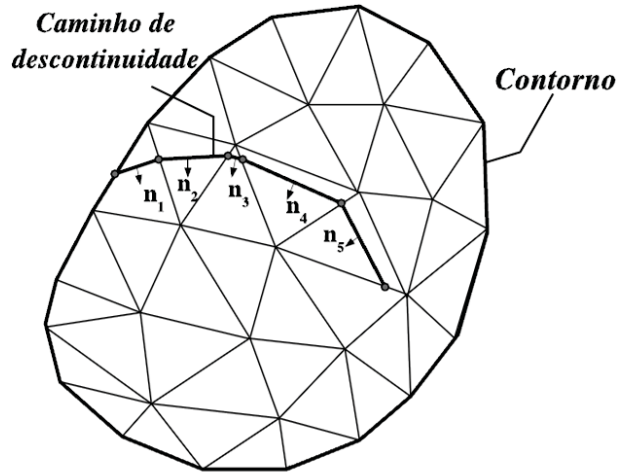


Figura 2.4: Construção da trajetória de descontinuidade em 2D, (Manzoli, 1998).

Nos casos tridimensionais, a construção da superfície ocorre através de seqüenciamento espacial de superfícies planas no interior de cada elemento, o que é uma tarefa muito complexa, pois a continuidade dessas superfícies entre os elementos deve ser estabelecida.

Chaves (2003) apresenta resultados obtidos para análises tridimensionais, com o algoritmo global de trajetória de fissura proposto Oliver e Huespe (2004), como pode ser visto na Figura (2.5), enfatizando a continuidade das superfícies planas entre os elementos.



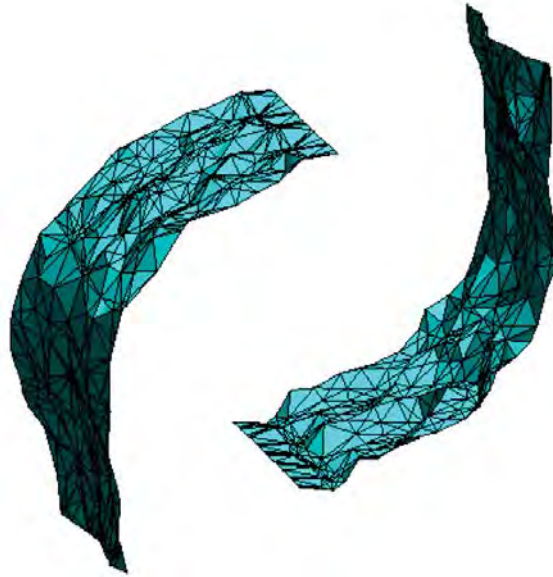


Figura 2.5: Superfícies de fissura tridimensionais contínuas, Chaves (2003).

## 3 – ELEMENTOS FINITOS COM DESCONTINUIDADE INCORPORADA

### 3.1 – Introdução

No presente trabalho utiliza-se o método de enriquecimento elementar como ferramenta de predição do comportamento da fissura no interior do elemento finito, devido às vantagens em relação à técnica de enriquecimento nodal, já apresentadas no Capítulo 2. Assim, utilizar-se-á uma extensão para problemas tridimensionais da técnica de incorporação de descontinuidades no interior de elementos finitos, proposta por Manzoli e Shing (2006) e Manzoli (2008). Sua formulação estendida para análises tridimensionais com elementos finitos tetraédricos de quatro nós é apresentada nesse capítulo.

### 3.2 – Formulação

Seja o elemento tetraédrico de quatro nós, de domínio tridimensional  $\Omega_e$  contendo uma superfície descontínua,  $S$ , que divide o elemento em duas partes, isolando um ou dois nós dos demais. Seja  $\mathbf{n} = \{n_x \ n_y \ n_z\}^T$  o vetor unitário normal à superfície  $S$ , e  $\mathbf{m} = \{m_x \ m_y \ m_z\}^T$  o vetor unitário, correspondente ao gradiente da soma das funções de forma dos nós isolados. No caso de haver somente um nó isolado,  $\mathbf{m}$  corresponde a um vetor normal à face oposta ao nó isolado, como mostra a Figura (3.1 b).

A presença da descontinuidade proporciona um deslocamento relativo do nó isolado com relação aos demais, que pode ser visto na Figura (3.1 a), e expresso por:

$$\mathbf{d}_1^R = \llbracket \mathbf{u} \rrbracket \tag{3.1 a}$$

$$\mathbf{d}_2^R = 0 \quad (3.1 \text{ b})$$

$$\mathbf{d}_3^R = 0 \quad (3.1 \text{ c})$$

$$\mathbf{d}_4^R = 0 \quad (3.1 \text{ d})$$

sendo que o vetor  $\mathbf{d}_i^R$  ( $i = 1, 2, 3$  e  $4$ ) reúne as componentes dos deslocamentos de cada nó produzidos pela descontinuidade e  $[[\mathbf{u}]]$  é o vetor das componentes dos deslocamentos nodais relativos na superfície descontinua, como mostra a Figura (3.1 b).

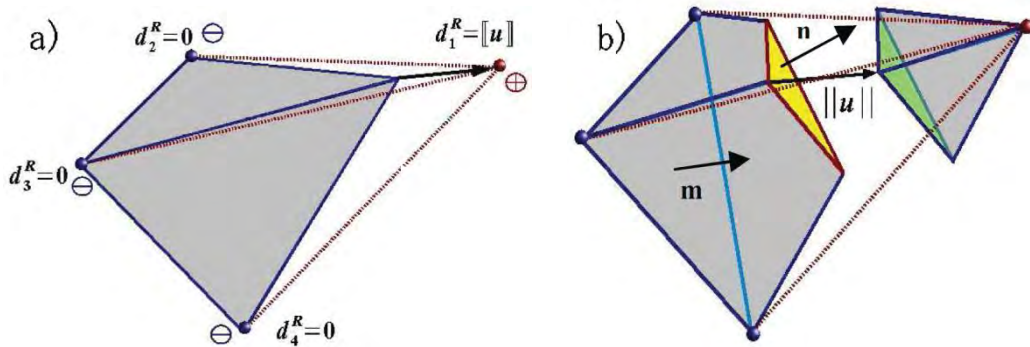


Figura 3.1: a) Elemento tridimensional, b) Vetor deslocamento relativo à descontinuidade, com deslocamento de um nó, (Claro, Rodrigues e Manzoli, 2010).

Os deslocamentos nodais produzidos pela descontinuidade,  $\mathbf{d}_i^R$ , são oriundos de movimento de corpo rígido entre as duas porções do elemento separadas pela descontinuidade. Logo, ao determinar as deformações,  $\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \gamma_{xy} \ \varepsilon_z \ \gamma_{yz} \ \gamma_{xz}\}^T$ , a partir dos deslocamentos nodais do elemento,  $\mathbf{d}_i$ , a componente dos deslocamentos nodais associados à descontinuidade,  $\mathbf{d}_i^R$  deve ser subtraída, ou seja:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{i=1}^4 \mathbf{B}_i (\mathbf{d}_i - \mathbf{d}_i^R) \quad (3.2)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{i=1}^4 \mathbf{B}_i \mathbf{d}_i - \mathbf{B}_1 [[\mathbf{u}]] \quad (3.3)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \mathbf{d} - \boldsymbol{\varepsilon}^R \quad (3.4)$$

sendo que a matriz  $\mathbf{B}$  agrupa as matrizes  $\mathbf{B}_i$  (deformação-deslocamento nodal) convencionais do Método dos Elementos Finitos, o vetor  $\mathbf{d}$  agrupa os vetores de deslocamentos nodais de todos os nós,  $\mathbf{d}_i$ , e  $\boldsymbol{\varepsilon}^R = \mathbf{B}_1 \llbracket \mathbf{u} \rrbracket$  corresponde à parte das deformações associadas ao deslocamento de corpo rígido, originadas pela descontinuidade:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^R \\ \varepsilon_y^R \\ \gamma_{xy}^R \\ \varepsilon_z^R \\ \gamma_{yz}^R \\ \gamma_{xz}^R \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_1}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_x \\ \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_y \\ \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_z \end{Bmatrix} \quad (3.5 \text{ a})$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^R \\ \varepsilon_y^R \\ \gamma_{xy}^R \\ \varepsilon_z^R \\ \gamma_{yz}^R \\ \gamma_{xz}^R \end{Bmatrix} = \frac{1}{l_e} \begin{bmatrix} m_x & 0 & 0 \\ 0 & m_y & 0 \\ m_y & m_x & 0 \\ 0 & 0 & m_z \\ 0 & m_z & m_y \\ m_z & 0 & m_x \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_x \\ \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_y \\ \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_z \end{Bmatrix} \quad (3.5 \text{ b})$$

onde  $N_1$  é a função de forma convencional do M.E.F., associada ao nó isolado. Na Equação (3.5 b),  $l_e$  é o inverso da norma do vetor gradiente da soma das funções de forma dos nós isolados, que no caso ilustrado, com apenas um nó isolado, corresponde à distância entre o nó isolado e a face oposta, denominada aqui “comprimento característico” do elemento. Portanto, na Equação (3.5 a) teve-se em conta que:

$$\left\{ \frac{\partial N_1}{\partial x}, \frac{\partial N_1}{\partial y}, \frac{\partial N_1}{\partial z} \right\} = \left\{ \frac{m_x}{l_e}, \frac{m_y}{l_e}, \frac{m_z}{l_e} \right\} \quad (3.6)$$

Considerando-se o comportamento elástico linear na parte contínua do elemento, as tensões  $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_x \ \sigma_y \ \gamma_{xy} \ \sigma_z \ \gamma_{yz} \ \gamma_{xz}\}$  podem ser obtidas por:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.7)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}(\mathbf{B}\mathbf{d} - \boldsymbol{\varepsilon}^R) \quad (3.8)$$

sendo  $\mathbf{E}$  a matriz constitutiva elástica linear. Na Equação (3.8), observa-se que as deformações  $\boldsymbol{\varepsilon}^R$  desempenham o papel de deformações inelásticas compatíveis com o deslocamento relativo do nó isolado provenientes da descontinuidade.

Dado que as tensões são constantes no elemento, o vetor de forças internas do elemento pode ser expresso por:

$$\mathbf{f}_{int} = \int \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega_e \quad (3.9)$$

$$\mathbf{f}_{int} = \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} V_e \quad (3.10)$$

sendo  $V_e$  o volume do elemento finito.

Completa-se a formulação do elemento finito com descontinuidade incorporada introduzindo-se a lei constitutiva discreta da interface,  $\mathbf{t}(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket)$ , que estabelece a relação entre as componentes da descontinuidade e as forças de superfície, juntamente com a condição de continuidade ente as forças de superfície da parte contínua e da interface:

$$\mathbf{t}(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket) - \mathbf{N}^T \boldsymbol{\sigma} = 0 \quad (3.11)$$

Pelas Equações (3.5) e (3.8), as Equações (3.10) e (3.11) podem ser reescritas como:

$$\mathbf{f}_{int} = \mathbf{B}^T \mathbf{E} \left( \mathbf{B}\mathbf{d} - \frac{M}{l_e} \llbracket \mathbf{u} \rrbracket \right) V_e \quad (3.12)$$

$$\mathbf{t}(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket) - \mathbf{N}^T \mathbf{E} \left( \mathbf{B}\mathbf{d} - \frac{M}{l_e} \llbracket \mathbf{u} \rrbracket \right) = 0 \quad (3.13)$$

onde,

$$\mathbf{N}^T = \begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y & 0 & 0 & n_z \\ 0 & n_y & n_x & 0 & n_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n_z & n_y & n_x \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

$$\mathbf{M}^T = l_e \mathbf{B}_1^T = \begin{bmatrix} m_x & 0 & m_y & 0 & 0 & m_z \\ 0 & m_y & m_x & 0 & m_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_z & m_y & m_x \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Em um procedimento incremental e iterativo, a Equação (3.13) é usada para calcular os saltos de deslocamentos no elemento,  $[[\mathbf{u}]]$ , para um determinado vetor de deslocamentos nodais,  $\mathbf{d}$ . Então, utiliza-se a Equação (3.12) para o cálculo das forças internas do elemento.

No entanto, faz-se necessário o uso de um algoritmo que seja capaz de informar quais nós serão deslocados, ou seja, quais nós serão separados pela descontinuidade (nós isolados) e informar também a direção da superfície de descontinuidade, ou seja, a posição da superfície de descontinuidade no interior do elemento. Uma das técnicas existentes para este fim vem a ser o algoritmo de trajetória de fissura global, técnica base do presente trabalho, que é apresentada em detalhes no Capítulo 4.

## **4 – ALGORITMO GLOBAL DE TRAJETÓRIA DE FISSURA**

### **4.1 – Introdução**

Neste capítulo descreve-se o processo de solução do algoritmo global de trajetória de fissura proposto por Oliver e Huespe (2004), que servirá como base para o algoritmo proposto. Trata-se da descrição das condições iniciais necessárias para a solução, das etapas a serem seguidas para a construção da superfície de descontinuidade, bem como da formulação envolvida no algoritmo, correspondente à solução de um problema térmico equivalente.

### **4.2 – Passos de solução do algoritmo global de trajetória de fissura**

Para que o algoritmo construa a trajetória da descontinuidade é necessário que lhe seja informado, inicialmente, o campo vetorial que determina a direção normal de propagação da descontinuidade em todo domínio em análise. Este pode ser encontrado a partir do campo de tensões ou de deformações obtido através da solução do problema mecânico. Para exemplificar, no caso de se tomar como critério de falha um limite sobre a máxima tensão principal (critério de Rankine), o campo vetorial será formado pela direção da máxima tensão principal correspondente em cada ponto do meio contínuo. Cabe destacar que a direção principal sempre pode ser calculada em todo o domínio, independentemente se o estado de tensão tenha atingido ou não o critério de início de falha.

Para construir a superfície de descontinuidade, o algoritmo soluciona um problema análogo a um problema de condução de calor. A solução deste permite identificar um valor escalar que descreve o caminho da superfície de fissura. Para tanto, é necessário prescrever, antes do início da análise, valores escalares em pelo menos dois nós distintos da malha de elementos finitos. A prescrição de um valor escalar em pelo menos um nó garante que a

solução do problema seja única. A prescrição de outro valor escalar no segundo nó impede que haja isosuperfícies de mesmo valor.

Além disso, faz-se necessário, no início de cada passo de carga, realizar atualizações a respeito da situação da superfície de falha no interior do elemento finito, indicando se há falha ativa ou não, ou seja, se o critério de falha foi atingido ou não. Quando o estado de tensões do elemento atinge o critério de falha (a falha se ativa), a orientação do plano de falha correspondente não se altera no restante da análise. Isto significa que o valor escalar dos nós do elemento que atingiu o critério de falha se manterá fixo até o final da análise.

Oliver e Huespe (2004) apresentam o processo de construção da superfície de falha por etapas, que podem ser descritas como segue:

1 – ***Traçar as isosuperfícies*** (superfícies de isovalores). Para cada valor escalar encontrado através da solução do problema térmico equivalente e com base no campo vetorial de direções normais de propagação, tem-se uma superfície de isovalor.

2 – ***Identificar a superfície de falha ativa e o seu correspondente valor***. Pelo menos uma das isosuperfícies encontradas será a superfície potencial de falha. A superfície de falha ativa é dada com base no critério de falha e no valor escalar de referência. O valor de referência é encontrado realizando uma média dos valores nodais do primeiro elemento a atingir o critério de falha. A superfície de fissura ativa no primeiro elemento que atingiu o critério de falha, passa pelo centróide do elemento e será denominado elemento raiz.

3 – ***Determinar a posição da fissura nos elementos vizinhos ao elemento raiz***. A posição da descontinuidade é obtida com base no valor escalar da superfície construída no elemento raiz (valor de referência). Para se determinar a localização da descontinuidade dentro do elemento realiza-se uma interpolação linear, que relaciona a diferença entre o valor escalar de cada nó e o valor escalar de referência, com as coordenadas geométricas de cada nó correspondente. Dessa maneira determina-se o ponto pertencente à aresta do elemento em que se encontra o valor de referência.

4 – ***Fixar a direção de propagação da descontinuidade***. Uma vez que o elemento atingiu o critério de falha, os valores escalares dos nós nesse elemento serão mantidos fixos até o final da análise numérica.

O processo de construção da descontinuidade dentro do elemento finito ocorre sucessivamente, conforme descrito nos passos três e quatro, até que haja a ruptura total do sólido analisado.

A seguir será apresentada a formulação do problema de condução de calor equivalente, bem como a aproximação do problema pelo método dos elementos finitos,



tornando possível encontrar o valor escalar que caracteriza o caminho percorrido pela descontinuidade.

### 4.3 – Formulação do problema análogo ao problema de condução de calor

Seja  $\mathbf{n}(\mathbf{x}, t) = \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix}$  um vetor normal à superfície de descontinuidade. É possível

definir para cada ponto  $\mathbf{x}$  do domínio  $\Omega$ , dois vetores  $\mathbf{s}$  e  $\mathbf{t}$  ortogonais a  $\mathbf{n}$  e entre si, ou seja,

$$\mathbf{s} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (4.1)$$

A partir dos vetores  $\mathbf{s}$  e  $\mathbf{t}$  é possível construir um plano tangente à direção de propagação da descontinuidade, como mostra a Figura (4.1).

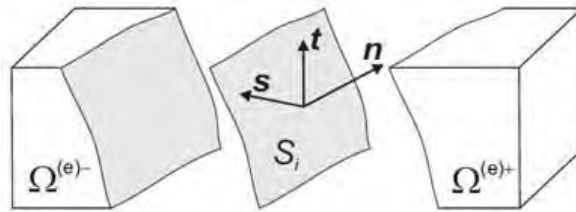


Figura 4.1: Elemento com superfície de descontinuidade,  $S_i$ , descrita pelo plano tangente formado por  $\mathbf{s}$  e  $\mathbf{t}$  e normal a  $\mathbf{n}$ .

Também é possível determinar um tensor anisotrópico de condutividade a partir dos vetores  $\mathbf{s}$  e  $\mathbf{t}$ :

$$\mathbf{K}(\mathbf{s}(\mathbf{x}), \mathbf{t}(\mathbf{x})) = \mathbf{s} \otimes \mathbf{s} + \mathbf{t} \otimes \mathbf{t} \quad (4.2 \text{ a})$$

$$\mathbf{K}(\mathbf{s}(\mathbf{x}), \mathbf{t}(\mathbf{x})) = \begin{bmatrix} s_1^2 + t_1^2 & s_1 s_2 + t_1 t_2 & s_1 s_3 + t_1 t_3 \\ s_2 s_1 + t_2 t_1 & s_2^2 + t_2^2 & s_2 s_3 + t_2 t_3 \\ s_3 s_1 + t_3 t_1 & s_3 s_2 + t_3 t_2 & s_3^2 + t_3^2 \end{bmatrix} \quad (4.2 \text{ b})$$

de modo que um vetor de fluxo pode ser definido como:

$$\mathbf{q}(\mathbf{x}, t) = -\mathbf{K} \cdot \nabla \theta \quad (4.3)$$

A família de superfícies dadas pelos vetores ortogonais pode ser descrita por uma função escalar,  $\theta(\mathbf{x})$ , como segue:

$$S_i = \{\mathbf{x} \in \Omega; \theta(\mathbf{x}) = \theta_i\}, \text{ com } \theta_i \in \mathbb{R} \quad (4.4)$$

Essas superfícies são tangentes, em cada ponto do domínio, aos vetores  $\mathbf{s}$  e  $\mathbf{t}$ , e esses vetores são normais ao vetor  $\mathbf{n}$ . Então o campo vetorial de direções normais à superfície de descontinuidade deve ser igual ao gradiente de temperatura, ou seja,  $\nabla \theta = \mathbf{n}$ . Assim:

$$\mathbf{s} \cdot \nabla \theta = \nabla \theta \cdot \mathbf{s} = 0 \text{ em } \Omega \quad (4.5 \text{ a})$$

$$\mathbf{t} \cdot \nabla \theta = \nabla \theta \cdot \mathbf{t} = 0 \text{ em } \Omega \quad (4.5 \text{ b})$$

A solução das Equações (4.5 a) e (4.5 b), também é solução do problema de condutividade térmica, mostrado na Figura (4.2), cujo objetivo é encontrar  $\theta(\mathbf{x})$  que satisfaça as seguintes condições:

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = 0, \text{ em } \Omega \quad (4.6)$$

$$\mathbf{q} = -\mathbf{K} \cdot \nabla \theta, \text{ em } \Omega \quad (4.7)$$

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{v} = 0, \text{ em } \partial_q \Omega \quad (4.8)$$

$$\theta = \theta^*, \text{ em } \partial_\theta \Omega \quad (4.9)$$

sendo  $\mathbf{v}$  um vetor normal ao contorno do sólido, onde  $\partial \Omega = \partial_\theta \Omega \cup \partial_q \Omega$  e  $\theta^*$  representa os valores prescritos de  $\theta$  no contorno.

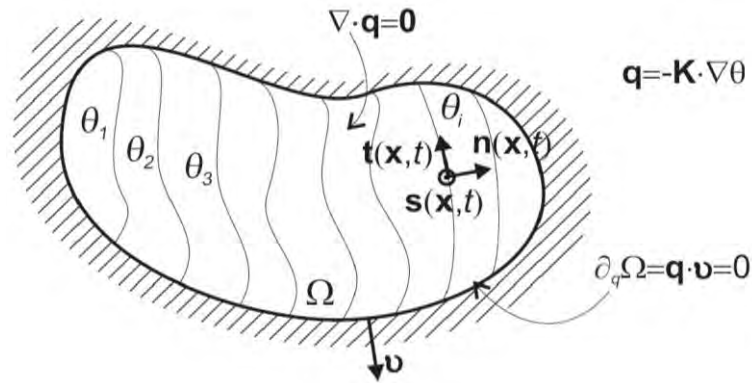


Figura 4.2: Problema de valores de contorno tipo térmico

#### 4.4 Aproximação por elementos finitos

O problema de condutividade térmica pode ser solucionado a partir da sua forma fraca, obtida pelo Método dos Resíduos Ponderados: Assim, as Equações (4.6), (4.7) e (4.8) podem ser reescritas como:

$$\int_{\Omega} (\nabla W)^T \cdot \mathbf{K} \cdot \nabla \theta d\Omega = \int_{\Gamma=\Gamma_{\theta}+\Gamma_q} W \cdot \mathbf{q}^T \cdot \mathbf{v} d\Gamma \quad (4.10)$$

onde  $W$  são função ponderadoras.

Pela condição de contorno exposta na Equação (4.8), a Equação (4.10) passa ser dada por:

$$\int_{\Omega} (\nabla W)^T \cdot \mathbf{K} \cdot \nabla \theta d\Omega = 0 \quad (4.11)$$

Dado um domínio  $\Omega$  discretizado em  $n_e$  elementos finitos e  $n_n$  nós para cada elemento finito, a função  $\theta(\mathbf{x})$  pode ser aproximada por funções de forma para cada elemento finito:

$$\theta^e(\mathbf{x}) = \mathbf{N}^e \cdot \boldsymbol{\theta}^e \quad \theta|_{\partial\theta\Omega} = \theta^* \quad (4.12)$$

sendo que  $\boldsymbol{\theta}^e$  representa o vetor dos valores escalares nodais para um elemento finito e  $\mathbf{N}^e$  são as funções de forma convencionais do elemento.

Aplicando o Método de Galerkin na Equação (4.11) e substituindo a Equação (4.12) na Equação (4.11), tem-se:

$$\sum \int_{\Omega_e} (\nabla N^e)^T \cdot K \cdot \nabla N^e \cdot \theta^e d\Omega = \mathbf{0} \quad (4.13)$$

sendo  $\sum$  um operador de montagem padrão de elementos finitos (Hughes, 2000).

Pode-se escrever a Equação (13) de forma compacta, como segue:

$$\mathbb{K} \cdot \boldsymbol{\theta} = \mathbf{0} \quad (4.14)$$

onde  $\boldsymbol{\theta}$  é o vetor global de valores escalares nodais e  $\mathbb{K}$  representa a matriz de rigidez global, composta pelas matrizes de rigidezes elementares, dadas por:

$$\mathbb{K}^e = \int_{\Omega_e} (\nabla N^e)^T \cdot K \cdot \nabla N^e d\Omega \quad (4.15)$$

tal que,

$$\mathbb{K} = \sum_{e=1}^{n_e} \mathbb{K}^e \quad (4.16)$$

e

$$\boldsymbol{\theta} = \sum_1^{n_n} \theta^e \quad (4.17)$$

Encontrar o valor escalar de todos os nós de todos os elementos da malha consiste em solucionar o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \mathbb{K} \cdot \boldsymbol{\theta} = \mathbf{0} \\ \theta|_{\partial\theta\Omega} = \theta^* \end{cases} \quad (4.18)$$

#### 4.5 Traçado das superfícies potenciais de fissura

Assim que a descontinuidade é detectada em um elemento finito (elemento raíz), determina-se o valor médio de  $\theta$  no elemento através da média aritmética dos valores nodais, como segue:

$$\theta_i = \frac{1}{n} \sum_1^n \theta \quad (4.19)$$

onde  $n$  corresponde à quantidade de nós do elemento. No presente trabalho utiliza-se malha com elementos tetraédricos, logo o número de nós de cada elemento finito é igual a quatro.

O valor médio,  $\theta_i$ , do elemento raiz será utilizado para determinar a posição da descontinuidade nos elementos finitos vizinhos e será denominado a partir de então como valor de referência. O valor de referência corresponde a uma superfície potencial de falha,  $S_i$ , que pode ser construída integralmente no domínio.

Uma vez encontrado os valores escalares nodais e o valor de referência, a posição da superfície de descontinuidade,  $S_i$ , dentro de um dado elemento finito, pode ser encontrada através da diferença entre o valor nodal e o valor de referência ( $\theta - \theta_i$ ), permitindo identificar os vértices que obtiveram valores negativos e positivos, ou seja, determinar as arestas que envolvem mudança de sinal, como mostra a Figura (4.3).

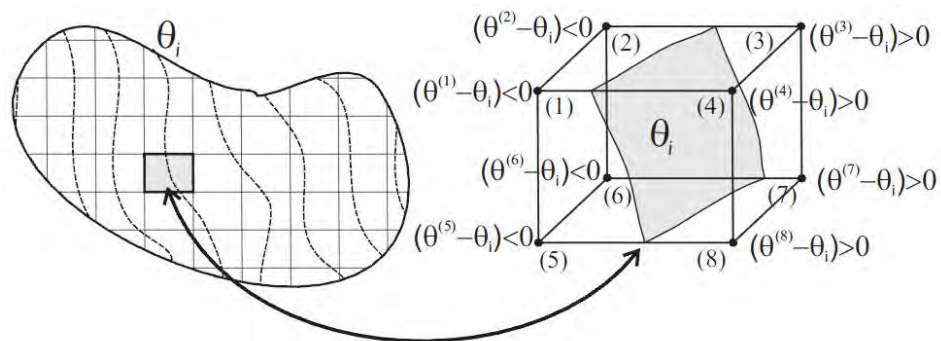


Figura 4.3: Construção da superfície potencial de falha, baseada no valor médio  $\theta_i$ .

Por fim, para identificar a posição da superfície de descontinuidade nas arestas do elemento os quais possuem nós (vértices) que envolveram mudança de sinal, realiza-se interpolação linear que relaciona o tamanho da aresta do elemento com a diferença entre o valor escalar nodal e o valor de referência. A Figura (4.4) ilustra o método descrito, para o caso bidimensional.

Dessa maneira pode-se determinar a posição de qualquer valor de isosuperfície na aresta analisada. No exemplo dado na Figura (4.4) são anotados os pontos onde a isosuperfície de valor nulo passa por duas arestas.

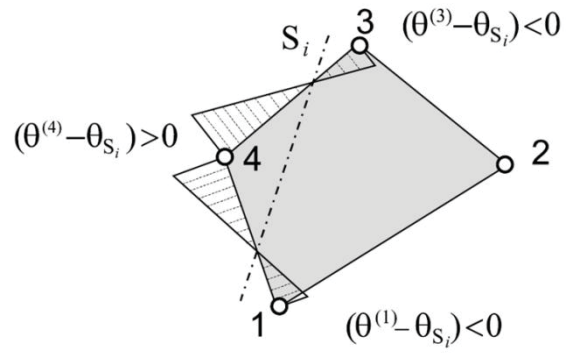


Figura 4.4: Interpolação linear para um elemento finito quadrilátero em 2D, Chaves (2003).

## 5 – ALGORITMO DE TRAJETÓRIA DE FISSURA PROPOSTO

### 5.1 – Introdução

O presente trabalho propõe um algoritmo para identificar a trajetória de fissuras, baseado no algoritmo de trajetória de fissura global proposto por Oliver e Huespe (2004), no qual se introduz uma modificação capaz de reduzir o esforço computacional envolvido. O conceito básico consiste em construir o sistema de equações adicionais (correspondente ao problema da trajetória da fissura), somente para os elementos localizados na região próxima à superfície de falha, ao invés de tomar todo o domínio do problema mecânico, como faz o algoritmo de trajetória de fissura global. Assim, neste capítulo apresentam-se as etapas de solução do algoritmo de trajetória de fissura proposto, bem como um exemplo numérico para ilustrar a construção do caminho da descontinuidade através da metodologia proposta.

### 5.2 – Algoritmo de trajetória de fissura proposto

O algoritmo proposto, assim como o algoritmo global, necessita, como uma das condições iniciais, que lhe seja informado o campo vetorial  $\mathbf{n}$  de direções normais a superfície descontinuidade.

Outra condição inicial necessária é a prescrição de valores escalares em dois nós diferentes da malha de elementos finitos. Na metodologia proposta esses valores são impostos em dois nós do primeiro elemento finito que atinge o critério de falha (elemento raiz). Prescreve-se os valores dos dois nós como sendo -1,0 e 1,0 para garantir que o valor de referência seja nulo.

No início de cada passo de carga atualiza-se a situação da superfície de descontinuidade dentro do elemento, indicando se o critério de falha foi atingido ou não. Caso o critério de falha seja atingido em um elemento, determina-se a posição da fissura nesse

elemento, realizando uma interpolação linear entre a diferença dos valores escalares em cada nó e o valor de referência, e a posição de cada nó no domínio de análise.

O algoritmo de trajetória de fissura proposto pode ser descrito pelas seguintes etapas:

1 – **Topologia do problema**. Consiste em guardar os dados da malha de elementos finitos para que o algoritmo seja capaz de identificar com mais rapidez, quais são os elementos vizinhos às faces do elemento que atingir o critério de falha.

2 – **Construção da superfície potencial de falha no primeiro elemento com falha ativa**. Diferentemente do algoritmo global de trajetória de fissura, o algoritmo proposto não encontra o valor escalar de todos os nós da malha, pois o domínio de análise não é mais toda malha e sim apenas o elemento indicado inicialmente como o primeiro elemento a atingir o critério de falha. Como foram prescritos os valores -1.0 e 1.0 para dois dos quatro nós do primeiro elemento finito tetraédrico a obter falha ativa, o algoritmo encontra o valor escalar apenas dos outros dois nós. Então, encontra-se a superfície de falha que corresponde ao valor escalar nulo, que é o valor de referência para as próximas etapas. Tão logo o critério de falha neste elemento seja atingido, os valores escalares nodais desse elemento serão fixados até o final da análise, e seus valores passarão a ser dados de entrada para o próximo passo de carga.

3 – **Identificação do caminho da descontinuidade nos elementos vizinhos**. No passo de carga seguinte à consolidação da superfície de falha no primeiro elemento finito (elemento raiz), o algoritmo proposto identifica quais elementos possuem vértice ou aresta coincidente ao elemento raiz, que então passam a fazer parte do domínio de análise, tornando-se assim elementos candidatos a falhar. Em seguida encontra-se o valor escalar nodal de todos esses elementos e identifica-se quais os nós são isolados pela superfície de descontinuidade. Como na etapa anterior, ao atingir o critério de falha, o valor escalar dos nós do novo elemento fissurado é fixado para todos os passos de carga subsequentes, e seus elementos vizinhos são incluídos ao domínio de análise.

4 – **Construção da superfície de falha no sólido**. A etapa três se repete até a ruptura do sólido, ou seja, o domínio de análise aumenta conforme os elementos atingem o critério de falha e a superfície de descontinuidade é construída progressivamente até que a superfície de fissura atinja o contorno do modelo analisado.

Ressalta-se que em cada passo de carga o problema mecânico indica para o problema de condução de calor equivalente se algum elemento atingiu o critério de falha. Por sua vez, o problema de condução de calor equivalente indica quais nós são isolados pela descontinuidade, para que o elemento passe a ser tratado pelo problema mecânico como um elemento finito com descontinuidade incorporada.



### 5.3 –Exemplo numérico

Apresenta-se um exemplo numérico ilustrativo do processo descrito nas etapas acima, realizando uma comparação entre o algoritmo de trajetória global proposto por Oliver e Huespe (2004), apresentado no capítulo anterior, e o algoritmo de trajetória de fissura proposto, a fim de ilustrar a redução do domínio análise.

Trata-se da análise de um cilindro regular com 10 mm de diâmetro e 10 mm de altura, discretizado em elementos finitos tetraédricos, como ilustra a Figura (5.1).

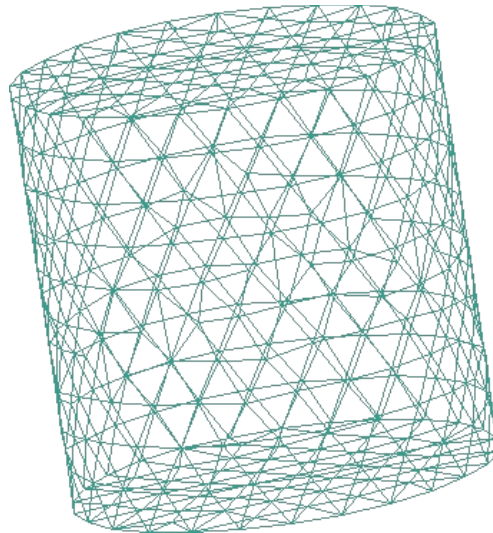


Figura 5.1: Malha de elementos finitos tetraédricos do cilindro.

Nas simulações é utilizado um campo vetorial  $\mathbf{n}$ , orientado de forma arbitrária, não correspondendo necessariamente a um campo de tensões, como pode ser visto na Figura (5.2). Nesse caso utiliza-se o vetor  $\mathbf{n}$ , para cada elemento finito dado por:

$$\mathbf{n} = \{n_1, n_2, n_3\}^T \quad (5.1)$$

sendo  $n_1$ ,  $n_2$  e  $n_3$  as componentes do vetor unitário segundo a direção entre o centro geométrico do elemento em questão e o ponto do eixo do cilindro situado a 2 mm do centro de sua base, como mostra a Figura (5.2).

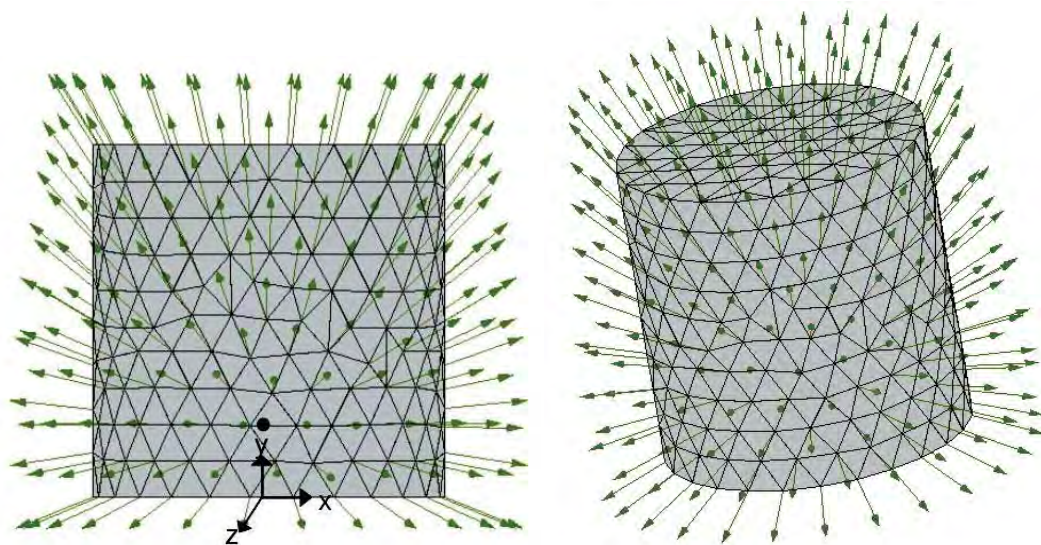


Figura 5.2: Campo vetorial  $n$  orientado.

O primeiro elemento a falhar foi escolhido de maneira também arbitrária, sendo tomado como um elemento da superfície lateral do cilindro. Prescreveram-se valores de temperaturas iguais a -1.0 e 1.0 em dois nós distintos desse elemento. Assim, a superfície de falha, que correspondente à temperatura média nula, passa por esse elemento, como mostra a Figura (5.3).

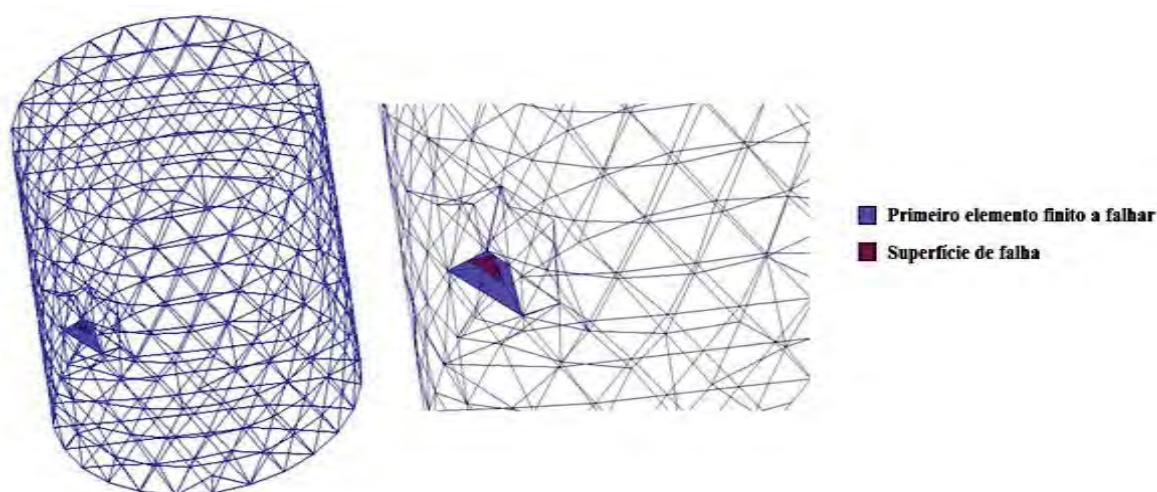


Figura 5.3: Superfície potencial de falha no primeiro elemento indicado para atingir o critério de falha.

Após a solução do problema através do algoritmo proposto, obteve-se a região envolvida na análise, como mostra Figura (5.4), onde a cor azul representa os elementos que

foram atravessados pela descontinuidade, como mostra a Figura (5.5), a cor verde representa o limite de elementos que participaram da análise, ou seja, os elementos finitos que foram candidatos a fissurar.

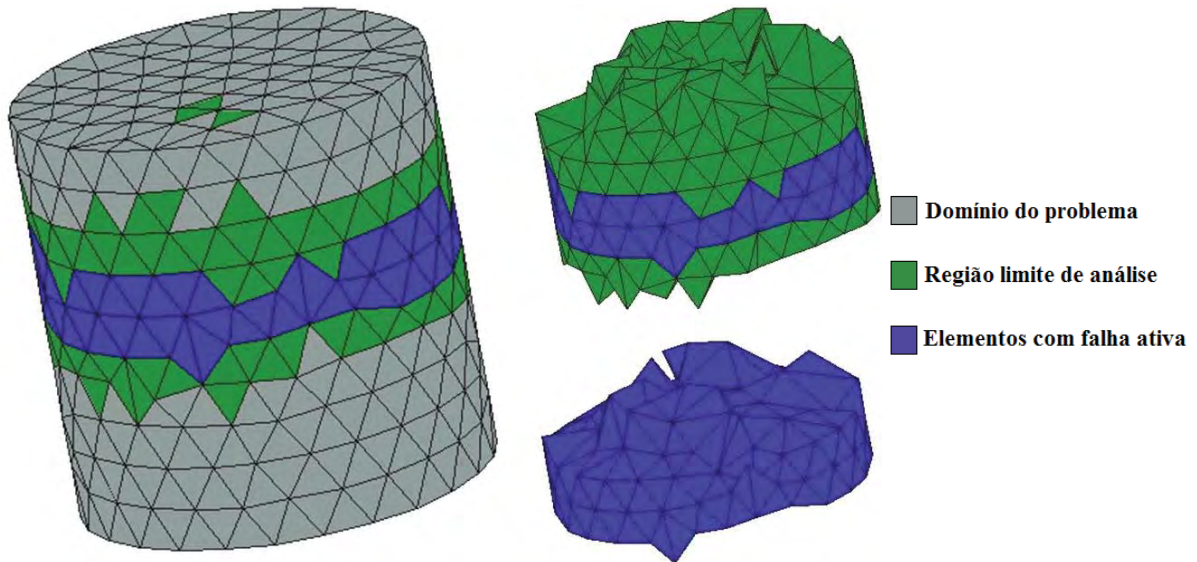


Figura 5.4: Região analisada pelo algoritmo proposto para construção de trajetória de fissura (em vistas diferentes).

A Figura (5.5) ilustra a superfície de fissura (cor vermelha) junto à região abrangida pela análise, bem como a região composta pelos elementos os quais a superfície de falha atravessa (cores: verde e azul respectivamente).

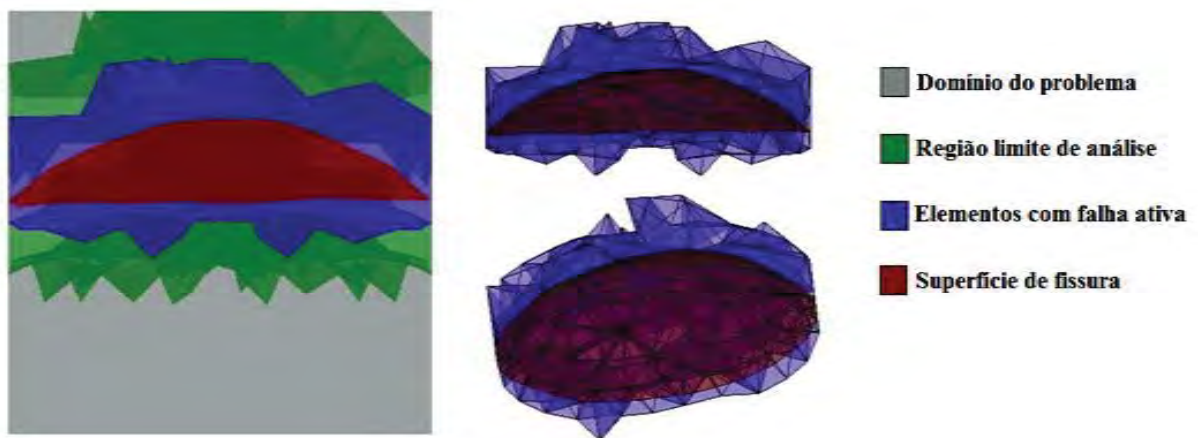


Figura 5.5: a) Região analisada pelo algoritmo proposto com a superfície de fissura e b) Superfície de fissura apenas na região que contém os elementos com falha ativa.



Observando os resultados obtidos nas duas análises, representadas nas Figuras (5.4) e (5.6), pode-se verificar que na primeira análise o volume de dados envolvidos é maior, visto que envolve todos os elementos finitos da malha. Já no segundo estudo, o domínio de análise é menor, restringido-se apenas à região de interesse. É possível, também, comparar as superfícies de fissura em ambas às análises e estas se assemelham.

Apresenta-se também, os vetores normais à superfície de descontinuidade e estes coincidem com o campo vetorial adotado no início da análise, enfatizando que o campo vetorial  $\mathbf{n}$  deve ser igual ao gradiente de temperatura, como descrito no Capítulo 4, ilustrados na Figura (5.6).

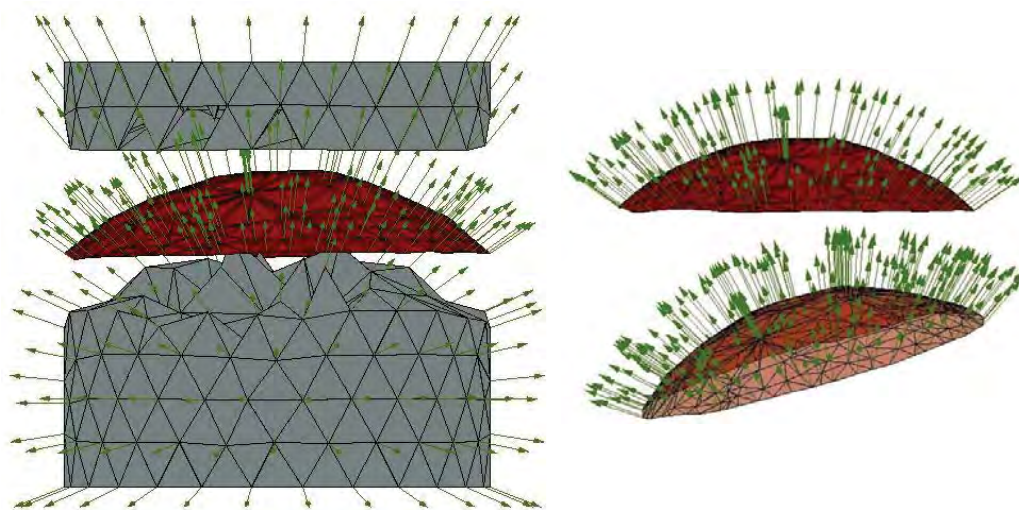


Figura 5.6: Campo vetorial de direções normais à superfície de fissura.

Solucionando o problema através do algoritmo global original encontra-se as isosuperfícies ilustradas na Figura (5.7 a), sendo que a superfície potencial de falha, ou seja, a superfície de valor escalar nulo é ilustrada na Figura (5.74 b).

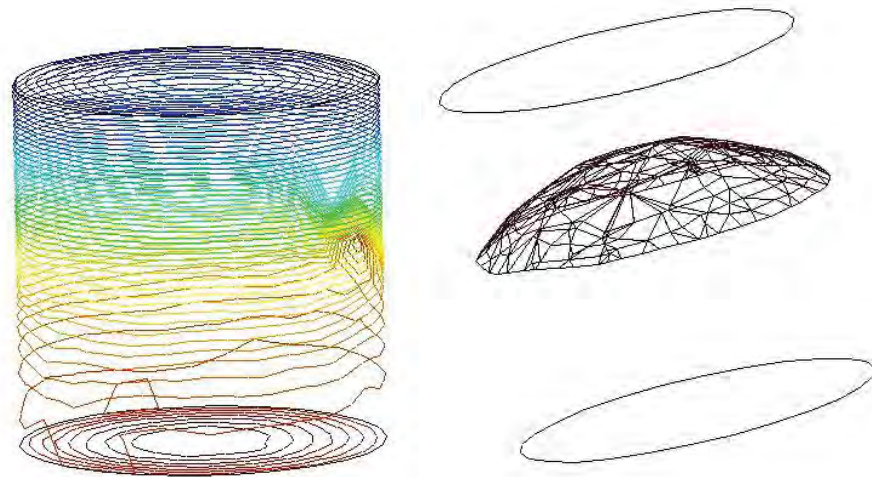


Figura 5.7: a) Isosuperfícies do algoritmo global e b) Superfície potencial de fissura.

## 6 – SIMULAÇÕES E RESULTADOS

### 6.1 – Introdução

As implementações do algoritmo proposto foram introduzidas no programa computacional de elementos finitos com os recursos numéricos para a solução do problema mecânico com descontinuidade, via elementos finitos com descontinuidade incorporada, proposta por Manzoli e Shing (2006) e Manzoli (2008), programa este, desenvolvido no Departamento de Engenharia Civil da Universidade Estadual Paulista – Campus de Bauru.

Para a realização do pré-processo (gerar a malha de elementos finitos) e pós-processo (visualização dos resultados obtidos) utilizou-se o software comercial GiD (<http://gid.cimne.upc.es>).

O material utilizado nas simulações foi o concreto cujas propriedades são apresentadas a seguir, juntamente com a geometria de cada sólido analisado.

Com relação à malha de elementos finitos tridimensional, utilizou-se malha não estruturada com elementos tetraédricos (com quatro nós).

Adotou-se como critério de falha um limite sobre a máxima tensão principal e utilizou-se como modelo constitutivo o modelo de dano à tração.

Comparou-se o tempo gasto no processamento (*computer time*) das simulações utilizando o algoritmo global com o tempo gasto nas análises utilizando o algoritmo proposto. Para a realização das análises, bem como para a captação do tempo de processamento fez-se uso de um computador com o seguinte processador: Intel® Core™ i7-960 3,20 Ghz (8 núcleos).

### 6.2 – Flexão de viga entalhada submetida a forças em quatro pontos

Para validar o algoritmo proposto, capaz de representar o caminho percorrido pela fissura no material, a primeira análise abordada trata-se do teste realizado por Gálvez, Elices, Guinea e Planas (1998). A análise se refere a uma viga entalhada, com 50 mm de espessura, submetida a forças em quatro pontos. Sua geometria e condições de contorno estão expostas na Figura (6.1) e os parâmetros experimentais do material são descritos a seguir:

$$G_F = 69 \text{ N/m}$$

$$f_t = 3.0 \text{ MPa}$$

$$E = 38 \text{ GPa}$$

$$\nu = 0.2$$

onde  $G_F$  é a energia de fratura,  $f_t$  a resistência à tração,  $E$  o Módulo de Elasticidade e  $\nu$  o coeficiente de Poisson.

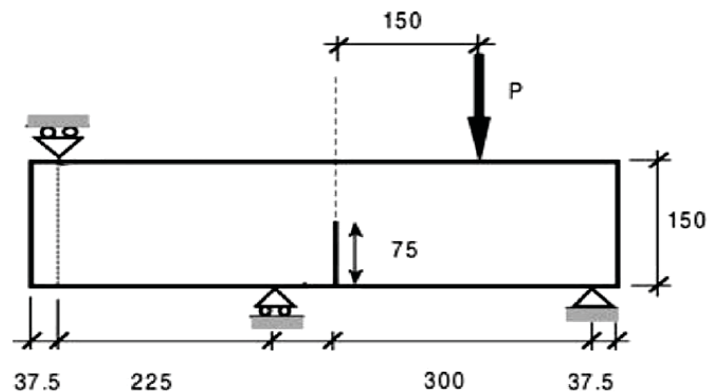


Figura 6.1: Geometria (em mm) e condições de contorno de Gálvez et al (1998)

Na Figura (6.2) é possível visualizar a malha de elementos finitos utilizada na análise, composta por 4534 elementos sendo que o elemento com a cor vermelha é definido no algoritmo proposto como o primeiro elemento a fissurar. Com relação à espessura da viga, utilizou-se metade da sua medida (25 mm), dada a simetria do problema, pois as condições de contorno são as mesmas ao longo da espessura.

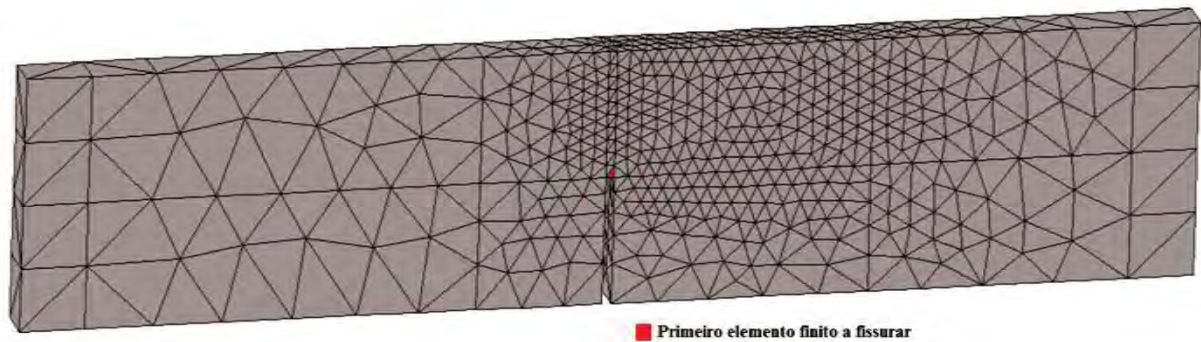


Figura 6.2: Malha de elementos finitos original, com o primeiro elemento candidato a fissurar.

Após alimentar o algoritmo proposto com as condições iniciais, inicia-se o processo de solução, conforme descrito no Capítulo 5. Durante os passos de carga o problema mecânico alimenta o algoritmo com relação à situação do elemento, ou seja, se o elemento atingiu ou não o critério de falha, para que a metodologia proposta possa indicar a posição da descontinuidade dentro desse elemento. Assim, nos primeiros passos de carga, o primeiro elemento atingiu o critério de falha (a falha se ativou) e a superfície de fissura no seu interior está ilustrada na Figura (6.3). Para os passos de carga seguintes a direção de propagação é consolidada, isto é, o valor escalar dos nós do elemento fissurado é fixado até o final da simulação.

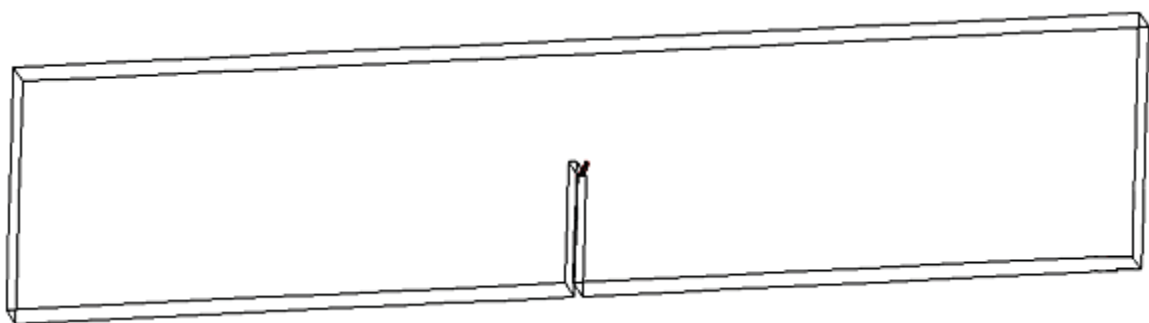


Figura 6.3: Resultado dos primeiros passos de carga, que ocasionou o início da superfície de fissura.

No passo de carga seguinte à consolidação da fissura no elemento raiz, apenas os elementos vizinhos a ele fazem parte da análise, ou seja, os elementos ditos candidatos a falhar. Tão logo um dos elementos candidatos atinja o critério de falha, sua direção de



propagação também será fixada e um novo domínio de análise participa do processo, sendo composto pelos elementos finitos vizinhos ao segundo elemento que atingiu o critério de falha.

Com a sucessão de passos de carga, a superfície de fissura é construída. A Figura (6.4) permite reforçar que a descontinuidade construída na análise realmente atravessa os elementos finitos, não ocorrendo a adaptação da malha de elementos finitos.

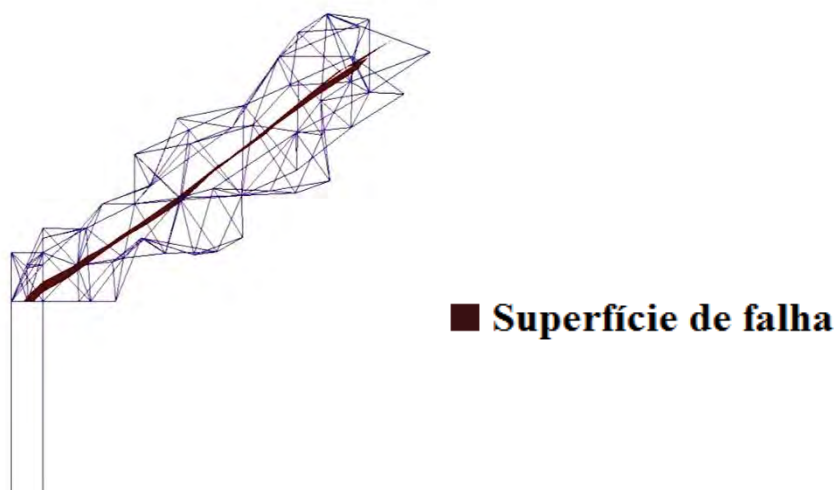


Figura 6.4: Superfície de fissura atravessando os elementos.

Os elementos com descontinuidade incorporada permitem descrever o efeito da fissura dentro do elemento. A Figura (6.5) ilustra a deformação ocorrida no material em um estágio avançado de passos de carga.

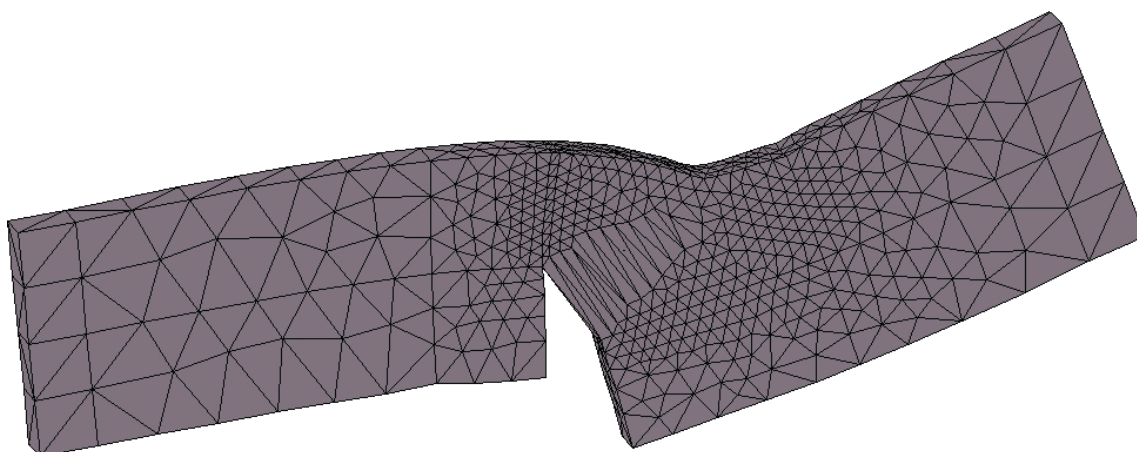
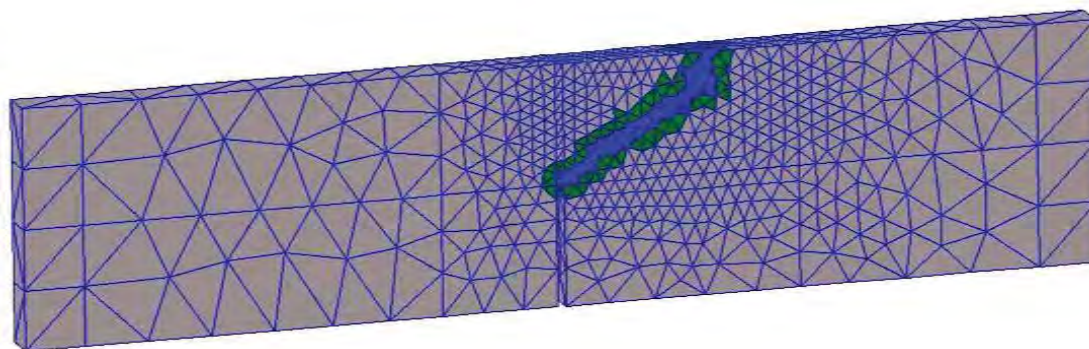


Figura 6.5: Deformação ocorrida devido à presença da descontinuidade.

Como o algoritmo não analisa todo o domínio do modelo, após todos os passos de carga, a região envolvida na solução do problema se restringe apenas à região de cor verde e azul mostrada na Figura (6.6). Os elementos com a cor azul representam os elementos com fissura ativa e os elementos com a cor verde representam o limite da análise numérica.



- Domínio do problema
- Região limite de análise
- Elementos com falha ativa

Figura 6.6: Região de análise do algoritmo proposto.

Na Figura (6.7) tem-se a superfície de falha construída ao final da simulação e na Figura (6.8) uma aproximação da imagem da superfície de fissura. Nela pode-se observar uma irregularidade quando a descontinuidade está próxima ao limite do contorno superior do material. A irregularidade ocorre, pois essa região apresenta um estado de tensões bastante complexo, sem predominância da componente normal de tração.

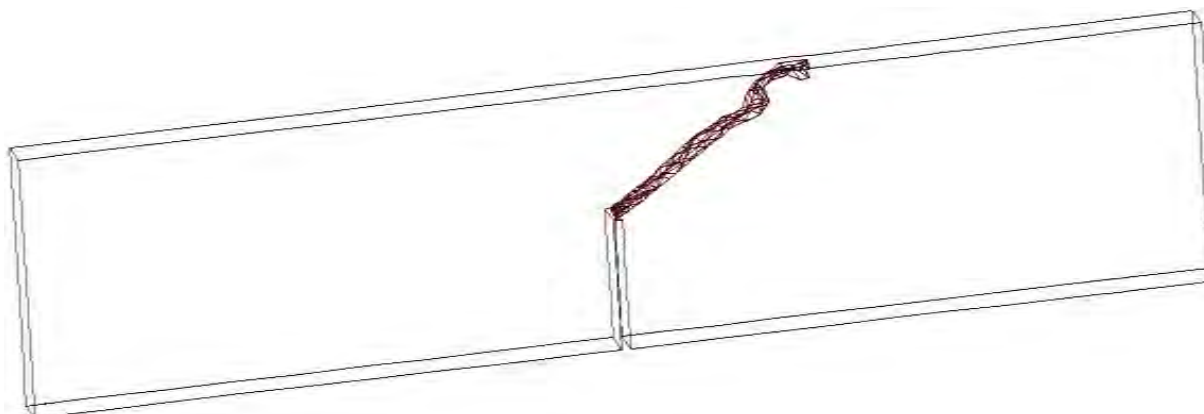


Figura 6.7: Superfície de fissura formada no final da análise.

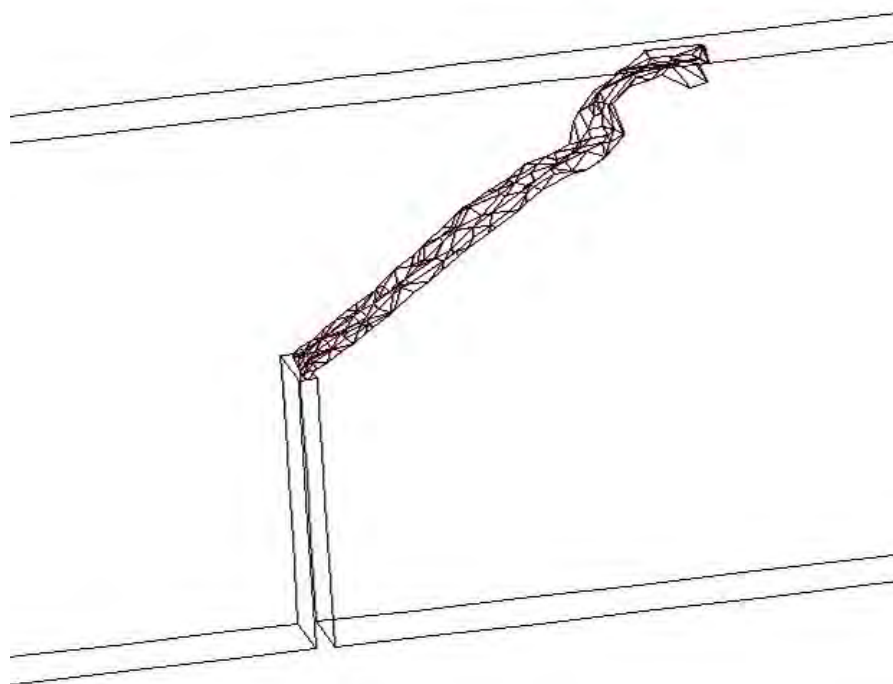


Figura 6.8: Superfície de fissura formada no final da análise com maior proximidade na imagem.

A fim de validar o problema, comparando-o com os resultados encontrados na literatura, controlou-se o nó indicado na Figura (6.9), que pertence à linha onde houve o carregamento do material.. Assim, obteve-se a resposta estrutural ilustrada na Figura (6.10) (curva de força vs deslocamento), sendo que as linhas de cor cinza representam o limite superior e inferior das curvas obtidas experimentalmente e apresentadas por Pedrini (2008), e a curva de cor preta diz respeito ao resultado da simulação utilizando o algoritmo proposto.

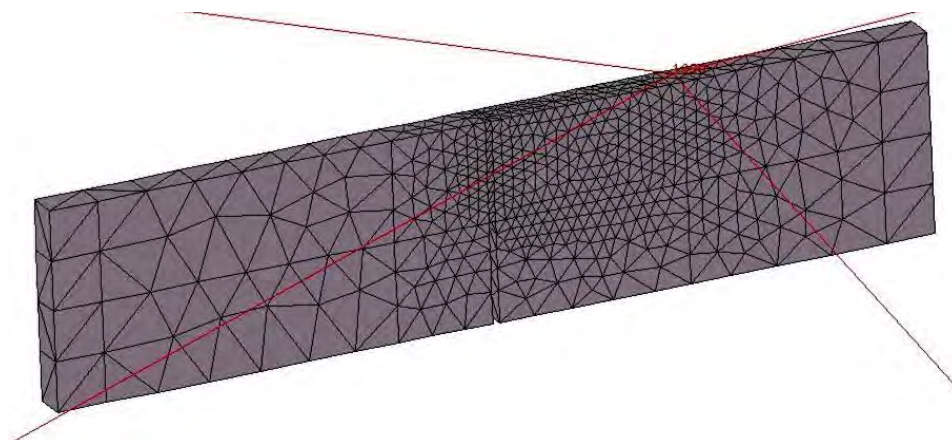


Figura 6.9: Nó controlado durante o processo de carregamento.

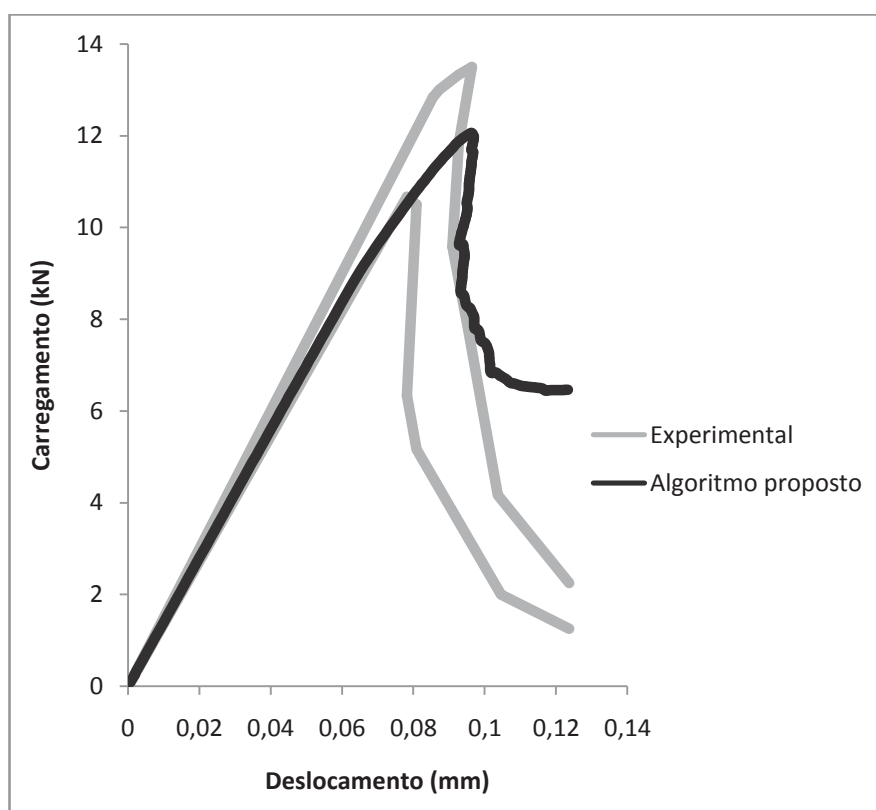


Figura 6.10: Resposta estrutural da viga flexionada submetida a forças em quatro pontos.

Simulou-se o problema da viga utilizando o algoritmo proposto, como foi apresentado até o momento, e também fazendo uso de todos os elementos da malha (algoritmo global), para que fosse possível comparar o tempo gasto para o processamento de ambos os métodos. O resultado obtido é apresentado a seguir, evidenciando que o processo envolvendo o algoritmo proposto é muito mais rápido.

#### **Tempo gasto na simulação:**

Algoritmo global original: 4 h 4 min. 7 seg.

Algoritmo proposto: 2 min. 52 seg.

Vale dizer que é possível obter um ganho no tempo de processamento registrado acima, pois foi empregado um algoritmo não otimizado para a solução do sistema de equações do problema análogo ao problema de condução de calor. Entretanto, ressalta-se que ambos os resultados foram obtidos a partir desse algoritmo não otimizado, sendo válida a comparação.

### 6.3 – Bloco retangular submetido à tração

A segunda análise a ser apresentada, foi realizada por Jäger, Steinmann e Kuhl (2008). Trata-se de um bloco retangular submetido à tração, com seção transversal de  $1 \text{ mm}^2$  e altura de  $2 \text{ mm}$ . O bloco é fixado na parte inferior e submetido a uma carga distribuída sobre seu lado superior direito. A fissura tem início na face adjacente à aplicação da carga, induzindo a uma superfície curva de ruptura, sendo que o elemento indicado como primeiro elemento a falhar está situado na região compreendida pela cor vermelha, conforme a Figura (6.11). Os parâmetros do material utilizados foram:

$$G_F = 100 \text{ N/mm}$$

$$f_t = 200 \text{ N/mm}^2$$

$$E = 1000 \text{ MPa}$$

$$\nu = 0.2$$

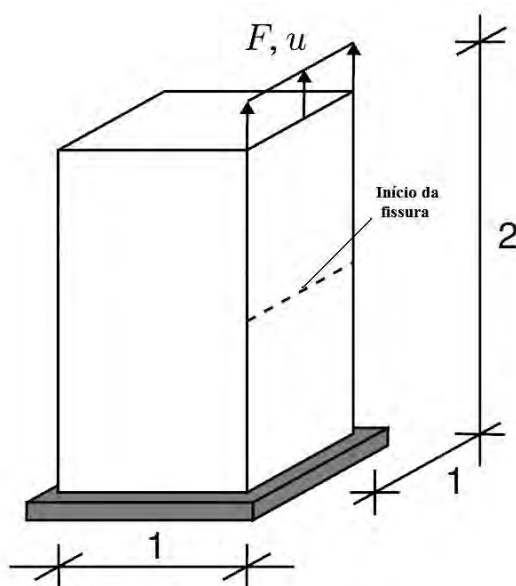


Figura 6.11: Geometria (em mm) e condições de contorno de Jäger, Steinmann e Kuhl (2008).

Na Figura (6.12) apresenta-se a malha de elementos utilizada na análise numérica composta por 1025 elementos. Ressalta-se que nesta análise também fez-se uso da simetria, simulando metade da espessura do bloco retangular.

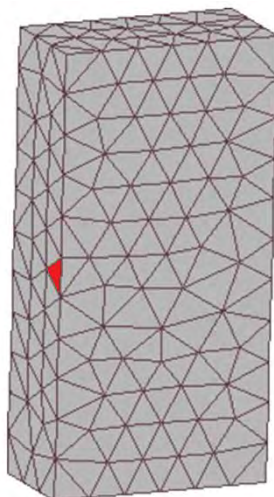


Figura 6.12: Malha de elementos tetraédricos do bloco retangular.

Nas imagens da Figura (6.13) exibe-se a construção progressiva da superfície de descontinuidade, conforme se sucederam os passos de carregamento, sendo que a primeira imagem representa o passo de carga em que o primeiro elemento atingiu o critério de falha e a última imagem ilustra o passo final da trajetória da fissura, remetendo ao rompimento do bloco retangular simulado.

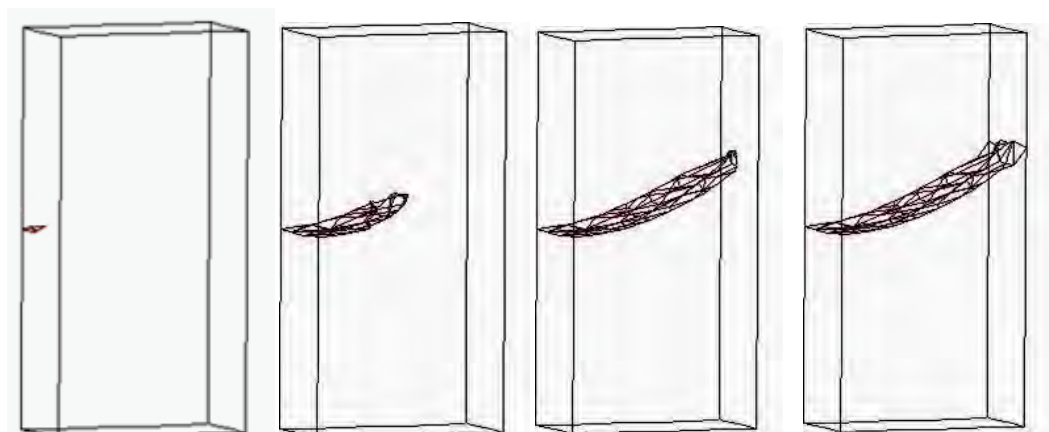


Figura 6.13: Progressão da construção da superfície de descontinuidade no bloco retangular.

Com o caminho da superfície de descontinuidade determinado, então o programa computacional, munido dos elementos finitos com descontinuidade incorporada, descreve



progressivamente a deformação ocorrida com a presença da fissura. A Figura (6.14) ilustra a deformação no estágio final da análise numérica.

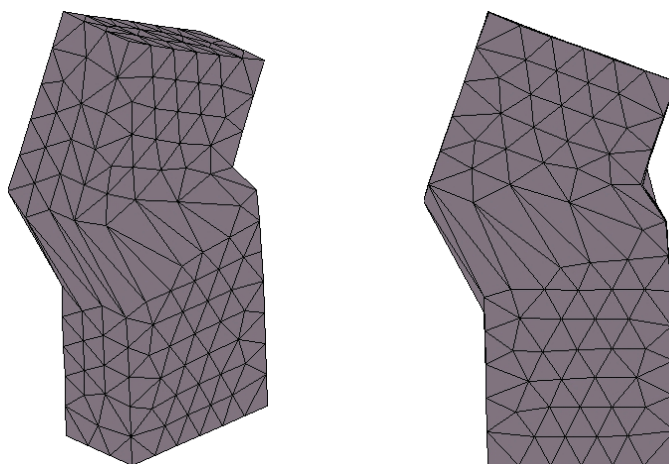


Figura 6.14: Deformação ocorrida no bloco retangular devido à presença da fissura.

O mecanismo de falha obtido por Jäger, Steinmann e Kuhl (2008), ilustrado na Figura (6.15), é similar ao obtido através da metodologia proposta, representado na Figura (6.13).

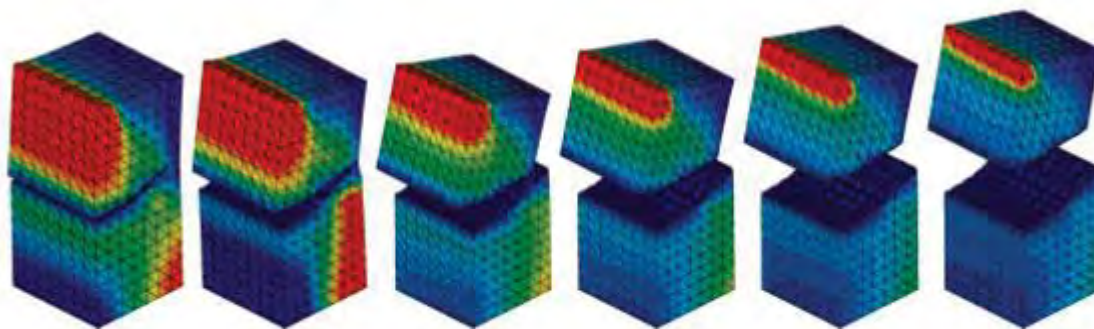


Figura 6.15: Resultado obtido por Jäger, Steinmann e Kuhl (2008).

Os resultados estruturais da análise (curvas de força vs deslocamento) obtidos com o algoritmo proposto e com o global encontrado por Jäger, Steinmann e Kuhl (2008) são ilustradas na Figura (6.17). Para tanto, registrou-se o deslocamento do nó ilustrado na Figura (6.16), indicado pela intersecção das linhas vermelhas.

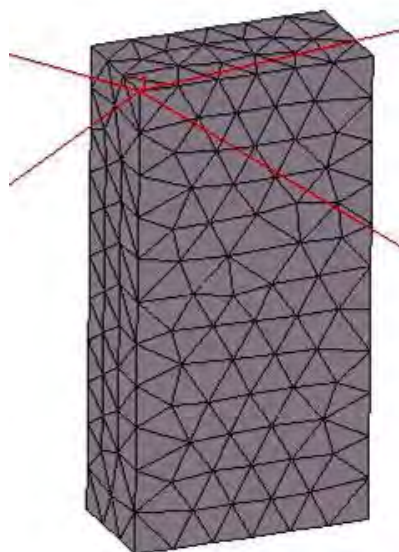


Figura 6.16: Localização do nó controlado durante o processo de carregamento.

Observa-se uma diferença entre as curvas apresentadas na Figura (6.17) que se deve ao modelo constitutivo adotado por Jäger, Steinmann e Kuhl (modelo constitutivo de Neo-Hooke) e o modelo adotado no presente trabalho (modelo de dano à tração).

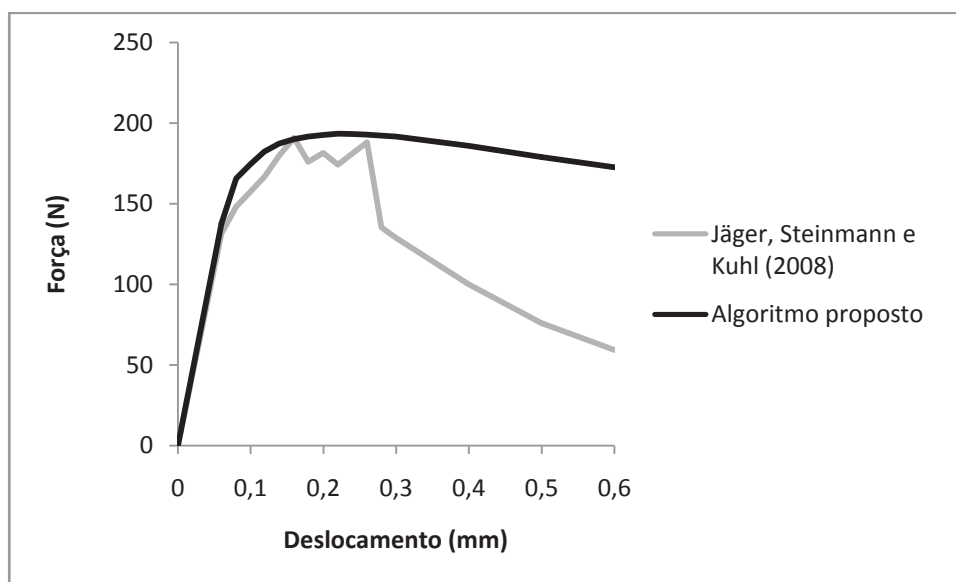


Figura 6.17: Curva de força vs deslocamento do bloco retangular tracionado.

Com relação à região analisada, a seqüência de imagens na Figura (6.18) permite representar a região afetada pelo algoritmo para a construção da trajetória de fissura, onde a



cor verde representa o limite de análise do algoritmo e a cor azul representa a região composta pelos elementos que obtiveram falha ativa.

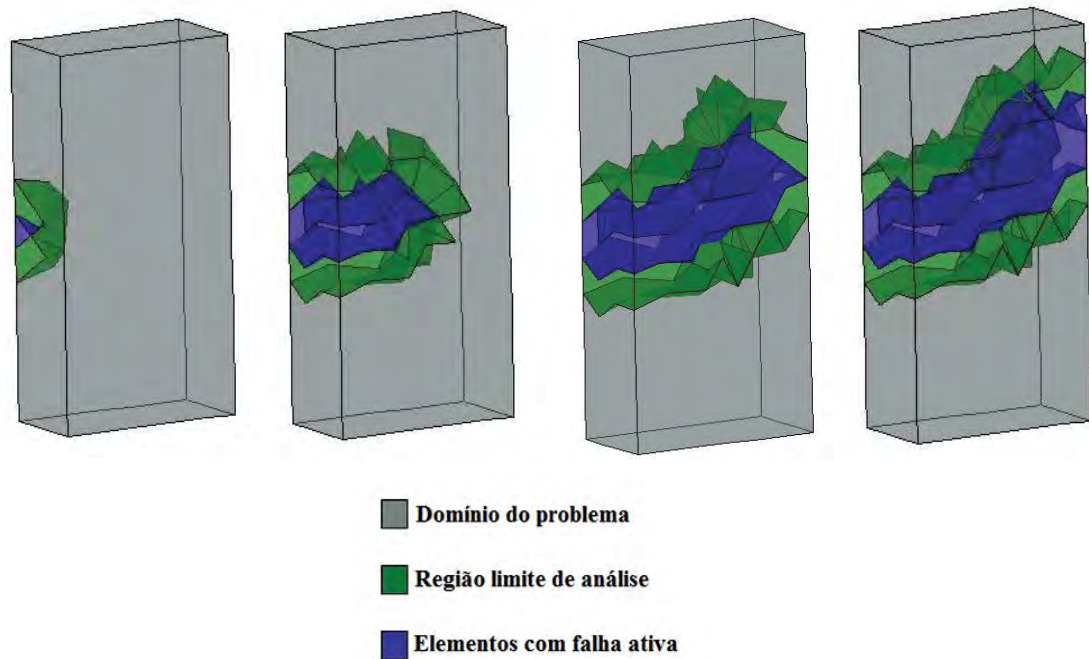


Figura 6.18: Evolução da região de análise durante o processo de carregamento do bloco retangular.

A seguir são apresentados os resultados obtidos com o algoritmo proposto, comparando-o com o resultado obtido através do algoritmo global.

**Tempo gasto na simulação:**

Algoritmo global original: 2 min. 37seg.

Algoritmo proposto: 46 seg.

#### 6.4 – Ensaio brasileiro de fratura

Outra análise realizada foi o ensaio brasileiro de fratura, também analisado por Chaves (2003). Trata-se de um cilindro comprimido em todo comprimento, mantendo o eixo de revolução paralelo aos apoios que transmitem a compressão. A Figura (6.19) mostra o cilindro de concreto com comprimento  $B = 300 \text{ mm}$  e diâmetro  $D = 150 \text{ mm}$ , submetido a uma compressão diametral  $P$ . As propriedades do material são:

$$G_F = 115 \text{ N/m}$$

$$f_t = 32.0 \text{ MPa}$$

$$E = 32.4 \text{ GPa}$$

$$\nu = 0.2$$

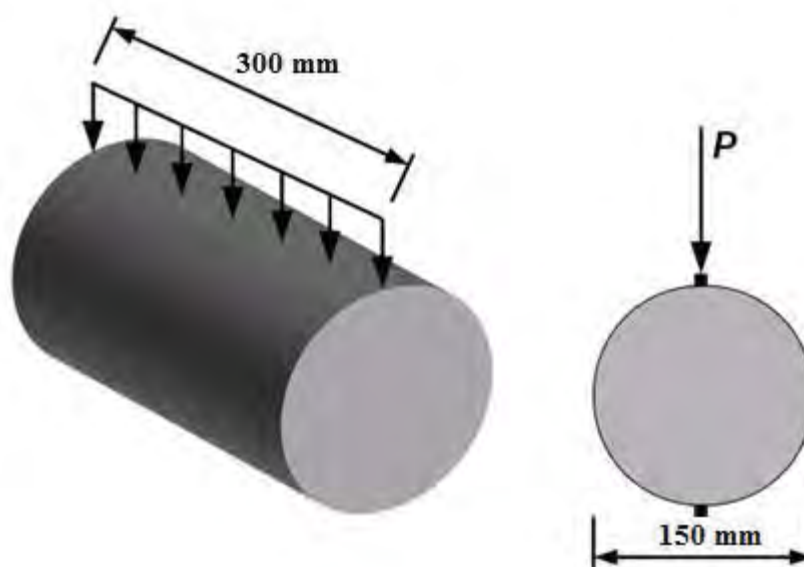


Figura 6.19: Geometria (em mm) e condições de contorno propostas por Chaves (2003).

Neste caso simulou-se todo o cilindro e utilizou-se de uma malha de elementos finitos grosseira composta por 747 elementos.

Ao término da análise obteve-se como resposta a superfície de falha ilustrada na Figura (6.20).

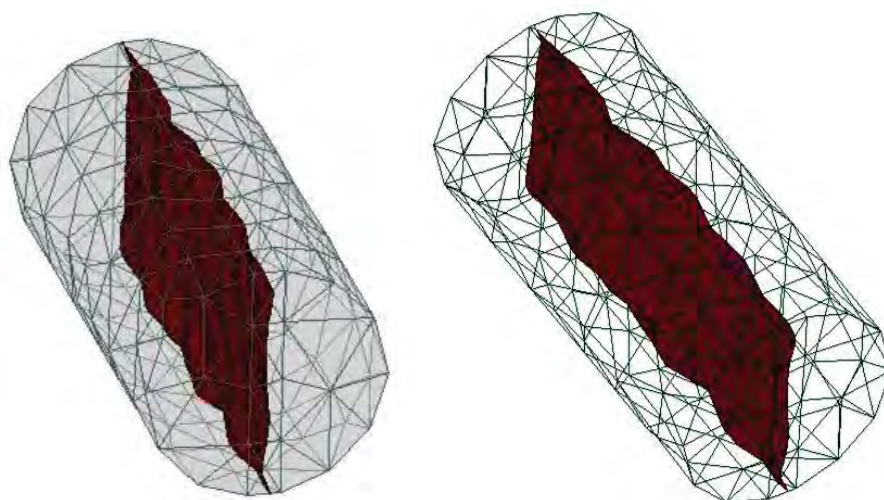


Figura 6.20: Superfície de fissura formada após o processo de carregamento do ensaio brasileiro com vistas diferentes.

Pode-se comparar o resultado obtido com o algoritmo global por Chaves (2003), presente na Figura (6.21), com a superfície de descontinuidade resultante da aplicação do algoritmo de trajetória de fissura proposto no presente trabalho.

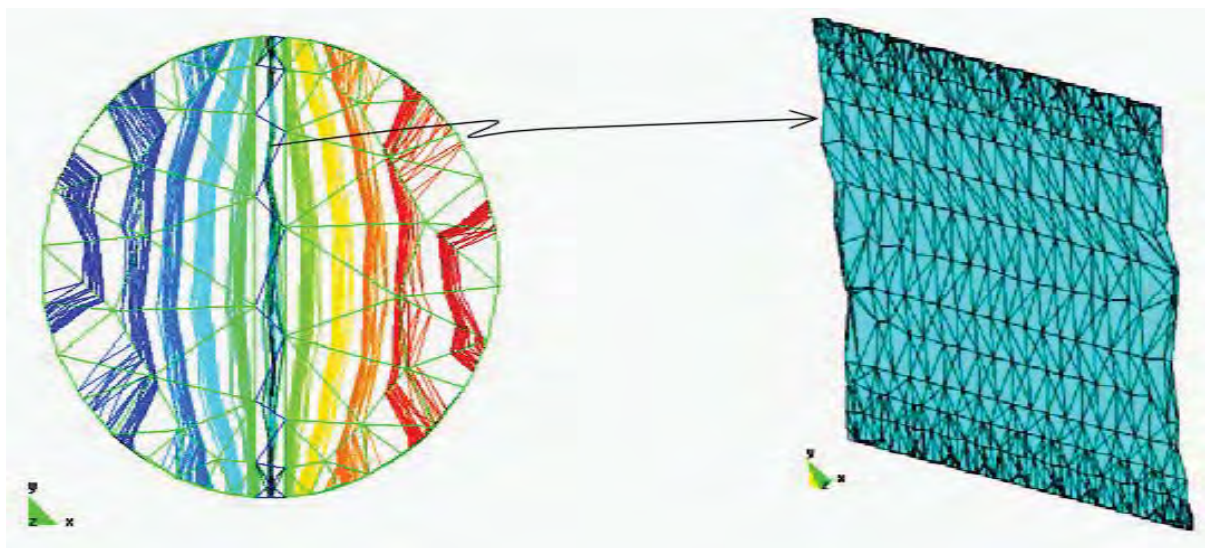


Figura 6.21: Superfície de descontinuidade obtida por Chaves (2003). a) Família de direções críticas (plano x-y) e b) Superfície de falha.

Com relação à deformação no material devida a presença da fissura, esta pode ser observada na Figura (6.22), sendo que a linha azul representa o cilindro sem deformação, ou seja, trata-se do contorno do cilindro antes de iniciar o processo de carregamento.

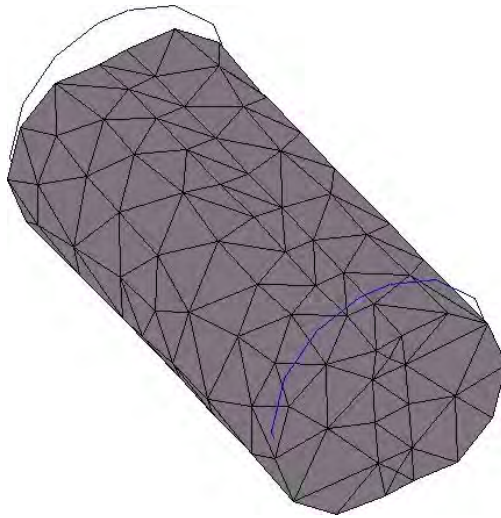


Figura 6.22: Deformação ocorrida no final da análise do ensaio brasileiro de fratura.

Durante os passos de carga, controlou-se o deslocamento vertical de um dos nós em que a carga foi aplicada, cuja localização está representada pelo ponto de encontro das linhas vermelhas, ilustradas na Figura (6.23). O controle deste nó possibilitou a elaboração da curva de força vs deslocamento mostrada na Figura (6.24).

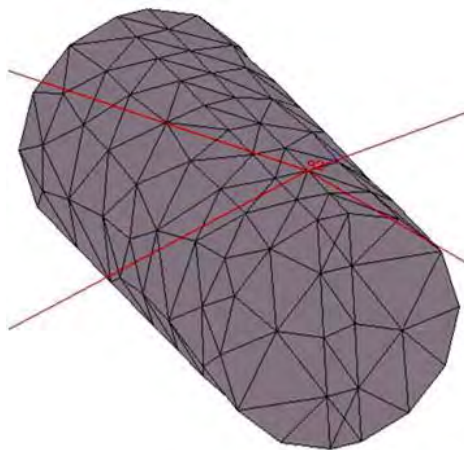


Figura 6.23: Nó controlado durante a análise do teste brasileiro de fratura.

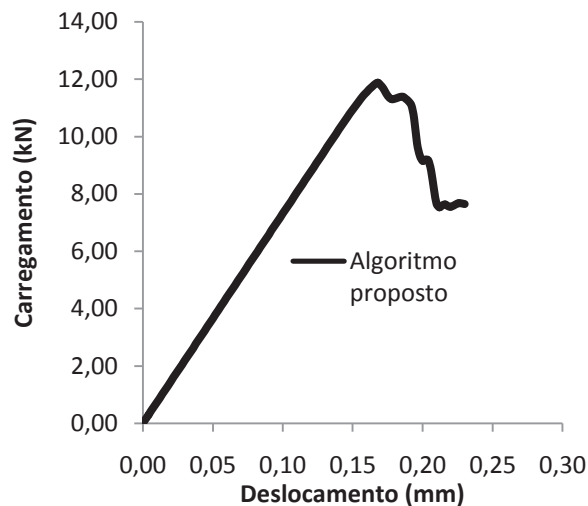


Figura 6.24: Resposta estrutural do teste brasileiro de fratura.

Para validar o teste brasileiro de fratura verificou-se que a carga pico está em conformidade com a NBR 7222-94 através Equação (6.1), que rege o experimento do cilindro com compressão diametral.

$$f_t = \frac{2P}{\pi B D} \quad (6.1)$$

Assim como nas simulações apresentadas anteriormente, registrou-se o tempo gasto na análise e comparou-o com o obtido quando utiliza-se toda a malha de elementos finitos para o processo, caracterizando o algoritmo global de trajetória de fissura. Os valores obtidos foram:

**Tempo gasto na simulação:**

Algoritmo global original: 17 seg.

Algoritmo proposto: 13 seg.

Nesse caso não houve grande variação nos valores de tempo de processamento, pois utilizou-se uma malha grosseira,

Logo os elementos que fizeram parte da análise no algoritmo proposto representaram quase todo o domínio do cilindro analisado, como pode ser visto na Figura (6.25), sendo que os elementos de cor cinza são os elementos que não participaram da análise.

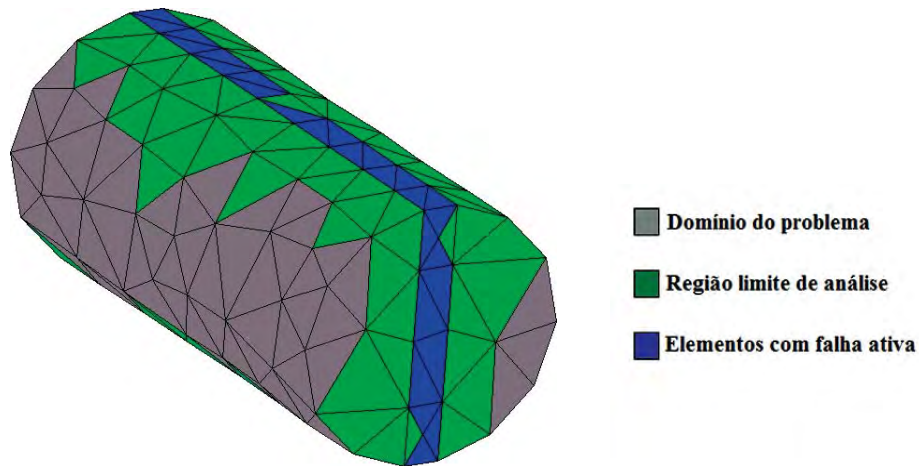


Figura 6.25: Região analisada pelo algoritmo proposto no teste brasileiro de fratura.

### 6.5 – Flexão de viga entalhada submetida a forças em três pontos

A última análise realizada corresponde ao ensaio experimental apresentado por Petersson (1981) de uma viga de concreto submetida a forças em três pontos, com 50 mm de espessura e contendo um entalhe. Suas dimensões e geometria são expostas na Figura (6.26).

As propriedades do concreto são descritas a seguir:

$$G_F = 124 \text{ N/m}$$

$$f_t = 3.33 \text{ MPa}$$

$$E = 30.0 \text{ GPa}$$

$$\nu = 0.2$$

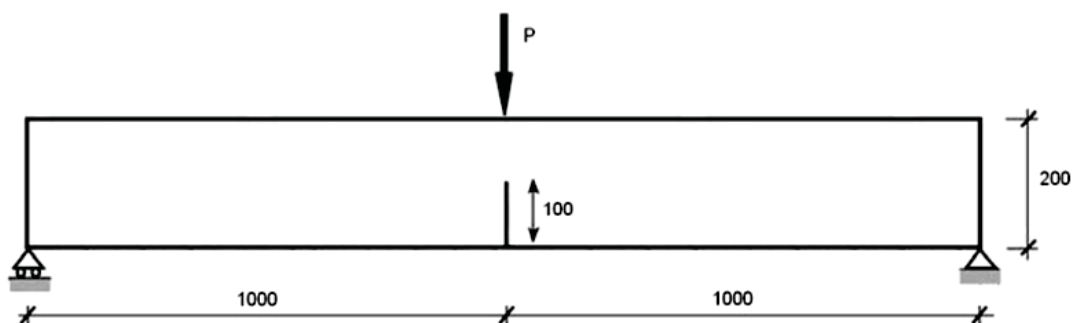


Figura 6.26: Geometria (em mm) e condições de contorno da viga de concreto entalhada testada por Petersson (1981).



Neste caso, simulou-se metade da espessura da viga, utilizando-se a simetria. A malha de elementos finitos utilizada na análise numérica está exposta na Figura (6.27) e é composta por 2262 elementos

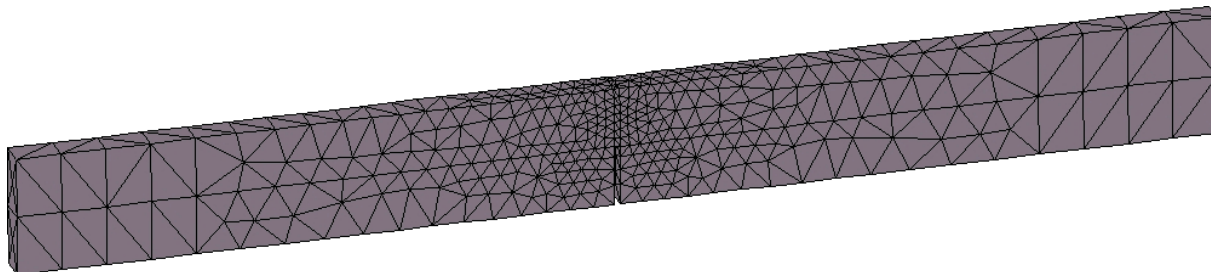


Figura 6.27: Malha de elementos finitos utilizada na análise da viga entalhada submetida a forças em três pontos.

Com o intuito de salientar que o algoritmo de trajetória de fissura proposto é capaz de descrever o caminho da descontinuidade para um dado campo vetorial de direções normais à superfície de falha, na simulação abordada, empregou-se um campo vetorial  $\mathbf{n}$  orientado horizontalmente, ou seja, contendo apenas a componente  $n_1$ .

Conforme o esperado, a superfície de descontinuidade obtida é perpendicular a direção de propagação, como mostra a Figura (6.28).

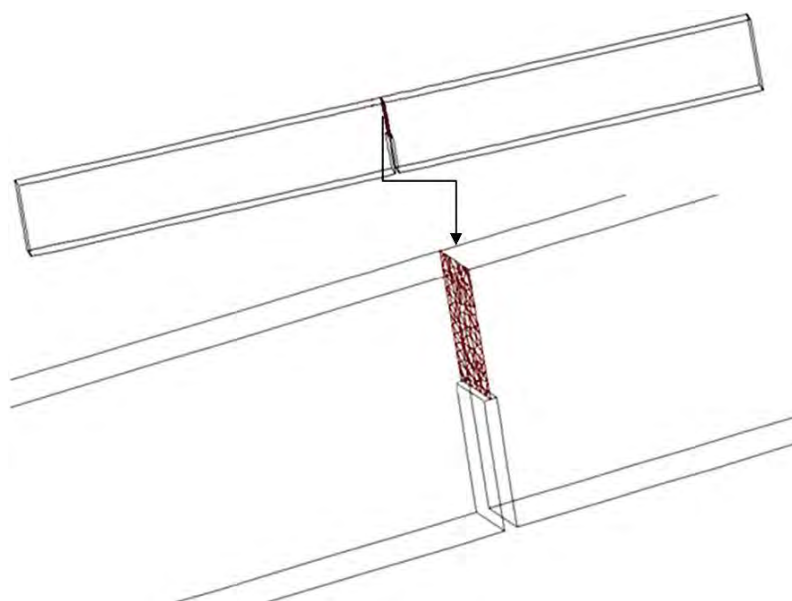


Figura 6.28: Superfície de fissura descrita pelo algoritmo proposto.

A superfície de descontinuidade encontrada gerou uma deformação no material, ilustrada na Figura (6.29). Tal deformação, neste caso, age como uma superfície de contato (aderência) entre as partes deslocadas devido a presença da fissura.

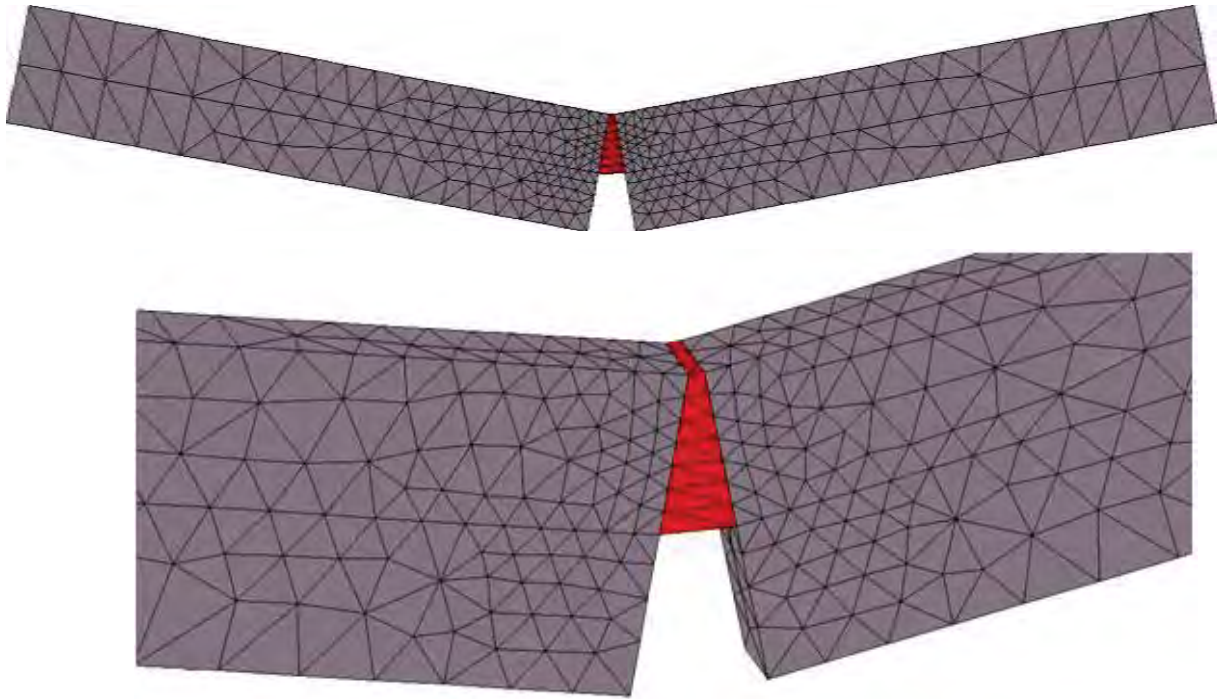


Figura 6.29: Deformação da viga flexionada com vistas diferentes.

Nesse caso controlou-se o deslocamento vertical do nó da região onde a carga foi aplicada. A localização do nó controlado pode ser vista na Figura (6.30).



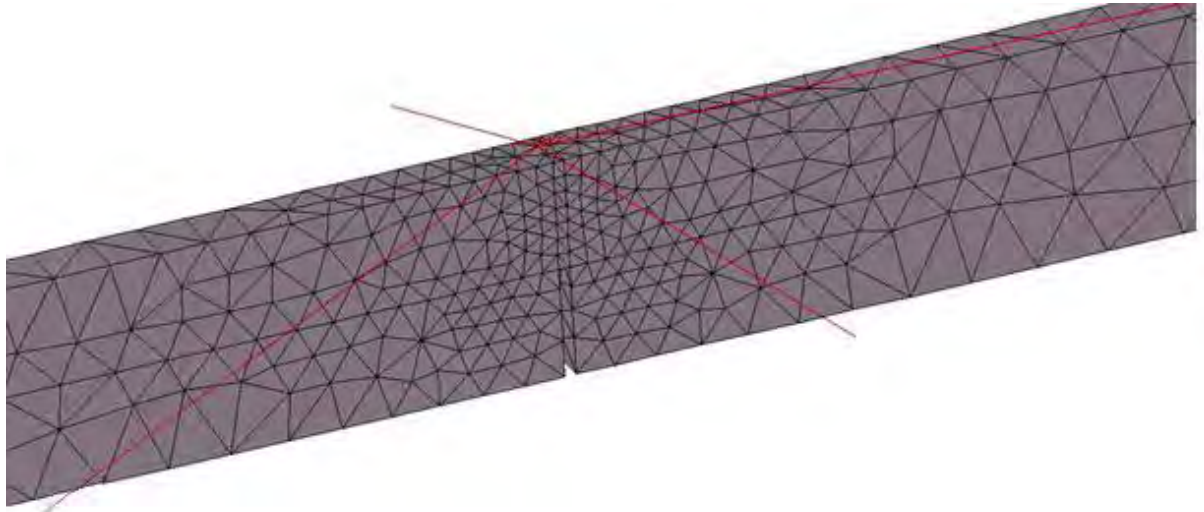


Figura 6.30: Nó controlado durante o processo de carregamento

Comparou-se a curva resultante da análise, com a curva obtida experimentalmente. Sendo que na Figura (6.31), as linhas de cor cinza representam os limites superior e inferior das curvas obtidas experimentalmente, e a curva de cor preta ilustra o resultado obtido na simulação através do algoritmo proposto.

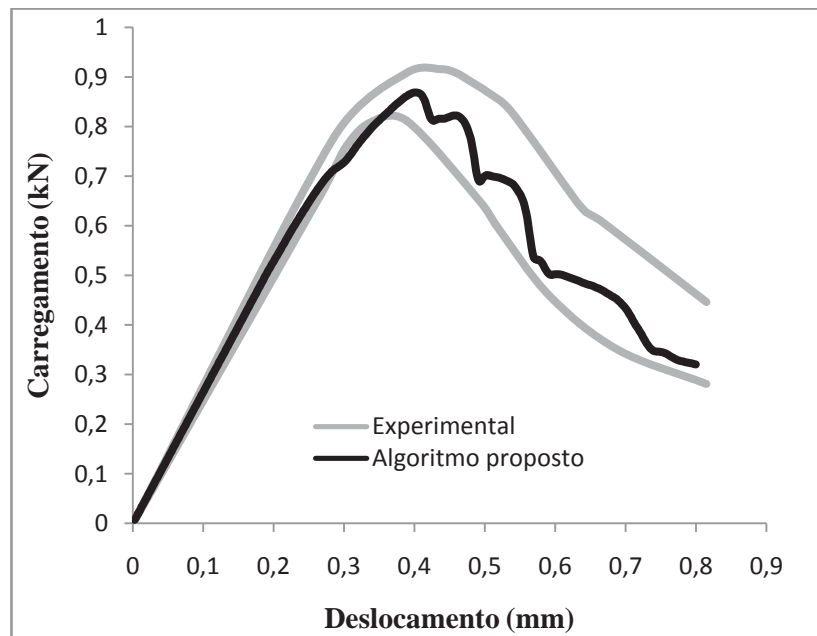


Figura 6.31: Curva de força vs deslocamento da viga flexionada.

Com relação ao tempo gasto para análise, apresenta-se os resultados obtidos com o algoritmo proposto, comparando-o com o resultado da análise utilizando todos os elementos da malha de elementos finitos.

**Tempo gasto na simulação:**

Algoritmo global original: 31 min. 17seg.

Algoritmo proposto: 26 seg.

Os valores de tempo gasto na simulação são muito diferentes, devido a quantidade de elementos envolvidos na solução, enquanto que o algoritmo proposto utiliza um número reduzido de elementos finitos para descrever o caminho da descontinuidade, como mostra a Figura (6.32), o algoritmo global, utiliza-se de todos os elementos da malha o que eleva em demasia o tempo de processamento.

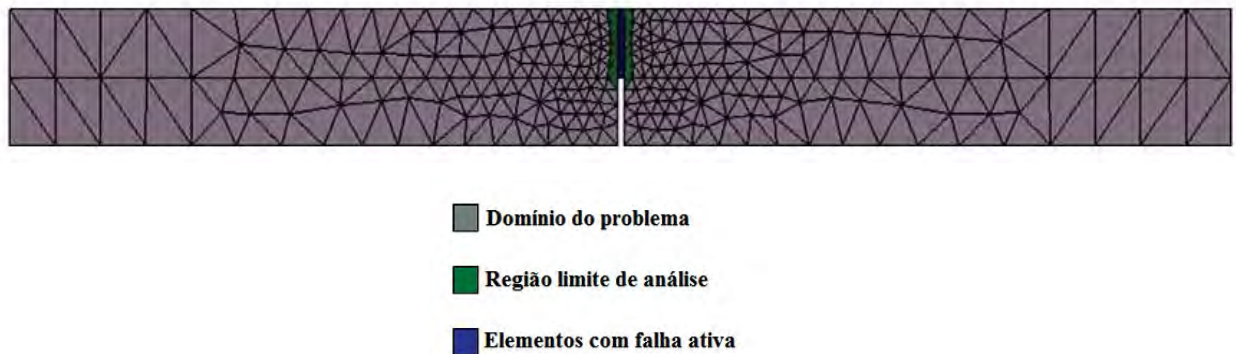


Figura 6.32: Elementos da viga flexionada submetida a forças em três pontos analisados pelo algoritmo proposto.

## 7 – CONCLUSÕES

O presente trabalho propôs um algoritmo de trajetória de fissura, baseado no algoritmo global de trajetória de fissura, proposto por Oliver e Huespe (2004), com a capacidade de minimizar o tempo de processamento nas análises numéricas. Após observar os resultados podemos verificar que em todas as análises o algoritmo proposto é mais rápido que o algoritmo global, alcançando assim o objetivo inicial deste trabalho. A seguir são desenvolvidas algumas conclusões a respeito dos testes desenvolvidos.

Observou-se na análise da flexão de viga entalhada submetida a forças em quatro pontos que o algoritmo proposto foi muito mais veloz, uma vez que utilizou cerca de dois minutos para finalizar o processamento, enquanto que o algoritmo global alcançou valores mais elevados, demorando mais de 4 horas. Salienta-se que o tempo de processamento foi muito elevado, pelo fato de o algoritmo global utilizar toda a malha para encontrar as superfícies potenciais de falha em cada passo de carga. Vale dizer que foi utilizado o Método de Gauss para solucionar o sistema de equações. No entanto, é possível diminuir o tempo final das análises aperfeiçoando o método de solução do sistema. Porém, tal fato não invalida a comparação entre os tempos gastos pelos métodos uma vez que foi empregada a mesma técnica de solução para ambos os algoritmos.

Sobre essa mesma análise, observou-se também que a superfície de descontinuidade apresentou uma irregularidade na sua parte final, que se deve ao fato de a superfície de fissura ter sido estabelecida por um critério baseado na máxima tensão principal de tração, que pode não estar plenamente definida em regiões inicialmente comprimidas, como é o caso da região em questão. A irregularidade na superfície potencial de falha ocasionou uma diferença na resposta estrutural, que ficou evidente quando comparou-se a curva de força versus deslocamento encontrada a partir do algoritmo proposto com as curvas experimentais descritas por Pedrini (2008).

Com relação à simulação do bloco retangular submetido à tração, o algoritmo global necessitou de aproximadamente dois minutos para a solução do problema, enquanto que o

algoritmo proposto utilizou apenas quarenta e seis segundos, evidenciando sua maior velocidade e menor esforço computacional.

A utilização de malha grosseira no teste brasileiro de fratura ocasiona uma menor diferença nos tempos de análise, sendo que o algoritmo global levou dezessete segundos para a solução e o algoritmo proposto gastou treze segundos. O principal motivo de os tempos de processamento serem próximos é uma menor diferença entre o tamanho do domínio analisado para os dois tipos de algoritmo em relação aos testes anteriores.. Entretanto, essa prática (malha grosseira) pode resultar em uma perda de precisão na solução do problema mecânico.

No caso da análise da flexão de viga entalhada submetida à força em três pontos, utilizou-se um campo vetorial  $n$  orientado, com o intuito de salientar que o algoritmo proposto é capaz de descrever o caminho da descontinuidade independentemente se este campo vetorial de direções normais de propagação da descontinuidade corresponde a um campo de tensões ou não. Nesse caso, a superfície construída funciona como uma interface de aderência entre as partes da viga que se separam com a descontinuidade. Com relação ao tempo gasto para a realização da simulação, o algoritmo global levou cerca de trinta e um minutos para a conclusão da análise, enquanto que o algoritmo proposto necessitou de apenas vinte e seis segundos.

Os estudos realizados indicaram pontos a serem aprofundados, o que sugere os seguintes itens para trabalhos futuros:

- otimização do algoritmo para que o tempo de processamento seja ainda menor;
- aperfeiçoamento do algoritmo proposto para que este possa construir o caminho de descontinuidade com maior precisão, em regiões onde o estado de tensão é complexo;
- extensão da metodologia para que a mesma seja capaz de descrever a trajetória de múltiplas fissuras, bem como o cruzamento de superfícies com variáveis independentes;
- realizar análises em modelos de concreto armado.

## Referências Bibliográficas

AREIAS, P. M. A.; BELYTSCHKO, T. Analysis of three-dimensional crack initiation and propagation using the extended finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 50(4):993–1013, 2001.

BITTENCOURT, T. N.; WAWRZYNEK, P. A.; INGRAFFEA, A. R.; SOUZA, J. L. Quasi-Automatic Simulation of Crack Propagation For 2D Lefm Problems. *Engineering Fracture Mechanics*, Estados Unidos, v55, n. 2, p. 321-334, 1996.

BLANCO, S. *Contribuciones a la simulación numérica del fallo material en medios tridimensionales mediante la metodología de discontinuidades fuertes de continuo*. Tese (Doutorado) – Universidad Politécnica de Cataluña, Barcelona – Spain, 2007.

CHAVES, E. W. V.; OLIVER, J. On the strong discontinuity approach in 3D settings. 22<sup>o</sup> *Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering*. Campinas – São Paulo, p. 1 – 18, 2001

CHAVES, E.W. V. *A three dimensional setting for strong discontinuities modeling in failure mechanics*. Tese (Doutorado) – Universidad Politécnica de Cataluña, Barcelona – Spain, 2003.

CLARO, G. K. S.; RODRIGUES, E. A. e MANZOLI, O. L.. Construção de superfícies potenciais de falha para a simulação de fratura em sólidos tridimensionais pelo Método de Elementos Finitos. 9<sup>th</sup> *Brazilian Conference on Dynamics Control and their Applications – DINCON'10*, Serra Negra – São Paulo, p. 472-477, 2010.

GÁLVEZ, J. C.; ELICES, M.; GUINEA, G. V; PLANAS, J. Mixed mode fracture of concrete under proportional and non-proportional loading. *International Journal of Fracture*, v. 94, p. 267-284, 1998.

GASSER, T. C.; HOLZAPFEL, G. A. 3D Crack propagation in unreinforced concrete. A two-step algorithm for tracking 3D crack paths. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 195, p. 5198–5219, 2006.

GID HOMEPAGE. Centre Internacional de Mètodes Numèries em La Enginyeria (CIMNE) Barcelona (Spain). Disponível em <http://gid.cimne.upc.es>. Acesso em 29 de setembro. 2009.

HUGHES, T. J. R. *The Finite Element Method – Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*, ed. Dover Publications, 2000, 672 p.

JÄGER, P.; STEINMANN, P.; KUHL E. Modeling three-dimensional crack propagation – A comparison of crack path tracking strategies. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, v. 76, p. 1328-1352, 2008.

MANZOLI, O. L. *Un modelo analítico y numérico para la simulación de discontinuidades fuertes en La mecánica de sólidos*. Tese (Doutorado) – Universidad Politécnica de Cataluña, Barcelona – Spain, 1998.

MANZOLI, O. L.; SHING, P. B. A general technique to embed non-uniform discontinuities into standard solid finite elements. *Computers and Structures*, v. 84, p. 742-757, 2006.

MANZOLI, O. L. *Contribuições à simulação numérica de descontinuidades fortes*. Tese (Livre Docência) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” – Faculdade de Engenharia de Bauru. Bauru – São Paulo. 2008.

MELENK, J. M.; BABUSKA, I. Partition of unity finite element method: basic theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 139, p. 289-314, 1996

OLIVER, J.; CERVERA, M.; MANZOLI, O.L. Strong discontinuities and continuum plasticity models: the strong discontinuity approach. *International Journal of Plasticity*, v.15, n. 3, p. 319 – 351, 1999.

OLIVER, J.; HUESPE A. E. Continuum approach to material failure in strong discontinuity settings. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 193, p. 3195-3220, 2004.

OLIVER, J.; HUESPE, A. E.; SAMANIEGO, E.; CHAVES E. W. V. Continuum approach to the numerical simulation of material failure in concrete. *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, v. 28, p. 609 – 632, 2004.

OLIVER, J.; HUESPE A. E. AND SÁNCHEZ P. J. A comparative study on finite elements for capturing strong discontinuities: E-FEM vs X-FEM. *Computer methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 195, p. 4732-4752, 2006.

OLIVER, J.; LINERO, D. L.; HUESPE, A. E.; MANZOLI, O. L. Two-dimensional modeling of material failure in reinforced concrete by means of a continuum strong discontinuity approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 197, p. 332 – 348, 2008.

ORTIZ, M.; LEROY, Y.; NEEDLEMAN, A. A finite element method for localized failure analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v.61, p: 189 – 214, 1987.

PEDRINI, R. A. A. *Análise de propagação arbitrária de descontinuidades fortes em sólidos bidimensionais pelo Método dos Elementos de Contorno*. Dissertação (Mestrado) – Universidade de São Paulo – Escola de Engenharia de São Carlos, São Carlos. 2008.

PETERSSON, P. E. Crack Growth and Development of Fractures Zones in Plain Concrete and Similar Materials, Report n TVBM-1006, *Division Of Building Materials*, Lund Institute of Technology, Lund, Sweden, 1981.

Pipeline.jpg. Fotografia. Altura: 201 pixels. Largura 348 pixels. 96 dpi. 21.698 bytes. Formato JPEG. Disponível em: <<http://www.exponent.com/Gasoline-Creek-Breach-in-an-Olympic-Pipeline>>. Acesso em 16 de março, 2011.

WAWRZYNEK, P. A.; INGRAFFEA, A. R. An interactive approach to local remeshing around a propagating crack. *Finite Elements in Analysis and Design*, v. 5, p 87 – 96, 1989.