Universidade Estadual Paulista

Campus de São José do Rio Preto
Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

Dualidade de Poincaré e Invariantes Cohomológicos

Caroline Paula Cellini

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Ermínia L. Campello Fanti

Dissertação apresentada ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista, Campus São José do Rio Preto, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

São José do Rio Preto
Março - 2008

Cellini. Caroline Paula.

Dualidade de Poincaré e Invariantes Cohomológicos / Caroline Paula Cellini. - São José do Rio Preto : [s.n.], 2008.

107 f. : il. ; 30 cm.

Orientador: Ermínia de Lourdes Campello Fanti

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Topologia algébrica. 2. Cohomologia de Grupos. 3. Poincaré, Dualidade de. 4. Ends de pares de grupos I. Fanti, Ermínia L. Campello. II. Universidade Estadual Paulista, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU - 515.14

COMISSÃO JULGADORA

Titulares
Profª. Drª Ermínia de Lourdes Campello Fanti - Orientadora
Profª. Drª Fernanda Soares Pinto Cardona
Profª. Drª Maria Gorete Carreira Andrade

Suplentes
Profª. Drª Dessislava Hristova Kochloukova
Prof. Dr. João Peres Vieira

“Um sonho que se sonha só é só um sonho que se sonha só
Mas um sonho que se sonha junto é realidade”
(Raul Seixas)

Aos meus pais,
Elisier e Maria Cristina,
dedico.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, por me conceder a graça de concluir mais esta jornada, por ter me fortalecido nos momentos difíceis e pelas pessoas que colocou em meu caminho. Em especial agradeço:

À Profª. Drª. Ermínia de Lourdes Campello Fanti, por toda a força, paciência, disponibilidade em sempre esclarecer minhas dúvidas, pela amizade, pelos conselhos, por todo o conhecimento que adquiri desde a graduação, quando iniciei meus estudos em Topologia Algébrica, que foi fundamental para a realização desse trabalho.

À Profª. Drª. Maria Gorete Carreira Andrade por toda alegria sempre presente, por todo o conhecimento transmitido na graduação e no mestrado, por todo o incentivo e colaboração. Ao Prof. Dr. Adalberto Spezamiglio pelas correções finais do Abstract e ao Prof. Dr. Claudio Aguinaldo Buzzi por ser tão prestativo, paciente quando necessário.

Aos demais professores do Departamento de Matemática do IBILCE-UNESP pela formação acadêmica.

À Profª. Drª. Fernanda Soares Pinto Cardona do IME-USP, por toda a prestatividade, pelas valiosas sugestões durante a minha defesa de mestrado.

Aos meus pais Elisier e Maria Cristina pelo dom da vida, por toda a força, pela estrutura que sempre tive, pelo apoio em minhas decisões, por tudo o que me ensinaram, por todo o sacrifício pra que eu estudasse, sem eles nada disso estaria acontecendo.

Ao meu irmão Elisier, por todos os momentos de alegria, pela amizade e por todo o carinho.

Ao meu namorado João Paulo, pela confiança, por todo o carinho, apoio, companheirismo, amizade, por existir na minha vida.

Aos meus amigos Agnaldo, Eduardo, Grasiele, Ligia, Paulinho e Vinícius por toda a alegria, por toda a ajuda, força nos momentos difíceis, por todos os momentos inesquecíveis que passamos juntos.

Aos meus companheiros de graduação e pós-graduação: Durval, Wallace (principalmente pela parte gráfica!), Ana Paula, Marcos, Rafael, Rodiak, Oyran, Pedro e demais pela amizade.

A todos que, de alguma forma, contribuíram para a conclusão deste trabalho.

Resumo

Neste trabalho são abordados alguns aspectos da teoria de dualidade. Ele pode ser dividido em três partes principais. Na primeira demonstramos o teorema de Dualidade de Poincaré para variedades (sem bordo) orientáveis. Para tanto, fez-se necessário o uso do limite direto e cohomologia com suporte compacto. Na segunda definimos grupos de dualidade, em particular, grupo de dualidade de Poincaré, apresentamos alguns resultados e observações sobre a relação existente entre tais grupos e os grupos fundamentais de variedades asféricas fechadas, que é ainda um problema em aberto. Finalmente, alguns resultados envolvendo invariantes cohomológicos "ends" e grupos de dualidade são apresentados.

Palavras-chave: Dualidade de Poincaré, cohomologia com suporte compacto, grupos de dualidade, (co)homologia com coeficientes locais, variedades asféricas, invariantes cohomológicos "ends".

Abstract

In this work we consider some aspects of duality theory. It can be divided in three principal parts. In the first we prove the Poincaré Duality theorem for orientable manifolds (without boundary). For that, it is necessary the use of the direct limit and cohomology with compact supports. In the second part we define duality groups, in particular, Poincaré duality groups, we introduce some results and observations about the relationship between such groups and fundamental groups of aspherical closed manifolds, that still is an open problem. Finally, some results envolving the cohomological invariant "ends" and duality groups are presented.

Keywords: Poincaré Duality, cohomology with compact supports, duality groups, (co)homology with local coefficients, aspherical manifolds, cohomological invariant "ends".

Sumário

Introdução

Seja X uma variedade n- dimensional. Neste trabalho, a menos que se especifique o contrário, variedade n- dimensional significará sempre variedade *sem bordo*, isto é, um espaço de Hausdorff tal que todo ponto tem uma vizinhaça aberta que é homeomorfa ao disco aberto n-dimensional $U^n := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n; |x| < 1\}$ do $\mathbb{R}^n$.

(*) *"Se X é fechada (isto é, compacta e sem bordo) orientável de dimensão n, então o k-ésimo grupo de cohomologia de X é isomorfo ao $(n-k)$-ésimo grupo de homologia de X (com coeficientes em $\mathbb{Z}$), para todo k".*

Este resultado, um dos mais antigos da Topologia Algébrica, é conhecido como teorema de dualidade de Poincaré para variedades *fechadas orientáveis* ([19], Teorema 3.30; [12] Teorema 3.26 ou [44], Teorema 6.18). Uma dualidade similar, envolvendo "cohomologia com suporte compacto", é válida para X variedade *orientável "não necessariamente compacta"* ([19], Teorema 3.35; [17], Teorema 26.6 ou [28], Teorema IX.4.1). Existe também um teorema de dualidade de Poincaré para X variedade fechada *não orientável com coeficientes em* $\mathbb{Z}$ (vide [12], Teorema 5.7) e ainda uma forma forte de dualidade de Poincaré para uma variedade fechada X, *não necessariamente orientável envolvendo coeficientes em um $\mathbb{Z}(G)$ - módulo M qualquer, onde $G = \pi_1(X)$, o grupo fundamental de X* ([12], Cap.5, p.102; [13], V, §1, p. 135)). Nestes casos, a homologia e cohomologia com "coeficientes locais" são usadas:

(**) *"Se X é uma variedade conexa fechada e M é um $\mathbb{Z}(\pi_1(X))$-módulo então $\boldsymbol{H}^k(X, M) \cong \boldsymbol{H}_{n-k}(X, \Omega \otimes_{\mathbb{Z}} M)$ onde as homologias e cohomologias são tomadas com coeficientes locais* e Ω *indica o* módulo de orientação.*"*

Existem ainda outros resultados sobre dualidade, para variedades com bordo, mas que não terão interesse neste trabalho.

Por outro lado, há também uma teoria de dualidade *para grupos* que está fortemente relacionada com a teoria de dualidade para variedades. Grupos de dualidade foram inicialmente investigados por Johnson e Wall [22] e Bieri [5]. Um *grupo de dualidade de Poincaré* (sobre $\mathbb{Z}$) é um grupo cujas homologia e cohomologia satisfazem relações de dualidades análogas as de homologia e cohomologia para variedades fechadas (orientáveis ou não). *Grupos de dualidade* mais gerais têm sido definidos quando o "módulo de orientação $\tilde{\mathbb{Z}}$" (com a G - ação trivial ou não) é substituído por um $\mathbb{Z}G$ - módulo C (chamado módulo dualizante) que, visto como grupo abeliano, não é necessariamente isomorfo a $\mathbb{Z}$ (o grupo cíclico infinito). Grupo de dualidade de Poincaré (sobre $\mathbb{Z}$) é então um caso especial desse conceito mais geral, ou seja, é um grupo de dualidade em que o módulo dualizante $C = \mathbb{Z}$ (visto como grupo abeliano). Nesse caso, G é um grupo de dualidade de Poincaré *orientável* se G atua trivialmente sobre C, e *não orientável*, caso contrário. Pode-se definir também grupos de dualidade sobre R, onde R é um anel comutativo com unidade. Há ainda uma extensão do conceito de grupo de dualidade para *pares de dualidade* $(G, \{S_i, i = 1, ..., m\})$, onde G é um grupo e S_i são subgrupos de G, cujas *(co)homologias relativas* satisfazem relações de dualidades similares as de variedades compactas "com bordo" ([8]). Tais objetos, grupos e pares de dualidade, estão bastante relacionados com a teoria de invariantes cohomológicos, "*ends*".

Este trabalho tem como objetivo abordar alguns aspectos da teoria de dualidade para variedades e grupos. Destacamos:

(1) O teorema de dualidade de Poincaré para variedades orientáveis, não necessariamente compactas (Teorema 2.2.1), cuja prova é dada por um argumento indutivo usando sequência de Mayer-Vietoris. A indução requer uma versão da dualidade de Poincaré para subconjuntos abertos da variedade, que não são compactos, por isso usa-se a cohomologia com suporte compacto, definida em termos de limite direto. O teorema de dualidade para variedades fechadas orientáves (*) é então obtido desse mais geral.

(2) Um breve estudo de grupos de dualidade, em particular grupos de dualidade de Poincaré, e alguns resultados e observações sobre a relação existente entre esses grupos e os grupos fundamentais de variedades asféricas fechadas. De fato tem-se:

(***) *"O grupo fundamental de uma n-variedade asférica fechada (orientável ou não) é um grupo de dualidade de Poincaré n-dimensional"*, (Teorema 4.1.2).

Para este resultado é importante a interpretação topológica da (co)homologia de grupos com coeficientes em um $\mathbb{Z}G$-módulo M dada por meio de coeficientes locais, e o teorema de dualidade de Poincaré para variedades fechadas - versão forte dado em (**). É interessante ressaltar que o teorema de dualidade de Poincaré dado em (**), útil na prova de (***), é mencionado em vários trabalhos (por exemplo em [10], VIII, §8, p.211; [13], V, §1, p.136; [12], 5, §2, p.102), no entanto não encontramos na literatura uma prova (com as notações/linguagem usadas aqui). Em [41], (1943)

a dualidade de Poincaré com coeficientes locais é tratada (vide p.622), porém com uma notação diferente; em [45], (p.214) é apresentada uma prova de um resultado similar de dualidade, mas para X complexo de Poincaré conexo.
(3) O invariante cohomológico $E(G,S)$, onde G é um grupo e S é um subgrupo de G de índice infinito, e alguns resultados envolvendo este invariante e outros invariantes cohomológicos "ends" e grupos de dualidade.

O trabalho está dividido em quatro capítulos. A seguir relatamos resumidamente os objetos de estudos de cada um deles.

No *Capítulo 1*, apresentamos alguns pré-requisitos da teoria de (co)homologia singular de um espaço X, tanto no caso absoluto como no caso relativo, (que são fundamentais para o desenvolvimento do trabalho) tais como a definição de homologia e cohomologia singular (absoluta e relativa) de um espaço X com coeficientes em um anel R comutativo com unidade, e mais geralmente com coeficientes em um R-módulo M; módulos de homologia reduzida; homomorfismos induzidos em (co)homologia; o teorema dos coeficientes universais; o teorema de excisão, a sequência exata longa em cohomologia, a sequência de Mayer-Vietoris para (co)homologia absoluta e relativa; e a definição de produto cap (para espaços) absoluto e relativo, que é importante para o teorema da dualidade de Poincaré, o que exigiu bastante dedicação. Finalizamos com um estudo sobre orientação de variedades.

No *Capítulo 2* provamos o teorema de dualidade de Poincaré para variedade orientável (compacta ou não), a saber (Teorema 2.2.1):

" Seja X uma variedade n-dimensional orientável e R um anel comutativo com unidade fixado. Então $D_X : H_c^q(X;R) \longrightarrow H_{n-q}(X;R)$ é um isomorfismo para todo q, onde D_X é o homomorfismo definido no limite direto $\varinjlim H^q(X, X-K;R) = H_c^q(X;R)$, induzido do produto cap $\alpha_K \frown \; : H^q(X, X-K;R) \longrightarrow H_{n-q}(X;R)$; $\varphi \longmapsto \alpha_K \frown \varphi$, sendo $\alpha_K \in H_n(X, X-K, R)$ a única classe de homologia tal que $j_x^K(\alpha_K) = \alpha_x$ (gerador de $H^q(X, X-\{x\};R)$, para todo $x \in K$".
Obtemos, como caso particular, o teorema (*) de dualidade para variedades fechadas orientáveis. O método da prova para a dualidade de Poincaré foi primeiramente escrito por J. Milnor em 1964 (conforme mencionado em [29]). Para tanto usamos cohomologia com suporte compacto, que foi definida em termos de limite direto. Assim, inicialmente, definimos limite direto e apresentamos alguns resultados tais como a existência de um limite direto, que o limite direto de uma soma direta é a soma direta dos limites e que a sequência limite de uma sequência exata é uma sequência exata. A seguir definimos a cohomologia de um espaço X com suporte compacto e, finalizando, provamos o teorema de dualidade de Poincaré

para variedades orientáveis, inicialmente mencionado, cuja prova foi dividida em cinco casos.

No *Capítulo 3*, cujo objetivo é um estudo de grupos de dualidade, apresentamos inicialmente alguns pré-requisitos básicos como resoluções projetivas e livres, e módulos (co)induzidos, úteis para definirmos (co)homologia de grupos absoluta. Apresentamos alguns exemplos e resultados como o Lema de Shapiro, que relaciona a (co)homologia de um grupo com a (co)homologia de seus subgrupos. Interpretamos topologicamente a (co)homologia absoluta de grupos, ou seja, relacionamos a (co)homologia de um grupo G com a (co)homologia do complexo de Eilenberg-MacLane $K(G, 1)$. Nessa ocasião definimos (co)homologia com coeficientes locais (para espaços) e apresentamos alguns resultados relacionados, visto que a interpretação da (co)homologia de grupos com coeficientes em um $\mathbb{Z}G$-módulo M é dada em termos da (co)homologia com coeficientes locais. A seguir algumas condições de finitude foram tratadas; definimos dimensão cohomológica e homológica de um grupo G, (sobre R, $R = \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}_2$), denotadas respectivamente por cd_RG e hd_RG, resoluções de tipo finito, grupos de tipo FP_n, FP e FL, culminando com a definição de grupos de dualidade n- dimensional (sobre R), também referidos como D^n-grupos (sobre R), e em particular grupos de dualidade de Poincaré n-dimensional, referidos como PD^n-grupos (sobre R), e alguns resultados.

O *Capítulo 4*, o último do trabalho, está dividido em duas partes. Na primeira exploramos um pouco a relação entre as duas teorias de dualidade, para grupos e variedades, mais precisamente, a relação entre grupos de dualidade de Poincaré e o grupo fundamental de variedades asféricas fechadas. Uma n-variedade é asférica se é conexa por caminhos e os grupos de homotopia $\pi_i(X)$ são nulos para $i \geq 2$. Dentre os resultados apresentados destacamos o dado em (***), que usa dentre outras ferramentas, a interpretação topológica da (co)homologia de grupos com coeficientes em $\mathbb{Z}(\pi_1(X))$- módulos e a dualidade de Poincaré na versão geral. Um grupo G que é o grupo fundamental de uma n-variedade asférica fechada, ou seja, que satisfaz as hipóteses em (***) é referido, às vezes, como GD^n- grupo. Em particular, GD^2-grupos são chamados também de grupos superfícies. A seguir provamos a recíproca de (***) para $n = 0$ e 1, e apresentamos algumas observações sobre os conceitos e técnicas envolvidas na prova da recíproca no caso $n = 2$. A prova deste caso segue de dois teoremas. O primeiro diz que *"Se G é um PD^2-grupo sobre $\mathbb{Z}$ com número de Betti $\beta_1(G) > 0$, então G é um grupo superfície"* ([14], Teorema 1), e o segundo, que *"Se G é um PD^2- grupo então o número de Betti $\beta_1(G) > 0$"* ([15], Teorema 1). A prova do primeiro teorema usa as teorias de cohomologia relativa de grupos, de pares de dualidade e de decomposição de grupos, além de resultados que não foram abordados neste trabalho. Algumas observações sobre o caso $n = 3$ e sobre trabalhos recentes nessa direção são também apresentadas.

Na segunda parte do capítulo, apresentamos o invariante cohomológico $E(G, S)$, que é um caso particular de $E(G, \mathcal{S}, M)$ onde G é um grupo, $\mathcal{S}$ uma família não vazia de subgrupos de G, não necessariamente distintos, de índice infinito em G e M um $\mathbb{Z}_2G$-módulo, e alguns resultados relacionados com dualidade. $E(G, S)$ é obtido quando tomamos a família unitária, isto é, $\mathcal{S} = \{S\}$ com S subgrupo de G e $M = \mathbb{Z}_2(G/S)$ ([1]). Tal invariante é de certo modo uma extensão do end clássico $e(G)$ para um grupo G. Assim, inicialmente introduzimos a definição de $e(G)$, o número de ends do grupo G, apresentando, em termos de $e(G)$, uma condição necessária para um grupo G ser de dualidade de Poincaré de dimensão $n > 1$. A seguir definimos $E(G, S)$ e provamos um teorema (envolvendo $E(G, S)$) no caso em que G e S satisfazem certas condições de dualidade. Finalizamos apresentando algumas observações envolvendo a teoria de dualidade e outros invariantes cohomológicos.

Capítulo

1

(Co)homologia singular e Orientação para Variedades

Neste capítulo apresentamos alguns resultados da teoria de (co)homologia singular no caso absoluto e relativo, e de espaços de recobrimento que serão de fundamental importância para o desenvolvimento dos capítulos posteriores. Além disso definimos o produto cap e apresentamos o importante conceito de orientação para variedades. Para "orientar" uma variedade precisamos escolher um gerador α_x do módulo $H_n(X, X-\{x\}, R)$ assim alguns resultados relacionados com tal gerador tais como o Lema da Continuação (Lema 1.2.2), o Lema da Coerência (Lema 1.2.3) e o Lema do Localmente constante (Lema 1.2.4) são necessários. A menos que se especifique o contrário, nesse capítulo e no seguinte R indicará um anel comutativo com unidade.

1.1 Pré-requisitos Topológicos

Nesta seção, recordamos alguns conceitos e resultados da teoria de (co)homologia singular. Mais detalhes podem ser encontrados em ([19], Capítulo 2). Para os tópicos de álgebra homológica como sequências exatas, produto tensorial, Tor e Ext, que serão admitidos, uma referência é [21] ou [33] (para anéis não necessariamente comutativos). Além disso, apresentamos o conceito de produto cap (para espaços) e alguns resultados da teoria de espaços de recobrimento.

1.1.1 (Co)homologia Singular de um Espaço

Definição 1.1.1 *Seja $A \subset \mathbb{R}^n$. Denominamos* ***fecho convexo de*** *A ao menor subconjunto convexo que contém A (que é a intersecção de todos os subconjuntos convexos de $\mathbb{R}^n$ que contém A). Recordemos que um subconjunto B de $\mathbb{R}^n$ é convexo quando todo segmento de reta ligando dois pontos de B está contido em B.*

Definição 1.1.2 *Um n-**simplexo** s é o fecho convexo de uma coleção de (n+1) pontos $\{v_0, \ldots, v_n\}$ no $\mathbb{R}^n$, onde $v_1 - v_0, \ldots, v_n - v_0$ formam um conjunto linearmente independente. Os elementos $v_0, \ldots, v_n$ são chamados de* ***vértices*** *de s.*

Definição 1.1.3 *(n-simplexo padrão) Seja s um n-simplexo de vértices $\{v_0, \ldots, v_n\}$ em $\mathbb{R}^n$. Se aos vértices de s tem sido dada uma orientação específica então s é dito um simplexo ordenado. Vamos denotar por $\triangle^n$ o n-simplexo de $\mathbb{R}^{n+1}$ com vértices $v_0 = (1, 0, \ldots, 0)$, $v_1 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots, v_n = (0, \ldots, 0, 1)$, então $\triangle^n$ é chamado n-**simplexo padrão** com ordem natural. Note que $\triangle^n = \{(t_0, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \ ; \ \sum_{i=0}^{n} t_i = 1 \ \ e \ \ t_i \geq 0\}$.*

Definição 1.1.4 *Seja X um espaço topológico. Um n-**simplexo singular** em X é uma função contínua $\sigma : \triangle^n \longrightarrow X$.*

Definição 1.1.5 *Seja R um anel comutativo com unidade, definimos $C_n(X; R)$ como sendo o R-módulo livre na qual a base B é o conjunto de todos os n-simplexos singulares em X, isto é, $B = \{\sigma : \triangle^n \longrightarrow X; \sigma$ é um n-simplexo singular$\}$. Um elemento de $C_n(X; R)$ é chamado de n-**cadeia singular** de X e tem a forma $\sum_i n_i \sigma_i$ para $n_i \in R$ e $\sigma_i : \triangle^n \longrightarrow X$.*

Observação 1.1.1 *Alguns autores como por exemplo [17],(Capítulo 9, p.44) denotam o R-módulo livre gerado pelos n-simplexos singulares por $S_n(X, R)$ ou simplesmente $S_n(X)$.*

Definição 1.1.6 *O* ***operador bordo*** *$\partial : C_n(X; R) \longrightarrow C_{n-1}(X; R)$ é definido nos geradores por:*

$$\partial_n(\sigma) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sigma|_{[v_0, v_1, \ldots, \widehat{v_i}, \ldots, v_n]}$$

e estendido por linearidade, onde o símbolo $\widehat{\ }$ sobre v_i indica que este vértice foi retirado da sequência $v_0, \ldots, v_n$. Nesta igualdade estamos considerando a identificação canônica de $[v_0, \ldots, \widehat{v_i}, \ldots, v_n]$ com $\triangle^{n-1}$, preservando a ordem dos vértices, e $\sigma|_{[v_0, \ldots, \widehat{v_i}, \ldots, v_n]}$ é considerado como uma aplicação $\triangle^{n-1} \longrightarrow X$, isto é, um $(n-1)$-simplexo singular.

Lema 1.1.1 *([19], Lema 2.1, p.105) A aplicação composição*

$$C_n(X; R) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(X; R) \xrightarrow{\partial_{n-1}} C_{n-2}(X; R)$$

é nula.

Definição 1.1.7 (*Ciclos e Bordos*) *Um elemento $c \in C_n(X;R)$ é um n-**ciclo** se $\partial(c) = 0$ e um elemento $d \in C_n(X;R)$ é um n-**bordo** se existe $e \in C_{n+1}(X;R)$ tal que $d = \partial(e)$. Denotamos $Z_n(X;R) = Ker\partial_n = \{c \in C_n(X;R);\ c$ é um n-ciclo$\}$ e $B_n(X;R) = Im\partial_{n+1} = \{d \in C_n(X;R);$ d é um n-bordo$\}$.*

Definição 1.1.8 (*Módulos de Homologia Singular*) *Considere o complexo de cadeias*

$$\ldots \longrightarrow C_2(X;R) \xrightarrow{\partial_2} C_1(X;R) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X;R) \longrightarrow 0.$$

*O n-**ésimo módulo de homologia singular** de X com coeficientes em R é definido por*

$$H_n(X;R) = \frac{Ker\partial_n}{Im\partial_{n+1}} = \frac{Z_n(X;R)}{B_n(X;R)}.$$

Um elemento de $H_n(X;R)$ é da forma $[c] = c + B_n(X;R)$ onde $c \in Z_n(X;R)$, ou seja, c é um n-ciclo. Em outras palavras, $c = \sum_i n_i\sigma_i$ tal que $\partial(c) = \sum n_i\partial(\sigma_i) = 0$. Quando $R = \mathbb{Z}$, o anel dos inteiros, é usual denotar $H_n(X;\mathbb{Z})$ simplesmente por $H_n(X)$.

Exemplo 1.1.1 *Se X é um ponto, então $H_n(X,R) = 0$ para todo $n > 0$ e $H_0(X;R) \cong R$. Isto segue do fato que, neste caso, existe um único n-simplexo singular σ_n para cada n. Logo $R \cong C_n(X;R)$ (gerado por σ_n) e $\partial(\sigma_n) = \sum_i(-1)^i\sigma_{n-1} = (\sum_{i=0}^n(-1)^i)\sigma_{n-1}$ é 0 se n é ímpar e é igual a σ_{n-1} se n é par, $n \neq 0$. Assim temos o complexo de cadeia,*

$$\ldots \xrightarrow{\cong} R \xrightarrow{0} R \xrightarrow{\cong} R \xrightarrow{0} R \longrightarrow 0$$

com aplicações bordos sendo, alternadamente, isomorfismos e a aplicação nula, exceto no último R, de onde obtém-se a afirmação inicial.

Definição 1.1.9 (*Módulo de homologia reduzida*) *Considere a aplicação "aumentação" $\varepsilon : C_0(X;R) \longrightarrow R$ definida por $\varepsilon(\sum n_i\sigma_i) = \sum n_i$ e o complexo de cadeias singular aumentado*

$$\ldots \longrightarrow C_2(X;R) \xrightarrow{\partial_2} C_1(X;R) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X;R) \xrightarrow{\varepsilon} R \longrightarrow 0$$

*onde $\varepsilon \circ \partial_1 = 0$. Os módulos de homologia deste complexo, denotado por $\widetilde{H}_n(X;R)$ são chamados de **módulos de homologia reduzida de X**. Definindo $\widetilde{Z}_0(X;R) = Ker\varepsilon$, obtemos, $B_0(X;R) \subset \widetilde{Z}_0(X;R)$ visto que $\varepsilon \circ \partial_1 = 0$, e o módulo de homologia reduzida 0-dimensional de X é dado por*

$$\widetilde{H}_0(X;R) = \frac{\widetilde{Z}_0(X;R)}{B_0(X;R)}.$$

Obviamente $\widetilde{H}_n(X;R) \simeq H_n(X;R)$ para $n > 0$.

Vamos obter agora a relação entre os grupos $H_0(X;R)$ e $\widetilde{H}_0(X;R)$. Primeiramente, notemos que $\widetilde{Z}_0(X;R)$ é um subgrupo de $Z_0(X;R) = C_0(X;R)$, e $\widetilde{H}_0(X;R)$ é um subgrupo de $H_0(X;R)$. Denotemos por $\xi : \widetilde{H}_0(X;R) \longrightarrow H_0(X;R)$ o homomorfismo inclusão. Como $\varepsilon \circ \partial_1 = 0$, segue que $\varepsilon(B_0(X;R)) = 0$, assim a aplicação aumentação induz um homomorfismo $\varepsilon_* : H_0(X;R) \longrightarrow R$.

Proposição 1.1.1 *A seguinte sequência de módulos e homomorfismos* $0 \longrightarrow \widetilde{H}_0(X;R) \xrightarrow{\xi} H_0(X;R) \xrightarrow{\varepsilon_*} R \longrightarrow 0$ *é exata. Assim podemos identificar* $\widetilde{H}_0(X;R)$ *com o Kernel de* ε_* *e temos que* $H_0(X;R) \cong \widetilde{H}_0(X;R) \oplus R$.

Demonstração: Considere o complexo de cadeias abaixo

$$\ldots \longrightarrow C_2(X;R) \xrightarrow{\partial_2} C_1(X;R) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X;R) \longrightarrow 0,$$

Defina $\varepsilon : C_0(X;R) \longrightarrow R$ a aplicação aumentação para $C_0(X;R)$. Como ε é sobrejetor, temos pelo teorema do isomorfismo que

$$\frac{C_0(X;R)}{Ker\varepsilon} \cong R$$

Por outro lado,

$$H_0(X;R) \cong \frac{Ker\partial_0}{Im\partial_1} = \frac{C_0(X;R)}{Im\partial_1} \quad e \quad \widetilde{H}_0(X;R) = \frac{\widetilde{Z}_0(X;R)}{Im\partial_1} = \frac{Ker\varepsilon}{Im\partial_1}.$$

Então podemos considerar a seguinte sequência exata

$$0 \longrightarrow \frac{Ker\varepsilon}{Im\partial_1} \xrightarrow{i} \frac{C_0(X;R)}{Im\partial_1} \xrightarrow{p} \frac{\frac{C_0(X;R)}{Im\partial_1}}{\frac{Ker\varepsilon}{Im\partial_1}} \longrightarrow 0,$$

ou ainda

$$0 \longrightarrow \frac{Ker\varepsilon}{Im\partial_1} \xrightarrow{i} \frac{C_0(X;R)}{Im\partial_1} \xrightarrow{p} \frac{C_0(X;R)}{Ker\varepsilon} \longrightarrow 0,$$

onde i é a inclusão e p é a projeção. Portanto, a sequência acima é

$$0 \longrightarrow \widetilde{H}_0(X;R) \xrightarrow{\xi} H_0(X;R) \xrightarrow{\varepsilon_*} R \longrightarrow 0$$

e é exata. Daí segue que $H_0(X;R) \cong Im\xi \oplus Im\varepsilon_* \cong Ker\varepsilon_* \oplus Im\varepsilon_*$ e assim

$$H_0(X;R) \cong \widetilde{H}_0(X;R) \oplus R.$$

■

Proposição 1.1.2 *([19], Proposição 2.6, p.109) Se X é um espaço não vazio e $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ são as componentes conexas por caminhos de X, então $H_k(X;R) \cong \bigoplus_{\alpha\in A} H_k(X_\alpha;R)$.*

Proposição 1.1.3 *([19], Proposição 2.7, p.109) Se X é um espaço não vazio conexo por caminhos então $\varepsilon_* : H_0(X;R) \longrightarrow R$ é um isomorfismo e $\widetilde{H}_0(X;R) \cong 0$.*

Corolário 1.1.1 *([19], Proposição 2.8, p.110; [29], Exemplo 2.1, p.15) Se X é um ponto então $\widetilde{H}_n(X;R) = 0$ para todo n.*

Demonstração: Segue da proposição anterior e do Exemplo 1.1.1. ∎

<u>Homomorfismo Induzido em Homologia</u>

Sejam X, Y espaços topológicos e $f : X \longrightarrow Y$ uma função contínua. Queremos definir um homomorfismo induzido por f, em homologia, $f_* : H_n(X;R) \longrightarrow H_n(Y;R)$. Primeiramente definimos um homomorfismo $f_\sharp$ entre os módulos de n-cadeias $C_n(X;R)$ e $C_n(Y;R)$. Como $C_n(X;R)$ e $C_n(Y;R)$ são R-módulos livres bastará definir a aplicação na base de $C_n(X;R)$ e estender por linearidade.

Definição 1.1.10 *Sejam X e Y espaços topológicos e $f : X \longrightarrow Y$, aplicação contínua, definimos $f_\sharp : C_n(X;R) \longrightarrow C_n(Y;R)$ nos geradores da seguinte maneira:*

$$\sigma \in C_n(X;R) \mapsto f_\sharp(\sigma)(= f \circ \sigma : \triangle^n \longrightarrow Y.)$$

A extensão natural por linearidade para $C_n(X;R)$ é dada por

$$f_\sharp\left(\sum_i n_i\sigma_i\right) = \sum_i n_i f_\sharp(\sigma_i) = \sum_i n_i(f \circ \sigma_i).$$

As aplicações $f_\sharp : C_n(X;R) \longrightarrow C_n(Y;R)$, $n \geq 0$ satisfazem $f_\sharp \circ \partial = \partial \circ f_\sharp$. Assim temos que o seguinte diagrama é comutativo.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & C_{n+1}(X;R) \arrow[r, "\partial_{n+1}"] \arrow[d, "f_\sharp"] & C_n(X;R) \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, "f_\sharp"] & C_{n-1}(X;R) \arrow[r] \arrow[d, "f_\sharp"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & C_{n+1}(Y;R) \arrow[r, "\partial_{n+1}"] & C_n(Y;R) \arrow[r, "\partial_n"] & C_{n-1}(Y;R) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

O fato que as aplicações $f_\sharp : C_n(X;R) \longrightarrow C_n(Y;R)$ satisfazem $f_\sharp \circ \partial = \partial \circ f_\sharp$ é também expressado por dizer que as aplicações $f_\sharp$ definem uma aplicação de cadeias do complexo de cadeia singular de X no complexo de Y. A relação $f_\sharp \circ \partial = \partial \circ f_\sharp$ implica que $f_\sharp$ leva ciclo em ciclo pois se $\partial(\alpha) = 0$ então $\partial(f_\sharp(\alpha)) = f_\sharp(\partial(\alpha)) = 0$. Também, $f_\sharp$ leva bordo em bordo pois $f_\sharp(\partial(\beta)) = \partial(f_\sharp(\beta))$. Assim f induz um homomorfismo $f_* : H_n(X;R) \longrightarrow H_n(Y;R)$, $[\sigma] = \sigma + B_n(X,R) \longrightarrow f([\sigma]) = f(\sigma) + B_n(Y,R)$.

Proposição 1.1.4 (*[19], Proposição 2.9, p.111*) *Uma aplicação de cadeias entre complexos induz homomorfismos entre os módulos de homologia dos dois complexos.*

Recordemos que duas aplicações contínuas entre espaços topológicos $\varphi,\ \psi : X \to W$, são homotópicas se existe uma função contínua $F : X \times I \to W$, tal que $F(x,0) = \varphi(x)$ e $F(x,1) = \psi(x)$, para todo $x \in X$, e dois espaços topológico X e Y tem o "mesmo tipo de homotopia" (e denotamos $X \sim Y$) se existem aplicações contínuas $f : X \to Y$ e $g : Y \to X$ tais que fog é homotópica a aplicação identidade id_Y e gof é homotópica a id_X. Nesse caso f e g são chamadas equivalências de homotopia. Em geral usamos também a notação $f \sim g$ para indicar que duas aplicações são homotópicas.

A homologia singular é invariante por homotopia, mais precisamente, temos:

Teorema 1.1.1 (*[19], Corolário 2.11, p.111*) *Se $f : X \longrightarrow Y$ é uma equivalência de homotopia (em particular um homeomorfismo) então $f_* : H_n(X;R) \longrightarrow H_n(Y;R)$ é um isomorfismo para todo n.*

Corolário 1.1.2 *Se X é contráctil então $H_n(X;R) \cong \begin{cases} R, & se \quad n = 0 \\ 0, & se \quad n \geq 1 \end{cases}$ e $\widetilde{H}_n(X;R) = 0$ para todo n.*

O resultado seguinte nos dá uma importante relação entre os módulos de homologia de um espaço X, um subespaço A e o espaço quociente X/A, quando A é um retrato por deformação em X (lembramos que A é um retrato por deformação de X se existe $r : X \longrightarrow A$ contínua tal que $r \circ i$ é homotópica a id_A e $i \circ r$ é homotópica a id_X onde $i : A \hookrightarrow X$ é a inclusão).

Teorema 1.1.2 (*[19], Teorema 2.13, p.114*) *Se X é um espaço e A é um subespaço fechado não vazio que é um retrato por deformação de alguma vizinhança em X, então existe uma sequência exata*

$$\ldots \longrightarrow \widetilde{H}_n(A;R) \xrightarrow{i_*} \widetilde{H}_n(X;R) \xrightarrow{j_*} \widetilde{H}_n(X/A;R) \xrightarrow{\partial} \widetilde{H}_{n-1}(A;R) \xrightarrow{i_*} \ldots$$

onde $i : A \hookrightarrow X$ é a inclusão e $j : X \longrightarrow X/A$ é a aplicação quociente.

Em particular, tomando $X = D^n$ e $A = S^{n-1}$, onde $D^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n;\ x_1^2 + ... + x_n^2 \leq 1\}$ é o disco n-dimensional e $S^{n-1} = \partial D^n$; usando que D^n é contráctil, o resultado anterior e o fato que X/A tem mesmo tipo de homotopia que S^n, obtemos:

Corolário 1.1.3 *([19], Corolário 2.14, p.114)* $\widetilde{H}_i(S^n;R) \cong \begin{cases} R, & se \quad i = n \\ 0, & caso\ contrário. \end{cases}$

Definição 1.1.11 *Sejam A e B subespaços topológicos de um espaço X. Dizemos que o par $\{A,B\}$ é **excisivo** se a aplicação de cadeia $C_n(A;R) + C_n(B;R) \longrightarrow C_n(A \cup B;R)$ (induzido pela inclusão) induz isomorfismos na homologia, onde $C_n(A;R)+C_n(B;R)$ é o menor submódulo de $C_n(A \cup B;R)$ contendo $C_n(A;R)$ e $C_n(B;R)$.*

Proposição 1.1.5 *([19], Proposição 2.1, p.119) Sejam A e B subconjuntos de um espaço topológico X tais que $X = int(A) \cup int(B)$. Então $\{A,B\}$ é um par excisivo em $X = A \cup B$.*

Se A e B são subconjuntos de um espaço X tais que $X= int(A) \cup int(B)$, isto é, X é a reunião dos interiores desses subconjuntos, há uma interessante sequência exata que relaciona a homologia de A, B, $A \cap B$ e X, conhecida como sequência de Mayer- Vietoris ([19] Cap. 2, §2.2, p. 149 ; [29], Teorema III.5.1, p. 59). A prova usa a proposição anterior.

Teorema 1.1.3 *(Sequência de Mayer - Vietoris) Sejam A e B subconjuntos de um espaço topológico X tais que $X = int(A) \cup int(B)$. Então é possível definir um homomorfismo conectante $\triangle : H_n(X;R) \to H_{n-1}(A \cap B;R)$, para todo n, de modo que a seguinte sequência é exata:*

$$\ldots \to H_n(A\cap B;R) \overset{\phi_*}{\to} H_n(A;R)\oplus H_n(B;R) \overset{\psi_*}{\to} H_n(X;R) \overset{\triangle}{\to} H_{n-1}(A\cap B;R) \ldots \to H_0(X;R) \to 0$$

onde $\phi_*(x) = (i_*(x), j_*(x))$, $x \in H_n(A \cap B;R)$, e $\psi_*(u,v) = k_*(u) - l_*(v)$, para $u \in H_n(A;R)$, $v \in H_n(B;R)$, com i_*, j_*, k_*, l_* as induzidas das inclusões naturais.

Podemos estender o conceito de homologia por considerar homologia com coeficientes em um R-módulo M qualquer, onde R é um *anel comutativo com unidade*.

Definição 1.1.12 *(Homologia com coeficientes em um R-módulo M) ([12], Definição I.1.7, p. 130) Sejam X um espaço topológico e M um R-módulo (R anel comutativo com unidade). A homologia do complexo de cadeias $C_*(X;R) \otimes_R M$ é chamada de **homologia de X com coeficientes no R-módulo** M e é denotada por $H_*(X;M)$.*

Observação 1.1.2 *(i) Se R é um anel (comutativo com unidade), podemos falar na homologia de X com coeficiente no anel R e com coeficientes no R-módulo R, mas $H_*(X;R) = H_*(C_*(X;R)) \cong H_*(C_*(X;R) \otimes_R R)$, visto que $C_*(X;R) \cong C_*(X;R) \otimes_R R$.*
(ii) Dado um grupo abeliano G podemos considerar G como um $\mathbb{Z}$-módulo (de modo natural), assim a homologia de um espaço X com coeficientes em um grupo abeliano G é a homologia do complexo de cadeias $C_*(X) \otimes_{\mathbb{Z}} G$. Em particular, podemos considerar R como um anel e como um grupo abeliano ($\mathbb{Z}$-módulo). Porém, $H_*(X;R) = H_*(C_*(X;R)) \cong H_*(C_*(X) \otimes_{\mathbb{Z}} R)$, visto que $C_*(X;R) \cong C_*(X) \otimes_{\mathbb{Z}} R$, ([17], p.256) onde $C_*(X) = C_*(X;\mathbb{Z})$.

Cohomologia Singular

Seja X um espaço topológico, considere os R-módulos $C_n(X;R)$ definidos como anteriormente, isto é, o R-módulo livre gerado pelos simplexos singulares ($C_n(X;R) = \langle \sigma : \triangle^n \longrightarrow X;\ \sigma$ é um n-simplexo singular$\rangle$). Para cada n, considere $Hom(C_n(X;R);R) = \{\varphi : C_n(X;R) \longrightarrow R;\ \varphi$ é um homomorfismo$\}$ que vamos denotar por $C^n(X;R)$.

Definição 1.1.13 *O* ***operador cobordo*** $\delta : C^n(X;R) \longrightarrow C^{n+1}(X;R)$ *é o dual* ∂^* *de* ∂*, mais precisamente, para uma cocadeia* $\varphi \in C^n(X;R)$*, temos que o cobordo* $\delta(\varphi)$ *é a composição*

$$C_{n+1}(X;R) \xrightarrow{\partial} C_n(X;R) \xrightarrow{\varphi} R.$$

Isto significa que para um $(n+1)$*-simplexo singular* $\sigma : \triangle^{n+1} \longrightarrow X$ *temos*

$$(\delta^n(\varphi))(\sigma) = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i \varphi(\sigma|_{[v_0,\ldots,\widehat{v}_i,\ldots,v_{n+1}]}).$$

Proposição 1.1.6 *A composição* $C^{n-1}(X;R) \xrightarrow{\delta^{n-1}} C^n(X;R) \xrightarrow{\delta^n} C^{n+1}(X;R)$ *é a aplicação nula.*

Demonstração: Segue diretamente do Lema 1.1.1. ■

Definição 1.1.14 *Um elemento de* $C^n(X;R)$ *é chamado uma* n***-cocadeia singular****, os elementos de* $Ker\delta^n$ *são chamados de* n***-cociclos*** *e os de* $Im\delta^n$ *são denominados* n***-cobordos****. O complexo* $(C^n(X;R), \delta^n)$ *é denominado* ***complexo de cocadeias singular de*** X*.*

Definição 1.1.15 (*Módulos de Cohomologia Singular*) *O* n***-ésimo módulo de cohomologia singular de*** X *é definido por*

$$H^n(X;R) := \frac{Ker\delta^n}{Im\delta^{n-1}}.$$

Notemos que o módulo de cohomologia singular de X *é a homologia do complexo de cocadeias* $C^*(X;R)$*. Como para homologia, é usual denotar* $H^n(X;\mathbb{Z})$ *por* $H^n(X)$*.*

Homomorfismo Induzido em Cohomologia

Sejam X, Y espaços topológicos e $f : X \longrightarrow Y$ uma aplicação contínua. Para cada n, considere

$$f^\sharp : C^n(Y;R) \longrightarrow C^n(X;R),$$
$$\varphi \longmapsto f^\sharp(\varphi) := \varphi \circ f_\sharp.$$

Pode-se verificar que as aplicações $f^\sharp$ satisfazem $\delta \circ f^\sharp = f^\sharp \circ \delta$. Dessa forma o seguinte diagrama é comutativo.

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots & \longrightarrow & C^{n-1}(Y;R) & \xrightarrow{\delta^{n-1}} & C^n(Y;R) & \xrightarrow{\delta^n} & C^{n+1}(Y;R) & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow f^\sharp & & \downarrow f^\sharp & & \downarrow f^\sharp & & \\
\cdots & \longrightarrow & C^{n-1}(X;R) & \xrightarrow{\delta^{n-1}} & C^n(X;R) & \xrightarrow{\delta^n} & C^{n+1}(X;R) & \longrightarrow & \dots
\end{array}$$

Assim, f induz um homomorfismo em cohomologia, $f^* : H^n(Y;R) \longrightarrow H^n(X;R)$, que associa $[\varphi] = \varphi + Im\delta^{n-1} \in H^n(Y;R)$ a $[f^\sharp(\varphi)] = f^\sharp(\varphi) + Im\delta^{n-1} \in H^n(X;R)$.

Proposição 1.1.7 *Uma aplicação entre dois complexos induz homomorfismos entre os módulos de cohomologia dos complexos.*

Teorema 1.1.4 (*[19], p.201*) *Se X e Y tem o mesmo tipo de homotopia (em particular são espaços homeomorfos) então $H^*(X;R) \cong H^*(Y;R)$.*

Teorema 1.1.5 (*Sequência de Mayer - Vietoris*)(*[19], p.203*) *Sejam A e B subconjuntos de um espaço topológico X tais que $X = int(A) \cup int(B)$. Então a seguinte sequência é exata:*

$$\ldots \to H^n(X;R) \xrightarrow{\phi^*} H^n(A;R) \oplus H^n(B;R) \xrightarrow{\psi^*} H^n(A \cap B;R) \to H^{n+1}(X;R) \to \ldots$$

onde $\phi^*(x) = (i^*(x), j^*(x))$, $x \in H^n(X;R)$, e $\psi^*(u,v) = k^*(u) - l^*(v)$, para $u \in H^n(A;R)$, $v \in H^n(B;R)$, com i^*, j^*, k^*, l^* as induzidas das restrições naturais.

Como para homologia, podemos considerar a cohomologia para coeficientes em um R-módulo M (R anel comutativo com unidade).

Definição 1.1.16 (*[12] I. §1.4, p. 14*) *Sejam X um espaço topológico e M um R-módulo qualquer (R anel comutativo com unidade). A homologia do complexo $Hom_R(C_*(X;R), M)$ é chamada* ***cohomologia de*** *X com coeficientes no R-módulo M e é denotada por $H^*(X;M)$.*

Observação 1.1.3 *Similarmente, se G é um grupo abeliano podemos considerar G como um $\mathbb{Z}$-módulo (de modo natural), assim a cohomologia de um espaço X com coeficientes no grupo G é a homologia do complexo de cocadeias $Hom_{\mathbb{Z}}(C_*(X), G)$. Em particular, se R é um anel (comutativo com unidade), podemos considerar a cohomologia de X com coeficientes no anel R e com coeficientes no $\mathbb{Z}$-módulo R, mas isto não acarreta problemas visto que $C^*(X;R) = Hom_R(C_*(X;R), R) = Hom_{\mathbb{Z}}(C_*(X), R)$ ([12], Exercício 9, p.14).*

1.1.2 (Co)homologia Singular Relativa

Dados um espaço X e um subespaço $A \subset X$, seja $C_n(X,A;R)$ o módulo quociente $C_n(X;R)/C_n(A;R)$. Assim cadeias em A são triviais em $C_n(X,A;R)$. Como a aplicação bordo $\partial : C_n(X;R) \longrightarrow C_{n-1}(X;R)$ leva $C_n(A;R) \longrightarrow C_{n-1}(A;R)$, ∂ induz uma aplicação bordo

$$\overline{\partial} : C_n(X, A; R) \longrightarrow C_{n-1}(X, A; R)$$
$$\sigma + C_n(A; R) \longmapsto \partial(\sigma) + C_{n-1}(A; R)$$

Deixando n variar, temos uma sequência de aplicações bordos

$$\ldots \longrightarrow C_n(X, A; R) \xrightarrow{\overline{\partial}} C_{n-1}(X, A; R) \longrightarrow \ldots$$

Ainda, $\overline{\partial}_n \circ \overline{\partial}_{n+1} = 0$, de modo que $\{C_*(X, A; R), \overline{\partial}_*\}$ forma um complexo de cadeias (relativas).

Definição 1.1.17 (*Ciclos e Bordos Relativos*) *Um n-**ciclo relativo** é uma n-cadeia $\alpha \in C_n(X; R)$ tal que $\partial(\alpha) \in C_{n-1}(A; R)$ e um n-**bordo relativo** é um elemento de $C_n(X; R)$ do tipo $\alpha = \partial(\beta) + \gamma$ para algum $\beta \in C_{n+1}(X; R)$ e $\gamma \in C_n(A; R)$.*

Definição 1.1.18 *O n-**ésimo módulo de homologia relativa de** X **módulo** A é definido por*

$$H_n(X, A; R) := \frac{Ker\overline{\partial}_n}{Im\overline{\partial}_{n-1}}.$$

Quando $R = \mathbb{Z}$, é usual denotar $H_n(X, A; \mathbb{Z})$ por $H_n(X, A)$.

Sequência Exata Longa em Homologia (do par (X, A))

Sejam X um espaço e A um subespaço de X. Para cada n considere a sequência exata curta de R-módulos livres

$$0 \longrightarrow C_n(A; R) \xrightarrow{i_\sharp} C_n(X; R) \xrightarrow{j_\sharp} C_n(X, A; R) \longrightarrow 0,$$

onde $i_\sharp$ é a aplicação induzida da inclusão de A em X e $j_\sharp$ é a projeção canônica. Dessa forma, temos a sequência exata de complexos

$$(*) \quad 0 \longrightarrow (C_n(A; R))_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{i_\sharp} (C_n(X; R))_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{j_\sharp} (C_n(X, A; R))_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow 0.$$

Teorema 1.1.6 *Se X é um espaço e A um subespaço de X então a sequência exata de complexos $(*)$ induz uma sequência exata longa em homologia*

$$\ldots \longrightarrow H_n(A; R) \xrightarrow{i_*} H_n(X; R) \xrightarrow{j_*} H_n(X, A; R) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(A; R) \xrightarrow{i_*} H_{n-1}(X; R) \longrightarrow \ldots$$

Demonstração: ([19], p.115 e Teorema 2.16, p.117). ∎

Observação 1.1.4 *A aplicação bordo $\partial : H_n(X, A; R) \longrightarrow H_{n-1}(A; R)$ tem uma descrição muito simples: Se uma classe $[\alpha] \in H_n(X, A; R)$ é representada por um ciclo relativo α, então $\partial([\alpha])$ é a classe do ciclo $\partial\alpha$ em $H_{n-1}(A; R)$.*

A sequência exata longa do par nos mostra que os módulos $H_n(X, A; R)$ medem de certo modo a "diferença" entre os módulos $H_n(X; R)$ e $H_n(A; R)$. Em particular, se $H_n(X, A; R) = 0$ para todo n, a exatidão implica que a inclusão $i : A \hookrightarrow X$ induz isomorfismos $H_n(A; R) \cong H_n(X; R)$ para todo n.

Observação 1.1.5 *Existe uma sequência exata longa completamente análoga, a dada no Teorema 1.1.6, para módulos de homologia reduzida de um par* (X, A) *com* $A \neq \emptyset$ *e tem-se, para todo* n*, que* $\widetilde{H}_n(X, A; R) \cong H_n(X, A; R)$*, quando* $A \neq \emptyset$ *([19], p.118).*

Exemplo 1.1.2 $H_i(D^n, \partial D^n; R) \cong \begin{cases} R, & se \quad i = n, \\ 0, & caso\ contrário \end{cases}$. *Em particular* $H_i(D^n, \partial D^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & se \quad i = n, \\ 0, & caso\ contrário \end{cases}$. *De fato, considere a sequência exata longa (de homologia reduzida) para o par* $(D^n, \partial D^n)$ *(onde por simplicidade vamos omitir o anel coeficiente* R*),*

$$\ldots \longrightarrow \widetilde{H}_i(\partial D^n) \xrightarrow{i_*} \widetilde{H}_i(D^n) \xrightarrow{j_*} \widetilde{H}_i(D^n, \partial D^n) \xrightarrow{\partial} \widetilde{H}_{i-1}(\partial D^n) \xrightarrow{i_*} \widetilde{H}_{i-1}(D^n) \longrightarrow \ldots$$
$$\longrightarrow \widetilde{H}_1(D^n, \partial D^n) \xrightarrow{\partial} \widetilde{H}_0(\partial D^n) \longrightarrow \widetilde{H}_0(D^n) \longrightarrow \widetilde{H}_0(D^n, \partial D^n) \longrightarrow 0.$$

Sabemos que $\widetilde{H}_i(D^n) = 0$ *para todo* i *(Corolário 1.1.2), pois* D^n *é contráctil. Agora* $\partial D^n = S^{n-1}$*, assim obtemos que* $\widetilde{H}_0(D^n, \partial D^n) = 0$ *e, para* $i > 0$*, a sequência exata*

$$0 \longrightarrow \widetilde{H}_i(D^n, \partial D^n) \longrightarrow \widetilde{H}_{i-1}(S^{n-1}) \longrightarrow 0,$$

o que implica que $\widetilde{H}_i(D^n, \partial D^n) \cong \widetilde{H}_{i-1}(S^{n-1})$*, para* $i > 0$*. Pela Observação 1.1.5, obtemos* $H_i(D^n, \partial D^n) \cong \widetilde{H}_i(D^n, \partial D^n)$ *e então pelo Corolário 1.1.3 temos*

$$H_i(D^n, \partial D^n) \cong \begin{cases} R, & se \quad i = n \\ 0, & caso\ \ contrário. \end{cases}$$

Exemplo 1.1.3 *Similarmente temos que* $H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{x\}; R) \cong \widetilde{H}_{i-1}(\mathbb{R}^n - \{x\}; R) \cong \widetilde{H}_{i-1}(S^{n-1}; R) \cong \begin{cases} R, & se \quad i = n \\ 0, & caso\ contrário. \end{cases}$

Exemplo 1.1.4 *Se* $x_0 \in X$ *então* $H_n(X, x_0) = H_n(X, \{x_0\}) \cong \widetilde{H}_n(X)$*, para todo* n*. Isto segue aplicando a sequência exata longa dos grupos de homologia reduzida ao par* (X, x_0)*, considerando que* $\widetilde{H}_n(x_0) = 0$ *para todo* n*.*

Homomorfismos Induzidos em Homologia Relativa

Sejam X, Y espaços topológicos, A um subespaço de X e B um subespaço de Y. Existem homomorfismos induzidos para a homologia relativa assim como no caso absoluto. Uma aplicação $f : X \longrightarrow Y$ com $f(A) \subset B$, ou mais resumidamente, $f : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$, induz homomorfismos (que por abuso também vamos denotar por $f_\sharp$ como no caso absoluto) $f_\sharp : C_n(X, A; R) \longrightarrow C_n(Y, B; R)$; $\sigma + C_n(A; R) \mapsto f_\sharp(\sigma) + C_n(B; R) = f \circ \sigma + C_n(B; R)$ (com $\sigma : \Delta^n \to X$, n-simplexo singular) pois a aplicação de cadeia (no caso absoluto) $f_\sharp : C_n(X; R) \longrightarrow C_n(Y; R)$ leva $C_n(A; R)$ em $C_n(B; R)$, de modo que obtemos uma aplicação bem definida no quociente

$$f_\sharp : C_n(X, A; R) \longrightarrow C_n(Y, B; R).$$

A relação $f_\sharp \circ \partial = \partial \circ f_\sharp$ vale para cadeias relativas uma vez que vale para cadeias absolutas. Pela Proposição 1.1.4, temos então homomorfismos induzidos $f_* : H_n(X, A; R) \longrightarrow H_n(Y, B; R)$.

Definição 1.1.19 *Duas aplicações $f, g : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$, isto é tais que $f, g : X \longrightarrow Y$ e $f(A) \subset B$, $g(A) \subset B$, são **homotópicas** (como aplicações de pares) se existe uma aplicação contínua (de pares) $F : (I \times X, I \times A) \longrightarrow (Y, B)$ tal que $F(0, x) = f(x)$ e $F(1, x) = g(x)$ para todo $x \in X$, onde $I = [0, 1]$.*

Proposição 1.1.8 *([19], Proposição 2.19, p.118) Se duas aplicações $f, g : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ são aplicações homotópicas de pares $(X, A) \longrightarrow (Y, B)$ então*

$$f_* = g_* : H_n(X, A; R) \longrightarrow H_n(Y, B; R).$$

Teorema 1.1.7 *(Excisão)([19], Teorema 2.20, p.119) Dados subespaços $Z \subset A \subset X$ tal que o fecho de Z está contido no interior de A, então a inclusão $(X - Z, A - Z) \hookrightarrow (X, A)$ induz isomorfismos*

$$H_n(X - Z, A - Z; R) \longrightarrow H_n(X, A; R)$$

para todo n. Equivalentemente, para subespaços $A, B \subset X$ cuja reunião dos interiores cobrem X, a inclusão $(B, A \cap B) \hookrightarrow (X = int(A) \cup int(B), A)$ induz isomorfismos $H_n(B, A \cap B; R) \longrightarrow H_n(X, A; R)$.

Corolário 1.1.4 *Seja X um espaço topológico. Se $U \subset X$ é um aberto não vazio e x um ponto qualquer de U então*

$$H_k(U, U - \{x\}; R) \cong H_k(X, X - \{x\}; R).$$

Em particular, se $X = \mathbb{R}^m$, então

$$H_k(U, U - \{x\}; R) \cong H_k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m - \{x\}; R) \cong \begin{cases} R, & se \quad i = n \\ 0, & caso\ contrário. \end{cases}$$

Demonstração: Tome $Z = X - U$ (o complementar de U em X) e $A = X - \{x\}$. Então $X - Z = U$, $A - Z = U - \{x\}$ e claramente fecho(Z)= fecho($X - U$) $= X - U \subset$ int (A), visto que U e $X - \{x\}$ são abertos em X. Daí o resultado segue usando o teorema anterior (excisão), e o Exemplo 1.1.3 para o caso em que $X = \mathbb{R}^m$. ■

Corolário 1.1.5 *Considere o anel $R = \mathbb{Z}$. Se os subconjuntos abertos não vazios $U \subset \mathbb{R}^m$ e $V \subset \mathbb{R}^n$ são homeomorfos, então m=n.*

Demonstração: Para $x \in U$ temos pelo resultado anterior, que

$$H_k(U, U - \{x\}) \cong H_k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m - \{x\}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se} \quad k = m \\ 0, & \textit{caso contrário.} \end{cases}$$

Analogamente, para $y \in V$ obtemos

$$H_k(V, V - \{y\}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{se} \quad k = n \\ 0, & \textit{caso contrário.} \end{cases}$$

Seja $h : U \longrightarrow V$ um homeomorfismo. Então h induz isomorfismos

$$H_k(U, U - \{x\}) \longrightarrow H_k(V, V - \{h(x)\})$$

para todo k. Assim devemos ter $m = n$. ∎

Vamos introduzir agora uma sequência exata conhecida como a sequência de Mayer-Vietoris relativa em homologia.

Teorema 1.1.8 ([29], p.187) *Sejam A e B subconjuntos de um espaço topológico X tais que $X = int(A) \cup int(B)$. Então a seguinte sequência é exata*

$$\ldots \longrightarrow H_n(X, A \cap B; R) \xrightarrow{\phi_*} H_n(X, A; R) \oplus H_n(X, B; R) \xrightarrow{\psi_*} H_n(X, A \cup B; R) \longrightarrow \ldots$$

(que por abuso também vamos denotar por ϕ_* e ψ_* como no caso absoluto) onde $\phi_*(x) = (i_*(x), j_*(x))$ e $\psi_*(u, v) = k_*(u) - l_*(v)$, para $x \in H_n(X, A \cap B; R)$, $u \in H_n(X, A; R)$ e $v \in H_n(X, B; R)$ com i_*, j_*, k_*, l_* as induzidas das inclusões naturais.

Observação 1.1.6 ([19], Proposição 2.21, p.119) *Na verdade, a sequência exata do teorema anterior vale mais geralmente quando o par $\{A, B\}$ é excisivo (Definição 1.1.11).*

Do mesmo modo que definimos homologia absoluta com coeficientes em um R- módulo, define-se a homologia relativa do par (X, A) com coeficientes em um R-módulo M.

Definição 1.1.20 *Sejam X um espaço topológico, A um subconjunto de X e M um R-módulo (R anel comutativo com unidade). A homologia de $C_*(X, A, R) \otimes_R M$ é chamada* ***homologia relativa do par*** *(X, A) com coeficientes em um R-módulo M e denotada por $H^*(X, A; M)$.*

Cohomologia Singular Relativa

Consideremos os complexos de cadeia $(C_n(A;R),\partial)$, $(C_n(X;R),\partial)$, $(C_n(X,A;R),\overline{\partial})$ dados anteriormente. A partir de $C_n(X,A;R)$ obtemos um complexo de cocadeias de R-módulos livres $C^n(X,A;R) = Hom(C_n(X,A;R),R)$ com o operador cobordo $\overline{\delta}$ assim definido

$$\overline{\delta}^n : C^n(X,A;R) \longrightarrow C^{n+1}(X,A;R)$$

$$f \longmapsto \delta^n(f) = f \circ \overline{\partial}_n$$

A relação $\overline{\delta}^n \circ \overline{\delta}^{n-1} = 0$ também é válida na cohomologia relativa. Dessa maneira $\{C^*(X,A;R),\overline{\delta}^*\}$ forma um complexo de cocadeias (relativas).

Definição 1.1.21 *O n-**ésimo módulo de cohomologia relativa de** X **módulo** A é dado por*

$$H^n(X,A;R) = \frac{Ker\overline{\delta}^n}{Im\overline{\delta}^{n-1}}.$$

Quando $R=\mathbb{Z}$, vamos denotar $H^n(X,A;\mathbb{Z})$ por $H^n(X,A)$.

Sequência Exata Longa em Cohomologia (do par (X,A))

Sejam X um espaço e A um subespaço de X. Para cada n considere a sequência exata curta de R-módulos livres

$$0 \longrightarrow C^n(X,A;R) \xrightarrow{j^\sharp} C^n(X;R) \xrightarrow{i^\sharp} C^n(A;R) \longrightarrow 0$$

onde $j^\sharp(\varphi) = \varphi \circ j_\sharp$, com $\varphi \in C^n(X,A;R)$ e $j_\sharp$ a projeção canônica, e $i^\sharp(\psi) = \psi \circ i_\sharp$, com $\psi \in C^n(X;R)$ e $i_\sharp$ a inclusão. Dessa forma, obtemos a sequência exata de complexos

$$(*)\quad 0 \longrightarrow (C^n(X,A;R))_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{j^\sharp} (C^n(X;R))_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow{i^\sharp} (C^n(A;R))_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow 0$$

Teorema 1.1.9 ([19], p.200) *Se X é um espaço e A é um subespaço de X, então a sequência exata de complexos $(*)$ induz uma sequência exata longa em cohomologia*

$$\ldots \longrightarrow H^n(X,A;R) \xrightarrow{j^*} H^n(X;R) \xrightarrow{i^*} H^n(A;R) \xrightarrow{\delta} H^{n+1}(X,A;R) \longrightarrow \ldots$$

Homomorfismos Induzidos em Cohomologia Relativa

Sejam X, Y espaços topológicos, A um subespaço de X e B um subespaço de Y. Como no caso absoluto, existem homomorfismos induzidos para a cohomologia relativa. Uma aplicação $f : X \longrightarrow Y$ com $f(A) \subset B$, ou mais resumidamente, $f : (X,A) \longrightarrow (Y,B)$, induz homomorfismos $f^\sharp : C^n(Y,B;R) \longrightarrow C^n(X,A;R)$; que associa um elemento $\varphi \in C^n(Y,B;R) = Hom(C_n(Y,B;R),R)$ o elemento $f^\sharp(\varphi) := \varphi \circ f_\sharp$, onde $f_\sharp : C_n(X,A;R) \to C_n(Y,B;R)$, $f^\sharp =$

$Hom(f_\sharp, id_R)$. Assim pela Proposição 1.1.7 temos homomorfismos induzidos em cohomologia, $f^* : H^n(Y, B; R) \longrightarrow H^n(X, A; R)$.

Proposição 1.1.9 *([19], III. p.201 ou [29], p.156) Se duas aplicações $f, g : (X, A) \longrightarrow (Y, B)$ são homotópicas de pares $(X, A) \longrightarrow (Y, B)$ então $f^* = g^* : H^n(Y, B; R) \longrightarrow H^n(X, A; R)$.*

Teorema 1.1.10 *(Excisão)([19], p.201) Para subespaços $Z \subset A \subset X$ com o fecho de Z contido no interior de A, a inclusão $i : (X - Z, A - Z) \longrightarrow (X, A)$ induz isomorfismos $i^* : H^n(X, A; R) \longrightarrow H^n(X - Z, A - Z; R)$ para todo n.*

Há uma versão da sequência de Mayer-Vietoris para cohomologia relativa. Tal sequência será útil na prova da dualidade de Poincaré, no Capítulo 2.

Teorema 1.1.11 *([29], p.187 e Observação 1.1.6) Sejam A e B subconjuntos de um espaço topológico X tais que $X = int(A) \cup int(B)$. Então a seguinte sequência é exata:*

$$\ldots \longrightarrow H^n(X, A \cup B; R) \xrightarrow{\phi^*} H^n(X, A; R) \oplus H^n(X, B; R) \xrightarrow{\psi^*} H^n(X, A \cap B; R) \longrightarrow \ldots$$

onde $\phi^*(x) = (i^*(x), j^*(x))$, $x \in H^n(X, A \cup B; R)$, e $\psi^*(u, v) = k^*(u) - l^*(v)$, para $u \in H^n(X, A; R)$, $v \in H^n(X, B; R)$, com i^*, j^*, k^*, l^* as induzidas das restrições naturais.

Assim como definimos cohomologia com coeficientes em um R-módulo M, definiremos agora a cohomologia relativa do par (X, A) com coeficiente em um R-módulo M.

Definição 1.1.22 *A cohomologia de $Hom_R(C_*(X, A; R), M)$ é chamada **cohomologia relativa do par** (X, A) com coeficientes em um R-módulo M.*

1.1.3 Teorema dos coeficientes universais

Apresentamos agora uma interessante relação entre a (co)homologia com coeficientes em um anel R comutativo com unidade (visto como $\mathbb{Z}$-módulo/ grupo abeliano) com as homologias com coeficientes em $\mathbb{Z}$ (vide [19], p.196 e 204; [17], p.169 e 256).

Teorema 1.1.12 *([17], Teorema 29.12, p.256 ou [19], Teor.3A.3, p.264) Existem sequências exatas naturais*

$$0 \longrightarrow H_n(X) \otimes R \longrightarrow H_n(X; R) \longrightarrow Tor(H_{n-1}(X), R) \longrightarrow 0$$

para todo n e todo R, e estas sequências cindem.

Corolário 1.1.6 *Para cada par de espaços (X, A) existem sequências exatas cindidas*

$$0 \longrightarrow H_n(X, A) \otimes R \longrightarrow H_n(X, A; R) \longrightarrow Tor(H_{n-1}(X, A), R) \longrightarrow 0$$

para todo n, e estas sequências são naturais em relação às aplicações $(X, A) \longrightarrow (Y, B)$.

Corolário 1.1.7 *([19], Corolário 3A.6(a), p.266) Temos que* $H_n(X;\mathbb{Q}) \simeq H_n(X;\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{Q}$ *e assim, quando* $H_n(X;\mathbb{Z})$ *é finitamente gerado, a dimensão de* $H_n(X;\mathbb{Q})$*, como um espaço vetorial sobre* $\mathbb{Q}$*, é igual ao rank (ou posto) do grupo abeliano* $H_n(X;\mathbb{Z})$*.*

Teorema 1.1.13 *([19], Teorema 3.2, p.195 e p.201; [17], 23.28, p.189) Existem sequências exatas naturais*

$$0 \longrightarrow Ext(H_{n-1}(X), R) \longrightarrow H^n(X;R) \xrightarrow{\alpha} Hom(H_n(X), R) \longrightarrow 0$$

e estas sequências cindem. Mais geralmente, se (X, A) *é um par então existe uma sequência exata curta que cinde:*

$$0 \longrightarrow Ext(H_{n-1}(X,A), R) \longrightarrow H^n(X,A;R) \xrightarrow{\alpha} Hom(H_n(X,A), R) \longrightarrow 0.$$

Observação 1.1.7 *O homomorfismo* α *dado na sequência acima é assim definido:* $[\psi] \in H^n(X,A;R) \longmapsto \alpha([\psi]) \in Hom(H_n(X,A), R)$ *tal que* $\alpha([\psi])([\sigma]) = \psi(\sigma)$ *onde* $[\psi] \in H^n(X,A;R)$ *é representado pelo cociclo* $\psi \in Hom(C_n(X,A;R), R)$ *e* $[\sigma] \in H_n(X;R)$ *é representado por um ciclo* $\sigma \in C_n(X;R)$*.*

Observação 1.1.8 *([19], p.196 e p.267) Os teoremas anteriores valem se substituirmos* R *por um grupo abeliano (*$\mathbb{Z}$*-módulo) arbitrário. Ainda, considerando* R *um domínio de ideais principais (PID) temos resultados similares aos apresentados anteriormente, que relacionam a n-ésima homologia e a n-ésima cohomologia de* X *com coeficientes em um* R*-módulo* M *qualquer, com as* $(n-1)$ *e n-ésimas homologias de* X *com coeficientes em* R*. Para isso temos que exigir que* R *seja um PID pois neste caso submódulos de um* R*-módulo livre são livres, ([34] Proposição A.4.4, p.124), similarmente ao que ocorre com* $\mathbb{Z}$ *visto que subgrupos de grupos abelianos livres são livres.*

Exemplo 1.1.5

$$H^q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{x\}; R) \cong \begin{cases} R, & se \quad q = n \\ 0, & se \quad q \neq n. \end{cases}$$

Ainda, $H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{x\}, R) \xrightarrow{\alpha} Hom(H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{x\}); R) \cong R$*. Isso segue diretamente do resultado anterior e do Exemplo 1.1.3.*

1.1.4 Produto cap absoluto e relativo

Definição 1.1.23 *([19], p.239) Para um espaço arbitrário* X *e um anel de coeficientes* R*, definimos um* ***produto cap*** R*-bilinear*

$$\frown : C_k(X;R) \times C^l(X;R) \longrightarrow C_{k-l}(X;R)$$

para $k \geq l$ *por considerar, (nos geradores)*

$$\sigma \frown \varphi = \varphi(\sigma|_{[v_0,\ldots,v_l]}).\sigma|_{[v_l,\ldots,v_k]}$$

para $\sigma : \triangle^k \longrightarrow X$ *e* $\varphi \in C^l(X;R)$.

Entendendo melhor essa aplicação:

Temos que $\sigma : \triangle^k \longrightarrow X$ ou seja $\sigma : [v_0, \ldots, v_l, \ldots, v_k] \longrightarrow X$. Dessa forma,

$$\sigma|_{[v_0,\ldots,v_l]} : \triangle^l \longrightarrow X$$

o que implica que $\sigma|_{[v_0,\ldots,v_l]} \in C_l(X;R)$. Como $\varphi : C_l(X;R) \longrightarrow R$ já que $\varphi \in C^l(X;R) = Hom(C_l(X;R),R)$, então $\varphi(\sigma|_{[v_0,\ldots,v_l]}) \in R$ e assim $\varphi(\sigma|_{[v_0,\ldots,v_l]})$ é uma constante. Um elemento de $C_{k-l}(X;R)$ é uma soma finita $\sum_i a_i\sigma_i$ onde $\sigma_i : \triangle^{k-l} \longrightarrow X$ e $a_i \in R$, mas podemos ver $\sigma|_{[v_l,\ldots,v_k]}$ como um elemento de $C_{k-l}(X,R)$ por identificar $\triangle^{k-l} = [v_l,\ldots,v_k]$. (Mais precisamente, $\sigma : [\widetilde{v}_0,\ldots,\widetilde{v}_{k-l}] \longrightarrow X$ onde estamos considerando $\widetilde{v}_0 = v_l, \ldots, \widetilde{v}_{k-l} = v_k$). Assim temos $\sigma|_{[v_l,\ldots,v_k]} : \triangle^{k-l} \longrightarrow X$ o que implica que $\sigma|_{[v_l,\ldots,v_k]} \in C_{k-l}(X;R)$. Denotando $a_i = \varphi(\sigma|_{[v_0,\ldots,v_l]})$ temos que

$$\sigma \frown \varphi = a_i.\sigma|_{[v_l,\ldots,v_k]} \in C_{k-l}(X;R).$$

Proposição 1.1.10 $\partial(\sigma \frown \varphi) = (-1)^l(\partial(\sigma) \frown \varphi - \sigma \frown \delta(\varphi))$, *onde* $\sigma \in C_k(X;R)$ *e* $\varphi \in C^l(X;R)$.

Demonstração: Pela Definição 1.1.6 temos que $\partial(\sigma) = \displaystyle\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\sigma|_{[v_0,\ldots,\widehat{v}_i,\ldots,v_k]} \in C_{k-1}(X;R)$. Como $\partial(\sigma) \in C_{k-1}(X,R)$ e $\varphi \in C^l(X;R)$ temos que considerar, para obter $\partial(\sigma) \frown \varphi$,

$$\frown : C_{k-1}(X;R) \times C^l(X;R) \longrightarrow C_{k-1-l}(X;R).$$

Ainda, $\partial(\sigma) = \sigma|_{[\widehat{v}_0,v_1,\ldots,v_k]} - \sigma|_{[v_0,\widehat{v}_1,\ldots,v_k]} + \ldots + (-1)^k\sigma|_{[v_0,v_1,\ldots,\widehat{v}_k]}$. Assim $\partial(\sigma) \frown \varphi = \sigma|_{[\widehat{v}_0,v_1,\ldots,v_k]} \frown \varphi - \sigma|_{[v_0,\widehat{v}_1,\ldots,v_k]} \frown \varphi + \ldots + (-1)^k\sigma|_{[v_0,v_1,\ldots,\widehat{v}_k]} \frown \varphi$. Mas:

- $\sigma|_{[\widehat{v}_0,v_1,\ldots,v_k]} \frown \varphi = \varphi(\sigma|_{[\widehat{v}_0,v_1,\ldots,v_{l+1}]}).\sigma|_{[v_{l+1},\ldots,v_k]}$
- $\sigma|_{[v_0,\widehat{v}_1,\ldots,v_k]} \frown \varphi = \varphi(\sigma|_{[v_0,\widehat{v}_1,\ldots,v_{l+1}]}).\sigma|_{[v_{l+1},\ldots,v_k]}$
- $\sigma|_{[v_0,v_1,\ldots,\widehat{v}_l,\ldots,v_k]} \frown \varphi = \varphi(\sigma|_{[v_0,v_1,\ldots,\widehat{v}_l,v_{l+1}]}).\sigma|_{[v_{l+1},\ldots,v_k]}$
- $\sigma|_{[v_0,v_1,\ldots,\widehat{v}_{l+1},\ldots,v_k]} \frown \varphi = \varphi(\sigma|_{[v_0,v_1,\ldots,v_l]}).\sigma|_{[v_l,\widehat{v}_{l+1},\ldots,v_k]}$

$\vdots$

- $\sigma|_{[v_0,v_1,\ldots,v_{l+1},\ldots,\widehat{v}_j,\ldots,v_k]} \frown \varphi = \varphi(\sigma|_{[v_0,v_1,\ldots,v_l]}).\sigma|_{[v_l,v_{l+1},\ldots,\widehat{v}_j,\ldots,v_k]}$.

$\vdots$

- $\sigma|_{[v_0,v_1,\ldots,\widehat{v}_k]} \frown \varphi = \varphi(\sigma|_{[v_0,v_1,\ldots,v_l]}).\sigma|_{[v_l,\ldots,\widehat{v}_k]}$.

Portanto,

$$\partial(\sigma) \frown \varphi = \sum_{i=0}^{l}(-1)^i \varphi(\sigma|_{[v_0,\dots,\widehat{v}_i,\dots,v_{l+1}]}).\sigma|_{[v_{l+1},\dots,v_k]} + \sum_{i=l+1}^{k}(-1)^i \varphi(\sigma|_{[v_0,\dots,v_l]}).\sigma|_{[v_l,\dots,\widehat{v}_i,\dots,v_k]}.$$

Agora $\delta(\varphi) = \sum_{i=0}^{l+1}(-1)^i \varphi(\sigma|_{[v_0,\dots,\widehat{v}_i,\dots,v_{l+1}]}) \in C^{l+1}(X;R)$ (Definição 1.1.13). Como $\sigma \in C_k(X;R)$ temos que considerar

$$\frown : C_k(X;R) \times C^{l+1}(X;R) \longrightarrow C_{k-(l+1)}(X;R).$$

Temos que
$\sigma \frown \delta(\varphi) = \sigma \frown \varphi(\sigma|_{[\widehat{v}_0,\dots,v_{l+1}]}) - \sigma \frown \varphi(\sigma|_{[v_0,\widehat{v}_1,\dots,v_{l+1}]}) + \ldots + (-1)^{l+1}\sigma \frown \varphi(\sigma|_{[v_0,\dots,\widehat{v}_{l+1}]})$.
Mas
- $\sigma \frown \varphi(\sigma|_{[\widehat{v}_0,\dots,v_{l+1}]}) = \varphi(\sigma|_{[\widehat{v}_0,\dots,v_{l+1}]}).\sigma|_{[v_{l+1},\dots,v_k]}$
- $\sigma \frown \varphi(\sigma|_{[v_0,\widehat{v}_1,\dots,v_{l+1}]}) = \varphi(\sigma|_{[v_0,\widehat{v}_1,\dots,v_{l+1}]}).\sigma|_{[v_{l+1},\dots,v_k]}$

$\vdots$
- $\sigma \frown \varphi(\sigma|_{[v_0,\dots,\widehat{v}_l,v_{l+1}]}) = \varphi(\sigma|_{[v_0,\dots,\widehat{v}_l,v_{l+1}]}).\sigma|_{[v_{l+1},\dots,v_k]}$
- $\sigma \frown \varphi(\sigma|_{[v_0,\dots,\widehat{v}_{l+1}]}) = \varphi(\sigma|_{[v_0,\dots,\widehat{v}_{l+1}]}).\sigma|_{[v_{l+1},\dots,v_k]}$.

Portanto, $\sigma \frown \delta(\varphi) = \sum_{i=0}^{l+1}(-1)^i \varphi(\sigma|_{[v_0,\dots,\widehat{v}_i,\dots,v_{l+1}]}).\sigma|_{[v_{l+1},\dots,v_k]}$.
Dessa forma,

$$\partial(\sigma) \frown \varphi - \sigma \frown \delta(\varphi) = \sum_{i=l+1}^{k}(-1)^i \varphi(\sigma|_{[v_0,\dots,v_l]}).\sigma|_{[v_l,\dots,\widehat{v}_i,\dots,v_k]} - (-1)^{l+1}\varphi(\sigma|_{[v_0,\dots,\widehat{v}_{l+1}]}).\sigma|_{[v_{l+1},\dots,v_k]}.$$

Podemos escrever $-(-1)^{l+1}\varphi(\sigma|_{[v_0,\dots,\widehat{v}_{l+1}]}).\sigma|_{[v_{l+1},\dots,v_k]} = (-1)^l \varphi(\sigma|_{[v_0,\dots,v_l]}).\sigma|_{[\widehat{v}_l,v_{l+1},\dots,v_k]}$ já que $-(-1)^{l+1} = -(-1)^l(-1)^1 = (-1)^l$. Portanto,

$$(\partial(\sigma) \frown \varphi) - (\sigma \frown \delta(\varphi)) = \sum_{i=l}^{k}(-1)^i \varphi(\sigma|_{[v_0,\dots,v_l]}).\sigma|_{[v_l,\dots,\widehat{v}_i,\dots,v_k]}.$$

Por outro lado, temos que

$$\sigma \frown \varphi = \varphi(\sigma|_{[v_0,\dots,v_l]}).\sigma|_{[v_l,\dots,v_k]} \in C_{k-l}(X;R).$$

Tomando $\psi = \sigma \frown \varphi$ então $\psi : \triangle^{k-l} \longrightarrow X$. Pela aplicação bordo, denotando por conveniência $\triangle^{k-l} = [w_0, \ldots, w_{k-l}]$, temos

$$\partial(\psi) = \sum_{i=0}^{k-l} (-1)^i \psi|_{[w_0,\ldots,\widehat{w}_i,\ldots,w_{k-l}]} =$$

$$\psi|_{[\widehat{w}_0,\ldots,w_{k-l}]} - \psi|_{[w_0,\widehat{w}_1,\ldots,w_{k-l}]} + \ldots + (-1)^{k-l}\psi|_{[w_0,\ldots,\widehat{w}_{k-l}]}.$$

Considerando $w_0 = v_{l+0}, \ldots, w_{k-l} = v_{l+(k-l)} = v_k$ teremos que

$$\partial(\sigma \frown \varphi) = \sum_{i=l}^{k} (-1)^{i-l} \varphi(\sigma|_{[v_0,\ldots,v_l]}).\sigma|_{[v_l,\ldots,\widehat{v}_i,\ldots,v_k]}$$

Agora, $(-1)^l(\partial(\sigma) \frown \varphi - \sigma \frown \delta(\varphi)) = \sum_{i=l}^{k} (-1)^{i+l} \varphi(\sigma|_{[v_0,\ldots,v_l]}).\sigma|_{[v_l,\ldots,\widehat{v}_i,\ldots,v_k]}$.

Assim, $\partial(\sigma \frown \varphi) = (-1)^l(\partial(\sigma) \frown \varphi - \sigma \frown \delta(\varphi))$. ■

Da proposição anterior segue que o produto cap de um ciclo σ e um cociclo φ é um ciclo (pois $\partial(\sigma \frown \varphi) = 0$). Ainda, se $\partial(\sigma) = 0$ então $\partial(\sigma \frown \varphi) = \pm(\sigma \frown \delta(\varphi))$, de modo que o produto cap de um ciclo e um cobordo é um bordo. E se $\delta(\varphi) = 0$ então $\partial(\sigma \frown \varphi) = \pm(\partial(\sigma) \frown \varphi)$, de modo que o produto cap de um bordo e um cociclo é um bordo. Isto induz um produto cap em homologia

$$H_k(X;R) \times H^l(X;R) \overset{\frown}{\longrightarrow} H_{k-l}(X;R), (([\sigma],[\varphi]) \longmapsto [\sigma \frown \varphi])$$

que é R-linear em cada variável.

Observação 1.1.9 *Notemos que quando $k = l$, temos $\frown : C_k(X;R) \times C^k(X;R) \longrightarrow C_0(X;R)$ e $\sigma \frown \varphi = \varphi(\sigma).\sigma|_{[v_k]}$, para todo $\sigma \in C_k(X;R)$ e $\varphi \in C^k(X;R)$.*

Pode-se verificar que o produto cap assume as formas relativas:

$$H_k(X,A;R) \times H^l(X;R) \overset{\frown}{\longrightarrow} H_{k-l}(X,A;R),$$

$$H_k(X,A;R) \times H^l(X,A;R) \overset{\frown}{\longrightarrow} H_{k-l}(X;R).$$

Por exemplo, para o segundo caso observe que o produto cap $C_k(X;R) \times C^l(X;R) \longrightarrow C_{k-l}(X;R)$ restrito a $C_k(A;R) \times C^l(X,A;R)$ se anula, assim existe um produto cap bem definido $C_k(X,A;R) \times C^l(X,A;R) \longrightarrow C_{k-l}(X;R), (\overline{\sigma}, h) \longmapsto h(\overline{\sigma|_{[v_0,\ldots,v_l]}}).\sigma|_{[v_l,\ldots,v_k]}$. Como a Proposição 1.1.10 também vale para o caso relativo podemos então passar para os módulos de homologia e cohomologia.

Observação 1.1.10 *([19], p. 240) O produto cap satisfaz uma propriedade de naturalidade que descrevemos a seguir. Dada uma aplicação $f : X \longrightarrow Y$, as aplicações induzidas em homologia e cohomologia se relacionam de acordo com o diagrama abaixo:*

$$\begin{tikzcd} H_k(X;R) \times \arrow[d, "f_*"] & H^l(X;R) \arrow[r, "\frown"] & H_{k-l}(X;R) \arrow[d, "f_*"'] \\ H_k(Y;R) \times & H^l(Y;R) \arrow[u, "f^*"] \arrow[r, "\frown"] & H_{k-l}(Y;R) \end{tikzcd}$$

Mais precisamente, se $\alpha \in H_k(X;R)$ e $\varphi \in H^l(Y;R)$, então

$$f_*(\alpha) \frown \varphi = f_*(\alpha \frown f^*(\varphi))$$

que é obtida por substituir $f(\sigma)$ por σ na definição do produto cap:

$$f(\sigma) \frown \varphi = \varphi(f(\sigma|_{[v_0,\ldots,v_l]})).f(\sigma|_{[v_l,\ldots,v_k]}).$$

1.1.5 Espaços de Recobrimento

Nesta subseção faremos um breve estudo sobre a teoria de espaços de recobrimento, que será útil em vários contextos, como por exemplo, orientação para variedades (1.2), Interpretação Topológica da (co)homologia (3.1.1), Coeficientes Locais (3.1.2) e no Capítulo 4. No que segue X indicará um espaço conexo e localmente conexo por caminhos (logo conexo por caminhos).

Definição 1.1.24 *Um **espaço de recobrimento de** X (ou mais simplesmente um recobrimento de X) é um par $(\widetilde{X}, p)$, onde $\widetilde{X}$ é um espaço topológico conexo e localmente conexo por caminhos e $p : X \longrightarrow \widetilde{X}$ é uma aplicação contínua, satisfazendo a seguinte condição: Cada ponto x de X possui uma vizinhança aberta conexa por caminhos U tal que cada componente conexa por caminhos $\widetilde{U}$ de $p^{-1}(U)$ é aplicada por p homeomorficamente sobre U, isto é, ($p|_{\widetilde{U}} : \widetilde{U} \longrightarrow U$ é um homeomorfismo). A vizinhança U é chamada vizinhança elementar ou vizinhança admissível e a aplicação p é chamada projeção de recobrimento. O espaço X é chamado espaço base.*

Exemplo 1.1.6 *Se X é um espaço conexo e localmente conexo por caminhos então a aplicação identidade $id_X : X \longrightarrow X$ é uma projeção de recobrimento, isto é, (X, id_X) é um espaço de recobrimento de X.*

Exemplo 1.1.7 *Consideremos $\mathbb{R}$ e S^1 espaços com a topologia usual. Seja $p : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ a aplicação definida por $p(t) = (\cos(2\pi t), sen(2\pi t)) \equiv e^{2\pi it}$, $t \in \mathbb{R}$. Então $(\mathbb{R}, p)$ é um recobrimento de S^1.*

Exemplo 1.1.8 *$(\mathbb{R}^2, p)$ onde p é a aplicação $p : \mathbb{R}^2 \longrightarrow T^2 = S^1 \times S^1$ definida por $p(t_1, t_2) = (e^{2\pi it_1}, e^{2\pi it_2})$ é um recobrimento de T^2.*

Exemplo 1.1.9 *Mais geralmente, se* $(\widetilde{X}, p)$ *é um espaço de recobrimento de* X *e* $(\widetilde{Y}, q)$ *é um espaço de recobrimento de* Y *então* $(\widetilde{X} \times \widetilde{Y}, p_0 = p \times q)$*,onde a aplicação* $p_0 = p \times q : \widetilde{X} \times \widetilde{Y} \longrightarrow X \times Y$ *é dada por* $p_0(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = (p(\widetilde{x}), q(\widetilde{y}))$*, é um espaço de recobrimento de* $X \times Y$.

Proposição 1.1.11 *([28], Teorema 4.1, p.154) Seja* $(\widetilde{X}, p)$ *um espaço de recobrimento de* X *e sejam* $\widetilde{x}_0 \in \widetilde{X}$ *e* $x_0 \in X$ *pontos tais que* $p(\widetilde{x}_0) = x_0$*. Então o homomorfismo induzido* $p_\sharp : \pi_n(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \longrightarrow \pi_n(X, x_0)$ *é um isomorfismo para* $n \geq 2$ *e um monomorfismo para* $n = 1$ *de modo que* $\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0) \cong p_\sharp(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)) \subset \pi_1(X, x_0)$.

Definição 1.1.25 *Se* $(\widetilde{X}, p)$ *é um espaço de recobrimento de* X*, o número cardinal comum dos conjuntos* $p^{-1}(x), x \in X$*, é chamado de* ***número de folhas do recobrimento****. Dizemos que o recobrimento é de n- folhas se* $|p^{-1}(x)| = n$ *(isto é, o número de elementos de* $p^{-1}(x)$ *é* n*) e, de infinitas folhas se o conjunto* $p^{-1}(x)$ *for infinito. O conjunto* $p^{-1}(x)$ *é chamado de* ***fibra*** *de* $(\widetilde{X}, p)$ *no ponto* $x \in X$.

Definição 1.1.26 *Seja* $(\widetilde{X}, p)$ *um recobrimento de* X*. Um homeomorfismo* $\varphi : \widetilde{X} \to \widetilde{X}$ *é uma* ***transformação de recobrimento*** *(ou uma* ***deck transformation****) se* $p \circ \varphi = p$*. Notemos que o conjunto de todas as transformações de recobrimento (denotado por* $A(\widetilde{X}, p)$*) é um grupo em relação à composição.*

Nas duas proposições seguintes usamos o conceito de ação de grupos, ação transitiva, ação livre que recordamos a seguir:

Definição 1.1.27 *Sejam* G *um grupo denotado multiplicativamente com elemento neutro* 1 *e* E *um conjunto não vazio. Uma* ***ação (à esquerda) de*** G ***sobre*** E *(ou* ***uma*** G***-ação sobre*** E*) é uma função:*

$$\mu : G \times E \longrightarrow E$$

$$(g, x) \longmapsto \mu(g, x) \overset{Not.}{=} g.x$$

satisfazendo: (i) $1.x = x$*, para todo* $x \in E$*;*
(ii) $(g_1.g_2).x = g_1.(g_2.x)$*, para todo* $g_1, g_2 \in G$ *e para todo* $x \in E$.

Neste caso dizemos também que G opera ou atua sobre E, ou ainda que E é um conjunto munido de uma G-ação.

Observação 1.1.11 *(1) Equivalentemente, uma* G*-ação (à esquerda) sobre* E *é um homomorfismo*

$$\mu : G \longrightarrow Bij(E)$$

$$g \longmapsto \mu(g) = \mu_g; \mu_g(x) := g.x,$$

onde $Bij(E)$ é o grupo das bijeções de E em E. Neste caso, dizemos também que E é um G-conjunto. Note que se E é um grupo então $\mu : G \longrightarrow Aut(E)$, o conjunto dos automorfismos de E. Se E é um espaço topológico, exige-se em geral que a aplicação $\mu_g : E \longrightarrow E$ seja contínua para todo $g \in G$ (ao invés de homomorfismo). E assim, $\mu : G \longrightarrow Homeo(E)$.
(2) Analogamente, define-se G-ação à direita sobre E. Pode-se verificar que a partir de uma G-ação à esquerda sobre E obtemos uma G-ação à direita sobre E da seguinte forma: $x * g := g^{-1}.x$.

Definição 1.1.28 *Seja E um conjunto não vazio munido de uma G-ação. Dizemos que G* ***atua transitivamente em*** *E ou que E* ***é um G-espaço homogêneo****, se para todo $x, y \in E$, existe $g \in G$ tal que $g.x = y$.*

Definição 1.1.29 *(i) Dizemos que a* ***ação de G em um conjunto não vazio E é livre*** *ou que* ***opera livremente*** *se tivermos a seguinte condição: $g.x = x$, para algum $x \in E$ se, e somente se, $g = 1$. Assim E é chamado G-conjunto livre.*
(ii) Dizemos que a ***G-ação sobre E é trivial*** *se para todo $x \in E$ e todo $g \in G$, $g.x = x$. Logo E é chamado G-conjunto trivial.*

Definição 1.1.30 *Seja $x \in E$. A* ***G-órbita de*** *x, denotada por $G(x)$, é o seguinte subconjunto de E: $G(x) := \{g.x \ ; \ g \in G\}$. Dado $x \in E$, $G_x := \{g \in G; \ g.x = x\}$ é um subgrupo de G, denominado* ***subgrupo de isotropia de G em*** *x.*

Observação 1.1.12 *(1) Se G atua transitivamente em E então $G(x) = E$, para qualquer $x \in E$ e se G atua livremente em E então $G_x = \{1\}$, para todo $x \in E$.*
(2) Similarmente define-se G-ação transitiva, livre, espaço de órbita e subgrupo de isotropia quando a G-ação é à direita.

Proposição 1.1.12 *([28],V.3.2) O grupo $A(\widetilde{X}, p)$ atua livremente sobre $\widetilde{X}$, isto é, $g.\widetilde{x} = \widetilde{x}$ se, e somente se, $g = 1$.*

Definição 1.1.31 *Um recobrimento $(\widetilde{X}, p)$ de X é chamado de* ***recobrimento universal de*** *X se $\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}) = 1$, isto é, se $\widetilde{X}$ é simplesmente conexo.*

Proposição 1.1.13 *([28], p.162) Sejam $(\widetilde{X}, p)$ um recobrimento de X, $x \in X$ e $\widetilde{x} \in p^{-1}(x)$. Então*
(a) $p^{-1}(x)$ é um $\pi_1(X, x)$-espaço homogêneo
(b) O subgrupo de isotropia correspondendo a $\widetilde{x} \in p^{-1}(x)$ é precisamente o subgrupo $p_\sharp(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}))$ de $\pi_1(X, x)$.
(c) O número de folhas do recobrimento $(\widetilde{X}, p)$ é o índice do subgrupo $p_\sharp(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}))$ em $\pi_1(X, x)$.

Definição 1.1.32 *(Recobrimento Regular) Sejam $(\widetilde{X}, p)$ recobrimento de X e $\widetilde{x} \in p^{-1}(x), x \in X$. Se o subgrupo $p_\sharp(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}))$ é normal em $\pi_1(X, x)$ dizemos que $\widetilde{X}$ é um recobrimento regular de X.*

Exemplo 1.1.10 *Todo recobrimento universal $(\widetilde{X}, p)$ é regular pois o subgrupo $p_\sharp(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x})) = 1$ é obviamente normal em $\pi_1(X, x)$, para todos $x \in X$ e $\widetilde{x} \in p^{-1}(x)$.*

Proposição 1.1.14 *([28], p.163) Se $(\widetilde{X}, p)$ é um recobrimento regular de X então*

$$A(\widetilde{X}, p) \simeq \pi_1(X, x)/p_\sharp(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}))$$

para todo $x \in X$ e todo $\widetilde{x} \in p^{-1}(x)$.

Corolário 1.1.8 *([28], Corolário 7.5, p.163) Seja $(\widetilde{X}, p)$ um recobrimento universal de X. Então $A(\widetilde{X}, p) \simeq \pi_1(X, x)$ e a cardinalidade de $\pi_1(X, x)$ é igual ao número de folhas do recobrimento $(\widetilde{X}, p)$.*

Proposição 1.1.15 *([28], Lema 8.1, p.164) Seja $(\widetilde{X}, p)$ um espaço de recobrimento de X. O grupo $A(\widetilde{X}, p)$ opera transitivamente sobre $p^{-1}(x)$, $x \in X$ se, e somente se, $(\widetilde{X}, p)$ é um recobrimento regular de X.*

Definição 1.1.33 *Sejam X um espaço e G um grupo de automorfismos de X. Dizemos que a ação de G em X (dada por $g.x := g(x)$) é* ***propriamente descontínua*** *se para todo ponto $x \in X$, existe uma vizinhança U de x tal que $g.U \bigcap U = \emptyset$ para todo $g \in G, g \neq e$ (elemento neutro de G).*

Proposição 1.1.16 *([28], p.165) Seja $(\widetilde{X}, p)$ um espaço de recobrimento de X. Se $x \in X$, então a fibra $p^{-1}(x)$ é um subconjunto discreto de $\widetilde{X}$, isto é, todos os pontos de $p^{-1}(x)$ são isolados.*

Proposição 1.1.17 *([28], p.165) Se $(\widetilde{X}, p)$ é um recobrimento regular, então a ação de $A(\widetilde{X}, p)$ em $\widetilde{X}$ é propriamente descontínua.*

Observação 1.1.13 *Se $\widetilde{X}$ é um recobrimento universal de X então pelo Corolário 1.1.8, $A(\widetilde{X}, p) \cong \pi_1(X, x)$ e assim podemos ver $\widetilde{X}$ como um $G = \pi_1(X)$-espaço e ainda esta ação é livre e propriamente descontínua por Proposição 1.1.12 e proposição anterior.*

Proposição 1.1.18 *([28], Proposição 8.2, p.165) Sejam X um espaço conexo e localmente conexo por caminhos e G um grupo de homeomorfismos de X. Considere $p : X \longrightarrow X/G$, $x \longrightarrow p(x) := G(x)$ (a órbita de x), a projeção natural de X no espaço quociente X/G. Se a G-ação é propriamente descontínua então (X, p) é um recobrimento regular de X/G e $G = A(X, p)$.*

Teorema 1.1.14 ([28], Teorema 10.2, p.175) *Seja X um espaço topológico conexo, localmente conexo por caminhos e semi-localmente-simplesmente conexo então X possui recobrimento universal.*

1.2 Orientação para Variedades

Em toda esta seção X denotará uma variedade n-dimensional. Tal seção tem como principal objetivo estudar o conceito de orientação em variedades primeiramente num sentido local, isto é, em um ponto $x \in X$ escolhendo um gerador para o módulo $H_n(X, X - \{x\}) = H_n(X, X - \{x\}, R)$ e depois estendida a um conceito global, onde a orientação é dada por uma classe de equivalência do sistema de R-orientações. Quando conveniente omitiremos o anel coeficiente R (comutativo com unidade) na notação dos módulos de (co)homologia. As referências mais usadas foram [17] e [19].

Definição 1.2.1 ([19], p.231) *Seja $n \in \mathbb{N}^*$. Uma* ***variedade n-dimensional*** *X é um espaço de Hausdorff tal que em cada ponto, existe uma vizinhança aberta em X homeomorfa ao disco aberto n-dimensional U^n do $\mathbb{R}^n$, onde $U^n := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n; |x| < 1\}$. Chamamos uma variedade 2-dimensional de* ***superfície****. Uma variedade é* ***fechada*** *se é compacta e sem bordo.*

Exemplo 1.2.1 1) $\mathbb{R}^n$ *é uma variedade n-dimensional.*
2) *A n-esfera $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; |x| = 1\}$ é uma variedade n-dimensional.*
3) *Se X é uma variedade n-dimensional então qualquer $A \subset X$, A aberto, é também uma variedade n-dimensional.*
4) *Se X é uma variedade m-dimensional e Y é uma variedade n-dimensional então $X \times Y$ é uma variedade $(n + m)$-dimensional.*

Exemplo 1.2.2 *São exemplos de superfícies: o toro $T^2 = S^1 \times S^1$, a esfera $S^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 = 1\}$ e a garrafa de Klein (que pode ser definida a partir de um quadrado com os lados convenientemente identificados como na figura 1.3)*

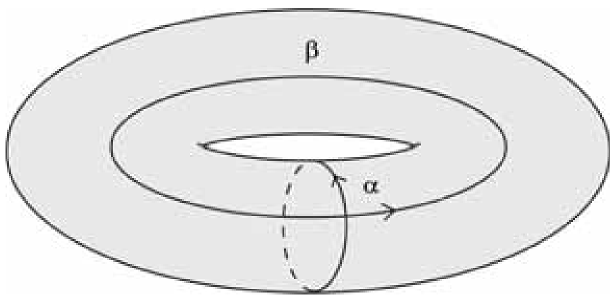

Figura 1.1: Toro

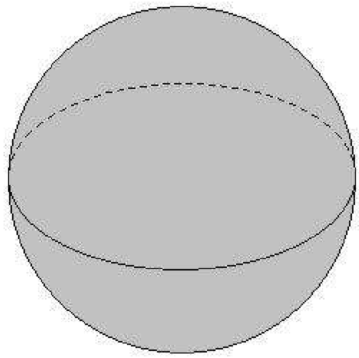

Figura 1.2: Esfera

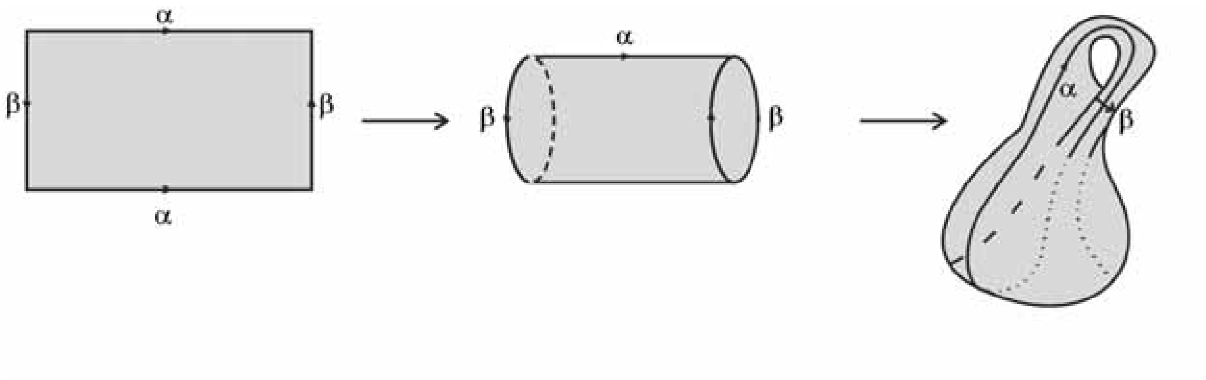

Figura 1.3: Garrafa de Klein

É interessante observar que a Garrafa de Klein é a soma conexa de dois planos projetivos ([28], Exemplo 4.3, p.9). De fato temos:

Teorema 1.2.1 (*[28], I.5.1*)(*Teorema de Classificação das Superfícies Compactas*) *Qualquer superfície conexa e compacta é homeomorfa a esfera S^2 ou a uma soma conexa de toros, ou a uma soma conexa de planos projetivos.*

O resultado seguinte será útil na definição de orientação de variedades.

Lema 1.2.1 (*[17], Lema 22.1, p.157*) *Dada uma variedade n-dimensional X, e U um aberto de X homeomorfo a uma bola unitária com $x \in U \subset X$, então* $H_i(X, X-\{x\}; R) \cong H_i(U, U-\{x\}; R) \cong H_i(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{x\}; R) \cong \begin{cases} R, & \textit{se} \quad i = n \\ 0, & \textit{caso contrário.} \end{cases}$

Demonstração: O primeiro isomorfismo segue do fato que a aplicação induzida da inclusão $(U, U-\{x\}) \longrightarrow (X, X-\{x\})$ é um isomorfismo pelo Teorema de excisão (considerando $Z = U^c \subset A = X - \{x\} \subset X$). O segundo isomorfismo segue do Exemplo 1.1.3, visto que U é homeomorfo ao $\mathbb{R}^n$. ∎

Observação 1.2.1 *Consideremos o caso especial* $n = 2$ *e* $R = \mathbb{Z}$. *Então existem dois possíveis elementos de* $H_2(X, X - \{x\}) \cong H_1(U - \{x\}) \cong H_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ *que podem gerar este grupo cíclico infinito (ou* $\mathbb{Z}$*-módulo), a saber, aqueles representados por laços que dão uma única volta em torno do ponto* x*, em direções opostas. Escolher um destes geradores corresponde, intuitivamente a "escolher uma orientação em torno do ponto* x*".*

Definição 1.2.2 *([17], p.158) Uma* R-***orientação local de*** X *em um ponto* $x \in X$ *é um gerador (escolhido) do* R*-módulo* $H_n(X, X - \{x\}; R) \cong R$ *(que por conveniência denotaremos simplesmente por* $H_n(X, X - \{x\})$*) onde um gerador de* R *é um elemento* u *tal que* $R.u = R$*. Como* R *tem unidade isto é equivalente a dizer que* u *é invertivel.*

Quando $R = \mathbb{Z}$ *existem duas possibilidades para* u *que correspondem a* 1 *e a* -1*. Quando* $R = \mathbb{Z}_2$ *temos uma única possibilidade para* u *que corresponde a* $\overline{1}$*.*

Para estabelecer a noção de uma orientação global (em uma variedade X), nossa intuição nos diz que devemos escolher orientações locais de X em cada ponto, de modo que estas orientações locais sejam "compatíveis" ou que se "colem". Isto pode não necessariamente ser possível. Entretanto nós podemos sempre obter "orientações compatíveis" em uma vizinhança de um dado ponto x. Isto é o que nos mostra os lemas seguintes.

Lema 1.2.2 *(Lema da Continuação)([17], Lema 22.2, p.158) Dado um elemento* $\alpha_x \in H_n(X, X - \{x\}) \cong R$ *existe uma vizinhança aberta* U *de* x *e um elemento* $\alpha_U \in H_n(X, X - U)$ *tal que* $\alpha_x = j_x^U(\alpha_U)$ *onde* $j_x^U : H_n(X, X - U) \longrightarrow H_n(X, X - \{x\})$ *é o homomorfismo canônico induzido pela inclusão.*

Demonstração: Seja a um n-ciclo relativo representando α_x. Então o suporte $|\partial a|$ de ∂a é um subespaço compacto de X, contido em $X - \{x\}$ (recordemos que o suporte de um n-simplexo singular σ é a imagem $Im\sigma = \sigma(\triangle^n)$). Assim $U = X - |\partial a|$ é uma vizinhança aberta de x. Tomemos $\alpha_U \in H_n(X, X - U)$, a classe de homologia de a relativa a $X - U$, assim $j_x^U(\alpha_U) = \alpha_x$. ■

O lema anterior nos diz que podemos obter elementos $\alpha_y \in H_n(X, X - \{y\})$ para y próximo de x que estão relacionados com α_x por tomar $\alpha_y = j_y^U(\alpha_U)$ onde α_U é tal que $j_x^U(\alpha_U) = \alpha_x$. Nós consideramos esses elementos $y \in U$ como "compatíveis" ou "correspondentes" porque eles vêm de um mesmo elemento $\alpha_U \in H_n(X, X - U)$. Chamamos α_U uma "continuação" de α_x em U.

Lema 1.2.3 *(Lema da Coerência) ([17], Lema 22.3, p.158) Se* α_x *gera* $H_n(X, X - \{x\})$ *então* U *e* α_U *podem ser escolhidos de modo que* α_y *gera* $H_n(X, X - \{y\})$ *para todo* $y \in U$*.*

Isto segue de um resultado mais forte:

Lema 1.2.4 (*Lema do Localmente constante*)(*[17], Lema 22.4, p.158*) *Toda vizinhança W de x contém uma vizinhança U de x tal que para todo $y \in U$, $j_y^U : H_n(X, X-U) \longrightarrow H_n(X, X-\{y\})$ é um isomorfismo. (Assim α_x tem uma única continuação em U).*

Demonstração: Seja V uma vizinhança coordenada de x, contida em W (V homeomorfo a $\mathbb{R}^n$, portanto contráctil) e seja $U \subset V$ um aberto menor correspondente a uma bola aberta de $\mathbb{R}^n$, de raio < 1. Temos então, o diagrama comutativo, para cada $y \in U$:

$$\begin{tikzcd}
H_n(X, X-U) \arrow[d, "j_y^U"] & H_n(V, V-U) \arrow[l, "\cong"'] \arrow[r, "\cong"] \arrow[d, "i_*"] & \widetilde{H}_{n-1}(V-U) \arrow[d, "j_*"'] \\
H_n(X, X-\{y\}) & H_n(V, V-\{y\}) \arrow[l, "\cong"'] \arrow[r, "\cong"] & \widetilde{H}_{n-1}(V-\{y\})
\end{tikzcd}$$

onde os isomorfismos horizontais na esquerda são obtidos do Teorema de Excisão (Teorema 1.1.7) (para $Z = X-V, A = X-U$ e para $Z = X-V$, $A = X-\{y\}$) e os na direita vem do homomorfismo conectante e do fato que V é contráctil.

Ainda, como a inclusão $i : V-U \longrightarrow V-\{y\}$ é uma equivalência de homotopia, i_* e j_* são também isomorfismos e, então, j_y^U é um isomorfismo para cada $y \in U$. Para o Lema da Coerência, note que se α_x é um gerador de $H_n(X, X-\{x\})$ do isomorfismo $j_x^U : H_n(X, X-U) \longrightarrow H_n(X, X-\{x\}) \cong R$ segue que o elemento $\alpha_U \in H_n(X, X-U)$ tal que $j_x^U(\alpha_U) = \alpha_x$ (dado pelo Lema da Continuação) é um gerador de $H_n(X, X-U)$ como R-módulo. Daí, $\alpha_y = j_y^U(\alpha_U)$ é um gerador de $H_n(X, X-\{y\})$ visto que j_y^U são isomorfismos. ∎

Definição 1.2.3 *Dado um subespaço $U \subset X$, um elemento $\alpha_U \in H_n(X, X-U)$ tal que $j_y^U(\alpha_U)$ gera $H_n(X, X-\{y\})$ para cada $y \in U$ será chamado uma **R-orientação local de X ao longo de** U.*

Notação: Sejam $V \subset U$ subespaços de X, e $(X, X-U) \xrightarrow{i_1} (X, X-V)$ a aplicação. Denotamos o homomorfismo induzido por $H_n(X, X-U) \xrightarrow{j_V^U} H_n(X, X-V)$. Note que, se α_U é uma R-orientação ao longo de U, então $j_V^U(\alpha_U)$ é uma R-orientação ao longo de V, uma vez que $j_y^V(j_V^U(\alpha_U)) = j_y^U(\alpha_U)$ para cada $y \in V$.

Definição 1.2.4 (*[17], p.160*)(*R-orientação global de X*) *Seja X uma n-variedade, $n \geq 1$. Suponhamos dados:*
(i) Uma família de subespaços abertos U_i que cobrem X.
(ii) Para cada i, uma R-orientação local $\alpha_i \in H_n(X, X-U_i)$ de X ao longo de U_i.
*Chamamos isto um **sistema de R-orientações** se vale a seguinte condição de compatibilidade: Para qualquer $x \in X$, se $x \in U_i \cap U_j$, então*
(iii) $j_x^{U_i}(\alpha_i) = j_x^{U_j}(\alpha_j)$ em $H_n(X, X-\{x\})$.
Neste caso uma R-orientação local é definida sem ambiguidade em cada ponto x por

(iv) $\alpha_x = j_x^{U_i}(\alpha_i)$, $x \in U_i$.
Dado outro sistema de R-orientações (V_k, β_k), *dizemos que ele define a mesma R-orientação se:*
(v) $\alpha_x = \beta_x$ *para todo* $x \in X$.
Então, uma R-orientação global de X *é, por definição, uma classe de equivalência de sistemas de R-orientações, a relação de equivalência sendo dada em* (v).
Dizemos que X *é* ***R-orientável*** *(respectivamente, orientável) se existe um sistema de R-orientações (respectivamente, um sistema de* $\mathbb{Z}$*-orientações) para* X.

Observação 1.2.2 *([19], p.234) Podemos dizer também que uma orientação de uma n-variedade* X *é uma função* $x \longmapsto \alpha_x$ *que a cada* $x \in X$ *associa uma orientação local* α_x, *isto é, um gerador* $\alpha_x \in H_n(X, X - \{x\})$ *que satisfaz uma condição de "compatibilidade local" como a descrita anteriormente.*

Observação 1.2.3 *Quando* X *é uma variedade diferenciável, o conceito de orientação para variedades no sentido da Topologia Diferencial, é equivalente ao conceito de orientação dado na definição anterior. Uma interessante abordagem dessa relação é dada em [32]. Um estudo de variedades diferenciáveis orientáveis é dado em ([25], Capítulo 6).*

Exemplo 1.2.3 $X = S^n$ *é R-orientável pois para todo* $x \in S^n$, $H_n(S^n) \longrightarrow H_n(S^n, S^n - \{x\})$ *é um isomorfismo visto que* $S^n - \{x\}$ *é contráctil. Tomando o recobrimento de* X *consistindo de um único conjunto* $U = X$ *e a R-orientação (local) ao longo de* $U = X$ *dada por* $\alpha_X = \alpha$, *onde* α *um gerador de* $H_n(S^n) \cong R$, *obtemos uma R-orientação para* S^n. *As orientações locais serão definidas por* $\alpha_y := j_y^X(\alpha_X)$ *para todo* $y \in X$.

Proposição 1.2.1 *([17], Proposição 22.7, p.161) (i) Uma subvariedade aberta* V *de uma variedade R-orientável* X *é R-orientável.*
(ii) X *é R-orientável se e somente se as suas componentes conexas o são.*

Exemplo 1.2.4 $X = \mathbb{R}^n$ *é R-orientável visto que* $\mathbb{R}^n$ *é homeomorfo a* S^n *menos um ponto, que é um subconjunto aberto de* S^n *e* S^n *é orientável (Exemplo 1.2.3).*

Proposição 1.2.2 *([17], Proposição 22.8, p.161) Seja* X *uma variedade conexa. Então duas R-orientações de* X *que coincidem em um ponto são iguais.*

Corolário 1.2.1 *([17], Corolário 22.9, p.161) Uma variedade orientável conexa tem exatamente duas orientações distintas.*

Proposição 1.2.3 *Toda variedade tem uma única* $\mathbb{Z}_2$*-orientação.*

Demonstração: Para cada x, α_x deve ser o único elemento não nulo de $H_n(X, X-\{x\}; \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$. Pelo Lema da continuação, podemos escolher uma vizinhança aberta U_x de x em que α_x tem uma única continuação. Claramente estas continuações são compatíveis.

Observação 1.2.4 *([17], Observação 22.13, p.162 ou [19], p.235) Na verdade pode-se mostrar que se X é orientável, então X é R-orientável para todo anel de coeficientes R (comutativo com unidade). Isto segue do teorema dos coeficientes universais.*

Teorema 1.2.2 *([17], Teorema 22.14, p.162; [19], Proposição 3.25, p.234) Seja X uma variedade conexa não orientável. Então existe um recobrimento duplo conexo $(\widetilde{X}, p)$ de X tal que $\widetilde{X}$ é orientável.*

Demonstração: Nos deteremos aqui apenas em exibir o espaço de recobrimento. Tome $\widetilde{X} = \{\alpha_x\ ;\ x \in X \text{ e } \alpha_x$ é uma orientação local de X, isto é, um gerador de $H_n(X, X-\{x\}) \cong \mathbb{Z}\}$. A aplicação $\alpha_x \longmapsto x$ define claramente uma sobrejeção $\widetilde{X} \longrightarrow X$. Temos que dar uma topologia a $\widetilde{X}$, de modo a tornar essa aplicação uma projeção de espaço de recobrimento. Dada uma bola aberta $B \subset \mathbb{R}^n \subset X$, de raio finito e um gerador $\alpha_B \in H_n(X, X-B)$, seja $U(\alpha_B) = \{\alpha_x \in \widetilde{X}; x \in B \text{ e } j_x^B(\alpha_B) = \alpha_x\}$ onde $j_x^B : H_n(X, X-B) \longrightarrow H_n(X, X-\{x\})$. Então $U(\alpha_B)$ forma uma base para uma topologia em $\widetilde{X}$ e com essa topologia a aplicação $\widetilde{X} \longrightarrow X$; $\alpha_x \longmapsto x$ é um espaço de recobrimento duplo. A variedade $\widetilde{X}$ será orientável pois cada $\alpha_x \in \widetilde{X}$ tem uma orientação local canônica dada pelo elemento $\widetilde{\alpha}_x \in H_n(\widetilde{X}, \widetilde{X}-\{\alpha_x\})$ que corresponde a α_x via os isomorfismos

$$H_n(\widetilde{X}, \widetilde{X}-\{\alpha_x\}) \simeq H_n(U(\alpha_B), U(\alpha_B)-\{\alpha_x\}) \simeq H_n(B, B-\{x\})$$

e por construção estas orientações locais satisfazem a condição de "compatibilidade" necessária para definir uma orientação global. ■

Exemplo 1.2.5 *Considere $X = P^2 = S^2/\sim\ = \{[x];\ x \in S^2\}$ onde $[x] = \{-x, x\}$ o plano projetivo. Temos que X não é orientável mas possui o recobrimento duplo orientável conexo (S^2, p); $p(x) = [x]$.*

Proposição 1.2.4 *Seja X uma n-variedade. Se X é simplesmente conexa, ou mais geralmente se $\pi_1(X, x)$ não tem subgrupo de índice dois então X é orientável.*

Demonstração: Suponhamos X não orientável, então pelo teorema anterior existe um recobrimento duplo $(\widetilde{X}, p)$ de X tal que $\widetilde{X}$ é conexo e orientável. Como o número de folhas do recobrimento conexo $(\widetilde{X}, p)$ de X é igual ao índice do subgrupo $p_\sharp(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}))$ em $\pi_1(X, x)$ (Proposição 1.1.13) segue que $p_\sharp(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}))$ é um subgrupo de $\pi_1(X, x)$ de índice dois, o que contradiz a hipótese. Portanto X é orientável. ■

Observação 1.2.5 *É claro que quando X é orientável, X também tem um recobrimento duplo $\widetilde{X}$ orientável (tome $\widetilde{X} = X \times \{1\} \cup \{1\} \times X$), ([25], Exemplo 14, p.196) porém esse recobrimento não é conexo. De fato, podemos também de forma similar construir, quando X é uma variedade conexa orientável, o recobrimento $\widetilde{X}$ de X dado na demonstração do teorema anterior, mas neste caso $\widetilde{X}$ também não será conexo pois "X é uma variedade conexa, orientável se e somente se o recobrimento duplo $\widetilde{X}$ tem duas componentes ([19], Proposição 3.25, p.234)".*

A orientabilidade de uma variedade fechada é refletida na estrutura de sua homologia, de acordo com o seguinte resultado.

Teorema 1.2.3 *([19], Teorema 3.26, p.236) Seja uma variedade n-dimensional X conexa e fechada. Então:*
(i) Se X é R-orientável, a aplicação $j_x^X : H_n(X) \longrightarrow H_n(X, X - \{x\}) \cong R$ é um isomorfismo para todo $x \in X$, e existe um elemento $\alpha_X \in H_n(X)$ tal que $j_x^X(\alpha_X) = \alpha_x$, onde α_x é um gerador de $H_n(X, X - \{x\})$ (orientação local em x).
(ii) Se X não é R-orientável, a aplicação $H_n(X) \longrightarrow H_n(X, X - \{x\}) \cong R$ é injetiva com imagem $\{r \in R;\ 2r = 0\}$ para todo $x \in X$.
(iii) $H_i(X) = 0$ para $i > n$.

Corolário 1.2.2 *([19], p.236) Se X é uma n-variedade orientável então $H_n(X, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$. Se X é não orientável então $H_n(X, \mathbb{Z}) = 0$.*

Definição 1.2.5 *Um elemento α_X de $H_n(X)$ cuja imagem em $H_n(X, X - \{x\})$ é um gerador para todo x é chamado uma* ***classe fundamental*** *para X com coeficientes em R.*

Pelo teorema anterior, uma classe fundamental existe se X é fechada e R-orientável. (Tome $x \in X$, $\alpha_x \in H_n(X, X - \{x\})$ um gerador (a R-orientação local em x da R-orientação inicialmente fixada), $\alpha_X \in H_n(X)$ tal que $j_x^X(\alpha_X) = \alpha_x$. Logo α_X é gerador. Daí, $\alpha_y := j_y^X(\alpha_X)$ é um gerador de $H_n(X, X - \{y\})$ visto que j_y^X é um isomorfismo, e será compatível com a R-orientação escolhida). Se X é uma variedade n-dimensional orientável não fechada, seria interessante se existisse também uma classe fundamental $\alpha_X \in H_n(X)$ tal que para qualquer $x \in X$, $j_x^X(\alpha_X) = \alpha_x$. Mas isto pode não ser verdade se X não é compacta ([29], p.202 e Proposição 6.1, p.62). Porém o seguinte resultado é verdadeiro:

Teorema 1.2.4 *Seja X uma variedade n-dimensional R-orientável. Então para cada conjunto compacto $K \subset X$ existe uma única classe de homologia $\alpha_K \in H_n(X, X - K)$ tal que $j_x^K(\alpha_K) = \alpha_x$ para cada $x \in K$.*

O resultado anterior, é importante na definição do isomorfismo de dualidade de Poincaré. A demonstração desse resultado bem como do Teorema 1.2.3 é consequência de um resultado técnico mais geral dado em [19] para variedades quaisquer, não necessariamente orientável (vide Lema 3.27, p.236). Em [17] ele é obtido como consequência da Observação 22.21, p.164 e Teorema 22.24, p.166. Uma prova do Teorema 1.2.4 para o caso em que $R = \mathbb{Z}$ é dada em [29](IX, Teorema 2.1, p.202).

Corolário 1.2.3 *([19], Corolário 3.28, p.238) Se uma n-variedade X é conexa e fechada, o subgrupo de torção de $H_{n-1}(X, \mathbb{Z})$ é trivial se X é orientável e $\mathbb{Z}_2$ se X é não orientável.*

Com relação à homologia de variedades não compactas temos o seguinte resultado:

Proposição 1.2.5 *([19], Proposição 3.29, p.239) Se uma n-variedade X é conexa e não compacta, então $H_i(X) = 0$ para $i \geq n$.*

Capítulo

2

Cohomologia com suporte compacto e dualidade de Poincaré

O objetivo deste capítulo é provar um dos resultados mais antigos da topologia algébrica, o famoso teorema de Dualidade de Poincaré, que no nosso caso será mostrado para variedades R-orientáveis compactas ou não, ou seja, se X é uma variedade R-orientável de dimensão n, então existe um isomorfismo entre a k-ésima homologia e a $(n-k)$-ésima cohomologia de X, para todo k. O método da prova para a dualidade de Poincaré foi primeiramente escrito por J. Milnor em 1964 (como mencionado em [29]). Para tanto usaremos a cohomologia com suporte compacto que por sua vez é definida em termos de limites diretos.

2.1 Cohomologia com suporte compacto

Para o Teorema de dualidade de Poincaré para variedades (bem como outros Teoremas de dualidade), os módulos de (co)homologia que aparecem não são, em geral, os módulos de (co)homologia singular mas outros obtidos desses por "passar o limite". Esse processo que envolve limite é puramente algébrico e é útil em outros contextos. Apresentamos a seguir um estudo desse tópico. A referência usada é ([17], Capítulo 25, p.208). Em ([19], p.243) isso é também abordado.

2.1.1 Limite Direto

Definição 2.1.1 (*Conjunto Direto*) *Um* ***conjunto direto*** *é um conjunto I com uma relação de ordem parcial $i \leq i'$ definida para certos pares de elementos de I, tal que para quaisquer $i, i' \in I$, existe um $i'' \in I$ tal que $i \leq i''$ e $i' \leq i''$.*

Exemplo 2.1.1 *Sejam X um espaço topológico, e $I = \{K \subset X;\ K$ é compacto$\}$. Defina $K \leq L$ por significar que $K \subseteq L$. Então para quaisquer K, L em I, o conjunto $K \cup L$ cumpre* *a condição de conjunto direto pois $K \subseteq K \cup L$ e $L \subseteq K \cup L$, assim $K \leq K \cup L$ e $L \leq K \cup L$. Assim I é um conjunto direto com a relação $\leq$.*

Exemplo 2.1.2 *Seja I o conjunto dos inteiros não nulos e defina $i \leq i'$ se, e somente se, $i|i'$ (i divide i'). Então para quaisquer i, i' o mínimo múltiplo comum satisfaz a condição para que I seja conjunto direto pois se $d = mmc(i, i')$ então $i|d$ e $i'|d$. Assim $i \leq d$ e $i' \leq d$.*

Definição 2.1.2 *Suponhamos que $(M_i)_{i \in I}$ é uma família de R-módulos, indexados pelo conjunto direto I, e que para $i \leq i'$ tenhamos um homomorfismo*

$$\phi_{i',i} : M_i \longrightarrow M_{i'}$$

*tal que $\phi_{i'',i'} \circ \phi_{i',i} = \phi_{i'',i}$ se $i \leq i' \leq i''$ e $\phi_{i,i} = id_{M_i}$. Um tal conjunto (composto de uma família de módulos e homomorfismos indexados no conjunto direto I) é chamado **sistema direto de módulos** e será denotado por $(M_i, \phi_{i',i})_{i \in I}$ ou simplesmente por $(M_i, \phi_{i',i})$.*

A partir desse sistema direto de módulos podemos definir um módulo, denominado limite direto, denotado por $\varinjlim M_i$, da seguinte forma:

Definição 2.1.3 *Um **limite direto (ou limite indutivo)** de um sistema direto $(M_i, \phi_{i',i})$ é um módulo M junto com uma família de homomorfismos $\phi_i : M_i \longrightarrow M$ indexados por I tais que $\phi_{i'} \circ \phi_{i',i} = \phi_i$ se $i \leq i'$ e tal que esta coleção é universal com relação a seguinte propriedade (de diagrama universal): Para qualquer módulo N e qualquer família de homomorfismos $\psi_i : M_i \longrightarrow N$ satisfazendo $\psi_{i'} \circ \phi_{i',i} = \psi_i$, se $i \leq i'$, existe um único homomorfismo $\psi : M \longrightarrow N$ tal que $\psi_i = \psi \circ \phi_i$ $(*)$ para todo i.*

$$\begin{tikzcd} & & N \\ M_i \arrow[r, "\phi_{i',i}"] \arrow[urr, "\psi_i"] & M_{i'} \arrow[r, "\phi_{i'}"] \arrow[ur, "\psi_{i'}"] & M \arrow[u, "\psi"'] \end{tikzcd}$$

Notação: Quando for conveniente, denotaremos o limite direto de um sistema direto $(M_i, \phi_{i',i})_{i \in I}$ por $(M, \phi_i)_{i \in I}$ ou simplesmente por M.

Proposição 2.1.1 *Quaisquer dois limites diretos M, N de um mesmo sistema direto são isomorfos.*

Demonstração: Suponhamos que (M, ϕ_i) e (N, ψ_i) sejam limites diretos de um mesmo sistema direto $(M_i, \phi_{i',i})_{i \in I}$. Como M é limite direto, por definição, temos que para o módulo N e a família de homomorfismos $\psi_i : M_i \longrightarrow N$ satisfazendo $\psi_{i'} \circ \phi_{i',i} = \psi_i$ se $i \leq i'$, existe um único homomorfismo $\psi : M \longrightarrow N$ tal que $\psi_i = \psi \circ \phi_i$ $(*')$, isto é, o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "\psi"] & & N \\ & M_i \arrow[ul, "\phi_i"] \arrow[ur, "\psi_i"'] & \end{tikzcd}$$

Agora como N é um limite direto, para o módulo M e a família de homomorfismos $\phi_i : M_i \longrightarrow M$ existe um único homomorfismo $\psi' : N \longrightarrow M$ tal que $\phi_i = \psi' \circ \psi_i$ $(*'')$, isto é, o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{tikzcd} N \arrow[rr, "\psi'"] & & M \\ & M_i \arrow[ul, "\psi_i"] \arrow[ur, "\phi_i"'] & \end{tikzcd}$$

Novamente, usando que (N, ψ_i) é um limite direto de $(M_i, \phi_{i',i})$ e considerando o módulo N e a família $\psi_i : M_i \longrightarrow N$, segue que existe um único homomorfismo $l : N \longrightarrow N$ tal que $\psi_i = l \circ \psi_i$ $(**)$. Como id_N satisfaz $\psi_i = id_N \circ \psi_i$, segue que $l = id_N$, onde id_N é a aplicação identidade.

$$\begin{tikzcd} N \arrow[rr, "l"] & & N \\ & M_i \arrow[ul, "\psi_i"] \arrow[ur, "\psi_i"'] & \end{tikzcd}$$

Mas $(\psi \circ \psi') \circ \psi_i = \psi \circ (\psi' \circ \psi_i) \overset{(*'')}{=} \psi \circ \phi_i \overset{(*')}{=} \psi_i$; pela unicidade do homomorfismo $(**)$ temos $\psi \circ \psi' = id_N$. Analogamente, $\psi' \circ \psi = id_M$.
De $\psi \circ \psi' = id_N$ obtemos que ψ é um monomorfismo, e de $\psi' \circ \psi = id_M$ segue que ψ é um epimorfismo. Nessas condições, ψ é um isomorfismo. ■

Segue da proposição anterior que existe um único limite direto a menos de isomorfismo. Assim podemos falar sobre "o" limite direto M de um sistema direto $(M_i, \phi_{i',i})$ que denotaremos por $\varinjlim M_i$. O único homomorfismo ψ (existente para cada N e família $\psi_i : M_i \longrightarrow N$) também será denotado por $\varinjlim \psi_i$.

Proposição 2.1.2 *O limite direto sempre existe, isto é, dado um sistema direto* $(M_i, \phi_{i',i})$*, existe* (M, ϕ_i) *que é um limite direto desse sistema.*

Demonstração: Seja M^+ a soma direta de todos os M_i, com $\phi_i^+ : M_i \longrightarrow M^+$ o monomorfismo que leva cada $x_i \in M_i$ no vetor cuja i-ésima componente é x_i e as outras componentes são zero. Isto é,

$$\phi_i^+ : M_i \longrightarrow M^+$$
$$x_i \longmapsto \phi_i^+(x_i) : I \longrightarrow \bigcup M_i$$
$$j \longmapsto \phi_i^+(x_i)(j) = \begin{cases} x_j & \text{se} \quad i = j \\ 0 & \text{se} \quad i \neq j \end{cases}$$

Agora seja H o submódulo gerado por todos os elementos $(\phi_{i'}^+ \circ \phi_{i',i})(x_i) - \phi_i^+(x_i)$ para todos os pares $i \leq i'$ e todo $x_i \in M_i$. Sejam $M = M^+/H$ o módulo quociente de M^+ por H, $\pi : M^+ \longrightarrow M$ o homomorfismo quociente, isto é,

$$\pi : M^+ \longrightarrow M = M^+/H$$

$$x \longmapsto x + H$$

e $\phi_i := \pi \circ \phi_i^+$. Então (M, ϕ_i) é um limite direto pois satisfaz as condições exigidas para tal. ■

Observação 2.1.1 (i) *Da definição de ϕ_i^+ podemos considerá-la como sendo a inclusão natural. Neste caso, $H = \langle \phi_{i',i}(x_i) - x_i,$ para $i \leq i'$ e $x_i \in M_i \rangle$ o módulo gerado pelos elementos $\phi_{i',i}(x_i) - x_i$, e pela Proposição 2.1.2, $M = M^+/\langle \phi_{i',i}(x_i) - x_i \rangle$, com a família de homomorfismos $\phi_i : x_i \longmapsto x_i + H$, é um limite direto.*
(ii) *Podemos falar em sistema direto de uma família $\{G_i\}_{i \in I}$ de grupos abelianos por considerar cada G_i como um $\mathbb{Z}$-módulo.*

Proposição 2.1.3 *Se $(M_i, \phi_{i',i})$ é um sistema direto e (M, ϕ_i) é o limite direto desse sistema então $M = \bigcup_i \phi_i(M_i)$.*

Demonstração: Seja $M' := \bigcup_i \phi_i(M_i)$, queremos mostrar que $M' = M$ onde (M, ϕ_i) é um limite direto. Considere $\psi_i : M_i \longrightarrow M'$; $\quad x_i \longrightarrow \phi_i(x_i)$. Ou seja, ψ_i é o homomorfismo ϕ_i agora considerado em M'. Então o par (M', ψ_i) é também um limite direto de $(M_i, (\phi_{i',i}))$. Sejam $\psi : M \longrightarrow M'$ e $\phi : M' \longrightarrow M$ os únicos homomorfismos obtidos da propriedade de diagrama universal. Então, como visto na Proposição 2.1.1, ϕ e ψ serão isomorfismos, com $\phi = (\psi)^{-1}$, e uma vez que a inclusão satisfaz a propriedade de diagrama universal temos que $M = M'$.
Notemos que M' é de fato um módulo pois se $y = \phi_i(x_i)$ e $z = \phi_{i'}(x_{i'})$ são dois elementos de M', pela condição do conjunto direto temos que para $i, i' \in I$, existe $k \in I$ tal que $i \leq k$ e $i' \leq k$. Daí $y = \phi_i(x_i) = \phi_k(\phi_{k,i}(x_i))$ e $z = \phi_{i'}(x_{i'}) = \phi_k(\phi_{k,i'}(x_{i'}))$ são elementos de $\phi_k(M_k)$ e consequentemente, $y + z \in \phi_k(M_k) \subset M'$. Além disso todas as demais condições da definição de módulo são satisfeitas. ■

Corolário 2.1.1 *Suponha que M_i são todos submódulos de algum módulo, e que $i' \leq i$ significa que M_i é um submódulo de $M_{i'}$, com $\phi_{i',i}$ a inclusão. Então como limite direto, $\varinjlim M_i$, podemos tomar a união $M := \bigcup_i M_i$ (que é um submódulo pela condição de conjunto direto), com ϕ_i a inclusão.*

Observação 2.1.2 *Seja $(M_i, \phi_{i',i})$ um sistema direto. Se o conjunto direto I desse sistema tem um elemento máximo m, tal que $i \leq m$ para todo $i \in I$ então o homomorfismo*

$$\phi_m : M_m \longrightarrow \varinjlim M_i$$

é um isomorfismo.

Lema 2.1.1 (*Aditividade*) *Seja $(M_i, \phi_{i',i})$ um sistema direto e suponhamos que para cada i temos uma decomposição em soma direta $M_i = N_i \oplus P_i$, tal que para $i \leq i'$, o homomorfismo $\phi_{i',i}$ se decompõe da seguinte forma: $\phi_{i',i} = \psi_{i',i} + \rho_{i',i}$ (onde $\psi_{i',i} : N_i \longrightarrow N_{i'}$ e $\rho_{i',i} : P_i \longrightarrow P_{i'}$). Sejam $(N, \psi_i) = \varinjlim N_i$ (e homomorfismo $\psi_{i',i}$), $(P, \rho_i) = \varinjlim P_i$ (e homomorfismo $\rho_{i',i}$), de modo que temos homomorfismos induzidos $\psi : N \longrightarrow M$, $\rho : P \longrightarrow M$ tais que $\psi \circ \psi_i = \phi_i|_{N_i}$, $\rho \circ \rho_i = \phi_i|_{P_i}$. Então $(\psi \oplus \rho) : N \oplus P \longrightarrow M$ é um isomorfismo. Assim temos que o limite da soma é a soma dos limites.*

Demonstração: Observe que a existência do homomorfismo $\psi : N \longrightarrow M$ tal que $\psi \circ \psi_i = \phi_i|_{N_i}$ segue da definição de $N = \varinjlim N_i$, considerando o módulo $M = \varinjlim M_i$ e a família $\phi_i|_{N_i} : N_i \longrightarrow M$. Similarmente para $\rho : P \longrightarrow M$. Em vista da Proposição 2.1.3 e do fato que I é conjunto direto, um elemento $a \in N \oplus P$ é da forma $a = (\psi_i(y_i), \rho_i(z_i))$ para algum i, e $y_i \in N_i, z_i \in P_i$. Assim

$$(\psi \oplus \rho) : N \oplus P \longrightarrow M$$

$$(\psi_i(y_i), \rho_i(z_i)) \longmapsto (\psi(\psi_i(y_i)), \rho(\rho_i(z_i))) = \phi_i|_{N_i}(y_i) + \phi_i|_{P_i}(z_i) = \phi_i(y_i + z_i)$$

Agora dado $x \in M$, pela Proposição 2.1.3 existe $i \in I$ e $x_i \in M_i$ tal que $x = \phi_i(x_i)$. Como $M_i = N_i \oplus P_i$ então $x_i = y_i + z_i$ onde $y_i \in N_i$ e $z_i \in P_i$, defina

$$\theta : M \longrightarrow N \oplus P$$

$$x \longmapsto \theta(x) = (\psi_i(y_i), \rho_i(z_i))$$

Então: • θ é homomorfismo pois se $x = \phi_i(y_i + z_i)$ e $t = \phi_i(y_i' + z_i')$, aqui podemos tomar um mesmo índice para x e t pois I é conjunto direto, então
$*$ $\theta(x+t) = \theta(\phi_i(y_i + z_i) + \phi_i(y_i' + z_i')) = \theta(\phi_i((y_i + y_i') + (z_i + z_i'))) = (\psi_i(y_i + y_i'), \rho_i(z_i + z_i')) = (\psi_i(y_i) + \psi_i(y_i'), \rho_i(z_i) + \rho_i(z_i')) = (\psi_i(y_i), \rho_i(z_i)) + (\psi_i(y_i'), \rho_i(z_i')) = \theta(x) + \theta(t)$, e
$*$ $\theta(\alpha x) = \theta(\alpha(\phi_i(y_i + z_i))) = \theta(\phi_i(\alpha y_i + \alpha z_i)) = (\psi_i(\alpha y_i), \rho_i(\alpha z_i)) = (\alpha\psi_i(y_i), \alpha\rho_i(z_i)) =$

$\alpha(\psi_i y_i, \rho_i z_i) = \alpha\theta(x)$.

• θ é o homomorfismo inverso de $\psi \oplus \rho$.

De fato, $\theta \circ (\psi \oplus \rho)(\psi_i(y_i), \rho_i(z_i)) = \theta(\phi_i(y_i + z_i)) = \theta(\phi_i(x_i)) = (\psi_i(y_i), \rho_i(z_i))$ e $(\psi \oplus \rho) \circ \theta(x) = (\psi \oplus \rho)(\psi_i(y_i), \rho_i(z_i)) = \phi_i(y_i + z_i) = \phi_i(x_i) = x$.

Nessas condições, $(\psi \oplus \rho)$ é um isomorfismo. ∎

Proposição 2.1.4 *Se $\phi_i(x_i) = 0$, existe um i' com $i \leq i'$ tal que $\phi_{i',i}(x_i) = 0$.*

Demonstração: Pela construção do limite direto na demonstração da Proposição 2.1.2 temos que $\phi_i = \pi \circ \phi_i^+$ onde $\phi_i^+ : M_i \longrightarrow M^+$, M^+ a soma direta de todos os módulos M_i, $\pi : M^+ \longrightarrow M = M^+/H$ onde H é o submódulo gerado por todos os elementos $\phi_{i'}^+ \circ \phi_{i',i}(x_i) - \phi_i^+(x_i)$ para todos os pares $i \leq i'$ e todo $x_i \in M_i$. Por hipótese, temos que $\phi_i(x_i) = 0$ assim $\phi_i^+(x_i) \in H$ e então $\phi_i^+(x_i)$ é uma soma finita de elementos $\phi_{k'}^+ \circ \phi_{k',k}(y_{k',k}) - \phi_k^+(y_{k',k})$ com $y_{k',k} \in M_k, (k \leq k')$. Pela definição de ϕ_i^+, analisando as coordenadas de $\phi_i^+(x_i)$ e considerando $\phi_{k'}^+ = \phi_{i'}^+$ e $\phi_k^+ = \phi_i^+$, temos que

$$(1) \qquad x_i = \sum_{k'=i} \phi_{i,k}(y_{i,k}) - \sum_{k=i} y_{k',i}$$

Enquanto que para $h \neq i$

$$(2) \qquad 0 = \sum_{k'=h} \phi_{h,k}(y_{h,k}) - \sum_{k=h} y_{k',h}$$

Escolha um índice i' tal que $k' \leq i'$ para todo k' que ocorre. Aplicando $\phi_{i',i}$ na equação (1) e $\phi_{i',h}$ na equação (2), que é não vazia, obtemos

$$(1') \qquad \phi_{i',i}(x_i) = \sum_{k} \phi_{i',i} \circ \phi_{i,k}(y_{i,k}) - \sum_{k'} \phi_{i',i}(y_{k',i})$$

$$(2') \qquad 0 = \sum_{h,k,h\neq i} \phi_{i',h} \circ \phi_{h,k}(y_{h,k}) - \sum_{h,h\neq i} \phi_{i',h}(y_{k',h})$$

Denotando em $(2')$ h por k' no primeiro somatório que aparece na expressão e h por k no segundo, e observando que o único valor que h não assume em $(2')$ é o i e esse é o que aparece em $(1')$, obtemos, somando $(1')$ e $(2')$

$$\phi_{i',i}(x_i) = \sum_{todo(k',k)} \phi_{i',k'} \circ \phi_{k',k}(y_{k',k}) - \phi_{i',k}(y_{k',k})$$

que é zero pela definição de sistema direto. ∎

Definição 2.1.4 *Um subconjunto $J \subset I$ é chamado **final** (algumas vezes "**cofinal**") se J é um conjunto direto com a ordem induzida de I e se para qualquer $i \in I$, existe um $j \in J$ tal que $i \leq j$.*

Sejam $(M_i, \phi_i)_{i\in I}$ um sistema direto e $J \subset I$, J final. Considere $(M_j)_{j\in J}$ juntamente com a família de homomorfismos $\phi'_{j',j} : M_j \longrightarrow M_{j'}$ onde $\phi'_{j',j} = \phi_{j',j}$. Então $(M_j, \phi'_{j',j})$ forma um sistema direto. Pela Proposição 2.1.2, o limite direto existe. Seja então (M', ϕ'_j) o limite direto, ou seja, $M' = \varinjlim M_j$ junto com a família $\phi'_j : M_j \longrightarrow M'$. Pela propriedade universal para o módulo M e a família de homomorfismos $\phi_j : M_j \longrightarrow M$ existe um único homomorfismo $\lambda : M' = \varinjlim M_j \longrightarrow M = \varinjlim M_i$ tal que $\lambda \circ \phi'_j = \phi_j$ para todo j.

Lema 2.1.2 $\lambda : M' = \varinjlim M_j \longrightarrow M = \varinjlim M_i$ *é um isomorfismo.*

Demonstração: • **λ é injetiva**. Seja $x' \in M'$ tal que $\lambda(x') = 0$. Sendo (M', ϕ'_j) um limite direto, pela Proposição 2.1.3, temos que $M' = \bigcup_j \phi'_j(M_j)$, então $x' = \phi'_j(x_j)$ para algum $x_j \in M_j$ e $\phi_j(x_j) = (\lambda \circ \phi'_j)(x_j) = \lambda(x') = 0$. Pela Proposição 2.1.4, existe $i' \in I$ com $j \leq i'$ tal que $\phi_{i',j}(x_j) = 0$. Como J é final, existe $j' \in J$ com $i' \leq j'$. Dessa forma $j \leq i' \leq j'$, pela definição de sistema direto temos $\phi_{j',j} = \phi_{j',i'} \circ \phi_{i',j}$, assim $\phi_{j',j}(x_j) = 0$. Como $j \leq j'$ então $\phi'_{j'} \circ \phi'_{j',j} = \phi'_j$, mas $\phi'_{j',j} = \phi_{j',j}$ e então $x' = \phi'_j(x_j) = (\phi'_{j'} \circ \phi_{j',j})(x_j) = \phi'_j(\phi_{j',j}(x_j)) = \phi'_j(0) = 0$.
• **λ é sobrejetiva.** Dado $x \in M$, pela Proposição 2.1.3, temos que $M = \bigcup_i \phi_i(M_i)$, e então $x = \phi_i(x_i)$, para algum $x_i \in M_i$. Visto que J é final, existe $j \in J$ tal que $i \leq j$. Então $x = \phi_j(x_j)$ onde $x_j = \phi_{j,i}(x_i)$ (pois como $i \leq j$ pela definição de limite direto, $\phi_j \circ \phi_{j,i} = \phi_i$). Como $\lambda \circ \phi'_j = \phi_j$ então $\lambda(\phi'_j(x_j)) = (\lambda \circ \phi'_j)(x_j) = \phi_j(x_j) = x$. ■

Agora consideraremos a compatibilidade dos limites diretos (indutivos) com sequências exatas. Suponhamos que temos três sistemas diretos sobre o mesmo conjunto direto I. Suponha ainda que temos homomorfismos

$$(\star) \quad M_i^* \xrightarrow{\lambda_i} M_i \xrightarrow{\rho_i} M_i^{**}$$

tais que a sequência é exata e que para $i \leq i'$ o diagrama

$$\begin{tikzcd} M_i^* \arrow[r, "\lambda_i"] \arrow[d, "\phi^*_{i',i}"] & M_i \arrow[r, "\rho_i"] \arrow[d, "\phi_{i',i}"] & M_i^{**} \arrow[d, "\phi^{**}_{i',i}"] \\ M_{i'}^* \arrow[r, "\lambda_{i'}"] & M_{i'} \arrow[r, "\rho_{i'}"] & M_{i'}^{**} \end{tikzcd}$$

é comutativo. Passando ao limite temos homomorfismos

$$(\star\star) \quad M^* \xrightarrow{\lambda} M \xrightarrow{\rho} M^{**}$$

tal que $\lambda \circ \phi_i^* = \phi_i \circ \lambda_i$, $\rho \circ \phi_i = \phi_i^{**} \circ \rho_i$, para todo i. Notemos que λ é assim definida: dado $x^* \in M^*$ existe pela Proposição 2.1.3, $x_i^* \in M_i^*$ tal que $x^* = \phi_i^*(x_i^*)$, onde $x_i^* \in M_i^*$, definimos então $\lambda(x^*) = \phi_i(\lambda_i(x_i^*))$. Claramente $\lambda \circ \phi_i^* = \phi_i \circ \lambda_i$. Para ρ a definição é similar.

Lema 2.1.3 *A sequência limite é exata.*

Demonstração: Dado $x^* \in M^*$, escolha $x_i^* \in M_i^*$ tal que $x^* = \phi_i^*(x_i^*)$. Então $(\rho \circ \lambda)(x^*) = (\rho \circ \lambda)(\phi_i^*(x_i^*)) = \rho \circ (\lambda \circ \phi_i^*)(x_i^*) = \rho \circ (\phi_i \circ \lambda_i)(x_i^*) = (\rho \circ \phi_i) \circ \lambda_i(x_i^*) = (\phi_i^{**} \circ \rho_i) \circ \lambda_i(x_i^*) = 0$ pois como $(\star)$ é exata temos que $\rho_i \circ \lambda_i = 0$. Logo, Im $\lambda \subset$ Ker ρ.
Agora seja $x \in M$ tal que $\rho(x) = 0$. Pela Proposição 2.1.3, $x = \phi_i(x_i)$ para algum $x_i \in M_i$. Assim $\rho(\phi_i(x_i)) = 0$, e daí, $(\phi_i^{**} \circ \rho_i)(x_i) = 0$ visto que $\rho \circ \phi_i = \phi_i^{**} \circ \rho_i^*$. Pela Proposição 2.1.4 existe i' com $i' \leq i$ tal que $0 = \phi_{i',i}^{**} \circ \rho_i(x_i) \overset{comutatividade}{=} (\rho_{i'} \circ \phi_{i',i})(x_i)$. Pela exatidão no nível i', existe $x_{i'}^* \in M_{i'}^*$ tal que $\phi_{i',i}(x_i) = \lambda_{i'}(x_{i'}^*)$ (pois $\phi_{i',i}(x_i) \in Ker\rho_{i'} = Im\lambda_{i'}$). Assim, $(\lambda \circ \phi_{i'}^*)(x_{i'}^*) = (\phi_{i'} \circ \lambda_{i'})(x_{i'}^*) = \phi_{i'}(\phi_{i',i}(x_i)) = \phi_i(x_i) = x$. Portanto, $Ker\rho \subset Im\lambda$. Nessas condições, a sequência limite é exata. ■

Corolário 2.1.2 *Se cada λ_i é um monomorfismo (respectivamente, se cada ρ_i é um epimorfismo) então λ é um monomorfismo (respectivamente, ρ é um epimorfismo).*

Definição 2.1.5 (*Limites Iterados*) *Sejam I um conjunto direto, $(M_i, \phi_{i',i})$ um sistema direto e (M, ϕ_i) um limite direto. Suponhamos que J é um outro conjunto direto e que para cada $j \in J$ está associado um subconjunto direto $I_j \subset I$ tal que se $j \leq j'$ temos $I_j \subset I_{j'}$. Suponhamos também que $I = \bigcup_j I_j$. Para cada j, podemos formar $M_j^\star = \varinjlim M_i, i \in I_j$ associado aos homomorfismos $\phi_{i',i}$ para $i \leq i'$ em I_j, que vamos denotar também por $\phi_{i',i}$. Se $j \leq j'$, existe um homomorfismo $\psi_{j',j} : M_j^\star \longrightarrow M_{j'}^\star$ definido como segue: Dado $x \in M_j^\star$, escolha $i \in I_j$ e $x_i \in M_i$ tal que $x = \phi_i^\star(x_i)$, onde $\phi_i^\star : M_i \longrightarrow M_j^\star$ é o homomorfismo canônico (dado pelo limite direto). Assim, se $i \leq i'$, $i, i' \in I_j$, então $\phi_{i'}^\star \circ \phi_{i',i} = \phi_i^\star$. Escolha $i' \in I_{j'}$ tal que $i \leq i'$. Tome $\psi_{j',j}(x) := \phi_{i'}^\star(\phi_{i',i}(x_i))$. Dessa forma, $(M_j^\star, \psi_{j',j})_{j,j' \in J}$ forma um sistema direto. Assim existe o limite $(M^\star, \psi_j^\star)$ onde $\psi_j^\star : M_j^\star \longrightarrow M^\star$ e $M^\star = \varinjlim M_j^\star$ tal que $\psi_{j'} \circ \psi_{j',j} = \psi_j$ se $j \leq j'$. Chamamos $M^\star$ de **limite iterado**.*

Notemos que pela propriedade universal para o limite direto $(M^\star, \psi_j^\star)$ e o módulo M com a família de homomorfismos

$$f_j : M_j^\star = \bigcup_{i \in I_j} \phi_i^\star(M_i) \longrightarrow M = \bigcup_{i \in I} \phi_i(M_i);$$

$$y \longrightarrow f_j(y) = y$$

satisfazem $f_{j'} \circ \psi_{j',j} = f_j$ se $j \leq j'$, existe um único homomorfismo $\omega : M^\star \longrightarrow M$ tal que $f_j = \omega \circ \psi_j^\star$. Também, considerando a propriedade de diagrama universal para o limite direto (M, ϕ_i) e o módulo $M^\star$ com homomorfismos θ_i dados pela composição $M_i \xrightarrow{\phi_i^\star} M_j^\star \xrightarrow{\psi_j^\star} M^\star$ onde j é tal que $i \in I_j$ (que existe visto que $I = \bigcup_j I_j$)

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\theta"] & M^\star \\ & M_i \arrow[ul, "\phi_i"] \arrow[u, "\theta_i"'] \end{tikzcd}$$

existe um único homomorfismo $\theta : M \longrightarrow M^\star$ tal que $\theta_i = \theta \circ \phi_i$.

Proposição 2.1.5 *([17], Exercício 25.16, p.214) Os homomorfismos $\omega : M^\star \longrightarrow M$ e $\theta : M \longrightarrow M^\star$ são isomorfismos inversos.*

Demonstração: Notemos que os homomorfismos id_M e $\omega \circ \theta$ satisfazem a propriedade de diagrama universal para o limite direto (M, ϕ_i) e o módulo M. Logo pela unicidade $\omega \circ \theta = id_M$. Similarmente, para $id_{M^\star}$ e $\theta \circ \omega$ e o limite direto $(M^\star, \psi_j^\star)$. ■

Exemplo 2.1.3 *Considere $I = \mathbb{N}^*$ e $(M_i, \phi_{i',i})$ um sistema direto com limite direto M. Sejam $J = \mathbb{N}^*$ e $I_j = \{1, 2, \ldots, j\}, j \in J$. Então $M_j^\star = \varinjlim M_i, i \in I_j$ e o limite iterado nesse caso é $M^\star = \lim\limits_{j \in J} M_j^\star = \varinjlim(\varinjlim M_i)$ e a proposição anterior nos diz que $M^\star \cong \lim\limits_{i \in \mathbb{N}^\star} M_i = M$.*

Proposição 2.1.6 *Considere I um conjunto direto, $(M_i, \phi_{i',i})$ um sistema direto e (M, ϕ_i) o limite direto associado. Seja $H \subset I$ um subconjunto direto, $(P_h, \psi_{h',h})$ um sistema direto de módulos e (P, ψ_h) o limite direto. Se existem homomorfismos $\gamma_h : P_h \longrightarrow M_h$ (para cada $h \in H$) que são compatíveis com os homomorfismos $\phi_{h',h}$ e $\psi_{h',h}$, isto é, são tais que o diagrama é comutativo*

$$\begin{tikzcd} P_h \arrow[r, "\gamma_h"] \arrow[d, "\psi_{h',h}"'] & M_h \arrow[d, "\phi_{h',h}"] \\ P_{h'} \arrow[r, "\gamma_{h'}"] & M_{h'} \end{tikzcd}$$

para todos $h \leq h'$, $h, h' \in H$ então passando ao limite direto existe um único homomorfismo $\gamma : P = \varinjlim P_h \longrightarrow M$ tal que $\gamma \circ \psi_h = \phi_h \circ \gamma_h$, para todo $h \in H$.

$$\begin{tikzcd} & & P \arrow[d, "\gamma"] \\ P_h \arrow[urr, "\psi_h"] \arrow[r, "\gamma_h"] & M_h \arrow[r, "\phi_h"] & M \end{tikzcd}$$

Ainda, se γ_h são isomorfismos e $H = I$ então γ será isomorfismo.

Demonstração: Considere os homomorfismos $\eta_h := \phi_h \circ \gamma_h : P_h \longrightarrow M$ definidos para todo $h \in H$. Temos que $\eta_h = \phi_{h'} \circ \phi_{h',h} \circ \gamma_h = \eta_{h'} \circ \psi_{h',h}$, para $h \leq h'$ em H. Logo, pela propriedade do diagrama universal para $P = \varinjlim P_h$ existe um único homomorfismo $\gamma : P \longrightarrow M$ nas condições desejadas. Para a última parte observe que de maneira similar, usando γ_h^{-1}, obtemos um único homomorfismo $\widetilde{\gamma} : M \longrightarrow P$. Como ambos M e P são limites diretos, usando a propriedade de diagrama universal concluimos que $\gamma \circ \widetilde{\gamma} = id_M$ e $\widetilde{\gamma} \circ \gamma = id_P$, e assim γ é isomorfismo tendo $\widetilde{\gamma}$ como inverso. ∎

O resultado seguinte será utilizado na demonstração da Dualidade de Poincaré.

Seja $(X_\alpha, \alpha \in I)$ um conjunto direto onde $\alpha \leq \beta$ significa que $X_\alpha \subset X_\beta$, e X_α são espaços topológicos. Considere os módulos $H_i(X_\alpha; R)$ e os homomorfismos $\phi_{\beta\alpha} : H_i(X_\alpha; R) \rightarrow H_i(X_\beta; R)$ induzidos da inclusão. Então $(H_i(X_\alpha; R), \phi_{\beta\alpha})$ forma um sistema direto. Seja $(M = \varinjlim H_i(X_\alpha; R), \phi_\alpha)$ o limite direto onde $\phi_\alpha : H_i(X_\alpha; R) \rightarrow M$. Pela propriedade universal, temos que para qualquer módulo $H_i(X; R)$ e a família de homomorfismos $j_\alpha : H_i(X_\alpha; R) \rightarrow H_i(X; R)$ existe um único homomorfismo $\eta : M \rightarrow H_i(X; R)$ tal que $\eta \circ \phi_\alpha = j_\alpha$. Sob certas hipóteses η será um isomorfismo:

Proposição 2.1.7 (*[19], p.244*) *Se um espaço X é a união de um sistema direto de subespaços X_α com a propriedade que cada conjunto compacto em X está contido em algum X_α, $\alpha \in I$, então a aplicação natural $\eta : \varinjlim H_p(X_\alpha; R) \longrightarrow H_p(X; R)$ é um isomorfismo para todo p e R.*

Demonstração: Para ver que a aplicação η é sobrejetora, seja $[u] \in H_p(X; R)$ representado pelo ciclo $u \in C_p(X; R)$. Assim $u = r_1\sigma_1 + \ldots + r_k\sigma_k$, onde $\sigma_i : \triangle^p \longrightarrow X$ são p-simplexos singulares. Como $\triangle^p$ é compacto, para cada i, $Im(\sigma_i)$ é um compacto em X. Como $\bigcup_{i=1}^{k} Im(\sigma_i)$ é compacto, esse conjunto está contido em X_α para algum α. Assim podemos supor cada $\sigma_i : \triangle^p \longrightarrow X_\alpha$ e ver u como um elemento em $C_p(X_\alpha; R)$, que vamos denotar por $\overline{u}$. E temos $j_\alpha([\overline{u}]) = [u]$. Daí, existe $\phi_\alpha([\overline{u}]) \in \varinjlim H_p(X_\alpha; R)$ tal que $\eta(\phi_\alpha([\overline{u}])) = \overline{u}$, (pois pela propriedade do diagrama universal $\eta \circ \phi_\alpha = j_\alpha$). Logo η é sobrejetora. Vejamos a injetividade, ou seja analisemos o núcleo deste homomorfismo: seja $v \in \varinjlim H_p(X_\alpha; R)$ tal que $\eta(v) = 0$. Pela Proposição 2.1.3, $v = \phi_\alpha([\gamma])$, para algum $\alpha \in I$ e $[\gamma] \in H_p(X_\alpha; R)$ um ciclo em X_α representado por γ. Agora $\eta(v) = 0$ implica $j_\alpha([\gamma]) = \eta(\phi_\alpha([\gamma])) = \eta(v) = 0$. Assim γ é um bordo em X, isto é, $\gamma = \delta(u)$, $u \in C_{p-1}(X; R)$. Da condição de compactividade segue que γ é um bordo em algum $X_\beta \supset X_\alpha$ e assim $j_{\beta\alpha}([\gamma]) = 0 \in H_p(X_\beta; R)$ e daí $v = \phi_\alpha([\gamma]) = \phi_\beta(j_{\beta\alpha}([\gamma])) = 0$. ∎

2.1.2 Cohomologia com suporte compacto

Apresentamos aqui a definição de cohomologia (singular) com suporte compacto de um espaço em termos de limite direto. ([17], p.215 ou [19], p.244).

Seja X um espaço topológico. O conjunto dos subconjuntos compactos $K \subset X$ forma um conjunto direto com a relação de ordem dada pela inclusão (isto é, $K \leq L$ se $K \subseteq L$), visto que a reunião de dois compactos é um compacto. Para cada compacto $K \subset X$ associemos o módulo de cohomologia $H^q(X, X-K; R)$, com q e o anel de coeficientes R fixados, e para cada inclusão $K \subset L$ de conjuntos compactos associemos o homomorfismo natural

$$j^*_{L,K} : H^q(X, X-K; R) \longrightarrow H^q(X, X-L; R)$$

induzido da aplicação

$$j_{L,K} : C^q(X, X-K; R) \longrightarrow C^q(X, X-L; R)$$

$$g \longmapsto j_{L,K}(g) = \widetilde{g}$$

onde $\widetilde{g}(\sigma + C_q(X-L; R)) := g(\sigma + C_q(X-K; R))$, $\sigma \in C_q(X; R)$, que está bem definida uma vez que $K \subset L$ implica que $X - L \subset X - K$ e assim $C_q(X-L; R) \subset C_q(X-K; R)$. Logo $(H^q(X, X-K; R),\ j^*_{L,K})$ forma um sistema direto indexado pelos subconjuntos compactos de X.

Definição 2.1.6 *O limite direto do sistema direto* $(H^q(X, X-K, R), j^*_{L,K})$ *é chamado o* ***q-ésimo módulo de cohomologia com suporte compacto de*** X *e é denotado por* $H^q_c(X; R)$*. Assim*

$$H^q_c(X; R) = \varinjlim_{K comp.} H^q(X, X-K; R),$$

com homomorfismos $j^*_K : H^q(X, X-K; R) \longrightarrow H^q_c(X; R)$*, onde* K *varia sobre todos os conjuntos compactos de* X*.*

Proposição 2.1.8 *Se* X *é compacto, então* $H^q_c(X; R) = H^q(X; R)$*.*

Demonstração: Se X é compacto então existe um único compacto maximal $K_1 \subset X$, a saber $K_1 = X$. Pela Observação 2.1.2 temos que

$$H^q_c(X; R) = \varinjlim H^q(X, X-K; R) \cong H^q(X, X-K_1; R) = H^q(X; R)$$

pois $K_1 = X$. Assim, $H^q_c(X; R) \cong H^q(X; R)$. ■

Exemplo 2.1.4 $H^q_c(\mathbb{R}^n; R) \cong \begin{cases} R, & se \quad q = n \\ 0, & caso\ contrário. \end{cases}$

Com efeito, denote por B_k *a bola fechada em* $\mathbb{R}^n$ *com centro na origem e raio* k*. A sequência de bolas fechadas* $B_1, B_2, \ldots$ *é cofinal no conjunto direto de todos os subconjuntos compactos de* $\mathbb{R}^n$*, pois todo subconjunto compacto do* $\mathbb{R}^n$ *é limitado e portanto está contido em* B_k *para algum* k*. Sendo assim, pelo Lema 2.1.2, temos que*

$$\lambda : \varinjlim H^q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - B_k; R) \longrightarrow \varinjlim H^q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - K; R)$$

é um isomorfismo. Logo $H^q_c(\mathbb{R}^n;R) = \varinjlim H^q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - B_k;R)$. *Para cada* B_k, *bola fechada de centro na origem e raio* k, *considere a aplicação inclusão*

$$j_k : (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - B_k) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\}).$$

Obtemos o homomorfismo induzido em cohomologia relativa

$$j_k^* : H^q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\};R) \longrightarrow H^q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - B_k;R).$$

Além disso, j_k^* *é um isomorfismo. De fato, a inclusão* $i : (\mathbb{R}^n - B_k) \longrightarrow (\mathbb{R}^n - \{0\})$ *é uma equivalência de homotopia pois existe* $h : (\mathbb{R}^n - \{0\}) \longrightarrow (\mathbb{R}^n - B_k)$, *que associa a cada elemento não nulo* $v \in (\mathbb{R}^n - \{0\})$, $h(v) = \Big(\dfrac{\|v\|+k}{\|v\|}\Big).v$ *tal que* $h \circ i \sim id_{\mathbb{R}^n - B_k}$ *e* $i \circ h \sim id_{\mathbb{R}^n - \{0\}}$. *Assim* h *induz isomorfismos* $h^* : H^q(\mathbb{R}^n - \{0\};R) \longrightarrow H^q(\mathbb{R}^n - B_k;R)$, *para todo* q. *Considere o seguinte diagrama comutativo*

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H^{q-1}(\mathbb{R}^n;R) \arrow[r] & H^{q-1}(\mathbb{R}^n - B_k;R) \arrow[r] & H^q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - B_k;R) \arrow[r] & H^q(\mathbb{R}^n;R) \arrow[r] & H^q(\mathbb{R}^n - B_k;R) \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H^{q-1}(\mathbb{R}^n;R) \arrow[r] \arrow[u, "\cong"] & H^{q-1}(\mathbb{R}^n - \{0\};R) \arrow[r] \arrow[u, "h^*"] & H^q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\};R) \arrow[r] \arrow[u, "j_k^*"] & H^q(\mathbb{R}^n;R) \arrow[r] \arrow[u, "\cong"] & H^q(\mathbb{R}^n - \{0\};R) \arrow[r] \arrow[u, "h^*"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

onde a linha superior é a sequência exata longa em cohomologia do par $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - B_k)$ *e a linha inferior é a sequência exata longa em cohomologia do par* $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\})$. *Como* $\mathbb{R}^n$ *é contráctil, então* $H^q(\mathbb{R}^n;R) = 0$, *para todo* $q \neq 0$ *e claramente* $0 = H^q(\mathbb{R}^n;R) \longrightarrow H^q(\mathbb{R}^n;R) = 0$ *é isomorfismo. Como* h^* *é isomorfismo, segue do Lema dos Cinco ([19], p.129),* j_k^* *é isomorfismo. Pelo Exemplo 1.1.5* $H^q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\};R) \cong \begin{cases} R, & se \quad q = n \\ 0, & se \quad q \neq n \end{cases}$. *Daí* $H^q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - B_k;R) \cong H^q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\};R) \cong \begin{cases} R, & se \quad q = n \\ 0, & se \quad q \neq n \end{cases}$. *Logo,*

$$H^q_c(\mathbb{R}^n;R) = \varinjlim H^q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - B_k;R) \cong \begin{cases} R, & se \quad q = n \\ 0, & se \quad q \neq n. \end{cases}$$

Observação 2.1.3 *Este exemplo mostra que a cohomologia com suporte compacto não é invariante por tipo de homotopia e de fato isto está relacionado com a dificuldade com aplicações induzidas pois nem sempre uma aplicação entre espaços induz uma aplicação entre cohomologia com suporte compacto. Pois,* $\mathbb{R}^n \overset{f}{\sim} \{x_0\}$ *(mesmo tipo de homotopia, com* $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \{x_0\}$ *equivalência de homotopia), se existisse as aplicações induzidas e a cohomologia com suporte compacto fosse invariante por homotopia teríamos que* $f^* : H^q_c(\{x_0\};R) \longrightarrow H^q_c(\mathbb{R}^n;R)$ *seria* *um isomorfismo. Agora como $\{x_0\}$ é compacto teríamos pela Proposição 2.1.8 que*

$$H_c^q(\{x_0\}; R) \cong H^q(\{x_0\}; R) \cong \begin{cases} R, & \textit{se} \quad q = 0 \\ 0, & \textit{caso contrário}, \end{cases}$$

Por outro lado, tomando no exemplo anterior o caso particular $q = n = 1$ obtemos $H_c^1(\mathbb{R}; R) \cong R$. Assim obteríamos uma contradição: $0 = H_c^1(\{x_0\}; R) \cong H_c^1(\mathbb{R}; R) \cong R$.

Um tipo de aplicação que induz aplicações em cohomologia com suporte compacto são as "próprias".

Definição 2.1.7 *Uma aplicação $f : X \longrightarrow Y$ é* ***própria*** *se para qualquer compacto $L \subset Y$, temos que $f^{-1}(L)$ é compacto em X.*

Exemplo 2.1.5 *Se $f : X \longrightarrow Y$ é um homeomorfismo entre duas variedades X e Y então f é própria. Assim f induz um homomorfismo*

$$H_c^q(f) : H_c^q(Y; R) \longrightarrow H_c^q(X; R)$$

para todo q, que será um isomorfismo.

Proposição 2.1.9 *Se $f : X \longrightarrow Y$ é uma aplicação própria entre variedades então f induz um homomorfismo na cohomologia com suporte compacto.*

Demonstração: Seja $f : X \longrightarrow Y$ uma aplicação própria. Então para cada compacto $K \subset Y$, $K = f^{-1}(L)$ é um compacto em X e f aplica $X - f^{-1}(L)$ em $Y - L$. Assim f induz um homomorfismo $f_L^* : H^q(Y, Y - L; R) \longrightarrow H_c^q(X; R)$ dado pela composta

$$H^q(Y, Y - L; R) \xrightarrow{f_{K,L}^*} H^q(X, X - K; R) \xrightarrow{j_K^*} H_c^q(X; R)$$

e tais homomorfismos satisfazem $f_K^* \circ f_{L,L'}^* = f_{L'}^*$ se $L \subset L'$. Considerando a propriedade de diagrama universal para o limite direto $H_c^q(Y; R)$ com o módulo $N = H_c^q(X; R)$ e os homomorfismos f_L^*, existe um único homomorfismo induzido (em cohomologia com suporte compacto)

$$H_c^q(f) : H_c^q(Y; R) \longrightarrow H_c^q(X; R)$$

tal que $H_c^q(f) \circ j_L^* = f_L^*$, isto é, o diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} & H_c^q(Y; R) \arrow[d, "H_c^q(f)"] \\ H^q(Y, Y - L; R) \arrow[ur, "j_L^*"] \arrow[r, "f_L^*"] & H_c^q(X; R) \end{tikzcd}$$

■

Corolário 2.1.3 *Se X é uma variedade compacta (logo fechada de acordo com a definição de variedade apresentada) e $f : X \longrightarrow Y$ é uma aplicação contínua então f induz homomorfismo na cohomologia com suporte compacto. Em particular se Y é uma variedade e $X \subset Y$ é uma subvariedade compacta então a inclusão é própria.*

Observação 2.1.4 *A aplicação constante $i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \{x_0\}$ não é própria pois $i^{-1}(\{x_0\}) = \mathbb{R}^n$ que não é compacto.*

No resultado seguinte exibimos um homomorfismo canônico em cohomologia com suporte compacto. Tal homomorfismo será utilizado na prova do teorema de dualidade.

Lema 2.1.4 *Para todo subconjunto aberto U de uma variedade X podemos definir um homomorfismo canônico*

$$\tau : H^q_c(U;R) \longrightarrow H^q_c(X;R).$$

Demonstração: Para cada subconjunto compacto K de U existe, pelo Teorema de Excisão, um isomorfismo

$$H^q(X, X-K;R) \xrightarrow{\cong} H^q(U, U-K;R).$$

Denotemos por ρ_k o inverso deste isomorfismo. Tais homomorfismos (para K compactos de U) são compatíveis com os homomorfismos induzidos das inclusões, isto é, se $K \subseteq K'$, o quadrado (I) abaixo é comutativo:

$$\begin{tikzcd}
H^q(U,U-K;R) \arrow[r, "\rho_k"] \arrow[dd, "j^*_{k',k}"] & H^q(X,X-K;R) \arrow[dr, "j^*_k"] \arrow[dd, "j^*_{k',k}"'] & \\
& & H^q_c(X;R) \\
H^q(U,U-K';R) \arrow[r, "\rho_{k'}"] & H^q(X,X-K';R) \arrow[ur, "j^*_{k'}"'] &
\end{tikzcd}$$

Assim passando ao limite (isto é, considerando as aplicações compostas) $\tau_k = j^*_k \circ \rho_k : H^q(U, U-K;R) \longrightarrow H^q_c(X;R)$ e a propriedade do diagrama universal para $H^q_c(U;R) = \varinjlim H^q(U, U-K;R)$ existe um único homomorfismo

$$\tau : H^q_c(U;R) \longrightarrow H^q_c(X;R)$$

satisfazendo $\tau \circ j^*_k = \tau_k$, para todo K compacto de U. ■

Observação 2.1.5 (*1*) *O homomorfismo τ (em cohomologia com suporte compacto) dado no lema anterior não é induzido pela inclusão $(U, U-K) \longrightarrow (X, X-K)$ visto que ele está na direção contrária. Tal homomorfismo também não é em geral um isomorfismo pois nem todo subconjunto compacto de X está contido em U. Assim K variar sobre todos os compactos de U não implica em K variar sobre todos os compactos de X. O que temos é $H^q_c(U;R) \cong \varinjlim H^q(X, X-K;R),\ K \subset U,\ K$ compacto.*

(2) Se $U = X$ então τ é o homomorfismo identidade.
(3) Se $U \subset V \subset X$, e U e V são abertos de X, então $H_c^q(U;R) \longrightarrow H_c^q(V;R)$ está definido e é comutativo o diagrama

$$\begin{tikzcd} H_c^q(U;R) \arrow[r] \arrow[dr] & H_c^q(V;R) \arrow[d] \\ & H_c^q(X;R) \end{tikzcd}$$

Existe uma sequência de Mayer-Vietoris para a cohomologia com suporte compacto.

Proposição 2.1.10 (*Sequência de Mayer-Vietoris*) *Sejam U e V subconjuntos de um espaço topológico X tais que $X = int(U) \cup int(V)$. Então existe uma sequência exata na cohomologia com suporte compacto dada por*

$$\ldots \longrightarrow H_c^q(U \cap V;R) \longrightarrow H_c^q(U;R) \oplus H_c^q(V;R) \longrightarrow H_c^q(X;R) \longrightarrow H_c^{q+1}(U \cap V;R) \longrightarrow \ldots$$

Demonstração: Para construir esta sequência, considere $K \subset U$ e $L \subset V$ conjuntos compactos, então pelo Teorema 1.1.11 para a tripla $(X, X-K, X-L)$ (visto que $(X-K) \cup (X-L) = X - K \cap L$) obtemos a seguinte sequência exata de Mayer-Vietoris relativa:

$$\ldots \longrightarrow H^q(X, X - K \cap L;R) \longrightarrow H^q(X, X-K;R) \oplus H^q(X, X-L;R) \longrightarrow H^q(X, X - K \cup L;R) \longrightarrow \ldots$$

Agora do Teorema de Excisão temos os seguintes isomorfismos obtidos da inclusão $(X - Z, A - Z) \longrightarrow (X, A)$ para Z e A especificados abaixo:
- $H^q(X, X - K \cap L;R) \simeq H^q(U \cap V, U \cap V - K \cap L;R)$.
  (para $Z = X - U \cap V$ e $A = X - K \cap L$)
- $H^q(X, X - K;R) \simeq H^q(U, U - K;R)$.
  (para $Z = X - U$ e $A = X - K$)
- $H^q(X, X - L;R) \simeq H^q(V, V - L;R)$.
  (para $Z = X - V$ e $A = X - L$).

De onde obtemos a sequência exata
$\ldots \longrightarrow H^q(U \cap V, U \cap V - K \cap L;R) \longrightarrow H^q(U, U - K;R) \oplus H^q(V, V - L;R) \longrightarrow$
$\longrightarrow H^q(X, X - K \cup L;R) \longrightarrow \ldots$
Agora, note que como K varia sobre todos os subconjuntos compactos de U e L sobre os subconjuntos compactos de V, $K \cap L$ varia sobre todos os compactos de $U \cap V$ e $K \cup L$ varia sobre todos os compactos de $X = U \cup V$. Daí passando para o limite direto sobre todos os pares (K, L) obtemos que a sequência
$\ldots \longrightarrow \varinjlim H^q(U \cap V, U \cap V - K \cap L;R) \longrightarrow \varinjlim [H^q(U, U - K;R) \oplus H^q(V, V - L;R)] \longrightarrow$
$\longrightarrow \varinjlim H^q(X, X - K \cup L;R) \longrightarrow \ldots$ que é exata (vide Lema 2.1.3). Usando que o limite

de soma direta é a soma dos limites (Lema 2.1.1) e a definição de cohomologia com suporte compacto obtém-se a sequência exata para suporte compacto mencionada. ■

2.2 O Teorema da Dualidade de Poincaré

Seja X uma variedade n-dimensional possivelmente não compacta, R-orientável. Pelo Teorema 1.2.4 existe uma única classe de homologia $\alpha_K \in H_n(X, X-K;R)$ para cada subconjunto compacto K de X (restringindo a uma dada orientação em X em cada ponto de K, isto é, $j_x^K(\alpha_K) = \alpha_x$, para todo $x \in K$, α_x gerador de $H_n(X, X-\{x\};R)$ de acordo com a R-orientação). Assim o produto cap (relativo) com α_K define um homomorfismo

$$\alpha_K \frown : H^q(X, X-K;R) \longrightarrow H_{n-q}(X;R)$$

$$\varphi \longmapsto \alpha_K \frown \varphi$$

Notemos que se K e L são subconjuntos compactos com $K \subset L$ então pela unicidade das classes $j^*_{L,K}(\alpha_K) = \alpha_L$, onde $j^*_{L,K} : H^q(X, X-K;R) \longrightarrow H^q(X, X-L;R)$ é o homomorfismo induzido pela inclusão.

Ainda, pela naturalidade do produto cap, o homomorfismo $\alpha_K \frown$ definido para diferentes conjuntos compactos K é compatível com o limite direto no seguinte sentido: Se K e L são compactos e $K \subset L$, então o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{tikzcd} H^q(X,X-K;R) \arrow[rr, "j^*_{L,K}"] \arrow[dr, "\alpha_K \frown"'] & & H^q(X,X-L;R) \arrow[dl, "\alpha_L \frown"] \\ & H_{n-q}(X;R) & \end{tikzcd}$$

ou seja, $\alpha_K \frown \varphi = \alpha_L \frown j^*_{L,K}(\varphi)$, para todo $\varphi \in H^q(X, X-K;R)$.

Consideremos $N = H_{n-q}(X;R)$ e os homomorfismos $\alpha_K \frown : M_K \longrightarrow N$ onde $M_K = H^q(X, X-K;R)$. Tomando o limite direto $H^q_c(X;R) = \varinjlim H^q(X, X-K;R)$ e homomorfismos dados na definição de limite direto $j^*_K : H^q(X, X-K;R) \longrightarrow H^q_c(X;R)$, segue da propriedade universal do (limite direto) que temos um homomorfismo bem definido

$$(*) \quad D_X : H^q_c(X;R) \longrightarrow H_{n-q}(X;R)$$

tal que $D_X \circ j^*_K = \alpha_K \frown$, para todo compacto K, isto é, o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{tikzcd} & H^q_c(X;R) \arrow[d, "D_X"] \\ M_K \arrow[ur, "j^*_K"] \arrow[r, "\alpha_K \frown"'] & N = H_{n-q}(X;R) \end{tikzcd}$$

É esse homomorfismo D_X que nos dará o isomorfismo da dualidade de Poincaré para a variedade X. Para a prova do teorema de dualidade, usaremos o seguinte lema:

Lema 2.2.1 *([19], Lema 3.36, p.246) Se X é a união de conjuntos abertos U e V, então o seguinte diagrama da sequência de Mayer-Vietoris é comutativo a menos de sinal:*

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & H_c^q(U\cap V;R) \arrow[r] \arrow[d, "D_{U\cap V}"] & H_c^q(U;R)\oplus H_c^q(V;R) \arrow[r] \arrow[d, "D_U \oplus -D_V"] & H_c^q(X;R) \arrow[r] \arrow[d, "D_X"] & H_c^{q+1}(U\cap V;R) \arrow[r] \arrow[d, "D_{U\cap V}"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & H_{n-q}(U\cap V;R) \arrow[r] & H_{n-q}(U;R)\oplus H_{n-q}(V;R) \arrow[r] & H_{n-q}(X;R) \arrow[r] & H_{n-q-1}(U\cap V;R) \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

Teorema 2.2.1 (*Dualidade de Poincaré*) *Seja X uma variedade n-dimensional orientável e R um anel coeficiente fixado. Então o homomorfismo dado anteriormente em* $(*)$

$$D_X : H_c^q(X;R) \longrightarrow H_{n-q}(X;R)$$

é um isomorfismo para todo q.

Demonstração: A prova da dualidade de Poincaré será por um argumento indutivo, usando sequência de Mayer-Vietoris. A indução requer uma versão da dualidade de Poincaré para subconjuntos abertos de X, que não são necessariamente compactos, por essa razão é que se usa a cohomologia com suporte compacto.

Caso 1: Suponhamos que $X = U \cup V$, onde U e V são subconjuntos abertos de X e que a dualidade de Poincaré vale para U, V e $U \cap V$ (aqui estamos supondo que a orientação para U é a restrição da orientação de X a U, e similarmente para V e $U \cap V$). Vamos mostrar que nesse caso a dualidade também ocorre para $X = U \cup V$. Pela Proposição 2.1.10, temos a seguinte sequência de Mayer-Vietoris para cohomologia com suporte compacto

$$\ldots \longrightarrow H_c^q(U\cap V;R) \longrightarrow H_c^q(U;R)\oplus H_c^q(V;R) \longrightarrow H_c^q(X;R) \longrightarrow \ldots \quad .$$

Pelo Lema 2.2.1 temos que o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & H_c^q(U\cap V;R) \arrow[r] \arrow[d, "D_{U\cap V}"] & H_c^q(U;R)\oplus H_c^q(V;R) \arrow[r] \arrow[d, "D_U \oplus -D_V"] & H_c^q(X;R) \arrow[r] \arrow[d, "D_X"] & H_c^{q+1}(U\cap V;R) \arrow[r] \arrow[d, "D_{U\cap V}"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & H_{n-q}(U\cap V;R) \arrow[r] & H_{n-q}(U;R)\oplus H_{n-q}(V;R) \arrow[r] & H_{n-q}(X;R) \arrow[r] & H_{n-q-1}(U\cap V;R) \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

é comutativo a menos de sinal onde a linha superior do diagrama é a sequência de Mayer-Vietoris da Proposição 2.1.10, a linha inferior é a sequência de Mayer-Vietoris usual e as aplicações verticais são homomorfismos de dualidade de Poincaré D_U, D_V e $D_{U\cap V}$ que por hipótese são isomorfismos. Logo, pelo Lema dos Cinco ([19], p.129), segue que D_X é um isomorfismo.

Caso 2: Se $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} U_j$ onde $U_1 \subset U_2 \subset \ldots$ são abertos de X, e o Teorema de dualidade de Poincaré vale para cada U_j, isto é, $D_{U_j} : H_c^q(U_j;R) \longrightarrow H_{n-q}(U_j;R)$ é isomorfismo, então

$D_X : H_c^q(X;R) \longrightarrow H_{n-q}(X;R)$ também é um isomorfismo. Com efeito, considere o conjunto direto $I = \{K \subset X;\ K$ compacto de X$\}$ com a relação de inclusão, o sistema direto $(M_K = H^q(X, X-K;R),\ j^*_{L,K})$ e $(H_c^q(X;R) = \varinjlim_{K\in I} M_K,\ j^*_K)$ o limite direto associado. Vejamos primeiramente que

$$(1) \quad H_c^q(X;R) = \varinjlim_{j\in\mathbb{N}^*} H^q(U_j;R)$$

Note que, para cada $j \in \mathbb{N}^*$, podemos considerar (vide Lema 2.1.4 e Observação 2.1.5)

$$(2) \quad H_c^q(U_j;R) = \varinjlim_{K\subset\ U_j} H^q(X, X-K;R)$$

Considere $J = \{1,2,3,\ldots\} = \mathbb{N}^*$ e para cada $j \in J$, associe o subconjunto direto $I_j = \{K$ compacto; $K \subset U_j\}$. Então $U_j \subset I$; $I_j \subset I_{j'}$, se $j \leq j'$, e $I = \bigcup_j U_j$ pois todo compacto $K \subset X$ está contido em U_j para algum j (visto que K é coberto por um número finito de $U_j's$ e tais conjuntos estão totalmente ordenados pela inclusão). Considerando o limite iterado (Proposição 2.1.5) e (2), obtemos então o isomorfismo desejado

$$(3) \quad H_c^q(X;R) \cong \varinjlim_{j\in J} \varinjlim_{K\in U_j} H^q(X, X-K;R) = \varinjlim_{j\in J} H_c^q(U_j;R)$$

Ainda, do fato que todo compacto está contido em U_j para algum j obtemos também (vide Proposição 2.1.7) um isomorfismo

$$(4) \quad \varinjlim H_{n-q}(U_j;R) \stackrel{\cong}{\longrightarrow} H_{n-q}(X;R)$$

Finalmente, da hipótese, temos os isomorfismos

$$D_{U_j} : H_c^q(U_j;R) \longrightarrow H_{n-q}(U_j;R)$$

para todo j. Usando a comutatividade do diagrama

$$\begin{tikzcd} H_c^q(U_j;R) \arrow[r, "D_{U_j}"] \arrow[d, "\tau_{j',j}"] & H_{n-q}(U_j;R) \arrow[d, "i_*"'] \\ H_c^q(U_{j'};R) \arrow[r, "D_{U_{j'}}"] & H_{n-q}(U_{j'};R) \end{tikzcd}$$

onde $\tau_{j',j}$ é o homomorfismo canônico como no Lema 2.1.4 e i_* é a aplicação induzida da inclusão (tal comutatividade é obtida da definição dos homomorfismos $D_{U_{j'}}$) e a naturalidade do produto cap) obtemos, por passar o limite (vide Proposição 2.1.6) visto que $H_c^q(X;R)$ e $H_{n-q}(X;R)$ são também limites diretos (dados em (3) e (4), respectivamente), que $D_X : H_c^q(X;R) \longrightarrow H_{n-q}(X;R)$ também é um isomorfismo.

Caso 3: Seja $X = \mathbb{R}^n$. Como $\mathbb{R}^n$ é contráctil temos que $H_{n-q}(\mathbb{R}^n; R) \cong 0$ se, $n \neq q$ e $H_{n-q}(\mathbb{R}^n; R) \cong R$ se, $n = q$. Pelo Exemplo 2.1.4

$$H_c^q(\mathbb{R}^n; R) = \varinjlim H^q(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - B_k; R) \cong \begin{cases} R, & \text{se} \quad q = n \\ 0, & \text{se} \quad q \neq n, \end{cases}$$

onde B_k denota a bola fechada de centro na origem e raio k, $k \geq 1$. Assim temos que

$$0 = H_c^q(\mathbb{R}^n; R) \xrightarrow{D_X} H_{n-q}(\mathbb{R}^n; R) = 0$$

é obviamente isomorfismo quando $n \neq q$. Resta mostrar que $D_X : H_c^n(\mathbb{R}^n; R) \longrightarrow H_0(\mathbb{R}^n; R)$ é um isomorfismo. Mostremos primeiramente que

$$D : H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - B; R) \longrightarrow H_0(\mathbb{R}^n; R), \;\; \varphi \longmapsto \alpha_B \frown \varphi$$

onde $\alpha_B \in H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - B; R)$ é um isomorfismo, para toda bola fechada B. Como $\mathbb{R}^n$ é conexo por caminhos, pela Proposição 1.1.3, temos que $\varepsilon_* : H_0(\mathbb{R}^n; R) \longrightarrow R$ é um isomorfismo. Como $H_{n-1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - B; R) = 0$ e $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - B; R)$ é isomorfo a R (com gerador α_B), obtemos (vide Teorema 1.1.13 e Exemplo 1.1.5) isomorfismos

$$H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - B; R) \xrightarrow{\alpha} Hom(H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - B), R) \cong R, \;\; onde \;\; \psi \mapsto \;\; \alpha(\psi); \;\; \alpha(\psi)(\sigma) = \psi(\sigma),$$

com $\psi \in H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - B; R)$ e $\sigma \in H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - B)$ em particular no gerador $\alpha(\psi)(\alpha_B) = \psi(\alpha_B)$ (por abuso não estamos fazendo distinção entre um elemento da (co)homologia e seu representante) e $\zeta : Hom(H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - B), R) \longrightarrow R$ é o isomorfismo natural $h \longmapsto \zeta(h) = h(\alpha_B)$. Ainda o diagrama

$$\begin{tikzcd} H^n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - B; R) \arrow[r, "D"] \arrow[d, "\alpha"] & H_0(\mathbb{R}^n; R) \arrow[d, "\varepsilon_*"'] \\ Hom(H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - B), R) \arrow[r, "\zeta"] & R \end{tikzcd}$$

é comutativo (pois $(\varepsilon_* \circ D)(\varphi) = \varepsilon_*(\alpha_B \frown \varphi) \overset{Obs.1.1.9}{=} \varepsilon_*(\varphi(\alpha_B).\alpha_B) = \varphi(\alpha_B)$ e $(\zeta \circ \alpha)(\varphi) = \zeta(\alpha(\varphi)) = \alpha(\varphi)(\alpha_B) = \varphi(\alpha_B)$). De onde segue que $D = \varepsilon_*^{-1} \circ \zeta \circ \alpha$ também é isomorfismo. Passando ao limite direto obtemos $D_X : H_c^q(\mathbb{R}^n; R) \longrightarrow H_0(\mathbb{R}^n; R)$ é um isomorfismo.

Caso 4: D_X é um isomorfismo se X é um aberto do $\mathbb{R}^n$. De fato, se X é convexo, então X é homeomorfo ao $\mathbb{R}^n$ e assim D_X é isomorfismo pelo Caso 3. Se X não é necessariamente convexo, então usamos o fato que a topologia do $\mathbb{R}^n$ tem uma base enumerável consistindo de bolas abertas n-dimensionais. Assim X é uma reunião enumerável de bolas abertas, isto é, $X = \bigcup_{i \geq 1} B_i$. Agora seja $U_m = \bigcup_{\substack{i \leq m \\ m \geq 1}} B_i$. Afirmamos que a dualidade de Poincaré vale para todo U_m. Com efeito, tome $U_k = B_1 \cup \ldots \cup B_k$. Note que U_k não é necessariamente convexo, mas é a reunião de k conjuntos abertos convexos. O mesmo ocorre para $U_k \cap B_k$. Assim, por indução sobre o número de abertos convexos podemos supor que D_{U_k}, $D_{U_k \cap B_k}$ são isomorfismos. Ainda, como $D_{B_{k+1}}$ é isomorfismo (pois B_{k+1} é homeomorfo a $\mathbb{R}^n$), obtemos do Caso 1, que $D_{U_{k+1}} = D_{U_k \cup B_{k+1}}$ é isomorfismo. Assim D_{U_m} é isomorfismo para todo $m \geq 1$. Temos então $X = \bigcup U_i$, onde $U_1 \subset U_2 \subset \ldots$ e D_{U_i} isomorfismo para todo i. Pelo Caso 2, segue que D_X é um isomorfismo.

Caso Geral: A dualidade de Poincaré é válida para uma n-variedade arbitrária orientável X. Considere $\mathcal{U} = \{U \subset X;$ U é aberto e D_U é um isomorfismo$\}$. Então $\mathcal{U}$ é uma família não vazia (pois existe $U \subset X$ tal que $\mathcal{U}$ é homeomorfo a $\mathbb{R}^n$) parcialmente ordenada pela inclusão. Seja $\{U_{\lambda_i}\}_{i \in I}$ uma subcoleção totamente ordenada, isto é, $U_{\lambda_1} \subset U_{\lambda_2} \subset \ldots$. Então $\bigcup U_{\lambda_i}$ é uma cota superior para $\{U_{\lambda_i}\}$ e, pelo Caso 2, a dualidade vale para $\bigcup_i U_{\lambda_i}$. Pelo Lema de Zorn $\mathcal{U}$ tem um elemento maximal V tal que D_V é um isomorfismo. Se $V \neq X$, escolha um ponto $x \in X - V$ e uma vizinhança aberta B de x homeomorfa ao $\mathbb{R}^n$. Pelo Caso 3, temos que D_B é um isomorfismo e pelo Caso 4, $D_{V \cap B}$ é um isomorfismo pois $V \cap B$ é homeomorfo a um aberto do $\mathbb{R}^n$. Como também D_V é um isomorfismo, então pelo Caso 1, segue que $D_{V \cup B}$ é um isomorfismo. Obtemos então uma contradição pois $V \subsetneqq V \cup B$ e V é um aberto maximal na qual D_V é isomorfismo. Assim $V = X$ e D_X é um isomorfismo, como desejado. ■

Corolário 2.2.1 *Seja uma variedade n-dimensional X fechada e R-orientável, com classe fundamental $\alpha_X \in H_n(X; R)$. Então o homomorfismo*

$$D_X : H^q(X; R) \longrightarrow H_{n-q}(X; R)$$

$$\varphi \longrightarrow \alpha_X \frown \varphi$$

é um isomorfismo para todo q.

Demonstração: Segue do resultado anterior e Proposição 2.1.8. ■

Corolário 2.2.2 *Se X é uma n-variedade fechada com classe fundamental $\alpha_X \in H_n(X; \mathbb{Z}_2)$ então*

$$D_X : H^q(X; \mathbb{Z}_2) \longrightarrow H_{n-q}(X; \mathbb{Z}_2)$$

$$\varphi \longrightarrow \alpha_X \frown \varphi$$

é um isomorfismo, para todo q.

Demonstração: Segue do fato que toda variedade é $\mathbb{Z}_2$-orientável. ■

Observação 2.2.1 *Existe uma versão da Dualidade de Poincaré para variedades fechadas não orientáveis. De fato, há uma dualidade de Poincaré para variedades fechadas* X *(orientáveis ou não) com cohomologia num* $\mathbb{Z}(\pi_1(X))$*-módulo* M *qualquer, que usa "coeficientes locais". Tal dualidade será tratada no Capítulo* 4.

Capítulo

3

Cohomologia de Grupos e Grupos de Dualidade

Existe um conceito de dualidade para grupos e para pares de grupos que está fortemente relacionado com o conceito de dualidade para variedades/CW-complexos. O objetivo principal deste capítulo é abordar o conceito de dualidade para grupos. Para tanto definimos inicialmente homologia e cohomologia de grupos e apresentamos uma interpretação topológica desses grupos via espaços Eilenberg-Maclane, onde a homologia e cohomologia são tomadas com coeficientes locais. Esta interpretação será importante no capítulo seguinte quando relacionamos dualidade de Poincaré para grupos e variedades fechadas. Certas condições de finitude, incluindo dimensão homológica e cohomológica de um grupo, o conceito de grupo de dualidade e alguns resultados relacionados são em seguida apresentados. As referências principais para esse capítulo são [6] e [10].

3.1 (Co)homologia de Grupos

Nesta seção veremos inicialmente alguns pré-requisitos básicos da teoria de (co)homologia de grupos tais como (co)invariantes e módulos (co)induzidos. A seguir definimos (co)homologia de grupos, apresentamos alguns exemplos e o Lema de Shapiro. Finalizamos com uma interpretação topológica para a (co)homologia que é importante para a relação entre dualidade de grupos e variedades/CW-complexos. Enfatizamos porém que alguns dos resultados (mencionados aqui) estão apresentados com mais detalhes em [36] do que em [10].

Definição 3.1.1 *Seja G um grupo que vamos denotar multiplicativamente e R um anel comutativo com unidade. O* ***anel grupo*** *RG é um anel associado ao grupo G. Aditivamente RG é o grupo livre abeliano gerado por G, ou seja, os elementos são combinações lineares finitas dos elementos do grupo G*

$$m_1g_1 + \ldots + m_kg_k, \quad m_i \in R, g_i \in G.$$

A multiplicação em RG é dada pela lei distributiva e pela multiplicação em G:

$$(\sum_i m_i g_i).(\sum_i n_j h_j) = \sum_{i,j}(m_i n_j)(g_i h_j), \ m_i, \ n_j \in R, \ g_i, h_j \in G.$$

É usual denotar tanto o elemento neutro de G como o elemento unidade $1_R.1$ do anel RG por 1.

Observação 3.1.1 *O anel RG é comutativo somente quando G é comutativo. Em geral consideraremos RG (o anel grupo de G sobre R), para $R = \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}_2$.*

Observação 3.1.2 *Para qualquer grupo G podemos definir o homomorfismo de anéis $\varepsilon : RG \longrightarrow R$ tal que $\varepsilon(g) = 1$ para todo $g \in G$ e estender por linearidade. Este homomorfismo é denominado aplicação aumentação. Note que ε é sobrejetor. O núcleo de ε é chamado ideal aumentação de RG, o qual denota-se por I ou IG. Pode-se mostrar que se S é um conjunto de geradores para G, então os elementos $s-1$ $(s \in S)$ geram I como um $\mathbb{Z}G$-módulo (à esquerda).*

No estudo de (co)homologia de grupos os coeficientes serão considerados sobre RG-módulos M. Obter um RG-módulo depende essencialmente de dar uma G-ação a M como mostra o resultado seguinte (para o conceito de G-ação vide Definição 1.1.27).

Proposição 3.1.1 *Seja G um grupo e M um conjunto não vazio. Então, M é um RG-módulo (à esquerda) se, e somente se, M é um R-módulo (à esquerda) munido de uma ação (à esquerda) de G sobre o grupo aditivo $(M, +)$.*

Demonstração: Se M é um RG-módulo, então M é um R-módulo, considerando: $rm := (r1)m$ e a G-ação dada por $g.m := (1_R g)m$. Reciprocamente, se M é um R-módulo e existe uma ação de G sobre M, então podemos dar a M uma estrutura de RG-módulo da seguinte forma: $(\sum r_g g)m := \sum r_g(g.m)$. ■

Corolário 3.1.1 *M é um $\mathbb{Z}G$-módulo se, e somente se, M é um grupo abeliano munido de uma G-ação.*

Corolário 3.1.2 *M é um $\mathbb{Z}_2G$-módulo, se e somente se, M é um $\mathbb{Z}_2$-módulo (equivalentemente, grupo abeliano em que todo elemento tem ordem 2) munido de uma G-ação.*

Observação 3.1.3 *(i) Podemos sempre ver R como um RG- módulo por considerar a G- ação trivial.*
(ii) Todo RG-módulo à esquerda M pode ser visto como um RG- módulo à direita por considerar $x.g = g^{-1}.x$, $x \in M$, $g \in G$ (e vice-versa).

Considerando X um G-conjunto e RX o R-módulo livre gerado pelos elementos de X, podemos estender a ação de G sobre X a uma ação de G sobre RX da seguinte maneira:

$$g.(\sum r_x x) := \sum r_x(g.x),$$

com $g \in G$, $r_x \in R$ e $x \in X$. Assim temos o seguinte resultado:

Proposição 3.1.2 *([10], I.3, Proposição 3.1, p.13) Sejam X um G-conjunto livre e E um conjunto de representantes para as G-órbitas em X. Então RX é um RG-módulo livre com base E.*

Demonstração: Seja $E = \{x_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ um conjunto de representantes para as G-órbitas em X. Então $X = \dot{\bigcup\limits_{x_\lambda \in E}} G(x_\lambda)$ e assim $RX = R\left(\dot{\bigcup\limits_{x_\lambda \in E}} G(x_\lambda)\right) = \bigoplus\limits_{x_\lambda \in E} R(G(x_\lambda))$ sendo que a última igualdade é verdadeira ([10], p.13). Agora, como a G-ação é livre temos, para cada x_λ, que a aplicação

$$f_\lambda : G \longrightarrow G(x_\lambda)$$

$$g \longmapsto f_\lambda(g) = g.x_\lambda$$

é uma bijeção. Daí, $R(G(x_\lambda)) \cong RG$. Logo, $RX = \bigoplus\limits_{x_\lambda \in E} (RG)_{x_\lambda}$. ■

Corolário 3.1.3 *Se S é um subgrupo de G então RG é um RS-módulo livre com base num conjunto E de representantes para as S-órbitas em G (que são as classes laterais à esquerda de S em G), isto é, $RG = \bigoplus\limits_{g \in E} g(RS)$.*

Demonstração: Temos que G é um S-conjunto com a ação dada pela multiplicação dos elementos de S por elementos de G (isto é, $s.g := sg$) e esta ação é livre pois ($s.g = g \Leftrightarrow s = 1$). Portanto, o resultado segue da proposição anterior. ■

Definição 3.1.2 *Sejam $\mathbf{R}$ um anel com unidade 1 e M um $\mathbf{R}$-módulo. Uma **resolução** de M sobre $\mathbf{R}$, ou uma $\mathbf{R}$-**resolução** de M, é uma sequência exata de R-módulos:*

$$\ldots \longrightarrow F_2 \xrightarrow{\partial_2} F_1 \xrightarrow{\partial_1} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$$

onde $\varepsilon : F_0 \longrightarrow M$ é chamada aplicação aumentação. Se cada F_i é $\mathbf{R}$-módulo livre (projetivo), dizemos que a resolução é livre (projetiva). É usual denotar uma tal resolução por $\varepsilon : F \longrightarrow M$.

Observação 3.1.4 (*a*) *Se considerarmos o complexo de cadeia não negativo $F = (F_i, \partial_i)_{i \geq 0}$, podemos ver $\varepsilon : F \longrightarrow M$ como uma aplicação de cadeias, onde M é identificado com o complexo de cadeia tal que $C_0 = M$ e $C_i = F_i$, se $i > 0$ ou $C_i = 0$, se $i < 0$.*

(b) Quando existir n tal que $F_i = 0$, para $i > n$, dizemos que a resolução tem comprimento finito (no máximo n). Neste caso, escrevemos simplesmente

$$0 \longrightarrow F_n \longrightarrow \ldots \longrightarrow F_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

Lema 3.1.1 *([21], Proposição 1.1, p.124) Dado um $\mathbf{R}$-módulo M, sempre podemos construir uma resolução livre (portanto, projetiva) de M sobre $\mathbf{R}$.*

Demonstração: Como todo $\mathbf{R}$-módulo M é o quociente de um $\mathbf{R}$-módulo livre ([21], I.4.6), temos $M \cong F_0/A_0$, onde F_0 é $\mathbf{R}$-livre. Seja $\varepsilon : F_0 \longrightarrow F_0/A_0$ a projeção canônica tal que $\varepsilon(x_0) = \overline{x}_0 = x_0 + A_0$. Como $Ker\varepsilon$ é submódulo de F_0, temos que $Ker\varepsilon$ também é $\mathbf{R}$-módulo, assim $Ker\varepsilon \cong F_1/A_1$, onde F_1 é $\mathbf{R}$-livre. Consideremos, agora, $\partial_1 : F_1 \longrightarrow F_1/A_1$ a projeção canônica tal que $\partial_1(x_0) = \overline{x}_1$. Procedendo sucessivamente, deste modo, teremos a sequência

$$\ldots \longrightarrow F_2 \xrightarrow{\partial_2} F_1 \xrightarrow{\partial_1} F_0 \xrightarrow{\varepsilon} M \longrightarrow 0$$

com $Ker\varepsilon = Im\partial_1$ e $Ker\partial_1 = Im\partial_{i+1}$, para $i \geq 1$. Logo, essa sequência é exata e, portanto, uma $\mathbf{R}$-resolução livre de M. ■

Em geral, como já mencionado, trabalharemos com módulos sobre $\mathbf{R} = RG$, para $R = \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}_2$. Um módulo sobre RG é também referido às vezes como RG-módulo ou simplesmente G-módulo.

Exemplo 3.1.1 *Seja $G = \langle t \rangle \simeq \mathbb{Z}$, o grupo cíclico infinito gerado por t. Então $0 \longrightarrow RG \xrightarrow{\partial} RG \xrightarrow{\varepsilon} R \longrightarrow 0$ é uma resolução livre de R sobre RG onde ∂ é a multiplicação por $(t-1)$ e ε é a aplicação aumentação.*

Exemplo 3.1.2 *Seja $G = \langle t \rangle \simeq \mathbb{Z}_n$ $(n \in \mathbb{N}^*)$, o grupo cíclico finito de ordem n gerado por t. Então a sequência*

$$\ldots \longrightarrow RG \xrightarrow{N} RG \xrightarrow{t-1} RG \xrightarrow{N} \ldots \longrightarrow RG \xrightarrow{t-1} RG \xrightarrow{\varepsilon} R \longrightarrow 0$$

é uma resolução livre de R sobre RG onde ε é a aplicação aumentação, e $t-1$ e N denotam respectivamente, a multiplicação por $t-1$ e $1 + t + \ldots + t^{n-1}$ (para detalhes ver [36]).

Lema 3.1.2 *([10], Exercício 2, p.30; [36], Lema 1.5.4, p.19) Se F é uma resolução projetiva de R sobre RG, e S é um subgrupo de G, então F também é uma resolução projetiva de R sobre RS.*

Demonstração: Seja $\ldots \longrightarrow F_n \longrightarrow \ldots \longrightarrow F_1 \longrightarrow F_0 \longrightarrow R \longrightarrow 0$ uma resolução projetiva de R sobre RG. Como cada F_n é um RG-módulo projetivo, por ([10], I, Proposição 8.2, p.27),

F_n é um somando direto de um RG-módulo livre. Deste modo,

$$F_n \oplus Q_n \cong \bigoplus_{i \in I} (RG)_i.$$

Agora, pelo Corolário 3.1.3, temos que RG é RS-módulo livre, assim $RG \cong \bigoplus_{j \in J} (RS)_j$. Portanto, $F_n \oplus Q_n \cong \bigoplus_{i,j} (RS)_{i,j}$ e, novamente por ([10], I, Proposição 8.2, p.27), temos que F_n é um RS-módulo projetivo. Logo, F é uma resolução projetiva de R sobre RS. ■

Proposição 3.1.3 (*[36], Proposição 1.5.5, p.20*) *Se $\varepsilon : F \longrightarrow \mathbb{Z}$ é uma resolução livre (projetiva) de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$ então $\varepsilon' : F' = F \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2 \simeq \mathbb{Z}_2$ é uma resolução livre (projetiva) de $\mathbb{Z}_2$ sobre $\mathbb{Z}_2G$.*

Proposição 3.1.4 (*Unicidade de Resoluções*) (*[10], I, Teorema 7.5, p. 24; [36], Proposição 1.5.6, p.21*) *Se $\varepsilon : F \longrightarrow R$ e $\varepsilon' : F' \longrightarrow R$ são resoluções projetivas de R sobre RG então existe uma aplicação de cadeias $\tau : F \longrightarrow F'$ preservando aumentação (isto é, $\varepsilon' \circ \tau = \varepsilon$), única a menos de homotopia e τ é uma equivalência de homotopia.*

Sejam G um grupo e M um RG-módulo (à esquerda).

Definição 3.1.3 (*i*) *O* ***grupo de coinvariantes de*** *M, denotado por M_G, é dado por:*

$$M_G = M / \langle g.m - m \ ; \ g \in G \text{ e } m \in M \rangle$$

onde $\langle g.m - m \ ; \ g \in G \text{ e } m \in M \rangle$ é o submódulo de M gerado pelos elementos $g.m - m$, com $g \in G$ e $m \in M$.
(*ii*)***O grupo de invariantes de*** *M, denotado por M^G, é dado por:*

$$M^G = \{m \in M; \ g.m = m, \forall g \in G\}.$$

Proposição 3.1.5 (*[10], p. 55, [36], Proposições 1.2.3, 1.2.6, p.5-6*)
(*i*) *Se R visto como RG-módulo trivial (à direita) então $R \otimes_{RG} M \simeq M_G$ como grupos (e como RG-módulos triviais).*
(*ii*) $(M \bigotimes_R N)_G = M \bigotimes_{RG} N$.
(*iii*) $M \bigotimes_{RG} N \simeq N \bigotimes_{RG} M$.

Proposição 3.1.6 *$Hom_{RG}(R, M) \cong M^G$, onde R é um RG-módulo com a G-ação trivial.*

Demonstração: Definindo $\psi : Hom_{RG}(R, M) \longrightarrow M^G$ por $\psi(f) := f(1)$, temos que ψ é um isomorfismo. ■

Restrição e (co)extensão de escalares- Módulos Coinduzidos

A referência deste parágrado é ([10], III. §3 e 5)

Consideremos A_1 e A_2 anéis e $k : A_1 \longrightarrow A_2$ um homomofismo de anéis.

(1) Se M é um A_2-módulo (à esquerda) sempre podemos ver M como um A_1-módulo (à esquerda) definindo em M a A_1-ação: $A_1 \times M \longrightarrow M$, $(a_1, m) \longmapsto a_1 m := k(a_1).m$

Obtemos, desta forma, um funtor da categoria dos A_2-módulos (à esquerda) para a categoria dos A_1-módulos (à esquerda) denominado *restrição de escalares* (via k). Neste caso M é denotado por $Res_{A_1}^{A_2} M$.

(2) Agora, se M é um A_1-módulo (à esquerda). Através do homomorfismo $k : A_1 \longrightarrow A_2$, podemos obter a partir de M, dois A_2-módulo (à esquerda): $A_2 \otimes_{A_1} M$ e $Hom_{A_1}(A_2, M)$ da forma a seguir:

• O A_2-módulo $A_2 \otimes_{A_1} M$

Usando a restrição de escalares vamos ver A_2 como um A_1-módulo (à direita).

$$A_2 \times A_1 \longrightarrow A_2$$

$$(a_1, a_2) \longmapsto a_2.a_1 = a_2 k(a_1).$$

Assim podemos considerar o produto tensorial $A_2 \otimes_{A_1} M$. A aplicação

$$A_2 \times (A_2 \otimes_{A_1} M) \longrightarrow A_2 \otimes_{A_1} M$$

$$(a_2, a_2' \otimes m) \longmapsto a_2(a_2' \otimes m) := a_2 a_2' \otimes m$$

está bem definida e é uma A_2-multiplicação. Logo, $A_2 \otimes_{A_1} M$ é um A_2-módulo obtido de M por extensão de escalares de A_1 para A_2 (via k).

• O A_2-módulo $Hom_{A_1}(A_2, M)$

Por restrição de escalares podemos ver A_2 como um A_1-módulo (à esquerda)

$$A_1 \times A_2 \longrightarrow A_2$$

$$(a_1, a_2) \longmapsto a_1.a_2 := k(a_1).a_2$$

e assim faz sentido considerar $Hom_{A_1}(A_2, M)$. Para que $Hom_{A_1}(A_2, M)$ se torne um A_2-módulo temos que definir uma A_2-multiplicação. Definimos então

$$A_2 \times Hom_{A_1}(A_2, M) \longrightarrow Hom_{A_1}(A_2, M)$$

$$(a_2, f) \longmapsto a_2.f; (a_2.f)(a_2') := f(a_2 a_2')$$

Pode-se mostrar que esta aplicação está bem definida e é uma A_2-multiplicação. Assim, $Hom_{A_1}(A_2, M)$ é um A_2-módulo denominado A_2-módulo obtido de M por coextensão de escalares de A_1 para A_2 (via k).

Definição 3.1.4 (*Módulos (Co)Induzidos*) *Sejam G um grupo e S um subgrupo de G. Definimos para cada RS-módulo M:*

• *O RG-módulo obtido de M por extensão de escalares que é denotado por $Ind_S^G M$ (e chamado de **indução**), isto é,*

$$Ind_S^G M = RG \otimes_{RS} M$$

onde a G-ação é dada por

$$G \times Ind_S^G M \longrightarrow Ind_S^G M$$

$$(g, g' \otimes m) \longmapsto g.(g' \otimes m) = gg' \otimes m$$

• *O RG-módulo obtido de M por coextensão de escalares que é denotado por $Coind_S^G M$ (chamado de **coindução**), ou seja,*

$$Coind_S^G M = Hom_{RS}(RG, M)$$

onde a G-ação é dada por

$$G \times Coind_S^G M \longrightarrow Coind_S^G M$$

$$(g, f) \longmapsto g.f; (g.f)(g') = f(g'g)$$

Proposição 3.1.7 (*[10], III.5, Proposição 5.9, p.70*) *Se $[G : S] < \infty$, então $Ind_S^G M \simeq Coind_S^G M$.*

Proposição 3.1.8 (*[10], Ex. 2, p. 71; [16], Lema I.3.10, p.16*) *Se M é um RS-módulo e N é um RG-módulo, então existe um RG-isomorfismo*

$$N \otimes_{RG} Ind_S^G M \simeq Ind_S^G(Res_S^G N \otimes_{RS} M),$$

onde $N \otimes_{RG} Ind_S^G M$ é visto como RG-módulo com a G-ação diagonal e $Res_S^G N \otimes_{RS} M$ é visto como RS-módulo com a S-ação diagonal.

Proposição 3.1.9 (*[10], Ex. 4, p. 71; [16], Lema I.3.11, p.17*) *Sejam G um grupo e S um subgrupo de G, com $[G : S] = \infty$. Então, para qualquer RS-módulo M,*

$$(Ind_S^G M)^G = 0.$$

Definição 3.1.5 (*(Co)homologia de Grupos*) *Sejam $\varepsilon : F \to R$ uma resolução projetiva de R sobre RG e M um RG-módulo (à esquerda). Consideremos os complexos de cadeia e cocadeia, respectivamente,*

$$F \otimes_{RG} M : \ldots \longrightarrow F_2 \otimes_{RG} M \xrightarrow{\overline{\partial}_2} F_1 \otimes_{RG} M \xrightarrow{\overline{\partial}_1} F_0 \otimes_{RG} M \longrightarrow 0,$$

$$Hom_{RG}(F,M) : 0 \longrightarrow Hom_{RG}(F_0,M) \xrightarrow{\delta^0} Hom_{RG}(F_1,M) \xrightarrow{\delta^1} Hom_{RG}(F_2,M) \longrightarrow \ldots,$$

*com o operador bordo dado por $\overline{\partial}_n := \partial_n \otimes id$ e operador cobordo dado por $\delta^n(f) := f \circ \partial_{n+1}$, para todo $f \in Hom_{RG}(F_n, M)$. Os n-**ésimos grupos de homologia e cohomologia de** G (sobre R) com coeficientes em M são, para todo $n \in \mathbb{Z}$, definidos, respectivamente, por:*

$$H_n(G;M) := H_n(F \otimes_{RG} M) = \frac{Ker\overline{\partial}_n}{Im\overline{\partial}_{n+1}}.$$

$$H^n(G;M) := H^n(Hom_{RG}(F,M)) = \frac{Ker\delta^n}{Im\delta^{n-1}}.$$

Proposição 3.1.10 *([10], III.1, p.57; [36], Proposição 2.1.4, p.24) Se M é um RG-módulo então*
(i) $H_0(G;M) \simeq M_G$;
(ii) $H^0(G;M) \simeq M^G$.

Demonstração: (i) Consideremos a resolução projetiva de R sobre RG:

$$\cdots \longrightarrow F_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_0 \xrightarrow{\varepsilon} R \longrightarrow 0.$$

Aplicando o funtor $- \otimes_{RG} M$, obtemos o complexo

$$\begin{array}{ccccccccc} \cdots & \longrightarrow & F_1 \otimes_{RG} M & \xrightarrow{\overline{\partial}_1} & F_0 \otimes_{RG} M & \xrightarrow{\overline{\varepsilon}} & R \otimes_{RG} M & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \downarrow_{\overline{\partial}_0} & & & & \\ & & & & 0 & & & & \end{array}$$

Por ([33], Teorema 2.10) temos que tal funtor é exato à direita assim $Im\,\overline{\partial}_1 = Ker\,\overline{\varepsilon}$ e $\overline{\varepsilon}$ é sobrejetora. Logo,

$$H_0(G;M) = \frac{Ker\,\overline{\partial}_0}{Im\,\overline{\partial}_1} = \frac{F_0 \otimes_{RG} M}{Ker\,\overline{\varepsilon}} \simeq R \otimes_{RG} M \overset{Prop.3.1.5(i)}{\simeq} M_G.$$

Portanto, $H_0(G;M) \simeq M_G$.
(ii) Aplicando o funtor funtor $Hom_{RG}(-,M)$, obtemos o complexo

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & Hom_{RG}(R,M) & \xrightarrow{\widetilde{\varepsilon}} & Hom_{RG}(F_0,M) & \xrightarrow{\delta^0} & Hom_{RG}(F_1,M) & \longrightarrow & \cdots \\ & & & & \uparrow_{\delta^{-1}} & & & & \\ & & & & 0 & & & & \end{array}$$

Agora, como, por ([33], Teorema 2.9) tal funtor é exato à esquerda, temos que $Im\,\widetilde{\varepsilon} = Ker\,\delta^0$ e $\widetilde{\varepsilon}$ é injetora. Assim,

$$H^0(G;M) = \frac{Ker\,\delta^0}{Im\,\delta^{-1}} = Ker\,\delta^0 = Im\,\widetilde{\varepsilon} \simeq Hom_{RG}(R,M) \overset{Prop.3.1.6}{\simeq} M^G.$$

Logo, $H^0(G;M) \simeq M^G$. ■

Exemplo 3.1.3 *Sejam $G = \{1\}$ e M um RG-módulo. Temos que $RG \equiv R$ e $0 \longrightarrow R \xrightarrow{\varepsilon} R \longrightarrow 0$ é uma resolução projetiva de R sobre RG. Aplicando o funtor $- \otimes_R M$ obtemos $0 \longrightarrow R \otimes_R M \longrightarrow 0$ e daí este complexo se reduz $0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$. Logo,*

$$H_i(\{1\};M) \cong \begin{cases} M, & se \quad i = 0 \\ 0, & se \quad i \geq 1. \end{cases}$$

Agora aplicando o funtor $Hom_R(-,M)$, obtemos o complexo $0 \longrightarrow Hom_R(R,M) \longrightarrow 0$. Mas, $Hom_R(R,M) \cong M$ (via o isomorfismo $f \mapsto f(1_R)$) e daí este complexo se reduz a $0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$. Logo,

$$H^i(\{1\};M) \cong \begin{cases} M, & se \quad i = 0 \\ 0, & se \quad i \geq 1. \end{cases}$$

Os dois exemplos seguintes estão apresentados em detalhes em [36].

Exemplo 3.1.4 *Sejam $G = \langle t \rangle \simeq \mathbb{Z}$ e M um RG-módulo. Então*

$$H_i(G;M) \simeq \begin{cases} M_G, & se \quad i = 0 \\ M^G, & se \quad i = 1 \\ 0, & se \quad i \geq 2 \end{cases} \quad e \quad H^i(G;M) \simeq \begin{cases} M^G, & se \quad i = 0 \\ M_G, & se \quad i = 1 \\ 0, & se \quad i \geq 2. \end{cases}$$

Exemplo 3.1.5 *Sejam M um RG-módulo e G um grupo cíclico infinito de ordem n com gerador t. Então pelo Exemplo 3.1.2 a sequência*

$$\ldots \longrightarrow RG \xrightarrow{N} RG \xrightarrow{t-1} RG \xrightarrow{N} \ldots \longrightarrow RG \xrightarrow{t-1} RG \xrightarrow{\varepsilon} R \longrightarrow 0$$

é uma resolução livre de R sobre RG onde ε é a aplicação aumentação, $t-1$ e N denotam respectivamente, a multiplicação por $t-1$ e $1 + t + \ldots + t^{n-1}$. Daí

$$H_i(G;M) = \begin{cases} M_G, & se\ i = 0 \\ \dfrac{Ker(t-1)}{Im\,N} = \dfrac{M^G}{NM}, & se\ i\ é\ ímpar \\ \dfrac{Ker\,N}{Im(t-1)} = \dfrac{Ker\,N}{(t-1)M}, & se\ i\ é\ par. \end{cases}$$

$$H^i(G;M) = \begin{cases} M^G, & se\ i=0 \\ \dfrac{Ker\ N}{Im(t-1)} = \dfrac{Ker\ N}{(t-1)M}, & se\ i\ é\ ímpar \\ \dfrac{Ker(t-1)}{Im\ N} = \dfrac{M^G}{NM}, & se\ i\ é\ par. \end{cases}$$

Em particular, para o caso $M = \mathbb{Z}$ (com G-ação trivial), temos que $t-1$ é a função nula, pois $(t-1).m = t.m - m = 0$, para todo $m \in M$, e N é a multiplicação por n, pois $(1+t+\ldots+t^{n-1}).m = m + t.m + \ldots + t^{n-1}.m = nm$. Assim $Ker(t-1) = \mathbb{Z}$, $Im(t-1) = 0 = KerN$ e $ImN = n\mathbb{Z}$. Deste modo,

$$H_i(G;\mathbb{Z}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}, & se\ \ i=0 \\ \mathbb{Z}_n, & se\ \ i\ \ é\ \ ímpar \\ 0, & se\ \ i\ é\ par \end{cases} \quad e \quad H^i(G;\mathbb{Z}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}, & se\ \ i=0 \\ 0, & se\ \ i\ é\ ímpar \\ \mathbb{Z}_n, & se\ \ i\ é\ par. \end{cases}$$

Vimos que se S é um subgrupo de um grupo G e M é um RS-módulo, $Ind_S^G M$ e $Coind_S^G M$ são RG-módulos. Considerando tais RG-módulos, temos o seguinte resultado que relaciona a (co)homologia do grupo G com a de seu subgrupo S.

Proposição 3.1.11 (*Lema de Shapiro*)(*[10], III.6, Prop. 6.2, p. 73; [36], Prop. 2.3.1, p.33*) *Sejam G um grupo, S um subgrupo de G e M um RS-módulo. Então são isomorfos:*
(a) $H_*(S;M) \simeq H_*(G;Ind_S^G M)$;
(b) $H^*(S;M) \simeq H^*(G;Coind_S^G M)$.

Corolário 3.1.4 *Sejam G um grupo e S um subgrupo de G, com $[G:S] < \infty$. Então $H^*(S;RS) \cong H^*(G;RG)$.*

Demonstração: Pelo Lema de Shapiro e pela Proposição 3.1.7 temos $H^*(S;RS) \cong H^*(G;Coind_S^G RS) \cong H^*(G;Ind_S^G RS) \cong H^*(G;RG \otimes_{RS} RS) \cong H^*(G;RG)$. ■

Proposição 3.1.12 (*[10], III, Proposição 6.1, p.71*) *Seja $0 \longrightarrow M' \xrightarrow{\varphi'} M \xrightarrow{\varphi''} M'' \longrightarrow 0$ uma sequência exata de RG-módulos. Temos:*
(i) Para todo $n \in \mathbb{Z}$, existe uma aplicação natural $\partial_n : H_n(G;M'') \longrightarrow H_{n-1}(G;M')$, tal que a sequência:

$$\ldots \longrightarrow H_1(G;M) \xrightarrow{(\varphi'')_1} H_1(G;M'') \xrightarrow{\partial_1} H_0(G;M') \xrightarrow{(\varphi')_0} H_0(G;M) \xrightarrow{(\varphi'')_0} H_0(G;M'') \longrightarrow 0$$

é exata, onde as aplicações $(\varphi')_n$ e $(\varphi'')_n$ são as induzidas em homologia, isto é, $(\varphi')_n : H_n(G;M') \longrightarrow H_n(G;M)$ e similarmente $(\varphi'')_n : H_n(G;M) \longrightarrow H_n(G;M'')$.

(ii) Para todo inteiro n, existe uma aplicação natural $\delta^n : H^n(G; M'') \longrightarrow H^{n+1}(G; M')$, tal que a sequência:

$$0 \longrightarrow H^0(G; M') \xrightarrow{(\varphi')^0} H^0(G; M) \xrightarrow{(\varphi'')^0} H^0(G; M'') \xrightarrow{\delta^0} H^1(G; M') \xrightarrow{(\varphi')^1} H^1(G; M) \longrightarrow \dots$$

é exata, onde as aplicações $(\varphi')^n$ e $(\varphi'')^n$ são as induzidas em cohomologia, isto é, $(\varphi')^n : H^n(G; M') \longrightarrow H^n(G; M)$ e $(\varphi'')^n : H^n(G; M) \longrightarrow H^n(G; M'')$.

3.1.1 Interpretação Topológica da (Co)homologia de grupos com coef. em $\mathbb{Z}$

O objetivo desta seção é apresentar uma interpretação topológica para a cohomologia de grupos com coeficientes no $\mathbb{Z}G$-módulo trivial $\mathbb{Z}$. O espaço associado será um CW-complexo especial.

Definição 3.1.6 *Dado um espaço X de Hausdorff, dizemos que X* ***admite uma estrutura de CW-complexo*** *se existir uma sequência ascendente de fechados $X^0 \subset X^1 \subset X^2 \dots$ que satisfaz as seguintes condições:*
(i) X^0 tem a topologia discreta;
(ii) Para cada $n > 0$, X^n é obtido de X^{n-1} por adjunção de n-células (caso exista), isto é, $X^n - X^{n-1}$ é uma união disjunta de subconjuntos abertos (em X^n) $e^n_\lambda, \lambda \in \Lambda$, (chamados n-células abertas) onde cada e^n_λ é "colada" a X^{n-1} por meio de uma aplicação chamada aplicação característica. Isto significa que para cada λ existe uma aplicação contínua $f_\lambda : \overline{U^n} \longrightarrow \overline{e^n_\lambda}$ tal que f_λ aplica U^n homeomorficamente sobre e^n_λ e $f_\lambda(\overline{U^n} - U^n) \subset X^{n-1}$, onde $U^n := \{x \in \mathbb{R}^n \ ; \ \|x\| < 1\}$. Além disso, $A \subset X^n$ é fechado se, e somente se, $A \cap X^{n-1}$ e $f_\lambda^{-1}(A)$ são fechados para todo $\lambda \in \Lambda$;
(iii) $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} X^n$;
(iv) O espaço X e os subespaços X^n têm a topologia fraca, isto é, um subconjunto A de X (ou de X^n) é fechado se, e somente se, $A \cap \overline{e^n}$ é fechado para todos as n-células $e^n, n = 0, 1, 2, \dots$.

O subconjunto X^n (da definição anterior) é chamado n**-esqueleto**. Os pontos de X^0 são chamados **vértices** ou **0-células**. Um CW-complexo é dito **finito** se sua coleção de células é finita e **infinito**, caso contrário. Se $X = X^n$ para algum inteiro n (onde X^n necessariamente foi obtido por adjunção de pelo menos 1 n-célula) dizemos que o CW-complexo tem **dimensão finita** n. Um subconjunto A de CW-complexo é chamado **subcomplexo** se A é uma união de células de X e para toda célula e^n, $e^n \subset A$ implicar em $\overline{e^n} \subset A$.

Exemplo 3.1.6 *Seja $X = \mathbb{R}$. Podemos dar a $\mathbb{R}$ uma estrutura natural de CW-complexo onde as 0-células e 1-células são dadas, respectivamente, por $e^0_n = \{n\}$ e $e^1_n =]n, n+1[$ com $n \in \mathbb{Z}$.*

Exemplo 3.1.7 *Seja $X = S^n$ (n-esfera). Uma estrutura de CW-complexo sobre S^n pode ser dada por uma 0-célula e^0 e uma n-célula e^n.*

Exemplo 3.1.8 *Consideremos $X = \bigvee_{\lambda\in\Lambda} S^1_\lambda$, o bouquet de círculos indexado por um conjunto Λ. Podemos dar a X uma estrutura de CW-complexo 1-dimensional com uma única 0-célula e uma 1-célula para cada elemento de Λ, ou seja, $X = e^0 \cup (\bigcup_{\lambda\in\Lambda} e^1_\lambda)$.*

Exemplo 3.1.9 *Podemos dar a T^2 (toro) uma estrutura de CW-complexo 2-dimensional com uma 0-célula, duas 1-células e uma 2-célula.*

Observação 3.1.5 *É também usual denotar uma n-célula por σ^n ou simplesmente por σ quando a dimensão estiver clara no contexto.*

Definição 3.1.7 *Um G-**complexo** é um CW-complexo X munido de uma ação de G em X que permuta as células (isto é, se Λ representa o conjunto das células de X então $g.\Lambda = \Lambda$, para todo $g \in G$). Quando a ação de G em X permuta livremente as células dizemos que X é um G-**complexo livre**.*

Observação 3.1.6 *É importante notar que, pelo fato da ação de G em X induzir um homomorfismo dado por*

$$\begin{aligned} \varphi : G &\rightarrow Homeo(X) \\ g &\mapsto \varphi_g : X \rightarrow X \end{aligned}$$

tal que $\varphi_g(x) = g \cdot x$, temos que, se σ é uma célula de X, então $g \cdot \sigma$ também é uma célula de X cuja dimensão é a mesma de σ (ou seja, φ_g preserva dimensão).

Seja X um G-complexo. Podemos formar o complexo de cadeias $C_*(X;R)$, onde $C_n(X;R)$ é o R-módulo livre gerado pelas n-células de X.

A ação de G em X induz uma ação em $C_*(X;R)$ da seguinte forma:

$$g \cdot (a_1\sigma_1 + \ldots + a_n\sigma_n) := a_1 g \cdot \sigma_1 + \ldots + a_n g \cdot \sigma_n.$$

Assim, $C_*(X;R)$ torna-se um complexo de cadeias de RG-módulos.

Definimos a aplicação $\varepsilon : C_0(X;R) \rightarrow R$ por $\varepsilon(\sigma^0) = 1$, nas 0-células σ^0 de X, e a estendemos por linearidade.

Temos que ε é uma aplicação de RG-módulos, pois, $g \cdot \sigma^0$ também é 0-célula.

Proposição 3.1.13 *Se X é um G-complexo livre contráctil então o complexo de cadeia celular aumentado de X:*

$$\ldots \longrightarrow C_2(X;R) \xrightarrow{\partial_2} C_1(X;R) \xrightarrow{\partial_1} C_0(X;R) \xrightarrow{\varepsilon} R \longrightarrow 0$$

é uma resolução livre de R sobre RG.

Demonstração: Seja $X_n = \{\sigma \in X \ ; \ \sigma$ é uma n-célula$\} \subset X$. Temos que $C_n(X;R) = RX_n$. Agora, como $X_n \subset X$ e X um G-complexo livre, temos que X_n é um G-conjunto livre. Logo, pela Proposição 3.1.2, $C_n(X;R)$ é um RG-módulo livre com base E, onde E é um conjunto de representantes para as G-órbitas em X_n. Além disso, sendo X contráctil, temos que X tem o mesmo tipo de homotopia de um ponto, e deste modo

$$H_n(X;R) \simeq H_n(\{x_0\};R) \simeq \begin{cases} R, & \text{se } \ n = 0 \\ 0, & \textit{caso contrário.} \end{cases}$$

Mas $H_n(X;R) = Ker\partial_n / Im\partial_{n+1}$, segue que $Ker\partial_n = Im\partial_{n+1}$, para $n > 0$. Resta mostrar, que $Ker\varepsilon = Im\partial_1$. Pelo teorema do homomorfismo, $C_0(X;R)/Ker\varepsilon \simeq Im\varepsilon = R$. Por outro lado, $C_0(X;R)/Im\partial_1 = H_0(X;R) \simeq R$. Assim, $C_0(X;R)/Ker\varepsilon \simeq C_0(X;R)/Im\partial_1$ e como $Im\partial_1 \subset Ker\varepsilon$ temos que $Ker\varepsilon = Im\partial_1$. Logo, a sequência

$$\ldots \longrightarrow C_n(X;R) \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1}(X;R) \xrightarrow{\partial_{n-1}} \ldots \longrightarrow C_0(X;R) \xrightarrow{\varepsilon} R \longrightarrow 0$$

é exata e portanto uma resolução livre de R sobre RG. ∎

K(G,1)-complexos

Sejam X um CW-complexo e $\widetilde{X} \xrightarrow{p} X$, um recobrimento de X. Por ([35], III.6.9.2), temos que $\widetilde{X}$ também é um CW-complexo (as n-células $\widetilde{\sigma}$ de $\widetilde{X}$ são as componentes conexas de $p^{-1}(\sigma)$, onde σ é uma n-célula de X, e $p|_{\widetilde{\sigma}} : \widetilde{\sigma} \to \sigma$ é um homeomorfismo).

O grupo G das transformações de recobrimento atua livremente em $\widetilde{X}$ permutando suas células (Proposição 1.1.12). Assim, $\widetilde{X}$ é um G-complexo.

Se $\widetilde{X}$ é contráctil, o complexo celular aumentado de $\widetilde{X}$ é uma RG-resolução livre de R e $C_n(\widetilde{X}, R)$ é um RG-módulo livre com um elemento básico para cada órbita de célula em $\widetilde{X}$ (Proposição 3.1.13).

Se o recobrimento é regular, temos que G atua transitivamente em $p^{-1}(\sigma)$, ou seja, $G(\widetilde{\sigma}) = p^{-1}(\sigma)$, para todo $\widetilde{\sigma} \in p^{-1}(\sigma)$ (Proposição 1.1.15 e Observação 1.1.12). Logo cada célula em X nos fornece uma órbita de células de mesma dimensão em $\widetilde{X}$. Se, além disso, o recobrimento é contráctil, temos que $C_*(\widetilde{X};R)$ é um RG-módulo livre com um elemento básico para cada célula de X.

Será definido a seguir um CW-complexo que satisfaz todas as condições citadas anteriormente. Daqui em diante, $\pi_1(X,x)$ será denotado simplesmente por $\pi_1(X)$.

Definição 3.1.8 *([10], I.4, p.15) Dizemos que X é um* ***complexo de Eilenberg-Maclane***

do tipo $(G,1)$ *(ou um* $K(G,1)$*-complexo) se* X *é um* CW*-complexo satisfazendo as seguintes condições:*
(i) X *é conexo;*
(ii) $\pi_1(X) \simeq G$*;*
(iii) o recobrimento universal $\widetilde{X}$ *de* X *é contráctil.*

Observação 3.1.7 *A condição (iii) acima pode ser substituída por*
(iii') $H_i(\widetilde{X}) = 0$*, para todo* $i \geq 2$*, ou*
(iii") $\pi_i(X) = 0$*, para todo* $i \geq 2$*.*

Observação 3.1.8 *Dado um grupo* G *é sempre possível construir um complexo de Eilenberg-Maclane* $K(G,1)$ *([10], VIII, Teorema 7.1, p.205). Uma construção detalhada de tal espaço é apresentada em ([30], Capítulo 3, §2).*

Exemplo 3.1.10 *Sejam* $G = \langle \alpha \rangle \simeq \mathbb{Z}$ *e* $X = S^1$*. Temos que* X *é um* $K(G,1)$*-complexo, pois é um* CW*-complexo conexo, com* $\pi_1(X) = G$ *e o recobrimento universal de* X *é* $\widetilde{X} = \mathbb{R}$ *(Exemplo 1.1.7), que é contráctil.*

Exemplo 3.1.11 *Sejam* $G = \mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}$ *(grupo abeliano livre de posto* n*) e* $X = T^n = S^1 \times \ldots \times S^1$ *(o toro n-dimensional). Temos que* X *é um* CW*-complexo conexo,* $\pi_1(X) = G$ *e o recobrimento universal de* X *é* $\widetilde{X} = \mathbb{R}^n$ *(Exemplo 1.1.9), que é contráctil. Logo,* X *é um* $K(G,1)$*-complexo.*

Exemplo 3.1.12 *Sejam* $G = F(S)$ *(grupo livre gerado por um conjunto* S*) e* $X = \bigvee_{s \in S} S^1_s$ *(bouquet de círculos indexados por um conjunto* S*). Temos que* X *é um* CW*-complexo conexo de dimensão 1 (Exemplo 3.1.8), com exatamente um vértice e uma 1-célula para cada elemento de* S *e,* $\pi_1(X) = G$ *([28], IV, Exemplo 3.4, p.125). Além disso,* X *é conexo e, se* $\widetilde{X}$ *é o recobrimento universal de* X*, temos que* $\widetilde{X}$ *tem dimensão 1 (pois* $\widetilde{X} \xrightarrow{p} X$ *é homeomorfismo local). Assim,* $H_i(\widetilde{X}) = 0$ *para* $i \geq 2$*. Portanto,* X *é um* $K(G,1)$*-complexo.*

Lema 3.1.3 *Se* X *é um* G*-complexo livre compacto, então* G *é finito.*

Demonstração: Como X é um G-complexo livre, segue por ([10], p. 17) que a ação de G em X é propriamente descontínua. Pela Proposição 1.1.18 temos que (X,p) é um recobrimento regular de X/G, onde X/G é o espaço das órbitas de X, a aplicação p é definida por

$$\begin{array}{rccc} p: & X & \rightarrow & X/G \\ & x & \mapsto & \overline{x} \end{array}$$

e G atua livremente em X como o grupo das transformações de recobrimento.

Agora, dado $\overline{x}_0 \in X/G$, temos

$$\begin{aligned} p^{-1}(\overline{x}_0) &= \{x \in X;\ p(x) = \overline{x}_0\} \\ &= \{x \in X;\ \overline{x} = \overline{x}_0\} \\ &= \{x \in X;\ x \in G(x_0)\}. \end{aligned}$$

Como a ação de G em X é livre, $p^{-1}(\overline{x}_0)$ está em correspondência 1-1 com G. Pois,

$$p^{-1}(\overline{x}_0) = G(x_0) \simeq G/G_{x_0} \overset{Observ.1.1.12}{\simeq} G/\{1\} \simeq G.$$

Além disso, a fibra $p^{-1}(\overline{x}_0)$ é discreta e fechada (Proposição 1.1.16). Suponhamos que $p^{-1}(\overline{x}_0)$ seja infinita. Como X é compacto, pela propriedade de Bolzano-Weierstrass, tal fibra possui um ponto de acumulação, o que é um absurdo, pois $p^{-1}(\overline{x}_0)$ é discreta. Deste modo, $p^{-1}(\overline{x}_0)$ é finita e, portanto, G é finito. ■

Exemplo 3.1.13 *Sejam* $G = \left\langle a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_g, \prod_{i=1}^{g}[a_i, b_i] = 1 \right\rangle$, *com g um inteiro maior ou igual a 1. Temos que G é o grupo com geradores $a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_g$, e única relação $\prod_{i=1}^{g}[a_i, b_i] = 1$, onde $[a_i, b_i] = a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}$. Além disso, G é infinito. Temos ainda que G é o grupo fundamental da superfície orientada X de genus g (a soma conexa de g toros) ([28], IV.5, Exemplo 5.3, p.131). Afirmamos que X é um $K(G,1)$-complexo. De fato, seja $\widetilde{X} \xrightarrow{p} X$ o recobrimento universal de X. Como G é infinito, temos, pelo Lema 3.1.3, que $\widetilde{X}$ não é compacto, assim, $\widetilde{X}$ é uma superfície não compacta e conexa e portanto $\widetilde{X} = \mathbb{R}^2$ que é contráctil. Logo X é um $K(G,1)$-complexo.*

Proposição 3.1.14 *Se X é um $K(G,1)$-complexo, então o complexo de cadeia celular aumentado do recobrimento universal $\widetilde{X}$ de X:*

$$\cdots \longrightarrow C_2(\widetilde{X}; R) \xrightarrow{\partial_2} C_1(\widetilde{X}; R) \xrightarrow{\partial_1} C_0(\widetilde{X}; R) \xrightarrow{\varepsilon} R \longrightarrow 0$$

é uma resolução livre de R sobre RG.

Demonstração: Como X é um $K(G,1)$, então $\widetilde{X}$ é um G-complexo livre contráctil (Observação 1.1.13). Logo, pela Proposição 3.1.13, temos que o complexo acima (de cadeia celular aumentado do recobrimento universal) é uma resolução livre de R sobre RG. ■

Exemplo 3.1.14 *([10], I.4, Exemplo 4.3, p.16) Sejam $G = F(S)$, o grupo livre gerado por um conjunto S e $X = \bigvee_{s \in S} S_s^1$ (bouquet de círculos indexados em S). Como X é um $K(G,1)$-complexo e o recobrimento universal de X é um complexo 1-dimensional, obtemos a seguinte* *resolução livre*

$$0 \longrightarrow C_1(\widetilde{X}) \xrightarrow{\partial_1} C_0(\widetilde{X}) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

Como um ponto base em $\widetilde{X}$ tome um vértice x_0, isto então representa a única G-órbita de vértices de X e daí gera o $\mathbb{Z}G$-módulo $C_0(\widetilde{X})$. Como base para $C_1(\widetilde{X})$ tome, para cada $s \in S$, uma 1-célula orientada e_s de $\widetilde{X}$ que é projetada sobre s'_s (no sentido positivo). Assim $C_1(\widetilde{X}) \cong \oplus\mathbb{Z}G^{(S)}$. Substituindo e_s por $g.e_s$ para um $g \in G$ conveniente, nós podemos supor que o vértice inicial de e_s é o ponto base x_0, o ponto final de e_s será então sx_0 de modo que $\partial(e_s) = sx_0 - x_0 = (s-1)x_0$. Nós obtemos então a resolução livre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}G^{(S)} \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

onde $\mathbb{Z}G^{(S)}$ é o $\mathbb{Z}G$-módulo livre com base $(e_s)_{s\in S}$, $\partial(e_s) = s-1$, e $\varepsilon(g) = 1$ para todo $g \in G$.

Para obter a interpretação topológica de $H^*(G) = H^*(G;\mathbb{Z})$ e $H_*(G) = H_*(G;\mathbb{Z})$ precisamos ainda do seguinte resultado:

Proposição 3.1.15 *Sejam X um G-complexo livre e Y o complexo de órbitas X/G. Então $C_*(Y) \simeq C_*(X)_G = C_n(X)/\langle g\cdot\alpha - \alpha;\ g \in G, \alpha \in C_n(X)\rangle$.*

Demonstração: Consideremos a projeção canônica

$$p : X \to X/G;\ x \mapsto p(x) = G(x) = \{g\cdot x;\ g \in G\}$$

Entre os complexos de cadeias, temos a aplicação induzida

$$p_\# : C_n(X) \to C_n(X/G); \sum a_i\sigma_i \mapsto \sum a_iG(\sigma_i)$$

onde σ_i são n-células de X. Agora, seja

$$\gamma : C_n(X) \to C_n(X)_G = C_n(X)/A;\ \alpha \mapsto \overline{\alpha} = \alpha + A$$

onde $A = \langle g\cdot\alpha - \alpha;\ g \in G, \alpha \in C_n(X)\rangle$. Definimos

$$\varphi : C_n(X)_G \to C_n(X/G);\quad \overline{\alpha} \mapsto \varphi(\overline{\alpha}) = \varphi(\overline{\sum a_i\sigma_i}) = p_\#(\alpha) = \sum a_iG(\sigma_i).$$

• φ está bem definida. De fato, $A \subset Ker\, p_\#$, pois, se σ_i é uma n-célula e $g \in G$, temos

$$p_\#(g\cdot\sigma_i - \sigma_i) = p_\#(g\cdot\sigma_i) - p_\#(\sigma_i) = G(g\cdot\sigma_i) - G(\sigma_i) = 0.$$

Então, $x \in A \Rightarrow x = \sum_i (g_i\cdot\alpha_i - \alpha_i)$, $\alpha_i \in C_n(X) \Rightarrow x = \sum_i \left(g_i\sum_j \sigma^i_j - \sum_j \sigma^i_j\right) = \sum_{i,j}\left(g_i\cdot\sigma^i_j - \sigma^i_j\right)$. Assim, $p_\#(x) = p_\#\left(\sum_{i,j}(g_i\cdot\sigma^i_j - \sigma^i_j)\right) = 0$. Deste modo,

$$\overline{\alpha_1} = \overline{\alpha_2} \Rightarrow (\alpha_1 - \alpha_2) \in A \subset Ker\, p_\# \Rightarrow p_\#(\alpha_1) = p_\#(\alpha_2) \Rightarrow \varphi(\overline{\alpha_1}) = \varphi(\overline{\alpha_2}).$$

É fácil ver que φ é homomorfismo de grupos. Além disso,

• φ é sobrejetora. Pois, para todo x,

$$x = \sum a_iG(\sigma_i) \in C_n(X/G),\ \textit{existe}\ y = \sum a_i\overline{\sigma_i} \in C_n(X)_G \text{ tal que } \varphi(y) = x.$$

• φ é injetora. De fato:

$$\varphi(\overline{\sum a_i\sigma_i}) = 0 \Rightarrow \sum a_iG(\sigma_i) = 0 \Rightarrow a_i = 0 \Rightarrow \sum a_i\sigma_i = 0 \Rightarrow \overline{\sum a_i\sigma_i} = 0.$$

Portanto, φ é isomorfismo. ∎

Proposição 3.1.16 (*[10], II.4, Proposição 4.1, p.36*) *Se G é um grupo e X é um $K(G,1)$-complexo, então*

$$(i)\ H_*(G) \simeq H_*(X); \qquad (ii)\ H^*(G) \simeq H^*(X).$$

Demonstração: Como X é um $K(G,1)$, pela Proposição 3.1.14, temos que o complexo celular aumentado do recobrimento universal $\widetilde{X}$ de X, $\varepsilon : C_*(\widetilde{X}) \to \mathbb{Z}$ é uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$. Assim podemos usar tal resolução para obter $H_*(X)$. Além disso, $\widetilde{X}$ é um G-complexo livre (vide Observação 1.1.13) e o complexo de órbitas é dado por $\widetilde{X}/G$. Por ([28], p.165), X é homeomorfo a $\widetilde{X}/G$.
(i) Como $C_*(\widetilde{X}) \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z} \overset{Prop.3.1.5(iii)}{\simeq} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} C_*(\widetilde{X}) \overset{Prop.3.1.5(i)}{\simeq} C_*(\widetilde{X})_G$ segue que

$$H_*(G) = H_*(G,\mathbb{Z}) = H_*(C_*(\widetilde{X}) \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z}) \simeq H_*(C_*(\widetilde{X})_G).$$

Pela Proposição 3.1.15, temos que $C_*(\widetilde{X})_G \simeq C_*(X)$ e por ([29], Teorema 4.2, p.85), $H_*(C_*(X)) \simeq H_*(X)$. Logo, $H_*(G) \simeq H_*(C_*(\widetilde{X})_G) \simeq H_*(C_*(X)) \simeq H_*(X)$.
(ii) Similarmente ao caso de homologia podemos considerar a resolução acima para calcular $H^*(G)$. Assim $H^*(G) \simeq H^*(Hom_{\mathbb{Z}G}(C_*(\widetilde{X}),\mathbb{Z}))$. Agora, $H^*(X) \simeq H^*(\widetilde{X}/G)$ (pois $X \simeq \widetilde{X}/G$). Mas, $H^*(\widetilde{X}/G) \simeq H^*(Hom_{\mathbb{Z}}(C_*(\widetilde{X}/G),\mathbb{Z}))$. Assim é suficiente mostrarmos que $Hom_{\mathbb{Z}G}(C_*(\widetilde{X}),\mathbb{Z}) \simeq Hom_{\mathbb{Z}}(C_*(\widetilde{X}/G),\mathbb{Z})$. Temos que

$$C_*(\widetilde{X}/G) \overset{Prop.3.1.15}{\simeq} C_*(\widetilde{X})_G \overset{Prop.3.1.5(i)}{\simeq} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} C_*(\widetilde{X})$$

Daí, $Hom_{\mathbb{Z}}(C_*(\widetilde{X}/G),\mathbb{Z}) \simeq Hom_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} C_*(\widetilde{X}),\mathbb{Z}) \simeq Hom_{\mathbb{Z}G}(C_*(\widetilde{X}),\mathbb{Z})$.
Logo, $H^*(X) \simeq H^*(G)$. ∎

Exemplo 3.1.15 *Consideremos o bouquet de círculos $X = \bigvee_{s\in S} S^1_s$. Temos que X é um $K(F(S),1)$, onde $F(S)$ é o grupo livre gerado pelo conjunto S. Assim, pela proposição anterior*

$$H_i(X) = H_i(F(S)) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & se\ i=0 \\ \bigoplus_{s\in S} \mathbb{Z}, & se\ i=1 \\ 0, & caso\ contrário. \end{cases}$$

De fato, isso é obtido a partir da resolução dada no Exemplo 3.1.14.

Exemplo 3.1.16 *Seja X a soma conexa de g toros, $g \geq 1$. Pelo Exemplo 3.1.13, X é um*

$K(G,1)$, onde $G = \left\langle a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_g, \prod_{i=1}^{g}[a_i, b_i] = 1 \right\rangle$. *Portanto, pela proposição anterior*

$$H_i(X) = H_i(G) \quad = \quad \begin{cases} \mathbb{Z}, & \textit{se } i = 0 \\ \mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z} \quad \textit{(2g vezes)}, & \textit{se } i = 1 \\ \mathbb{Z}, & \textit{se } i = 2 \\ 0, & \textit{se } i \geq 3. \end{cases}$$

3.1.2 Caso Geral - (Co)homologia com Coeficientes Locais

Existe ([10], III.1, p.59) uma interpretação topológica para $H_*(G; M)$ e $H^*(G; M)$ onde M é um $\mathbb{Z}G$-módulo qualquer (em particular para $M = \mathbb{Z}$ visto como $\mathbb{Z}G$-módulo "não" trivial) similar à apresentada para $H_*(G)$ e $H^*(G)$ (Proposição 3.1.16). No entanto, os grupos $H_*(X; M)$ e $H^*(X; M)$ tem que ser interpretados como grupos de homologia e cohomologia com "coeficientes locais" se G atua não trivialmente sobre M. Para obter tal interpretação alguns conceitos e resultados são necessários, dentre eles o conceito de homologia e cohomologia com coeficientes locais.

(Co)homologia com Coeficientes Locais

As referências utilizadas aqui são [12] (vide Capítulo 5) e [27] (VII, §11).

Observação 3.1.9 ([12], *Capítulo 5, §1, p.96*) *Seja M um grupo abeliano. Sabemos que M é um $\mathbb{Z}G$-módulo se e somente se existe uma G-ação sobre M, ou equivalentemente um homomorfismo $\rho : G \longrightarrow Aut(M)$ (dado por $g \longmapsto \rho(g); \rho(g)(m) = g.m$) (Observação 1.1.11). É usual chamar ρ ou M de uma representação de G. A G-ação sobre M ser trivial equivale a ρ ser o homomorfismo trivial.*

Se o $\mathbb{Z}G$-módulo M é especificado por uma representação $\rho : G \longrightarrow Aut(M)$ e desejamos enfatizar esta representação colocamos em M um índice ρ, isto é, usamos a notação M_ρ.

Temos que $Aut(\mathbb{Z}) = \{id_{\mathbb{Z}};\ n \longmapsto -n\} \overset{Not.}{=} \{1, -1\}$. Se $\mathbb{Z}$ tem uma estrutura de $\mathbb{Z}G$-módulo não trivial então o homomorfismo associado $\rho : G \longrightarrow Aut(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2$ é sobrejetor. Daí, pelo teorema do homomorfismo $G/Ker\rho \cong \mathbb{Z}_2$. Assim se G atua não trivialmente sobre $\mathbb{Z}$ então G tem um subgrupo (normal) de índice 2.

Observação 3.1.10 *Seja X um espaço conexo e localmente conexo por caminhos com ponto base, que admite recobrimento universal. Sejam $G = \pi_1(X)$ e $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ o recobrimento universal de X, com a G-ação usual que identifica $G = \pi_1(X)$ com o grupo $A(X, p)$ das transformações de recobrimento (Definição 1.1.27). Então o complexo de cadeia singular $C_*(\widetilde{X})$ do recobrimento universal de X (com coeficientes inteiros) é um $\mathbb{Z}G$-módulo à direita. A ação à direita de $g \in \pi_1(X) = A(X, p)$ sobre um simplexo singular $\sigma : \triangle^k \longrightarrow \widetilde{X}$ é dada pela* *identificação de $\pi_1(X)$ com o grupo das transformações de recobrimento $A(\widetilde{X}, p) = \{\varphi : \widetilde{X} \longrightarrow \widetilde{X};\ \varphi$ é um homeomorfismo e $p \circ \varphi = p\}$ (dados x_0 ponto base em X, $\widetilde{x}_0$ ponto base em $\widetilde{X}$, com $p(\widetilde{x}_0) = x_0$ (fixados) e $[\alpha] \in \pi_1(X)$, existe um único levantamento $\widetilde{\alpha}$ de α com ponto inicial $\widetilde{x}_0$ e um único elemento $\varphi \in A(\widetilde{X}, p)$ tal que $\varphi(\widetilde{x}_0) = \widetilde{\alpha}(1)$. Associamos a $[\alpha]$ o homeomorfismo φ, ou ainda identificamos $[\alpha] \equiv \varphi$). Então o complexo singular $C_*(\widetilde{X})$ do recobrimento universal (com coeficientes inteiros) é um $\mathbb{Z}(\pi_1(X))$-módulo à direita; a ação de $g = [\alpha] \in \pi_1(X)$ em um simplexo singular $\sigma : \triangle^k \longrightarrow \widetilde{X}$ é o simplexo singular $\sigma.g$ definido como a composição de σ e da transformação $g \equiv \varphi : \widetilde{X} \longrightarrow \widetilde{X}$. Esta se estende de $\pi_1(X)$ para $\mathbb{Z}(\pi_1(X))$ por linearidade. Note que podemos transformar $C_*(\widetilde{X})$ em um $\mathbb{Z}(\pi_1(X))$-módulo à esquerda pelo procedimento padrão: $g.z = z.g^{-1}$.*

Podemos agora introduzir a definição de homologia com coeficientes locais.

Definição 3.1.9 *([12], Definição 5.3 e 5.4, p.96; [27], IV, §11, p.136) Sejam X um espaço que admite recobrimento universal e $C_*(\widetilde{X})$ um $\mathbb{Z}G$-módulo à direita onde $G = \pi_1(X)$. Dado um $\mathbb{Z}(\pi_1(X))$-módulo M, formamos o produto tensorial $C_*(X; M) = C_*(\widetilde{X}) \otimes_{\mathbb{Z}(\pi_1(X))} M$. Este é o complexo de cadeias cuja homologia é chamada **homologia de X com coeficientes locais em** M, que vamos denotar por $\boldsymbol{H}_*(X; M)$.*

*Agora dado um $\mathbb{Z}(\pi_1(X))$-módulo à esquerda M, formamos o complexo de cocadeias $C^*(X; M) = Hom_{\mathbb{Z}(\pi_1(X))}(C_*(\widetilde{X}), M)$ o conjunto dos homomorfismos de grupos $f : C_*(\widetilde{X}) \longrightarrow M$ que satisfazem $f(rz) = rf(z)$ para todo $r \in \mathbb{Z}(\pi_1(X))$ e $z \in C_*(\widetilde{X})$. A cohomologia deste complexo é chamada a **cohomologia de X com coeficientes locais em** M, denotada por $\boldsymbol{H}^*(X; M)$.*

Observação 3.1.11 *Enfatizamos que no Capítulo 1 definimos a homologia e cohomologia de X com coeficientes em um R-módulo M, com R anel comutativo mas o anel $R = \mathbb{Z}G$, usado na definição anterior, em geral não é comutativo. Se M é um $\mathbb{Z}G$-módulo, podemos ver M como um $\mathbb{Z}$-módulo e considerar $H_*(X; M)$ e $H^*(X; M)$ como definidos no Capítulo 1. No entanto esta definição não leva em conta a G-ação. Na (co)homologia com coeficientes locais esta G-ação é considerada.*

Proposição 3.1.17 *([12], 5.1, p.99) Se M é um $\mathbb{Z}G$-módulo trivial então*

$$\boldsymbol{H}_k(X; M) \cong H_k(X; M)$$

$$\boldsymbol{H}^k(X; M) \cong H^k(X; M)$$

onde $H_k(X; M)$ e $H^k(X; M)$ indicam, respectivamente, a homologia e cohomologia usual de X com coeficientes no $\mathbb{Z}$-módulo (grupo abeliano) M e $\boldsymbol{H}_k(X; M)$, $\boldsymbol{H}^k(X; M)$ a homologia e cohomologia de X com coeficientes locais no $\mathbb{Z}G$-módulo trivial M.

Demonstração: Denotemos por M_ρ o conjunto M com a estrutura de $\mathbb{Z}G$-módulo trivial. O resultado segue essencialmente do fato que $C_*(\widetilde{X}) \otimes_{\mathbb{Z}G} M_\rho \cong C_*(X) \otimes_{\mathbb{Z}} M$ e $Hom_{\mathbb{Z}G}(C_*(\widetilde{X}), M_\rho) \cong Hom_{\mathbb{Z}}(C_*(\widetilde{X}), M)$. Mais detalhes ver ([12], 5.2, p.99). ∎

Proposição 3.1.18 *([12], 5.2, p.99) Considere o módulo $\mathbb{Z}G$ visto como $\mathbb{Z}G$-módulo com a G-ação dada pela multiplicação usual ($g.x = gx$, para todo $g, x \in G$). Vamos denotar a representação associada a $\mathbb{Z}G$ por ρ. Então:*
(i)$\boldsymbol{H}_k(X; \mathbb{Z}G_\rho) \cong H_k(\widetilde{X}; \mathbb{Z})$(homologia usual de $\widetilde{X}$);
(ii) $\boldsymbol{H}_*(X; (\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}} M)_{\widetilde{\rho}}) \cong H_*(\widetilde{X}; M)$ (homologia usual com coeficientes no grupo abeliano M) se M é um $\mathbb{Z}G$-módulo trivial e $\widetilde{\rho}$ corresponde a G-ação $g.(x \otimes m) = g.x \otimes g.m \overset{\rho\ trivial}{=} g.x \otimes m$.
(iii) $\boldsymbol{H}^k(X; (\mathbb{Z}G)_\rho) \cong H^k_c(\widetilde{X}; \mathbb{Z})$ (a cohomologia de $\widetilde{X}$ com suporte compacto).

Finalmente, apresentamos a interpretação topológica.

Teorema 3.1.1 *Seja G um grupo e M um $\mathbb{Z}G$-módulo. Se X é um $K(G,1)$-complexo então*

$$H_k(G; M) \cong \boldsymbol{H}_k(X; M)$$

$$H^k(G; M) \cong \boldsymbol{H}^k(X; M)$$

onde a homologia e cohomologia do espaço X são com coeficientes locais.

Demonstração: Seja $\widetilde{X}$ o espaço de recobrimento universal de X e considere o complexo de cadeia singular $C_*(\widetilde{X})$ de $\widetilde{X}$. Vimos que $G = \pi_1(X)$ opera (à direita) sobre $C_*(\widetilde{X})$ (Observação 3.1.10). Ainda $G = \pi_1(X)$ opera propriamente descontinuamente sobre $\widetilde{X}$ (Observação 1.1.13). Daí por ([27], IV, Lema 11.2, p.135) $C_*(\widetilde{X})$ é um complexo de $\mathbb{Z}G$-módulos livres. Como $\widetilde{X}$ é contráctil, de forma similar à prova da Proposição 3.1.14, segue que

$$\ldots \longrightarrow C_2(\widetilde{X}) \xrightarrow{\partial_2} C_1(\widetilde{X}) \xrightarrow{\partial_1} C_0(\widetilde{X}) \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

é uma resolução livre (projetiva) de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$. Logo, considerando essa resolução, temos, pela definição de (co)homologia de grupos e de (co)homologia com coeficientes locais, que

$$H_k(G; M) = H_k(C_*(\widetilde{X}) \otimes_{\mathbb{Z}G} M) = \mathbf{H}_k(X; M)$$

$$H^k(G; M) = H^k(Hom_{\mathbb{Z}G}(C_*(\widetilde{X}), M)) = \mathbf{H}^k(X; M).$$ ∎

Corolário 3.1.5 *Se M é um $\mathbb{Z}G$-módulo trivial então*

$$H_k(G; M) = H_k(X; M)$$

$$H^k(G; M) = H^k(X; M)$$

onde $H_k(X;M)$ e $H^k(X;M)$ indicam, respectivamente, a homologia e cohomologia usual de X com coeficientes no $\mathbb{Z}$-módulo M.

Demonstração: Segue do teorema anterior e da Proposição 3.1.17. ∎

Exemplo 3.1.17 *Seja $G = \langle t \rangle \cong \mathbb{Z}$ o grupo cíclico infinito. Vimos no Exemplo 3.1.4 que:*

$$H^k(G;M) \cong \begin{cases} M^G, & se \quad k=0 \\ M_G, & se \quad k=1 \\ 0, & se \quad k \geq 2 \end{cases}$$

e no Exemplo 3.1.10 que $X = S^1$ é um $K(G,1)$. Assim, se M é um $\mathbb{Z}G$-módulo qualquer então

$$\boldsymbol{H}^k(S^1;M) \cong H^k(G;M) \cong \begin{cases} M^G, & se \quad k=0 \\ M_G, & se \quad k=1 \\ 0, & se \quad k \geq 2. \end{cases}$$

Em particular, se M é $\mathbb{Z}G$-módulo trivial

$$H^k(S^1;M) \cong H^k(G;M) \cong \begin{cases} M, & se \quad k=0 \\ M, & se \quad k=1 \\ 0, & se \quad k \geq 2 \end{cases}$$

e considerando $M = R$ com a G-ação trivial, temos:

$$\boldsymbol{H}^k(S^1;R) \cong H^k(S^1;R) \cong H^k(G;R) \cong \begin{cases} R, & se \quad k=0 \\ R, & se \quad k=1 \\ 0, & se \quad k \geq 2. \end{cases}$$

Note que se tomamos $M = \mathbb{Z}$ com G-ação não trivial então a homologia com coeficientes locais

$$\boldsymbol{H}^k(S^1;\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} 0, & se \quad k=0 \\ \mathbb{Z}_2, & se \quad k=1 \\ 0, & se \quad k \geq 2 \end{cases}$$

pois se a ação é não-trivial existe $g_0 \in G$ tal que $g_0.m = -m$ para todo $m \in \mathbb{Z}$. Daí $\mathbb{Z}^G = \{m \in \mathbb{Z};\ g.m = m, \forall g \in G\} \overset{g_0.m=-m}{=} \{0\}$ e $\mathbb{Z}_G = \mathbb{Z}/\langle g.m - m, g \in G, m \in \mathbb{Z}\rangle = \mathbb{Z}/\langle -2m, m \in \mathbb{Z}\rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_2$.

3.2 Condições de finitude - Dimensão (co)homológica

Nesta seção veremos algumas definições tais como de dimensão (co)homológica de um grupo, resoluções de tipo finito, grupos de tipo FP_n, FP e FL, conceitos esses que estão intimamente relacionados com de dualidade de grupos.

Definição 3.2.1 *A* ***dimensão homológica*** *de G sobre R ($R = \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}_2$), denotada por hd_RG, é definida por*

$$hd_RG = \sup\{n : H_n(G; M) \neq 0, \ \textit{para algum } RG - \textit{móduloM}\}.$$

Se não existir tal inteiro, consideramos $hd_RG = \infty$. Analogamente, definimos a ***dimensão cohomológica*** *de G sobre R, denotada por cd_RG,*

$$cd_RG = \sup\{n : H^n(G; M) \neq 0 \ \textit{para algum } RG - \textit{módulo } M\}$$

e $cd_RG = \infty$ quando não existe tal inteiro n.

Observação 3.2.1 *É claro que se R admite uma resolução projetiva sobre RG, de comprimento finito, isto é, uma resolução do tipo abaixo, onde $P_m = 0$ se $m > n$*

$$0 \longrightarrow P_n \longrightarrow \ldots \longrightarrow P_0 \longrightarrow R \longrightarrow 0$$

então, $cd_RG \leq n$ e $hd_RG \leq n$.

Proposição 3.2.1 *Se $cd_RG < \infty$, então*

$$cd_RG = \sup\{k : H^k(G; F) \neq 0, \ \textit{para algum } RG\textit{-módulo livre } F\}.$$

Demonstração: Seja $n = cd_RG$. Então, por definição, $H^n(G; M) \neq 0$ para algum RG-módulo M e $H^m(G; M) = 0$ para $m > n$. Como todo módulo é quociente de um módulo livre, $M \simeq F/F'$, onde F é livre. Assim temos a sequência exata curta:

$$0 \longrightarrow F' \longrightarrow F \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

Aplicando a sequência exata longa de cohomologia (Proposição 3.1.12), obtemos a sequência

$$0 \to H^0(G; F') \to H^0(G; F) \to H^0(G; M) \to \ldots$$

$$\to H^n(G; F') \to H^n(G; F) \to H^n(G; M) \to 0$$

Como o funtor $H^n(G; -)$ é exato à direita e por hipótese $H^n(G; M) \neq 0$, para algum M, segue que $H^n(G; F) \neq 0$, para algum módulo livre F aplicado sobre M, isto é, tal que $M \cong F/F'$. Do fato que $\{k : H^k(G; F) \neq 0$, para algum RG -módulo livre $F\} \subset \{k : H^k(G; M) \neq 0$, para algum RG - módulo M$\}$, obtemos resultado desejado. ∎

Exemplo 3.2.1 *Seja $G \simeq \mathbb{Z}$ um grupo cíclico infinito. Pela Proposição 3.1.10 e Exemplo 3.1.4 temos que $H^0(G;M) = M^G$, $H^1(G;M) = M_G$ e $H^i(G;M) = 0$ para $i \geq 2$. Assim, $cd_{\mathbb{Z}}G \leq 1$. Como $H^1(G;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$, segue que $cd_{\mathbb{Z}}G = 1$.*

Exemplo 3.2.2 *Se G é o grupo finito de ordem n, então $cd_{\mathbb{Z}}G = \infty$. De fato, pelo Exemplo 3.1.5, temos que*

$$H^i(G;\mathbb{Z}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z}, & se \quad i = 0 \\ 0, & se \quad i \quad impar \\ \mathbb{Z}_n, & se \quad i \; par, i \geq 2. \end{cases}$$

Logo, $cd_{\mathbb{Z}}G = \infty$.

Definição 3.2.2 *Seja G um grupo. Dizemos que G tem **R-torção** se existe um elemento g em G cuja ordem, denotada por $o(g)$, é finita e não invertível em R (isto é, $o(g)$ é um inteiro $n > 0$ tal que $n.1_R$ não é invertível em R). Caso contrário dizemos que G é um **grupo livre de R-torção** ou sem R-torção. Um grupo sem $\mathbb{Z}$- torção é denominado, simplesmente, de um **grupo livre de torção**.*

Observação 3.2.2 *([6], Proposição 4.12, p.63) $cd_RG = 0$ se, e somente se, G é finito sem R-torção.*

Exemplo 3.2.3 *$cd_{\mathbb{Z}}G = 0$ se, e somente se, G é o grupo trivial. De fato, seja $G = \{1\}$. Temos que*

$$H^i(G;M) \simeq \begin{cases} M^G, & se \quad i = 0 \\ 0, & se \quad i \neq 0 \end{cases}$$

Agora, como $H^0(G;\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}^G = \mathbb{Z}$ (pois a G-ação é trivial) temos que $cd_{\mathbb{Z}}G = 0$. Por outro lado, suponhamos $cd_{\mathbb{Z}}G = 0$. Deste modo, pela Observação 3.2.2, G é finito e sem $\mathbb{Z}$-torção. Mas o grupo trivial é o único grupo finito que não tem $\mathbb{Z}$-torção. Portanto, G é o grupo trivial.

Exemplo 3.2.4 *Se G é um grupo livre então $cd_{\mathbb{Z}}G = 1$. Para ver isso observe que do Exemplo 3.1.14 e Observação 3.2.1 segue que $cd_{\mathbb{Z}}G \leq 1$. Por outro lado, $cd_{\mathbb{Z}}G \neq 0$, visto que G é infinito. Logo $cd_{\mathbb{Z}}G = 1$. A recíproca, isto é, se $cd_{\mathbb{Z}}G = 1$ então G é um grupo livre, é também verdadeira (ver [39] e [40]).*

Exemplo 3.2.5 *Seja G o grupo fundamental de X, onde X é uma superfície conexa fechada (diferente da esfera S^2 e do plano projetivo P^2). Então, $cd_{\mathbb{Z}}G = 2$. Com efeito, como no Exemplo 3.1.13, temos que X é um $K(G,1)$-complexo 2-dimensional, (pois o recobrimento universal é $\widetilde{X} = \mathbb{R}^2$ que é contráctil) e assim $0 \longrightarrow C_2(\widetilde{X}) \longrightarrow C_1(\widetilde{X}) \longrightarrow C_0(\widetilde{X}) \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$ é uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$ (por Proposição 3.1.14) e portanto $cd_{\mathbb{Z}}G \leq 2$. Pela Proposição 3.1.16, temos que $H^2(G;\mathbb{Z}_2) \cong H^2(X;\mathbb{Z}_2)$ que é não nulo. Isto segue do fato que toda superfície é $\mathbb{Z}_2$-orientável, logo $H_2(X;\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$ (por Teorema 1.2.3 (i)) e do teorema dos coeficientes universais. Logo, $cd_{\mathbb{Z}}G = 2$.*

Proposição 3.2.2 *Seja S um subgrupo de G. Então $cd_R S \leq cd_R G$. Se $cd_R G < \infty$ e $[G:S] < \infty$ a igualdade é válida.*

Demonstração: Suponhamos $cd_R S = n$. Então, por definição, existe M tal que $H^n(S;M) \neq 0$ e $H^k(S;M) = 0$ para $k > n$. Mas, $0 \neq H^n(S;M) \overset{Shapiro}{\simeq} H^n(G; Coind_S^G M)$. Deste modo, $H^n(G; Coind_S^G M) \neq 0$, ou seja, existe $N = Coind_S^G M$ tal que $H^n(G;N) \neq 0$. Assim, $cd_R G \geq n$. Portanto, $cd_R S \leq cd_R G$. Se $cd_R S = \infty$ então é maior que n para todo n e por raciocínio similar chegamos que $cd_R G \geq n$ para todo n. Assim neste caso a desigualdade também é válida ($cd_R G \geq cd_R S$).

Consideremos agora, as hipóteses $cd_R G < \infty$ e $[G:S] < \infty$. Suponhamos $cd_R G = n$. Pela Proposição 3.2.1, existe um RG-módulo livre F, com $H^n(G;F) \neq 0$. Seja F' um RS-módulo livre de mesmo posto que F. Assim, podemos escrever

$$F = \bigoplus_{j \in J} (RG)_j \qquad e \qquad F' = \bigoplus_{j \in J} (RS)_j.$$

Temos então:
$Ind_S^G F' = RG \otimes_{RS} F' = RG \otimes_{RS} (\bigoplus_{j \in J} RS)_j \cong \bigoplus_{j \in J} (RG \otimes_{RS} RS)_j \simeq \bigoplus_{j \in J} (RG)_j = F$. Deste modo, $H^n(G;F) = H^n(G; Ind_S^G F') \simeq H^n(G; Coind_S^G F') \overset{Shapiro}{\simeq} H^n(S;F')$. Visto que $H^n(G;F) \neq 0$, temos $H^n(S;F') \neq 0$. Logo, existe F' tal que $H^n(S;F') \neq 0$. Assim $cd_R S \geq n = cd_R G$, isto é, $cd_R G \leq cd_R S$. Portanto, $cd_R G = cd_R S$. ■

Corolário 3.2.1 *Se $cd_{\mathbb{Z}} G < \infty$, então G é livre de torção.*

Demonstração: Suponhamos que G não seja livre de torção. Desta forma, G contém um subgrupo S cíclico finito não trivial pois se G não é livre de torção, existe $g \in G$ tal que $o(g) = k$. Seja $S = \langle g \rangle \simeq \mathbb{Z}_k$. Pelo Exemplo 3.2.2, temos que, $cd_{\mathbb{Z}} G = \infty$, o que nos dá uma contradição. Portanto, G é livre de torção. ■

Observação 3.2.3 *A proposição anterior não garante a igualdade $cd_R S = cd_R G$ quando S é um subgrupo de G tal que $[G:S] < \infty$ e $cd_R G = \infty$. É o que acontece por exemplo para $G = \mathbb{Z}_2$ e $S = \{1\}$. Pois temos que $[G:S] = 2 < \infty$, $cd_R G = \infty$ mas $cd_R S = 0$ que é diferente de $cd_R G$.*

Proposição 3.2.3 ([10], VIII, Proposição 2.6, p.187) *Para qualquer grupo G, existe uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$ de comprimento igual a $cd_{\mathbb{Z}} G$.*

Definição 3.2.3 ([10], VIII.4, p.193; [6], I.1, p. 6) *Seja M um **R**-módulo (R anel comutativo). Uma resolução (P_k) ou uma resolução parcial $P_n \longrightarrow \ldots \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$ de M é de **tipo finito** se cada P_i é finitamente gerado. Um módulo M é de **tipo** FP_n $(n \geq 0)$*

se possui uma resolução projetiva parcial de tipo finito: $P_n \longrightarrow \ldots \longrightarrow P_0 \longrightarrow M \longrightarrow 0$. *Se* M *possui uma resolução de tipo finito, isto é com* P_i *finitamente gerado para todo* i*, dizemos que* M *é de* ***tipo*** FP_∞.

Proposição 3.2.4 (*[10], VIII, Proposição 4.5, p.195*) *As seguintes condições são equivalentes para um módulo* M*:*
(i) M *admite uma resolução livre de tipo finito;*
(ii) M *admite uma resolução projetiva de tipo finito;*
(iii) M *é de tipo* FP_n*, para todo inteiro* $n \geq 0$.

Definição 3.2.4 (*[6], I.2, p. 19; [10], VIII.5, p.197*) *Um grupo* G ***é de tipo*** FP_n ***sobre*** R *(*R*, anel comutativo com unidade,* $0 \leq n \leq \infty$*) se o* RG*-módulo trivial* R *é de tipo* FP_n *como um* RG*-módulo. Se* G *é de tipo* FP_n *sobre* $\mathbb{Z}$ *então dizemos apenas que* G *é de tipo* FP_n*. Note que se* G *é de tipo* FP_n*, então* G *é de tipo* FP_n *sobre qualquer anel* R *(em particular sobre* $\mathbb{Z}_2$*).*

Exemplo 3.2.6 *Todo grupo* G *é de tipo* FP_0*, pois* $RG \xrightarrow{\varepsilon} R \longrightarrow 0$ *é uma resolução parcial de* R *sobre* RG *de comprimento zero com* R *finitamente gerado como* RG *módulo.*

Proposição 3.2.5 *Um grupo* G *é finitamente gerado se e somente se* G *é de tipo* FP_1 *(sobre* $\mathbb{Z}$*).*

Demonstração: Suponhamos G finitamente gerado, $G = \langle s_1, \ldots, s_n \rangle$. Daí o ideal aumentação $I = ker\varepsilon$, $\varepsilon : \mathbb{Z}G \longrightarrow \mathbb{Z}$, também é finitamente gerado pois I é gerado por $\{(s_1 - 1), \ldots, (s_n - 1)\}$. Assim $I = F/Q$ com $F = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}G$. Através da sequência exata de $\mathbb{Z}G$-módulos:

$$0 \longrightarrow I \xrightarrow{i} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

podemos construir uma outra sequência exata de $\mathbb{Z}G$-módulos:

$$\bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}G \xrightarrow{p} I \xrightarrow{i} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

onde $p : F \longrightarrow I$ é a projeção canônica. Como $Im(i \circ p) = Ker\varepsilon$, tomando $P_1 = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}G$ e $P_0 = \mathbb{Z}G$, obtemos a resolução parcial finita de comprimento 1 de módulos finitamente gerados de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$:

$$\bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{Z}G \xrightarrow{i \circ p} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

Para a recíproca ver [6] (I, Proposição 2.1, p.19). ■

Proposição 3.2.6 (*[6], Proposição 2.2, p.20*) *Se G é finitamente presentado, então G é de tipo FP_2.*

A recíproca da proposição anterior é falsa, um contra-exemplo foi dado em [4].

Definição 3.2.5 (*[10], VIII.6, p. 199*) *Uma* ***resolução projetiva é dita finita*** *se é de tipo finito e de comprimento finito. Um grupo G* ***é de tipo*** *FP sobre R se R (visto como RG-módulo trivial) admite uma resolução projetiva finita $\varepsilon : P \longrightarrow R$ sobre RG, isto é, existe uma resolução $\varepsilon : 0 \to P_n \to \ldots \to P_0 \to R \to 0$ de comprimento finito, com cada P_i finitamente gerado como RG-módulo. Se R admite uma resolução livre finita sobre RG dizemos que G* ***é de tipo*** *FL.*

Exemplo 3.2.7 *Todo grupo $G \simeq F(K)$, o grupo livre com k geradores, $k \geq 1$, é de tipo FP (ou mesmo FL) pois*

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}G^{(k)} \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

é uma resolução livre de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$ de comprimento 1 (vide Exemplo 3.1.14) e os módulos envolvidos $\mathbb{Z}G$ e $\mathbb{Z}G^{(k)}$ são finitamente gerados como $\mathbb{Z}G$-módulos.

Proposição 3.2.7 (*[10], VIII, Proposição 6.1, p. 199*) *Um grupo G é de tipo FP se, e somente se, $cd_R G < \infty$ e G é de tipo FP_∞.*

3.3 Grupos de Dualidade - produto cap para grupos

Nesta seção veremos o importante conceito de grupos de dualidade, isto é, grupos que satisfazem certos isomorfismos em homologia e cohomologia. Um caso especial desse conceito é o de grupo de dualidade de Poincaré, cujas homologia e cohomologia satisfazem relações de dualidades análogas as de homologia e cohomologia para variedades fechadas (orientadas ou não). Consideramos $R = \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}_2$. Iniciamos com a definição do produto "cap" para grupos. A seguir definimos grupo de dualidade e apresentamos alguns exemplos e resultados relacionados. Veremos por exemplo que os grupos de dualidade são determinados pelo "módulo dualizante" C e a "dimensão n" que aparecem na definição de um grupo de dualidade.

Definição 3.3.1 (*[6], III.9.4, p.146 ou [10] V.3, p.112*) *Sejam G um grupo e M, N dois RG-módulos. Considere o RG-módulo $M \otimes_R N$ com a G-ação diagonal ($g(m \otimes n) = gm \otimes gn$). Queremos definir um "**produto**"*

$$- \frown - : H_{r+s}(G; M) \otimes H^r(G, N) \longrightarrow H_s(G; M \otimes_R N),$$

para todo $r, s \in \mathbb{Z}$. Seja $P \longrightarrow R$ uma resolução projetiva de R (visto como RG- módulo trivial), então $P \otimes_R P \longrightarrow R$ é também uma resolução projetiva de R ([10], V. 1.2, p.

107). Usando as resoluções $P \otimes_R P$, P *e as definições de homologia e cohomologia de grupos, podemos considerar* $H_{r+s}(G; M) = H_{r+s}((P \otimes_R P) \otimes_{RG} M)$; $H^r(G; N) = H^r(Hom_{RG}(P, N))$ *e* $H_s(G; M \otimes N) = H_s(P \otimes_{RG} (M \otimes_R N))$.

Para $z = (p \otimes q) \otimes a \in (P \otimes P) \otimes_{RG} M$ *e* $f \in Hom_{RG}(P, N)$, *definimos*

$$z \frown f = [(p \otimes q) \otimes a] \frown f := q \otimes (a \otimes f(p)) \in P \otimes_{RG} (M \otimes_R N).$$

Tal produto é denominado produto cap de z *e* f. *As mesmas notação e terminologia são usadas para o produto induzido* $H_{r+s}(G; M) \otimes H^r(G; N) \longrightarrow H_s(G; M \otimes_R N)$.

Que "$\frown$" induz uma aplicação bem definida em homologia/cohomologia segue do fato que

$$\partial(z \frown f) = (-1)^{grau(f)}(\partial z \frown f) + z \frown \delta f,$$

onde ∂ denota o operador bordo nos complexos de cadeias $P \otimes_{RG} (M \otimes_R N)$ e $P \otimes_G (M \otimes_R N)$, e δ denota o cobordo no complexo de cocadeias $Hom_{RG}(P, N)$ ([6], III. 9.4, p. 146).

Observação 3.3.1 *Alguns autores, como [10], definem o produto cap iniciando com a cohomologia:* $- \frown - : H^r(G; N) \otimes H_{r+s}(G; M) \longrightarrow H_s(G; M \otimes_R N)$. *Aqui estamos sendo coerentes com o produto cap definido para espaços.*

Definição 3.3.2 *: ([8] Definição 1.1, p. 105; [6], III.9.2, Teorema 9.5, p. 138 e 148) Um grupo* ***G é um grupo de dualidade de dimensão*** n *sobre* R *(ou simplesmente um* D^n*-grupo sobre* R*) se existir um* RG*- módulo à direita* C, *e uma "classe fundamental"* $e \in H_n(G; C)$ *tal que o produto cap com "e" induz um isomorfismo (natural):*

$$e \frown - : H^k(G; M) \longrightarrow H_{n-k}(G; C \otimes_R M) \quad (\triangle)$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$ *e todo* RG*-módulo* M, *com* G *atuando diagonalmente no produto tensorial. O* RG*-módulo à direita* C ***é chamado módulo dualizante*** *de* G. *Se* $C \simeq R$ *então* G *é chamado grupo de dualidade de Poincaré de dimensão* n *sobre* R *(ou um* PD^n*-grupo sobre* R*). Além disso se a ação de* G *em* R *é trivial dizemos que* G ***é orientável****. Caso contrário dizemos que* G ***é não orientável****. Note que um grupo* G *de dualidade de Poincaré orientável é tal que* $H^k(G; M) \cong H_{n-k}(G; M)$, *para todo* $\mathbb{Z}G$*-módulo* M.

Observação 3.3.2 *Todo grupo de dualidade de Poincaré sobre* $\mathbb{Z}_2$ *é orientável, pois a única* G*-ação em* $\mathbb{Z}_2$ *é a trivial. Assim,* PD^n*-grupos sobre* $\mathbb{Z}_2$ *são sempre orientáveis.*

Observação 3.3.3 *Brown em [10] (VIII, §10) trabalha apenas com grupo de dualidade sobre* $\mathbb{Z}$. *Um tratamento envolvendo grupo de dualidade sobre* R *é dado em [6] (III, §9). Nesse trabalho o autor diz que um grupo é de dualidade se existem isomorfismos como em* $(\triangle)$ *mas* *não exige que seja dado pelo produto cap. No entanto é provado em seguida ([6], Teorema 9.5, p.148) que se G é de dualidade então o isomorfismo é dado pelo produto cap.*

Proposição 3.3.1 *Se G é um D^n-grupo sobre $\mathbb{Z}$ com módulo dualizante C então G é um D^n-grupo sobre $\mathbb{Z}_2$ com módulo dualizante $C' = C \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2$. Em particular, se G é um PD^n-grupo sobre $\mathbb{Z}$ então G é um PD^n-grupo sobre $\mathbb{Z}_2$.*

Demonstração: Por hipótese G é um D^n-grupo sobre $\mathbb{Z}$ com módulo dualizante C. Seja M um $\mathbb{Z}_2$G-módulo. Temos:

$$C \otimes_{\mathbb{Z}} M \simeq C \otimes_{\mathbb{Z}} (M \otimes_{\mathbb{Z}_2} \mathbb{Z}_2) \simeq C \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}_2} M) \simeq (C \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2) \otimes_{\mathbb{Z}_2} M = C' \otimes_{\mathbb{Z}_2} M$$

e este isomorfismo preserva G-ação. Logo, obtemos o isomorfismo natural:

$$H^k(G; M) \simeq H_{n-k}(G; C \otimes_{\mathbb{Z}} M) \simeq H_{n-k}(G; C' \otimes_{\mathbb{Z}_2} M).$$

■

O resultado anterior nos mostra que a classe de grupos de dualidade sobre $\mathbb{Z}_2$ é mais ampla do que a de grupos de dualidade sobre $\mathbb{Z}$. Mostremos agora que se G é um D^n-grupo sobre R então o módulo dualizante C e o inteiro n são determinados a partir de G.

Proposição 3.3.2 *Se G é um grupo de dualidade de dimensão n sobre R com módulo dualizante C então:*
(i) $C \neq 0$;
(ii) $C \simeq H^n(G; RG)$;
(iii) $n = cd_R(G)$.

Demonstração: (i) Tomando $k = 0$ e $M = R$ no isomorfismo de dualidade segue que $H^0(G; R) \simeq H_n(G; C)$. Agora, $H^0(G; R) \simeq R^G = R$ (pois R é visto como RG-módulo com a G-ação trivial). Assim $H_n(G; C) \simeq R \neq 0$. Portanto, $C \neq 0$.
(ii) Usando $k = n$ e $M = RG$ no isomorfismo de dualidade, obtemos

$$H^n(G; RG) \simeq H_0(G; C \otimes_R RG) \overset{Prop3.1.10}{\simeq} (C \otimes_R RG)_G \overset{Prop3.1.5(i)}{\simeq} R \otimes_{RG} (C \otimes_R RG)$$

$$\overset{Prop3.1.5(iii)}{\simeq} (C \otimes_R RG) \otimes_{RG} R \simeq C \otimes_R (RG \otimes_{RG} R) \simeq C \otimes_R R \simeq C.$$

(iii) Por (i) e (ii), temos que $H^n(G; RG) \neq 0$. Logo, $n \leq cd_R G$. Por outro lado, temos que $H^k(G; M) \simeq H_{n-k}(G; C \otimes_R M) = 0$ se $k > n$ (pois $n - k < 0$). Daí, $cd_R G \leq n$. ■

Observação 3.3.4 *([6], 9.2, p.139) Se G é um D^n-grupo, $H^j(G; \mathbb{Z}G) = 0$ se $j < n$.*

Corolário 3.3.1 *Todo grupo de dualidade sobre $\mathbb{Z}$ é livre de torção.*

Demonstração: Segue do Corolário 3.2.1 visto que $cd_{\mathbb{Z}}G = n < \infty$. ∎

Proposição 3.3.3 *([6], III.9.2, Teorema 9.2, p.140) Todo grupo de dualidade sobre R é de tipo FP sobre R.*

Como todo grupo de tipo FP (sobre R) é finitamente gerado, visto que é FP_n para todo n, e assim FP_1 (vide Proposição 3.2.7 e Proposição 3.2.5), obtemos então como consequência da proposição anterior o seguinte resultado.

Corolário 3.3.2 *Todo grupo de dualidade é finitamente gerado.*

Observação 3.3.5 *Segue da proposição anterior que para definirmos grupos de dualidade, podemos nos restringir à categoria dos grupos de tipo FP. As seguintes condições são equivalentes para um grupo de tipo FP ([10], VIII.10, Teorema 10.1, p.220):*
(i) Existem um inteiro n e um $\mathbb{Z}G$-módulo C tais que $H^i(G; M) \simeq H_{n-i}(G; C \otimes_{\mathbb{Z}} M)$ para todos os $\mathbb{Z}G$-módulos M e todo inteiro $i \in \mathbb{Z}$.
(ii) Existem isomorfismos naturais $H^i(G; -) \simeq H_{n-i}(G; C \otimes_{\mathbb{Z}} -)$, onde $n = cd_{\mathbb{Z}}G$ e $C = H^n(G; \mathbb{Z}G)$, para todo inteiro $i \in \mathbb{Z}$.
(iii) Existe um inteiro n tal que $H^i(G; \mathbb{Z}G) = 0$, para todo $i \neq n$ e $H^n(G; \mathbb{Z}G)$ é livre de torção (como grupo abeliano).
(iv) Existe um inteiro n tal que $H^i(G; \mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}} A) = 0$, para todo $i \neq n$ e todos grupos abelianos A.
Dessa maneira, se G é um grupo de tipo FP e queremos mostrar que G é um grupo de dualidade (sobre $\mathbb{Z}$), basta mostrarmos que uma das condição acima é verdadeira.

Proposição 3.3.4 *Sejam G um grupo e S um subgrupo de G. Se G é um PD^n-grupo orientável e $[G : S] < \infty$ então S é também um PD^n-grupo orientável.*

Demonstração: Sendo G um PD^n-grupo (orientável), temos então que

$$H^k(G; M) \simeq H_{n-k}(G; M),$$

para todo $k \in \mathbb{Z}$ e todo $\mathbb{Z}G$-módulo M. Daí,

$$H^k(S; M) \overset{Shapiro}{\simeq} H^k(G; Coind_S^G M) \overset{dualidade}{\simeq} H_{n-k}(G; Coind_S^G M) \overset{Prop.3.1.7}{\simeq}$$

$$\overset{Prop.3.1.7}{\simeq} H_{n-k}(G; Ind_S^G M) \overset{Shapiro}{\simeq} H_{n-k}(S; M).$$

Portanto, S é um PD^n-grupo. ∎

Mais geralmente temos:

Proposição 3.3.5 *([6], III.9.6, Teorema 9.9, p. 157) Sejam G um grupo sem R-torção e S um subgrupo de G de índice finito. Então, G é um grupo de dualidade sobre R se, e somente se, S é um grupo de dualidade. Mais ainda, se G e S são grupos de dualidade, então eles têm o mesmo módulo dualizante. (Mais precisamente, se C é o módulo dualizante para G, então o módulo dualizante para S é isomorfo ao módulo $Res_S^G C$, obtido pela restrição da ação de G para S).*

Exemplo 3.3.1 *O grupo cíclico infinito $G \simeq \mathbb{Z}$ é um PD^1-grupo (sobre $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Z}_2$).*
De fato, seja M um $\mathbb{Z}G$-módulo, pelo Exemplo 3.1.4

$$H^0(G;M) \overset{Prop.3.1.10}{\simeq} M^G = H_1(G;M),$$

$$H^1(G;M) = M_G \overset{Prop.3.1.10}{\simeq} H_0(G;M),$$

$$H^n(G;M) = 0 = H_{1-n}(G;M), \forall\ n \geq 2.$$

Portanto, G é um PD^1-grupo (orientável).

Exemplo 3.3.2 *Se $G \simeq F(K)$ o grupo livre com k geradores, $k \geq 1$, então G é um D^1-grupo, e não é um PD^1-grupo, se $k > 1$. De fato, já vimos que G é de tipo FP sobre $\mathbb{Z}$ (Exemplo 3.2.7) e que $cd_{\mathbb{Z}}G = 1$ (Observação 3.2.1). Vamos mostrar que a condição (iv) da Observação 3.3.5 é verdadeira, isto é, que $H^i(G;\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}} A) = 0$ para todo grupo abeliano A e $i \neq 1$. Com efeito, para todo grupo abeliano A, temos*

$$H^0(G;\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}} A) = H^0(G; Ind_{\{1\}}^G A) \overset{Prop.3.1.10}{\simeq} (Ind_{\{1\}}^G A)^G \overset{Prop.3.1.9}{=} 0$$

e $H^i(G;\mathbb{Z}G \otimes_{\mathbb{Z}} A) = 0$, para $i > 1$ (pois $cd_{\mathbb{Z}}G = 1$). Logo, G é um D^1-grupo. Mostremos agora que o grupo livre $G = F(K)$ com k geradores, $k > 1$, não é PD^1-grupo. Temos (vide Exemplo 3.1.15) que $H_0(G) = \mathbb{Z}$ e $H_1(G) = \mathbb{Z}^k$. De onde obtemos também (da sequência de coeficiente universal para cohomologia de grupo, [10], III, Ex. 3, p.60) que $H^1(G) = \mathbb{Z}^k$. Suponhamos por absurdo que G seja um PD^1-grupo, isto é $C \simeq \mathbb{Z}$. Se a G-ação for trivial (equivalentemente, G for PD^1-grupo orientável) obtemos que $H_0(G;C) = H_0(G;\mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$. Mas, por dualidade $\mathbb{Z}^k \simeq H^1(G) \simeq H_0(G;C)$, Logo, $\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}^k$, o que é um absurdo, pois $k > 1$. Suponhamos agora $C \simeq \mathbb{Z}$, com a G-ação não trivial. Então $H_0(G;C) \simeq C_G \simeq \mathbb{Z}\ /\langle g.n - n;\ n \in \mathbb{Z} \text{ e } g \in G\rangle \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}_2$. Por outro lado, usando dualidade, temos que $\mathbb{Z}^k \simeq H^1(G) \simeq H_0(G;C)$, o que nos dá novamente uma contradição. Assim G não é um PD^1-grupo sobre $\mathbb{Z}$, para $k > 1$, como afirmado.

Exemplo 3.3.3 *Se $G \simeq \mathbb{Z}_r$ (o grupo cíclico finito de ordem $r \geq 2$) então, G não é um grupo de dualidade de Poincaré (sobre $\mathbb{Z}$). De fato, se G fosse um PD^n-grupo, para algum n então $cd_{\mathbb{Z}}G = n$ (por Proposição 3.3.2) mas isso é um absurdo, visto que $cd_{\mathbb{Z}}G = \infty$ (Exemplo 3.2.2).*

A proposição a seguir caracteriza os grupos de dualidade em dimensões baixas:

Proposição 3.3.6 *([6], III.9.8, Proposição 9.17, p.165)*
(i) G é um grupo de dualidade de dimensão 0 sobre R se, e somente se, G é finito sem R-torção (ou seja, a ordem de G é finita e invertível em R);
(ii) G é um grupo de dualidade de dimensão 1 sobre R se, e somente se, G é finitamente gerado e sua dimensão cohomológica, $cd_R G$, é igual a 1.

Exemplo 3.3.4 *(a) O grupo trivial $\{1\}$ é o único D^0-grupo sobre $\mathbb{Z}$. De fato, se G é um D^0-grupo, então, pela proposição anterior, $n= o(G)$ é finita e invertível em $\mathbb{Z}$. Logo, $n = 1$. Portanto, G é trivial.*
(b) Todo grupo finito de ordem n ímpar é um D^0-grupo sobre $\mathbb{Z}_2$ pois, neste caso, $n.1$ é invertível em $\mathbb{Z}_2$.

Exemplo 3.3.5 *O grupo trivial $G = \{1\}$ é o único PD^0-grupo (que é obviamente orientável já que a G-ação é trivial). É claro que $G = \{1\}$ é um PD^0-grupo. Por outro lado se G é um PD^0-grupo então G é um D^0-grupo e pelo Exemplo 3.3.4, $G = \{1\}$.*

Proposição 3.3.7 *([6], p.174) Seja G um PD^n-grupo.*
(i) Se G é orientável então $H_n(G;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ e $H^n(G;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.
(ii) Se G é não orientável então $H_n(G;\mathbb{Z}) = 0$ e $H^n(G;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2$

Demonstraçao: (i) Usando a dualidade, temos, $H_n(G;\mathbb{Z}) \cong H^0(G;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^G = \mathbb{Z}$ pois a ação é trivial. Também $H^n(G;\mathbb{Z}) \cong H_0(G;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_G = \mathbb{Z}$.
(ii) Se G é não orientável, $H^n(G;\mathbb{Z}) \cong H_0(G;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_G = \mathbb{Z}/\langle g.m - m, m \in \mathbb{Z}\rangle \cong \mathbb{Z}/\langle -2.m; m \in \mathbb{Z}\rangle \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_2$ e $H_n(G;\mathbb{Z}) \cong H^0(G;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^G = 0$. ∎

Observação 3.3.6 *Para PD^2-grupo G, pode-se mostrar ([6], p.174) que se G é orientável então:* $H_k(G;\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & se \quad k = 0 \\ \mathbb{Z}^{2g}, & se \quad k = 1 \ (com\ g \geq 1). \\ \mathbb{Z}, & se \quad k = 2 \end{cases}$

Se G é não orientável $H_k(G;\mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_2, & se \quad k = 0 \\ \mathbb{Z}^g \oplus \mathbb{Z}_2, & se \quad k = 1 \\ 0, & se \quad k = 2. \end{cases}$

No estudo da relação entre PD^2-grupos e grupos fundamentais de variedades fechadas, apresentado no capítulo seguinte, o “número de Betti” e “característica de Euler” de um grupo desempenham um papel importante. Finalizamos esta seção apresentando esses conceitos (adequados ao nosso interesse) e dois resultados. Para um tratamento sobre característica de Euler ver [10], (Capítulo IX, §5).

Definição 3.3.3 *Seja G um grupo. O* ***q-ésimo número de Betti*** *β_q do grupo G é definido por*

$$\beta_q(G) = rankH_q(G;\mathbb{Z}) = dim_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} H_q(G;\mathbb{Z})),$$

onde $\mathbb{Q}$ indica o corpo dos números racionais.

Note que o número de Betti só é interessante quando $H_q(G;\mathbb{Z})$ é finitamente gerado.

Definição 3.3.4 *([10], IX, p.245) Seja G um grupo tal que $H_i(G;\mathbb{Z})$ é finitamente gerado para todo i e finito para i suficientemente grande.* ***A característica de Euler*** *de G é definida por*

$$\chi(G) = \sum_i (-1)^i \beta_i(G).$$

Observemos que se G é um PD^n-grupo então os números de Betti de G e característica de Euler estão definidos.

Proposição 3.3.8 *([10], 6.2, p.230 e 247; Teorema IX.6.3, p.248; [6], p.179) Seja G um grupo de tipo FP.*
(1) Se $\ldots \longrightarrow P_2 \longrightarrow P_1 \longrightarrow P_0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$ é uma resolução projetiva finita de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}$ então $\chi(G) = \sum_i (-1)^i rank(\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} P_i)$;
(2) Se S é um subgrupo de G de índice finito em G então $\chi(S) = [G:S].\ \chi(G)$.

Lema 3.3.1 *Se G é um PD^2-grupo não orientável, então G contém um PD^2-grupo G_1 orientável como subgrupo, de índice 2, e temos $\beta_1(G) > 0$ se e somente se $\beta_1(G_1) > 0$.*

Demonstração: Primeiro observamos que se G é um PD^2-grupo não orientável, então a ação de G sobre o módulo dualizante $\Omega = \mathbb{Z}$ é não trivial e pela Observação 3.1.9, G contém um subgrupo G_1 orientável de índice 2 que será também um PD^2-grupo visto que G é livre de torção (Corolário 3.3.1). Mostremos que $\beta_1(G) > 0$ se e somente se $\beta_1(G_1) > 0$. Temos por Observação 3.3.6 que $\chi(G_1) = \beta_0(G_1) - \beta_1(G_1) + \beta_2(G_1) = 2 - \beta_1(G_1)$, onde $\beta_1(G_1) = 2g \geq 2$ (pois G_1 é orientável) e, $\chi(G) = \beta_0(G) - \beta_1(G) + \beta_2(G) = 1 - \beta_1(G)$ onde $\beta_1(G) = g \geq 1$ (visto que G é não orientável). Assim $\beta_1(G) > 0 \Rightarrow \chi(G) \leq 0 \Rightarrow \chi(G_1) = [G:G_1].\chi(G) = 2.\chi(G) \leq 0 \Rightarrow 2 - \beta_1(G_1) \leq 0 \Rightarrow \beta_1(G_1) \geq 2 > 0$. Similarmente, $\beta_1(G_1) > 0 \Rightarrow \chi(G_1) \leq 0 \Rightarrow 2.\chi(G) = \chi(G_1) \leq 0 \Rightarrow \chi(G) \leq 0 \Rightarrow \beta_1(G) \geq 1 > 0$. ■

Capítulo

4

Dualidade de Poincaré e Invariantes Cohomológicos

Este capítulo está dividido em duas partes. Na primeira exploramos um pouco a relação entre as duas teorias de dualidade, para grupos e espaços, mais precisamente, a relação entre grupos de dualidade de Poincaré (sobre $\mathbb{Z}$) e a teoria de variedades asféricas como veremos: "*O grupo fundamental de uma n-variedade asférica fechada* (*orientável ou não*) *é um grupo de dualidade de Poincaré n-dimensional*". A recíproca desse fato é um problema em aberto. Para $n \leq 2$ a recíproca já foi provada ([13], [14], [15]) e para $n = 3$ alguns resultados nessa direção também foram obtidos. Neste capítulo inicialmente apresentamos a prova da primeira afirmação; da recíproca para os casos $n = 0$ e 1; a idéia da prova da recíproca no caso $n = 2$, e algumas observações sobre alguns trabalhos e resultados recentes para $n \geq 3$.
Na segunda parte do capítulo, apresentamos o invariante cohomológico "end" $E(G, S)$ e alguns resultados no caso em que G e S satisfazem certas propriedades de dualidade. $E(G, S)$ é um caso particular de um invariante mais geral $E(G, \mathcal{S}; M)$ (que foi definido em [2]) onde G é um grupo, $\mathcal{S}$ é uma família não vazia de subgrupos de G (não necessariamente distintos) de índice infinito em G e M é um $\mathbb{Z}_2G$-módulo. Mais precisamente, $E(G, S) := 1 + dim_{\mathbb{Z}_2} Ker(res^G_{S,\mathbb{Z}_2(G/S)})$ onde $res^G_{S,\mathbb{Z}_2(G/S)} : H^1(G; \mathbb{Z}_2(G/S)) \longrightarrow H^1(S; \mathbb{Z}_2(G/S))$ ([2]). Outros invariantes cohomológicos, dentre eles o end clássico, e algumas das relações existentes entre eles e dualidade são também abordados.

4.1 Variedades asféricas

Definição 4.1.1 ([*13*], *V, p.135*) *Uma variedade X é* ***asférica*** *se é conexa por caminhos e os grupos de homotopia $\pi_i(X) = 0$, para todo $i \geq 2$.*

Observação 4.1.1 (*1*) *Toda variedade compacta é homotopicamente equivalente a um CW-*

complexo ([19], Corolário A. p.529). Logo se X é uma variedade asférica fechada então X tem o mesmo tipo de homotopia que um $K(G,1)$-complexo, onde $G = \pi_1(X)$.
(2) Uma variedade conexa por caminhos é asférica se o espaço de recobrimento universal de X é contráctil.

Exemplo 4.1.1 *T^2, o toro 2-dimensional, é uma variedade asférica pois $\mathbb{R}^2$ é um espaço de recobrimento de T^2 (Exemplo 1.1.8) e pela Proposição 1.1.11, $\pi_n(T^2) \cong \pi_n(\mathbb{R}^2) = 0$ se $n \geq 2$ visto que $\mathbb{R}^2$ é contráctil.*

Exemplo 4.1.2 *A esfera S^n, $n \geq 2$, não é uma variedade asférica pois $\pi_n(S^n) \simeq \mathbb{Z}$. Consequentemente o espaço projetivo n-dimensional P^n, $n \geq 2$, também não é uma variedade asférica já que S^n é um recobrimento de P^n e, pela Proposição 1.1.11, $\pi_n(P^n) \cong \pi_n(S^n) \neq 0$, com $n > 1$.*

Para provarmos o resultado apresentado no início do capítulo, relacionando grupos de dualidade de Poincaré com variedades asféricas, necessitamos de uma extensão do resultado sobre dualidade de Poincaré para variedades fechadas dado no Capítulo 2, para variedades orientáveis (Corolário 2.2.1, p.50). No que segue estamos nos baseando em [13] (V, §1, p.136) e [10] (VIII, §8, p.210). Sejam X uma variedade compacta conexa, $\widetilde{X}$ o espaço de recobrimento universal de X e $G = \pi_1(X)$. Como $\widetilde{X}$ é simplesmente conexo, $\widetilde{X}$ é orientável (Proposição 1.2.4). Denote por Ω seu "módulo de orientação", isto é, Ω é um grupo cíclico infinito ($\Omega = \mathbb{Z}$ como grupo) com a $G = \pi_1(X)$-ação dada pela representação $\varepsilon^0 : G \longrightarrow \{\pm 1\} = Aut(\mathbb{Z})$, definida por $\varepsilon^0(g) = 1$ se $g \in \pi_1(X) = A(\widetilde{X}, p)$ (o grupo das transformações de recobrimento) preserva a orientação de $\widetilde{X}$ e $\varepsilon^0(g) = -1$ se g inverte a orientação de $\widetilde{X}$. Assim ε^0 é trivial se, e somente se, X é orientável. Considere $\Omega \otimes_{\mathbb{Z}} M$ visto como $\mathbb{Z}G$-módulo com a G-ação diagonal $g.(x \otimes m) = \varepsilon^0(g)(x) \otimes g.m$.

Temos então, o seguinte resultado que estende o isomorfismo de dualidade dado no Capítulo 2 (Corolário 2.2.1) para variedades fechadas não necessariamente orientáveis e com coeficientes em um $\mathbb{Z}(\pi_1(X))$-módulo M qualquer.

Teorema 4.1.1 (*Dualidade*) *Se X é uma variedade conexa fechada e M é um $\mathbb{Z}(\pi_1(X))$-módulo então $\boldsymbol{H}^k(X; M) \cong \boldsymbol{H}_{n-k}(X; \Omega \otimes_{\mathbb{Z}} M)$ onde as homologias e cohomologias são tomadas com coeficientes locais.*

Observação 4.1.2 *Este resultado é mencionado em vários trabalhos (por exemplo em [10], VIII, §8, p.211; [13], V, §1, p.136; [12], 5, §2, p.102). No entanto não encontramos uma referência que apresenta a prova deste resultado (com as notações usadas aqui). Em [41], (1943), a dualidade de Poincaré com coeficientes locais é tratada (vide p.622) porém com uma notação bastante diferente. Em [45], (p.214) é apresentada uma prova de um resultado similar de dualidade para X complexo de Poincaré conexo.*

Observação 4.1.3 *Seja X uma variedade asférica conexa compacta n-dimensional orientável e considere o módulo $\mathbb{Z}$ com a G-ação trivial. Como X é asférica, X é um $K(G,1)$-espaço, assim podemos tomar X na interpretação topológica de (co)homologia de grupos. Então $H^k(G) \overset{Not.}{=} H^k(G;\mathbb{Z}) \overset{Cor.\ 3.1.5}{\cong} H^k(X;\mathbb{Z}) \overset{Teo.2.2.1}{\cong} H_{n-k}(X;\mathbb{Z}) \overset{Cor.3.1.5}{\cong} H_{n-k}(G;\mathbb{Z}) \overset{Not.}{=} H_{n-k}(G)$. Se X é não orientável, então seja o módulo de orientação Ω do recobrimento $\widetilde{X}$ ($\Omega = \mathbb{Z}$ como grupo) com a G-ação não trivial. Daí considerando o $\mathbb{Z}G$-módulo trivial $\mathbb{Z}$ temos $H^k(G) \overset{Not.}{=} H^k(G;\mathbb{Z}) \overset{Cor.3.1.5}{\cong} H^k(X;\mathbb{Z}) \overset{Prop.3.1.17}{\cong} \boldsymbol{H}^k(X;\mathbb{Z}) \overset{Teo.4.1.1}{\cong} \boldsymbol{H}_{n-k}(X;\Omega\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}) \overset{Prop.3.1.17}{\cong} H_{n-k}(X;\Omega\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}) \overset{Cor.3.1.5}{\cong} H_{n-k}(G;\Omega\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z})$ onde $\Omega\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}$ é isomorfo a $\mathbb{Z}$ como grupo abeliano mas não como $\mathbb{Z}G$-módulo.*

Dados uma variedade asférica compacta n-dimensional X e $G = \pi_1(X)$, a observação anterior exibe isomorfismos entre $H^k(G;\mathbb{Z})$ e $H_{n-k}(G;\Omega\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z})$ quando $\mathbb{Z}$ é visto como um $\mathbb{Z}G$-módulo trivial. Para concluir que G é um grupo de dualidade de Poincaré temos que considerar $\mathbb{Z}G$-módulos M quaisquer como coeficientes (Teorema 4.1.1):

Teorema 4.1.2 (*[13],* Teorema V.1.1, p. 135) *Se G é o grupo fundamental de uma n-variedade asférica fechada então G é um PD^n-grupo sobre $\mathbb{Z}$, isto é, existe um $\mathbb{Z}G$-módulo Ω cujo grupo abeliano é cíclico infinito, e para cada $\mathbb{Z}G$-módulo M e inteiro i, existe um isomorfismo $H^i(G;M) \cong H_{n-i}(G;\Omega\otimes_{\mathbb{Z}} M)$, onde G atua diagonalmente em $\Omega\otimes_{\mathbb{Z}} M$.*

Demonstração: Seja M um $\mathbb{Z}G$-módulo. Como X é uma n-variedade asférica, temos pelo Teorema 3.1.1 uma interpretação topológica para os grupos de homologia e cohomologia de G com coeficientes em M cujas homologias e cohomologias de espaços são consideradas com coeficientes locais:

$$H_k(G;M) = H_k(C_*(\widetilde{X})\otimes_{\mathbb{Z}G} M) = \mathbf{H}_k(X;M)$$

$$H^k(G;M) = H^k(Hom_{\mathbb{Z}G}(C_*(\widetilde{X}),M)) = \mathbf{H}^k(X;M)$$

onde $\widetilde{X}$ é o recobrimento universal de X, $G = \pi_1(X) \cong A(\widetilde{X},p)$ (o grupo das transformações de recobrimento) atua em $\widetilde{X}$ com quociente X e $C_*(\widetilde{X})$ é o complexo de cadeia singular de $\widetilde{X}$.

Como $\widetilde{X}$ tem exatamente duas $\mathbb{Z}$-orientações (visto que $\widetilde{X}$ é $\mathbb{Z}$-orientável pois é simplesmente conexo), existe Ω "módulo de orientação" com a $G = \pi_1(X)$ - ação dada pela representação $\varepsilon^0 : G \longrightarrow \{\pm 1\} = Aut(\mathbb{Z})$ definida por $\varepsilon^0(g) = +1$ se g preserva as orientações de $\widetilde{X}$ e $\varepsilon^0(g) = -1$ se g inverte as orientações de $\widetilde{X}$. Considere $\Omega\otimes_{\mathbb{Z}} M$ visto como $\mathbb{Z}G$-módulo com a G-ação diagonal, $g(x\otimes m) = \varepsilon^0(g)(x)\otimes g.m$. Pelo teorema de dualidade de Poincaré (com coeficientes locais) para variedades compactas (dado anteriormente) existem isomorfismos $\mathbf{H}^i(X;M) \cong \mathbf{H}_{n-i}(X;\Omega\otimes_{\mathbb{Z}} M)$ dado pelo produto cap, para todo i. Daí existem isomorfismos naturais $H^i(G;M) \cong \mathbf{H}^i(X;M) \cong \mathbf{H}_{n-i}(X;\Omega\otimes_{\mathbb{Z}} M) \cong H_{n-i}(G;\Omega\otimes_{\mathbb{Z}} M)$ para todo i, como desejado. ∎

Exemplo 4.1.3 *Se $G \simeq \mathbb{Z}^n = \mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}$ então G é um PD^n-grupo pois $\mathbb{Z}^n = \pi_1(T^n)$ e T^n é uma variedade asférica.*

Exemplo 4.1.4 *Toda superfície fechada F, diferente da esfera S^2 e do plano projeto P^2 é asférica e assim, $G = \pi_1(F)$ é um PD^2- grupo sobre $\mathbb{Z}$. Logo, pelo Teorema de Classificação de Superfícies (Teorema 1.2.1) são exemplos de PD^2-grupos*

$$G_n = \langle a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n; \prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i] = 1 \rangle,$$

o grupo fundamental da soma conexa de n-toros , $n \geq 1$

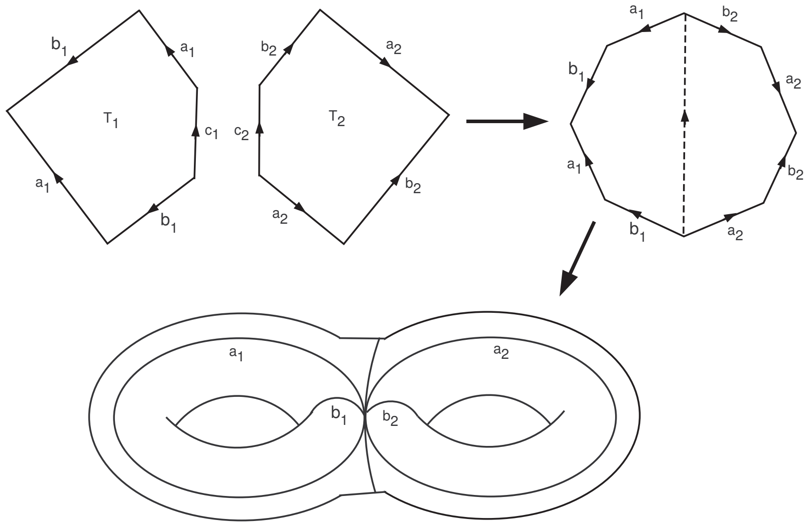

Figura 4.1: Caso n=2

e $H_n = \langle a_1, \ldots, a_n; a_1^2.a_2^2 \ldots a_n^2 = 1 \rangle$, o grupo fundamental da soma conexa de n-planos projetivos.

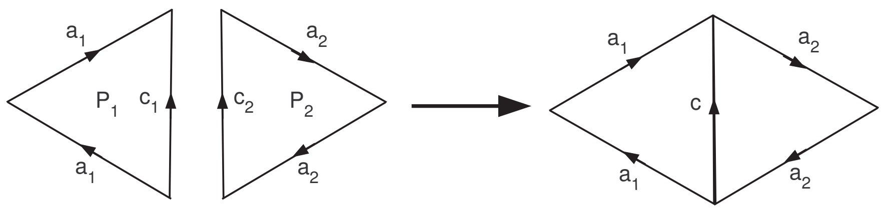

Figura 4.2: Caso n=2

Definição 4.1.2 ([13], V, p.136) *Os grupos satisfazendo as hipóteses do Teorema 4.1.2 são chamados **grupos de dualidade geométricos de dimensão** n ou simplesmente, GD^n-**grupos**. Neste caso, se o $\mathbb{Z}G$-módulo Ω tem G-ação trivial, dizemos que G é orientável.*

O teorema anterior nos diz que GD^n-grupos são PD^n-grupos. Os GD^2-grupos são também chamados de ***grupos superfície****.*

Exemplo 4.1.5 *O único GD^0-grupo é o grupo trivial pois a única 0-variedade conexa por caminhos é $X = \{x_0\}$. De modo que se $n = 0$ então $\widetilde{X} = X = \mathbb{R}^0$ e $G = \pi_1(X)$ é o grupo trivial.*

Exemplo 4.1.6 *A única 1-variedade fechada conexa por caminhos é $X = S^1$ (o círculo S^1) que é asférica visto que $\widetilde{X} = \mathbb{R}$ (Exemplo 1.1.7). Assim o único GD^1-grupo é o grupo cíclico infinito.*

4.2 PD^n-grupos e GD^n-grupos

Sabemos pelo Teorema 4.1.2 que todo GD^n -grupo é um PD^n -grupo. Um questão interessante é: Quais PD^n grupos são GD^n grupos? Este é um problema em aberto (para $n > 2$) e tem sido objeto de estudos recentes.

• **Casos n = 0, 1:** Para esses casos temos:

Proposição 4.2.1 *Seja G um grupo. Então:*
(i) G é um PD^0-grupo se, e somente se, G é um GD^0-grupo (de fato neste caso G é o grupo trivial).
(ii) G é um PD^1-grupo se, e somente se, G é um GD^1-grupo (e $G \cong \mathbb{Z}$).

Demonstração: (i) Segue do fato que o grupo trivial é o único PD^0-grupo e o único GD^0-grupo (Exemplo 3.3.5 e Exemplo 4.1.5).
(ii) Vimos no Exemplo 4.1.6 que $\mathbb{Z}$ é o único GD^1-grupo. Mas $\mathbb{Z}$ é também o único PD^1-grupo. Pois se G é um PD^1-grupo então G é um D^1-grupo e pela Proposição 3.3.2, $cd_R G = 1$. Logo, G é livre não trivial (Exemplo 3.2.4). Pelo Exemplo 3.3.2 temos que G tem apenas um gerador. Portanto $G = \mathbb{Z}$. ■

• **Caso n = 2:** A equivalência entre PD^2-grupos e GD^2-grupos (ou grupos superfícies) também já foi mostrada, mais precisamente temos:

Teorema 4.2.1 *G é um PD^2-grupo sobre $\mathbb{Z}$ se, e somente se, G é um grupo superfície.*

Demonstração: Já vimos no Teorema 4.1.2 que grupos superfícies são PD^2-grupos. Agora a recíproca segue essencialmente dos dois resultados seguintes:
(I) Se G é um PD^2-grupo sobre $\mathbb{Z}$ com número de Betti $\beta_1(G) > 0$, então G é um grupo superfície (a prova deste resultado foi dada por Eckmann e Müller em 1980, [14], Teorema 1).

(II) Se G é um PD^2- grupo então o número de Betti $\beta_1(G) > 0$ (este resultado que fecha o caso $n = 2$, foi apresentado posteriormente por Eckmann e Linnel em 1983, [15], Teorema 1).

Não apresentamos aqui as provas destes resultados. A prova de **(I)** envolve conceitos como "decomposição de grupos" e "pares" de dualidade (consequentemente (co)homologia relativa), e resultados profundos dentre eles o "Teorema de decomposição para pares de grupos" que não foram tratados neste trabalho. Apresentamos apenas algumas observações sobre os conceitos e técnicas envolvidos nas provas. Vamos separar essas observações/considerações em duas partes.

1. Considerações relativas à prova de **(I)**:

Para um esboço das técnicas principais da prova de **(I)** inicialmente mencionamos o que significa um "grupo se decompor sobre um subgrupo" e a idéia do que seja um "PD^n-par".

• Um grupo G se decompõe sobre um subgrupo L se G é um produto livre amalgamado $G = G_1 *_L G_2$ com $G_1 \neq G_2 \neq L$ ou G é uma HNN-extensão $G_1 *_{L,\theta}$ (para mais detalhes ver [6], I.2.4, p.25, I.2.5, p.30, I.2, p.20).

• Um par $(G; S_1, \ldots, S_n)$ onde G é um grupo e $\mathcal{S} = \{S_1, \ldots, S_n\}$ é uma família finita de subgrupos de G é um PD^n-par (sobre $\mathbb{Z}$) se existem isomorfismos de dualidade entre a cohomologia de G e a homologia "relativa" de $(G, \mathcal{S})$, análoga às dadas para grupos de dualidade ([8], Definição 4.1, p.299). PD^2-pares $(G, \mathcal{S})$ são obtidos por tomar G o grupo fundamental de uma superfície fechada com $m + 1$ discos removidos ($m \geq 0$, e $m \geq 1$ se a superfície é a esfera)([14], p.512). PD^2-pares obtidos desta forma são chamados de geométricos.

• A prova do resultado **(I)** será consequência do seguinte resultado para PD^2-pares:

(1.a) ([14], Teorema 2, p.512) *Todos os PD^2-pares são geométricos.*

A idéia da prova deste fato é primeiro listar todos os tipos de PD^2-pares geométricos (via geradores e relações). Em seguida dado um PD^2-par $(G, \mathcal{S})$ usando indução sobre $rank(G)$ (ou posto de G) e o " Teorema de decomposição para pares de grupos" conclui-se que G é um dos tipos listados e assim é geométrico. A prova de **(I)** segue então por mostrar que

(1.b) ([14], §3, p.513) *Se G é um PD^2-grupo com $\beta_1(G) > 0$ então G se decompõe sobre um subgrupo finitamente gerado L.*

(1.c) ([14], Teorema 1', p.513) *Se G é um PD^2-grupo que se decompõe sobre um subgrupo finitamente gerado L então podemos obter uma decomposição de G sobre um subgrupo C, onde C é o grupo cíclico infinito, $G = G_1 *_C G_2$ ou $G = G_1 *_{C,p}$. Ainda (G_1, C) e (G_2, C) serão PD^2-pares se $G = G_1 *_C G_2$, e $(G_1, C, p^{-1}Cp)$ será um PD^2-par no segundo caso.* Por **(1.a)** tais pares serão geométricos e consequentemente G será um grupo superfície.

2. Considerações relativas à prova de **(II)**:

Inicialmente observamos que é suficiente mostrar que os PD^2-grupos orientáveis possuem o primeiro número de Betti maior que zero. Isto segue do fato que pelo Lema 3.3.1, se G é não orientável, G possui um PD^2-subgrupo G_1 orientável de índice dois em G, que será PD^2-grupo. Ainda $\beta_1(G_1) > 0$ implica $\beta_1(G) > 0$.

Considerando então G um PD^2-grupo (sobre $\mathbb{Z}$) orientável, pela Proposição 3.2.3 podemos construir uma resolução livre (projetiva) de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$ de comprimento igual a $cd_{\mathbb{Z}}G = 2$ (Proposição 3.3.2). Ainda, como G é finitamente gerado (Corolário 3.3.2) podemos obter uma resolução projetiva de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$ do tipo

$$0 \longrightarrow P \longrightarrow \mathbb{Z}G^d \longrightarrow \mathbb{Z}G \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \quad (*)$$

onde $\mathbb{Z}G^d = \bigoplus_{i=1}^{d} \mathbb{Z}G$ e $G = \langle s_1, \ldots, s_d \rangle$, gerado por d elementos ($d \geq 1$). Uma vez que $H^0(G;\mathbb{Z}G) = H^1(G;\mathbb{Z}G) = 0$ e $H^2(G;\mathbb{Z}G) = \mathbb{Z}$ com G-ação trivial para todo PD^2-grupo orientável, obtemos da sequência $(*)$, aplicando o funtor $Hom_{\mathbb{Z}G}(-,\mathbb{Z}G)$, uma sequência exata

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}G \xrightarrow{\epsilon} \mathbb{Z}G^d \xrightarrow{\rho} P^* \xrightarrow{\gamma} \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \quad (**)$$

onde $P^* = Hom_{\mathbb{Z}G}(P, \mathbb{Z}G)$ é projetivo finitamente gerado. Seja IG o kernel de ε (o ideal aumentação) e L o kernel de γ. Aplicando o Lema de Schanuel ([10], VIII, Lema 4.2) às sequências exatas

$$0 \longrightarrow IG \longrightarrow \mathbb{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0, \quad e$$

$$0 \longrightarrow L \longrightarrow P^* \xrightarrow{\gamma} \mathbb{Z} \longrightarrow 0,$$

obtemos que $P^* \oplus IG \cong \mathbb{Z}G \oplus L$. Temos claramente uma aplicação sobrejetora $\mathbb{Z}G^d \xrightarrow{\rho} Im(\rho) = Ker(\gamma) = L$ e daí obtemos uma sobrejeção de $\mathbb{Z}G^{d+1} = \mathbb{Z}G \oplus \mathbb{Z}G^d \to \mathbb{Z}G \oplus L$ ($w = (v,u) \to (v, \rho(u)) \in \mathbb{Z}G \oplus L \cong P^* \oplus IG$) e logo uma sobrejeção $\mathbb{Z}G^{d+1} \to P^*$, com núcleo K não nulo (visto que $K = 0$ implicaria $P^* \oplus IG \cong \mathbb{Z}G^{d+1} \cong P^*$). Daí o núcleo K é um $\mathbb{Z}G$-módulo projetivo finitamente gerado com $rank(\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} K) \neq 0$ ([15], Proposição 3, p.112). Consequentemente $rank(\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} P^*) \leq d$ e usando então a Proposição 3.3.8, obtemos que

$$\chi(G) = 1 - d + rank(\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}G} P^*) \leq 1.$$

Por outro lado, temos que $\chi(G) = \beta_0(G) - \beta_1(G) + \beta_2(G) = 2 - \beta_1(G)$ pois $\beta_0(G) = \beta_2(G) = 1$ visto que G é orientável (Proposição 3.3.7). Daí $\chi(G) = 2 - \beta_1(G) \leq 1$, e assim, $\beta_1(G) > 0$. ■

• **Caso n maior ou igual a 3:** A recíproca do Teorema 4.1.2, (para $n \geq 3$) é um problema em aberto (não encontramos na literatura) e resultados recentes relacionados tem sido obtidos.

Em [13], p.136, o autor menciona que o que ocorre para $n \geq 3$ não é conhecido.

Em [6], (p.170) o autor apresenta o conceito de "*complexo de dualidade*" e o seguinte resultado ([6], Proposição 9.18, p.170): "*Um complexo de Eilenberg-Maclane $K(G,1)$ é um complexo de dualidade se e somente se G é um grupo de dualidade finitamente presentado*". Assim, dado um PD^n-grupo G, $n \geq 3$, (logo $G \neq \{1\}$) se G é finitamente presentado segue do resultado anterior que existe um $K(G,1)$-complexo Y que é de dualidade. Se Y for homotopicamente equivalente a uma variedade fechada asférica obteremos que G é um GD^n-grupo. Logo, para concluir que todo PD^n-grupo finitamente presentado ($n \geq 3$) é um GD^n-grupo é suficiente mostrar que todo complexo de Poincaré (não simplesmente conexo) é homotopicamente equivalente a uma variedade fechada. Como mencionado em [6], todos os exemplos conhecidos de complexos de Poincaré que não são homotopicamente equivalentes a variedades fechadas são os simplesmente conexos (daí $G = \pi_1(Y)$ é trivial), logo é compreensível que de fato todo grupo de dualidade de Poincaré (finitamente presentado) é o grupo fundamental de uma variedade fechada ([6], p.171).

Em [42] foi provado a implicação, para $n = 3$, quando G é solúvel: "*Seja G um PD^3-grupo solúvel. Então G é o grupo fundamental de uma variedade asférica*" ([42], Proposição 1).

Uma nova contribuição para o caso $n = 3$ foi apresentada recentemente em [9], (2005). Enfatizamos que nesse trabalho a autora (p.332) cita: " *A questão se todo PD^3-complexo asférico é homotopicamente equivalente a uma 3-variedade permanece em aberto*".

Complexos de Poincaré 3-dimensional foram também estudados em [43] e [46]. Ressaltamos ainda que [42] cita que há alguma razão para esperar que o caso $n \geq 5$ seja verdadeiro e refere por exemplo [18] para uma direção nesse sentido.

4.3 Invariantes Cohomológicos

O estudo de grupos e pares de dualidade está intimamente relacionado com a teoria de ends de grupos e pares de grupos. A definição de número de ends de um grupo G qualquer, foi dada por Specker. Nesta seção vamos introduzir a definição e alguns resultados sobre end de um grupo G. Além disso, veremos o invariante cohomológico "end" $E(G, S)$ e alguns resultados no caso em que G e S satisfazem certas propriedades de dualidade. Tal invariante é de certo modo uma extensão do end clássico $e(G)$, definido para um grupo G, como veremos.

4.3.1 O end clássico de um grupo

Sejam G um grupo e considere o $\mathbb{Z}_2G$-módulo $PG = \{A; A \subset G\}$. Aqui $(PG, +)$ é visto como um grupo abeliano (em que todo elemento tem ordem 2), com a operação adição dada pela "diferença simétrica", isto é, $A + B := (A^C \cap B) \cup (A \cap B^C)$, para todo $A, B \in PG$ e a G-ação usual dada por:

$$G \times PG \longrightarrow PG$$

$$(g, A) \longmapsto g.A := \{g.a;\ a \in A\}$$

Considere ainda os seguintes $\mathbb{Z}_2G$-submódulos de PG:

$$FG = \{A \in PG; \text{ A é finito}\} \text{ e } QG = \{A \in PG; \forall g \in G, A + gA \in FG\}.$$

Observação 4.3.1 *Denotaremos um elemento $A + FG$ (de PG/FG ou QG/FG) por $\overline{A}$.*

Definição 4.3.1 *Dado um grupo G, o número de ends de G, denotado por $e(G)$, é definido por $e(G) := dim_{\mathbb{Z}_2}(QG/FG)$*

Lema 4.3.1 *Considerando G um grupo temos:*
(i) Se G é infinito, então $\overline{\emptyset}$ e $\overline{G}$ são elementos distintos em QG/FG e portanto $e(G) \geq 1$.
(ii) G é finito, se e somente se, $e(G) = 0$.

Demonstração: (i) Dado um grupo G, temos que $G \in QG$, pois para todo $g \in G$ temos que $G + gG = G + G = (G \cap G^C) \cup (G^C \cap G) = \emptyset \in FG$. Logo, $\overline{G} \in QG/FG$. Agora, como G é infinito temos que $G \notin FG$ e assim $\overline{G} \neq \overline{\emptyset}$, ou seja, $\mathbb{Z}_2 \cong \{\overline{\emptyset}, \overline{G}\} \subset QG/FG$. Logo $e(G) = dim_{\mathbb{Z}_2}(QG/FG) \geq dim_{\mathbb{Z}_2}\mathbb{Z}_2 = 1$.
(ii) Consideremos G um grupo finito. Logo, temos que $PG = FG$ é finito, ou seja, $QG = FG$. Assim, temos $e(G) = dim_{\mathbb{Z}_2}(QG/FG) = 0$. Reciprocamente, suponhamos $e(G) = 0$ e G infinito. Logo, por (i) teríamos que $e(G) \geq 1$, que contraria a hipótese. Portanto, G é finito. ∎

Podemos também interpretar $e(G)$ em termos de cohomologia de grupos. Note que PG/FG é claramente um $\mathbb{Z}_2G$-módulo com a G-ação induzida $g.\overline{A} = \overline{g.A}$ e temos:

Lema 4.3.2 $e(G) = dim_{\mathbb{Z}_2}H^0(G; PG/FG)$

Demonstração: Inicialmente notemos que o grupo dos invariantes de (PG/FG), denotado $(PG/FG)^G$ é QG/FG. De fato: $(PG/FG)^G = \{\overline{A} \in PG/FG\ ;\ g.\overline{A} = \overline{A},\ \forall g \in G\} = \{\overline{A} \in PG/FG\ ;\ \overline{g.A} = \overline{A}, \forall g \in G\} = \{\overline{A} \in PG/FG\ ;\ gA + FG = A + FG; \forall g \in G\} = \{\overline{A} \in PG/FG\ ;\ A + g.A \in FG, \forall g \in G\} = QG/FG$. Portanto,

$$e(G) = dim_{\mathbb{Z}_2}(PG/FG)^G \overset{Prop.3.1.10}{=} dim_{\mathbb{Z}_2}H^0(G; PG/FG). \quad ∎$$

Proposição 4.3.1 *([11], Proposição 3.1.5) Se G é um grupo abeliano não enumerável então $e(G) = 1$.*

Lema 4.3.3 *([34], Lema 2.2.2, p.58) Seja G um grupo e $\overline{\mathbb{Z}_2G} = Hom_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2G, \mathbb{Z}_2) = Coind_{\{1\}}^G\mathbb{Z}_2$, então $\rho : \overline{\mathbb{Z}_2G} \longrightarrow PG$; $\phi \longrightarrow A_\phi$; $A_\phi = \{g \in G;\ \phi(g^{-1}) = 1\}$ é um isomorfismo e induz isomorfismo de $\overline{\mathbb{Z}_2G}/\mathbb{Z}_2G$ e PG/FG, consequentemente, $e(G) = dim_{\mathbb{Z}_2}H^0(G; \overline{\mathbb{Z}_2G}/\mathbb{Z}_2G)$.*

Proposição 4.3.2 *Se G é infinito, então $e(G) = 1 + dim_{\mathbb{Z}_2}H^1(G; \mathbb{Z}_2G)$.*

Demonstração: Consideremos a seguinte sequência exata curta

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_2G \xrightarrow{\psi} \overline{\mathbb{Z}_2G} \xrightarrow{p} \overline{\mathbb{Z}_2G}/\mathbb{Z}_2G \longrightarrow 0$$

de $\mathbb{Z}_2G$-módulos. Logo, temos induzida uma sequência exata longa em cohomologia (Proposição 3.1.12)

$$0 \longrightarrow H^0(G; \mathbb{Z}_2G) \longrightarrow H^0(G; \overline{\mathbb{Z}_2G}) \longrightarrow H^0(G; \overline{\mathbb{Z}_2G}/\mathbb{Z}_2G) \longrightarrow H^1(G; \mathbb{Z}_2G) \longrightarrow H^1(G; \overline{\mathbb{Z}_2G}) \longrightarrow \ldots$$

Agora, pelo Lema 4.3.3, temos um $\mathbb{Z}_2G$-isomorfismo $PG \cong \overline{\mathbb{Z}_2G} = Hom_{\mathbb{Z}_2}(\mathbb{Z}_2G, \mathbb{Z}_2) = Coind_{\{1\}}^G \mathbb{Z}_2$. Assim, temos

$$H^n(G; PG) \cong H^n(G; Coind_{\{1\}}^G \mathbb{Z}_2) \overset{Shapiro}{\cong} H^n(\{1\}; \mathbb{Z}_2) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_2, & \text{se } \; n = 0 \\ 0, & \textit{caso contrário.} \end{cases}$$

Portanto, $H^0(G; \overline{\mathbb{Z}_2G}) \cong \mathbb{Z}_2$ e $H^1(G; \overline{\mathbb{Z}_2G}) = 0$. Além disso, $H^0(G; \mathbb{Z}_2G) \cong H^0(G; FG) \overset{Prop.3.1.10}{=} (FG)^G$. Agora como G é infinito temos que $(FG)^G = \{\emptyset\}$. De fato, suponhamos que $A \in (FG)^G$ e $A \neq \emptyset$. Então $A \in FG$ e para todo $g \in G$, tem-se $A = gA$, isto é, para todo $g \in G$, temos que $a_i = g.a_j$ com $a_i, a_j \in A$. Logo $g = a_i.a_j^{-1}$ e portanto $G \subset A.A^{-1}$, o que implica G ser finito, o que contradiz a hipótese. Logo, $A = \emptyset$. Assim a sequência exata se reduz a:

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow H^0(G; \overline{\mathbb{Z}_2G}/\mathbb{Z}_2G) \longrightarrow H^1(G; \mathbb{Z}_2G) \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$$

Portanto, $dim_{\mathbb{Z}_2} H^0(G; \overline{\mathbb{Z}_2G}/\mathbb{Z}_2G) = 1 + dim H^1(G; \mathbb{Z}_2G)$. Logo, pelo Lema 4.3.3 temos que $e(G) = dim_{\mathbb{Z}_2} H^0(G; \overline{\mathbb{Z}_2G}/\mathbb{Z}_2G) = 1 + dim_{\mathbb{Z}_2} H^1(G; \mathbb{Z}_2G)$. ■

Corolário 4.3.1 *Se G é um grupo não enumerável, então $dim_{\mathbb{Z}_2} H^1(G; \mathbb{Z}_2G) = 0$.*

Demonstração: Como G é não enumerável, segue da Proposição 4.3.1 que $e(G) = 1$. Logo, pela proposição anterior temos $dim_{\mathbb{Z}_2} H^1(G; \mathbb{Z}_2G) = 0$. ■

Proposição 4.3.3 *Se S é um subgrupo de um grupo G tal que $[G : S] < \infty$, então $e(G) = e(S)$.*

Demonstração: Se G é um grupo finito, então S também é finito. Assim, pelo Lema 4.3.1 temos que $e(G) = 0$ e $e(S) = 0$, ou seja, $e(G) = e(S)$. Agora, se G é infinito, temos pela Proposição 4.3.2 que $e(G) = 1 + dim_{\mathbb{Z}_2} H^1(G; \mathbb{Z}_2G)$. Além disso, S também é infinito (pois $[G : S] < \infty$) e portanto, $e(S) = 1 + dim_{\mathbb{Z}_2} H^1(S; \mathbb{Z}_2S)$. Ainda temos que se $[G : S] < \infty$ então $H^*(S; \mathbb{Z}_2S) \cong H^*(G; \mathbb{Z}_2G)$ (Corolário 3.1.4). Dessa maneira, $e(S) = 1 + dim_{\mathbb{Z}_2} H^1(S; \mathbb{Z}_2S) = 1 + dim_{\mathbb{Z}_2} H^1(G; \mathbb{Z}_2G) = e(G)$. Portanto, $e(G) = e(S)$. ■

Teorema 4.3.1 *Se G é um grupo de dualidade de Poincaré de dimensão $n > 1$ então $e(G) = 1$.*

Demonstração: Pela Proposição 4.3.2 temos que $e(G) = 1 + dim_{\mathbb{Z}_2} H^1(G; \mathbb{Z}_2G)$. Mas $H^1(G; \mathbb{Z}_2G) \cong H^1(G; Ind_{\{1\}}^G \mathbb{Z}_2) \cong H_{n-1}(G; Ind_{\{1\}}^G \mathbb{Z}_2) \overset{Shapiro}{\cong} H_{n-1}(\{1\}; \mathbb{Z}_2) = 0$. Assim, $e(G) = 1$. ■

Exemplo 4.3.1 *Se $G = \pi_1(F)$, onde F é uma superfície fechada, $F \neq S^2$ e $F \neq P^2$, então $e(\pi_1(F)) = 1$ uma vez que G é um PD^2-grupo.*

Exemplo 4.3.2 *Se $S = n\mathbb{Z} \oplus m\mathbb{Z}$, então $e(S) = 1$ pois S é um subgrupo de $G = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ e, da Proposição 4.3.3 (visto que $[G : S] = n.m < \infty$) e exemplo anterior, segue que $e(S) = e(G) = e(\pi_1(T^2)) = 1$.*

Observação 4.3.2 *Pode ocorrer de um grupo G ter $e(G) = 1$ e não ser um grupo de dualidade de Poincaré. Por exemplo, temos $e(\mathbb{R}) = 1$ pois $\mathbb{R}$ é um grupo abeliano não enumerável (Proposição 4.3.1), mas $\mathbb{R}$ não é grupo de dualidade de Poincaré pois todo grupo de dualidade de Poincaré é finitamente gerado (Corolário 3.3.2).*

4.3.2 O Invariante $E(G, S)$

Definiremos nesta seção o invariante $E(G, S)$ que é um caso particular de um invariante mais geral $E(G, \mathcal{S}; M)$ (que foi definido em [2]) e apresentamos alguns resultados relacionados com dualidade.

Definição 4.3.2 *Sejam (G, S) um par grupo, com $\mathcal{S} = \{S_i, i \in I\}$ uma família de subgrupos de G (não necessariamente distintos), e M um $\mathbb{Z}_2G$-módulo. Suponhamos $[G : S_i] = \infty$, para todo $i \in I$. Definimos $E(G, \mathcal{S}; M) = 1 + dimKer(res^G_{S,M})$, onde $res^G_{S,M} : H^1(G; M) \longrightarrow \prod_{i \in I} H^1(S_i; M)$ é a aplicação restrição. O invariante $E(G, S)$ é então um caso particular de $E(G, \mathcal{S}; M)$ por tomar $\mathcal{S} = \{S\}$ e $M = \mathbb{Z}_2(G/S)$ ou seja $E(G, S) = E(G, \{S\}; \mathbb{Z}_2(G/S)) = 1 + dim_{\mathbb{Z}_2} Ker(res^G_{S,\mathbb{Z}_2(G/S)})$ onde $res^G_{S,\mathbb{Z}_2(G/S)} : H^1(G; \mathbb{Z}_2(G/S)) \longrightarrow H^1(S; \mathbb{Z}_2(G/S))$ é a aplicação restrição.*

Temos que $E(G, S)$ é uma generalização do end clássico $e(G)$, para G grupo infinito.

Proposição 4.3.4 *Se G é um grupo infinito então $E(G, \{1\}) = e(G)$.*

Demonstração: Tomando $S = \{1\}$ temos que $res^G_{\{1\}} : H^1(G; \mathbb{Z}_2G) \longrightarrow H^1(\{1\}; \mathbb{Z}_2G) = 0$. Logo $Ker(res^G_{\{1\}}) = H^1(G; \mathbb{Z}_2G)$ e assim $E(G, \{1\}) = 1 + dim_{\mathbb{Z}_2} Ker(res^G_{\{1\}}) = 1 + dim_{\mathbb{Z}_2} H^1(G; \mathbb{Z}_2G) = e(G)$ se G é infinito. ■

Sob certas hipóteses obtemos um resultado para par (G, S) que estende de certo modo o resultado apresentado na Proposição 4.3.2, para um grupo G.

Proposição 4.3.5 *([27], XI, Proposição 10.2 e (10.6), p.354) Sejam G um grupo, S um subgrupo normal de G e M um RG-módulo, onde $R = \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}_2$. Se $res^G_{S,M} : H^1(G; M) \longrightarrow H^1(S; M)$ é a aplicação restrição, então $Ker(res^G_{S,M}) \cong H^1(G/S; M^S)$.*

Proposição 4.3.6 *([24]) Sejam G um grupo e S um subgrupo de G, com $[G : S] = \infty$. Então,*
(i) Se $res^G_{S,\mathbb{Z}_2(G/S)} : H^1(G; \mathbb{Z}_2(G/S)) \longrightarrow H^1(S; \mathbb{Z}_2(G/S))$ for trivial, então $E(G, S) = 1 + dim_{\mathbb{Z}_2} H^1(G; \mathbb{Z}_2(G/S))$;
(ii) Se S é normal em G, então $E(G, S) = 1 + dim_{\mathbb{Z}_2} H^1(G/S; \mathbb{Z}_2(G/S)) = e(G/S)$ se (G/S) é infinito.

Demonstração: (i) Se $res^G_{S,\mathbb{Z}_2(G/S)} = 0$, temos $Ker(res^G_{S,\mathbb{Z}_2(G/S)}) = H^1(G, \mathbb{Z}_2(G/S))$ e, assim $E(G, S) = 1 + dim_{\mathbb{Z}_2} Ker(res^G_{S,\mathbb{Z}_2(G/S)}) = 1 + dim_{\mathbb{Z}_2} H^1(G, \mathbb{Z}_2(G/S))$.
(ii) Se S é normal em G, segue da proposição anterior que $Ker(res^G_{S,\mathbb{Z}_2(G/S)}) \cong H^1(G/S; \mathbb{Z}_2(G/S)^S)$. Mas para $gS \in \mathbb{Z}_2(G/S)$, temos $sgS = gS$, para todo $s \in S$ pois, sendo S normal em G, $g^{-1}sg \in S$, para todo $s \in S$. Assim, $s\alpha = \alpha$, para todo $\alpha \in \mathbb{Z}_2(G/S)$ e todo $s \in S$. Logo, $\mathbb{Z}_2(G/S)^S = \mathbb{Z}_2(G/S)$ e, temos $E(G, S) = 1 + dim_{\mathbb{Z}_2} Ker(res^G_{S,\mathbb{Z}_2(G/S)}) = 1 + dim_{\mathbb{Z}_2} H^1(G/S; \mathbb{Z}_2(G/S))$. ■

Exemplo 4.3.3 *Sejam $G = S \oplus H$, onde S, H são subgrupos de G e $H \cong \mathbb{Z}$. Temos que S é normal em G e, assim, pela proposição anterior, $E(G, S) = 1 + dim_{\mathbb{Z}_2} H^1(G/S; \mathbb{Z}_2(G/S))$. Agora, temos que $G/S \cong H$ e, deste modo, $\mathbb{Z}_2(G/S) \cong \mathbb{Z}_2H$. Logo, $E(G, S) = 1 + dim_{\mathbb{Z}_2} H^1(H; \mathbb{Z}_2H)$. Como H é um grupo de dualidade de Poincaré de dimensão 1 (Exemplo 3.3.1), temos que $H^1(H; \mathbb{Z}_2H) \cong H_0(H; Ind^H_{\{1\}}\mathbb{Z}_2) \overset{Shapiro}{\cong} H_0(\{1\}; \mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2$. Portanto, $E(G, S) = 1 + dim_{\mathbb{Z}_2}\mathbb{Z}_2 = 1 + 1 = 2$.*

Exemplo 4.3.4 *Segue, do exemplo anterior, que $E(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z}^{n-1}) = 2$ e $E(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_m, \mathbb{Z}_m) = 2$, onde $\mathbb{Z}_m$ é o grupo cíclico finito de ordem m.*

Vamos agora estudar o invariante $E(G, S)$ no caso em que G e S satisfazem certas propriedades de dualidade. Usaremos os isomorfismos de dualidade para computar $E(G, S)$ em alguns casos especiais.

Teorema 4.3.2 *Sejam G um D^n-grupo com módulo dualizante C e S um subgrupo de G. Então,*
(i) Se S é um D^{n-1} subgrupo de G com módulo dualizante $Res^G_S C$ (em particular, se G e S são grupos de dualidade de Poincaré sobre $\mathbb{Z}_2$), então $E(G, S) \leq 2$.
(ii) Se $hd_R S \leq n - 2$, então $E(G, S) = 1$.

Demonstração: Como $cd_R S < cd_R G$, temos que, em (i) e (ii), $[G : S] = \infty$ (pois se $[G : S] < \infty$ como $cd_R G < \infty$, pela Proposição 3.2.2 teríamos $cd_R S = cd_R G$) logo, podemos definir $E(G, S)$. Usando que G é um D^n-grupo com módulo dualizante C, e o lema de Shapiro, temos

$$H^1(G; \mathbb{Z}_2(G/S)) \overset{G:D^n-grupo}{\simeq} H_{n-1}(G; C \otimes \mathbb{Z}_2(G/S)) \simeq H_{n-1}(G; C \otimes Ind^G_S \mathbb{Z}_2) \overset{Prop.3.1.8}{\cong}$$
$$H_{n-1}(G; Ind^G_S(Res^G_S C \otimes \mathbb{Z}_2)) \overset{Shapiro}{\simeq} H_{n-1}(S; Res^G_S C \otimes \mathbb{Z}_2).$$

(i) Por hipótese, S é um D^{n-1}-subgrupo de G com módulo dualizante $Res^G_S C$ assim temos:

$$H^1(G; \mathbb{Z}_2(G/S)) \simeq H_{n-1}(S; Res^G_S C \otimes \mathbb{Z}_2) \overset{hip.para\ S}{\simeq} H^0(S; \mathbb{Z}_2) \simeq \mathbb{Z}_2.$$

Logo, $dimKer(res^G_{S,\mathbb{Z}_2(G/S)}) \leq 1$. Portanto, $E(G, S) = 1 + dimKer(res^G_{S,\mathbb{Z}_2(G/S)}) \leq 2$.
(ii) Agora, se $hd_R S \leq n - 2$, temos que $H^1(G; \mathbb{Z}_2(G/S)) \simeq H_{n-1}(S; Ind^G_S((Res^G_S C) \otimes \mathbb{Z}_2)) = 0$.
Logo, $Ker(res^G_S) = 0$ e, portanto, $E(G, S) = 1 + dimKer(res^G_{S,\mathbb{Z}_2(G/S)}) = 1$. ■

Exemplo 4.3.5 *$E(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z}^{n-1}) \leq 2$, se $n \geq 2$, e $E(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z}^r) = 1$ se $n-2 \geq r \geq 1$.*
De fato, pelo Exemplo 4.1.3, temos que $\mathbb{Z}^n$ e $\mathbb{Z}^{n-1}$ são PD^n-grupo e PD^{n-1}-grupo sobre $\mathbb{Z}_2$, respectivamente. Pelo teorema anterior parte (i), temos que $E(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z}^{n-1}) \leq 2$. Agora, temos hd $\mathbb{Z}^r \leq n-2$, e como vimos acima, $\mathbb{Z}^n$ é um PD^n-grupo. Portanto, pelo Teorema 4.3.2 parte (ii), $E(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z}^r) = 1$.

Exemplo 4.3.6 *Se $G = \pi_1(KB) = \langle a, b, a^2b^2 = 1\rangle$ e $H = \langle a \rangle$ então $E(G, H) \leq 2$.*
De fato, pelo Exemplo 4.1.4, temos que G é um PD^2-grupo e pelo Exemplo 3.3.1, H é um PD^1-grupo então pelo teorema anterior parte (i), $E(G, H) \leq 2$. Pode-se verificar que $E(\mathbb{Z}^n, \mathbb{Z}^{n-1}) = E(\pi_1(KB), H) = 2$.

Exemplo 4.3.7 *Seja $G = \pi_1(X)$, onde $X = Y \times S^1$, com Y a superfície orientada de genus 2. Então $G = \pi_1(X) = H \times K$, onde $H = \langle a_1, b_1, a_2, b_2; (a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1})(a_2b_2a_2^{-1}b_2^{-1}) = 1\rangle$ e $K = \langle t \rangle \cong \mathbb{Z}$. Consideremos $S = \langle a_1a_2^{-1}\rangle$, como $\widetilde{X}$ é contráctil, assim X é asférica, logo pelo Teorema 4.1.2 G é um PD^3-grupo, H é um PD^2-subgrupo e K, S são PD^1-subgrupos. Portanto, pelo teorema anterior, $E(G, K) = E(G, S) = 1$, $E(G, H) \leq 2$ e $E(H, S) \leq 2$.*

Observação 4.3.3 *Em [23] os autores definiram um invariante algébrico para um par (G, S) onde G é um grupo e S é um subgrupo de G (denotado por $\widetilde{e}(G, S)$) e provaram alguns resultados envolvendo dualidade e tal invariante ([23], §4). Por definição*

$$\widetilde{e}(G, S) = dim_{\mathbb{Z}_2}\Big(\frac{PG}{\mathcal{F}_S G}\Big)$$

onde $\mathcal{F}_S G = \{A \subseteq G; A \subseteq S.F$ para algum subconjunto finito F de G $\}$. As seguintes propriedades são válidas:
- $\widetilde{e}(G, \{1\}) = e(G)$
- $\widetilde{e}(G, S) = 0$ *se e somente se* $[G : S] < \infty$
- $\widetilde{e}(G, S) = 1 + dim H^1(G, \mathcal{F}_S G)$.

Dentre os resultados envolvendo dualidade apresentados pelos autores, destacamos:
- *Seja G um PD^n-grupo e S é um subgrupo de tipo FP. Então $cd_F S \leq n-2$ precisamente se $\widetilde{e}(G, S) = 1$ ([23], Corolário 4.2, p.205).*
- *Seja G um PD^n-grupo e S um D^{n-1}-subgrupo. Então $\widetilde{e}(G, S) = \infty$ ou S é um PD^{n-1}-subgrupo e, nesse caso $\widetilde{e}(G, S) = 2$ ([23], Corolário 4.3, p.205).*
- *Seja G um PD^3-grupo livre de torção e S um subgrupo de tipo FP. Então $\widetilde{e}(G, S) = 2$ se e somente se S é um PD^2-grupo ([23], Proposição 4.4(2), p.206).*

Observação 4.3.4 *Existe uma extensão natural do conceito de grupo de dualidade para "par $(G, \mathcal{S})$ de dualidade" ([8], p.277). Grosseiramente falando um par $(G, \mathcal{S})$ é de dualidade se as "homologias e cohomologias relativas de grupos" satisfazem relações de dualidade similares às existentes para homologia e cohomologia absoluta quando um grupo é de dualidade.*

Em ([1]) foi provado o seguinte fato que de certa forma generaliza, para par de dualidade, o Teorema 4.3.1:

- *Se* (G, S) *é um par de dualidade então* $E(G, S) = 1$ *ou equivalentemente,* $dim_{\mathbb{Z}_2} Ker(res^G_{S,\mathbb{Z}_2(G/S)}) = 0$ *([1], Proposição 2.10, p.11).*

Outros resultados relacionados com pares de dualidade e os invariantes $e(G)$, $\widetilde{e}(G, S)$ ou $E(G, \mathcal{S}; M)$ tem sido obtidos. Por exemplo, relacionados com $E(G, \mathcal{S}; M)$ citamos ([3], Teorema 3.5) e ([2], Teorema 1).

Referências Bibliográficas

[1] ANDRADE, M.G.C. , FANTI E.L.C. A relative cohomological invariant for pairs of groups, **Manuscripta Mathematica**, n.83, p.1-18, 1994.

[2] ANDRADE, M.G.C, FANTI, E.L.C; DACCACH, J.A. On Relative Cohomology of Groups, **Rev. Mat. Estat.**, São Paulo, v.17, p.275-288, 1999.

[3] ANDRADE, M.G.C.; FANTI, E.L.C.; PAPANI, F.M.G. A Relative Invariant, Duality and Splitting of Groups, **Revista de Matemática e Estatística**, São Paulo, vol. 21, pp.131-141, 2003.

[4] BESTVINA, M., Brady,N. Morse theory and finitess properties of groups, **Invent. Math.** 129, n.3, p.445-470, 1997, Queen Mary College, London, 1976.

[5] BIERI, R. Gruppen mit Poincaré- Dualitat, **Commentarii Mathematici Helvetici** 47, p. 373-393, 1972.

[6] BIERI, R. Homological Dimension of Discrete Groups, **Queen Mary College Math. Notes**, p.277-319, 1978, Queen Mary College, London , 1976.

[7] BIERI, R., ECKMANN, B. Groups with Homological Duality Generalizing Poincaré Duality, **Inventiones Math.** 20, p. 103-124, Springer Verlag, 1973.

[8] BIERI, R., ECKMANN, B. Relative homology and Poincaré duality for group pairs, **Journal of Pure and Applied Algebra**, n.13, p.277-319, 1978.

[9] BLEILE, B. Poincaré duality pairs of dimension three, **Bull.Austral.Math.Soc.**, v.72, p.331-334, 2005.

[10] BROWN, K.S. **Cohomology of Groups**, G.T.M., n.87, Springer-Verlag, New York, 1982.

[11] CIOCA, D.M.; Cohomologia e Ends de Grupos, Dissertação (Mestrado em Matemática), IBILCE-UNESP, 1997.

[12] DAVIS, J.F., KIRK, P. **Lecture Notes in Algebraic Topology**, Graduate Studies in Mathematics n.35, AMS, 2001.

[13] DICKS, W., DUNWOOD, M. J. **Groups acting on graphs**, Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

[14] ECKMANN, B.; MÜLLER, H. Poincaré Duality Groups of Dimension Two, **Comment. Math. Helvetici**, n.55, p.510-520, 1980.

[15] ECKMANN, B.; LINNEL, P.A. Poincaré Duality Groups of Dimension Two II, **Comment. Math. Helvetici**, n.58, p.111-114, 1983.

[16] FANTI, E.L.C. Invariantes Cohomológicos e Decomposição de Grupos, Tese (Doutorado em Matemática), ICMC - USP, São Carlos, 1992.

[17] GREENBERG, M.J. **Lectures on Algebraic Topology**, W.A., Benjamim, Inc., 1966.

[18] HAMBLETON, I.,HAUSMANN, J.C. *Acyclic maps and Poincaré spaces*, **Lecture Notes in Mathematics**, v.1051, p.222-245, 1984.

[19] HATCHER, A. **Algebraic Topology**, Cambridge: Cambride University Press, 2001.

[20] HILTON, P.J.; WYLYE, S. **Homology Theory - An Introduction to Algebraic Topology**, Cambride University Press, 1960.

[21] HU, S.T.; **Introduction to Homological Algebra**, Holden-Day Series in Mathematics, Holden-Day Inc. São Francisco, 1968.

[22] JOHNSON, F.E.A.; WALL, C.T.C. On groups satisfying Poincaré duality, **Annals of Math.**, n.96, p.592 -598, 1972.

[23] KROPHOLLER, P.; ROLLER, M.A. Relative Ends and Duality Groups, **Journal of Pure and Applied Algebra**, v.61, p.197-210, 1989.

[24] LÁZARO, C.A.; Grupos e Pares de Dualidade e Estudo do Invariante $E(G, S)$, Dissertação (Mestrado em Matemática), IBILCE-UNESP, 2005.

[25] LIMA, E.L. **Grupo fundamental e espaços de recobrimento**, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 214pp, 1993.

[26] MACEDO, B.L. Propriedades Homológicas de Finitude e Grupos de Dualidade, Dissertação (Mestrado em Matemática), IBILCE-UNESP, 2002.

[27] MACLANE, S. **Homology**, Springer - Verlag, Berlin, 1967.

[28] MASSEY, W.S. **Algebraic Topology: An Introduction**, Springer - Verlag, New York, Inc., 1967.

[29] MASSEY, W.S. **Singular Homology Theory**, Springer-Verlag, New York, Inc., 1980.

[30] MENEGUESSO, E. Algumas considerações sobre os espaços de Eilenberg-Maclane, Dissertação (Mestrado em Matemática), IBILCE-UNESP, 2007.

[31] MULLER, H.; Decomposition theorems for group pairs, **Springer-Verlag, Math.** Z, n.176, p.223-246, 1981.

[32] POLI, J.L. Equivalência dos Conceitos de Orientação em Variedades e Grau de Aplicações dos Pontos de Vista Topológico e Diferencial, Dissertação (Mestrado em Matemática), ICMC - USP, 1981.

[33] ROTMAN, J.J.; **An Introduction to Homological Algebra**, Academic Press, Inc., 1979.

[34] SANTOS, A.P. Cohomologia de Grupos e Invariantes Algébricos, Dissertação (Mestrado em Matemática), IBILCE - UNESP, 2006.

[35] SCHUBERT, H.; **Topology**, MacDonald & Co. (Publishers) LTD, 1968.

[36] SILVEIRA, F.S.M. Um Invariante Cohomológico para Pares de Grupos, Dissertação (Mestrado em Matemática), IBILCE - UNESP, 2003.

[37] SCOTT, G.P.; WALL, C.T.C. Topological methods in group theory. Homological Groups Theory. **London Math. Soc. Lecture Notes Series**, Cambridge, n.36, p.137 - 203, 1979.

[38] SPANIER, E.H. **Algebraic Topology**, McGraw-Hill, New York, Inc., 1966.

[39] STALLINGS, J.R. On torsion free groups with infinitely many ends, **Ann. of Math.**,n.88, p.312-334, 1968.

[40] SWAN, R. Groups of cohomological dimension one, **J. of Algebra**, n.12, p.585-610, 1969.

[41] STEENROD, N.E. Homology with Local Coefficients, **The Annals of Mathematics**, v.44, n.4, p.610-627, 1943.

[42] THOMAS, C.B. Splittings theorems for certain PD^3-groups, **Math. Z.**, n.186, p.201-209, 1984.

[43] TURAEV, V.G. Three dimensional Poincaré complexes: Homotopy classification and splitting, **Math. Sb.**, n.180, p.809-830, 1989.

Índice Remissivo