

**ESTUDO DE UM MODELO DINÂMICO PARA AVALIAÇÃO
FÍSICA DO CORPO HUMANO**

PEDRO CARLOS RUSSI

Dissertação apresentada à Faculdade
de Engenharia de Guaratinguetá da
Universidade Estadual Paulista, para
obtenção do título de Mestre em
Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. Tamotsu Hirata

Guaratinguetá
2002

DADOS CURRICULARES

PEDRO CARLOS RUSSI

NASCIMENTO: 27 de abril de 1956

FILIAÇÃO: Pedro Aureliano Russi
Therezinha Santos Russi

1997/1982 Universidade de Taubaté
Graduação: Licenciatura em Física

1982/1986 Secretaria da Educação do Estado de São Paulo
Professor de Física

1986/1992 Rede Municipal de Ensino de São José dos
Campos
Professor de Matemática

1988/atual Colégio Jardim das Nações- Taubaté
Professor de Matemática

2000/atual Secretaria da Educação do Estado de São Paulo
Professor de Física

2000/2002 DME/FEG/UNESP
Aluno regular do Programa de Mestrado em
Engenharia Mecânica–Área de concentração: Projetos
e Materiais

HOMENAGEM

Dedico este trabalho aos meus pais Pedro e Therezinha meus primeiros mestres e incentivadores, a minha esposa Cristina e aos meus filhos Luciana, Rafael e Renato pela paciência e carinho.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Tamotsu Hirata, mestre e amigo sua calma e Sabedoria me ajudou muito;

Aos professores doutores Galdenoro Botura Júnior, Rogério Pinto Mota, José Elias Tomazini, Araildo L. Silva;

Às funcionárias da seção de Pós-graduação da FEG/UNESP Regina Célia Galvão Faria Alves, Elisa Mara de Carvalho Nunes, Maria Auxiliadora Neves C. Alves Silva pela excelente atenção atendimento;

Às funcionárias da Biblioteca da FEG/UNESP pela atenção no atendimento;

Aos amigos de curso, Álvaro, Marcus, Norman, Pedran e Laércio que sempre colaboraram em nosso trabalho;

E também ao colega e amigo do Departamento de Física da FEG/UNESP Valdeir, que muito me incentivou.

*“A mente que se abre a uma idéia nova
jamais voltará ao seu estado normal”*

Albert Einstein

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE SÍMBOLOS E ABREVIATURAS

Resumo

Abstract

1	INTRODUÇÃO	15
1.1	Biomecânica e a Marcha Humana	15
1.2	Objetivo	16
1.3	Proposta do Trabalho	17
1.4	Justificativa do Trabalho	17
1.5	Estrutura da Dissertação	17
2	EVOLUÇÃO DO ESTUDO DA BIOMECÂNICA COM RELAÇÃO A MARCHA HUMANA	19
2.1	Fundamentos da Biomecânica	19
2.2	Aspectos Históricos da Marcha Humana	22
2.3	Aspectos Históricos do Modelamento de Movimentos do Corpo Humano	23
2.4	Ciclo da marcha.....	27
3	FORMULAÇÃO MATEMÁTICA, SÍNTESE DA TEORIA DE LAGRANGE	32
3.1	Introdução	32
3.2	A função Lagrangeana L	32

3.3	Modelo de união de segmentos	33
4	MODELAGEM DA MARCHA HUMANA	37
4.1	Fase de oscilação	37
4.2	Fase de apoio	42
5	SIMULAÇÃO DO MODELO	54
5.1	Fase de oscilação	54
5.2	Fase de apoio	56
6	RESULTADOS E DISCUSSÃO.....	58
6.1	Resultados obtidos na fase de oscilação e fase de apoio	58
6.2	Resultados obtidos pela substituição da perna por uma prótese	62
7	COMENTÁRIOS E CONCLUSÕES.....	66
7.1	Comentários.....	66
7.2	Conclusões.....	67
	ANEXOS	68
	REFERÊNCIAS	82

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 2.1 - Modelo de cinco segmentos (Ider e Trimble, 1988) ...	24
FIGURA 2.2 - Modelo de dois segmentos (Allen e Sun)	25
FIGURA 2.3 - Análise do Movimento Humano (SAAD, 1997)	26
FIGURA 2.4 - Ciclo da marcha (SAAD, 1997)	28
FIGURA 2.5 - Utilização do plantigrama para calcular uma passada (SAAD, 1997)	30
FIGURA 2.6 - Movimentos linear e angular	31
FIGURA 2.7 - Planos de rotação do corpo humano (Winter, 1991) ...	31
FIGURA 3.1 - Relação entre o modelo anatômico e o modelo de união dos segmentos (Winter, 1991)	34
FIGURA 3.2 - Modelo adotado na fase de oscilação e na fase de Apoio	35
FIGURA 3.3 - Modelo antropométrico adotado.....	36
FIGURA 5.1 - Torque no tornozelo, durante a fase de oscilação, obtido através do modelo proposto	55
FIGURA 5.2 - Torque no joelho, durante a fase de oscilação, obtido através do modelo proposto	55
FIGURA 5.3 - Torque no tornozelo, durante a fase de apoio, obtido através do modelo proposto	56
FIGURA 5.4 - Torque no joelho, durante a fase de apoio, obtido através do modelo proposto	57
FIGURA 5.5 - Torque no quadril, durante a fase de apoio, obtido através do modelo proposto	57
FIGURA 6.1 - Torque no quadril, obtido pelo modelo proposto e os dados de Winter durante a fase de oscilação	58

FIGURA 6.2 - Torque no joelho, obtido pelo modelo proposto e os dados de Winter durante a fase de oscilação	59
FIGURA 6.3 - Torque no tornozelo, obtido pelo modelo proposto e os dados de Winter durante a fase de apoio	60
FIGURA 6.4 - Torque no joelho, obtido pelo modelo proposto e os dados de Winter durante a fase de apoio	61
FIGURA 6.5 - Torque no quadril, obtido pelo modelo proposto e os dados de Winter durante a fase de apoio	61
FIGURA 6.6 - Curva comparativa do torque no quadril durante a fase de oscilação	63
FIGURA 6.7 - Curva comparativa do torque no joelho durante a fase de oscilação	63
FIGURA 6.8 - Curva comparativa do torque no tornozelo durante a fase de apoio	64
FIGURA 6.9 - Curva comparativa do torque no joelho durante a fase de apoio	64
FIGURA 6.10- Curva comparativa do torque no quadril durante a fase de apoio	65

LISTA DE SÍMBOLOS E ABREVIATURAS

- $\frac{d}{dt}$ - Derivada em relação ao tempo
- $\frac{\partial}{\partial t}$ - Derivada parcial em relação ao tempo
- $\frac{\partial L}{\partial q_i}$ - Derivada parcial da expressão Lagrangeana em relação a q_i
- $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ - Derivada parcial da expressão Lagrangeana em relação a \dot{q}_i
- \mathbf{q} - Ângulo devido ao movimento do corpo rígido
- $\dot{\mathbf{q}}$ - Derivada de \mathbf{q} em relação ao tempo
- $\ddot{\mathbf{q}}$ - Derivada segunda de \mathbf{q} em relação ao tempo
- A_{ii} - Coeficiente de $\ddot{\mathbf{q}}$ no sistema de equações do movimento
- AP - Aplanamento do pé
- B_{ii} - Coeficiente de $\dot{\mathbf{q}}$ no sistema de equações do movimento
- C_{ii} - Coeficiente de \mathbf{q} no sistema de equações
- CM - Centro de massa
- DD - Despreendimento dos dedos
- E_c - Energia cinética
- E_p - Energia potencial
- g - Aceleração da gravidade
- HAT - Cabeça, tronco e membros superiores
- IO - Início da oscilação
- IM - Impulsão
- L - Expressão Lagrangeana
- l_i - Comprimento do segmento

MA	- Médio apoio
M_i	- Massa do segmento
MO	- Metade da oscilação
m	- Metro
N	- Newton
$N.m$	- Newton metro
q_i	- Coordenada generalizada
\dot{q}_i	- Velocidade generalizada
\ddot{q}_i	- Aceleração generalizada
Q_i	- Força generalizada
r_i	- Localização do centro de massa do segmento
R	- Radiano
R/s	- Radiano por segundo
R/s^2	- Radiano por segundo ao quadrado
SRG	- Sistema de referencia global
T_i	- Torque
TC	- Toque do calcanhar
XY	- Sistema bidimensional de coordenadas

RUSSI, P.C. *Estudo de um modelo dinâmico para avaliação física do corpo humano.* 84f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) - Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2002.

RESUMO

O problema da modelagem da locomoção humana tem atraído a atenção de pesquisadores por muitos anos. A compreensão, análise e avaliação da marcha humana oferecem dados importantes para o uso de próteses dos membros inferiores. O objetivo deste trabalho é apresentar um modelo matemático da marcha humana, através de um modelo simplificado do corpo humano para que sirva de referência no trabalho de adaptação ao uso de próteses. O desenvolvimento da modelagem, parte da geometria dos membros inferiores num sistema de referência bidimensional e utiliza o princípio da diferença entre as energias cinética e potencial do sistema, ou seja, o método de Lagrange, introduzido na forma matricial. O modelo é representado na fase de oscilação, por dois segmentos interconectados com massas concentradas que oscila como um pêndulo duplo. Na fase de apoio é representado por três segmentos interconectados com massas concentradas que se movimenta como um pêndulo triplo invertido. Obtidas as equações que representam o modelo, os torques nas articulações do tornozelo, joelho e quadril são obtidos e a simulação numérica é realizada no programa MATLAB. Os resultados dos torques calculados apresentaram coerências com os da literatura, porém, na fase de apoio diferenças significativas foram registradas.

PALAVRAS - CHAVE: Modelo matemático, Equação de Lagrange, marcha humana.

RUSSI, P.C. Study of a dynamic model for physical evaluation of the human body. 84f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2002

ABSTRACT

The problem of human locomotion modeling has been attracting the researcher attention for many years. The understanding, analysis and evaluation of the human locomotion provide important data for the use of prostheses in the inferior parts of the body. The aim of this issue is to present a mathematical model of the human locomotion through a simplified model of the human body so that it serves as reference in the adaptation for prostheses usage. The modeling was developed using the geometry of the inferior parts of the body in a system of bidimensional references and applies the principle of difference between kinetic energies and potential of the system, in other words, the method of Lagrange, introduced in the form matrix. The model is represented in the oscillation phase, for two segments interconnected with concentrated masses which oscillates as a double pendulum. In the support phase it is represented in three segments interconnected with concentrated masses which move as an inverted triple pendulum. Since the equations representing the model are provided, the torque in the articulations of the ankle, knee and hip are obtained and the numeric simulation is accomplished in the program MATLAB. The results of the calculated torque showed coherence with the one of the literature, however, in the support phase the significant differences were registered.

KEYWORDS: Mathematical model, Lagrange's equation, human gait.

1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo são expostos conceitos sobre a Biomecânica e a marcha humana, a proposta e a justificativa do trabalho, objetivos do trabalho e a estrutura da dissertação.

1.1 Biomecânica e a marcha humana

Segundo Winter (1991), a Biomecânica do movimento humano pode ser definida como uma interdisciplina que descreve analisa e avalia o movimento humano.

A Biomecânica estuda o movimento de organismos vivos e os efeitos das forças sobre o organismo. A abordagem da biomecânica para análise dos movimentos pode ser quantitativa, com a medição de algum parâmetro do movimento, ou qualitativa com a observação e a descrição dos movimentos.

A determinação das forças que agem no corpo humano é uma das principais preocupações da Biomecânica. No entanto, devido a complexidade dos parâmetros de antropometria do corpo humano, tais como, comprimentos, densidades, massas, e centro de gravidade de cada membro e a variação constante que ocorrem nas interfaces homem-ambiente torna-se o problema de maior dificuldade a ser solucionado.

A capacidade de se locomover é um dos bens mais preciosos que um ser humano dispõe e representa a liberdade de poder se deslocar para onde e quando desejar. Para mover o corpo sincronicamente, o homem utiliza um complexo processo que inclui o cérebro, a medula espinhal, nervos periféricos,

músculos, ossos e articulações (ALENCAR *et al.*, 1997), sendo os membros inferiores o principal elemento dessa complexa tarefa. O processo físico natural pelo qual ocorre a locomoção denomina-se marcha. A marcha é a mais freqüente das ações motoras e é, provavelmente, a atividade mais automática realizada pelo corpo humano. A marcha ocorre quando esses sistemas interagem com o ambiente externo ao corpo, através dos membros inferiores, provocando o deslocamento de todo o corpo. A compreensão do movimento requer conhecimentos de anatomia, fisiologia e biomecânica (WINTER, 1991).

A análise do movimento humano é o assunto de maior interesse da Biomecânica, e em particular a análise da marcha humana. A análise cinemática do movimento humano descreve analisa e avalia os deslocamentos linear e angular, velocidades e acelerações que ocorrem no movimento humano.

Biomecânica do movimento humano é definida como a mecânica e a biofísica do sistema ósseo e muscular relativo a performance da técnica do movimento.

1.2 Objetivo

Este trabalho tem como objetivo estudar os movimentos do corpo humano durante a marcha, especificamente os membros inferiores, por meio da simulação numérica de um modelo matemático simplificado do corpo humano baseado no modelo de três segmentos proposto por Winter. Cumprido esse objetivo, pretende-se que este modelo aqui apresentado possa atender aos interesses da comunidade científica que utiliza desses procedimentos na área de biomecânica.

1.3 Proposta do trabalho

Este trabalho propõe uma análise dinâmica do membro inferior durante a marcha humana. A modelagem do membro inferior é baseada em um modelo de três segmentos e, no formalismo Lagrangeano foi introduzida a forma matricial. Análises dinâmicas serão feitas nas duas fases da marcha humana, na fase de oscilação, onde o segmento que representa a perna não está em contato com o solo, e na fase de apoio onde o segmento que representa a perna está em contato com o solo. A simulação numérica do modelo é realizada usando-se o programa MATLAB.

1.4 Justificativa do trabalho

A justificativa deste trabalho é oferecer mais uma ferramenta a comunidade científica que se utiliza desses modelos para estudos de Biomecânica. Com a crescente demanda de aparelhos ortopédicos, aparelhos esportivos, treinamento de atletas, etc., este trabalho visa oferecer mais uma fonte para esses pesquisadores que no dia a dia procuram melhorar o desempenho destes e ainda desenvolver novos modelos.

1.5 Estrutura da dissertação

Este trabalho é composto por sete capítulos e anexos. O conteúdo do trabalho está dividido em:

Capítulo 1, INTRODUÇÃO. Expõe noções gerais sobre a Biomecânica e a marcha humana, proposta do trabalho, justificativa, objetivo e a estrutura da dissertação.

Capítulo 2, EVOLUÇÃO DO ESTUDO DA BIOMECÂNICA COM RELAÇÃO À MARCHA HUMANA. Apresenta uma síntese do movimento humano, da solução direta e inversa e da Biomecânica, e ainda relata os conceitos de cinemática e cinética.

Capítulo 3, FORMULAÇÃO MATEMÁTICA. Este capítulo apresenta uma síntese da teoria de Lagrange que será utilizada na formulação do modelo para posterior simulação e descreve também o modelo de união de segmentos.

Capítulo 4, MODELAGEM DA MARCHA HUMANA. Descreve todo procedimento utilizado para obtenção do modelo, na fase de oscilação e na fase de apoio.

Capítulo 5, SIMULAÇÃO DO MODELO. Apresenta o modelo implementado no MATLAB para simulação da marcha humana.

Capítulo 6, RESULTADOS E DISCUSSÃO. Este capítulo apresenta os resultados obtidos na simulação executada no programa MATLAB, e ainda as análises e discussões.

Capítulo 7, COMENTÁRIOS E CONCLUSÕES. Expõe as conclusões obtidas em função dos resultados alcançados e propõe uma comparação do modelo estudado.

2 EVOLUÇÃO DO ESTUDO DA BIOMECÂNICA COM RELAÇÃO À MARCHA HUMANA

2.1 Fundamentos da Biomecânica

No estudo da biomecânica, uma grande variedade de movimentos físicos estão envolvidos, como o andar de um deficiente físico, o levantamento de uma carga por um trabalhador, a performance de um atleta, etc. Os princípios físicos e biológicos aplicados são os mesmos em todos os casos. O que varia de caso para caso é o movimento específico e o nível de detalhe que está sendo perguntado pelo desempenho de cada movimento.

A lista de profissionais interessados em aplicar aspectos do movimento humano é longa: cirurgiões ortopedistas, treinadores de atletas, engenheiros de reabilitação, psiquiatras, projetistas de equipamentos esportivos, etc. Ela é uma disciplina emergente, e, é baseada em conhecimentos da Física, Química, Matemática, Fisiologia, e Anatomia. É surpreendente notar que os reais pioneiros na área de biomecânica foram, Leonardo daVinci, Galileo, Lagrange, Bernoulli, Euler e Young. Todos estes cientistas foram os primeiros pesquisadores interessados na aplicação da mecânica em problemas biológicos.

A biomecânica pode ser classificada em biomecânica interna e biomecânica externa.

Biomecânica interna – preocupa-se com a determinação das forças articulares e musculares e suas conseqüências no biomaterial, devido às diferentes formas de solicitação mecânica como, pressão, tração, flexão, torção

etc. Essas grandezas normalmente são difíceis de serem medidas diretamente, podendo ser calculadas através de parâmetros da cinemática e da dinâmica.

Biomecânica externa - trata da determinação quantitativa de deslocamento e posição do corpo humano com o auxílio de medidas cinemáticas e dinâmicas.

Áreas de atuação da biomecânica onde há produção de conhecimentos:

- locomoção humana;
- esporte;
- clínica e reabilitação;
- ortopedia e traumatologia;
- instrumentação e métodos;
- modelagem e simulação computacional;
- tecidos e biomateriais;
- músculo-esquelética;
- cardiovascular e respiratória;
- ocupacional e ergonômica.

Obter procedimentos padrões de medida em biomecânica é uma tarefa difícil, devido à complexidade do objeto em estudo, além de estarem sujeitos aos tipos diversos de erros que ocorrem nas medições em experimentos científicos em geral. Os procedimentos de medição em biomecânica são classificados das seguintes formas:

- *Procedimento mecânico* - Observações de grandezas por observação direta e que não se alteram rapidamente (massa, comprimento, etc.);

- *Procedimento eletrônico* - grandezas mecânicas são transformadas em sinais elétricos, facilitando a medição de grandezas que variam rapidamente com o tempo, permitindo medições dinâmicas, e adaptando-as ao processamento de dados (força muscular, movimentos oscilatórios de órgãos);
- *Procedimento ópticos-eletrônicos* - (processamento de imagem) as medições e análises são feitas no modelo que representa o objeto em estudo.

Para Winter (1991), Baumann (1995) e Amadio (1997), os métodos de medição em biomecânica são: antropometria, cinemática, dinamometria e eletromiografia. Utilizando-se esses métodos, o movimento pode ser descrito e modelado matematicamente.

Quanto ao registro dos movimentos do corpo humano, a análise cinemática da marcha consiste de uma descrição do movimento do corpo como um todo e/ou segmentos corporais com relação uns aos outros.

Segundo Winter (1991), variáveis cinemáticas são envolvidas na descrição do movimento, independente das forças que causam este movimento. Elas incluem deslocamentos linear e angular, velocidades e acelerações. Os deslocamentos são retirados dos lugares já conhecidos dos corpos: centro de gravidade das articulações, extremidades dos segmentos dos membros. O sistema de referência espacial pode ser também relativo ou absoluto. O relativo requer todas as coordenadas a serem relatadas relativas para um sistema de coordenadas anatômicas que escolhe segmento por segmento. Um sistema absoluto significa que as coordenadas se submetem a um sistema espacial externo de referência. O mesmo se aplica para dados angulares. Ângulos relativos significam ângulos entre articulações; ângulos absolutos são submetidos a referências espaciais externas.

2.2 Aspectos históricos da marcha humana

As primeiras identificações e descrições de anormalidades da marcha humana datam, provavelmente, de 400 a 300 a.C., por Hipócrates e Aristóteles, Alencar *et al.* (1997). Eles observaram diariamente a marcha de seus pacientes selecionando características importantes. Descreviam se a marcha ocorria de modo lento ou rápido, se os passos eram longos ou curtos, se os joelhos ficavam recurvados na fase de apoio, se o músculo glúteo médio era fraco ou a marcha cambaleante etc. O observador centrava sua atenção na simetria dos movimentos, analisando o paciente de frente, costas e perfil. A assimetria ou assincronismo de movimentos de partes do corpo durante a marcha indicavam anomalias.

Aristóteles considerava que as ações praticadas para se chegar a um estado de movimento podiam ser expressos mecanicamente; assim, cada movimento tinha um agente propulsor. Comparações mecânicas ilustravam um profundo conhecimento das funções dos ossos e Aristóteles chegou a mencionar a existência de forças de “reação”.

Galeno (131-201d.C.) foi, provavelmente, o primeiro “médico de esportes” que se tenha conhecimento. Publicou mais de 500 tratados de Medicina e, dentre outros aspectos, descobriu as funções dos diversos músculos que participam das ações do movimento.

Braune e Fischer (1987), expõem alguns aspectos históricos narrados a seguir:

“Os irmãos Weber, fisiologistas, anatomistas e físicos alemães deram novo impulso para a compreensão da marcha humana, a partir de 1836, com a publicação de um clássico trabalho da marcha humana. Nesse trabalho, demonstraram que o movimento humano está relacionado com processos mecânicos. Tal conclusão baseia-se na possibilidade de se obter informações apuradas sobre um particular movimento por medição direta. Um dos

problemas se relaciona com o movimento desenvolvido pelas diferentes partes do corpo e, em princípio, este problema pode ser resolvido quando se entende o processo do movimento e são conhecidas a magnitude da massa, a posição do centro de massa, a magnitude do momento de inércia de cada parte do corpo e de que modo o movimento das diferentes partes do corpo são condicionadas pelas articulações e forças externas, como a força de reação do solo. Determinar a amplitude e o tipo de movimento, tão precisamente quanto possível, é de particular importância neste estudo.

A partir de numerosas medições, os irmãos Weber obtiveram, entre outros, dados relativos à velocidade do andar e a relação entre a duração e o comprimento do passo. Essas observações forneceram os fundamentos para a teoria da marcha e da corrida e, até o presente momento, seus dados não são desatualizados e permanecem válidos. Eles obtiveram o máximo possível de informações com os recursos disponíveis na época.

2.3 Aspectos históricos de modelamento de movimentos do corpo humano

A grande maioria das análises cinéticas do movimento humano tem sido feitas através da dinâmica inversa. Este tipo de análise usa as medidas cinemáticas e as associa com as medidas das forças externas (forças de reação do solo) para determinar as forças de reação internas (articulações) e momentos, que causam o movimento. A seqüência real acontece de maneira inversa, com uma variação neural dirigida para os músculos, resultando em níveis variados de recrutamento dos músculos. A rede de efeito de todas as forças musculares age em cada articulação gerando um momento que varia com o tempo, que em turno acelera ou desacelera os segmentos adjacentes, causando assim o movimento. Conhecendo-se então esses momentos podemos obter as medidas cinemáticas, esse caminho é denominado solução direta.

A locomoção humana é o movimento que tem atraído a maior atenção dos pesquisadores. Devido a complexidade do movimento e o modelo de segmento de união, simplificações são feitas ou a simulação é limitada a períodos curtos de movimentos. Ider e Trimble (1988) propuseram um modelo de cinco segmentos interconectados como ilustrado na Figura 2.1 para a modelagem da marcha humana, é composto por um segmento que representa os braços e o tronco e mais quatro segmentos que representam as coxas e pernas. As equações do movimento foram obtidas usando as equações de Kane. Foram obtidos resultados nas duas fases da marcha (fase de oscilação e fase de apoio). Os pés não foram incluídos no modelo, pois a inclusão dos mesmos somaria mais graus de liberdade e conseqüentemente uma formulação mais complexa.

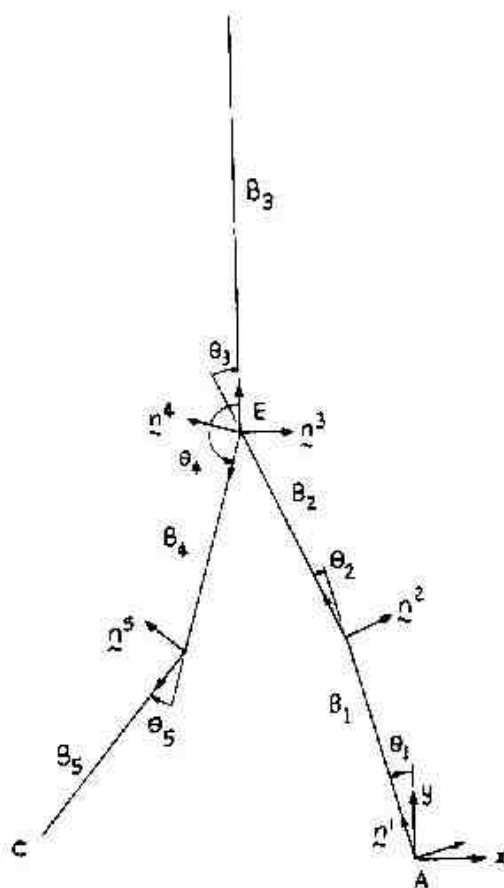


FIGURA 2.1- modelo de cinco segmentos (Ider e Trimble, 1988).

Allen e Sun (1997) idealizaram um modelo como ilustrado na Figura 2.2, formado por duas barras rígidas que representam a perna e o tronco e duas massas associadas a cada barra. As massas se situam no centro de gravidade do segmento, as dimensões e massa do pé foram desconsideradas por serem muito pequenas quando comparadas com as da perna e do tronco. Em tal modelo, no quadril e na articulação do tornozelo há um atuador que provoca os momentos necessários para alcançar o movimento. Em cada articulação, o lado oposto do atuador existe uma mola angular e um impulsor que representam o enrijecimento passivo da articulação e também o enrijecimento ativo, produzido pelos músculos. A modelagem é feita utilizando-se a teoria de Lagrange, e através deste estuda um enrijecimento ideal para as articulações.

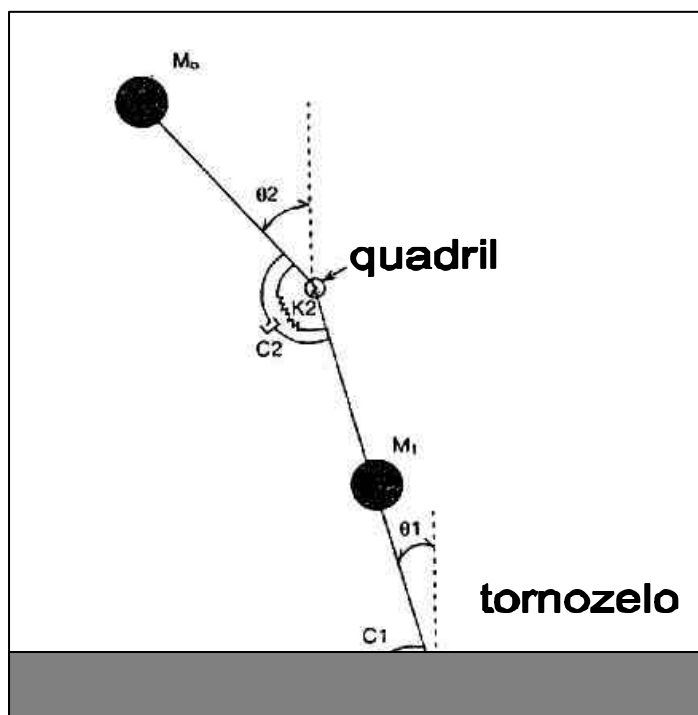


FIGURA 2.2- Modelo de dois segmentos (Allen e Sun,1997).

Townsend e Seireg (1972) modelaram os membros inferiores de um ser humano com massas concentradas com um grau de liberdade no quadril (flexão/extensão). Hemami (1980) propôs um modelo de três segmentos tridimensional com pernas rígidas e sem pé, e Pandy e Berme (1988) simularam somente um suporte usando um modelo de cinco segmentos no plano, sem o pé. Obviamente, grandes simplificações não produzem respostas válidas. Igualmente com modelos mais completos muitos pesquisadores restringiram partes de seus modelos cinematicamente (Beckett e Chang, 1968; Chão e Rim, 1973; Townsend, 1981) para obter trajetórias sinusoidal do tronco. Desta maneira restrições transgridem uma das maiores necessidades de uma simulação verdadeira.

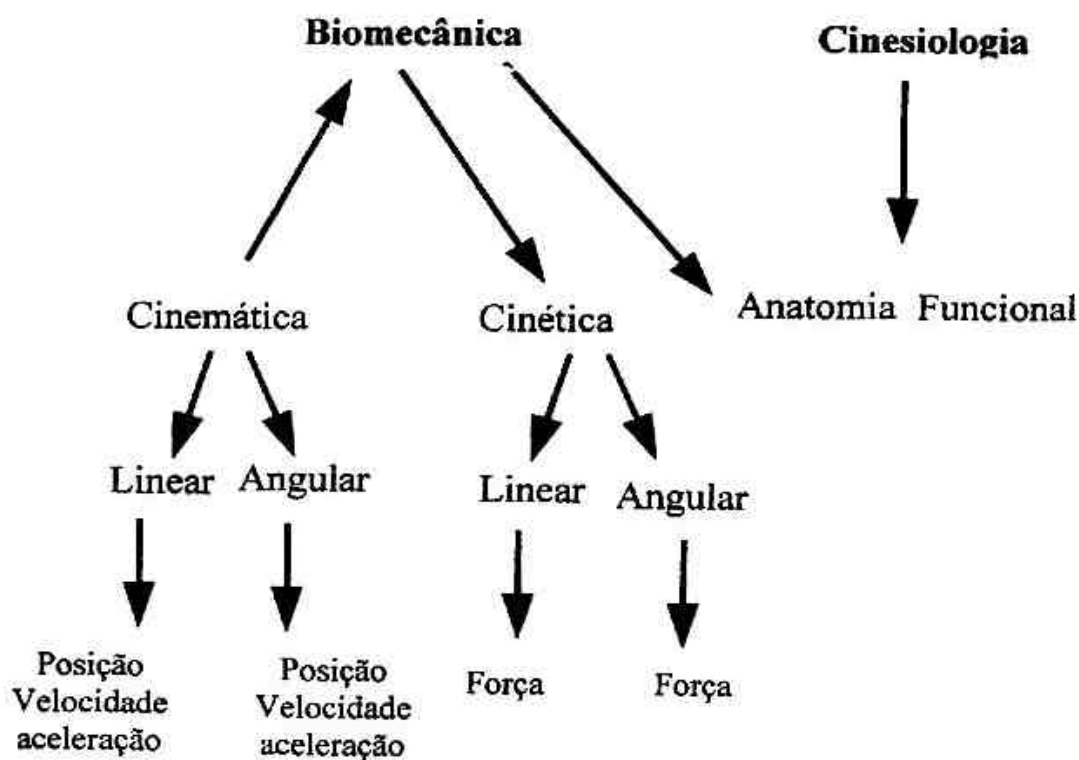


FIGURA 2.3 - Análise do Movimento Humano (SAAD, 1997).

Na Figura 2.3 é mostrada a interrelação existente na análise do movimento humano, (SAAD, 1997).

2.4 Ciclo da marcha

Um ciclo da marcha normal pode ser definido como eventos que ocorrem desde o toque do calcanhar de um dos membros inferiores, até o próximo toque do mesmo. O intervalo de tempo entre o toque de um mesmo calcanhar define a duração do ciclo para cada membro. Portanto, durante um ciclo da marcha, um pé ora está em contato com o solo (fase de apoio), ora no ar (fase de oscilação). A fase de apoio inicia-se com o contato inicial do pé (normalmente com o calcanhar, em condições patológicas, outras regiões podem tocar o solo antes do calcanhar) e termina quando o pé (normalmente as cabeças dos metatarsos e artelhos) deixa o solo (denominada impulsão). A fase de oscilação inicia-se com a impulsão e termina no toque do calcanhar com o solo.

Nas velocidades comuns de marcha, a fase de apoio ocupa aproximadamente 60% de um único ciclo da marcha, e a fase de oscilação ocupa 40%. As fases de apoio e oscilação podem ser subdivididas em outras subfases (toque do calcanhar, apoio médio, desprendimento dos dedos, oscilação inicial, oscilação média). A denominação e a quantidade destas subfases variam de autor para autor.

Nomenclatura de um ciclo da marcha, segundo SAAD (1997): TC-toque do calcanhar; AP-aplanamento do pé; MA-médio apoio; IM-impulsão; DD-despreendimento dos dedos; IO-início da oscilação; MO-metade da oscilação (Figura 2.4).

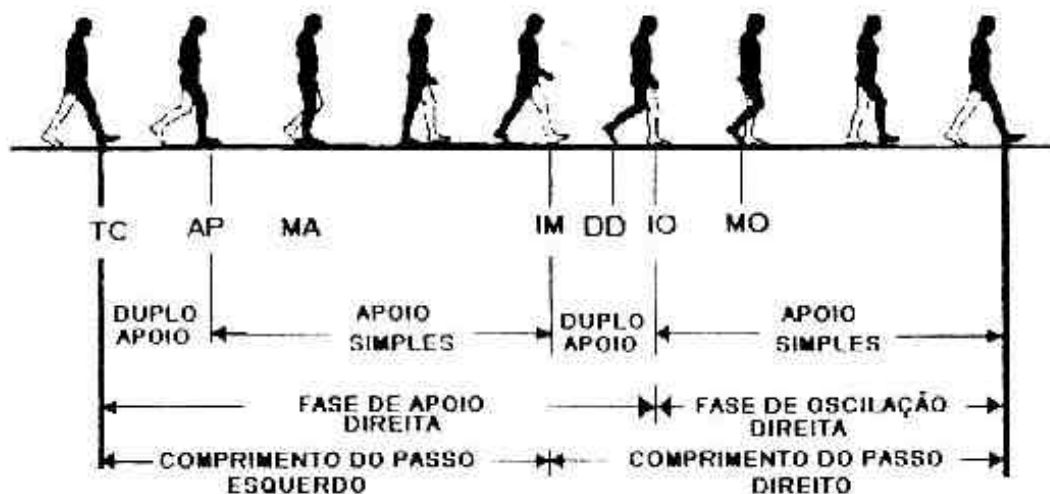


FIGURA 2.4 - Ciclo da marcha (SAAD, 1997).

2.4.1 Estudo cinético da marcha humana

Segundo Winter (1991), cinética são as forças que causam o movimento, ambas as forças, internas e externas estão presentes. Forças internas provém da atividade muscular, ligamentos ou por atrito entre os músculos e as articulações. Forças externas provém do contato com o solo ou de cargas externas, de corpos ativos, ou por fontes passivas (resistência do vento), uma larga variedade de análises cinéticas podem ser feitas. Os momentos de força produzidos por músculos atravessando uma articulação, a força mecânica fluindo, indo ou vindo, dos mesmos músculos, e as escolhas de energia do corpo que resultam desta fluência da força são todas consideradas parte da cinética. É a cinética que realmente causa o movimento. Uma grande parte do futuro da biomecânica encontra-se nas análises cinéticas, porque a informação presente permite fazer interpretações e cálculos definitivos.

2.4.2 *Estudo cinemático da marcha humana*

As descrições espaciais e temporais de um movimento são chamadas de cinemáticas. Esta descrição envolve a posição, velocidade e aceleração do corpo, sem citar as forças que causam este movimento. A análise cinemática pode ser qualitativa ou quantitativa. A análise qualitativa cinemática é uma descrição não-numérica do movimento, baseada em observação direta. A descrição pode abranger uma simples dicotomia do desempenho, bom ou ruim, a uma variedade de identificação de ações articulares.

Na análise quantitativa o movimento é descrito numericamente, com base nas medidas de dados de posição e força coletados durante a realização de um movimento. Neste tipo de análise os movimentos podem ser descritos com mais precisão.

Desta maneira, podemos obter dados cinemáticos lineares e angulares dos movimentos executados durante a marcha humana. A seguir serão citados dados imprescindíveis para o conhecimento básico da análise da marcha humana, divididos em cinemática linear e cinemática angular, que completam os movimentos do corpo humano.

2.4.2.1 *Cinemática linear*

Um ramo da cinemática relacionado ao estudo do corpo humano que estuda a cinemática dos elementos em movimento linear é chamado de cinemática linear. A translação, movimento translacional, é referido como movimento em “linha reta” e ocorre quando todos os pontos de um corpo movimentam-se em igual distância em relação ao tempo. Conforme a definição dos termos utilizados na biomecânica, de SAAD (1997), através do estudo cinemático obtemos o comprimento da passada e a largura do passo. A

passada (ciclo da marcha) é definida como a duração ou espaço do evento da perna até o mesmo evento da mesma perna no contato seguinte.

A passada é subdividida em passos. Um passo é a porção de uma passada, do evento de uma perna, que ocorre até o mesmo evento ocorrer na perna oposta. A largura do passo é a distância entre o toque dos calcanhares bilateralmente. Na Figura 2.5 é mostrado como eventos podem ser obtidos e medidos através de plantigrama (impressões plantares, enquanto uma pessoa anda sobre uma folha de papel com os pés ou sapatos borrados com tinta). Ainda podemos calcular a cadência de marcha (número de passos por minuto) e também a velocidade de marcha (comumente em m/s).



FIGURA 2.5 - Utilização do plantigrama para calcular uma passada (SAAD, 1997).

2.4.2.2 Cinemática angular

Movimento angular ocorre quando todas as partes de um corpo movem-se através de um mesmo ângulo, mas não sob um mesmo deslocamento linear. O ramo da cinemática que descreve o movimento angular é chamado cinemática angular. Esta descreve o movimento angular sem se preocupar com as causas do movimento. O movimento angular ocorre em torno de um eixo de rotação, que é uma linha perpendicular ao plano em que a rotação ocorre. A Figura 2.6 apresenta uma representação dos movimentos linear e angular.

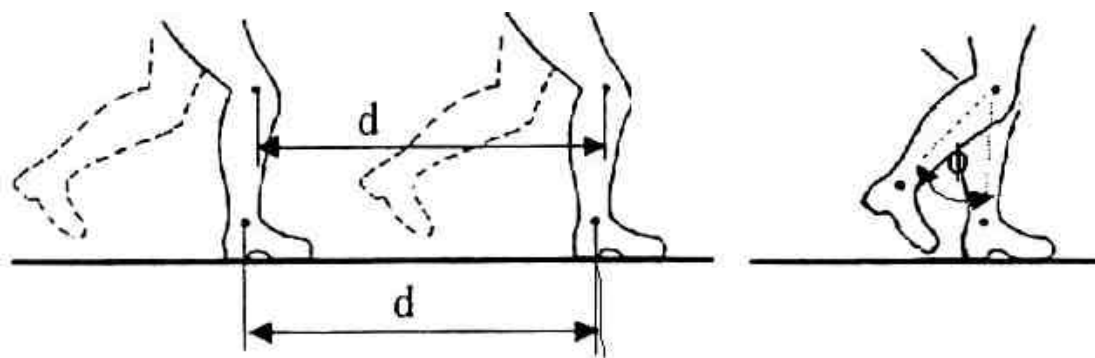


FIGURA 2.6 - Movimentos linear e angular

Podemos, no caso de análise de movimento de articulações, obter os ângulos de rotação de cada articulação nos três planos: sagital (flexão/extensão), frontal (abdução/adução) e transversal (rotações interna e externa), durante a execução da marcha. Para a análise do tronco podemos utilizar três eixos de coordenadas (X,Y,Z) com a origem fixada em um centro de massa (CM), apresentados na Figura 2.7.

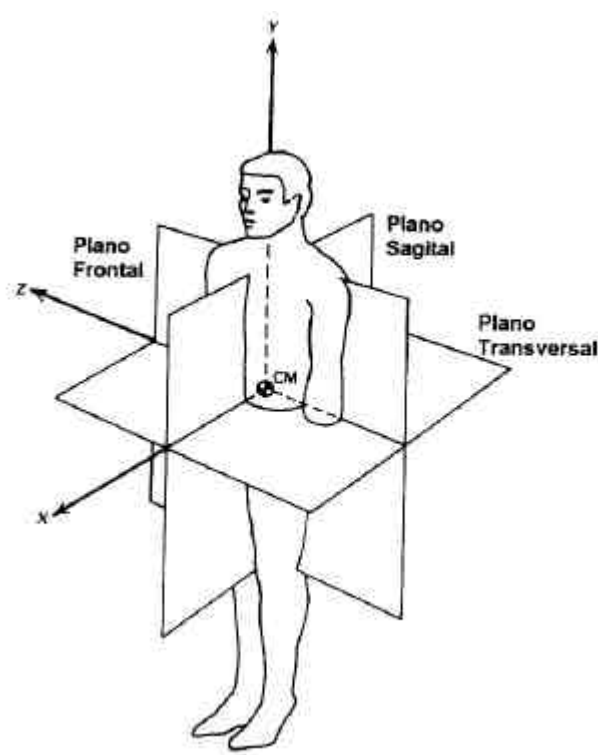


FIGURA 2.7 - Planos de rotação do corpo humano (Winter, 1991)

3 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

3.1 Introdução

Para a análise dinâmica de sistemas de segmentos conectados, modelos matemáticos que consistem de elementos de massa interconectados, molas, amortecedores, e atuadores (geradores de movimento) são frequentemente usados . O movimento de tais modelos pode ser determinado definindo a posição em função do tempo de segmentos individuais, ou pela aplicação de forças motoras, em cada caso o movimento do segmento é determinado pelas leis da física.

3.2 A função Lagrangeana L

Neste trabalho a formulação matemática é feita utilizando-se a Função Lagrangeana. As equações de Lagrange requerem o conceito de deslocamento virtual e emprega sistemas de energia e trabalho como função das coordenadas generalizadas para obter um conjunto de equações diferenciais de segunda ordem do movimento.

A função Lagrangeana L é definida como a diferença entre a energia cinética (E_c) e a energia potencial (E_p) total do sistema:

$$L = E_c - E_p$$

A energia cinética de um segmento é definida como o trabalho realizado no segmento para aumentar sua velocidade inicial para um valor v , onde v é medida em relação a um sistema de referencia global (inercial).

A energia potencial existe se o sistema está sob a influência de forças conservativas. Então a energia potencial é definida como a energia armazenada em virtude da posição de um segmento em relação ao campo gravitacional (normalmente o nível do solo).

A equação de Lagrange que descreve os movimentos de segmentos conectados é:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i$$

Onde, q_i é a coordenada generalizada, \dot{q}_i é a velocidade generalizada e Q_i é a força generalizada que representa os torques nas juntas.

3.3 Modelo de união de segmentos

Medidas precisas de segmentos de massa, centro de massa, centro de articulações e momentos de inércia são necessárias. Tais dados podem ser obtidos de apresentações estatísticas baseadas na estatura, peso e algumas vezes sexo. Um limitado número dessas variáveis podem ser medidas diretamente, mas muitas das técnicas consomem tempo e apresentam precisão limitada. Apesar de todas as fontes de dados antropométricos, são feitas as seguintes suposições:

Cada segmento tem massa fixa localizada no centro de massa (que é o centro de gravidade na posição vertical);

A localização de cada segmento de centro de massa permanecem fixas durante o movimento;

- As articulações são consideradas juntas de rotações;
- Os comprimentos dos segmentos permanecem constantes durante o movimento.

A Figura 3.1 ilustra a equivalência entre a anatomia e o modelo de união de segmentos do membro inferior com seus respectivos centros de massa, onde m_i , $i = 1, 2, e 3$ são massas concentradas de cada segmento e l_i , $i = 1, 2, e 3$ são os comprimentos respectivos:

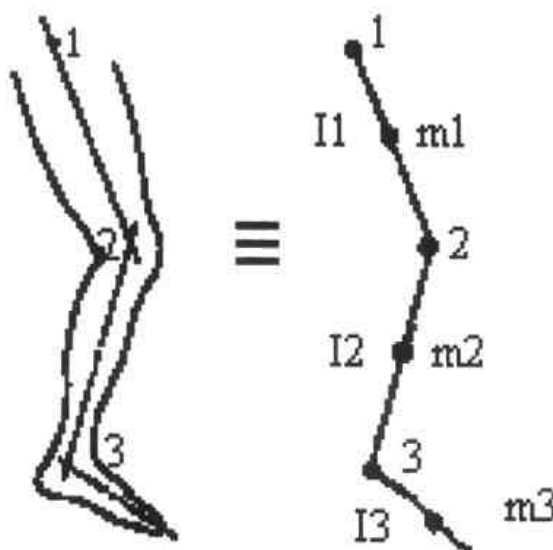


FIGURA 3.1- Relação entre o modelo anatômico e o modelo de união dos segmentos (Winter,1991)

3.4 Modelo adotado

De acordo com as fases da marcha humana foram utilizados os seguintes modelos:

a) Pêndulo duplo na fase de oscilação, pois o membro inferior oscila livremente sem influência do tronco.

b) Pêndulo triplo invertido na fase de apoio, pois há interferência significativa do tronco nesta fase da marcha.

a) Fase de oscilação (pêndulo duplo)

b) Fase de apoio (pêndulo invertido)

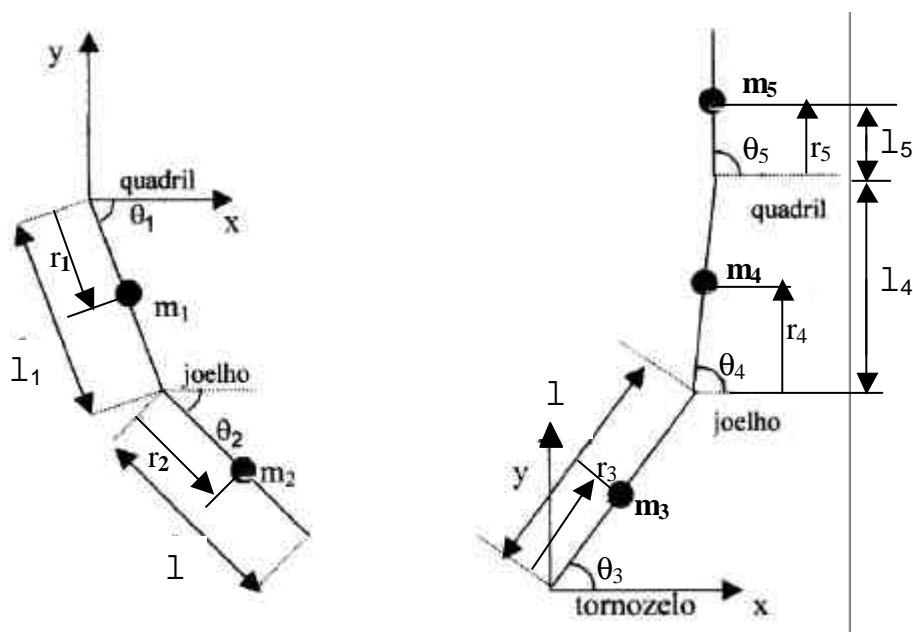


FIGURA 3.2 – Modelo adotado na fase de oscilação e na fase de apoio.

Nestes modelos as massas dos membros são concentradas no centro de gravidade de cada membro e as massas nas articulações são desprezadas. As coordenadas de referências são fixas nas articulações do quadril e do tornozelo para as fases de oscilação e de apoio, respectivamente.

Nos movimentos reais da marcha as posições destas articulações movimentam-se em relação a referência inercial (absoluta), porém, em termos da análise dos momentos nas articulações os movimentos relativos são necessários. Na Figura 3.2 (a) e (b) são representados os modelos de segmentos adotados para este trabalho onde m_i : massas dos segmentos, l_i : comprimentos dos segmentos e, r_i : distância entre o centro de massa e a articulação correspondente.

Com base no modelo de união dos segmentos descrito, o modelo antropométrico para este trabalho é apresentado na Figura 3.3 com base nos dados apresentados por Winter.

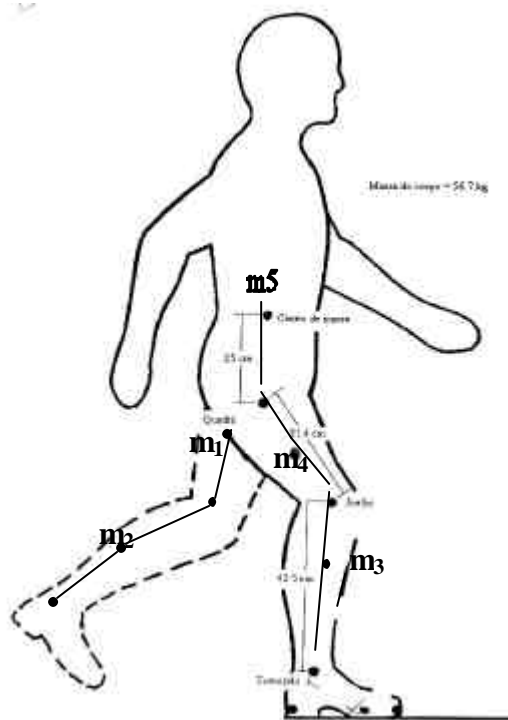


FIGURA 3.3- Modelo antropométrico adotado.

4 MODELAGEM DA MARCHA HUMANA

Conforme foi descrito no capítulo 3, a modelagem do corpo é desenvolvida com base no formalismo Lagrangeano, introduzindo a forma matricial.

4.1 Fase de oscilação

O membro inferior humano é modelado sem o pé, pois a influência do mesmo é considerada pequena neste trabalho na fase de oscilação. Assim os segmentos l_1 e l_2 , representam, respectivamente os comprimentos da perna e da coxa, ilustrados na Figura 3.2. As localizações dos centros de massa da perna e da coxa, são representados respectivamente por r_1 e r_2 e T_1 e T_2 que representam os torques na perna e na coxa. O sistema apresenta duas variáveis independentes q_1 e q_2 . Então duas equações diferenciais são esperadas. A coordenada generalizada nesta fase é definida por: $q = [q_1, q_2]^T$ conforme a coordenada de referência adotada na Figura 3.2.

A posição de M_1 na coordenada referencial da figura 3.2 (a):

$$r_1 = \begin{bmatrix} \cos q_1 & -\sin q_1 \\ \sin q_1 & \cos q_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -r_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r_1 \cos q_1 \\ -r_1 \sin q_1 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Derivando r_1 em função do tempo, temos a velocidade de M_1 :

$$\dot{r}_1 = \begin{bmatrix} r_1 \operatorname{sen} \mathbf{q}_1 \dot{\mathbf{q}}_1 \\ -r_1 \operatorname{cos} \mathbf{q}_1 \dot{\mathbf{q}}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \operatorname{sen} \mathbf{q}_1 \\ -r_1 \operatorname{cos} \mathbf{q}_1 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_1 \quad (4.2)$$

$$\text{Fazendo } B_1 = \begin{bmatrix} r_1 \operatorname{sen} \mathbf{q}_1 \\ -r_1 \operatorname{cos} \mathbf{q}_1 \end{bmatrix} \text{ e } \dot{\mathbf{q}}_1 = \dot{\mathbf{q}}_1 \quad (4.3)$$

De acordo com Shabana (1989), a energia cinética de M_1 na forma matricial é dada por :

$$E_{C1} = \frac{1}{2} M_1 \dot{\mathbf{q}}_1 B_1^T B_1 \dot{\mathbf{q}}_1 \quad (4.4)$$

ou

$$E_{C1} = \frac{1}{2} M_1 \left(\dot{\mathbf{q}}_1 \right)^2 (r_1)^2 \quad (4.5)$$

A posição de M_2 na coordenada referencial é:

$$\begin{aligned} r_2 &= \begin{bmatrix} -l_1 \operatorname{cos} \mathbf{q}_1 \\ -l_1 \operatorname{sen} \mathbf{q}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \operatorname{cos} \mathbf{q}_2 & -\operatorname{sen} \mathbf{q}_2 \\ \operatorname{sen} \mathbf{q}_2 & \operatorname{cos} \mathbf{q}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -r_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -l_1 \operatorname{cos} \mathbf{q}_1 \\ -l_1 \operatorname{sen} \mathbf{q}_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -r_2 \operatorname{cos} \mathbf{q}_2 \\ -r_2 \operatorname{sen} \mathbf{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_1 \operatorname{cos} \mathbf{q}_1 - r_2 \operatorname{cos} \mathbf{q}_2 \\ -l_1 \operatorname{sen} \mathbf{q}_1 - r_2 \operatorname{sen} \mathbf{q}_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Derivando r_2 em função do tempo, temos a velocidade de r_2 :

$$\dot{r}_2 = \begin{bmatrix} l_1 \operatorname{sen} \mathbf{q}_1 \dot{\mathbf{q}}_1 + r_2 \operatorname{sen} \mathbf{q}_2 \dot{\mathbf{q}}_2 \\ -l_1 \operatorname{cos} \mathbf{q}_1 \dot{\mathbf{q}}_1 - r_2 \operatorname{cos} \mathbf{q}_2 \dot{\mathbf{q}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_1 \operatorname{sen} \mathbf{q}_1 + r_2 \operatorname{sen} \mathbf{q}_2 \\ -l_1 \operatorname{cos} \mathbf{q}_1 - r_2 \operatorname{cos} \mathbf{q}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_1 \\ \dot{\mathbf{q}}_2 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

A energia cinética de M_2 na forma matricial é dada por:

$$E_{C2} = \frac{1}{2} M_2 \dot{\mathbf{q}}_2^T B_2^T B_2 \dot{\mathbf{q}}_2 \quad (4.8)$$

Onde,
$$B_2 = \begin{bmatrix} l_1 \operatorname{sen} \mathbf{q}_1 + r_2 \operatorname{sen} \mathbf{q}_2 \\ -l_1 \operatorname{cos} \mathbf{q}_1 - r_2 \operatorname{cos} \mathbf{q}_2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \dot{\mathbf{q}}_2 = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_1 \\ \dot{\mathbf{q}}_2 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Calculando primeiramente $B^T B$:

$$B^T B = \begin{bmatrix} l_1 \operatorname{sen} \mathbf{q}_1 & -l_1 \operatorname{cos} \mathbf{q}_1 \\ r_2 \operatorname{sen} \mathbf{q}_2 & -r_2 \operatorname{cos} \mathbf{q}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 \operatorname{sen} \mathbf{q}_1 & r_2 \operatorname{sen} \mathbf{q}_2 \\ -l_1 \operatorname{cos} \mathbf{q}_1 & -r_2 \operatorname{cos} \mathbf{q}_2 \end{bmatrix} = \quad (4.10)$$

$$= \begin{bmatrix} (l_1)^2 & l_1 r_2 \operatorname{cos}(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) \\ l_1 r_2 \operatorname{cos}(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) & (r_2)^2 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

$$E_{c2} = \frac{1}{2} M_2 \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_1 & \dot{\mathbf{q}}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (l_1)^2 & l_1 r_2 \operatorname{cos}(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) \\ l_1 r_2 \operatorname{cos}(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) & (r_2)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_1 \\ \dot{\mathbf{q}}_2 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

$$E_{c2} = \frac{1}{2} M_2 \left[(l_1)^2 (\dot{\mathbf{q}}_1)^2 + 2l_1 r_2 \dot{\mathbf{q}}_1 \dot{\mathbf{q}}_2 \operatorname{cos}(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) + (r_2)^2 (\dot{\mathbf{q}}_2)^2 \right] \quad (4.13)$$

Então a energia cinética total é:

$$E_c = E_{c1} + E_{c2}$$

$$E_c = \frac{1}{2} M_1 (\dot{\mathbf{q}}_1)^2 (r_1)^2 + \frac{1}{2} M_2 \left[(l_1)^2 (\dot{\mathbf{q}}_1)^2 + 2l_1 r_2 \dot{\mathbf{q}}_1 \dot{\mathbf{q}}_2 \operatorname{cos}(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) + (r_2)^2 (\dot{\mathbf{q}}_2)^2 \right] \quad (4.14)$$

Energia potencial de M_1 é dada por:

$$E_{p1} = M_1 g (-r_1 \operatorname{sen} \mathbf{q}_1) = -M_1 g r_1 \operatorname{sen} \mathbf{q}_1 \quad (4.15)$$

Energia potencial de M_2 é dada por:

$$E_{p2} = M_2 g (-l_1 \operatorname{sen} \mathbf{q}_1 - r_2 \operatorname{sen} \mathbf{q}_2) = -M_2 g l_1 \operatorname{sen} \mathbf{q}_1 - M_2 g r_2 \operatorname{sen} \mathbf{q}_2 \quad (4.16)$$

Então a energia potencial total é:

$$E_p = -M_1 g r_1 \sin \mathbf{q}_1 - M_2 g l_1 \sin \mathbf{q}_1 - M_2 g r_2 \sin \mathbf{q}_2 \quad (4.17)$$

Como a Lagrangeana é dada por:

$L = E_c - E_p$, temos:

$$L = \frac{1}{2} M_1 \left(\dot{\mathbf{q}}_1 \right)^2 (r_1)^2 + \frac{1}{2} M_2 (l_1)^2 \left(\dot{\mathbf{q}}_1 \right)^2 + M_2 l_1 r_2 \dot{\mathbf{q}}_1 \dot{\mathbf{q}}_2 \cos(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) + \frac{1}{2} M_2 (r_2)^2 \left(\dot{\mathbf{q}}_2 \right)^2 + M_1 g r_1 \sin \mathbf{q}_1 + M_2 g l_1 \sin \mathbf{q}_1 + M_2 g r_2 \sin \mathbf{q}_2 \quad (4.18)$$

Portanto, os termos da equação de Lagrange em relação a \mathbf{q}_1 são:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}_1} = -M_2 l_1 r_2 \dot{\mathbf{q}}_1 \dot{\mathbf{q}}_2 \sin(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) + M_1 g r_1 \cos \mathbf{q}_1 + M_2 g l_1 \cos \mathbf{q}_1 \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_1} = M_1 \dot{\mathbf{q}}_1 (r_1)^2 + M_2 (l_1)^2 \dot{\mathbf{q}}_1 + M_2 l_1 r_2 \dot{\mathbf{q}}_2 \cos(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) \quad (4.20)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_1} \right) = M_1 \ddot{\mathbf{q}}_1 (r_1)^2 + M_2 (l_1)^2 \ddot{\mathbf{q}}_1 + M_2 l_1 r_2 \ddot{\mathbf{q}}_2 \cos(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) - M_2 l_1 r_2 \dot{\mathbf{q}}_2 \sin(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) \left(\dot{\mathbf{q}}_1 - \dot{\mathbf{q}}_2 \right) \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}_1} &= M_1 \ddot{\mathbf{q}}_1 (r_1)^2 + M_2 (l_1)^2 \ddot{\mathbf{q}}_1 + M_2 l_1 r_2 \ddot{\mathbf{q}}_2 \cos(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) - \\ &- M_2 l_1 r_2 \dot{\mathbf{q}}_1 \dot{\mathbf{q}}_2 \sin(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) + M_2 l_1 r_2 \left(\dot{\mathbf{q}}_2 \right)^2 \sin(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) + \\ &+ M_2 l_1 r_2 \dot{\mathbf{q}}_1 \dot{\mathbf{q}}_2 \sin(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) - M_1 g r_1 \cos \mathbf{q}_1 - M_2 g l_1 \cos \mathbf{q}_1 \end{aligned} \quad (4.22)$$

Rearranjando, temos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}_1} &= M_1 \ddot{\mathbf{q}}_1 (r_1)^2 + M_2 (l_1)^2 \ddot{\mathbf{q}}_1 + M_2 l_1 r_2 \ddot{\mathbf{q}}_2 \cos(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) + \\ &+ M_2 l_1 r_2 \left(\dot{\mathbf{q}}_2 \right)^2 \sin(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) - M_1 g r_1 \cos \mathbf{q}_1 - M_2 g l_1 \cos \mathbf{q}_1 \end{aligned} \quad (4.23)$$

E os termos da equação de Lagrange em relação a \mathbf{q}_2 são:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}_2} = -M_2 l_1 r_2 \dot{\mathbf{q}}_1 \dot{\mathbf{q}}_2 \sin(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) + M_2 g r_2 \cos \mathbf{q}_2 \quad (4.24)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_2} = M_2 l_1 r_2 \dot{\mathbf{q}}_1 \cos(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) + M_2 (r_2)^2 \dot{\mathbf{q}}_2 \quad (4.25)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_2} \right) = M_2 l_1 r_2 \ddot{\mathbf{q}}_1 \cos(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) - M_2 l_1 r_2 \dot{\mathbf{q}}_1 \sin(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) \left(\dot{\mathbf{q}}_1 - \dot{\mathbf{q}}_2 \right) + M_2 (r_2)^2 \ddot{\mathbf{q}}_2 \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}_2} &= M_2 l_1 r_2 \ddot{\mathbf{q}}_1 \cos(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) - M_2 l_1 r_2 \left(\dot{\mathbf{q}}_1 \right)^2 \sin(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) + \\ &+ M_2 l_1 r_2 \dot{\mathbf{q}}_1 \dot{\mathbf{q}}_2 \sin(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) + M_2 (r_2)^2 \ddot{\mathbf{q}}_2 + M_2 l_1 r_2 \dot{\mathbf{q}}_1 \dot{\mathbf{q}}_2 \sin(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) - M_2 g r_2 \cos \mathbf{q}_2 \end{aligned} \quad (4.27)$$

Rearranjando, temos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}_2} &= M_2 l_1 r_2 \ddot{\mathbf{q}}_1 \cos(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) - M_2 l_1 r_2 \left(\dot{\mathbf{q}}_1 \right)^2 \sin(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) + \\ &+ 2 M_2 l_1 r_2 \dot{\mathbf{q}}_1 \dot{\mathbf{q}}_2 \sin(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) + M_2 (r_2)^2 \ddot{\mathbf{q}}_2 - M_2 g r_2 \cos \mathbf{q}_2 \end{aligned} \quad (4.28)$$

Pelas equações (4.23) e (4.28) as equações de movimentos que representam a fase de oscilação, podem ser escritas na seguinte forma matricial:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_1 \\ \ddot{\mathbf{q}}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_1 \\ \dot{\mathbf{q}}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

onde:

$$A_{11} = M_1(r_1)^2 + M_2(l_1)^2$$

$$A_{12} = M_2 l_1 r_2 \cos(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2)$$

$$A_{21} = M_2 l_1 r_2 \cos(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2)$$

$$A_{22} = M_2(r_2)^2$$

$$B_{11} = 0$$

$$B_{12} = M_2 l_1 r_2 \dot{\mathbf{q}}_2 \sin(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2)$$

$$B_{21} = -M_2 l_1 r_2 \dot{\mathbf{q}}_1 \sin(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2)$$

$$B_{22} = 2M_2 l_1 r_2 \dot{\mathbf{q}}_1 \sin(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2)$$

$$C_{11} = -(M_1 r_1 + M_2 l_1)g \cos$$

$$C_{12} = 0$$

$$C_{21} = 0$$

$$C_{22} = -M_2 g r_2 \cos$$

E Q_1 e Q_2 são forças generalizadas (momentos) relativas a \mathbf{q}_1 e \mathbf{q}_2 , respectivamente.

4.2 Fase de apoio

Nesta fase da marcha humana, o membro inferior é representado por um modelo de três segmentos interconectados, onde l_3, l_4 e l_5 , representam respectivamente os comprimentos da perna, coxa e tronco, ilustrados anteriormente na Figura 3.2. As localizações dos centros de massa dos segmentos são representados por r_3, r_4 e r_5 . O sistema possui três variáveis

independentes $\mathbf{q}_3, \mathbf{q}_4, \mathbf{q}_5$. Então três equações diferenciais são esperadas. A coordenada generalizada nesta fase é definida por: $q = [\mathbf{q}_3 \ \mathbf{q}_4 \ \mathbf{q}_5]^T$ conforme a coordenada de referência adotada na Figura 3.2 (b).

Posição de M_3 no SRG:

$$r_3 = \begin{bmatrix} \cos \mathbf{q}_3 & -\text{sen} \mathbf{q}_3 \\ \text{sen} \mathbf{q}_3 & \cos \mathbf{q}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_3 \cos \mathbf{q}_3 \\ r_3 \text{sen} \mathbf{q}_3 \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

Derivando r_3 em relação ao tempo, temos a velocidade de M_3 :

$$\dot{r}_3 = \begin{bmatrix} -r_3 \text{sen} \mathbf{q}_3 \dot{\mathbf{q}}_3 \\ r_3 \cos \mathbf{q}_3 \dot{\mathbf{q}}_3 \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

Podemos escrever \dot{r}_3 na forma:

$$\dot{r}_3 = \begin{bmatrix} -r_3 \text{sen} \mathbf{q}_3 \\ r_3 \cos \mathbf{q}_3 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_3 \quad (4.3)$$

Fazendo, $\dot{r}_3 = B_3 \dot{\mathbf{q}}_3$, onde:

$$B_3 = \begin{bmatrix} -r_3 \text{sen} \mathbf{q}_3 \\ r_3 \cos \mathbf{q}_3 \end{bmatrix} \text{ e } \dot{\mathbf{q}}_3 = \dot{\mathbf{q}}_3 \quad (4.4)$$

A energia cinética de M_3 é calculada por:

$$E_{c3} = \frac{1}{2} M_3 \dot{\mathbf{q}}_3 B_3^T B_3 \dot{\mathbf{q}}_3 \quad (4.5)$$

Então temos a energia cinética de M_3 :

$$E_{c3} = \frac{1}{2} M_3 \dot{\mathbf{q}}_3 \left[(r_3)^2 \sin^2 \mathbf{q}_3 + (r_3)^2 \cos^2 \mathbf{q}_3 \right] \dot{\mathbf{q}}_3 \quad (4.6)$$

Simplificando, temos :

$$E_{c3} = \frac{1}{2} M_3 (r_3)^2 \left(\dot{\mathbf{q}}_3 \right)^2 \quad (4.7)$$

A posição de M_4 , no SRG é:

$$\begin{aligned} r_4 &= \begin{bmatrix} l_3 \cos \mathbf{q}_3 \\ l_3 \sin \mathbf{q}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \mathbf{q}_4 & -\sin \mathbf{q}_4 \\ \sin \mathbf{q}_4 & \cos \mathbf{q}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_4 \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} l_3 \cos \mathbf{q}_3 + r_4 \cos \mathbf{q}_4 \\ l_3 \sin \mathbf{q}_3 + r_4 \sin \mathbf{q}_4 \end{bmatrix} \quad (4.8) \end{aligned}$$

Derivando r_4 em relação ao tempo, temos a velocidade de M_4 :

$$\begin{aligned} \dot{r}_4 &= \begin{bmatrix} -l_3 \sin \mathbf{q}_3 \dot{\mathbf{q}}_3 - r_4 \sin \mathbf{q}_4 \dot{\mathbf{q}}_4 \\ l_3 \cos \mathbf{q}_3 \dot{\mathbf{q}}_3 + r_4 \cos \mathbf{q}_4 \dot{\mathbf{q}}_4 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -l_3 \sin \mathbf{q}_3 & -r_4 \sin \mathbf{q}_4 \\ l_3 \cos \mathbf{q}_3 & r_4 \cos \mathbf{q}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_3 \\ \dot{\mathbf{q}}_4 \end{bmatrix} \quad (4.9) \end{aligned}$$

Fazendo, $\dot{r}_4 = B_4 \cdot \dot{q}_4$, onde:

$$B_4 = \begin{bmatrix} -l_3 \operatorname{sen} \mathbf{q}_3 & -r_4 \operatorname{sen} \mathbf{q}_4 \\ l_3 \operatorname{cos} \mathbf{q}_3 & r_4 \operatorname{cos} \mathbf{q}_4 \end{bmatrix} \text{ e } \dot{q}_4 = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_3 \\ \dot{\mathbf{q}}_4 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

A energia cinética de M_4 , é calculada por:

$$E_{c4} = \frac{1}{2} M_4 \dot{q}_4^T B_4^T B_4 \dot{q}_4 \quad (4.11)$$

Calculando primeiramente $B_4^T B_4$, temos:

$$\begin{aligned} B_4^T B_4 &= \begin{bmatrix} -l_3 \operatorname{sen} \mathbf{q}_3 & l_3 \operatorname{cos} \mathbf{q}_3 \\ -r_4 \operatorname{sen} \mathbf{q}_4 & r_4 \operatorname{cos} \mathbf{q}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -l_3 \operatorname{sen} \mathbf{q}_3 & -r_4 \operatorname{sen} \mathbf{q}_4 \\ l_3 \operatorname{cos} \mathbf{q}_3 & r_4 \operatorname{cos} \mathbf{q}_4 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} (l_3)^2 & l_3 r_4 \operatorname{cos}(\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_4) \\ l_3 r_4 \operatorname{cos}(\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_4) & (r_4)^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.12)$$

Então:

$$E_{c4} = \frac{1}{2} M_4 \left[(l_3)^2 (\dot{\mathbf{q}}_3)^2 + 2r_4 l_3 \dot{\mathbf{q}}_3 \dot{\mathbf{q}}_4 \operatorname{cos}(\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_4) + (r_4)^2 (\dot{\mathbf{q}}_4)^2 \right] \quad (4.13)$$

A posição de M_5 , no SRG é dada por:

$$\begin{aligned} r_5 &= \begin{bmatrix} l_3 \operatorname{cos} \mathbf{q}_3 + l_4 \operatorname{cos} \mathbf{q}_4 \\ l_3 \operatorname{sen} \mathbf{q}_3 + l_4 \operatorname{sen} \mathbf{q}_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \operatorname{cos} \mathbf{q}_5 & -\operatorname{sen} \mathbf{q}_5 \\ \operatorname{sen} \mathbf{q}_5 & \operatorname{cos} \mathbf{q}_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_5 \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} l_3 \operatorname{cos} \mathbf{q}_3 + l_4 \operatorname{cos} \mathbf{q}_4 + r_5 \operatorname{cos} \mathbf{q}_5 \\ l_3 \operatorname{sen} \mathbf{q}_3 + l_4 \operatorname{sen} \mathbf{q}_4 + r_5 \operatorname{sen} \mathbf{q}_5 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.14)$$

Derivando r_5 em relação ao tempo, temos a velocidade de M_5 :

$$\begin{aligned} \dot{r}_5 &= \begin{bmatrix} -l_3 \operatorname{sen} \mathbf{q}_3 \dot{\mathbf{q}}_3 - l_4 \operatorname{sen} \mathbf{q}_4 \dot{\mathbf{q}}_4 - r_5 \operatorname{sen} \mathbf{q}_5 \dot{\mathbf{q}}_5 \\ l_3 \cos \mathbf{q}_3 \dot{\mathbf{q}}_3 + l_4 \cos \mathbf{q}_4 \dot{\mathbf{q}}_4 + r_5 \cos \mathbf{q}_5 \dot{\mathbf{q}}_5 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -l_3 \operatorname{sen} \mathbf{q}_3 & -l_4 \operatorname{sen} \mathbf{q}_4 & -r_5 \operatorname{sen} \mathbf{q}_5 \\ l_3 \cos \mathbf{q}_3 & l_4 \cos \mathbf{q}_4 & r_5 \cos \mathbf{q}_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_3 \\ \dot{\mathbf{q}}_4 \\ \dot{\mathbf{q}}_5 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.15)$$

$\dot{r}_5 = B_5 \cdot \dot{q}_5$, onde:

$$B_5 = \begin{bmatrix} -l_3 \operatorname{sen} \mathbf{q}_3 & -l_4 \operatorname{sen} \mathbf{q}_4 & -r_5 \operatorname{sen} \mathbf{q}_5 \\ l_3 \cos \mathbf{q}_3 & l_4 \cos \mathbf{q}_4 & r_5 \cos \mathbf{q}_5 \end{bmatrix} \text{ e } \dot{q}_5 = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_3 \\ \dot{\mathbf{q}}_4 \\ \dot{\mathbf{q}}_5 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

A energia cinética de M_5 , é calculada por:

$$E_{c5} = \frac{1}{2} M_5 \dot{q}_5^T B_5^T B_5 \dot{q}_5 \quad (4.17)$$

Calculando primeiramente $B_5^T B_5$, temos:

$$B_5^T B_5 = \begin{bmatrix} -l_3 \operatorname{sen} \mathbf{q}_3 & l_3 \cos \mathbf{q}_3 \\ -l_4 \operatorname{sen} \mathbf{q}_4 & l_4 \cos \mathbf{q}_4 \\ -r_5 \operatorname{sen} \mathbf{q}_5 & r_5 \cos \mathbf{q}_5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -l_3 \operatorname{sen} \mathbf{q}_3 & -l_4 \operatorname{sen} \mathbf{q}_4 & -r_5 \operatorname{sen} \mathbf{q}_5 \\ l_3 \cos \mathbf{q}_3 & l_4 \cos \mathbf{q}_4 & r_5 \cos \mathbf{q}_5 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (l_3)^2 & l_3 l_4 \cos(\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_4) & r_5 l_3 \cos(\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_5) \\ l_3 l_4 \cos(\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_4) & (l_4)^2 & r_5 l_4 \cos(\mathbf{q}_4 - \mathbf{q}_5) \\ r_5 l_3 \cos(\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_5) & r_5 l_4 \cos(\mathbf{q}_4 - \mathbf{q}_5) & (r_5)^2 \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

Então, a energia cinética de M_5 é:

$$E_{c5} = \frac{1}{2} M_5 \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_3 & \dot{\mathbf{q}}_4 & \dot{\mathbf{q}}_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (l_3)^2 & l_3 l_4 \cos(\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_4) & l_3 r_5 \cos(\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_5) \\ l_3 l_4 \cos(\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_4) & (l_4)^2 & l_4 r_5 \cos(\mathbf{q}_4 - \mathbf{q}_5) \\ l_3 r_5 \cos(\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_5) & l_4 r_5 \cos(\mathbf{q}_4 - \mathbf{q}_5) & (r_5)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_3 \\ \dot{\mathbf{q}}_4 \\ \dot{\mathbf{q}}_5 \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

Rearranjando, temos:

$$E_{c5} = \frac{1}{2} M_5 (l_3)^2 (\dot{\mathbf{q}}_3)^2 + M_5 l_3 l_4 \cos(\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_4) \dot{\mathbf{q}}_3 \dot{\mathbf{q}}_4 + M_5 r_5 l_3 \cos(\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_5) \dot{\mathbf{q}}_3 \dot{\mathbf{q}}_5 + \\ + \frac{1}{2} M_5 (l_4)^2 (\dot{\mathbf{q}}_4)^2 + M_5 r_5 l_4 \cos(\mathbf{q}_4 - \mathbf{q}_5) \dot{\mathbf{q}}_4 \dot{\mathbf{q}}_5 + (r_5)^2 (\dot{\mathbf{q}}_5)^2 \quad (4.20)$$

Portanto, a energia cinética total é:

$$E_c = E_{c1} + E_{c2} + E_{c3} \\ = \frac{1}{2} M_3 \dot{\mathbf{q}}_3^T B_3^T B_3 \dot{\mathbf{q}}_3 + \frac{1}{2} M_4 \dot{\mathbf{q}}_4^T B_4^T B_4 \dot{\mathbf{q}}_4 + \frac{1}{2} M_5 \dot{\mathbf{q}}_5^T B_5^T B_5 \dot{\mathbf{q}}_5 \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}M_3(r_3)^2\left(\dot{\mathbf{q}}_3\right)^2 + \frac{1}{2}M_4(l_3)^2\left(\dot{\mathbf{q}}_3\right)^2 + M_4l_3r_4\dot{\mathbf{q}}_3\dot{\mathbf{q}}_4\cos(\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_4) + \\
&+ \frac{1}{2}M_4(r_4)^2\left(\dot{\mathbf{q}}_4\right)^2 + \frac{1}{2}M_5(l_3)^2\left(\dot{\mathbf{q}}_3\right)^2 + M_5l_3l_4\dot{\mathbf{q}}_3\dot{\mathbf{q}}_4\cos(\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_4) + \\
&+ \frac{1}{2}M_5(l_4)^2\left(\dot{\mathbf{q}}_4\right)^2 + M_5l_3r_5\dot{\mathbf{q}}_3\dot{\mathbf{q}}_5\cos(\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_5) + M_5l_4r_5\dot{\mathbf{q}}_4\dot{\mathbf{q}}_5\cos(\mathbf{q}_4 - \mathbf{q}_5) + \\
&+ (r_5)^2\left(\dot{\mathbf{q}}_5\right)^2
\end{aligned} \tag{4.22}$$

A energia potencial total é:

$$E_p = E_{p1} + E_{p2} + E_{p3}$$

$$E_p = M_3gr_3\sin\mathbf{q}_3 + M_4gl_3\sin\mathbf{q}_3 + M_4gr_4\sin\mathbf{q}_4 +$$

$$+ M_5gl_3\sin\mathbf{q}_3 + M_5gl_4\sin\mathbf{q}_4 + M_5gr_5\sin\mathbf{q}_5 \tag{4.23}$$

Como a equação de Lagrange é dada por $L = E_c - E_p$, temos:

$$\begin{aligned}
L &= \frac{1}{2}M_3(r_3)^2\left(\dot{\mathbf{q}}_3\right)^2 + \frac{1}{2}M_4(l_3)^2\left(\dot{\mathbf{q}}_3\right)^2 + M_4l_3r_4\dot{\mathbf{q}}_3\dot{\mathbf{q}}_4\cos(\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_4) + \\
&+ \frac{1}{2}M_4(r_4)^2\left(\dot{\mathbf{q}}_4\right)^2 + \frac{1}{2}M_5(l_3)^2\left(\dot{\mathbf{q}}_3\right)^2 + M_5l_3l_4\dot{\mathbf{q}}_3\dot{\mathbf{q}}_4\cos(\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_4) + \\
&+ \frac{1}{2}M_5(l_4)^2\left(\dot{\mathbf{q}}_4\right)^2 + M_5l_3r_5\dot{\mathbf{q}}_3\dot{\mathbf{q}}_5\cos(\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_5) + M_5l_4r_5\dot{\mathbf{q}}_4\dot{\mathbf{q}}_5\cos(\mathbf{q}_4 - \mathbf{q}_5) + \\
&+ (r_5)^2\left(\dot{\mathbf{q}}_5\right)^2 - M_3gr_3\sin\mathbf{q}_3 - M_4gl_3\sin\mathbf{q}_3 - M_4gr_4\sin\mathbf{q}_4 - M_5gl_3\sin\mathbf{q}_3 - \\
&- M_5gl_4\sin\mathbf{q}_4 - M_5gr_5\sin\mathbf{q}_5
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Derivando L em função de \mathbf{q}_3 , temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}_3} = & -M_4 l_3 r_4 \dot{\mathbf{q}}_3 \dot{\mathbf{q}}_4 \operatorname{sen}(\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_4) - M_5 l_3 l_4 \dot{\mathbf{q}}_3 \dot{\mathbf{q}}_4 \operatorname{sen}(\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_4) - \\ & - M_5 l_3 r_5 \dot{\mathbf{q}}_3 \dot{\mathbf{q}}_5 \operatorname{sen}(\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_5) - M_3 g r_3 \cos \mathbf{q}_3 - M_4 g l_3 \cos \mathbf{q}_3 - M_5 g l_3 \cos \mathbf{q}_3 \end{aligned} \quad (4.25)$$

Derivando L em função de $\dot{\mathbf{q}}_3$, temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_3} = & M_3 (r_3)^2 \dot{\mathbf{q}}_3 + M_4 (l_3)^2 \dot{\mathbf{q}}_3 + M_4 l_3 r_4 \dot{\mathbf{q}}_4 \cos(\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_4) + M_5 (l_3)^2 \dot{\mathbf{q}}_3 + \\ & + M_5 l_3 l_4 \dot{\mathbf{q}}_4 \cos(\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_4) + M_5 l_3 r_5 \dot{\mathbf{q}}_5 \cos(\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_5) \end{aligned} \quad (4.26)$$

Tomando-se a derivada de (4.26) em função do tempo, temos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_3} \right) = & M_3 (r_3)^2 \ddot{\mathbf{q}}_3 + M_4 (l_3)^2 \ddot{\mathbf{q}}_3 + M_4 l_3 r_4 \ddot{\mathbf{q}}_4 \cos(\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_4) - \\ & - M_4 l_3 r_4 \dot{\mathbf{q}}_4 \operatorname{sen}(\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_4) \left(\dot{\mathbf{q}}_3 - \dot{\mathbf{q}}_4 \right) + M_5 (l_3)^2 \ddot{\mathbf{q}}_3 + M_5 l_3 l_4 \ddot{\mathbf{q}}_4 \cos(\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_4) - \\ & - M_5 l_3 l_4 \dot{\mathbf{q}}_4 \operatorname{sen}(\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_4) \left(\dot{\mathbf{q}}_3 - \dot{\mathbf{q}}_4 \right) + M_5 l_3 r_5 \ddot{\mathbf{q}}_5 \cos(\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_5) - \\ & - M_5 l_3 r_5 \dot{\mathbf{q}}_5 \operatorname{sen}(\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_5) \left(\dot{\mathbf{q}}_3 - \dot{\mathbf{q}}_5 \right) \end{aligned} \quad (4.27)$$

Agora derivando L em função de \mathbf{q}_4 , temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}_4} = & -M_4 l_3 r_4 \dot{\mathbf{q}}_3 \dot{\mathbf{q}}_4 \operatorname{sen}(\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_4) - M_5 l_3 l_4 \dot{\mathbf{q}}_3 \dot{\mathbf{q}}_4 \operatorname{sen}(\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_4) - \\ & - M_5 l_4 r_5 \dot{\mathbf{q}}_4 \dot{\mathbf{q}}_5 \operatorname{sen}(\mathbf{q}_4 - \mathbf{q}_5) - M_4 g r_4 \cos \mathbf{q}_4 - M_5 g l_4 \cos \mathbf{q}_4 \end{aligned} \quad (4.28)$$

Derivando L em função de $\dot{\mathbf{q}}_4$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_4} &= M_4 l_3 r_4 \dot{\mathbf{q}}_3 \cos(\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_4) + M_4 (r_4)^2 \dot{\mathbf{q}}_4 + M_5 l_3 l_4 \dot{\mathbf{q}}_3 \cos(\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_4) + \\ &+ M_5 (l_4)^2 \dot{\mathbf{q}}_4 + M_5 l_4 r_5 \dot{\mathbf{q}}_5 \cos(\mathbf{q}_4 - \mathbf{q}_5) \end{aligned} \quad (4.29)$$

Derivando (4.29) em função do tempo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_4} \right) &= M_4 l_3 r_4 \ddot{\mathbf{q}}_3 \cos(\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_4) - M_4 l_3 r_4 \dot{\mathbf{q}}_3 \sin(\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_4) \left(\dot{\mathbf{q}}_3 - \dot{\mathbf{q}}_4 \right) + \\ &+ M_4 (r_4)^2 \ddot{\mathbf{q}}_4 + M_5 l_3 l_4 \ddot{\mathbf{q}}_3 \cos(\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_4) - M_5 l_3 l_4 \dot{\mathbf{q}}_3 \sin(\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_4) \left(\dot{\mathbf{q}}_3 - \dot{\mathbf{q}}_4 \right) + \\ &+ M_5 (l_4)^2 \ddot{\mathbf{q}}_4 + M_5 l_4 r_5 \ddot{\mathbf{q}}_5 \cos(\mathbf{q}_4 - \mathbf{q}_5) - M_5 l_4 r_5 \dot{\mathbf{q}}_5 \sin(\mathbf{q}_4 - \mathbf{q}_5) \left(\dot{\mathbf{q}}_4 - \dot{\mathbf{q}}_5 \right) \end{aligned} \quad (4.30)$$

Derivando L em função de \mathbf{q}_5 , temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}_5} &= M_5 l_3 r_5 \dot{\mathbf{q}}_3 \dot{\mathbf{q}}_5 \sin(\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_5) + M_5 l_4 r_5 \dot{\mathbf{q}}_4 \dot{\mathbf{q}}_5 \sin(\mathbf{q}_4 - \mathbf{q}_5) - \\ &- M_5 g r_5 \cos \mathbf{q}_5 \end{aligned} \quad (4.31)$$

Derivando L em função de $\dot{\mathbf{q}}_5$, temos:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_5} = M_5 l_3 r_5 \dot{\mathbf{q}}_3 \cos(\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_5) + M_5 l_4 r_5 \dot{\mathbf{q}}_4 \cos(\mathbf{q}_4 - \mathbf{q}_5) + M_5 (r_5)^2 \dot{\mathbf{q}}_5 \quad (4.32)$$

Derivando (4.32) em função do tempo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_5} \right) &= M_5 l_3 r_5 \ddot{\mathbf{q}}_3 \cos(\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_5) - M_5 l_3 r_5 \dot{\mathbf{q}}_3 \sin(\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_5) \left(\dot{\mathbf{q}}_3 - \dot{\mathbf{q}}_5 \right) + \\ &+ M_5 l_4 r_5 \ddot{\mathbf{q}}_4 \cos(\mathbf{q}_4 - \mathbf{q}_5) - M_5 l_4 r_5 \dot{\mathbf{q}}_4 \sin(\mathbf{q}_4 - \mathbf{q}_5) \left(\dot{\mathbf{q}}_4 - \dot{\mathbf{q}}_5 \right) + M_5 (r_5)^2 \ddot{\mathbf{q}}_5 \end{aligned} \quad (4.33)$$

Aplicando a função de Lagrange, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_3} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}_3} &= [M_3(r_3)^2 + M_4(l_3)^2 + M_5(l_3)^2] \ddot{\mathbf{q}}_3 + M_4 l_3 r_4 \ddot{\mathbf{q}}_4 \cos(\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_4) + \\
&+ M_4 l_3 r_4 \left(\dot{\mathbf{q}}_4 \right)^2 \text{sen}(\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_4) + M_5 l_3 l_4 \ddot{\mathbf{q}}_4 \cos(\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_4) + M_5 l_3 l_4 \left(\dot{\mathbf{q}}_4 \right)^2 \text{sen}(\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_4) + \\
&+ M_5 l_3 r_5 \ddot{\mathbf{q}}_5 \cos(\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_5) + M_5 l_3 r_5 \left(\dot{\mathbf{q}}_5 \right)^2 \text{sen}(\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_5) + M_3 g r_3 \cos \mathbf{q}_3 + M_4 g l_3 \cos \mathbf{q}_3 + \\
&+ M_5 g l_3 \cos \mathbf{q}_3
\end{aligned} \tag{4.34}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_4} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}_4} &= [M_4(r_4)^2 + M_5(l_4)^2] \ddot{\mathbf{q}}_4 + M_4 l_3 r_4 \ddot{\mathbf{q}}_3 \cos(\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_4) - \\
&- M_4 l_3 r_4 \left(\dot{\mathbf{q}}_3 \right)^2 \text{sen}(\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_4) + M_5 l_3 l_4 \ddot{\mathbf{q}}_3 \cos(\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_4) - M_5 l_3 l_4 \left(\dot{\mathbf{q}}_3 \right)^2 \text{sen}(\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_4) + \\
&+ M_5 l_4 r_5 \ddot{\mathbf{q}}_5 \cos(\mathbf{q}_4 - \mathbf{q}_5) + M_5 l_4 r_5 \left(\dot{\mathbf{q}}_5 \right)^2 \text{sen}(\mathbf{q}_4 - \mathbf{q}_5) + M_4 g r_4 \cos \mathbf{q}_4 + M_5 g l_4 \cos \mathbf{q}_4
\end{aligned} \tag{4.35}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}_5} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}_5} &= M_5 l_3 r_5 \ddot{\mathbf{q}}_3 \cos(\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_5) - M_5 l_3 r_5 \left(\dot{\mathbf{q}}_3 \right)^2 \text{sen}(\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_5) + \\
&+ M_5 l_4 r_5 \ddot{\mathbf{q}}_4 \cos(\mathbf{q}_4 - \mathbf{q}_5) - M_5 l_4 r_5 \left(\dot{\mathbf{q}}_4 \right)^2 \text{sen}(\mathbf{q}_4 - \mathbf{q}_5) + M_5 (r_5)^2 \ddot{\mathbf{q}}_5 + M_5 g r_5 \cos \mathbf{q}_5
\end{aligned} \tag{4.36}$$

De acordo com as equações (4.34), (4.35) e (4.36) o sistema formado pelas três equações pode ser escrito matricialmente, na seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_3 \\ \ddot{\mathbf{q}}_4 \\ \ddot{\mathbf{q}}_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_3 \\ \dot{\mathbf{q}}_4 \\ \dot{\mathbf{q}}_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_3 \\ \mathbf{q}_4 \\ \mathbf{q}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \end{bmatrix}$$

Onde:

$$A_{11} = M_3(r_3)^2 + (M_4 + M_5)(l_3)^2$$

$$A_{12} = (M_4 l_3 r_4 + M_5 l_3 l_4) \cos(\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_4)$$

$$A_{13} = M_5 l_3 r_5 \cos(\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_5)$$

$$A_{21} = (M_4 r_4 l_3 + M_5 l_3 l_4) \cos(\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_4)$$

$$A_{22} = M_4 (r_4)^2 + M_5 (l_4)^2$$

$$A_{23} = M_5 r_5 l_4 \cos(\mathbf{q}_4 - \mathbf{q}_5)$$

$$A_{31} = M_5 r_5 l_3 \cos(\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_5)$$

$$A_{32} = M_5 l_4 r_5 \cos(\mathbf{q}_4 - \mathbf{q}_5)$$

$$A_{33} = M_5 (r_5)^2$$

$$B_{11} = 0$$

$$B_{12} = (M_4 r_4 l_3 + M_5 l_3 l_4) \dot{\mathbf{q}}_4 \sin(\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_4)$$

$$B_{13} = M_5 l_3 r_5 \dot{\mathbf{q}}_5 \sin(\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_5)$$

$$B_{21} = \left(-M_4 r_4 l_3 \dot{\mathbf{q}}_3 - M_5 l_3 l_4 \dot{\mathbf{q}}_3 \right) \sin(\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_4)$$

$$B_{22} = 0$$

$$B_{23} = M_5 l_4 r_5 \dot{\mathbf{q}}_5 \sin(\mathbf{q}_4 - \mathbf{q}_5)$$

$$B_{31} = -M_5 l_3 r_5 \dot{\mathbf{q}}_3 \sin(\mathbf{q}_3 - \mathbf{q}_5)$$

$$B_{32} = -M_5 l_4 r_5 \dot{\mathbf{q}}_4 \sin(\mathbf{q}_4 - \mathbf{q}_5)$$

$$B_{33} = 0$$

$$C_{11} = (M_3 g r_3 + M_4 g l_3 + M_5 g l_3) \cos$$

$$C_{12} = 0$$

$$C_{13} = 0$$

$$C_{21} = 0$$

$$C_{22} = (M_4 r_4 + M_5 l_4) g \cos$$

$$C_{23} = 0$$

$$C_{31} = 0$$

$$C_{32} = 0$$

$$C_{33} = M_5 g r_5 \cos$$

E Q_3, Q_4 e Q_5 são as forças generalizadas (momentos) em relação ao SRG.

5 SIMULAÇÃO DO MODELO

A simulação é realizada de acordo com os dados cinemáticos fornecidos por Winter (1991) que avaliou a marcha de um sujeito com massa de 56.7 Kg. Para a determinação dos torques nas articulações do tornozelo, joelho e quadril foi utilizado o programa MATLAB..

5.1 Fase de oscilação

O ciclo da marcha normal inicia-se com o toque do calcanhar de um dos membros inferiores no solo até o novo toque do mesmo, o que compõe uma passada completa. A fase de oscilação inicia-se quando o pé (normalmente as cabeças dos metatarsos e artelhos) deixa o solo, e termina quando o mesmo toca o solo novamente.

A simulação nesta fase ocorre num intervalo de tempo de 0.371s. As massas, os comprimentos dos centros de massa, e os comprimentos da perna e da coxa são respectivamente: $M_1 = 5.67 \text{ Kg}$, $M_2 = 2.64 \text{ Kg}$, $r_1 = 0.136 \text{ m}$, $r_2 = 0.213 \text{ m}$, $l_1 = 0.314 \text{ m}$ e $l_2 = 0.425 \text{ m}$, conforme definidas na Figura (3.2 a).

As simulações foram feitas resolvendo as equações diferenciais descritas (4.1) pelo método de Runge-Kutta de 5ª ordem. No anexo I encontra-se o programa de dados utilizados que consideram 27 posições analisadas.

A curva mostrada na Figura 5.1, representa a simulação do torque no quadril, e a da Figura 5.2, a simulação do torque no joelho.

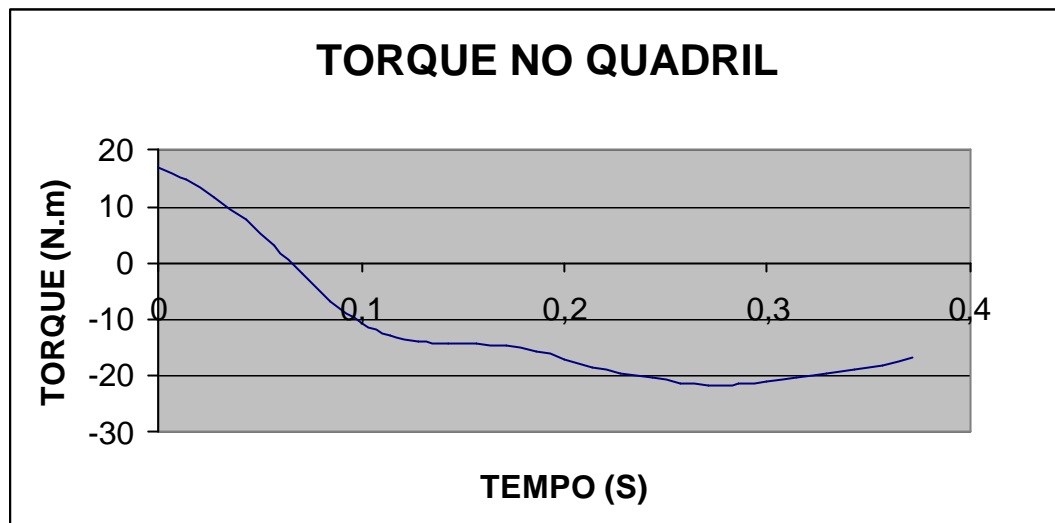


FIGURA 5.1- Torque no quadril, durante a fase de oscilação, obtido através do modelo proposto.

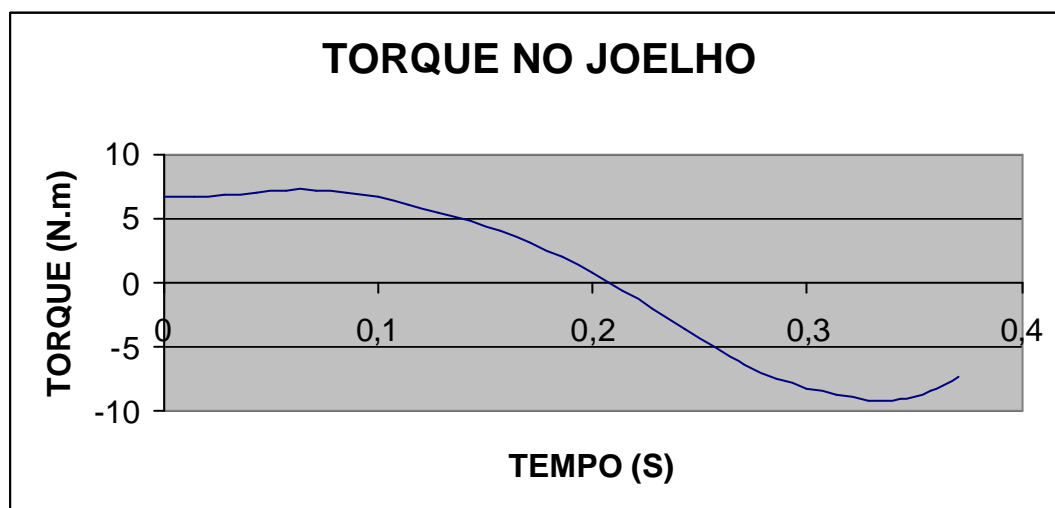


FIGURA 5.2 – Torque no joelho, durante a fase de oscilação, obtido através do modelo proposto.

5.2 Fase de apoio

A fase de apoio, inicia-se com o contato do pé (normalmente o calcanhar, em condições patológicas, outras regiões podem tocar o solo antes do calcanhar) e termina quando o pé deixa o solo. A simulação nesta fase ocorre num intervalo de tempo de 0.586 s. As massas, os comprimentos dos centros de massa, os comprimentos da perna, da coxa, e do (HAT), são respectivamente: $M_3 = 2.64 \text{ Kg}$, $M_4 = 5.67 \text{ Kg}$, $M_5 = 38.44 \text{ Kg}$, $r_3 = 0.241 \text{ m}$, $r_4 = 0.178 \text{ m}$, $r_5 = 0.250 \text{ m}$, $l_3 = 0.425 \text{ m}$, $l_4 = 0.314 \text{ m}$ e $l_5 = 0.25 \text{ m}$, conforme definidos na Figura (3.2b).

As simulações foram executadas resolvendo-se as equações diferenciais descritas na seção (4.2) pelo método de Runge-Kutta de 5ª ordem. No anexo II encontram-se o programa de dados utilizados que consideram 42 posições analisadas.

A curva mostrada na Figura 5.3 representa a simulação do torque no tornozelo, na Figura 5.4, a simulação do torque no joelho, e na Figura 5.5, a simulação do torque no quadril, durante a fase de apoio.

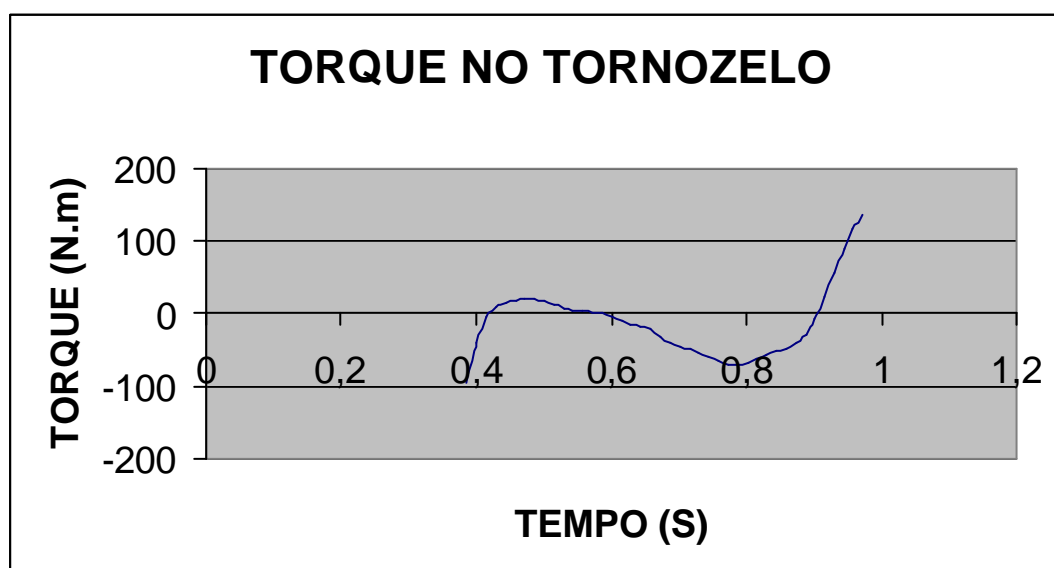


FIGURA 5.3 – Torque no tornozelo, durante a fase de apoio, obtido através do modelo proposto.

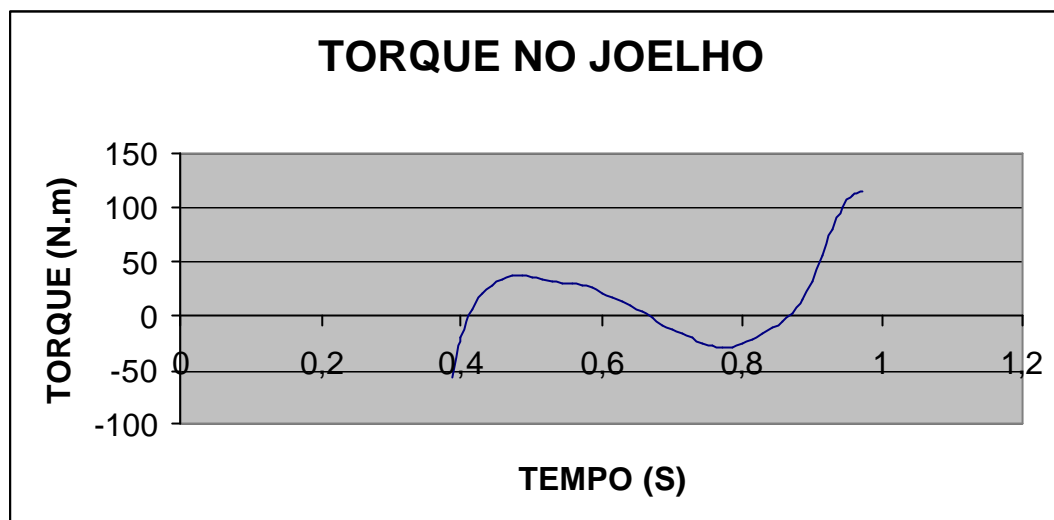


FIGURA 5.4 – Torque no joelho, durante a fase de apoio, obtido através do modelo proposto.

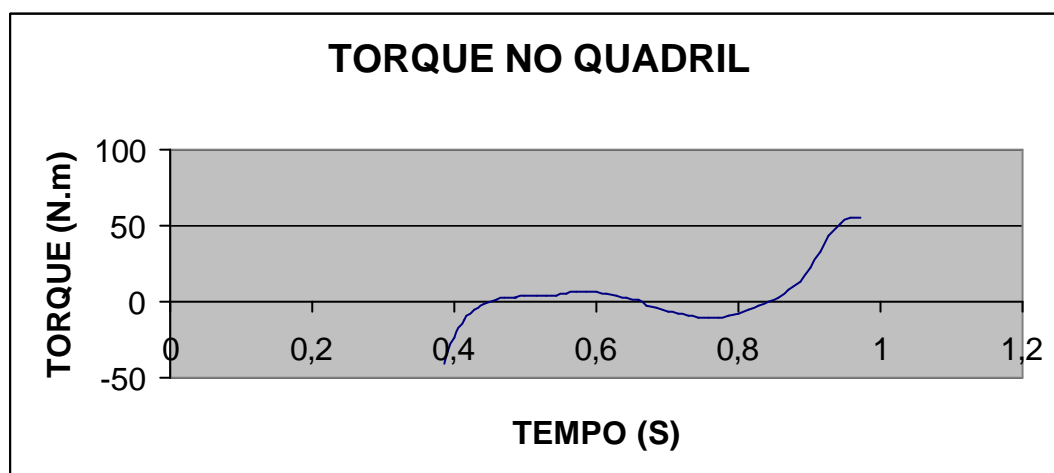


FIGURA 5.5 – Torque no quadril, durante a fase de apoio, obtido através do modelo proposto

6 RESULTADOS E DISCUSSÃO

6.1 Resultados obtidos na fase oscilação e fase de apoio

Em busca de obter resultados satisfatórios, os gráficos a seguir mostram as curvas obtidas com o modelo proposto e as curvas obtidas pelos dados apresentadas por Winter (1991), durante a fase de oscilação e a fase de apoio.

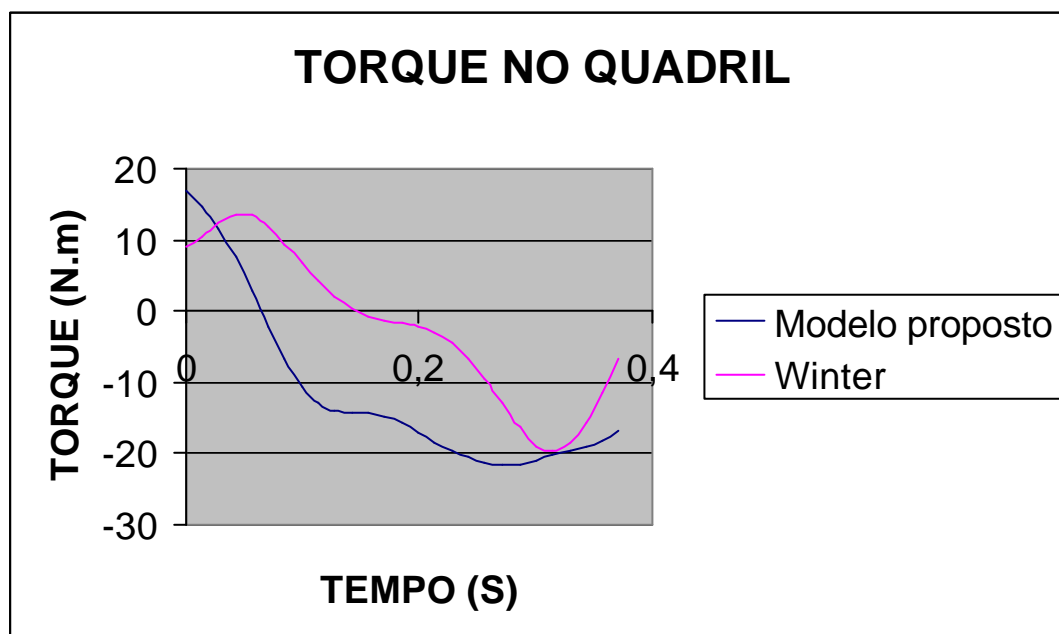


Figura 6.1- Torque no quadril obtido pelo modelo proposto e os dados de Winter (1991), durante a fase de oscilação.

Na figura 6.1 o modelo proposto apresenta uma antecipação da alteração do sentido do torque (positivo para negativo) com relação ao modelo calculado por Winter (1991). Este fato é coerente com o movimento do quadril durante a marcha onde a maior parte da fase de oscilação é sustentada pelo torque do quadril na direção de avanço do corpo. E no final da fase de oscilação o modelo de Winter (1991) apresenta uma inversão do torque enquanto o modelo proposto permanece na mesma direção. Esta fase final de oscilação que deve coincidir com o início da fase de apoio (iminência do toque do calcanhar no solo) o resultado do modelo proposto é coerente com o mecanismo da marcha apresentado por Whittle (2000), que obteve seus resultados através da filmagem de uma pessoa normal.

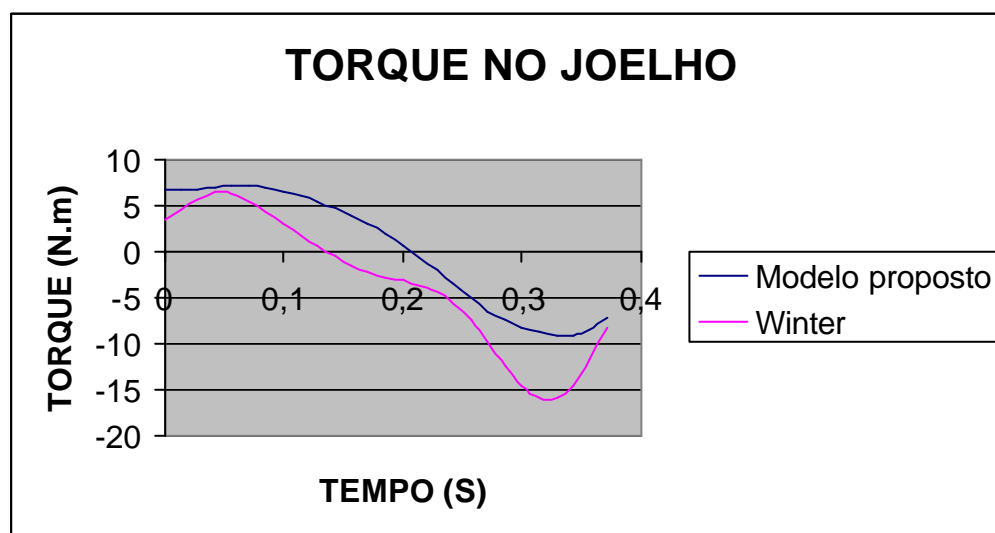


Figura 6.2 - Torque no joelho obtido pelo modelo proposto e os dados de Winter (1991), durante a fase de oscilação.

Como foi discutido nos resultados de comparação do torque no quadril, a fase final de oscilação do modelo proposto apresenta uma semelhança coerente com o mecanismo da marcha apresentado por Whittle (2000). No entanto, ao contrário do torque no quadril a inversão da direção do torque é retardada com relação ao modelo de Winter (1991). Este fato, em comparação aos dados de Whittle que apresentam intervalos de tempo semelhantes para os torques positivo e negativo, ambos os modelos apresentados na Figura 6.2 não são coerentes com o mecanismo da marcha.

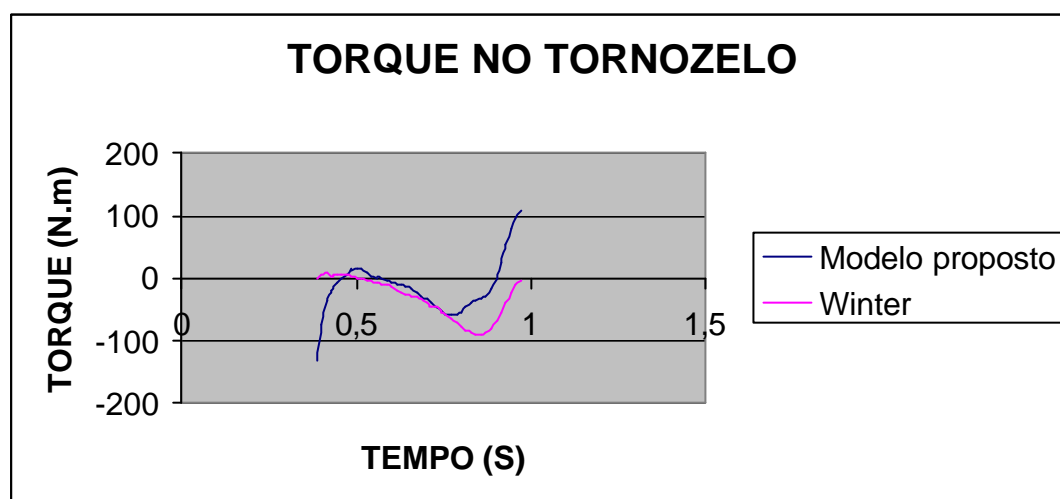


Figura 6.3 - Torque no tornozelo obtido pelo modelo proposto e os dados de Winter (1991), durante a fase de apoio.

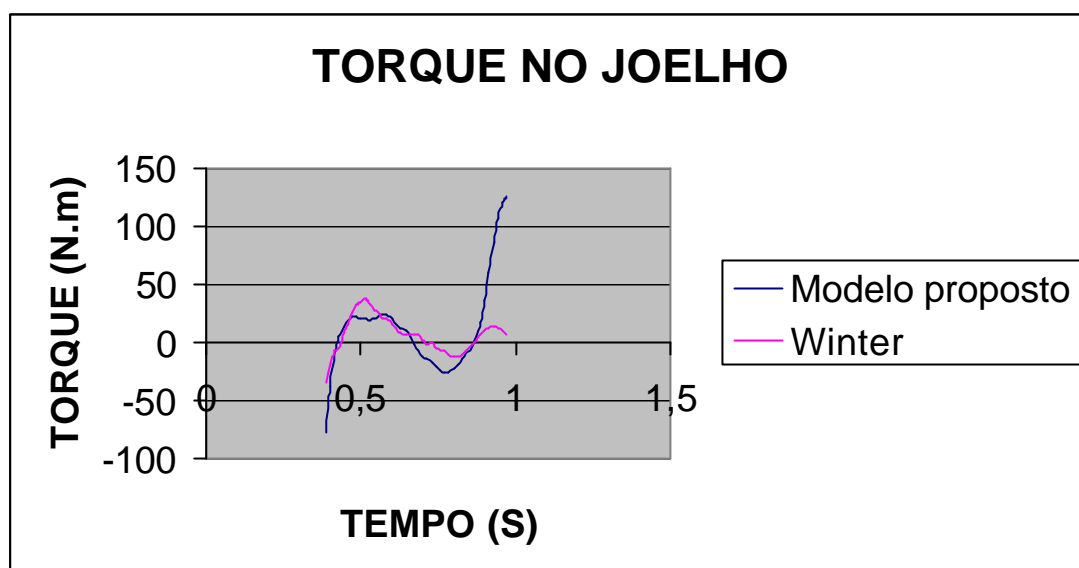


Figura 6.4 - Torque no joelho obtido pelo modelo proposto e os dados de Winter (1991), durante a fase de apoio.

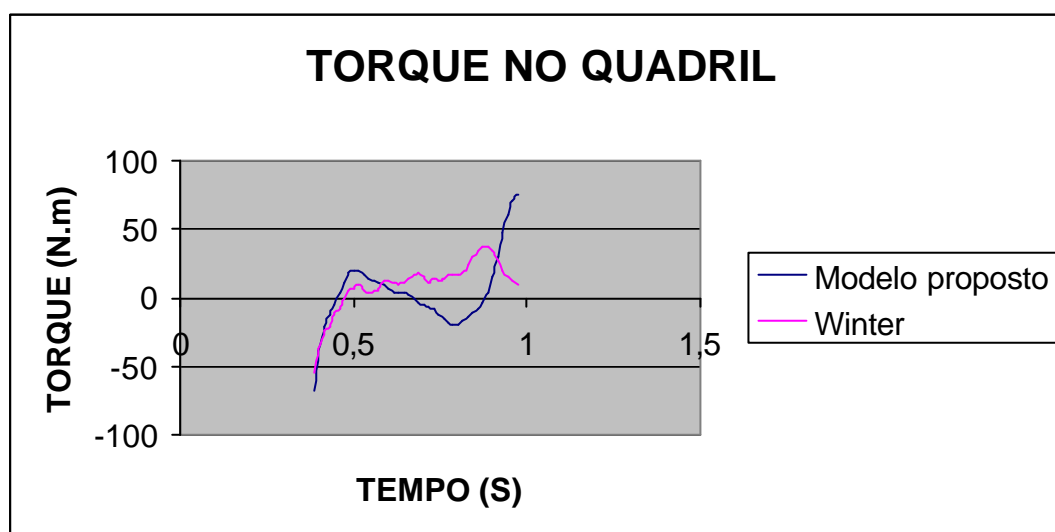


Figura 6.5 - Torque no quadril obtido pelo modelo proposto e os dados de Winter (1991), durante a fase de apoio.

Os resultados de comparação do modelo proposto com o de Winter (Figuras 6.3, 6.4, e 6.5) na fase de apoio apresentam semelhança nas curvas de torque, exceto o do quadril. As diferenças dos resultados de torques nos modelos provém, principalmente da ausência do pé no modelo proposto que na fase de apoio deverá influir significativamente. Com relação aos dados de Whittle (2000), os resultados de Winter (1991) aproximam-se bastante. Este fato implica que na fase de apoio a ausência do pé altera o mecanismo da marcha.

6.2 Resultados obtidos pela substituição da perna por uma prótese

Nesta seção, é verificada a diferença para uma pessoa com prótese exoesquelética em apenas uma das pernas. Esta pessoa tenta acompanhar um andar normal da perna saudável, no entanto, em geral necessita-se de um período de adaptação de 3 a 6 meses para uma prótese nova, Whittle (2000).

Com a intenção de fornecer dados para pesquisadores em biomecânica, apresenta-se as curvas obtidas pela colocação de uma prótese do tipo exoesquelética no lugar da perna. Em função da substituição os seguintes dados antropométricos são considerados, a) fase de oscilação $M_2 = 1.480Kg$, $r_2 = 0.278m$, b) fase de apoio $M_3 = 1.48Kg$, $r_3 = 0,278$ $l_3 = 0,425$. As curvas apresentadas nas Figuras 6.6 a 6.10, comparam os três resultados (modelo proposto, Winter e modelo proposto com prótese) durante a fase de oscilação e a fase de apoio.

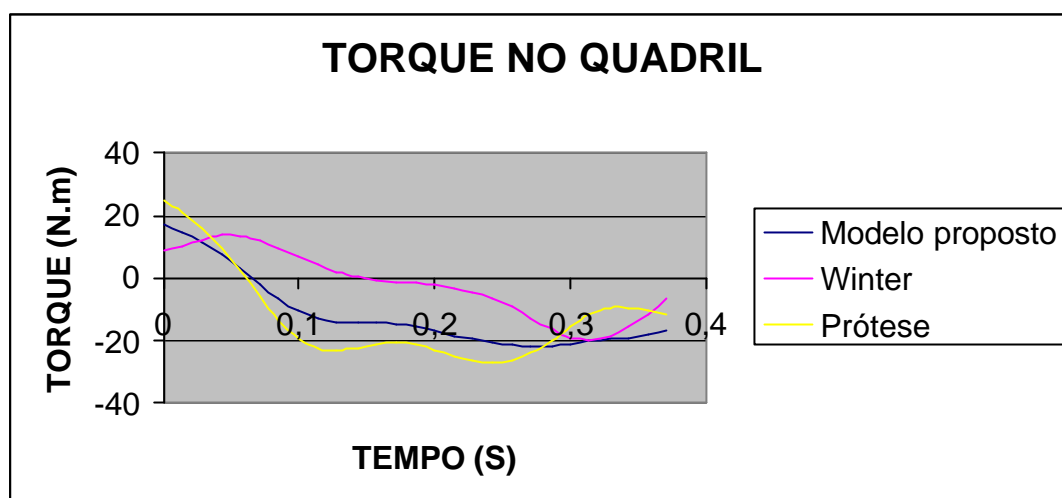


Figura 6.6 – Curva comparativa do torque no quadril durante a fase de oscilação.

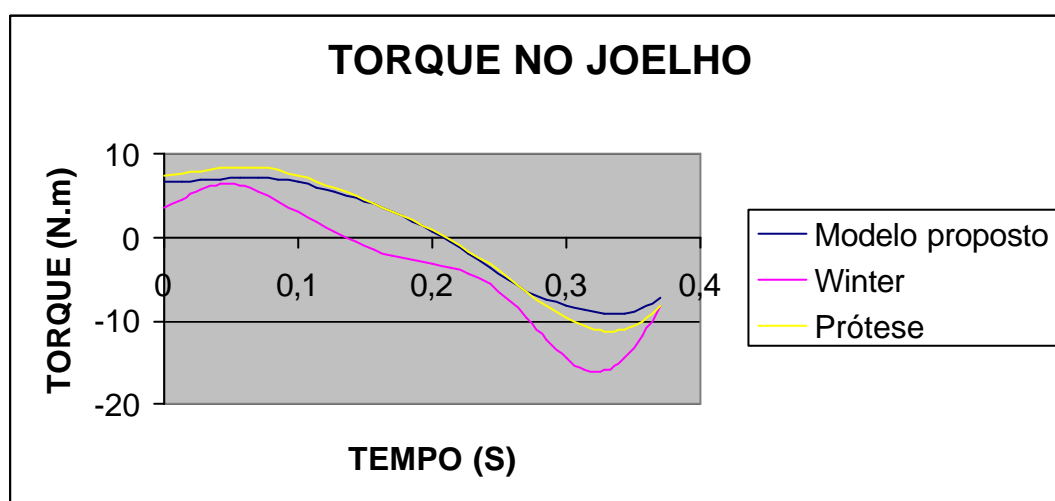


Figura 6.7– Curva comparativa do torque no joelho durante a fase de oscilação.

Na fase de oscilação as curvas das Figuras 6.7 e 6.8 indicam apenas uma pequena diferença nos torques do joelho enquanto que os torques no quadril apresentam uma diferença significativa com maior intensidade para o usuário da prótese.

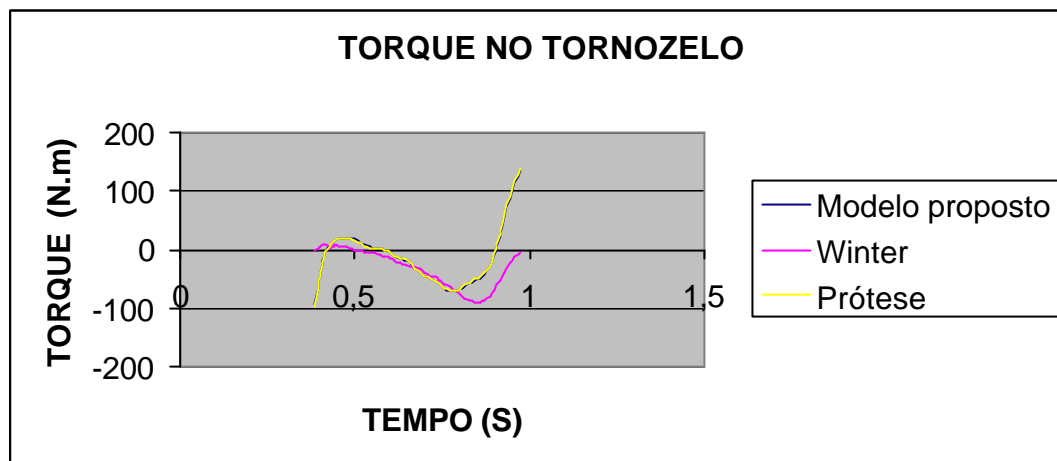


Figura 6.8– Curva comparativa do torque no tornozelo durante a fase de apoio.

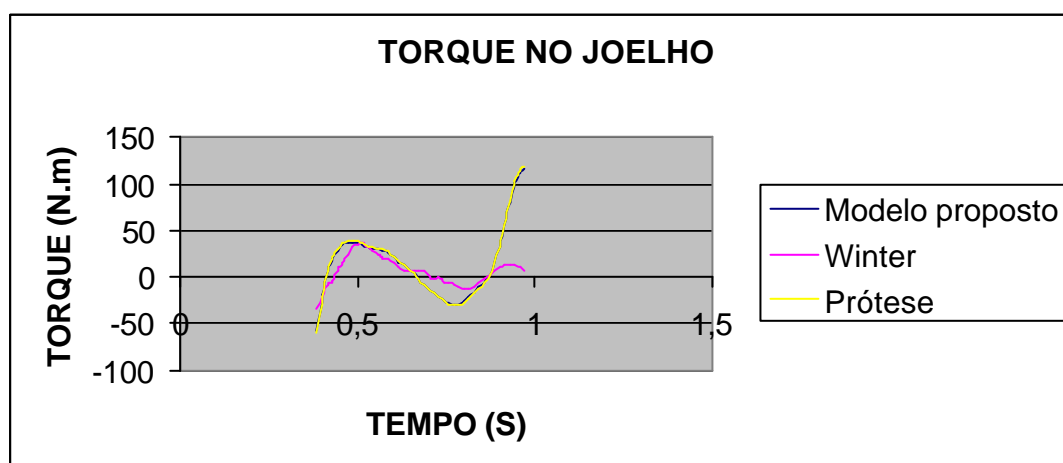


Figura 6.9 – Curva comparativa do torque no joelho durante a fase de apoio.

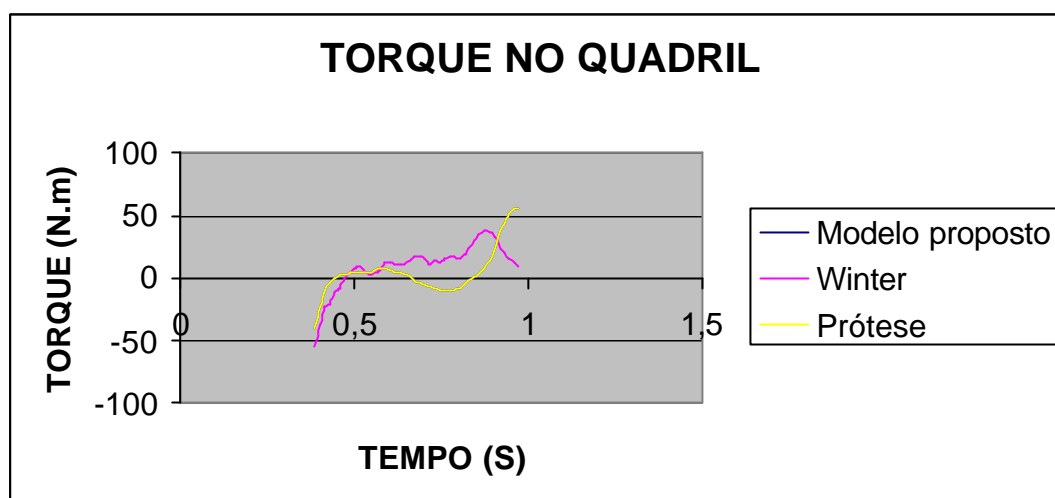


Figura 6.10 – Curva comparativa do torque no quadril durante a fase de apoio.

Na fase de apoio as curvas das Figuras 6.8 a 6.10 não apresentaram uma diferença significativa para os torques no tornozelo, joelho e quadril, respectivamente. Como foi discutido na seção 6.1 os torques calculados (modelo proposto e prótese) nesta fase diferem significativamente em relação aos dados apresentados por Winter e Whittle em função da ausência do pé nos modelos adotados. No caso do modelo da prótese, dependendo das características da prótese (tornozelo com o pé solidário ou tornozelo articulado com mola torcional) os dados antropométricos são alterados e conseqüentemente os torques atuantes nas articulações são modificados, porém, estas diferenças não foram exploradas neste trabalho.

7 COMENTÁRIOS E CONCLUSÕES

7.1 COMENTÁRIOS

Neste trabalho, fêz-se o estudo do comportamento dinâmico do membro inferior durante a marcha humana e para isso foi utilizado o método de Lagrange para derivar as equações do movimento, que explicita o comportamento dinâmico do sistema através de equações do movimento não lineares de segunda ordem em forma matricial.

Para amenizar a complexidade da modelagem, algumas atitudes foram tomadas, como a restrição do pé, pois o mesmo acarretaria mais um grau de liberdade e mais uma equação seria obtida. O tronco, a cabeça e os membros superiores foram representados por um único segmento (HAT). E as simulações do modelo antropométrico baseado no modelo de Winter foram realizados em formas de torques nas articulações (quadril, joelho e tornozelo), utilizando os mesmos dados cinemáticos de Winter. Uma simulação do modelo proposto com uma das pernas alteradas em uma prótese transtibial exoesquelético foi realizada para verificar a diferença no mecanismo de marcha.

7.2 CONCLUSÕES

Os resultados obtidos são satisfatórios na fase de oscilação quando comparados com os torques calculado por Winter, visto que os dados cinemáticos de Winter são oriundos de uma filmagem de um sujeito real e não de um modelo. Na fase de oscilação, os resultados de torques apresentaram coerência superior aos resultados de Winter em termos de mecanismo de marcha apresentados por Whittle. No entanto, na fase de apoio, a ausência do pé no modelo proposto afastou-se bastante dos resultados de Winter e também do Whittle.

O modelo de prótese analisado na fase de oscilação demonstrou uma diferença significativa nos torques, principalmente do quadril que alteraram tanto no seu comportamento quanto na sua intensidade. E na fase de apoio os resultados não apresentaram diferenças entre o modelo proposto de uma perna saudável e da prótese. Para trabalhos futuros o aperfeiçoamento do modelo poderá ser realizado com a inclusão do pé, visto que o mesmo interfere de maneira significativa nos torques, na fase de apoio, quando comparados com Winter (1991) e Whittle (2000).

ANEXOS

ANEXO I – Dados da fase de oscilação para simulação no programa
MATLAB

M1=5.67

M2=2.64

r1=0.136

r2=0.213

L1=0.314

L2=0.425

t1=[82.5 85.2 88.2 91.3 94.5 97.7 100.7 103.6 106.1 108.3 110.1 111.7 113.0
114.0 114.9 115.4 115.7 115.7 115.4 114.8 114.0 113.2 112.4 111.7 111.3
110.9 110.8]*pi/180

t2=[38.9 37.6 36.8 36.8 37.4 38.8 40.9 43.6 46.8 50.6 54.6 59.0 63.6 68.3 73.1
78.0 82.9 87.9 92.8 97.6 102.0 105.9 109.0 111.0 112.0 112.0 111.1]*pi/180

t1p1=[3.10 3.43 3.68 3.85 3.90 3.82 3.61 3.28 2.88 2.47 2.08 1.74 1.43 1.14
0.84 0.51 0.16 -0.20 -0.54 -0.81 -0.98 -1.01 -0.89 -0.69 -0.48 -0.30 -0.20]

t1p2=[24.46 20.30 14.67 7.52 -0.87 -10.14 -19.00 -25.45 -28.34 -27.92 -25.47
-22.64 -20.83 -20.75 -22.11 -23.89 -24.95 -24.36 -21.36 -15.42 -6.72 3.05
10.92 14.55 13.64 9.66 5.05]

t2p1=[-1.91 -1.25 -0.49 0.35 1.24 2.11 2.92 3.65 4.26 4.76 5.15 5.45 5.66 5.81
5.91 5.98 6.04 6.04 5.93 5.63 5.08 4.24 3.14 1.88 0.58 -0.57 -1.47]

t2p2=[42.20 49.54 56.03 60.38 61.40 58.96 53.72 46.69 38.96 31.29 24.07
 17.67 12.52 8.73 6.21 4.43 1.90 -3.69 -14.21 -29.76 -48.61 -67.64 -82.66 -
 89.51 -85.71 -71.95 -52.52]

i=1:27

A11(i)=0.365

i=1:27

A12(i)=0.1525.*cos(t1-t2)

A21(i)=0.1525.*cos(t1-t2)

A22(i)=0.0894

B11(i)=0

B12(i)=[0.1525.*sin(t1-t2)].*t2p1

B21(i)=[-0.1525.*sin(t1-t2)].*t1p1

B22(i)=[0.3050572.*sin(t1-t2)].*t1p1

C11(i)=15.6806.*cos(t1)

C12(i)=0

C21(i)=0

C22(i)=4.7605.*cos(t2)

D1=A11(i).*t1p2

D2=A12(i).*t2p2

D3=B12(i).*t2p1

D4=C11(i).*t1

D5=A21(i).*t1p2

D6=A22(i).*t2p2

D7=B21(i).*t1p1

D8=B22(i).*t2p1

D9=C22(i).*t2

end

$$F1=D1+D2+D3+D4$$

$$F2=D5+D6+D7+D8+D9$$

ANEXO II – Dados da fase de apoio para a simulação no programa MATLAB

M3=2.64

M4=5.67

M5=19.22

R3=0.147

R4=0.178

R5=0.25

L3=0.425

L4=0.314

L5=0.25

g=-9.82

t1=[108.4 106.6 104.6 102.5 100.3 98.1 95.9 93.8 91.9 90.3 88.9 87.6 86.5
85.4 84.4 83.5 82.5 81.6 80.6 79.7 78.7 77.8 76.8 75.9 74.9 73.8 72.7 71.6
70.2 68.7 67.1 65.2 63.2 61.1 58.7 56.2 53.6 50.9 48.1 45.4 42.9 40.7]*pi/180

t2=[109.6 109.3 109.0 108.6 108.4 108.2 107.9 107.6 106.9 105.9 104.5 102.9
101.2 99.3 97.6 95.9 94.3 92.8 91.4 90.0 88.7 87.4 86.0 84.6 83.1 81.7 80.2
78.8 77.5 76.3 75.3 74.5 73.8 73.4 73.1 73.1 73.4 74.1 75.0 76.4 78.1
80.2]*pi/180

t3=[96.8 97.1 97.2 97.3 97.1 96.9 96.4 96.0 95.5 95.0 94.7 94.3 94.0 93.6 93.0
92.4 91.6 90.8 89.9 88.9 87.9 87.0 86.0 85.1 84.3 83.5 82.7 81.9 81.2 80.5
79.9 79.4 79.1 78.9 79.0 79.2 79.7 80.3 81.1 82.0 83.1 84.1]*pi/180

t1p1=[-1.99 -2.33 -2.50 -2.61 -2.68 -2.69 -2.60 -2.41 -2.15 -1.88 -1.64 -1.46 -
1.33 -1.24 -1.18 -1.16 -1.17 -1.17 -1.16 -1.15 -1.14 -1.16 -1.18 -1.20 -1.23 -
1.29 -1.39 -1.53 -1.72 -1.93 -2.14 -2.35 -2.55 -2.74 -2.94 -3.13 -3.28 -3.36 -
3.33 -3.18 -2.88 -2.46]

t1p2=[-32.87 -18.01 -9.85 -6.21 -2.78 2.90 10.00 15.87 18.47 17.56 14.51
10.97 7.87 5.13 2.56 0.58 -0.22 0.10 0.69 0.65 -0.22 -1.19 -1.64 -1.93 -2.99 -

5.30 -8.47 -11.61 -13.88 -14.88 -14.71 -14.08 -13.69 -13.68 -13.46 -11.96 -
8.16 -1.88 6.33 15.67 25.25 34.20]

t2p1=[-0.39 -0.41 -0.41 -0.36 -0.29 -0.26 -0.37 -0.64 -1.04 -1.45 -1.81 -2.05 -
2.18 -2.19 -2.11 -1.99 -1.87 -1.77 -1.70 -1.65 -1.63 -1.65 -1.69 -1.75 -1.79 -
1.79 -1.76 -1.66 -1.51 -1.32 -1.11 -0.90 -0.67 -0.43 -0.14 0.19 0.56 0.97 1.40
1.86 2.31 2.73]

t2p2=[0.13 -0.49 1.69 4.27 3.58 -2.78 -13.38 -23.43 -28.36 -26.92 -20.92 -
12.96 -4.84 2.16 6.84 8.52 7.81 6.10 4.22 2.22 0.01 -2.10 -3.38 -3.24 -1.71
0.98 4.63 8.63 11.95 13.92 14.82 15.41 16.49 18.57 21.54 24.59 27.13 29.35
31.19 31.71 30.36 27.73]

t3p1=[0.41 0.28 0.12 -0.06 -0.25 -0.42 -0.55 -0.59 -0.56 -0.49 -0.43 -0.41 -
0.47 -0.58 -0.72 -0.86 -0.98 -1.07 -1.14 -1.19 -1.21 -1.18 -1.12 -1.05 -1.00 -
0.98 -0.97 -0.94 -0.88 -0.79 -0.66 -0.48 -0.27 -0.05 0.18 0.41 0.64 0.86 1.07
1.22 1.27 1.19]

t3p2=[-7.80 -10.40 -11.97 -12.71 -12.51 -10.48 -6.07 -0.55 3.64 4.75 2.67 -
1.41 -5.74 -8.82 -9.90 -9.06 -7.22 -5.50 -4.17 -2.51 0.15 3.16 4.79 4.15 2.30
1.15 1.51 2.94 5.03 7.77 10.87 13.59 15.25 15.83 15.92 15.99 15.90 15.03
12.34 6.89 -0.81 -8.51]

i=1:42

A11(i)=[4.6484]

A12(i)=[2.9938.*cos(t1-t2)]

A13(i)=[2.0421.*cos(t1-t3)]

A21(i)=[2.7646.*cos(t1-t2)]

A22(i)=[2.0747]

A23(i)=[1.5088.*cos(t2-t3)]

A31(i)=[2.0421.*cos(t1-t3)]

A32(i)=[1.5088.*cos(t2-t3)]

A33(i)=[1.2013]

B11(i)=0

$$B12(i)=[2.7646.*\sin(t1-t2)].*t2p1$$

$$B13(i)=[2.0421.*\sin(t1-t3)].*t3p1$$

$$B21(i)=[-2.7646.*\sin(t1-t2)].*t1p1$$

$$B22(i)=0$$

$$B23(i)=[1.5088.*\sin(t2-t3)].*t3p1$$

$$B31(i)=[-2.0421.*\sin(t1-t3)].*t1p1$$

$$B32(i)=[-1.5088.*\sin(t2-t3)].*t2p1$$

$$B33(i)=0$$

$$C11(i)=[-109.9021.*\cos(t1)]$$

$$C12(i)=0$$

$$C13(i)=0$$

$$C21(i)=0$$

$$C22(i)=[-69.0349.*\cos(t2)]$$

$$C23(i)=0$$

$$C31(i)=0$$

$$C32(i)=0$$

$$C33(i)=[-47.0890.*\cos(t3)]$$

$$D1=A11.*t1p2$$

$$D2=A12(i).*t2p2$$

$$D3=A13(i).*t3p2$$

$$D4=B11(i).*t1p1$$

$$D5=B12(i).*t2p1$$

$$D6=B13(i).*t3p1$$

$$D7=C11(i).*t1$$

$$D8=C12(i).*t2$$

$$D9=C13(i).*t3$$

$$D10=A21(i).*t1p2$$

$$D11=A22.*t2p2$$

$$D12=A23(i).*t3p2$$

D13=B21(i).*t1p1

D14=B22(i).*t2p1

D15=B23(i).*t3p1

D16=C21(i).*t1

D17=C22(i).*t2

D18=C23(i).*t3

D19=A31(i).*t1p2

D20=A32(i).*t2p2

D21=A33.*t3p2

D22=B31(i).*t1p1

D23=B32(i).*t2p1

D24=B33(i).*t3p1

D25=C31.*t1

D26=C32.*t2

D27=C33(i).*t3

end

F1=D1+D2+D3+D4+D5+D6+D7+D8+D9

F2=D10+D11+D12+D13+D14+D15+D16+D17+D18

F3=D19+D20+D21+D22+D23+D24+D25+D26+D27

ANEXO III – Dados da fase de oscilação para a simulação da prótese no programa MATLAB

$$M1=5.67$$

$$M2=1.48$$

$$r1=0.136$$

$$r2=0.278$$

$$L1=0.314$$

$$L2=0.425$$

$$t1=[82.5 \ 85.2 \ 88.2 \ 91.3 \ 94.5 \ 97.7 \ 100.7 \ 103.6 \ 106.1 \ 108.3 \ 110.1 \ 111.7 \ 113.0 \\ 114.0 \ 114.9 \ 115.4 \ 115.7 \ 115.7 \ 115.4 \ 114.8 \ 114.0 \ 113.2 \ 112.4 \ 111.7 \ 111.3 \\ 110.9 \ 110.8] * \pi / 180$$

$$t2=[38.9 \ 37.6 \ 36.8 \ 36.8 \ 37.4 \ 38.8 \ 40.9 \ 43.6 \ 46.8 \ 50.6 \ 54.6 \ 59.0 \ 63.6 \ 68.3 \ 73.1 \\ 78.0 \ 82.9 \ 87.9 \ 92.8 \ 97.6 \ 102.0 \ 105.9 \ 109.0 \ 111.0 \ 112.0 \ 112.0 \ 111.1] * \pi / 180$$

$$t1p1=[3.10 \ 3.43 \ 3.68 \ 3.85 \ 3.90 \ 3.82 \ 3.61 \ 3.28 \ 2.88 \ 2.47 \ 2.08 \ 1.74 \ 1.43 \ 1.14 \\ 0.84 \ 0.51 \ 0.16 \ -0.20 \ -0.54 \ -0.81 \ -0.98 \ -1.01 \ -0.89 \ -0.69 \ -0.48 \ -0.30 \ -0.20]$$

$$t1p2=[24.46 \ 20.30 \ 14.67 \ 7.52 \ -0.87 \ -10.14 \ -19.00 \ -25.45 \ -28.34 \ -27.92 \ -25.47 \\ -22.64 \ -20.83 \ -20.75 \ -22.11 \ -23.89 \ -24.95 \ -24.36 \ -21.36 \ -15.42 \ -6.72 \ 3.05 \\ 10.92 \ 14.55 \ 13.64 \ 9.66 \ 5.05]$$

$$t2p1=[-1.91 \ -1.25 \ -0.49 \ 0.35 \ 1.24 \ 2.11 \ 2.92 \ 3.65 \ 4.26 \ 4.76 \ 5.15 \ 5.45 \ 5.66 \ 5.81 \\ 5.91 \ 5.98 \ 6.04 \ 6.04 \ 5.93 \ 5.63 \ 5.08 \ 4.24 \ 3.14 \ 1.88 \ 0.58 \ -0.57 \ -1.47]$$

$$t2p2=[42.20 \ 49.54 \ 56.03 \ 60.38 \ 61.40 \ 58.96 \ 53.72 \ 46.69 \ 38.96 \ 31.29 \ 24.07 \\ 17.67 \ 12.52 \ 8.73 \ 6.21 \ 4.43 \ 1.90 \ -3.69 \ -14.21 \ -29.76 \ -48.61 \ -67.64 \ -82.66 \ - \\ 89.51 \ -85.71 \ -71.95 \ -52.52]$$

$$i=1:27$$

$$A11(i)=0.7407$$

$$i=1:27$$

$$A12(i)=0.1294.*\cos(t1-t2)$$

$$A21(i)=0.1294.*\cos(t1-t2)$$

$$A22(i)=0.1147$$

$$B11(i)=0$$

$$B12(i)=[0.1294.*\sin(t1-t2)].*t2p1$$

$$B21(i)=[-0.1294.*\sin(t1-t2)].*t1p1$$

$$B22(i)=[0.2588.*\sin(t1-t2)].*t1p1$$

$$C11(i)=12.1110.*\cos(t1)$$

$$C12(i)=0$$

$$C21(i)=0$$

$$C22(i)=4.0379.*\cos(t2)$$

$$D1=A11(i).*t1p2$$

$$D2=A12(i).*t2p2$$

$$D3=B12(i).*t2p1$$

$$D4=C11(i).*t1$$

$$D5=A21(i).*t1p2$$

$$D6=A22(i).*t2p2$$

$$D7=B21(i).*t1p1$$

$$D8=B22(i).*t2p1$$

$$D9=C22(i).*t2$$

end

$$F1=D1+D2+D3+D4$$

$$F2=D5+D6+D7+D8+D9$$

ANEXO IV – Dados da fase de apoio para a simulação da prótese no programa MATLAB

M3=1.48

M4=5.67

M5=19.22

R3=0.2783

R4=0.1360

R5=0.1565

L3=0.425

L4=0.314

L5=0.25

g=-9.82

t1=[108.4 106.6 104.6 102.5 100.3 98.1 95.9 93.8 91.9 90.3 88.9 87.6 86.5
85.4 84.4 83.5 82.5 81.6 80.6 79.7 78.7 77.8 76.8 75.9 74.9 73.8 72.7 71.6
70.2 68.7 67.1 65.2 63.2 61.1 58.7 56.2 53.6 50.9 48.1 45.4 42.9 40.7]*pi/180

t2=[109.6 109.3 109.0 108.6 108.4 108.2 107.9 107.6 106.9 105.9 104.5 102.9
101.2 99.3 97.6 95.9 94.3 92.8 91.4 90.0 88.7 87.4 86.0 84.6 83.1 81.7 80.2
78.8 77.5 76.3 75.3 74.5 73.8 73.4 73.1 73.1 73.4 74.1 75.0 76.4 78.1
80.2]*pi/180

t3=[96.8 97.1 97.2 97.3 97.1 96.9 96.4 96.0 95.5 95.0 94.7 94.3 94.0 93.6 93.0
92.4 91.6 90.8 89.9 88.9 87.9 87.0 86.0 85.1 84.3 83.5 82.7 81.9 81.2 80.5
79.9 79.4 79.1 78.9 79.0 79.2 79.7 80.3 81.1 82.0 83.1 84.1]*pi/180

t1p1=[-1.99 -2.33 -2.50 -2.61 -2.68 -2.69 -2.60 -2.41 -2.15 -1.88 -1.64 -1.46 -
1.33 -1.24 -1.18 -1.16 -1.17 -1.17 -1.16 -1.15 -1.14 -1.16 -1.18 -1.20 -1.23 -
1.29 -1.39 -1.53 -1.72 -1.93 -2.14 -2.35 -2.55 -2.74 -2.94 -3.13 -3.28 -3.36 -
3.33 -3.18 -2.88 -2.46]

t1p2=[-32.87 -18.01 -9.85 -6.21 -2.78 2.90 10.00 15.87 18.47 17.56 14.51
10.97 7.87 5.13 2.56 0.58 -0.22 0.10 0.69 0.65 -0.22 -1.19 -1.64 -1.93 -2.99 -
5.30 -8.47 -11.61 -13.88 -14.88 -14.71 -14.08 -13.69 -13.68 -13.46 -11.96 -
8.16 -1.88 6.33 15.67 25.25 34.20]

t2p1=[-0.39 -0.41 -0.41 -0.36 -0.29 -0.26 -0.37 -0.64 -1.04 -1.45 -1.81 -2.05 -
2.18 -2.19 -2.11 -1.99 -1.87 -1.77 -1.70 -1.65 -1.63 -1.65 -1.69 -1.75 -1.79 -
1.79 -1.76 -1.66 -1.51 -1.32 -1.11 -0.90 -0.67 -0.43 -0.14 0.19 0.56 0.97 1.40
1.86 2.31 2.73]

t2p2=[0.13 -0.49 1.69 4.27 3.58 -2.78 -13.38 -23.43 -28.36 -26.92 -20.92 -
12.96 -4.84 2.16 6.84 8.52 7.81 6.10 4.22 2.22 0.01 -2.10 -3.38 -3.24 -1.71
0.98 4.63 8.63 11.95 13.92 14.82 15.41 16.49 18.57 21.54 24.59 27.13 29.35
31.19 31.71 30.36 27.73]

t3p1=[0.41 0.28 0.12 -0.06 -0.25 -0.42 -0.55 -0.59 -0.56 -0.49 -0.43 -0.41 -
0.47 -0.58 -0.72 -0.86 -0.98 -1.07 -1.14 -1.19 -1.21 -1.18 -1.12 -1.05 -1.00 -
0.98 -0.97 -0.94 -0.88 -0.79 -0.66 -0.48 -0.27 -0.05 0.18 0.41 0.64 0.86 1.07
1.22 1.27 1.19]

t3p2=[-7.80 -10.40 -11.97 -12.71 -12.51 -10.48 -6.07 -0.55 3.64 4.75 2.67 -
1.41 -5.74 -8.82 -9.90 -9.06 -7.22 -5.50 -4.17 -2.51 0.15 3.16 4.79 4.15 2.30
1.15 1.51 2.94 5.03 7.77 10.87 13.59 15.25 15.83 15.92 15.99 15.90 15.03
12.34 6.89 -0.81 -8.51]

i=1:42

A11(i)=[4.5278]

A12(i)=[2.9938.*cos(t1-t2)]

A13(i)=[2.0421.*cos(t1-t3)]

A21(i)=[2.9938.*cos(t1-t2)]

A22(i)=[2.0747]

A23(i)=[1.5088.*cos(t2-t3)]

A31(i)=[2.0421.*cos(t1-t3)]

A32(i)=[1.5088.*cos(t2-t3)]

$$A33(i)=[1.2013]$$

$$B11(i)=0$$

$$B12(i)=[2.9938.*\sin(t1-t2)].*t2p1$$

$$B13(i)=[2.0421.*\sin(t1-t3)].*t3p1$$

$$B21(i)=[-2.7646*\sin(t1-t2)].*t1p1$$

$$B22(i)=0$$

$$B23(i)=[1.5088.*\sin(t2-t3)].*t3p1$$

$$B31(i)=[-2.0421.*\sin(t1-t3)].*t1p1$$

$$B32(i)=[-1.5088.*\sin(t2-t3)].*t2p1$$

$$B33(i)=0$$

$$C11(i)=[-105.7990.*\cos(t1)]$$

$$C12(i)=0$$

$$C13(i)=0$$

$$C21(i)=0$$

$$C22(i)=[-69.0349.*\cos(t2)]$$

$$C23(i)=0$$

$$C31(i)=0$$

$$C32(i)=0$$

$$C33(i)=[-47.0890.*\cos(t3)]$$

$$D1=A11.*t1p2$$

$$D2=A12(i).*t2p2$$

$$D3=A13(i).*t3p2$$

$$D4=B11(i).*t1p1$$

$$D5=B12(i).*t2p1$$

$$D6=B13(i).*t3p1$$

$$D7=C11(i).*t1$$

$$D8=C12(i).*t2$$

$$D9=C13(i).*t3$$

$$D10=A21(i).*t1p2$$

$$D11=A22.*t2p2$$

$$D12=A23(i).*t3p2$$

$$D13=B21(i).*t1p1$$

$$D14=B22(i).*t2p1$$

$$D15=B23(i).*t3p1$$

$$D16=C21(i).*t1$$

$$D17=C22(i).*t2$$

$$D18=C23(i).*t3$$

$$D19=A31(i).*t1p2$$

$$D20=A32(i).*t2p2$$

$$D21=A33.*t3p2$$

$$D22=B31(i).*t1p1$$

$$D23=B32(i).*t2p1$$

$$D24=B33(i).*t3p1$$

$$D25=C31.*t1$$

$$D26=C32.*t2$$

$$D27=C33(i).*t3$$

end

$$F1=D1+D2+D3+D4+D5+D6+D7+D8+D9$$

$$F2=D10+D11+D12+D13+D14+D15+D16+D17+D18$$

$$F3=D19+D20+D21+D22+D23+D24+D25+D26+D27$$

REFERÊNCIAS

ALENCAR, J. F. et al. Análise cinemática da marcha de pacientes Artroplastizados versus indivíduos normais da mesma faixa etária. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE BIOMECÂNICA, 7., 1997, Campinas. **Anais ...** Campinas: Sociedade Brasileira de Biomecânica, 1997, p.331-336.

AMADIO, A. C. Considerações metodológicas da biomecânica para análise do movimento humano. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE BIOMECÂNICA, 7., 1997, Campinas. **Anais ...** Campinas: Sociedade Brasileira de Biomecânica, 1997, p. 11-15.

AMIROUCHE F. M. L., IDER S. K., TRIMBLE J., Analytical Method for the Analysis and Simulation of Human Locomotion. *Journal of Biomechanical Engineering*, Vol. 112, 1990.

BAUMANN, W. Métodos de medição e campos de aplicação da Biomecânica: estado da arte e perspectivas. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE BIOMECÂNICA, 6, 1995, Brasília. **Anais ...** Brasília: Sociedade Brasileira de Biomecânica, 1995.

BECKETT, R. , and K. CHANG. “On the Evaluation of the Kinematics of Gait by Minimum Energy”, *J. Biomech.* 1: 147-159, 1968.

BRAUNE, W. ; FISCHER,O. The human gait. Tradução de P. Maquet.e J.R. Furlong. Berlim: Spring-Verlag, 1987. Título original: **Der Gang des Menschen**.

CHAO, E. Y. and K. RIM. “Applications of Optimization Principles in Determining the Applied Moments in Human Leg Joints during Gait”. J. Biomech. 6 : 497-510, 1973.

DUAN X. H., ALLEN R. H. and SUN J. Q., A stiffness-varying model of human gait. Elsevier Science, Vol. 19, 1997.

HEMAMI, H. “A Feedback On –Off Model of Biped Dynamics”. IEEE Trans. On Systems, Man and Dynamics. SMC-10:376-383, 1980.

PANDY, M. G. and N. BERME. “Synthesis of Human Walking”, J. Biomech. 21: 1053-1060, 1988.

TOWNSEND, M. A. “Dynamics and Coordination of Torso Motions in Human Locomotion”, J. Biomech. 14:727-738, 1981.

TOWNSEND, M. A., and A. SEIREG. “The Synthesis of Bipedal Locomotion”. J. Biomech. 5 : 71-83, 1972.

WHITTLE, M. W. Gait Analysis, Ed. Butterworth Heinemann, Oxford-UK,2000.

Bibliografia Consultada

AHMED A. SHABANA. **Dynamics of Multibody Systems**. Ed. John Wiley & Sons Inc. 1989.

WINTER, D. A. **Biomechanics and Motor Control of Human Movement**. Warterloo: Warterloo Press, 1991.