Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas
Câmpus de São José do Rio Preto

Sobre os grupos de Gottlieb

Guilherme Vituri Fernandes Pinto

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Câmpus de São José do Rio Preto.

Orientador
Prof. Dr. Thiago de Melo

2016

Pinto, Guilherme Vituri Fernandes.
Sobre os grupos de Gottlieb / Guilherme Vituri Fernandes Pinto. -- São José do Rio Preto, 2016
81 f.

Orientador: Thiago de Melo
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática. 2. Topologia algébrica. 3. Teoria de homotopia. I. Melo, Thiago de. II. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU – 513.831

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

TERMO DE APROVAÇÃO

Guilherme Vituri Fernandes Pinto
Sobre os grupos de Gottlieb

Dissertação aprovada como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dr. Thiago de Melo
Orientador

Profa. Dra. Alice Kimie Miwa Libardi
IGCE–Unesp Rio Claro

Prof. Dr. Oziride Manzoli Neto
ICMC–USP São Carlos

Rio Claro, 18 de Março de 2016

Nas férteis regiões da Ásia a árvore da mirra e do incenso inundam de perfumes a gleba onde vicejam; — o cisne do Eurotas desfaz-se em harmonias ante a natureza que o cerca; — o Jordão desenrola cadente suas lâminas de cristal sobre as areias de oiro da terra abençoada. Eu não tenho porém cantos, — nem perfumes — nem harmonias para vos dar, oferto-vos apenas este pálido ramalhete das fanadas flores de minha mocidade; — aceitai-o porque são saudades que vos envio através dos mares e das montanhas, — são lágrimas cristalizadas na febre das insônias, — são os primeiros lampejos de minh'alma doentia que se volvem para vós. Aceitai-o.

Fagundes Varela

Resumo

O objetivo deste trabalho é estudar grande parte do artigo [6], no qual Gottlieb define o subgrupo $G(X, x_0)$ de $\pi_1(X, x_0)$ (em que X é um CW-complexo conexo por caminhos), posteriormente chamado de "grupo de Gottlieb"; o calculamos para diversos espaços, como as esferas, o toro, os espaços projetivos, a garrafa de Klein, etc.; posteriormente, estudamos o artigo [22] de Varadarajan, que generalizou o grupo de Gottlieb para um subconjunto $G(A, X)$ de $[A, X]_*$. Por fim, calculamos $G(S^n, S^n)$.

Palavras-chave: Grupo de Gottlieb. Grupo de homotopia. Invariante de Hopf. Produto de Whitehead.

Abstract

The goal of this work is to study partially the article [6], in which Gottlieb has defined a subgroup $G(X, x_0)$ of $\pi_1(X, x_0)$ (where X is a path-connected CW-complex based at x_0), called "Gottlieb group" in the literature. This group is computed in this work for some spaces, namely the spheres, the torus, the projective spaces, and the Klein bottle. Further, a paper by Varadarajan [22] who has generalized Gottlieb group to a subset $G(A, X)$ of $[A, X]_*$ is studied. Finally, the groups $G(S^n, S^n)$ is computed.

Keywords: Gottlieb group. Homotopy group. Hopf invariant. Whitehead product.

Sumário

Introdução

Seja X um CW-complexo com ponto base x_0. O grupo de Gottlieb $G(X, x_0) \subseteq \pi_1(X, x_0)$ é um grupo invariante por homotopia (no sentido de que dois espaços homotopicamente equivalentes possuem grupos de Gottlieb isomorfos), e sua definição dada em [6] tem um apelo geométrico: $[\alpha]$ pertence a $G(X, x_0)$ se existe uma homotopia $h_t : X \to X$ tal que $h_0 = 1_X = h_1$ (em que 1_X é a identidade de X) e $h_t(x_0) = \alpha(t)$, isto é, o ponto base x_0 descreve o traço de α conforme t varia de 0 a 1. O objetivo deste trabalho é estudar, em sua grande maioria, o artigo [6], e alguns resultados do artigo [22] que generaliza o grupo $G(X, x_0)$.

Muitos livros de matemática são arranjados de modo cumulativo, no sentido de que um teorema difícil pode ser deduzido de coisas provadas anteriormente. Em artigos, isso já muda. Não é raro ver a frase *"it is known that ..."* ("sabe-se que ...") e logo em seguida um fato como, por exemplo, "o invariante de Hopf $h[\iota, \iota]$ da identidade $\iota : S^{2n} \to S^{2n}$ é 2", ou "o espaço projetivo P^{2n} não é $2n$-simples". Os mais diversos fatos são usados para se chegar ao resultado desejado, e as fontes que contêm tais fatos possuem, às vezes, notação diversa, isso quando não são elas também objeto de estudo de um artigo todo.

Na ânsia de tentar justificar todas as passagens, são abundantes os parênteses que começam com "pois", "afinal", etc. Porém é preferível explicar demais do que de menos; como exemplo, um texto de apenas 3 páginas ([21, p. 12–14]) tornou-se a seção 6.

Os dois primeiros capítulos são dedicados a, na medida do possível, construir uma base para o entendimento dos posteriores. O capítulo 1 é base para o capítulo 3 que trata do artigo de Gottlieb [6]; o capítulo 2 é base para o 4, que trata do artigo de Varadarajan [22].

Na primeira seção, apresentamos as notações que serão usadas no restante do trabalho, além de definições e propriedades sobre H-espaços e co-H-grupos, estes últimos com importante papel no último capítulo. Na segunda seção há um pouco sobre a estrutura dos CW-complexos, do excelente livro [12]; tais espaços possuem a propriedade de extensão de homotopia, fundamental para que $G(X)$ seja um grupo. Na terceira e quarta seções: a relação entre X e seu recobrimento C, e o isomorfismo entre $\pi_1(X)$ e o grupo das *deck transformations* no caso em que C é simplesmente conexo; os resultados nelas contidos serão muito importantes para a seção 8.

A quinta seção trata do produto de Whitehead generalizado, usado para generalizar o grupo $P(X)$; esse produto, quando restrito a esferas, é igual ao produto de Whitehead clássico, que por sua vez tem relação com a ação de $\pi_1(X)$ em $\pi_n(X)$; tal ação define $P(X)$. Na sexta seção, definimos o invariante de Hopf usando cohomologia, e construímos uma aplicação $C(f) : S^{2n-1} \to S^n$ de invariante de Hopf $h(f)$ igual a 2, a partir de uma aplicação $f : S^{n-1} \times S^{n-1} \to S^{n-1}$ de bigrau $(\pm 2, -1)$. Isso será importante para calcularmos os grupos $G(S^k, S^k)$ e $P(\Sigma S^{k-1}, S^k)$ na última seção.

1 Preliminares

1 Grupos de homotopia, H-espaços e co-H-espaços

Sejam X e Y dois espaços topológicos com pontos base x_0 e y_0, respectivamente.

Denotaremos por I o intervalo real $[0,1]$. Uma função $f : X \times I \to Y$ poderá ser também escrita como $f_t : X \to Y$, em que $f_t(x) = f(x,t)$.

Muitas vezes, quando não houver risco de ambiguidades, denotaremos a função identidade $1_X : X \to X$ apenas 1. O ponto base de um espaço qualquer poderá ser denotado por $*$, assim como uma aplicação constante que tem como imagem o ponto base $*$. Usaremos a palavra *aplicação* como sinônimo de *função contínua*. Também, um conjunto unitário $\{a\}$ poderá ser denotado simplesmente por a, e um grupo trivial por $\{1\}$ ou 0.

Diremos que a aplicação $f : X \to Y$ é uma *aplicação quociente* quando

$$U \subseteq Y \text{ é aberto} \Leftrightarrow f^{-1}(U) \subseteq X \text{ é aberto.}$$

Tem-se:

Teorema 1.1 ([16, Teorema 22.2, p. 142]). *Sejam X, Y e Z espaços topológicos e $p : X \to Y$ aplicação quociente. Seja $g : X \to Z$ aplicação que é constante em $p^{-1}(\{y\})$, para cada $y \in Y$. Então g induz uma aplicação $f : Y \to Z$ tal que $f \circ p = g$. A aplicação f é contínua se e só se g é contínua; f é aplicação quociente se e só se g é aplicação quociente.*

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "p"] \arrow[dr, "g"] & \\
Y \arrow[r, dashed, "f"] & Z
\end{tikzcd}$$

Um *par de espaços* (X, A) consiste de um espaço X e um subespaço $A \subseteq X$. Uma *aplicação entre pares* $f : (X, A) \to (Y, B)$ é uma aplicação $f : X \to Y$ que satisfaz $f(A) \subseteq B$. Denotamos $(X, \emptyset)$ por X.

Duas aplicações $f, g : (X, A) \to (Y, B)$ são *homotópicas*, o que denotaremos por $f \simeq g$, se existe $h : (X \times I, A \times I) \to (Y, B)$ tal que $h(x, 0) = f(x)$ e $h(x, 1) = g(x)$. A relação $f \simeq g$ é de equivalência.

Seja $(Y, B)^{(X,A)}$ o conjunto de todas as aplicações entre os pares (X, A) e (Y, B). Denote a classe de equivalência $\{f' \in (Y, B)^{(X,A)}, f' \simeq f\}$ de $f : (X, A) \to (Y, B)$ por $[f]$. Defina

$$[(X, A), (Y, B)] = \left\{[f], f \in (Y, B)^{(X,A)}\right\}.$$

No caso em que $A = \emptyset = B$, dizemos que f é *livremente homotópica a* g, dizendo, com isso, que o ponto base x_0 não necessariamente fica fixo conforme o parâmetro t

da homotopia varia. Se $h : X \times I \to X$ é uma homotopia tal que $h_0 = f$, $h_1 = g$ e $\sigma : I \to X$ é definida por $\sigma(t) = h(x_0, t)$, dizemos que f é homotópica a g *ao longo de* σ, e denotamos isso por $f \simeq_\sigma g$.

Se $A = \{x_0\}$, $B = \{y_0\}$ e $f \simeq g$, dizemos que a homotopia $h : (X \times I, \{x_0\} \times I) \to (Y, y_0)$ entre f e g é *baseada*, ou que *preserva ponto base*. Neste caso, $h(x, 0) = f(x)$, $h(x, 1) = g(x)$ e $h(x_0, t) = y_0$, para todo $t \in I$. Denotamos

$$[X, Y]_* = [(X, x_0), (Y, y_0)].$$

Toda aplicação $f : Y \to Z$ induz funções $f_* : [X, Y] \to [X, Z]$ e $f^* : [Y, Z] \to [Y, W]$ dadas por $f_*[\alpha] = [f \circ \alpha]$ e $f^*[\beta] = [\beta \circ f]$, para quaisquer aplicações $\alpha : X \to Y$ e $\beta : Z \to W$.

Duas aplicações $f : (X, A) \to (Y, B)$ e $g : (Y, B) \to (X, A)$ são ditas *homotopicamente equivalentes* (e uma é a *inversa homotópica* da outra) se $f \circ g \simeq 1_Y$ e $g \circ f \simeq 1_X$. Nesse caso, diremos que X e Y são *homotopicamente equivalentes* (ou possuem o mesmo *tipo de homotopia*) o que denotaremos por $X \simeq Y$.

Se $\sim$ é uma relação de equivalência em X, denote por $[x]$ a classe de equivalência de $x \in X$ por essa relação, isto é, $[x] = \{a \in X, a \sim x\}$. Defina

$$X/\!\sim\, = \{[x], x \in X\},$$

chamado de *espaço quociente de* X *pela relação* $\sim$, com a topologia dada por

$$U \subseteq X/\!\sim \text{ é aberto} \Leftrightarrow p^{-1}(U) \subseteq X \text{ é aberto},$$

que faz com que $p : X \to X/\!\sim$ seja aplicação quociente.

Se $A \subseteq X$, denotamos por X/A o conjunto formado pelas classes de equivalência através da relação $a \sim b$ se $a, b \in A$ (isto é: identificamos o subespaço A a um só ponto). O ponto base de X/A será a imagem de x_0 pela aplicação quociente.

Seja $S^n = \{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}, x_0^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}$ a n-esfera de raio 1 e centro na origem de $\mathbb{R}^{n+1}$, com ponto base $s_0 = (1, 0, \ldots, 0)$. Definimos, para cada $n \geq 1$ natural, o conjunto

$$\pi_n(X, x_0) = [S^n, X]_* = [(S^n, s_0), (X, x_0)].$$

Através do homeomorfismo entre $I^{n+1}/\partial I^{n+1}$ e S^n (em que ∂I^{n+1} é a fronteira do cubo $(n+1)$-dimensional I^{n+1}), colocamos uma operação binária em $\pi_n(X, x_0)$ dada por

$$[\alpha] + [\beta] = [\alpha * \beta],$$

em que $\alpha * \beta$ é dada por

$$(\alpha * \beta)(t_0, \ldots, t_n) = \begin{cases} \alpha(2t_0, t_1, \ldots, t_n), & 0 \leq t_0 \leq \frac{1}{2}, \\ \beta(2t_0 - 1, t_1, \ldots, t_n), & \frac{1}{2} \leq t_0 \leq 1. \end{cases}$$

Essa operação torna $\pi_n(X, x_0)$ um grupo, chamado *n-ésimo grupo de homotopia de* X *baseado em* x_0 (vide [10, p. 39, 108] ou [8, p. 340]). O grupo $\pi_1(X, x_0)$ recebe o nome de *grupo fundamental de* X *em* x_0. No caso do grupo fundamental, denotaremos a operação por $[\alpha] \cdot [\beta] = [\alpha * \beta]$. Se $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ é uma aplicação, então $f_* : \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(Y, y_0)$ dada por $f_*[\alpha] = [f \circ \alpha]$ é homomorfismo.

Definimos

$$X \vee Y = X \times \{y_0\} \cup \{x_0\} \times Y \subset X \times Y,$$

chamado de *produto wedge de* X *e* Y, com ponto base (x_0, y_0). Definimos também

$$X \wedge Y = X \times Y / X \vee Y,$$

com ponto base $[(x_0, y_0)]$, chamado *produto smash de* X *e* Y. Denota-se às vezes os elementos $[(x, y)]$ de $X \wedge Y$ por $x \wedge y$.

As aplicações $\nabla : X \vee X \to X$ e $\Delta : X \to X \times X$ dadas por

$$\nabla(x, x_0) = \nabla(x_0, x) = x \quad \text{e} \quad \Delta(x) = (x, x)$$

são chamadas de *folding map* (ou *aplicação dobra*) e de *aplicação diagonal.*

O espaço $(X \times I)/(X \times \{0, 1\})$ será a *suspensão não-reduzida*, enquanto que $\Sigma X = (X \times I)/(X \times \{0, 1\} \cup \{x_0\} \times I)$ será a *suspensão reduzida de* X, ou simplesmente *suspensão de* X . Uma aplicação $f : X \to Y$ induz aplicação $\Sigma f : \Sigma X \to \Sigma Y$ dada por $\Sigma f[x, t] = [f(x), t]$.

Teorema 1.2 ([18, p. 27])**.** *Para todo* $n \geq 0$*,* ΣS^n *é homeomorfo a* S^{n+1}*.*

Denotaremos por $f \times g : X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2$ e $f \vee g : X_1 \vee X_2 \to Y_1 \vee Y_2$ as aplicações dadas por $(f \times g)(x_1, x_2) = (f(x_1), g(x_2))$ e $(f \vee g)(x_1, x_2) = (f(x_1), g(x_2))$, em que $f : X_1 \to Y_1$ e $g : X_2 \to Y_2$ são aplicações quaisquer.

Observação 1.3. Durante o restante da seção, todas as aplicações e homotopias serão baseadas.

Definição 1.4. Um *H-espaço* (Y, m) (ou *espaço de Hopf*) é um espaço Y com um ponto $e \in Y$ e uma aplicação $m : Y \times Y \to Y$ tal que

$$m \circ i_1 \simeq 1_Y \simeq m \circ i_2$$

em que $i_1, i_2 : Y \to Y \times Y$ são as inclusões $i_1(y) = (y, e)$ e $i_2(y) = (e, y)$, como nos diagramas

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "i_1"] \arrow[dr, "1_Y"'] & Y \times Y \arrow[d, "m"] \\ & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Y \arrow[r, "i_2"] \arrow[dr, "1_Y"'] & Y \times Y \arrow[d, "m"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

que comutam a menos de homotopia.

Se, além disso, tivermos que $m \circ (m \times 1) \simeq m \circ (1 \times m) : Y \times Y \times Y \to Y$, isto é, que

$$\begin{tikzcd} Y \times Y \times Y \arrow[r, "m \times 1"] \arrow[d, "1 \times m"'] & Y \times Y \arrow[d, "m"] \\ Y \times Y \arrow[r, "m"] & Y \end{tikzcd}$$

comuta a menos de homotopia, e, mais ainda, que existe aplicação $v : Y \to Y$ tal que $m \circ (1 \times v) \circ \Delta \simeq * \simeq m \circ (m \times 1) \circ \Delta$ (em que $*$ é a aplicação constante em e) conforme os diagramas seguintes

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "(1 \times v) \circ \Delta"] \arrow[dr, "*"] & Y \times Y \arrow[d, "m"] \\ & Y \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Y \arrow[r, "(v \times 1) \circ \Delta"] \arrow[dr, "*"] & Y \times Y \arrow[d, "m"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

então dizemos que Y é um *H-grupo.*

Se (Y, m) é um H-espaço, o conjunto $[X, Y]_*$ possui uma operação binária como segue: dadas $f, g : X \to Y$, defina

$$f + g = m \circ (f \times g) \circ \Delta,$$

isto é, $f + g$ é a seguinte composição:

$$X \xrightarrow{\Delta} X \times X \xrightarrow{f \times g} Y \times Y \xrightarrow{m} Y.$$

Tem-se:

Teorema 1.5. *Se Y é um H-grupo, então para qualquer espaço X, o conjunto $[X, Y]_*$ com a operação $+$ dada por $[f] + [g] = [f + g]$ é um grupo. Para todo $[f] \in [X, Y]_*$, tem-se que $[v \circ f] = -[f]$, o elemento oposto de $[f]$.*

A demonstração é análoga à do próximo teorema, o qual demonstraremos.

Definição 1.6. Um *co-H-grupo* (X, c) é um espaço X com duas aplicações $c : X \to X \vee X$ (chamada *co-produto*) e $v : X \to X$ (chamada *inversão do co-produto*) tais que:

1. $q_1 \circ c \simeq 1_X \simeq q_2 \circ c$ em que $q_1, q_2 : X \vee X \to X$ são as projeções na primeira e segunda coordenadas, respectivamente, ou seja: os diagramas seguintes

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "c"] \arrow[dr, "1"'] & X \vee X \arrow[d, "q_1"] \\ & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "c"] \arrow[dr, "1"'] & X \vee X \arrow[d, "q_2"] \\ & X \end{tikzcd}$$

   comutam a menos de homotopia;

2. $(c \vee 1) \circ c \simeq (1 \vee c) \circ c : X \to X \vee X \vee X$, isto é, que

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "c"] \arrow[d, "c"] & X \vee X \arrow[d, "c \vee 1"] \\ X \vee X \arrow[r, "1 \vee c"] & X \vee X \vee X \end{tikzcd}$$

   comuta a menos de homotopia;

3. $\nabla \circ (1 \vee v) \circ c \simeq * \simeq \nabla \circ (v \vee 1) \circ c : X \to X$, como nos diagramas seguintes:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "c"] \arrow[dr, "*"'] & X \vee X \arrow[d, "\nabla \circ (1 \vee v)"] \\ & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X \arrow[r, "c"] \arrow[dr, "*"'] & X \vee X \arrow[d, "\nabla \circ (v \vee 1)"] \\ & X \end{tikzcd}$$

   em que $*$ é a aplicação constante em x_0.

Se (X, c) é um co-H-grupo, o conjunto $[X, Y]_*$ possui uma operação binária como segue: dadas $f, g : X \to Y$, defina

$$f + g = \nabla \circ (f \vee g) \circ c,$$

isto é, $f + g$ é a seguinte composição:

$$X \xrightarrow{c} X \vee X \xrightarrow{f \vee g} Y \times Y \xrightarrow{\nabla} Y.$$

Teorema 1.7. *Se X é um co-H-grupo, então para qualquer espaço Y, o conjunto $[X,Y]_*$ com a operação $+$ dada por $[f]+[g]=[f+g]$ é um grupo. Para todo $[f]\in[X,Y]_*$, tem-se que $[f\circ v]=-[f]$, o elemento oposto de $[f]$.*

Demonstração. Se $f_0\simeq f_1, g_0\simeq g_1 : X\to Y$ então

$$f_0+g_0=\nabla\circ(f_0\vee g_0)\circ c\simeq\nabla\circ(f_1\vee g_1)\circ c=f_1+g_1,$$

o que prova que

$$[f_0]+[g_0]=[f_0+g_0]=[f_1+g_1]=[f_1]+[g_1],$$

ou seja, que a operação está bem definida.

Se $[f]\in[X,Y]_*$ então

$$\nabla\circ(f\vee *)\circ c=f\circ q_1\circ c\simeq f\circ 1_X=f,$$

ou seja, $[f]+[*]=[f]$. De modo análogo, $[*]+[f]=[f]$. Assim, $[*]$ é o elemento identidade da operação $+$.

Seja agora $h_t : X\to X$ homotopia tal que $h_0=\nabla\circ(1\vee v)\circ c$ e $h_1=*$. É fácil ver que

$$\begin{aligned} c(a)=(b,*) &\Rightarrow f\circ\nabla\circ(1(b)\vee v(*))=f(b)=\nabla\circ(f\vee(f\circ v))\circ c(a);\\ c(a)=(*,b) &\Rightarrow f\circ\nabla\circ(1(*)\vee v(b))=f\circ v(b)=\nabla\circ(f\vee(f\circ v))\circ c(a),\end{aligned}$$

ou seja, $f\circ h_0=f+(f\circ v)$. Como $h_1=*$, segue que $f\circ h_1=f\circ *=*$. Assim, $f\circ h_t$ é uma homotopia entre $f+(f\circ v)$ e $*$, donde

$$[f]+[f\circ v]=[*].$$

De modo análogo prova-se que $[f\circ v]+[f]=[*]$.

Para a associatividade, sejam $f,g,h : X\to Y$.

Considere os seguintes diagramas, em que a primeira linha de cada um representa $f+(g+h)$ e $(f+g)+h$, respectivamente:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "c"] \arrow[d, "c"] & X\vee X \arrow[r, "f\vee(g+h)"] \arrow[d, "1\vee c"] & Y\vee Y \arrow[r, "\nabla"] & Y \\
X\vee X \arrow[r, "c\vee 1"] & X\vee X\vee X \arrow[r, "f\vee g\vee h"] & Y\vee Y\vee Y \arrow[u, "1\vee\nabla"] \arrow[ur, "\nabla\circ(1\vee\nabla)"'] &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "c"] & X\vee X \arrow[r, "(f+g)\vee h"] \arrow[d, "c\vee 1"] & Y\vee Y \arrow[r, "\nabla"] & Y \\
 & X\vee X\vee X \arrow[r, "f\vee g\vee h"] & Y\vee Y\vee Y. \arrow[u, "\nabla\vee 1"] \arrow[ur, "\nabla\circ(\nabla\vee 1)"'] &
\end{tikzcd}$$

O quadrado da esquerda do primeiro diagrama comuta a menos de homotopia, pela propriedade 2 da definição de co-H-espaço; já o quadrado central de cada diagrama comuta pela definição da soma. É fácil ver

$$\nabla\circ(\nabla\vee 1)=\nabla\circ(1\vee\nabla).$$

Chame tal aplicação de D.

Assim,

$$f+(g+h)\simeq D\circ(f\vee g\vee h)\circ(c\vee 1)\circ c\simeq(f+g)+h,$$

isto é, $([f]+[g])+[h])=[f]+([g]+[h])$. □

Teorema 1.8. *Para todo espaço (X, x_0), tem-se que ΣX é um co-H-grupo.*

Demonstração. As aplicações $c : \Sigma X \to \Sigma X \vee \Sigma X$ e $v : \Sigma X \to \Sigma X$ dadas por

$$c[x,t] = \begin{cases} ([x,2t],*), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ (*,[x,2t-1]), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

e

$$v[x,t] = [x, 1-t]$$

para todo $[x,t]$ são um co-produto e uma inversão para ΣX.

Para os detalhes, ver [18, p. 16–19]. □

2 CW-complexos

A principal referência para esta parte é [12].

Definição 2.1. Para cada $n \geq 1$ natural, dizemos que o conjunto $E^n \subset \mathbb{R}^n$ é uma *n-célula fechada* (ou simplesmente *n-célula*) se E^n é homeomorfo ao cubo n-dimensional I^n, em que $I = [0,1] \subset \mathbb{R}$.

Definição 2.2. Seja X um conjunto. Uma *estrutura celular* em X é um par (X, Φ) em que Φ é uma coleção de funções $\phi : E_\phi \to X$ de células fechadas E_ϕ em X, satisfazendo:

1. se $\phi \in \Phi$, então ϕ é injetiva em $E_\phi - \partial E_\phi$;

2. os conjuntos $A_\phi = \{\phi(E_\phi - \partial E_\phi)\}$, para cada $\phi \in \Phi$, formam uma partição de X, isto é,
$$\bigcup_\phi A_\phi = X \quad \text{ e } \quad A_\phi \cap A_\psi = \emptyset, \ \phi \neq \psi;$$

3. se $\phi \in \Phi$ e E_ϕ é n-célula, então
$$\phi(\partial E_\phi) \subseteq \bigcup \{\psi(E_\psi - \partial E_\psi);\ \psi \in \Phi,\ E_\psi \text{ é } k\text{-célula },\ k \leq n-1\}.$$

Se $\phi \in \Phi$ e $E^n = E_\phi$ é uma n-célula, a imagem $\phi(E^n) = \sigma^n$ é chamada de *n-célula fechada* (ou apenas *n-célula*) de (X, Φ), e dizemos que ϕ é uma *função característica* para a n-célula σ^n. Denote $\partial\sigma^n = \phi(\partial E^n)$ que é chamado de *bordo* da n-célula σ^n, e $\phi(E^n - \partial E^n)$ é chamado de *n-célula aberta* de (X, Φ).

Chamamos o conjunto

$$X^{(n)} = \bigcup \{\psi(E_\psi - \partial E_\psi); \psi \in \Phi,\ E_\psi \text{ é } k\text{-célula}, k \leq n\}$$

de n-esqueleto de X. Daí, para cada n, se $\phi \in \Phi$ tem como domínio a n-célula $E^n = E_\phi$, então $\partial\sigma^n = \phi(\partial E^n) \subseteq X^{(n-1)}$, pela condição 3 acima.

Lema 2.3. *Seja (X, Φ) uma estrutura celular. Então:*

1. *se σ^n é uma n-célula com função característica $\phi : E^n \to X$, então $\phi(E^n - \partial E^n) = \sigma^n - \partial\sigma^n$ (chamado interior de σ^n);*

2. *se* σ^n *é* n*-célula então* $\sigma^n \subseteq X^{(n)}$*;*

3. *para cada* $n \geq 0$*,*

$$X^{(n)} = \bigcup \{\sigma^k; \sigma^k \text{ é } k\text{-célula de } (X, \Phi) \text{ e } k \leq n\}.$$

Demonstração. 1. Pela condição 3, tem-se $\partial\sigma^n \subseteq X^{(n-1)}$, que é disjunto de $\phi(E^n - \partial E^n)$, já que os conjuntos da forma

$$A_m = \{\psi(E_\psi - \partial E_\psi);\ \psi \in \Phi,\ E_\psi \text{ é } m\text{-célula}\}$$

particionam X. Portanto, $\phi(E^n - \partial E^n) \cup \phi(\partial E^n)$ é uma união disjunta igual a σ^n, e daí $\sigma^n - \partial\sigma^n = \phi(E^n - \partial E^n)$.

2. Tem-se que $\sigma^n - \partial\sigma^n \subseteq X^{(n)}$; a condição 3 nos dá $\partial\sigma^n \subset X^{(n-1)} \subseteq X^{(n)}$, e assim $\sigma^n = (\sigma^n - \partial\sigma^n) \cup \partial\sigma^n \subseteq X^{(n)}$.

3. Como $\sigma^n - \partial\sigma^n \subseteq \sigma^n$, tem-se que

$$X^{(n)} \subseteq \bigcup \{\sigma^k; \sigma^k \text{ é } k\text{-célula de } (X, \Phi) \text{ e } k \leq n\}.$$

O item 2 acima mostra que a inclusão contrária também é verdadeira. □

Definição 2.4. Dizemos que duas estruturas celulares (X, Φ) e (X, Φ') são *estritamente equivalentes* se existe uma bijeção entre Φ e Φ' satisfazendo o seguinte: se $\phi \in \Phi$ corresponde a $\phi' \in \Phi'$, então ambas tem o mesmo domínio $E_\phi = E_{\phi'}$ e existe um homeomorfismo $h : (E_\phi, \partial E_\phi) \to (E_\phi, \partial E_\phi)$ tal que $\phi' = \phi \circ h$. Noutras palavras: funções características correspondentes são iguais a menos de uma reparametrização do domínio.

$$\begin{tikzcd}
E_\phi \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "\phi'"'] & & E_\phi \arrow[dl, "\phi"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

É fácil ver que isto nos dá uma relação de equivalência:

1. A estrutura celular (X, Φ) é estritamente equivalente a si mesma, associando $\phi \in \Phi$ a si mesma e pondo $h = 1_{E_\phi}$;

2. se (X, Φ) é estritamente equivalente a (X, Φ') e $\phi \in \Phi$ corresponde a $\phi' \in \Phi'$ então existe homeomorfismo $h : (E_\phi, \partial E_\phi) \to (E_\phi, \partial E_\phi)$ tal que $\phi' = \phi \circ h$, e daí $\phi = \phi' \circ h^{-1}$. Isto nos dá que (X, Φ') é estritamente equivalente a (X, Φ).

3. Se (X, Φ) é estritamente equivalente a (X, Φ') e esta, por sua vez, é estritamente equivalente a (X, Φ''), então $\phi \in \Phi$ corresponde a $\phi' \in \Phi'$ e existe h tal que $\phi' = \phi \circ h$; ϕ' por sua vez corresponde a $\phi'' \in \Phi''$ e existe h' tal que $\phi'' = \phi' \circ h' = \phi \circ (h \circ h')$, com $h \circ h' : (E_\phi, \partial E_\phi) \to (E_\phi, \partial E_\phi)$ homeomorfismo. Isto prova que (X, Φ) é estritamente equivalente a (X, Φ'').

$$\begin{tikzcd}
E_\phi \arrow[dr, "\phi"'] & E_\phi \arrow[l, "h"'] \arrow[d, "\phi'"] & E_\phi \arrow[l, "h'"'] \arrow[dl, "\phi''"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

Se (X, Φ) é uma estrutura celular, denote por S_Φ o conjunto dos pares $(\sigma^n, [\phi]_S)$ em que ϕ tem domínio $E^n = E_\phi$, por $\phi(E^n) = \sigma^n$ e por $[\phi]_S$ a classe de ϕ pela relação acima. Denotaremos tal par simplesmente por σ^n ou $\phi(E^n)$, em que subentende a classe de ϕ. Note que se (X, Φ) e (X, Φ') são estritamente equivalentes, então $S_\Phi = S_{\Phi'}$.

Definição 2.5. Um *complexo celular* (ou *decomposição celular*) em um conjunto X é uma classe de equivalência de estruturas celulares (X, Φ) com a relação de equivalência dada pela relação de ser estritamente equivalente. Um complexo em X será denotado pelo par (X, S) em que $S = S_\Phi$, para alguma estrutura celular representante (X, Φ). O conjunto S é chamado de *conjunto das células (fechadas) de* (X, S).

Para simplificar a notação, às vezes omitiremos o índice n de σ^n. Também, se σ tem função característica ϕ_σ, denotaremos o domínio de ϕ por E_σ.

Definição 2.6. Um *subcomplexo* (A, T) do complexo celular (X, S), que denotaremos por $(A, T) \subset (X, S)$, é um complexo celular tal que $A \subseteq X$ e $T \subseteq S$.

Admitiremos que $(\emptyset, \emptyset)$ é um complexo celular, e se (X, S) é um complexo celular, escreveremos $(\emptyset, \emptyset) = (X^{-1}, S^{-1})$.

Definição 2.7. Um complexo celular (X, S):

- é *finito* (resp. *contável*) se S é um conjunto finito (resp. contável);
- é *localmente finito* (resp. *localmente contável*) se cada célula fechada intercepta apenas uma quantia finita (resp. contável) de células;
- tem *fecho finito* se cada n-célula intercepta somente um número finito de células abertas $\sigma^p - \partial\sigma^p$, com $p < n$.

Definição 2.8. O complexo celular (X, S) possui *dimensão* n se possui ao menos uma n-célula σ^n e nenhuma célula de dimensão $q > n$. Se (X, S) possui células de dimensão maior que n para todo n inteiro, então diz-se que o complexo celular tem *dimensão infinita*. Convenciona-se que o complexo vazio $(\emptyset, \emptyset)$ tem dimensão -1.

Definição 2.9. Se (X, S) e (Y, T) são complexos celulares, o complexo $(X \times Y, S \times T)$ é chamado de *complexo celular produto*, e tem como n-esqueleto o conjunto

$$(X \times Y)^{(n)} = \bigcup_{0 \le p \le n} (X^{(p)} \times Y^{(n-p)}).$$

Definição 2.10. Seja X um conjunto com estrutura celular (X, S). Escolha um conjunto de funções características $\{\phi_\sigma; \sigma \in S\}$ para as células de S. A *topologia fraca em X com respeito a S* é obtida do seguinte modo:

1. dê a cada célula $\sigma \in S$ a topologia quociente com respeito à sua função característica;
2. dê a X a seguinte topologia: $F \subseteq X$ é fechado se, e somente se, $F \cap \sigma$ é fechado em σ, para toda $\sigma \in S$.

Definição 2.11. Um espaço de Hausdorff X é um *CW-complexo* com respeito à família de células S se:

1. o par (X, S) é um complexo celular tal que cada célula $\sigma \in S$ possui uma função característica contínua;

2. o espaço X tem a topologia fraca com relação a S;

3. o complexo celular (X, S) tem fecho finito.

Lema 2.12. *Seja X um CW-complexo com células S. Então*

1. *cada célula $\sigma \in S$ é um subconjunto fechado de X;*

2. *para cada célula $\sigma \in S$, a restrição da função característica ϕ_σ a $E_\sigma - \partial E_\sigma$ é um homeomorfismo sobre $\sigma - \partial\sigma$.*

Demonstração. A função característica ϕ_σ é uma aplicação fechada: se $K \subseteq E_\sigma$ é fechado, então K é compacto, pois E_σ o é. Como ϕ_σ é contínua, $\phi(K)$ é compacto em X (que é de Hausdorff), e portanto $\phi(K)$ é fechado. Se $K = E_\sigma$, obtemos o item 1.

Como ϕ_σ é fechada, sua restrição $\phi_\sigma|_{E_\sigma - \partial E_\sigma}$ é bijeção contínua e fechada sobre $\sigma - \partial\sigma$, donde homeomorfismo. □

Proposição 2.13. *Se X é um CW-complexo com células S, Y é um espaço topológico qualquer e $f : X \to Y$ é uma função, então: f é contínua se, e somente se, para todo $\sigma \in S$, tem-se que $f|_\sigma$ é contínua.*

Demonstração. Suponha f contínua e seja $C \subseteq Y$ fechado. Então $f^{-1}(C)$ é fechado em X e $(f|_\sigma)^{-1}(C) = f^{-1}(C) \cap \sigma$ é fechado em X, já que X tem a topologia fraca com respeito a S.

Reciprocamente, se $f|_\sigma$ é contínua para cada σ, seja $C \subseteq Y$ fechado. Então $f|_\sigma^{-1}(C) = f^{-1}(C) \cap \sigma$ é fechado em σ, para todo σ. Assim, $f^{-1}(C)$ é fechado em X. □

Proposição 2.14. *Seja X um CW-complexo com células S e seja (A, T) subcomplexo de (X, S). Então:*

1. *A é fechado em X;*

2. *com a topologia do subespaço, A é um CW-complexo com células T.*

Definição 2.15. Seja $A \subset X$ subespaço. Diz-se que

- A é um *retrato de X* se existe aplicação $r : X \to A$ tal que $r(a) = a$ para todo $a \in A$ (tal aplicação r é chamada de *retração*); se, além disso, r é homotópica a 1_X por uma homotopia $h : X \times I \to X$ tal que $h(A \times I) \subseteq A$, diz-se que A é um *retrato por deformação de X*; se, mais ainda, $h(a, t) = a$, para todo $a \in A$, diz-se que A é um *retrato por deformação forte de X*.

- *X se deforma em A* se existe homotopia entre a identidade de X e alguma aplicação $f : X \to X$ tal que $f(X) \subseteq A$. Tal homotopia é chamada de *deformação de X em A*.

Definição 2.16. Um espaço X é *localmente contrátil em $x \in X$* se toda vizinhança V de x contém uma vizinhança U de x tal que $\{x\}$ é um retrato por deformação forte de U. Se todo $x \in X$ tem essa propriedade, X é dito *localmente contrátil.*

Teorema 2.17 ([12, Teorema 66, p. 67])**.** *Todo CW-complexo é localmente contrátil.*

O importante resultado seguinte será sempre referido como *propriedade de extensão de homotopia*:

Teorema 2.18 ([12, Teorema 7.2, p. 68]). *Sejam X um CW-complexo, A um subcomplexo de X e*

$$f : X \times \{0\} \cup A \times I \to Y$$

uma aplicação qualquer. Então existe $F : X \times I \to Y$ que estende f.

3 Espaços de recobrimento

Os espaços de recobrimento desempenharão um papel importante para o cálculo dos grupos de Gottlieb do espaço projetivo de dimensão ímpar e do espaço lenticular, como se verá na seção 8. Os seguintes resultados serão necessários, e se encontram detalhados em [3, p. 139–145]

Definição 3.1. Uma aplicação $p : C \to X$ é dita um *recobrimento* (e C é chamado de *espaço de recobrimento de* X) se C e X são Hausdorff, conexos por caminho, localmente conexos por caminho e vale o seguinte: para cada $x \in X$, existe vizinhança conexa por caminho $U \ni x$ tal que $p^{-1}(U)$ é união disjunta de conjuntos $\tilde{U}_\alpha$ e $p|_{\tilde{U}_\alpha}$ é homeomorfismo entre $\tilde{U}_\alpha$ e U.

Lema 3.2 ([14, p. 152]). *Sejam $p : C \to X$ um recobrimento, Y um espaço conexo e localmente conexo. Se $f, g : Y \to C$ satisfazem $p \circ f = p \circ g$, então o conjunto $A = \{y \in Y;\ f(y) = g(y)\}$ é vazio ou é igual a Y.*

Teorema 3.3 (Levantamento de caminho). *Sejam $p : C \to X$ um recobrimento e $\alpha : I \to X$ um caminho. Seja $a \in p^{-1}(\alpha(0))$. Então existe um único caminho $\tilde{\alpha} : I \to \tilde{X}$ tal que $p \circ \tilde{\alpha} = \alpha$ e $\tilde{\alpha}(0) = a$.*

Teorema 3.4 (Cobertura de homotopia). *Seja W espaço localmente conexo e $p : C \to X$ recobrimento. Seja $F : I \times W \to X$ homotopia e seja $f : W \times \{0\} \to C$ levantamento da restrição de F a $W \times \{0\}$. Então existe uma única homotopia $G : I \times W \to C$ tal que o diagrama seguinte comuta:*

$$\begin{tikzcd} W \times \{0\} \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & C \arrow[d, "p"] \\ W \times I \arrow[r, "F"] \arrow[ur, dashed, "G"] & X \end{tikzcd}$$

Mais ainda: se F é homotopia relativa a $W' \subseteq W$, então G também será.

Corolário 3.5. *Seja $p : C \to X$ recobrimento. Sejam f_0 e f_1 caminhos em X com $f_0 \simeq f_1$ (rel. ∂I). Sejam $\tilde{f}_0$ e $\tilde{f}_1$ levantamentos de f_0 e f_1 tais que $\tilde{f}_0(0) = \tilde{f}_1(0)$. Então $\tilde{f}_0(1) = \tilde{f}_1(1)$ e $\tilde{f}_0 \simeq \tilde{f}_1$ (rel. ∂I).*

Corolário 3.6. *Sejam $p : C \to X$ recobrimento e $f : (I, \partial I) \to (X, x_0)$ um laço homotópico ao laço constante em x_0, relativamente a ∂I. Então todo levantamento $\tilde{f}$ de f é um laço homotópico ao laço constante em $\tilde{f}(0)$ relativamente a ∂I.*

Corolário 3.7. *Seja $p : C \to X$ recobrimento com $p(a) = b$. Então $p_\# : \pi_1(C, a) \to \pi_1(X, b)$ é monomorfismo cuja imagem consiste das classes de laços em $b \in X$ que se levantam para laços em $a \in C$.*

Teorema 3.8 (do levantamento)**.** *Seja $p : C \to X$ recobrimento com $p(c_0) = x_0$. Sejam W conexo por caminho e localmente conexo por caminho e $f : W \to X$ uma aplicação tal que $f(w_0) = x_0$. Então existe $g : (W, w_0) \to (C, c_0)$ tal que $p \circ g = f$ se, e somente se, $f_\# \pi_1(W, w_0) \subseteq p_\# \pi_1(C, c_0)$.*

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[d, "p"] \\ W \arrow[ur, dashed, "g"] \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

Como consequência do teorema anterior, se W é simplesmente conexo (i.e., $\pi_1(W, w_0) = \{1\}$) então sempre existe g tal que $p \circ g = f$.

Proposição 3.9. *Seja $q : Y \to Z$ aplicação quociente. Se X é compacto e de Hausdorff, então*

$$q \times 1_X : Y \times X \to Z \times X$$

é aplicação quociente.

Demonstração. A prova mais geral (assumindo apenas que X é localmente compacto e de Hausdorff) se encontra em [18, p. 3]. Vale notar que nesta referência q é uma *identification map*, que é equivalente à definição de aplicação quociente, pelo exercício 1.1.8 de [18, p. 8]. □

4 Ação de π_1 na fibra e *deck transformations*

Definição 4.1. Uma *ação à esquerda de um grupo G num espaço X* é uma função $G \times X \to X$, cuja imagem de (g, x) é denotada por $g \cdot x$, tal que $(g \cdot h) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$ e $e \cdot x = x$, para todos $g, h \in G$, $x \in X$, em que e é a identidade de G (aqui o símbolo $\cdot$ denota tanto a ação quanto a operação do grupo G). Já uma *ação à direita de um grupo G num espaço X* satisfaz $(x \cdot g) \cdot h = x \cdot (g \cdot h)$ e $x \cdot e = x$.

Sejam $p : C \to X$ recobrimento e $x_0 \in X$. Chame $J = \pi_1(X, x_0)$ e $F = p^{-1}(x_0)$. O conjunto discreto F é chamado de *fibra de p*. Vamos construir uma ação à direita de $\pi_1(X, x_0)$ em J.

Seja $c \in F$ e $\alpha = [f] \in J$. Levante f para o caminho $\tilde{f} : I \to X$ com $\tilde{f}(0) = c$. Defina $c \cdot [f] = \tilde{f}(1)$. Pelo corolário 3.5, $\tilde{f}(1)$ não depende da escolha do representante de α. Temos assim definida uma função $F \times J \to F$ com as seguintes propriedades:

1. $c \cdot e = c$, para todo $c \in F$, afinal o caminho constante em c é um levantamento do laço constante em x_0.

2. $(c \cdot \alpha) \cdot \beta = c \cdot (\alpha \cdot \beta)$:

   Sejam $\alpha = [f]$ e $\beta = [g]$ elementos de J e sejam $\tilde{f}$, $\tilde{g}$ os levantamentos de f, g começando em c e $c \cdot \alpha$, respectivamente. Note que $\tilde{f}$ termina em $c \cdot \alpha$ e $\tilde{g}$ termina em $(c \cdot \alpha) \cdot \beta$. Como $p \circ (\tilde{f} * \tilde{g}) = (p \circ \tilde{f}) * (p \circ \tilde{g}) = f * g$, tem-se que $\tilde{f} * \tilde{g}$ é um levantamento de $f * g$ que começa em c e termina em $c \cdot (\alpha \cdot \beta)$, e então, pela definição, $c \cdot (\alpha \cdot \beta) = (c \cdot \alpha) \cdot \beta$.

3. A ação é transitiva, isto é, dados $c, c_0 \in F$, existe $\alpha \in J$ tal que $c = c_0 \cdot \alpha$: Tome g o caminho que começa em c_0 e termina em c (tal caminho existe pois C é conexo por caminhos). Considere $f = p \circ g$. Então g é levantamento de f e, se $\alpha = [f]$ então $c_0 \cdot \alpha = g(1) = c$.

4. Se $J_{c_0} = \{\alpha \in J;\ c_0 \cdot \alpha = c_0\}$ (chamado *grupo de isotropia de J em c_0*) então $J_{c_0} = p_{\#}\pi_1(C, c_0)$: note que $[f] \in J_{c_0} \Leftrightarrow f$ se levanta a um laço em $c_0 \Leftrightarrow [f] \in p_{\#}\pi_1(C, c_0)$, pelo corolário 3.7.

5. A função $\phi : J_{c_0}/J \to F$, em que $J_{c_0}/J = \{J_{c_0} \cdot \alpha, \alpha \in J\}$, definida por $\phi(J_{c_0} \cdot \alpha) = c_0 \cdot \alpha$ é bijeção:

   - está de fato bem definida:
     Sejam $\alpha, \beta \in J$ tais que $J_{c_0} \cdot \alpha = J_{c_0} \cdot \beta$, isto é, $\alpha \cdot \beta^{-1} \in J_{c_0}$. Então $\alpha = \gamma \cdot \beta$, para algum $\gamma \in J_{c_0}$. Assim,
     $$\phi(J_{c_0} \cdot \alpha) = c_0 \cdot \alpha = c_0 \cdot (\gamma \cdot \beta) = (c_0 \cdot g) \cdot \beta = c_0 \cdot \beta = \phi(J_{c_0} \cdot \beta).$$
   - é sobrejetora: seja $c \in F$ qualquer. Sabemos que existe $\alpha \in J$ tal que $c = c_0 \cdot \alpha$. Assim, $\phi(J_{c_0} \cdot \alpha) = c_0 \cdot \alpha = c$.
   - é injetora: sejam $\alpha = [f], \beta = [g] \in J$ tais que $\phi(J_{c_0} \cdot \alpha) = \phi(J_{c_0} \cdot \beta)$, isto é, que $[f] \cdot c_0 = [g] \cdot c_0$.
     Sejam $\tilde{f}, \tilde{g} : I \to C$ levantamentos de f e g começando em c_0. Como $\tilde{f}(1) = \alpha \cdot c_0 = \beta \cdot c_0 = \tilde{g}(1)$, podemos considerar o laço $\tilde{f} * \tilde{h}$, em que $\tilde{h}(t) = \tilde{g}(1-t)$.
     Note que $p \circ \tilde{h}(t) = p\tilde{g}(1-t) = g(1-t) = g^{-1}(t)$, e então $p(\tilde{f} * \tilde{g}) = f * g^{-1}$. Assim, $\tilde{f} * \tilde{h}$ é levantamento de $f * g^{-1}$ começando em c_0, e daí $c_0 \cdot (\alpha \cdot \beta) = \tilde{f} * \tilde{h}(1) = c_0$, isto é, $\alpha \cdot \beta^{-1} \in J_{c_0}$, e então $J_{c_0} \cdot \alpha = J_{c_0} \cdot \beta$.

Em resumo, temos o seguinte:

Teorema 4.2. *Seja $p : C \to X$ recobrimento com $p(c_0) = x_0$. Então existe uma bijeção entre o conjunto de classes laterais à direita*

$$p_{\#}\pi_1(C, c_0)/\pi_1(X, x_0) = \{p_{\#}\pi_1(C, c_0) \cdot \alpha, \alpha \in \pi_1(X, x_0)\}$$

e a fibra $p^{-1}(x_0)$.

Definição 4.3. Seja $p : C \to X$ uma recobrimento. Um homeomorfismo $D : C \to C$ é dito ser uma *deck transformation* se satisfaz $p \circ D = p$.

O conjunto das *deck transformations* forma um grupo com a operação composição, denotado por $\Delta(p)$ ou simplesmente Δ.

É possível provar o seguinte:

Teorema 4.4 ([3, corolário 6.10, p. 149])**.** *Se $p : C \to X$ é recobrimento e C é simplesmente conexo, então existe isomorfismo $\phi : \pi_1(X, x_0) \to \Delta(p)$.*

Tal isomorfismo ϕ é dado do seguinte modo: fixado $c_0 \in p^{-1}(x_0)$, tome $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$ e levante α para um caminho $\tilde{\alpha} : I \to C$ começando em c_0. Defina $\phi[\alpha] = D_\alpha \in \Delta(p)$ como sendo a única *deck transformation* que satisfaz $D(c_0) = \tilde{\alpha}(1)$.

Teorema 4.5 ([8, p. 342])**.** *Se $p : C \to X$ é recobrimento e C é simplesmente conexo, então $p_\# : \pi_n(C, c_0) \to \pi_n(X, x_0)$ é isomorfismo, para todo $n \geq 2$.*

Estes dois resultados mostram a forte relação entre os grupos de homotopia de um espaço X e os correspondentes de seu recobrimento simplesmente conexo C. Os resultados seguintes nos dirão qual é o grupo fundamental de um espaço quociente por uma ação. Para detalhes, ver [3, p. 151]

Definição 4.6. Uma ação (à esquerda) é dita ser *propriamente descontínua* (e nesse caso diz-se que *G age de maneira propriamente descontínua*) se cada ponto $x \in X$ possui vizinhança U tal que $gU \cap U \neq \emptyset \Rightarrow g = e$.

Proposição 4.7. *Se G age de maneira propriamente descontínua no espaço conexo por caminhos, localmente conexo por caminhos e de Hausdorff X, então a projeção $p : X \to X/G$ é recobrimento cujo grupo de deck transformations $\Delta(p)$ é G.*

Corolário 4.8. *Se X é simplesmente conexo e localmente conexo por caminhos e G age de maneira propriamente descontínua em X, então $\pi_1(X/G) \simeq G$.*

Demonstração. Pelo acima, $G = \Delta(p)$, e por 4.4, $\Delta(p) \simeq \pi_1(X/G)$. □

Proposição 4.9 ([3, p. 154])**.** *Se G é um grupo finito agindo no espaço de Hausdorff X de modo que $g \cdot x = x$ para algum $x \in X$ implique que $g = e$, então G age de maneira propriamente descontínua.*

Corolário 4.10. *Se G é um grupo finito que age no espaço simplesmente conexo, localmente conexo por caminhos e de Hausdorff X e satisfaz $g \cdot x = x \Rightarrow g = e$, então $\pi_1(X/G) \simeq G$.*

Demonstração. É consequência direta dos três resultados anteriores. □

Definição 4.11. Um espaço X é dito ser *semilocalmente 1-conexo* se cada ponto $x \in X$ possui vizinhança U tal que todos os laços em U são homotópicos a um laço constante em X, isto é, se para todo $u \in U$, o homomorfismo $i_* : \pi_1(U, u) \to \pi_1(X, u)$ induzido pela inclusão é trivial.

Teorema 4.12 ([3, p. 155])**.** *Seja X conexo por caminhos e localmente conexo por caminhos. Então X possui um recobrimento simplesmente conexo C (também chamado de recobrimento universal) se, e somente se, X é semilocalmente 1-conexo.*

Corolário 4.13. *Todo CW-complexo conexo por caminhos possui um recobrimento universal.*

Demonstração. Todo CW-complexo é localmente contrátil, donde semilocalmente 1-conexo. □

Proposição 4.14. *Sejam X simplesmente conexo, Y conexo por caminhos dois CW-complexos, $p : \tilde{Y} \to Y$ recobrimento universal de Y e $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ uma aplicação. Então o funtor esquecimento $F : [X, \tilde{Y}]_* \to [X, \tilde{Y}]$ (que associa a classe de homotopia baseada de uma aplicação $f : (X, x_0) \to (\tilde{Y}, \tilde{y}_0)$ à classe de homotopia livre de $f : X \to \tilde{Y}$) é bijeção, e o seguinte diagrama é comutativo:*

$$\begin{tikzcd}
[X,Y]_* \arrow[d, "\alpha_\#"] & {[X,\tilde{Y}]_*} \arrow[l, "p_*"'] \arrow[r, "F"] & {[X,\tilde{Y}]} \arrow[d, "D^*"] \\
{[X,Y]_*} & {[X,\tilde{Y}]_*} \arrow[l, "p_*"'] \arrow[r, "F"] & {[X,\tilde{Y}]}
\end{tikzcd}$$

em que $D^*[f] = [f \circ D]$, $[\alpha] \in \pi_1(Y, y_0)$, $\alpha_\#[f] = [f_1]$ *em que* f_1 *é qualquer aplicação que satisfaça* $f \simeq_\alpha f_1$, $D = \phi[\alpha]$ *pelo isomorfismo dado em 4.4 e* p_* *é a induzida de* p.

Demonstração. Ver [4, p. 158] para o caso mais geral em que X e Y são não apenas CW-complexos, mas espaços compactamente gerados. □

2 Produto de Whitehead e invariante de Hopf

5 O produto de Whitehead generalizado

O produto de Whitehead generalizado é uma operação que associa duas classes $\alpha \in [\Sigma A, X]_*$ e $\beta \in [\Sigma B, X]_*$ a um elemento $[\alpha, \beta] \in [\Sigma(A \wedge B), X]_*$. Em [2], Arkowitz define $[\alpha, \beta]$ de dois modos; um deles é o seguinte: sejam $f : \Sigma A \to X$ e $g : \Sigma B \to X$ representantes de α e β, respectivamente. Considere $p_1 : A \times B \to A$ e $p_2 : A \times B \to B$ as projeções e $\Sigma p_1 : \Sigma(A \times B) \to \Sigma A$ e $\Sigma p_2 : \Sigma(A \times B) \to \Sigma B$ suas suspensões.

Chame $f' = f \circ \Sigma p_1 : \Sigma(A \times B) \to X$ e $g' = g \circ \Sigma p_2 : \Sigma(A \times B) \to X$. Defina

$$k' = (f'^{-1} \cdot g'^{-1}) \cdot (f' \cdot g') : \Sigma(A \times B) \to X$$

em que o produto $\cdot$ e a inversa vem do co-produto de $\Sigma(A \times B)$ (usaremos aqui a notação multiplicativa para a operação de $[\Sigma(A \times B), X]_*$).

Como $k'|_{\Sigma(A\times *)} \simeq 0$ (afinal $g'|_{\Sigma(A\times *)} = 0 = g'^{-1}|_{\Sigma(A\times *)}$) e $k'|_{\Sigma(*\times B)} \simeq 0$ (afinal $f'|_{\Sigma(*\times B)} = 0 = f'^{-1}|_{\Sigma(*\times B)}$), segue que $k'|_{\Sigma(A\vee B)} \simeq 0$. Pela propriedade de extensão de homotopia do par $(\Sigma(A \times B), \Sigma(A \vee B))$, existe $k : \Sigma(A \times B) \to X$ tal que $k \simeq k'$ e $k|_{\Sigma(A\vee B)} = 0$. Portanto k induz aplicação $\tilde{k} : \Sigma(A \wedge B) \to X$ com a propriedade de que $k = \tilde{k} \circ \Sigma q$, em que $q : A \times B \to A \wedge B$ é a projeção.

$$\begin{tikzcd}
 & \Sigma(A \times B) \arrow[r, "\Sigma p_1", "\Sigma p_2"'] \arrow[rr, bend left, "f'"] \arrow[rr, bend right, "g'"'] \arrow[dl, "\Sigma q"] \arrow[dd, "(f'^{-1}\cdot g'^{-1})\cdot(f'\cdot g')=k'\simeq k"] & \Sigma A \arrow[r, "f", "g"'] & X \\
\Sigma(A \wedge B) \arrow[dr, "\tilde{k}"] & & & \\
 & X & &
\end{tikzcd}$$

É possível provar que a classe de homotopia de $\tilde{k}$ não depende da escolha da aplicação k, e assim $\tilde{k}$ não depende da escolha dos representantes f e g (ver [2, lema 2.1, p. 10]).

Definimos o produto de Whitehead generalizado de α e β por

$$[\alpha, \beta] = [\tilde{k}] \in [\Sigma(A \wedge B), X].$$

Definição 5.1. Sejam $i_1 : \Sigma A \hookrightarrow \Sigma A \vee \Sigma B$ e $i_2 : \Sigma B \hookrightarrow \Sigma A \vee \Sigma B$ as inclusões. A aplicação $\tilde{k}$ construída acima, usando-se $f = i_1$ e $g = i_2$ é chamada de *aplicação de*

Whitehead, e denotada por $w : \Sigma(A \wedge B) \to \Sigma A \vee \Sigma B$. Repare que nesse caso $k' = k$, e por isso a aplicação w fica unicamente definida.

Teorema 5.2. *Se $f : \Sigma A \to X$ e $g : \Sigma B \to X$ são aplicações e $\alpha = [f]$ e $\beta = [g]$, então $[\alpha, \beta] = [\nabla \circ (f \vee g) \circ w] \in [\Sigma(A \wedge B), X]_*$.*

Demonstração. Sejam $a = i_1 \circ \Sigma p_1, b = i_2 \circ \Sigma p_2 : \Sigma(A \times B) \to \Sigma A \vee \Sigma B$ e $f' = f \circ \Sigma p_1, g' = g \circ \Sigma p_2 : \Sigma(A \times B) \to X$. Provemos que

$$\nabla \circ (f \vee g) \circ ((a^{-1} \cdot b^{-1}) \cdot (a \cdot b)) = (f'^{-1} \cdot g'^{-1}) \cdot (f' \cdot g').$$

Se $v : \Sigma(A \times B) \to \Sigma(A \times B)$ é a inversa do co-produto (isto é: a aplicação que satisfaz $[h \circ v] = [h]^{-1}, \forall h : \Sigma(A \times B) \to X$), então podemos escrever o lado esquerdo da igualdade acima como

$$\begin{aligned}\nabla \circ (f \vee g) \circ ((a^{-1} \cdot b^{-1}) \cdot (a \cdot b)) = \\ \nabla \circ (f \vee g) \circ ((i_1 \circ \Sigma p_1 \circ v) \cdot (i_2 \circ \Sigma p_2 \circ v) \cdot (i_1 \circ \Sigma p_1) \cdot (i_2 \circ \Sigma p_2)).\end{aligned}$$

Note que $\nabla \circ (f \vee g) \circ i_1 = f$ e $\nabla \circ (f \vee g) \circ i_2 = g$; sendo assim, o acima é igual a

$$\begin{aligned}(f \circ \Sigma p_1 \circ v) \cdot (g \circ \Sigma p_2 \circ v) \cdot (f \circ \Sigma p_1) \cdot (g \circ \Sigma p_2) = \\ (f' \circ v) \cdot (g' \circ v) \cdot f' \cdot g' = (f'^{-1} \cdot g'^{-1}) \cdot (f' \cdot g').\end{aligned}$$

Já vimos que existe $k : \Sigma(A \times B) \to X$ tal que $k|_{\Sigma(A \vee B)} = 0$ e $k \simeq (f'^{-1} \cdot g'^{-1}) \cdot (f' \cdot g')$. Portanto k induz $\tilde{k} : \Sigma(A \wedge B) \to X$ tal que $k = \tilde{k} \circ \Sigma q$. Assim,

$$\tilde{k} \circ \Sigma q = k \simeq \nabla \circ (f \vee g) \circ ((a^{-1} \cdot b^{-1}) \cdot (a \cdot b)) = (\nabla \circ (f \vee g) \circ w) \circ \Sigma q,$$

e portanto $[\alpha, \beta] = [\tilde{k}] = [\nabla \circ (f \vee g) \circ w] \in [\Sigma(A \wedge B), X]_*$. □

Definição 5.3. Definimos o *cone sobre* X por

$$TX = X \times I / X \times \{1\}$$

e o *cone reduzido sobre* X por

$$CX = X \times I / (X \times \{1\} \cup \{x_0\} \times I).$$

Denotaremos por $i_0 : X \to CX$ a inclusão $i_0(x) = [(x, 0)]$.

Definição 5.4. Dada uma aplicação $f : X \to Y$, o espaço $Y \cup_f CX$ é definido como sendo o quociente da união disjunta de Y e CX pela relação $i_0(x) \sim f(x)$. Denote por $\bar{f} : CX \to Y \cup_f CX$ e $\bar{i_0} : Y \to Y \cup_f CX$ as aplicações dadas por $\bar{f}(a) = [a]$ e $\bar{i_0}(y) = [y]$.

Então o seguinte diagrama é comutativo:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_0"] & Y \arrow[d, "\bar{i_0}"] \\ CX \arrow[r, "\bar{f}"] & Y \cup_f CX. \end{tikzcd}$$

O espaço $Y \cup_f CX$ é chamado de *mapping cone da aplicação* f ou de *pushout* das aplicações $f : X \to Y$ e $i_0 : X \to CX$, conforme [18, p. 38]. Tal espaço possui a seguinte propriedade: dadas duas aplicações $k : Y \to Z$ e $h : CX \to Z$ tais que $k \circ f = h \circ i_0$, então existe uma única aplicação $l : Y \cup_f CX \to Z$ tal que $l \circ \bar{i_0} = k$ e $l \circ \bar{f} = h$, isto é, existe l que comuta o diagrama a seguir:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_0"] & Y \arrow[d, "\bar{i_0}"] \arrow[ddr, "k"] & \\
CX \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[drr, "h"'] & Y \cup_f CX \arrow[dr, "l"] & \\
& & Z.
\end{tikzcd}$$

Os dois resultados a seguir encontram-se em [2, p. 17]:

Teorema 5.5. *Tem-se que*

$$\Sigma A \times \Sigma B \simeq (\Sigma A \vee \Sigma B) \cup_w C\Sigma(A \wedge B) = C_w.$$

Teorema 5.6. *Tem-se que* $j \circ w \simeq 0 : \Sigma(A \wedge B) \to \Sigma A \times \Sigma B$, *em que* $j : \Sigma A \vee \Sigma B \hookrightarrow \Sigma A \times \Sigma B$ *é a inclusão.*

Fazendo uso deles, demonstramos o seguinte:

Corolário 5.7. *Se* $p : \Sigma A \times \Sigma B \to \Sigma A \wedge \Sigma B$ *é a projeção,* $j : \Sigma A \vee \Sigma B \hookrightarrow \Sigma A \times \Sigma B$ *é a inclusão e* $w : \Sigma(A \wedge B) \to \Sigma A \vee \Sigma B$ *é a aplicação de Whitehead, então para todo espaço* X *a sequência a seguir é exata:*

$$[\Sigma A \wedge \Sigma B, X]_* \xrightarrow{p^*} [\Sigma A \times \Sigma B, X]_* \xrightarrow{j^*} [\Sigma A \vee \Sigma B, X]_* \xrightarrow{w^*} [\Sigma(A \wedge B), X]_*.$$

Demonstração. Provemos as devidas inclusões.

- $\operatorname{Im} p^* \subseteq \operatorname{Ker} j^*$: se $[f] = p^*[g] = [g \circ p] \in \operatorname{Im} p^*$, então $j^*[f] = j^*[g \circ p] = [g \circ p \circ j] = 0$ pois $j \circ p = 0$, afinal $\Sigma A \wedge \Sigma B = \Sigma A \times \Sigma B / \Sigma A \vee \Sigma B$.

- $\operatorname{Ker} j^* \subseteq \operatorname{Im} p^*$: seja $[f] \in \operatorname{Ker} j^*$. Então $j^*[f] = [f \circ j] = 0$. A propriedade de extensão de homotopia do par $(\Sigma A \times \Sigma B, \Sigma A \vee \Sigma B)$ nos garante a existência de $f' \simeq f$ tal que $f' \circ j = 0$. Portanto f' induz $g : \Sigma A \wedge \Sigma B \to X$ tal que $g \circ p = f'$, isto é, $p^*[g] = [f'] = [f]$.

- $\operatorname{Im} j^* \subseteq \operatorname{Ker} w^*$: se $[f] = j^*[g] = [g \circ j] \in \operatorname{Im} j^*$, então $w^*[f] = w^*[g \circ j] = [g \circ j \circ w] = 0$ pois $j \circ w \simeq 0$, pelo teorema anterior.

- $\operatorname{Ker} w^* \subseteq \operatorname{Im} j^*$: seja $[l] \in \operatorname{Ker} w^*$, isto é, $[l \circ w] = 0$. Seja $\Gamma : C_w \to \Sigma A \times \Sigma B$ a equivalência de homotopia dada pelo teorema 5.5, com inversa Γ^{-1}.

  Afirmação: existe $\tilde{l} : C\Sigma(A \wedge B) \to X$ tal que $\tilde{l} \circ i_0 = l \circ w$. Seja $H : \Sigma(A \wedge B) \times I \to X$ homotopia tal que $H_0 = l \circ w$ e $H_1 = 0$ (afinal $[l \circ w] = 0$). Seja $q : \Sigma(A \wedge B) \times I \to C\Sigma(A \wedge B)$ a projeção.

$$\begin{tikzcd}
\Sigma(A \wedge B) \times I \arrow[d, "q"] \arrow[dr, "H"] & \\
C\Sigma(A \wedge B) \arrow[r, "\tilde{l}"] & X
\end{tikzcd}$$

Como H é constante em $\Sigma(A\wedge B)\times\{1\}\cup\{*\}\times I$, tem-se que H induz $\tilde{l} : C\Sigma(A\wedge B) \to X$ tal que $\tilde{l}\circ i_0 = H_0 = l\circ w$, o que prova a afirmação.

Seguindo a notação da definição 5.4, a propriedade do *pushout* nos dá a existência de $\tilde{m} : C_w \to X$ tal que o seguinte diagrama (com exceção do triângulo dado por $\bar{i_0}$ e $\Gamma\circ j$) é comutativo:

$$\begin{tikzcd}
\Sigma(A\wedge B) \arrow[rr, "w"] \arrow[dd, "i_0"] & & \Sigma A\vee\Sigma B \arrow[dl, "j"'] \arrow[dd, "\bar{i_0}"] \arrow[dddr, "l"] & \\
& \Sigma A\times\Sigma B \arrow[dr, "\Gamma"] & & \\
C\Sigma(A\wedge B) \arrow[rr, "\bar{w}"] \arrow[drrr, "\tilde{l}"'] & & C_w \arrow[dr, "\tilde{m}"] & \\
& & & X.
\end{tikzcd}$$

Defina $m = \tilde{m}\circ\Gamma : \Sigma A\times\Sigma B \to X$. Segundo [2, p. 17], o triângulo dado por $\bar{i_0}$ e $\Gamma\circ j$ também é comutativo. Logo, $j^*[m] = [m\circ j] = [l] \in \operatorname{Im} j^*$. □

Teorema 5.8. *Sejam $\alpha = [f] \in [\Sigma A, X]_*$ e $\beta = [g] \in [\Sigma B, X]_*$. Então $[\alpha,\beta] = 0$ se, e somente se, existe aplicação $m : \Sigma A\times\Sigma B \to X$ tal que $[m|_{\Sigma A\times *}] = \alpha$ e $[m|_{*\times\Sigma B}] = \beta$, isto é, o seguinte diagrama comuta a menos de homotopia:*

$$\begin{tikzcd}
\Sigma A\vee\Sigma B \arrow[d, hook, "j"] \arrow[dr, "l"] & \\
\Sigma A\times\Sigma B \arrow[r, "m"] & X
\end{tikzcd}$$

em que $l = \nabla\circ(f\vee g) : \Sigma A\vee\Sigma B \to X$.

Demonstração. Sejam f e g representantes de α e β, respectivamente. Seja $l = \nabla\circ(f\vee g) : \Sigma A\vee\Sigma B \to X$. Pelo teorema 5.2, tem-se que

$$[l\circ w] = [\nabla\circ(f\vee g)\circ w] = [\alpha,\beta].$$

Suponha que $[\alpha,\beta] = 0$. Então $[l\circ w] = w^*[l] = 0 \in [\Sigma A\vee\Sigma B, X]_*$, isto é, $[l] \in \operatorname{Ker} w^* = \operatorname{Im} j^*$, pelo corolário anterior. Assim, existe $m : \Sigma A\times\Sigma B \to X$ tal que $j^*[m] = [m\circ j] = [l]$, isto é, $m\circ j \simeq l$.

Tem-se que

$$m(a,*) = m\circ j(a,*) \text{ e } l(a,*) = f(a),$$
$$m(*,b) = m\circ j(*,b) \text{ e } l(*,b) = g(b),$$

em que $a \in \Sigma A$ e $b \in \Sigma B$ e assim $m|_{\Sigma A} \simeq f$ e $m|_{\Sigma B} \simeq g$, isto é,

$$[m|_{\Sigma A}] = \alpha \text{ e } [m|_{\Sigma B}] = \beta.$$

Reciprocamente, se existe $m : \Sigma A\times\Sigma B \to X$ tal que $[m|_{\Sigma A}] = \alpha$ e $[m|_{\Sigma B}] = \beta$, então $[m\circ j] = [l]$.

Portanto

$$[\alpha,\beta] = [l\circ w] = [m\circ j\circ w] = w^*[m\circ j] = w^*\circ j^*[m] = 0$$

pois $\operatorname{Im} j^* = \operatorname{Ker} w^*$. □

Proposição 5.9. *Seja ι a classe da aplicação identidade de ΣA. Se $[\iota, \iota] = 0$, então ΣA é um H-espaço.*

Demonstração. Pelo teorema anterior, existe $m : \Sigma A \times \Sigma A \to \Sigma A$ tal que $m \circ j_1 \simeq 1$ e $m \circ j_2 \simeq 1$, em que $j_1, j_2 : \Sigma A \to \Sigma A \times \Sigma A$ são as inclusões de ΣA no primeiro e segundo termo do produto. Então m é um produto para ΣA, que o torna um H-espaço. □

Proposição 5.10 (Bi-aditividade, [2, p. 14])**.** *Se $A = \Sigma A'$ e $B = \Sigma B'$ são suspensões, então:*

1. $[\alpha + \bar{\alpha}, \beta] = [\alpha, \beta] + [\bar{\alpha}, \beta]$;

2. $[\alpha, \beta + \bar{\beta}] = [\alpha, \beta] + [\alpha, \bar{\beta}]$;

para todo $\alpha, \bar{\alpha} \in [\Sigma A, X]_*$ e todo $\beta, \bar{\beta} \in [\Sigma B, X]_*$.

6 O invariante de Hopf

Daqui em diante, todos os grupos de homologia e cohomologia terão coeficientes em $\mathbb{Z}$.

Sejam X, A, A' CW-complexos, com A e A' subcomplexos de X. O *produto cup* é uma operação binária que associa a cada $u \in H^p(X, A)$ e $v \in H^q(X, A')$ um elemento $u \smile v \in H^{p+q}(X, A \cup A')$, com algumas propriedades, tais como:

- o produto cup é bilinear;

- se $f : X \to Y$ é tal que $f(A) \subseteq B$ e $f(A') \subseteq B'$ então, se denotamos por $f_1 : (X, A) \to (Y, B)$, $f_2 : (X, A') \to (Y, B')$ e $f_3 : (X, A \cup A') \to (Y, B \cup B')$ as aplicações definidas por f (isto é, $f_i(x) = f(x)$), tem-se que

$$f_3^*(u' \smile v') = f_1^* u' \smile f_2^* v',$$

  para $u' \in H^p(Y, B)$ e $v' \in H^q(Y, B')$.

Para mais detalhes sobre $\smile$, ver [8, p. 206–210].

Sejam agora $a \in H^p(X, A)$ e $b \in H^q(Y, B)$.

O *produto cross relativo*, denotado por $\times$, é uma operação

$$H^p(X, A) \otimes H^q(Y, B) \xrightarrow{\times} H^{p+q}(X \times Y, A \times Y \cup X \times B)$$

definida por

$$a \times b = p_1^*(a) \smile p_2^*(b),$$

em que $p_1 : (X \times Y, A \times Y) \to (X, A)$ e $p_2 : (X \times Y, X \times B) \to (Y, B)$ são as projeções e o tensor $\otimes$ é tomado sobre $\mathbb{Z}$.

Duas propriedades úteis do produto tensorial são as seguintes:

1. se $f : G \to G'$ e $g : H \to H'$ são homomorfismos de grupos abelianos, então f e g induzem homomorfismo

$$f \otimes g : G \otimes H \to G' \otimes H'$$

   definido por $f \otimes g(a \otimes b) = f(a) \otimes g(b)$.

2. uma função bilinear $h : G \times G' \to H$ define homomorfismo $\tilde{h} : G \otimes G' \to H$ dado por $\tilde{h}(g \otimes g') = h(g, g')$.

Por ser bilinear, o produto cup define homomorfismo

$$\smile : H^p(X, A) \otimes H^q(X, A') \to H^{p+q}(X, A \cup A'),$$

o qual denotaremos pelo mesmo símbolo $\smile$.

Definição 6.1. Seja $f : S^{2n-1} \to S^n$, $n > 1$. Seja $X = D^{2n} \cup_f S^n$ o *adjunction space* (i.e. X é o espaço obtido quocientando a união disjunta $D^{2n} \sqcup S^n$ pela relação $f(s) \sim s$ para $s \in S^{2n-1} \subset D^{2n}$). Assim, X tem somente uma n-célula e uma $2n$-célula, e então $H^n(X) \simeq \mathbb{Z} \simeq H^{2n}(X)$. Sejam $x \in H^n(X)$ e $y \in H^{2n}(X)$ geradores. Então $x \smile x = h(f)y$ para algum inteiro $h(f)$. Tal inteiro é chamado de *invariante de Hopf da aplicação* f, e definido a menos de sinal (pois a escolha do gerador pode alterar o sinal).

Prova-se que se $f \simeq f'$ então $h(f) = h(f')$ (ver, por exemplo, [23, Proposição 5.13, p. 137]). Portanto, tal inteiro associado a f é invariante por homotopia.

Proposição 6.2. *Seja $f : S^{2n-1} \to S^n$. Se n é ímpar, então $h(f) = 0$.*

Demonstração. Basta notar que

$$x \smile x = (-1)^{n^2}(x \smile x) = -(x \smile x)$$

por [8, Teorema 3.11, p. 210], donde $2(x \smile x) = 0$, e assim $x \smile x = 0 = 0y$ (os coeficientes são inteiros). □

Definição 6.3. O *grau* de uma aplicação $f : S^n \to S^n$ $(n > 0)$, denotado por $\deg(f)$, é o número inteiro tal que $f^*(x) = \deg(f)x$, em que x é um gerador de $H^n(S^n) \simeq \mathbb{Z}$.

Tal inteiro não depende da escolha do gerador x, pois se $-x$ é o outro gerador, então $f^*(-x) = -f^*(x) = -\deg(f)x = \deg(f)(-x)$.

Observação 6.4. A definição de *grau* de uma aplicação $f : S^n \to S^n$ dada acima difere da mais comum na literatura. Como consta em [8, p. 134] e [9, p. 101], o grau de f é o inteiro d tal que $f_*(x) = dx$, em que x é um gerador de $H_n(S^n) \simeq \mathbb{Z}$. Isto não será um problema, visto que as duas noções coincidem, como mostra o seguinte resultado:

Proposição 6.5. *Seja $f : S^n \to S^n$. Se $x \in H^n(S^n)$ e $y \in H_n(S^n)$ são geradores e $f^*(x) = dx$, então $f_*(y) = dy$.*

Demonstração. Faremos uso aqui do *teorema do coeficiente universal para cohomologia*, como consta em [15, Teorema 53.1, p. 320], que tem como corolário ([15, p. 323]) o seguinte: dado um par de espaços (X, A) e um grupo G, existe uma sequência exata

$$0 \to \operatorname{Ext}(H_{p-1}(X, A), G) \to H^p(X, A; G) \xrightarrow{\kappa} \operatorname{Hom}(H_p(X, A), G) \to 0$$

que é *natural com respeito a homomorfismos induzidos por aplicações*; para o nosso caso em que $X = S^n$, $A = \emptyset$, $p = n$ e $G = \mathbb{Z}$, ficamos com o seguinte:

$$0 \to \operatorname{Ext}(H_{n-1}(S^n), \mathbb{Z}) \to H^n(S^n) \xrightarrow{\kappa} \operatorname{Hom}(H_n(S^n), \mathbb{Z}) \to 0,$$

e como $H_{n-1}(S^n)$ é o grupo trivial (e portanto é livre), segue de [8, p. 195] que $\operatorname{Ext}(H_{p-1}(S^n), \mathbb{Z}) = 0$. Assim, κ é isomorfismo.

A naturalidade citada acima garante que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} H^n(S^n) & \xrightarrow{\kappa} & \operatorname{Hom}(H_n(S^n), \mathbb{Z}) \\ {\scriptstyle f^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{f}} \\ H^n(S^n) & \xrightarrow{\kappa} & \operatorname{Hom}(H_n(S^n), \mathbb{Z}) \end{array}$$

é comutativo, em que κ é o *homomorfismo de Kronecker* definido em [15, p. 276] e $\tilde{f}(h) = h \circ f_*$.

Lembrando que $x \in H^n(S^n)$ e $y \in H_n(S^n)$ são geradores, o grupo $\operatorname{Hom}(H_n(S^n), \mathbb{Z})$ é cíclico gerado pelo homomorfismo $h_1 : H_n(S^n) \to \mathbb{Z}$ tal que $h_1(y) = 1$ (ou por $h_2 : H_n(S^n) \to \mathbb{Z}$ tal que $h_2(y) = -1$). Como κ é isomorfismo, segue que $\kappa(x) = h_i$, para algum $i = 1, 2$. Então

$$\tilde{f} \circ \kappa(x) = \kappa(x) \circ f_* = h_i \circ f_*$$

que, pela comutatividade do diagrama acima, é igual a

$$\kappa \circ f^*(x) = \kappa(dx) = d\kappa(x) = dh_i.$$

Portanto, $h_i \circ f_*(y) = dh_i(y)$. No caso em que $i = 1$, obtemos que $f_*(y) = dy$, e no caso $i = 2$ obtemos que $-f_*(y) = d(-y)$, que também nos dá $f_*(y) = dy$, como queríamos. □

Definição 6.6. Sejam $p, q \in S^n$ e $f : S^n \times S^n \to S^n$ uma aplicação. Sejam $f_1, f_2 : S^n \to S^n$ dadas por $f_1(x) = f(x, q)$ e $f_2(x) = f(p, x)$. O *bigrau de* f é o par de inteiros (a, b) em que $a = \deg(f_1)$ e $b = \deg(f_2)$.

Note que a e b não dependem da escolha dos pontos p e q: se q' é outro ponto de S^n, $f_1' : S^n \to S^n$ é definida por $f_1'(x) = f(x, q')$ e $\gamma : I \to S^n$ é um caminho ligando q a q' (que existe, pois S^n é conexa por caminhos para $n > 0$) então $F : S^n \times I \to S^n$ dada por $F(x, t) = f(x, \gamma(t))$ satisfaz $F_0 = f_1$ e $F_1 = f_1'$, e assim f_1 e f_1' tem o mesmo grau. Análogo para a escolha de p.

Teorema 6.7. *Se n é par e m é um inteiro qualquer, existe aplicação $f : S^{2n-1} \to S^n$ com $h(f) = 2m$.*

Demonstração. Sejam S_1, S_2 e S três $(n-1)$-esferas e $k : S_1 \times S_2 \to S$ uma aplicação de bigrau (a, b). Sejam E_i n-células tais que $S_i = \partial E_i$, $(i = 1, 2)$. Então $\partial(E_1 \times E_2) = (E_1 \times S_2) \cup (S_1 \times E_2)$ é homeomorfo a uma $(2n-1)$-esfera e $(E_1 \times S_2) \cap (S_1 \times E_2) = S_1 \times S_2$. Seja S' a suspensão não-reduzida de S. Então $S' = E_+ \cup E_-$, em que E_+ e E_- são n-células e $E_+ \cap E_- = S$.

Estendemos k a uma função $C(k) : (E_1 \times S_2) \cup (S_1 \times E_2) \to E_+ \cup E_- = S'$ de modo que $C(k)(E_1 \times S_2) \subset E_+$ e $C(k)(S_1 \times E_2) \subset E_-$. Tal extensão é melhor vista se considerarmos os homeomorfismos entre $E_1 \times S_2$ e $TS_1 \times S_2$, e entre $S_1 \times E_2$ e $S_1 \times TS_2$, em que TS_i é o cone sobre S_i, $i = 1, 2$ (conforme definição 5.3). Assim, definimos $\phi : (TS_1 \times S_2) \cup (S_1 \times TS_2) \to S'$ por $\phi((t, x), y) = (k(x), \frac{t+1}{2})$ e $\phi(x, (t, y)) = (k(x), \frac{-t+1}{2})$. Então $\phi(TS_1 \times S_2) \subset E_+$ e $\phi(S_1 \times TS_2) \subset E_-$.

No diagrama abaixo, as setas verticais são homeomorfismos,

$$\begin{tikzcd}
(TS_1 \times S_2) \cup (S_1 \times TS_2) \arrow[drr, "\phi"] & & \\
(E_1 \times S_2) \cup (S_1 \times E_2) \arrow[u] \arrow[rr, "C(k)"] & & S' \arrow[d] \\
S^{2n-1} \arrow[u] & & S^n
\end{tikzcd}$$

e então podemos ver $C(k)$ como uma aplicação de S^{2n-1} para S^n.

Chamamos de *construção de Hopf* esse processo de, dada $k : S^{n-1} \times S^{n-1} \to S^{n-1}$, criar a aplicação $C(k) : S^{2n-1} \to S^n$.

O teorema seguirá de dois lemas:

Lema 6.8. *$h(C(k)) = ab$.*

Demonstração. Seja $X = (E_1 \times E_2) \cup_{C(k)} S'$. A aplicação colagem nos dá uma aplicação $g : (E_1 \times E_2, E_1 \times S_2, S_1 \times E_2) \to (X, E_+, E_-)$. Seja x gerador de $H^n(X) \simeq \mathbb{Z}$.

A sequência exata dos pares (X, E_-) e (X, E_+) nos dá

$$\cdots \to H^{n-1}(E_-) \xrightarrow{\delta} H^n(X, E_-) \xrightarrow{j_1^*} H^n(X) \to H^n(E_-) \to \cdots ,$$
$$\cdots \to H^{n-1}(E_+) \xrightarrow{\delta} H^n(X, E_+) \xrightarrow{j_2^*} H^n(X) \to H^n(E_+) \to \cdots ,$$

em que as setas sem nome denotam induzidas de inclusões. Como E_- e E_+ são contráteis, segue que $j_1^* : H^n(X, E_-) \to H^n(X)$ e $j_2^* : H^n(X, E_+) \to H^n(X)$ são isomorfismos. Defina $x_+ \in H^n(X, E_-)$ e $x_- \in H^n(X, E_+)$ como sendo as imagens inversas de x pelos isomorfismos acima. Chame de $j_3 : X \to (X, S')$ a inclusão, lembrando que $S' = E_- \cup E_+$. Então j_3^* também é isomorfismo, pela sequência exata do par (X, S') (pois S' é uma n-esfera e não possui células de dimensão $2n - 1$ (já que $n > 1$))

Tem-se o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{tikzcd}
H^n(X) \otimes H^n(X) \arrow[r, "\smile"] & H^{2n}(X) \\
H^n(X, E_-) \otimes H^n(X, E_+) \arrow[u, "j_1^* \otimes j_2^*"] \arrow[r, "\smile"] & H^{2n}(X, S') \arrow[u, "j_3^*"']
\end{tikzcd}$$

afinal $j_3^*(u \smile v) = j_1^* u \smile j_2^* v$, para $u \in H^n(X, E_-)$ e $v \in H^n(X, E_+)$.

Portanto, $x_+ \smile x_-$ tem imagem $x \smile x$ pelo homomorfismo $H^{2n}(X, S') \to H^{2n}(X)$.

O seguinte diagrama comutativo de inclusões

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr] & & (X, E_-) \\
S' \arrow[u] \arrow[r] & (S', E_-) \arrow[ur] & (E_+, S) \arrow[l] \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

induz em cohomologia o diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd}
H^n(X) \arrow[d] & & H^n(X, E_-) \arrow[ll] \arrow[dl] \arrow[d] \\
H^n(S') & H^n(S', E_-) \arrow[l] \arrow[r] & H^n(E_+, S).
\end{tikzcd}$$

Observe que $H^n(X,E_-) \to H^n(S',E_-)$ é isomorfismo, pois as setas

$$H^n(X,E_-) \to H^n(X),\ H^n(X) \to H^n(S') \text{ e } H^n(S',E_-) \to H^n(S')$$

o são. Que $H^n(S',E_-) \to H^n(E_+,S)$ é isomorfismo vem do fato de que $(S';E_+,E_-)$ é uma tríada NDR (conforme [24, p. 55–56]). Assim, a seta $H^n(X,E_-) \to H^n(E_+,S)$ é também isomorfismo.

Considere o diagrama comutativo a seguir

$$\begin{tikzcd}
(X,E_-) & (E_1 \times E_2, S_1 \times E_2) \arrow[l, "g"'] \\
(E_+,S) \arrow[u] & (E_1 \times q, S_1 \times q) \arrow[l, "g"'] \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

em que $q \in S_2$ é um ponto qualquer, as setas sem sobrescrito são inclusões e as restrições de g também são denotadas apenas por g. Como $(E_1 \times E_2; S_1 \times E_2, E_1 \times q)$ é uma tríada NDR, temos que a seta vertical no canto superior direito do seguinte diagrama é isomorfismo

$$\begin{tikzcd}
H^n(X,E_-) \arrow[r, "g^*"] \arrow[d, "\simeq"'] & H^n(E_1 \times E_2, S_1 \times E_2) \arrow[d, "\simeq"'] \\
H^n(E_+,S) \arrow[r, "g^*"] & H^n(E_1 \times q, S_1 \times q) \\
H^{n-1}(S) \arrow[r, "g^*"] \arrow[u, "\delta"] & H^{n-1}(S_1 \times q) \arrow[u, "\delta"] \\
\mathbb{Z} \arrow[r, "a"] \arrow[u, "\simeq"] & \mathbb{Z}, \arrow[u, "\simeq"]
\end{tikzcd}$$

assim como a seta vertical no canto superior esquerdo, como já provado acima. O segundo quadrado comuta pois o cobordo comuta com a induzida (em cohomologia) de uma restrição. Além disso, as duas setas δ são isomorfismos, pois a sequência exata dos pares (E_+,S) e $(E_1 \times q, S_1 \times q)$ nos dá

$$\cdots \to H^{n-1}(E_+) \to H^{n-1}(S) \xrightarrow{\delta} H^n(E_+,S) \to H^n(E_+) \to \cdots,$$
$$\cdots \to H^{n-1}(E_1 \times q) \to H^{n-1}(S_1 \times q) \xrightarrow{\delta} H^n(E_1 \times q, S_1 \times q) \to H^n(E_1 \times q) \to \cdots$$

em que as setas sem nome denotam induzidas de inclusões, e E_+ e $E_1 \times q$ são contráteis.

A seta $\mathbb{Z} \xrightarrow{a} \mathbb{Z}$ é a multiplicação por a, uma vez que $g|_{S_1 \times q} = k|_{S_1 \times q}$ tem grau a.

Assim, pelo diagrama, temos que $g^*(x_+) = aw_+$, em que w_+ é um gerador de $H^n(E_1 \times E_2, S_1 \times E_2)$. Por um diagrama similar, vemos que $g^*x_- = bw_-$, em que w_- é um gerador de $H^n(E_1 \times E_2, E_1 \times S_2)$.

Considere $p_1 : (E_1 \times E_2, S_1 \times E_2) \to (E_1, S_1)$ a projeção na primeira coordenada. Seja $i : (E_1, S_1) \to (E_1 \times E_2, S_1 \times E_2)$ a inclusão dada por $i(x) = (x,q)$. Então $p_1 \circ i = 1$ e $i \circ p_1(x,y) = (x,q)$. Como E_2 é contrátil, existe homotopia $h_t : E_2 \to E_2$ tal que h_0 é a função constante em q e $h_1 = 1$. Logo, $H_t : (E_1 \times E_2, S_1 \times E_2) \to (E_1 \times E_2, S_1 \times E_2)$ definida por $H_t(x,y) = (x, h_t(y))$ satisfaz $H_0 = i \circ p_1$ e $H_1 = 1$. Assim,

$$1 = (p_1 \circ i)^* = i^* \circ p_1^* \ \text{ e } \ 1 = (i \circ p_1)^* = p_1^* \circ i^*,$$

e então $p_1^* : H^n(E_1, S_1) \to H^n(E_1 \times E_2, S_1 \times E_2)$ é isomorfismo. Defina $x_1 \in H^n(E_1, S_1)$ por $p_1^* x_1 = w_+$.

Considerando $p_2 : (E_1 \times E_2, E_1 \times S_2) \to (E_2, S_2)$ a outra projeção, um raciocínio análogo ao acima nos dá que p_2^* é isomorfismo; defina $x_2 \in H^n(E_2, S_2)$ de modo que $p_2^* x_2 = w_-$.

Tem-se que

$$w_+ \smile w_- = p_1^* x_1 \smile p_2^* x_2 = x_1 \times x_2.$$

Portanto,

$$g^* x_+ \smile g^* x_- = (a w_+) \smile (b w_-) = ab(w_+ \smile w_-) = ab(x_1 \times x_2).$$

Também,

$$H^n(E_1, S_1) \otimes H^n(E_2, S_2) \xrightarrow{\times} H^{2n}(E_1 \times E_2, E_1 \times S_2 \cup S_1 \times E_2)$$

é isomorfismo por [8, Teorema 3.18, p. 219], bastando notar que $H^*(E_1, S_1)$ é um módulo livre finitamente gerado (na verdade $H^*(E_1, S_1) \simeq \mathbb{Z}$ ou $\{1\}$, pela sequência exata do par). Assim, $x_1 \times x_2$ gera $H^{2n}(E_1 \times E_2, E_1 \times S_2 \cup S_1 \times E_2)$.

Chame $A = E_1 \times E_2$ e $B = E_1 \times S_2 \cup S_1 \times E_2$. Tem-se que $g : (A, B) \to (X, S')$ é homeomorfismo relativo (isto é, $g|_{A-B} : A - B \to X - S'$ é homeomorfismo) e que A, B, X e S' são compactos, satisfazendo o seguinte: existem compactos $K \subseteq A$ e $K' \subseteq X$ tais que B é retrato por deformação forte de K, S' é retrato por deformação forte de K', e também $B \subseteq K - \partial K$ e $S' \subset K' - \partial K'$.

Se vermos A como o disco D^{2n} e B como S^{2n-1}, definimos $K = A - D$, em que D é um disco aberto de raio menor que o de A; o retrato por deformação forte nesse caso é a homotopia que leva cada ponto a seu correspondente em B através do segmento radial, conforme o parâmetro da homotopia linear varia de 0 a 1.

No segundo caso, fazemos a mesma coisa com $E_1 \times E_2$ visto como o disco D^{2n}, isto é, tiramos de D^{2n} um disco aberto de raio menor, digamos D'; chame $K' = X - D'$ que é compacto. A homotopia que leva os pontos de $D^{2n} - D'$ para S^{2n-1} mantém S' fixo durante o tempo todo (relembre que S^{2n-1} está identificado a S').

Com as condições acima, o teorema 2.16 de [23, p. 51] garante que

$$g_* : H_*(A, B) \to H_*(X, S')$$

é isomorfismo. Fazendo uso novamente do teorema do coeficiente universal para cohomologia, temos que a sequência exata

$$0 \to \operatorname{Ext}(H_{2n-1}(X, S'), \mathbb{Z}) \to H^{2n}(X, S') \xrightarrow{\kappa} \operatorname{Hom}(H_{2n}(X, S'), \mathbb{Z}) \to 0$$

aliada à naturalidade (ver página 35) e ao fato de que $H_{2n-1}(X, S') \simeq H_{2n-1}(A, B) \simeq \mathbb{Z}$ é livre, nos garante que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
H^n(X, S') \arrow[r, "\kappa"] \arrow[d, "g^*"'] & \operatorname{Hom}(H_n(X, S'), \mathbb{Z}) \arrow[d, "\tilde{g}"] \\
H^n(A, B) \arrow[r, "\kappa'"] & \operatorname{Hom}(H_n(A, B), \mathbb{Z})
\end{tikzcd}$$

é comutativo, em que $\tilde{g}(h) = h \circ g_*$ para todo $h \in \operatorname{Hom}(H_n(X, S'), \mathbb{Z})$ e κ, κ' são isomorfismos. Como g_* é isomorfismo, também o é $\tilde{g}$, e assim $g^* = \kappa'^{-1} \circ \tilde{g}^{-1} \circ \kappa$ é isomorfismo.

Assim, temos isomorfismos

$$H^{2n}(X) \xleftarrow{\simeq} H^{2n}(X, S') \xrightarrow{g^*} H^{2n}(A, B).$$

Sob esses isomorfismos, $x \smile x \in H^{2n}(X)$ corresponde a $x_+ \smile x_- \in H^{2n}(X, S')$ e a $ab(x_1 \times x_2) \in H^{2n}(A, B)$. Seja $y \in H^{2n}(X)$ correspondente a $x_1 \times x_2 \in H^{2n}(A, B)$. Então $x \smile x = aby$, isto é, $h(C(k)) = ab$. □

Lema 6.9. *Existe aplicação $f : S^{n-1} \times S^{n-1} \to S^{n-1}$ de bigrau $(\pm 2, -1)$ se n é par.*

Demonstração. Sejam $(x, y) \in S^{n-1} \times S^{n-1}$ e escreva $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $(y_1, \ldots, y_n)$.

Seja $D(x)$ o plano que passa pela origem e tem x como vetor normal. Defina $f(x, y)$ como sendo a imagem de y pela reflexão através do plano $D(x)$; mais explicitamente,

$$f(x, y) = y - 2\langle x, y\rangle x$$

(aqui $\langle x, y\rangle$ é o produto interno canônico de x e y).

Fixe $x = (1, 0, \ldots, 0)$ e defina $f_1 : S^{n-1} \to S^{n-1}$ por $f_1(y) = f(x, y) = (-y_1, y_2, \ldots, y_n)$, que tem grau -1 (vide proposição 8.7 de [9, p. 103]).

Agora, fixe $y = (1, 0, \ldots, 0)$ e defina $f_2 : S^{n-1} \to S^{n-1}$ por $f_2(x) = f(x, y) = (1 - 2x_1^2, -2x_1x_2, \ldots, -2x_1x_n)$.

Note que f_2 leva o plano $x_1 = 0$ no ponto $y = (1, 0, \ldots, 0)$ e leva os x tais que $x_1 > 0$ de modo bijetor em $S^{n-1} - \{y\}$, pelo seguinte: seja $(a_1, \ldots, a_n) \in S^{n-1} - \{y\}$. Então

$$1 - 2x_1^2 = a_1 \Rightarrow x_1 = \sqrt{\frac{1 - a_1}{2}} > 0$$

é a única solução. Assim,

$$-2x_1x_2 = a_2 \Rightarrow x_2 = -\frac{a_2}{2x_1}$$

e, mais geralmente,

$$-2x_1x_i = a_i \Rightarrow x_i = -\frac{a_i}{2x_1}.$$

Um argumento análogo prova que f_2 leva os x tais que $x_1 < 0$ de modo bijetor em $S^{n-1} - \{y\}$.

Mais ainda, $f_2(x) = f_2(-x)$, para todo $x \in S^{n-1}$.

Podemos então fatorar f_2 pelo espaço projetivo P^{n-1}, ou seja, como a composta

$$S^{n-1} \xrightarrow{q} P^{n-1} \xrightarrow{l} S^{n-1}$$

em que q é a projeção com $[x] = q(x)$ e l é definida por $l[x] = f_2(x)$.

Considere o seguinte diagrama comutativo (no qual o espaço projetivo P^{n-2} é a imagem de $S^{n-2} = \{x \in S^{n-1}; x_1 = 0\}$ pela aplicação q e $\tilde{l}[x] = l[x]$ para todo x)

$$\begin{tikzcd}
P^{n-1} \arrow[r, "l"] \arrow[d, hook, "i"'] & S^{n-1} \arrow[d, hook, "j"] \\
(P^{n-1}, P^{n-2}) \arrow[r, "\tilde{l}"] & (S^{n-1}, y)
\end{tikzcd}$$

que induz o seguinte diagrama comutativo em cohomologia:

$$\begin{tikzcd} H^{n-1}(P^{n-1}) & H^{n-1}(S^{n-1}) \arrow[l, "l^*"', "\simeq"] \\ H^{n-1}(P^{n-1}, P^{n-2}) \arrow[u, "i^*", "\simeq"'] & H^{n-1}(S^{n-1}, y) \arrow[l, "\tilde{l}^*"'] \arrow[u, "\simeq", "j^*"'] \end{tikzcd}$$

em que i^* e j^* são isomorfismos (pela sequência exata dos respectivos pares) e $\tilde{l}^*$ também o é pois $\tilde{l}$ é homeomorfismo relativo (cuja inversa é dada por

$$(a_1, \ldots, a_n) \mapsto \left(\sqrt{\frac{1-a_1}{2}}, -\frac{a_2}{\sqrt{2(1-a_1^2)}}, \ldots, -\frac{a_n}{\sqrt{2(1-a_1^2)}} \right)$$

para todo $(a_1, \ldots, a_n) \in S^{n-1} - \{y\}$) e além disso $P^{n-1}, P^{n-2}, S^{n-1}$ e $\{y\}$ são todos compactos, e há vizinhanças compactas $K \subset P^{n-1}$ e $K' \subset S^{n-1}$ tais que P^{n-1} é retrato por deformação forte de K, $\{y\}$ é retrato por deformação forte de K' e também $P^{n-1} \subset K - \partial K$ e $\{y\} \subset K' - \partial K'$.

Tome, por exemplo, K como sendo $q(F)$, em que

$$F = \{x \in S^{n-1}; d(x, S^{n-2}) < 1\},$$

isto é, F é uma faixa em volta da esfera $(n-2)$-dimensional $\{(x_1, \ldots, x_n) \in S^{n-1}, x_1 = 0\}$ (d denota a distância euclidiana). O retrato por deformação forte que leva F em S^{n-2} (definido de modo a aplicar $x \in F$ ao ponto de S^{n-2} correspondente através do arco de círculo que passa por x e $(1, 0, \ldots, 0)$), quando composto com q, nos dá um retrato por deformação forte entre $K = q(F)$ e $P^{n-2} = q(S^{n-2})$.

Já K' pode ser dado por

$$K' = \{x \in S^{n-1}, d(x, y) < 1\}.$$

Estas condições nos garantem que $\tilde{l}^*$ é isomorfismo pelo mesmo raciocínio usado anteriormente.

Assim, de $j^* \circ l^* = \tilde{l}^* \circ i^*$ tem-se que $l^* = j^{*-1} \circ \tilde{l}^* \circ i^*$, donde l^* é isomorfismo.

Note que[1] q tem grau 2, pois se

$$\begin{aligned} D_1 &= \{(x_1, \ldots, x_n) \in S^{n-1}, x_1 \geq 0\} \text{ e} \\ D_2 &= \{(x_1, \ldots, x_n) \in S^{n-1}, x_1 \leq 0\} \end{aligned}$$

são dois hemisférios de S^{n-1} então

$$q^*(S^{n-1}) = q^*(D_1 \cup D_2) = 2q^*(D_1),$$

(pois $q^*(D_1) = q^*(D_2)$) e como S^{n-1} é gerador de $H^{n-1}(S^{n-1})$ e $q^*(D_1)$ é gerador de $H^{n-1}(P^{n-1})$, segue que q tem grau 2. Pelo acima, l^* é isomorfismo e portanto l tem grau ± 1 (na verdade, pode-se provar que o grau de l é exatamente 1, mas isso não é necessário para o que se segue). Portanto, $f_2 = l \circ q$ tem grau ± 2. □

[1] Aqui entra o fato de n ser par: como $n-1$ é ímpar, tem-se que $H^{n-1}(P^{n-1}) \simeq \mathbb{Z}$, por [7, p. 252]; assim, faz sentido considerar o *grau* de q, a menos de sinal. De fato, escolha geradores a e b para $H^{n-1}(P^{n-1})$ e $H^{n-1}(S^{n-1})$. O grau de q será o inteiro d tal que $q^*(a) = db$.

Para finalizar a demonstração do teorema 6.7, sejam m inteiro e $\lambda : S^{n-1} \to S^{n-1}$ de grau m.

Considere $g = f \circ (1 \times \lambda) : S^{n-1} \times S^{n-1} \to S^{n-1}$ em que f é a aplicação do lema acima. Então g tem bigrau $(2m, -1)$ e assim $h(C(g)) = 2m$. Como m é arbitrário, conseguimos aplicação com invariante de Hopf igual a qualquer número par. □

Teorema 6.10 ([19, Lema 2, p. 280]). *Existe homomorfismo $H : \pi_{2n-1}(S^n) \to \mathbb{Z}$ tal que $H[f] = h(f)$ (a menos de sinal).*

O seguinte resultado será fundamental para a prova do teorema 12.4.

Proposição 6.11. *Seja $\iota : S^n \to S^n$ a identidade, com n par. Denote também por ι sua classe de homotopia em $\pi_n(S^n)$. Então $h[\iota, \iota] \neq 0$.*

Demonstração. Note inicialmente que

$$[\iota, \iota] \in [\Sigma(S^{n-1} \wedge S^{n-1}), S^n] \simeq [\Sigma(S^{2n-2}), S^n] \simeq [S^{2n-1}, S^n] = \pi_{2n-1}(S^n).$$

Seja $H : \pi_{2n-1}(S^n) \to \mathbb{Z}$ o homomorfismo do teorema anterior. Por [20, Corolário 2, p. 498], tem-se que $\pi_{2n-1}(S^n) \simeq \mathbb{Z} \oplus G$, em que G é um grupo finito com elemento neutro e. Identifique $\pi_{2n-1}(S^n)$ e $\mathbb{Z} \oplus G$. Denote os elementos de $\mathbb{Z} \oplus G$ por (z, g), em que $z \in \mathbb{Z}$ e $g \in G$; a operação em G é denotada como soma e $(z_1, g_1) \oplus (z_2, g_2) = (z_1 + z_2, g_1 + g_2)$. Tem-se que $H(0, g) = 0$ para todo $g \in G$, pois se g tem ordem k, segue que $0 = H(0, e) = H(0, kg) = kH(0, g)$. Se tivéssemos que $H(1, e) = 0$, então $H(z, g) = H(z, e) + H(0, g) = zH(1, e) = 0$, o que é absurdo, pois H não é o homomorfismo trivial (afinal há aplicação $f : S^{2n-1} \to S^n$ com invariante de Hopf 2). Logo, $H(1, e) \neq 0$. Por [5, p. 2], o produto de Whitehead $[\iota, \iota] \in \pi_{2n-1}(S^n)$ tem ordem infinita, e daí necessariamente é da forma (z, g) com $z \neq 0$. Portanto

$$H[\iota, \iota] = H(z, g) = H(z, e) + H(0, g) = zH(1, e) \neq 0.$$ □

3 Grupo de Gottlieb

Neste capítulo, estudaremos detalhadamente uma boa parte do artigo [6], no qual Gottlieb define um certo subgrupo do grupo fundamental, demonstra a validade de algumas propriedades e o calcula para alguns espaços, como os espaços projetivos, o espaço lenticular, os H-espaços e espaços ditos *aspherical*.

7 Definições e propriedades

A menos que dito o contrário, X sempre denotará um CW-complexo conexo por caminhos.

Definição 7.1. Seja W um espaço topológico com ponto base w_0. Uma homotopia $H : W \times I \to W$ é dita ser uma *homotopia cíclica* se $H(w, 0) = w = H(w, 1)$, para todo $w \in W$. Chamaremos o laço $\sigma(t) = H(w_0, t)$ de *traço* da homotopia cíclica.

Teorema 7.2. *Se $\alpha : I \to X$ é o traço de uma homotopia cíclica e $\beta : I \to X$ é um laço homotópico a α* (rel. $\{0, 1\}$), *então β também é o traço de uma homotopia cíclica.*

Demonstração. Seja $H : X \times I \to X$ uma homotopia cíclica cujo traço é α. Sejam $L = (X \times \{0, 1\}) \cup (\{x_0\} \times I)$ subcomplexo de $X \times I$ e $k : I \times I \to X$ uma homotopia tal que $k_0 = \alpha$ e $k_1 = \beta$. Defina a homotopia parcial $F : L \times I \to X$ dada por $F_s(x, 0) = x = F_s(x, 1)$ para todo $x \in X$ e $F_s(x_0, t) = k_s(t)$, para todo $t, s \in I$.

Como L é subcomplexo de $X \times I$, a propriedade de extensão de homotopia nos dá que existe homotopia $K : X \times I \times I \to X$ tal que $K_0(x, t) = H(x, t)$ e $K_s|L = F_s$. Daí,

$$K_1(x_0, t) = F_1(x_0, t) = k_1(t) = \beta(t)$$

e também

$$K_1(x, 0) = F_1(x, 0) = x = F_1(x, 1) = K_1(x, 1),$$

donde K_1 é uma homotopia cíclica cujo traço é β. □

Definição 7.3. Denote por $G(X, x_0)$ o seguinte subconjunto de $\pi_1(X, x_0)$:

$$\big\{[\alpha] \in \pi_1(X, x_0); \alpha \text{ é traço de uma homotopia cíclica}\big\}.$$

Tal subconjunto é chamado de *subgrupo de Gottlieb*, devido ao seguinte teorema:

Teorema 7.4. *$G(X, x_0)$ é um subgrupo de $\pi_1(X, x_0)$.*

Demonstração. Se $e : I \to X$ é o laço constante, então a aplicação $J : X \times I \to X$ dada por $J(x,t) = x$ é uma homotopia cíclica cujo traço é e.

Sejam $[\alpha], [\beta] \in G(X, x_0)$. Então existem homotopias cíclicas $F, G : X \times I \to X$ cujos traços são α e β, respectivamente. Defina $H : X \times I \to X$ por

$$H_s(x) = \begin{cases} F_{2s}(x), & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ G_{2s-1}(x), & \frac{1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Daí, H é uma homotopia cíclica cujo traço é $\alpha * \beta$, donde $[\alpha * \beta] = [\alpha] \cdot [\beta] \in G(X, x_0)$.

É possível também definir $J : X \times I \to X$ homotopia cíclica dada por $J_s(x) = F_{1-s}(x)$, cujo traço é α^{-1}, o laço inverso de α, donde $[\alpha^{-1}] = [\alpha]^{-1} \in G(X, x_0)$. $\square$

É comum encontrar na literatura o termo *espaço de Gottlieb* ou *G-espaço* para um espaço X tal que $G(X, x_0) = \pi_1(X, x_0)$.

Observação 7.5. Em um espaço topológico W conexo por caminhos, o grupo fundamental não depende do ponto base, no sentido de que pontos bases distintos nos dão grupos fundamentais isomorfos. A demonstração é a seguinte: se $w_0, w_1 \in W$ são dois pontos, podemos tomar $\sigma : I \to W$ caminho em W tal que $\sigma(0) = w_0$ e $\sigma(1) = w_1$. Defina a função $\sigma_* : \pi_1(W, w_1) \to \pi_1(W, w_0)$ por $\sigma_*[\alpha] = [\sigma * \alpha * \sigma^{-1}]$. Tal função é na verdade um isomorfismo:

1. se $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(W, w_1)$, então

$$\sigma_*([\alpha] \cdot [\beta]) = \sigma_*[\alpha * \beta] = [\sigma * (\alpha * \beta) * \sigma^{-1}] =$$
$$[\sigma * \alpha * (\sigma^{-1} * \sigma) * \beta * \sigma^{-1}] = [\sigma * \alpha * \sigma^{-1}] \cdot [\sigma * \beta * \sigma^{-1}] = \sigma_*[\alpha] \cdot \sigma_*[\beta],$$

   já que $\sigma^{-1} * \sigma \simeq e_{w_1}$, laço constante em w_1;

2. Pela mesma razão do item acima, $(\sigma^{-1})_* : \pi_1(W, w_0) \to \pi_1(W, w_1)$ é homomorfismo, e, dados $[\alpha] \in \pi_1(W, w_1)$, $[\beta] \in \pi_1(W, w_0)$, tem-se:

$$(\sigma^{-1})_* \circ \sigma_*[\alpha] = (\sigma^{-1})_*[\sigma * \alpha * \sigma^{-1}] = [\sigma^{-1} * (\sigma * \alpha * \sigma^{-1}) * \sigma] = [\alpha];$$
$$\sigma_* \circ (\sigma^{-1})_*[\beta] = \sigma_*[\sigma^{-1} * \beta * \sigma] = [\sigma * (\sigma^{-1} * \beta * \sigma) * \sigma^{-1}] = [\beta],$$

   o que prova que σ_* é um isomorfismo com inverso $\sigma_*^{-1} = (\sigma^{-1})_*$.

No caso em que W é um CW-complexo conexo por caminhos, o subgrupo de Gottlieb $G(W, w_0)$ também independe do ponto base. Mais precisamente:

Teorema 7.6. *Se $x_0, x_1 \in X$ e $\sigma : I \to X$ é um caminho tal que $\sigma(0) = x_0$ e $\sigma(1) = x_1$, então $\sigma_* : G(X, x_1) \to G(X, x_0)$ é isomorfismo, em que σ_* é definida como acima.*

Demonstração. Provemos primeiramente que $\sigma_*(G(X, x_1)) \subseteq G(X, x_0)$.

Sejam $[\alpha] \in G(X, x_1)$ e $H : X \times I \to X$ uma homotopia cíclica cujo traço é α. Considere $L = X \times \{0\} \cup \{x_0\} \times I$ e defina $f : L \to X$ por $f(x, 0) = x$ e $f(x_0, t) = \sigma(t)$ (note que está bem definida, pois $f(x_0, 0) = \sigma(0) = x_0$)).

A propriedade de extensão de homotopia do par $(X \times I, L)$ nos dá $J : X \times I \to X$ tal que $J(x, 0) = H(x, 0) = x$ e $J(x_0, t) = \sigma(t)$.

Defina $K : X \times I \to X$ por

$$K(x,t) = \begin{cases} J(x,3t), & 0 \le t \le \frac{1}{3}, \\ H(J(x,1), 3t-1), & \frac{1}{3} \le t \le \frac{2}{3}, \\ J(x, 3(1-t)), & \frac{2}{3} \le t \le 1. \end{cases}$$

Então $K(x,0) = J(x,0) = x = K(x,1)$ e $K(x_0,t) = (\sigma * \alpha * \sigma^{-1})(t)$, isto é, K é uma homotopia cíclica com traço $\sigma * \alpha * \sigma^{-1}$, e portanto $[\sigma * \alpha * \sigma^{-1}] = \sigma_*[\alpha] \in G(X,x_0)$.

O argumento usado acima prova que $\sigma_*^{-1}(G(X,x_0)) \subseteq G(X,x_1)$ e então, como σ_* é isomorfismo, $G(X,x_0) \subseteq \sigma_*(G(X,x_1))$. Assim, $\sigma_*(G(X,x_1)) = G(X,x_0)$. $\square$

Por causa disso, às vezes omitiremos o ponto base de $G(X,x_0)$ e escreveremos apenas $G(X)$.

Lema 7.7. *Seja $\sigma : (S^1, s_0) \to (X, x_0)$ um laço. Então $[\sigma] \in G(X,x_0)$ se, e somente se, existe $H : X \times S^1 \to X$ tal que $H(x,s_0) = 1_X(x) = x$ e $H(x_0,s) = \sigma(s)$.*

Demonstração. Suponha $[\sigma] \in G(X,x_0)$ e veja σ com domínio I. Então existe homotopia cíclica $F : X \times I \to X$ cujo traço é σ. A aplicação $H : X \times S^1 \to X$ definida por $H(x, e^{2\pi i t}) = F(x,t)$ satisfaz

$$H(x,s_0) = F(x,0) = 1_X(x) = x$$

e também

$$H(x_0, e^{2\pi i t}) = F(x_0,t) = \sigma(t) = \sigma(e^{2\pi i t}),$$

isto é, $H(x_0,s) = \sigma(s)$, para todo $s \in S^1$.

Reciprocamente, seja $H : X \times S^1 \to X$ tal que $H(x,s_0) = x$ e $H(x_0,s) = \sigma(s)$. Veja σ com domínio I. Defina $F : X \times I \to X$ por $F(x,t) = H(x, e^{2\pi i t})$, que é homotopia cíclica cujo traço é σ, e daí $[\sigma] \in G(X,x_0)$. $\square$

Lema 7.8. *Seja $\sigma : (S^1, s_0) \to (X, x_0)$. Então $[\sigma] \in G(X,x_0)$ se, e só se, a aplicação $f = \nabla \circ (1_X \vee \sigma) : X \vee S^1 \to X$ pode ser estendida para $X \times S^1$.*

Demonstração. Suponha $[\sigma] \in G(X,x_0)$. Então existe $H : X \times S^1 \to X$ cujo traço é σ. Tem-se que $H(x,s_0) = x = 1_X(x) = f(x,s_0)$ e $H(x_0,s) = \sigma(s) = f(x_0,s)$, isto é, H é uma extensão de f.

Por outro lado, se f possui extensão $F : X \times S^1 \to X$ então $F(x,s_0) = x$ e $F(x_0,s) = \sigma(s)$, isto é, F é uma homotopia cíclica cujo traço é σ, donde $[\sigma] \in G(X,x_0)$. $\square$

A caracterização acima deixa mais visível o modo de generalizar o conceito de subgrupo de Gottlieb: Varadarajan substituiu S^1 por um co-H-grupo arbitrário A em [22], como se verá na definição 9.1.

Teorema 7.9. *Seja $n \ge 1$. Todo caminho $\sigma : I \to X$ tal que $\sigma(0) = x_0$ e $\sigma(1) = x_1$ dá origem a um isomorfismo*

$$\sigma_n : \pi_n(X,x_1) \to \pi_n(X,x_0),$$

que depende somente de $[\sigma]$. Mais ainda: se σ é o laço constante em x_0, então σ_n é o isomorfismo identidade; e se $\sigma, \tau : I \to X$ são dois caminhos tais que $\sigma(1) = \tau(0)$, então $(\sigma * \tau)_n = \sigma_n \circ \tau_n$.

Demonstração. Seja $[f] \in \pi_n(X, x_1)$. Defina a aplicação $\phi : \partial I^n \times I \to X$ por $\phi_t(\partial I^n) = \{\sigma(1-t)\}$. Como ∂I^n é um subcomplexo de I^n e $f|_{\partial I^n} = \phi_0$, a propriedade de extensão de homotopia nos garante a existência de $f_t : I^n \to X$ $(t \in I)$ tal que $f_0 = f$ e $f_t(\partial I^n) = \{\sigma(1-t)\}$, $\forall t \in I$. Diz-se que f_t é uma *homotopia de f ao longo de σ*. Como $f_1(\partial I^n) = \{\sigma(0)\} = \{x_0\}$, segue que $[f_1] \in \pi_n(X, x_0)$. Defina $\sigma_n([f]) = [f_1]$. Intuitivamente, f_t deforma f fazendo com que $f(\partial I^n)$ seja arrastado ao longo do caminho σ. Façamos a prova por passos:

Passo 1. $\sigma_n[f]$ depende somente das classes $[f]$ e $[\sigma]$. Mais especificamente, se $[g] \in \pi_n(X, x_1)$ é tal que $[f] = [g]$ e $\tau : I \to X$ é um caminho tal que $\sigma \simeq \tau$ (rel. ∂I) então $\tau_n[g] = \sigma_n[f]$:

Defina as aplicações $F, G : I^n \times I \to X$ por $F(s,t) = f_t(s)$ e $G(s,t) = g_t(s)$, em que g_t é uma homotopia de g ao longo de τ. Seja $A = (I^n \times \{0\}) \cup (\partial I^n \times I)$ subcomplexo de $I^n \times I$.

Afirmação: as restrições $F|_A$ e $G|_A$ são homotópicas relativamente a $\partial I^n \times \{0\}$ e a $\partial I^n \times \{1\}$. De fato, basta notar que existem homotopias $H_t : I^n \to X$, entre f e g (relativamente a ∂I^n), e $J_t : I \to X$, entre σ e τ (relativamente a $\partial I = \{0,1\}$), e então definir $L_t : A \to X$ por

$$L_t(p,q) = \begin{cases} H_t(p), & q = 0, \\ J_t(q), & p \in \partial I^n, \end{cases}$$

que satisfaz, para todo $p \in I^n$,

$$L_0(p,0) = H_0(p) = f(p) = F(p,0),\ L_1(p,0) = H_1(p) = g(p) = G(p,0),$$

e também, se $p \in \partial I^n$ e $q \in I$,

$$L_0(p,q) = J_0(q) = \sigma(p) = F(p,q),\ L_1(p,q) = J_1(q) = \tau(q) = G(p,q).$$

Isto prova que L_t é uma homotopia entre $F|_A$ e $G|_A$. Finalmente, para todo $p \in \partial I^n$,

$$L_t(p,0) = J_t(0) = x_0 \text{ e } L_t(p,1) = J_t(1) = x_1$$

mostram que tal homotopia é relativa a $\partial I^n \times \{0\}$ e a $\partial I^n \times \{1\}$. Isto prova a afirmação.

Agora, como A é subcomplexo de $I^n \times I$ e $L_0 = F|_A$, a propriedade de extensão de homotopia nos dá $F_t : I^n \times I \to X$ tal que $F_0 = F$, $F_1|_A = G|_A$ e $F_t(\partial I^n \times \{1\}) = L_t(\partial I^n \times \{1\}) = \{x_0\}$, para todo $t \in I$.

Defina $h_t : I^n \to X$ $(t \in I)$ por $h_t(s) = F_1(s,t)$. Daí,

$$h_0(s) = F_1(s,0) = G(s,0) = g_0(s) = g(s)$$

e também

$$h_t(\partial I^n) = F_1(\partial I^n \times \{t\}) = G(\partial I^n \times \{t\}) = g_t\{\partial I^n\} = \{\tau(1-t)\},$$

isto é, h_t é uma homotopia de g ao longo de τ. Como $F_t(\partial I^n \times \{1\}) = \{x_0\}$, $\forall t \in I$, segue que $f_1 \simeq h_1$ relativamente a ∂I^n, afinal $F_0(s,1) = F(s,1) = f_1(s)$ e $F_1(s,1) = h_1(s)$.

Resta provar que $h_1 \simeq g_1$ relativamente a ∂I^n. Defina $M : I^n \times I \to X$ por

$$M(p,q) = \begin{cases} g_{1-2q}(p), & p \in I^n, 0 \leq q \leq \frac{1}{2}, \\ h_{2q-1}(p), & p \in I^n, \frac{1}{2} \leq q \leq 1. \end{cases}$$

Daí, para todo $p \in \partial I^n$ e $q \in [0, \frac{1}{2}]$, tem-se

$$M(p, q) = g_{1-2q}(p) \text{ e } M(p, 1-q) = h_{2(1-q)-1}(p) = h_{1-2q}(p)$$

e se $q \in [\frac{1}{2}, 1]$, tem-se

$$M(p, q) = h_{2q-1}(p) \text{ e } M(p, 1-q) = g_{1-2(1-q)}(p) = g_{2q-1}(p),$$

donde se conclui que $M(p, q) = M(p, 1-q)$, já que $h_t(p) = F_1(p, t) = G(p, t) = g_t(p)$.

Finalmente, defina $N_t : B \to X$, em que $B = \partial(I^n \times I) = (\partial I^n \times I) \cup (I^n \times \partial I)$, por

$$N_t(p, q) = \begin{cases} M(p, q), & p \in I^n, q \in \partial I, \\ M(p, q(1-t)), & p \in \partial I^n, 0 \le q \le \frac{1}{2}, \\ N_t(p, 1-q), & p \in \partial I^n, \frac{1}{2} \le q \le 1. \end{cases}$$

Como B é subcomplexo de $I^n \times I$ e $N_0 = M|_B$, a propriedade de extensão de homotopia nos dá $M_t : I^n \times I \to X$ tal que $M_0 = M$ e $M_t|_B = N_t$. Defina $k_q : I^n \to X$ por $k_q(p) = M_1(p, q)$. Então

$$\begin{aligned} k_0(p) &= M_1(p, 0) = N_1(p, 0) = M(p, 0) = g_1(p) \text{ e} \\ k_1(p) &= M_1(p, 1) = N_1(p, 1) = M(p, 1) = h_1(p), \end{aligned}$$

e também, para todo $p \in \partial I^n$, tem-se que

$$\begin{aligned} 0 \le q \le \frac{1}{2} \Rightarrow k_q(p) &= M_1(p, q) = N_1(p, q) = M(p, q(1-1)) \\ &= M(p, 0) = g_1(p) = \tau(0) = x_0; \\ \frac{1}{2} \le q \le 1 \Rightarrow k_q(p) &= N_1(p, q) = N_1(p, 1-q) = M(p, (1-q)(1-1)) \\ &= M(p, 0) = g_1(p) = \tau(0) = x_0, \end{aligned}$$

isto é, $g_1 \simeq h_1$ (rel. ∂I^n). Isto conclui que $f_1 \simeq g_1$ (rel. ∂I^n).

Passo 2. Se $\sigma : I \to X$ é o laço constante em x_0 então a função $\sigma_n : \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(X, x_0)$ é o automorfismo identidade, para todo n.

Basta notar que dado $[f] \in \pi_n(X, x_0)$, a aplicação $f_t : I^n \to X$ definida por $f_t(x) = f(x)$ é uma homotopia de f ao longo de σ satisfazendo $f_1 = f$, donde $\sigma_n[f] = [f_1] = [f]$.

Passo 3. Se $\sigma, \tau : I \to X$ são dois caminhos tais que $\sigma(1) = \tau(0)$ então $(\sigma * \tau)_n = \sigma_n \circ \tau_n$.

Sejam $[f] \in \pi_n(X, x_0)$ e $f_t : I^n \to X$ uma homotopia de f ao longo de τ. Chame $g = f_1$ e considere $g_t : I^n \to X$ homotopia de g ao longo de σ. Defina $h_t : I^n \to X$ por

$$h_t(s) = \begin{cases} f_{2t}(s), & 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ g_{2t-1}(s), & \frac{1}{2} \le t \le 1. \end{cases}$$

Então

$$h_t(\partial I^n) = \begin{cases} f_{2t}(\partial I^n) = \{\tau(1-2t)\}, & 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ g_{2t-1}(\partial I^n) = \{\sigma(2(1-t))\}, & \frac{1}{2} \le t \le 1, \end{cases}$$

e daí h_t é uma homotopia de f ao longo de $\sigma * \tau$. Como $h_1 = g_1$ e $[g_1] = \sigma_n \circ \tau_n[f]$, segue que $[h_1] = (\sigma * \tau)_n[f] = \sigma_n \circ \tau_n[f]$.

Passo 4. σ_n é homomorfismo. Sejam $[f], [g] \in \pi_n(X, x_1)$ e $f_t, g_t : I^n \to X$ homotopias de f e g ao longo de σ, respectivamente. Defina $h_t : I^n \to X$ por $h_t = f_t + g_t$. Tem-se que $[h_0] = [f_0 + g_0] = [f_0] + [g_0] = [f] + [g]$ e $[h_1] = [f_1 + g_1] = [f_1] + [g_1] = \sigma_n[f] + \sigma_n[g]$. Também, h_t é homotopia de $f + g$ ao longo de σ (afinal, se $s = (s_1, \ldots, s_n) \in \partial I^n$, então $(2s_1, s_2, \ldots, s_n) \in \partial I^n$, caso $0 \leq s_1 \leq \frac{1}{2}$, e $(2s_1 - 1, s_2, \ldots, s_n) \in \partial I^n$, caso $\frac{1}{2} \leq s_1 \leq 1$, donde $h_t(\partial I^n) = f_t(\partial I^n) = g_t(\partial I^n) = \{\sigma(1-t)\}$).

Portanto $\sigma_n([f] + [g]) = \sigma_n[f + g] = [h_1] = \sigma_n[f] + \sigma_n[g]$.

Passo 5. σ_n é bijeção. Se τ é o laço inverso de σ, temos que, para toda $[f] \in \pi_n(X, x_1)$, vale que

$$\sigma_n \circ \tau_n[f] = (\sigma * \tau)_n[f] = 1[f] = [f],$$

já que $[\sigma * \tau]$ é a classe do laço constante, e assim σ_n é sobrejetora. Um argumento simétrico mostra que σ_n é também injetora. Os passos acima concluem a demonstração do teorema 7.9. $\square$

Definição 7.10. Dizemos que o grupo $(H, \cdot)$ *age como um grupo de operadores no grupo* $(G, +)$ se, para todos $h \in H$ e $g \in G$, tivermos definido $h(g) \in G$ tal que

$$h(g_1 + g_2) = h(g_1) + h(g_2), \quad h_2(h_1(g)) = (h_2 \cdot h_1)(g), \quad 1_H(g) = g,$$

para todos $h_1, h_2 \in H$ e $g_1, g_2 \in G$, em que $1_H \in H$ é o elemento identidade da operação de H.

Se $h(g) = g$ para todo $g \in G$, dizemos que h *age trivialmente em* G.

Se para cada $h \in H$ o homomorfismo $\phi_h : G \to G$ dado por $\phi_h(g) = h(g)$ for isomorfismo, então diz-se que H *age em* G *como um grupo de automorfismos*.

Corolário 7.11. *Para todo $n \geq 1$ natural, o grupo $\pi_1(X, x_0)$ age em $\pi_n(X, x_0)$ como um grupo de automorfismos.*

Teorema 7.12. *Com a notação do teorema anterior, a ação acima de $\pi_1(X, x_0)$ em $\pi_1(X, x_0)$ é a conjugação, isto é, dados $[\alpha], [f] \in \pi_1(X, x_0)$, tem-se $\alpha_1[f] = [\alpha] \cdot [f] \cdot [\alpha]^{-1}$.*

Demonstração. Sejam $[\alpha], [f] \in \pi_1(X, x_0)$. Defina $f_t : I \to X$ por

$$f_t(s) = \begin{cases} \alpha(3s + (1-t)), & 0 \leq s \leq \frac{t}{3}, \\ f\left((s - \frac{t}{3})(\frac{3}{3-2t})\right), & \frac{t}{3} \leq s \leq 1 - \frac{t}{3}, \\ \alpha(3(1-s) + (1-t)), & 1 - \frac{t}{3} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Intuitivamente, dado $t \in I$, f_t é um laço começando em $\alpha(1-t)$ que percorre de $\alpha(1-t)$ até $\alpha(1) = x_0$ conforme s varia de 0 a $\frac{t}{3}$, depois percorre todo o laço f quando s varia de $\frac{t}{3}$ a $1 - \frac{t}{3}$ e volta a percorrer de x_0 a $\alpha(1-t)$ conforme s varia de $1 - \frac{t}{3}$ a 1.

Note que $f_0(s) = f(s)$ e $f_t(0) = \alpha(1-t) = f_t(1)$, donde f_t é uma homotopia de f ao longo de α, com $f_1 = \alpha * f * \alpha^{-1}$, isto é,

$$\alpha_1[f] = [\alpha * f * \alpha^{-1}] = [\alpha] \cdot [f] \cdot [\alpha]^{-1}.$$ $\square$

Proposição 7.13. *Seja $n \geq 1$ inteiro. O subconjunto de $\pi_1(X, x_0)$ formado pelos elementos que agem trivialmente em $\pi_n(X, x_0)$ é um subgrupo de $\pi_1(X, x_0)$.*

Demonstração. Se $e : S^1 \to X$ é o laço constante em x_0, então, pelo teorema 7.9, e_n é o automorfismo identidade, e então e age trivialmente em $\pi_n(X, x_0)$.

Se $[a], [b] \in \pi_1(X, x_0)$ agem trivialmente em $\pi_n(X, x_0)$, então, dado $[f] \in \pi_n(X, x_0)$ qualquer, tem-se

$$(a * b)_n[f] = a_n(b_n[f]) = a_n[f] = [f]$$

e também

$$[f] = e_n[f] = (a^{-1} * a)_n = a_n^{-1}(a_n[f]) = a_n^{-1}[f],$$

isto é, tanto $[a * b] = [a] \cdot [b]$ quanto $[a^{-1}] = [a]^{-1}$ agem trivialmente em $\pi_n(X, x_0)$. □

Definição 7.14. Definimos

$$P(X, x_0) = \{[\alpha] \in \pi_1(X, x_0); [\alpha] \text{ age trivialmente em } \pi_i(X, x_0), \forall i \geq 1\}.$$

Tal subconjunto é na verdade um subgrupo, por ser interseção dos subgrupos de $\pi_1(X, x_0)$ formados pelos elementos que agem trivialmente em $\pi_i(X, x_0)$, para cada $i \geq 1$.

Lema 7.15. *Sejam $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$ e $n \geq 1$ inteiro. Então: $[\alpha]$ age trivialmente em $\pi_n(X, x_0)$ (isto é: $\alpha_n : \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(X, x_0)$ é o automorfismo identidade) se, e somente se, toda aplicação $f : S^n \to X$ admitir extensão $F : S^n \times S^1 \to X$ tal que $F|_{S^1} = \alpha$.*

Demonstração. Suponha que $[\alpha]$ aja trivialmente em $\pi_n(X, x_0)$. Então $[\alpha]^{-1}$ também age trivialmente em $\pi_n(X, x_0)$.

Seja $[f] \in \pi_n(X, x_0)$ qualquer. Denote o laço α visto agora com domínio I pela mesma letra α (ou seja, $\alpha(t) = \alpha(e^{2\pi i t})$), o mesmo valendo para α^{-1}. A propriedade de extensão de homotopia nos dá $f_t : S^n \to X$ $(t \in I)$, tal que $f_0 = f$ e $f_t(s_0) = \alpha^{-1}(1-t)$.

Por definição, $[f_1] = \alpha_n^{-1}[f]$, e, por hipótese, $\alpha_n^{-1}[f] = [f]$. Assim, existe homotopia $h_t : S^n \to X$ tal que $h_0 = f_1$, $h_1 = f$ e $h_t(s_0) = x_0$, $\forall t \in I$.

Seja $L = S^n \times \{0, 1\} \cup \{s_0\} \times I$. Definindo $G : S^n \times I \to X$ por $G(s, t) = f_t(s)$ e $H_t : L \to X$ por

$$H_t(s, p) = \begin{cases} f(s), & p = 0, \\ \alpha(p), & s = s_0 \\ h_t(s), & p = 1 \end{cases}$$

obtemos que $G|_L = H_0$.

A propriedade de extensão de homotopia nos dá $K_t : S^n \times I \to X$ tal que $K_0 = G$ e $K_t|_L = H_t$. Logo,

$$K_1(s, 0) = H_1(s, 0) = f(s) = h_1(s) = K_1(s, 1)$$

e

$$K_1(s_0, t) = H_1(s_0, t) = \alpha(t).$$

Defina $F : S^n \times S^1 \to X$ por $F(s, e^{2\pi i t}) = K_1(s, t)$. Segue que $F(s, s_0) = f(s)$ e $F(s_0, e^{2\pi i t}) = \alpha(t)$, o que prova que F é uma extensão de f tal que $F|_{S^1} = \alpha$, como queríamos.

Reciprocamente, seja $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$ tal que, para uma classe $[f] \in \pi_n(X, x_0)$ qualquer, existe $F : S^n \times S^1 \to X$ satisfazendo $F|_{S^n} = f$ e $F|_{S^1} = \alpha$. Se α é visto como um laço com domínio I, defina $G : S^n \times I \to X$ por $G(s,t) = F(s, e^{2\pi i t})$, que satisfaz $G(s,0) = f(s)$ e $G(s_0,t) = \alpha(t) = \alpha^{-1}(1-t)$.

Por definição, se $G_t : S^n \to X$ é dada por $G_t(s) = G(s,t)$, então G_1 é uma homotopia de f ao longo de α^{-1}, e daí, como $G_1 = f$, segue que $[f] = [G_1] = \alpha_n^{-1}[f]$. Como $[f]$ é arbitrário, segue que α_n^{-1} é o automorfismo identidade, donde α_n também o é, e então $[\alpha]$ age trivialmente no grupo $\pi_n(X, x_0)$. $\square$

Teorema 7.16. *Tem-se $G(X, x_0) \subseteq P(X, x_0)$.*

Demonstração. Seja $[\alpha] \in G(X, x_0)$. Pelo lema 7.7, existe $H : X \times S^1 \to X$ tal que $H(x, s_0) = 1_X(x) = x$ e $H(x_0, s) = \alpha(s)$. Seja $f : (S^n, s_0) \to (X, x_0)$ qualquer.

$$\begin{tikzcd} S^n \times S^1 \arrow[r, dashed, "F"] \arrow[d, "f\times 1"'] & X \\ X \times S^1 \arrow[ur, "H"'] & \end{tikzcd}$$

Defina $F : S^n \times S^1 \to X$ por $F(s,t) = H(f(s), t)$. Então $F(s, s_0) = H(f(s), s_0) = f(s)$ e $F(s_0, t) = H(f(s_0), t) = \alpha(t)$. Pelo lema anterior, $[\alpha] \in P(X, x_0)$. $\square$

Corolário 7.17. *Tem-se $G(X, x_0) \subseteq P(X, x_0) \subseteq Z(\pi_1(X, x_0))$, em que $Z(\pi_1(X, x_0))$ é o centro do grupo $\pi_1(X, x_0)$.*

Demonstração. A primeira inclusão vem do teorema anterior.

Os elementos $[\alpha]$ de $P(X, x_0)$ agem trivialmente em $\pi_n(X, x_0)$, para todo $n \geq 1$ inteiro; em particular, agem trivialmente em $\pi_1(X, x_0)$. Pelo teorema 7.12, a ação de $\pi_1(X, x_0)$ em si mesmo é a conjugação. Assim, se $[\alpha] \in P(X, x_0)$, então para todo $[f] \in \pi_1(X, x_0)$ tem-se $[f] = \alpha_1[f] = [\alpha] \cdot [f] \cdot [\alpha]^{-1}$, isto é, $[f] \cdot [\alpha] = [\alpha] \cdot [f]$, donde $[\alpha] \in Z(\pi_1(X, x_0))$. $\square$

Corolário 7.18. *Se T é um poliedro 1-dimensional que não é homotopicamente equivalente a um círculo, então $G(T) = \{1\}$.*

Demonstração. Se T é contrátil, então $G(T) \subseteq \pi_1(T) = \{1\}$.

Caso contrário, por [13, p. 34–35], T é homotopicamente equivalente ao *wedge* de n círculos (em que possivelmente se tem $n = \infty$).

O caso $n = 1$ foi excluído por hipótese.

Se $n \geq 3$ ou $n = \infty$, o primeiro teorema de [17] garante que $Z(\pi_1(T)) = \{1\}$, donde $G(T) = \{1\}$.

Finalmente, se $n = 2$, então $\pi_1(T) \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$, o produto livre de $\mathbb{Z}$ (para mais detalhes sobre esse grupo, ver os comentários mais gerais na demonstração do teorema 7.33 adiante). Denote por a e b os geradores de $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$. Seus elementos são da forma $g_1 g_2 \ldots g_m$ em que $g_i = a^{\alpha_i}$ ou $g_i = b^{\alpha_i}$. Provemos que $Z(\pi_1(T)) = \{1\}$. Se $x = a^{\alpha_1} b^{\beta_1} \ldots a^{\alpha_m} b^{\beta_m} \in Z(\pi_1(T))$, então

$$\begin{aligned} axa^{-1} = x &\Rightarrow a a^{\alpha_1} b^{\beta_1} \ldots a^{\alpha_m} b^{\beta_m} a^{-1} = a^{\alpha_1} b^{\beta_1} \ldots a^{\alpha_m} b^{\beta_m} \\ &\Rightarrow a b^{\beta_1} \ldots a^{\alpha_m} b^{\beta_m} a^{-1} = b^{\beta_1} \ldots a^{\alpha_m} b^{\beta_m} \Rightarrow \beta_1 = 0; \end{aligned}$$

e então $x = a^{\alpha_1 + \alpha_2} b^{\beta_2} \ldots a^{\alpha_m} b^{\beta_m}$; aplicando o argumento acima várias vezes, conseguimos provar que $\beta_i = 0$, para todo i. Portanto, $x = a^r$ para r inteiro, mas $a^r b = b a^r \Rightarrow r = 0$. Assim, x é a palavra nula, isto é, o elemento identidade de $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.

As outras possibilidades para x são: $a^{\alpha_1}b^{\beta_1}\dots a^{\alpha_m}$, $b^{\beta_1}a^{\alpha_1}\dots a^{\alpha_m}b^{\beta_m}$ e $b^{\beta_1}a^{\alpha_1}\dots a^{\alpha_m}$, e para todas elas o argumento anterior (às vezes fazendo $bxb^{-1} = x$) nos dá que $x = 0$. Logo, o centro de $\pi_1(T)$ é trivial. □

Corolário 7.19. *Seja P^n o espaço projetivo de dimensão n. Então $G(P^{2n}) = \{1\}$, para todo $n > 0$ inteiro.*

Demonstração. Sejam $1_S : S^{2n} \to S^{2n}$ a identidade e $f : S^{2n} \to S^{2n}$ a aplicação antipodal, dada por

$$f(x_0, \dots, x_{2n}) = (-x_0, \dots, -x_{2n}).$$

O espaço projetivo P^{2n} é o quociente $S^{2n}/\{1_S, f\}$. Portanto $\pi_1(P^{2n}) \simeq \{1_S, f\} \simeq \mathbb{Z}_2$, por 4.10.

Considere o diagrama do teorema 4.14 com $X = S^{2n} = \tilde{Y}$, $Y = P^{2n}$ e $[\alpha] \in \pi_1(P^{2n})$ gerador:

$$\begin{tikzcd}
\pi_{2n}(P^{2n}) \arrow[d, "\alpha_{2n}"'] & \pi_{2n}(S^{2n}) \arrow[l, "p_*"'] \arrow[r, "F"] & {[S^{2n}, S^{2n}]} \arrow[d, "D_*"] \\
\pi_{2n}(P^{2n}) & \pi_{2n}(S^{2n}) \arrow[l, "p_*"'] \arrow[r, "F"] & {[S^{2n}, S^{2n}],}
\end{tikzcd}$$

em que α_{2n} é a ação de $\pi_{2n}(P^{2n})$ em $\pi_{2n}(P^{2n})$ dada em 7.9, $D_*[f] = [D \circ f]$, e $D = \phi[\alpha]$, sendo $\phi : \pi_1(P^{2n}) \to \Delta(p) = \{1, f\}$ o isomorfismo de 4.4. Note que $D = f$, pois $[\alpha]$ e f são geradores.

Suponha que a ação α_{2n} seja trivial. Sabe-se que (vide [8, p. 361]) a classe da aplicação identidade 1_S gera $\pi_{2n}(S^{2n}) \simeq \mathbb{Z}$. Como p_* é isomorfismo (por 4.5), deve mandar gerador em gerador, e então

$$p_*[1_S] = [p \circ 1_S] = [p] = [\alpha].$$

Pela comutatividade do diagrama,

$$F \circ D[1_S] = F \circ p_*^{-1} \circ \alpha_{2n} \circ p_*[1_S] = F \circ p_*^{-1} \circ \alpha_{2n}[p] = F \circ p_*^{-1}[p] = [1_S].$$

Mas $F \circ D_*[1_S] = [D \circ 1_S] = [D]$ é a classe de homotopia livre da aplicação antipodal f. Sendo assim, devemos ter que f e 1_S são livremente homotópicas.

O corolário 3.10 de [9, p. 163] nos diz que se f é homotópica a $1_S : S^{2n} \to S^{2n}$, então f necessariamente possui um ponto fixo (i.e., um ponto tal que $f(x) = x$). Mas esse não é o caso da aplicação antipodal f. Essa contradição prova que α_{2n} não é a ação trivial. Portanto, $[\alpha] \notin P(P^{2n})$, e então $\alpha \notin G(P^{2n})$, pelo teorema anterior. Como $\pi_1(P^{2n}) = \{[\alpha], 1\}$, deve-se ter então que $G(P^{2n}) = \{1\}$. □

Corolário 7.20. *Se M é uma superfície fechada (isto é, uma variedade compacta e sem bordo, de dimensão 2) que não é homeomorfa ao toro e nem à garrafa de Klein, então $G(M) = \{1\}$.*

Demonstração. O teorema de classificação de superfícies fechadas (como em [14, p. 10]) afirma que toda superfície fechada é homeomorfa a uma esfera, a uma soma conexa de toros ou a uma soma conexa de planos projetivos (para detalhes sobre a soma conexa de duas variedades, ver [14, p. 8–9]).

Se M é homeomorfa à esfera S^2, então $G(M) = \{1\} = \pi_1(S^2)$.

Suponha agora que M não é homeomorfa a S^2. Vamos provar que $\pi_1(M)$ é um grupo livre gerado por 3 ou mais elementos e com só uma relação; assim decorrerá diretamente de [17, Teorema 1, p. 246] que $Z(\pi_1(M)) = \{1\}$, e então $G(M) = \{1\}$.

O toro e a garrafa de Klein têm característica de Euler 0; além disso, duas superfícies fechadas são homeomorfas se, e somente se, tem mesma característica de Euler e ambas são orientáveis (ou ambas são não-orientáveis), conforme [14, p. 33]. Portanto, a característica de Euler $\chi(M)$ de M é diferente de 0. As duas possibilidades são:

- M é orientável: neste caso, M é a soma conexa de n toros, com $n \geq 2$ (o caso $n = 1$ foi excluído por hipótese), e então $\chi(M) = 2 - 2n$. Por [14, p. 131–132], $\pi_1(M)$ é um grupo gerado por $2n \geq 4$ elementos e com uma só relação.

- M é não-orientável: M é uma soma conexa de n planos projetivos, e sua característica de Euler $\chi(M)$ é $2 - n$. Se M é homeomorfa ao plano projetivo, o corolário anterior nos dá que $G(M) = \{1\}$. Caso contrário, como $\chi(M) = 2 - n \neq 0, 1$, então $n \geq 3$, e daí [14, p. 132–133] nos garante que $\pi_1(M)$ é um grupo gerado por n elementos e com uma única relação. Isto encerra a demonstração. □

Teorema 7.21. *Se X é um H-espaço, então $G(X, e) = \pi_1(X, e)$.*

Demonstração. Por definição, existem $m : X \times X \to X$ e $e \in X$ tais que $m \circ i \simeq 1_X \simeq m \circ j$, em que $i, j : X \to X \times X$ são as inclusões dadas por $i(x) = (x, e)$ e $j(x) = (e, x)$. Sejam $F, G : X \times I \to X$ homotopias tais que $F_0(x) = m \circ i(x) = m(x, e)$, $G_0(x) = m \circ j(x) = m(e, x)$ e $F_1(x) = G_1(x) = 1_X(x) = x$.

Defina $H : (X \vee X) \times I \to X$ por $H_s(x, e) = F_s(x)$ e $H_s(e, x) = G_s(x)$. Como $m|_{X \vee X} = H_0$ e $X \vee X$ é um subcomplexo de $X \times X$, a propriedade de extensão de homotopia nos dá que existe $J : X \times X \times I \to X$ tal que $J_0 = m$ e $J_s|_{X \vee X} = H_s$. Chame $M = J_1 : X \times X \to X$. Então

$$M \circ i \simeq m \circ i \simeq 1_X \simeq m \circ j \simeq M \circ j,$$

já que $m \simeq M$. Em resumo: conseguimos uma multiplicação M em X tal que M satisfaz a igualdade $M(x, e) = M(e, x) = x$, para todo $x \in X$. Denotemos $M(x, y)$ por $x \cdot y$.

Seja então $[\sigma] \in \pi_1(X, e)$ qualquer. Defina $K : X \times I \to X$ por $J(x, s) = x \cdot \sigma(s)$.

$$\begin{tikzcd}
X \times I \arrow[d, "1\times\sigma"'] \arrow[dr, "K"] & \\
X \times X \arrow[r, "M"'] & X
\end{tikzcd}$$

Daí,

$$K(x, 0) = x \cdot \sigma(0) = x \cdot e = x \quad \text{e} \quad K(e, t) = e \cdot \sigma(t) = \sigma(t).$$

Logo, K é homotopia cíclica cujo traço é σ, e então $[\sigma] \in G(X, e)$. □

Teorema 7.22. *Se X e Y são H-espaços, então $X \times Y$ é um H-espaço.*

Demonstração. Como visto na demonstração do teorema anterior, podemos supor que existem $m : X \times X \to X$ e $n : Y \times Y \to Y$ tais que $m(x, x_0) = m(x_0, x) = x$ e $n(y, y_0) = n(y_0, y) = y$. Defina $M : X \times Y \times X \times Y \to X \times Y$ por

$$M(x_1, y_1, x_2, y_2) = (m(x_1, x_2), n(y_1, y_2))$$

para todos $x_1, x_2 \in X$ e $y_1, y_2 \in Y$. Então

$$M(x, y, x_0, y_0) = (m(x, x_0), n(y, y_0)) = (x, y),$$

assim como $M(x_0, y_0, x, y) = (m(x_0, x), n(y_0, y)) = (x, y)$, e então M é um produto para $X \times Y$. $\square$

Usando indução e o resultado acima, temos que se $X_1, \dots, X_n$ são H-espaços, então também o é $X_1 \times \cdots \times X_n$. Os teoremas 7.21 e 7.22 nos dão o seguinte:

Corolário 7.23. *Se T é o toro, então $G(T) = \pi_1(T)$. Mais geralmente, se T^n é o n-toro definido pelo produto $S^1 \times \cdots \times S^1$ de n círculos S^1, então $G(T^n) = \pi_1(T^n)$.*

Demonstração. Basta notar que $S^1 \subset \mathbb{C}$ é um H-espaço com o produto de números complexos. $\square$

Observação 7.24. Toda aplicação $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ induz um homomorfismo $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ (dado por $f_*[\alpha] = [f \circ \alpha]$). O mesmo não é válido para $G(X, x_0)$, isto é, nem sempre se tem $f_*(G(X, x_0)) \subseteq G(Y, y_0)$, como mostra o seguinte exemplo:

Sejam $(X, x_0) = (S^1, s_0)$ e $(Y, y_0) = (S^1 \vee S^1, (s_0, s_0))$. Seja $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ a aplicação dada por $f(x) = (x, x_0)$. Se $[\alpha]$ é um gerador de $\pi_1(X, x_0)$, então $f_*[\alpha] = [f \circ \alpha] \neq e$ elemento neutro de $\pi_1(Y, y_0)$, já que $[f \circ \alpha]$ é um dos geradores do grupo fundamental de (Y, y_0), e $\{e\} = G(Y, y_0)$, por 7.18.

Como escreve Gottlieb, *"all is not lost"*, pois sob algumas condições vale que $f_*(G(X, x_0)) \subseteq G(Y, y_0)$, como nos dois teoremas seguintes:

Teorema 7.25. *Seja $i : Y \hookrightarrow X$ inclusão. Se $r : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ é uma retração (isto é: $r \circ i = 1$), então $r_*(G(X, x_0)) \subseteq G(Y, y_0)$.*

Demonstração. Considere inicialmente $(X, i(y_0))$ e sejam $[\gamma] \in G(X, i(y_0))$ e $K : X \times S^1 \to X$ homotopia cíclica cujo traço é γ. Defina $H : Y \times S^1 \to Y$ por $H(y, s) = r \circ K(i(y), s)$, isto é, H é a composta

$$Y \times S^1 \xrightarrow{i \times 1} X \times S^1 \xrightarrow{K} X \xrightarrow{r} Y.$$

Tem-se que $H(y, s_0) = r \circ i(y) = y$ e $H(i(y_0), s) = r \circ \gamma(s)$, donde $[r \circ \gamma] = r_*[\gamma] \in G(Y, y_0)$.

Seja agora $\sigma : I \to X$ caminho tal que $\sigma(0) = i(y_0)$ e $\sigma(1) = x_0$. Então, como já foi visto, σ induz um isomorfismo $\sigma_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, i(y_0))$ dado por $\sigma_*[\alpha] = [\sigma * \alpha * \sigma^{-1}]$. Suponha agora que $[\alpha] \in G(X, x_0)$. Pelo teorema 7.6, $\sigma_*[\alpha] \in G(X, i(y_0))$, e então, pelo parágrafo acima, segue que $r_*(\sigma_*[\alpha]) \in G(Y, y_0)$. Note que

$$\begin{aligned} r_*(\sigma_*[\alpha]) = r_*[\sigma * \alpha * \sigma^{-1}] &= [(r \circ \sigma) * (r \circ \alpha) * (r \circ \sigma^{-1})] = \\ &[r \circ \sigma] \cdot [r \circ \alpha] \cdot [r \circ \sigma^{-1}] = [r \circ \sigma] \cdot [r \circ \alpha] \cdot [r \circ \sigma]^{-1}, \end{aligned}$$

já que

$$r \circ \sigma(0) = r \circ i(y_0) = y_0 = r \circ \sigma(1) \text{ e } r \circ \alpha(0) = r(x_0) = y_0 = r \circ \alpha(1),$$

isto é, que $[r \circ \sigma], [r \circ \alpha] \in \pi_1(Y, y_0)$.

Como $r_*(\sigma_*[\alpha]) \in G(Y, y_0) \subseteq Z(\pi_1(Y, y_0))$, segue finalmente que

$$\begin{aligned} G(Y, y_0) \ni r_*(\sigma_*[\alpha]) &= [r \circ \sigma]^{-1} \cdot r_*(\sigma_*[\alpha]) \cdot [r \circ \sigma] \\ &= [r \circ \sigma]^{-1} \cdot ([r \circ \sigma] \cdot [r \circ \alpha] \cdot [r \circ \sigma]^{-1}) \cdot [r \circ \sigma] \\ &= [r \circ \alpha] = r_*[\alpha], \end{aligned}$$

como queríamos. □

Teorema 7.26. *Se $f : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ é uma equivalência de homotopia, então $f_*(G(X, x_0)) = G(Y, y_0)$.*

Demonstração. Seja $g' : Y \to X$ inversa homotópica de f, isto é, tal que $f \circ g' \simeq 1_Y$ e $g' \circ f \simeq 1_X$. Não necessariamente temos $g'(y_0) = x_0$.

Seja $\alpha : I \to X$ caminho tal que $\alpha(0) = g'(x_0)$ e $\alpha(1) = x_0$. A propriedade de extensão de homotopia nos dá $G : Y \times I \to X$ tal que $G_t(y_0) = \alpha(t)$ e $G_0 = g'$. Defina $g = G_1 : Y \to X$. Então $g = G_1 \simeq G_0 = g'$ e portanto

$$g \circ f \simeq g' \circ f \simeq 1_X \text{ e } f \circ g \simeq f \circ g' \simeq 1_Y,$$

com $g(y_0) = x_0$. Em resumo: conseguimos g inversa homotópica de f com $g : (Y, y_0) \to (X, x_0)$.

Seja agora J a homotopia entre $f \circ g$ e 1_Y. Seja $[\alpha] \in G(X, x_0)$. Provemos que $f_*[\alpha] \in G(Y, y_0)$.

Sendo $h_t : X \to X$ homotopia cíclica cujo traço é α, defina $K : Y \times I \to Y$ por $k(y, t) = (f \circ h_t \circ g)(y)$. Então

$$K(y, 0) = f \circ g(y) = K(y, 1) \text{ e } k(y_0, t) = f \circ h_t(x_0) = f \ \circ \alpha(t).$$

Finalmente, defina $T : Y \times I \to X$ por

$$T(y, t) = \begin{cases} J(y, 1 - 3t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{3}, \\ K(y, 3t - 2), & \frac{1}{3} \leq t \leq \frac{2}{3}, \\ J(y, 3t - 2), & \frac{2}{3} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Daí, $T(y, 0) = J(y, 1) = y = T(y, 1)$, donde T é uma homotopia cíclica. Como $J(y_0, 0) = f \circ g(y_0) = y_0 = J(y_0, 1)$, segue que $\sigma : I \to Y$ dado por $\sigma(t) = J(y_0, t)$ é um laço em y_0. Se chamarmos de $\tau : I \to Y$ o traço de T, segue que $\tau = \sigma^{-1} * (f \circ \alpha) * \sigma$, donde

$$[\sigma]^{-1} \cdot [f \circ \alpha] \cdot [\alpha] = [\tau] \in G(Y, y_0) \subseteq Z(\pi_1(Y, y_0))$$

e então

$$[\tau] = [\sigma] \cdot [\tau] \cdot [\sigma]^{-1} = [f \circ \alpha] = f_*[\alpha] \in G(Y, y_0),$$

como queríamos. □

Observação 7.27. Se W e Z são dois espaços topológicos conexos por caminho, é válido que

$$\pi_1(W \times Z, w_0 \times z_0) \simeq \pi_1(W, w_0) \oplus \pi_1(Z, z_0);$$

a prova é a seguinte: defina $h : \pi_1(W \times Z, w_0 \times z_0) \to \pi_1(W, w_0) \oplus \pi_1(Z, z_0)$ por $h[\alpha] = (p_*[\alpha], q_*[\alpha])$, em que $p : W \times Z \to W$ e $q : W \times Z \to Z$ são as projeções. Então

- h é homomorfismo: dados $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(W \times Z, w_0 \times z_0)$, tem-se

$$h([\alpha] \cdot [\beta]) = (p_*([\alpha] \cdot [\beta]), q_*([\alpha] \cdot [\beta])) =$$
$$(p_*[\alpha] \cdot p_*[\beta], q_*[\alpha] \cdot q_*[\beta]) = (p_*[\alpha], q_*[\alpha]) \oplus (p_*[\beta], q_*[\beta]) = h[\alpha] \oplus h[\beta].$$

- h é injetora: seja $\alpha : S^1 \to W \times Z$. Escreva $\alpha(s) = (a_1(s), a_2(s))$, em que $a_1 : S^1 \to W$ e $a_2 : S^1 \to Z$ são as funções coordenadas de α. Suponha que $h[\alpha] = e$, elemento neutro de $\pi_1(W, w_0) \oplus \pi_1(Z, z_0)$. Então $p_*[\alpha] = [p \circ \alpha] = e$ e $q_*[\alpha] = [q \circ \alpha] = e$, elementos neutros de $\pi_1(W, w_0)$ e $\pi_1(Z, z_0)$, respectivamente. Portanto, existem homotopias $f_t : S^1 \to W$ e $g_t : S^1 \to Z$ tais que $f_0 = p \circ \alpha$, $g_0 = q \circ \alpha$, $f_1 = c_W$ laço constante em w_0 e $g_1 = c_Z$ laço constante em z_0, com $f_t(s_0) = w_0$ e $g_t(s_0) = z_0$, para todo $t \in I$. Note que $p \circ \alpha = a_1$ e $q \circ \alpha = a_2$.

  Defina $k_t : S^1 \to W \times Z$ por $k_t(s) = (f_t(s), g_t(s))$. Tem-se que

$$k_0(s) = (p \circ \alpha(s), q \circ \alpha(s)) = (a_1(s), a_2(s)) = \alpha(s)$$

  enquanto que $k_1(s) = (w_0, z_0) = k_t(s_0)$. Isto prova que $[\alpha] = e$.

- h é sobrejetora: dados $[a] \in \pi_1(W, w_0)$ e $[b] \in \pi_1(Z, z_0)$, o laço $\alpha : S^1 \to W \times Z$ definido por $\alpha(s) = (a(s), b(s))$ satisfaz $p_*[\alpha] = [a]$ e $q_*[\alpha] = [b]$, donde $h[\alpha] = ([a], [b])$.

Os itens acima provam que h é isomorfismo, e portanto possui inverso h^{-1}.

Defina $g : \pi_1(W, w_0) \oplus \pi_1(Z, z_0) \to \pi_1(W \times Z, w_0 \times z_0)$ por $g([a], [b]) = i_*[a] \cdot j_*[b]$, em que $i : W \to W \times Z$ e $j : Z \to W \times Z$ são as inclusões dadas por $i(w) = (w, z_0)$ e $j(z) = (w_0, z)$. Daí,

$$h \circ g([a], [b]) = h(i_*[a] \cdot j_*[b]) = (p_*(i_*[a] \cdot j_*[b]), q_*(i_*[a] \cdot j_*[b])) =$$
$$([p \circ i \circ a] \cdot [p \circ j \circ a], [q \circ i \circ b] \cdot [q \circ j \circ b]) = ([a] \cdot e, e \cdot [b]) = ([a], [b]),$$

já que $p \circ i = 1_W$, $q \circ j = 1_Z$, $p \circ j =$ função constante em w_0 e $q \circ i =$ função constante em z_0.

Assim, $h \circ g$ é a função identidade de $\pi_1(W, w_0) \oplus \pi_1(Z, z_0)$, e então $h^{-1} = h^{-1} \circ (h \circ g) = (h^{-1} \circ h) \circ g = g$. Conseguimos então a lei de h^{-1}, que nos será útil a seguir.

A prova acima pode ser adaptada para provar o seguinte resultado mais geral:

$$\pi_n(W \times Z, w_0 \times z_0) \simeq \pi_n(W, w_0) \oplus \pi_n(Z, z_0),$$

para todo $n \geq 1$ inteiro.

Se agora X e Y são CW-complexos conexos por caminhos, um resultado semelhante vale para o subgrupo de Gottlieb de $X \times Y$, a saber:

Teorema 7.28. *Tem-se* $G(X \times Y, x_0 \times y_0) \simeq G(X, x_0) \oplus G(Y, y_0)$.

Demonstração. Usemos a notação da observação acima, pondo $W = X$ e $Z = Y$.

Como as projeções são retrações (afinal $p \circ i = 1_X$ e $q \circ j = 1_Y$), o teorema 7.25 nos garante que

$$p_*(G(X \times Y, x_0 \times y_0)) \subseteq G(X, x_0) \quad \text{e} \quad q_*(G(X \times Y, x_0 \times y_0)) \subseteq G(Y, y_0),$$

e assim
$$h(G(X \times Y, x_0 \times y_0)) \subseteq G(X, x_0) \oplus G(Y, y_0).$$

Por outro lado, sejam $[a] \in G(X, x_0)$ e $[b] \in G(Y, y_0)$ quaisquer, e $F : X \times I \to X$ e $G : Y \times I \to Y$ homotopias cíclicas cujos traços são a e b, respectivamente.

Defina $K : X \times Y \times I \to X \times Y$ por

$$K(x, y, t) = \begin{cases} (H(x, 2t), y) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ (x, J(y, 2t-1)), & \frac{1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Daí, $K(x, y, 0) = (x, y) = K(x, y, 1)$ e

$$K(x_0, y_0, t) = \begin{cases} (H(x_0, 2t), y_0) = (a(t), y_0) = i \circ a(t) & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ (x_0, J(y_0, 2t-1)) = (x_0, b(t)) = j \circ b(t), & \frac{1}{2} \leq s \leq 1, \end{cases}$$

isto é, K é homotopia cíclica cujo traço é $(i \circ a) * (j \circ b)$.

Como $[(i \circ a) * (j \circ b)] = [i \circ a] \cdot [j \circ b] = h^{-1}([a], [b])$, segue que

$$h^{-1}(G(X, x_0) \oplus G(Y, y_0)) \subseteq G(X \times Y, x_0 \times y_0).$$

Aplicando h em ambos os lados, obtemos inclusão que faltava. $\square$

Dado um laço $\sigma : S^1 \to X$ em x_0, podemos definir $f_\sigma : X \vee S^1 \to X$ por $f_\sigma = \nabla \circ (1_X \vee \sigma)$, isto é, f_σ é tal que $f(x, s_0) = x$ e $f(x_0, s) = \sigma(s)$.

Suponha agora que f_σ possua uma extensão

$$f_\sigma^{(n+1)} : (X \vee S^1) \cup (X^{(n)} \times S^1) \to X,$$

em que $X^{(n)}$ é o n-esqueleto do CW-complexo X, $n \geq 1$ inteiro. Então, se α é um laço homotópico a σ, f_α também possui extensão $f_\alpha^{(n+1)} : (X \vee S^1) \cup (X^{(n)} \times S^1) \to X$. A prova é simples: seja $h_t : S^1 \to X$ a homotopia entre σ e α. A aplicação $F_t : X \vee S^1 \to X$ dada por $F_t(x, s_0) = x$ e $F_t(x_0, s) = h_t(s)$ é tal que $f_\sigma^{(n+1)}|_{X \vee S^1} = F_0$. Como $X \vee S^1$ é subcomplexo de $(X \vee S^1) \cup (X^{(n)} \times S^1)$, a propriedade de extensão de homotopia nos dá $G_t : (X \vee S^1) \cup (X^{(n)} \times S^1) \to X$ tal que $G_0 = f_\sigma^{(n+1)}$ e $G_t|_{X \vee S^1} = F_t$. Então G_1 satisfaz $G_1(x, s_0) = x$ e $G_1(x_0, s) = h_1(s) = \alpha(s)$, e portanto G_1 é uma extensão de f_α.

Definição 7.29. Seja $[\sigma] \in \pi_1(X, x_0)$. Dizemos que $[\sigma]$ é $(n+1)$-*extensível* se a aplicação $f_\sigma : X \vee S^1 \to X$ definida acima possui extensão $f_\sigma^{(n+1)} : (X \vee S^1) \cup (X^{(n)} \times S^1) \to X$. Já foi provado que tal propriedade não depende da escolha do representante de $[\sigma]$. O índice $(n+1)$ sobre $f_\sigma^{(n+1)}$ vem do fato de que $X^{(n)} \times S^1$ é o $(n+1)$-esqueleto de $X \times S^1$.

Denote por

$$G^{(n)}(X, x_0) = \{[\alpha] \in \pi_1(X, x_0); [\alpha] \text{ é } (n+1)\text{-extensível}\}.$$

Lema 7.30. *$G^{(n)}(X, x_0)$ é um subgrupo de $\pi_1(X, x_0)$, para todo $n \geq 1$ inteiro.*

Demonstração. Se $e : S^1 \to X$ é o laço constante em x_0, então $f_e : (X \vee S^1) \to X$ admite extensão $f_e^{(n+1)} : (X \vee S^1) \cup (X^{(n)} \times S^1) \to X$ dada por $f_e^{(n+1)}(x, s) = x$. Assim, $[e] \in G^{(n)}(X, x_0)$.

Se $a, b : S^1 \to X$ são $(n+1)$-extensíveis, defina $f : (X \vee S^1) \cup (X^{(n)} \times S^1) \to X$ por

$$f(x, e^{2\pi i t}) = \begin{cases} f_a^{(n+1)}(x, e^{2\pi i(2t)}), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ f_b^{(n+1)}(x, e^{2\pi i(2t-1)}), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

É imediato que f é uma extensão de f_{a*b}, donde $[a * b] = [a] \cdot [b] \in G^{(n)}(X, x_0)$.

Por fim, defina $g : (X \vee S^1) \cup (X^{(n)} \times S^1) \to X$ por $g(x, e^{2\pi i t}) = f_a^{(n+1)}(x, e^{2\pi i(-t)})$. Tem-se que g é uma extensão de $f_{a^{-1}}$, e assim $[a^{-1}] = [a]^{-1} \in G^{(n)}(X, x_0)$. $\square$

Definição 7.31. Seja

$$P^{(n)} = \big\{[\alpha] \in \pi_1(X, x_0); [\alpha] \text{ age trivialmente em } \pi_k(X, x_0), \forall k \leq n\big\}.$$

Evidentemente, $P^{(n)}$ é subgrupo de $\pi_1(X, x_0)$, já que é a seguinte interseção de subgrupos:

$$P^{(n)} = \bigcap_{k=1}^{n} \big\{[a] \in \pi_1(X, x_0); [a] \text{ age trivialmente em } \pi_k(X, x_0)\big\}.$$

As seguintes inclusões são imediatas:

$$G(X, x_0) \subseteq \cdots \subseteq G^{(2)}(X, x_0) \subseteq G^{(1)}(X, x_0),$$
$$P(X, x_0) \subseteq \cdots \subseteq P^{(2)}(X, x_0) \subseteq P^{(1)}(X, x_0).$$

Do corolário 7.17, temos que $G(X, x_0) \subseteq P(X, x_0) \subseteq Z(\pi_1(X, x_0))$. O próximo teorema nos revela precisamente onde $Z(\pi_1(X, x_0))$ se encontra nas duas sequências de inclusões acima. Antes disso, um lema que pode ser encontrado em [10, p. 194]:

Lema 7.32. *Sejam L um subcomplexo conexo de K contendo v_0 e $f : (L, v_0) \to (Y, y_0)$ uma aplicação, com Y conexo por caminhos. Sabe-se que f e a inclusão $i : L \hookrightarrow K$ induzem homomorfismos*

$$f_* : \pi_1(L, v_0) \to \pi_1(Y, y_0) \ \text{ e } i_* : \pi_1(L, v_0) \to \pi_1(K, v_0).$$

Então: f é 2-extensível sobre K se, e somente se, existe homomorfismo $h : \pi_1(K, v_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ tal que $f_* = h \circ i_*$,

$$\begin{tikzcd} \pi_1(L, v_0) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "i_*"] & \pi_1(Y, y_0). \\ \pi_1(K, v_0) \arrow[ur, "h"] & \end{tikzcd}$$

Teorema 7.33. $G^{(1)}(X, x_0) = P^{(1)}(X, x_0) = Z(\pi_1(X, x_0))$.

Demonstração. Provemos a segunda igualdade.

Pelo teorema 7.12, a ação de $[\sigma] \in \pi_1(X, x_0)$ em si mesmo, denotada por σ_1, é a conjugação. Disso, temos que, dado $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$ qualquer,

$$\sigma_1[\alpha] = [\alpha] \Leftrightarrow [\alpha] = [\sigma] \cdot [\alpha] \cdot [\sigma]^{-1} \Leftrightarrow [\alpha] \cdot [\sigma] = [\sigma] \cdot [\alpha],$$

isto é, $[\sigma] \in P^{(1)}(X, x_0) \Leftrightarrow [\sigma] \in Z(\pi_1(X, x_0))$. Isto prova que $P^{(1)}(X, x_0) = Z(\pi_1(X, x_0))$.

Para a primeira igualdade, usando a notação do lema anterior, sejam $L = X \vee S^1$, $Y = X$, $K = X \times S^1$, $i : X \vee S^1 \hookrightarrow X \times S^1$ e $f = f_\sigma$:

$$\begin{tikzcd} \pi_1(X \vee S^1, (x_0, s_0)) = \pi_1(L, v_0) \arrow[r, "f_* = (f_\sigma)_*"] \arrow[d, "i_*"] & \pi_1(X, x_0) = \pi_1(Y, y_0) \\ \pi(X \times S^1, (x_0, s_0)) = \pi_1(K, v_0) \arrow[ur, dashed, "h"] & \end{tikzcd}$$

Seja U vizinhança contrátil de x_0 (que existe pelo teorema 2.17) e $V = S^1 \backslash \{(-1, 0)\}$. Chame $X_1 = X \vee V$ e $X_2 = U \vee S^1$, ambos subconjuntos abertos de $X \vee S^1$. Então $X \vee S^1$ é igual à união $X_1 \cup X_2$ e $X_1 \cap X_2 = U \vee V$ é conexo por caminhos e simplesmente conexo. Assim, o corolário 4.27 de [23, p. 116] nos dá que

$$\pi_1(L) \simeq \pi_1(X) * \pi_1(S^1),$$

o grupo livre gerado por elementos de $\pi_1(X)$ e $\pi_1(S^1)$. Um elemento de $\pi_1(X) * \pi_1(S^1)$ pode ser visto como uma sequência $g_1 g_2 \dots g_m$ de elementos $g_i \in \pi_1(X) \cup \pi_1(S^1)$ seguida de sua *redução*, que consiste em retirar da sequência elementos adjacentes da forma gg^{-1} e trocar elementos gh com $g, h \in \pi_1(W)$ por seu produto $w = g \cdot h \in (\pi_1(W), \cdot)$, em que $W = X$ ou S^1. Após fazer isso, tem-se uma nova sequência, da qual retiram-se novamente elementos da forma anterior. Faça isso até que não haja mais elementos a serem retirados; esta então será a sequência reduzida.

A operação em $\pi_1(X) * \pi_1(S^1)$, denotada por $\star$, é a justaposição de sequências

$$g_1 g_2 \dots g_m \star h_1 h_2 \dots h_n = g_1 g_2 \dots g_m h_1 h_2 \dots h_n$$

seguida de sua redução.

Voltando à demonstração, temos também (pela observação que precede o teorema 7.28) que

$$\pi_1(K) \simeq \pi_1(X) \oplus \pi_1(S^1).$$

Sejam $[\alpha] \in \pi_1(X)$, $[\beta] \in \pi_1(S^1)$. Seja também $[v] \in \pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$ gerador tal que $f(x_0, v(s)) = \sigma(s)$. Então

$$i_*([\alpha] \star [\beta]) = i_*[\alpha] \oplus i_*[\beta] = ([\alpha], 1) \oplus (1, [\beta]) = ([\alpha], [\beta])$$

e

$$f_*([\alpha] \star [v]) = f_*[\alpha] \cdot f_*[v] = [f \circ \alpha] \cdot [f \circ v] = [\alpha] \cdot [\sigma],$$

já que $f \circ \alpha(x) = f(\alpha(x), s_0) = \alpha(x)$ e $f \circ v(s) = f(x_0, v(s)) = \sigma(s)$.

Agora suponha que $[\sigma] \in G^{(1)}(X, x_0)$, isto é, que f_σ é 2-extensível sobre $X \times S^1$. Pelo lema anterior, existe $h : \pi_1(K, v_0) \to \pi_1(Y, y_0)$ tal que $f_* = h \circ i_*$.

Tem-se que $f_*[v] = [\sigma]$ e $i_*[v] = (1, [v])$, donde

$$[\sigma] = f_*[v] = h \circ i_*[v] = h(1, [v]).$$

Por outro lado,

$$[\alpha] = f_*[\alpha] = h \circ i_*[\alpha] = h([\alpha], 1).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} [\alpha] \cdot [\sigma] &= f_*([\alpha] \star [v]) = h \circ i_*([\alpha] \star [v]) = h(([\alpha], 1) \oplus (1, [v])) \\ &= h((1, [v]) \oplus ([\alpha], 1)) = h \circ i_*([v] \star [\alpha]) = f_*[v] \cdot f_*[\alpha] = [\sigma] \cdot [\alpha], \end{aligned}$$

o que prova que $[\sigma] \in Z(\pi_1(X,x_0)) = P^{(1)}(X,x_0)$.

Reciprocamente, suponha que $[\sigma] \in Z(\pi_1(X,x_0)) = P^{(1)}(X,x_0)$. Defina $h : \pi_1(K,v_0) \to \pi_1(Y,y_0)$ por

$$h([\alpha],[v]^m) = [\alpha] \cdot [\sigma]^m,$$

em que $[v]^m$ é o produto de $[v]$ por si mesmo m vezes, o mesmo valendo para $[\sigma]^m$.

Que h é homomorfismo segue de

$$\begin{aligned} h(([\alpha],[v]^m) \oplus ([\beta],[v]^n)) = h([\alpha]\cdot[\beta],[v]^m \cdot [v]^n) = \\ h([\alpha]\cdot[\beta],[v]^{m+n}) = ([\alpha]\cdot[\beta])\cdot[\sigma]^{m+n} = [\alpha]\cdot[\beta]\cdot[\sigma]^m\cdot[\sigma]^n = \\ ([\alpha]\cdot[\sigma]^m)\cdot([\beta]\cdot[\sigma]^n) = h(\alpha,[v]^m)\cdot h([\beta],[v]^n), \end{aligned}$$

lembrando que $[\beta]\cdot[\sigma]^m = [\sigma]^m \cdot [\beta]$ pois $[\sigma] \in Z(\pi_1(X,x_0))$.

Também,

$$f_*([\alpha] \star [v]^m) = f_*[\alpha] \cdot f_*[v]^m = [\alpha]\cdot[\sigma]^m = h([\alpha],[v]^m) = h \circ i_*([\alpha] \star [v]^m)$$

Isto é suficiente para garantir que $f_* = h \circ i_*$, pois um elemento de $\pi_1(X,x_0) * \pi_1(S^1,s_0)$ é uma sequência reduzida da forma $g_1g_2\dots g_m$, com $g_i \in \pi_1(X,x_0) \cup \pi_1(S,s_0)$ e assim

$$\begin{aligned} f_*(g_1g_2\dots g_m) &= f_*(g_1 \star g_2 \star \cdots \star g_m) = f_*(g_1)\dots f_*(g_m) \\ &= h\circ i_*(g_1)\dots h\circ i_*(g_m) = h \circ i_*(g_1 \star \cdots \star g_m) = h\circ i_*(g_1g_2\dots g_m). \end{aligned}$$

Pelo lema anterior, a existência de tal homomorfismo h garante que f_σ é 2-extensível, isso é, que $[\sigma] \in G^{(1)}(X,x_0)$. □

Definição 7.34. Diz-se que X é *aspherical* se $\pi_n(X,x_0) = \{1\}$, para todo $n \geq 2$.

Corolário 7.35. *Se X é aspherical, então $G(X,x_0) = Z(\pi_1(X,x_0))$.*

Demonstração. Já sabemos que $G(X,x_0) \subseteq G^{(1)}(X,x_0) = Z(\pi_1(X,x_0))$. Se mostrarmos que $G(X,x_0) \supseteq G^{(1)}(X,x_0)$, o teorema fica demonstrado.

Para isto, seja $[\sigma] \in G^{(1)}(X,x_0)$. Isto significa que $f_\sigma : X \vee S^1$ dada por $f(x,s_0) = x$ e $f(x_0,s) = \sigma(s)$ possui extensão $f_\sigma^{(2)} : (X \vee S^1) \cup (X^{(1)} \times S^1) \to X$.

Sejam c uma 2-célula de $X \times S^1$ e $k : (E^3, \partial E^3) \to (X^{(2)} \times S^1, X^{(1)} \times S^1)$ sua função característica. Note que, identificando ∂E^3 com S^2, a classe de homotopia de $h = f_\sigma^{(2)} \circ k|_{S^2} : S^2 \to X$ é um elemento de $\pi_2(X, h(s_0)) = \{1\}$. Assim, h admite extensão $H : E^3 \to X$. Defina

$$f_\sigma^{(3)}|_c(y) = \begin{cases} H \circ k^{-1}(y), & y \in c - \partial c, \\ f_\sigma^{(2)}(y), & y \in \partial c \subset X^{(1)} \times S^1. \end{cases}$$

Fazendo isso para cada 2-célula c de $X \times S^1$, conseguimos extensão de $f_\sigma^{(2)}$ a $X^{(2)} \times S^1$, e então $[\sigma] \in G^{(2)}(X,x_0)$. O mesmo raciocínio nos dá que $[\sigma] \in G^{(n)}(X,x_0)$, para todo n, pois X é aspherical. Logo, f_σ é extensível a todo n-esqueleto de $X \times S^1$, e portanto é extensível a $X \times S^1$, e assim $[\sigma] \in G(X,x_0)$. □

Corolário 7.36. *Se K é a garrafa de Klein, então $G(K) = Z(\pi_1(K))$.*

Demonstração. A garrafa de Klein tem como recobrimento universal o plano $\mathbb{R}^2$ que é contrátil. Por 4.5, tem-se que

$$0 = \pi_n(\mathbb{R}^2) \simeq \pi_n(K),$$

isto é, K é *aspherical.* □

8 Recobrimentos e o grupo de Gottlieb

Daqui em diante, sejam $p : (C, c_0) \to (X, x_0)$ o recobrimento universal de X (que existe por 4.13) e $\phi : \pi_1(X, x_0) \to \Delta(p)$ o isomorfismo dado em 4.4.

Definição 8.1. Diz-se que uma aplicação $f : C \to C$ *preserva fibras* se $p(a) = p(b)$ implica $p \circ f(a) = p \circ f(b)$. Uma homotopia $h_t : C \to C$ é dita ser uma *homotopia que preserva fibras* se h_t preserva fibras, para cada t.

Teorema 8.2. *O grupo de Gottlieb $G(X, x_0)$ é isomorfo ao subgrupo de $\Delta(p)$ das deck transformations homotópicas à 1_C por homotopias que preservam fibras.*

Em símbolos, $\phi(G(X, x_0))$ é igual a

$$\big\{D \in \Delta(p); \exists k : C \times I \to C \text{ tal que } k_0 = D, k_1 = 1_C \text{ e } k_t \text{ preserva fibras}\big\}.$$

Demonstração. Sejam $[\sigma] \in G(X, x_0)$ e$h : X \times I \to X$ cujo traço é σ.

Considere o diagrama abaixo, em que $q : C \times \{0\} \to C$ é a projeção em C e $p' = p \times 1 : C \times I \to X \times I$ (isto é, $p'(c, t) = (p(c), t)$):

$$\begin{tikzcd} C \times \{0\} \arrow[r, "q"] \arrow[d, hook] & C \arrow[d, "p"] \\ C \times I \arrow[ur, dashed, "\tilde{h}"] \arrow[r, "h \circ p'"] & X. \end{tikzcd}$$

Tal diagrama é comutativo, já que $p \circ q(c, 0) = p(c) = h_0 \circ p(c) = h \circ p'(c, 0)$. Assim, o teorema 3.4 nos dá que existe $\tilde{h} : C \times I \to C$ tal que $p \circ \tilde{h} = h \circ p'$, isto é, $p \circ \tilde{h}_t(c) = h \circ p'(c, t) = h(p(c), t) = h_t \circ p(c)$, ou seja, $p \circ \tilde{h}_t = h_t \circ p$. Também, $\tilde{h}(c_0, 0) = c_0$.

Note que $p \circ \tilde{h}_t(c_0) = h_t \circ p(c_0) = h_t(x_0) = \sigma(t)$, e portanto $\tilde{h}_t(c_0)$ é um levantamento de σ começando em c_0.

Seja $D \in \Delta(p)$ a única *deck transformation* tal que $D(c_0) = \tilde{h}_1(c_0)$. Pela definição do isomorfismo ϕ, segue que $D = \phi[\sigma]$. Tem-se que

$$p \circ \tilde{h}_1 = h_1 \circ p = 1_X \circ p = p = p \circ D$$

e, mais ainda, D e $\tilde{h}_1$ coincidem em c_0. Por 3.2 segue que $\tilde{h}_1 = D$. Do mesmo modo, $\tilde{h}_0(c_0) = c_0 = 1_C(c_0)$, e assim $\tilde{h}_0 = 1_C$.

Como $p \circ \tilde{h}_t = h_t \circ p$, tem-se que se $p(a) = p(b)$ então

$$p \circ \tilde{h}_t(a) = h_t \circ p(a) = h_t \circ p(b) = p \circ \tilde{h}_t(b)$$

e assim $D = \phi[\sigma]$ é homotópica à 1_C por uma homotopia que preserva fibras.

Reciprocamente, seja $\tilde{h}_t : C \to C$ uma homotopia que preserva fibras e tal que $\tilde{h}_0 = 1_C$ e $\tilde{h}_1 = D \in \Delta(p)$, com $D = \phi[\sigma]$ para algum $[\sigma] \in \pi_1(X, x_0)$. Provemos que $[\sigma] \in G(X, x_0)$.

Seja $p' = p \times 1 : C \times I \to X \times I$. Então existe homotopia $h : X \times I \to X$ tal que $h \circ p' = p \circ \tilde{h}$ (vide diagrama a seguir)

$$\begin{tikzcd} C \times I \arrow[r, "\tilde{h}"] \arrow[d, "p'"'] \arrow[dr, "p \circ \tilde{h}"] & C \arrow[d, "p"] \\ X \times I \arrow[r, dashed, "h"] & X \end{tikzcd}$$

visto que $p \circ \tilde{h}$ é constante em cada $p'^{-1}(x,t)$ (afinal $p'(a,t) = p'(b,s)$ implica $p(a) = p(b)$ e $t = s$, e assim

$$p \circ \tilde{h}(a,t) = p \circ \tilde{h}_t(a) = p \circ \tilde{h}_t(b) = p \circ \tilde{h}(b,t)$$

já que $\tilde{h}$ preserva fibras) e p' é aplicação quociente, pois $p' = p \times 1$ com p recobrimento (donde aplicação quociente) e I é compacto e de Hausdorff (proposição 3.9).

Assim, $h \circ p'(c,t) = p \circ \tilde{h}(c,t)$ nos dá $h(p(c),t) = p \circ \tilde{h}(c,t)$, e então $h_t \circ p = p \circ \tilde{h}_t$. Isso nos garante que $h_0 \circ p = p \circ 1_C = p$ e $h_1 \circ p = p \circ D = p$. Vale explicitar como h_0 e h_1 foram definidas: dado $x \in X$, tome $c \in p^{-1}(x)$ e então

$$h_0(x) = p \circ \tilde{h}_0(c) = p \circ 1_C(c) = p(c) = x;$$

já h_1 é dada por

$$h_1(x) = p \circ \tilde{h}_1(c) = p \circ D(c) = p(c) = x,$$

isto é, $h_0 = h_1 = 1_X$.

Seja $\tau(t) = h_t(x_0)$ o traço de h_t e $\tilde{\tau}(t) = \tilde{h}_t(c_0)$. Como

$$p \circ \tilde{\tau}(t) = p \circ \tilde{h}_t(c_0) = h_t \circ p(c_0) = h_t(x_0) = \tau(t)$$

e $\tilde{\tau}(0) = \tilde{h}_0(c_0) = 1_C(c_0) = c_0$, segue que $\tilde{\tau}$ é um levantamento de τ começando em c_0. Mas $\tilde{\tau}(1) = D(c_0)$ e $D = \phi[\sigma]$. Logo,

$$[p \circ \tilde{\tau}] = [\tau] = [\sigma] \in G(X, x_0),$$

pois τ é traço da homotopia cíclica h_t. □

Teorema 8.3. *Seja $\tilde{h}_t : C \to C$ uma homotopia com $\tilde{h}_0 = 1_C$. Então $\tilde{h}_t$ é homotopia que preserva fibras se, e só se, $f \circ \tilde{h}_t = \tilde{h}_t \circ f$, para toda $f \in \Delta(p)$.*

Demonstração. Suponha $\tilde{h}_t$ homotopia que preserva fibras e sejam $f \in \Delta(p)$ e $c \in C$ quaisquer. Então c e $f(c)$ estão na mesma fibra, já que $p = p \circ f$. Daí, $\tilde{h}_t(c)$ e $\tilde{h}_t(f(c))$ também estão na mesma fibra.

Chame $a_t = \tilde{h}_t(c)$ e $b_t = \tilde{h}_t(f(c))$. Sabe-se que existe $g \in \Delta(p)$ tal que $g(a_1) = b_1$. Sejam $U_a, U_b \subseteq C$ vizinhanças de a_1 e b_1 e $U \subseteq X$ vizinhança de $p(a_1)$ tais que $p|_{U_i} : U_i \to U$ é homeomorfismo ($i = a, b$), vindas da condição de que p é recobrimento. Seja $V \subseteq U_a$ aberto tal que $g(V) \subseteq U_b$. Sejam $I_a, I_b \subseteq I$ abertos tais que $a_t \in V$, $\forall t \in I_a$ e $b_t \in U_b$, $\forall t \in I_b$. Tome $J = I_a \cap I_b$. Assim, para todo $t \in J$, vale que

$$p(a_t) = p \circ g(a_t) = p(b_t)$$

já que a_t e b_t estão na mesma fibra e g é *deck transformation*. Como $g(a_t)$ e b_t pertencem a U_b e $p|_{U_b} : U_b \to U$ é homeomorfismo, segue que $g(a_t) = b_t$. Isto prova que o conjunto

$$K = \{t \in I;\ g(a_t) = b_t\}$$

é aberto em I. Tal conjunto é também fechado: se $t \in I$ é tal que $g(a_t) \neq b_t$, então, como C é de Hausdorff, existem A, B abertos de C tais que $g(a_t) \in A$, $b_t \in B$ e $A \cap B = \emptyset$, e então existe vizinhança $L \subseteq I$ de t tal que $g(a_s) \in A$ e $b_s \in B$, para todo $s \in L$, donde $g(a_s) \neq b_s$ (isto é: provamos que o complementar de K é aberto em I).

Como I é conexo e $K \neq \emptyset$ (pois $1 \in K$), segue que $K = I$. Portanto

$$g \circ \tilde{h}_t(c) = g(a_t) = b_t = \tilde{h}_t \circ f(c),$$

para todo $t \in I$, e em particular

$$g \circ \tilde{h}_0(c) = g(a_0) = b_0 = \tilde{h}_0 \circ f(c).$$

Já que $\tilde{h}_0 = 1_C$, segue que $g(c) = f(c)$. Mas duas *deck transformations* que coincidem num ponto são necessariamente iguais (ver lema 3.2); assim, $f = g$ e obtemos que $f \circ \tilde{h}_t = \tilde{h}_t \circ f$.

Reciprocamente, suponha que $f \circ \tilde{h}_t = \tilde{h}_t \circ f$, para toda $f \in \Delta(p)$.

Sejam $c, d \in C$ tais que $p(c) = p(d)$. Seja $g \in \Delta(p)$ tal que $g(c) = d$. Então $\tilde{h}_t = g^{-1} \circ \tilde{h}_t \circ g$ nos dá que

$$\tilde{h}_t(c) = g^{-1} \circ \tilde{h}_t \circ g(c) = g^{-1} \circ \tilde{h}_t(d),$$

donde

$$p \circ \tilde{h}_t(c) = p \circ g^{-1} \circ \tilde{h}_t(d) = p \circ \tilde{h}_t(d),$$

afinal $g^{-1} \in \Delta(p)$ (e assim $p \circ g^{-1} = p$). Portanto, $\tilde{h}_t$ é uma homotopia que preserva fibras. □

Corolário 8.4. *$G(X, x_0)$ é isomorfo ao subgrupo de $\Delta(p)$ das deck transformations homotópicas à 1_C por homotopias que comutam com toda deck transformation.*

Sejam p e q inteiros relativamente primos. Seja S^3 a 3-esfera vista como subespaço de $\mathbb{C}^2$, com coordenadas $(z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2$ tais que $z_0\overline{z_0} + z_1\overline{z_1} = 1$. Seja $f : S^3 \to S^3$ dada por

$$f(z_0, z_1) = (z_0 e^{2\pi i/p}, z_1 e^{2\pi iq/p}).$$

Então o grupo gerado por f, $\langle f \rangle$, com a operação composição, é um grupo isomorfo a $\mathbb{Z}_p$. Definimos o *espaço lenticular* (*lens space*) como sendo

$$L(p, q) = S^3 / \langle f \rangle.$$

Tem-se que $\pi_1(L(p, q)) = \langle f \rangle \simeq \mathbb{Z}_p$, pois a esfera S^3 é simplesmente conexa.

Teorema 8.5. *Tem-se que $G(L(p, q)) = \pi_1(L(p, q))$.*

Demonstração. Pelo corolário 4.10, a aplicação quociente $p : S^3 \to L(p, q)$ é recobrimento, com grupo de *deck transformations* $\Delta(p) = \langle f \rangle$.

Seja $h_t : S^3 \to S^3$ dada por

$$h_t(z_0, z_1) = (z_0 e^{2\pi it/p}, z_1 e^{2\pi iqt/p}).$$

Então $h_0 = 1$ e $h_1 = f$. Além disso,

$$f \circ h_t(z_0, z_1) = f(z_0 e^{2\pi it/p}, z_1 e^{2\pi iqt/p}) =$$
$$(z_0 e^{2\pi it/p + 2\pi i/p}, z_1 e^{2\pi iqt/p + 2\pi iq/p}) = h_t(z_0 e^{2\pi i/p}, z_1 e^{2\pi iq/p}) = h_t \circ f(z_0, z_1),$$

isto é, $f \circ h_t = h_t \circ f$. Como f é gerador, tem-se que h_t comuta com toda $g \in \langle f \rangle$.

Logo, $f \in \phi(G(L(p, q)))$ e então $\Delta(p) = \langle f \rangle = \phi(G(L(p, q)))$, donde $G(L(p, q)) = \pi_1(L(p, q))$. □

Teorema 8.6. *Seja P^n o espaço projetivo real de dimensão n. Então $G(P^{2n+1}) = \pi_1(P^{2n+1}) \simeq \mathbb{Z}_2$, $n > 0$.*

Demonstração. A esfera S^{2n+1} pode ser vista como subconjunto de $\mathbb{C}^{n+1}$ cujas coordenadas $(z_0, \ldots, z_n)$ satisfazem $z_0\overline{z_0} + \cdots + z_n\overline{z_n} = 1$.

Seja $f : S^{2n+1} \to S^{2n+1}$ a aplicação antipodal, dada por $f(z_0, \ldots, z_n) = (-z_0, \ldots, -z_n)$. Seja $G = \{1, f\}$ grupo com a operação composição e considere o espaço projetivo $P^{2n+1} = S^{2n+1}/G$. Seja $p : S^{2n+1} \to P^{2n+1}$ a aplicação quociente. Tal aplicação é um recobrimento, com $\Delta(p) \simeq G$, por 4.10.

Defina a homotopia $h_t : S^{2n+1} \to S^{2n+1}$ por

$$h_t(z_0, \ldots, z_n) = (z_0 e^{\pi i t}, \ldots, z_n e^{\pi i t}).$$

Então $h_0 = 1$ e $h_1 = f$. Além disso,

$$f \circ h_t(z_0, \ldots, z_n) = f(z_0 e^{\pi i t}, \ldots, z_n e^{\pi i t}) =$$
$$(-z_0 e^{\pi i t}, \ldots, -z_n e^{\pi i t}) = h_t(-z_0, \ldots, -z_n) = h_t \circ f(z_1, \ldots, z_n),$$

isto é, $f \circ h_t = h_t \circ f$.

Logo, $\phi(G(P^{2n+1})) = \Delta(p)$, e então $G(P^{2n+1}) = \pi_1(P^{2n+1}) \simeq \mathbb{Z}_2$, em que o último isomorfismo vem do fato de que S^{2n+1} é simplesmente conexa, donde $\pi_1(P^{2n+1}) \simeq \Delta(p) \simeq \mathbb{Z}_2$. □

Observação 8.7. O caso $n = 0$ do teorema acima também é válido, com a ressalva de que

$$G(P^1) = \pi_1(P^1) \simeq \mathbb{Z},$$

afinal $P^1 = S^1$ e S^1 é um H-espaço (e então a primeira igualdade segue do teorema 7.21). Já o caso do espaço projetivo de dimensão par foi visto no corolário 7.19.

Resumindo, temos:

$$G(P^n) = \begin{cases} \pi_1(P^1) \simeq \mathbb{Z}, & n = 1, \\ \pi_1(P^n) \simeq \mathbb{Z}_2, & n > 1 \text{ ímpar}, \\ \{1\} \subseteq \pi_1(P^n) \simeq \mathbb{Z}_2, & n \text{ par}. \end{cases}$$

Definição 8.8. Seja $\tilde{H}(X) = \{f \in Z(\Delta(p)), f \simeq 1_C\}$. É fácil ver que $\tilde{H}(X)$ é subgrupo de $\Delta(p)$. Seja $H(X) = \phi^{-1}(\tilde{H}(X)) < \pi_1(X, x_0)$.

Teorema 8.9. *Tem-se* $G(X, x_0) \subseteq H(X) \subseteq P(X, x_0)$.

Demonstração. A primeira inclusão segue do corolário 8.4.

Sejam $f \in \tilde{H}(X)$ e $h_t : C \to C$ homotopia tal que $h_0 = 1_C$ e $h_1 = f$. Seja também $\tilde{\lambda} : I \to C$ dada por $\tilde{\lambda}(t) = h_t(c_0)$ defina $\lambda : I \to X$ por $\lambda = p \circ \tilde{\lambda}$. Assim, $\tilde{\lambda}$ é levantamento de λ começando em c_0 e terminando em $f(c_0)$. Por definição do isomorfismo ϕ, tem-se que $\phi[\lambda] = f$. Provemos que $\lambda \in P(X, x_0)$.

Como $\tilde{H}(X) \subseteq Z(\Delta(p))$, segue que $H(X) = \phi^{-1}(\tilde{H}(X)) \subseteq Z(\pi_1(X, x_0))$. Como a ação de $[\lambda]$ em $\pi_1(X, x_0)$ é a conjugação, segue que tal ação é trivial.

Suponha agora $n > 1$. Sabe-se (lema 7.15) que $[\lambda]$ age trivialmente em $[\alpha] \in \pi_n(X, x_0)$ se, e somente se, a aplicação $g : S^n \vee S^1 \to X$ dada por $g|_{S^n} = \alpha$ e $g|_{S^1} = \lambda$ possui extensão $g' : S^n \times S^1 \to X$.

Defina g' como se segue: existe $l : S^n \to C$ tal que $p \circ l = g|_{S^n}$, pois S^n é simplesmente conexa para $n > 1$ (use o teorema 3.8).

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[d, "p"] \\ S^n \arrow[ur, dashed, "l"] \arrow[r, "g|_{S^n}"'] & X \end{tikzcd}$$

Considere S^1 como sendo I com a identificação entre 0 e 1. Defina $g'(s,t) = p \circ h_t \circ l(s)$.

Como

$$g'(s,0) = p \circ h_0 \circ l(s) = p \circ l(s) = p \circ f \circ l(s) = p \circ h_1 \circ l(s) = g'(s,1),$$

segue que g' está bem definida. Além disso,

$$g'(s,0) = p \circ h_0 \circ l(s) = p \circ l(s) = g|_{S^n}$$

e também

$$g'(s_0,t) = p \circ h_t \circ l(s_0) = p \circ h_t(c_0) = p \circ \tilde{\lambda}(t) = \lambda(t),$$

donde g' é uma extensão de g.

Assim, os elementos de $H(X)$ agem trivialmente em $\pi_n(X,x_0)$ para todo $n \geq 1$, e então $H(X) \subseteq P(X,x_0)$. $\square$

Sejam W e Y espaços topológicos. Considere

$$Y^W = \{f : W \to Y, f \text{ é contínua}\}$$

com a topologia compacto-aberto, cuja sub-base é dada pelos conjuntos da forma

$$W_{K,U} = \{f : W \to Y, f(K) \subseteq U, K \text{ é compacto de } W,\ U \text{ é aberto de } Y\}.$$

Suponha também que W é localmente compacto; isto é suficiente para que, dado $w_0 \in W$, a aplicação $p : W^W \to W$ dada por $p(f) = f(w_0)$ seja contínua (por [18, Teorema 1.1.1, p. 1]).

Também em [18, p. 2] encontra-se o seguinte teorema:

Teorema 8.10. *Sejam W localmente compacto Hausdorff e Y e Z espaços topológicos quaisquer. Então existe bijeção $\Phi : (Y^W)^Z \to Y^{W\times Z}$ dada por*

$$\Phi(f)(w,z) = (f(z))(w).$$

Daqui em diante, suporemos que o CW-complexo X é localmente compacto.

Lema 8.11. *Sejam $f,g : S^n \to X^X$ e $\Phi : (X^X)^{S^n} \to X^{X\times S^n}$ a bijeção acima. Então $f \simeq g$ se, e somente se, $\Phi(f) \simeq \Phi(g)$.*

Demonstração. Seja $H : S^n \times I \to X^X$ tal que $H_0 = f$ e $H_1 = g$. Então $H \in (X^X)^{S^n\times I}$ corresponde a $\tilde{H} \in X^{X\times S^n\times I}$ dada por $\tilde{H}(x,s,t) = H(s,t)(x)$.

Assim,

$$\begin{aligned}\tilde{H}(x,s,0) &= H(s,0)(x) = H_0(s)(x) = f(s)(x) = \Phi(f)(x,s) \text{ e}\\ \tilde{H}(x,s,1) &= H(s,1)(x) = H_1(s)(x) = g(s)(x) = \Phi(g)(x,s),\end{aligned}$$

donde $\tilde{H}_0 = \Phi(f)$ e $\tilde{H}_1 = \Phi(g)$, isto é, $\Phi(f) \simeq \Phi(g)$.

A recíproca é feita de maneira semelhante. $\square$

Por vezes, o grupo de Gottlieb também é chamado de *evaluation subgroup* devido ao seguinte teorema:

Teorema 8.12. *Seja* $p : X^X \to X$ *dada por* $p(f) = f(x_0)$. *Então*

$$p_*(\pi_1(X^X, 1_X)) = G(X, x_0).$$

Demonstração. Provemos primeiro que $p_*(\pi_1(X^X, 1_X)) \subseteq G(X, x_0)$.

Seja $f \in \pi_1(X^X, 1_X)$, isto é, $f : S^1 \to X^X$. Então $\Phi(f) : X \times S^1 \to X$ (em que $\Phi : (X^X)^{S^n} \to X^{X \times S^n}$ é definida como acima) satisfaz

$$\Phi(f)(x, s_0) = f(s_0)(x) = 1_X(x) = x.$$

Logo, $\Phi(f)$ é uma homotopia cíclica. Seja $\tau(s) = \Phi(f)(x_0, s)$ seu traço. Tem-se que

$$p \circ f(s) = f(s)(x_0) = \Phi(f)(x_0, s) = \tau(s).$$

Assim, $[p \circ f] = p_*[f] = [\tau] \in G(X, x_0)$.

Para a outra inclusão, seja $[\alpha] \in G(X, x_0)$ e $h : X \times S^1 \to X$ homotopia cíclica cujo traço é α.

Então $\tilde{h} = \Phi^{-1}(h) : S^1 \to X^X$ é dada por $\tilde{h}(s)(x) = h(x, s)$.

Tem-se que

$$p \circ \tilde{h}(s) = \tilde{h}(s)(x_0) = h(x_0, s) = \alpha(s).$$

Portanto, $[\alpha] = [p \circ \tilde{h}] = p_*[\tilde{h}]$, isto é, $G(X, x_0) \subseteq p_*(\pi_1(X, x_0))$. $\square$

4 Grupo de Gottlieb generalizado

Neste último capítulo, estudaremos o artigo [22], no qual Varadarajan generaliza os subgrupos $G(X, x_0)$ e $P(X, x_0)$ de $\pi_1(X, x_0)$ vistos anteriormente para subconjuntos $G(A, X)$ e $P(A, X)$ de $[A, X]_*$. São estudadas as aplicações cíclicas (não confundir com a noção de homotopia cíclica definida anteriormente) e, ao fim, calcula-se $G(S^n, S^n)$ e $P(S^n, S^n)$ fazendo-se uso do invariante de Hopf.

Daqui em diante, os espaços serão CW-complexos localmente finitos (não necessariamente conexos por caminhos) com ponto base (X terá ponto base x_0, A terá a_0, etc.), e as aplicações e homotopias preservarão ponto base. A condição de ser localmente finito é equivalente a ser compactamente gerado (por [12, Proposição 3.6, p. 51]) e esta, por sua vez, implica (por [12, Corolário 5.4, p. 58]) que o produto de dois CW-complexos também é um CW-complexo com a topologia produto. Isto será útil, como se verá adiante, quando precisarmos utilizar a propriedade de extensão de homotopia para o par $(X \times A, X \vee A)$ em que X e A são CW-complexos localmente finitos.

9 A definição mais geral

Definição 9.1. Uma aplicação $f : A \to X$ é dita *cíclica* se existe $H : X \times A \to X$ tal que $H(x, a_0) = x$ e $H(x_0, a) = f(a)$.

É imediato ver que f é cíclica se, e somente se, a aplicação $\nabla \circ (1_X \vee f) : X \vee A \to X$ possui extensão a $X \times A$.

Lema 9.2. *Seja $H : X \times A \to X$ tal que $H|_X \simeq 1_X$ e $H|_A \simeq f$. Então f é cíclica. Em particular, se f é cíclica e $f \simeq f'$, então f' é cíclica também.*

Demonstração. Se $g_t : X \to X$ e $h_t : A \to X$ são homotopias tais que $g_0 = H|_{X \times \{a_0\}}$, $g_1 = 1_X$, $h_0 = H|_{\{x_0\} \times A}$ e $h_1 = f$, então $F_t = \nabla \circ (g_t \vee h_t) : X \vee A \to X$ satisfaz $F_0 = H|_{X \vee A}$, e como $X \vee A$ é subcomplexo de $X \times A$, a propriedade de extensão de homotopia nos dá $G_t : X \times A \to X$ tal que $G_0 = H$ e $G_t|_{X \vee A} = F_t$. Assim, G_1 satisfaz $G_1(x, a_0) = x$ e $G_1(x_0, a) = f(a)$, donde f é cíclica.

Para a segunda parte, basta notar que, como f é cíclica, existe $K : X \times A \to X$ tal que $K|_{X \times \{a_0\}} = 1_X$ e $K|_{\{x_0\} \times A} = f \simeq f'$. □

Observação 9.3. Note que quando $A = S^1$, uma aplicação $f : S^1 \to X$ é *cíclica* no sentido acima se, e só se, existe *homotopia cíclica* (no sentido de Gottlieb, ver 7.1) $H : X \times S^1 \to X$ tal que $H(x, s_0) = x$ e $H(x_0, s) = f(s)$.

Lema 9.4. *Sejam $f : A \to X$ uma aplicação cíclica e $\theta : B \to A$ uma aplicação qualquer. Então $f \circ \theta : B \to X$ é cíclica.*

Demonstração. Seja $F : X \times A \to X$ a aplicação que satisfaz $f(x, a_0) = x$ e $F(x_0, a) = f(a)$. Defina $G : X \times B \to X$ por $G = F \circ (1_X \times \theta)$.

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, "\theta"] & A \arrow[r, "f"] & X \\
X \times B \arrow[urr, "G"] \arrow[r, "1_X \times \theta"'] & X \times A \arrow[ur, "F"'] &
\end{tikzcd}$$

Então G satisfaz

$$G(x, b_0) = F \circ (1_X \times \theta)(x, b_0) = F(1_X(x), \theta(b_0)) = F(x, a_0) = x,$$

e também

$$G(x_0, b) = F \circ (1_X \times \theta)(x_0, b) = F(1_X(x_0), \theta(b)) = F(x_0, \theta(b)) = f \circ \theta(b).$$

Logo, $f \circ \theta : B \to X$ é uma aplicação cíclica. □

Observação 9.5. Nem sempre vale que se $f : A \to X$ é cíclica e $g : X \to Y$ é uma aplicação qualquer então $g \circ f : A \to Y$ é cíclica. Tome, por exemplo, $f = 1 : S^1 \to S^1$ e $g : S^1 \to S^1 \vee S^1$ a inclusão dada por $g(s) = (s, s_0)$. Então f é cíclica (pois $G(S^1, s_0) = \pi_1(S^1, s_0)$ pelo teorema 7.21, lembrando que $S^1 \subseteq \mathbb{C}^2$ é um H-espaço com o produto de números complexos), mas $g \circ f$ não o é, como mostra a observação 7.24.

Sob algumas condições, porém, isso é verdadeiro, como nas duas proposições seguintes:

Proposição 9.6. *Se $r : X \to Y$ é uma retração e $f : A \to X$ é cíclica, então $r \circ f : A \to Y$ é cíclica.*

Demonstração. Seja $j : Y \hookrightarrow X$ inclusão de Y em X e $F : X \times A \to X$ a aplicação que satisfaz $F(x, a_0) = x$ e $F(x_0, a) = f(a)$. Defina $G : Y \times A \to Y$ por $G = r \circ F \circ (j \times 1_A)$, como no diagrama

$$\begin{tikzcd}
Y \times A \arrow[r, "j \times 1_A"] \arrow[d, dashed, "G"'] & X \times A \arrow[d, "F"] \\
Y & X \arrow[l, "r"]
\end{tikzcd}$$

Esta aplicação G satisfaz

$$G(y, a_0) = r(F(y, a_0)) = r(y) = y,$$

e também

$$G(y_0, a) = r(F(x_0, a)) = r(f(a)) = r \circ f(a),$$

já que $y \in Y$. Portanto, $r \circ f$ é uma aplicação cíclica. □

Proposição 9.7. *Se $g : X \to Y$ é uma equivalência de homotopia e $f : A \to X$ é cíclica então $g \circ f : A \to X$ é cíclica.*

Demonstração. Seja $h : Y \to X$ tal que $g \circ h \simeq 1_Y$ e $h \circ g \simeq 1_X$. Como $f : A \to X$ é cíclica, existe $F : X \times A \to X$ tal que $F(x, a_0) = x$ e $F(x_0, a) = f(a)$. Defina $G : Y \times A \to Y$ por $G = g \circ F \circ (h \times 1_A)$.

$$\begin{tikzcd}
Y \times A \arrow[d, "h \times 1_A"] \arrow[rrd, dashed, "G"] & & \\
X \times A \arrow[r, "F"'] & X \arrow[r, "g"'] & Y.
\end{tikzcd}$$

Temos que $G(y_0, a) = g(F(h(y_0), a)) = g(F(x_0, a)) = g \circ f(a)$ e $G(y, a_0) = g(F(h(y), a_0)) = g \circ h(y)$. Portanto, $G|_{Y \times *}$ é a aplicação $g \circ h : Y \to Y$ que é homotópica à identidade em Y. Pelo lema 9.2, segue que $g \circ f$ é cíclica. □

Definição 9.8. Defina o conjunto

$$G(A, X) = \{[f] \in [A, X]_*, f \text{ é cíclica}\}.$$

Teorema 9.9. *Se A é um co-H-grupo, o subconjunto $G(A, X) \subseteq [A, X]_*$ é na verdade um subgrupo de $[A, X]_*$.*

Demonstração. Seja $c : A \to A \vee A$ o co-produto e $v : A \to A$ a inversão do co-produto (vide teorema 1.7).

Sejam $[f], [g] \in G(A, X)$. Sejam $F, G : X \times A \to X$ tais que

$$\begin{aligned} F(x, a_0) = x, &\quad F(x_0, a) = f(a), \\ G(x, a_0) = x, &\quad G(x_0, a) = g(a). \end{aligned}$$

Seja $J : X \times (A \vee A) \to X$ dada por

$$J(x, a, a_0) = F(x, a), \quad J(x, a_0, a) = G(x, a).$$

Note que J está bem definida, afinal $F(x, a_0) = G(x, a_0) = x$. Também,

$$\begin{aligned} c(a) = (b, a_0) \Rightarrow J(x_0, c(a)) = F(x_0, b) = f(b) = \nabla \circ (f \vee g) \circ c(a), \\ c(a) = (a_0, b) \Rightarrow J(x_0, c(a)) = G(x_0, b) = g(b) = \nabla \circ (f \vee g) \circ c(a), \end{aligned}$$

isto é, $J(x_0, c(a)) = \nabla \circ (f \vee g) \circ c(a)$.

Defina $H : X \times A \to X$ por $H = J \circ (1 \times c)$ como no diagrama

$$\begin{tikzcd} X \times A \arrow[d, "1\times c"'] \arrow[dr, dashed, "H"] & \\ X \times (A \vee A) \arrow[r, "J"] & X. \end{tikzcd}$$

Então H satisfaz

$$\begin{aligned} &H(x, a_0) = J(x, a_0, a_0) = x \quad \text{e} \\ &H(x_0, a) = J(x_0, c(a)) = \nabla \circ (f \vee g) \circ c(a), \end{aligned}$$

o que prova que $\nabla \circ (f \vee g) \circ c$ é cíclica. Como por definição

$$[f] + [g] = [f + g] = [\nabla \circ (f \vee g) \circ c],$$

segue que $[f] + [g] \in G(A, X)$.

Também, $-[f] = [f \circ v] \in G(A, X)$ pois f é cíclica (ver 9.4). □

Definição 9.10. Chamamos o conjunto $G(A, X)$ de *subconjunto de Gottlieb do par de espaços A e X*. Quando A é um co-H-grupo, o chamamos de *grupo de Gottlieb do par de espaços A e X*.

Observação 9.11. Note que $G(S^1, X) = G(X)$, e portanto a definição acima generaliza a de Gottlieb.

Proposição 9.12. *São equivalentes:*

1. *X é um H-espaço.*

2. *1_X é cíclica.*

3. *$G(A, X) = [A, X]_*$, para todo A.*

Demonstração. $1 \Rightarrow 2$: Sejam m a multiplicação em X, $j : X \vee X \hookrightarrow X \times X$ inclusão e $i_1, i_2 : X \to X \times X$ dadas por $i_1(x) = (x, x_0)$ e $i_2(x) = (x_0, x)$.

Então, como $m \circ i_1 \simeq 1_X \simeq m \circ i_2$, temos que

$$m \circ j = \nabla \circ (m \circ i_1, m \circ i_2) \simeq \nabla \circ (1_X \vee 1_X) = \nabla.$$

Assim, existe homotopia $H_t : X \vee X \to X$ tal que $H_0 = m \circ j$ e $H_1 = \nabla$. Como $H_0 = m|_{X \vee X}$, a propriedade de extensão de homotopia nos dá $G_t : X \times X \to X$ tal que $G_t|_{X \vee X} = H_t$ e $G_0 = m$. Então G_1 satisfaz

$$G_1(x, x_0) = \nabla(x, x_0) = x = 1_X(x) = \nabla(x_0, x) = G_1(x_0, x).$$

Logo, 1_X é cíclica.

$2 \Rightarrow 3$: Seja A um espaço qualquer e $f \in [A, X]_*$. Então $f = 1_X \circ f$ é cíclica, pelo lema 9.4.

$3 \Rightarrow 1$: Tome $A = X$. Então 1_X é cíclica, donde existe uma aplicação $m : X \times X \to X$ tal que $m \circ j = \nabla$. Portanto, X é um H-espaço com essa multiplicação m. □

Proposição 9.13. *Se as aplicações $f : A \to X$ e $g : B \to Y$ são cíclicas, então também é cíclica a aplicação $f \times g : A \times B \to X \times Y$.*

Demonstração. Sejam $F : X \times A \to X$ e $G : Y \times B \to Y$ tais que $F(x_0, a) = f(a)$, $F(x, a_0) = x$, $G(y_0, b) = g(b)$ e $G(y, b_0) = y$. Defina a aplicação $H : (X \times Y) \times (A \times B) \to X \times Y$ por $H = (F \times G) \circ (1_X \times T \times 1_B)$, em que $T : Y \times A \to A \times Y$ é dada por $T(y, a) = (a, y)$, como no diagrama seguinte

$$X \times (Y \times A) \times B \xrightarrow{1_X \times T \times 1_B} (X \times A) \times (Y \times B) \xrightarrow{F \times G} A \times B.$$

Esta aplicação H satisfaz

$$H((x_0, y_0), (a, b)) = (F(x_0, a), G(y_0, b)) = (f(a), g(b)) = f \times g(a, b)$$

e também

$$H((x, y), (a_0, b_0)) = (F(x, a_0), G(y, b_0)) = (x, y) = 1_{X \times Y}(x, y).$$

Logo, $f \times g$ é cíclica. □

Proposição 9.14. *Se as aplicações $f : A \to X$ e $g : B \to X$ são cíclicas, então também é cíclica a aplicação $\nabla \circ (f \vee g) : A \vee B \to X$.*

Demonstração. Sejam F e G como na proposição anterior. Seja $h : X \times (A \times B) \to (X \times A) \times B$ o homeomorfismo natural entre estes dois espaços. Defina $K = G \circ (F \times 1_B) \circ h : X \times (A \times B) \to X$ e $H = K|_{X \times (A \vee B)} \to X$, como no diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \times (A \times B) \arrow[r, "h"] & (X \times A) \times B \arrow[r, "F \times 1_B"] & X \times B \arrow[r, "G"] & X. \\
X \times (A \vee B) \arrow[u, hook] \arrow[urrr, dashed, "H"'] & & &
\end{tikzcd}$$

Essa aplicação H satisfaz

$$\begin{aligned}
H(x_0, (a_0, b)) &= G(F(x_0, a_0), b) = G(x_0, b) = g(b) = \nabla(f \vee g)(a_0, b);\\
H(x_0, (a, b_0)) &= G(F(x_0, a), b_0) = G(f(a), b_0) = f(a) = \nabla(f \vee g)(a, b_0);\\
H(x, (a_0, b_0)) &= G(F(x, a_0), b_0) = G(x, b_0) = x,
\end{aligned}$$

e então $\nabla \circ (f \vee g)$ é cíclica. □

10 Ação de $\pi_1(X, x_0)$ em $[A, X]_*$

Tome 0 como sendo ponto base de I. Sejam $f : A \to X$ e $\alpha : I \to X$ um laço baseado x_0. Vamos definir uma ação de $\pi_1(X, x_0)$ no conjunto $[A, X]_*$.

A propriedade de extensão de homotopia garante que

$$\nabla \circ (f \vee \alpha^{-1}) : A \vee I = A \times \{0\} \cup \{a_0\} \times I \to X$$

possui extensão $F : A \times I \to X$, e então $F(a, 0) = f(a)$ e $F(a_0, t) = \alpha^{-1}(t)$. Defina

$$\alpha_\#[f] = [F_1],$$

em que $F_1 : A \to X$ é dada por $F_1(a) = F(a, 1)$.

Lema 10.1. *Com a notação acima, $\alpha_\#[f]$ depende somente de $[\alpha]$ e $[f]$, isto é, se $\alpha \simeq \beta$ e $f \simeq g$, então $\alpha_\#[f] = \beta_\#[g]$.*

Demonstração. Sejam $h_t : A \to X$ e $k_t : I \to X$ homotopias tais que $h_0 = f$, $h_1 = g$, $k_0 = \alpha$ e $k_1 = \beta$. Sejam também $F, G : A \times I \to X$ tais que $F(a, 0) = f(a)$, $F(a_0, t) = \alpha^{-1}(t)$, $G(a, 0) = g(a)$ e $G(a_0, t) = \beta^{-1}(t)$.

Defina $H : A \times I \times \{0, 1\} \cup A \times \{0\} \times I \cup \{a_0\} \times I \times I \to X$ por

$$H(a, s, t) = \begin{cases} F(a, s), & t = 0,\\ G(a, s), & t = 1,\\ h(a, t), & s = 0,\\ k(s, t), & a = a_0. \end{cases}$$

Existe homeomorfismo de pares

$$j : (I \times I, I \times \{0\}) \to (I \times I, I \times \{0, 1\} \cup \{0\} \times I),$$

e então, como

$$A \times I \times \{0, 1\} \cup A \times \{0\} \times I = A \times (I \times \{0, 1\} \cup \{0\} \times I),$$

a aplicação

$$l = 1_A \times j : (A \times I \times I, A \times I \times \{0\}) \to (A \times I \times I, A \times (I \times \{0,1\} \cup \{0\} \times I))$$

é homeomorfismo de pares. Denote por $\tilde{l}$ o homeomorfismo

$$A \times I \times \{0\} \cup \{a_0\} \times I \times I \to A \times (I \times \{0,1\} \cup \{0\} \times I) \cup \{a_0\} \times I \times I$$

obtido restringindo-se l.

Isto foi feito para garantir que

$$H \circ \tilde{l} : (A \times I) \times \{0\} \cup (\{a_0\} \times I) \times I \to X$$

possua extensão $H' : A \times I \times I \to X$, pela propriedade de extensão de homotopia do par $(A \times I, \{a_0\} \times I)$. Defina

$$K = H' \circ l^{-1} : A \times I \times I \to X.$$

Tem-se que K é uma extensão de H, pois se

$$c \in A \times (I \times \{0,1\} \cup \{0\} \times I) \cup \{a_0\} \times I \times I,$$

então

$$K(c) = H' \circ l^{-1}(c) = H'|_{A \times I \times \{0\} \cup \{a_0\} \times I \times I} \circ \tilde{l}^{-1}(c) = H \circ \tilde{l} \circ \tilde{l}^{-1}(c) = H(c).$$

Defina $J : A \times I \to X$ por $J(a,t) = H(a,1,t)$. Então

$$J(a,0) = H(a,1,0) = F(a,1) = F_1(a),$$
$$J(a,1) = H(a,1,1) = G(a,1) = G_1(a),$$

e também

$$J(a_0,t) = H(a_0,1,t) = k(1,t) = k_t(1) = x_0,$$

isto é, J é uma homotopia baseada entre F_1 e G_1.

Como $\alpha_\#[f] = [F_1]$ e $\beta_\#[g] = [G_1]$, o lema fica demonstrado. □

Teorema 10.2. *Sejam* $[\alpha], [\beta] \in \pi_1(X, x_0)$ *e* $[f] \in [A, X]_*$. *Então*

1. $\alpha_\#[0] = [0]$, *em que* $0 : A \to X$ *é a aplicação constante em* x_0;
2. $(\alpha * \beta)_\#[f] = \alpha_\# \circ \beta_\#[f]$;
3. $c_\#[f] = [f]$, *em que* c *é o laço constante em* x_0.

Demonstração. 1. $F : A \times I \to X$ dada por $F(a,t) = \alpha^{-1}(t)$ satisfaz $F(a,0) = 0(a) = x_0$ e $F(a_0,t) = \alpha^{-1}(t)$, donde $\alpha_\#[0] = [F_1] = [0]$.

2. Seja $F : A \times I \to X$ tal que $F(a,0) = f(a)$ e $F(a_0,t) = \beta^{-1}(t)$. Chame $g = F_1 : A \to X$. Seja $G : A \times I \to X$ tal que $G(a,0) = g(a)$ e $G(a_0,t) = \alpha^{-1}(t)$. Então, como $\beta_\#[f] = [F_1] = [g]$, tem-se que $\alpha_\#(\beta_\#[f]) = [G_1]$.

   Por outro lado, defina $H : A \times I \to X$ por

$$H(a,t) = \begin{cases} F(a,2t), & 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ G(a,2t-1), & \frac{1}{2} \le t \le 1, \end{cases}$$

   que satisfaz $H(a,0) = f(a)$ e também

$$H(a_0,t) = (\beta^{-1} * \alpha^{-1})(t) = (\alpha * \beta)^{-1}(t).$$

   Portanto, $(\alpha * \beta)_\#[f] = [H_1] = [G_1] = \alpha_\#(\beta_\#[f])$.

3. A aplicação $F : A \times I \to X$ dada por $F(a,t) = f(a)$ satisfaz $F(a,0) = f(a)$ e $F(a_0,t) = f(a_0) = x_0 = c(t)$. Logo, $c_\#[f] = [F_1] = [f]$. $\square$

Observação 10.3. Seja $[\sigma] \in \pi_1(X, x_0)$. Repare que se $A = S^n$, então o homomorfismo $\sigma_\# : \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(X, x_0)$ definido acima coincide com o homomorfismo $\sigma_n : \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(X, x_0)$ do teorema 7.9. Para ver isto, identifique $(I^n, \partial I^n)$ e (S^n, s_0). Dado $[f_0] \in \pi_n(S^n)$, por definição tem-se que $\sigma_n[f_0] = [f_1]$ em que f_1 é a restrição de $f_t : (I^n, \partial I^n) \to (X, x_0)$ tal que $f_t(\partial I^n) = \{\sigma(1-t)\}$. Por outro lado, $\sigma_\#[f_0] = [F_1]$ em que F_1 é a restrição de $F_t : S^n \to X$ tal que $F_0 = f_0$ e $F_t(s_0) = \sigma(1-t)$.

Lema 10.4. *Se A é um co-H-grupo e $[\sigma] \in \pi_1(X, x_0)$ então $\sigma_\# : [A, X]_* \to [A, X]_*$ é um isomorfismo de grupos.*

Demonstração. Seja $c : A \to A \vee A$ o coproduto do co-H-grupo A. Sejam $f, g : A \to X$ quaisquer. Seja $\sigma : I \to X$ um laço qualquer baseado em x_0. Sejam $F, G : A \times I \to X$ aplicações tais que $F|_{A \times \{0\}} = f$, $F|_{\{a_0\} \times I} = \sigma$, $G|_{A \times \{0\}} = g$ e $G|_{\{a_0\} \times I} = \sigma$.

Defina $J : (A \vee A) \times I \to X$ por

$$J(a, a_0, t) = F(a,t) \ \text{ e } \ J(a_0, a, t) = G(a,t).$$

Note que J está bem definida, pois $F(a_0,t) = \sigma(t) = G(a_0,t)$ e tem-se que

$$\begin{aligned} J(a, a_0, 0) &= F(a,0) = f(a), & J(a_0, a, 0) &= G(a,0) = g(a), \\ J(a, a_0, 1) &= F(a,1) = F_1(a), & J(a_0, a, 1) &= G(a,1) = G_1(a). \end{aligned}$$

Então $J_0 = \nabla \circ (f \vee g)$ e $J_1 = \nabla \circ (F_1 \vee G_1)$.

Defina $H : A \times I \to X$ por $H = J \circ (c \times 1)$, isto é,

$$\begin{tikzcd} A \times I \arrow[d, "c \times 1"'] \arrow[dr, dashed, "H"] & \\ (A \vee A) \times I \arrow[r, "J"] & X \end{tikzcd}$$

que satisfaz

$$\begin{aligned} H(a_0, t) &= J(c(a_0), t) = J(a_0, a_0, t) = \sigma(t) \ \text{ e} \\ H(a, 0) &= J(c(a), 0) = \nabla \circ (f \vee g)(c(a)) = \nabla \circ (f \vee g) \circ c(a). \end{aligned}$$

Assim, $[H_0] = [\nabla \circ (f \vee g) \circ c)] = [f] + [g] \in [A, X]_*$.

Pela definição da ação de $\pi_1(X, x_0)$ em $[A, X]_*$,

$$\sigma_\#([f] + [g]) = [H_1].$$

Temos também que

$$H_1(a) = H(a,1) = J(c(a), 1) = \nabla \circ (F_1 \vee G_1)(c(a)) = \nabla \circ (F_1 \vee G_1) \circ c(a).$$

Como $[F_1] = \sigma_\#[f]$ e $[G_1] = \sigma_\#[g]$, vemos que $[H_1] = \sigma_\#[f] + \sigma_\#[g]$.

Portanto,

$$\sigma_\#([f] + [g]) = [H_1] = \sigma_\#[f] + \sigma_\#[g].$$

Por fim, para todo $[f] \in [A, X]_*$ vale que

$$\sigma_\# \circ (\sigma^{-1})_\#[f] = (\sigma * \sigma^{-1})_\#[f] = c_\#[f] = [f],$$

em que $c : I \to X$ é o laço constante em x_0, assim como $(\sigma^{-1})_\# \circ \sigma_\#[f] = [f]$. Logo, $\sigma_\#$ é isomorfismo com inverso $(\sigma^{-1})_\#$. $\square$

Teorema 10.5. *Para todo $[\sigma] \in \pi_1(X, x_0)$, o isomorfismo $\sigma_\# : [A, X]_* \to [A, X]_*$ fixa $G(A, X)$, isto é, $\sigma_\#[f] = [f]$, para todo $[f] \in G(A, X)$.*

Demonstração. Sejam $f : A \to X$ aplicação cíclica e $H : A \times X \to X$ tal que $H(a_0, x) = x$ e $H(a, x_0) = f(a)$. Defina $F : A \times I \to X$ por $F = H \circ (1 \times \sigma)$.

$$\begin{tikzcd} A \times I \arrow[d, "1\times\sigma"] \arrow[dr, dashed, "F"] & \\ A \times X \arrow[r, "H"] & X \end{tikzcd}$$

Tem-se que $F(a_0, t) = H(a_0, \sigma(t)) = \sigma(t)$ e $F(a, 0) = H(a, \sigma(0)) = H(a, x_0) = f(a)$.

Pela definição da ação de $\pi_1(X, x_0)$ em $[A, X]_*$, segue que $\sigma_\#[f] = [F_1]$.

Mas $F(a, 1) = H(a, \sigma(1)) = H(a, x_0) = f(a)$, isto é, $F_1 = f$, e portanto $\sigma_\#[f] = [f]$. □

Teorema 10.6. *Para todo $[\sigma] \in G(X, x_0)$, $\sigma_\# : [A, X]_* \to [A, X]_*$ é a função identidade, para todo A.*

Demonstração. Seja $H : X \times I \to X$ a homotopia cíclica cujo traço é σ, isto é, $H_0 = H_1 = 1_X$ e $H(x_0, t) = \sigma(t)$. Seja $f : A \to X$ qualquer. Defina $F : A \times I \to X$ por $F = H \circ (f \times 1)$,

$$\begin{tikzcd} A \times I \arrow[d, "f\times 1"'] \arrow[dr, dashed, "F"] & \\ X \times I \arrow[r, "H"] & X. \end{tikzcd}$$

Tem-se $F(a, 0) = H(f(a), 0) = f(a)$ e $F(a_0, t) = H(f(a_0), t) = H(x_0, t) = \sigma(t)$.

Então $F|_{A\times\{0\}} = f$ e $F|_{\{a_0\}\times I} = \sigma$. Portanto, $\sigma_\#[f] = [F_1]$. Mas $F_1(a) = F(a, 1) = H(f(a), 1) = f(a)$. Logo, $\sigma_\#[f] = [f]$, e assim $\sigma_\# = 1$. □

11 Os grupos $P(\Sigma A, X)$

Nesta seção, seguiremos Varadarajan, que generalizou o grupo $P(X, x_0)$ definido por Gottlieb, fazendo uso do produto de Whitehead generalizado.

Seja $\alpha \in [\Sigma A, X]_*$. Sejam $l \geq 1$ inteiro e $\beta \in [\Sigma^l A, X]_*$. Escrevendo $\Sigma^l A$ como $\Sigma(\Sigma^{l-1} A)$, relembre que temos um elemento $[\alpha, \beta] \in [\Sigma(A \wedge \Sigma^{l-1} A), X]_*$ dado pelo produto de Whitehead generalizado de α e β.

Teorema 11.1. *Seja $\alpha \in G(\Sigma A, X)$. Então para todo inteiro $l \geq 1$ e todo $\beta \in [\Sigma^l A, X]_*$, tem-se que $[\alpha, \beta] = 0 \in [\Sigma(A \wedge \Sigma^{l-1} A), X]_*$.*

Demonstração. Seja $f : \Sigma A \to X$ tal que $[f] = \alpha \in G(\Sigma A, X)$. Existe então $F : \Sigma A \times X \to X$ tal que $F(*, x) = x$ e $F(a, x_0) = f(a)$ para todo $a \in \Sigma A$ e $x \in X$. Seja $g : \Sigma^l A \to X$ tal que $[g] = \beta$. Escreva $B = \Sigma^{l-1} A$ e defina $m : \Sigma A \times \Sigma B \to X$ por $m(a, b) = F(a, g(b))$, conforme o diagrama a seguir

$$\begin{tikzcd} \Sigma A \times \Sigma B \arrow[d, "1\times g"'] \arrow[dr, "m"] & \\ \Sigma A \times X \arrow[r, "F"] & X. \end{tikzcd}$$

Então $m(a, *) = F(a, x_0) = f(a)$ e $m(*, b) = F(*, g(b)) = g(b)$. Pela proposição 5.8, segue que $[\alpha, \beta] = 0 \in [\Sigma(A \wedge \Sigma^{l-1} A), X]_*$. □

Definição 11.2. Seja

$$P(\Sigma A, X) = \{\alpha \in [\Sigma A, X]_*, [\alpha, \beta] = 0, \forall \beta \in [\Sigma^l A, X]_*, \forall l \geq 1\}.$$

Segundo Varadarajan, a notação $P(\Sigma A, X)$ foi escolhida para indicar sua dependência em A, isto é, para salientar como o primeiro espaço é escrito na forma de suspensão.

Proposição 11.3. *$P(\Sigma A, X)$ é um subgrupo de $[\Sigma A, X]_*$.*

Demonstração. Sejam $l \geq 1$ inteiro e $[g] = \beta \in [\Sigma^l A, X]_*$ quaisquer. Chame $B = \Sigma^{l-1} A$.

Tem-se que $[0, \beta] = 0$, pois $m : \Sigma A \times \Sigma B \to X$ definida por $m(a, b) = g(b)$ satisfaz $m(a, *) = x_0 = 0(a)$ e $m(*, b) = g(b)$ (em que $0 : \Sigma A \to X$ também denota a aplicação constante em x_0), conforme a proposição 5.8. Assim, $0 \in P(\Sigma A, X)$.

Sejam agora $[f_1] = \alpha_1, [f_2] = \alpha_2 \in [\Sigma A, X]_*$. Provemos que $\alpha_1 - \alpha_2 \in P(\Sigma A, X)$.

Como $[\alpha_i, \beta] = 0$, $(i = 1, 2)$, existem $F_i : \Sigma A \times \Sigma B \to X$ tais que $F_i(a, *) = f_i(a)$ e $F_i(*, b) = g(b)$, para todos $a \in \Sigma A$ e $b \in \Sigma B$.

O elemento $\alpha_1 - \alpha_2 \in [\Sigma A, X]_*$ é representado pela aplicação $h : \Sigma A \to X$ dada por

$$h(\langle a, t\rangle) = \begin{cases} f_1(\langle a, 2t\rangle), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ f_2(\langle a, 2 - 2t\rangle), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \end{cases}$$

em que $\langle a, t\rangle$ é a classe de equivalência de $(a, t) \in A \times I$ após identificarmos $\{0, 1\} \times A \cup I \times \{a_0\}$ a um só ponto.

Defina $G : \Sigma A \times \Sigma B \to X$ por

$$G(\langle t, a\rangle, b) = \begin{cases} F_1(\langle a, 2t\rangle, b), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ F_2(\langle a, 2 - 2t\rangle, b), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Como

$$F_1(\langle a, 1\rangle, b) = F_1(*, b) = g(b) = F_2(*, b) = F_2(\langle a, 0\rangle, b),$$

segue que G está bem definida.

Mais ainda, G satisfaz

$$G(a', *) = h(a') \quad \text{e} \quad G(*, b) = g(b), \quad \forall a' \in \Sigma A, \ \forall b \in \Sigma B.$$

Por 5.8, segue que $[\alpha_1 - \alpha_2, \beta] = 0$. Como l e β foram escolhidos arbitrariamente, temos que $\alpha_1 - \alpha_2 \in P(\Sigma A, X)$, como queríamos. □

Corolário 11.4. *$G(\Sigma A, X)$ é um subgrupo de $P(\Sigma A, X)$.*

Demonstração. Decorre do teorema 11.1. □

Observação 11.5. Quando $A = S^0 = \{-1, 1\} \subset \mathbb{R}$, o grupo $P(\Sigma A, X)$ é o conjunto

$$\{\alpha \in [S^1, X]_*, \ [\alpha, \beta] = 0, \forall \beta \in [S^n, X]_*, \forall n \geq 1\} = \\ \{\alpha \in \pi_1(X, x_0), \ [\alpha, \beta] = 0, \forall \beta \in \pi_n(X, x_0), \forall n \geq 1\}.$$

O produto de Whitehead generalizado $[\alpha, \beta]$ coincide com o produto de Whitehead (como definido em [24, p. 472]) quando $\alpha \in \pi_1(X, x_0)$ e $\beta \in \pi_n(X, x_0)$. Sejam $a : S^1 \to X$ representante de α e $a_n : \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(X, x_0)$ o homomorfismo do teorema 7.9 (que coincide com $a_\#$, pela observação 7.24). Por [24, p. 473–474] vale que:

1. se $n = 1$, então $[\alpha, \beta] = \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} \in \pi_1(X, x_0)$. Assim,

$$[\alpha, \beta] = 0 \Leftrightarrow \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} = 0 \Leftrightarrow \alpha\beta\alpha^{-1} = \beta \Leftrightarrow a_1(\beta) = \beta,$$

em que a última equivalência decorre de 7.12.

2. se $n > 1$, então $[\alpha, \beta] = a_n(\beta) - \beta$, e assim

$$[\alpha, \beta] = 0 \Leftrightarrow a_n(\beta) = \beta.$$

Os dois itens acima nos garantem que

$$\begin{aligned} P(\Sigma S^0, X) = \{\alpha \in \pi_1(X, x_0),\ [\alpha, \beta] = 0, \forall \beta \in \pi_n(X, x_0), \forall n \geq 1\} = \\ \{[\alpha] \in \pi_1(X, x_0),\ [\alpha] \text{ age trivialmente em } \pi_i(X, x_0), \forall i \geq 1\} = P(X), \end{aligned}$$

e portanto o grupo $P(\Sigma A, X)$ de Varadarajan generaliza o grupo $P(X)$ de Gottlieb.

12 Os grupos $G(S^k, S^k)$ e $P(\Sigma S^{k-1}, S^k)$

Considere sempre $n > 0$.
O seguinte resultado é um famoso teorema demonstrado em [1]:

Teorema 12.1. *A esfera S^n é um H-espaço se, e somente se, $n = 1, 3$ ou 7.*

Observação 12.2. Note que $f : S^n \times S^n \to S^n$ é um produto para $S^n \Leftrightarrow f \circ j_1 \simeq 1_{S^n}$ e $f \circ j_2 \simeq 1_{S^n}$ (em que $j_1, j_2 : S^n \to S^n \times S^n$ são as inclusões na primeira e segunda coordenadas, respectivamente) $\Leftrightarrow f : S^n \times S^n \to S^n$ tem bigrau $(1, 1)$.

Logo, existe $f : S^n \times S^n \to S^n$ de bigrau $(1, 1)$ se, e só se, $n = 1, 3$ ou 7.

Fazendo uso disso, obtemos o seguinte:

Teorema 12.3. *Para cada inteiro $k \geq 1$, tem-se que*

$$G(S^k, S^k) = \begin{cases} 0, & \text{se } k \text{ é par,} \\ \pi_k(S^k) = \mathbb{Z}, & \text{se } k = 1, 3, 7, \\ 2\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z} = \pi_k(S^k), & \text{se } k \text{ é ímpar e } k \neq 1, 3, 7. \end{cases}$$

Demonstração. Observe que $f : S^k \to S^k$ é cíclica se, e somente se, existe $H : S^k \times S^k \to S^k$ de bigrau $(1, \deg f)$. De fato, se $f : S^k \to S^k$ é cíclica, então existe $H : S^k \times S^k \to S^k$ tal que $F(x, s_0) = x$ e $F(s_0, x) = f(x)$. Tal aplicação tem bigrau $(1, \deg f)$. Reciprocamente, se existe $H : S^k \times S^k \to S^k$ de bigrau $(1, \deg f)$ então f é cíclica pelo lema 9.2.

- k par: Se $H : S^k \times S^k \to S^k$ é de bigrau $(1, \deg f)$, aplique a construção de Hopf (vide página 36) para H e consiga aplicação $H' : S^{2k+1} \to S^{k+1}$ que tem invariante de Hopf igual a $\deg f$, pelo lema 6.8. Como $k + 1$ é ímpar, a proposição 6.2 nos dá que o invariante de Hopf de H' é zero. Logo, $\deg f = 0$, e então a única aplicação cíclica (a menos de homotopia) é a função constante. Assim, $G(S^k, S^k) = 0$.

- k ímpar: Seja $\iota \in \pi_k(S^k)$ a classe da aplicação identidade, que gera $\pi_k(S^k)$. Sabe-se que existe aplicação $H : S^k \times S^k \to S^k$ de bigrau $(1, \pm 2)$, pelo lema 6.9. Logo, $\pm 2\iota \in G(S^k, S^k)$. Também, existe aplicação $H : S^k \times S^k \to S^k$ de bigrau $(1, 1)$ se, e só se, $k = 1, 3$ ou 7 (tal aplicação será um produto, e daí S^k será um H-espaço o que ocorre se, e só se, $k = 1, 3$ ou 7).

  Assim, $G(S^k, S^k) = \pi_k(S^k) = \mathbb{Z}$ se $k = 1, 3$ ou 7 e $G(S^k, S^k) = 2\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z} = \pi_k(S^k)$, caso contrário. $\square$

Teorema 12.4. *Para cada inteiro $k \geq 1$, tem-se que*

$$G(S^k, S^k) = P(\Sigma S^{k-1}, S^k).$$

Demonstração. Pelo corolário 11.4, tem-se

$$G(S^k, S^k) \subseteq P(\Sigma S^{k-1}, S^k) \subseteq [S^k, S^k]_* = \pi_k(S^k).$$

Se $k = 1, 3, 7$ então $G(S^k, S^k) = \pi_k(S^k)$ donde $G(S^k, S^k) = P(\Sigma S^{k-1}, S^k)$.

Se $k \neq 1, 3, 7$ é ímpar, a proposição 5.9 nos dá que $[\iota, \iota] \neq 0$, já que nesse caso S^k não é um H-espaço. Logo, $\iota \notin P(\Sigma S^{k-1}, S^k)$. Como $G(S^k, S^k) = 2\mathbb{Z} \subseteq P(\Sigma S^{k-1}, S^k) \subsetneq \mathbb{Z} = \pi_k(S^k)$, segue que $G(S^k, S^k) = P(\Sigma S^{k-1}, S^k)$.

Finalmente, sejam k par e H o homomorfismo do teorema 6.10. Pela proposição 6.11, tem-se que $H[\iota, \iota] \neq 0$.

Portanto, para todo inteiro $m \neq 0$, tem-se que

$$\begin{aligned} H[m\iota, \iota] = H[\overbrace{\iota + \cdots + \iota}^{m \text{ vezes}}, \iota] &= H(\overbrace{[\iota, \iota] + \cdots + [\iota, \iota]}^{m \text{ vezes}}) \\ &= H(m[\iota, \iota]) = mH[\iota, \iota] \neq 0, \end{aligned}$$

lembrando que S^{k-1} é uma suspensão (já que $k \geq 2$) e usando a bi-aditividade do produto de Whitehead (teorema 5.10).

Assim, para todo $m \neq 0$, tem-se que $[m\iota, \iota] \neq 0$ (afinal H é homomorfismo), donde $m\iota \notin P(\Sigma S^{k-1}, S^k)$, e então $P(\Sigma S^{k-1}, S^k) = 0$. Como $G(S^k, S^k) \subseteq P(\Sigma S^{k-1}, S^k)$, segue que $G(S^k, S^k) = 0$. $\square$

Referências

[1] Adams, J. F. - *On the non-existence of elements of Hopf-invariant one*, Annals of Math. **72**, 20–104, 1960.

[2] Arkowitz, M. - *The generalized Whitehead product*, Pacific J. Math. **12**, 7, 1962.

[3] Bredon, G. E. - *Topology and Geometry*, Graduate Texts in Mathematics No. 139, Springer-Verlag, 1993.

[4] Davis, J. F. - *Lecture notes in algebraic topology*, American Mathematical Society, 2001.

[5] Golasiński, M. - *Gottlieb and Whitehead center groups of spheres, projective and moore spaces*, Springer, 2014.

[6] Gottlieb, D. H. - *A certain subgroup of the fundamental group*, American J. Math. **87**, 840–856, 1965.

[7] Gray, B. - *Homotopy theory*, Holden-Day, Inc., 1975.

[8] Hatcher, A. - *Algebraic topology*, Cambridge University Press, 2002.

[9] Hu, S-T. - *Homology Theory: a first course in algebraic topology*, Holden-Day, Inc., 1966.

[10] Hu, S-T. - *Homotopy Theory*, Academic Press, 1959.

[11] Lim, K. L. - *On cyclic maps*, J. Australian Math. Soc (Series A) **32**, 349–357, 1982.

[12] Lundell, A. T. - *The topology of CW complexes*, Van Nostrand Reinhold Company, 1969.

[13] May, J. P. - *A Concise Course in Algebraic Topology* , The University of Chigado Press, London, 1999.

[14] Massey, W. S. - *Algebraic topology: an introduction*, Harcourt, Brace & World Inc., Unites States of America, 1967.

[15] Munkres, J. R. - *Elements of algebraic topology*, Perseus Books Publishing, 1984.

[16] Munkres, J. R. - *Topology*, 2nd ed., Prentice Hall, Inc., Unites States of America, 2000.

[17] Murasugi, K. - *The Center of a Group with a Single Defining Relation*, Math. Annalen **155**, 246–251, 1964.

[18] Piccinini, R. A. - *Lectures on Homotopy Theory*, Elsevier Science Publishers B. V., 1992.

[19] Serre, J-P. - *Groupes d'homotopie et classes de groupes abéliens*, Annals of Mathematics **Vol. 58, No.2**, 258–294, 1953.

[20] Serre, J-P. - *Homologie singulière des espaces fibrés*, Annals of Mathematics **Vol. 54, No.3**, 425–505, 1951.

[21] Steenrod, N. - *Cohomology operations*, Annals of Mathematics Studies, Princeton, 1962.

[22] Varadarajan, K. - *Generalised Gottlieb groups*, Journal of Indian Math. Soc. **33**, 141–164, 1969.

[23] Vick, J. W. - *Homology theory: an introduction to algebraic topology*, 2nd ed., Academic Press, 1973.

[24] Whitehead, G. W. - *Elements of homotopy theory*, Springer-Verlag, New York, 1978.

Índice Remissivo