



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

ÁREA DE ENSINO E APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA E SEUS FUNDAMENTOS
FILOSÓFICO-CIENTÍFICOS

**Construção de narrativas matemáticas na exploração de
problemas históricos com o GeoGebra**

LARA MARTINS BARBOSA

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS

RIO CLARO – SP

2023

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“Júlio de Mesquita Filho”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Campus de Rio Claro

Lara Martins Barbosa

**Construção de narrativas matemáticas na exploração de problemas históricos
com o GeoGebra**

Tese de Doutorado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Campus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutora em Educação Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Scucuglia
Rodrigues da Silva

Rio Claro – SP
2023

B238c Barbosa, Lara Martins
Construção de narrativas matemáticas na exploração de problemas
históricos com o GeoGebra / Lara Martins Barbosa. -- Rio Claro, 2023
178 p.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp),
Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro
Orientador: Ricardo Scucuglia Rodrigues da Silva

1. Demonstração. 2. Verdades Matemáticas. 3. Arquimedes. 4.
Educação Matemática. 5. Tecnologias Digitais. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de
Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“Júlio de Mesquita Filho”
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Campus de Rio Claro

Lara Martins Barbosa

**Construção de narrativas matemáticas na exploração de problemas históricos
com o GeoGebra**

Tese de Doutorado apresentada ao Instituto de Geociências e Ciências Exatas do Campus de Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutora em Educação Matemática.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Ricardo Scucuglia Rodrigues da Silva – Orientador
IBILCE/UNESP/São José do Rio Preto (SP)

Profa. Dra. Aparecida Santana de Souza Chiari
INMA/UFMS/Campo Grande (MS)

Prof. Dr. Henrique Lazari
IGCE/UNESP/Rio Claro (SP)

Profa. Dra. Giselle Costa de Sousa
CCET/UFRN/Natal (RN)

Prof. Dr. Marcelo de Carvalho Borba
IGCE/UNESP/Rio Claro (SP)

Resultado: Aprovada

Rio Claro – SP, 06 de Julho de 2023

Dedico esta tese aos meus pais Ligia e Alexandre
e a todos que acreditam e defendem a Educação
pública, gratuita e de qualidade.

AGRADECIMENTOS

Expresso meus sinceros agradecimentos a todos aqueles que, de uma forma ou de outra, colaboraram para tornar este estudo uma realidade palpável. É uma sensação incrível poder olhar para trás e reconhecer as mãos amigas que me ajudaram a construir cada passo desse percurso.

Ligia, Alexandre e Ana Clara, vocês são meus maiores amores, independentemente de qualquer distância. Agradeço por sempre terem sido a fonte de amparo e carinho que me fizeram sentir acolhida, mesmo em meio a quilômetros de distância. Suas orações e apoio foram pilares essenciais que me permitiram trilhar esse caminho e realizar as escolhas que me trouxeram até aqui.

Lucas, obrigada por ser meu par! Cada afeto, gesto e sorriso que experimentamos ao longo desses períodos de escrita, e que ainda estamos destinados a vivenciar e compartilhar, têm um significado especial para mim. Sua presença foi fundamental em todo esse processo, e valorizo imensamente tudo o que construímos juntos e a nova família que você me deu: Gilza, Saulo, André, Nina, Dona Marilene e Sandro, obrigada!

Professor Ricardo Scucuglia, meu sincero reconhecimento por suas orientações e ensinamentos. A realização desta tese não seria concretizada sem sua imensa colaboração e paciência. Obrigada por todos os instantes dedicados a mim e a esta pesquisa.

As docentes Aparecida Chiari e Giselle Sousa e ao docente Henrique Lazari, agradeço por terem aceito integrar esse percurso ao participarem das bancas de qualificação e defesa. Suas contribuições moldaram este trabalho de maneira significativa.

Professor Marcelo Borba, líder inspirador do GPIMEM, suas orientações e incentivos foram essenciais para minha evolução acadêmica, política e pessoal. Agradeço o respeito, companheirismo e envolvimento que tanto me inspiram, que bom é poder te chamar de amigo!

Bruna, Camila, Hannah e Jeimy ter vocês comigo traz cores em minha vida. Através de nossas vivências compartilhadas, me tornei a mulher que sou. Cada ligação, encontro ou mensagem meu coração se aquece. Que nossos afetos sejam uma constante.

Aos colegas do GPIMEM e PPGEM, sou grata por cada encontro que delineou meu crescimento como pesquisadora. A troca constante de ideias e aprendizados permitiu meu amadurecimento. Nossas discussões após Seminários e Jornadas abriram janelas para os vastos horizontes da Educação Matemática. A influência de vocês se encontra entrelaçada nesta tese.

Aos participantes da pesquisa, agradeço por serem a base das interações durante a disciplina investigada, contribuindo de forma fundamental para a produção dos dados.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

RESUMO

Esta tese apresenta uma pesquisa que teve como objetivo investigar os processos de construção de narrativas matemáticas, por um grupo de pós-graduandos, em um cenário envolvendo História da Matemática e o uso de tecnologias. Especificamente, buscou-se analisar como tais processos ocorreram nesse grupo ao explorarem demonstrações de problemas históricos do cálculo, em especial a *Quadratura da Parábola* e a *Espiral de Arquimedes*, com o *software* GeoGebra. Esta pesquisa seguiu uma abordagem metodológica qualitativa e teve como cenário de investigação a disciplina “Gênese do Pensamento Diferencial” oferecida pelo Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (UNESP), Campus Rio Claro concomitante ao Programa de Pós-Graduação Ensino e Processos Formativos, interunidades, também da UNESP. Os procedimentos metodológicos utilizados e que constituem os dados desta pesquisa são: observação participante e registros em diário de campo; filmagens e gravação dos encontros semanais da disciplina e de encontros complementares onde os discentes se reuniam para discutir e dialogar sobre os problemas; registros de interações no *WhatsApp*; construções realizadas no GeoGebra; e arquivos em formato de artigo produzidos pelos participantes. Os resultados apontam que as diferentes estratégias adotadas possibilitaram processos de identidade e atribuição de diferentes significados ao uso de tecnologias digitais vinculado às demonstrações durante a comunicação de ideias. Essas combinações potencializaram e expandiram as discussões sobre verdades matemáticas, abrindo possibilidades ao poder argumentativo atrelado ao uso do GeoGebra. É possível reconhecer que os grupos foram capazes de produzir narrativas matemáticas por meio das articulações e estudos propostos. Ao explorarem problemas clássicos da Matemática, em um contexto histórico, e com limitação de resultados matemáticos, os pós-graduandos assumiram identidades de pensadores da época de Arquimedes (287 a.C – 212 a.C), estabelecendo relações entre aspectos e objetos matemáticos em um contexto histórico. Essa abordagem permitiu que modos de pensamento se entrelaçassem e fossem incorporados às narrativas matemáticas criadas, enfatizando a maneira como a atividade matemática, envolvendo problemas da História da Matemática e articulados ao uso e mediação de tecnologias digitais, evidencia a premissa de que o pensamento matemático envolve modos narrativos de pensamento.

Palavras-Chave: Demonstração. Verdades Matemáticas. Arquimedes. Educação Matemática. Tecnologias Digitais.

ABSTRACT

This thesis presents a research that aimed to investigate the construction processes of mathematical narratives, by a group of graduate students, in a scenario involving the History of Mathematics and the use of technologies. Specifically, we sought to analyze how such processes occurred in this group when they explored demonstrations of historical calculus problems, especially the Quadrature of the Parabola and the Spiral of Archimedes, with the GeoGebra software. This research followed a qualitative methodological approach and had as an investigation scenario the discipline “Genesis of Differential Thinking” offered by the Graduate Program in Mathematics Education of the Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (UNESP), Campus Rio Claro concomitant with the Graduate Program Teaching and Training Processes, inter-units, also from UNESP. The methodological procedures used and which constitute the data of this research are: participant observation and records in a field diary; filming and recording of the weekly meetings of the discipline and of complementary meetings where the students gathered to discuss and dialogue about the problems; records of interactions on WhatsApp; constructions carried out in GeoGebra; and files in article format produced by the participants. The results indicate that the different strategies adopted enabled identity processes and attribution of different meanings to the use of digital technologies linked to demonstrations during the communication of ideas. These combinations potentiated and expanded discussions about mathematical truths, opening up possibilities for the argumentative power linked to the use of GeoGebra. It is possible to recognize that the groups were able to produce mathematical narratives through the articulations and proposed studies. By exploring classical Mathematics problems, in a historical context, and with limited mathematical results, graduate students assumed identities of thinkers from the time of Archimedes (287 b.C – 212 a.D), establishing relationships between mathematical aspects and objects in a historical context. This approach allowed modes of thought to be interwoven and incorporated into the mathematical narratives created, emphasizing the way in which mathematical activity, involving problems from the History of Mathematics and articulated with the use and mediation of digital technologies, highlights the premise that mathematical thinking involves narrative modes of thought.

Keywords: Proof. Mathematical Truths. Archimedes. Mathematics Education. Digital Technologies.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Ações dos estudiosos para a criação do Cálculo e sua fundamentação	20
Figura 2 – Momentos de trabalho do Grupo 1	81
Figura 3 – Espiral de Arquimedes	82
Figura 4 – Momentos de trabalho do Grupo 2	83
Figura 5 – Material estudado pelo Grupo 1	87
Figura 6 – Parábola construída por Hércules a partir das instruções de César.....	91
Figura 7 – Esboço da hipótese e tese do problema da quadratura, utilizando quadro e giz	95
Figura 8 – Estudo da demonstração da quadratura, utilizando quadro e giz.....	96
Figura 9 – Expressão que contém a dúvida enunciada por Bruna ao final do encontro 2.....	96
Figura 10 – Verificação das relações já conhecidas por Arquimedes e abordagem inicial do problema da quadratura utilizando o GeoGebra.....	98
Figura 11 – Exploração da nova abordagem do problema no GeoGebra.....	100
Figura 12 – Demonstração analítica da quadratura da parábola apresentada no artigo final	103
Figura 13 – Desenvolvimento das etapas apresentada em Sousa (2014) utilizando o GeoGebra	105
Figura 14 – Representação final da demonstração no GeoGebra.....	106
Figura 15 – Material estudado pelo Grupo 2.....	113
Figura 16 – Construção preliminar da espiral realizada por Ana no GeoGebra	115
Figura 17 – Construção preliminar da espiral realizada por Helena no GeoGebra.....	116
Figura 18 – Construção da demonstração do resultado por Arquimedes.....	125
Figura 19 – Definições da espiral.....	126

LISTA DE QUADROS

Quadro 1 – Características de narrativa e suas interpretações	33
Quadro 2 – Aspectos da demonstração em Matemática	55
Quadro 3 – Aspectos da prova em Educação Matemática	61
Quadro 4 – Construções realizadas pelo grupo para exploração da Quadratura da Parábola	77
Quadro 5 – Construções realizadas pelo grupo para exploração da Espiral	78
Quadro 6 – Movimento da exibição dos elementos das construções no GeoGebra articulados a explicação de César.	107
Quadro 7 – Cordel Quadratura da Parábola	111
Quadro 8 - Etapas da construção da Espiral de Arquimedes como lugar geométrico e sua imagem	121
Quadro 9 - Etapas para a construção do paralelogramo de velocidade – Reta tangente a curva e sua imagem	122
Quadro 10 - Etapas para a construção da trissecção do ângulo, utilizando a Espiral de Arquimedes, e sua imagem.....	123
Quadro 11 - Etapas para a construção que permite calcular a área abaixo de uma espiral e imagens respectivas	124
Quadro 12 – Construção da espiral como lugar geométrico no GeoGebra.....	126
Quadro 13 – Construção da reta tangente a espiral a partir de um paralelogramo no GeoGebra	127
Quadro 14 – Construção da trissecção do ângulo no GeoGebra.....	127
Quadro 15 – Construção da área da espiral no GeoGebra	128

LISTA DE SIGLAS

GdS – Grupo de Sábado

GECEM – Grupo de Estudos Contemporâneos e Educação Matemática

GEM – Grupo de Estudos e Pesquisa em Educação Matemática

GEPPFM – Grupo de Estudos e Pesquisa sobre Formação do Professor de Matemática

Ghoem – Grupo de Pesquisa História Oral e Educação Matemática

GIF – Graphics Interchange Format

GPIMEM – Grupo de Pesquisa em Informática, outra Mídia e Educação Matemática

Grucomat – Grupo Colaborativo em Matemática

Hifopem – Grupo de Pesquisa Histórias de Formação de Professores que Ensinam Matemática

IGCE – Instituto de Geociências e Ciências Exatas

PIBID – Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência

PET – Programa de Educação Tutorial

PPGEM – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática

PRAPEM – Prática Pedagógica em Matemática

UFU – Universidade Federal de Uberlândia

UFSCar – Universidade Federal de São Carlos

UNESP – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1	14
INTRODUÇÃO.....	14
1.1 História da Matemática, Narrativas e Tecnologias Digitais	15
1.2 Trajetória da pesquisadora.....	24
1.3 Estrutura da tese.....	27
CAPÍTULO 2	30
COMPREENSÕES ACERCA DE NARRATIVAS	30
2.1 A constituição de uma narrativa	30
2.2 A narrativa como investigação	35
2.3 Narrativas em Educação Matemática	38
CAPÍTULO 3	50
COMPREENSÕES ACERCA DE VERDADES MATEMÁTICAS	50
3.1 Breve introdução histórica.....	50
3.2 Perspectivas em Matemática	53
3.3 Perspectivas em Educação Matemática.....	58
3.4 Perspectivas com o uso do computador.....	64
CAPÍTULO 4	70
METODOLOGIA DE PESQUISA e PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS	70
4.1 Abordagem metodológica – Delimitando a pesquisa	70
4.2 O cenário de investigação.....	72
4.3 Fontes de dados e triangulação	73
4.3.1 Observação participante, filmagem e gravação dos encontros	74
4.3.2 Diário de campo.....	75
4.3.3 Registros de interações no WhatsApp	76
4.3.4 Construções no GeoGebra e Artigo escrito pelos grupos	76
4.3.5 A triangulação.....	79
4.4 Os participantes e suas escolhas	79

4.4.1 Grupo 1 – A Quadratura da parábola por Arquimedes	80
4.4.2 Grupo 2 – A Espiral de Arquimedes.....	82
4.5 Método de descrição e análise dos dados	84
CAPÍTULO 5	86
ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS.....	86
5.1 Investigando o problema da Quadratura da Parábola.....	86
5.1.1 Encontro 1	87
5.1.2 Encontro 2.....	93
5.1.3 Encontro 3.....	97
5.1.4 O artigo final.....	102
5.1.5 As construções no GeoGebra e a exposição do grupo.....	106
5.2 Investigando o problema da Espiral	112
5.2.1 Encontro 1	112
5.2.2 Encontro 2.....	114
5.2.3 Encontro 3.....	115
5.2.4 Interações no grupo do WhatsApp.....	118
5.2.5 O artigo final.....	120
5.2.6 As construções no GeoGebra e a exposição do grupo.....	125
5.3 Perspectivas reveladas a partir da análise dos dados.....	129
CAPÍTULO 6	134
CONSIDERAÇÕES FINAIS	134
REFERÊNCIAS	138
APÊNDICES	150
APÊNDICE A	150
APÊNDICE B.....	152
ANEXOS	154
ANEXO A – The Quadrature of the Parabola	154
ANEXO B – A quadratura da parábola	158
ANEXO C – Demonstração algébrica realizada pelo Grupo 1	162
ANEXO D – Desenvolvimento das etapas apresentada em Santos (2014).....	166

ANEXO E – The Archimedean Spiral	170
ANEXO F – A Espiral de Arquimedes	174

CAPÍTULO 1

Será que existe algum 'eu' essencial que, de algum modo, já está dentro de nós?
(BRUNER, 2014, p. 73)

INTRODUÇÃO

Diversas pesquisas em Educação Matemática e outras áreas do conhecimento têm explorado a temática que envolve narrativas e investigações narrativas (BRUNER, 1997; GINZBURG, 2000; SILVA, 2020; SINCLAIR; HEALY; SALE, 2009; ZAQUEU-XAVIER, 2019). Tais estudos mostram a potência das narrativas na área acadêmica, em que diferentes pesquisadores consideram a narrativa uma forma de pensamento e de organização da experiência humana. Além disso, há um crescente interesse na investigação narrativa, entre os pesquisadores qualitativos, devido sua forma linguística de exibir a existência humana. (POLKINGHORNE, 1995). Neste estudo, as narrativas serão utilizadas com o objetivo de problematizar os diferentes discursos e modos de operar de estudantes de Pós-Graduação.

A abordagem narrativa também tem sido explorada como uma maneira de engajar os alunos de forma emocional e promover a construção de significados pessoais em relação aos conteúdos matemáticos. Por meio das narrativas, os estudantes são convidados a refletir sobre problemas matemáticos e a compartilhar suas próprias experiências, conectando-se com a disciplina de uma maneira mais profunda e autêntica. Além disso, as narrativas podem ajudar a desmistificar a ideia de que a matemática é uma disciplina isolada e abstrata, mostrando como ela está presente em diferentes contextos e situações do cotidiano. (DOXIADIS, 2003).

Nesse sentido, a abordagem com narrativas também tem despertado interesse entre os pesquisadores qualitativos devido à sua capacidade de capturar a complexidade e a subjetividade da experiência humana. As narrativas permitem explorar as percepções, emoções e reflexões dos indivíduos envolvidos no processo de ensino e aprendizagem da matemática, proporcionando *insights* valiosos para o desenvolvimento de práticas (NEMIROVSKY, 1996).

Considerando o campo que investiga a ideia de verdades matemáticas (demonstrações e provas), inúmeros estudos já foram publicados, evidenciando a complexidade e a diversidade de abordagens nesse tema (DOMINGUES, 2002; MERZBACH; BOYER, 2011; ROQUE, 2012). As discussões sobre demonstração e prova têm sido objeto de reflexão há décadas, envolvendo tanto pesquisadores da área da Matemática como Educadores Matemáticos (BICUDO, 2002; STEWART; TALL, 2015).

Uma das questões centrais nesse debate diz respeito às diferentes interpretações dos conceitos que permeiam as verdades matemáticas. Matemáticos e Educadores Matemáticos apresentam perspectivas distintas e, muitas vezes, divergentes, ao abordar esses conceitos e ao buscar formas de denotá-los (BALACHEFF, 2000; GARNICA, 1995; DE VILLIERS, 1990). Essas perspectivas variadas podem surgir a partir de diferentes tradições matemáticas, enfoques pedagógicos e experiências individuais, contribuindo para um ambiente de debate e reflexão.

No entanto, o debate em torno das verdades matemáticas ganha um novo impulso quando as tecnologias digitais são propostas como mediadoras no processo de compreensão dessas verdades. A introdução das ferramentas digitais na Educação Matemática, como *softwares* e aplicativos, tem levantado questões sobre como essas tecnologias podem influenciar a forma como concebemos, comunicamos e exploramos as verdades matemáticas (DAVIS, 1993; HANNA, 2000; NÓBRIGA, 2019). A discussão abrange desde a utilização de tecnologias como auxílio para demonstrações e provas até o impacto mais amplo na maneira como os alunos constroem e compreendem o conhecimento matemático.

Dessa forma, as reflexões sobre as verdades matemáticas e a influência das tecnologias digitais em um contexto histórico são relevantes para compreendermos a complexidade do ensino e aprendizagem da Matemática e para explorarmos as possibilidades de contribuir com essa área do conhecimento por meio da construção de narrativas matemáticas mediadas por tecnologias digitais. Assim, a questão que norteia tal estudo é:

“Como ocorre o processo de construção de narrativas matemáticas por um grupo de pós-graduandos em Educação Matemática ao explorarem problemas da História da Matemática com o GeoGebra?”

Nesse contexto, o objetivo desta pesquisa é investigar os processos de construção de narrativas matemáticas, por um grupo de pós-graduandos, em um cenário envolvendo História da Matemática e o uso de tecnologias digitais. Para buscar respostas à questão tive como cenário de investigação a disciplina “Gênese do Pensamento Diferencial” oferecida de forma concomitante no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (UNESP), Campus Rio Claro e no Programa de Pós-Graduação Ensino e Processos Formativos, interunidades, também da UNESP.

1.1 História da Matemática, Narrativas e Tecnologias Digitais

É certo, no meio científico, que a Matemática é uma ciência. No entanto, poderia ser considerada uma forma de literatura? A primeira impressão pode nos levar a rejeitar essa

indagação aparentemente estranha, mas a partir de uma reflexão mais profunda podemos encontrar semelhanças. Há uma crescente tendência de explorar a interação mútua entre Matemática e narrativas, e a História da Matemática tem se tornado cada vez mais objeto de estudo nas pesquisas envolvendo narrativas (CORRY, 2009; DOXIADIS, 2003).

Segundo Liu (2022), a partir da noção de que a Matemática avançada se tornou praticamente irrelevante para o discurso cultural dominante, a *British Society for the History of Science*¹ organizou, em 2009, um curso de verão intitulado *Mathematics and Narrative*² com o objetivo de questionar a dicotomia entre Matemática e cultura, revelando as profundas e complexas interconexões entre os modos de pensamento narrativo e paradigmático (BRUNER, 1998) e ampliando as perspectivas sobre a História e a Filosofia da Matemática.

De acordo com Su et al. (2016), a narrativa matemática tem despertado crescente interesse entre professores e educadores matemáticos. Essa abordagem, conforme definida pelos autores, utiliza a narrativa como uma ferramenta para comunicar, construir significado e promover a compreensão matemática. Por meio de histórias, argumentos, problemas e suas soluções, bem como metáforas literárias, um narrador pode estimular e facilitar a compreensão dos alunos, ouvintes ou leitores em relação aos conceitos matemáticos.

Chen e Liu (2018) propõem três formas principais da relação entre Matemática e narrativa: (a) Matemática como narrativa; (b) Matemática na narrativa e; (c) narrativa no ensino de Matemática. É importante destacar que não há uma linha clara que demarque essas três formas relacionais, podendo haver sobreposições e interconexões entre elas.

Um exemplo antigo e bem conhecido que pode ser considerado uma narrativa matemática é o enredo do diálogo Mênon de Platão³ (PLATÃO, 1996), no qual Sócrates (470 a.C – 399 a.C) guia intelectualmente um menino escravo analfabeto para determinar a área de um quadrado. Sócrates usa um problema de geometria como um meio de demonstrar sua ideia de virtude a Mênon, o que é um exemplo de Matemática na narrativa. Por meio de uma série de questionamentos cuidadosos, contraexemplos são apresentados para fazer o garoto perceber seu equívoco sobre as dimensões de comprimento e área, apresentando assim a Matemática como uma narrativa. No final, Mênon compreende que a área duplicada desejada é o quadrado da diagonal do quadrado original. Assim, todo o diálogo pode ser interpretado como um exemplo de narrativa no ensino de Matemática, embora o ensino de geometria não tenha sido a intenção original de Sócrates.

¹ Sociedade Britânica para a História da Ciência.

² Matemática e Narrativa.

³ Diálogo disponível em <https://www.dm.ufscar.br/hp/hp157/hp157001/hp157001.html>.

Para Thomas (2002), a comparação entre Matemática e narrativa é mais profunda e abrangente do que as analogias com música e poesia, uma vez que os gêneros do teorema matemático e da prova possuem semelhanças com o gênero de uma história. Ao estabelecer uma prova matemática, são selecionados alguns postulados para identificar as relações entre objetos, assim como se indicam as relações entre personagens em uma história. O matemático descobre padrões gerais ocultos ao revelar as relações congruentes entre casos especiais, assim como um narrador habilidoso utiliza episódios ficcionais específicos para refletir incidentes no mundo real.

Dentro desse contexto, Fossa (2009) propõe uma abordagem introdutória e informal de técnicas básicas de demonstração matemática. Na primeira parte de sua obra, o autor apresenta uma série de diálogos que, embora abordem assuntos relacionados à Matemática, se desenrolam em situações do cotidiano e que se passam durante os dias de uma semana. As diversas observações feitas pelos personagens criados pelo autor exigem interpretação, análise e avaliação por parte do leitor. Ao realizar as atividades propostas de maneira crítica e reflexiva, surge uma oportunidade inicial para se familiarizar com demonstrações dentro de um contexto natural, como o de um diálogo entre amigos. Ao examinar e avaliar essas conversas, bem como responder às perguntas ao final de cada diálogo, o leitor tem a chance de articular suas próprias opiniões dentro do mesmo ambiente natural, criando assim narrativas matemáticas.

Podemos identificar duas formas relacionais, que serão melhor apresentadas e trabalhadas no Capítulo 2, pelas quais a História pode enriquecer a narrativa matemática: (i) Matemática como narrativa e; (ii) Matemática na narrativa. A História da Matemática exemplifica de forma notável o envolvimento da História no processo da Matemática como narrativa, uma vez que seu propósito é apresentar conceitos matemáticos por meio da investigação e revelação do desenvolvimento de conceitos e proposições matemáticas. (LIU, 2022).

Na História da Matemática, cada proposição matemática é acompanhada por uma história subjacente, e cada história envolve os processos de desenvolvimento de fatos matemáticos. No entanto, é importante ressaltar que a história, por si só, não constitui uma narrativa completa, é necessário um envolvimento significativo. Ao ler ou aprender sobre a História da Matemática, os leitores ou aprendizes são incentivados a utilizar ambos os lados de seus cérebros, engajando tanto o pensamento lógico matemático quanto o pensamento emocional e imaginativo. Esse envolvimento significativo é a fonte do prazer na narrativa matemática. (THOMAS, 2002).

Por outro lado, para Liu (2022) a História desempenha um papel importante na Matemática na narrativa, especialmente na ficção, seja ajudando o narrador a estabelecer a estrutura de toda a história ou fornecendo ideias para a criação de protagonistas e enredos. A presença da Matemática na ficção abrange pelo menos dois tipos de gêneros: a ficção matemática e os textos populares de matemática, ambos se tornando cada vez mais presentes nos últimos anos.

Em seu estudo, Corry (2009) explora a relação triangular entre os discursos da Matemática, a História da Matemática e a presença da Matemática na ficção. Os textos matemáticos são direcionados principalmente a uma comunidade especializada e profissional, enquanto a Matemática na ficção tem como alvo o público em geral. A História da Matemática, por sua vez, abrange ambos os grupos de leitores e essa distinção entre os públicos leitores tem um impacto significativo na linguagem utilizada nos textos e nas expectativas em relação aos leitores.

Segundo Liu (2022, p. 190, tradução nossa)

Os textos de Matemática e a Matemática na ficção representam os dois extremos do espectro narrativo, com a linguagem dos textos matemáticos sendo formal ou formalizada, enquanto a Matemática na ficção adota uma linguagem mais natural e discursiva. Por outro lado, os textos que abordam a História da Matemática ocupam uma posição intermediária. Eles utilizam tanto uma linguagem discursiva e natural para apresentar a linha do tempo, o contexto histórico e as pessoas envolvidas no desenvolvimento do conhecimento matemático, quanto uma linguagem formal e formalizada para demonstrar proposições matemáticas originais ou suas adaptações.⁴

No entanto, os pressupostos da verdade na História requerem uma postura crítica por parte dos leitores ao se envolverem com os textos de História da Matemática. É importante destacar que a interpretação da história está intrinsecamente ligada a uma abordagem narrativa, uma vez que a narrativa desempenha um papel essencial na compreensão e contextualização dos eventos históricos relacionados à Matemática.

Considerando alguns desses eventos históricos, Eves (2011) destaca que nos séculos XVII e XVIII houve um reconhecimento da necessidade de estabelecer uma base mais rigorosa para o Cálculo Diferencial e Integral que impulsionou então o desenvolvimento da Análise Real⁵. Nesse período, o Cálculo, fomentado pela Geometria Analítica, emergiu como uma

⁴ The texts of mathematics and mathematics in fiction occupy the two ends of the narrative spectrum, the language of mathematical texts being formal or formalized and that of mathematics in fiction being natural or discursive. Texts on the history of mathematics may lie in between because they not only use discursive and natural language to introduce the timeline, historical context, and people involved in the development of mathematical knowledge, but also employ formal and formalized language alternatively to demonstrate the original or adaptive forms of mathematical propositions.

⁵ No que diz respeito ao escopo deste estudo, concentrarei as reflexões desta seção em uma construção histórica dos conceitos referentes à Análise Real.

poderosa ferramenta matemática, permitindo abordar problemas antes considerados inacessíveis. Sua notável eficácia e ampla aplicabilidade atraíram a atenção dos pesquisadores da época, resultando em uma proliferação de artigos sobre o assunto. No entanto, é importante destacar que muitas dessas publicações negligenciaram a base teórica insatisfatória do Cálculo da época. Os processos utilizados frequentemente eram justificados com o argumento de que funcionavam, sem uma fundamentação matemática sólida, o que refletia a ênfase na praticidade e nos resultados obtidos, em detrimento da rigorosidade teórica.

Segundo Eves (2011, p. 462)

E só perto do fim do século XVIII, quando muitos absurdos e contradições tinham-se insinuado na matemática, sentiu-se que era essencial examinar as bases da análise para dar-lhes uma fundamentação lógica rigorosa. O cuidadoso esforço que se seguiu, visando a essa fundamentação, foi uma reação ao emprego descontrolado da intuição e do formalismo no século anterior. A tarefa se mostrou difícil, ocupando, em suas várias ramificações, a maior parte dos 100 anos seguintes. Como consequência desse empreendimento, verificou-se um trabalho semelhante e igualmente cuidadoso com os fundamentos de todos os outros ramos da matemática, bem como o refinamento de muitos conceitos importantes. Assim, a própria ideia de função teve que ser esclarecida e noções como as de limite, continuidade, diferenciabilidade e integrabilidade tiveram de ser cuidadosa e claramente definidas. Essa tarefa de refinar conceitos básicos da matemática levou, por sua vez, a generalizações complexas.

Assim, com base em evidências históricas, é possível afirmar que uma considerável parte do século XVIII foi voltada para a exploração dos novos e poderosos métodos do cálculo. O século XIX, por sua vez, foi amplamente dedicado à construção de uma base lógica sólida para a vasta, embora frágil, estrutura estabelecida no século anterior. No século XX, uma das principais ênfases foi a busca por generalizar, na medida do possível, os resultados já alcançados nesse campo.

Com base nos estudos de Eves (2004) e Boyer e Merzbach (2012), Thomé, Duro e Andrade (2020) sintetizaram a produção histórica que culminou na criação da Análise como é conhecida atualmente. A Figura 1 apresenta essa produção.

Figura 1 – Ações dos estudiosos para a criação do Cálculo e sua fundamentação

Fonte: Adaptado de Thomé, Duro e Andrade (2020)

Contudo, as informações históricas nos levam a compreender que as origens do Cálculo remontam a milhares de anos antes de Cristo, impulsionado pela curiosidade humana em explorar e resolver problemas. A partir desse desenvolvimento, surge a Análise como um esforço para estabelecer uma base sólida para o conhecimento acumulado pelo Cálculo ao longo dos séculos. Além disso, é importante mencionar outras contribuições significativas, como a criação da Integral de Lebesgue e as discussões em torno dos Fundamentos da Matemática. (THOMÉ; DURO; ANDRADE, 2020)

Corroborando tais ideias, a obra *How We Got From There To Here: A Story of Real Analysis*⁶, de Rogers e Boman (2014), apresenta uma narrativa matemática que explora o desenvolvimento evolução do que costumeiramente chamamos de Cálculo para a Análise Real. Os autores têm como objetivo introduzir a Análise Real a partir de um contexto histórico, fornecendo um quadro que contextualiza os conceitos e expõe por que os matemáticos sentiram a necessidade de desenvolver definições rigorosas para substituir noções intuitivas. A abordagem é realizada a partir das noções de Leibniz (1646 – 1716), Newton (1643 – 1727) e outros matemáticos nos séculos XVII e XVIII, destacando a transição entre esses séculos e enfatizando o trabalho com os infinitesimais, que resultou no tratamento algébrico por meio de séries, bem como posteriormente em uma abordagem mais moderna desenvolvida nos séculos XIX e XX.

As definições e técnicas apresentadas na obra são motivadas pelas dificuldades reais encontradas pela abordagem intuitiva e são apresentadas em seu contexto histórico. No entanto, não é um livro de história da Análise, é um livro-texto introdutório à Análise, apresentado pelas lentes da História. Como tal, não são inseridos simplesmente fragmentos históricos para complementar o material, a História é parte integrante da obra, em que os leitores são convidados a resolver problemas que ocorrem à medida que surgem em um contexto histórico. Nesse sentido, a narrativa é fundamental para apresentar a riqueza e a complexidade dos desenvolvimentos matemáticos ao longo do tempo, permitindo uma compreensão mais profunda do campo.

Diante do exposto até aqui, é notável o papel fundamental desempenhado pela História da Matemática na compreensão do desenvolvimento do conhecimento matemático. Sua valorização na Educação Matemática decorre da capacidade de cultivar atitudes positivas em relação à aprendizagem e aprimorar habilidades advindas do pensamento matemático, tanto como uma ferramenta quanto como um objetivo em si. No entanto, surge a questão de como a

⁶ Como viemos de lá para cá: uma história de Análise Real.

exploração da História da Matemática pode ser enriquecida em um contexto que envolva tecnologias digitais.

Sanches, Castilho e Mendes (2021) conduziram uma pesquisa bibliográfica com o propósito de identificar estudos que exploraram as contribuições conceituais e pedagógicas, bem como as metodologias para o ensino de Matemática, utilizando a combinação de informações históricas e tecnologias digitais. O objetivo do estudo foi compreender de que maneira as tecnologias digitais têm sido utilizadas nas pesquisas sobre História da Matemática, especificamente no contexto do ensino de Matemática. Ao mapear a literatura existente⁷, os autores buscaram identificar como as tecnologias digitais têm sido empregadas nesse campo, com o intuito de fornecer uma visão abrangente das diferentes abordagens e práticas adotadas.

Foi observado um predomínio significativo do uso de *softwares* de geometria dinâmica, em particular o GeoGebra. Os pesquisadores constataram que o *software* foi amplamente utilizado como uma ferramenta para abordar o ensino de Matemática, incorporando informações históricas. No entanto, ao analisar os trabalhos, os autores notaram que, embora houvessem várias oportunidades para estabelecer uma interface entre a História da Matemática e o uso do GeoGebra, essa conexão não foi efetivamente explorada. Durante as atividades observadas, a História da Matemática e o uso do *software* seguiram caminhos diametralmente opostos, não havendo uma integração efetiva entre essas duas abordagens. Os autores argumentam que nos estudos analisados

[...] o GeoGebra ainda não ultrapassa a fronteira de ser um substituto do quadro branco, da planilha, do kit de ferramentas geométrico, aonde não é explorado de maneira correta outras potencialidades que o software possui além de ser um mero instrumento para ser dirigido por um roteiro de passos sequenciais. (SANCHES; CASTILHO; MENDES, 2021, p. 201)

o que representa uma lacuna significativa em tais estudos, pois da maneira como foi utilizado nos estudos analisados, o *software* pode ser interpretado como uma domesticação (BORBA; VILLARREAL, 2005) de outras mídias.

Contrapondo a análise anterior, Sousa (2020) busca estabelecer uma conexão entre a História da Matemática, as tecnologias digitais e a investigação matemática. A autora destaca a importância dessas três tendências e realiza uma análise das características comuns presentes nesse contexto, em que cinco aspectos são identificados como elementos compartilhados: (i) criação humana; (ii) fonte de geração do conhecimento investigativo; (iii) fonte de resolução

⁷ A busca das produções foi realizada no banco de dados do Centro Brasileiro de Referência em Pesquisa sobre História da Matemática e foram consideradas teses de doutorado e dissertações tanto de mestrados acadêmicos quanto de mestrados profissionais, entre os anos de 1990 e 2019, cujo foco de estudo tivesse relação com alguma das modalidades de pesquisa em História da Matemática.

de problemas; (iv) produção da Matemática genuína e; (v) impacto dessas tendências na relação de ensino e aprendizagem da Matemática.

A abordagem proposta por Sousa (2020) evidencia a interconexão entre as três tendências como elementos que podem potencializar o ensino e a aprendizagem da Matemática. Ao reconhecer a criação humana como um elemento comum, percebe-se que tais tendências são frutos do pensamento humano, oferecendo uma base sólida para a construção do conhecimento matemático. Além disso, ao considerar a fonte de geração do conhecimento investigativo, entende-se que as tendências consideradas compartilham a característica de serem fontes ricas de informação e recursos para a exploração de conceitos matemáticos, oferecendo oportunidades de aprendizagem que vão além do simples domínio de fórmulas e procedimentos, permitindo o envolvimento em processos investigativos e desenvolvimento do pensamento crítico e reflexivo.

Outro aspecto abordado por Sousa (2020) é a função dessas tendências como fonte de resolução de problemas. A História da Matemática fornece exemplos de como os problemas matemáticos surgiram e foram resolvidos ao longo do tempo, enquanto as tecnologias digitais oferecem ferramentas e recursos que podem auxiliar os estudantes na busca por novas soluções, já a investigação matemática, por sua vez, apresenta incentivos à exploração, formulação de hipóteses e execução de estratégias para resolução dos problemas.

Sousa (2020) introduz o conceito de atividades-históricas-com-tecnologias ou investigações-históricas-com-tecnologias, que consiste em tarefas de investigação baseadas em problemas/episódios/temas históricos, utilizando recursos tecnológicos como suporte. Tais atividades são estruturadas com elementos essenciais que englobam a preparação prévia, as informações básicas necessárias para contextualizar o problema histórico, o desenvolvimento da atividade e a avaliação do processo. Além disso, a autora destaca a importância de fornecer orientações claras para a aplicação dessas atividades, garantindo que os alunos possam explorar os aspectos históricos e utilizar as tecnologias digitais de maneira efetiva.

Com o objetivo de contribuir para as reflexões sobre o uso de tecnologias digitais em um contexto histórico, Zengin (2018) propõe a integração do GeoGebra em um curso de História da Matemática. O autor argumenta que *softwares* de matemática dinâmica são ferramentas poderosas que podem auxiliar na exploração de problemas históricos em matemática, oportunizando a criação de novas construções em um ambiente interativo e visual.

Além disso, os resultados da pesquisa realizada por Zengin (2018) mostram que a utilização do GeoGebra no curso proposto teve um impacto significativo na percepção dos professores em formação. A visualização, a concretização e a aprendizagem por meio da

construção dos conceitos oferecidos pelo *software* desempenharam um papel importante na promoção do ensino de Matemática. Os dados revelam que o GeoGebra possibilita o desenvolvimento histórico de conceitos e métodos matemáticos, como o exemplificado pelo processo de exploração do número π utilizando o Método de Arquimedes. Durante essa atividade, ao aumentar o número de lados do polígono com o auxílio do controle deslizante em um ambiente dinâmico, os participantes puderam compreender o esforço de Arquimedes para realizar tal estimativa.

Assim, a possibilidade de investigar conceitos matemáticos sob uma nova perspectiva se abre ao se utilizar tecnologias digitais, permitindo a investigação das conexões existentes nos problemas matemáticos históricos e a compreensão da harmonia entre as diferentes unidades que compõem os conceitos matemáticos. Dessa maneira, o GeoGebra possibilita a percepção de conexões entre ideias e conceitos matemáticos, proporciona um ambiente computacional de aprendizagem dinâmico, em que a experimentação e validação de conjecturas são viabilizadas, enquanto a História da Matemática é utilizada como uma ferramenta.

A seguir, compartilho um breve relato da minha jornada, juntamente com a delineação da estrutura da tese.

1.2 Trajetória da pesquisadora

No primeiro semestre de 2010, iniciei o curso de Matemática na Universidade Federal de Uberlândia (UFU), Campus Uberlândia. Já no segundo semestre, tive a oportunidade de ingressar como bolsista no Programa de Educação Tutorial (PET), o que me permitiu ter um contato mais próximo com o mundo acadêmico. Durante esse período, desenvolvi pesquisas de Iniciação Científica em diferentes temáticas, incluindo o estudo de Frações Contínuas, Teoria dos Jogos e Computação Gráfica. No quinto período da graduação, optei pela modalidade de licenciatura e busquei uma professora que pudesse me orientar na escrita da monografia. A docente com a qual me identifiquei, Ana Maria Amarilo Bertoni, sugeriu que trabalhássemos com a exploração de conceitos fractais e sua construção em diferentes softwares, como o GeoGebra. Foi amor à primeira vista quando conheci os fractais. Comecei a construí-los, investigá-los e nunca mais parei. Apresentei trabalhos em conferências e publiquei artigos sobre Geometria Fractal e suas conexões (BARBOSA; BERTONE; SILVA-JUNIOR, 2013; BARBOSA; BERTONE, 2013a; BARBOSA; BERTONE, 2013b; BARBOSA; BERTONE, 2013c; BARBOSA; BERTONE, 2013d; BERTONE; BARBOSA; MATOS, 2013).

Todos esses estudos se reuniram em um trabalho intitulado "Fractais: Dimensão, Autosemelhança e Construções nos Softwares Livres", que apresentei como Trabalho Final de Curso. Essa parceria entre orientadora e orientanda foi tão bem-sucedida que nos dedicamos a reativar o Instituto de GeoGebra de Uberlândia, e então tive a oportunidade de representar o instituto em diversos eventos. Mesmo após a graduação, continuamos essa parceria, o que resultou em outros estudos (BARBOSA; BERTONE; COELHO, 2015; BARBOSA; BERTONE, 2015; BARBOSA; BERTONE; MARTINS, 2017).

Concluí minha graduação no segundo semestre de 2013, em março de 2014. Nesse mesmo mês, fui contratada como professora substituta para lecionar nas séries finais do Ensino Fundamental em uma escola particular de Uberlândia, permanecendo na instituição até julho do mesmo ano, quando fui convidada para atuar como professora colaboradora em um Curso Pré-Vestibular na cidade, conhecido como "Cursinho". Em 2015, ingressei no curso de Ciência da Computação na UFU e continuei atuando como professora efetiva na escola mencionada e colaboradora no cursinho.

Com o retorno ao ambiente universitário, retomei a parceria com a mesma orientadora e trabalhamos em um projeto cujo objetivo era elaborar atividades no *software* GeoGebra para serem implementadas em um Ambiente Virtual de Aprendizagem, visando o estudo de Cálculo Diferencial e Integral ao ensino à distância. No ano seguinte, decidi que era hora de elaborar um projeto de mestrado na área de Educação Matemática. Porém, qual seria o tema? No projeto inicial, propus investigar a formação de professores e o uso de tecnologias digitais. No entanto, ao ser aceita no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática (PPGEM) do Instituto de Geociências e Ciências Exatas (IGCE) da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" (UNESP) – Campus Rio Claro, sob a orientação do professor Ricardo Scucuglia, ele me fez a proposta de investigar os aspectos do pensamento matemático e geométrico de estudantes de graduação em Matemática a partir da construção de fractais, o que me deixou muito feliz, pois voltaria a trabalhar com as construções que sempre me encantaram.

Ao cursar as disciplinas como aluna regular do programa, deparei-me com o conceito de Pensamento Computacional, o que me fez repensar meus objetos de estudo e reestruturar a pesquisa. Em janeiro de 2019, defendi a dissertação intitulada *Aspectos do Pensamento Computacional na Construção de Fractais com o Software GeoGebra* (BARBOSA, 2019a), cujo objetivo foi investigar os aspectos desse pensamento que emergiam em um grupo de estudantes de graduação em Matemática ao explorarem a Geometria Fractal com o *software*.

Antes do mestrado, a Educação Matemática era uma área pouco explorada por mim. Porém, como bolsista do PPGEM, tive a oportunidade de mergulhar em experiências reflexivas

e aprendi muito com meus colegas de programa, especialmente com o Grupo de Pesquisa em Informática, outras Mídias e Educação Matemática (GPIMEM). Sentindo essa motivação, desejei continuar na área acadêmica e submeti um projeto para ingressar no doutorado, mesmo antes de defender minha dissertação. O projeto foi submetido em 2018 e fui aceita para ingressar no programa em 2019, novamente sob a orientação do professor Ricardo. Nem é preciso mencionar o quanto essa parceria também foi bem-sucedida! Durante esse período, alguns trabalhos foram publicados (HONORATO; BARBOSA; SCUCUGLIA, 2017; BARBOSA; SCUCUGLIA, 2019a; BARBOSA; SCUCUGLIA, 2019b; BARBOSA, L. M., 2019b; SCUCUGLIA et al., 2021a; IDEM, R. C.; BARBOSA, L. M.; NESPOLI, T. S., 2021; SCUCUGLIA et al., 2021b), e pude perceber o quanto e como a Educação Matemática difere da Matemática Aplicada, área na qual estive envolvida desde 2017.

O projeto que submeti para o doutorado não abordava a temática dos fractais. Senti que era hora de explorar outros temas. Levando em consideração minhas experiências anteriores na criação de atividades para o ensino de Cálculo no GeoGebra, propus um projeto cujo objetivo era investigar a compreensão dos professores de Matemática sobre problemas e demonstrações do Cálculo Infinitesimal com o auxílio desse *software*. Durante as disciplinas, estudos foram realizados, e o projeto foi se reestruturando até chegar ao ponto que culminou nesta tese.

Minha trajetória como pesquisadora na pós-graduação foi enriquecida e moldada por uma série de ambientes que tive a oportunidade de vivenciar ao longo desse percurso. Esses diversos espaços desempenharam um papel fundamental no meu desenvolvimento acadêmico, profissional e pessoal, contribuindo para a construção de uma identidade como pesquisadora. Por meio das disciplinas cursadas, pude ampliar minha base teórica, desenvolver habilidades metodológicas e aprofundar meu entendimento sobre os principais conceitos e debates na minha área de estudo. Os professores e orientadores do programa foram essenciais na minha formação, fornecendo reflexões valiosas, estimulando meu pensamento crítico e incentivando a exploração de novas ideias e abordagens.

Continuar no GPIMEM foi crucial no meu processo de doutoramento, o grupo exerceu (e continuará exercendo) uma influência significativa em minha trajetória como pesquisadora. Estive imersa em um ambiente colaborativo de produção de conhecimento de qualidade! Além disso, a participação ativa em projetos desenvolvidos pelo grupo proporcionou oportunidades de colaboração, coautoria e vivências acadêmicas para além da escrita de uma tese, como a coordenação da comissão organizadora de eventos internacionais e a realização de estágio supervisionado.

Além disso, destaco a influência significativa dos colegas e professores ao longo da minha trajetória na pós-graduação. As interações diárias com os parceiros de curso e de pesquisa estimularam meu pensamento crítico, proporcionaram debates enriquecedores e geraram parcerias de estudo. Como resultado da imersão em diversos ambientes na pós-graduação, minha trajetória como pesquisadora foi profundamente enriquecida. Estar na UNESP foi uma oportunidade ímpar que me possibilitou adentrar ao campo da docência no ensino superior, ampliando minha experiência como educadora. Ao longo do doutoramento, ministrei disciplinas como professora substituta e bolsista em diferentes áreas da Matemática e Educação Matemática, o que me permitiu vivenciar a dinâmica da sala de aula em distintos cursos de graduação, fortalecendo meu desejo pela dedicação à docência e à pesquisa na área de Educação Matemática.

Contudo, todos os espaços e momentos possibilitados por esses ambientes não contribuíram apenas com a escrita desta tese, mas foram essenciais e primordiais para meu desenvolvimento como pesquisadora, docente, mulher, pessoa!

1.3 Estrutura da tese

Além da presente introdução, no Capítulo 2, intitulado *Compreensões acerca de narrativas*, são discutidos aspectos que se referem à constituição de narrativas e como elas são entendidas e caracterizadas por diferentes pesquisadores. A narrativa como investigação é destacada e estudos no âmbito da Educação Matemática são apresentados assim como a ideia de narrativas matemáticas.

Conceitos relevantes para o desenvolvimento do termo demonstração e prova, para a Matemática e Educação Matemática, são apresentados no Capítulo 3, nomeado *Compreensões acerca de verdades matemática*. Possibilidades e considerações que pesquisadores elencam em relação ao uso de *softwares* acerca da temática também são elaboradas no capítulo.

No Capítulo 4, *Metodologia de pesquisa e procedimentos metodológicos*, são discutidos os modos de produção e de análise dos dados, de forma que o desenvolvimento da produção dos dados é descrito e os participantes e as fontes que compõem os dados da pesquisa são apresentados.

A análise dos dados e os resultados da pesquisa são evidenciados e discutidos no Capítulo 5, intitulado por *Análise e Discussão dos Dados*, que é dividida em subseções em relação aos encontros e documentos analisados em que ao final, uma discussão geral sobre o que se mostra nos dados é proposta.

Nas *Considerações Finais*, as conclusões referentes a este estudo são destacadas, assim como possibilidades de estudos futuros.

CAPÍTULO 2

A criança e o adulto, o rico e o pobre, o sábio e o ignorante, todos, enfim, ouvem com prazer as histórias – uma vez que essas histórias sejam interessantes, tenham vida e possam cativar a atenção. A história narrada, lida, filmada ou dramatizada, circula em todos os meridianos, vive em todos os climas, não existe povo algum que não se orgulhe de suas histórias, de suas lendas e seus contos característicos.
(TAHAN, 1966, p.16).

COMPREENSÕES ACERCA DE NARRATIVAS

Quem não adora uma boa história? De histórias de ninar a fofocas maliciosas, as histórias são um aspecto difundido de nossas vidas diárias. Usamos histórias para entreter, informar e instruir. De fato, grande parte de nossa herança cultural nos é transmitida por meio de algum gênero de narrativa – contos de fadas, fábulas, parábolas, novelas, crônicas, romances, literatura, textos acadêmicos e científicos, entre outros. Não apenas as histórias desempenham um papel importante em nossas vidas, mas alguns estudiosos (BRUNER, 1997; POLKINGHORNE, 1988) argumentam que nossas vidas são histórias – histórias sobre nós mesmos que contamos a nós mesmos e a outras pessoas. (MURRAY, 2009).

Barthes et al (2011, p. 19) afirmam que a narrativa é “internacional, trans-histórica, transcultural; a narrativa está aí, como a vida” e Murray (2009), argumenta que uma maneira de entender a experiência humana seria documentar essas histórias e estudá-las, fazendo com que a investigação narrativa emergisse como uma forma de pesquisa.

Neste capítulo, apresento o que concebo como narrativas, com foco na investigação narrativa, e discuto algumas das questões que cercam essa forma de investigação na Educação Matemática.

2.1 A constituição de uma narrativa

Por que contamos histórias? Ginzburg (2000), em seu estudo, nos apresenta aspectos que podem ter influenciado a natureza do ato de contar histórias e sua origem. Segundo esse pesquisador, que toma como referência os trabalhos de Nicolau Sevcenko (1988), Lévi-Strauss (1988, 1989) e Walter Benjamin (1984, 1985, 1987 e 1988), as narrativas estariam associadas à cultura xamã⁸, e envolviam musicalidade, rituais e danças. Dessa forma, “para o pensamento

⁸ O xamanismo é um termo genericamente usado em referência a práticas etnomédicas, mágicas, religiosas, e filosóficas, envolvendo cura, transe, transmutação e contato entre corpos e espíritos de outros xamãs, de seres míticos, de animais, dos mortos. (XAMANISMO, 2021)

mítico, associado a forças e comportamentos que atingem os sentidos físicos [...], a narrativa seria como que um *pharmakós*, um remédio, e o narrador xamã seria o centralizador das operações purificadoras da tribo.” (GINZBURG, 2000, p. 113, grifo do autor). Sendo assim, é possível pensar que as narrativas, de alguma forma, seriam capazes de atuar e alterar o estado de seu ouvinte.

Ginzburg (2000) compara a atividade de um narrador ao trabalho de um caçador, alegando que um caçador deve procurar sinais que permitam identificar locais em que sua caça esteve presente, tentando sempre estabelecer vínculos entre os sinais encontrados, a fim de traçar uma trajetória a partir do entendimento dos movimentos percebidos para que se localize a caça. Nesse sentido,

A atividade do narrador consistiria em levantar as marcas da experiência humana, encarando-as não como se fossem isoladas umas das outras, mas procurando estabelecer vínculos de continuidade temporal e de causa e efeito, tal como o caçador. Esses vínculos entre os movimentos da experiência humana permitiriam estabelecer um sentido para a experiência que, antes de ser assim examinada, não passava de mero acúmulo de acontecimentos. Para o historiador, no caso, o modo como esses vínculos são propostos é que permite dar sentido à História e pensar, a partir da compreensão do passado, possíveis desdobramentos da experiência humana. (GINZBURG, 2000, p. 115).

Ao vincular tais desdobramentos a episódios de casualidade e continuidade, uma narrativa é constituída, dando ordem aos acontecimentos, articulando significados com base na temporalidade e consequentemente dando sentido à experiência vivida. (GINZBURG, 2000). Considerando a narrativa como um gênero de discurso e tomando seu entendimento mais genérico, Ginzburg (2000) afirma que é possível classificar como narrativas formas que não pertencem necessariamente à Literatura, como: a História, em que a narrativa teria como propósito referenciar a realidade concreta do passado; os Textos Jornalísticos, em que a narrativa assume o compromisso também de referenciar a realidade, mas em observações ligadas ao presente; e o Cinema, que pode assumir uma postura ficcional e conta com a presença de outros recursos de linguagem, como o visual e sonoro, e outro modo de produção, que é coletivo e amparado por tecnologias.

Para Demetrio (2011), durante o processo de constituição de uma representação do passado, o historiador de posse das fontes e/ou rastros passa a agir como articulador, garantindo interpretações e significados a fatos selecionados. Tais estratégias também são mantidas pelos escritores de ficção e em alguns momentos as narrativas podem ser associadas a relatos, o que

não dispensa a inteligibilidade, porque a mesma é construída nos entremeios da própria narrativa, através de ordenamentos e composições, sempre submetidos a controle, daqueles dados inseridos na intriga como vestígios ou indícios. A aproximação entre narração e inteligibilidade se faz plenamente possível na medida em que os vestígios ou indícios permitem uma reconstrução válida de realidades

quando metodologicamente questionados, aferindo-se sua validade enquanto elementos que têm a ver um passado inaudível. (DEMETRIO, 2011, p. 8).

Dessa forma, a escrita da História não deve ser julgada como mera elaboração discursiva, visto que tal narrativa é engendrada a partir da intersecção de um arsenal teórico-metodológico assumido pelo pesquisador enquanto critério de objetividade para compreensão de aspectos relacionados com o real e suas fontes. (DEMETRIO, 2011). Portanto, admitir o elemento subjetivo na elaboração da narrativa histórica não significa dizer que o pesquisador lance mão das fontes segundo seus interesses, de maneira indiscriminada. Para Demetrio (2011, p. 9), “o objeto é construído a partir do diálogo entre o que permitem dizer as fontes e os protocolos de análise propostos” pelo pesquisador, concedendo legitimidade à narrativa.

Polkinghorne (1988) discorre sobre a importância das narrativas na compreensão do mundo e de nossa relação com ele, indicando que a narrativa é um esquema por meio do qual os seres humanos dão sentido à sua experiência de temporalidade e ações pessoais. O pesquisador argumenta que as narrativas são uma forma fundamental de compreender a realidade. As histórias que contamos sobre o mundo e sobre nós mesmos ajudam a dar sentido à nossa experiência, a estabelecer nossas crenças e valores, e a moldar nossa compreensão da verdade. O pesquisador destaca que, tanto na ciência quanto na religião, as narrativas são usadas para explicar e interpretar os dados e as experiências vividas.

Segundo Bruner (1997), narrativas são tidas como uma forma de pensamento e de organização da experiência humana. Elas são constituídas por uma sequência singular de eventos, estados mentais e acontecimentos envolvendo seres humanos, como personagens ou atores que não têm vida ou significado próprios. Eles são dados pelo lugar que ocupam na configuração geral da sequência como um todo, seu enredo ou sua fábula. O ato de captar uma narrativa é duplo: “o intérprete tem que captar o enredo configurador da narrativa a fim de extrair significado de seus constituintes, os quais ele deve relacionar ao enredo.” (BRUNER, 1997, p. 46). Dessa forma, a configuração do enredo deve, em si, ser extraída da sucessão de eventos, visto que uma narrativa apresenta uma sequência de acontecimentos, ações e experiências de personagens.

A narrativa pode ser real ou imaginária sem perder seu poder de história na medida em que o significado e a referência (dessa história) guardam um relacionamento anômalo entre si. (BRUNER, 1997). Ou seja,

A sequência das suas sentenças, e não a verdade ou falsidade de quaisquer dessas sentenças, é o que determina sua configuração geral no enredo. É essa sequencialidade singular que é indispensável para a significância de uma história e para o modo de organização mental em cujos termos ela será captada. (BRUNER, 1997, p. 46).

Portanto, as narrativas ocupam um papel central em nossa constituição como pessoa. É contando a nós mesmos, histórias sobre nós mesmos e aos outros, que passamos a entender quem somos, quem eles são e qual é a relação entre nós. Dessa forma, a narrativa não é uma construção livre, ela conta os significados que a pessoa constrói para o si mesmo. (BRUNER, 1997; RABELO, 2011).

Ao desenvolver seus estudos sobre narrativas, Bruner (1991) nos apresenta dez características, cuja preocupação central não é como o texto narrativo é construído, mas como ele opera como um instrumento mental de construção de realidade. O Quadro 1 traz uma síntese das características apresentadas e suas interpretações.

Quadro 1 – Características de narrativa e suas interpretações

Característica	Interpretação
Diacronicidade narrativa	A narrativa é uma exposição de eventos que ocorrem com o passar do tempo.
Particularidade	Narrativas têm acontecimentos particulares como sua referência conhecida.
Vínculos de estados intencionais	Narrativas são sobre pessoas que agem em um cenário, e os acontecimentos devem ser pertinentes a seus estados intencionais enquanto estiverem atuando - com suas convicções, desejos, teorias, valores, e assim por diante.
Composição Hermenêutica ⁹	Contar uma história e compreendê-la como uma história dependem da capacidade humana para processar o conhecimento de maneira interpretativa.
Canonicidade e violação	Narrativas requerem roteiros como fundo necessário, mas eles não constituem por si próprios uma narrativa. Para se tornar apta a ser contada, uma história precisa ter implicitamente um enredo convencional que foi quebrado, violado, ou desviado de maneira a romper com sua legitimidade.
Referencialidade	A aceitabilidade de uma narrativa não pode depender de sua correta referência à realidade, caso contrário não haveria nenhuma ficção. O realismo em uma ficção deve ser uma convenção literária e não uma questão de referência correta.
Genericidade	O gênero narrativo pode ser pensado não apenas como uma forma de construir situações humanas, mas como um guia para o uso da mente, na medida em que o uso da mente é guiado pelo uso de uma linguagem facilitadora.
Normatividade	Por causa de sua narrabilidade como uma forma de discurso que se baseia em uma violação da expectativa convencional, a narrativa é necessariamente normativa. Uma violação pressupõe uma norma.
Sensibilidade ao contexto e negociabilidade	A dependência do contexto da explicação narrativa permite a negociação cultural que, quando bem sucedida, torna possível a coerência e interdependência que uma cultura pode alcançar.
Acréscimo narrativo	As narrativas fazem acréscimos e tais acréscimos podem criar algo bastante variado chamado cultura ou história ou, mais livremente, tradição. As narrativas dependem de estarem colocadas em uma continuidade provida por uma história social construída e compartilhada, na qual localizamos nossos egos e nossas continuidades individuais.

Fonte: Adaptado de Bruner (1991)

⁹ A palavra *hermenêutica* implica que existe um texto ou algo semelhante *por meio do qual* alguém está tentando expressar um significado e alguém está tentando extrair um significado. Isso, por sua vez, implica que há uma diferença entre o que é *expresso* no texto e o que o texto pode *significar* e, além disso, que não há uma solução única para a tarefa de determinar o significado da expressão. (BRUNER, 1991, p. 7, tradução nossa, grifo do autor). Texto original: The word *hermeneutic* implies that there is a text or a text analogue *through* which somebody has been trying to express a meaning and *from* which somebody is trying to extract a meaning. This in turn implies that there is a difference between what is *expressed* in the text and what the text might *mean*, and furthermore that there is no unique solution to the task of determining *the* meaning for *this* expression.

Com a descrição de tais características, Bruner (1991) nos mostra algumas das propriedades de um mundo de realidade construído de acordo com princípios narrativos. Dessa forma, ele vai por diferentes caminhos descrevendo poderes mentais narrativos e os sistemas simbólicos do discurso narrativo que torna possível a expressão desses poderes. Bruner (1997) considera que

seremos capazes de interpretar os significados e a produção de significados de uma forma orientada por princípios apenas na medida em que formos capazes de especificar a estrutura e a coerência dos contextos mais amplos nos quais significados específicos são criados e transmitidos. (BRUNER 1997, p. 60)

Assim, a narrativa passa a ser entendida como um modo alternativo de conhecimento que permite relatar ações e eventos de maneira inteligível, se tornando também uma forma de comunicação que se vale da capacidade humana fundamental de transferir experiências de uma pessoa para outra por meio da narrativa de vivências pessoais. De acordo com Carr (1986), a narrativa não está associada a experiências e ações elementares de curto prazo, mas pertence a sequências de ações, experiências e eventos humanos de longo prazo ou em larga escala. Ele argumenta que a ação, a vida e a existência histórica são estruturadas narrativamente, que o conceito de narrativa é nossa maneira de experimentar, agir e viver, tanto como indivíduos quanto como comunidades, e que a narrativa é nossa maneira de ser e lidar com o tempo.

Squire (2014, p. 273) define, de forma ampla, a narrativa como uma cadeia de signos com sentidos sociais, culturais e/ou históricos particulares, o que significa que “narrativas podem implicar conjuntos de signos que se movimentam temporalmente, causalmente ou de alguma outra forma socioculturalmente reconhecível e que, por operarem com a particularidade e não com a generalidade, não são reduzíveis a teorias” possibilitando assim, que as narrativas operem em diferentes mídias, inclusive em imagens, visto que elas decorrem da sucessão de signos, independentemente do sistema de símbolos, da mídia ou da matriz semiótica em que a sucessão ocorre.

Além disso, para Squire (2014) o movimento de signo para signo tem um significado social, cultural e histórico reconhecível. A pesquisadora argumenta que

Uma série numérica é uma progressão de signos, mas seu sentido primordial é matemático e não se encontra em âmbitos sociais, culturais ou históricos. Um corolário desta definição é que as histórias não têm vigência universal; elas se valem de recursos simbólicos sociais, culturais e históricos particulares e operam dentro deles. A “leitura” de histórias pode, portanto, mudar ou se romper entre universos sociais, culturais e históricos distintos. (Squire 2014, p. 273, grifo do autor)

A partir dessa definição, materiais visuais certamente podem se constituir narrativas. Dessa forma, as narrativas nos permitem integrar diferentes aspectos da realidade, contribuindo para uma conexão entre nossas experiências pessoais com a história mais ampla da humanidade

e do universo, nos permitindo visualizar as interconexões entre as diferentes áreas do conhecimento, sendo parte fundamental da nossa compreensão da realidade, nos possibilitando dar sentido às experiências e estabelecer crenças e valores.

2.2 A narrativa como investigação

No centro da investigação narrativa está uma história ou uma coleção de histórias. Dessa forma, a investigação narrativa envolve criar e documentar tais histórias. Porém, como ir além do contar uma história? Como pode uma história ser considerada pesquisa? Para Murray (2009) uma história se torna uma pesquisa quando é interpretada à luz da literatura de um campo, e quando esse processo produz implicações para a prática, pesquisas futuras ou construção de teorias.

Clandinin e Connelly (2015) colocam as pesquisas com narrativas no âmbito da pesquisa qualitativa, enfatizando a compreensão e interpretação das histórias e experiências dos participantes como forma de conhecer e entender a realidade. A investigação narrativa parte do pressuposto de que as pessoas constroem significados em suas vidas a partir das histórias que contam sobre si mesmas e sobre os outros, e que essas histórias são o meio principal para se compreender a complexidade da experiência humana. Dessa forma, os pesquisadores buscam analisar, em profundidade, as histórias que os participantes contam, por meio de entrevistas, observação participante ou outros métodos, procurando entender os significados que eles atribuem às suas experiências e como essas histórias se relacionam com as suas identidades, valores e crenças.

Para Clandinin e Connelly (2015) a investigação narrativa é uma abordagem aberta e flexível, que permite ao pesquisador trabalhar de forma colaborativa com os participantes e adaptar sua análise às particularidades de cada contexto e história. O objetivo final da investigação narrativa é a construção de um entendimento mais profundo e contextualizado das experiências humanas vividas, por meio da análise e interpretação das histórias que as pessoas contam e/ou produzem sobre si mesmas e suas experiências.

Bruner (1998) defende que o conhecimento narrativo é uma forma legítima de raciocínio e propõe dois modos de pensamentos que se completam: o paradigmático (ou lógico-científico) e o narrativo.

[O pensamento] paradigmático ou lógico-filosófico, tenta preencher o ideal de um sistema formal e matemático de descrição e explicação. Ele emprega a categorização ou a conceitualização e as operações pelas quais as categorias são estabelecidas instancias, idealizadas e relacionadas umas às outras para formar um sistema. [...] [O pensamento narrativo] trata de ações e intenções humanas ou similares às humanas e

das vicissitudes e consequência que marcam seu curso. Ele se esforça para colocar seus milagres atemporais nas circunstâncias da experiência e localizar a experiência no tempo e no espaço. (BRUNER, 1998. p. 14).

A grosso modo, o pensamento paradigmático lida com causas gerais e faz uso de procedimentos para assegurar se sua referência é verificável e testar a verdade empírica. Seu domínio é definido não apenas por observações, aos quais suas declarações básicas se relacionam, mas também pelo conjunto de mundos possíveis que podem ser logicamente gerados, testados e conduzidos por hipóteses fundamentadas. Já o pensamento narrativo se vincula ao conhecimento prático, abarcando o saber popular. Assim, os sentimentos, ações, histórias, imagens, entre outros, são considerados nos discursos e os procedimentos utilizados são hermenêuticos, interpretativos e narrativos. (BRUNER, 1998; RABELO, 2011).

Para Rabelo (2011, p. 178) estes dois modos de cognição “não representam uma oposição, mas sim a complementaridade.”. Contudo, cada um dos modos de pensamento tem princípios operativos próprios e seus próprios critérios de boa formação, se diferenciando radicalmente em seus procedimentos para verificação.

Uma boa história e um argumento bem formado são tipos naturais diferentes, mas ambos podem ser usados como meio para convencer o outro. Porém, a natureza de tal convencimento é fundamentalmente diferente: os argumentos convencem alguém de sua veracidade, as histórias de sua semelhança com a vida. O pensamento paradigmático, muitas vezes, recorre a procedimentos para estabelecer provas formais e empíricas, já o narrativo estabelece não a verdade, mas a verossimilhança. (BRUNER, 1998).

Sinclair, Healy e Sale (2009) argumentam que o pensamento narrativo e o paradigmático possuem papéis fundamentais na construção e organização do conhecimento, porém têm motivações diferentes.

[E]nquanto o paradigmático se preocupa com o que é, dadas as limitações do sistema em questão, e com a identificação e comprovação de generalidades que caracterizam objetos e relações no sistema, o narrativo foca em atividades particulares desses objetos à medida que se desenrolam no tempo, no que pode estar por trás dos eventos em questão e em como eles se assemelham ou nos lembram de outras coisas que conhecemos.¹⁰ (SINCLAIR; HEALY; SALE, 2009, p. 443, tradução nossa).

Polkinghorne (1995) utiliza a distinção apresentada por Bruner (1998) para identificar dois tipos de investigação narrativa: (a) análise de narrativas, ou seja, estudos cujos dados consistem em narrativas ou histórias, mas cuja análise produz tipologias ou categorias

¹⁰ [W]hile the paradigmatic is concerned with that is, given the constraints of the system in question, and with identifying and proving generalities that characterise objects and relations in the system, the narrative focuses on particular activities of these objects as they are played out in time, on what might be behind the events in question and on how they resemble or reminds of other things we know about.

paradigmáticas; e (b) análise narrativa, ou seja, estudos cujos dados consistem em ações, eventos e acontecimentos, mas cuja análise produz histórias (por exemplo, biografias, histórias, estudos de caso).

A análise narrativa paradigmática, ou análise *de* narrativa, baseia-se em dados consistidos de narrativas ou estórias, mas cujas análises produzem tipologias ou categorias paradigmáticas, sendo utilizados como elementos ou base comum de dados. Coletam-se relatos estoriados para os dados, usando um processo que identifica aspectos como instâncias de categorias. A investigação narrativa do tipo paradigmático produz conhecimento de conceitos. A análise narrativa, propriamente dita, opera com elementos combinados entre uma estória “enredada”, coletando descrições de eventos, acontecimentos, ações, cujas análises produzem estórias (por exemplo: biografias, estórias, estudos de caso). A análise narrativa produz conhecimento de situações particulares. (RABELO, 2011, p. 180, grifo nosso).

Assim, a análise narrativa é o processo de desmontar uma história em seus componentes estruturais e analisar como esses componentes são organizados e inter-relacionados para criar um todo significativo. Esses componentes estruturais podem incluir personagens, ações, eventos, configurações espaciais e temporais, e a linguagem utilizada para contar a história. A análise narrativa, segundo Bruner, envolve uma apreciação da forma como a história é construída, bem como a atenção ao conteúdo que é comunicado por meio da história. Além disso, a análise narrativa é um processo ativo de construção de significado que envolve o leitor ou ouvinte da história. (BRUNER, 1998).

Tanto Sinclair, Healy e Sale (2009) quanto Polkinghorne (1995) nos mostram que uma investigação narrativa tem como objetivo reunir casos/dados individuais não com o intuito de generalizar cada um sobre uma categoria, mas com o princípio de efetuar analogias, nas quais os indivíduos podem ter aspectos similares a outros, ou singulares. Assim, as investigações narrativas envolvem uma trama argumental singular, com uma sintetização dos dados produzidos.

Clandinin e Connelly (2015) contextualizam a narrativa na sala de aula em relação aos professores e definem a abordagem narrativa em comparação com as abordagens empíricas tradicionais. Os pesquisadores observam que, por meio de métodos tradicionais, os professores são vistos como implementadores de programas curriculares para atingir objetivos predefinidos e alcançar determinados resultados, enquanto na investigação narrativa eles são vistos como parte do currículo, envolvidos no estabelecimento de metas e na obtenção de realizações.

O interesse pela investigação narrativa foi incorporado tanto na prática educacional quanto na pesquisa. A proeminência da narrativa surge em parte por causa das restrições dos métodos convencionais de pesquisa e sua incompatibilidade com as complexidades do aprendizado humano. Contudo, é importante salientar a associação da narrativa com a atividade humana e a sua sensibilidade para com questões não reveladas em estudos não qualitativos.

2.3 Narrativas em Educação Matemática

De acordo com Polkinghorne (1995) há um crescente interesse na investigação narrativa entre os pesquisadores qualitativos. Tal interesse se dá, pois, a narrativa é uma “forma linguística exclusivamente adequada para exibir a existência humana como ação situada [e suas] descrições narrativas exibem a atividade humana como um engajamento proposital no mundo.” (POLKINGHORNE, 1995, p. 5). Além disso, a narrativa está presente em todos os tempos, lugares e sociedades (BARTHES et al, 2011).

Nemirovsky (1996) argumenta que no cerne da modelagem matemática estão as narrativas matemáticas. Ele propõe uma atividade sugerindo que os alunos conectassem representações matemáticas (símbolos, gráficos, entre outros) com eventos ou situações (que ele considera como qualidades da narrativa), e argumenta que os alunos que visualizam a mesma representação matemática podem construir histórias diferentes sobre uma determinada situação. O pesquisador analisou os alunos enquanto construíam gráficos e percebeu que eles “[...] esperam que um gráfico, para ser útil, tenha que mostrar o que eles concebem como toda a história [...]” (NEMIROVSKY, 1996, p. 200, tradução nossa¹¹). O que sugere, que uma narrativa construída por um aluno reflete o que uma experiência significou para ele, já suas histórias conectam peças que ainda não fazem sentido em uma estrutura coerente.

Acompanhando a construção dos gráficos, Nemirovsky (1996) descreve três aspectos chave da construção narrativa: os reparos, que ocorrerem quando os alunos reorganizam a narrativa de forma a torná-la mais coerente com toda a história; a execução, que ocorre quando os alunos encenam sua narrativa de acordo com sua compreensão de uma representação; e a idealização, que ocorre quando os alunos utilizam narrativas para concluir a semelhança entre diferentes representações. Tais aspectos reforçam as características narrativas apresentadas em Bruner (1991) e nos evidenciam a diferença entre narrativa e história.

Portanto, a história é a sequência cronológica de eventos que ocorreram em um determinado período de tempo, enquanto a narrativa é a organização dos eventos de uma história de uma forma que dá sentido e significado a eles. Em outras palavras, a história é uma série de eventos que ocorrem em uma ordem cronológica específica, enquanto a narrativa é a maneira como esses eventos são contados e organizados para criar um sentido e um significado para o ouvinte ou leitor. (BRUNER, 1991).

¹¹ [...] expect that a graph, in order to be useful, has to show what they conceive as the whole story [...].

Por exemplo, uma história pode ser sobre a vida de um grande líder, contando os eventos que ocorreram em sua existência em uma ordem cronológica específica. No entanto, a narrativa pode ser contada de diferentes maneiras, dependendo do propósito do narrador. O mesmo conjunto de eventos pode ser organizado de forma a enfatizar diferentes aspectos da vida do líder, como suas realizações, suas lutas, seus relacionamentos, entre outros. Assim, enquanto a história se concentra nos eventos em si, a narrativa se concentra na forma como esses eventos são organizados e apresentados para comunicar um significado mais amplo.

Doxiadis (2003) apresenta uma forte conexão entre narrativa, Matemática e Educação Matemática, expondo a existência de um isomorfismo entre a estrutura subjacente de uma história e o processo de provar um teorema, afirmando que o paradigma da exploração matemática é a linguagem mais pura para expressar a construção de uma história. O pesquisador defende a necessidade de desvinculação do pensamento matemático do rigor formalista, colocando a narrativa como base para tal e expondo o hibridismo entre os modos de pensamentos narrativo e paradigmático, no ensino de Matemática, baseado na construção de narrativas, o que denominou paramatemática.

Quatro propostas são pontuadas por Doxiadis (2003) para incorporação da paramatemática: (i) inserção das narrativas no currículo escolar; (ii) interação e complementação de narrativas matemáticas no processo de ensino e aprendizagem de Matemática; (iii) inserção de narrativas matemáticas na Educação Infantil visando a criação de ambientes que utilizem a História da Matemática para contribuir no processo de abstração; e (iv) introdução de biografias e História da Matemática no currículo. A partir desses pontos, o pesquisador busca por mudanças no ensino, alegando que as narrativas matemáticas existentes têm sido responsáveis pelo ressurgimento do interesse pela Matemática na cultura geral.

Considerando o paralelo entre representações, textos ou discursos matemáticos e a emergência de narrativas matemáticas para comunicar e representar a Matemática, Scucuglia (2014) se concentra nas maneiras pelas quais estudantes de graduação produzem Performances Matemáticas Digitais, concebidas como narrativas multimodais, que oferecem ao público surpresas (maneiras de ver o que é novo e maravilhoso na matemática), criação de sentido, momentos emocionais e sensações viscerais. São discutidas as relações entre narrativa, paramatemática e identidade, proporcionando modos de se ver o processo de ensino e aprendizado de Matemática como uma atividade múltipla e diversa e não como absoluta, oferecendo modos de desconstruir imagens estereotipadas, fomentando a construção de imagens alternativas nos cenários educacionais e sociais.

Retomando o conceito de narrativas, Nacarato, Passos e Silva (2014) apontam os estudos biográficos, a análise sociolinguística e a história oral como algumas das diferentes perspectivas teóricas relacionadas ao tema. As autoras destacam como o uso de narrativas vem ganhando espaço nas pesquisas em Educação Matemática principalmente no campo da formação docente e constataam uma polissemia que envolve a palavra narrativa, argumentando que “em muitos casos, não se trata de termos correlatos, mas com múltiplos significados e múltiplas formas de abordagem teórica e de análise.” (NACARATO; PASSOS; SILVA, 2014, p. 702).

O movimento de entrada, apropriação e circulação das investigações narrativas na comunidade acadêmica, em um contexto brasileiro de Educação Matemática, é apresentado por Silva e Silva (2019). As autoras investigam e descrevem esse movimento a partir dos grupos de pesquisa que estudam narrativas na formação de professores que ensinam matemática e percebem que tem se tornado crescente as abordagens envolvendo narrativas no âmbito da Educação Matemática, mais especificamente, nesse campo da formação. O estudo destaca a complexidade e heterogeneidade de temáticas na constituição desse objeto de investigação e aponta para o uso de diferentes terminologias que se relacionam, como: histórias de vida, história oral, narrativas de aula, escritas de si, memoriais de formação, diários de formação, dentre outros.

A heterogeneidade apontada por Silva e Silva (2019) é evidenciada quando se busca por pesquisas desenvolvidas no âmbito de narrativas na plataforma online Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES¹². Na procura por títulos utilizando as palavras-chave Narrativas e Educação Matemática foram encontrados mais de duas centenas de estudos e, para situar as contribuições da investigação aqui relatada para a Educação Matemática, analisei pesquisas que tratam, em algum nível, da noção de narrativas realizadas e publicadas nas áreas de concentração em Educação Matemática e Ensino de Ciências e Educação Matemática com o intuito de observar as formas que o termo é utilizado.

A seleção das pesquisas ocorreu levando em consideração o título, as palavras-chave e o resumo. Foram desconsiderados estudos que não tinham como objeto de investigação as narrativas no âmbito da Educação Matemática e/ou Ensino de Matemática; os estudos que não estavam disponíveis para acesso na plataforma online; estudos autobiográficos; ou então aqueles que tinham como escopo a Educação Infantil ou Anos Iniciais do Ensino Fundamental. A partir desses critérios, foram encontradas 31 (trinta e uma) pesquisas envolvendo narrativas

¹² <https://catalogodeteses.capes.gov.br/catalogo-teses/#/>

nos programas de Pós-Graduação em Educação Matemática e Ensino de Ciências e Educação Matemática.

Como forma de limitar os trabalhos evidenciados nesta seção, dado o espaço reduzido para apresentar os resultados da busca, optei por evidenciar apenas as teses de doutorado publicadas na plataforma, com exceção de uma dissertação de mestrado que julguei ser significativa sua apresentação para esta investigação, totalizando assim 10 (dez) estudos.

Silva (2015), Fillos (2019), Tizzo (2019), Zaqueu-Xavier (2019) e Silva (2020), desenvolveram pesquisas que tratam o conceito de narrativas nos pressupostos da História Oral (GARNICA, 2005). O trabalho de Silva (2015) apresenta a produção de narrativas sobre os movimentos de criação e funcionamento de Licenciaturas em Matemática e Ciências no estado do Mato Grosso do Sul. Foram analisados quatro cursos, sendo três deles vinculados à Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (em Campo Grande, Três Lagoas e Corumbá) e um deles à Universidade Católica Dom Bosco. As narrativas apresentadas podem ser entendidas como uma tentativa de promover uma discussão sobre aspectos que a autora percebe terem permeado os discursos sobre a formação de professores em uma determinada região do país. Nesse sentido, ela apresenta como tem entendido a formação de professores de Matemática no Mato Grosso do Sul e como pensa que seus entrevistados entendem atualmente tal formação.

Fillos (2019) analisa a dinâmica de idealização e desenvolvimento dos primeiros cursos de especialização com ênfase na Modelagem Matemática, realizados na década de 1980, e as correlações entre tais cursos e a constituição da Educação Matemática no espaço acadêmico-científico brasileiro. A pesquisadora interpreta e discute as experiências pessoais relatadas por professores envolvidos com os primeiros cursos realizados em uma faculdade na cidade de Guarapuava – PR, e investiga os enraizamentos e relações desses cursos com outros realizados posteriormente no Brasil. Para tal, realiza entrevistas com doze professores, gestores dos cursos ou responsáveis por ministrar as disciplinas; além de mobilizar fontes escritas encontradas em arquivos, como cronogramas, relatórios e ementas.

Como parte de seu estudo, a pesquisadora relaciona o conceito de narrativas com o de experiência, baseando-se nos estudos de Benjamin (1994) e Larrosa (2016) e afirma que

[...] é possível apontar que a experiência é o ponto central e fundamental da narrativa, uma vez que a narrativa, de acordo com os autores supracitados, é a forma de pensar, de comunicar, caracterizar, recapitular e explicitar as experiências vividas; também de atribuir significados, compreender realidades, tornar o tempo humano histórico e definir a consciência histórica a partir das experiências. [...] A matéria-prima de todo e qualquer narrador é a experiência. (FILLOS, 2019, p. 37).

A partir de tais concepções e dos dados produzidos, Fillos (2019) elabora três narrativas históricas que abordam o contexto de criação e desenvolvimento da Fundação Faculdade de

Filosofia, Ciências e Letras de Guarapuava e como os cursos de especialização ofertados nessa instituição se inserem nessa conjuntura; os movimentos e práticas em torno de uma nova proposta, a Modelagem Matemática, nos cursos de especialização; e as implicações dos cursos de especialização para o Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática de Rio Claro.

Ainda sob os pressupostos da História Oral, mas no já âmbito da formação de professores, Tizzo (2019) lança um olhar para as ideias que envolvem o trabalho com narrativas no processo de formação formal de professores, tendo como disparador de perspectivas, entrevistas realizadas com os professores coordenadores de área de seis diferentes subprojetos¹³ atrelados ao Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID) da UNESP, campus Rio Claro.

Em seu estudo, Tizzo (2019) busca compreender como as narrativas vêm sendo mobilizadas em processos formativos no contexto do PIBID, argumentando que o trabalho com narrativas está atrelado ao que ele intitula de política de narratividade, compreendendo dimensões éticas, estéticas e políticas. Nesse sentido, o pesquisador afirma que seu “trabalho com narrativas não se trata de uma imposição, mas opera como oficinas de experimentação que têm potência de criação de realidades que permitem aos futuros professores acessarem aspectos de sua própria constituição que talvez de outro modo nem fosse possível.” (TIZZO, 2019, p. 9). Assim,

a narrativa pode ser compreendida como uma prática social que constitui os sujeitos. Pode ser algo que nos aproxima da possibilidade de padecer experiências e de exprimir singularidades, pois é subjetiva, é intencional e pode se eternizar nas múltiplas possibilidades de leituras, interpretações e produções de significados. Durante o processo de narrar é que os sujeitos produzem significados sobre si, suas experiências, os outros e o contexto em que estão inseridos. (TIZZO, 2019, p. 256).

Dessa forma, a narrativa é compreendida como o que constitui e produz sentidos, pois, ao contrário, se for pensada, por exemplo, unicamente como o ato de contar uma história, ela se prende a um sentido prévio, a algo que já está dado.

Trabalhando em um contexto similar ao de Tizzo (2019), Zaqueu-Xavier (2019) teve como objetivo elaborar compreensões sobre a mobilização de narrativas também na formação de professores no âmbito do PIBID. Na busca de tal objetivo, a pesquisadora produziu dez narrativas a partir de entrevistas com oito coordenadores de área de subprojetos¹⁴, dois coordenadores institucionais, e da análise de documentos do PIBID da Universidade Federal de

¹³ Os estudos e produções de entrevistas deram-se junto aos subprojetos da Educação Física, Física, Geografia, Interdisciplinar/EJA, Matemática e Pedagogia. (TIZZO, 2019).

¹⁴ Os estudos e produções de entrevistas deram-se junto aos subprojetos da Biologia, Interdisciplinar, Letras, Pedagogia e Química, perpassando os três campi da instituição, quais sejam, Araras, São Carlos e Sorocaba. (XAVIER, 2019).

São Carlos (UFSCar). A pesquisadora buscou reflexões acerca do seguinte questionamento: *Como as narrativas são mobilizadas na formação de professores no âmbito do PIBID da UFSCar?* e destaca que tais mobilizações podem ser vistas “enquanto instrumento reflexivo, formativo, avaliativo, gestor, de produção de realidades e saberes, de resistência, de problematização, de normalização, de governo e autogoverno, de controle, [...]” (ZAQUEU-XAVIER, 2019, p. 214). O que indica, que mobilizar narrativas em um cenário de formação, de certa forma, é um dever.

Analisar a mobilização das narrativas possibilitou, à pesquisadora, compreender como os professores colaboradores (entrevistados) entendem e se percebem diante do contexto em que a produção de narrativas acontece. Zaqueu-Xavier (2019) aponta que uma pluralidade de compreensões e mobilizações das narrativas e seus usos pôde ser notada, os quais parecem estar intimamente relacionados a aspectos da formação acadêmica, dos referenciais teóricos e do modo como o PIBID é entendido. De modo geral, as narrativas apresentadas no estudo versam do processo formativo e das relações que envolvem o estudante, da precarização do programa, das dificuldades encontradas pelas instituições de ensino básico, e da importância de propostas governamentais de incentivo e financiamento de ações voltadas à iniciação à docência. (ZAQUEU-XAVIER, 2019).

Com o objetivo de problematizar os diferentes discursos e modos de operar com as narrativas na Educação Matemática e também seguindo os pressupostos metodológicos da História Oral, Silva (2020) entrevistou oito pesquisadores¹⁵, em sua maioria líderes de grupos de pesquisas, que trabalham com investigação narrativa. Seu estudo foi norteado pelas questões: *“O que podem as narrativas na Educação Matemática? Como a “narrativa” produz e se produz em um discurso sobre a formação de professores que ensinam Matemática?”* (SILVA, 2020, p. 21). A pesquisadora conclui que seus colaboradores (entrevistados) se mobilizaram em busca de trabalhar com a expressão narrativas mediante as potencialidades que ela opera nas singularidades de cada um.

Para ela, esse movimento expõe uma preocupação teórico-metodológica dos pesquisadores seja “[...] em termos de tornar legítimo esses estudos no fazer científico, de

¹⁵ Pesquisadores entrevistados: Antonio Vicente Marafioti Garnica, líder do Grupo de Pesquisa “História Oral e Educação Matemática” (Ghoem); Adair Mendes Nacarato, líder do Grupo de Pesquisa “Histórias de Formação de Professores que Ensinam Matemática” (Hifopem) e do Grupo “Colaborativo em Matemática” (Grucomat); Cármen Lúcia Brancaglioni Passos, líder do “Grupo de Estudos e Pesquisa em Educação Matemática” (GEM); Dario Fiorentini, líder do grupo “Prática Pedagógica em Matemática” (Prapem), “Grupo de Estudos e Pesquisa sobre Formação do Professor de Matemática” (GEPFPM) e do “Grupo de Sábado” (GdS); Sônia Maria Clareto, líder do Travessia – Grupo de Pesquisa; Terezinha Valim Oliver Gonçalves, líder do (Trans)formação; Cláudia Regina Flores, líder do “Grupo de Estudos Contemporâneos e Educação Matemática” (Gecem) e Maria Laura Magalhães Gomes, integrante do Ghoem.

buscar respaldo teórico para realizar a análise, quer no modo de escrita e no posicionamento ético na formação de professores, ou em uma nova maneira de estudar objetos em um campo [...]” (SILVA, 2020, p. 302). Nota-se, que tais posicionamentos críticos percorrem diferentes caminhos que foram sendo construídos a partir dos movimentos realizados pelos seus colaboradores para pensar o contexto das narrativas na Educação Matemática.

Silva (2020, p. 303) percebe “que o trabalho com as narrativas na Educação Matemática veio para instaurar uma virada teórica/epistemológica ao tratar a questão da subjetividade e historicidade do sujeito.”. Dessa forma, percebe-se que o uso de narrativas é permeado por práticas e por um sentido político epistemológico “que se afastam de perspectivas positivistas, estruturalistas e unitárias no modo de fazer Ciência e, ao mesmo tempo, por defesas desses seus sentidos frente a pré-conceitos e resistências.” (SILVA, 2020, p. 303). Assim, a investigação narrativa na Educação Matemática abre caminhos para que a pesquisa científica transcenda seu território, viabilizando diálogos entre áreas no âmbito das humanidades.

Voltando para o contexto de formação inicial, Oliveira (2018) investiga como cursos de Licenciatura em Matemática, de instituições públicas de ensino superior nas regiões Centro-Oeste, Norte, Sul e Sudeste do Brasil, são construídos narrativamente por seus estudantes quando esses são indagados acerca de sua formação para atuarem como professores de Matemática na Educação Básica. Para tal, a pesquisadora realizou onze entrevistas com grupos de licenciandos em Matemática, ingressantes e concluintes e apresenta seu trabalho sob a forma de um diário, narrando de maneira bem detalhada os acontecimentos que ocorreram durante todo o percurso de seu doutoramento, incluindo os encontros com os estudantes e seus estudos teóricos.

Tendo em vista a possibilidade de explorar as singularidades percebidas nos encontros e destacar o tom implementado pelos estudantes, Oliveira (2018) produz textualizações a partir da análise narrativa sob a perspectiva de Bolívar (2002), que em seus estudos, “para além de discussões sobre um texto do gênero narrativo, discute as potencialidades desse recurso para expressar as experiências humanas, os sentimentos e as emoções dos narradores.” (OLIVIERA, 2018, p. 403). A noção de experiência é apresentada a partir dos estudos de Larrosa (2016) e para uma perspectiva sobre a leitura do outro, a pesquisadora se apoia nos estudos de Skliar (2003).

Desse modo, a partir de um processo de escuta, Oliveira (2018) disserta sobre a possibilidade de ouvir os silenciamentos que perpassam e afetam as formações dos estudantes entrevistados, tais como o afastamento da escola e a falta de diálogo com o curso; e o que diz

respeito às relações humanas, como o convívio com professores, suas afetividades e acolhimento.

Com o objetivo de analisar as narrativas de cinco professores que ensinam Matemática em diferentes etapas¹⁶ de ensino, na Baixada Santista – SP, Pita (2020) promove uma formação continuada com estudos voltados à Educação Matemática Crítica, Modelagem Matemática, Educação Crítica e Educação Estatística, em que seus participantes tiveram como proposta atividades voltadas para um ensino crítico, reflexivo e dialógico; em que as discussões estavam voltadas para projetos no contexto da Educação Estatística. A abordagem com narrativas, embasada em Bolívar, Domingo e Fernández (2001), se insere no estudo de três maneiras, “(1) como geração e coleta de dados; (2) como produto sobre acontecimentos relacionados à Educação Estatística Crítica e (3) como reflexão e formação docente.” (PITA, 2020, p. 126). Dessa forma, é possível conceber as narrativas tanto como contexto que se investiga, quanto como método de investigação e como aplicação diante de um processo reflexivo.

Assim, Pita (2020, p. 127) entende a narrativa como “[...] uma experiência expressa por meio de um relato e, ainda, como abordagem de pesquisa, as diretrizes e/ou formas de construção de significado, baseadas em ações temporais pessoais por meio da descrição e da análise dos dados biográficos.”. Ou seja, a narrativa é tida como uma reconstrução particular da experiência por meio da qual é dado significado ao que aconteceu. Contudo, em sua análise, a pesquisadora destaca aspectos referentes ao reconhecimento, à autovalorização, à resistência, à voz, à crença e aos momentos de insubordinação criativa diante de práticas que envolveram a Educação Estatística Crítica nos docentes participantes, ressaltando que, por meio das narrativas, os professores expuseram suas experiências que reverberaram em suas próprias experiências.

Em um contexto de Educação Básica, Moraes (2018) assume o papel de professor/pesquisador e narra suas experiências, e as de seus estudantes do 6º e 8º ano do Ensino Fundamental, quando envolvidos em uma prática educativa mediada por tecnologias digitais. O pesquisador apresenta as concepções de seus alunos em relação ao ensino de Matemática antes da prática proposta; discorre sobre a satisfação que o uso das tecnologias digitais proporcionou aos estudantes; e apresenta aspectos de como os espaços de formação oportunizam interações e contribuições para a construção do conhecimento matemático.

Apoiado em Souza (2004) e Fraiha-Martins (2014), Moraes (2018) opera com a metodologia de pesquisa narrativa, afirmando que

¹⁶ Educação Infantil, Anos Iniciais e Finais do Ensino Fundamental, Ensino Médio e Educação de Jovens e Adultos.

As narrativas estabelecem uma reflexão e (res)significação de experiências e ações no contexto escolar a partir da reflexão sobre a prática educativa, ressaltando as formas de mudança, incorporação e rapidez das novas tecnologias quando se tem acesso a elas, uma vez que, direta ou indiretamente, estão incorporadas em todo o universo escolar e são necessárias para o desenvolvimento de uma educação matemática no século XXI. (MORAES, 2019, p. 64-65).

Assim, a pesquisa narrativa, a partir de experiências formativas, amplia e produz conhecimento sobre o pesquisador e os discentes em formação a partir de suas relações com os tempos e espaços de aprendizagem e seus modos de apresentar suas experiências formativas a partir, neste caso, do uso das tecnologias digitais no espaço escolar. (MORAES, 2019).

Também em um contexto de Educação Básica, Gomes (2019) nos apresenta um conceito de narrativa que difere dos estudos anteriores, a narrativa transmídia. O pesquisador toma como base os estudos de Jenkins (2009) e sintetiza que as narrativas transmídias combinam dois elementos primordiais que acabam por gerar um terceiro, que são: a intertextualidade radical e a multimodalidade, visando a criação da compreensão aditiva. Desse modo, as narrativas devem atender a algumas características básicas, que incluem a oferta de uma história prévia da narrativa de um mapa do mundo retratado, do ponto de vista de outros personagens participantes da ação e dependem da interação dos usuários/fãs para seu desenvolvimento. Assim,

As [narrativas transmídias] NT surgem através de uma lacuna a partir da narração inicial e caracterizam-se pelas migrações de mídias que surgem entre os sujeitos para contar novas histórias e completando as narrações iniciais, sejam com vídeos e /ou discussões nas redes, possibilidades de games, paródias, blogs, etc. (GOMES, 2019, p. 29).

Ou seja, o que diferencia a narrativa transmídia de outras narrativas, é sua divisão em partes que são veiculadas por diferentes meios de comunicação, possibilitando que o processo de criação de uma mesma narrativa ocorra em diferentes plataformas de mídias. A partir de tal conceito, Gomes (2019) propõe uma análise em relação às perspectivas e processos de discentes do primeiro ano do Ensino Médio, da Rede Estadual de Ensino de Pernambuco, ao produzirem narrativas transmídias relacionadas ao conceito matemático de função. Assim, o pesquisador conclui que ao conduzir os sujeitos ao processo de produção das narrativas, é possível perceber uma maior mobilização entre os estudantes, no processo de produção, visto que a contextualização, a partir de problematizações, torna a compreensão mais significativa.

As pesquisas apresentadas até então fazem parte dos resultados obtidos a partir da busca no Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES, seguindo os descritores e critérios mencionados anteriormente. Entretanto, durante meus estudos, me deparei com a dissertação de Teruzzi (2017), a qual me chamou atenção por estar imersa em um contexto envolvendo História da Matemática e narrativas, escopos deste estudo.

Teruzzi (2017) realiza uma pesquisa bibliográfica com o objetivo de analisar quais contribuições a História da Matemática pode propiciar visando a construção de significado em sala de aula e quais possibilidades de construção de sentido podem ocorrer quando se aborda tópicos matemáticos mediados pela História da Matemática como fonte primária para a produção de narrativas. Para o pesquisador, “resgatar as origens históricas de um conceito matemático possibilita relacionar tal descoberta com a cultura, a sociedade, a visão de mundo da época, propiciando conexões com a literatura, a ciência, a religião nas quais os matemáticos estavam mergulhados.” (TERUZZI, 2017, p. 19), colocando em destaque diversos modos de utilização da História da Matemática como fonte de narrativas.

A partir de um movimento de análise geral do conhecimento, para um de análise de conhecimento do matemático, chegando ao papel da História na Educação Matemática, Teruzzi (2017) discute três aspectos que ele considera se relacionarem: a extração da ideia fundamental, a exploração de um potencial narrativo (enredo) e o resgate de elementos interdisciplinares a partir de um evento matemático. Para ilustrar tais aspectos ele apresenta três estudos de caso, um que traz as ideias do matemático Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855) para a soma das parcelas de uma progressão aritmética, outro que aborda o nascimento dos logaritmos, e por fim propõe um estudo sobre a análise do círculo e esfera feita pelo matemático Arquimedes (287 a.C – 212 a.C). Como conclusão do estudo, o pesquisador apresenta argumentações sobre o potencial narrativo e o potencial histórico como critérios para avaliar o papel que a História da Matemática desempenha em uma determinada construção narrativa.

A partir da apresentação dessas pesquisas, se nota a possibilidade de as narrativas gerarem heurísticas dos fenômenos, ou mesmo teorias, quando analisadas em diversos casos. As teorias são produzidas em vários níveis, mas muitas vezes apresentam uma característica heurística. A capacidade das heurísticas baseadas em narrativas de ir além da singularidade e da descrição é uma importante contribuição da pesquisa narrativa. É justamente a natureza particular das narrativas que permite explorar novos fenômenos, anteriormente desconhecidos ou complexos demais para serem analisados de outra forma. Essa particularidade, enraizada nas narrativas, também torna possível a criação de heurísticas mais eficazes e úteis para a pesquisa. (SQUIRE, 2014).

Dessa forma, as narrativas têm o poder de articular a construção da identidade pessoal e a construção do conhecimento, podendo auxiliar na inserção da Matemática em contextos de realizações humanas, se constituindo como alternativa de trabalho na área da Educação Matemática em que, neste estudo, é articulada com *História da Matemática, Verdades Matemáticas e Tecnologias Digitais*. A perspectiva sobre narrativa construída neste capítulo

oferece meios para se investigar como ocorre o processo de construção de narrativas matemáticas por um grupo de pós-graduandos em Educação Matemática ao explorarem problemas da História da Matemática com o GeoGebra.

CAPÍTULO 3

*E foi assim que aconteceu, sem mais nem menos: ele teve a certeza.
Como? Oh, vamos dizer que uma pessoa tivesse um cérebro
matemático mas ignorasse que existem números – de que modo então
essa pessoa pensaria? tendo a certeza!*
(LISPECTOR, 2015, p.252)

COMPREENSÕES ACERCA DE VERDADES MATEMÁTICAS

Neste capítulo, elenco alguns conceitos relevantes para o desenvolvimento do termo *demonstração* e *prova* para a Matemática e Educação Matemática. Início com uma breve introdução histórica sobre a noção de *verdade matemática* vinculada a um modelo axiomático e como se deu sua sistematização. Apresento concepções de matemáticos e educadores matemáticos em relação aos principais aspectos que devemos considerar quando lidamos com tais verdades. Por fim, discuto sobre as possibilidades e considerações que pesquisadores elencam em relação ao uso de *softwares* acerca da temática.

3.1 Breve introdução histórica

Ao longo dos tempos, as demonstrações em Matemática têm sido tratadas como buscas da verdade matemática, em que as noções de verdadeiro e falso estão associadas a proposições. Dessa forma, busca-se estabelecer critérios para determinar a veracidade ou falsidade da maior quantidade possível de proposições, sendo que esses critérios estão inseridos no modelo axiomático¹⁷. É possível que a *Metafísica*¹⁸ de Aristóteles (c.384 – c.322 a.C) tenha sido uma das primeiras tentativas de explanar tais critérios, mas que deixou a desejar, “[...] por não encerrar em si mesma critério algum para decidir se uma dada afirmação é verdadeira ou falsa.” (DOMINGUES, 2002, p. 55). Diante disso, é crucial estabelecer critérios específicos e parciais para determinar a verdade ou falsidade de proposições, compreendendo que esses critérios variam de acordo com a natureza das ciências, sejam elas empíricas ou dedutivas. No contexto da Matemática e outras ciências dedutivas, o método axiomático é amplamente utilizado como base, fundamentando-se na noção de demonstração.

¹⁷ Chama-se modelo axiomático a um conjunto finito de axiomas, de noções primitivas e de regras de inferência. Um modelo axiomático fornece bases lógicas sólidas para desenvolvermos uma teoria matemática, ou seja, apresentarmos certos objetos que nos interessam e deduzirmos alguns fatos sobre eles (MORAIS FILHO, 2010, p. 95)

¹⁸ Dizer do que é que não é, ou do que não é que é, é falso, ao passo que dizer do que é que é, ou do que não é que não é, é verdadeiro. (DOMINGUES, 2002, p. 55).

Não se sabe ao certo os caminhos que levaram à constituição do modelo axiomático, mas pesquisadores (MERZBACH; BOYER, 2011; DOMINGUES, 2002; ROQUE, 2012) defendem, a partir da historiografia tradicional, que eles estão intimamente ligados ao desenvolvimento matemático na Grécia e atribuem a Tales de Mileto (c.624 – c.546 a.C) uma das primeiras formulações explícitas de afirmações gerais sobre propriedades de figuras, sendo um de seus primeiros resultados o cálculo da altura de uma das pirâmides do Egito a partir de semelhanças, relacionando sua própria altura e sombra com a altura e sombra da pirâmide (ROQUE, 2012).

Segundo Proclo *apud* Domingues (2002, p. 57)

Tales foi o primeiro a ir para o Egito e a levar para a Grécia, na volta, o saber [geometria] que encontrou. Ele descobriu muitas proposições e revelou para seus sucessores os princípios subjacentes a muitas outras, valendo-se de métodos gerais em alguns casos e em outros de métodos empíricos.

É bem provável que os egípcios já conheciãam alguns resultados e propriedades matemáticas formuladas por Tales. Porém, os registros encontrados apresentam apenas fatos matemáticos isolados de difícil interpretação e compreensão, diferente dos registros de Tales, que apresentavam “o embrião de uma ciência teórica” (DOMINGUES, 2002, p. 57).

Segundo Asarc (1987), a noção de demonstração começou a ser desenvolvida no início do século V a.C, com os problemas de caráter aritmético e geométrico como os de irracionalidade e incomensurabilidade, que contribuíram para a compreensão de conceitos matemáticos. O pesquisador considera que a demonstração ocupa um lugar central na Matemática e evidencia a importância de colocá-la em destaque no currículo, tornando-a assim um objeto de estudo no ensino de Matemática.

Corroborando a importância da demonstração no currículo, Hersh (1997), a partir de um ponto de vista humanista, investiga problemas que ele considera complexos no âmbito da Filosofia da Matemática, como a prova matemática, a intuição matemática, e a certeza matemática. Questionamentos como: *O que é prova? O que deveria ser? O que os matemáticos fazem que chamamos de prova? E o que queremos dizer quando falamos em provar?* são colocados. O autor aponta que o termo tem significados diferentes na prática matemática e na análise lógico-filosófica, mas que as diferenças não são reconhecidas, especialmente no ensino ou nos livros didáticos, o que o faz questionar sobre como isso pode acontecer, seu significado e como os conceitos de provas se relacionam na teoria e na prática.

A historiografia tradicional da Matemática apresenta, analisa e faz considerações às contribuições da escola pitagórica no século V a.C., em que se tinha uma aritmética e geometria intuitivas e sem provas, na qual a obtenção de resultados era a partir de casos particulares e

desenvolvidos de modo concreto. Dessa forma, os resultados apresentados pelos pitagóricos encadeavam raciocínios para estabelecer propriedades e propriedades para deduzir outras propriedades de certas partes de seus estudos, mas sem nenhuma base axiomática pré-estabelecida, o que não desmerece as contribuições dadas pelos pitagóricos no que se refere à dedução matemática. (MERZBACH; BOYER, 2011; DOMINGUES, 2002; ROQUE, 2012).

A partir dos diagramas figurados, os pitagóricos sabiam que um número ímpar somado a um número ímpar resulta em um número par, e que um número ímpar somado a um número par resulta em um número ímpar. Tais diagramas auxiliavam os pitagóricos na obtenção de propriedades, ou seja, eles não as deduziam uma das outras como é realizado na obra *Os Elementos* de Euclides (c.323 a.C – c.283 a.C). Assim, Roque (2012, p. 138) argumenta que

No meio pré-euclidiano o pensamento geométrico era sofisticado, mas ainda não contava com o caráter dedutivo expresso nos *Elementos*. Com Euclides, a matemática grega passou a se distinguir por sua estrutura teórica. [...] os mesopotâmicos e egípcios também possuíam técnicas de cálculo elaboradas, entretanto seus métodos eram apresentados na forma de soluções para problemas específicos, ainda que válidas para casos mais gerais.

Como já mencionado, não se sabe ao certo como se deu o desenvolvimento da Matemática formal e axiomática grega que é caracterizada na obra de Euclides. Há teses que atribuem à Platão (c.427 a.C – c.347 a.C) a inserção desse modelo na Matemática grega, a partir do momento em que o estudioso “[...] passou a atribuir um valor elevado à matemática como uma disciplina de pensamento puro, para além da experiência sensível.” (ROQUE, 2012, p.138). No entanto, podem existir motivações além das filosóficas que ajudem a explicar por que a Matemática no período passou a ser organizada e sistematizada de modo formal.

A criação e organização de escolas com objetivos de produzir conhecimentos matemáticos pode ter provocado uma demanda por sistematizações dos conhecimentos ali elaborados, resultando em motivos e razões distintas daqueles que atribuem à Platão tal desenvolvimento. Ou seja,

A necessidade de colocar em ordem a aritmética e a geometria herdadas das tradições mais antigas, bem como as descobertas recentes, deve ter levado, naturalmente, a um questionamento sobre a forma de expor o conteúdo matemático. Tudo isso, somado a um ambiente cultural marcado pelo espírito crítico, como o do século V a.E.C., incentivava a expressão e a busca de critérios claros para arbitrar e escolher em meio a opiniões conflitantes. Essa necessidade encorajava os pensadores a refletir sobre a coerência de seus pressupostos básicos com base em perguntas como: O que é a verdade? Como distinguir o verdadeiro do falso? Como comunicar o pensamento? (ROQUE, 2012, p. 139).

Dessa forma, a sistematização, já praticada pelos estudiosos do período, em junção com a legitimação filosófica, podem ter influenciado o modo de expor o fazer matemático e consequentemente o surgimento, por volta do século III a.C, de sistemas axiomatizados de

filosofia e geometria, como as obras de Aristóteles (c.384 a.C – c.322 a.C) e Euclides. (ROQUE, 2012). Segundo Domingues (2012), *Os Elementos* de Euclides é a obra mais antiga que apresenta o modelo axiomático e que chegou aos nossos tempos. A obra não apresenta conceitos primitivos, todos os objetos geométricos a serem estudados são explicitamente definidos. O pesquisador pontua ser comum, na historiografia matemática tradicional, encontramos a colocação de que a obra *Os Elementos* foi vista como excelência matemática por cerca de dois milênios, o que indiretamente, seria uma forma de homenagem ao método axiomático.

Durante esse tempo, houve um declínio na Matemática grega que pode ter sido provocado por um desvio ao engessamento do modelo euclidiano, como na obra *Aritmética* de Diofanto (285 – 299), em que não há definições, postulados, proposições e por consequência também não há demonstrações, mas que não descaracteriza a obra como uma das grandes realizações da Matemática grega. (DOMINGUES, 2002). Contudo, “[...] ao se iniciar o século XIX, a geometria de Euclides, com seu alto grau de organização lógica, realmente se diferenciava do resto da matemática ainda tateante a procura de seus alicerces” (DOMINGUES, 2002, p. 61). Entretanto, questionamentos relacionados à exclusividade, que se via nessa geometria em relação à descrição de espaços físicos, foram apresentados.

Ao final do século XIX, os matemáticos viram a necessidade de expandir a noção de demonstração para além de um caráter material e intuitivo. A demonstração, que tinha o objetivo de convencer racionalmente o próprio estudioso e seus pares, precisava de uma análise mais profunda, pois, segundo Domingues (2002, p. 62) apenas a intuição “[...] ou raciocínios heurístico-geométricos já não bastavam para explicar alguns resultados aparentemente paradoxais”, como, por exemplo, os encontrados nos estudos de cálculo.

3.2 Perspectivas em Matemática

Na seção anterior o termo demonstração foi utilizado em diversas afirmações históricas já destacadas. Mas *o que são demonstrações?* ou *o que é demonstração?*. Se buscarmos em alguns dicionários de Filosofia encontramos as seguintes definições

DEMONSTRAÇÃO (in. Demonstration; fr. Demonstration; ai. Demonstration; it. Dimostrazione). O termo D. e seu conceito (ἀποδείξις, lat. demonstratio) foram introduzidos na Lógica por Aristóteles [...] como silogismo¹⁹ que deduz uma conclusão de princípios primeiros e verdadeiros ou de outras proposições deduzidas silogisticamente de princípios primeiros e evidentes. Sua estrutura formal é a do silogismo; [...] Substancialmente é esse o conceito de D. que passou para a filosofia

¹⁹ “Essa palavra, que na origem significava cálculo e era empregada por Platão para o raciocínio em geral, foi adotada por Aristóteles para indicar o tipo perfeito do raciocínio dedutivo, definido como “um discurso em que, postas algumas coisas, outras se seguem necessariamente””. (ABBAGNANO, 2007, p. 896, destaque do autor).

moderna. Mas, enquanto do ponto de vista gnosiológico²⁰ se acentuaram os caracteres de necessidade e evidência intuitiva da D. (Descartes, Kant), do ponto de vista lógico evidenciou-se o caráter de dedução formal a partir de premissas (Descartes, Leibniz), o que distingue a D. (cujo tipo ou ideal continua sendo a D. matemática) de outros gêneros de prova. Na Lógica contemporânea, o termo D. não é muito usado: em geral designa uma sequência de enunciados tais que cada um deles é um enunciado primitivo ou então é diretamente derivável de um ou mais enunciados que o precedem na sequência. (ABBAGNANO, 2007, p. 239-240).

Demonstração (lat. demonstratio: ação de mostrar) Operação que, partindo de proposições já consideradas conhecidas ou demonstradas, permite-nos estabelecer a verdade ou falsidade de uma outra proposição chamada de conclusão. Em outras palavras, raciocínio que permite passar de proposições admitidas para uma proposição que resulta necessariamente delas. (JAPIASSÚ; MARCONDES, 2006, p. 54).

Assim, em um modelo axiomático, uma demonstração é uma argumentação da veracidade de uma proposição a partir da validade de outras proposições já demonstradas. Dessa forma, a demonstração em Matemática pode ser considerada, a partir de uma perspectiva lógica, “como simultaneamente uma peça de retórica destinada a convencer, como um encadeamento lógico conduzindo à verdade e ao conhecimento e como um possível catalisador de descoberta matemática.” (SILVA, 2002, p. 68), revelando que uma demonstração pode ter várias finalidades, mas todas perpassam pelo estabelecimento e convencimento de uma certa veracidade que, apesar de relacionadas, se apresentam de forma independente.

Uma prova com o objetivo de revelar as conexões lógicas que sustentam a veracidade de um enunciado, pode não ser suficiente para induzir a convicção, seja por ser excessivamente longa e complexa; ou ser logicamente incorreta; ou depender de pressupostos injustificados que são aceitos acriticamente sem percebermos; ou por outras razões. Além disso, é possível que uma demonstração que não estabeleça de forma definitiva a verdade que propõe estabelecer, ainda possa ser passível de convencimento, mesmo que essa convicção não seja baseada em uma fundamentação lógica sólida. (SILVA, 2022).

Dentro da perspectiva lógica, Silva (2002) destaca três aspectos da demonstração em Matemática: o retórico, o lógico-epistemológico e o heurístico. O Quadro 2 apresenta características dos aspectos mencionados.

²⁰ A gnosiologia ou teoria do conhecimento, é caracterizada por pressupostos e problemas particulares; portanto, o conceito de F. como crítica do saber não implica a identificação da F. com a doutrina do conhecimento ou gnosiologia. (ABBAGNANO, 2007, p. 449).

Quadro 2 – Aspectos da demonstração em Matemática

Aspecto	Característica
Retórico	Demonstrações que aparecem como portadoras de força coercitiva em concordância às teses demonstradas.
Lógico-epistemológico	Demonstrações como objetos lógicos ideais, árvores ou sequências ordenadas no espaço lógico, segundo relações de dependência, ou consequência lógica.
Heurístico	Demonstrações indutoras de descoberta matemática.

Fonte: Adaptado de Silva (2002)

O autor ainda destaca que

[...] uma demonstração não é uma demonstração propriamente dita, do aspecto lógico-epistemológico; se não for logicamente impecável, ela pode desempenhar sua função retórica, mesmo se for logicamente falha, mas não tem certamente, ou assim parece, nenhum papel heurístico, a menos que seja logicamente imperfeita. (SILVA, 2002, p. 70).

Consequentemente, não é coerente exigir que uma mesma demonstração cumpra todos esses papéis de uma só vez. No entanto, a conciliação desses três aspectos pode recuperar a função heurística das demonstrações. Nesse caso, uma demonstração correta do ponto de vista lógico pode ser um desafio epistemológico se sua força racionalmente coercitiva puder induzir a uma revolta da imaginação subjetiva, que buscará encontrar variantes interessantes das noções envolvidas na demonstração para produzir contraexemplos da tese demonstrada. Assim, além de estabelecer a veracidade de uma afirmação, uma demonstração também pode ser vista como indutora de progresso se for simultaneamente vista como um desafio, o que pode ser feito pela generalização, estendendo os conceitos envolvidos em uma demonstração para um contexto mais amplo onde essa demonstração perde validade, mas ainda desempenha uma função importante na busca de uma nova demonstração. (SILVA, 2002).

Bicudo (2002) define demonstração a partir de uma perspectiva lógica caracterizando o que vem a ser um sistema formal, composto por linguagens, permeado por símbolos, expressões e fórmulas; axiomas e regras de inferência. Contudo, para Bicudo (2002, p. 79), a demonstração em Matemática “é a que satisfaz a comunidade dos especialistas, não interessando o quão distante possa estar do ideal lógico.”. O autor destaca que ao expor uma teoria aos seus pares, um matemático se preocupa em definir seus conceitos, explicando em termos de outros conceitos, anteriormente definidos, e em demonstrar as propriedades desses conceitos, argumentando pela aceitação de sua validade, a partir da validade de outras proposições já demonstradas, considerando a impossibilidade de se definir todas as noções matemáticas e demonstrar todas as proposições necessárias exigidas por uma demonstração (BICUDO, 2002).

Em seus estudos, Stewart e Tall (2015, p. 148, tradução nossa), ao analisarem a demonstração de um teorema e a reelaborarem segundo os padrões exigidos pela lógica, adicionando colocações e tornando-a mais clara, concluem que

[...] os matemáticos não escrevem demonstrações, precisamente, da maneira descrita no capítulo anterior [do modo descrito pela lógica]. Etapas são omitidas, tanto quando as hipóteses são introduzidas e como quando as deduções são feitas; novas definições são introduzidas; todo o pacote está embrulhado em um estilo de prosa fluente, em total contraste com uma sequência formal de afirmações²¹.

Os autores atribuem essa prática ao fato de os matemáticos já escreverem demonstrações antes delas serem analisadas na perspectiva lógica. A omissão de detalhes triviais e o uso de novos símbolos faz parte do processo de tentar tornar as demonstrações mais compreensíveis. Dessa maneira, uma demonstração escrita, passo a passo, a partir de aspectos lógicos pode ser reduzida, retirando as etapas que são consideradas básicas ao leitor, e causando uma melhor compreensão da estrutura geral da demonstração. (STEWART; TALL, 2015).

Bicudo (2002) considera razoável o modo como os matemáticos procedem com as demonstrações, destacando que a lógica modela a matemática. Segundo Sousa (2008, p. 16-17),

[...] no século XIX surgiram indagações revolucionárias que impulsionaram grandes transformações no campo da lógica e, posteriormente, no sistema de conhecimento de modo geral, tendo como base uma nova concepção da Ciência criada por Aristóteles. Especialmente nesse período, figuraram-se os fundamentos de uma nova Lógica, a Lógica Matemática a qual reflete a Lógica, notadamente, como uma atividade racional (inerente a uma função mental) modelada matematicamente.

De acordo com a pesquisadora, a Lógica de Boole advinda do matemático George Boole (1815 – 1864), e presente na obra *The Mathematical Analysis of Logic*, teve como objetivo alcançar a modelagem do raciocínio dedutivo através de um cálculo puramente matemático. A inauguração da Lógica Matemática reside fundamentalmente nesse aspecto, já que Boole conseguiu: matematizar a lógica ao adotar um método simbólico que utiliza símbolos como representantes das proposições lógicas; reger a manipulação desses símbolos por leis análogas às da Aritmética e baseadas no processo mental de eleição²²; e elaborar seu sistema com base em equações matemáticas. (SOUSA, 2008).

Dessa forma, o matemático investigou o pensamento como uma série de atos de eleição e desenvolveu uma formalização com base nessa abordagem. Contudo, Sousa (2008) defende que Boole tentou criar uma modelagem matemática do pensamento, uma vez que o sistema lógico proposto em sua obra enfatiza nossa capacidade de manipular símbolos sem nos

²¹ [...] mathematicians do not write out proofs in precisely the manner described in the previous chapter. Steps are omitted, both when hypotheses are introduced and when deductions are made; new definitions are brought in; the whole package is wrapped up in a flowing prose style in total contrast to a formal sequence of statements.

²² A função mental de eleição envolve a capacidade de escolher, de uma coleção de objetos, aqueles que possuem uma determinada propriedade, formando assim uma subclasse. Para Boole, é essa função que serve como base para todo o raciocínio dedutivo e, conseqüentemente, é um alicerce adequado para o seu sistema lógico-matemático. (SILVA, 2012).

preocuparmos com seus significados. Assim, esse sistema é caracterizado por um formalismo complexo, repleto de símbolos e analogias com a aritmética básica, sustentado pelo pilar fundamental das operações mentais.

Retomando o questionamento inicial sobre o que são demonstrações, vou me permitir inserir a perspectiva de demonstração no âmbito do Direito. Podval (2002, p. 113) apresenta uma análise do que seria a demonstração em tal contexto, afirmando que “demonstração em direito é a comprovação de fatos juridicamente relevantes”, que está limitada ao interesse jurídico e não tem por finalidade alcançar a verdade absoluta. A pesquisadora também apresenta alguns limites do que ela intitula de demonstrações jurídicas, argumentando que

As formas de demonstração são chamadas de provas e o sistema de provas no direito obedece a algumas regras que restringem o campo do que deva ser comprovado. Essas regras estipulam o que deve ser provado, como deve ser provado, quando deve ser provado e quem deve provar. (PODVAL, 2002, p. 114).

Portanto, no contexto do Direito, a demonstração consiste da utilização de provas articuladas e combinadas com argumentos retóricos que levam o interlocutor a aceitar como comprovada uma determinada situação jurídica.

Retomando os estudos de Bicudo (2002), este apresenta uma citação do matemático G.H. Hardy no estudo intitulado *Mathematical Proof* e publicado em 1929:

Se fôssemos até seu extremo, seríamos levados a uma conclusão bem paradoxal: que não existe, estritamente, uma tal coisa chamada DEMONSTRAÇÃO MATEMÁTICA; que não podemos, em última análise, fazer nada senão INDICAR; que as demonstrações, que Littlewood e eu chamamos GÁS, são floreios retóricos designados a afetar a psicologia. (BICUDO, 2002, p. 89).

Ou seja, formular uma resposta epistemológica para “o que é demonstração em Matemática” é complexo e coloca o matemático na mesma posição de Santo Agostinho²³, isto é, “DEMONSTRAÇÃO MATEMÁTICA - se não me perguntam o que é, eu sei; se me perguntam, e eu queira explicar, não sei.” (BICUDO, 2002, p. 89). Contudo, responder ao problema epistemológico sobre o que é a demonstração matemática não é uma tarefa simples, porém essa reflexão abre diversas possibilidades, permitindo que diferentes formas de argumentação coexistam no contexto do ensino e aprendizagem de Matemática, especialmente sob a perspectiva da Educação Matemática²⁴.

²³ Quid est ergo tempus? Si nemo ex me quaerat, scio; si quaerenti explicare velim, nescio [...] [O que é, portanto, o tempo? Caso ninguém me demande, sei; se quero explicar ao demandante, não sei]. (BICUDO, 2002, p. 89).

²⁴ Para Garnica (2002, p. 91-92), “[...] a Educação Matemática é movimento que se institui no instante mesmo em que algo a que chamamos Matemática ocorre num contexto de ensino e aprendizagem. Essa caracterização, ainda que vaga, por um lado, pretende afirmar a Educação Matemática como constituindo-se em trajetória, com objeto transdisciplinar, impedindo (ou pretendendo impedir) que: (a) seja vista estritamente como área de pesquisa de abordagem teórica; ou como produção de uma comunidade universitária de especialistas, excluindo outros agentes

3.3 Perspectivas em Educação Matemática

Na seção anterior, conceitos de verdades matemáticas, como o de demonstração, foram discutidos acerca de uma visão lógico-matemática. Mas, assim como Garnica (2002), considero que o estudo dessas verdades, ou das argumentações sobre conteúdos matemáticos, como o autor menciona, pode ser visto sob diferentes perspectivas. Dessa forma, podemos considerar diferentes modos de argumentação que podem coexistir em contextos de ensino e aprendizagem de Matemática.

Garnica (2002, p. 98) defende um regime de verdade sob perspectiva da Educação Matemática “no qual as concepções acerca das demonstrações (tidas, nesse regime, como etnoargumentações) são relativizadas e tomadas de modo muito mais amplo que na política geral de verdade da Matemática profissional.” O autor afirma que

Etnoargumentações – “demonstrações” em sentido amplo – têm, sempre, a função de convencer, tomado “convencimento”, aqui, como a negociação que se estabelece para a atribuição de significados. A essa ampliação de escopo vincula-se uma ampliação das próprias concepções sobre Matemática. Ao invés de tomar “A” Matemática como um conjunto de objetos que pode ser atingido de vários modos, segundo várias práticas, chamaremos de “Matemática” (ou “Matemáticas” ou ainda “Etnomatemáticas”) um conjunto de práticas (e, consequentemente, dos valores vinculados a essas práticas).

Ou seja, o regime de verdade da Matemática sob a perspectiva da Educação Matemática é distinto da perspectiva lógica, apontando que prova²⁵ (ou prova rigorosa) e demonstração são

que efetivamente atuam em salas de aula reais ou outros contextos – sua dimensão “prática”; (b) ensino e aprendizagem sejam tornados, unicamente, como ocorrendo em instâncias de educação formal, desprezando contextos outros; (c) a produção de Matemática em estado nascente seja tida como seu objeto de investigação - distorção nem sempre compreendida ou claramente explicitada, mas bastante presente como elemento valorativo; e que (d) esse movimento, ou região de inquérito, seja visto como estático, tendo início definido e elaborações gerais e definitivas (normatizações) que podem regulamentar as práticas de ensino e aprendizagem de modo objetivo (constituir-se em trajetória, ao contrário, é defender que uma Educação Matemática toma corpo a partir do primeiro instante em que alguém impõe-se ensinar a alguém algo chamado Matemática, passando a refletir sobre essa sua ação).

²⁵ Na seção anterior apresentei a definição de demonstração indicada em dois dicionários. Segue então a definição de prova que consta nos mesmos materiais.

PROVA (gr. TEKüiptOV; lat. *Probatio*; in. *Proof*jr. *Preuve*, aí. *Beweis*; it. Prova). Procedimento apto a estabelecer um saber, isto é, um conhecimento válido. Constitui P. todo procedimento desse gênero, qualquer que seja sua natureza: mostrar uma coisa ou um fato, exhibir um documento, dar testemunho, efetuar uma indução são P. tanto quanto as demonstrações da matemática e da lógica. Portanto, esse termo é mais extenso que *demonstração* (v.): as demonstrações são P., mas nem todas as P. são demonstrações. (ABBAGNANO, 2007, p. 805).

Prova (lat. tardio *proba*, do lat. *probare*, pro-var) 1. Argumentação que nos leva a reconhecer ou a aceitar a verdade de uma proposição. Ex.: a prova ontológica da existência de Deus segundo Descartes. 2. Em um sentido lógico, demonstração da validade de uma proposição, de acordo com determinados princípios lógicos e regras dedutivas. Ex.: a prova de um teorema. Em um sentido experimental, verificação da verdade de uma hipótese em relação aos fatos a que se refere. 3. Teoria da prova: na lógica matemática, o estudo sintático dos sistemas formais, examinando-se a estrutura das provas que podem ser realizadas nesses sistemas. (JAPIASSÚ; MARCONDES, 2006, p. 162).

tidas como sinônimos entre os matemáticos, sendo aquilo “que atesta a veracidade ou autenticidade, [...] a dedução que mantém a verdade de sua conclusão apoiando-se em premissas admitidas como verdadeiras.” (GARNICA, 1995, p. 10). Porém, no âmbito da Educação Matemática, prova ou demonstração sempre se apresentam adjetivadas, com um possível *rigorosas*, sendo a necessidade ou não dessa adjetivação dependente dos aspectos focados, podendo existir uma certa confusão entre a concepção de prova e a função que ela desempenha ou deveria desempenhar (GARNICA, 1995).

De Villiers (1990, p. 17, tradução nossa) traz o seguinte questionamento: “Quais funções tem a prova na própria Matemática que podem ser potencialmente utilizadas na sala de aula de matemática para tornar a prova uma atividade mais significativa?²⁶”. O autor apresenta um modelo de resposta que atribui à prova a função de (a) verificação/convencimento, que se preocupa com a veracidade de uma afirmação; (b) explicação, que busca fornecer informações sobre por que uma determinada afirmação é verdadeira; (c) sistematização, em que ocorre a organização de vários resultados em um sistema dedutivo de axiomas, destacando os principais conceitos e teoremas; (d) descoberta, em que são encontrados novos resultados; (e) comunicação, que busca transmitir conhecimentos matemáticos; e (f) desafio intelectual, cujo objetivo é de realização pessoal e gratificação resultantes da construção de uma demonstração. De Villiers (1990) enfatiza que a ordem em que as funções foram colocadas não está relacionada à importância delas.

Pautado em Hanna (1989) e Davis e Hersh (1982, 1988), De Villiers (1990) afirma que em pesquisas matemáticas, a convicção pessoal geralmente depende de uma combinação de intuição, verificação quase empírica e da existência de uma prova lógica (mas não necessariamente rigorosa, visto que muitas vezes demonstrações são publicadas com erros e/ou incompletas). Dessa forma, um alto nível de convicção pode ser alcançado quando se considera que os métodos e resultados se ajustam, dando muitas vezes prioridade à razoabilidade dos resultados do que exigindo uma prova completamente rigorosa. Contudo, em diversas situações, quando os resultados em questão são intuitivamente evidentes e/ou são apoiados por evidências quase empíricas, a função da prova deixa de ser a de verificação/convencimento e passa a ser de explicação (ou outra). (DE VILLIERS, 1990).

Para Balacheff (2000), a explicação está situada no nível de quem a produz e tem como objetivo estabelecer e garantir a validade de uma proposição com base nos conhecimentos e racionalidade do locutor, levando em consideração suas próprias regras de decisão da verdade.

²⁶ What functions does proof have within mathematics itself which can potentially be utilized in the mathematics classroom to make proof a more meaningful activity?

Quando a “[...] explicação se expressa em um discurso, ela tenta tornar inteligível para os espectadores a verdade da proposição já adquirida pelo locutor.²⁷” (BALACHEFF, 2000, p. 12, tradução nossa). Nesse caso, a explicação não é necessariamente reduzida a uma cadeia dedutiva e as “[...] razões apresentadas podem ser discutidas, recusadas ou aceitas.²⁸” (BALACHEFF, 1987, p. 148, tradução nossa), visto que sua base é essencialmente a linguagem natural.

Voltando para De Villiers (1990), quando uma prova expõe relações lógicas entre as declarações, de forma distinta das evidências empíricas e/ou intuitivas, ela se torna uma ferramenta essencial para a sistematização de resultados já conhecidos, transformando-os em definições e até mesmo teoremas, levando a descoberta de novos resultados. Assim, a partir do compartilhamento de resultados matemáticos, as provas podem assumir uma importante função comunicativa, disseminando conhecimento matemático e convidando à comunidade para debates críticos, podendo gerar desafios intelectuais em muito matemáticos.

Ao finalizar o estudo, o autor esclarece que

embora as seis funções de prova acima possam ser distinguidas umas das outras, muitas vezes estão todas entrelaçados em casos específicos. Em alguns casos, certas funções podem dominar outras, enquanto em outros, certas funções podem nem aparecer. Além disso, esta lista de funções não é de forma alguma completa. Por exemplo, poderíamos facilmente adicionar uma função *estética* ou uma de *memorização* ou ainda de *desenvolvimento algorítmico*²⁹. (DE VILLIERS, 1990, p. 23, tradução nossa).

No estudo de Balacheff (1987) é apontada uma distinção entre os termos prova e demonstração. Para ele, a prova é uma explicação aceita por uma comunidade em um determinado momento, podendo ser objeto de debate, cujo sentido é a exigência de se definir um sistema de validação comum aos interlocutores. Porém, dentro da comunidade matemática, apenas as explicações que adotam uma forma particular podem ser aceitas como prova. Se tais provas empregam um conjunto de enunciados organizados de acordo com regras determinadas, sendo que um enunciado pode ser conhecido como verdadeiro ou deduzido daqueles que o precedem por meio de uma regra de dedução tomada de um conjunto de regras bem definidas a partir de aspectos lógicos, essas provas são chamadas de demonstrações.

²⁷ [...] explicación se expresa en un discurso, ésta pretende hacer inteligible a los espectadores la verdad de la proposición ya adquirida por el locutor.

²⁸ [...] raisons avancées peuvent être discutées, refusées ou acceptées.

²⁹ [...] although the six functions of proof above can be distinguished from one another, they are often all interwoven in specific cases. In some cases certain functions may dominate others, while in some cases certain functions may not feature at all. Furthermore, this list of functions is by no means complete. For instance, we could easily add an aesthetic function or that of memorization and algorithmization.

Considerando as alusões da comunidade matemática, Hanna (1989) aponta que a aceitação de um teorema pelos matemáticos ditos puros é um processo social voltado mais para uma função de compreensão e significado do que de prova rigorosa. A autora destaca que a presença de qualquer prova, rigorosa ou não, é apenas um dos vários elementos determinantes na aceitação de um novo resultado, que deve apresentar alguma combinação dos seguintes fatores para esse ser aceito pelos membros da comunidade:

1. Eles compreendem o teorema, os conceitos nele incorporados, seus antecedentes lógicos e suas implicações; e não há nada que sugira que não seja verdade;
2. O teorema é significativo o suficiente para ter implicações em um ou mais ramos da Matemática (e, portanto, é importante e útil o suficiente para garantir estudo e análise detalhados);
3. O teorema é consistente com o corpo de resultados matemáticos aceitos;
4. O autor tem uma reputação incontestável como um pesquisador na área à qual se refere o teorema;
5. Há um argumento matemático convincente para isso (rigoroso ou não), de um tipo que eles encontraram antes.³⁰ (HANNA, 1989, p. 21-22, tradução nossa).

Ao investigar o papel da prova em Educação Matemática, Hanna (1990) discute a existência de três aspectos: o de prova formal, prova aceitável e o ensino de prova. O Quadro 3 apresenta características dos aspectos mencionados.

Quadro 3 – Aspectos da prova em Educação Matemática

Aspecto	Característica
Prova formal	Prova como um conceito teórico em lógica formal, que pode ser pensado como o ideal do qual a Matemática dita pura se aproxima.
Prova aceitável	Prova como um conceito normativo que define o que é aceitável para a comunidade Matemática.
Ensino de prova	Prova como atividade em Educação Matemática, com o objetivo de elucidar ideias que valem a pena ser ensinadas aos alunos.

Fonte: Adaptado de Hanna (1990)

A abordagem formal da prova foi desenvolvida para eliminar a necessidade de recurso a evidências intuitivas e julgamento humano, ambos vistos como fontes potenciais de erros graves. Uma prova é valorizada por trazer à tona relações matemáticas essenciais, em vez de meramente demonstrar a exatidão de um resultado. Contudo, desejando levar em conta o papel da prova como meio de comunicação e em reconhecimento dos processos sociais que desempenham um papel tão crucial na aceitação de um novo resultado pelos matemáticos, os educadores passaram a dar maior ênfase ao conceito da prova como argumento convincente. HANNA (1990).

³⁰ 1. They understand the theorem, the concept embodied in it, its logical antecedents, and its implications; and there is nothing to suggest it is not true; 2. The theorem is significant enough to have implications in one or more branches of mathematics (and is thus important and useful enough to warrant detailed study and analysis); 3. The theorem is consistent with the body of accepted mathematical results; 4. The author has an unimpeachable reputation as an expert in the subject matter of the theorem; 5. There is a convincing mathematical argument for it (rigorous or otherwise), of a type they have encountered before.

Em seu estudo, Hanna (1990) estabelece uma distinção entre as provas que provam e as provas que explicam, deixando claro que ambas atendem aos requisitos para uma prova matemática e, portanto, seriam reconhecidas como válidas pela comunidade matemática. Segundo a autora,

Uma prova que prova mostra *apenas* que um teorema é verdadeiro; fornece apenas razões probatórias. Preocupa-se apenas com a fundamentação, com o que é conhecido como *Rationes cognoscendi*, ou seja, razões do porquê-o-consideramos. Uma prova que explica, por outro lado, também mostra porque um teorema é verdadeiro; fornece um conjunto de razões que derivam do próprio fenômeno: *Rationes essendi*, ou razões do porquê. Uma prova que prova pode confiar apenas na indução matemática ou mesmo em considerações sintáticas. Mas uma prova que explica deve fornecer um fundamento lógico com base nas ideias matemáticas envolvidas, as propriedades matemáticas que fazem com que o teorema afirmado seja verdadeiro.³¹ (HANNA, 1990, p. 9, tradução nossa, grifo do autor).

Contrapondo-se a Balacheff (1987), Hanna (1990) argumenta que nem todas as provas têm poder explicativo, preferindo usar o termo explicar apenas quando a prova revela e faz uso das ideias matemáticas que a motivam. Para diferenciar as provas que provam das provas que explicam, a autora utiliza a afirmação de que a soma dos n primeiros inteiros positivos, $S(n)$, é dada por $\frac{n(n+1)}{2}$ e propõe uma prova por indução matemática (prova que prova) e duas provas explicativas, uma utilizando a propriedade de simetria e outra representações geométricas.

Para Hanna (1990, p. 12), não é a capacidade de convencimento que distingue a prova que prova da prova explicativa. Ela afirma que “[...] é certamente possível estar convencido de que uma afirmação é verdadeira sem saber porque é verdadeira.³²” e completa

[...] não há infidelidade à prática da matemática se na educação matemática nos concentrarmos tanto quanto possível nas boas explicações matemáticas, destacando para os alunos na nossa prova de um teorema as ideias matemáticas importantes que conduzem à sua verdade.³³ (HANNA, 1990, p. 12).

Defendendo o uso das provas que explicam, Hanna (1990) sugere que um primeiro passo na mudança para o uso dessas provas é que educadores enfatizem que a compreensão matemática é o objetivo e defende que compreender é muito mais do que confirmar que todos

³¹ A proof that proves shows only *that* a theorem is true; it provides evidential reasons alone. It is concerned only with substantiation, with what are known as *Rationes cognoscendi*, that is, why-we-hold-it-to-be-so reasons. A proof that explains, on the other hand, also shows why a theorem is true; it provides a set of reasons that derive from the phenomenon itself: *Rationes essendi*, or why-it-is-so reasons. A proof that proves may rely on mathematical induction or even on syntactic considerations alone. But a proof that explains must provide a rationale based upon the mathematical ideas involved, the mathematical properties that cause the asserted theorem to be true.

³² [...] it is certainly possible to be convinced that a statement is true without knowing why it is true.

³³ Thus there is no infidelity to the practice of mathematics if in mathematics education we focus as much as possible on good mathematical explanations, highlighting for the students in our proof of a theorem the important mathematical ideas that lead to its truth.

os elos em uma cadeia de dedução estejam corretos. Dessa forma, o desafio do professor é encontrar provas explicativas para as afirmações matemáticas.

Em estudo mais recente, Hanna (2000) trata do uso de representações visuais e questiona se elas podem ser utilizadas não apenas como evidência para uma afirmação matemática, mas também em sua justificação. Ela destaca que

Diagramas e outros recursos visuais têm sido utilizados há muito tempo para facilitar a compreensão [...]. Eles foram acolhidos como acompanhamentos heurísticos da prova, onde podem inspirar tanto o teorema a ser provado quanto abordagens para a prova em si. Nesse sentido, é bem aceito que um diagrama seja um componente legítimo de um argumento matemático. Todo educador matemático sabe que diagramas e outras representações visuais também são um componente essencial do currículo de matemática, onde podem transmitir visão e conhecimento.³⁴ (HANNA, 2000, p. 15, tradução nossa)

Contudo, a pesquisadora reconhece que existem diversas discussões sobre o tema e que muitas vezes as perspectivas são controversas. Ao analisar diferentes estudos, Hanna (2000) notou que diferentes pesquisadores (BROWN, 1999; FRANCIS, 1996; PALAIS, 1999) tecem considerações sobre as provas visuais. De modo geral, eles consideram que as provas visuais bem sucedidas são poucas e distantes entre si, e que tendem a ser limitadas em seu escopo e generalização. No entanto, esses mesmos pesquisadores admitem que existem várias provas visuais convincentes, como aquelas publicadas no livro *Proofs without words* (NELSEN, 1993), que poderiam, atualmente, serem representadas a partir do *software* GeoGebra.

Borwein e Jörgenson (2001) sugerem três condições necessárias (mas não suficientes) para uma prova visual aceitável: (i) Confiabilidade: em que os meios subjacentes para chegar à prova devem ser confiáveis e que o resultado é invariável a cada inspeção; (ii) Consistência: em que o meio e o fim da prova devem ser consistentes com outros fatos, crenças e provas conhecidos; e (iii) Repetibilidade: possibilidade de que a prova possa ser confirmada ou demonstrada para outros. Questionamentos podem ser levantados sobre se esses critérios não se aplicariam às provas em geral e se o primeiro critério, em particular, não carece de uma definição para o que se entende por meios confiáveis, consequentemente não fornecendo orientação específica suficiente para separar provas visuais aceitáveis de inaceitáveis (HANNA, 2000).

Mesmo com essas brechas nas condições propostas por Borwein e Jörgenson (2001), é inevitável negar que eles atribuem ao raciocínio visual um papel maior, em geral, na

³⁴ Diagrams and other visual aids have long been used to facilitate understanding, of course. They have been welcomed as heuristic accompaniments to proof, Where they can inspire both the theorem to be proved and approaches to the proof itself. In this sense it is well accepted that a diagram is a legitimate component of a mathematical argument. Every mathematics educator knows that diagrams and other visual representations are also an essential component of the mathematics curriculum, where they can convey insight as well as knowledge.

Matemática. Esses pesquisadores consideram que algumas representações visuais podem constituir provas e que embora a visão deles seja de que a prova não depende apenas da representação sentencial, eles não aceitam que o raciocínio visual e o sentencial sejam mutuamente exclusivos. Pelo contrário, grande parte do trabalho deles tem como objetivo elaborar o conceito de prova heterogênea. (HANNA, 2000).

Com base nessa posição, Barwise e Etchemendy (1996) desenvolveram o *Hyperproof*, um programa interativo que facilita o raciocínio com objetos visuais. Ele é projetado para direcionar a atenção dos alunos para o conteúdo de uma prova, e não para a estrutura sintática das sentenças, e ensina raciocínio lógico e construção de provas manipulando informações visuais e sentenciais de maneira integrada. Para Hanna (2000), o uso do *Hyperproof* faz com que a prova vá muito além da simples inspeção de um diagrama. Uma prova procede com base em regras explícitas de derivação que, tomadas como um todo, se aplicam tanto à informação sentencial quanto visual.

Ainda nesse estudo, Hanna (2000) enfatiza novamente a importância e o desafio de encontrar maneiras mais eficazes de usar a prova para a promoção da compreensão matemática, mas sinaliza que nem sempre se pode encontrar uma prova explicativa para cada teorema que se deseja apresentar. Em muitos assuntos matemáticos, alguns teoremas precisam ser provados utilizando contradição, indução matemática ou outro método não explicativo. Porém, o uso de *softwares* de matemática dinâmica, pode possibilitar uma abertura para novas abordagens ao conceito de prova no ensino.

Contudo, as provas e demonstração são usadas de maneira mais apropriada na sala de aula para promover a compreensão, o que de forma alguma contradiz seu papel na matemática. A prova matemática consiste, em cadeias explícitas de inferência seguindo regras de dedução acordadas e é frequentemente caracterizada pelo uso de notação formal, sintaxe e regras de manipulação. No entanto, claramente, a prova é muito mais do que uma sequência de passos corretos; é também, e talvez o mais importante, uma sequência de ideias e percepções com o objetivo de compreensão matemática – especificamente, entender por que uma afirmação é verdadeira. Assim, o desafio dos educadores é fomentar o uso da prova matemática como método para certificar não apenas que algo é verdadeiro, mas também por que é verdadeiro.

3.4 Perspectivas com o uso do computador

Há décadas a comunidade matemática tem se questionado sobre provas e demonstrações com o uso do computador. Segundo Garnica (1995) a temática chamou atenção quando a

demonstração do Teorema da Quatro Cores, possibilitada por um computador e feita por Appel e Haken, foi publicada na revista *Times* em 1976. O problema busca determinar o número mínimo de cores necessárias para colorir um mapa de forma que quaisquer dois países contíguos tenham cores diferentes.

Para Sousa (2001), o problema tem características fascinantes, visto que possui formulação simples, mas uma grande complexidade de resolução, que fez com que permanecesse sem resolução durante mais de cem anos. Atualmente a demonstração do teorema é aceita dentro da comunidade matemática, mas continua sendo polêmica. Isso porque “[e]stá em causa o reconhecer uma argumentação baseada numa enorme quantidade de cálculos por computador, impossíveis de serem verificados detalhadamente por um ser humano durante toda a sua vida.” (SOUSA, 2001, p. 134), visto que a prova é demasiadamente longa para ser verificada à mão, o que inviabiliza a detecção de erros que possam ter sido cometidos na programação.

Na década de 90, Davis (1993) já abordava sobre a importância do que chamou de teoremas visuais. De forma resumida,

[...] um teorema visual é a saída gráfica ou visual de um programa de computador - geralmente um de uma família de tais saídas - que o olho organiza em um todo coerente e identificável e que é capaz de inspirar questões matemáticas de natureza tradicional ou que contribui de alguma forma para nossa compreensão ou enriquecimento de alguma situação matemática ou do mundo real.³⁵ (DAVIS, 1993, p. 333, tradução nossa).

Assim, um teorema visual é a passagem da iteração matemática para a figura percebida, tida ou intuída em toda sua complexidade visual, explícita ou não. A partir dessa proposta, o autor chama atenção à importância do olhar, destacando que deveríamos restituir aos olhos a legitimação das descobertas e adotar os teoremas visuais nos processos de ensino e aprendizagem. (DAVIS, 1993).

De Villiers (1999) retomou um de seus artigos (DE VILLIERS, 1990) para inserir uma seção que aborda o ensino de demonstração com o uso de *softwares* como o *Sketchpad*³⁶. Para ele, quando os alunos investigam exaustivamente uma conjectura geométrica por meio do

³⁵ [...] a visual theorem is the graphical or visual output from a computer program - usually one of a family of such outputs - which the eye organizes into a coherent, identifiable whole and which is able to inspire mathematical questions of a traditional nature or which contributes in some way to our understanding or enrichment of some mathematical or real world situation.

³⁶ Sketchpad foi um editor gráfico desenvolvido por Ivan Sutherland, no MIT, em 1963. Foi o primeiro editor gráfico orientado a objetos. Era possível colocar bits coloridos no canvas e criar objetos que poderiam ser manipulados distintamente dos outros. O *software* permitia a criação de desenhos definidos como “mestres”, a partir do qual poderiam ser criados desenhos dependentes. Cada um dos desenhos dependentes seria semelhante ao desenho mestre e se este fosse alterado, todas os dependentes seriam alterados da mesma forma. (WIKIPÉDIA, 2019).

Sketchpad, eles têm pouca necessidade de mais convicção ou verificação, desmotivando-os à prova. Porém, quando são indagados sobre a veracidade de um resultado, se sentem desafiados à tentativa de explicação. O autor menciona que os alunos admitem rapidamente que a verificação indutiva confirma, mas não dá uma sensação satisfatória de iluminação, *insight* ou compreensão de como a conjectura é uma consequência de outros resultados familiares. Os alunos, portanto, consideram satisfatório conhecer um argumento dedutivo como tentativa de explicação.

Em relação aos *softwares* de matemática dinâmica³⁷, Hanna (2000) aponta que o uso de tais recursos deram um novo ímpeto à exploração matemática em sala de aula, ajudando os alunos a entenderem proposições, permitindo-lhes realizar construções com um alto grau de precisão, testar conjecturas, explorar e descobrir novas propriedades. Dessa forma, a autora pondera que os *softwares* dinâmicos possuem alto potencial de encorajar tanto a exploração quanto a prova. Porém, faz ressalvas quanto a novas visões que educadores podem fazer em relação ao uso bem sucedido dos *softwares* e argumenta que as provas dedutivas não devem ser minimizadas ou abandonadas em favor de uma abordagem inteiramente experimental da justificativa matemática. Ou seja, a exploração experimental não deve substituir a prova, é necessário articulá-las. Ela argumenta que

A exploração leva à descoberta, enquanto a prova é a confirmação. A exploração de um problema pode levar alguém a compreender sua estrutura e suas ramificações, mas não pode fornecer uma compreensão explícita de cada link. Assim, a exploração pode levar a conclusões que, embora formuladas com precisão, devem permanecer provisórias.³⁸ (HANNA, 2000, p.14, tradução nossa).

Nesse sentido, Hanna (2000) defende que embora a verdade de uma proposição possa parecer aparente a partir da exploração, ela ainda precisa de uma justificativa demonstrável, que somente uma prova, fornecendo uma derivação de premissas aceitas, pode fornecer. Segundo Hanna e Sodoli (2007), poucos pesquisadores afirmam que as provas podem consistir apenas em representações visuais, mas vários deles consideram que as figuras e tais representações podem desempenhar um papel essencial, embora restrito, nas provas.

Para Mariotti (2000), há uma mudança do status de justificação em problemas geométricos. Esta modificação está estritamente relacionada com a passagem de uma geometria intuitiva como um conjunto de propriedades evidentes para uma geometria teórica, como um sistema de relações entre afirmações, validadas pela prova. De acordo com a pesquisadora, a

³⁷ Esta pesquisa não faz distinção entre as expressões “*software* de matemática dinâmica” e “*software* de geometria dinâmica”. Em alguns momentos tais expressões também podem ser expressas por “*software* dinâmico”.

³⁸ Exploration leads to discovery, while proof is confirmation. Exploration of a problem can lead one to grasp its structure and its ramifications, but cannot yield an explicit understanding of every link. Thus exploration can lead to conclusions which, though precisely formulated, must remain tentative.

relação com o conhecimento geométrico é modificada pela mediação oferecida pelas características peculiares de *softwares* dinâmicos, da qual as resoluções deixam de ser vistas como uma coleção de propriedades evidentes e passam a ser vistas como um sistema de afirmações relacionadas que são validadas por uma prova.

Corroborando tais ideias, Baccaglini-Frank e Mariotti (2010) apontam que a solução de um problema, mediante conjecturas em um *software* de matemática dinâmica, envolve duas fases: uma fase de conjectura, na qual os alunos se envolvem na exploração de uma figura dinâmica e na argumentação que leva à formulação escrita de uma declaração; e em uma outra fase de prova, na qual os alunos tentam provar a conjectura formulada. Assim, para Mariotti (2000) e Baccaglini-Frank e Mariotti (2010), os *softwares* com propriedades dinâmicas contribuem para compreensão teórica, fornecendo uma mediação semiótica que ajuda os alunos a compreenderem o processo de explorar, conjecturar e argumentar como uma forma de chegar a uma prova válida.

Considerando o uso de *softwares* de matemática dinâmica, Nóbriga (2019) propõe uma nova forma de apresentar teoremas e demonstrações nesses ambientes, o que chama de Demonstrações Matemáticas Dinâmicas. O autor argumenta que o “foco é na demonstração como um elemento essencial para compreensão das justificativas das propriedades dos objetos matemáticos.” (NÓBRIGA, 2019, p. 2). Tais demonstrações possuem o propósito de explicação e são expressas de forma escrita e articuladas com diferentes representações semióticas, considerando a linguística, simbólica e visual.

Uma primeira característica da Demonstração Matemática Dinâmica está no fato de se integrarem dinamicamente, num mesmo ambiente, os diferentes registros de representações dos objetos da Matemática. [...] Numa demonstração dinâmica de uma propriedade ou teorema, as diferentes representações desse objeto aparecem concomitantemente e estão conectadas. Usam-se Registros Linguísticos, Simbólicos e Visuais Dinâmicos, além de Tratamentos e Conversões Dinâmicas. [...] Uma contribuição dessa conexão é que o estudante pode perceber qual a relação que existe entre as diferentes representações, ou seja, quando se altera algo no registro algébrico o que acontece no registro geométrico (NÓBRIGA, 2019, p. 14-15).

A Demonstração Matemática Dinâmica se relaciona com “o movimento e a integração concomitante das diferentes representações dos objetos da Matemática” (NÓBRIGA, 2019, p. 15). Nesse caso, é necessário um ambiente que permita a integração dessas diferentes representações.

Buscando favorecer, em um ambiente de matemática dinâmica, a ascensão do conhecimento empírico para hipotético-dedutivo de licenciandos em Matemática, Gravina (2001) investiga o que acontece com os processos cognitivos desses sujeitos quando lhes são possibilitada, em interação com a máquina, a concretização de seus construtos e ações mentais,

e quando, mediante realimentação imediata, eles são levados a novas reelaborações e construções dessas ações. A autora também questiona como tais processos ocorrem para um novo conhecimento e destaca que os *softwares* de matemática dinâmica proporcionam situações de aprendizagem que “podem incorporar vivências de atitudes similares aos dos matemáticos nos seus processos de criação, valorizando a construção do conhecimento enquanto processo, valorizando as atitudes investigativas [...]” (GRAVINA, 2001, p. 195) e estimulando o desenvolvimento.

Em seu estudo, Ferreira (2018) teve como objetivo investigar a constituição e produção do conhecimento matemático, do matemático, junto ao computador. A pesquisadora entrevistou sete docentes/pesquisadores brasileiros que atuam na área de Matemática Pura ou Aplicada e realizou questionamentos sobre o modo como eles veem suas produções com o computador. Um dos questionamentos relacionava demonstrações com o uso do computador e indagava: o computador demonstra ou não?. Na fala dos participantes do estudo nota-se que eles assumem

que o computador faz o pensamento (e conseqüentemente a sua pesquisa) deslanchar. No entanto, afirmam que uma demonstração formal ainda é requerida para atender as exigências de uma comunidade que, historicamente, é reconhecida como Matemática. Ou seja, a matemática produzida com o computador avança em termos de possibilidades de investigação, mas ainda mantém as exigências das características da matemática formal que prova ou valida o descoberto via um determinado tipo de linguagem. (FERREIRA, 2018, p. 166).

Observa-se que há muitas discussões acerca do uso do computador relacionado a produção de verdades matemáticas, mas a partir do que foi exposto neste capítulo, nota-se que utilizar os termos prova e demonstração, para construções realizadas em *softwares* de matemática dinâmica, é delicado. Está claro que os aspectos de uma prova incluem, mas não se limitam a explorações, explicações, justificação de conjecturas e definições, raciocínio empírico, raciocínio diagramático e dispositivos heurísticos. Porém, embora em geral os pesquisadores aceitem uma visão comum da prova, divergem sobre a importância que atribuem a vários de seus aspectos e, particularmente, sobre o grau em que julgam a derivação formal como necessária ou útil para promover a compreensão da Matemática e de seu raciocínio. (HANNA; DE VILLIERS, 2012). Contudo, a comunidade da Educação Matemática precisa repensar constante e fundamentalmente o papel da experimentação e das provas e demonstrações à luz das tecnologias digitais, ambientes de *softwares* dinâmicos e dos avanços simultâneos na ciência cognitiva.

Para Hanna e De Villiers (2012), alguns pesquisadores podem considerar a prova matemática como distinta da argumentação, enquanto outros podem considerar a argumentação e a prova como partes de um continuum e não como uma dicotomia. Seus diferentes pontos de

vista têm importantes implicações didáticas. O primeiro grupo se concentraria principalmente na organização lógica de declarações em uma demonstração e visaria expor uma estrutura conceitual que constrói provas independentemente da resolução de problemas. Por outro lado, o segundo grupo se concentraria principalmente na produção de argumentos no contexto da resolução de problemas, experimentação e exploração, mas esperaria que esses argumentos fossem posteriormente organizados logicamente de modo a formar uma prova matemática válida.

Para muitos dos pesquisadores aqui apresentados, os ambientes computacionais dinâmicos podem até abrir novas perspectivas de investigações, contribuindo para a compreensão de propriedades matemáticas, mas ainda se mantém as exigências das características de uma matemática formal nas demonstrações, baseada no sistema axiomático. Portanto, compreender a relação entre um discurso racional que não é necessariamente dedutivo, mas usa argumentos plausíveis; e uma cadeia de inferências dedutivas bem organizadas que usa argumentos de necessidade, e que se dá o nome de demonstração matemática, pode ser essencial no processo de ensino e aprendizagem que visam as provas e demonstrações.

CAPÍTULO 4

Recebi uma carta de uma jovem que estava fazendo uma tese científica sobre minhas histórias infantis. A pobrezinha me escreveu uma carta, pedindo que eu respondesse um questionário. Ela, certamente nas mãos de um orientador científico, possuído pelo dogma do método, me colocava duas perguntas que me fizeram sorrir/chorar. Primeira pergunta: “Qual a teoria que o senhor usa para escrever suas histórias?” Segunda pergunta: “Qual o método que o senhor usa para escrever suas histórias?” Aí eu tive de contar para ela que muitas coisas nesse universo, muitas mesmo, nos chegam sem que as pesquemos com as redes da ciência.

(ALVES, 1999, p. 1)

METODOLOGIA DE PESQUISA E PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Neste capítulo, apresento e discuto alguns aspectos da metodologia de pesquisa qualitativa e dos procedimentos metodológicos empregados neste estudo. Detalho os procedimentos adotados na produção dos dados, destaco fatores relevantes que ocorreram e apresento os participantes e as fontes que compõem os dados da pesquisa com o propósito de elucidar e explicitar os fios condutores que teceram meu raciocínio articulador durante esta investigação e que a sustentam a tese (BICUDO, 1993).

4.1 Abordagem metodológica – Delimitando a pesquisa

Considerando a natureza da questão de pesquisa *Como ocorre o processo de construção de narrativas matemáticas por um grupo de pós-graduandos em Educação Matemática ao explorarem problemas da História da Matemática com o GeoGebra?* e o conjunto de práticas interpretativas (DENZIN; LINCOLN, 2005) propostas, esta tese foi desenvolvida segundo a abordagem qualitativa.

De acordo com Bicudo (2012, p. 116) a concepção qualitativa “[...] engloba a ideia do subjetivo, passível de expor sensações e opiniões.”, tendo ainda lhe sido atribuída significados que envolvem aspectos comparáveis de experiências, considerando as percepções de diferenças e semelhanças em relação a tais aspectos (BICUDO, 2012).

Bogdan e Biklen (1994, p. 50) argumentam que pesquisadores qualitativos “não recolhem dados ou provas com o objetivo de confirmar ou infirmar hipóteses construídas previamente; ao invés disso, as abstrações são construídas à medida que os dados particulares que foram recolhidos se vão agrupando.”. Tais autores ainda afirmam que

O objetivo dos investigadores qualitativos é o de melhor compreender o comportamento e experiência humanos. Tentam compreender o processo mediante o qual as pessoas constroem significados e descrever em que consistem estes mesmos significados. Recorrem à observação empírica por considerarem que é em função de instâncias concretas do comportamento humano que se pode refletir com maior clareza e profundidade sobre a condição humana. (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p. 70).

Dessa forma, a análise dos dados é realizada de forma indutiva pelos pesquisadores, revelando “[...] maior preocupação pelo processo e significado, não pelas suas causas e efeitos.” (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p. 209) e mantendo “[...] um foco na aprendizagem do significado que os participantes dão ao problema ou questão e não ao significado que os pesquisadores trazem para a pesquisa ou que os autores expressam na literatura.” (CRESWELL, 2010, p. 209), evitando assim um enviesamento.

Considerando que o processo e o significado são preocupações da pesquisa qualitativa, vale mencionar que a representação numérica do grupo pesquisado não é vista como tal. As atenções e cuidados estão focados no aprofundamento da compreensão desse grupo, seja ele social, organizacional, institucional, uma trajetória, entre outros aspectos. (GOLDENBERG, 2004).

A pesquisa qualitativa possui uma dimensão interpretativa, podendo assumir diferentes formas, “[...] ser adaptada para diferentes tipos de projetos e ser flexível para comunicar significados pessoais, baseados na pesquisa e na ação.” (CRESWELL, 2010, p. 224). Contudo, pesquisadores qualitativos como Araújo e Borba (2004) e Skovsmose e Borba (2004) destacam a importância de consonância entre os métodos de pesquisa e as perspectivas teóricas adotadas.

Nos estudos qualitativos, o design da pesquisa está relacionado às estratégias utilizadas pelo pesquisador para alcançar elementos que levem às interpretações em torno do objetivo proposto. O design emerge à medida que a pesquisa avança, dinamizando seu desenvolvimento. Assim, os processos de condução podem ser refinados, e os entendimentos e perspectivas teóricas podem ser fundamentados pelos dados produzidos. (LINCOLN; GUBA, 1985; ARAÚJO; BORBA, 2012).

Em síntese, Garnica (2012, p. 99) compreende que o adjetivo “qualitativa” é adequado às investigações que reconhecem:

(a) a transitoriedade de seus resultados; (b) a impossibilidade de uma hipótese *a priori*, cujo objetivo da pesquisa será comprovar ou refutar; (c) a não neutralidade do pesquisador que, no processo interpretativo, vale-se de suas perspectivas e filtros vivenciais prévios dos quais não consegue se desvencilhar; (d) que a constituição de suas compreensões dá-se não como resultado, mas numa trajetória em que essas mesmas compreensões e também os meios de obtê-las podem ser (re)configuradas; e (e) a impossibilidade de estabelecer regulamentações, em procedimentos sistemáticos, prévios, estáticos e generalistas.

O autor ainda destaca, que aceitar esses pressupostos é reconhecer que até eles podem ser reconfigurados conforme o desenvolvimento das pesquisa (GARNICA, 2012) e, Borba (2004, p. 2) ressalva que tais características “[...] não devem ser vistas como regras, visto que, de forma recursiva, o próprio entendimento do que é pesquisa qualitativa está em movimento e as noções [...] levam a ênfases diferentes.”. Assim, entendo que a pesquisa qualitativa permite o envolvimento do pesquisador com a investigação. Para tanto, é necessário traçar um caminho para que isso ocorra, considerando os aspectos que caracterizam a pesquisa qualitativa, bem como seu objeto e objetivo, o que foi realizado neste estudo.

4.2 O cenário de investigação

A produção dos dados desta pesquisa teve como cenário de investigação a disciplina Gênese do Pensamento Diferencial oferecida no primeiro semestre de 2019 de forma concomitante pelo Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” (UNESP), Campus Rio Claro e pelo Programa de Pós-Graduação Ensino e Processos Formativos³⁹, interunidades, também da UNESP. Dessa forma, participaram da disciplina, e conseqüentemente da pesquisa, alunos regularmente matriculados no mestrado e doutorado, e alunos especiais⁴⁰ dos programas de pós-graduação da referida instituição.

A disciplina teve como objetivo compreender as práticas matemáticas vigentes no século XX e suas perspectivas futuras, tomando como articulação a psicogênese e a sociogênese do pensamento diferencial. Foram realizadas releituras e aplicabilidades para problemas clássicos da História da Matemática baseados nos estudos propostos por Baron (1985a, 1985b, 1985c, 1985d, 1985e), Baron (1987), Bicudo (2009), Boyer (1974), Edwards (1979) e Struik (1986), tais como a concepção dos números figurados, indivisíveis, irracionais, paradoxos de Zenão, a axiomatização da Matemática grega, quadratura do círculo e da parábola, método da exaustão, cálculo de áreas, métodos de Arquimedes, entre outros.

Parte da avaliação da disciplina se deu por meio de um trabalho em grupo que foi apresentado ao final do semestre. Para esse trabalho final, foi solicitado pelo docente da

³⁹ Esse programa de pós-graduação, que se apresenta como ‘interunidades’, envolve a Faculdade de Ciências Agrárias e Veterinárias (FCAV) do campus de Jaboticabal, a Faculdade de Engenharia do campus de Ilha Solteira (FEIS) e o Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas (IBILCE) do campus de São José do Rio Preto. As disciplinas ocorrem de forma concomitante nos campi, utilizando os equipamentos de vídeo conferência em cada unidade.

⁴⁰ Alunos especiais são aqueles matriculados em disciplinas isoladas, sem vínculo com um programa de pós-graduação.

disciplina, que os grupos escolhessem um problema da História da Matemática, baseando-se na bibliografia proposta na disciplina, e o explorassem utilizando o *software* GeoGebra. Os discentes se dividiram em cinco grupos e foram escolhidos os seguintes problemas: *Área da Elipse* (EDWARDS, 1979); *Espiral de Arquimedes* (EDWARDS, 1979); *Princípio de Cavalieri* (BOYER, 1974); *Quadratura da Parábola por Arquimedes* (EDWARDS, 1979); e *Quadratura da Parábola por Torricelli* (BARON, 1987).

Este estudo toma como dados as ações dos grupos que abordaram o problema da *Quadratura da Parábola por Arquimedes* e a *Espiral de Arquimedes*⁴¹. A escolha pelos dados produzidos por esses grupos se deu pela facilidade em acompanhar presencialmente seus encontros, visto que os integrantes de ambos se reuniam, para estudos e preparação do trabalho, nas dependências da UNESP campus Rio Claro, viabilizando minha presença física neles.

Tive a oportunidade de acompanhar presencialmente três encontros realizados pelo grupo que optou por explorar a *Quadratura da Parábola*, dois encontros do grupo que escolheu como tema a *Espiral* e todas as aulas da disciplina. Cada encontro dos grupos durou em média 2 (duas) horas, já as aulas da disciplina ocorreram semanalmente durante um semestre letivo de 2019 com duração média de 4 (quatro) hora cada. Todos esses encontros foram filmados e gravados, e notas de campo, registros de interações assíncronas (uso de grupos no *WhatsApp*⁴²), construções e simulações criadas pelos grupos, um artigo escrito por eles sobre o problema escolhido e filmagens e gravações das apresentações dos trabalhos compõem as fontes de dados desta pesquisa e são descritos a seguir.

4.3 Fontes de dados e triangulação

Nas investigações qualitativas é comum que pesquisadores adotem diferentes procedimentos para a produção dos dados. A multiplicidade de procedimentos pode proporcionar “diferentes visões de objetos semelhantes” (ARAÚJO; BORBA, 2012, p. 36) e contribuir para a confiabilidade e credibilidade da pesquisa a partir da triangulação (ALVES-MAZZOTTI, 1999).

Desse modo, para investigar o processo de construção de narrativas matemáticas em um cenário envolvendo problemas da História da Matemática (*Quadratura da Parábola* e *Espiral*)

⁴¹ A partir desse momento vou me referir aos problemas utilizando apenas a expressão *Quadratura da Parábola* e a palavra *Espiral*.

⁴² *WhatsApp* – Aplicativo multiplataforma de mensagens instantâneas e chamadas de voz para *smartphones* – Site Oficial: <https://www.whatsapp.com/>

e o uso de tecnologias digitais, adotei como procedimentos e instrumentos para produção dos dados, como mencionado: (a) a observação participante, filmagem e gravação dos encontros; (b) diário de campo; (c) registros de interações no *WhatsApp* e; (d) construções no GeoGebra e artigo final escrito pelos grupos.

4.3.1 Observação participante, filmagem e gravação dos encontros

Segundo Bogdan e Blikien (1992), a investigação qualitativa segue um caráter descritivo. Sendo assim, os dados produzidos não são números, mas sim palavras ou imagens, que assumem particular importância tanto para o registro dos dados como para sua apresentação e análise. Tais autores também mencionam que as pesquisas qualitativas, de forma geral, recorrem a métodos de produção de dados de forma empírica, sendo a observação um deles.

A observação é a percepção consciente e o exame detalhado do comportamento de indivíduos em um ambiente (COWIE, 2009). Em observações qualitativas, o pesquisador pode assumir diferentes papéis, sendo eles o de participante completo, ocultando sua posição de pesquisador; o de observador participante, expondo sua posição de pesquisador; o de participante observador, deixando seu papel como observador em segundo plano e; o de observador completo, que só observa sem qualquer participação e/ou interação (COWIE, 2009; CRESWELL, 2010).

Nesta pesquisa fui uma observadora participante, em decorrência de ter me colocado como pesquisadora em primeiro plano durante a produção dos dados e de ter interagido com os participantes da investigação. Como as palavras observação e participante sugerem, essa classificação envolve observar e participar de um determinado contexto concomitantemente. A participação não significa necessariamente tomar parte na atividade que esteja acontecendo. Em vez disso, significa interagir com as pessoas enquanto elas estão realizando tais atividades. A observação pode ajudar pesquisadores a literalmente olharem para o que está acontecendo ao seu redor e dar-lhes importantes percepções sobre aspectos externos e inerentes aos participantes. (COWIE, 2009).

Devemos considerar que não há dados sem interpretação e que observações podem, naturalmente, serem distorcidas ou imprecisas. Logo, é necessário um cuidadoso procedimento metodológico durante a produção dos dados, e que ao produzir a narrativa sobre eles, o pesquisador (observador participante) torne o mais explícito possível sua perspectiva e subjetividade, a fim de contar o que aconteceu e como aconteceu. Nesse sentido, filmagens e gravações têm sido utilizadas como procedimentos metodológicos para registrar as observações,

permitindo que expressões e linguagens corporais possam ser percebidas posteriormente pelo pesquisador ao analisar as gravações realizadas. (SKOVSMOSE; BORBA, 2004).

De acordo com Powell, Francisco e Maher (2004), as gravações de sons e imagens tem se transformado em uma importante ferramenta para pesquisadores em Educação Matemática e com isso se “têm produzido descrições fascinantes de professores e estudantes em cenários clínicos e de sala de aula envolvidos numa matriz de tarefas matemáticas.” (POWELL; FRANCISCO; MAHER, 2004, p. 4). Os autores argumentam que gravar as observações oferece aos pesquisadores a possibilidade de assistir repetidamente aos vídeos e realizar interpretações sob múltiplas perspectivas, permitindo “um exame em profundidade do desenvolvimento do trabalho matemático e do pensamento matemático dos mesmos estudantes depois de vários anos, assim como o estudo e análise do crescimento cognitivo de estudantes individuais no cenário de um grupo social.” (POWELL; FRANCISCO; MAHER, 2004, p. 10). No caso desta investigação, as gravações ocupam um lugar de destaque, visto que na ausência delas o entendimento do processo de construção dos grupos, por meio do GeoGebra, e de estudos analíticos, usando o quadro e giz, certamente seria prejudicado.

De acordo com Cowie (2009), em estudos qualitativos é raro ver a observação sendo utilizada como procedimento exclusivo durante a produção dos dados. Muitas vezes ela vem acompanhada de outros procedimentos, como entrevistas, questionários, diários de campo e materiais diversos que buscam fornecer informações importantes sobre os participantes, seus comportamentos e ações durante a atividade proposta na investigação.

4.3.2 Diário de campo

Para dados de pesquisa produzidos por meio de observação, anotações em um diário de campo são fundamentais. Enquanto observa o ambiente em que a pesquisa foi proposta, o pesquisador faz anotações detalhadas sobre o local, comportamentos e interações que ocorrem entre os participantes. (COWIE, 2009). Nessas anotações, “o pesquisador registra, de uma maneira não estruturada ou semiestruturada (usando algumas questões anteriores que o investigador quer saber), as atividades no local da pesquisa.” (CRESWELL, 2010, p. 214), realizando inferências que podem se constituir em uma pré-análise.

Para Hood (2009), registrar as experiências dos participantes, no momento da observação, e realizar uma interpretação a priori de seus atos, são relevantes para pesquisadores qualitativos e possibilitam o surgimento de novos questionamentos. Dessa forma, à medida que criam esses registros e pensam sobre eles, os pesquisadores acrescentam seus próprios

pensamentos e reflexões, criando descrições detalhadas dos participantes e suas ações (CROKER, 2009).

4.3.3 Registros de interações no WhatsApp

Além dos registros das gravações e dos realizados no diário de campo, faz parte dos dados dessa pesquisa mensagens trocadas no *WhatsApp*, um aplicativo de mensagens instantâneas e chamadas de voz para *smartphones*. Nesse aplicativo, além de mensagens de texto, os usuários podem enviar imagens, áudios, vídeos e documentos em PDF, além de fazer ligações grátis por meio de uma conexão com a internet.

De acordo com Ferreira (2019) e Fontes (2019), o uso do *WhatsApp* se mostra uma conveniente e oportuna ferramenta de comunicação (síncrona e assíncrona) e de registro de fonte de dados. O aplicativo permite a troca de mensagens e a comunicação à distância dos participantes da pesquisa, possibilitando diálogos e discussões dos temas para além de um espaço físico compartilhado.

Neste estudo, o *WhatsApp* foi utilizado pelos participantes para trocas de ideias e materiais relacionados aos problemas de investigação escolhidos. Cada grupo de trabalho (*Quadratura da Parábola e Espiral*) tinha um respectivo grupo no aplicativo que continha seus integrantes e eu como pesquisadora. A comunicação pelo *WhatsApp* também favoreceu a programação e planejamento dos encontros presenciais realizados pelos grupos.

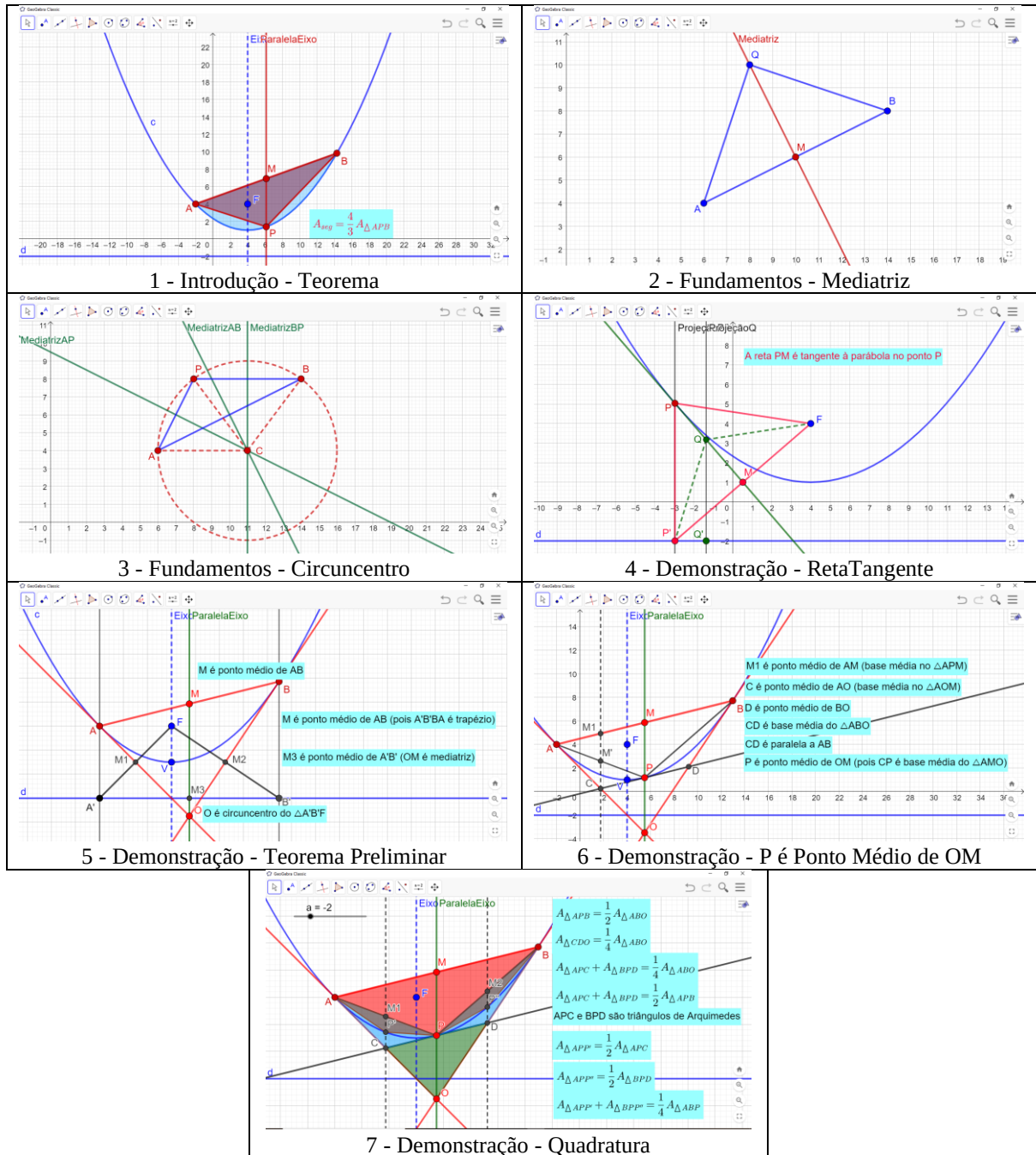
É importante ressaltar que, a cada semana, eram realizados *backups* das informações compartilhadas nos grupos, garantindo assim a preservação dos dados diante de eventuais falhas e instabilidade em meu dispositivo móvel.

4.3.4 Construções no GeoGebra e Artigo escrito pelos grupos

Ainda associado às fontes de dados, pesquisadores qualitativos (POWELL; FRANCISCO; MAHER, 2004; PIRIE, 1996; LESH; LEHRER, 2000) têm recomendado, além das já citadas fontes, agregar trabalhos e documentos escritos pelos participantes da pesquisa às fontes de dados, de maneira a possibilitar uma análise mais inclusiva das atividades realizadas. Nesse sentido, as construções realizadas pelos grupos no *software* GeoGebra também compõem os dados desta pesquisa, bem como um artigo escrito por eles relacionado à temática escolhida.

O grupo que escolheu trabalhar com a *Quadratura da Parábola* realizou sete construções no GeoGebra para explorar o problema e o Quadro 4 apresenta uma prévia (miniaturas) de imagens dessas construções com seus respectivos títulos.

Quadro 4 – Construções realizadas pelo grupo para exploração da Quadratura da Parábola⁴³

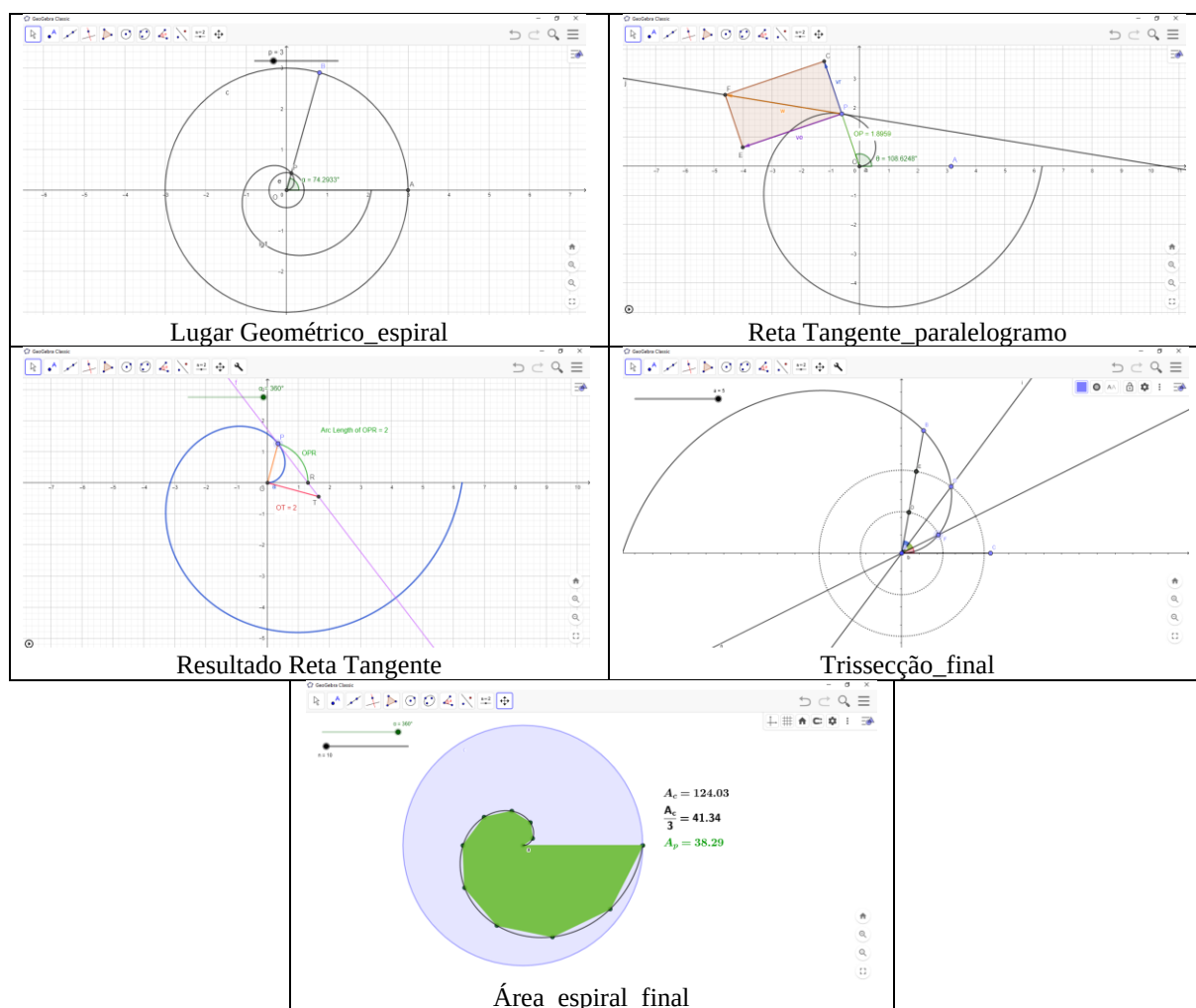


⁴³ As legendas correspondem aos nomes dos arquivos (.ggb) definidos pelo grupo.

O artigo⁴⁴ escrito por esse grupo é composto por dezoito páginas, leva o título *Quadratura da Parábola: um estudo do método apresentado por Arquimedes* e é organizado⁴⁵ em 7 seções, a saber: Introdução; Contexto histórico; Desenvolvimento; Protocolo final da demonstração; Conclusões e; Referências.

Já o grupo que escolheu trabalhar com a *Espiral*, realizou cinco construções no GeoGebra para explorar o problema e o Quadro 5 apresenta uma prévia (miniaturas) de imagens dessas construções com seus respectivos títulos.

Quadro 5 – Construções realizadas pelo grupo para exploração da Espiral⁴⁶



Fonte: Dados da Pesquisa – Capturas de tela do GeoGebra

O artigo escrito por esse grupo é composto por quatorze páginas, leva o título *Movimento Ascendente: A Espiral de Arquimedes* e é organizado em 7 seções, a saber: Apresentação; uma breve introdução; Geometria grega e a Espiral de Arquimedes; Reta

⁴⁴ Vale destacar, que a escrita e entrega do artigo fizeram parte das atividades avaliativas da disciplina e foram solicitadas pelo docente responsável.

⁴⁵ Não houve um modelo prévio a ser seguido.

⁴⁶ As legendas correspondem aos nomes dos arquivos (.ggb) definidos pelo grupo.

tangente e a Espiral de Arquimedes; Trissecção do ângulo utilizando a Espiral de Arquimedes; Espiral de Arquimedes e Áreas; Considerações finais e; Referências.

Uma análise detalhada das construções e do conteúdo dos artigos, encadeada com uma análise dos demais dados provenientes das demais fontes, é realizada no capítulo *Análise e Discussão dos dados*. A seguir apresento aspectos da triangulação, que tem por objetivo articular os múltiplos procedimentos de fontes de dados apresentados anteriormente e que contribui para a confiabilidade desta pesquisa (ARAÚJO; BORBA, 2012).

4.3.5 A triangulação

A expressão triangulação é uma metáfora adotada pelos pesquisadores e que é utilizada como estratégia militar e de navegação para indicar o uso de múltiplos pontos de referência para localizar um objeto (GOLDENBERG, 2004).

Como já mencionei, pesquisadores qualitativos (BICUDO, 2012; BOGDAN; BIKLEN, 1994; BORBA, 2004; DENZIN; LINCOLN, 2005; GARNICA, 2012;) não buscam objetivos unitários, ou verdades verificáveis. Em vez disso, eles se concentram nos significados que as pessoas atribuem à experiência e às realidades que constroem para dar sentido ao mundo. Dessa forma, Hood (2009) argumenta que a triangulação decorrente de investigações qualitativas não é confirmativa, ela é utilizada com o propósito de obter uma visão mais ampla e profunda possível da questão de pesquisa considerando diferentes perspectivas. Sendo assim, é possível que pessoas diferentes possam ter experiências distintas em um mesmo evento, construir diferentes explicações, tirar diferentes conclusões e com isso construir narrativas singulares sobre tais vivências (HOOD, 2009).

Assim, corroborando Heigham e Sakui (2009) e Denzin e Lincoln (2005) considero que a triangulação das fontes de dados pode conduzir o pesquisador a novas percepções, revelando visões multifacetadas do problema de pesquisa e contribuindo para o aprofundamento da compreensão do fenômeno.

4.4 Os participantes e suas escolhas

Como já mencionado, os participantes e colaboradores da produção dos dados deste estudo foram discentes da disciplina Gênese do Pensamento Diferencial oferecida de forma concomitante por dois programas de pós-graduação da UNESP. Destaco que todos os discentes da disciplina receberam uma carta de informação sobre a pesquisa e assinaram uma carta de

consentimento e autorização para participação na produção de dados da mesma⁴⁷. A seguir, descrevo os grupos envolvidos nesta investigação, bem como apresento os problemas da História da Matemática que compõem os dados.

4.4.1 Grupo 1 – A Quadratura da parábola por Arquimedes

O Grupo 1 foi composto por seis integrantes, entre eles três estudantes de doutorado, duas de mestrado e um aluno especial. O problema escolhido para compor o trabalho final desse grupo foi a *Quadratura da Parábola* a partir da abordagem de Arquimedes, apresentada em Edwards (1979) e entrelaçada com os estudos de Santos (2014). O problema é enunciado da seguinte forma:

Dado um segmento parabólico com base AB (Fig. 6), o ponto P do segmento que está mais distante da base é chamado de vértice do segmento, e a distância (perpendicular) de P a AB é sua altura.

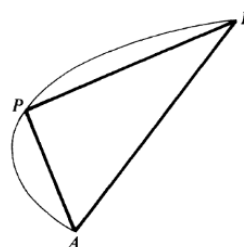


Figure 6

Arquimedes mostrou que a área do segmento é quatro terços da área do triângulo APB inscrito. Ou seja, a área de um segmento de uma parábola é $\frac{4}{3}$ vezes a área de um triângulo com a mesma base e altura. (EDWARDS, 1979, p. 36-37, tradução nossa)⁴⁸.

Segundo o grupo, a motivação para a escolha desse problema, se deu a partir da possibilidade de explorar sua dinamicidade no GeoGebra. O caminho para tal escolha teve início na consulta de problemas que constavam nas referências bibliográficas disponibilizadas no programa da disciplina. Dessa forma, três problemas foram elencados: *Quadratura da parábola*, *Área da Elipse* e *Espiral de Arquimedes*. Considerando tais possibilidades, o grupo realizou a leitura de cada um deles com o objetivo de compreender suas demonstrações e, com isso, considerarem sobre a viabilidade para a construção no GeoGebra.

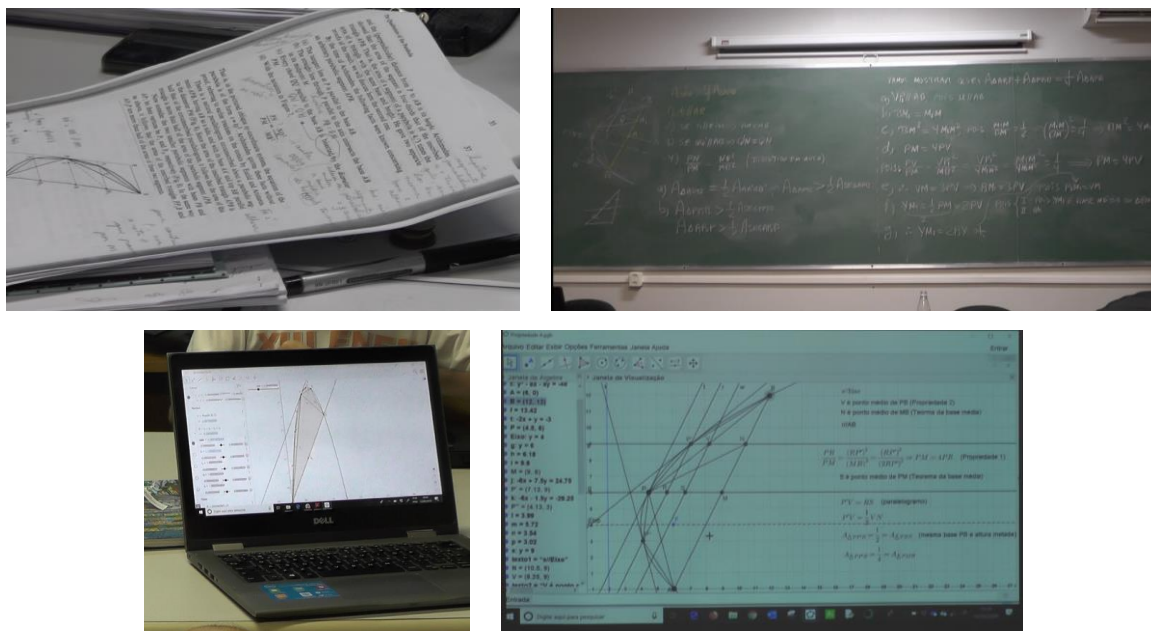
Após essa análise, o grupo optou por investigar a *Quadratura da Parábola*, justificando que a demonstração desse problema era familiar aos integrantes do grupo, visto que apresentava

⁴⁷ Os modelos da Carta de Informação e da Carta de Consentimento e Autorização podem ser vistos nos Apêndices A e B respectivamente.

⁴⁸ Given a parabolic segment with base AB (Fig. 6), the point P of the segment that is farthest from the base is called the vertex of the segment, and the (perpendicular) distance from P to AB is its height. Archimedes showed that the area of the segment is four-thirds that of the inscribed triangle APB. That is, the area of a segment of a parabola is $\frac{4}{3}$ times the area of a triangle with the same base and height.

uma ideia similar à demonstração da *Quadratura do Círculo*, a qual havia sido investigada durante um dos encontros da disciplina de Gênese. Além disso, o grupo justificou que a demonstração do problema escolhido poderia proporcionar maior exploração da dinamicidade do *software*. A Figura 2 apresenta alguns momentos de trabalho do grupo. A demonstração do problema, apontada em Edwards (1979), pode ser vista no Anexo A e sua tradução no Anexo B.

Figura 2 – Momentos de trabalho do Grupo 1



Fonte: Dados da Pesquisa – Capturas de tela das gravações

Os estudos de Assis (2008) e Roque (2012) apontam que as obras de Arquimedes começaram a ser impressas no século XVI e o tratado contendo a *Quadratura da Parábola* foi publicado em 1503. Arquimedes explorou e demonstrou o problema de duas formas, primeiro por meio da mecânica, utilizando a lei da alavanca, e posteriormente por meio da geometria. Seu objetivo “[...] era defender um método que permitisse entender certas realidades matemáticas por meio da mecânica, ainda que esse método possibilitasse apenas a descoberta de propriedades que deveriam ser, em seguida, demonstradas geometricamente.” (ROQUE, 2012, p. 198) protegendo-se assim de possíveis críticas que poderiam surgir do meio geométrico da época.

O grupo optou por utilizar a primeira ideia desenvolvida por Arquimedes (quadratura mecânica), e apoiado em Santos (2014) expressam que três pontos são essenciais para a demonstração: (i) Teorema⁴⁹ que aborda o eixo de simetria de uma parábola e retas paralelas a

⁴⁹ Sejam A e B dois pontos de uma parábola e O o ponto de interseção entre as retas tangentes à parábola passando por esses pontos. A reta que passa pelo ponto O e é paralela ao eixo da parábola passa pelo ponto médio do segmento AB. (SANTOS, 2014, p. 35).

ele; (ii) Propriedades elementares de uma parábola; e (iii) Triângulos construídos por retas tangentes e segmentos internos à parábola.

No capítulo *Análise e Discussão dos dados* descrevo e analiso o movimento realizado pelo grupo para a exploração da *Quadratura da Parábola* no GeoGebra.

4.4.2 Grupo 2 – A Espiral de Arquimedes

O Grupo 2 foi composto por quatro integrantes, todas elas alunas de doutorado. O problema escolhido para compor o trabalho final desse grupo foi a *Espiral*, a partir da abordagem de Arquimedes, apresentada em Edwards (1979) e entrelaçada com estudos de Aguiar, Aguiar e Siqueira (2013). O problema é enunciado da seguinte forma:

Se uma reta desenhada em um plano gira a uma taxa uniforme em torno de uma extremidade que permanece fixa e retorna à posição de onde começou, e se, ao mesmo tempo que a reta gira, um ponto se move a uma taxa uniforme ao longo da reta começando da extremidade que permanece fixa, o ponto descreverá uma espiral no plano

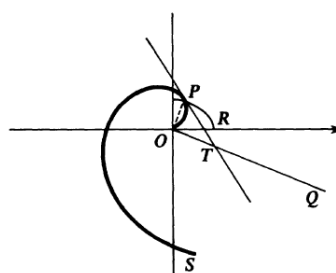
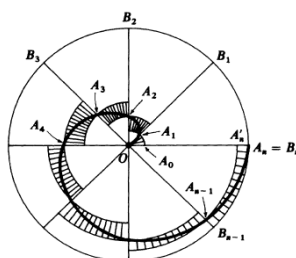


Figure 24

(EDWARDS, 1979, p. 55-56, tradução nossa)⁵⁰.

Segundo as integrantes, o critério de escolha partiu por folhear as referências propostas na disciplina e buscar por imagens que julgassem interessantes. A imagem que chamou a atenção do grupo e foi considerada bela e interessante é apresentada na Figura 3.

Figura 3 – Espiral de Arquimedes



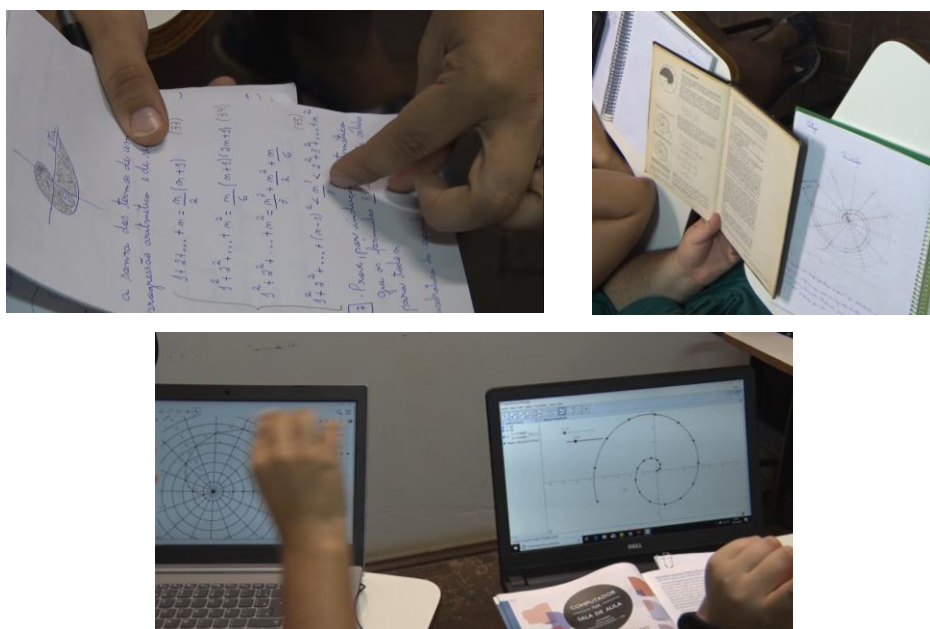
Fonte: Edwards (1979)

⁵⁰ If a straight line drawn in a plane revolve at a uniform rate about one extremity which remains fixed and return to the position from which it started, and if, at the same time as the line revolves, a point move at a uniform rate along the straight line beginning from the extremity which remains fixed, the point will describe a spiral in the plane.

A ideia do belo está ligada à organização da realidade, do que se dá sentido e prazer, não tendo a necessidade de ser traduzido ou explicado em palavras, mesmo que isto possa ser feito. O belo está na coisa e no olhar, ele pode nos alegrar e agradar, mas também pode assustar e consternar (BOAL, 2008). Japiassú e Marcondes (2006, p. 25) afirmam que “todo belo é o resultado de uma apreciação, de um juízo de gosto subjetivo, isto é, pressupõe que não haja nada para ser conhecido”. Nesse sentido, considero que o grupo seguiu por uma abordagem Estética⁵¹ para a escolha do problema.

A Figura 4 apresenta alguns momentos de trabalho do grupo. A demonstração do problema, apontada em Edwards (1979), pode ser vista no Anexo E e sua tradução no Anexo F.

Figura 4 – Momentos de trabalho do Grupo 2



Fonte: Dados da Pesquisa – Capturas de tela das gravações

Arquimedes não foi o primeiro a estudar e descrever matematicamente a espiral, porém, foi um dos primeiros a apresentar um estudo contrapondo as descrições essencialmente estáticas apresentadas até então. Ele a define como uma composição de um movimento radial uniforme e um movimento circular uniforme, envolvendo ainda a ideia de variabilidades. Ou seja, é uma curva traçada por um ponto em movimento. (BOYER, 1974; SOARES, 2014).

A partir da definição e da construção da espiral, o grupo também explorou outros três problemas que Arquimedes desenvolveu em seu tratado: (i) A reta tangente à curva; (ii) A

⁵¹ Me refiro ao termo Estética criado pelo filósofo e educador alemão Baumgarten (1714 – 1762) no século XVIII para designar o estudo da sensação e “a ciência do belo” (JAPIASSÚ; MARCONDES, 2001). Segundo Boal (2008, p. 26), “Baumgarten define a Estética com sendo a *Ciência do Conhecimento Sensível*, isto é, a organização sensorial do caos”.

trisseção do ângulo e; (iii) O cálculo de áreas. Os movimentos realizados pelos grupos para a exploração dos problemas no GeoGebra são descritos e analisados no capítulo *Análise e Discussão dos dados*.

4.5 Método de descrição e análise dos dados

Ludke e Andre (1986, p. 41) apoiados em Patton (1980) expressam que “a análise de dados qualitativos é um processo criativo que exige grande rigor intelectual e muita dedicação. Não existe uma forma melhor ou mais correta. O que se existe é sistematização e coerência do esquema escolhido com o que pretende o estudo.”. Bogdan e Biklen (1999), comparam o processo de análise dos dados com um funil. Segundo esses autores, as ideias estão abertas no início e vão se afunilando, tornando-se mais fechadas e específicas. Esses autores defendem que análise dos dados

[...] é o processo de busca e de organização sistemático de transcrições de entrevistas, de notas de campo e de outros materiais que foram sendo acumulados, com o objetivo de aumentar a sua própria compreensão desses mesmos materiais e de lhe permitir apresentar aos outros aquilo que encontrou. (BOGDAN; BIKLEN, 1999, p. 205).

Assim como Bogdan e Biklen (1999, p. 84), entendo que a “análise dos dados verifica-se ao longo de toda a investigação”, visto que acontecimentos e ações considerados interessantes e relevantes para o escopo da pesquisa vão sendo observados e descobertos, ecoando até a fase final da pesquisa. Para a fase final de análise de dados, tais autores sugerem a criação de um sistema de codificação, em que se deve percorrer todos os dados produzidos em busca de regularidades e padrões, e em seguida indicar palavras e expressões que representem tais tópicos, gerando assim categorias de codificação.

O método de codificação proposto por Bogdan e Biklen (1999) foi adotado na análise dos dados desta pesquisa, assim como o modelo de análise de vídeos proposto por Powell, Francisco e Maher (2004), que é composto por sete procedimentos que são empregados de forma interativa e não lineares.

Tais procedimentos são: Observação dos dados, em que o pesquisador deve assistir as gravações diversas vezes e se familiarizar com os dados; Descrição dos dados, momento em que se deve descrever os dados das filmagens em determinados períodos de tempo; Identificação de eventos críticos, destinado a identificar momentos significativos das filmagens e considerados críticos, de acordo com os interesses de pesquisa; Transcrição, em que se busca transcrever os momentos críticos (falas ou acontecimentos) considerados relevantes para a

pesquisa; Codificação, momento de elaborar notações para os participantes e elementos que compõem as transcrições; Criação do enredo, atribuído a interpretação dos dados conectando os eventos críticos, as transcrições e as codificações gerando enredos, e Composição da narrativa, em que se propõe a composição de uma narrativa final, conectando os enredos e suas interpretações.

Tais perspectivas analíticas foram pertinentes ao objetivo proposto desta pesquisa e momentos críticos observados durante os encontros dos grupos, bem como durante a apresentação final dos trabalhos foram transcritos. Contudo, os dados descritos e analisados no próximo capítulo contêm, além de transcrições, ilustrações da tela do GeoGebra e capturas das filmagens.

CAPÍTULO 5

Como eu irei dizer agora, esta história será o resultado de uma visão gradual – há dois anos e meio venho aos poucos descobrindo os porquês. É visão da iminência de. De quê? Quem sabe se mais tarde saberei. (LISPECTOR, 1998, p. 12)

ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS DADOS

Como já mencionado no capítulo anterior, os dados desta pesquisa são provenientes de observações participante, filmagem e gravação dos encontros, diário de campo, registros de interações no *WhatsApp*, construções no GeoGebra e artigo final escrito pelos grupos. Considero que esses dados podem ser divididos em duas categorias. Uma que me permite a análise a partir de produtos finais, em que destaco as construções realizadas no GeoGebra⁵², o artigo final⁵³ e a apresentação do trabalho; e uma outra que me permite uma análise sistemática em relação ao tempo e a sequência das ações e tomadas de decisão, no caso das gravações dos encontros, das interações no *WhatsApp*, e das minhas anotações no diário de campo. A partir de uma articulação e triangulação entre essas fontes de dados, busco uma resposta (ou respostas) à pergunta que direciona este estudo: *Como ocorre o processo de construção de narrativas matemáticas por um grupo de pós-graduandos ao explorarem problemas da História da Matemática com o GeoGebra?*.

Apresento, nas subseções seguintes, discussões acerca das ações dos grupos frente à resolução da atividade proposta. As subseções estão divididas considerando os problemas explorados: Quadratura da Parábola e Espiral.

5.1 Investigando o problema da Quadratura da Parábola

No capítulo anterior, apresentei uma breve explicação sobre como se deu a composição do grupo e o problema que foi por eles escolhido para a investigação. Agora, relato a partir de uma ordem cronológica, as ações do grupo e como eles se articularam em busca de uma resolução para a atividade. Ao longo do relato trago trechos de falas e diálogos, extraídos das

⁵² Os arquivos *.ggb* das construções podem ser encontrados em:

Grupo 1 – Quadratura: https://drive.google.com/drive/folders/1HezN33TqKdtoo5VDpPql_VpqwL9ruZAn

Grupo 2 – Espiral: <https://drive.google.com/drive/folders/1IWRUkC6VzDruDWhBj0clFpPZYW4-gHw9>

⁵³ Os arquivos *.pdf* dos artigos podem ser encontrados em:

Grupo 1 – Quadratura: <https://drive.google.com/file/d/1qleYphAYZOH1-MKEwcmx-Of4eQ93vwje/view>

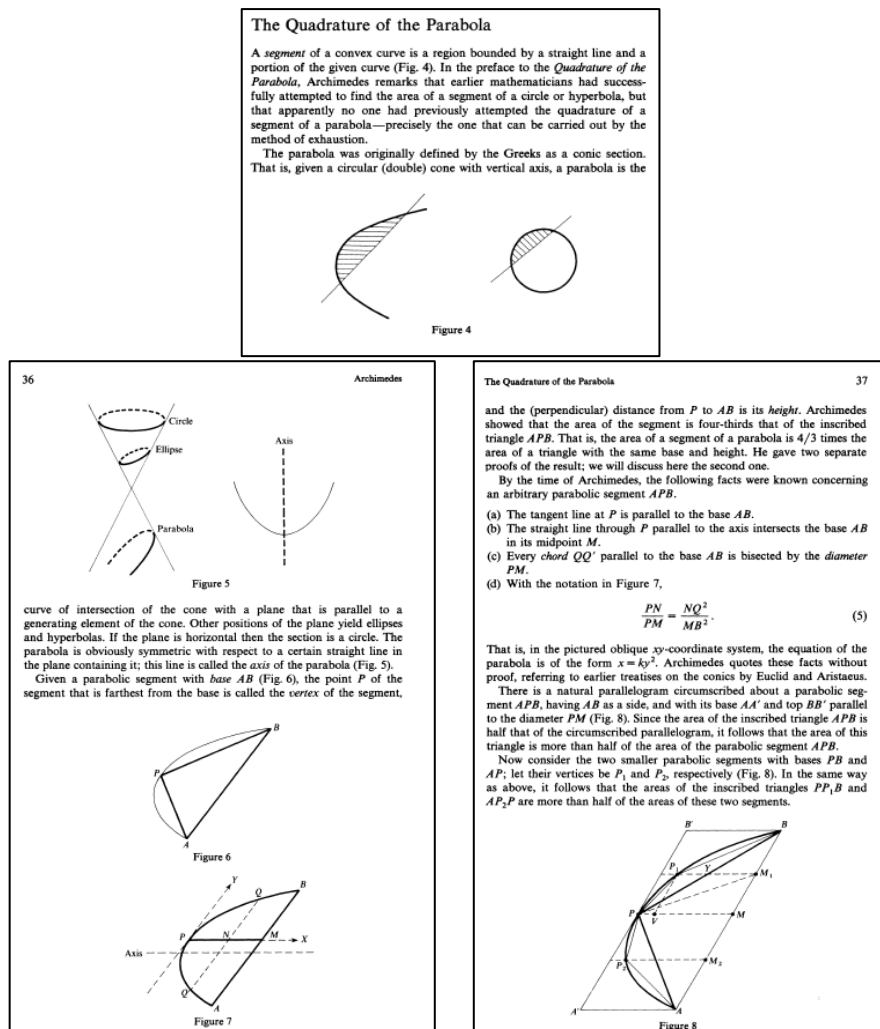
Grupo 2 – Espiral: <https://drive.google.com/file/d/1ptCLoBUrnd9OgQ1FqVTwwiHe7yo2qrZN/view>

gravações e transcritos, que considero significativos para entender o movimento de abordagem e construção do problema.

5.1.1 Encontro 1

Os encontros desse grupo, fora dos horários regulares de aula, se iniciam um mês e meio antes da apresentação final do trabalho. No primeiro encontro, todos portam computadores (*notebooks*) e cópias (em folhas A4) do problema a ser investigado. A Figura 5 apresenta o material estudado pelo grupo nesse encontro e o documento pode ser melhor visualizado no Anexo A desta tese.

Figura 5 – Material estudado pelo Grupo 1



38 Archimedes

We have begun to exhaust the area of the original parabolic segment APB with inscribed polygons. The triangle APB is our first inscribed polygon, and $AP_1P_1P_1B$ is the second. We continue in this way, adding at each step the triangles inscribed in the parabolic segments remaining from the previous step. Since the total area of these inscribed triangles is more than half that of the segments, it follows from Eudoxus' principle that, given $\epsilon > 0$, we obtain after a finite number of steps an inscribed polygon whose area differs from that of the segment APB by less than ϵ .

Now we want to show that the sum of the areas of the triangles AP_1P_1 and P_1P_1B is $\frac{1}{4}$ that of $\triangle APB$. Let M_1 be the midpoint of BM , Y the point of intersection of P_1M_1 and PB , and V the intersection with PM of the line through P_1 parallel to AB . Then

$$BM^2 = 4M_1M^2,$$

so it follows from (5) that

$$PM = 4PV \quad \text{or} \quad P_1M = 3PV.$$

But $YM_1 = \frac{1}{2}PM = 2PV$, so that

$$YM_1 = 2P_1Y.$$

It follows from this that

$$a(\triangle P_1P_1B) = \frac{1}{2}a(\triangle PM_1B) = \frac{1}{4}a(\triangle PMB),$$

applying twice the fact that the ratio of the areas of two triangles with the same base is equal to the ratio of their heights. Similarly

$$a(\triangle AP_1P_1) = \frac{1}{4}a(\triangle APM),$$

so we find that

$$a(\triangle P_1P_1B) + a(\triangle AP_1P_1) = \frac{1}{4}a(\triangle PMB) + \frac{1}{4}a(\triangle APM) = \frac{1}{4}a(\triangle APB)$$

as desired.

In the same way it can be proved that the sum of the areas of the inscribed triangles added at each step is equal to $\frac{1}{4}$ of the sum of the areas of the triangles added at the previous step. If we write

$$a = a(\triangle APB),$$

it follows that the polygon $\mathcal{P}_n$, obtained after n steps has area

$$a(\mathcal{P}_n) = a + \frac{a}{4} + \frac{a}{4^2} + \cdots + \frac{a}{4^n}. \quad (6)$$

Consequently, given $\epsilon > 0$, the area $a(\mathcal{P}_n)$ of the parabolic segment

The Quadrature of the Parabola 39

differs from the right-hand side of (6) by less than ϵ if n is sufficiently large.

At this point Archimedes derives the elementary identity

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^n} = \frac{4}{3}. \quad (7)$$

This follows from the observation that

$$\frac{1}{4^k} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^k} = \frac{4}{3 \cdot 4^k} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^{k-1}},$$

for then

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \left(\frac{1}{4^n} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^n} \right) = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \left(\frac{1}{4^{n-1}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^{n-1}} \right) = \cdots = 1 + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \right) = \frac{4}{3}.$$

It is tempting to simply sum the geometric series by letting $n \rightarrow \infty$ in (7) to obtain

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{4^n} + \cdots = \frac{4}{3}.$$

We would then conclude that

$$a(\mathcal{P}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a(\mathcal{P}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^n} \right) = a \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{4^n} + \cdots \right) = \frac{4}{3}a = \frac{4}{3}a(\triangle APB)$$

as desired. $\square$

No doubt Archimedes intuitively obtained the answer $4/3$ in similar fashion but, rather than taking limits explicitly, he concluded the proof with a typical double *reductio ad absurdum* argument which we leave to the reader.

EXERCISE 9. Supply this concluding argument, using the facts that

(a) Given $\epsilon > 0$, $a(\mathcal{P}_n)$ and $a(\mathcal{P}_n)$ differ by less than ϵ if n is sufficiently large, and

(b) $a(\mathcal{P}_n) = (4n/3) - (n/3) \cdot (1/4^n)$ (from (6) and (7)).

Fonte: Edwards (1979)

O primeiro movimento de um dos integrantes⁵⁴ do grupo é questionar o que deve ser feito no trabalho final da disciplina.

César: *Como a gente vai se organizar? Nós vamos estudar a demonstração? Como a gente vai fazer?*

Luciana: *Agora a gente precisa entender o que ele quer...A proposta é a gente fazer algo semelhante com o que ele faz na aula, não é?! A gente precisa estudar o problema e relacionar com uma coisa atual? [...] Por exemplo, uma das proposições de Euclides ele trouxe para a linguagem e conteúdo atual⁵⁵. Então acho que a proposta é essa, não é?*

Bruna: *É, a gente vai ter que interpretar esse problema da quadratura assim...*

Fran: *Como ele pode ser utilizado atualmente?*

Luciana: *Então, eu acho que a ideia é essa.*

Embora o diálogo não faça referência direta à história das notações matemáticas, é possível observar elementos como a organização, interpretação contextualizada e aplicabilidade prática que se relacionam com seu desenvolvimento histórico (EVES, 2011), assim como a preocupação colocada por César reflete a importância, também histórica, de estabelecer uma estrutura (SILVA, 2002) e um método para o estudo e comunicação matemática.

O grupo não chega a um consenso de como o trabalho deve ser organizado para a entrega final e começam a dialogar sobre a produção de um vídeo, que também compõe o trabalho, mas que não será tomado como fonte de dados nesta pesquisa. Após essa discussão, um outro questionamento é feito por César: “E aí, como nós vamos atacar o problema? A gente podia definir hoje uma tarefa, alguns objetivos...”. A partir daí, o grupo tenta articular e criar um

⁵⁴ Alguns nomes foram substituídos por fictícios a pedido dos participantes.

⁵⁵ As marcações (grifos) nos diálogos representam a identificação de elementos que se revelaram fundamentais na análise dos dados.

plano de trabalho partindo de um cronograma de planejamento para as próximas atividades. Bruna faz uma intervenção e alega que antes de tudo eles precisam definir o que vão fazer naquele dia, e propõe que discutam e tentem entender a demonstração: “A ideia é a gente abordar a demonstração no GeoGebra, né?! Então a gente tem que entender a demonstração!”, o que indica um desejo de analisar e entender os passos lógicos envolvidos na demonstração a partir, inicialmente, de uma abordagem analítica.

O grupo concorda e César compartilha um material que aborda a demonstração da quadratura. O material compartilhado é a dissertação de mestrado de Josiêdes Marques dos Santos que tem como título “Quadratura da Parábola: uma abordagem possível para o ensino de somas infinitas⁵⁶” e foi defendida em 2014 na Universidade Federal do Rio Grande do Norte. César comenta que o trabalho “tem uma demonstração passo a passo bem interessante” e que traz uma abordagem já direcionada para soma de progressões geométricas. Luciana questiona: “É para encontrar essa área aqui né?! A ideia não é encontrar essa área? Da região entre a curva e a reta? E aí a gente não pode fazer por integral?” e um diálogo se inicia.

César: Não, não existia o conceito.

Daniel: Mas aí teríamos que ter a equação da curva.

Luciana: Sim! Mas aí podemos considerar um caso particular, não dá para fazer? Uma reta...

Daniel: Mas não é assim que ele [Arquimedes] faz.

Luciana: Sim, mas estou pensando para trazer para hoje.

Daniel: Mas não é essa tradução que se traz para hoje. Nessa situação você vai fazer por aquela aproximação através de retângulos.

Luciana: Então, mas veja só...se a ideia é calcular a área da região delimitada pelas curvas, dá para fazer por integral.

Daniel: Sim, mas a gente não está falando que não dá. A questão é que essa não é a tradução que Arquimedes fez.

Luciana: Mas não era pra gente fazer uma coisa diferente do que ele tinha pensado? Uma coisa é a gente pensar e fazer a demonstração do jeito que Arquimedes fez e outra coisa é a gente trazer “ah, e se fosse hoje? E no problema de hoje?”. Essa ideia de cálculo de área aparece muito em cálculo, cálculo 1 inclusive, início de integral.

Bruna: Mas aí não teria sentido a gente estudar essa demonstração dele.

Luciana: Tem, dá pra gente fazer as duas coisas.

Fran: Pode fazer as duas...

Luciana: Primeiro a gente pode fazer...entender do jeito que ele está pensando e depois pensar em uma coisa de hoje.

Daniel: Mas eu acho melhor fazer igual a Bruna falou. Primeiro a gente entende o que é isso, o que ele faz e depois tenta encontrar relações...

Bruna: É, por exemplo...tem uma parte aqui, de um sinal dentro da demonstração, que eu pensei “tá, eu vou considerar o que?”. Eu já não consegui mais enxergar o que ele estava pegando...como ele chegou naquele um quarto? Naquele meio que não era meio?

Ao mencionar a existência de uma demonstração passo a passo e interessante, César destaca a relevância dada às demonstrações rigorosas na Matemática (BICUDO, 2002) e que seguem uma estrutura axiomática (SILVA, 2002). Por sua vez, a sugestão de Bruna de

⁵⁶ A dissertação pode ser acessada em

https://drive.google.com/file/d/1VmcRjxW11iVHWebWo_By7B6tWI8ydDxX/view?usp=sharing

compreender primeiro o método de Arquimedes e, em seguida, explorar possíveis relações e conexões com abordagens contemporâneas pode proporcionar uma compreensão mais aprofundada do problema. Além disso, essa abordagem estabelece uma conexão entre a matemática antiga e contemporânea, contribuindo para o desenvolvimento histórico de conceitos, métodos matemáticos e modos narrativos de pensamento (ZENGIN, 2018; SINCLAIR; HEALY; SALES, 2009; BRUNER, 1991).

A partir disso, o grupo decide que uma leitura conjunta do documento é necessária e Luciana a inicia, fazendo uma tradução para o português do que é apresentado no texto. Os demais integrantes acompanham e realizam colocações e complementações quando consideram ser pertinentes. Algumas discussões sobre conceitos matemáticos permeiam a leitura/diálogo, como a noção de segmento parabólico e arco de parábola. Ao término da leitura do problema (antes de iniciar com os fatos já conhecidos por Arquimedes), Fran questiona: “*Então de hipótese teríamos o setor parabólico, que tem a mesma base do triângulo inscrito nesse setor, é isso?*”. Esse questionamento não é respondido por nenhum integrante do grupo e César parte para um esboço, em uma folha de papel, para tentar entender qual é o triângulo que está sendo gerado. Luciana questiona sobre como seria uma tradução literal para o problema e propõe: “*A área de um segmento de parábola é quatro terços da área do triângulo com mesma base e altura.*”.

Uma discussão sobre o que o ponto P e o segmento APB representam se inicia. Eles chegam à conclusão de que “*P não é o vértice da parábola, ele é o vértice do segmento parabólico.*” como argumenta Daniel. Um diálogo sobre o que significa segmento se estabelece.

Luciana: Pra mim, é muito estranho ainda ouvir segmento e entender como sendo uma superfície, porque pra mim segmento é um segmento de reta.

Hércules: Porque assim...a parábola ela é infinita. Então nós vamos delimitar. Eu vou marcar um ponto A e um ponto B e vou traçar um segmento aqui, uma reta. Então essa região delimitada aqui ele chamou de segmento, e não arco.

Luciana: Sim! Mas se a gente fala hoje em segmento de reta, segmento de reta não é superfície. Segmento de reta...é um pedaço de uma reta que você sabe onde começa e onde termina. [...] Mas aqui, e lá nos problemas de Euclides a ideia do segmento tinha a ver com superfície mesmo. Pra mim eu ainda não consigo ouvir segmento e falar em bidimensional, em superfície.

Daniel: Mas é que a gente está acostumado a falar sobre segmento nessa dimensão.

Bruna: É, e agora a gente tem que quebrar isso.

Assim, fica evidente o desconforto do grupo na interpretação e compreensão de um texto matemático de séculos anteriores, especialmente quando as notações e as expressões utilizadas são diferentes das que utilizamos atualmente, evidenciando que a mudança da linguagem matemática ao longo do tempo pode criar ambiguidades e desafios na interpretação dos textos antigos (BOYER, 2011; ROQUE, 2012). Nesse caso específico, a palavra segmento estava sendo usada em um sentido mais amplo para descrever uma região delimitada por uma reta,

enquanto que na Matemática contemporânea estamos acostumados a entendê-la como um segmento de reta em uma dimensão específica.

Os questionamentos sobre o ponto P continuam e o grupo não chega a uma conclusão do porque ele é considerado ponto médio.

Daniel: Então, mas aí a questão é a seguinte...ele traça essa linha e afirma que passa em seu ponto médio

Bruna: Do segmento AB, né?!

Fran: Mas por quê?

Daniel: Então aí...

Luciana: Mas é condição, não é?

Daniel: Não, isso eu acho que não é condição. Esse aí já é uma consequência dessa relação...quando você pega uma paralela ao eixo, passando por esse ponto, consequentemente...e aí isso vai servir para outros resultados.

Fran: Mas tem algum teorema?

Daniel: Ah, depois eu acho que ele vai mostrar.

César: É, daí dá para você provar que a reta tangente é paralela ao segmento AB.

Daniel: Porque você precisa do ponto M, concorda comigo? Você precisa do ponto M?!

César: Precisa para formar o triângulo.

Luciana: Mas esse ponto P não é um ponto P arbitrário, é o vértice.

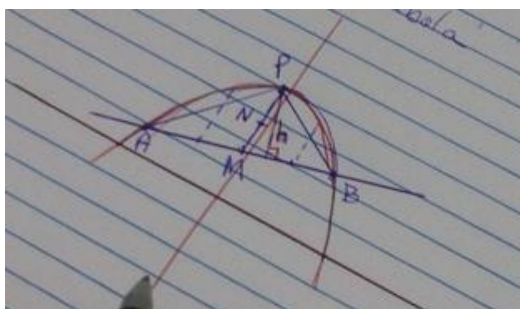
Daniel: Não, não é.

César: O ponto P não é vértice.

Luciana: Como o ponto P não é vértice?

A partir disso, um questionamento sobre o ponto P ser parte, ou não, da hipótese é posto. César apresenta instruções, de forma oral, de como se dá a construção de uma parábola a partir de uma diretriz e um foco e Hércules começa a representar a construção em uma folha de papel enquanto César gesticula. A Figura 6 apresenta a construção realizada por Hércules.

Figura 6 – Parábola construída por Hércules a partir das instruções de César



Fonte: Dados da Pesquisa – Captura de tela das gravações

Sobre a mesa que o grupo está trabalhando há quatro *notebooks*, sendo que dois estão com a janela do GeoGebra aberta em destaque. Porém, ninguém tenta realizar a construção utilizando o *software*. O grupo continua a leitura do documento realizando interpretações sobre o que as afirmações representam e significam. Daniel e César se envolvem em questionamentos sobre a notação utilizada, tentando entender quem representa x e y , e como se chega na relação $x = ky^2$.

César: Aah, sim! É que eu vi outro texto e lá não tinha demonstração, só o resultado. Daí eu falei “caramba” ...e aí você me falou disso, eu não tinha visto. Bonito! Mas calma aí...esse tipo de coordenadas não existia na época de Arquimedes.

Daniel: Eu acho que eles trabalharam com um sistema de referências.

César: Nããã! Assim? Com equação desse tipo? Nãao!

Daniel: Não, não sei se com equação desse tipo, mas eles trabalhavam com algum sistema de referência.

César: Esse negócio de colocar no eixo, enxergar o valor no outro eixo...isso aí é Descartes.

Daniel: Ihh, não sei.

César: Aah, o Arquimedes estabeleceu esse fato sem prova, né?! Ele comenta aqui. Então essa prova é uma prova posterior, é uma forma de entender, mas não é que ele usou, ele colocou sem provar.

O grupo reconhece que a demonstração mencionada pode ter utilizado conceitos que não eram familiares a Arquimedes, levando em consideração a mudança dos métodos e técnicas matemáticas ao longo do tempo, incluindo sistemas de coordenadas mais simplificados. Além disso, eles observam que Arquimedes estabeleceu o resultado sem apresentar uma prova explícita, o que revela uma compreensão por parte do grupo da importância de um sistema axiomático para considerar um resultado como uma prova. Nesse contexto, seria pertinente discutir as funções de uma prova (DE VILLIERS, 1990) e se questionar sobre o que Arquimedes fez com seu resultado - se o verificou, explicou, sistematizou, descobriu, comunicou e/ou se foi considerado um desafio intelectual. É importante ressaltar também que a aceitação de um teorema pelos matemáticos ditos puros é um processo social em que muitas vezes a busca por compreensão e significado, supera a necessidade do rigor (HANNA, 1989).

Luciana expõe sua preocupação quanto ao tamanho da demonstração e questiona se eles vão abordar todos os fatos que são mencionados no documento. Bruna diz que considera que sim e menciona que a demonstração acaba. Luciana argumenta: “Acaba, acaba sim, depois de mais duas páginas cheias, ela acaba! (risos)” e Daniel lembra ao grupo que o método utilizado é de exaustão e menciona “porque depois disso elas de repetem e aí eles precisam colocar essas bases para depois você poder utilizar essa linha”. Seguem então com a leitura e discussão, e algumas falas como: “Isso aqui é verdade? [enquanto apontavam para a imagem]”; “Mas por que isso acontece?”; “Mas o que significa a exaustão, é fazer até infinito?”; “A ideia de infinito está sempre presente”; “Haja lista no GeoGebra!”; “Esse é um resultado determinante...esse passo é fundamental” apareceram. Nos momentos finais do encontro o seguinte diálogo ocorre

Bruna: Mas até onde a gente vai? (risos). Vamos pensar no GeoGebra...até onde nós vamos?

Fran: É, então...a gente tem que demonstrar algebricamente? Além do GeoGebra? Ou basta uma aplicação no GeoGebra?

César: A demonstração formal? Podemos pensar em uma teórica e uma prática no GeoGebra.

É possível observar uma distinção entre o conceito da demonstração visual (BORWEIN; JÖRGENSEN, 2001, HANNA, 2000) e o da demonstração formal (BICUDO, 2002) baseada em procedimentos algébricos. César menciona a possibilidade de ter uma demonstração formal, que envolve argumentos teóricos e procedimentos algébricos, além de uma demonstração

prática no GeoGebra. Essa distinção sugere que a demonstração formal pode ser mais teórica e baseada em manipulações simbólicas, enquanto a demonstração prática pode se apoiar na visualização e manipulação gráfica no GeoGebra, considerando múltiplos tipos de demonstrações, as adaptando ao contexto específico e aos objetivos da investigação matemática.

Ao final do encontro o grupo combina ações e César sugere: “*Para o próximo encontro vamos trazer sugestões de como abordar essa demonstração no GeoGebra, pode ser?*”. O grupo concorda, voltam em algumas questões que ainda não ficaram claras na demonstração e combinam de retomarem a tais pontos no próximo encontro. Bruna coloca: “*Eu acho que na semana que vem a gente tem que sentar nessa mesa, um vai para a lousa e escreve “nesse passo aconteceu isso, isso e isso...por quê? Asterisco 1, asterisco 2, asterisco 3”...e aí a gente vai...abrindo esses trechos que não estão demonstrados aqui. Senão, vai dar nó!*”. Todos concordam e começam um movimento de finalização do encontro e despedidas, alguns diálogos entre eles ocorrem simultaneamente e é possível escutar as falas a seguir.

César: *Próximo encontro: fazer a demonstração no GeoGebra ou na lousa [digitando no computador]*

Daniel: *Não! Na lousa.*

Luciana: *O GeoGebra vai ser o próximo passo. Primeiro precisamos esclarecer a demonstração.*

César: *Pensei em uma forma dinâmica no GeoGebra, acho que vai ficar legal.*

Daniel: *No GeoGebra não vai dar pra fazer.*

César demonstra uma disposição em utilizar o *software* para abordar a demonstração, enquanto Daniel enfatiza que não será possível. No entanto, surge a pergunta: o que exatamente eles esperam dessa tecnologia? Essa discussão retoma a reflexão sobre o uso de computadores e tecnologias no desenvolvimento de provas matemáticas. Embora já esteja amplamente evidente a contribuição do uso de recursos computacionais, como a visualização dinâmica e interativa em atividades que envolvem o pensamento matemático, ainda é possível notar um certo receio em associar as palavras demonstração e prova com *softwares*.

Entre esse encontro e o segundo não ocorre trocas de mensagens no grupo do *WhatsApp* significativas para o avanço do desenvolvimento do problema. As interações foram apenas para combinar e confirmar o dia e horário para o Encontro 2.

5.1.2 Encontro 2

O segundo encontro acontece uma semana após o primeiro e eu, como pesquisadora, inicio um diálogo indagando sobre o processo de escolha do problema. Os integrantes do grupo explicam que, com base na bibliografia sugerida na disciplina, buscaram problemas com

potencial do que chamaram de aplicabilidade no GeoGebra, ou seja, problemas que pudessem ser abordados geometricamente. Durante a conversa, Hércules destaca a importância da visualização para sua compreensão de problemas de natureza Matemática, enquanto Bruna compartilha a dificuldade enfrentada pelo grupo no entendimento e interpretação do problema escolhido, bem como na demonstração relacionada a ele. A partir daí retomam os estudos.

César: *E agora, qual é o objetivo?*

Fran: *O objetivo é o seguinte...fazer uma demonstração passo a passo, explicadinha.*

Bruna: *Isso, na nossa linguagem.*

Fran: *Tome 'nanam'...queremos 'nanam'.*

Bruna: *De I temos que...de II segue que.*

César: *Então não vamos fazer nenhuma passagem sem dar uma ultra e convincente explicação (risos)*

Vale destacar, novamente, a preocupação do grupo com o teor lógico da demonstração, reforçado pela necessidade de clareza e compreensibilidade de todas as etapas, bem como o estabelecimento de conexões lógicas entre as proposições e que os conduzirão a uma conclusão satisfatória. Esses aspectos refletem, novamente, a busca pela validade e rigor (GARNICA, 1995) das demonstrações.

Bruna, Fran e Hércules compartilham suas frustrações em relação a certas expressões encontradas nos textos acadêmicos, como 'é trivial', 'é fácil verificar', 'como o leitor pode facilmente constatar' e 'fica a cargo do leitor'. Eles destacam que essas afirmações lhes causam um grande desconforto, pois muitas vezes não são tão óbvias ou simples de serem verificadas na prática, gerando uma sensação de exclusão ou subestimação da dificuldade real dos problemas matemáticos. Porém, em diversas situações, a omissão seletiva de detalhes nas demonstrações pode fazer parte do processo que visa evitar sobrecarregar o leitor com informações excessivas, buscando equilibrar a clareza e a concisão (STEWART; TALL, 2015).

César expressa sua preocupação em relação aos próximos passos da abordagem do problema, informando que já realizou algumas tentativas de exploração no GeoGebra. Porém, o grupo decide que inicialmente precisam entender o problema utilizando lápis e papel (giz e lousa) para que posteriormente utilizem o *software* em sua exploração.

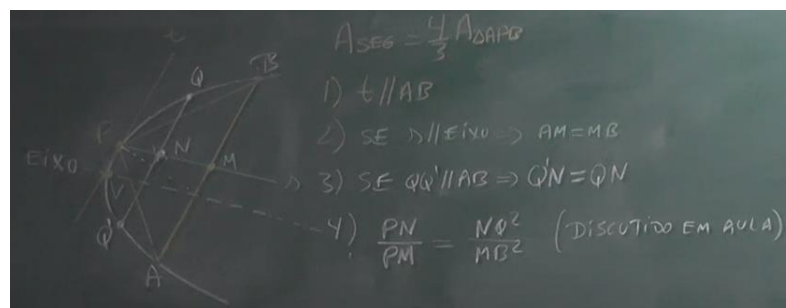
Luciana: *O problema é esse aqui: a área de um segmento de uma parábola é quatro terços da área de um triângulo com a mesma base e a altura. [...] Aqui ele apresenta antes os elementos. [...] Vamos representar esse problema?*

Fran: *A gente vai começar a escrever certinho, né?*

Bruna: *Sim, com hipótese e tese.*

A partir de um desenho no quadro (Figura 7), o grupo retoma os estudos, que haviam sido iniciados no Encontro 1, sobre os elementos do problema, como o ponto P, o segmento AB, e resultados que já eram conhecidos na época.

Figura 7 – Esboço da hipótese e tese do problema da quadratura, utilizando quadro e giz



Fonte: Dados da Pesquisa – Captura de tela das gravações

Durante o estudo e registros no quadro, o grupo realiza reflexões acerca dos resultados considerados como já conhecidos por Arquimedes em sua abordagem. Eles se empenham em comprovar esses resultados utilizando notações e conceitos atualmente estabelecidos e, posteriormente César sintetiza os passos da demonstração:

César: O que ele está dizendo aí? Que nós estamos preenchendo o segmento original APB, ou sejam, o segmento parabólico original. Nós estamos sucessivamente preenchendo ele com polígonos. O primeiro polígono que nós construímos dentro do segmento, qual foi? Não foi o APB? Agora, quando nós colocamos o P_1 e o P_2 nós criamos um outro polígono que é um pentágono, é o AP_2PP_1B . Ele é um polígono maior que contém o anterior e agrega mais um pouco da área, Método da Exaustão! No Método da Exaustão, cada vez que eu entro eu tenho que pegar mais da metade do que restava, se não, eu posso não chegar nunca no final. Lembra? O Método da Exaustão tem esse princípio de funcionamento.

Bruna: Então essa é a sacada que nós teremos que fazer no GeoGebra.

César: É! Vamos ter que pensar como construir sucessivas...

Bruna: É, sucessivas...vai ter que ser por lista. Agora eu não sei como. A lista vai ter que depender do segmento parabólico.

César: Mas a gente vai usar o controle deslizante. A gente coloca um n , se n for igual a 1 ele divide em uma parte, divide em duas, em três. Mas ainda não enxerquei como fazer isso.

O grupo reconhece a importância de uma visualização dinâmica utilizando o GeoGebra e estão cientes de que a abordagem envolve a construção sucessiva de polígonos. No entanto, expressam dificuldades em prever e planejar exatamente como essa construção será realizada no software.

Hércules: É quase a mesma ideia da quadratura do círculo, né? [...] Eles chegaram a utilizar a ideia de limite?

César: Não, não existia essa notação na época. Esse ϵ que aparece aí também não existia na época. Acho que é um comentário do autor, tanto que está em italico.

Hércules: Gente, eu sou professor há décadas e a gente ensina os alunos como se aquilo sempre tivesse existido, parece que é tão simples e não é!

César: Pois é, a gente sempre ignora o processo de construção do conhecimento matemático.

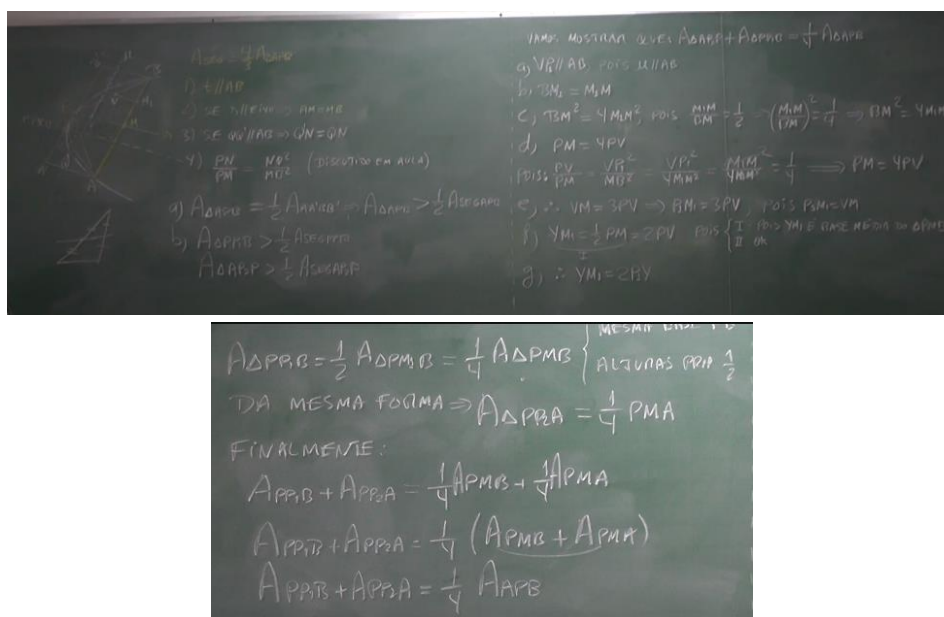
Esse diálogo reforça as ideias proposta por Doxiadis (2023) sobre a importância da contextualização histórica dos conceitos matemáticos estudados na educação básica e superior. Hércules, como professor, expressa sua preocupação com o ensino dos conceitos matemáticos como se eles sempre tivessem existido, reconhecendo que essa abordagem pode simplificar a

compreensão dos alunos e negligenciar o processo de produção e desenvolvimento desses conceitos ao longo do tempo e da construção do pensamento matemático.

Ao prosseguirem com o estudo, Bruna continua com a leitura “So – Então, depois de um quilômetro de passos pulados (risos)”. É possível relacionar a expressão utilizada com as etapas que muitas vezes são omitidas em uma demonstração. Uma demonstração matemática completa e rigorosa, geralmente, segue uma sequência lógica de passos (BICUDO, 2002), na qual cada passo é justificado de forma clara e precisa. No entanto, em algumas situações, é possível que algumas etapas sejam omitidas por diversas razões, como simplicidade, familiaridade do público-alvo, ou até mesmo por falta de espaço em um texto ou apresentação. Ao mencionar ‘um quilômetro de passos pulados’, Bruna sugere que há uma quantidade considerável de etapas omitidas na demonstração em questão, comprometendo sua compreensão.

A Figura 8 apresenta os registros realizados, no quadro, a partir dos estudos que ocorreram no encontro 2.

Figura 8 – Estudo da demonstração da quadratura, utilizando quadro e giz



Fonte: Dados da Pesquisa – Capturas de tela das gravações

Ao chegarem à conclusão da demonstração, Fran apresenta uma dúvida sobre o aparecimento do termo $\frac{1}{3}$ na expressão 7 (Figura 9) e César explica que esse valor é resultado da soma de uma progressão geométrica infinita. No entanto, ele ressalta que a expressão que fornece essa soma ainda não era conhecida naquele momento.

Figura 9 – Expressão que contém a dúvida enunciada por Bruna ao final do encontro 2

At this point Archimedes derives the elementary identity

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^n} = \frac{4}{3}. \quad (7)$$

Fonte: Edwards (1979)

Fran retoma o questionamento sobre como foi alcançado o resultado final e Bruna faz uma brincadeira dizendo: “*como podemos observar*” (risos), em referência ao desafio de compreender o processo de maneira clara e intuitiva.

Fran: *Aí, tá vendo? É disso que eu não gosto!*

César: *Agora eu também quero entender, porque eu também não estava ligando pra isso, estava usando o de hoje, a notação de hoje, para fazer a soma. Vamos entender.*

Fran: *Eu acho que a gente vai ter que pesquisar o que é essa identidade elementar de Arquimedes.*

César: *Aah, eu anotei aqui na minha folha sobre esse item. Eu nem lembrava mais. Anotei para usar o resultado apresentado em aula sobre a soma da PG. [...] Não é a soma como conhecemos hoje, é uma outra forma de fazer somas.*

Fran: *Acho que é válido pesquisarmos isso.*

Hércules: *Qualquer coisa a gente pula alguns séculos (risos).*

Após pouco mais de duas horas de discussão e análise, o grupo decide encerrar o encontro, reconhecendo a necessidade de continuar os estudos em outro momento, mas antes do terceiro encontro eles trocam algumas mensagens no *WhatsApp* que estão relacionadas à construção do problema no GeoGebra.



César: *Pessoal, passei a demonstração da quadratura da parábola para o GeoGebra! Por conta disso, seria interessante uma sala com projeter data show! Alguém de vocês poderia conseguir uma sala assim?*

Bruna: *Que ótimo, Césaar! Deu certo?*

César: *Sim! É um esboço. Precisamos cuidar agora da estética da demonstração kkk*

Nesse momento, César reconhece a potencialidade do *software* articulado ao conceito de demonstração matemática. Sua preocupação com a estética indica a importância de apresentar a construção de maneira visualmente agradável e organizada, de modo a facilitar a compreensão e envolver a audiência. A estética de uma demonstração matemática pode desempenhar um papel significativo no processo de ensino e aprendizagem, indicando também uma valorização da apresentação cuidadosa e da atenção aos detalhes na comunicação dos aspectos matemáticos envolvidos. Nesse sentido, a preocupação com a estética da demonstração no GeoGebra sugere uma abordagem que valoriza não apenas a precisão matemática, mas também a clareza e a apresentação dos conceitos e etapas da construção.

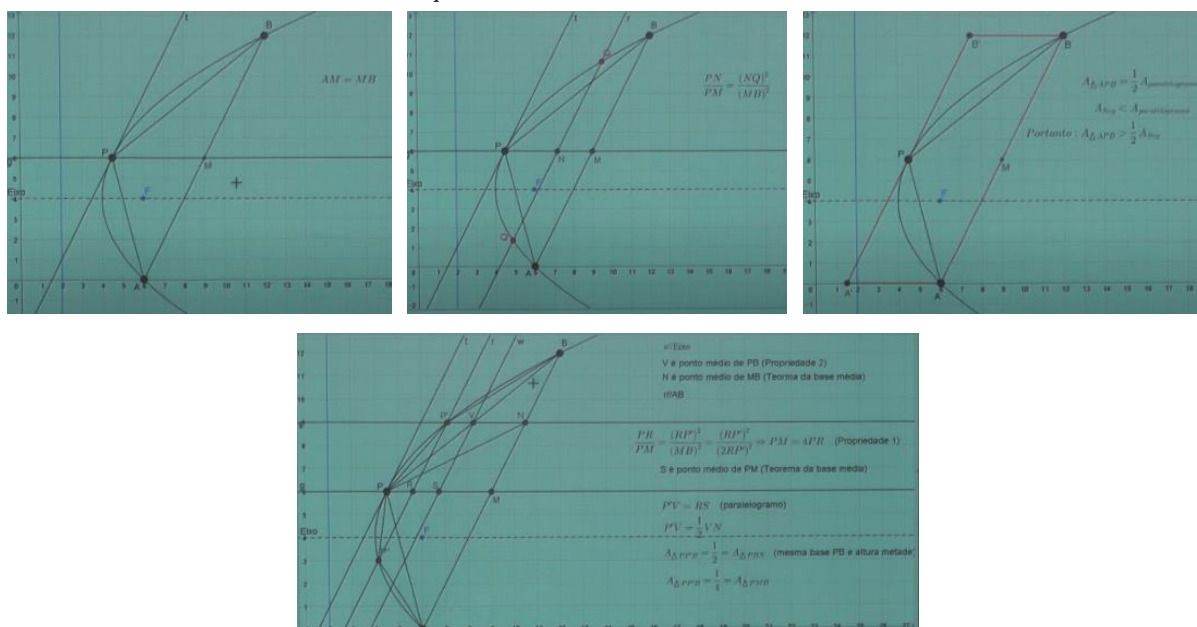
5.1.3 Encontro 3

O grupo se reúne novamente, após um intervalo de três semanas, para o terceiro encontro. O início da sessão é marcado por uma apresentação de César, que utiliza o GeoGebra e um projetor para mostrar as construções que realizou, abordando partes do problema, no *software*. César parte de uma construção base para a exploração do segmento parabólico, a partir de uma reta (diretriz) paralela ao eixo y, um ponto fora dela (foco), do uso da ferramenta

Parábola e posteriormente da inserção dos pontos A, B e P pertencentes a parábola e não fixos, o triângulo APB é criado.

Apoiado nessa construção base, outros arquivos .ggb são criados com o objetivo de verificar os fatos que já eram conhecidos na época de Arquimedes, a saber: (a) A tangente em P é paralela à base AB; (b) A reta que passa por P é paralela ao eixo que intersecta a base de AB no seu ponto médio M; (c) Cada corda QQ' paralela à base AB é dividida ao meio pelo diâmetro PM e; (d) $\frac{PN}{PM} = \frac{(NQ)^2}{(MB)^2}$. As construções realizadas por César são apresentadas na Figura 10, assim como uma abordagem inicial para o resultado do problema.

Figura 10 – Verificação das relações já conhecidas por Arquimedes e abordagem inicial do problema da quadratura utilizando o GeoGebra



Fonte: Dados da Pesquisa – Capturas de tela das gravações

Vale destacar, que toda a construção segue os princípios da demonstração estudada no encontro anterior e que foi apresentada na Figura 8. Assim, utilizando a ferramenta Reta Tangente, P foi construído de forma a ser o ponto mais distante do segmento AB e M seu ponto médio. Finalizando a explicação de sua construção César comenta:

César: Eu só passei a demonstração pra cá [GeoGebra] a sequência lógica dela e tal, mas aí precisa ter trabalhada, podemos colorir ou separar [...] precisamos formalizar [...]e aí falta a outra parte, precisamos pensar em como construir a sequência, essa parte eu não fiz, como a gente faz? [...] eu também pensei na questão do movimento, vamos utilizar o GeoGebra para fazer algum movimento? [...] conseguimos explorar alguma coisa?

Bruna: Ah, eu acho que sim. Pela construção dos triângulos, podemos destacar com cores e exibir a área deles e aí movimentar e ver a relação. Movimentar o ponto P e ver que a relação entre as áreas vai se manter.

Daniel: Eu ainda acho que tem uma outra demonstração mais fácil. Uma demonstração que utiliza mediatrizes e tangentes.

O desejo de aproveitar o movimento dos objetos para explorar as relações matemáticas presentes no problema é indicado, o que proporcionaria uma compreensão mais intuitiva da

demonstração e permitiria a exploração de diferentes configurações geométricas. A discussão destaca a flexibilidade e a dinamicidade oferecidas pelo GeoGebra na construção de demonstrações matemáticas. A capacidade de visualizar e manipular objetos geométricos em tempo real permite uma exploração interativa de relações e propriedades, contribuindo qualitativamente para o processo de compreensão e aprendizado dos conceitos matemáticos.

Dessa forma, o uso do GeoGebra modifica a relação com o conhecimento matemático (MARIOTTI, 2000), pois oferece mediação por meio de suas características peculiares. As resoluções deixam de ser vistas como uma simples coleção de propriedades evidentes e passam a ser compreendidas como um sistema de afirmações relacionadas, que são validadas por meio de provas. Essa abordagem amplia a compreensão dos conceitos matemáticos, permitindo uma interação significativa com o conhecimento por meio do uso do *software*.

Durante as discussões sobre a apresentação do trabalho para toda a turma, surge a preocupação no grupo de como abordar as informações de forma clara, evitando confusão. Bruna sugere a criação de um vídeo mostrando a construção sendo realizada no GeoGebra. No entanto, César expressa sua opinião de que um vídeo carece de interatividade, destacando a importância de ter alguém manipulando ativamente o *software* para evitar que a apresentação fique monótona para os colegas que estarão acompanhando. Um diálogo sobre a função do GeoGebra se inicia:

Daniel: *Quando eu estava construindo no GeoGebra eu estava me perguntando: qual a função do GeoGebra?*

César: *É, eu também fiquei pensando sobre isso. Porque eu posso fazer na lousa a mesma coisa.*

Bruna: *A verificação é um ponto importante aí! A partir dos movimentos podemos verificar várias propriedades. Mas da forma como está, a dinamicidade não está sendo explorada.*

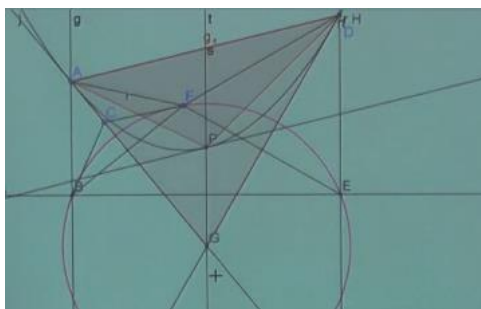
Fran: *É por isso que eu acho importante construirmos esses vários triângulos.*

Daniel: *É, quando você explora esse processo dinâmico, com certeza a experiência muda.*

A dinamicidade do GeoGebra volta a ser mencionada, agora atrelada ao papel dessa mídia na exploração do problema em questão. Bruna destaca a importância da verificação das propriedades matemáticas e como o GeoGebra pode auxiliar nesse processo. A dinamicidade do *software* permite explorar diferentes movimentos e verificar diversas propriedades simultaneamente. Essa abordagem vai além da simples construção estática e acrescenta uma dimensão interativa à experiência matemática, possibilitando a descobertas e *insights* adicionais. Essa perspectiva está alinhada com a ideia de que, por meio da mediação, as tecnologias digitais reorganizam o pensamento matemático enquanto a mídia molda a produção de conhecimento. (BORBA; VILLARREAL, 2005).

Durante as reflexões, diferentes maneiras de explorar a dinamicidade do *software* são cogitadas, como a possibilidade de criação de listas⁵⁷ no GeoGebra. Fran propõe que, ao utilizar o processo de construção dos triângulos e a soma de suas áreas, talvez seja possível verificar o resultado do Teorema sem recorrer ao uso da Álgebra. Porém, Daniel propõe que o grupo se volte para o estudo/realização de uma outra abordagem, que também foi realizada por Arquimedes, para a exploração da demonstração, e que é apoiada no uso de mediatrizes e tangentes. Ele destaca que essa construção pode facilitar a exploração no GeoGebra, possibilitando a dinamicidade. César comenta que já viu essa demonstração e cita a dissertação de Sousa (2014). O grupo se volta para o entendimento de tal abordagem realizando construções preliminares diretamente no *software*. Parte da construção pode ser vista na Figura 11.

Figura 11 – Exploração da nova abordagem do problema no GeoGebra



Fonte: Dados da Pesquisa – Capturas de tela das gravações

Nessa nova abordagem, o método proposto por Arquimedes, para quadrar uma parábola, se baseia em três tópicos: (i) Teorema da base média; (ii) Propriedades elementares de uma parábola e; (iii) Triângulos construídos por tangentes e segmentos internos à parábola. As dúvidas do grupo recaem novamente na discussão sobre a construção e propriedades do ponto P e vários integrantes alegam que a partir da construção já é possível verificar suas propriedades. Um rápido diálogo sobre prova e demonstração surge.

César: *O GeoGebra vai demonstrar, mas usar ele pra dizer: olha, estão vendo que funciona no GeoGebra? Então funciona! Aí eu não sei se vai valer essa demonstração.*

Bruna: *Aí é prova, né?! Não é demonstração.*

César: *É, é só uma provação, né?!*

César expressa sua preocupação em relação ao uso do GeoGebra como uma ferramenta de demonstração e questiona se a visualização e execução de uma demonstração no GeoGebra seria suficiente para validar um argumento matemático. Essa reflexão sugere que, para ele, nesse momento, uma demonstração matemática vai além da mera apresentação de evidências

⁵⁷ A criação de listas no GeoGebra tem várias finalidades e pode ser útil em diferentes construções e explorações, como no estudo de sequências e progressões. As listas podem ser utilizadas na exploração de sequências numéricas e progressões, gerando sequências automaticamente, adicionando termos, calculando somas parciais e explorando padrões a partir de iterações.

visuais e requer uma argumentação lógica mais rigorosa. Bruna concorda com César e afirma que, nesse contexto, o que está sendo apresentado é uma prova, e não uma demonstração matemática. Parece haver, para eles, uma distinção entre os dois conceitos, indicando que uma prova matemática não requer uma argumentação formal e lógica, enquanto uma demonstração sim, envolvendo a apresentação de um raciocínio passo a passo que evidencia a validade do resultado. A referência de César à ‘provação’ sugere uma interpretação mais ampla do termo. Ele pode estar se referindo a uma evidência empírica ou intuitiva que sugere a validade de um argumento matemático, mas que não atende aos critérios de rigor e formalismo exigidos em uma demonstração matemática, ou então a um contexto de experimentação (BORBA; VILLARREAL, 2005) com o GeoGebra.

Daniel sugere que o grupo articule as duas demonstrações, combinando a abordagem proposta em Edwards (1979) para a construção do ponto P e, em seguida, continuem com a interpretação do problema apresentado em Sousa (2014). O grupo considera essa ideia e começa a se aprofundar no entendimento das propriedades dos elementos da nova construção, ao mesmo tempo que projetam maneiras de torná-la mais dinâmica a partir da criação de ferramentas no GeoGebra.

Após esse encontro notei uma grande diferença qualitativa entre as discussões do grupo no primeiro encontro, utilizando apenas quadro e giz, e no segundo, utilizando o GeoGebra. Isso revela a influência da tecnologia na dinâmica e no engajamento dos integrantes do grupo. No primeiro encontro, César parecia ter assumido o papel de um expositor que transmitia informações em uma atmosfera mais passiva, em que os outros membros do grupo eram receptores do conhecimento e tinham um papel mais limitado na discussão. No segundo encontro, com o uso do GeoGebra, houve uma mudança significativa na interação entre eles. Todos estavam envolvidos ativamente, pensando juntos, juntos com o *software* (BORBA; VILLARREAL, 2005) e apontando para os elementos construídos. Essa interação visual e tátil com os elementos matemáticos estimulou o engajamento e a participação ativa de todos os envolvidos. Ao compartilharem a visualização e manipulação dos elementos no GeoGebra, a discussão se tornou mais envolvente e colaborativa, incentivando o pensamento crítico e o raciocínio matemático.

Após o terceiro encontro, o grupo decide prosseguir com a exploração do problema, no GeoGebra, de forma individual, compartilhando os progressos por meio de um drive. Essa abordagem permitiria que, no encontro seguinte, eles se dedicassem exclusivamente à conclusão da redação do artigo e à produção do vídeo. Infelizmente, devido a conflitos de agenda, não pude participar do quarto encontro. Portanto, sigo para a análise do documento

entregue como artigo final, dos arquivos .ggb criados pelo grupo e da apresentação final do trabalho, realizada para toda a turma da disciplina de Gênese.

5.1.4 O artigo final

O artigo final do grupo intitulado *Quadratura da Parábola: um estudo do método apresentado por Arquimedes* possui 18 páginas e está dividido nas seguintes seções: Resumo, Introdução, Contexto Histórico, Desenvolvimento, Conclusões e Referências.

Na Introdução, o grupo apresenta a finalidade do artigo, bem como justifica a escolha do problema, argumentando que:



Trecho do artigo: [...] para escolhermos o problema, nossa preocupação foi encontrar um que conseguíssemos explorar a sua dinamicidade no GeoGebra. Para isso, iniciamos a consulta das referências bibliográficas da disciplina e elencamos três possibilidades de problemas para o nosso trabalho, sendo esses: quadratura da parábola, área da elipse e espiral de Arquimedes. Pensando nessas possibilidades, realizamos a leitura de cada um deles para compreendermos as suas demonstrações e, com isso, decidimos quais delas ofereciam subsídios para a construção no GeoGebra.

Optamos por investigar a quadratura da parábola, pois acreditamos que esse problema proporcionaria uma maior exploração da dinamicidade do software, além de que, a princípio, a demonstração desse problema nos pareceu familiar, já que apresentava ideia similar à demonstração da quadratura do círculo, a qual estudamos em sala.

O trecho revela a abordagem realizada para a escolha do problema, considerando a capacidade do GeoGebra em lidar com sua dinamicidade, ou seja, a capacidade de visualização e manipulação dos elementos (GRAVINA, 2001) envolvidos.

Após a apresentação do enunciado do problema, observei uma imprecisão no documento. O grupo menciona, de forma equivocada, que a abordagem utilizada no estudo foi a proposta por Struik (1986), no livro *A source book in Mathematics*, articulada aos estudos de Santos (2014). No entanto, é importante destacar que o problema em questão foi extraído de Edwards (1979), o que não compromete a legitimidade do artigo, se tratando apenas de um erro de identificação.

A partir desse ponto, o artigo entra em um contexto histórico sobre Arquimedes, discutindo seus trabalhos relevantes e particularizando suas contribuições significativas no campo das alavancas e claro da quadratura da parábola. É mencionado que o matemático apresentou duas soluções para o problema, uma por meio de abordagem mecânica baseada na lei das alavancas e outra usando uma abordagem geométrica. Até então, considerando as informações obtidas nas gravações dos encontros, parecia não estar claro para alguns integrantes que ambas abordagens haviam sido propostas pelo próprio Arquimedes. Logo, essa

seção do artigo esclarece o entendimento do grupo em relação às duas abordagens propostas por Arquimedes

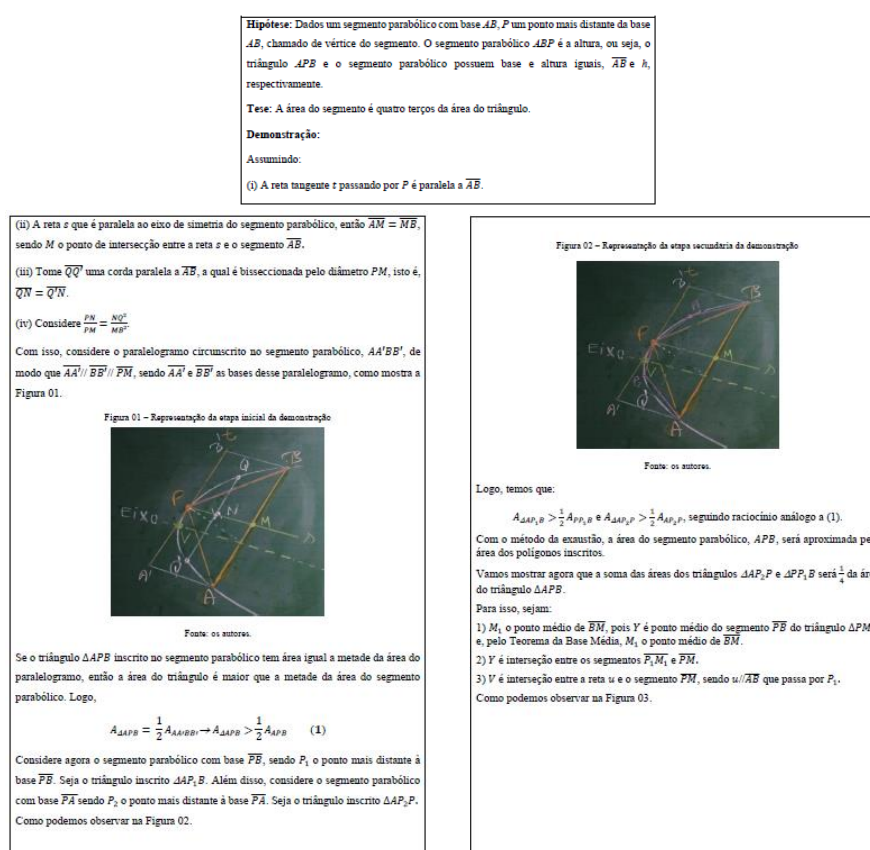
Na seção Desenvolvimento, são descritos os passos seguidos para a elaboração do trabalho, enfatizando a análise minuciosa realizada da demonstração apresentada em Edwards (1979). As dificuldades encontradas ao longo desse processo, e evidenciadas nos encontros, são destacadas no trecho a seguir, presente no artigo.

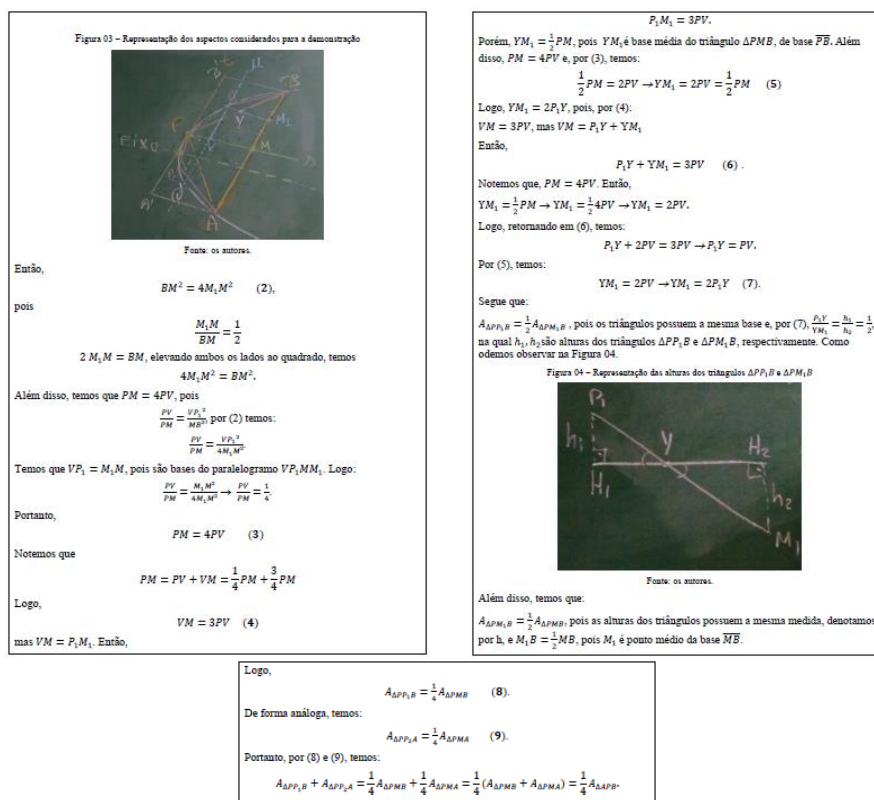


Trecho do artigo: [...] emergiram questionamentos em relação a alguns resultados abordados ao longo das etapas demonstradas, em particular os que foram assumidos no início da demonstração, dentre os quais podemos citar os que se associam à congruência de alguns segmentos, à proporção continuada, à justificativa de como encontrar o ponto no segmento mais distante da base, entre outros. Com isso, sentimos a necessidade de reescrever a demonstração estudada, tentando justificar cada resultado a partir da elaboração de representações geométricas no decorrer da leitura e reescrita do texto para que pudéssemos compreender melhor a demonstração como um todo.

A Figura 12 apresenta a demonstração realizada pelo grupo e o documento pode ser melhor visualizado no Anexo C desta tese.

Figura 12 – Demonstração analítica da quadratura da parábola apresentada no artigo final





Fonte: Dados da Pesquisa – Artigo final escrito pelo grupo

Ao analisar a demonstração, se torna evidente que o grupo incorpora as expressões que foram identificadas como elementos cruciais para uma demonstração sólida e discutidas previamente no segundo encontro, como o destaque para a hipótese e tese do problema que estão investigando. Palavras e expressões como: considere, portanto, notemos que, logo, então, segue que, de forma análoga, entre outras, são utilizadas ao longo do desenvolvimento do raciocínio. Essas expressões são empregadas de modo a construir uma lógica axiomática (DOMINGUES, 2002), com o objetivo de aprimorar a leitura e compreensão da demonstração.

O artigo ressalta os desafios enfrentados pelo grupo na tentativa de dar dinamicidade às construções no GeoGebra.



Trecho do artigo: [...] percebemos que não estávamos conseguindo explorar a dinamicidade do GeoGebra e nos questionamos acerca do seu papel na compreensão das etapas demonstradas, concluindo que cada representação nos dava a possibilidade de verificação dos resultados por meio das medidas envolvidas. Mas, além disso, a criação dos triângulos sucessivos, juntamente com os demais objetos explorados na demonstração, fez com que a construção no software ficasse com muitos elementos, comprometendo a visualização e, inclusive, impactando na possibilidade de verificação que havíamos constatado devido à dificuldade em identificar e selecionar os objetos.

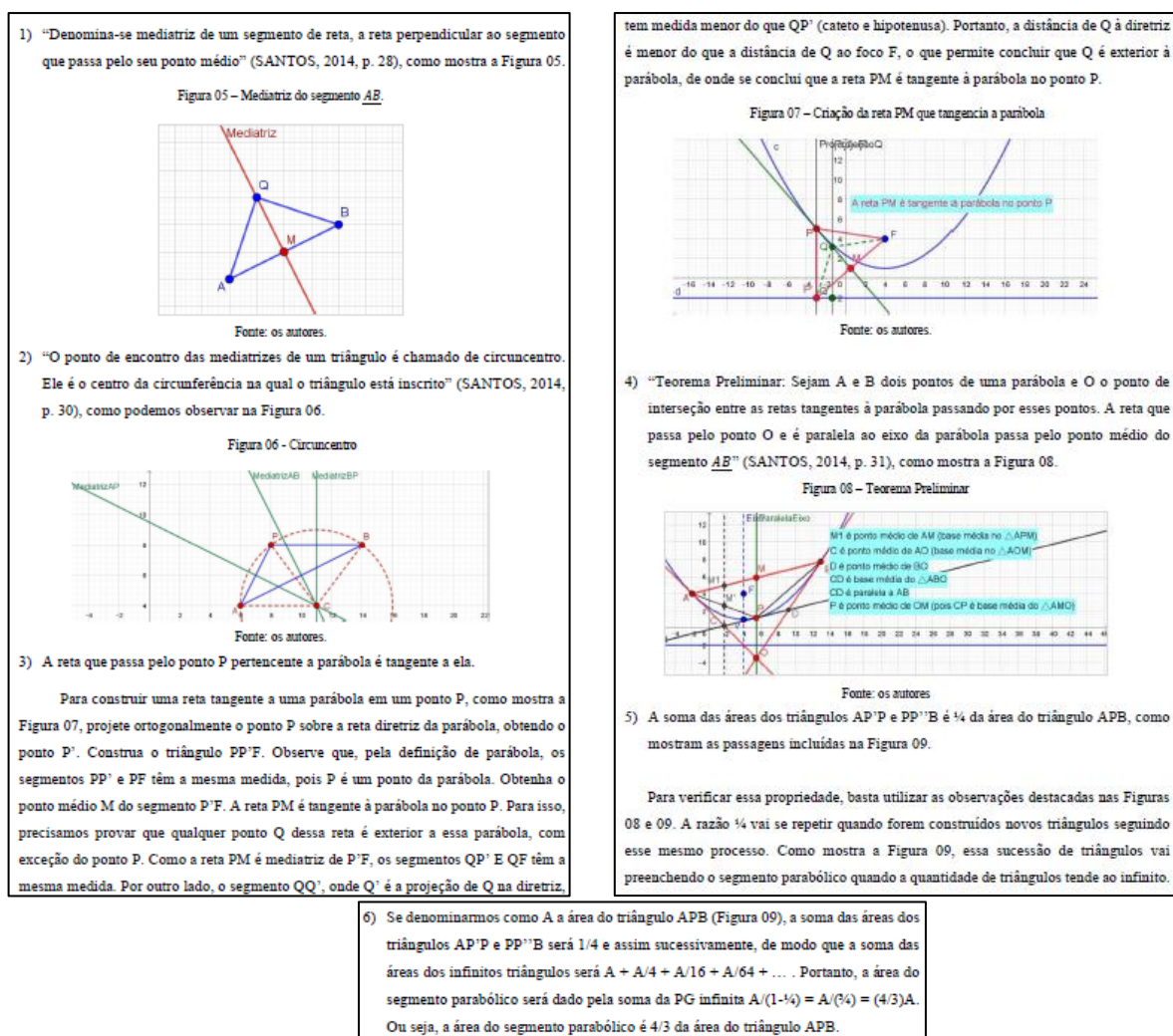
Optamos, então, por estudar a demonstração apresentada por Santos (2014), uma vez que esta utiliza conceitos elementares e que podem ser facilmente representados no GeoGebra.

Vale destacar a importância de considerar a capacidade do *software* em lidar com a complexidade das construções. A presença de um grande número de elementos pode comprometer a visualização, a compreensão, a verificação dos resultados e, portanto, toda a

experiência. Dessa forma, é mencionado que foram criadas e interpretadas no GeoGebra as representações correspondentes a cada uma das etapas da demonstração apresentada em Santos (2014), com o intuito de compará-las com as apresentadas em Edwards (1979). A demonstração sugerida por Santos (2014) utiliza conceitos elementares de geometria plana, como mediatriz, mediana, circuncentro, bases médias de triângulo e trapézio, e semelhança de triângulos.

Com base na interpretação da demonstração, foram realizadas construções em arquivos separados no formato *.ggb* para cada teorema elementar, conceito e propriedade que o grupo considerou fundamental para compreender as etapas demonstradas e relacionadas ao Princípio de Arquimedes. A Figura 13 apresenta o desenvolvimento dessas etapas no GeoGebra. O documento pode ser melhor visualizado no Anexo D desta tese.

Figura 13 – Desenvolvimento das etapas apresentada em Sousa (2014) utilizando o GeoGebra



Fonte: Dados da Pesquisa – Artigo final escrito pelo grupo

Em relação à construção final realizada no GeoGebra, o grupo menciona que

Trecho do artigo: [...] percebemos que o software nos dava a possibilidade identificar características de determinados objetos pela visualização, como retas paralelas ou tangentes, mas que os arquivos complementares a respeito da exploração dos conceitos, propriedades e teoremas elementares reforçaram, de forma consistente, os passos demonstrados. Ao final, fizemos um gif da

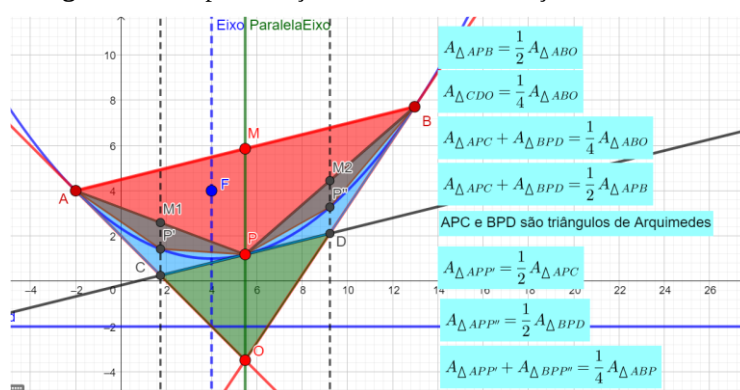


demonstração a partir da exibição dos passos por meio do protocolo de construção como alternativa à ideia inicial de criarmos uma lista, por exemplo, para exibição sucessiva das etapas da demonstração.

No contexto das concepções de demonstração matemática dinâmica (NÓBRIGA, 2019) parece surgir um novo entendimento, que envolve aproveitar a visualização imediata e intuitiva das propriedades e relações dos objetos matemáticos e criar arquivos complementares relacionados à exploração dos conceitos, propriedades e teoremas elementares que podem contribuir de maneira consistente para as etapas da demonstração. Logo, isso sugere que o GeoGebra pode ser utilizado para mediar (BORBA; VILLARREAL, 2005) a compreensão dos conceitos matemáticos, fornecendo informações adicionais que sustentam uma demonstração realizada.

Por fim, é apresentada uma imagem nomeada *Representação final da demonstração no GeoGebra* e que pode ser vista na Figura 14.

Figura 14 – Representação final da demonstração no GeoGebra



Fonte: Dados da Pesquisa – Artigo final escrito pelo grupo

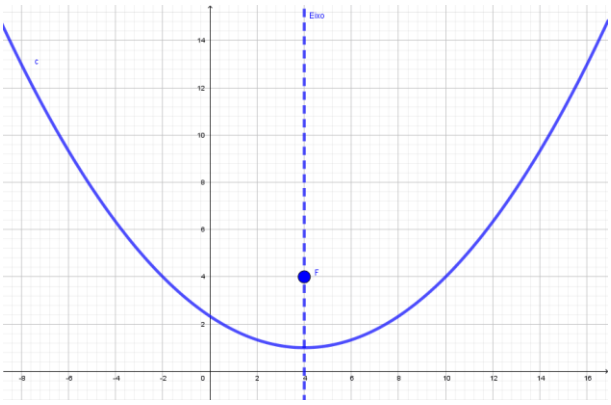
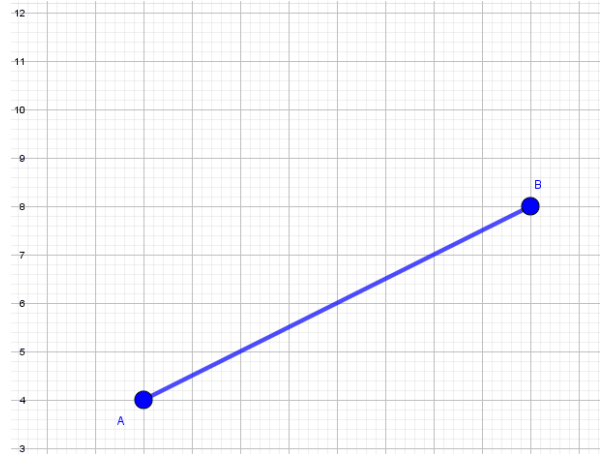
O grupo menciona a falta de detalhamento dos aspectos supracitados e também apresenta o protocolo de construção da representação final. É importante ressaltar que a preocupação do grupo em relação ao detalhamento da demonstração está relacionada à concepção de uma demonstração matemática lógico-axiomática, que pode ser remodelada para uma demonstração matemática dinâmica (NÓBRIGA, 2019), que ocorrem em ambientes que permitem a criação de construções articuladas com diferentes representações semióticas, incluindo linguística, simbólica e visual, como o GeoGebra.

5.1.5 As construções no GeoGebra e a exposição do grupo

Para a apresentação final da exploração da Quadratura da Parábola, o grupo exhibe várias construções no GeoGebra, já mencionadas no Quadro 4 do Capítulo 4 e que serão agora

detalhadas e analisadas. O Quadro 6 apresenta *GIFs*⁵⁸ com os movimentos realizados por César para a exibição dos elementos das construções no *software*, articulados à sua fala e separados por arquivo *.ggb*. Para visualizar basta reproduzir o vídeo ou clicar na imagem que um link de acesso será disponibilizado.

Quadro 6 – Movimento da exibição dos elementos das construções no GeoGebra articulados a explicação de César.

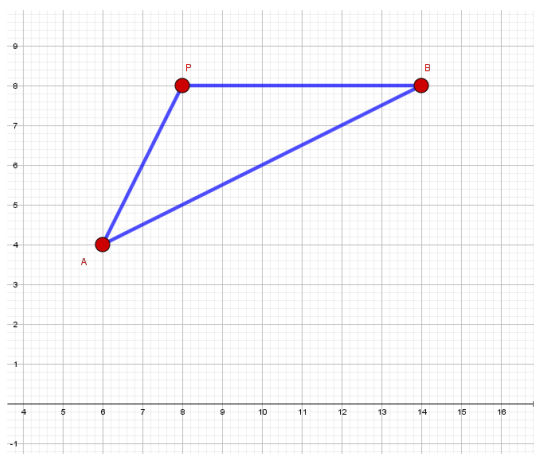
GIFs gerados a partir das construções do grupo	Explicação de César
1 - Introdução - Teorema⁵⁹ 	Se você pegar dois pontos A e B numa parábola e traçar o segmento AB você vai construir um segmento parabólico. Os pontos A e B são dois pontos quaisquer da parábola. O Arquimedes provou que se você pegar o ponto médio desse segmento AB, o ponto M aqui, e traçar uma paralela ao eixo da parábola por esse ponto M, ela vai encontrar a parábola no ponto P. Construa o triângulo com a mesma base AB e o outro vértice P. Esse triângulo permite calcular a área do segmento parabólico através da área desse triângulo. Qual é o teorema que nós vamos provar? Vamos provar que área do segmento parabólico que nós desejamos calcular é quatro terços da área desse triângulo.
2 - Fundamentos - Mediatriz⁶⁰ 	Considerando o conceito da mediatriz de um segmento AB, a reta vermelha é a mediatriz perpendicular ao segmento e que passa pelo ponto médio. Uma propriedade importante é que quando você pega qualquer ponto da mediatriz, a distância dele para o ponto A é igual a distância dele para o ponto B.

⁵⁸ Graphics Interchange Format.

⁵⁹ Link de acesso ao GIF 1: <https://drive.google.com/file/d/1DPWpOGKOrGrgM-z0yrWxWD5W4cShtMyG/view?usp=sharing>

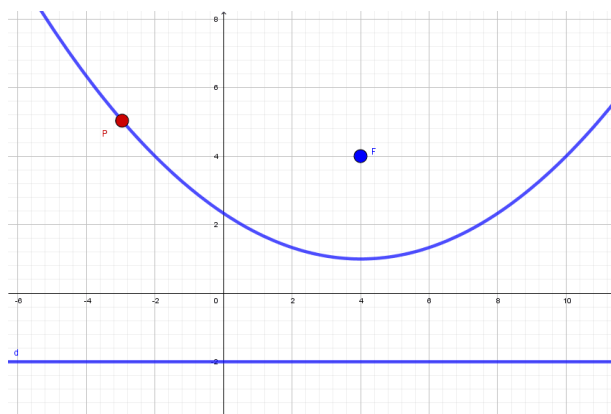
⁶⁰ Link de acesso ao GIF 2

https://drive.google.com/file/d/1qOfcZOBwgd9Im3i5gkAfIgRnS_5vLaqh/view?usp=sharing

3 - Fundamentos - Circuncentro⁶¹

Outro conceito básico que nós vamos utilizar aqui é o conceito de circuncentro de um triângulo. Se nós pegarmos um triângulo qualquer e construirmos a mediatriz do lado AB e construirmos a mediatriz do lado AP do triângulo, elas vão se encontrar em um ponto.

Quando nós formos construir a terceira mediatriz, é um conceito conhecido de todos nós, ela vai passar pelo ponto médio, vai ser perpendicular a esse segmento e vai passar nesse ponto. E pelas propriedades das mediatrizes, as distâncias aqui são iguais e nós podemos construir essa circunferência passando nos três vértices do triângulo. Então, a terceira mediatriz passa pelo ponto e passa pelo ponto médio.

4 - Demonstração - Reta Tangente⁶²

Agora, vamos começar a analisar o teorema. Primeiro conceito.

Dado um ponto qualquer de uma parábola, como construir uma reta tangente à parábola passando por esse ponto? Bom, para fazer isso basta você projetar o ponto P na diretriz da parábola. Então você projeta o ponto P aqui, liga esse segmento aqui, liga também o ponto P ao foco da parábola e depois liga o P' ao foco da parábola. Você vai construir um triângulo.

Agora, pegue o ponto médio desse segmento P'F. Então se você desenhar uma reta passando por P e por M, ela vai ser tangente a parábola no ponto P. A demonstração é bem tranquila, usa a própria definição de parábola e o conceito geométrico de parábola. Pra gente ver isso, vamos provar que essa reta é tangente a parábola.

Se ela é tangente, todos os pontos dela são exteriores à parábola, exceto o ponto P que está na própria parábola. Então, vamos pegar um ponto Q qualquer aqui nessa reta. Essa reta ela passa no ponto médio e a distância para cá é igual a distância para cá, essa em vermelho. Se ela passa pelo ponto médio, as distâncias são iguais, então ela é a mediatriz do segmento. Se ela é a mediatriz, quando eu ligar o ponto Q ao P' e ao F, as distâncias serão iguais pelo fato dela ser mediatriz do segmento.

Agora, por que esse ponto é exterior? Como que nós demonstramos que ele é exterior?

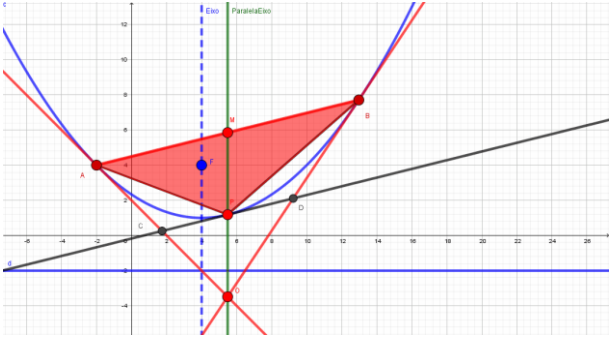
Se nós projetarmos esse ponto Q na diretriz da parábola, nós vamos obter o ponto Q'. Se nós olharmos para esse segmento dá para ver que forma um triângulo retângulo e esse segmento QQ' é menor do que o QP', porque aqui é cateto e aqui

⁶¹ Link de acesso ao GIF 3:

https://drive.google.com/file/d/15hREZMW7eE_2vVkyjE75dPQe1ixbsr7U/view?usp=sharing

⁶² Link de acesso ao GIF 4:

<https://drive.google.com/file/d/18SoYgfHoxbBTlAtcz1fBCY691F7FGkkg/view?usp=sharing>

	tangente que nós construímos aqui, nós podemos concluir que ela passa no ponto do Triângulo de Arquimedes ABO. Ela passa no ponto médio dos dois lados, então contém a base média em CD. E aí, se é base média, é paralela a base AB. Então, ela é a metade daquela base e é paralela, então nós temos essa conclusão aqui que é paralelo e é a metade do valor.
7 - Demonstração - Quadratura⁶⁵ 	Agora vamos encaminhando para a parte final da demonstração, lembrando que esse triângulo vermelho ele vai ser base para calcular a área do segmento parabólico. Nós acabamos de concluir que o P é ponto médio, então esse triângulo vermelho comparado com o Triângulo de Arquimedes, ele tem a mesma base e a mediana dele é o dobro. Então o triângulo APB tem área igual a metade da área do triângulo ABO. Se a gente olhar para esse outro triângulo aqui na ponta CDO, esse segmento é a metade daquela base lá e a altura é a metade da altura do triângulo grande. Então, a base é a metade, a altura é a metade, que conclusão que nós tiramos? O triângulo verde é um quarto do Triângulo de Arquimedes. Essa parte branca que tá faltando aqui nos dois lados, ela dá um quarto do Triângulo de Arquimedes. Só que esses triângulos azuis são triângulos de Arquimedes, então lá dentro do azul vou construir um triangulzinho que tem a metade da área do azul. Se nós somarmos a área desses dois triângulos marrons vai dar um quarto do vermelho. O que acabamos de mostrar é que se nós seguirmos esse processo, nesse pedacinho que sobrou, nós vamos obter novos triângulos que vão dar um quarto da área do marrom e assim por diante. E aí, caímos em uma soma de PG infinita.

Fonte: Dados da Pesquisa – Construções realizadas pelo grupo do GeoGebra

A escolha por separar os resultados em diversas construções se revelou altamente eficaz para a apresentação do grupo e para o entendimento do resultado a ser anunciado. A habilidade de César em articular sua fala enquanto manipula o *software* cria uma experiência interativa e integrada à explicação, permitindo que a audiência acompanhe todo o processo de maneira clara e sequencial. É notável também a atenção cuidadosa do grupo em relação à harmonia da construção, destacando os elementos relevantes e os organizando de forma coesa.

Ao final da apresentação o grupo compartilha um cordel, escrito por Hércules, para narrar os caminhos seguidos durante a exploração e estudos do problema e que pode ser visto no Quadro 7.

⁶⁵ Link de acesso ao GIF 7

https://drive.google.com/file/d/1q8IRKsolCCBH9sPvcNLxKmNX3e9TpL_o/view?usp=sharing

Quadro 7 – Cordel Quadratura da Parábola**QUADRATURA DA PARÁBOLA****Por Hércules Gimenez**

Nosso amado professor
 Buscando inovação
 Nos propôs uma tarefa
 Como avaliação

Construir no GeoGebra
 Uma apresentação
 Sobre área parábola
 Pelo método da exaustão

Para obter a parábola
 Com um plano intercepto
 Perpendicular a geratriz
 Um cone circular reto

Para calcular uma área
 Que seja equivalente
 A um segmento parabólico
 Usamos retas tangentes

Inserimos um triângulo
 E outros exaustivamente
 E assim nós obtemos
 Uma série convergente

Sendo a razão de um quarto
 Concluímos afinal
 A área dá quatro terços
 Do triângulo original

Fonte: Dados da Pesquisa – Artigo final escrito pelo grupo

Considerando os princípios do pensamento narrativo propostos por Bruner (1991), o cordel criado por Hércules expressa uma narrativa matemática (DOXIADIS, 2003) por meio da linguagem poética, criando uma sequência de eventos que envolvem a exploração da quadratura da parábola em um contexto histórico. Nessa narrativa matemática, o cordel explora o lado imaginativo da matemática, transcendendo a abordagem tradicional baseada na enunciação de teoremas utilizando notações matemáticas. Ao apresentar as etapas da exploração do problema como uma dança, o cordel personifica as abstrações matemáticas, as tornando humanas (HEALY; SINCLAIR, 2007) e permitindo ao leitor desenvolver uma conexão emocional com a construção.

A dança descrita no cordel também pode ser vista como uma metáfora para a interação e a relação entre as etapas de uma demonstração. A partir dessa metáfora, o cordel explora as propriedades e as relações matemáticas, revelando a harmonia e a beleza subjacentes, apresentado aspectos de um pensamento narrativo (BRUNER, 1991). Ao combinar a poesia

com a matemática, o cordel cria uma narrativa que transcende os limites do pensamento estritamente lógico, permitindo uma apreciação estética e emocional da Matemática.

5.2 Investigando o problema da Espiral

Seguindo o mesmo princípio da apresentação e análise dos dados produzidos pelo primeiro grupo, relato agora, também em ordem cronológica, as ações do grupo que optou por explorar o problema da Espiral e como suas integrantes se movimentaram em busca de uma solução para a atividade.

5.2.1 Encontro 1

Nesse grupo, os encontros dedicados à exploração da atividade proposta tiveram início dois meses e meio antes da data de apresentação final do trabalho. Durante os horários de aula da disciplina de Gênese, o grupo dialogou e decidiu sobre a temática do trabalho. Antes do primeiro encontro, elas também compartilham entre si algumas referências como materiais de apoio (AGUIAR; AGUIAR; SIQUEIRA, 2013; VELOSO, 2017; SANTOS; NETO; SILVA, 2007; PEDROSO; PRECIOSO, 2015; SANTOS, 2011). Infelizmente, devido a conflitos de agenda, não pude acompanhar à primeira reunião de trabalho desse grupo, porém, tive acesso às decisões que foram tomadas por meio das mensagens no *WhatsApp*.

No primeiro encontro, o grupo discute e define algumas diretrizes para o trabalho, incluindo a atribuição de responsabilidades. Fica acordado que Marina e Helena seriam responsáveis pela produção e edição do vídeo, enquanto Ana e Clara ficariam encarregadas da construção no GeoGebra e da redação do artigo. Como primeira tarefa, foi estabelecido que elas estudariam o problema proposto e apresentado em Edwards (1979), para que na próxima semana pudessem compartilhar possíveis abordagens com o uso do GeoGebra. A Figura 15 apresenta o material a ser estudado pelo grupo. O documento pode ser melhor visualizado no Anexo E desta tese.

Figura 15 – Material estudado pelo Grupo 2

The Archimedean Spiral

Greek mathematicians suffered from a paucity of curves available to serve as objects of their study. Because their algebra was geometric and rhetorical rather than numerical and symbolic, the introduction of new curves by means of equations (as in analytic geometry) was not feasible. In addition, Greek geometry was essentially static rather than dynamic in character. Consequently they could, for the most part, define curves only in terms of simple locus conditions (e.g., the circle as the locus of points equidistant

The Archimedean Spiral

55

from a given fixed point) or as intersections of given surfaces fixed in position (e.g., a conic section as the intersection of a plane and a cone).

The static character of Greek geometry is a reflection of the very limited role of motion and variability concepts in Greek science generally. Only the cases of *uniform* motion—either rectilinear or circular—were studied in any detail. Other motions (such as those of the planets in Greek astronomical models) could only be analyzed in terms of uniform linear and circular motions.

It was in these terms that Archimedes defined his famous spiral—as the composition of a uniform linear motion and a uniform circular motion.

If a straight line drawn in a plane revolve at a uniform rate about one extremity which remains fixed and return to the position from which it started, and if, at the same time as the line revolves, a point move at a uniform rate along the straight line beginning from the extremity which remains fixed, the point will describe a *spiral* in the plane (Definition 1 of *On Spirals*).

To describe this curve in modern polar coordinates, let ω (in radians) be the constant angular speed of rotation of the line, and v the constant speed with which the point moves along the line, starting at the origin. Then the polar coordinates of the moving point at time t are $r = vt$ and $\theta = \omega t$, so the polar coordinates equation of the spiral is

$$r = a\theta \quad (31)$$

where $a = v/\omega$.

The first twenty propositions of the treatise *On Spirals* are devoted mainly to the determination of the tangent line to the spiral at a given point of it. Here, as elsewhere in Greek geometry, a static conception of a tangent line to a curve is employed—it is a straight line that “touches” the curve at a single point without crossing it. Although no dynamic considerations appear in the finished exposition, it has been conjectured that Archimedes *discovered* the tangent line to the spiral by means of a parallelogram of velocities determined by the two component motions generating the spiral (see the Appendix to Heath [6]). If so, this would be a rare (if not unique) instance of *differential* calculus methods in antiquity.

At any rate, he shows that the tangent line at the point P to the spiral OPS intersects the perpendicular OQ to OP in a point T such that the line segment OT is equal in length to the circular arc PR intercepted between the polar axis and the radius vector OP (Fig. 24). The proof is a double *reductio ad absurdum* argument showing that the assumptions $OT > PR$ and $OT < PR$ lead to contradictions.

EXERCISE 14. Use a parallelogram of velocities argument to verify Archimedes’ construction of the tangent line to the spiral, for the case when P is the point $(0, \pi/2)$ on the y -axis resulting from one quarter-turn of the radius vector. At this

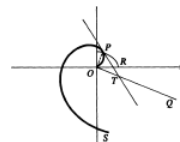


Figure 24

instant P has a vertical velocity component v and a horizontal velocity component $v\omega\pi/2$ (why?).

EXERCISE 15. Suppose the spiral and its tangent line at the point P of the preceding exercise are given. Then explain how on this basis to “square the circle”—to construct by ruler and compass methods a square whose area is equal to that of the circle with radius OP . Recall the first proposition of *On the Measurement of the Circle*.

EXERCISE 16. Show that the Archimedean spiral can be used to trisect an arbitrary angle, given that a line segment can easily be trisected (how?) See Figure 25.

The final eight propositions of *On Spirals* are devoted to area computations. For example, Archimedes proves that the area of the region S , bounded by one turn of the spiral and the line segment joining its initial and final points, is one-third that of the circle C centered at the initial point and passing through the final point (Fig. 26). That is,

$$a(S) = \frac{1}{3}\pi(2\pi a)^2. \quad (32)$$

The proof of (32) makes use of the familiar (then as now) formulas for

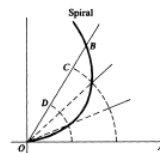


Figure 25

The Archimedean Spiral

57

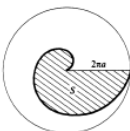


Figure 26

the sum of the terms of an arithmetic progression, and of their squares:

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n}{2}(n+1) \quad (33)$$

and

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1). \quad (34)$$

Writing (34) in the form

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6},$$

it is clear that

$$1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2 < \frac{n^3}{3} < 2^2 + 3^2 + \dots + n^2, \quad (35)$$

which is what Archimedes actually needed.

EXERCISE 17. Prove by mathematical induction that formulas (33) and (34) hold for all n . That is, note that each of these formulas holds for $n=1$, and show that its truth for $n=k$ implies its truth for $n=k+1$. Why does this imply that it holds for all n ?

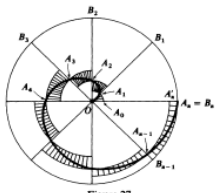


Figure 27

The Archimedean Spiral

59

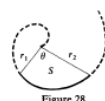


Figure 28

by (35). This contradiction shows that $a(S)$ is not greater than $\frac{1}{3}a(C)$, so we conclude that

$$a(S) = \frac{1}{3}a(C) = \frac{1}{3}\pi(2\pi a)^2 \quad \square$$

as desired.

Archimedes

58

Archimedes

Archimedes’ geometric construction for the proof of (32) is very similar to that which would be employed to set up a modern definite integral in polar coordinates for this area computation—see Figure 27. We divide the circle into n equal sectors as shown, with their bounding radii intersecting the spiral in the points $O, A_1, A_2, \dots, A_n$. If we write $OA_1 = b$, then

$$OA_1 = b, \quad OA_2 = 2b, \quad \dots, \quad OA_n = nb.$$

Consequently we see that the spiral region S contains a region P consisting of circular sectors with radii

$$0, b, \dots, (n-1)b,$$

and in turn is contained in a region Q consisting of circular sectors with radii

$$b, 2b, \dots, nb.$$

Therefore $a(Q) - a(P)$ is equal to the area of a single sector of the circle C , and this can be made as small as we please by choosing n sufficiently large. Thus we have the necessary ingredients for a proof by compression.

If $a(S) < \frac{1}{3}a(C)$, we choose n sufficiently large that

$$a(Q) - a(P) < \frac{1}{3}a(C) - a(S),$$

so it follows that

$$a(Q) < \frac{1}{3}a(C).$$

But since the ratio of the areas of similar circular sectors is equal to the ratio of the squares of their radii, we find that

$$\begin{aligned} \frac{a(Q)}{a(C)} &= \frac{b^2 + (2b)^2 + \dots + (nb)^2}{n(nb)^2} \\ &= \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^3} > \frac{1}{3} \end{aligned}$$

by (35). This contradiction shows that $a(S)$ is not less than $\frac{1}{3}a(C)$.

Assuming that $a(S) > \frac{1}{3}a(C)$, we choose n sufficiently large that

$$a(Q) - a(P) < a(S) - \frac{1}{3}a(C),$$

so it follows that

$$a(P) > \frac{1}{3}a(C).$$

But then we find that

$$\begin{aligned} \frac{a(P)}{a(C)} &= \frac{b^2 + (2b)^2 + \dots + [(n-1)b]^2}{n(nb)^2} \\ &= \frac{1^2 + 2^2 + \dots + (n-1)^2}{n^3} < \frac{1}{3} \end{aligned}$$

5.2.2 Encontro 2

No segundo encontro, realizado uma semana após o primeiro, questiono o processo de seleção do problema. As integrantes do grupo explicam que o critério utilizado foi, em certa medida, visual, uma vez que, ao realizar pesquisas na bibliografia sugerida durante a disciplina, a espiral chamou a atenção devido à sua representação geométrica. Além disso, o grupo argumenta que também realizaram pesquisas adicionais na internet para verificar a viabilidade de construir o problema no GeoGebra. Ana compartilha os avanços realizados no estudo da demonstração e menciona a importância de destacar, durante a apresentação final do trabalho, pontos centrais que contribuem para a abordagem do problema.

Ana: *Eu fui pesquisar em relação a esses resultados e um dos que eu vi que eles dizem ser importante, para a construção da espiral, é a trissecção do ângulo. Então, acho que isso vale a pena trazer, pois foi um resultado importante para a época.*

Clara: *É, nos arquivos que pesquisei eles também citavam a trissecção do ângulo.*

Ana: *Eu percebi que eles também trazem alguns resultados a partir disso, que é a reta tangente à espiral, que tem a ver com a questão do cálculo, e a outra tem a ver com a quadratura do círculo. Agora uma coisa que eu não cheguei no final, e não ficou claro, é a relação com as coordenadas polares. [...] Talvez tentar realizar a construção da trissecção do ângulo no GeoGebra seja interessante.*

Helena: *Mas uma dúvida, pelo o que eu entendi do problema do livro, o Arquimedes só faz um esboço geométrico da espiral, ele não tem nenhuma resolução algébrica disso, certo?*

Ana: *É, eu fiquei um pouco na dúvida disso também. Tem uma parte aqui que ele trabalha com o conceito de equilíbrio. Então eu acho que a gente vai ter que estudar um pouco dessa questão física.*

Clara: *Se você olhar para todo o processo dele, independentemente de ser isso aqui ou não [apontando para a espiral] é sempre muito geométrico o que ele está fazendo. É também sempre muito prático, visando uma aplicação mais prática. Então acho que equações, essas coisas, só vem depois.*

O diálogo reflete um processo de investigação e reflexão sobre os resultados e conceitos matemáticos relacionados à espiral de Arquimedes. As participantes compartilham informações, levantam dúvidas e fazem observações sobre a abordagem geométrica e prática adotada. A troca de perspectivas e a necessidade de investigação mais aprofundada demonstram um interesse genuíno em compreender o problema e suas aplicações.

A partir das discussões, o grupo reconhece a importância de compreender três conceitos fundamentais dentro do contexto da espiral: (i) a trissecção do ângulo, (ii) a tangente à espiral e (iii) a área da espiral em relação a uma circunferência. Ana destaca a necessidade de aprimorar a tradução, pois os termos utilizados na época podem gerar confusão. Além disso, Helena expõe sua dificuldade em compreender algumas conclusões na demonstração, observando que o livro aborda os tópicos de forma direta, sem justificar suas escolhas de maneira explícita e também sugere uma possível abordagem da trissecção do ângulo utilizando origamis.

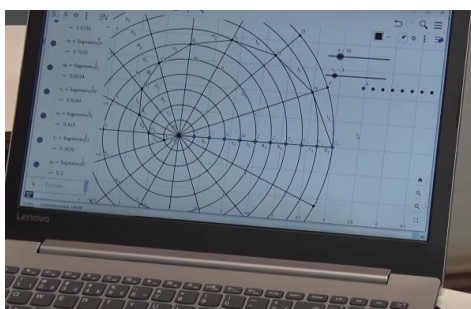
Na busca por esclarecer algumas questões da demonstração, o grupo decide recorrer aos estudos de Baron (1985) como uma referência adicional sobre a abordagem da espiral. Elas concordam em realizar um estudo aprofundado desse material, com o objetivo de explorar possíveis conexões com o que foi proposto em Edwards (1979). Além disso, se comprometem a buscar outras referências que possam contribuir para a compreensão e o aprimoramento do estudo também no âmbito da física, relacionando com a ideia de construções estáticas e dinâmicas.

Entre o segundo e o terceiro encontro, as integrantes trocam mensagens no grupo do *WhatsApp* informando sobre o desenvolvimento de seus estudos. Durante essa troca, Ana sugere e envia um material adicional, o livro *História da Matemática* de Tatiana Roque (ROQUE, 2012).

5.2.3 Encontro 3

No terceiro encontro, duas integrantes do grupo portam seus respectivos *notebooks* e apresentam alguns avanços no desenvolvimento do problema no GeoGebra. Helena compartilha um material que aborda a criação de novas ferramentas no *software* e Ana comenta que aprendeu a construir uma ferramenta que divide segmentos de maneira automática e explica como se deu tal abordagem a partir de duas construções. Uma dessas construções pode ser visualizada na Figura 16.

Figura 16 – Construção preliminar da espiral realizada por Ana no GeoGebra



Fonte: Dados da Pesquisa – Capturas de tela das gravações

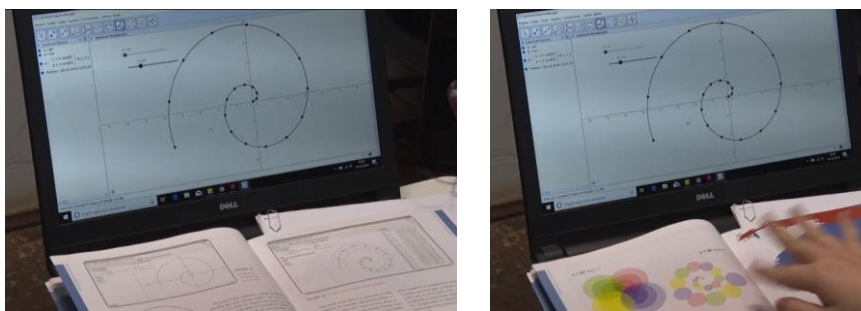
Segundo Ana, a construção mencionada é baseada em uma abordagem que utiliza régua e compasso, que parte de uma circunferência inicial com raio n e, em seguida, esse raio é ajustado para diminuir ou aumentar de acordo com o número de divisões desejado. Helena também compartilha com o grupo uma tentativa de construção no *software*.

Helena: Então, eu me baseei nesse artigo que vai falar primeiro sobre como construir uma ferramenta no GeoGebra. E é com essa ferramenta que ele vai criar círculos e diâmetros. [...] Ele vai criar dessa forma porque a figura final que ele forma, com a espiral, são esses círculos. Mas é

só por uma questão de estética. [...] E aí na sequência ele fala da construção da espiral, que é simples, só utilizar a equação parametrizada.

O trecho revela a importância da construção de uma ferramenta no GeoGebra para auxiliar na visualização e criação dos círculos que compõem a espiral. A consideração estética também é mencionada, indicando a preocupação em obter uma organização sensorial (BOAL, 2008). A abordagem apresentada por Helena pode ser vista na Figura 17.

Figura 17 – Construção preliminar da espiral realizada por Helena no GeoGebra



Fonte: Dados da Pesquisa – Capturas de tela das gravações

A construção da espiral de Arquimedes utilizando princípios de uma abordagem com régua e compasso requer um conjunto de resultados geométricos específicos para obtenção dos pontos da espiral. Vale destacar a importância pedagógica que essa a construção pode apresentar, permitindo a compreensão e exploração de princípios geométricos subjacentes e o desenvolvimento de habilidades de visualização, raciocínio e exploração.

Nesse sentido, Ana apresenta outra alternativa de construção que descobriu em um artigo (TAKAČI; TAKAČI; TAKAČI, 2011) no qual os autores propõem uma abordagem utilizando equações paramétricas e disponibilizam um arquivo .ggb como recurso. Para compreender melhor o processo dessa construção, Ana investiga o protocolo de construção que pode ser acessado no próprio GeoGebra, e expõe que ainda existem alguns aspectos que não estão totalmente claros para ela. O seguinte diálogo segue na sequência

Ana: *De toda forma eu acredito ser interessante a abordagem a partir do lugar geométrico porque traz uma outra visão trabalhando com as circunferências e é um pouco do que tem naquele livro [Edwards, 1984]. Ele trabalha com circunferências.*

Marina: Qual é o objetivo? Além de fazer essa construção no GeoGebra? Eu estou tentando entender o porque estamos fazendo isso.

Helena: Eu entendo que *tem três coisas fundamentais* [...] que é a trissecção do ângulo, traçar a reta tangente a partir da espiral, e o terceiro é que ele define uma fórmula geral pra você calcula a área de uma região determinada pela espiral. [...] E aí, quando aparece todos esses cálculos *ele vai provar, quer dizer, ele não, porque eu li em algum lugar que o Arquimedes só faz geometricamente, em nenhum lugar foi encontrado cálculo.*

Assim como no grupo 1, surge a indagação do objetivo de explorar um problema clássico utilizando o GeoGebra e Sousa (2020) apresenta indícios para uma possível resposta. Enquanto a História da Matemática fornece entendimento de como os problemas matemáticos surgiram e foram resolvidos ao longo do tempo, as tecnologias digitais oferecem ferramentas e

recursos que podem auxiliar os estudantes na busca por novas soluções a partir de incentivos à exploração, formulação de hipóteses e execução de estratégias para resolução dos problemas.

Contudo, Helena faz sugestões para a execução do trabalho, propondo a construção dos três elementos fundamentais, usando o GeoGebra, além de uma construção que relacione a área da espiral com a área de um círculo. Vale destacar que esses elementos já haviam sido enfatizados por Ana durante o encontro anterior, demonstrando sua relevância para a abordagem do problema.

Com isso, o grupo entra em uma discussão de como tais construções poderiam ser realizadas, questionando principalmente como encontrar áreas abaixo de curvas utilizando ferramentas do *software*. Algumas alternativas são sugeridas, como aproximações utilizando triângulos. Helena comenta: “*A gente podia tentar ver um jeito de criar um controle deslizante em que, à medida que a gente fosse movendo-o, esses triângulos iriam aparecendo, e aí a gente não precisaria fazer a construção manual [...]. Talvez pudéssemos ter uma ideia a partir da construção de integral.*”

O grupo então se mobiliza na busca por mais referências que possam auxiliar na construção pretendida, enquanto dialogam sobre as possibilidades que o GeoGebra proporciona.

Ana: *Sabe o que eu acho? Faz diferença você pensar com o Geogebra, você conseguir pensar uma matemática com ele. Eu ainda tenho dificuldade em pensar o movimento, eu consigo construir o estático, mas ainda preciso pensar em como trazer esse movimento.*

Helena: *É, nesse sentido é bom conversar com quem manja, porque aí a pessoa já visualizou todas as possibilidades de ferramentas e comandos que podem ser utilizados.*

Essa interação entre Ana e Helena expõe uma postura de aprendizado conjunto, em que reconhecem a importância do diálogo e do compartilhamento de conhecimentos para o desenvolvimento de habilidades com o GeoGebra. Isso reflete o pensamento coletivo proposto por Levy (1993), que enfatiza a importância da colaboração e da construção conjunta do conhecimento em um contexto de aprendizagem coletiva composto por atores humanos e não humanos, evidenciando a noção de seres-humanos-com-mídia (BORBA; VILLARREAL, 2005).

Nesse contexto, o grupo se coloca em um processo de pesquisa por estudos e construções que explorem a dinamicidade do GeoGebra e diferentes arquivos são compartilhados no grupo do *WhatsApp*, incluindo documentos em *.pdf*, *.ggb*, links⁶⁶ de vídeos

⁶⁶Tutorial de como fazer uma construção dinâmica no GeoGebra explorando a Integral Definida: <https://www.youtube.com/watch?v=tzjvicEp8AY>
Tutorial <https://www.youtube.com/watch?v=wZF9tdBCx0A>

disponíveis no *YouTube* e também materiais de um blog⁶⁷. Enquanto isso, um diálogo sobre os próximos movimentos ocorre.

Marina: *Eu acho que a gente precisa estudar.*

Ana: *Isso, estudar a parte matemática e estudar tentando fazer já no GeoGebra. Porque pra mim, foi melhor. Sinceramente gente, eu não estava entendendo nada, aí quando fui ver a construção no GeoGebra eu entendi!*

Marina: *Caramba, com tudo isso que você explicou pra gente você não estava entendendo nada?*

Ana: *Eu estava entendendo o que estava escrito, mas eu não estava conseguindo ver e entender o movimento, entender que la construção dependia do raio, que eu ia ter várias espirais. E estava meio confuso pra mim e aí quando eu fui montando fui percebendo as propriedades da figura.*

Nesse contexto, as ideias de Borba e Villarreal (2005) se confirmam, sugerindo que, de alguma forma, os pensamentos de Ana foram moldados pela mídia utilizada e suas declarações revelam uma concretização da exploração, visualização e experimentação, resultando em uma reorganização do pensamento. Essa mudança ocorre devido à estreita ligação entre a consciência dos movimentos e as representações matemáticas no GeoGebra, sugerindo que a abordagem com o *software* vai além das tecnologias de inteligência convencionais, oferecendo uma extensão da memória com características únicas. Assim, caminhos se abrem para outras formas de pensamento em um ambiente de simulação e experimentação.

Como mencionado no capítulo anterior, pude acompanhar apenas dois encontros do grupo. Porém, muitas trocas foram realizadas via *WhatsApp*, que possibilitou um possível entendimento de seus movimentos. Apresento a seguir algumas das mensagens compartilhadas

5.2.4 Interações no grupo do WhatsApp

Os registros de conversas e trocas de mensagens no grupo de *WhatsApp* desempenharam um papel fundamental ao documentar as decisões tomadas durante todo o processo de estudo e criação. Essa documentação permitiu que eu compreendesse as escolhas realizadas para o fechamento do trabalho, possibilitando uma visão clara do caminho percorrido pelo grupo. O acesso a essas informações registradas facilitou a análise retrospectiva das deliberações e contribuiu para uma compreensão mais aprofundada dos movimentos realizados.

O *WhatsApp* foi o único meio de comunicação utilizado pelo grupo e, como já mencionado, foi um ambiente que propiciou o compartilhamento de ideias, documentos e decisões de forma ágil, como evidenciado na mensagem de Ana: “*Pessoal, bom dia. Encontrei uma dissertação de mestrado (FREITAS, 2014), que aborda os problemas clássicos da antiguidade, incluindo a trissecção do ângulo. Pensei em me concentrar nesse problema e ver*

⁶⁷ Material disponível em <https://www.obaricentrodamente.com/2012/03/area-em-coordenadas-polares.html>

o que consigo fazer. O que vocês acham?”. A seguir, é possível observar um redirecionamento dos estudos do grupo para as construções, em que possibilidade de exploração no GeoGebra são compartilhadas.



Ana: Gente, realmente com a construção da espiral na forma paramétrica o GeoGebra não faz a interseção da curva com os setores, vou parar um pouco de mexer com a trissecção e tentar um dos outros problemas.

Helena: Pessoal, esse material fala um pouco sobre o contexto histórico do problema da trissecção do Ângulos (começa da página 12 do PDF). <http://www.im.ufrj.br/walcy/Bienal/textos/trisseccao.pdf> [...]

Helena: Ana, encontrei esse material e estava tentando fazer a construção da trissecção do ângulo seguindo esses passos (pg.31-32), veja o que vc acha. http://rodrigomat2004.pbworks.com/w/file/89736425/3_problemas_classicos.pdf

Ana: Oi Helena, vou ver. Aproveitando, na parte que fala da reta tangente no artigo referência, tem o resultado que Arquimedes demonstrou. Eu não consegui fazer a construção da reta tangente (sem usar a ferramenta pronta do GeoGebra), mas consegui fazer a ‘verificação’ do resultado utilizando o GeoGebra.

No diálogo, Ana menciona que conseguiu fazer a ‘verificação’ (entre aspas) do resultado, utilizando o GeoGebra. Essa forma de escrita sugere que ela utilizou o *software* para confirmar ou validar o resultado proposto no problema, ideia que se alinha com uma das funções de prova propostas por De Villiers (1990), que é a de verificação/convencimento, que tem como aspecto norteador a preocupação com a veracidade de uma afirmação. Nesse contexto, a verificação realizada com o GeoGebra contribui para a validação do resultado proposto no problema da construção da reta tangente, sendo possível confirmar as propriedades matemáticas e as informações apresentadas no artigo de referência.



Helena: Meninas, vou compartilhar uma construção da trisseccao do ângulo que eu fiz aqui me guiando por um material que encontrei (vêr paginas 31-32 http://rodrigomat2004.pbworks.com/w/file/89736425/3_problemas_classicos.pdf). Falei aqui com um amigo e ele comentou que acha que é uma questão da programação do GeoGebra, pois não é só com a espiral que isso acontece, qlq paramétrica não tem intersecção com cônicas nem funções. [...]

Helena: Segue uma construção no GeoGebra que faz a trissecção do ângulo, no entanto, sem estar trabalhando com equações parametrizadas: <https://www.geogebra.org/m/tz5nzagx>. Fiquei aqui pensando que esse poderia ser um problema interessante para discutirmos quando formos apresentar o trabalho. Podemos mostrar dois modos diferentes que tentamos avançar com o problema, mas não conseguimos por conta dessa configuração do GeoGebra. O que vcs acham? Vocês vão reparar que há uma diferença no valor do ângulo, justamente por não conseguir fazer essa intersecção.

Ana: Helena, a sua construção está bem próxima da que eu fiz, só não dá pra ‘movimentar’ e ir mudando o ângulo. Vou tentar fazer no meu, mesmo que aproximado devido ao problema da intersecção, para ver se dá certo.

Helena: Enviei apenas para sabermos que é possível fazer a trissecção do ângulo com o GeoGebra, mas não é possível quando envolve equações parametrizadas.

Ana: Entendi. Estou pensando aqui e acho que só conseguiremos se acharmos um modo de construir a espiral sem ser na forma paramétrica. Vou ver a construção como lugar geométrico e tentar fazer para ver se dá certo. [...]

Helena: Nesse trabalho: https://www.maxwell.vrac.puc-rio.br/24228/24228_4.PDF o autor faz a espiral com segmentos de reta. Talvez fosse uma saída

Ana: Bom...vamos tentando...Estou mais feliz...conseguimos avançar bastante. Vídeo, música, ideias, geogebra,..ufa!!

O diálogo revela uma abordagem dinâmica e colaborativa adotada pelo grupo nos estudos relativos à construção da Espiral, onde foram explorados diversos recursos e estratégias no GeoGebra para aprofundar a compreensão e avançar no tema. A discussão em torno do uso de equações paramétricas na trissecção do ângulo evidencia o aspecto de percepção de conexões entre ideias e conceitos matemáticos com a mediação do *software*. A busca por alternativas, como a exploração do lugar geométrico ou a utilização de segmentos de reta, revela a possibilidade de um desenvolvimento histórico de conceitos e métodos matemáticos, contribuindo para compreensão teórica e fornecendo uma mediação semiótica no processo de exploração e argumentação. (BACCAGLINI-FRANK; MARIOTTI, 2010).

Com o objetivo de avançar e finalizar a construção da espiral, o grupo se reuniu para um último encontro uma semana antes da apresentação final do trabalho. O encontro foi permeado por discussões sobre a trissecção do ângulo e a questão da intersecção; a trissecção através de neusis⁶⁸; e ideias para a produção do vídeo. A partir daí, o grupo embarca em um processo de tomada de decisões, discutindo o que será incluído no artigo final; como a apresentação será realizada; e como o vídeo será produzido. Durante esse processo, várias versões do artigo foram compartilhadas, juntamente com diversas construções no GeoGebra, com o objetivo de concluir a exploração do problema da espiral e articular a melhor forma de desenvolvê-lo. A troca de ideias e o compartilhamento de materiais favoreceu o aperfeiçoamento da compreensão do grupo sobre o problema e contribuiu para a definição da apresentação, bem como possibilitou uma abordagem colaborativa para resolução do problema proposto que é apresentado no artigo final.

5.2.5 O artigo final

O artigo final do grupo intitulado *Movimento Ascendente: A Espiral de Arquimedes* possui 14 páginas e está dividido nas seguintes seções: Resumo, Apresentação: uma breve introdução, Geometria grega e a espiral de Arquimedes, Reta tangente a espiral de Arquimedes,

⁶⁸ Neusis é um termo que se refere a uma técnica geométrica utilizada na Grécia Antiga para resolver problemas de construção, principalmente relacionados à trissecção de ângulos e duplicação do cubo. A palavra neusis vem do grego e significa movimento, ação ou maneira de empurrar. A técnica da neusis envolve o uso de uma régua especial chamada de régua de neusis ou régua com neusis para realizar construções geométricas complexas. (EVES, 2011).

Trissecção do ângulo utilizando a espiral de Arquimedes, Espiral de Arquimedes e áreas, Considerações finais e Referências.

Na Introdução, o grupo apresenta elementos históricos relacionados a Arquimedes, além de destacar várias de suas contribuições para a Matemática. É apresentada uma síntese da obra *On Spirals* e mencionado qual seria o objetivo de Arquimedes ao desenvolver estudos a partir da espiral, ou seja, encontrar soluções para a quadratura do círculo e também explorar a trissecção de um ângulo. Além disso, parte dessas proposições visava traçar a reta tangente em um ponto específico de uma curva e calcular áreas.

No que segue, é apresentado um panorama sobre a aspectos da Geometria Grega desenhando um movimento ascendente até a espiral de Arquimedes.



Trecho do Artigo: Entretanto, com a espiral, Arquimedes apresenta um contra exemplo da ideia de que a geometria Grega era estritamente estática. Ele a define, como uma composição de um movimento uniforme linear e um movimento circular uniforme, envolvendo ainda, a ideia de variabilidades.

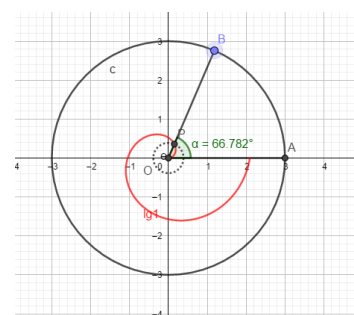
O texto apresenta a definição da espiral, baseada nas obras de Edwards (1979) e Roque (2012) e a sintetiza como lugar geométrico, apresentando etapas de uma possível construção no GeoGebra (Quadro 8).



Trecho do Artigo: A Espiral de Arquimedes pode ser definida como o lugar geométrico dos pontos P de uma reta que gira em torno do centro O com velocidade angular constante e o ponto P se desloca sobre a reta r a partir de O com velocidade constante sobre a reta. Assim, à medida que α aumenta, o ponto P da espiral se afasta proporcionalmente de O e o lugar geométrico de P em relação a B é a espiral procurada. Para isto, pautados nos procedimentos de construção geométrica apontados por (AGUIAR, AGUIAR, SIQUEIRA, 2013).

Quadro 8 - Etapas da construção da Espiral de Arquimedes como lugar geométrico e sua imagem

- 1) Criar um controle deslizante p da amplitude desejada.
- 2) Construir uma circunferência de centro O e raio p .
- 3) Marcar um ponto móvel B na circunferência.
- 4) Marcamos o ângulo $\alpha = \widehat{AOB}$.
- 5) Construir uma circunferência de centro em O e raio $p\alpha$.
- 6) Determinar o ponto P de intersecção entre a circunferência e o segmento.
- 7) Determinar o lugar geométrico de P em relação a B .
- 8) Habilitar o rastro no Lugar Geométrico.
- 9) Animar o ponto B .



Fonte: Dados da Pesquisa – Artigo final escrito pelo grupo

As etapas 8 e 9 da construção apresentam funcionalidades do *software* em que é possível visualizar de forma interativa as transformações e variações dos objetos geométricos que estão sendo explorados, possibilitando nova experiência no processo de compreensão de conceitos e propriedades matemáticas. Ao animar um elemento construído, como uma reta, um polígono ou uma função, é possível observar sua transformação ao longo do tempo, explorando diferentes configurações e relações. Isso não apenas torna o processo de aprendizagem mais envolvente e

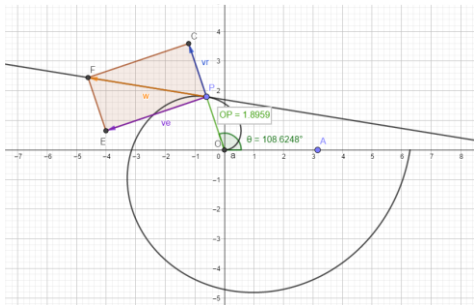
estimulante, mas também proporciona uma maior percepção das mudanças e comportamentos dos objetos matemáticos em diferentes contextos, favorecendo a ascensão de um conhecimento empírico para um hipotético-dedutivo (GRAVINA, 2001). A partir da animação, o GeoGebra potencializa a exploração e experimentação, favorecendo a percepção de padrões, conjecturas e relações, além de permitir a realização de investigações aprofundadas.

Voltando ao artigo, ainda na seção que aborda aspectos da Geometria Grega, o texto destaca a viabilidade de expressar o problema em linguagem atual utilizando coordenadas polares. Na sequência, se dedica a elaborar compreensões de três problemas que Arquimedes desenvolveu a partir de sua definição de espiral, ou seja, a reta tangente a curva, o cálculo de áreas e, a trissecção do ângulo, buscando apresentá-las por meio de construções feitas no GeoGebra.

A reta tangente a curva é apresentada a partir da abordagem proposta em Vuillemin, (1960, apud Ramos, 2016) e o texto expõe que Arquimedes desenvolveu a reta tangente a espiral por meio de um paralelogramo de velocidades determinado por dois componentes de movimento que gera a espiral, o que pode ser um raro (ou único) exemplo de método do cálculo diferencial da antiguidade (ROQUE, 2012).

O Quadro 9 apresenta as etapas para uma possível construção no GeoGebra, proposta pelo grupo, bem como imagem do resultado final.

Quadro 9 - Etapas para a construção do paralelogramo de velocidade – Reta tangente a curva e sua imagem

1) Construir a espiral por meio de sua equação. 2) Determinar um ponto P na espiral. 3) Construir a reta OP. 4) Determinar a medida do Segmento OP. 5) Determinar a medida do ângulo θ determinado pela reta OP e o eixo polar. 6) Determinar o segmento PC de medida θ. (Por meio de uma circunferência, com centro em P e raio θ e então o ponto C será determinado pela intersecção da circunferência e a reta OP). 7) Construir o vetor vr, determinado por P e C. 8) Traçar uma reta perpendicular a reta OP, passando por P. 9) Determinar o segmento PE de medida $\theta \times OP$. (Por meio de uma circunferência, com centro em P e raio $\theta \times OP$ e então o ponto E será determinado pela intersecção da circunferência e a reta perpendicular a OP). 10) Construir o vetor ve, determinado por P e E. 11) Construir uma reta paralela a OP, passando por E. 12) Construir uma reta perpendicular a OP, passando por C. 13) Determinar o ponto F de intersecção das duas retas. 14) Determinar o vetor w, formado pelos pontos P e F. 15) A reta que contém o vetor w é a reta tangente a espiral no ponto P. Podemos comprovar mediante o uso da ferramenta reta tangente que coincidirá com o vetor w. 16) Animar o ponto P para que se possa ver as diferentes retas tangentes.	
---	--

Fonte: Dados da Pesquisa – Artigo final escrito pelo grupo

Vale destacar, que o artigo menciona a possibilidade da espiral ser expressa, em linguagem atual, por meio de coordenadas polares, tomando w (em radianos) como sendo a velocidade angular constante da reta, e v como a constante de velocidade com que o ponto se move pela reta. Assim, com início na origem tem-se que as coordenadas polares do movimento do ponto, no tempo t são dadas por $r = vt$ e $\theta = wt$. Logo, a equação em coordenadas polares da espiral é dada por $r = a\theta$, com $\theta \geq 0$, onde $a = v/w$.

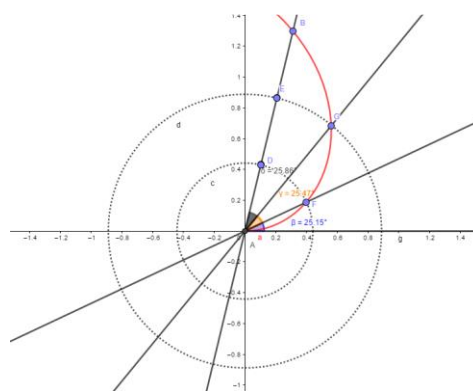
O problema da trissecção do ângulo é apresentado, a partir da Proposição XIV, com base na definição anunciada em Sousa (2001, p. 26) que diz que

Se, a partir da origem da espiral, se traçarem duas linhas retas até encontrarem a primeira volta da espiral, e se se prolongarem até encontrarem a circunferência do primeiro círculo, as linhas traçadas até à espiral terão entre si a mesma razão que os arcos da circunferência entre a extremidade da espiral e as extremidades das retas prolongadas até encontrarem a circunferência, sendo os arcos medidos para a frente a partir da extremidade da espiral.

No que segue, o texto propõe um procedimento para a construção da trissecção do ângulo a partir da espiral, utilizando o GeoGebra, e que pode ser visto no Quadro 10 junto com a imagem gerada após a construção.

Quadro 10 - Etapas para a construção da trissecção do ângulo, utilizando a Espiral de Arquimedes, e sua imagem

- 1) Desenhar a espiral utilizando a sua equação.
- 2) Definir um ponto $A(0,0)$.
- 3) Definir um ponto B sobre a espiral.
- 4) Traçar um segmento AB .
- 5) Traçar um segmento AC , para definir o ângulo ABC .
- 6) Dividir o segmento AB em três partes iguais⁶⁹.
- 7) Definir os pontos D e E no segmento AB que foi dividido.
Para isso: digitar na janela de entrada
 $D = 11(1)$ e $E = 11(2)$.
- 8) Desenhar uma circunferência com centro em A e raio em D .
- 9) Definir um ponto F para a intersecção da espiral com a circunferência.
- 10) Traçar uma reta a sobre os pontos A e F .
- 11) Desenhar uma circunferência com centro em A e raio em E .
- 12) Definir um ponto G para a intersecção da espiral com a circunferência.
- 13) Traçar uma reta a sobre os pontos A e G .
- 14) Definir a medida dos ângulos FAC , GAF e EAG .



Fonte: Dados da Pesquisa – Artigo final escrito pelo grupo

É importante destacar que a escolha da fonte, ou de algumas letras para identificar elementos da construção, dificultou a interpretação do leitor, como no caso das indicações $D = 11(1)$ e $E = 11(2)$, que fica difícil interpretar o que de fato geram esses pontos. Essa construção também destaca o uso de uma das referências que foram compartilhadas durante as reuniões de

⁶⁹ Para construir uma ferramenta para divisão de segmentos em n partes iguais, consulte: https://www.youtube.com/watch?v=fOO5iDya_ek

trabalho do grupo, especificamente a divisão de segmentos em partes iguais, em que nesse caso, o grupo optou por indicar uma fonte ao leitor, omitindo parte da construção, o que também ocorre em demonstrações algébricas (STEWART; TALL, 2015), seja por que são consideradas básicas ao leitor, ou como forma de simplificar as sentenças, ou ainda por falta de espaço em um determinado documento.

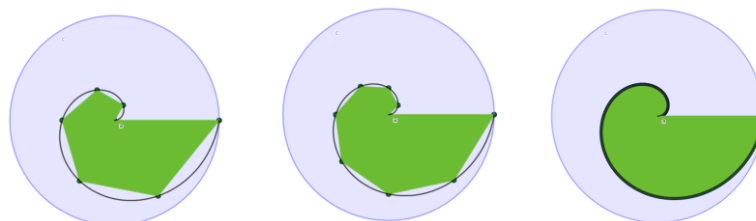
No que segue, a seção que apresenta o estudo do cálculo da área abaixo de uma espiral começa enunciando o resultado alcançado por Arquimedes.



Trecho do artigo: Arquimedes provou que a área da região S , limitado por uma volta da espiral e o segmento de linha, junção do ponto inicial e final, é $1/3$ do círculo C com centro no ponto inicial e passando pelo ponto final, isto é, $a(S) = \frac{1}{3} \pi (2\pi a)^2$. Para construção e verificação deste resultado no GeoGebra, basta realizar os seguintes passos (Quadro 11).

Quadro 11 - Etapas para a construção que permite calcular a área abaixo de uma espiral e imagens respectivas

- 1) Criar um controle deslizante $[0, 360]$ graus / incremento: 1.
 - 2) Desenhar a espiral a partir de sua equação.
 - 3) Criar um controle deslizante $n = [1, 360]$ / incremento: 1.
 - 4) Criar uma sequência de pontos. Na janela de entrada digite: Sequência $(a(i), i, 0, a, a/n)$.
 - 5) Criar um número g .
Janela de entrada: Círculo $(0, 0)$, Distância $(l1(g), (0, 0))$.
 - 6) Construir polígonos a partir dos pontos definidos pela lista.
Janela de entrada: Polígono $(l1)$.
 - 7) Definir a área da circunferência.
Janela de entrada: Área (c) .
 - 8) Definir um número d , para mostrar que $a_c = 1/3 a_e$.
 - 9) Janela de entrada: $b/3$.
- Observações:
 i – variável; $a(i)$ - são pontos sobre a espiral; g - comprimento da lista, ela serve para medir o raio do círculo; o número g dará a quantidade de pontos que tem na lista, o g remete sempre ao último ponto da lista.

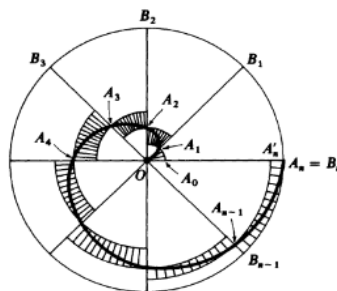


Fonte: Dados da Pesquisa – Artigo final escrito pelo grupo

Vale salientar, que a escolha do uso de listas, para a construção do problema, pode ser relacionada ao Método da Exaustão, visto que é uma técnica matemática que envolve considerar uma sequência de casos ou elementos para obter uma compreensão mais abrangente do problema em questão. Essa escolha, possibilitou a aplicação de operações e algoritmos em massa, simplificando etapas que poderiam ser repetitivas na construção, sendo possível utilizar uma lista com o objetivo de iterar um conjunto de pontos e realizar cálculos e construções de polígonos a partir deles, o que automatizou o processo e permitiu uma exploração ampla das propriedades geométricas, colaborando para o dinamismo e interatividade nas construções.

Antes das considerações finais, o artigo destaca que a construção desta prova por Arquimedes é bastante semelhante com o que pode ser aplicado ao conceito moderno de integral definida em coordenadas polares, onde se divide o círculo em n setores iguais, e este, intersecta a espiral nos pontos $O, A_1, \dots, A_n$ em destaque na Figura 18.

Figura 18 – Construção da demonstração do resultado por Arquimedes



Fonte: EDWARDS (1979, p. 57)

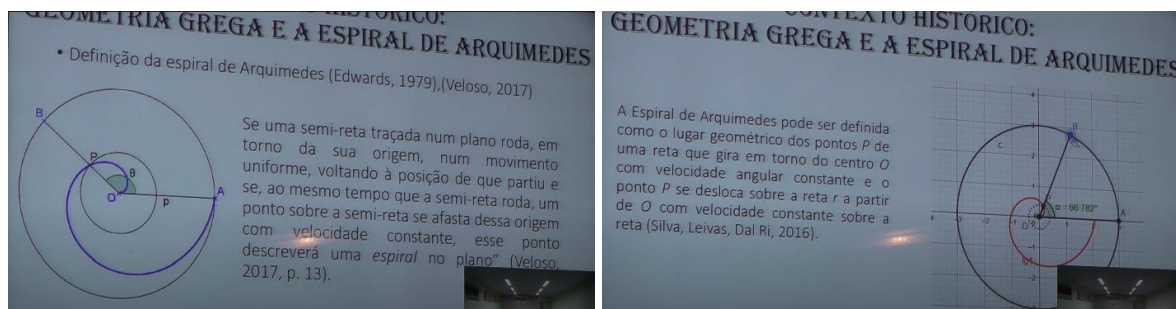
Além disso, argumentam que a demonstração apresentada em Edwards (1979) utiliza progressões aritméticas, como a soma dos n primeiros números naturais e a soma dos quadrados desses números.

Destaco que durante o desenvolvimento do trabalho, o grupo optou por explorar e verificar as propriedades geométricas por meio do GeoGebra, sem se preocupar em compartilhar uma demonstração analítica tradicional. A ênfase foi dada na verificação das propriedades e resultados utilizando as ferramentas dinâmicas oferecidas pelo *software*, o que permitiu uma análise visual e interativa das construções, possibilitando a exploração de diferentes configurações e experimentações, favorecendo um maior envolvimento e compreensão dos conceitos abordados.

5.2.6 As construções no GeoGebra e a exposição do grupo

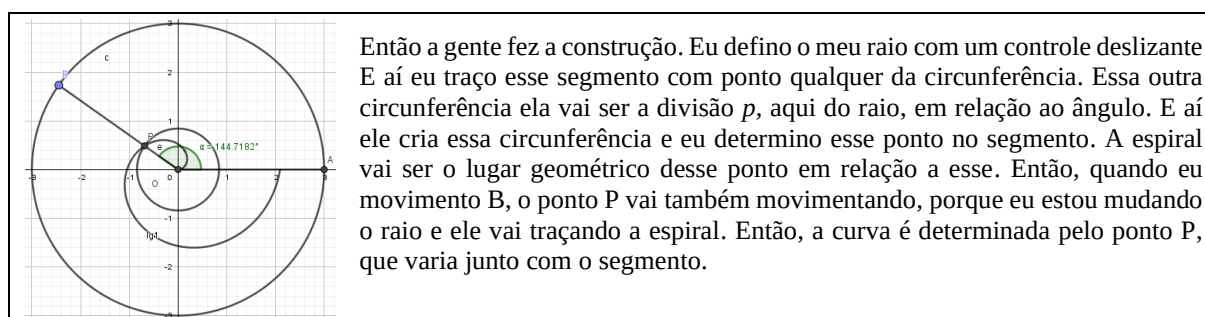
Para a apresentação final da exploração do problema da Espiral de Arquimedes, o grupo adota uma estrutura baseada nas seções propostas no artigo, mas utilizando *slides*. Clara começa expondo o contexto histórico da época e situa o problema da espiral, citando o tratado escrito pelo matemático e suas consequências. Em seguida, Marina apresenta um panorama do que era conhecido e desconhecido na época, abordando curvas não definidas por meio de equações, equidistâncias entre pontos, intersecção entre superfícies, e destacando a importância da espiral como uma composição de movimentos.

A definição da espiral é apresentada de duas maneiras, a partir de um movimento uniforme, e do lugar geométrico entre um ponto e uma reta (Figura 19).

Figura 19 – Definições da espiral

Fonte: Dados da Pesquisa – Capturas de tela das gravações

Ao abrir um arquivo no GeoGebra, Ana apresenta uma das construções realizadas pelo grupo. Uma imagem da construção junto com explicação da mesma pode ser vista no Quadro 12.

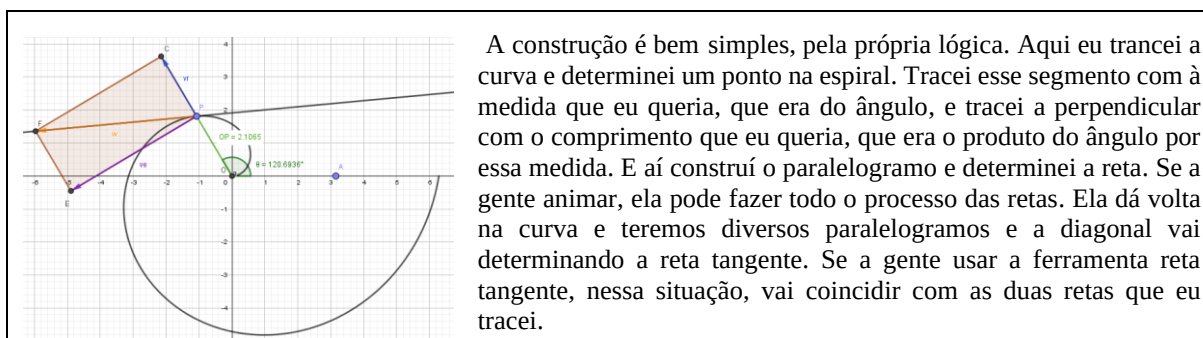
Quadro 12 – Construção da espiral como lugar geométrico no GeoGebra

Fonte: Dados da Pesquisa – Construções realizadas pelo grupo do GeoGebra

É importante ressaltar que não foi possível gerar um *GIF* dessa construção, visto que o movimento ocorre apenas pela animação do ponto B e não por meio de um controle deslizante. Portanto, para visualizar o movimento da construção, é necessário acessar o arquivo⁷⁰.*ggb*. Ana destaca que o GeoGebra oferece a possibilidade de construir uma espiral por meio de sua equação em coordenadas polares e que o grupo optou por utilizar essa abordagem para as demais construções no estudo, justificando sua simplicidade e facilidade.

A próxima construção apresentada relaciona a espiral com uma reta tangente por meio de um paralelogramo de velocidades determinado por dois componentes de movimento que gera a espiral. Ana inicia a explicação do problema utilizando apenas a imagem disponível nos *slides*, fornecendo uma visão geral do processo e, em seguida, abre o arquivo no GeoGebra e detalha as etapas da construção (Quadro 13).

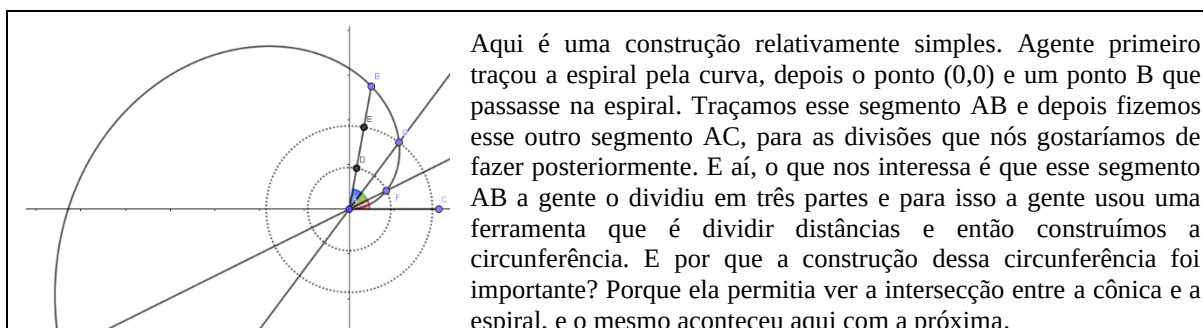
⁷⁰ Espiral: <https://drive.google.com/drive/folders/1IWRUkC6VzDruDWhBj0clFpPZYW4-gHw9>

Quadro 13 – Construção da reta tangente a espiral a partir de um paralelogramo no GeoGebra

Fonte: Dados da Pesquisa – Construções realizadas pelo grupo do GeoGebra

Pelo mesmo motivo da abordagem anterior, não é possível gerar um *GIF* dessa construção, sendo necessário acessar o arquivo *.ggb* para visualizar seu movimento.

Helena menciona que o próximo resultado a ser explorado é o da trissecção do ângulo e, antes de enunciá-lo, diz: “*abre aí o GeoGebra pra gente pensar junto*”, reforçando a ideia de que as experiências com *softwares* de matemática dinâmica, e a articulação dessas experiências com outras mídias, reorganizam o pensamento e transformam, de forma recursiva, diferentes coletivos humanos-com-mídia. (BORBA; VILLARREAL, 2005). O Quadro 14 apresenta a construção da trissecção do ângulo no GeoGebra

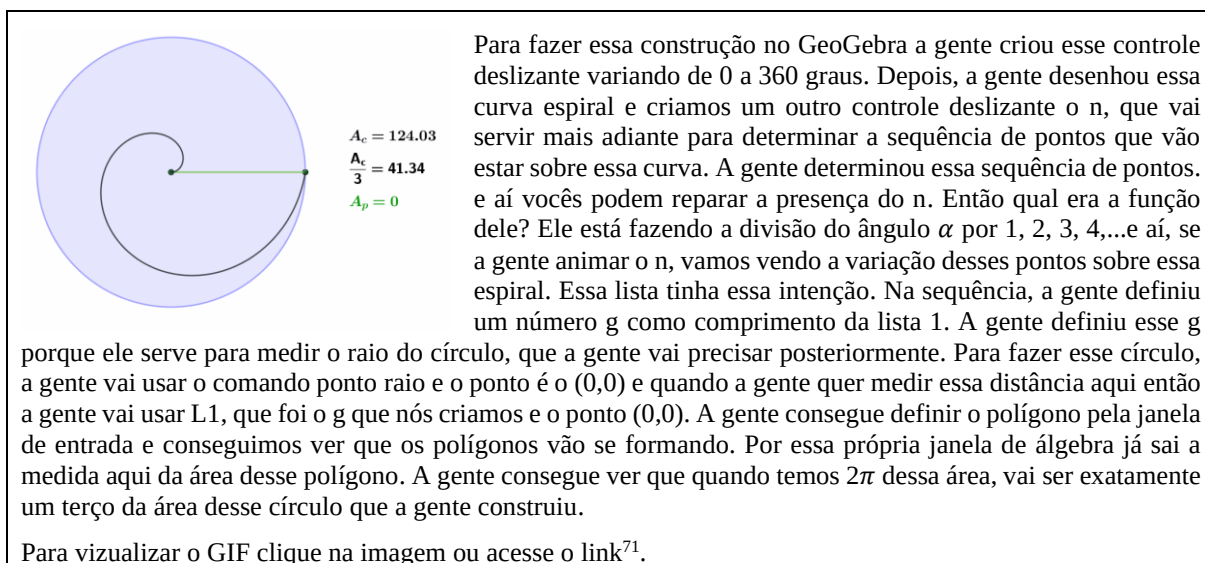
Quadro 14 – Construção da trissecção do ângulo no GeoGebra

Fonte: Dados da Pesquisa – Construções realizadas pelo grupo do GeoGebra

Para essa construção também não foi possível gerar o *GIF*. Porém, é importante destacar que a ferramenta utilizada para dividir um segmento em três partes não está disponível no *software*, ela foi criada a partir da opção “Criar Nova Ferramenta”, que permite a criação de novos objetos utilizando seus respectivos atributos.

Como último resultado a ser apresentado, Helena expõe a relação entre a área de uma espiral e a área de um círculo. Ela faz a leitura do problema no slide e, em seguida, apresenta como a construção foi realizada no GeoGebra. No Quadro 15, é possível visualizar um *GIF*, bem como acompanhar a explicação dada para todo o processo.

Quadro 15 – Construção da área da espiral no GeoGebra



Fonte: Dados da Pesquisa – Construções realizadas pelo grupo do GeoGebra

Como fechamento da apresentação, o grupo faz algumas considerações que relacionam a Matemática Grega com o Cálculo Diferencial e a Educação Matemática com a gênese desse pensamento. Ana coloca que:

Trecho da apresentação: *Essa disciplina traz a possibilidade de articulação pra gente perceber como que os conceitos foram se desenvolvendo e que muitas vezes a gente vê só o resultado da modernidade e não percebe o quanto que isso foi se desenvolvendo de diferentes maneiras e em diferentes contextos. Então, é importante essa ideia de estar sempre relacionando os conceitos e o desenvolvimento dele. [...] Pensar na Matemática não como algo pronto, mas como um processo de construção que envolve e envolveu diferentes atores e, portanto, diferentes formas de trabalhar o mesmo conceito.*

Ao considerar a Matemática como um processo de construção que envolve diferentes atores e abordagens para um mesmo conceito, é essencial valorizar a importância das narrativas que são criadas (BRUNER, 1997) em torno desses conceitos. Quando pensamos na Matemática como um processo contínuo, compreendemos que os conceitos matemáticos não surgem isoladamente, mas são influenciados por diferentes atores humanos e não humanos (BORBA; VILLARREAL, 2005) e abordagens ao longo do tempo. Nesse contexto, os problemas clássicos da Matemática e a História da Matemática desempenham um papel fundamental ao fornecer um contexto histórico, cultural e social que auxilia na compreensão dos conceitos matemáticos Doxiadis (2003).

⁷¹ GIF – Área da Espiral de Arquimedes no GeoGebra

https://drive.google.com/file/d/1-TE4fhxqYJA_HvgFpZiPS61DeN9rCEv9/view?usp=sharing

5.3 Perspectivas reveladas a partir da análise dos dados

Com as possibilidades de construções e representações oferecidas pelo GeoGebra e a oportunidade de se questionar: O que pode acontecer a seguir? em vez de apenas ‘O que é?’ ou ‘O que deve ser?’ inquietações me tocam...Será que modos narrativos de pensamento emergem a partir da interação que temos com objetos matemáticos? E quando essa interação envolve tecnologias digitais? A incorporação de movimentos em representações matemáticas, permitem que eles sirvam como um pano de fundo motivando modos narrativos de pensamento? (HEALY; SINCLAIR, 2007).

Grande parte das pesquisas que relacionam o uso de tecnologias digitais em um contexto de ensino e aprendizagem destacam as consequências cognitivas associadas a esse recurso e seu papel em diferentes momentos da investigação matemática, como a exploração e experimentação. Parte significativa desses estudos vêm sendo realizada por integrantes do Grupo de Pesquisa em Informática outras Mídias e Educação Matemática (GPIMEM) que reúne, em seu *site*⁷², uma gama de teses, dissertações e artigos relacionados a temática. No entanto, o uso de tais tecnologias, em especial dos *softwares* de matemática dinâmica, também pode estar relacionado à contação de histórias. Se as narrativas são relatos de incorporações particulares que ocorrem ao longo do tempo, então a imagem dinâmica criada na tela de um dispositivo pode despertar modos narrativos de pensamento. (SINCLAIR; HEALY; SALES, 2009)

Para Sinclair, Healy e Sale (2009), a dimensão temporal nos ambientes computacionais dinâmicos não se limita apenas aos objetos que são arrastados ou animados, mas também se manifesta na própria construção desses objetos geométricos. As pesquisadoras argumentam que as mudanças discursivas envolvidas no trabalho nesses ambientes, em comparação com os ambientes tradicionais de lápis e papel, são de magnitude considerável: os objetos agora possuem comportamentos dinâmicos; podem ser ativados ou desativados; podem ser impedidos de realizar certas ações, ou seja, eles adquirem uma vida própria, tornando-se objetos vivos, fascinantes e instigantes, que acumulam narrativas e crenças que merecem ser contadas.

Dessa forma, o pensamento matemático é condicionado pelas tecnologias digitais, ou seja, a natureza dos problemas e soluções está intrinsecamente ligada ao uso de diversas mídias e às maneiras pelas quais os significados matemáticos são produzidos por meio de uma variedade de tecnologias (BORBA; VILLARREAL, 2005). Como metáfora para teorizar a

⁷² <https://igce.rc.unesp.br/#!/gpimem>

relação cognitiva entre humanos e tecnologias no que diz respeito à produção de conhecimento matemático, Borba e Villarreal (2005) cunham o termo *humans-with-media*⁷³. Suas perspectivas são apresentadas considerando a noção de tecnologias de inteligência de Levy (1993), que defende três principais tecnologias da inteligência associadas à memória e ao conhecimento, sendo elas: oralidade, escrita e informática. Nesse sentido,

[...] a oralidade era usada para expandir nossa memória. Os mitos eram uma forma desenvolvida pelas sociedades para armazenar partes importantes de suas culturas. A difusão de textos escritos, que começou na Europa no final do século XV com o surgimento do livro, em um formato semelhante ao que temos hoje, possibilitou que a memória fosse estendida de uma maneira qualitativamente diferente da oralidade, outra tecnologia da inteligência. Assim, a escrita enfatiza o raciocínio linear e permite que o pensamento seja apresentado de forma linear. As sequências lógicas e as narrativas, embora já existissem antes da popularização da escrita, ganham importância com a mudança na tecnologia que aumenta a acessibilidade a livros, papel, canetas e ferramentas associadas. (BORBA; VILLARREAL, 2005, p. 22, tradução nossa⁷⁴).

Dessa maneira, é importante compreender as tecnologias digitais de forma semelhante, considerando-as como uma extensão inovadora da memória, com características distintas em relação a outras tecnologias da inteligência. Essas tecnologias possibilitam o questionamento do pensamento linear, abrindo espaço para abordagens alternativas fundamentadas em simulação, experimentação e uma nova linguagem que abarca a escrita, oralidade, imagens, comunicação instantânea e dinamicidade.

Nesse contexto, a metáfora da linearidade é cada vez mais substituída pela descontinuidade que caracteriza o uso da Internet e de ambientes computacionais dinâmicos. Por exemplo, “toda vez que alguém acessa uma determinada página inicial por meio de um *link*, ou utiliza *softwares* mais tradicionais que lidam com geometria ou funções, acessados através do menu, estamos vivenciando a descontinuidade” (BORBA; VILLARREAL, 2005, p. 22, tradução nossa⁷⁵). Esse desafio também é enfrentado por aqueles que estão investigando essa nova linguagem que resulta do surgimento quase diário de novas interfaces nos meios de tecnologia digitais.

⁷³ humanos-com-mídia.

⁷⁴ [...] orality was used to extend our memory. Myths were a way developed by societies to store important parts of their cultures. The diffusion of written texts that began in Europe at the end of the 15th Century with the appearance of the book, in a format similar to the one we have today, made it possible for memory to be extended in a qualitatively different way than it had been with orality, another technology of intelligence. Thus, writing emphasizes linear reasoning and allows thinking to be shown in a linear fashion. The logical sequences and the narratives, although already in existence before the popularization of writing, only gain importance with the change in technology that increases accessibility to books, paper, pens, and associated tools.

⁷⁵ [...] every time someone accesses a given home-page using a 'link', or uses more traditional software dealing with geometry or functions, accessed through the menu, we are experiencing discontinuity.

Contudo, Borba e Villarreal (2005, p. 26, tradução nossa⁷⁶) defendem que “nossa consciência individual e nosso processo cognitivo estão sempre sujeitos à interação com as tecnologias da inteligência.”. Ou seja, o conhecimento é produzido com um determinado meio ou tecnologia da inteligência.

Nesse contexto, considerando os objetos em um ambiente de matemática dinâmica, Sinclair, Healy e Sales (2009, p. 444, tradução nossa⁷⁷), ressaltam que eles

[...] não se movem simplesmente, eles se movem em relação aos demais objetos que habitam a tela, objetos que em determinado momento podem estar visíveis ou ocultos. Assim, os objetos não apenas agem, eles agem em harmonia e, portanto, podem ser tratados tanto como seres sociais quanto seres vivos – trazendo ainda mais material para a criação de enredos envolventes.

Assim, os aspectos mencionados desempenham um papel fundamental, uma vez que não apenas possibilitam uma compreensão mais profunda das relações matemáticas subjacentes, mas são também essenciais para a criação de narrativas em que a exploração e experimentação, a partir de *softwares* dinâmicos, estejam fundamentadas em bases matemáticas sólidas. Logo, por meio da mediação, as tecnologias digitais reorganizam o pensamento matemático, a mídia molda a produção de conhecimento e transforma a matemática (BORBA; VILLARREAL, 2005).

Retomando ao contexto das narrativas, estas são responsáveis por retratar os eventos que ocorrem com seus protagonistas, e tais eventos devem ser relevantes para suas crenças, sentimentos, desejos, aversões, valores, entre outros. Conforme destacado por Bruner (1991), essa relevância é alcançada por meio do que ele denomina como implicação do estado intencional. Mesmo quando os atores envolvidos são não humanos, nas histórias, eles são dotados desses estados intencionais. Essa distinção se torna evidente ao compararmos os modos de pensamento narrativo e paradigmático: enquanto o modo paradigmático busca classificar propriedades e estabelecer relações, o modo narrativo atribui propósitos a essas propriedades e relações, conferindo-lhes um sentido dentro da narrativa.

Em suma, tanto a abordagem narrativa quanto a paradigmática desempenham funções essenciais na formação, estruturação e rearranjo do pensamento, embora tenham motivações distintas: enquanto o enfoque paradigmático se interessa pelo estado atual das coisas, considerando as limitações do sistema em análise, e pela identificação e validação de

⁷⁶ Our individual consciousness and cognitive processes are always subject to interaction with the technologies of intelligence.

⁷⁷ [...] the objects of DGEs do not simple move, They move in relation to the other objects that inhabit the screen, objects that at any given moment in time might be visible or hidden. So objects not only act, they act in unison and hence can be treated as social as well as living beings—bringing yet more material for creating engaging storylines.

generalizações que definem elementos e conexões no sistema, a perspectiva narrativa focaliza-se em atividades específicas desses elementos à medida que ocorrem no decorrer do tempo, explorando as razões subjacentes aos eventos em questão e examinando como eles se assemelham a outras experiências conhecidas ou evocam lembranças de informações anteriores que possuímos. (SINCLAIR; HEALY; SALES, 2009). Assim, a partir das representações temporais oferecidas nos *softwares* de matemática dinâmica modos de pensamento podem emergir à medida que interagimos com objetos matemáticos.

Considerando que a criação de uma narrativa envolve o processo de pensar sobre si mesmo, sobre os outros e sobre como retratar uma imagem de certos objetos para uma determinada audiência (SCUCUGLIA, 2014), é possível reconhecer que os grupos investigados neste estudo foram capazes de produzir narrativas matemáticas por meio das articulações e estudos propostos. Ao explorarem problemas clássicos da Matemática, em um contexto histórico, e com limitação de resultados matemáticos, os integrantes dos grupos assumiram identidades (HEALY; SINCLAIR, 2007) de pensadores da época de Arquimedes, estabelecendo relações entre aspectos e objetos matemáticos que podem ser considerados triviais na Matemática contemporânea, mas não na era antes de Cristo.

Essa abordagem permite que os modos de pensamento narrativo e paradigmático, propostos por Bruner (1998), se entrelacem e sejam incorporados à narrativa matemática criada. O modo de pensamento narrativo traz à tona elementos de contexto histórico, personagens e eventos, permitindo uma imersão na época e nas ideias que eram relevantes naquele período. Isso enriquece a experiência de compreensão e aprendizado, pois possibilita uma conexão mais profunda com a Matemática, considerando sua produção ao longo do tempo. Por outro lado, o modo de pensamento paradigmático contribui para a análise e a exploração dos conceitos matemáticos de forma abstrata, identificando padrões, relações e estruturas subjacentes. Essa perspectiva paradigmática permite uma compreensão dos fundamentos matemáticos envolvidos na narrativa, além de promover reflexão sobre as implicações desses conceitos no contexto histórico e contemporâneo. Ao entrelaçar os modos de pensamento narrativo e paradigmático, as narrativas matemáticas criadas pelos grupos proporcionam uma experiência holística de aprendizado. Elas permitiram aos pós-graduandos não apenas explorarem os aspectos conceituais da matemática, mas também mergulharem na história (DOXIADIS, 2003), nos desafios e nas perspectivas dos pensadores do passado, ampliando a compreensão e desenvolvendo o pensamento matemático.

Nos movimentos realizados pelos grupos, diferentes conhecimentos foram mobilizados ao longo do compartilhamento de ideias. As narrativas que ali se constituíram levavam em

consideração vários processos, como o de tomada de decisão, seja a partir de elementos que envolviam a solicitação formal da atividade pelo professor ou então pela preocupação com a audiência posterior, como a finalização e apresentação do trabalho. Nos diálogos e ações dos grupos é possível notar que, em diversos momentos, o simbólico não foi suficiente para o entendimento, mesmo eles partindo de procedimentos matemáticos lógicos da demonstração para explorar o problema. A necessidade do uso de notações e linguagem atuais fica evidente, assim como a cautela em utilizar o termo demonstração quando se referem ao uso do GeoGebra.

CAPÍTULO 6

*Computadores fazem arte [...]
cientistas criam o novo [...]
pesquisadores avançam.
(MONTENEGRO, 1994, f. 13)*

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este estudo foi iniciado com o intuito de investigar os processos de construção de narrativas matemáticas, por pós-graduandos, em um cenário envolvendo História da Matemática e o uso de tecnologias. Considerando uma abordagem metodológica qualitativa, entre as opções metodológicas e procedimentos para a produção dos dados estão a observação participante, filmagem e gravação de encontros em que um grupo de estudantes de pós-graduação em Educação Matemática exploraram atividades que envolviam alguns problemas históricos da Matemática utilizando o GeoGebra. Nesse contexto, a pergunta que guiou o estudo foi: *Como ocorre o processo de construção de narrativas matemáticas por um grupo de pós-graduandos em Educação Matemática ao explorarem problemas da História da Matemática com o GeoGebra?*.

O texto da tese se inicia com uma introdução em que justifico tal estudo e apresento os objetivos da pesquisa em que o cerne esteve centrado no conceito de narrativas, verdades matemáticas e na articulação entre o uso e mediação de tecnologias digitais envolvendo História da Matemática e modos de pensamento. Nesse sentido, as conclusões finais representam a culminância de um trabalho que buscou investigar os processos de construção de narrativas matemáticas, por um grupos pós-graduandos, em um cenário envolvendo História da Matemática e o uso de tecnologias digitais. Ao longo de todo o processo de pesquisa, foi possível constatar a relevância e o potencial dessa abordagem no ensino e aprendizagem da Matemática, assim como na valorização da sua dimensão histórica para as áreas de Matemática e Educação Matemática.

Ao utilizar a palavra verdade reconheço a complexidade desse conceito, que pode assumir diferentes significados e contextos, inclusive quando relacionada com as verdades matemáticas. Em um sentido geral, a verdade é frequentemente considerada como a correspondência entre uma afirmação e os fatos do mundo. Nesse sentido, uma afirmação é verdadeira se corresponde à realidade, ou seja, se os fatos sustentam sua validade. No entanto, quando se trata das verdades matemáticas, a noção de verdade assume um caráter particular. As

verdades matemáticas são consideradas verdadeiras dentro de um sistema matemático específico, baseado em axiomas, definições e regras lógicas.

A complexidade surge quando percebemos que diferentes sistemas matemáticos podem ter diferentes conjuntos de axiomas e regras, o que pode levar a diferentes verdades matemáticas dentro desses sistemas. Além disso, as verdades matemáticas são independentes de opiniões pessoais, crenças ou experiências individuais. Elas são universais e válidas para qualquer pessoa, em qualquer lugar e em qualquer momento, desde que estejam dentro do contexto do sistema matemático em questão. Essa objetividade é uma característica distintiva das verdades matemáticas e as diferencia de outros domínios onde a verdade pode ser subjetiva ou influenciada por fatores externos.

Embora as verdades matemáticas sejam consistentes e coerentes dentro de um sistema matemático, elas podem parecer complexas e desafiadoras para a intuição humana. Às vezes, conceitos matemáticos podem parecer contra intuitivos ou difíceis de compreender em relação à nossa experiência cotidiana. A natureza abstrata da Matemática pode tornar a verdade matemática uma questão de raciocínio lógico e dedução, em vez de intuição direta. Em resumo, a complexidade da palavra verdade está relacionada à sua interpretação no contexto das verdades matemáticas. Embora as verdades matemáticas sejam objetivas e universais dentro de um sistema matemático específico, diferentes sistemas podem levar a diferentes verdades. Compreender sua natureza envolve conhecer e dominar os sistemas matemáticos em si, bem como a aplicação rigorosa de suas regras e definições para chegar a conclusões válidas. Mas quando essas conclusões são válidas?

Devemos reconhecer a relativa natureza dos parâmetros envolvidos e a aceitação dos argumentos como um caminho para compreender a trajetória em questão. Ao adotar uma postura crítica, abrimos espaço para nos aproximarmos da verdade no sentido grego de ‘aletheia’ (αλήθεια) que quer dizer verdade, mas não no sentido de dogma, de princípio revelado e inegável, e sim no sentido de descoberta da realidade e constatação dos fatos. Essa busca pela verdade nos leva a voltar nosso olhar para o que é, permitindo que as múltiplas dimensões do que pode ser se manifestem. Nessa manifestação, novas formas de rigor podem ser reconhecidas e condutas consideradas não convencionais podem ser vistas como válidas.

Uma reflexão ainda mais profunda nos é apresentada quando a noção de prova se relativiza. Ela nos mostra que a prova não é algo absoluto e imutável, mas algo que se revela naquilo que é. Nesse jogo delicado entre mostrar e ocultar, constitutivo de toda busca pela verdade, entendo que a ela não é um objetivo final e fixo, mas uma jornada contínua, impulsionada pelo desejo de conhecer. Essa reflexão nos convida a abandonar a rigidez e a

certeza absoluta, reconhecendo a importância da abertura para perspectivas diversas e a aceitação de formas de compreensão que vão além do convencional. Ela nos convida a explorar e questionar constantemente, compreendendo que a verdade é uma construção dinâmica e complexa, sempre sujeita a novas interpretações e descobertas.

Nesse sentido, a utilização do GeoGebra como instrumento para a construção de verdades matemática permitiu a integração de diferentes conceitos matemáticos com a riqueza e a complexidade dos problemas históricos. Essa abordagem proporcionou aos pós-graduandos uma visão mais abrangente da Matemática, viabilizando a compreensão de sua evolução ao longo do tempo e estabelecendo conexões entre conceitos e contextos históricos. Dessa forma, o contexto histórico atrelado ao uso de tecnologias digitais despertou a curiosidade, incentivou a investigação e promoveu a reflexão sobre a importância da História da Matemática na resolução de problemas. Além disso, o uso do *software* como ferramenta de exploração e visualização matemática foi essencial para enriquecer a compreensão dos conceitos envolvidos nas verdades e narrativas produzidas.

A partir da manipulação dinâmica dos objetos matemáticos e da experimentação, os pós-graduandos puderam explorar diferentes cenários, testar conjecturas e construir argumentos sólidos, fortalecendo assim sua capacidade de raciocínio lógico, abstração e contribuindo para as discussões no âmbito das demonstrações matemáticas dinâmicas. É importante destacar que a articulação entre problemas da História da Matemática e construções dinâmicas no GeoGebra se revelou fundamental para a formação de uma visão crítica e contextualizada da área. Os pós-graduandos foram desafiados a refletir sobre o desenvolvimento da Matemática ao longo dos séculos, compreendendo sua importância cultural, social e científica. Os resultados obtidos nesta pesquisa indicam que as representações dinâmicas da Matemática proporcionam uma abordagem comportamental dessa ciência, pois despertam modos narrativos de pensamento por meio do movimento e das interações, em que podemos associar essas representações com experiências sensoriais e motoras, tanto no mundo real como no imaginário.

A interatividade e dinamicidade do GeoGebra proporcionaram aos pós-graduandos uma sensação de controle sobre os elementos da tela, bem como sobre a narrativa que estava sendo construída ao longo de todo o processo de estudo. Os resultados sugerem que, por meio do engajamento ativo na criação das ações na tela, os pós-graduando foram capazes de estabelecer conexões entre objetos matemáticos desconhecidos, suas relações e propriedades paradigmáticas, e objetos familiares aos quais eles já tinham conhecimento e se preocupavam, o que possibilitou que esse conhecimento ganhasse significado a partir da fundamentação nos fenômenos vivenciados. Diante do exposto, posso dizer que a integração do GeoGebra em um

contexto de exploração de problemas históricos da Matemática caracterizou não apenas a concepção de seus ambientes de ensino, mas também a aprendizagem da Matemática. Por esta razão, recomendo fortemente que a História da Matemática seja entrelaçada com ensino de Matemática mediado por tecnologias digitais.

Ao considerar que as ações humanas são motivadas por valores, crenças e estados intencionais, e que o que ocorre em uma narrativa nunca é ao acaso, surge a indagação sobre se podemos esperar um maior surgimento de narrativas matemáticas quando a atividade é mediada por representações dinâmicas e tecnologias digitais. Considero que o uso de recursos como o GeoGebra e outras ferramentas interativas proporciona um ambiente propício para a criação e exploração de narrativas matemáticas. Essas representações dinâmicas oferecem possibilidades de interação e manipulação dos elementos matemáticos, permitindo aos pós-graduando a construção de significados mais profundos e a conexão entre diferentes conceitos. Portanto, a utilização dessas tecnologias pode potencializar a emergência de narrativas matemáticas, uma vez que elas contribuem no processo de construção e expressão de ideias e no estabelecimento de relações e a contextualização de conceitos matemáticos.

Diante dessas reflexões, é evidente que a utilização de tecnologias digitais e a abordagem de ensino baseada em problemas históricos e construções dinâmicas têm se mostrado uma tendência emergente na forma como a Educação Matemática está sendo conduzida, especialmente no contexto da formação de professores. Dessa forma, espero que este estudo contribua para a consolidação e destaque das investigações que exploram a interface e a aliança entre História da Matemática e tecnologias digitais, particularmente com o uso do GeoGebra possibilitando a construção de narrativas matemáticas.

REFERÊNCIAS

ABBAGNANO, N. **Dicionário de filosofia**. Tradução de Alfredo Bosi e Ivone Castilho Benedetti. 5. ed. São Paulo: Martins Fontes, 2007.

ARSAC, G. L'origine de la démonstration: essai d'épistémologie didactique. **Récherches em Didactique des Mathématiques**. v. 8, n. 3, 1987.

AGUIAR, B. C. X. C.; AGUIAR, G. F.; SIQUEIRA, P. H. A integração do Cálculo e do Desenho Geométrico no curso de expressão gráfica. In: XXI Simpósio Nacional de Geometria descritiva e desenho técnico e X Internacional Conference on Graphics Engineering for arts and desing (Graphica'13), 2013, Florianópolis. **Anais...** Florianópolis: UFSC, p. 1-11, 2013. Disponível em: <http://www.exatas.ufpr.br/portal/docs_degraf/paulo/graphica13_2.pdf>. Acesso em: 5 jun. 2022.

ALVES-MAZZOTTI, A. J.; O Planejamento de Pesquisas Qualitativas. In: ALVES-MAZZOTTI, A. J.; GEWANDSZNAJDER, F. **O método nas ciências naturais e sociais: pesquisa quantitativa e qualitativa**. 2 ed. São Paulo: Pioneira, 1999.

ARAUJO, J. L.; BORBA, M. C. Construindo pesquisas coletivamente em Educação Matemática. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica, p. 31-52, 2012.

ASSIS, A. K. T. **Arquimedes, o Centro de Gravidade e a Lei da Alavanca**. Montreal: Apeiron Montreal, 2008.

BACCAGLINI-FRANK, A.; MARIOTTI, M. A. Generating conjectures in dynamic geometry: The maintaining dragging model. **International Journal of Computers for Mathematical Learning**. v.15, n. 3, p. 225-253, 2010.

BALACHEFF, N. Processus de Preuve et Situations de Validation. **Educational Studies in Mathematics**. n.18. p. 147-176, 1987.

BALACHEFF, N. **Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas**. Bogotá: Universidad de los Andes, 2000.

BARBOSA, L. M. Aspectos do Pensamento Computacional na Construção de Fractais com o software GeoGebra. 169f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, 2019a.

BARBOSA, L. M. Uso do software GeoGebra na exploração de problemas da História da Matemática: possibilidades para demonstrações em cálculo infinitesimal com tecnologias. In: XXIII Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática, 2019, São Paulo. **Anais...**São Paulo, 2019b.

BARBOSA, L. M.; SCUCUGLIA, R. R. S. A construção de Fractais e o Pensamento Computacional: aspectos/habilidades emergentes. In: IV Congresso Brasileiro de Ensino e Processos Formativos, 2019, São José do Rio Preto. **Anais...**São José do Rio Preto, 2019a.

BARBOSA, L. M.; SCUCUGLIA, R. R. S. Sobre pensamento computacional na construção de um triângulo de Sierpinski com o GeoGebra. **Pesquisa e debate em Educação**, v. 9, n. 1 p. 537-559, 2019b.

BARON, M. E. **Curso de História da Matemática**: Origens e Desenvolvimento do Cálculo. Unidade 1 – A Matemática Grega. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1985.

BARON, M. E. **Curso de História da Matemática**: Origens e Desenvolvimento do Cálculo. Unidade 2 – Indivisíveis e infinitésimos. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1985.

BARON, M. E. **Curso de História da Matemática**: Origens e Desenvolvimento do Cálculo. Unidade 3 – Newton e Leibniz. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1985.

BARON, M. E. **Curso de História da Matemática**: Origens e Desenvolvimento do Cálculo. Unidade 4 – O Cálculo do século XVIII. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1985.

BARON, M. E. **Curso de História da Matemática**: Origens e Desenvolvimento do Cálculo. Unidade 5 – O Cálculo do século XVIII - II: Técnicas e aplicações. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1985.

BARON, M. E. **The Origins of the Infinitesimal Calculus**. New York: Dover Publications, 1987.

BARTHES, R.; GREIMAS, C.; BREMOND, C.; ECO, H.; GRITTI, J.; MORIN, V.; METZ, C.; TODOROV, T.; GENETTE, G. **Análise estrutural da narrativa**. Tradução de Maria Zélia Barbosa Pinto. 7ª ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 2011.

BARWISE, J.; ETCEHEMENDY, J. Heterogeneous logic. In ALLWAIN, G; Barwise, J. (Eds.). **Logical Reasoning with Diagrams**. New York: Oxford University Press, p. 179-200, 1996.

BENJAMIN, W. **Origem do drama barroco alemão**. São Paulo: Brasiliense, 1984.

BENJAMIN, W. **A modernidade e os modernos**. Rio de Janeiro: Tempo Brasileiro, 1985.

BENJAMIN, W. **Rua de mão única**. São Paulo: Brasiliense, 1987.

BENJAMIN, W. **Sociologia**. São Paulo: Ática, 1988.

BICUDO, I. Demonstração em Matemática. **Boletim de Educação Matemática – BOLEMA**. Rio Claro: v. 15, n. 18, p. 79-90, 2002.

BICUDO, I. **Os Elementos de Euclides**. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

BICUDO, M. A. V. Pesquisa em educação matemática. **Pró-posições**, v. 13, n. 1, p. 18-23, 1993.

BICUDO, M. A. V. Pesquisa qualitativa e pesquisa qualitativa segundo a abordagem fenomenológica. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. 4. ed. Belo Horizonte: Autêntica, p. 111-124, 2012.

BOAL, A. **A Estética do Oprimido**. Rio de Janeiro: Editora Garamond, 2008.

BOLÍVAR, A. ‘De nobis ipsis silemus?’: epistemología de la investigación biográfico-narrativa en educación. **Revista Electrónica de Investigación Educativa**, v. 4, n. 1. 2002.

BOLÍVAR, A.; DOMINGO, J.; FERNÁNDEZ, M. **La investigación biográfico-narrativa en educación**. Madrid: Editorial La Muralla, 2001.

BORBA, M. C. A pesquisa qualitativa em Educação Matemática. In: Reunião anual da Anped, 27., 2004, Caxambu. **Anais...** Caxambu, p. 1 – 18, 2004. Disponível em: < http://www.rc.unesp.br/gpimem/downloads/artigos/borba/borba-minicurso_a-pesquisa-qualitativa-em-em.pdf>. Acesso em: 6 jun. 2021.

BORBA, M. C.; VILLARREAL, M. E. **Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking**. New York: Springer, 2005.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos**. Porto: Porto Editora, 1992.

BOYER, C. **História da Matemática**. São Paulo: Edgar Blücher, 1974.

BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. História da matemática. Tradução de Helena Castro. São Paulo: Blucher, 2012.

BROWN, J.R. **Philosophy of Mathematics: An Introduction to the World of Proofs and Pictures**. London: Routledge, 1999.

BRUNER, J. S. The Narrative Construction of Reality. **Critical Inquiry**. Chicago, v.18, n.1, p. 1-21, 1991.

BRUNER, J. S. **Atos de significação**. Tradução de Sandra Costa. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

BRUNER, J. S. **Realidade mental, mundos possíveis**. Tradução de Marcos A. G. Domingues. Porto Alegre: Artes Médicas, 1998.

BRUNER, J. **Fabricando histórias: direito, literatura, vida**. São Paulo: Letra e Voz, 2014.

CARR, D. **Time, narrative, and history**. Bloomington: Indiana University Press, 1986.

CHEN, T. S.; LIU, P. H. Analysis of the Metaphorical Role of Mathematics in Students’ Writing. In: SIBBALD, T. (ed). **Teaching Interdisciplinary Mathematics**. Champaign, IL: Common Ground Research Networks, p. 9-27, 2018.

CLANDININ, D. J.; CONNELLY, F. M. **Pesquisa Narrativa: experiência e história em pesquisa qualitativa**. 2. ed. Tradução do Grupo de Pesquisa Narrativa e Educação de Professores ILEEL/UFU. Uberlândia: EDUFU, 2015.

CORRY, L. Calculating the limits of poetic license: Fictional narrative and the history of mathematics. **Configurations**. v. 15, n. 3, p. 195-226, 2009.

COWIE, N. Observation. In: HEIGHAM, J.; CROKER, R. A. **Qualitative Research in Applied Linguistics: A Practical Introduction**. New York: Palgrave Macmillan, p. 165-181, 2009.

CRESWELL, J. W. **Projeto de Pesquisa: Métodos Qualitativo, Quantitativo e Misto**. 3ed. Porto Alegre: Artmed, 2010.

CROKER, R. A. An Introduction to Qualitative Research. In: HEIGHAM, J.; CROKER, R. A. **Qualitative Research in Applied Linguistics: A Practical Introduction**. New York: Palgrave Macmillan, p. 3-24, 2009.

CRUZ, M. A. **Construção da identidade pessoal e do conhecimento: narrativa no ensino de Matemática**. 2006. 174f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo. 2006.

DAVIS, P. J. Visual Theorems. **Educational Studies in Mathematics**. n. 24, p. 333-344, 1993.

DAVIS, P. J.; HERSH, R. **The Mathematical Experience**. Boston: Birkhäuser, 1982.

DAVIS, P.J.; HERSH, R. **O sonho de Descartes: o mundo de acordo com a matemática**. Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1988.

DEMETRIO, E. O passado é também, uma ficção do presente: história e narrativa. **Revista Expedições: Teoria da História & Historiografia**. Goiânia, v.2, n.2, p. 47-65, 2011.

DENZIN, N. K.; LINCOLN, Y. S. Introduction: The discipline and practice of qualitative research. In: DENZIN, N. K.; LINCOLN, Y. S. **The Sage handbook of qualitative research**. 3 ed. Thousand Oaks: Sage, p. 1-32, 2005.

DE VILLIERS, M. The role and function of proof in mathematics. **Pythagoras**. n. 24, p.17-24, 1990.

DOMINGUES, H. H. Demonstração em Matemática. **Boletim de Educação Matemática – BOLEMA**. Rio Claro: v. 15, n. 18, p. 55-67, 2002.

DOXIADIS, A. Embedding mathematics in the soul: narrative as a force in mathematics education, **Opening address to the Third Mediterranean Conference of Mathematics Education**, Athens, Greece.2003. Disponível em:
<<http://www.apostolosdoxiadis.com/files/essays/embeddingmath.pdf>>. Acesso em: 07 abr. 2023.

EDWARDS, C. H. **The Historical Development of the Calculus**. New York: Springer-Verlag, 1979.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Tradução de Higyno H. Domingues. Campinas: Editora da UNICAMP: 2004.

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Tradução de Higyno H. Domingues. 5. ed. Campinas: Editora da UNICAMP: 2011.

FERREIRA, B. L. **“O que sabem sobre as curvas cônicas?”**: Uma possível leitura para o processo de produção de significado em um grupo de estudos. 2019. 271p. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, 2019.

FERREIRA, M. J. A. **A constituição e a produção do conhecimento matemático ao ser-com o computador**. 2018. 207f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, 2018.

FILOS, L. M. **Modelagem Matemática nos anos 1980**: narrativas e itinerários de cursos de especialização. 2019. 376f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, 2019.

FONTE, B. C. **Vídeo, Comunicação e Educação Matemática**: um olhar para a produção dos licenciandos em matemática da educação a distância. 2019. 191f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, 2019.

FRAIHA-MARTINS, F. **Significação do ensino de ciências e matemática em processos de letramento científico-digital**. 2014. 189f. Tese. (Doutorado em Educação em Ciências e Matemática) – Instituto de Educação Matemática e Científica, Universidade Federal do Pará, Belém, 2014.

FRANCIS, G. Mathematical visualization: Standing at the crossroads In: Proceedings of the 7th conference on Visualization, 1996, San Francisco. **Anais...** IEEE Computer Society Press, Washington, p. 1-18, 1996. Disponível em: <<https://dl.acm.org/doi/epdf/10.5555/244979.245776>>. Acesso em 10 fev. 2023.

FREITAS, J. M. **Os três problemas clássicos da Matemática grega**. 2014. 75f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, São José do Rio Preto, 2014.

GARNICA, A. V. M. **Fascínio da técnica, declínio da crítica: um estudo sobre a prova rigorosa na formação do professor de matemática**. 1995. 269f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, 1995.

GARNICA, A. V. M. As Demonstrações em Educação Matemática: um ensaio. **Boletim de Educação Matemática – BOLEMA**. Rio Claro: v. 15, n. 18, p. 91-99, 2002.

GARNICA, A. V. M. A História Oral como recurso para a pesquisa em Educação Matemática: um estudo de caso brasileiro. In: V Congresso Iberoamericano de Educação Matemática, 2005. Porto. **Anais...** Portugal: Porto, 2005, p. 1-12.

GARNICA, A. V. M. História Oral e Educação Matemática. In: BORBA, M. C.; ARAÚJO, J. L. **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. 4 ed. Belo Horizonte: Autêntica, p. 87-110, 2012.

GAY, P. **O estilo na história**: Gibbon, Ranke, Macaulay, Burckhardt. Tradução de Denise Dottmann. São Paulo: Companhia das Letras, 1990.

GOMES, E. G. S. **Perspectivas e processos dos aprendentes do 1º ano do Ensino Médio ao produzirem narrativas transmídiaáticas**. 2019. 253f. Tese (Doutorado em Educação Matemática e Tecnologia) – Centro de Educação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2019.

GINZBURG, J. Notas sobre elementos de teoria da narrativa. In: COSSON, R. (Org.). **Esse Rio Sem Fim** - Ensaios sobre Literatura e suas fronteiras. Pelotas: UFPEL, p. 113-136, 2000.

GOLDENBERG, M. **A arte de Pesquisar**: Como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais. 8. ed. Rio de Janeiro: Record, 2004.

GRAVINA, M. A. **Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo**. 2001. 277f. Tese (Doutorado em Informática na Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2001.

HANNA, G. More than formal proof. **For the Learning of Mathematics**. Quebec: v. 9, n. 1, p. 20-23, 1989.

HANNA, G. Some Pedagogical Aspects of Proof. **Interchange**. The Ontario Institute for Studies in Education, Ontario: v. 21, n.1, p. 6-13, 1990.

HANNA, G.; DE VILLIERS, M. (Eds). **Proof and Proving in Mathematics Education**: The 19th ICMI Study. New York: Springer, 2012.

HANNA, G.; SIDOLI, N. Visualisation and proof: a brief survey of philosophical perspectives. **ZDM Mathematics Education**. v. 39, n. 1-2, p. 73-78, 2007.

HEALY, L.; SINCLAIR, N. If this is our mathematics, what are our stories?. **International Journal of Computers for Mathematical Learning**. v. 12, p. 3-21, 2007.

HEIGHAM, J; SAKUI, K. Ethnography. In: HEIGHAM, J.; CROKER, R. A. **Qualitative Research in Applied Linguistics**: A Practical Introduction. New York: Palgrave Macmillan, p. 91-111, 2009.

HERSH, R. **What is mathematics, really?** New York: Oxford University Press, 1997.

HONORATO, V. S.; BARBOSA, L. M.; SCUCUGLIA, R. R. S. Explorando a Geometria Espacial no GeoGebra: Possibilidades de Experimentação-com-Tecnologias. In: XIII Encontro Paulista de Educação Matemática, 2017, São Paulo. **Anais...**São Paulo, 2017.

HOOD, M. Case Study. In: HEIGHAM, J.; CROKER, R. A. **Qualitative Research in Applied Linguistics: A Practical Introduction**. New York: Palgrave Macmillan, p. 66-90, 2009.

IDEM, R. C.; BARBOSA, L. M.; NESPOLI, T. S. Aspectos do Pensamento Computacional e Princípios Estéticos em Atividades Matemáticas. In: SCUCUGLIA, R. R. S; IDEM, R. C. (Org.). **Experiências Estéticas em Educação Matemática**. 1ed. Porto Alegre, RS: Editora Fi, v. 1, p. 129-154, 2021.

JAPIASSÚ, H.; MARCONDES, D. **Dicionário básico de Filosofia**. 4ed. Rio de Janeiro: Jorge Zahar, 2006.

JENKINS, H. **Cultura da convergência**. São Paulo: Aleph, 2009.

LARROSA, J. **Tremores**: escritos sobre experiência. Coleção Educação: Experiências e Sentido. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2016.

LESH, R.; LEHRER, R. Iterative refinement cycles for videotape analyses of conceptual change. In: LESH, R. **Handbook of research data design in mathematics and science education**. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum, 2000. p. 665-708.

LÉVI-STRAUSS, C. Ordem e desordem na tradição oral. In: LÉVI-STRAUSS, C. **Minhas palavras**. São Paulo: Brasiliense, 1988.

LÉVI-STRAUSS, Claude. A eficácia simbólica. In: LÉVI-STRAUSS, C. **Antropologia estrutural**. 3 ed. Rio de Janeiro: Tempo Brasileiro, 1989.

LEVY, P. **Tecnologias da Inteligência**: O futuro do pensamento na era da informática. Rio de Janeiro: Editora 34, 1993.

LINCOLN, Y.; GUBA, E. **Naturalistic Inquiry**. Londres: Sage Publications, 1985.

LISPECTOR, C. **A maçã no escuro** [recurso eletrônico]. Rio de Janeiro: Rocco Digital, 2015.

LIU, P. H. History as a Source of Mathematical Narrative in Developing Students' Interpretations of Mathematics. In: ZACK, M., SCHLIMM, D. (eds). Research in History and Philosophy of Mathematics. **Anais...** Canadian Society for History and Philosophy of Mathematics. Birkhäuser, Cham, p. 185-197, 2022. Disponível em <https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-030-95201-3_10>. Acesso em: 15 fev. 2023.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. Pesquisa em educação: abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 1986.

MARIOTTI, M. A. Introduction to proof: The mediation of a dynamic software environment. **Educational Studies in Mathematics**. v. 44, n. 1-3, p. 25-53, 2000.

MASON, J. Expressing generality and roots of algebra. In: BEDNARZ, N. KIERAN, C.; LEE, L. (Eds.). **Approaches to algebra**: Perspectives for research and teaching. Dordrecht: Kluwer Academic p. 65-86, 1996.

MERZBACH, U. C.; BOYER, C. B. **A History of Mathematics**. 3ed. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, 2011.

MONTENEGRO, F. R. Computadores fazem arte. In: SCIENCE, C; ZUMBI, N. **Da lama ao caos**. Rio de Janeiro: Sony Music, 1994. 1 CD. Faixa 13.

MORAES, C. A. P. **Recursos digitais na matemática**: prática docente na perspectiva de narrativas discentes do ensino fundamental. 2018. 325p. Tese (Doutorado em Educação) – Escola de Comunicação, Educação e Humanidades, Universidade Metodista de São Paulo, São Bernardo do Campo, 2018.

MORAIS FILHO, D. C. **Um convite à Matemática: fundamentos lógicos com técnicas de demonstração, notas históricas e curiosidades**. 3ed. Campina Grande: Fábrica de Ensino, 2010.

MURRAY, G. Narrative Inquiry. In: HEIGHAM, J.; CROKER, R. R. (Eds.). **Qualitative Research in Applied Linguistics**: A Practical Introduction. Basingstoke: Palgrave Macmillan, p. 45-65, 2009.

NACARATO, A. M.; PASSOS, C. L. M.; SILVA, H. Narrativas na pesquisa em Educação Matemática: caleidoscópio teórico e metodológico. **Boletim de Educação Matemática – BOLEMA**. Rio Claro: v. 28, n. 49, p. 701-716, 2014.

NELSEN, R. B. **Proofs without words**: exercises in visual thinking. Washington: The Mathematical Association of America, 1993.

NEMIROVSKY, R. Mathematical narratives, modeling and algebra. In: BEDNARZ, N. KIERAN, C.; LEE, L. (Eds.). **Approaches to algebra**: Perspectives for research and teaching. Dordrecht: Kluwer Academic p. 197-220, 1996

NÓBRIGA, J. C. C. Demonstrações Matemáticas Dinâmicas. **REVEMAT**. Florianópolis: v.15, n.1, p.1-21, 2019.

NOLL, J.; CLEMENT, K.; DOLOR, J; KIRIN, D.; PETERSEN, M. Students' use of narrative when constructing statistical models in TinkerPlots. **ZDM Mathematics Education**. v. 50, p. 1267–1280, 2018.

OLIVEIRA, A. B. **Licenciaturas em Matemática como produção narrativa**: aberturas para experiências. 2018. 420f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2018.

PALAI, R.S. The visualization of mathematics: Toward a mathematical exploratorium. **Notices of the AMS**. v. 46, n. 6, p. 647-658, 1999.

PEDROSO, H. A.; PRECIOSO, J. C. Soluções dos três problemas clássicos de construção por métodos não-euclidianos. **C.Q.D. - Revista Eletrônica Paulista**. Bauru: v. 5, p. 16-31, dez. 2015.

PIRIE, S. E. B. Classroom Video-Recording: When, Why and How does it offer a valuable data source for Qualitative Research?. In: Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 1996, Panamá. **Anais...** North America, Florida State University, Panama City, p. 1-18, 1996. Disponível em: <<https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED401128.pdf>>. Acesso em 15 jul. 2021.

PITA, A. P. G. **Um caminho, um olhar, um novo fazer:** narrativas de professores após formação continuada sobre Educação Estatística Crítica. 2020. 246f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, 2020.

PLATÃO. Mênon. In: **Diálogos I**. Tradução de Jorge Paleikat. Rio de Janeiro: Ediouro S. A., 1996;

PODVAL, M. F. T. R. Demonstração em Direito. **Boletim de Educação Matemática – BOLEMA**. Rio Claro: v. 15, n. 18, p. 112-122, 2002.

POLKINGHORNE, D. E. **Narrative knowing and the human sciences**. New York: State University of New York, 1988.

POLKINGHORNE, D. E. Narrative configuration in qualitative analysis. **International Journal of Qualitative Studies in Education**. v. 8, n. 1, p. 5-23, 1995.

POWELL, A.; FRANCISCO, J; MAHER, C. Uma abordagem à Análise de Dados de Vídeo para investigar o desenvolvimento de ideias e raciocínios matemáticos de estudantes. Tradução de Antônio Olímpio Junior. **Boletim de Educação Matemática – BOLEMA**. Rio Claro, n. 21, 2004.

RABELO, A. O. A importância da investigação narrativa na educação. **Educação e Sociedade**. Campinas, v. 32, n. 114, p. 171-188, 2011.

RAMOS, J. P. S. A constituição de uma teoria das proporções na Geometria de 1637: demonstrações geométricas versus construções de curvas mecânicas em Descartes. **Revista Especiaria – Cadernos de Ciências Humanas**. v. 16, n. 28, p. 77-99, 2016.

REID, D. A.; KNIPPING, C. **Proof in Mathematics Education: Research, Learning and Teaching**. Rotterdam: Sense Publishers, 2010

RICOEUR, P. **Tempo e narrativa**. Tradução de Roberto Leal Ferreira. Campinas: Papius, 1997.

ROGERS, R.; BOMAN, E. C. **How We Got From There To Here: A Story of Real Analysis**. 2ed. Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International License, 2014. Disponível em: <

<http://personal.psu.edu/ecb5/ASORA/CalcIn17th18thCentury-NewtLeibStart.html>>. Acesso em: 02 fev. 2023.

ROQUE, T. **História da matemática**: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SÁNCHEZ, I. C. S.; CASTILLO, L. A. B.; MENDES, I. A. O. História da Matemática e Tecnologias Digitais: Do que tratam três décadas de teses e dissertações?. **Revista Paradigma**. Maracay, v. 42, n. 2, p. 183-205, 2021.

SANTOS, C. P.; NETO, J. P.; SILVA, J. N. **A Geometria + Puzzle Stomachion**: Livro 6 - Arquimedes + Stomachion. Portugal: Edimpresa, 2007.

SANTOS, J. M. **Quadratura da Parábola**: uma abordagem possível para o ensino de somas infinitas. 2014. 57f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Centro de Ciências Exatas e da Terra, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2014.

SANTOS, W. C. **As ideias desenvolvidas na gênese do Teorema Fundamental do Cálculo de Arquimedes a Newton e Leibniz**. 2011. 102f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Ciências) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2011.

SCUCUGLIA, R. R. S. Narrativas Multimodais: a imagem dos matemáticos em performances matemáticas digitais. **Boletim de Educação Matemática – BOLEMA**. Rio Claro: v. 28, n. 49, p. 950-973, 2014.

SCUCUGLIA, R. R. S; GADANIDIS, G.; IDEM, R. C.; BARBOSA, L. M.; PORTERA, Y. S. Aspectos do pensamento computacional de estudantes do Ensino Fundamental. **Debates em Educação**, v. 13, n. 31, p. 231-255, 2021a.

SCUCUGLIA, R. R. S; BARBOSA, L. M; BORBA, M. C.; FERREIRA, A. L. A. The Use of Digital Technology to Estimate a Value of Pi: Teachers' Solutions on Squaring the Circle in a Graduate Course in Brazil. **ZDM - The International Journal on Mathematics Education**, v. 53, p. 605-619, 2021.

SEVCENKO, N. No princípio era o ritmo. In: RIEDEL, D. (Org). **Narrativa**: ficção e história. Rio de Janeiro: Imago, 1988.

SILVA, J. J. A demonstração matemática da perspectiva da lógica matemática. **Boletim de Educação Matemática – BOLEMA**. Rio Claro: v.15, n. 18, p. 68-78, set. 2002.

SILVA, C. R. M. **Uma, Nove ou Dez Narrativas sobre as Licenciaturas em Ciências e Matemática em Mato Grosso do Sul**. 2015. 369f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, 2015.

SILVA, M. S. **O que podem as narrativas na Educação Matemática brasileira**. 2020. 404f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, 2020.

SILVA, M. S.; SILVA, H. Movimentos das Narrativas na Educação Matemática Brasileira e o Lugar da História Oral. **Revista Brasileira de Pesquisa (Auto)Biográfica**. Salvador: v. 4, n. 10, p. 161-179, 2019.

SINCLAIR, N.; HEALY, L.; SALES, C. O. R. Time for telling stories: narrative thinking with dynamic geometry. **ZDM Mathematics Education**. v. 41, p. 441-452, 2009.

SKETCHPAD. In: **WIKIPÉDIA**, a enciclopédia livre. Flórida: Wikimedia Foundation, 2019. Disponível em: <<https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Sketchpad&oldid=54263949>>. Acesso em: 30 dez. 2020.

SKLIAR, C. A educação e a pergunta pelos Outros: diferença, alteridade, diversidade e os outros “outros”. **Ponto de Vista**. Florianópolis, n.05, p. 37-49, 2003.

SKOVSMOSE, O.; BORBA, M. C. Research Methodology and Critical Mathematics Education. In: VALERO, P.; ZEVENBERGEN, R. **Researching the Socio-Political Dimensions of Mathematics Education: Issues of power in theory and methodology**. Mathematics Education Library. Boston: Springer, v. 35, p. 207-226, 2004.

SOARES, N. M. F. **Sobre o conhecimento e a difusão das obras de Arquimedes em Portugal**. 2014. 110f. Dissertação (Mestrado em História e Filosofia da Ciência) – Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa, Lisboa, 2014.

SOUSA, G. C. **Um estudo sobre as origens da Lógica Matemática**. 2008. 194f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2008.

SOUSA, G. C. Aliança entre HM, TDIC e IM: Fundamentos e Aplicações. **Revista de Matemática, Ensino e Cultura – REMATEC**. Belém, v. 15, p. 117-136, 2020.

SOUSA, L. O Teorema das Quatro Cores. **Millenium**. Viseu: n. 24, p. 125-151, 2001.

SOUZA, E. C. **O conhecimento de si**: narrativas do itinerário escolar e formação de professores. 2004. 344f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2004.

SQUIRE, C. O que é narrativa? **Civitas**. Porto Alegre: v. 14, n. 2, p. 272-284, 2014.

STEWART, I.; TALL, D. **The Foundation of Mathematics**. 2ed. Oxford U.P., 2015.

STRUIK, D. J. **A source book in Mathematics, 1200-1800**. New York: Princeton University Press, 1986.

SU, Y. W.; HORNG, W. S.; HUANG, J. W.; CHEN, Y. F. Mathematical narrative: from history to literature. **History and Pedagogy of Mathematics**. Montpellier, França, 2016.

TAHAN, M. **A arte de ler e contar histórias**. 5ed. Rio de Janeiro: Conquista, 1966.

TAKAČI, D.; TAKAČI, A.; TAKAČI, A. **Experiments in Calculus with GeoGebra**. Teaching Mathematics and Statistics in Sciences, Modeling and Computer-Aided Approach.

Indonédia Dokumen, 2011. Disponível em: <<https://dokumen.tips/documents/takaci-d-takaci-a-takaci-a-experiments-in-calculus-with-.html?page=3>>. Acesso em: 10 jun. 2023.

TERUZZI, A. E. **A produção de sentido na aula de matemática**: a história da matemática como base para a construção de narrativas no ensino médio. 2017. 188f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2017.

THOMAS, R. S. D. Mathematics and narrative. **Mathematical intelligencer**. New York: Springer-Verlag, v. 24, n. 3, p. 43-46, 2002.

TIZZO, V. S. **Mobilizações de Narrativas na (e para a) Formação de Professores**: potencialidades no (e a partir do) Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência. 2019. 489f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, 2019.

THOMÉ, V. W.; DURO, M. L.; ANDRADE, C. L. História da Análise Matemática e Desenvolvimento Cognitivo. **Boletim de Educação Matemática – BOLEMA**. Rio Claro: v. 34, n. 67, p. 399-420, 2020.

VELOSO, E. Uma curva de cada vez....: A espiral de Arquimedes. **Educação e Matemática**. Portugal: n. 141, p. 13-15, 2017.

XAMANISMO. In: **WIKIPÉDIA**, a enciclopédia livre. Flórida: Wikimedia Foundation, 2021. Disponível em: <<https://pt.wikipedia.org/w/index.php?title=Xamanismo&oldid=62571473>>. Acesso em: 10 dez. 2021.

ZAQUEU-XAVIER, A. C. M. **Narrativas na Formação de Professores**: possibilidades junto ao Pibid da UFSCAr. 2019. 304f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2019.

ZENGİN, Y. Incorporating the dynamic mathematics software GeoGebra into a history of mathematics course. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**. v. 48, p. 1083-1098, 2018.

APÊNDICES

APÊNDICE A



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
 INSTITUTO DE BIOCIÊNCIAS, LETRAS E CIÊNCIAS EXATAS
 PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO ENSINO E PROCESSOS FORMATIVOS
 INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS
 PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA



UNESP, Rio Claro - SP

CARTA DE INFORMAÇÃO - PARTICIPAÇÃO EM PESQUISA

Meu nome é Ricardo Scucuglia Rodrigues da Silva, e sou professor do Departamento de Educação da Universidade Estadual Paulista (UNESP), IBILCE, Campus de São José do Rio Preto. Coordeno um Projeto de Pesquisa aprovado na Chamada Universal MCTIC/CNPq 28/2018 intitulado “Sobre a Natureza de Experiências Matemáticas Estéticas” (processo 428323/2018/-9). O objetivo da pesquisa é investigar a natureza didático-pedagógica de experiências matemáticas estéticas. Tais experiências são fomentadas pelo uso (inovador) das artes e das tecnologias digitais no ensino e aprendizagem de Matemática em diversificados níveis de ensino.

Os cenários de experiências investigados neste estudo serão desenvolvidos a partir de atividades estruturadas em cinco principais frentes de ações, as quais perpassam por temáticas como: pensamento computacional, artes (cinema, poesia e música), produção de vídeos digitais, neurociência, História do Cálculo Diferencial, uso do *software* GeoGebra e pensamento matemático sensível. Neste contexto, ministro a disciplina intitulada Gênese do Pensamento Diferencial oferecida pelos Programas de Pós-Graduação Ensino e Processos Formativos (UNESP) e Educação Matemática (UNESP – Rio Claro), a qual será utilizada como cenário para produção de dados.

Objetivo da disciplina

A disciplina tem como objetivo compreender as práticas matemáticas vigentes no século XX e suas perspectivas futuras tomando como articulação a psicogênese e a sociogênese do pensamento diferencial e combinando com o uso das tecnologias digitais.

Se você concordar em participar

Se você concordar em participar deste estudo, você será observado e filmado. Também serão realizadas entrevistas com participantes. Esses registros e os produtos educacionais criados por

participantes poderão ser utilizados em estudos como: artigos, dissertações, teses, capítulo de livros, livros, entre outros estudos, os quais poderão ser publicados na Internet e/ou de forma impressa e estarão sob domínio público.

Confidencialidade

A informação registrada será utilizada para fins de pesquisa em Educação Matemática. Transcrições de falas, falas em áudio, construções de objetos computacionais, produtos educacionais, imagens e registros de ações dos participantes serão utilizados/revelados em relatórios de pesquisa, artigos, livros e, principalmente, na publicação de dissertações e teses.

Riscos e Participação voluntária

Não há riscos conhecidos para participar deste estudo. A participação neste estudo é voluntária. Esta carta de informação e consentimento tem como objetivo fundamental a ciência e autorização do uso da imagem do participante e das produções oriundas dos temas discutidos durante as aulas.

APÊNDICE B



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
 INSTITUTO DE BIOCIÊNCIAS, LETRAS E CIÊNCIAS EXATAS
 PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO ENSINO E PROCESSOS FORMATIVOS
 INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS
 PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
 UNESP, Rio Claro – SP



CARTA DE CONSENTIMENTO E AUTORIZAÇÃO PARTICIPAÇÃO EM PRODUÇÃO DE DADOS DE PESQUISA⁷⁸

Declaro que li a carta de informação, entendi a natureza do estudo e concordo em participar.
 Declaro ciência e concordância com relação as questões éticas sobre uso público de imagens
 no desenvolvimento e divulgação da pesquisa.

Nome do participante:

RG:

Local:

Data:

Autorizo que meu nome seja mantido no trabalho:

() Sim

() Não. Sugiro que meu nome seja alterado para:_____

Assinatura:_____

Comentários do participante:_____

⁷⁸ “Sobre a Natureza de Experiências Matemáticas Estéticas” (processo 428323/2018/-9).

ANEXOS

ANEXO A – The Quadrature of the Parabola⁷⁹

A *segment* of a convex curve is a region bounded by a straight line and a portion of the given curve (Fig. 4⁸⁰). In the preface to the *Quadrature of the Parabola*, Archimedes remarks that earlier mathematicians had successfully attempted to find the area of a segment of a circle or hyperbola, but that apparently no one had previously attempted the quadrature of a segment of a parabola – precisely the one that can be carried out by the method of exhaustion.

The parabola was originally defined by the Greeks as a conic section. That is, given a circular (double) cone with vertical axis, a parabola is the

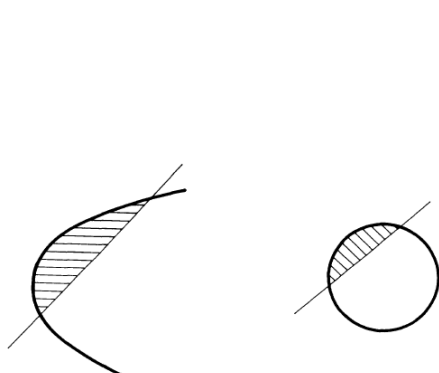


Figure 4

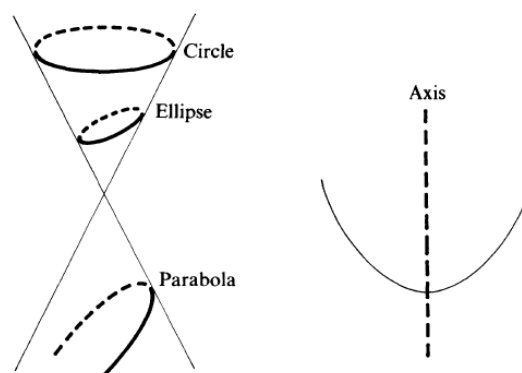


Figure 5

curve of intersection of the cone with a plane that is parallel to a generating element of the cone. Other positions of the plane yield ellipses and hyperbolas. If the plane is horizontal then the section is a circle. The parabola is obviously symmetric with respect to a certain straight line in the plane containing it; this line is called the axis of the parabola (Fig. 5).

Given a parabolic segment with *base* AB (Fig. 6), the point P of the segment that is farthest from the base is called the *vertex* of the segment,

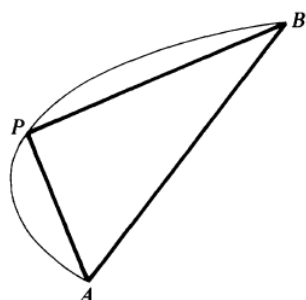


Figure 6

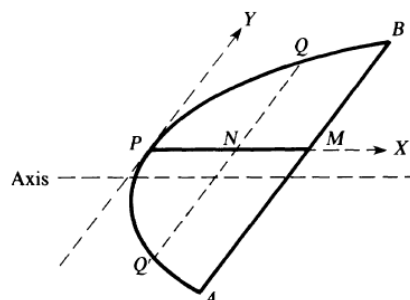


Figure 7

⁷⁹ Publicada em EDWARDS, C. H. **The Historical Development of the Calculus**. New York: Springer-Verlag, 1979. p. 35-39.

⁸⁰ Os números das figuras se mantiveram os mesmos do documento original.

and the (perpendicular) distance from P to AB is its *height*. Archimedes showed that the area of the segment is four-thirds that of the inscribed triangle APB . That is, the area of a segment of a parabola is $4/3$ times the area of a triangle with the same base and height. He gave two separate proofs of the result; we will discuss here the second one.

By the time of Archimedes, the following facts were known concerning an arbitrary parabolic segment APB .

- (a) The tangent line at P is parallel to the base AB .
- (b) The straight line through P parallel to the axis intersects the base AB in its midpoint M .
- (c) Every chord QQ' parallel to the base AB is bisected by the *diameter* PM .
- (d) With the notation in Figure 7,

$$\frac{PN}{PM} = \frac{NQ^2}{MB^2} \quad (5)$$

That is, in the pictured oblique xy -coordinate system, the equation of the parabola is of the form $x = ky^2$. Archimedes quotes these facts without proof, referring to earlier treatises on the conics by Euclid and Aristaeus.

There is a natural parallelogram circumscribed about a parabolic segment APB , having AB as a side, and with its base AA' and top BB' parallel to the diameter PM (Fig. 8). Since the area of the inscribed triangle APB is half that of the circumscribed parallelogram, it follows that the area of this triangle is more than half of the area of the parabolic segment APB .

Now consider the two smaller parabolic segments with bases PB and AP ; let their vertices be P_1 and P_2 , respectively (Fig. 8). In the same way as above, it follows that the areas of the inscribed triangles PP_1B and AP_2P are more than half of the areas of these two segments.

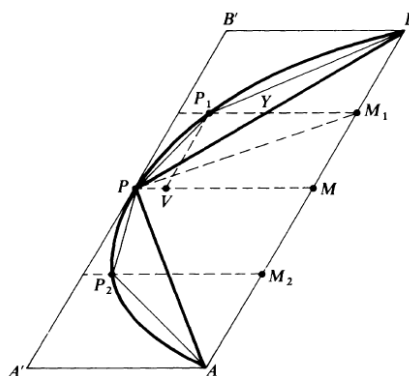


Figure 8

We have begun to exhaust the area of the original parabolic segment APB with inscribed polygons. The triangle APB is our first inscribed polygon, and AP_2PP_1B is the second. We continue in this way, adding at each step the triangles inscribed in the parabolic segments remaining from the previous step. Since the total area of these inscribed triangles is more than

half that of the segments, it follows from Eudoxus' principle that, given $\epsilon > 0$, we obtain after a finite number of steps an inscribed polygon whose area differs from that of the segment APB by less than ϵ .

Now we want to show that the sum of the areas of the triangles AP_2P and PP_1B is $\frac{1}{4}$ that of ΔAPB . Let M_1 be the midpoint of BM , Y the point of intersection of P_1M_1 and PB , and V the intersection with PM of the line through P_1 parallel to AB . Then

$$BM^2 = 4M_1M^2,$$

so it follows from (5) that

$$PM = 4PV \text{ or } P_1M = 3PV$$

$$\text{But } YM_1 = \frac{1}{2}PM = 2PV, \text{ so that}$$

$$YM_1 = 2P_1Y.$$

It follows from this that

$$a(\Delta PP_1B) = \frac{1}{2}a(\Delta PM_1B) = \frac{1}{4}a(\Delta PMB),$$

applying twice the fact that the ratio of the areas of two triangles with the same base is equal to the ratio of their heights. Similarly

$$a(\Delta AP_2P) = \frac{1}{4}a(\Delta APM),$$

so we find that

$$a(\Delta PP_1B) + a(\Delta AP_2P) = \frac{1}{4}a(\Delta PMB) + \frac{1}{4}a(\Delta APM) = \frac{1}{4}a(\Delta APB)$$

as desired.

In the same way it can be proved that the sum of the areas of the inscribed triangles added at each step is equal to $\frac{1}{4}$ of the sum of the areas of the triangles added at the previous step. If we write

$$\alpha = a(\Delta APB),$$

it follows that the polygon $\mathcal{P}_n$ obtained after n steps has area

$$a(\mathcal{P}_n) = \alpha + \frac{\alpha}{4} + \frac{\alpha}{4^2} + \cdots + \frac{\alpha}{4^n} \quad (6)$$

Consequently, given $\epsilon > 0$, the area $a(APB)$ of the parabolic segment differs from the right-hand side of (6) by less than ϵ if n is sufficiently large.

At this point Archimedes derives the elementary identity

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^n} = \frac{4}{3} \quad (7)$$

This follows from the observation that

$$\frac{1}{4^k} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^k} = \frac{4}{3 \cdot 4^k} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^{k-1}},$$

for then

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \left(\frac{1}{4^n} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^n} \right) &= 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \left(\frac{1}{4^{n-1}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^{n-1}} \right) = \\ &\vdots \\ &= 1 + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \right) = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

It is tempting to simply sum the geometric series by letting $n \rightarrow \infty$ in (7) to obtain

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{4^n} + \cdots = \frac{4}{3}$$

We would then conclude that

$$\begin{aligned} a(APB) &= \lim_{n \rightarrow \infty} a(\mathcal{P}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha \left(1 + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^n} \right) = \alpha \left(1 + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{4^n} + \cdots \right) \\ a(APB) &= \frac{4}{3} \alpha = \frac{4}{3} \alpha(\Delta APB) \end{aligned}$$

as desired. ■

No doubt Archimedes intuitively obtained the answer $4/3$ in similar fashion but, rather than taking limits explicitly, he concluded the proof with a typical double *reductio ad absurdum* argument which we leave to the reader.

ANEXO B – A quadratura da parábola⁸¹

Um *segmento* de uma curva convexa é uma região limitada por uma linha reta e uma parte da curva dada (Fig. 4). No prefácio de *Quadratura da Parábola*, Arquimedes observa que os primeiros matemáticos haviam tentado com sucesso encontrar a área de um segmento de um círculo ou hipérbole, mas aparentemente ninguém havia tentado anteriormente a quadratura de um segmento de uma parábola - precisamente aquele que pode ser realizado pelo método da exaustão.

A parábola foi originalmente definida pelos gregos como uma seção cônica. Ou seja, dado um cone circular (duplo) com eixo vertical, uma parábola é a

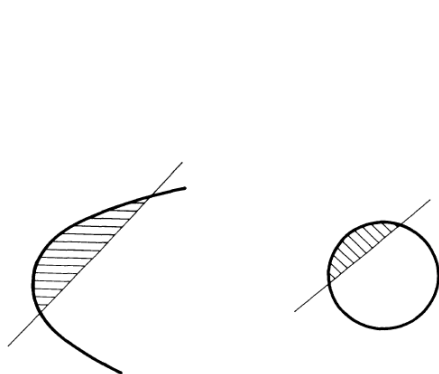


Figura 4

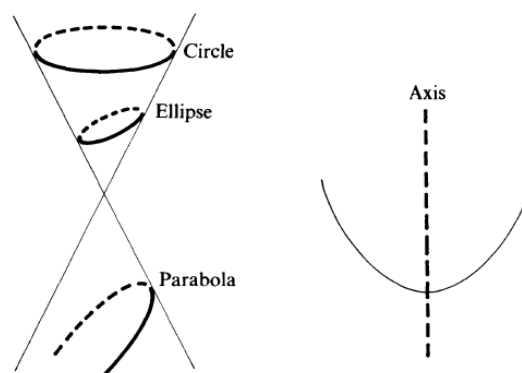


Figura 5

curva de intersecção do cone com um plano paralelo a um elemento gerador do cone. Outras posições do plano produzem elipses e hipérbolles. Se o plano for horizontal, a seção é um círculo. A parábola é obviamente simétrica em relação a uma certa linha reta no plano que a contém; esta linha é chamada de eixo da parábola (Fig. 5).

Dado um segmento parabólico com *base* AB (Fig. 6), o ponto P do segmento que está mais distante da base é chamado de *vértice* do segmento,

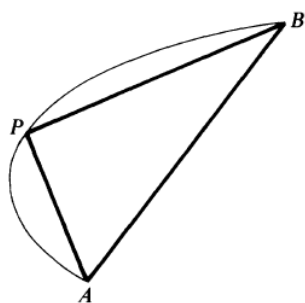


Figura 6

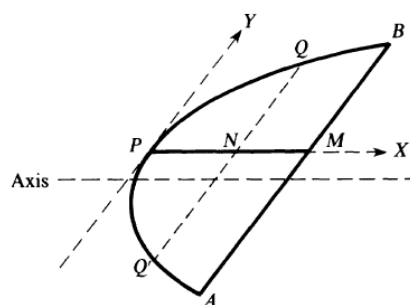


Figura 7

⁸¹ Tradução nossa de EDWARDS, C. H. *The Historical Development of the Calculus*. New York: Springer-Verlag, 1979. p.35-39.

e a distância (perpendicular) de P a AB é sua *altura*. Arquimedes mostrou que a área do segmento é quatro terços da área do triângulo APB inscrito. Ou seja, a área de um segmento de uma parábola é $4/3$ vezes a área de um triângulo com a mesma base e altura. Ele deu duas provas separadas do resultado; vamos discutir aqui a segunda.

Na época de Arquimedes, os seguintes fatos eram conhecidos a respeito de um segmento APB parabólico arbitrário.

- (a) A linha tangente em P é paralela à base AB .
- (b) A linha reta através de P é paralela ao eixo que intersecta a base de AB no seu ponto médio M .
- (c) Cada corda QQ' paralela à base AB é dividida ao meio pelo diâmetro PM .
- (d) Com a notação na Figura 7,

$$\frac{PN}{PM} = \frac{NQ^2}{MB^2} \quad (5)$$

Ou seja, no sistema de coordenadas oblíquas xy , a equação da parábola é da forma $x = ky^2$. Arquimedes cita esses fatos sem provas, referindo-se a tratados anteriores sobre as cônicas de Euclides e Aristeu.

Existe um paralelogramo circunscrito em torno de um segmento parabólico APB , tendo AB como lado, e com sua base AA' e topo BB' paralelos ao diâmetro PM (Fig. 8). Visto que a área do triângulo inscrito APB é a metade daquela do paralelogramo circunscrito, segue-se que a área desse triângulo é maior do que a metade da área do segmento parabólico APB .

Agora considere os dois segmentos parabólicos menores com bases PB e AP ; sejam seus vértices P_1 e P_2 , respectivamente (Fig. 8). Da mesma forma que antes, segue-se que as áreas dos triângulos inscritos PP_1B e AP_2P são maiores do que a metade das áreas desses dois segmentos.

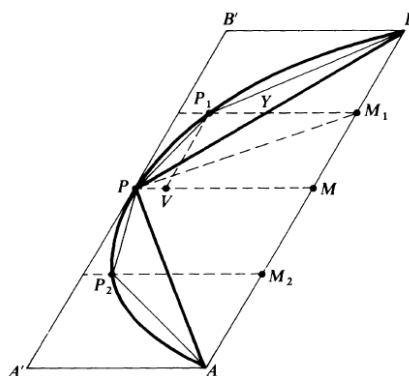


Figura 8

Começamos a exaurir a área do segmento parabólico original APB com polígonos inscritos. O triângulo APB é nosso primeiro polígono inscrito e AP_2PP_1B é o segundo.

Continuamos assim, adicionando a cada passo os triângulos inscritos nos segmentos parabólicos remanescentes do passo anterior. Uma vez que a área total desses triângulos inscritos é maior do que a metade da área dos segmentos, segue-se do princípio de Eudoxus que, dado $\epsilon > 0$, *obtemos após um número finito de passos um polígono inscrito cuja área difere daquela do segmento APB por menos de ϵ .*

Agora queremos mostrar que a soma das áreas dos triângulos AP_2P e PP_1B é $\frac{1}{4}$ da do ΔAPB . Seja M_1 o ponto médio de BM , Y o ponto de intersecção de P_1M_1 e PB , e V a intersecção com PM da linha que passa por P_1 paralelo a AB . Então

$$BM^2 = 4M_1M^2,$$

então segue de (5) que

$$PM = 4PV \text{ or } P_1M = 3PV$$

$$\text{Mas } YM_1 = \frac{1}{2}PM = 2PV, \text{ assim}$$

$$YM_1 = 2P_1Y$$

Segue-se que

$$a(\Delta PP_1B) = \frac{1}{2}a(\Delta PM_1B) = \frac{1}{4}a(\Delta PMB),$$

aplicando duas vezes o fato de que a proporção das áreas de dois triângulos com a mesma base é igual à proporção de suas alturas. Similarmente

$$a(\Delta AP_2P) = \frac{1}{4}a(\Delta APM),$$

então encontramos

$$a(\Delta PP_1B) + a(\Delta AP_2P) = \frac{1}{4}a(\Delta PMB) + \frac{1}{4}a(\Delta APM) = \frac{1}{4}a(\Delta APB)$$

como desejado.

Da mesma forma pode-se comprovar que a soma das áreas dos triângulos inscritos somados em cada etapa é igual à $\frac{1}{4}$ da soma das áreas dos triângulos somados na etapa anterior. Se escrevermos

$$\alpha = a(\Delta APB),$$

segue-se que o polígono $\mathcal{P}_n$ obtido após n passos tem área

$$a(\mathcal{P}_n) = \alpha + \frac{\alpha}{4} + \frac{\alpha}{4^2} + \cdots + \frac{\alpha}{4^n} \quad (6)$$

Consequentemente, dado $\epsilon > 0$, a área $a(APB)$ do segmento parabólico difere do lado direito de (6) por menos do que se n for suficientemente grande.

Neste ponto, Arquimedes deriva a identidade elementar

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^n} = \frac{4}{3} \quad (7)$$

Isso decorre da observação de que

$$\frac{1}{4^k} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^k} = \frac{4}{3 \cdot 4^k} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^{k-1}},$$

para então

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \left(\frac{1}{4^n} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^n} \right) &= 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \left(\frac{1}{4^{n-1}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^{n-1}} \right) = \\ &\vdots \\ &= 1 + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \right) = \frac{4}{3} \end{aligned}$$

É tentador simplesmente somar as séries geométricas, deixando $n \rightarrow \infty$ em (7) para obter

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{4^n} + \cdots = \frac{4}{3}$$

Concluiríamos então que

$$\begin{aligned} a(APB) &= \lim_{n \rightarrow \infty} a(\mathcal{P}_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha \left(1 + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^n} \right) = \alpha \left(1 + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{4^n} + \cdots \right) \\ a(APB) &= \frac{4}{3} \alpha = \frac{4}{3} \alpha(\Delta APB) \end{aligned}$$

como desejado. ■

Sem dúvida, Arquimedes obteve intuitivamente a resposta $4/3$ de maneira semelhante, mas, em vez de tomar os limites explicitamente, ele concluiu a prova com um típico argumento de dupla redução ao absurdo que deixamos para o leitor.

ANEXO C – Demonstração algébrica realizada pelo Grupo 1

Hipótese: Dados um segmento parabólico com base AB , P um ponto mais distante da base AB , chamado de vértice do segmento. O segmento parabólico ABP é a altura, ou seja, o triângulo APB e o segmento parabólico possuem base e altura iguais, $\overline{AB}$ e h , respectivamente.

Tese: A área do segmento é quatro terços da área do triângulo.

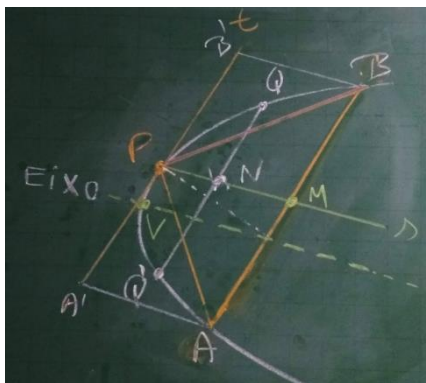
Demonstração:

Assumindo:

- (i) A reta tangente t passando por P é paralela a $\overline{AB}$.
- (ii) A reta s que é paralela ao eixo de simetria do segmento parabólico, então $\overline{AM} = \overline{MB}$, sendo M o ponto de intersecção entre a reta s e o segmento $\overline{AB}$.
- (iii) Tome $\overline{QQ'}$ uma corda paralela a $\overline{AB}$, a qual é bisseccionada pelo diâmetro PM , isto é, $\overline{QN} = \overline{Q'N}$.
- (iv) Considere $\frac{PN}{PM} = \frac{NQ^2}{MB^2}$.

Com isso, considere o paralelogramo circunscrito no segmento parabólico, $AA'BB'$, de modo que $\overline{AA'} \parallel \overline{BB'} \parallel \overline{PM}$, sendo $\overline{AA'}$ e $\overline{BB'}$ as bases desse paralelogramo, como mostra a Figura 01.

Figura 01 – Representação da etapa inicial da demonstração



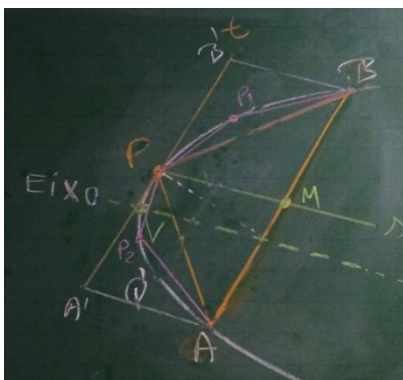
Fonte: os autores.

Se o triângulo $\triangle APB$ inscrito no segmento parabólico tem área igual a metade da área do paralelogramo, então a área do triângulo é maior que a metade da área do segmento parabólico. Logo,

$$A_{\triangle APB} = \frac{1}{2} A_{AA'BB'} \rightarrow A_{\triangle APB} > \frac{1}{2} A_{\text{segmento}} \quad (1)$$

Considere agora o segmento parabólico com base $\overline{PB}$, sendo P_1 o ponto mais distante à base $\overline{PB}$. Seja o triângulo inscrito $\triangle AP_1B$. Além disso, considere o segmento parabólico com base $\overline{PA}$ sendo P_2 o ponto mais distante à base $\overline{PA}$. Seja o triângulo inscrito $\triangle AP_2P$. Como podemos observar na Figura 02.

Figura 02 – Representação da etapa secundária da demonstração



Fonte: os autores.

Logo, temos que:

$$A_{\Delta AP_1B} > \frac{1}{2}A_{PP_1B} \text{ e } A_{\Delta AP_2P} > \frac{1}{2}A_{AP_2P}, \text{ seguindo raciocínio análogo a (1).}$$

Com o método da exaustão, a área do segmento parabólico, APB , será aproximada pela área dos polígonos inscritos.

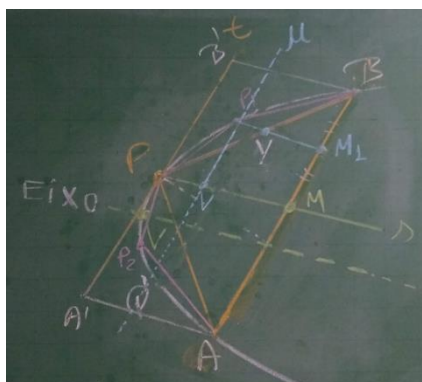
Vamos mostrar agora que a soma das áreas dos triângulos ΔAP_2P e ΔPP_1B será $\frac{1}{4}$ da área do triângulo ΔAPB .

Para isso, sejam:

- 1) M_1 o ponto médio de $\overline{BM}$, pois Y é ponto médio do segmento $\overline{PB}$ do triângulo ΔPMB e, pelo Teorema da Base Média, M_1 o ponto médio de $\overline{BM}$.
- 2) Y é interseção entre os segmentos $\overline{P_1M_1}$ e $\overline{PM}$.
- 3) V é interseção entre a reta u e o segmento $\overline{PM}$, sendo $u \parallel \overline{AB}$ que passa por P_1 .

Como podemos observar na Figura 03.

Figura 03 – Representação dos aspectos considerados para a demonstração



Fonte: os autores.

Então,

$$BM^2 = 4M_1M^2 \quad (2),$$

pois

$$\frac{M_1M}{BM} = \frac{1}{2}$$

$2 M_1M = BM$, elevando ambos os lados ao quadrado, temos

$$4M_1M^2 = BM^2.$$

Além disso, temos que $PM = 4PV$, pois

$$\frac{PV}{PM} = \frac{VP_1^2}{MB^2}, \text{ por (2) temos:}$$

$$\frac{PV}{PM} = \frac{VP_1^2}{4M_1M^2}.$$

Temos que $VP_1 = M_1M$, pois são bases do paralelogramo VP_1MM_1 . Logo:

$$\frac{PV}{PM} = \frac{M_1M^2}{4M_1M^2} \rightarrow \frac{PV}{PM} = \frac{1}{4}.$$

Portanto,

$$PM = 4PV \quad (3)$$

Notemos que

$$PM = PV + VM = \frac{1}{4}PM + \frac{3}{4}PM$$

Logo,

$$VM = 3PV \quad (4)$$

mas $VM = P_1M_1$. Então,

$$P_1M_1 = 3PV.$$

Porém, $YM_1 = \frac{1}{2}PM$, pois YM_1 é base média do triângulo ΔPMB , de base $\overline{PB}$. Além disso,

$PM = 4PV$ e, por (3), temos:

$$\frac{1}{2}PM = 2PV \rightarrow YM_1 = 2PV = \frac{1}{2}PM \quad (5)$$

Logo, $YM_1 = 2P_1Y$, pois, por (4):

$$VM = 3PV, \text{ mas } VM = P_1Y + YM_1$$

Então,

$$P_1Y + YM_1 = 3PV \quad (6).$$

Notemos que, $PM = 4PV$. Então,

$$YM_1 = \frac{1}{2}PM \rightarrow YM_1 = \frac{1}{2}4PV \rightarrow YM_1 = 2PV.$$

Logo, retornando em (6), temos:

$$P_1Y + 2PV = 3PV \rightarrow P_1Y = PV.$$

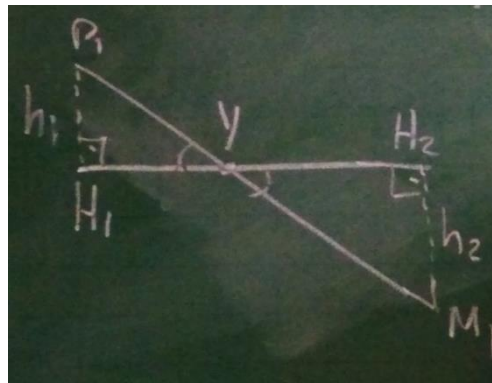
Por (5), temos:

$$YM_1 = 2PV \rightarrow YM_1 = 2P_1Y \quad (7).$$

Segue que:

$A_{\Delta PP_1B} = \frac{1}{2} A_{\Delta PM_1B}$, pois os triângulos possuem a mesma base e, por (7), $\frac{P_1Y}{YM_1} = \frac{h_1}{h_2} = \frac{1}{2}$, na qual h_1, h_2 são alturas dos triângulos ΔPP_1B e ΔPM_1B , respectivamente. Como odemos observar na Figura 04.

Figura 04 – Representação das alturas dos triângulos ΔPP_1B e ΔPM_1B



Fonte: os autores.

Além disso, temos que:

$A_{\Delta PM_1B} = \frac{1}{2} A_{\Delta PMB}$, pois as alturas dos triângulos possuem a mesma medida, denotamos por h , e $M_1B = \frac{1}{2} MB$, pois M_1 é ponto médio da base $\overline{MB}$.

Logo,

$$A_{\Delta PP_1B} = \frac{1}{4} A_{\Delta PMB} \quad (8).$$

De forma análoga, temos:

$$A_{\Delta PP_2A} = \frac{1}{4} A_{\Delta PMA} \quad (9).$$

Portanto, por (8) e (9), temos:

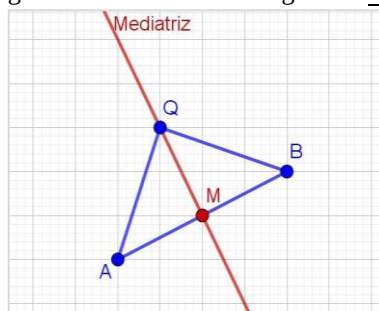
$$A_{\Delta PP_1B} + A_{\Delta PP_2A} = \frac{1}{4} A_{\Delta PMB} + \frac{1}{4} A_{\Delta PMA} = \frac{1}{4} (A_{\Delta PMB} + A_{\Delta PMA}) = \frac{1}{4} A_{\Delta APB}.$$

ANEXO D – Desenvolvimento das etapas apresentada em Santos (2014)

Os resultados representados por nós a partir dos apontamentos de Santos (2014) foram as seguintes:

- 1) “Denomina-se mediatriz de um segmento de reta, a reta perpendicular ao segmento que passa pelo seu ponto médio” (SANTOS, 2014, p. 28), como mostra a Figura 05.

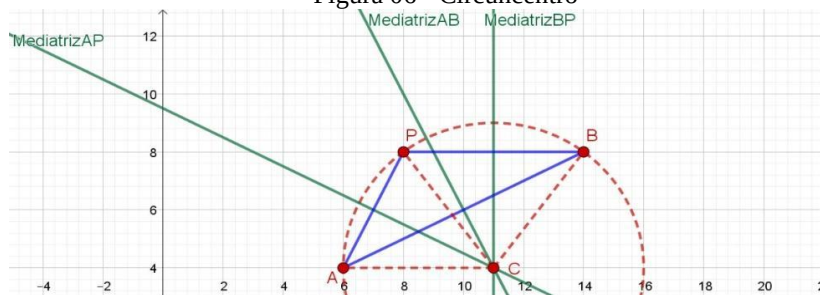
Figura 05 – Mediatriz do segmento $\overline{AB}$.



Fonte: os autores.

- 2) “O ponto de encontro das mediatrizes de um triângulo é chamado de circuncentro. Ele é o centro da circunferência na qual o triângulo está inscrito” (SANTOS, 2014, p. 30), como podemos observar na Figura 06.

Figura 06 - Circuncentro

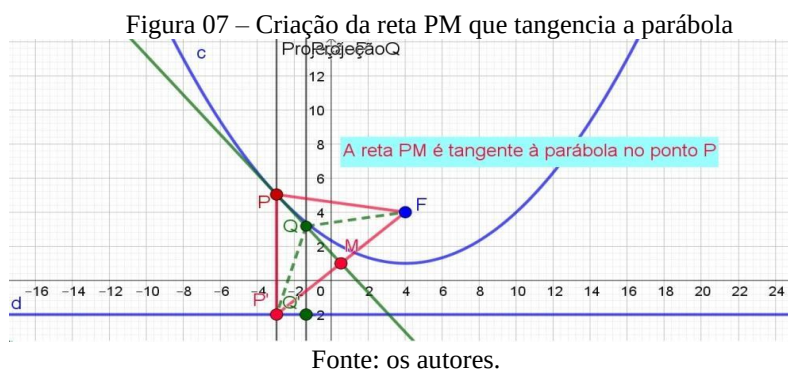


Fonte: os autores.

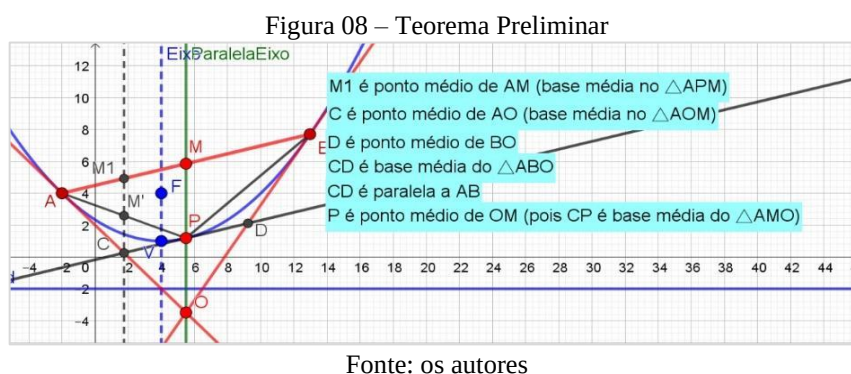
- 3) A reta que passa pelo ponto P pertencente a parábola é tangente a ela.

Para construir uma reta tangente a uma parábola em um ponto P, como mostra a Figura 07, projete ortogonalmente o ponto P sobre a reta diretriz da parábola, obtendo o ponto P'. Construa o triângulo PP'F. Observe que, pela definição de parábola, os segmentos PP' e PF têm a mesma medida, pois P é um ponto da parábola. Obtenha o ponto médio M do segmento P'F. A reta PM é tangente à parábola no ponto P. Para isso, precisamos provar que qualquer ponto Q dessa reta é exterior a essa parábola, com exceção do ponto P. Como a reta PM é mediatriz de P'F, os segmentos QP' e QF têm a mesma medida. Por outro lado, o segmento QQ', onde Q' é a projeção de Q na diretriz, tem medida menor do que QP' (cateto e hipotenusa). Portanto, a distância de Q à diretriz é menor do que a distância de Q

ao foco F, o que permite concluir que Q é exterior à parábola, de onde se conclui que a reta PM é tangente à parábola no ponto P.



- 4) “Teorema Preliminar: Sejam A e B dois pontos de uma parábola e O o ponto de interseção entre as retas tangentes à parábola passando por esses pontos. A reta que passa pelo ponto O e é paralela ao eixo da parábola passa pelo ponto médio do segmento AB” (SANTOS, 2014, p. 31), como mostra a Figura 08.

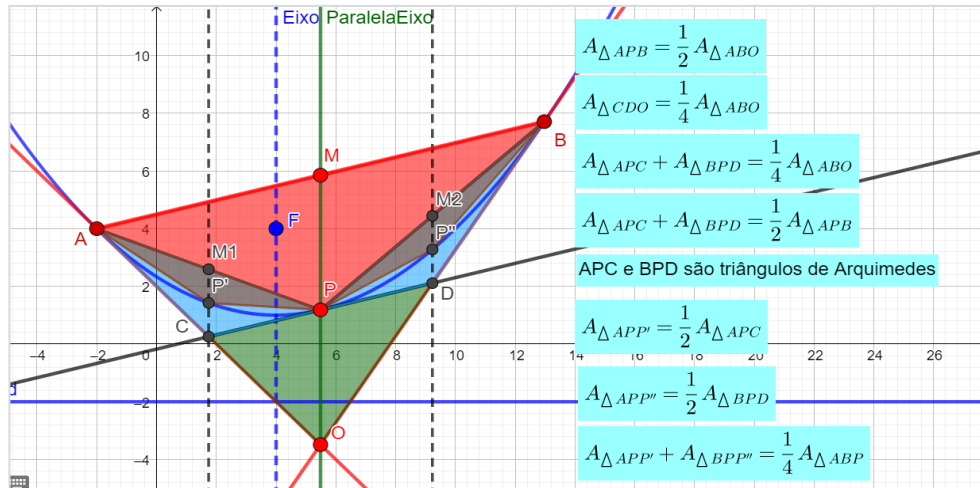


- 5) A soma das áreas dos triângulos AP'P e PP''B é $\frac{1}{4}$ da área do triângulo APB, como mostram as passagens incluídas na Figura 09.

Para verificar essa propriedade, basta utilizar as observações destacadas nas Figuras 08 e 09. A razão $\frac{1}{4}$ vai se repetir quando forem construídos novos triângulos seguindo esse mesmo processo. Como mostra a Figura 09, essa sucessão de triângulos vai preenchendo o segmento parabólico quando a quantidade de triângulos tende ao infinito.

- 6) Se denominarmos como A a área do triângulo APB (Figura 09), a soma das áreas dos triângulos AP'P e PP''B será $\frac{1}{4}$ e assim sucessivamente, de modo que a soma das áreas dos infinitos triângulos será $A + \frac{A}{4} + \frac{A}{16} + \frac{A}{64} + \dots$. Portanto, a área do segmento parabólico será dado pela soma da PG infinita $A/(1-\frac{1}{4}) = A/(\frac{3}{4}) = (\frac{4}{3})A$. Ou seja, a área do segmento parabólico é $\frac{4}{3}$ da área do triângulo APB.

Figura 09 – Representação final da demonstração no GeoGebra



Fonte: os autores.

ANEXO E – The Archimedean Spiral⁸²

Greek mathematicians suffered from a paucity of curves available to serve as objects of their study. Because their algebra was geometric and rhetorical rather than numerical and symbolic, the introduction of new curves by means of equations (as in analytic geometry) was not feasible. In addition, Greek geometry was essentially static rather than dynamic in character. Consequently they could, for the most part, define curves only in terms of simple locus conditions (e.g., the circle as the locus of points equidistant from a given fixed point) or as intersections of given surfaces fixed in position (e.g., a conic section as the intersection of a plane and a cone).

The static character of Greek geometry is a reflection of the very limited role of motion and variability concepts in Greek science generally. Only the cases of uniform motion—either rectilinear or circular—were studied in any detail. Other motions (such as those of the planets in Greek astronomical models) could only be analyzed in terms of uniform linear and circular motions.

It was in these terms that Archimedes defined his famous spiral—as the composition of a uniform linear motion and a uniform circular motion.

If a straight line drawn in a plane revolve at a uniform rate about one extremity which remains fixed and return to the position from which it started, and if, at the same time as the line revolves, a point move at a uniform rate along the straight line beginning from the extremity which remains fixed, the point will describe a spiral in the plane (Definition 1 of On Spirals).

To describe this curve in modern polar coordinates, let ω (in radians) be the constant angular speed of rotation of the line, and v the constant speed with which the point moves along the line, starting at the origin. Then the polar coordinates of the moving point at time t are $r = vt$ and $\theta = \omega t$, so the polar coordinates equation of the spiral is

$$r = a\theta \quad (31)$$

where $a = v/\omega$.

The first twenty propositions of the treatise *On Spirals* are devoted mainly to the determination of the tangent line to the spiral at a given point of it. Here, as elsewhere in Greek geometry, a static conception of a tangent line to a curve is employed – it is a straight line that “touches” the curve at a single point without crossing it. Although no dynamic considerations appear in the finished exposition, it has been conjectured that Archimedes *discovered* the tangent line to the spiral by means of a parallelogram of velocities determined by the two

⁸² Publicada em EDWARDS, C. H. **The Historical Development of the Calculus**. New York: Springer-Verlag, 1979. p. 54-59.

component motions generating the spiral (see the Appendix to Heath [6]⁸³). If so, this would be a rare (if not unique) instance of *differential* calculus methods in antiquity.

At any rate, he shows that the tangent line at the point P to the spiral OPS intersects the perpendicular OQ to OP in a point T such that the line segment OT is equal in length to the circular arc PR intercepted between the polar axis and the radius vector OP (Fig. 24). The proof is a double *reductio ad absurdum* argument showing that the assumptions $OT > PR$ and $OT < PR$ lead to contradictions.

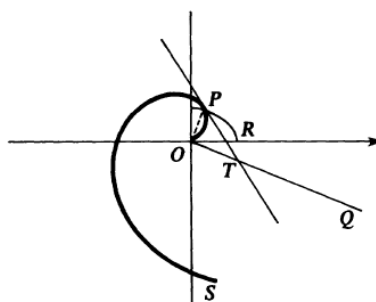


Figure 24

instant P has a vertical velocity component v and a horizontal velocity component $\omega a\pi/2$ (why?).

The final eight propositions of *On Spirals* are devoted to area computations. For example, Archimedes proves that the area of the region S , bounded by one turn of the spiral and the line segment joining its initial and final points, is one-third that of the circle C centered at the initial point and passing through the final point (Fig. 26). That is,

$$a(S) = \frac{1}{3}\pi(2\pi a)^2 \quad (32)$$

The proof of (32) makes use of the familiar (then as now) formulas for

Spiral

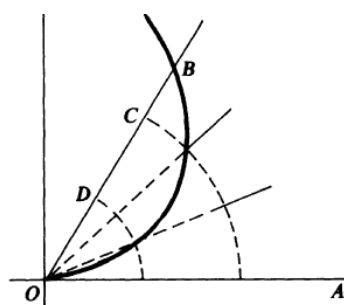


Figure 25

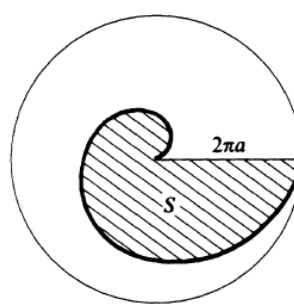


Figure 26

the sum of the terms of an arithmetic progression, and of their squares:

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n}{2}(n + 1) \quad (33)$$

⁸³ HEATH, T. L. *A History of Greek Mathematics*. Vol. II. Oxford University Press, 1921.

and

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1) \quad (34)$$

Writing (34) in the form

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6},$$

it is clear that

$$1 + 2 + \cdots + (n+1)^2 < \frac{n^3}{3} < 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2, \quad (35)$$

which is what Archimedes actually needed.

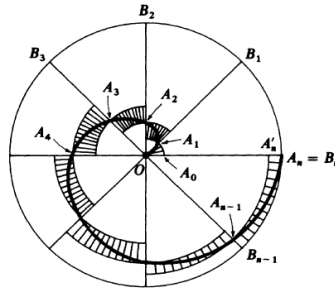


Figure 27

Archimedes' geometric construction for the proof of (32) is very similar to that which would be employed to set up a modern definite integral in polar coordinates for this area computation – see Figure 27. We divide the circle into n equal sectors as shown, with their bounding radii intersecting the spiral in the points $O, A_1, A_2, \dots, A_n$. If we write $OA_1 = b$, then

$$OA_1 = b, \quad OA_2 = 2b, \quad \dots, \quad OA_n = nb$$

Consequently we see that the spiral region S contains a region P consisting of circular sectors with radii

$$0, b, \dots, (n-1)b,$$

and in turn is contained in a region Q consisting of circular sectors with radii

$$b, 2b, \dots, nb.$$

Therefore $a(Q) - a(P)$ is equal to the area of a single sector of the circle C , and this can be made as small as we please by choosing n sufficiently large.

Thus we have the necessary ingredients for a proof by compression. If $a(S) < \frac{1}{3}a(C)$, we choose n sufficiently large that

$$a(Q) - a(P) < \frac{1}{3}a(C) - a(S),$$

so it follows that

$$a(Q) < \frac{1}{3}a(C).$$

But since the ratio of the areas of similar circular sectors is equal to the ratio of the squares of their radii, we find that

$$\frac{a(Q)}{a(C)} = \frac{b^2 + (2b)^2 + \cdots + (nb)^2}{n(nb)^2} = \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{n^3} > \frac{1}{3}$$

by (35). This contradiction shows that $a(S)$ is not less than $\frac{1}{3}a(C)$.

Assuming that $a(S) > \frac{1}{3}a(C)$, we choose n sufficiently large that

$$a(Q) - a(P) < a(S) - \frac{1}{3}a(C),$$

so it follows that

$$a(P) > \frac{1}{3}a(C).$$

But then we find that

$$\frac{a(P)}{a(C)} = \frac{b^2 + (2b)^2 + \cdots + [(n-1)b]^2}{n(nb)^2} = \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2}{n^3} < \frac{1}{3}$$

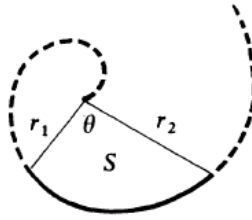


Figure 28

by (35). This contradiction shows that $a(S)$ is not greater than $\frac{1}{3}a(C)$, so we conclude that

$$a(S) = \frac{1}{3}a(C) = \frac{1}{3}\pi(2\pi a)^2$$

as desired. ■

ANEXO F – A Espiral de Arquimedes⁸⁴

Os matemáticos gregos sofriam de uma escassez de curvas disponíveis para servir de objeto de seu estudo. Como sua álgebra era geométrica e retórica, em vez de numérica e simbólica, a introdução de novas curvas por meio de equações (como na geometria analítica) não era viável. Além disso, a geometria grega era essencialmente estática, em vez de dinâmica. Consequentemente, eles poderiam, na maioria das vezes, definir curvas apenas em termos de condições de *locus* simples (por exemplo, o círculo como o *locus* de pontos equidistantes de um determinado ponto fixo) ou como interseções de determinadas superfícies fixas em posição (por exemplo, uma seção cônica como a interseção de um plano e um cone).

O caráter estático da geometria grega é um reflexo do papel muito limitado dos conceitos de movimento e variabilidade na ciência grega em geral. Apenas os casos de movimento uniforme - retilíneo ou circular - foram estudados com algum detalhe. Outros movimentos (como os dos planetas nos modelos astronômicos gregos) só podiam ser analisados em termos de movimentos lineares e circulares uniformes.

Foi nesses termos que Arquimedes definiu sua famosa espiral - como a composição de um movimento linear uniforme e um movimento circular uniforme.

Se uma linha reta desenhada em um plano gira a uma taxa uniforme em torno de uma extremidade que permanece fixa e retorna à posição de onde começou, e se, ao mesmo tempo que a linha gira, um ponto se move a uma taxa uniforme ao longo da linha reta começando da extremidade que permanece fixa, o ponto descreverá uma espiral no plano (Definição 1 On Spirals).

Para descrever essa curva em coordenadas polares modernas, seja ω (em radianos) a velocidade angular constante de rotação da linha e v a velocidade constante com a qual o ponto se move ao longo da linha, começando na origem. Então, as coordenadas polares do ponto móvel no tempo t são $r = vt$ e $\theta = \omega t$, então a equação das coordenadas polares da espiral é

$$r = a\theta \quad (31)$$

onde $a = v/\omega$.

As primeiras vinte proposições de *On Spirals* são devotadas principalmente à determinação da linha tangente à espiral em um determinado ponto dela. Aqui, como em outras partes da geometria grega, uma concepção estática de uma linha tangente a uma curva é empregada – é uma linha reta que toca a curva em um único ponto sem cruzá-la. Embora nenhuma consideração dinâmica apareça na exposição finalizada, foi conjecturado que

⁸⁴ Tradução nossa de EDWARDS, C. H. **The Historical Development of the Calculus**. New York: Springer-Verlag, 1979. p. 54-59.

Arquimedes *descobriu* a linha tangente à espiral por meio de um paralelogramo de velocidades determinadas pelos dois movimentos componentes que geram a espiral (ver o Apêndice de Heath [6]⁸⁵). Nesse caso, este seria um caso raro (senão único) de métodos de cálculo *diferencial* na antiguidade.

De qualquer forma, ele mostra que a linha tangente no ponto P à espiral OPS intercepta a perpendicular OQ a OP em um ponto T de modo que o segmento de linha OT é igual em comprimento ao arco circular PR interceptado entre o eixo polar e o vetor de raio OP (Fig. 24). A prova é um argumento de dupla redução ao absurdo que mostra que os pressupostos $OT > PR$ e $OT < PR$ levam a contradições.

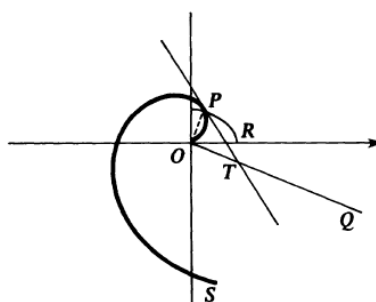


Figura 24

o instante P tem um componente de velocidade vertical v e um componente de velocidade horizontal $\omega a\pi/2$ (por quê?).

As oito proposições finais de *On Spirals* são dedicadas a cálculos de área. Por exemplo, Arquimedes prova que a área da região S , limitada por uma volta da espiral e o segmento de linha que une seus pontos inicial e final, é um terço da área do círculo C centrado no ponto inicial e passando pelo ponto final ponto (Fig. 26). Isto é,

$$a(S) = \frac{1}{3}\pi(2\pi a)^2 \quad (32)$$

A prova de (32) faz uso das fórmulas familiares (então como agora) para

Espiral

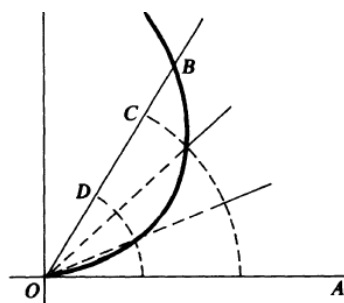


Figura 25

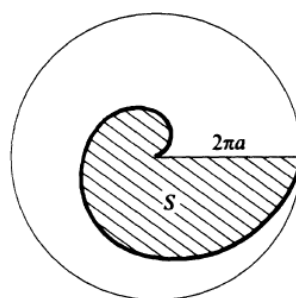


Figura 26

⁸⁵ HEATH, T. L. **A History of Greek Mathematics**. Vol. II. Oxford University Press, 1921.

a soma dos termos de uma progressão aritmética e de seus quadrados:

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n}{2}(n + 1) \quad (33)$$

e

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n}{6}(n + 1)(2n + 1) \quad (34)$$

Escrevendo (34) da forma

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6},$$

é claro que

$$1 + 2 + \cdots + (n + 1)^2 < \frac{n^3}{3} < 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2, \quad (35)$$

que é o que Arquimedes realmente precisava.

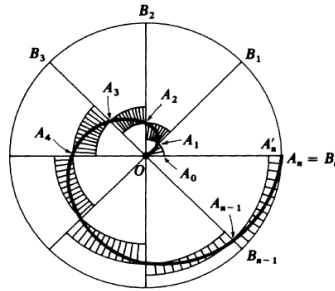


Figure 27

A construção geométrica de Arquimedes para a prova de (32) é muito semelhante àquela que seria empregada para configurar uma integral definida moderna em coordenadas polares para este cálculo de área – ver Figura 27. Dividimos o círculo em n setores iguais como mostrado, com seus raios delimitadores cruzando a espiral nos pontos $O, A_1, A_2, \dots, A_n$. Se escrevermos $OA_1 = b$, teremos

$$OA_1 = b, \quad OA_2 = 2b, \quad \dots, \quad OA_n = nb$$

Consequentemente, vemos que a região espiral S contém uma região P consistindo de setores circulares com raios

$$0, b, \dots, (n - 1)b,$$

e por sua vez está contido em uma região que consiste em setores circulares com raios

$$b, 2b, \dots, nb.$$

Portanto, $a(Q) - a(P)$ é igual à área de um único setor do círculo C , e isso pode ser tão pequeno quanto quisermos escolhendo n suficientemente grande.

Assim, temos os ingredientes necessários para uma prova por compressão. Se $a(S) < \frac{1}{3}a(C)$, escolhermos n suficientemente grande tal que

$$a(Q) - a(P) < \frac{1}{3}a(C) - a(S),$$

então segue-se que

$$a(Q) < \frac{1}{3}a(C).$$

Mas, uma vez que a proporção das áreas de setores circulares semelhantes é igual à proporção dos quadrados de seus raios, descobrimos que

$$\frac{a(Q)}{a(C)} = \frac{b^2 + (2b)^2 + \cdots + (nb)^2}{n(nb)^2} = \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{n^3} > \frac{1}{3}$$

por (35). Essa contradição mostra que $a(S)$ não é menor do que $\frac{1}{3}a(C)$.

Assumindo $a(S) > \frac{1}{3}a(C)$, escolhemos n suficientemente grande para

$$a(Q) - a(P) < a(S) - \frac{1}{3}a(C),$$

então segue-se que

$$a(P) > \frac{1}{3}a(C).$$

Mas então descobrimos que

$$\frac{a(P)}{a(C)} = \frac{b^2 + (2b)^2 + \cdots + [(n-1)b]^2}{n(nb)^2} = \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2}{n^3} < \frac{1}{3}$$

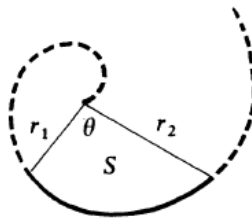


Figure 28

por (35). Esta contradição mostra que $a(S)$ não é maior do que $\frac{1}{3}a(C)$, então concluímos que

$$a(S) = \frac{1}{3}a(C) = \frac{1}{3}\pi(2\pi a)^2$$

como desejado. ■