



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO
MATEMÁTICA**

**ÁREA DE ENSINO E APRENDIZAGEM DA MATEMÁTICA E SEUS
FUNDAMENTOS FILOSÓFICO-CIENTÍFICOS**

**UMA CRONOLOGIA HISTÓRICA SOBRE AS IDEIAS DE CONJUNTOS
LINEARMENTE INDEPENDENTES E DE BASE ATÉ O SÉCULO XIX**

ELAINE CAIRE

INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS

**RIO CLARO
2020**

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

**INSTITUTO DE GEOCIÊNCIAS E CIÊNCIAS EXATAS
CÂMPUS DE RIO CLARO**

ELAINE CAIRE

**UMA CRONOLOGIA HISTÓRICA SOBRE AS IDEIAS DE CONJUNTOS
LINEARMENTE INDEPENDENTES E DE BASE ATÉ O SÉCULO XIX**

**Tese de doutorado apresentada ao Instituto de
Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de
Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista
Júlio de Mesquita Filho, como parte dos
requisitos para obtenção do título de Doutora
em Educação Matemática.**

Orientador: Prof. Dr. Marcos Vieira Teixeira

**RIO CLARO
2020**

C136c	Caire, Elaine Uma cronologia histórica sobre as ideias de conjuntos linearmente independentes e de base até o século XIX / Elaine Caire. -- Rio Claro, 2020 284 p. Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro Orientador: Marcos Vieira Teixeira 1. Independência linear. 2. Base. 3. Álgebra linear. I. Título.
-------	--

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

ELAINE CAIRE

**UMA CRONOLOGIA HISTÓRICA SOBRE AS IDEIAS DE CONJUNTOS
LINEARMENTE INDEPENDENTES E DE BASE ATÉ O SÉCULO XIX**

**Tese de doutorado apresentada ao Instituto de
Geociências e Ciências Exatas do Câmpus de
Rio Claro, da Universidade Estadual Paulista
Júlio de Mesquita Filho, como parte dos
requisitos para obtenção do título de Doutora
em Educação Matemática.**

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Marcos Vieira Teixeira - orientador

Prof. Dr. Sergio Candido de Gouveia Neto

Profa. Dra. Sabrina Helena Bonfim

Profa. Dra. Marta Cilene Gadotti

Profa. Dra. Adriana de Bortoli

Resultado: Aprovado

Rio Claro-SP, 15 de maio de 2020

*Às memórias de minha avó Ercy e meu tio
Wanderly.*

AGRADECIMENTOS

Aos meus filhos, que pacientemente desde que iniciaram sua jornada por aqui, me viam e ouviam estudando, muitas vezes abdicando de momentos importantes com eles.

Obrigada pela compreensão e entendimento. Hoje são homens justos, honestos, mas principalmente sonhadores e buscadores de suas Verdades.

Obrigada a meu orientador que com maestria e sapiência me conduziu a este sonho e a dedicação da banca examinadora.

Aos Amigos, Família Presente e Ausente em matéria, mas juntos sempre em pensamentos e caminhos.

RESUMO

A presente investigação teve como objetivo conceber uma cronologia histórica das primeiras noções de independência linear e de base de um espaço vetorial. Um recorte histórico com dezesseis autores, entre matemáticos e físicos, foi delineado. Dois artigos foram motivadores dessa pesquisa: *The History of the Concept of a Finite-Dimensional Vector* de Jeremy Gray (1980), que questionava o conceito e origem do espaço vetorial, estimulando um estudo mais aprofundado sobre o tema e *The Axiomatization of Linear Algebra* de Gregory Moore (1995) num trabalho sobre a axiomatização da Álgebra Linear entre 1875 a 1940. Foi elaborada extensa pesquisa em obras originais dos principais matemáticos do século XVII até o século XIX, considerando o relacionamento entre eles, troca de cartas e a conformidade de estudos. Essa busca foi efetuada nas principais bibliotecas digitais como Gallica, E rara, além sites especializados como Euler Archive, à procura de artigos e livros onde se apresentasse elementos que direcionassem para ideias de conjuntos linearmente independente e de base. De Leibniz a Peano, obras originais desses dezesseis matemáticos e físicos foram analisadas, trazendo essas ideias de conjuntos linearmente independentes e de base em diferentes contextos de áreas da Matemática e da Física. Iniciando com Leibniz, que percebeu a necessidade de um ente que representasse magnitude, direção e sentido, essa cronologia passou por Euler e Lagrange com a resolução de equações diferenciais, compreendeu Wessel, com a representação vetorial dos números complexos, o wronskiano, os quatérnios de Hamilton, a desigualdade de Cauchy, o cálculo do baricentro de Möbius, o diagrama de Argand, a álgebra linear associativa de Peirce, a teoria da extensão de Grassmann, os sistemas normais vetoriais nos estudos dos físicos Gibbs e Heaviside, a axiomatização de espaço vetorial com Peano.

Palavras-chave: Independência Linear. Base. Álgebra Linear.

ABSTRACT

The present investigation aimed to conceive a historical chronology of the first notions of linear and basic independence of a vector space. A historical section with sixteen authors, between mathematicians and physicists, was designed. Two articles motivated this research: The History of the Concept of a Finite-Dimensional Vector by Jeremy Gray (1980), which questioned the concept and origin of the vector space, stimulating a deeper study on the theme and The Axiomatization of Linear Algebra by Gregory Moore (1995) in a work on the axiomatization of Linear Algebra between 1875 and 1940. Extensive research was carried out on original works by leading mathematicians from the 17th to the 19th century, considering the relationship between them, exchange of letters and the conformity of studies. This search was carried out in the main digital libraries such as Gallica, E rara, in addition to specialized sites such as Euler Archive, looking for articles and books where elements were presented that would lead to ideas of linearly independent and basic sets. From Leibniz to Peano, original works of these sixteen mathematicians and physicists were analyzed, bringing these ideas from linearly independent and basic sets in different contexts in the areas of Mathematics and Physics. Starting with Leibniz, who realized the need for an entity that represented magnitude, direction and sense, this chronology went through Euler and Lagrange with the resolution of differential equations, Wessel understood, with the vector representation of complex numbers, the Wronskian, the quaternions of Hamilton, Cauchy's inequality, the calculation of Möbius's barycenter, Argand's diagram, Peirce's associative linear algebra, Grassmann's extension theory, normal vector systems in the studies of physicists Gibbs and Heaviside, the axiomatization of vector space with Peano.

Keywords: Linear Independence. Base. Linear Algebra.

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1- LEIBNIZ.....	20
FIGURA 2- EULER.....	24
FIGURA 3- LAGRANGE.....	42
FIGURA 4- WESSEL.....	47
FIGURA 5- ARGAND.....	50
FIGURA 6- GAUSS.....	54
FIGURA 7- WRONSKI.....	56
FIGURA 8- CAUCHY.....	59
FIGURA 9- MÖBIUS.....	62
FIGURA 10- HAMILTON.....	65
FIGURA 11- PEIRCE.....	69
FIGURA 12-GRASSMANN.....	75
FIGURA 13- GIBBS.....	81
FIGURA 14-DARBOUX.....	85
FIGURA 15- HEAVISIDE.....	88
FIGURA 16- PEANO.....	91
FIGURA 17- PARALELOGRAMO DE FORÇAS.....	104
FIGURA 18- JOHANN BERNOULLI.....	132
FIGURA 19- RICCATI.....	134

SUMÁRIO

1.INTRODUÇÃO.....	12
1.1 RELEVÂNCIA E JUSTIFICATIVA DO TEMA.....	15
1.2. METODOLOGIA.....	16
2.AUTORES E SUAS CONTRIBUIÇÕES	19
2.1.GOTTIFRIED WILHELM LEIBNIZ.....	20
2.1.1 Correspondências entre Leibniz e Huygens.....	22
2.2 LEONHARD EULER.....	24
2.2.1 <i>Aequationum Differentialium Altiorum Graduum</i>	26
2.2.2 <i>Institutionum Calculi Integralis</i>	33
2.3 JOSEPH LOUIS LAGRANGE.....	42
2.3.1 <i>Solution de Différents Problèmes</i>	43
2.3.3 <i>Sur L'intégration Équation Différentielle a Différences Finies</i>	44
2.3.4 <i>Recherches Sur les suites recurrentes dont les termes varient de plusieurs manieres différentes ou sur l'intégration des équations linéaires aux différences finies partielles</i>	45
2.4 CASPAR WESSEL.....	47
2.4.1 <i>Essai sur La Représentation Analytique de La Direction</i>	48
2.5 JEAN ROBERT ARGAND.....	50
2.5.1 <i>Essai Sur Une Maniere Une de Représenter Les Quantités Imaginaires</i>	51
2.6 JOHANN CARL FRIEDRICH GAUSS.....	54
2.6.1 <i>Theoria residuorum biquadraticum Commentatio segunda</i>	55
2.7 JÓZEF MARIA HOENE WRONSKI.....	56
2.7.1 <i>Réfutation de la théorie des fonctions analytiques de Lagrange</i>	57
2.8 AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY.....	59
2.8.1 <i>Cours D'Analyse de École Royale Polytechnique</i>	60
2.9 AUGUST FERDINAND MÖBIUS.....	62
2.9.1 <i>Der Barycentrische Calkul</i>	63
2.10 WILLIAN STIRLING HAMILTON.....	65
2.10.1 <i>Theory of Conjugate Functions, or Algebraic Couples; with a Preliminary and Elementary Essay on Algebra as the Science of pure Time</i>	66
2.10.2 <i>On Quaternions or on a New System of Imaginaires in Algebra</i>	67
2.10.3 <i>Lectures on Quaternions</i>	68
2.11 BENJAMIN PEIRCE.....	69
2.11.1 <i>Linear Associative Álgebra</i>	70

2.12 HERMANN GUNTHER GRASSMANN.....	75
2.12.1 <i>Die Lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik</i>	75
2.13 JOSIAH WILLARD GIBBS.....	81
2.13.1 <i>Elements of Vector Analysis</i>	82
2.14 GASTON DARBOUX	85
2.14.1 <i>Sur La composition des forces em statique</i>	86
2.15 OLIVER HEAVISIDE.....	88
2.15.1 <i>Eletrical Papers Vol 2</i>	89
2.16 GIUSEPPE PEANO.....	91
2.16.1 <i>Intégration par series dès équations différentielles linéaires</i>	92
2.16.2 <i>Calcolo geometrico</i>	94
2.16.3 <i>Sur les déterminant Wronskien</i>	98
2.16.4 <i>Sur les Wronskiens</i>	99
2.16.5 <i>Sul determinante wronskiano</i>	100
2.16.6 <i>Analisi della teoria dei vettori</i>	100
3. AS PRIMEIRAS NOÇÕES DE BASE ATÉ AXIOMATIZAÇÃO DA ÁLGEBRA LINEAR.....	103
3.1 Uma cronologia sobre Vetor, Espaço Vetorial, Base e Axiomatização.....	103
4. CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	117
REFERÊNCIAS.....	123
APÊNDICE ALGUNS AUTORES QUE INFLUENCIARAM EULER NA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS.....	128
APÊNDICE I: <i>Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus</i>	130
APÊNDICE II: <i>De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum</i>	131
APÊNDICE III: JOHANN BERNOULLI.....	132
APÊNDICE IV: JACOPO FRANCESCO RICCATI.....	134
APÊNDICE V: <i>Aequationum Differentialium Altiorum Graduum</i>	136
APÊNDICE VI: <i>Institutionum Calculi Integralis</i>	152
APÊNDICE VII: <i>Solution de Différents Problèmes</i>	168
APÊNDICE VIII: <i>Sur L'intégration d'une équation différentielle a différences finies qui contient la théorie des suites récurrents</i>	171

APÊNDICE IX: <i>Recherches Sur lès suites recurrentes dont lès termes varient de plusieurs manieres différentes ou sur l'intégration dès équations linéaires aux différences finies partielles</i>	173
APÊNDICE X: <i>Essai sur La Représentation Analytique de La Direction</i>	176
APÊNDICE XI: <i>Essai Sur Une Maniere Une de Représenter Les Quantités Imaginaires</i>	183
APÊNDICE XII: <i>Theoria residuorum biquadraticum Commentatio segunda</i>	194
APÊNDICE XIII: <i>Réfutation de la théorie des fonctions analytiques de Lagrange</i>	197
APÊNDICE XIV: <i>Cours D'Analyse de École Royale Polytechnique</i>	200
APÊNDICE XV: <i>Der Barycentrische Calkul</i>	206
APÊNDICE XVI: <i>Theory of Conjugate Functions, or Algebraic Couples; with a Preliminary and Elementary Essay on Algebra as the Science of pure Time</i>	214
APÊNDICE XVII: <i>On Quaternions or on a New System of Imaginaires in Algebra</i>	215
APÊNDICE XVIII: <i>Lectures on Quaternions</i>	219
APÊNDICE XIX: <i>Linear Associative Álgebra</i>	222
APÊNDICE XX: <i>Die Lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik</i>	228
APÊNDICE XXI: <i>Elements of vectors analysis</i>	241
APÊNDICE XXII: <i>Sur La composition des forces em statique</i> (1875)	250
APÊNDICE XXIII: <i>Eletrical Papers Vol 2</i>	254
APÊNDICE XXIV: <i>Intégration par series dès équations différentielles linéaires</i>	258
APÊNDICE XXV: <i>Calcolo geometrico</i>	263
APÊNDICE XXVI: <i>Sur les determinant Wronskien</i>	271
APÊNDICE XXVII: <i>Sur les Wronskiens</i>	273
APÊNDICE XXVIII: <i>Sul determinante wronskiano</i>	275
APÊNDICE XXIX: <i>Analisi della teoria dei vettori</i>	277

1.INTRODUÇÃO

Este trabalho buscou uma cronologia, um recorte histórico, das primeiras noções de conjuntos linearmente independentes e de base até a axiomatização de espaço vetorial com Peano.

Algumas questões foram estimuladoras e instigadoras para esse estudo, o contexto matemático, quando e como apareceram as primeiras ideias de independência linear e bases até suas atuais definições em espaço vetorial. Uma cronologia histórica de como esses conceitos ou ideias foram se delineando com o tempo nas diversas áreas da Matemática, responderia a essas questões.

Houve uma procura em vão por literaturas a respeito desse tema, comprovando que não haviam bibliografias ou estudos que pudessem responder às indagações quanto ao surgimento das primeiras noções de base e nem como esse conceito teria se desenvolvido matematicamente ao longo dos tempos, que corrobora com o aspecto inédito desse trabalho.

Dois artigos, que estão disponibilizados na internet e foram encontrados em site de busca, foram motivadores desse trabalho: *The History of the Concept of a Finite-Dimensional Vector* (1980) de Jeremy Gray¹, que questionava a origem e conceito de espaço vetorial e *The Axiomatization of Linear Algebra* (1995) de Gregory Moore², que procurou responder ao questionamento de Jeremy Gray quanto às origens e axiomatização da Álgebra Linear.

Em *The History of the Concept of a Finite-Dimensional Vector* (1980), Jeremy Gray advertiu sobre um aspecto não explorado da História da Matemática. Ele questionou as origens do conceito de espaço vetorial, sua axiomatização e seu reconhecimento como tema importante na Matemática. O autor fez uma sugestão sobre um aspecto possivelmente negligenciado de um problema que deveria ser explorado, a apresentação das origens do conceito de espaço vetorial e sua averiguação como um tópico central em matemática. O

¹Jeremy John Gray (nascido em 1947) é um matemático inglês que se interessa principalmente pela história da matemática. Gray estudou matemática na Universidade de Oxford de 1966 a 1969, e depois na Warwick University, obtendo seu Ph.D. em 1980, sob a supervisão de Ian Stewart e David Fowler. Ele trabalha na Open University desde 1974 e tornou-se professor em 1978.

²Gregory Winthrop Moore (nascido em 1961) é um físico teórico americano especializado em física matemática e teoria das cordas. Moore é professor do Departamento de Física e Astronomia da Rutgers University e membro do grupo de High Energy Theory da Universidade. Em 2012 ele se tornou membro da American Mathematical Society.

artigo inquiriu qual seria o momento em que o conceito de espaço vetorial teria emergido com suas estruturas e aceitação no meio matemático. Ele citou uma possível existência de uma base finita já em Euler em 1743. Em 1888, Peano teria apresentado uma definição axiomática no estudo de espaços vetoriais de dimensão n sobre os números reais. O artigo de Gray cita exemplos de noções de base que já teriam aparecido em alguns trabalhos, no entanto não há aprofundamento ou demonstração de tais afirmações.

Em *The Axiomatization of Linear Algebra* (1995), Gregory Moore apresentou uma cronologia sobre a axiomatização da Álgebra Linear entre 1875 e 1940, citando alguns autores matemáticos e suas realizações, no entanto, não houve estudo anterior a 1875 e nem investigação mais detalhada das obras e da matemática envolvida. Segundo Gregory Moore (1995) a Álgebra Linear moderna é baseada em espaços vetoriais e a noção abstrata de espaço vetorial foi isolada pela primeira vez por Peano (1888) em geometria e antes de Peano, uma noção mais limitada de vetores o espaço sobre o real já havia sido axiomatizada por Darboux (1875).

As afirmações de Gray e Moore foram estudadas e avaliadas de forma mais detalhada nesse trabalho.

Esta tese buscou não somente a verificação e constatação das noções de base e conjuntos linearmente independentes em trabalhos citados nesses dois artigos, como também houve uma procura, uma garimpagem nas bibliotecas digitais e em sites de busca de autores e suas obras que tivessem alguma referência ao tema dessa investigação.

Este estudo foi disposto em autores e suas contribuições condizentes a esse tema, em ordem cronológica de seus nascimentos. Em cada obra foram destacados e analisados trechos que apresentavam noções de base e conjuntos linearmente independentes de um espaço vetorial. Os autores foram distribuídos em capítulos, iniciados com uma breve biografia. As obras de cada autor, quando houver mais de uma obra estudada, foram disponibilizadas em ordem cronológica, possibilitando a verificação da construção do conhecimento referente ao tema por aquele autor. No Capítulo 3, uma cronologia foi elaborada com todas as obras em ordem cronológica, possibilitando um recorte histórico.

O primeiro autor estudado foi Leibniz, com a análise de uma carta a Huygens datada de 1679 que discutia a possibilidade e necessidade de se criar um sistema que expressasse posição e magnitude, surgindo daí as primeiras ideias de vetores.

O próximo autor foi Euler, pois segundo Gray (1980) os primórdios desse tema, as noções de base teriam aparecido num artigo de Euler *De Integratione Aequationum Differentialium Altiorum Graduum* (1743), que tratava de resolução de equações diferenciais. No entanto, essa pesquisa constatou que essas ideias não estavam completas no artigo.

Em *De Integratione Aequationum Differentialium Altiorum Graduum* (1743) e posteriormente em, *Institutionum Calculi Integralis* Volume II (1769), Euler teria incluído condições necessárias e indispensáveis sobre as soluções das equações diferenciais lineares e homogêneas de ordem n , se aproximando das ideias atuais de que o conjunto solução de uma equação diferencial linear e homogênea de ordem n é um espaço vetorial de dimensão n ³, formando uma base com n elementos.

Nesta tese também foi investigado se haviam ou não estudos anteriores a Euler (1743) com noções de base. Optou-se pela busca em autores que teriam estudado equações diferenciais, já que Euler em 1743 teria percebido essas ideias no contexto do estudo de equações diferenciais. A procura se deu em trabalhos de Leibniz, Riccati e dos irmãos Bernoulli, Jakob e Johann, no entanto, sem resultados objetivos. Todavia, esses matemáticos contemporâneos a Euler contribuíram para que ele observasse e compreendesse essas ideias.

Leibniz se correspondia com os irmãos Bernoulli, Jakob e Johann, que contribuíram significativamente para o desenvolvimento de métodos para resolução de equações diferenciais e suas aplicações. Euler foi aluno de Johann Bernoulli, essa produtiva troca de conhecimentos entre esses matemáticos conduziu essa investigação no sentido de compreender e entender como as ideias de base apareceram. Os caminhos e meios necessários para a resolução de equações diferenciais delinearam o entendimento e surgimento das primeiras noções de base. Os métodos de separação de variáveis e fator integrante de Leibniz, o método de redução de ordem de Riccati e o atualmente conhecido Método de D'Alembert, todas essas técnicas de resolução de equações diferenciais permitiram que Euler deduzisse as primeiras ideias de base.

Após Euler, outros matemáticos e físicos também recorreram ao uso das ideias de conjuntos linearmente independentes e de base de um espaço vetorial em diversas áreas da matemática e da física. Foram estudados trabalhos de Lagrange em que era necessária a resolução de equações diferenciais; Wessel que foi o pioneiro na representação dos números complexos; o determinante wronskiano, que determina se duas funções ou vetores são

³É provado que se V for um espaço vetorial e $\dim V = n$, ou a dimensão do espaço vetorial for n , qualquer conjunto de n vetores linearmente independentes forma uma base de V .

linearmente independentes; a desigualdade de Cauchy, que na sua concepção utilizou ideias de conjuntos linearmente independentes; os quatérnios de Hamilton formando o que atualmente entendemos como uma base ortonormal; o cálculo do baricentro de Möbius que analisou segmentos de retas orientados, num prenúncio dos vetores; o diagrama de Argand, com a famosa interpretação geométrica dos números complexos; a álgebra linear associativa de Peirce, que utilizou os quatérnios; a teoria da extensão de Grassmann, representando uma quantidade extensiva sendo expressa como soma de unidades independentes; a utilização dos complexos e sistemas normais de vetores unidade ou de comprimento unitário nos estudos de Gibbs e Heaviside e a axiomatização de espaço vetorial com Peano.

Nos Apêndices estão dispostas todas as obras estudadas, trazendo recortes originais, facilitando a leitura desses trechos de artigos e livros. Os Apêndices III e IV dizem respeito a Johann Bernoulli e Jacopo Riccati que influenciaram Euler com seus métodos para resolução de equações diferenciais.

Os Apêndices V e VI que tratam das obras de Euler foram analisados de acordo com as técnicas matemáticas existentes na época, no entanto, usando a notação atual para melhor entendimento e demonstrações matemáticas. No Apêndice V, o artigo *De Integratione Aequationum Differentialium Altiorum Graduum* (1743), os parágrafos estudados não continham demonstrações, então prováveis interpretações e demonstrações matemáticas, baseadas em conceitos e métodos conhecidos por Euler foram desenvolvidas.

1.1 RELEVÂNCIA E JUSTIFICATIVA DO TEMA

A Álgebra Linear envolve diversas áreas da Matemática, Análise, Estatística, em diversas carreiras, Ciências, Engenharia e Economia e a disciplina Álgebra Linear aparece na universidade na grade curricular no primeiro ano contendo quatro ou duas horas-aulas.

Os modelos matemáticos lineares assumiram um importante papel junto ao desenvolvimento da informática e sua importância vai desde as ciências sociais às ciências exatas, permitindo seu uso diário em economia, aviação, exploração petrolífera e circuitos

eletrônicos. Na computação gráfica, por exemplo, a manipulação de imagens, rotação, redimensionamento, alteração de cores são operações lineares.

O tema, *Independência Linear e Base*, apresentado nessa tese é de grande importância em Álgebra Linear e também na disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias.

Esse trabalho propõe uma cronologia, um estudo histórico de um tema matemático, portanto é também de interesse e relevância para a História da Matemática.

A História da Matemática pode satisfazer o desejo de saber como é que os conceitos matemáticos apareceram e se desenvolveram, além de nos oferecer grande satisfação ao estudar os autores clássicos. Ajuda a compreender nossa herança cultural e as interfaces com as outras ciências, arte e filosofias.

O uso didático da História da Matemática é essencial, de extrema valia, como um meio de facilitação do processo ensino-aprendizagem que proporciona, ao ensino um caráter dinâmico, onde há uma redescoberta de conteúdos através da investigação, promovendo a visão da matemática como uma atividade humana e cultural.

Como disse Jean Dieudonné⁴: *“Creio que não é possível compreender a matemática de hoje se não se tiver pelo menos uma ideia sumária de sua história”*.

1.2 METODOLOGIA

Este trabalho foi disposto em autores e suas obras, valorizando o trabalho de cada matemático ou físico, mostrando o ser humano por trás de sua produção. A ideia de cada contribuição ser iniciada com uma biografia também pode aproximar o leitor do contexto histórico do matemático e sua obra. Para os autores com mais de uma obra, artigo ou livro, seus estudos foram listados em ordem temporal, evidenciando como esses autores desenvolveram o tema.

Foram analisadas obras de notáveis matemáticos e físicos entre os séculos XVII e XIX. A Biblioteca Nacional Francesa digital Gallica⁵, foi um acervo investigado por autor, por obra, a procura de noções de base, tema desse trabalho. Também foi alvo dessa pesquisa,

⁴ Jean Dieudonné (1906-1992) foi um matemático francês, historiador matemático, membro do grupo Bourbaki.

⁵<https://gallica.bnf.fr/>

a E-Rara⁶, uma biblioteca digital suíça de livros raros, além do Google Books⁷ e o site Euler Archive⁸.

Para investigação de estudos anteriores a Euler (1743) com noções de base a busca se deu em autores que teriam estudado equações diferenciais, trabalhos de Leibniz, Riccati e Johann Bernoulli com estudos sobre métodos de resoluções de equações diferenciais. Não foi encontrado nenhum artigo ou livro que se referisse a ideia de conjuntos linearmente independentes e de base.

O site Euler Archive contém todas as obras conhecidas de Euler e está disposto em assuntos estudados pelo matemático, onde um dos temas é equações diferenciais. Foram buscados em todos os artigos que tinham como tema equações diferenciais, que era objeto de seu artigo *De Integratione Aequationum Differentialium Altiorum Graduum* (1743), ideias ou noções de conjuntos linearmente independentes e de base à procura de algum estudo antes de 1743. No entanto, não foi encontrado nenhum artigo de Euler antes de 1743 que tinha como tema equações diferenciais, mas posterior em *Institutionum Calculi Integralis* Volume II (1769).

No site Gallica, autores que estudaram o tema equações diferenciais tiveram seus artigos investigados à procura de noções de base e conjuntos linearmente independentes. Foram eles: Lagrange, Laplace, Cauchy e Fourier. Todas as obras de Laplace que constam no site da Biblioteca Nacional Francesa Gallica, foram analisadas, em busca de estudos de Laplace que aparecessem ideias de base ou conjuntos linearmente independentes, não alcançando resultado favorável.

Por outro lado, houve a procura, também sem resultados, de estudos acerca de segmentos orientados, antes dos estudos de Wessel em 1797, com a representação dos complexos.

Os outros autores estudados foram em parte indicados nos dois artigos citados como motivadores e também em sites de busca pelo tema desse trabalho.

Com a tradução desses textos, artigos e livros, do latim, do francês, do italiano, alemão e inglês, observou-se a diferença de linguagem e simbologia matemática através dos tempos. Em alguns momentos com a intenção de compreensão e entendimento, houve a necessidade de pesquisa com propósito comparativo em trabalhos atuais.

⁶<https://www.e-rara.ch/>

⁷<https://books.google.com.br/>

⁸<http://eulerarchive.maa.org/>

Alguns textos em latim tinham traduções em inglês ou alemão, no entanto, os textos em latim foram priorizados nas suas traduções, numa tentativa de precisão e fidelidade aos textos originais. Com a tradução desses textos, o acesso a um público maior tornou-se mais facilitado.

2. AUTORES E SUAS CONTRIBUIÇÕES

Nesse capítulo foram estudadas obras de dezesseis autores que contribuíram para as noções de conjuntos linearmente independentes e de base. Para a seleção desses autores, foram utilizados vários instrumentos de busca, site Gallica, com a listagem de artigos de autores, analisados um a um, a indicação de nomes de autores nos artigos de *The History of the Concept of a Finite-Dimensional Vector* de Jeremy Gray (1980) e *The Axiomatization of Linear Algebra* (1995) de Gregory Moore e busca em sites de procura pelo tema estudado.

Trechos de artigos e livros onde aparecem ideias de base num espaço vetorial e conjuntos linearmente independentes foram retratados.

Os autores estão dispostos em ordem cronológica, de forma temporal considerando o ano de seus nascimentos a partir de Leibniz até o século XIX, concluído com os trabalhos de Peano, um marco para a axiomatização de espaço vetorial.

As biografias foram pesquisadas, em sua grande maioria, no site Mac Tutor History of Mathematics Archive⁹, que concentra biografias dos mais notáveis matemáticos de todos os tempos.

⁹<http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/> Acesso em 25 maio 2020

2.1 GOTTIFRIED WILHELM LEIBNIZ

Figura 1: Leibniz



Fonte: Wikipédia¹⁰

Nascido em 01 de julho de 1646 em Leipzig, Alemanha

Morto em 14 de novembro de 1716, Hannover, Alemanha

Leibniz era um trabalhador incansável, um escritor de cartas universal (ele tinha mais de 600 correspondentes), um grande cientista e um dos mais poderosos espíritos da civilização ocidental.

Em *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus* (1684), vide Apêndice I, formalizou o cálculo diferencial antecipando-se em cerca de três anos à publicação dos *Principia Mathematica* de Newton.

Nessa obra, utilizando os infinitésimos, introduziu, sob a notação dx , a noção de diferencial para designar uma quantidade infinitamente pequena, associada a uma variável

x . Os diferenciais foram tratados como segmentos e os quocientes diferenciais $\frac{dy}{dx}$. O diferencial e o quociente diferencial de Leibniz correspondiam, respectivamente, ao momento e a fluxo de Newton.

Ainda em *Nova methodus* apareceram as fórmulas de derivada do produto e do quociente $d(xy) = ydx + xdy$ e $d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2}$ onde os termos $dx dy$ foram negligenciados por serem infinitesimais, não interferindo no resultado final.

Em *De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum* (1686), vide Apêndice II, Leibniz sistematizou o cálculo integral, estabelecendo a notação básica definitiva

¹⁰Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Gottfried_Wilhelm_Leibniz. Acesso em 25 maio 2020

para o mesmo, como a notação $\int x$, depois modificada para $\int x dx$ para a integração usual.

Leibniz também inventou uma máquina de calcular que lidava com adição, subtração, multiplicação, divisão e extração de raízes. Ele foi o pioneiro na utilização da *base binária* em suas primeiras máquinas calculadoras, já nascia com Leibniz o pensamento de que através de uma quantidade finita de números seria possível expressar qualquer outro número. Esse conjunto finito geraria todo o universo dos números naturais que Leibniz precisava representar.

Ele também escreveu e estudou filosofia, a *doutrina das mônadas* (a ideologia de que o universo seria constituído de unidades espirituais e materiais indivisíveis e incomunicáveis entre si), a *doutrina da harmonia preestabelecida* (Deus teria preestabelecido o caminho das mônadas de modo a concorrerem independentemente para um mesmo fenômeno) e o *otimismo* (Deus teria criado o melhor dos mundos possíveis). Entretanto, a filosofia das mônadas já existia entre os gregos antes de Cristo, sendo aprofundada por Leibniz.

As mônadas seriam as unidades que eram pontuais, indivisíveis e que unidas constituiriam a matéria extensa e divisível que se conhece nos corpos.

O pensamento da dualidade matéria e espírito, estático e movimento dominaram as reflexões de Leibniz.

Leibniz mudou essa Física estática e geométrica; apresentando uma ideia nova de alguma coisa ativa. O movimento visível não era simples movimento local observado, ele deveria ser o resultado de uma força; produzido por uma força viva, que estaria na mônada. O movimento não era criado por uma energia cinética, mas conservado como parte da mônada. A ideia de uma natureza estática e inerte era substituída por uma ideia dinâmica. Ao criticar a formulação cartesiana das leis do movimento, conhecida como Mecânica, Leibniz tornou-se, em 1676, o fundador de uma nova formulação, conhecida como Dinâmica, que substituiu a energia cinética pela conservação do movimento.

Provavelmente, baseado em suas reflexões e pensamentos sobre as mônadas, entes materiais e espirituais, tenha conduzido Leibniz à constatação da necessidade de entes que pudessem expressar magnitude e movimento.

2.1.1 Correspondências entre Leibniz e Huygens¹¹

Leibniz certificou a imprescindibilidade de entes que seriam os primórdios de vetores em sua correspondência com Huygens.

Nessa correspondência, Leibniz demonstrou a necessidade do aparecimento de um sistema que comportasse simultaneamente, o ente algébrico e o ente geométrico e desenvolveu através de equivalências um sistema de pontos retas e planos que importavam direção e movimento.

Leibniz discutiu a possibilidade da criação de um sistema que serviria como um método de análise espacial. As principais ideias de Leibniz apareceram em uma carta datada de 08/09/1679, escrita a Christian Huygens:

“Eu não estou satisfeito com a Álgebra, porque não me trouxe métodos de construção mais bonitos em geometria. Isto porque eu acredito que nós precisamos de outra análise, distinta de geometria que expresse situação como a álgebra expressa magnitude. E eu acredito que encontrarei um meio de expressar figuras e máquinas e movimentos, como a álgebra representa números e magnitude”.

“Eu descobri certos elementos com uma nova característica que são diferentes da álgebra e que tem grandes vantagens na representação na minha mente, num caminho mais natural, sem figuras, onde tudo depende do senso de percepção. Álgebra tem a característica de números indeterminados ou magnitudes somente, mas não expressa a situação, ângulos ou movimentos diretamente. Consequentemente é difícil analisar as propriedades da figura no cálculo e ainda mais difícil encontrar demonstrações geométricas e construções, até quando o cálculo algébrico é completo. Mas uma nova característica que segue das figuras visuais não pode deixar de dar a solução, a construção e a demonstração geométrica ao mesmo tempo e num caminho natural”.

“Mas seu principal valor reside no raciocínio que pode ser feito e nas conclusões que podem ser tiradas pelas operações com seus caracteres, que poderiam ser expressos em figuras e ainda em modelos sem confundi-los com muitos pontos e linhas. Esse método nos guia-

¹¹ Christian Huygens (1629-1695) foi um matemático, físico e astrônomo holandês. Descobriu a polarização da luz (1678) e formulou a teoria ondulatória da propagação da luz em *Traité de la lumière* (1690) elaborando o célebre princípio de Huygens, no qual expôs sua concepção da luz como onda de energia que se propaga no espaço.

rá certamente e sem esforço. Eu acredito que por esse método a mecânica possa ser tratada quase como a geometria e pode-se até testar as qualidades dos materiais, porque ele depende de suas figuras e de suas partes sensíveis. Eu não tenho nenhuma esperança de que possamos ir muito longe na física até que tenhamos descoberto algum método de abreviação para aliviar o fardo da imaginação”

A ideia de Leibniz era desenvolver uma caracterização para análise de problemas que descrevesse a construção da solução em termos totalmente geométricos. Hoje, vê-se que a resolução de um problema geométrico passa por duas etapas: a modelagem do problema em termos algébricos e a solução algébrica desse modelo, que passa por uma interpretação geométrica. Leibniz queria uma caracterização que acabasse com essas duas versões sucessivas: geométrico/algébrica e algébrico/geométrica.

Leibniz desenvolveu um sistema que já mostrava uma tentativa de análise vetorial e concentrava na ideia de congruência de conjunto de pontos. Ele usou A,B para representar pontos fixos e X,Y para representar pontos desconhecidos. O símbolo $\cong$ foi usado para representar congruência. $AB \cong AY$ significava que Y seria o ponto da esfera com centro em A e raio AB. A relação $AX \cong BX$ determinava um plano, cujos pontos X equidstavam de A e B e a relação $ABC \cong ABY$ determinava um círculo. Na relação: $AY \cong BY \cong CY$ ele concluiu que Y é uma linha reta. Leibniz também demonstrou que a relação $AY \cong BY \cong CY \cong DY$ determinava um ponto. A intersecção de dois planos seria uma linha reta. A relação $AY \cong BY$ determinava um plano e a relação $AY \cong CY$ determinava outro plano, logo a combinação seria uma linha reta.

A constatação da indispensabilidade desses entes verificada por Leibniz nessa carta a Huygens em 1679, revelou o pensamento de Leibniz num sistema que expressasse magnitude como álgebra e que denotasse a situação, movimentos e ângulos.

Em outra carta escrita a Huygens em 1691, Leibniz resolveu a equação:

$$y \frac{dx}{dy} = f(x) \cdot g(y) \text{ por separação de variáveis}^{12} \text{ resultando: } \frac{dx}{f(x)} = \frac{dy}{y} \cdot g(y) \text{ .}$$

¹² A separação de variáveis desenvolvida primeiramente por Leibniz e aprofundada por Johann Bernoulli, foi amplamente utilizada por Euler em seus trabalhos condizentes à resolução de equações diferenciais.

Em 1694, Leibniz utilizando o método do fator integrante¹³ resolveu uma equação linear $mdx + nydx + dy = 0$ com m, n funções de x , considerando $\frac{dp}{p} = ndx$ e substituindo na equação linear ele obteve $pmdx + ydp + pdy = 0$.

Integrando e tomando $d(py) = ydp + pdy$ conseguiu $\int pmdx + py = 0$.

A influência de Leibniz nos trabalhos de Euler se verificou através de suas técnicas de resolução de equações diferenciais, utilização de fator integrante e a separação de variáveis.

2.2 LEONHARD EULER

Figura 2: Euler



Fonte: Wikipédia¹⁴

Nascido em 15 de abril de 1707 na Basiléia, Suíça

Morto em 18 de setembro de 1783 em São Petersburgo, Rússia

O pai de Leonhard Euler era Paul Euler. Paul Euler estudara teologia na Universidade de Basel e assistira às palestras de Jakob Bernoulli.

¹³O método do fator integrante foi desenvolvido por Leibniz para resolução de equações diferenciais lineares de 1ª ordem e utilizado por Euler nos estudos sobre resolução de equações diferenciais que despontaram ideias sobre conjuntos linearmente independentes de base.

¹⁴Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Leonhard_Euler Acesso em 25 maio 2020

Na verdade, Paul Euler e Johann Bernoulli haviam morado na casa de Jakob Bernoulli enquanto estavam na Basileia. A ligação entre Euler e os irmãos Bernoulli iniciou-se com seu pai.

Johann Bernoulli logo descobriu o grande potencial de Euler para a matemática em aulas particulares que o próprio Euler ministrava.

Em 1723, Euler completou seu mestrado em filosofia. Ele começou seus estudos de teologia no outono de 1723, mas obteve o consentimento de seu pai para mudar para a matemática depois que Johann Bernoulli usou de sua persuasão. O fato de o pai de Euler ter sido amigo de Johann Bernoulli em seus dias de graduação, tornava a tarefa de persuasão muito mais fácil.

Euler não alcançou esse notável nível de produção sem ajuda, principalmente após ficar quase ou totalmente cego, ele foi ajudado por seus filhos, Johann Albrecht Euler, que foi nomeado para a cadeira de Física na Academia de São Petersburgo em 1766, tornando-se seu secretário em 1769 e Christoph Euler, que teve uma carreira militar. Euler também foi ajudado por dois outros membros da Academia, W.L. Krafft e A.J. Lexell e o jovem matemático N. Fuss que foi convidado para a Academia da Suíça em 1772. Fuss era neto de Euler e tornou-se seu assistente em 1776.

Os cientistas que assistiam Euler não eram meros secretários; ele discutia o esquema geral das obras com eles, e eles desenvolveram suas ideias calculando tabelas e, às vezes, compilando exemplos. Euler creditou Albrecht, Krafft e Lexell por sua ajuda com seu trabalho de 775 páginas sobre o movimento da lua, publicado em 1772.

Fuss ajudou Euler a preparar mais de 250 artigos para publicação durante um período de cerca de sete anos em que atuou como seu assistente.

Trabalhou com Teoria dos Números, Combinatória, Probabilidade, Equações Diferenciais, Integração, Teoria das equações, Séries Infinitas, Cálculo das Variações, Geometria, Astronomia, Física, Mecânica.

Problemas em física-matemática levaram Euler a um amplo estudo de equações diferenciais.

Em 1748, em *Introductio in analysin infinitorum*, Euler fez as ideias de Johann Bernoulli mais precisas na definição de uma função e afirmou que a análise matemática era o estudo das funções. Nesse artigo Euler deduziu a fórmula $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ que foi necessária para uma das demonstrações dessa tese.

Euler apresentou um desenvolvimento analítico para o Método da Variação das Constantes ou dos Parâmetros, com um artigo em 1748, em Recherches sur la question des inégalités du mouvement de Saturne et de Jupiter, em que estudava as órbitas de Saturno e Júpiter.

Em 1755, Euler publicou Institutionum calculi differentialis, que começou com um estudo do cálculo das diferenças finitas. O trabalho fez uma investigação completa de como a diferenciação se comporta utilizando substituições. Em Institutionum calculi integralis (1768-70), o objetivo de Euler foi o estudo do cálculo integral, mas também foram apresentadas descobertas sobre equações diferenciais.

Para entendimento do pensamento e descobertas de Euler, no que diz respeito às primeiras ideias de conjuntos linearmente independentes e de base, o artigo De Integratione Aequationum Differentialium Altiorum Graduum de 1743 e o livro Institutionum Calculi Integralis Volume II, Seção I e II de 1769 foram estudados numa tentativa de construção do pensamento de Euler, entender quais os conhecimentos matemáticos necessários para que ele pudesse ter atingido a condição de percepção do tema desse trabalho.

Nesse trabalho somente serão citados os trabalhos de Euler que o levaram às ideias de base.

2.2.1 De Integratione Aequationum Differentialium Altiorum Graduum (1743)

Esse artigo foi apresentado à Academia Berlim em 06/09/1742.

Publicado em *Miscellanea Berolinensia* 7, 1743, pp. 193-242.

Nesse artigo, Euler teria vislumbrado suas primeiras tentativas para deduções sobre base, num estudo sobre integração de equações diferenciais.

O artigo possui 50 parágrafos, porém nesse estudo foi considerado até o 17º parágrafo, por se tratar do objeto desta tese.

Convém ratificar aqui, que para a época a palavra “grau” tinha o significado atual de “ordem”. A tradução abaixo considerará o entendimento como “ordem” da equação diferencial.

Muitos métodos, até então, haviam sido concebidos para resolução de equações diferenciais de primeira ordem, no entanto, não havia método específico, naquela época, para resolução de equações diferenciais de ordem diferente de 1 .

A solução das equações diferenciais de ordem superiores era então obtida através da redução de ordem, fazendo substituições adequadas.

O método que Euler tratou nesse artigo ajudou a resolver equações de ordem superiores, sem redução prévia, eram integradas e reduzidas a ordens menores imediatamente.

Ele considerou:

$$0 = Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2} + \frac{Dd^3y}{dx^3} + \frac{Ed^4y}{dx^4} + \frac{Fd^5y}{dx^5} + etc$$

De ordem n , onde $A, B, C, \dots, N$ eram constantes, x a variável, dx constante e a outra variável y teria seus diferenciais dy, ddy, d^3y .

Para Euler, a equação integral completa, exceto as quantidades constantes contidas na equação diferencial, deveria incluir novas constantes arbitrárias, de mesma ordem da equação diferencial apresentada.

Se a equação diferencial era de ordem n , então o último termo deveria ser:

$$N \frac{d^n y}{dx^n} .$$

A equação acima após uma integração seria reduzida à ordem $n-1$.

Se duas integrações fossem realizadas a ordem da equação seria reduzida a $n-2$ e assim por diante, a cada integração uma constante era obtida. Após n integrações, se conseguiria uma equação com termos finitos expressos.

A equação integral teria um número de constantes arbitrárias exatamente igual ao grau a sua ordem.

Se somente algumas constantes eram determinadas, mas não todas, uma solução particular era obtida para a equação diferencial.

Euler forneceu um critério para solução de equações diferenciais de ordem diferente de 1 .

Para que uma dada solução pudesse satisfazer a equação acima, a solução deveria ser substituída, fazendo a verificação, atentando para que a solução ou a equação integral tivesse o número de constantes arbitrárias exatamente igual a sua ordem. Caso não fosse verificado o número de constantes, a solução não seria completa e sim particular.

No Apêndice V deste trabalho seguem as possíveis formas de resolução destas equações diferenciais de acordo com as técnicas e métodos desenvolvidos naquela época e conhecidos por Euler.

No parágrafo VI, Euler apresentou a equação conhecida atualmente como equação de Riccati, que foi quem a propôs, para mostrar a diferença entre equações integrais completas e incompletas.

Foi dada a equação diferencial: $a \cdot dy + y \cdot dx = (a + x \cdot x) dx$.

Euler afirmou que $y = x$ era uma equação integral¹⁵, o que não significava que fosse a integral completa, pois nem a constante a estava incluída, nem outra constante exigida pela equação diferencial de ordem 1 aparecia na solução, portanto era uma integral particular.

Euler nos forneceu a equação completa como:

$$y = x + \frac{a b e^{\frac{-xx}{aa}}}{aa + b \int e^{\frac{-xx}{aa}} dx}.$$

E observou que se $b = 0$, a equação integral particular seria $y = x$.

Nesse parágrafo, uma única constante arbitrária b foi considerada, a equação conhecida atualmente como de Riccati (equação diferencial de 1ª ordem não linear) que Euler constatou que na integral completa apareceu uma única constante arbitrária.

No parágrafo VII, Euler apresentou uma equação diferencial da diferencial ou como chamamos atualmente equação diferencial de 2ª ordem, $y = x \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{ax ddy}{dx^2}$, e a equação finita $y = x$ seria suficiente, mas estava longe de ser a integral completa, porque a equação completa deveria conter, exceto a constante a , duas constantes arbitrárias.

Euler afirmou que a equação $y = nx$ com a constante n também satisfazia, mas ainda se tratava de uma equação particular.

Então a equação integral completa seria $y = nx + bx \int \frac{e^{\frac{-x}{a}} dx}{x^2}$ e teria duas constantes arbitrárias b, n , além da constante a .

Euler notou duas constantes arbitrárias na solução: b e n , ou seja, como tratava-se de equação de 2ª ordem, o esperado é que a solução deveria conter duas constantes.

¹⁵ Isto quer dizer que é uma solução (termo atual).

Já no parágrafo VIII ao considerar a equação diferencial

$$0 = Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2} + \frac{Dd^3y}{dx^3} + \frac{Ed^4y}{dx^4} + \frac{Fd^5y}{dx^5} + etc, \text{ ele afirmou que todas as equações}$$

integrais particulares deveriam estar contidas na integral completa e que uma equação integral seria completa quando todas as equações integrais particulares fossem consideradas.

No parágrafo IX, Euler verificou que se p fosse um valor conveniente para y , dessa forma $y = p$, $y = \alpha p$ também seria, pois se o valor p no lugar de y substituído

$$\text{retornasse } 0 = Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2} + \frac{Dd^3y}{dx^3} + \frac{Ed^4y}{dx^4} + \frac{Fd^5y}{dx^5} + etc, \text{ então o valor } \alpha p \text{ no lugar}$$

de y substituído tornaria a expressão evanescente, dessa forma uma constante arbitrária α poderia ser introduzida na equação integral particular $y = p$.

Se a equação $y = q$ satisfizesse o propósito, da mesma maneira $y = \beta q$ satisfaria.

Euler juntou esses dois valores particulares $y = \alpha p$ e $y = \beta q$, num mais amplo ou abrangente $y = \alpha p + \beta q$.

Daí se a expressão $Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2} + \frac{Dd^3y}{dx^3} + \frac{Ed^4y}{dx^4} + \frac{Fd^5y}{dx^5} + etc$ fosse igual a zero, para αp quanto βq no lugar de y , a mesma expressão se tornaria zero se em vez de y fosse colocado $\alpha p + \beta q$.

Nesse parágrafo, entende-se que Euler tenha afirmado que dadas duas soluções particulares da equação diferencial acima, uma combinação linear, em termos modernos, dessas duas soluções também seria uma solução, o que pode ser verificado facilmente.

Euler observou no parágrafo X que se $p, q, r, s, \dots$ fossem funções de x e que se substituídos na expressão $Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2} + \frac{Dd^3y}{dx^3} + \frac{Ed^4y}{dx^4} + \frac{Fd^5y}{dx^5} + etc$ a fizessem desaparecer, então o valor de $\alpha p + \beta q + \gamma r + \sigma s + \dots$ se substituído na mesma expressão também a retornaria zero. Dados p, q, r, s valores particulares de y para a equação proposta conveniente, juntados, tornaria um valor muito mais amplo $\alpha p + \beta q + \gamma r + \sigma s + \dots$ e satisfaria a equação proposta. Esse valor seria completo se o total de constantes arbitrárias $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ fosse igual à ordem dessa equação diferencial.

No parágrafo XI, para encontrar a equação integral completa de

$$0 = Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2} + \frac{Dd^3y}{dx^3} + \frac{Ed^4y}{dx^4} + \frac{Fd^5y}{dx^5} + etc, \text{ os valores particulares deveriam}$$

satisfazer a equação.

Euler nos esclareceu que o número de equações particulares e constantes arbitrárias deveria ser o maior expoente n , que se tratava da ordem da equação diferencial.

No parágrafo XII, para reduzir o grau, a ordem, de uma equação diferencial dada:

$$0 = Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2} + \frac{Dd^3y}{dx^3} + \frac{Ed^4y}{dx^4} + \frac{Fd^5y}{dx^5} + etc, \text{ onde } A, B, C, D \text{ eram constantes e}$$

sua ordem seria n , Euler derivou sucessivamente a equação de 1ª ordem reduzida

$$y = e^{\int p dx} :$$

$$\frac{dy}{dx} = p \cdot e^{\int p dx}$$

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{dp}{dx} \cdot e^{\int p dx} + p^2 e^{\int p dx} = e^{\int p dx} \left(p^2 + \frac{dp}{dx} \right)$$

$$\frac{dddy}{dx^3} = e^{\int p dx} \left(p^3 + 2p \frac{dp}{dx} + \frac{ddp}{dx^2} \right)$$

Logo, Euler percebeu que dividindo por $y = e^{\int p dx}$ reduziria a ordem da equação diferencial para grau $n-1$.

No parágrafo XIII, o autor tomou $p = \text{constante}$ e $dp, ddp, dddp$ muito pequenos com $A, B, C, \dots$ constantes e a equação algébrica seria $0 = A + Bp + Cp^2 + Dp^3 + \dots + Np^n$ ¹⁶.

Para algum valor de p , se $y = e^{px}$ for uma equação integral particular, satisfazendo a equação diferencial proposta; $y = \alpha e^{px}$, também satisfaria a equação diferencial se $p \text{ constante}$ fosse raiz da equação algébrica $A + Bp + Cp^2 + Dp^3 + \dots = 0$.

Analogamente, no parágrafo XIV, para encontrar valores particulares de p Euler verificou que era necessário resolver a equação algébrica de n dimensões

$$0 = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \dots + Nz^n \text{ utilizando as raízes ou divisores no mesmo número de}$$

¹⁶Em 1739 Euler apresentou a Johann Bernoulli um método de integração de equações diferenciais ordinárias e lineares de alto grau utilizando uma equação algébrica correspondente. A interpretação das correspondências trocadas se encontram nas páginas 447 e 448 em *The History of Mathematics: A Reader*, de John Fauvel e Jeremy Gray, publicado em 1987.

valores particulares de y . Se $pz - q$ for um divisor¹⁷ dessa equação, a partir do qual

$z = \frac{q}{p}$ tornando $y = \alpha e^{\frac{qx}{p}}$, valor particular com a constante arbitrária α . Como a

equação algébrica tem n dimensões, deveria conter n raízes ou divisores, havendo, portanto, também n valores particulares para y , ou seja, juntos, seria obtido o valor geral para y ; e também o valor completo porque conteria n constantes arbitrárias tornando-se o critério de uma equação integral completa.

No parágrafo XVI, dada a mesma equação diferencial, atualmente chamada homogênea:

$$0 = Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2} + \frac{Dd^3y}{dx^3} + \frac{Ed^4y}{dx^4} + \frac{Fd^5y}{dx^5} + etc$$

A equação algébrica correspondente seria:

$$0 = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \dots + Nz^n$$

Se for considerado: z^0 no lugar de y , z no lugar de $\frac{dy}{dx}$ e generalizando

z^k para $\frac{d^k y}{dx^k}$.

Dados os divisores da equação algébrica: $pz - q, q - pz$ e a equação diferencial

$$qy - \frac{pdy}{dx} = 0 \text{ a integral é } y = \alpha e^{\frac{qx}{p}}.$$

No parágrafo XVII, foi dada a equação algébrica $p + qz + rzz$ e a originária equação diferencial $py + \frac{qdy}{dx} + \frac{rddy}{dx^2} = 0$. Se a equação de uma curva algébrica tiver dois ou mais fatores iguais, por exemplo, se $(p - qz)^2$ for um divisor de uma equação algébrica, proveniente da equação diferencial $ppy - \frac{2pqdy}{dx} + \frac{qqddy}{dx^2} = 0$, Euler concluiu que

¹⁷ Euler aplicou o entendimento de que se $z = \frac{q}{p}$ for raiz da equação $0 = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \dots + Nz^n$

então $z - \frac{q}{p}$ é divisor de $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \dots + Nz^n$.

$y = e^{\frac{p}{q}x} u$ ¹⁸ e considerando $ddu=0$, $u = \alpha + \beta x$, ou seja, $y = e^{\frac{p}{q}x}(\alpha + \beta x)$, que significava que haviam duas constantes arbitrárias α, β .

Mais adiante nesse mesmo artigo, Euler estudou equações com fatores repetidos de ordem superior, bem como aqueles com raízes complexas.

Nesse artigo, Euler apresentou os primórdios que levariam às ideias de base, tal como atualmente é entendido, na resolução de equações diferenciais. Ele percebeu que a cada integração uma nova constante arbitrária era obtida e que o número de constantes arbitrárias era exatamente o número da ordem ou grau como era chamado, isso tanto nas equações diferenciais chamadas hoje lineares como também na equação de Riccati, de 1º grau ordem e não linear.

Ainda afirmou que se uma equação diferencial de ordem 2 tiver duas soluções, ou duas equações integrais particulares, a combinação linear, termo moderno, dessas soluções também seria uma solução. No entanto, nesse artigo Euler não concluiu que as soluções deveriam ser linearmente independentes, termo utilizado atualmente, ou seja, não concluiu nada sobre a natureza das soluções. Euler somente analisou o número das constantes arbitrárias, Euler não avaliou nesse artigo nenhuma condição referente às integrais particulares ou soluções.

¹⁸Euler utilizou, o que atualmente é conhecido como Método de D'Alembert.

Jean D'Alembert (1717-1783), matemático francês, contemporâneo de Euler, que dá nome a esse método que permite transformar uma equação diferencial linear homogênea de ordem n , termo atual, em uma outra equação linear homogênea de ordem $n-1$ a partir de uma solução particular. No caso de uma equação diferencial linear homogênea de 2ª ordem, dada uma solução particular, determina-se a segunda solução linearmente independente da primeira.

2.2.2 Institutionum Calculi Integralis (1768-1770)

Essa obra foi composta por três volumes que foram analisados e estudados no intuito de seguir os passos de Euler até o surgimento das primeiras noções de base e conjuntos linearmente independentes na resolução de equações diferenciais.

Institutionum Calculi Integralis foi originalmente publicado com o título completo: Institutionum calculi integralis volumen primum in quo methodus integrandi a primis principiis usque ad integrationem aequationum differentialium primi gradus pertractatur. acad. Petrop. Parisin e Londin. Petropoli impensis academiae imperialis scientiarum em 1768.

O segundo volume foi publicado com o título completo Institutionum calculi integralis volumen secundum in quo methodus inveniendi functiones unius variabilis ex data relatione differentialium secundi altiorisve gradus pertractatur. Auctore Leonhardo Euler acad. scient. Borussiae directore vicennali et socio acad. Petrop. Parisin. et Londin. Petropli impensis academiae imperialis scientiarum em 1769 e o terceiro volume Institutionum calculi integralis volumen tertium, in quo methodus inveniendi functiones duarum et plurium variabilium, ex data relatione differentialium cujusvis gradus pertractatur. Una cum appendice de calculo variationum et supplemento, evolutionem casuum prorsus singularium circa integrationem aequationum differentialium continente. Auctore Leonhardo Eulero acad. scient. Borussiae directore vicennali et socio acad. Petrop. Parisin. et Londin. Petropoli, impensis academiae imperialis scientiarum em 1770.

Esses livros foram utilizados por Euler em salas de aula, daí o aspecto didático que compreende boa parte de seus estudos sobre cálculo integral. Diferente de seus artigos, nesses livros há demonstrações, favorecendo e facilitando a leitura.

Euler apresentou nessa obra as constantes arbitrárias, estudou as equações Riccatianas, a utilização da separação das variáveis por partes, utilizou o fator integrante para que as equações pudessem se tornar exatas e de fácil resolução e por fim, a solução, a integração completa.

Na Introdução, na definição 6, Euler definiu integral completa e particular:

A integral completa seria obtida quando a função procurada fosse representada com toda extensão e com constante arbitrária, mas quando a constante fosse determinada a integral seria chamada de particular. Para melhor entendimento e visualização, se a equação integral

completa for $y = \alpha p + \beta q + \gamma r + \dots$ uma das equações integrais particulares poderia ser $y = \alpha p$ com as constantes arbitrárias $\beta = \gamma = \dots = 0$.

No Corolário 2 dessa definição, Euler concluiu que a integral completa abrangeria todas as integrais particulares dentro dela própria e que poderia ser formada facilmente.

No Volume I, Euler observou que a integração de uma equação diferencial ordinária de 1ª ordem produz uma constante arbitrária.

No Volume I, Seção I, Capítulo I, Euler definiu que a fórmula de um diferencial seria racional, quando o diferencial dx da variável x cuja função seria procurada, fosse multiplicada por uma função racional de x , onde X designaria essa função racional de x e então a fórmula Xdx do diferencial seria racional.

Corolário 1:

Por isso, neste capítulo, ele buscou uma função de x , X , tal que $\frac{dy}{dx} = X$.

Corolário 2:

Euler obteve uma função de x cuja diferença seria igual a Xdx , portanto a integral $\int Xdx$ forneceria a função procurada.

Corolário 3:

Se P fosse uma função de x , de modo que o diferencial $dy = Xdx$, e como a quantidade $P+C$ seria o mesmo diferencial. Logo, a integral completa Xdx seria $P+C$ com C uma constante arbitrária.

Nessa Seção Euler verificou que após a integração, uma equação diferencial de primeira ordem teria uma constante arbitrária.

No Volume I, Seção II, Capítulo I, item 397, Euler afirmou que uma equação diferencial deveria ser tratada pela separação de variáveis quando pudesse ser separada em duas partes de modo que em cada, apenas uma variável estivesse presente.

O Volume II, Seção I, trata somente de resoluções de equações diferenciais de 2ª ordem.

No Volume II, Seção I, Capítulo I, verifica-se no item 719, a importância que Euler deu para o aparecimento de duas constantes que tornam a integração completa, provenientes de dupla integração.

Ele considerou $dy = p dx$ e $dp = q dx$ e q função de p para procurar a relação entre as variáveis a relação entre as variáveis x e y .

Considerando $q=P$ com P função de p , então $q=\frac{dp}{dx}$ e $dp=Pdx$ consequentemente $dx=\frac{dp}{P}$ e $dy=pdx=\frac{pdp}{P}$. Integrando Euler obteve: $x=a+\int \frac{dp}{P}$ e $y=b+\int \frac{pdp}{P}$ duas constantes a e b são obtidas. Ele observou que as duas variáveis poderiam ser obtidas com a mesma variável p . Então a integral seria completa.

No item 724, Euler afirmou que dada uma equação diferencial da diferencial, ou em termos modernos, uma equação diferencial de 2ª ordem necessitaria de duas integrações e duas constantes arbitrárias deveriam ser introduzidas para a obtenção da integral completa.

Assim na equação $ddy=f dx^2$ considerando dx constante, a equação da integral completa seria $y=\frac{1}{2}x^2f+Cx+D$ e envolveria duas novas constantes C e D .

Nesse capítulo, Euler observou que a cada integração, havia o aparecimento de uma constante arbitrária.

No item 725, Euler buscou a integral completa da equação diferencial de 2ª ordem: $addy=dx dy$, com dx constante.

Considerando $dy=pdx$ e $dp=qdx$ então $ddy=dpdx$ e consequentemente fazendo as substituições devidas obtém-se $aq=p$.

Uma primeira integração para obtenção de x :

$$x=\int \frac{dp}{q}+C=\int \frac{dp}{p}a+C=C+a \ln p \text{ e } y=\int adp=D+ap \text{ consequentemente } p=\frac{y-D}{a}$$

Então:

$$x=C+a \ln \frac{(y-D)}{a} \text{ com duas constantes arbitrárias.}$$

No Volume II, Seção I, Capítulo IV, Euler apresentou duas integrais particulares, ou soluções, onde a razão entre as duas integrais particulares não era constante e que formariam a integral completa da equação diferencial de 2ª ordem.

Euler enunciou um Teorema no item 837:

Ao assumir dx constante, se $y=M$ e $y=N$ fossem integrais particulares da equação diferencial da diferencial, $ddy+Pdx dy+Qydx^2=0$ então $M:N$ não seria constante e a equação integral completa seria $y=\alpha M+\beta N$.

Demonstração:

Desde que os valores $y=M$ e $y=N$ satisfizessem a equação, então:

$$ddM + Pdx dM + QMdx^2 = 0 \text{ e } ddN + Pdx dN + QNdx^2 = 0$$

então $y = \alpha M + \beta N$ satisfaria a equação, pois:

$$\alpha(ddM + Pdx dM + QMdx^2) + \beta(ddN + Pdx dN + QNdx^2) = 0$$

Como a integral abrangeria as duas constantes α e β essa integral seria completa, ao menos que N fosse múltiplo de M .

No Corolário 838, ele concluiu que a integral completa seria formada de duas integrais particulares, se essas duas integrais fossem “diferentes” uma da outra.

Diferentemente do artigo *De Integratione Aequationum Differentialium Altiorum Graduum* (1743), onde Euler considerava que uma integral era completa quando o número de constantes arbitrárias fosse o mesmo que o grau (ordem) da equação diferencial, agora em *Institutionum Calculi Integralis* Volume II, no teorema do item 837, ele analisou também a natureza das duas soluções da equação diferencial de 2ª ordem e nesse caso o conjunto solução é um espaço vetorial de dimensão 2, como é entendido atualmente, uma base de dimensão 2.

Convém observar que dada uma equação diferencial de 3ª ordem ou ordem superior, considerando ordem 3 e três integrais particulares, ou soluções, caso essas integrais particulares sejam não múltiplas entre si, por exemplo, $y=M$, $y=N$, $y=M+N$, não se estabelecerá um espaço vetorial de dimensão 3, pois embora a razão entre as integrais particulares não seja constante, a terceira integral seria uma combinação linear das outras duas, ou seja, seriam linearmente dependentes no entendimento atual.

No Corolário 838, Euler ratificou que duas soluções integrais particulares completariam a solução geral, se elas fossem diversas ou diferentes, ou seja, se elas não fossem múltiplas uma da outra.

No Corolário 839, se dados $y=e^{\int u dx}$ ou $\frac{dy}{y dx} = u$ seria produzida

$$du + u u dx + P u dx + Q dx = 0 \text{ se os valores de } u = \frac{dM}{M dx} \text{ e } u = \frac{dN}{N dx} \text{ satisfizessem a equação,}$$

então $u = \frac{\alpha dM + \beta dN}{(\alpha M + \beta N) dx}$ também satisfaria a mesma.

Nesse Corolário, uma integral particular da equação diferencial $ddy + Pdx dy + Qy dx^2 = 0$ seria $y = e^{\int u dx}$ que substituída na equação diferencial reduz sua ordem para a equação diferencial em u de 1ª ordem $du + u u dx + P u dx + Q dx = 0$.

Se $y = e^{\int u dx}$, a derivada $\frac{dy}{y dx} = u$ com u solução da equação diferencial $du + u u dx + P u dx + Q dx = 0$. Euler também considerou M e N soluções, ou,

$u = \frac{dM}{M dx}$ e $u = \frac{dN}{N dx}$. Se $y = \alpha M + \beta N$ for substituído em $\frac{dy}{y dx} = u$ seria obtido

$$u = \frac{\alpha dM + \beta dN}{(\alpha M + \beta N) dx}.$$

No Corolário 840 foi dada a mesma equação: $du + u u dx + P u dx + Q dx = 0$ e duas integrais particulares $u = R$ e $u = S$, mas $\frac{dy}{y dx} = u$ então $M = e^{\int R dx}$ e $N = e^{\int S dx}$ a

integral completa seria $u = \frac{\alpha e^{\int R dx} R + \beta e^{\int S dx} S}{\alpha e^{\int R dx} + \beta e^{\int S dx}}$.

Euler substituiu os valores de $M = e^{\int R dx}$ e $N = e^{\int S dx}$ na equação

$$u = \frac{\alpha dM + \beta dN}{(\alpha M + \beta N) dx} \text{ do Corolário acima e obteve } u = \frac{\alpha e^{\int R dx} R + \beta e^{\int S dx} S}{\alpha e^{\int R dx} + \beta e^{\int S dx}}.$$

No item 842 foi dada a equação diferencial $ddy + A dy dx + B y dx^2 = 0$ e dx constante, Euler considerou mais uma vez uma solução particular $y = e^{\int u dx}$ e substituiu na equação diferencial acima, que isolando o termo constante dx e consequentemente $ddx = 0$ obteve

$$dx = \frac{-du}{uu + Au + B}.$$

Como Euler considerou u constante, consequentemente $\frac{du}{dx} = 0$ que substituído em

$$dx = \frac{-du}{uu + Au + B} \text{ resultou em } uu + Au + B = 0.$$

Resolvendo a equação $uu + Au + B = 0$, então $u = -\frac{1}{2}A \pm \sqrt{\frac{1}{4}AA - B}$.

Para encontrar y , Euler substituiu o valor de u encontrado em $y=e^{\int u dx}$, obtendo assim: $y=e^{-\frac{1}{2}Ax}(\alpha e^{nx}+\beta e^{-nx})$ considerando $n=\sqrt{\frac{1}{4}AA-B}>0$.

Nesse momento, Euler utilizou a ideia de que a combinação linear de duas integrais particulares, não múltiplas, era a integral completa da equação diferencial de 2ª ordem em u .

Euler então analisou os possíveis valores para n .

Considerou as raízes imaginárias, caso $n=\sqrt{\frac{1}{4}AA-B}<0$ pois já eram conhecidas dele a relação que hoje é chamada de relação de Euler¹⁹, $e^{iw}=\cos w+isenw$ e nesse corolário, ele considerou que $n=\sqrt{-1}m$ no caso de raízes imaginárias. Substituindo em:

$y=e^{-\frac{1}{2}Ax}(\alpha e^{nx}+\beta e^{-nx})$ as duas soluções encontradas foram:

$$y_1=e^{-\frac{1}{2}Ax} \cdot (\cos mx + i \sin mx)$$

$$y_2=e^{-\frac{1}{2}Ax} \cdot (\cos mx - i \sin mx)$$

Novamente usando a ideia de que a combinação linear de duas soluções da equação diferencial homogênea era solução da equação diferencial homogênea, então:

$y=e^{-\frac{1}{2}Ax} \cdot (\alpha \cos mx + \beta \sin mx)$ também é solução.

Se $n=\sqrt{\frac{1}{4}A^2-B}=0$, há duas raízes iguais da equação $uu+Au+B=0$.

Um valor encontrado é $y=e^{-\frac{1}{2}Ax}$. Para encontrar o outro valor, Euler sabia que não poderia ser um valor múltiplo. Utilizando a ideia do atual Método de D'Alembert, Euler

encontrou $y=e^{-\frac{1}{2}Ax}(\alpha+\beta x)$.

No corolário do item 843, Euler ratificou a ideia de substituição de y, dy, ddy por u^0, u^1, u^2 em $ddy+Adydx+Bydx^2=0$ resultando $u^2+Au+B=0$ onde duas raízes desta equação resultariam a integral completa.

No item 851, assumindo dx constante, $P, Q, e X$ funções de x , para reduzir a integração da equação diferencial de 2ª ordem $ddy+Pdydx+Qydx^2=Xdx^2$ para equação

¹⁹É chamada relação de Euler, mas já era de conhecimento de Abraham de Moivre e Newton por volta de 1676.

diferencial de 1ª ordem, Euler substituiu $y=uv$ em $ddy+Pdydx+Qydx^2=Xdx^2$, considerando v solução da equação homogênea $ddv+Pdvdx+Qvdx^2=0$ e obteve $2dudv+vddu+Pvdxdu=Xdx^2$.

Considerando $du=sdx$ e substituindo em $2dudv+vddu+Pvdxdu=Xdx^2$ Euler encontrou a equação diferencial de 1ª ordem $vds+2sdv+Psvdx=Xdx$.

Utilizando o fator integrante $ve^{\int Pdx}$:

$$vvse^{\int Pdx} = \int e^{\int Pdx} Xvdx \quad \text{ou} \quad s = \frac{e^{-\int Pdx}}{vv} \int e^{\int Pdx} Xvdx \quad u = \int \frac{e^{-\int Pdx} dx}{vv} \int e^{\int Pdx} Xvdx$$

Nesse item, Euler adotou um método para encontrar a solução de uma equação não homogênea, utilizando um parâmetro ou constante de integração como variável, tratando-se de um caso particular do atual chamado Método da Variação dos Parâmetros ou das Constantes²⁰.

No item 860, Euler aplicou o atualmente chamado Teorema da solução geral da equação diferencial não homogênea²¹.

Euler forneceu uma equação diferencial:

$$ddy+Adydx+Bydx^2=Xdx^2 \quad \text{e sabendo que uma integral particular era } y=t \quad \text{então} \\ ddt+Adtdx+Btdx^2=Xdx^2.$$

Se $y=t+z$ fosse a integral completa, substituindo em $ddy+Adydx+Bydx^2=Xdx^2$ obteve $ddz+Adzdx+Bzdx^2=0$ que se tratava de equação diferencial homogênea, ou seja, z é solução.

Dadas duas soluções da equação diferencial homogênea em z , $t_1=-f$ e $t_2=-g$ $A=-(f+g)$ e $B=fg$ onde A , é o simétrico da soma das raízes da equação de 2º grau e B o produto.

A solução da equação diferencial homogênea: $z=\alpha e^{-fx}+\beta e^{-gx}$.

Substituiu em $y=t+z$ e obteve $y=t+\alpha e^{-fx}+\beta e^{-gx}$.

²⁰ O método é usado para encontrar uma solução particular de uma equação diferencial não homogênea. Consiste em supor que as constantes (parâmetros) presentes na solução geral da equação homogênea associada são funções da variável independente e impõe que essa nova função seja uma solução particular da equação diferencial ordinária.

²¹ Em termos atuais, se y_p for uma solução particular qualquer da equação diferencial linear não homogênea de 2ª ordem: $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)$ e y_1 e y_2 forem duas soluções particulares linearmente independentes da equação linear homogênea correspondente $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ então qualquer solução da equação não homogênea pode ser expressa na forma $y=y_p+c_1y_1+c_2y_2$.

Para Euler, dada uma equação diferencial não homogênea, a solução era obtida resolvendo-se a equação diferencial homogênea, somando-se com uma solução particular da equação diferencial não homogênea previamente obtida.

Nesse livro, Euler iniciou no Volume I estudos que mostraram que a cada integração uma nova constante arbitrária aparecia.

No Volume II, Seção I, Euler enunciou um teorema que demonstraria que dadas duas equações integrais particulares, ou soluções da equação diferencial de 2ª ordem, não múltiplas entre si, a equação integral completa seria uma combinação linear dessas duas equações integrais particulares, ou seja, dados $y=M$ e $y=N$ com α e β constantes $y=\alpha M+\beta N$. Ele também resolveu equações diferenciais homogêneas utilizando a equação algébrica correspondente e equações diferenciais não homogêneas. Recorreu ao Método de Variação dos Parâmetros ou das Constantes, utilizado para encontrar uma solução particular da equação diferencial não homogênea, mas que se baseava na solução da equação homogênea correspondente, portanto trazia a ideia de que duas integrais particulares não múltiplas, no caso de uma equação diferencial de 2ª ordem, formariam a integral completa. Fez também uso do Método de D'Alembert que possibilitava encontrar uma segunda solução independente, nesse caso não múltipla, para a equação diferencial homogênea de 2ª ordem dada uma solução particular.

No Volume II, Seção II, Euler resolveu equações de 3ª ordem ou superiores.

No Volume II, Seção II, Capítulo II, item 1117, para encontrar a integral completa de

$$Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2} + \frac{Dd^3y}{dx^3} = 0, \text{ Euler assumiu } dx \text{ constante e } A, B, C, D \dots \text{ constantes,}$$

e verificou que a equação $y=e^{\lambda x}$ satisfazia a equação diferencial.

Então:

$$\frac{dy}{dx} = \lambda e^{\lambda x}, \quad \frac{ddy}{dx^2} = \lambda^2 e^{\lambda x}, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = \lambda^3 e^{\lambda x}.$$

Dividindo por $e^{\lambda x}$ torna-se:

$A + \lambda B + \lambda^2 C + \lambda^3 D = 0$ e considerando três valores encontrados para λ , α , β e γ , então: $y=e^{\alpha x}$, $y=e^{\beta x}$ e $y=e^{\gamma x}$ deveriam satisfazer a equação diferencial.

Logo: $y=Xe^{\alpha x}+Ye^{\beta x}+Ze^{\gamma x}$ com X, Y, Z constantes arbitrárias que formariam a integral completa.

Verifica-se que as integrais particulares ou soluções são linearmente independentes, pois tem natureza exponencial não havendo possibilidade de uma integral particular ser gerada por uma combinação linear das outras duas. Pode-se dizer que o conjunto solução da equação diferencial de 3ª ordem é um espaço vetorial de dimensão 3, ou formado por uma base com 3 elementos.

No item 1125, foi dada uma equação diferencial

$$Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2} + \frac{Dd^3y}{dx^3} + \frac{Ed^4y}{dx^4} + \dots = 0 \text{ de qualquer grau, ou ordem, e que } y = e^{\lambda x}$$

satisfaria a equação.

Consequentemente:

$$\frac{dy}{dx} = \lambda e^{\lambda x}, \quad \frac{ddy}{dx} = \lambda^2 e^{\lambda x}, \quad \frac{d^3y}{dx} = \lambda^3 e^{\lambda x} \dots \quad \frac{d^n y}{dx} = \lambda^n e^{\lambda x} \text{ que resultaria em:}$$

$$A + \lambda B + \lambda^2 C + \lambda^3 D + \lambda^4 E + \dots = 0$$

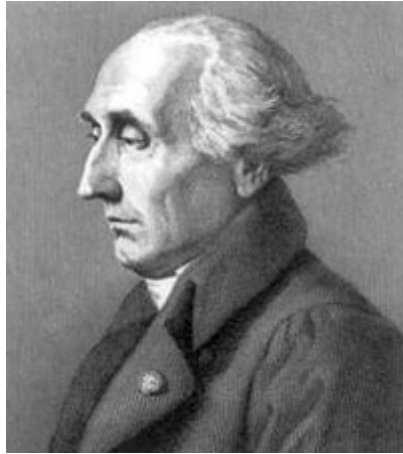
Então se considerados valores de λ , $\alpha, \beta, \dots$ seriam as integrais particulares

$y = Xe^{\alpha x}$, $y = Ye^{\beta x}$ e $y = Ze^{\gamma x}$ e seria evidente que a somatória também deveria satisfazer a equação diferencial. Logo: $y = Xe^{\alpha x} + Ye^{\beta x} + Ze^{\gamma x} + \dots$ com $X, Y, Z \dots$ as constantes arbitrárias que formariam a integral completa.

Generalizando para uma equação diferencial de ordem n as integrais particulares ou soluções são linearmente independentes, por sua natureza exponencial. Não é possível, nesse caso, a geração de uma integral particular por uma combinação linear das outras integrais particulares. No entendimento atual, pode-se dizer que o conjunto solução da equação diferencial de ordem n é um espaço vetorial de dimensão n , ou formado por uma base com n elementos.

2.3 JOSEPH LOUIS LAGRANGE

Figura 3: Lagrange



Fonte: Wikipédia²²

Nasceu em 25 de janeiro de 1736 em Turin, atualmente Itália.

Morto em 10 de abril de 1813 em Paris, França

Lagrange é considerado um matemático francês, embora tenha nascido em Turim e foi batizado em nome de Giuseppe Lodovico Lagrangia.

Lagrange também se inspirou em Euler ratificando e aperfeiçoando ideias no sentido de conjuntos independentes e base. Trocou correspondências e experiências com Euler que também foi seu grande incentivador. Fizeram vários trabalhos juntos. Em uma das correspondências, Lagrange enviou a Euler seus resultados sobre a tautócrona contendo seu método de máximos e mínimos. Sua carta foi escrita em 12 de agosto de 1755 e Euler respondeu em 6 de setembro dizendo como ficou impressionado com as novas ideias de Lagrange.

Em 1756, Lagrange enviou resultados de Euler que ele obteve ao aplicar o cálculo das variações da mecânica. Esses resultados generalizaram os resultados obtidos por Euler.

Lagrange estudou a integração de equações diferenciais e fez várias aplicações em tópicos como mecânica dos fluidos

Lagrange sucedeu Euler como Diretor de Matemática na Academia de Berlim em 6 de novembro de 1766.

²²Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Joseph-Louis_Lagrange Acesso em 25 maio de 2020

Ele compartilhou o prêmio de 1772 sobre o problema dos três corpos o Sol, a Terra e a Lua com Euler, ganhou o prêmio de 1774, outro sobre o movimento da lua, e ganhou o prêmio de 1780 sobre as perturbações das órbitas dos cometas pelos planetas.

Mécanique analytique foi publicado em 1788 e resumiu todo o trabalho realizado no campo da mecânica desde o tempo de Newton e notável pelo uso da teoria das equações diferenciais.

2.3.1 *Solution de différens problèmes du calcul integral* (1766)

Lagrange supôs uma equação diferencial com coeficientes constantes L, M, N :

$$Ly + M \frac{dy}{dt} + N \frac{d^2 y}{dt^2} = T \quad .$$

Supôs dois valores particulares de y quando $T=0$, y_1 e y_2 . Após multiplicar a equação diferencial dada por zdt , z uma variável indeterminada, ele encontrou duas constantes arbitrárias A e B , funções cada uma de um valor particular da equação diferencial quando $T=0$.

$$z \left(\left(M - \frac{dN}{dt} \right) y_1 + N \frac{dy_1}{dt} \right) - \frac{dz}{dt} N y_1 = A$$

$$z \left(\left(M - \frac{dN}{dt} \right) y_2 + N \frac{dy_2}{dt} \right) - \frac{dz}{dt} N y_2 = B$$

Lagrange, assim como Euler, considerou que para uma equação diferencial de 2ª ordem duas constantes arbitrárias eram necessárias.

Nesse artigo, Lagrange também afirmou que $y_1 = e^{k_1 t}$ e $y_2 = e^{k_2 t}$ satisfaziam a equação diferencial quando $T=0$ e que k_1 e k_2 foram obtidos como raízes da equação

$L + Mk + Nk^2 = 0$ e que:

$$k_1 + k_2 = -\frac{M}{N} \quad k_1 \cdot k_2 = \frac{L}{N}$$

Lagrange utilizou a ideia de duas raízes para a equação algébrica que atualmente chamamos de equação característica de 2º grau, o que implicaria em dois valores particulares

para equação diferencial de 2ª ordem linear homogênea, esses valores particulares $y_1 = e^{k_1 t}$ e $y_2 = e^{k_2 t}$ são linearmente independentes, pois são exponenciais sendo impossível um valor particular ser múltiplo do outro.

O conjunto solução da equação diferencial linear homogênea correspondente é um espaço vetorial de dimensão 2.

2.3.2 Sur L'intégration d'une équation différentielle a différences finies qui contient la théorie des suites récurrents (1769)

Nesse artigo, Lagrange utilizou o Método de Variação dos Parâmetros e das Constantes de uma forma mais simplificada, ele resolveu a equação diferencial $dy + yXdx = Zdx$, onde X e Z eram funções de x . Tomou $y = uz$ e consequentemente $udz + zdu + uzXdx = Zdx$.

Considerou valores convenientes de u e z obtendo $zdu + uzXdx = 0$. Dividiu por z conseguindo $du + uXdx = 0$.

Integrando: $u = e^{-\int Xdx}$ e como acima Lagrange considerou $udz = Zdx$ ele encontrou

$$z = \int e^{\int Xdx} Zdx \text{ e enfim } y = \frac{\int e^{\int Xdx} Zdx}{e^{\int Xdx}}.$$

Ele considerou u solução da equação diferencial homogênea, termo atual, que satisfazia $du + uXdx = 0$ e induziu que uma solução y da equação diferencial não homogênea fosse $y = uz$, definindo o Método de Variação dos Parâmetros e das Constantes. Fez as substituições e encontrou a solução particular y da equação diferencial não homogênea.

Na resolução da equação diferencial não homogênea para obtenção de um valor particular ou solução pelo Método de Variação dos Parâmetros e das Constantes foi considerado u como solução da equação diferencial homogênea correspondente, e z uma constante arbitrária, função da variável independente e uma condição particular foi imposta: $zdu + uzXdx = 0$. Como tratava-se de uma equação diferencial não homogênea de 1ª ordem,

o conjunto solução da equação diferencial homogênea de 1ª ordem é um espaço vetorial de dimensão 1.

2.3.3 Recherches sur les suites recurrentes dont les termes varient de plusieurs manieres différentes ou sur l'intégration des équations linéaires aux différences finies partielles (1775)

Nesse artigo, Lagrange já desenvolvia o método de forma mais próxima do que atualmente é conhecido o Método de Variação dos Parâmetros ou das Constantes.

Lagrange considerou uma equação linear de ordem n

$$Py + Q \frac{dy}{dx} + R \frac{d^2 y}{dx^2} + \dots + V \frac{d^n y}{dx^n} = X \text{ com } P, Q, R, \dots, V, \text{ funções de } x \text{ e a integral completa}$$

da equação quando $X=0$ teria necessariamente a forma: $y = ap + bq + cr + \dots$, com $a, b, c, \dots$ constantes arbitrárias num total de n e $p, q, r, \dots$ funções de x .

Considerou as arbitrárias $a, b, c, \dots$ como variáveis indeterminadas e supôs nulos os valores de $dy, d^2 y, d^3 y, \dots, d^{n-1} y$.

Assim obteve:

$$dy = adp + bdq + cdr + \dots$$

$$0 = pda + qdb + rdc + \dots$$

$$d^2 y = ad^2 p + bd^2 q + cd^2 r + \dots$$

$$0 = dpda + dqdb + dcd r + \dots$$

$$\vdots$$

$$d^{n-1} y = ad^{n-1} p + bd^{n-1} q + cd^{n-1} r + \dots$$

$$0 = d^{n-2} pda + d^{n-2} qdb + d^{n-2} rdc + \dots$$

$$d^n y = ad^n p + bd^n q + cd^n r + \dots + d^{n-1} pda + d^{n-1} qdb + d^{n-1} rdc + \dots$$

Um sistema com $n-1$ condições foram obtidas:

$$0 = pda + qdb + cdr + \dots$$

$$0 = dpda + dqdb + dcd r + \dots$$

$$\vdots$$

$$0 = d^{n-2} pda + d^{n-2} qdb + d^{n-2} rdc + \dots$$

A última equação foi obtida substituindo os valores $y, dy, d^2 y, \dots, d^n y$ na equação diferencial não homogênea:

$$Py + Q \frac{dy}{dx} + R \frac{d^2y}{dx^2} + \dots + V \frac{d^ny}{dx^n} = X$$

Resultando:

$$\frac{X}{V} dx^n = d^{n-1} p da + d^{n-1} q db + d^{n-1} r dc + \dots$$

Um sistema formado por $n-1$ condições obtidas envolvendo as derivadas das constantes $a, b, c \dots$ que foram substituídas por funções da variável independente x somando-se com a equação obtida acima, totalizando um sistema com n equações e n incógnitas, um sistema possível e determinado.

Lagrange seguiu os passos de Euler considerando o total de constantes arbitrárias a ordem da equação diferencial.

O Método de Variação dos Parâmetros e das Constantes considera a integral completa da equação diferencial linear homogênea correspondente, os valores particulares ou soluções são linearmente independentes, de forma que o conjunto solução da equação diferencial de ordem n é um espaço vetorial de dimensão n .

Lagrange então desenvolveu e aperfeiçoou o método em uma série de artigos sobre variações dos movimentos dos planetas:

Théorie des variations séculaires des éléments des Planetes. Premiere partie (1781); *Théorie des variations séculaires des éléments des Planetes. Seconde partie* (1782); *Théorie des variations périodiques des mouvemens des Planetes. Premiere partie* (1783).

Durante 1808–1810, Lagrange deu ao Método de Variação dos Parâmetros ou das Constantes sua forma final em uma série de artigos como: *Sur la théorie des variations des éléments des planètes et en particulier des variations des grands axes de leurs orbites* (1808). *Sur la théorie générale de la variation des constantes arbitraires dans tous les problèmes de la mécanique* (1809). *Second mémoire sur la théorie générale de la variation des constantes arbitraires dans tous les problèmes de la mécanique* (1810).

2.4 CASPAR WESSEL

Figura 4: Wessel



Fonte: History of Algebra/Ali D'Antona²³

Nascido em 8 de junho de 1745, Vestby, Noruega

Morto em 25 de março de 1818), Copenhague, Dinamarca

Caspar entrou na Universidade de Copenhague em 1761 em Direito.

Caspar era agrimensor na Real Academia Dinamarquesa de Ciências por motivos financeiros. Wessel começou a desenhar mapas, para que sua renda pudesse ser suficiente para permitir que ele sobrevivesse.

Em maio de 1782, Wessel foi liberado de seu trabalho na Academia Real Dinamarquesa para realizar uma pesquisa trigonométrica do ducado de Oldenburg. Wessel trabalhou no levantamento de Oldenburg até o verão de 1785, quando retornou ao seu trabalho na Royal Danish Academy. Ele vinha desenvolvendo métodos matemáticos cada vez mais sofisticados de levantamento e escreveu um relatório em 1787. Esse relatório já continha uma brilhante inovação matemática de Wessel, ou seja, a interpretação geométrica de números complexos.

Em 1796, Wessel usou os dados para produzir o primeiro mapa realmente preciso da Dinamarca. A fama de Wessel como matemático repousa unicamente num artigo, publicado em 1797, dando, pela primeira vez, uma interpretação geométrica de números complexos. Atualmente essa interpretação geométrica é chamada de diagrama de Argand, mas o trabalho de Wessel veio primeiro.

²³Disponível em: <https://media.timetoast.com/timelines/history-of-algebra-ali-d-antona> Acesso em 25 maio 2020

A representação gráfica de números complexos é um componente chave da computação gráfica contemporânea.

Wessel adicionou segmentos em um espaço tridimensional, percebeu que vetores não paralelos podiam ser somados colocando o terminal de uma linha no início de um segundo e, em seguida, somando-os desenhando uma linha desde o início do primeiro segmento até o final do segundo.

2.4.1 Essai sur La Représentation Analytique de La Direction (1797)

Escrito em 1797 em Copenhague. Traduzido para o francês em 1897.

Um primeiro passo foi dado por Wessel para a representação vetorial.

Para Wessel, os segmentos eram representados não somente por sua magnitude, mas pela sua posição.

No parágrafo 2, Wessel adicionou segmentos orientados. Num quadrilátero $abcd$, o segmento: $ad = ab + bc + cd$.

No parágrafo 5, ele designou $+1$ como uma unidade positiva retilínea e direção 0° e $+\varepsilon$ como uma unidade perpendicular positiva com mesma origem e direção 90° e as regras do produto considerando soma de ângulos.

No parágrafo 6, o cosseno de um arco de círculo seria o segmento do raio $+1$ que começaria no centro e terminaria na projeção ortogonal da outra extremidade do arco. O seno do mesmo arco seria conduzido perpendicularmente da extremidade do cosseno à extremidade do arco. O seno do ângulo reto seria igual a $\varepsilon = \sqrt{-1}$.

No parágrafo 7, Wessel verificou que o raio que começava no centro e se desviava de um ângulo v da unidade positiva ou absoluta e deveria ser igual a $\cos v + \varepsilon \sin v$. Nesse mesmo parágrafo, ele apresentou a multiplicação de dois segmentos orientados resultando a soma dos ângulos, ou seja, multiplicação de $\cos u + \varepsilon \sin u$ por $\cos v + \varepsilon \sin v$ que obtiveram direção igual a $u + v$. Os ângulos determinavam o posicionamento dos segmentos orientados.

No parágrafo 8, Wessel apresentou as conhecidas relações trigonométricas de cosseno da soma e seno da soma de ângulos, onde $\cos(u+v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v$ e $\sin(u+v) = \sin u \cos v + \cos u \sin v$ através do produto de $(\cos u + \varepsilon \sin u)(\cos v + \varepsilon \sin v)$.

$$(\cos v + \varepsilon \sin v)(\cos u + \varepsilon \sin u) = \cos v \cos u - \sin v \sin u + \varepsilon (\cos v \sin u + \cos u \sin v)$$

$$(\cos v + \varepsilon \sin v)(\cos u + \varepsilon \sin u) = \cos(v+u) + \varepsilon \sin(v+u) .$$

No parágrafo 9, o autor se refere ao segmento $r \cos v + r \varepsilon \sin v$, que era representado por um raio de um círculo cujo comprimento era igual a 1 e cujo desvio de $\cos 0^\circ$ era igual ao ângulo v . O segmento teria comprimento igual a r e v seria o ângulo de direção.

No parágrafo 10, Wessel fez a demonstração da multiplicação dos segmentos e a soma dos ângulos obtida para o segmento resultante. Chamou de quantidades ou segmentos diretos, positivos ou negativos e de quantidades ou segmentos indiretas, $a + \varepsilon b$ e $c + \varepsilon d$, por exemplo.

Considerou A como comprimento do segmento $a + \varepsilon b$ e v graus, seu desvio da unidade absoluta e ainda C como comprimento do segmento $c + \varepsilon d$ e u como seu desvio.

Então:

$$a + \varepsilon b = A \cdot \cos v + A \varepsilon \sin v \quad \text{e} \quad c + \varepsilon d = A \cdot \cos u + A \varepsilon \sin u$$

Consequentemente:

$$a = A \cos v, \quad b = A \sin v, \quad c = C \cos u, \quad d = C \sin u .$$

Multiplicou dois segmentos orientados e utilizando as relações trigonométricas de soma de ângulos, concluiu que:

$$(a + \varepsilon b)(c + \varepsilon d) = A(\cos v + \varepsilon \sin v)C(\cos u + \varepsilon \sin u) = A \cdot C(\cos(u+v) + \varepsilon \sin(u+v)) .$$

No parágrafo 11, Wessel mostrou a divisão de segmentos com a subtração dos ângulos, onde $A(\cos v + \varepsilon \sin v)$, $B(\cos u + \varepsilon \sin u)$ e $\frac{A}{B} = (\cos(v-u) + \varepsilon \sin(v-u))$.

No parágrafo 13, Wessel apresentou a raiz m -ésima de uma quantidade indireta, ou complexo. O ângulo resultante da radiciação é dividido por m :

$$(\cos v + \varepsilon \sin v)^{\frac{1}{m}} = \left(\cos \frac{v}{m} + \varepsilon \sin \frac{v}{m} \right) .$$

No parágrafo 14, o autor enunciou que se dois ângulos que têm o mesmo seno ou mesmo cosseno, sua diferença é zero ou ± 4 ângulos retos.

Nesse artigo, Wessel interpretou geometricamente os números complexos considerando ângulo e comprimento, adicionou seus segmentos orientados, multiplicou, dividiu e extraiu a raiz m -ésima.

2.5 JEAN ROBERT ARGAND

Figura 5: Argand



Fonte: Blog Matemática Renatas²⁴

Nascido em 18 de Julho de 1768 em Geneva, Suíça.

Morto em 13 de Agosto de 1822 em Paris, França.

Era contador em Paris e um matemático amador.

Argand ficou famoso por sua interpretação geométrica dos números complexos, onde i foi interpretado como uma rotação de 90° . O conceito do módulo de um número complexo também foi devido a Argand, no entanto Cauchy usou o termo mais tarde, é geralmente creditado como o criador desse conceito.

O primeiro a publicar essa interpretação geométrica de números complexos foi Caspar Wessel. A ideia apareceu no trabalho de Wessel em 1787, mas não foi publicada até que Wessel apresentou um documento para uma reunião da Academia Dinamarquesa de Ciências Real em 10 de março de 1797. O artigo foi publicado em 1799, mas não notado pela comunidade matemática.

A maneira como o trabalho de Argand se tornou conhecido é bastante atípica. Legendre recebeu uma cópia da obra e enviou-a a François Français, embora nenhum dos dois co-

²⁴Disponível em: https://matprofrenatas.blogspot.com/2012_05_13_archive.html Acesso em 25 maio 2020

nhecesse a identidade do autor. Após a morte de François Français em 1810, seu irmão Jacques Français trabalhou em seus documentos e descobriu o livrinho de Argand entre eles. Em setembro de 1813, Jacques Français publicou um trabalho no qual ele deu uma representação geométrica de números complexos, com aplicações interessantes, baseadas nas ideias de Argand. Ele terminou seu artigo dizendo que a ideia se baseava no trabalho de um matemático desconhecido e pediu que o matemático se desse a conhecer para poder receber o crédito por suas ideias.

O artigo de Jacques Français apareceu no jornal *Annales de mathématiques de Ger-gonne* e Argand respondeu ao pedido de Jacques Français ao reconhecer que ele era o autor e submetendo uma versão ligeiramente modificada de seu trabalho original com algumas novas aplicações aos *Annales de mathématiques*.

2.5.1 *Essai Sur Une Maniere Une de Représenter Les Quantités Imaginaires* (1806)

Na página 1, Argand iniciou seu ensaio refletindo sobre uma grandeza a escolhida à vontade, se essa grandeza fosse adicionada a uma segunda, expressaria $2a$ e assim se adicionado novamente $3a$ e assim por diante obtendo uma série $a, 2a, 3a, \dots$.

Argand considerou, na página 2, a série agora em ordem decrescente.... $\dots 4a, 3a, 2a, a$ e verificou uma operação inversa daquela formada na primeira série concluindo uma notável diferença entre as duas séries; a primeira poderia ser estendida indefinidamente e a segunda não. Após o termo a é encontrado o termo 0 mas para ir além, a natureza da grandeza deveria ser tal, que fosse operada em relação a 0 como foi feito em relação aos termos $\dots 4a, 3a, 2a, a$. Isso nem sempre seria possível.

Se a , por exemplo, designasse o peso de um material, como o grama, a série das quantidades $\dots 4a, 3a, 2a, a$ não poderia ser continuada além do 0 , porque não poderia ser removido nenhum grama de 0 . Portanto, os termos a seguir só poderiam existir na imaginação, e seriam chamados imaginários.

Nas páginas 2 e 3, Argand imaginou uma balança com duas bacias, dois pratos, A e B onde os movimentos dos braços dessa balança fossem proporcionais aos pesos somados

ou subtraídos. Adicionado o peso n no prato A corresponderia a uma variação n' na extremidade do braço, as variações seriam $2n', 3n', 4n', \dots$. Se o prato A tiver os pesos $n, 2n, 3n, \dots$, obtendo $n', 2n', 3n', \dots$ e a partir de $3n'$ fossem tirados os pesos, a sequência $2n', n', 0$ seria obtida. Mas essas variações seriam conseguidas não só removendo pesos do prato A , mas adicionando em B indefinidamente, assim formarão novos pesos expressos por $-n, -2n, -3n$ e esses termos chamados negativos expressariam quantidades tão reais como os positivos. Portanto entende-se que se dois termos de sinais diferentes, tem o mesmo coeficiente, como $3n$ e $-3n$, eles expressariam dois estados da alavanca que a extremidade que marca os pesos, em ambos, igualmente afastada do ponto 0 . Argand considerou esse afastamento abstraindo o sentido que ocorre dando o nome de *absoluto*.

Nas páginas 4 e 5, Argand faz duas observações sobre as quantidades negativas, a primeira é que de acordo com a espécie de grandeza, a quantidade negativa poderia ser real ou imaginária, a segunda, é que se duas quantidades de uma espécie suscetível fornecerem valores negativos se comparadas, a ideia seria complexa. Inclui 1º) a ideia de relação numérica dependente das grandezas respectivas consideradas *absolutas*; 2º) a ideia da relação de *direções* ou *sentidos* aos quais pertenceriam, a relação seria sua identidade ou oposição.

Argand apresentou duas relações de proporção entre essas grandezas direcionadas:

$$+1:+1:: -1:-1,$$

$$+1:-1:: -1:+1.$$

Onde $:$ significa “está para” e $::$ significa “assim como”.

Sabendo que a média proporcional geométrica entre duas quantidades de sinais diferentes, isto, é a quantidade x que satisfaria a proporção: $+1:+x:: +x:-1$.

Argand sugeriu ainda a possibilidade de encontrar uma grandeza que poderia combinar a ideia de direção, de maneira que sendo adotadas duas direções opostas, uma para valores positivo e outra para valores negativos.

Na página 6, ele considerou uma figura, vide Apêndice XVIII, onde um ponto K seria fixo e adotou uma unidade positiva, a linha KA considerada como tendo a direção de K para A , designada como $\overline{KA}$, para distinguir essa quantidade da linha KA em que apenas considera-se a grandeza absoluta, a unidade negativa seria $\overline{KI}$. A linha KE seria perpendicular às precedentes e teria direção de K para E , que se expressa $\overline{KE}$. A direção de $\overline{KA}$ está para a direção de $\overline{KE}$ assim como esta está para a direção de $\overline{KI}$. A

mesma condição seria cumprida para $\overline{KN}$ que para $\overline{KE}$, essas duas últimas quantidades estão entre elas como $+1$ e -1 como deveria ser. Eles, portanto são expressos por $+\sqrt{-1}$ e $-\sqrt{-1}$.

Na página 12, Argand apresentou os números imaginários e sua formação por parte real e imaginária. $\pm a \pm b\sqrt{-1}$.

Na página 13, definiu os segmentos para seu diagrama:

Na página 13, Argand definiu os segmentos para o diagrama :

Ele observou que existiam um número infinito de espécies de linhas derivadas da unidade primitiva $\overline{KA}$, $\overline{KB}$, $\overline{KC}$, $\overline{KD}$. $\overline{KA}$ seria a unidade primitiva ou positiva sendo $\overline{KC}$ unidade negativa e $\overline{KB}$ e $\overline{KD}$ unidades médias.

Na página 14, vide figura Apêndice XI, a ordem primária é composta pela espécie primitiva $\overline{KA}$ e a negativa $\overline{KC}$, a ordem mediana contém as espécies médias $\overline{KB}$ e $\overline{KD}$.

Na página 15, Argand sugeriu modificar a expressão das chamadas quantidades imaginárias, para se tornar mais simples. Ao escrever $+a\sqrt{-1}$ ou $-a\sqrt{-1}$ por $\sqrt{-1}$. $\sqrt{-1}$ seria um fator que multiplica a , assim como $+1$ em $+a$ e -1 em $-a$. 'o sinal que precede o a que tipo de espécie de unidade expressa esse número. Argand empregou símbolos para designar quantidades imaginárias.

São chamadas quantidade primária, quantidade mediana, quantidade de ordem mediana, quantidade de ordem primária e ordem mediana.

Nas páginas 19 e 20, vide figura Apêndice XI, Argand mostrou a decomposição da linha $\overline{KP}$ em duas partes, uma na ordem $\overline{KA}$ e outra na ordem de $\overline{KB}$, desenhando em $\overline{KA}$, $\overline{PN}$ paralelo a $\overline{BK}$ obtendo $\overline{KP} = \overline{KN} + \overline{NP}$ ou também se $\overline{PM}$ for paralelo a $\overline{KA}$ obtém-se $\overline{KP} = \overline{KM} + \overline{MP}$.

Esse livro, escrito por Argand foi o primeiro trabalho em interpretação geométrica de números complexos, representados por $\pm a \pm b\sqrt{-1}$ e também responsável pelo conhecido diagrama de Argand.

2.6 JOHANN CARL FRIEDRICH GAUSS

Figura 6: Gauss



Fonte: Wikipédia²⁵

Nascido em, 30 de abril de 1777, Braunschweig, Alemanha

Morto em 23 de fevereiro de 1855, Göttingen, Alemanha

De família humilde, mas com o incentivo de sua mãe obteve brilhantismo em sua carreira.

Gauss se tornou o primeiro a construir um polígono regular de dezessete lados somente com o auxílio de régua e compasso. Gauss doutorou-se em 1798, na Universidade de Helmstãdt e sua tese foi a demonstração do *Teorema fundamental da Álgebra*, provando que toda equação polinomial $f(x)=0$ tinha pelo menos uma raiz real ou imaginária e para isso baseou-se em considerações geométricas.

Deve-se a Gauss a representação gráfica dos números complexos pensando nas partes real e imaginária como coordenadas de um plano.

Em sua tese de 1799 Gauss fez uma demonstração do chamado teorema fundamental da álgebra. Considerou um polinômio $P(x+iy)$ da variável complexa, ele separou a parte real $Q(x,y)$ da parte imaginária $R(x,y)$, $P(x+iy)=Q(x,y)+iR(x,y)$ e procurou as raízes do polinômio. Este raciocínio foi claramente relacionado à correspondência entre os números complexos e os pontos e as curvas do plano.

²⁵Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Carl_Friedrich_Gauss Acesso em 25 maio 2020

2.6.1 Theoria residuorum biquadraticum Commentatio segunda (1831)

O artigo de Gauss inaugurou uma nova perspectiva ao propor a sua representação geométrica envolvendo os complexos.

No texto de Gauss sobre os resíduos biquadráticos: Theoria residuorum biquadraticum Commentatio segunda, editado pela revista *Anzeigen*, de Göttingen, em 1831, se endereçava a um público mais amplo do que a comunidade matemática.

Nesse texto, Gauss demonstrou a necessidade dos números complexos, em sua relação com soluções de equações de resíduos biquadráticos.

Esse artigo visava demonstrar o teorema da reciprocidade biquadrática. Isso levou Gauss a elaborar uma extensão do domínio dos números inteiros ao dos números imaginários inteiros. O passo decisivo residu na consideração que um número primo da forma $2p+1$ seria soma de dois quadrados; e assim surgiu uma fatoração do número primo como produto de dois números imaginários: $(2p+1)=a^2+b^2=(a+bi)(a-bi)$. Gauss observou que a aritmética dos números imaginários possuía as mesmas propriedades dos números inteiros.

Na página 8, item 30, Gauss iniciou seus estudos com números complexos, onde a, b são números reais e o número complexo foi definido como: $a+bi$.

Nessa página 9, Gauss mostrou um número complexo e considerou a e b números reais e i a abreviação de $\sqrt{-1}$. os complexos poderiam ser reais ou imaginários.

As grandezas complexas não excluía as reais, mas compreendiam entre si aquelas enquanto caso especial, para $b=0$, os reais e se $a=0$, os imaginários. Ele considerou quatro unidades: $+1$, -1 , $+i$, $-i$.

Na página 11, ele apresentou a divisão de complexos: $\frac{a+bi}{c+di}$

$$\frac{a+bi}{c+di} \cdot \frac{c-di}{c-di} = a+bi \cdot \frac{c-di}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd+(bc-ad)i}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

A radiciação $\sqrt{a+bi}$ e a transformação do complexo $a+bi$ em $r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ que facilitaria os cálculos.

Na mesma página 11, Gauss enunciou a fatoração de um número primo.

$$2=(1+i)(1-i) ; 5=(1+2i)(1-2i) ; 13=(3+2i)(3-2i) ; \\ 17=(1+4i)(1-4i) .$$

Chamou de composto a um número complexo inteiro, se for o produto de dois fatores inteiros diferentes das unidades; um número complexo que não admitia tal decomposição foi chamado número complexo primo. Assim é primo o número real 3, considerado também como número complexo primo, enquanto 5 como número complexo é composto e igual a $(1+2i)(1-2i)$.

Nesse artigo, Gauss apresentou sua representação geométrica envolvendo números complexos, considerou operações de multiplicação, divisão e extraiu raiz quadrada, estudou a decomposição de um número inteiro como produto de números complexos.

2.7 JÓZEF MARIA HOENE WRONSKI

Figura 7: Wronski



Fonte: Wikipédia²⁶

Nasceu em 23 de agosto de 1778 em Wolsztyn, Polônia

Morto em 8 de agosto de 1853 em Neuilly-sur-Seine (perto de Paris), França

Em 1803, ele elaborou vários trabalhos científicos em Marselha, uma teoria do universo e suas origens.

Seu primeiro livro sobre os fundamentos da matemática foi publicado em 1810, mas, depois de receber críticas de Lacroix e Lagrange, Wronski rompeu relações com o Instituto em Paris.

Sua publicação *Résolution générale des équations de tous degrés* 1812, mostrava que todas as equações tinham uma solução algébrica. Isso contradisse os resultados de Ruffini que

²⁶Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Josef_Ho%C3%ABn%C3%A9-Wronski

já haviam sido publicados. Esse trabalho de Wronski, embora errado, ainda teve aplicações importantes e continha novas ideias interessantes.

Em 1803, ele elaborou vários trabalhos científicos em Marselha, uma teoria do universo e suas origens.

Seu primeiro livro sobre os fundamentos da matemática foi publicado em 1810, mas, depois de receber críticas de Lacroix e Lagrange, Wronski rompeu relações com o Instituto em Paris. Sua publicação *Résolution générale des équations de tous degrés* de 1812, mostrava que todas as equações tinham uma solução algébrica. Isso contradisse os resultados de Ruffini que já haviam sido publicados. Esse trabalho de Wronski, embora errado, ainda teve aplicações importantes e continha novas ideias interessantes.

Em *Réfutation de la théorie des fonctions analytiques de Lagrange* publicado em 1812, ele criticou o uso de séries infinitas de Lagrange e introduziu suas próprias ideias para expansões em série de uma função. Os coeficientes nesta série são determinantes conhecidos como wronskianos. O conhecido wronskiano, trata-se de um determinante de ordem n em que os elementos da primeira linha ou coluna são funções e os demais são derivações da linha ou coluna anterior. Observa-se e prova-se que caso o wronskiano seja diferente de zero em algum ponto do intervalo dado, as funções são linearmente independentes. Peano estudou esses determinantes em vários artigos que serão apresentados nesse trabalho.

Seu livro *A course of mathematics, Introduction determining the general state of mathematics* foi publicado em Londres em 1821.

Wronski trabalhou essencialmente com análise matemática e álgebra. Em análise estudou expansão de funções em série de potência e equações diferenciais.

2.7.1 *Réfutation de la théorie des fonctions analytiques de Lagrange* (1812)

Nesse artigo, Wronski calculou os coeficientes de uma série de funções analíticas, ou seja, que podem ser expandidas em séries de Taylor.

Analisando, *Réfutation de la théorie des fonctions analytiques de Lagrange* nota-se que Wronski usou somatória de combinações, ou ainda, numa linguagem mais atual, determinantes, que Thomas Muir²⁷ em 1882, chamou de determinantes de Wronski ou wronskianos.

Na página 13, foi dada uma forma geral das séries: $Fx = A_0 + A_1 \Phi x + A_2 \Phi x^{\frac{2}{\xi}} + \dots$ e suponha que Φx seja uma função qualquer de x e ξ um aumento arbitrário.

Nessa página 14, foi fornecida a lei de formação dos coeficientes $A_0, A_1, \dots$. Foram dadas as funções $X_1, X_2, X_3, \dots$ de única variável, Wronski apresentou essa soma combinatória como $W[\Delta^a X_1, \Delta^b X_2, \Delta^c X_3, \Delta^b X_2, \dots, \Delta^p X_v]$, que seria a somatória dos produtos das diferenças dessas funções, compostas com os expoentes $a, b, c, \dots$ das diferenças em questão, com todas as permutações possíveis.

As diferenças consecutivas que compõe o produto seriam $\Delta X_1 \cdot \Delta X_2 \cdot \Delta X_3 \cdot \Delta X_2 \dots \Delta X_v$.

Wronski deu a esses produtos separadamente, sinal positivo quando o número de variações dos expoentes $a, b, c, \dots$ estiver em ordem alfabética e o sinal negativo quando esse número de variações for ímpar.

Por exemplo:

$$W[\Delta^a X_1] = \Delta^a X_1$$

$$W[\Delta^a X_1, \Delta^b X_2] = \Delta^a X_1 \cdot \Delta^b X_2 - \Delta^b X_1 \cdot \Delta^a X_2$$

Na página 15, Wronski afirmou que a formação dessa soma combinatória seria utilizada para obtenção dos coeficientes $A_0, A_1, A_2, \dots$ a serem determinados da função

$Fx = A_0 + A_1 \cdot \Phi x + A_2 \cdot \Phi^{2/\xi} + \dots$ e seriam obtidos por:

$$A_\mu = \frac{W[\Delta^a \Phi x, \Delta^b \Phi x^{2/\xi}, \Delta^c \Phi x^{3/\xi}, \dots]}{\Delta^a \Phi x \cdot \Delta^b \Phi x^{2/\xi} \cdot \Delta^c \Phi x^{3/\xi} \dots} \text{ onde } \mu \text{ varia de } 1 \text{ a } \infty.$$

Atualmente, $W[\Delta^a X_1, \Delta^b X_2] = \Delta^a X_1 \cdot \Delta^b X_2 - \Delta^b X_1 \cdot \Delta^a X_2$ é interpretado como:

$$W[\Delta^a X_1, \Delta^b X_2] = \begin{vmatrix} \Delta^a X_1 & \Delta^b X_1 \\ \Delta^a X_2 & \Delta^b X_2 \end{vmatrix} \text{ considerando } a=0 \text{ e } b=1.$$

²⁷Thomas Muir (1844-1934), matemático escocês.

Esse determinante é aplicado para verificação se as funções são linearmente independentes, caso $W[\Delta^a X_1, \Delta^b X_2] \neq 0$ em algum ponto, as funções são linearmente independentes e foi bastante estudado por Peano.

2.8 AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY

Figura 8: Cauchy



Fonte: Sapaviva²⁸

Nascido em 21 de agosto de 1789, Paris, França

Morto em 23 de maio de 1857, Paris, França

Laplace e Lagrange eram visitantes na casa da família Cauchy e Lagrange em particular se interessou pela educação matemática do jovem Cauchy. Em 1807 ele se formou na *École Polytechnique* e ingressou na escola de engenharia *École des Ponts et Chaussées*.

Cauchy foi o primeiro a fazer um rigoroso estudo das condições de convergência de séries infinitas, além de sua rigorosa definição de integral. Seu texto *Cours d'analyse*, em 1821, foi criado para os estudantes da *École Polytechnique* e preocupava-se em desenvolver os teoremas básicos do cálculo o mais rigorosamente possível.

Sua produtividade foi tão prodigiosa que fundou uma espécie de jornal, o *Exercices de Mathématiques* (1826-1830) seguido de um outro, *Exercices d'Analyse Mathématique et de Physique*, para publicação de sua produção de trabalhos em matemática pura e aplicada.

Numerosos estudos em matemática levam o nome de Cauchy: - o teorema da integral de Cauchy, na teoria das funções complexas, o teorema da existência de Cauchy-Kovalevskaya para a solução de equações diferenciais parciais, as equações de Cauchy-

²⁸Disponível em: <https://www.sapaviva.com/augustin-louis-cauchy-2/>

Riemann , as seqüências de Cauchy, a desigualdade de Cauchy-Schwarz, a sucessão de Cauchy, a distribuição de Cauchy, o tensor de Cauchy, o produto de Cauchy, o horizonte de Cauchy. Ele produziu 789 trabalhos de matemática.

2.8.1 Cours D'Analyse de École Royale Polytechnique (1821)

A desigualdade de Cauchy ou como conhecida atualmente de Cauchy-Schwarz, porque foi redescoberta por Hermann Amandus Schwarz²⁹ em 1888:

$|u \cdot v| \leq |u| \cdot |v|$ para qualquer u e $v \quad u, v \in R^n$ é considerada uma das mais importantes desigualdades matemáticas. Essa desigualdade aparece em vários contextos diferentes da Matemática, em análise, séries infinitas, integração de produtos e na teoria de probabilidades aplicando as variâncias e covariâncias.

Em seu livro Cours D'Analyse de École Royale Polytechnique, em 1821, Cauchy desenvolveu essa desigualdade em notas sobre análise algébrica, sobre fórmulas que resultam do uso de desigualdades $<$ ou $>$.

No teorema 14 da página 452 de Cours D'Analyse de École Royale Polytechnique, Cauchy iniciou o teorema com uma ideia de módulo de um sistema.

Considere os módulos de $(a, a', a'', \dots)$ e $(b, b', b'', \dots)$

$$\sqrt{a^2 + a'^2 + a''^2 \dots} \text{ e } \sqrt{b^2 + b'^2 + b''^2 \dots}$$

Se as frações forem iguais $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''}$, então:

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''} = \frac{\sqrt{(a^2 + a'^2 + a''^2 \dots)}}{\sqrt{(b^2 + b'^2 + b''^2 \dots)}} \text{ demonstrado algebricamente, considerando}$$

$(a, a', a'', \dots) = \lambda(b, b', b'')$ com λ escalar e fazendo as substituições pertinentes.

Considerando o 14º teorema, se frações equivalentes forem:

$$\frac{a}{\alpha} = \frac{a'}{\alpha'} = \frac{a''}{\alpha''} = \frac{\sqrt{(a^2 + a'^2 + a''^2 \dots)}}{\sqrt{(\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 \dots)}} \text{ e } (a, a', a'', \dots) = \lambda(\alpha, \alpha', \alpha'' \dots) \text{ , } \lambda \text{ escalar}$$

verifica-se que:

²⁹Hermann Amandus Schwarz(1843-1921)- matemático alemão

$$(a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' + \dots) = \sqrt{(a^2 + a'^2 + a''^2 + \dots)} \cdot \sqrt{(\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 + \dots)} \text{ , pois substituindo}$$

$a = \lambda\alpha$ e $a' = \lambda\alpha'$ na equação $\frac{a}{\alpha} = \frac{a'}{\alpha'} = \frac{a''}{\alpha''} = \frac{\sqrt{(a^2 + a'^2 + a''^2 + \dots)}}{\sqrt{(\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 + \dots)}}$ a igualdade é constatada.

No 15º teorema, Cauchy fez a demonstração de que:

$(a + a' + a'' + \dots) < \sqrt{n} \cdot \sqrt{(a^2 + a'^2 + a''^2 + \dots)}$ ele usou uma combinação de todas as maneiras possíveis com dois a dois membros $(a + a' + a'')^2 + (a - a')^2 + (a - a'')^2 + \dots = n(a^2 + a'^2 + a''^2 + \dots)$.

Então: $(a + a' + a'' + \dots)^2 < n \cdot (a^2 + a'^2 + a''^2 + \dots)$ pois todos os outros termos são positivos por serem quadrados. Consequentemente: $(a + a' + a'' + \dots) < \sqrt{n} \cdot \sqrt{(a^2 + a'^2 + a''^2 + \dots)}$.

No Corolário da página 454 que diz respeito ao 15º teorema, Cauchy utilizou o resultado desse teorema e dividiu os dois lados da desigualdade

$$(a + a' + a'' + \dots) < \sqrt{n} \cdot \sqrt{(a^2 + a'^2 + a''^2 + \dots)} \text{ por } n, \text{ obtendo: } \frac{(a + a' + a'' + \dots)}{n} < \frac{\sqrt{(a^2 + a'^2 + a''^2 + \dots)}}{\sqrt{n}}$$

pois $\frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

No 16º teorema, página 455, Cauchy fez a demonstração de que se:

$\frac{a}{\alpha}, \frac{a'}{\alpha'}, \frac{a''}{\alpha''}, \dots$ não são frações iguais ou equivalentes, então:

$$(a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' + \dots) < \sqrt{(a^2 + a'^2 + a''^2 + \dots)} \cdot \sqrt{(\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 + \dots)}.$$

A ideia da somatória: $a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' + \dots$ remete a produto interno, como atualmente é chamado.

Cauchy novamente combinou diferenças ao quadrado com dois a dois membros, considerando todas as maneiras possíveis:

$$(a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' + \dots)^2 + (a\alpha' - a'\alpha)^2 + (a\alpha'' - a''\alpha)^2 + \dots = (a^2 + a'^2 + a''^2 + \dots) \cdot (\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 + \dots)$$

Considerando termos positivos, então:

$$(a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' + \dots)^2 < (a^2 + a'^2 + a''^2 + \dots) \cdot (\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 + \dots)$$

Extraíu a raiz quadrada e obteve:

$$(a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' + \dots) < \sqrt{(a^2 + a'^2 + a''^2 + \dots)} \cdot \sqrt{(\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 + \dots)}.$$

Nesse 16º teorema, as frações não eram iguais, ou seja, não havia um λ escalar que fizesse $(a, a', a'', \dots) = \lambda(\alpha, \alpha', \alpha'' \dots)$ então $(a, a', a'', \dots)$ e $(\alpha, \alpha', \alpha'' \dots)$ são linearmente independentes, termo atual, verificando a desigualdade:

$$(a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' + \dots) < \sqrt{(a^2 + a'^2 + a''^2 + \dots)} \cdot \sqrt{(\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 + \dots)} .$$

Compilando as conclusões do 14º teorema e do 16º teorema, obtém-se a desigualdade de Cauchy:

$$(a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' + \dots) \leq \sqrt{(a^2 + a'^2 + a''^2 + \dots)} \cdot \sqrt{(\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 + \dots)} \text{ que pode ser escrita também como: } |a \cdot \alpha| \leq |a| \cdot |\alpha| .$$

Nesse artigo, Cauchy utilizou ideias do que atualmente entende-se como conjuntos linearmente independentes para demonstrar parte de sua desigualdade.

Se $(a, a', a'', \dots)$ e $(\alpha, \alpha', \alpha'' \dots)$ linearmente independentes, então:

$$(a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' + \dots) < \sqrt{(a^2 + a'^2 + a''^2 + \dots)} \cdot \sqrt{(\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 + \dots)} .$$

2.9 AUGUST FERDINAND MÖBIUS

Figura 9: Möbius



Fonte: Universidade de Coimbra³⁰

Nascido em 17 de novembro de 1790, Schulpforta, Saxônia, Alemanha

Morto em 26 de setembro de 1868 Leipzig, Alemanha

³⁰Disponível em: <https://www.uc.pt/fctuc/dmat/departamento/bibliomat/servicos/matematicos/Mobius-A>

Möbius trabalhou na essência do que se tornariam os vetores, um prenúncio do sistema vetorial, os segmentos de reta.

Möbius era também astrônomo e em 1813 se mudou para Göttingen para estudar astronomia com Gauss, se doutorou em 1815 com a dissertação *De computandis occultationibus fixarum* sobre planetas com o mesmo orientador de Gauss.

Seu pós-doutorado foi sobre equações trigonométricas. Escreveu várias obras sobre astronomia. Outras grandes obras e artigos, como: *Der Barycentrische Calkül* (1827); *Über Eine Besondere Art Von der Umkehrung Reihen* (1831); *Lehrbuch der Statik* (1837).

Em *Der Barycentrische Calkül*, Möbius introduziu diretamente segmentos de reta que eram denotados por letras do alfabeto, vetores na essência, mas não no nome. No seu estudo de centros de gravidade e geometria projetiva, Möbius desenvolveu uma aritmética destes segmentos de reta; adicionou-os e mostrou como multiplicá-los por um número real.

Seu trabalho mais conhecido é provavelmente a faixa de Möbius, um objeto obtido pela colagem das duas extremidades de uma faixa, após dar meia volta numa delas.

2.9.1 *Der Barycentrische Calkul* (1827)

Em seu primeiro capítulo, página 3, Möbius definiu os pontos A e B de uma mesma linha reta. Definição de segmento que saía de um ponto A até um ponto B como AB . Consequentemente, um segmento que fosse de B para A como BA ou como $-AB$, pois teria sentido oposto a AB , assim $AB+BA=0$ onde 0 também era um ponto da mesma linha reta que A e B .

Na página 4, um ponto C na mesma linha reta, entre A e B ou fora do lado de A ou do lado de B foi determinada a expressão $BC+CA+AB=0$ e consequentemente $CB-CA=AB$.

Se $BC+CA+AB=0$ então $AB=-BC-CA$ pois:

$$BC-BC+CA-CA+AB=0-BC-CA$$

$$0+0+AB=0-BC-CA$$

como $CB = -BC$ então $AB = CB - CA$.

Möbius utilizou a ideia de um paralelogramo e somou segmentos colineares. No paralelogramo $ABCD$, ele utilizou o paralelismo dos lados desse quadrilátero verificando que:

$$AB = DC, \quad BC = AD, \quad AB + CD = 0.$$

Verificou ainda que dados os pontos A e B , foram traçadas duas linhas paralelas AA' e BB' tais que $a.AA' + b.BB' = 0$ e dados os números a e b relacionados entre si, cuja soma era diferente de zero. Qualquer linha reta através de um ponto definido P satisfaz essa condição

É encontrado o ponto P , o centro de gravidade dos pontos A e B , com pesos a e b e está entre a e b forem ambos positivos.

Nessa página, Möbius mostrou dois segmentos de reta paralelos e que existiriam dois números a e b positivos que mantinham uma relação entre eles satisfazendo a equação $a.AA' + b.BB' = 0$, a ideia de que os segmentos eram paralelos, eles seriam linearmente dependentes, termo atual, havendo uma relação linear entre eles.

Na página 9 e 10, num teorema, Möbius declarou que dado um número v de pontos $A, B, C, \dots, N$ com coeficientes $a, b, c, \dots, n$, onde a soma dos coeficientes não era igual a zero, era sempre encontrado um ponto S , com a propriedade de que se forem desenhadas linhas paralelas em qualquer direção por pontos dados e o ponto S e se essas linhas interceptarem algum plano nos pontos $A', B', C' \dots N', S'$ então:

$$a.AA' + b.BB' + c.CC' + \dots + n.NN' = (a + b + c + \dots + n)SS'$$

S seria o centro de gravidade do sistema $A, B \dots N$ com os pesos $a, b, c \dots n$

Um conjunto definido de coeficientes $a, b, c \dots n$ ou pesos determina um ponto definido de centro de gravidade.

E se o plano passasse por S então:

$$a.AA' + b.BB' + c.CC' + \dots + n.NN' = 0$$

Möbius tratou de pontos ponderados, com pesos, ou coeficientes numéricos positivos ou negativos que foram adicionados como massas pontuais no centro de gravidade de um corpo.

Na página 21, dados três pontos B, C, D em linha reta e um ponto A fora dela então: $CD + DB + BC = 0$ e $ACD + ADB + ABC = 0$.

Möbius adicionou triângulos: $ACD + ADB + ABC = 0$.

Na página 24, C, D, E são três pontos em linha reta e um quarto ponto B fora dela e um quinto ponto A não passa por B, C, D, E então $ABDE + ABEC + ABCD = 0$

Möbius adicionou pirâmides: $ABDE + ABEC + ABCD = 0$.

Nesse artigo, Möbius estudou centro de gravidade usando o conceito geométrico, utilizando segmentos orientados, adicionando e multiplicando-os por um número real para obtenção do centro de gravidade. Esses segmentos de reta orientados podem ser considerados vetores na sua essência.

2.10 WILLIAN STIRLING HAMILTON

Figura 10: Hamilton



Fonte: Instituto de Estudos Avançados da Universidade de São Paulo³¹

Nascido em 04 de agosto de 1805, Dublin, Irlanda

Morto em 02 de setembro de 1865, Dublin, Irlanda

Em 1833 apresentou à Academia Irlandesa um artigo em que a álgebra dos números complexos era definida como uma álgebra de pares ordenados de números reais, definição que usamos até hoje. Hamilton em suas pesquisas considerou quádruplos ordenados

³¹Disponível em: <http://www.ica.usp.br/noticias/conferencia-resgata-a-pesquisa-de-william-rowan-hamilton>. Acesso em 25 maio de 2020

(a, b, c, d) de números reais, tendo imersos neles tanto os números reais como os números complexos. Chamou esses elementos de quatérnios. Hamilton definiu a adição e a multiplicação dos quatérnios, podendo verificar as propriedades associativas e comutativa da adição, a multiplicação era associativa e distributiva em relação à adição, mas não valeria a lei comutativa da multiplicação. Este foi historicamente, o primeiro exemplo de uma álgebra não-comutativa.

Assim, a álgebra dos quatérnios, a primeira álgebra não-comutativa, subitamente nasceu e abriu as portas da álgebra abstrata.

Sua obra *Lectures on Quaternions* foi publicada em 1853, e depois disso dedicou-se à preparação da obra ampliada, *Elements of Quaternions*., que não estava terminada quando ele morreu em 1865 mas foi editada e publicada por seu filho no ano seguinte. Hamilton definiu conceitos hoje muito utilizados como versor, gradiente, divergência.

2.10.1 Theory of Conjugate Functions, or Algebraic Couples; with a Preliminary and Elementary Essay on Algebra as the Science of pure Time (1837)

Nesse artigo, Hamilton percebe operações de pares ordenados (a, b) com $a, b \in \mathbb{R}$

Na página 95, Hamilton apresentou as operações de soma, subtração, multiplicação e divisão entre esses números, considerados pares ordenados.

$$(b_1, b_2) + (a_1, a_2) = (b_1 + a_1, b_2 + a_2) \quad (b_1, b_2) - (a_1, a_2) = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$$

$$(b_1, b_2)(a_1, a_2) = (b_1, b_2) \times (a_1, a_2) = (b_1 a_1 - b_2 a_2, b_1 a_2 + b_2 a_1)$$

$$\frac{(b_1, b_2)}{(a_1, a_2)} = \frac{b_1 a_1 + b_2 a_2}{a_1^2 + a_2^2} \cdot \frac{b_2 a_1 - b_1 a_2}{a_1^2 + a_2^2}$$

Segue a ideia de operações de soma, subtração, multiplicação e divisão de números complexos.

2.10.2 On Quaternions or on a New System of Imaginaires in Algebra (1844)

Escrito em 1844 e publicado na Philosophical Magazine.

Hamilton relatou em On Quaternions or on a New System of Imaginaires in Algebra, página 26, sobre a separação da parte real e imaginária dos quatérnios, chamando a parte real de escalar, denominando de *Scal* ou *S* e a parte imaginária que seria geometricamente construída por uma reta ou um raio vetor, determinando uma direção no espaço que se chamaria parte vetor, denominando *Vect* ou *V.A*. A palavra vetor e a palavra escalar apareceram pela primeira vez.

Na página 27, Hamilton considerou que o quatérnio era formado por uma parte por escalar e outra parte por vetor e foi descrito como:

$Q = Scal.Q + Vect.Q = SQ + VQ$. Operações possíveis com vetores foram mostradas, como: $S.S = S$; $V.V = V$; $V.S = 0$; $1 = S + V$; $1 - S = V$; $1 - V = S$ e a fórmula do que Hamilton denominou de tensor ou módulo: $(TQ)^2 = (SQ)^2 - (VQ)^2$. O módulo ou tensor seria sempre um número real e positivo ou número absoluto.

Na página 30, Hamilton aplicou a multiplicação de dois quatérnios. São dados dois quatérnios: $\alpha = ix + jy + kz$ e $\alpha' = ix' + jy' + kz'$, então: $S\alpha.\alpha' = -(xx' + yy' + zz')$ que significava a parte escalar da multiplicação ou produto dos dois quatérnios. Consequentemente, a parte vetor da multiplicação ou produto desses mesmos dois quatérnios seria $V.\alpha.\alpha' = i(yz' - zy') + j(zx' - xz') + k(xy' - yx')$. A multiplicação desses quatérnios fornecendo a parte escalar e a parte vetor, somente era obtida se fosse considerado:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j.$$

Salienta-se nesse artigo, as operações de soma e multiplicação entre os quatérnios, verificando ser uma álgebra não-comutativa: $V\alpha.\alpha' \neq V\alpha'.\alpha$.

2.10.3 Lectures on Quaternions (1853)

No Capítulo VII, Hamilton iniciou com a expressão da forma de um quatérnio: $q = w + ix + jy + kz$, onde a parte escalar seria $Sq = w$ e a parte vetor seria $Vq = ix + jy + kz$.

Na página 448, Hamilton garantiu a propriedade associativa na soma e subtração de dois quatérnios:

$q = w + ix + jy + kz$ e $q' = w' + ix' + jy' + kz'$ que resultou em:

$$q' + q = w' + w + i(x' + x) + j(y' + y) + k(z' + z)$$

$$q' - q = w' - w + i(x' - x) + j(y' - y) + k(z' - z)$$

Dado um quatérnio $q = w + ix + jy + kz$ e $q = 0$ se $w = x = y = z = 0$.

Na página 449, dados os quatérnios r, q, a , Hamilton apresentou o princípio da distributiva $(r + q)a = ra + qa$ e propriedade da multiplicação entre quatérnios $rq \cdot a = r \cdot qa$.

Observa-se que Hamilton já havia desenvolvido as propriedades de soma, subtração e multiplicação entre quatérnios, neste caso mantendo a ordem dos fatores.

2.11 BENJAMIN PEIRCE

Figura 11: Peirce



Fonte: Wikipédia ³²

Nascido em 4 de abril de 1809, Salem, Massachusetts, EUA –

Morto em 6 de outubro de 1880, Cambridge, Massachusetts, EUA

Peirce se formou na Universidade de Harvard em 1829 e aceitou um cargo de professor com George Bancroft em sua Round Hill School em Northampton, Massachusetts.

Ele escreveu uma série de livros e monografias lidando com trigonometria, álgebra, geometria, astronomia e navegação, bem como um tratado elementar sobre o som (1836). Ajudou a determinar a órbita do recém-descoberto planeta Netuno e calculou as perturbações produzidas entre sua própria órbita, as de Urano e outros planetas. Peirce, que foi um defensor influente das ideias de William Hamilton.

Seu livro *A System of Analytical Mechanics* (1855) é considerado um dos mais importantes livros matemáticos produzidos nos Estados Unidos até aquela data. Seu trabalho, *Linear Associative Algebra* (1870) foi um estudo de possíveis sistemas de álgebras múltiplas, resultou de seu interesse em quatérnios.

³²Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Benjamin_Peirce Acesso em 25 maio 2020

2.11.1 Linear Associative Álgebra (1870)

Peirce iniciou seu livro com 72 definições, mas somente algumas, aquelas pertinentes e necessárias a esse trabalho serão apresentadas. Essas definições estão numeradas de acordo com a obra de Peirce.

1) Matemática: A matemática é a ciência que tira conclusões necessárias. Essa definição de matemática é mais ampla do que a que era normalmente dada e pelo seu alcance é limitada à pesquisa quantitativa.

Para Peirce, a Matemática não seria a descobridora de leis, pois não seria indução; nem seria a criadora de teorias, pois não seria hipótese; mas seria a juíza de ambos, e a árbitro que cada uma deveria remeter suas reivindicações; nem a lei poderia governar nem a teoria explicar sem a sanção da Matemática. A matemática deduziria de uma lei todas as suas consequências e as desenvolveria na forma adequada para comparação com a observação e, assim, mediria a força do argumento da observação em favor de uma lei proposta ou de uma forma proposta de aplicação de uma lei.

2) Álgebra: Para Peirce, os ramos da matemática eram tão variados quanto as ciências às quais pertenciam, e cada sujeito da investigação física teria sua matemática apropriada. Em toda forma de manifestação material, existiria uma forma correspondente de pensamento humano, de modo que a mente humana seria tão ampla em seu alcance de pensamento quanto o universo físico. Os dois eram maravilhosamente combinados. Mas onde haveria uma grande diversidade de aparência física, muitas vezes haveria uma grande semelhança nos processos de dedução. Deveriam ser adotados símbolos que pudessem servir para a incorporação de formas de argumentação. As palavras da linguagem comum são geralmente impróprias para esse fim, de modo que outros símbolos deveriam ser adotados, e a Matemática tratada por esses símbolos é chamada de Álgebra.

3) Todas as relações seriam qualitativas ou quantitativas. As relações qualitativas poderiam ser consideradas por si mesmas, sem levar em conta a quantidade. A Álgebra de tais pesquisas seria chamada de Álgebra Lógica, da qual um bom exemplo seria dado por Boole.

4) Os símbolos de uma álgebra, com as leis da combinação, constituiriam sua linguagem; o método de usar os símbolos no desenho de inferências sua arte; e sua interpretação, sua aplicação científica.

5) A linguagem da álgebra teria seu alfabeto, vocabulário e gramática.

6) Os símbolos da álgebra seriam de dois tipos: uma classe representaria suas concepções fundamentais e seria chamada de letras, e a outra representaria as relações ou modos de combinação das letras chamados de sinais.

7) O alfabeto de uma álgebra consistiria em suas letras; o vocabulário definiria seus signos e as combinações elementares de suas letras; e a gramática forneceria as regras de composição pelas quais as letras e os sinais seriam unidos em um sistema completo e consistente.

8) As álgebras poderiam ser distintas entre si pelo número de suas concepções fundamentais independentes ou pelas letras de seu alfabeto. Assim, uma álgebra que possuísse apenas uma letra em seu alfabeto seria uma única álgebra; uma que tem duas letras, uma álgebra dupla; uma das três letras uma álgebra tripla; uma das quatro letras, uma álgebra quádrupla e assim por diante. Cada concepção fundamental poderia ser chamada de unidade; e assim cada unidade teria sua letra correspondente, e as duas palavras, unidade e letra, poderiam ser usadas indiscriminadamente no lugar uma da outra, quando não causarem confusão.

9) Para Peirce, sua Álgebra geralmente não se estenderia além da álgebra sêxtupla, limitando a demanda da álgebra na maioria das vezes a seis letras; e as seis letras, i, j, k, l, m, e seriam restritas a esse uso, exceto em casos especiais.

10) Para qualquer letra dada, outra poderia ser substituída, desde que uma nova letra representasse uma combinação das letras originais das quais a letra substituída seria um componente necessário. Por exemplo, qualquer combinação de duas letras, que dependesse inteiramente de seu valor de ambos os componentes, como soma, diferença ou produto, poderia ser substituída por qualquer uma delas.

11) Ao realizar a substituição de letras, a letra original seria preservada com a distinção de um número subscrito. Assim, para a letra i , seriam sucessivamente substituídos, i_1, i_2, i_3 , etc.

Peirce introduziu vários símbolos:

17) O sinal $=$, chamado de igualdade, seria usado no sentido comum para denotar que as duas expressões que fossem separadas seriam o mesmo todo, embora representassem combinações diferentes de partes.

18) Os sinais $>$, $<$ que são os da desigualdade, e denotam "mais que" ou "menos que" em quantidade, seriam usados para denotar as relações de um todo com sua parte, de modo que o símbolo que denota a parte estaria no vértice do ângulo e aquilo que denota o todo em sua abertura. Isso envolveria a proposição de que a menor das quantidades fosse incluída na classe expressa pela maior. Então: $B < A$ ou $A < B$. $B < A$ denotaria que A é o todo e B é a parte.

20) O sinal $+$ é chamado mais na álgebra comum e indica adição. A soma também não seria afetada pela composição dos elementos.

$$A + B = B + A$$

$$(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C.$$

21) O sinal $-$ é chamado de menos na álgebra comum e denota subtração. Mantendo o mesmo nome, o processo seria considerado como o reverso da adição; de modo que, se uma expressão fosse adicionada e subtraída primeiro, ou o inverso, ela desapareceria do resultado; ou seria cancelada.

$$A + B - B = A - B + B = A \text{ e } B - B = 0.$$

22) O sinal $\times$ foi adotado a partir de álgebra comum com o nome do sinal de multiplicação, mas sem referência ao significado do processo. O resultado da multiplicação deveria ser chamado de produto. Os termos combinados pelo sinal de multiplicação foram chamados de fatores; o fator que precedesse o sinal como o multiplicador e o que se seguisse como multiplicando.

23) Quando uma expressão usada como fator em certas combinações produzisse um produto que desapareceu, seria chamada nessas combinações de "nilfator".

24) Quando uma expressão usada como fator em certas combinações sobre potências e ela própria fosse o produto, seria chamada de "idemfator".

25) Quando uma expressão elevada ao quadrado ou a qualquer potência superior desaparecesse, poderia ser chamada "nilpotente"; mas quando, elevado a uma potência quadrada ou superior, se apresentasse como resultado, poderia ser chamado de "idempotente".

As equações que definissem expressões nilpotentes e idempotentes foram respectivamente $A^n = 0$ e $A^n = A$; mas com referência a expressões idempotentes, sempre seria assumido que elas teriam a forma $A^2 = A$, a menos que fosse indicado de outra forma.

Divisão seria o inverso da multiplicação. Seria o processo para obter um dos fatores de um determinado produto quando o outro fator fosse dado.

29) $Aa = aA$, a seria chamado de coeficiente por Peirce.

Da mesma maneira, termos que diferissem apenas em seus coeficientes, poderiam ser adicionados adicionando seus coeficientes:

$$(a \pm b)A = aA \pm bA = Aa \pm Ab = A(a \pm b)$$

30) A simplicidade excessiva da concepção de uma equação envolveria a identidade das equações $A=B$ e $B=A$ e a substituição de B por A em todas as expressões, para que $MA \pm C = MB \pm C$ ou os membros de uma equação poderiam ser transpostos mutuamente ou aumentados ou diminuídos simultaneamente ou multiplicados ou divididos por expressões iguais.

31) Princípio distributivo da multiplicação:

$$(A \pm B)C = AC \pm BC$$

$$C(A \pm B) = CA \pm CB$$

32) Princípio associativo da multiplicação:

$$ABC = (AB)C = A(BC)$$

33) Princípio comutativo da multiplicação:

$$AB = BA \text{ . Esse princípio não foi adotado na investigação de Peirce.}$$

34) Uma álgebra na qual toda expressão fosse redutível à forma de uma soma algébrica de termos, cada uma das quais consistiria em uma única letra com um coeficiente quantitativo, Peirce chamou de Álgebra Linear.

36) Para Peirce, uma álgebra na qual pudesse existir um intercâmbio completo de suas unidades independentes, sem alterar as fórmulas de combinação, seria uma álgebra completamente simétrica; e aquela em que houvesse um intercâmbio parcial de suas unidades seria parcialmente simétrica. Mas o termo simétrico não deveria ser aplicado, a menos que o intercâmbio fosse mais extenso do que o envolvido nos princípios distributivos e comutativos. Uma álgebra na qual o intercâmbio fosse efetuado em uma determinada ordem e que retornasse a si mesma seria uma álgebra cíclica. Assim, os quatérnios eram uma álgebra cíclica, porque em qualquer uma de suas equações fundamentais poderia haver um intercâmbio de letras na ordem i, j, k, i , cada letra seria alterada para a que se segue:

$$i^2 = -1 \quad ij = -ji = k \quad jk = -1$$

A álgebra dupla em que:

$i^2=i$ $j^2=j$ $ij=i$ $ji=j$ seria cíclica porque as letras seriam intercambiáveis na ordem i, j, i . Mas nenhuma dessas álgebras seria comutativa.

Álgebra Linear Associativa:

Todas as expressões dessa uma álgebra seriam distributivas, sempre que o princípio distributivo se estendesse a todas as letras do alfabeto. Então:

$$(i+j)(k+l)=ik+jk+il+jl \text{ e cada letra poderia ser multiplicada por um inteiro:}$$

$$(ai+bj)(ck+dl)=acik+bcjk+adil+bdjl \quad a,b,c,d \text{ inteiros}$$

Para quaisquer combinações ou operações A, B, C poderiam representar as unidades originais sob a forma de soma das letras i, j, k como:

$(A+B)(C+C)=AC+BC+AD+BD$ que se tratava da completa expressão do princípio distributivo.

39) Uma álgebra é associativa quando o princípio associativo se estendia a todas as letras do alfabeto e definiu:

$$A=\sum (ai)=ai+a_1j+a_2k+\dots \quad B=\sum (bi)=bi+b_1j+b_2k+\dots$$

$$C=\sum (ci)=ci+c_1j+c_2k+\dots$$

$$AB=\sum (ab_1ij) \quad , \quad BC=\sum (bc_1ij)$$

$$(AB)C=\sum (ab_1c_2ijk)=A(BC)=ABC \quad .$$

Para Peirce, as álgebras poderiam ser distintas entre si pelo número de suas concepções fundamentais independentes ou pelas letras de seu alfabeto, indicando já uma noção de base e da sua dimensão, termos conhecidos atualmente.

As chamadas unidades originais A, B, C seriam representadas pela letras do alfabeto i, j, k , uma forma representativa de que todo elemento poderia ser expresso através dessas letras.

As operações como soma, multiplicação e propriedade distributiva foram descritas, no entanto, numa álgebra não-comutativa.

2.12 HERMANN GUNTHER GRASSMANN

Figura 12: Grassmann



Fonte: Wikipédia³³

Nascido em 15 de abril de 1809, Estetino, Polônia

Morto em 26 de setembro de 1877, Polônia.

Hermann estudou teologia, línguas clássicas, filosofia e literatura, aparentemente não frequentou aulas de matemática ou física, foi autor de vários livros de Física e Matemática.

Entre os muitos temas que Grassmann abordou está seu ensaio sobre a teoria das marés, que elaborou em 1840 tomando como base a teoria da *Mécanique analytique* de Lagrange e da *Mécanique Celeste* de Laplace, mas expando estas teorias por métodos "vetoriais", termo utilizado a partir dos estudos de Hamilton, nos quais trabalhava desde 1832.

Em 1844, Grassmann publica sua obra-prima, *Die Lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik* mais conhecido como *Ausdehnungslehre*. Depois de propor em *Ausdehnungslehre* novas bases para toda a matemática, o trabalho começou com definições de natureza filosófica.

2.12.1 *Die Lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik* (1844)

Em 1844, Grassmann publicou um tratado contendo um cálculo vetorial muito geral, num número de n dimensões, ele considerou n -uplas ordenadas de números reais. Nesta

³³Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Hermann_Grassmann Acesso em 25 maio 2020

obra podia-se encontrar também, o desenvolvimento das ideias de multiplicação não-comutativa.

Grassmann antecipou os grandes conceitos do cálculo vetorial, com uma notação nova e um livro de difícil leitura para época, pois segundo historiadores esse livro foi encaminhado para Möbius para análise e considerações e este se disse não capaz de fazer essa avaliação.

Esse livro foi escrito em duas Partes, a Parte I tem 5 capítulos e a Parte II tem 4 capítulos, além de uma introdução.

Para entendimento deste livro foi necessária avaliação do livro original em alemão de 1844 e uma tradução para o inglês feita por Lloyd Kannenberg em 1995, sendo a prioridade dada ao original. Uma das dificuldades com a tradução foi justamente a palavra “*strecke* ou *strecken*” poderia ser entendida como “vetor” e que traduzido para o português significa “rota” ou “itinerário”. O tradutor para o inglês preferiu usar a palavra “*displacement*”, que traduzida para o português seria deslocamento. “*Verknüpfung*” que aparece no livro diversas vezes, foi traduzido por conexão ou conjunção.

Na introdução, Grassmann implementou uma fundação filosófica de seu sistema.

Considerando os números negativos em geometria, Grassmann relatou que estava acostumado a considerar os deslocamentos AB e BA como magnitudes opostas.

Consequentemente se A, B, C fossem pontos de uma linha reta, então $AB + BC = AC$ seria sempre verdadeiro, se AB e BC fossem dirigidos de maneira semelhante ou oposta, mesmo que C estivesse entre A e B .

AB e BC não foram interpretados apenas como comprimentos, suas direções também foram mantidas simultaneamente, de acordo com as quais eles foram precisamente orientados de maneira oposta.

Foi feita a distinção entre a soma dos comprimentos e a soma desses deslocamentos onde as direções foram levadas em consideração.

O conceito de magnitude foi substituído pelo de número em aritmética; linguagem assim diferencia muito bem “adicionar” e “subtrair” quanto ao número “aumentar” e “diminuir” para magnitude.

Ele especificou quatro conceitos: o discreto, o contínuo, o igual e o diferente. Da combinação do contínuo e diferente, surgiria por exemplo, a noção de diferença, dimensão de espaços diferentes, cujos elementos, os pontos, variariam continuamente produzindo as retas, ou linhas.

Na teoria do espaço, o ponto apareceu como o elemento, o movimento como sua evolução contínua e as várias posições do ponto no espaço como seus diferentes estados. Grassmann chamou de sistema ou domínio.

Grassmann ainda explicou que para duas leis diferentes de evolução, a coleção de elementos gerados por essas duas leis seria um sistema de segunda ordem. As leis de evolução pela qual os elementos desse sistema eram produzidos dependiam apenas dessas duas leis; se fosse adicionado uma terceira ordem independente, um novo sistema de terceira ordem era conseguido.

O plano seria um sistema de segunda ordem; onde haveria um conjunto infinito de direções dependentes das duas direções originais. Se uma terceira direção independente era adicionada, então por meio dessa direção, um sistema de terceira ordem era produzida. Para ele, não iria além de três direções independentes, leis evolutivas; mas na teoria da extensão pura o seu número poderia ser infinitamente aumentado. Essa ideia conferiu uma noção bastante filosófica sobre base numa tentativa de construção de seu sistema.

Novos sistemas eram criados, tomando um elemento de um sistema e permitindo que ele sofresse uma variação. Exemplos:

1. Um ponto podia ser movido em uma direção produzindo uma reta, originando um sistema de primeira ordem.

2. Uma reta variando numa direção perpendicular, produziria um plano .

Em “Pesquisa da Teoria Geral de Formas”, anterior ao Capítulo I, do parágrafo 1 ao parágrafo 12, Grassmann, no parágrafo 2 definiu "conjunção" como sendo duas magnitudes ou formas que se combinadas, seriam chamadas de fatores da conjunção e a forma que fosse produzida pela conjunção dos dois fatores seria chamada de produto da conjunção. Ele apresentou as conjunções: sintética e analítica. Eram operações entre as magnitudes, formas ou ainda termos.

Grassmann, nos parágrafos 2 e 3, iniciou sua teoria introduzindo uma simbologia nova $\frown$, a conexão sintética, entre os termos ou magnitudes a, b, c . Tratava-se de uma operação muito próxima à adição, pois:

$$(a \frown b) \frown c = a \frown (b \frown c) = a \frown b \frown c$$

era similar a:

$$(a+b)+c=a+(b+c)=a+b+c \quad .$$

No parágrafo 5, um símbolo novo $\smile$ foi apresentado conectando os termos. Grassmann chamou de conexão analítica. Seria análogo a uma subtração.

era similar a:

$$a-(b-c)=a-b+c \quad .$$

Outro símbolo foi apresentado por Grassmann, no parágrafo 7, ele o chamou de “indiferente” próximo ao que seria um zero, ou nulo, pois resultaria $(\smile b)$.

No parágrafo 9, foi apresentado o símbolo $\approx$, uma nova conexão sintética entre os termos, poderia ser chamado de multiplicação.

No parágrafo 10 e 11 Grassmann mostrou uma distributiva, o elemento simétrico e a divisão.

Grassmann também introduziu a divisão pela equação:

$$\frac{a \mp b}{c} = \frac{a}{c} \mp \frac{b}{c} \quad . \text{ E se } \frac{a}{c} = x \text{ então } xc = a \quad .$$

Ele explicou ainda que: Se $\frac{a}{b} = c$ e $a = 0$ então b não era determinado unicamente.

Na Parte I, Capítulo I tratou de adição, subtração de extensões elementares de 1ª ordem, ou deslocamentos.

No parágrafo 13, Grassmann definiu estrutura extensiva de primeira ordem como uma coleção de elementos no qual um elemento gerador seria transformado por uma evolução contínua.

No parágrafo 19, Grassmann apresentou a soma de deslocamentos onde são dados dois deslocamentos de um mesmo sistema p_1 e p_2 e ambos são exibidos como somas de deslocamentos:

$$p_1 = a_1 + b_1 + c_1 + \dots \quad \text{e} \quad p_2 = a_2 + b_2 + c_2 + \dots$$

$p_1 + p_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) + \dots$ e se $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \dots$ forem partes correspondentes dos deslocamentos a_1, a_2, b_1, b_2 então a soma seria $(\alpha_1 + \alpha_2) + (\beta_1 + \beta_2) + \dots$.

No parágrafo 20, que trata da independência de um sistema de alta ordem, Grassmann afirmou que um sistema de m -ésima ordem era gerável por qualquer m métodos de evolução pertencentes a ele que eram mutuamente independentes.

Ele supôs que se p pertencesse a um sistema de m -ésima ordem, poderia ser escrito como uma soma dos deslocamentos pertencentes ao método original de evolução.

$p=a+b+c+\dots$ se a, b, c pertencessem ao método original de evolução.

Na página 32, Grassmann afirmou que todo deslocamento de um sistema de m -ésima ordem pode ser representado como uma soma de m deslocamentos pertencentes a m dados métodos independentes de evolução, do sistema, sendo a soma única para cada conjunto.

O Capítulo II tratava de multiplicação externa de deslocamentos.

No parágrafo 39, Grassmann estudou a multiplicação de termos, similar ao produto vetorial atual. Neste exemplo verifica-se a expressão da área de um paralelogramo ab e que

$$a.b = ab \sin(ab) \text{ e } b.a = ba \sin(ba) \text{ consequentemente } a.b = -b.a.$$

O Capítulo V tratava de equações e projeções.

O parágrafo 92 tratou da transformação de coordenadas em geometria, na página 128, em a, b, c eram três quantidades ou medidas independentes fundamentais e e_1, e_2, e_3 três novas quantidades ou medidas independentes fundamentais :

$$e_1 = \alpha_1 a + \beta_1 b + \gamma_1 c, \quad e_2 = \alpha_2 a + \beta_2 b + \gamma_2 c, \quad e_3 = \alpha_3 a + \beta_3 b + \gamma_3 c.$$

E o elemento p e q podiam ser escritos:

$$p = u_1 e_1 + u_2 e_2 + \dots + u_n e_n.$$

$$q = v_1 e_1 + v_2 e_2 + \dots + v_n e_n.$$

A Parte II, Capítulo II tratava de multiplicação externa, divisão e projeção de magnitudes.

Na Parte II, Capítulo II, parágrafo 107, Grassmann definiu sistema extensivo baseado no conceito de dependência. Uma magnitude elementar de primeira ordem dependente era representada como soma múltipla de magnitudes elementares de primeira ordem independentes. As magnitudes independentes não podiam ser representadas como múltiplo ou soma do restante das magnitudes independentes.

Um sistema elementar de ordem n foi definido como uma coleção de n elementos dependentes onde esses n elementos deveriam ser mutualmente independentes.

Foram dados $\alpha, \beta, \gamma \dots$ n elementos mutualmente independentes e se ρ e δ eram dependentes, então sua diferença podia ser representada como múltiplo da soma desses n elementos, ou seja, $\rho - \delta = a.\alpha + b.\beta + c.\gamma + \dots$.

No parágrafo 110, página 155, Grassmann tratou da multiplicação, divisão e projeção de magnitudes elementares, ele apresentou um elemento ρ que seria representado de

maneira única forma pela somatória dos n elementos independentes $\alpha, \beta, \gamma \dots$ onde $a, b, c \dots$ eram valores numéricos.

$$\rho = a\alpha + b\beta + c\gamma + \dots$$

Grassmann construiu um sistema extensivo no espaço n dimensional, com propriedades de soma e multiplicação.

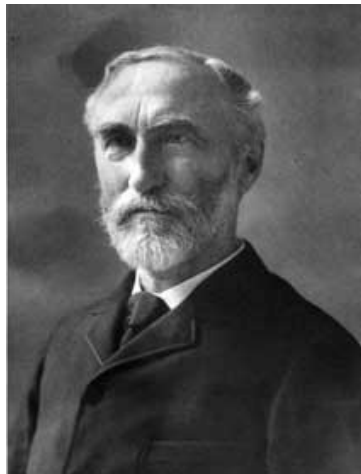
Afirmou que um sistema de m -ésima ordem era gerável por qualquer m métodos de evolução pertencentes a ele que eram mutuamente independentes, indicando a ideia de base com elementos independentes e com uma dimensão determinada.

Todo deslocamento de um sistema de m -ésima ordem deveria ser representado como uma soma de deslocamentos pertencentes a dados m métodos independentes de evolução, do sistema, sendo a soma única para cada conjunto, ou seja, representou de forma única um elemento como somatória, ou uma combinação linear, de elementos independentes.

Definiu o conceito de dependência, onde uma magnitude elementar de primeira ordem dependente era representada como soma múltipla de magnitudes elementares de primeira ordem independentes e essas magnitudes independentes não podiam ser representadas como múltiplo ou soma do restante das magnitudes independentes.

2.13 JOSIAH WILLARD GIBBS

Figura 13: Gibbs



Fonte: World of Chemicals³⁴

Nascido em 11 de fevereiro de 1839, New Haven, EUA.

Morto em 28 de abril de 1903, New Haven, EUA

Foi um cientista americano que realizou importantes contribuições teóricas na física, química e matemática. Gibbs também trabalhou nas aplicações das equações de Maxwell, termodinâmica, problemas em óptica. Como matemático, ele inventou o moderno cálculo vetorial independentemente de Oliver Heaviside, que realizou um trabalho similar durante o mesmo período.

O trabalho de Gibbs na análise de vetores também foi de grande importância para matemática pura. Ele primeiro produziu notas impressas para o uso de seus próprios alunos entre 1881 e 1884 e em 1901 que uma versão adequadamente publicada apareceu preparada para publicação por um de seus alunos. Usando idéias de Grassmann, Gibbs produziu um sistema muito mais facilmente aplicado à física do que o de Hamilton.

Ele aplicou seus métodos vetoriais para conseguir um método de encontrar a órbita de de um cometa em 1880.

Uma série de cinco artigos de Gibbs sobre a teoria eletromagnética da luz foi publicada entre 1882 e 1889. Seu trabalho sobre mecânica estatística também foi importante, fornecendo uma estrutura matemática para a teoria quântica e as teorias de Maxwell.

³⁴Disponível em: <https://www.worldofchemicals.com/159/chemistry-articles/josiah-willard-gibbs-deduced-phase-rule.html> Acesso em 25 maio 2020

Gibbs prestou serviços de excelência para a mecânica estatística, cálculo vetorial e teoria eletromagnética da luz. Seus *Scientific Papers* (1906) e *Collected Works* (1928) foram recolhidos e publicados após sua morte.

2.13.1 *Elements of Vector Analysis* (1881)

Segundo Gibbs, os princípios fundamentais da análise desse livro seriam familiares de uma forma ligeiramente diferente para os estudantes dos quatérnios. A maneira pela qual o assunto foi desenvolvido é um pouco diferente do seguido nos tratados sobre quatérnios, já que o objetivo do escritor não requereu nenhum uso da concepção de quatérnios, sendo simplesmente fornecer uma notação adequada para as relações entre vetores ou entre vetores e escalares, que parecem mais importantes, e que se prestam mais prontamente a transformações analíticas e explicação de algumas dessas transformações.

No capítulo I de *Elements of Vector Analysis*, há as definições de vetor e escalar, além dos vetores i, j, k formando um sistema normal de vetores unidades.

Na página 1, Gibbs definiu vetor como algo tivesse magnitude e direção, esta magnitude e direção juntas constituiriam o que seria chamado de vetor.

Distintas de vetores as quantidades reais (positiva ou negativa) da álgebra comum são chamadas de escalares.

Na página 2, Gibbs usou letras gregas para denotar vetores e letras para denotar escalares. As letras i, j, k foram uma exceção. Vetores seriam iguais se tiverem a mesma magnitude e direção.

A ideia mais simples de um vetor seria uma linha reta direcionada, por exemplo, de A para B . Gibbs utilizou a notação $\overline{AB}$ para denotar a linha como um vetor. Os pontos A e B seriam a origem e o término do vetor. Magnitude seria representada por comprimento e um vetor seria representado por uma linha direcionada.

O sinal negativo inverteria a direção do vetor.

Um vetor poderia ser multiplicado ou dividido por um escalar quando a magnitude fosse multiplicada ou dividida pelo valor numérico do escalar e a direção seria inalterada ou invertida de acordo com o escalar ser positivo ou negativo.

Um vetor unidade seria um vetor cuja magnitude fosse a unidade.

Na página 3, Gibbs definiu soma e subtração de vetores:

A soma dos vetores $\alpha, \beta \dots$ (escrita $\alpha + \beta + \dots$) seria o vetor encontrado pelo seguinte processo indicado por Gibbs:

Assumindo qualquer ponto A, foram determinados sucessivamente os pontos B, C, ... , de modo que $AB = \alpha$, $BC = \beta$, etc. O vetor traçado de A até o último ponto assim determinado seria a soma necessária. Chamada de soma geométrica, para distingui-la de uma soma algébrica ou de uma soma aritmética. Também foi chamada de resultante, e $\alpha, \beta, \dots$ foram chamados de componentes. Quando os vetores a serem adicionados forem todos paralelos à mesma linha reta, a adição geométrica se reduziria à algébrica; quando eles tiverem a mesma direção, a adição geométrica, como algébrica, se reduziriam à aritmética. O valor da soma não seria afetado pela alteração da ordem de dois termos consecutivos e, portanto, não seria afetado por nenhuma alteração na ordem dos termos. Novamente, seria evidente a partir da definição que o valor de uma soma não fosse alterado associando qualquer um de seus termos entre parênteses, como $\alpha + [\beta + \gamma] + \dots$.

Em outras palavras, os princípios comutativos e associativos da aritmética e adição algébrica valeriam para adição geométrica.

Em outra definição, um vetor seria subtraído quando fosse adicionado após a inversão de direção. Isso é indicado pelo uso do sinal - em vez de + .

Na página 4, Gibbs mostrou uma relação linear de quatro vetores ou coordenadas: se α, β, γ fossem vetores não paralelos a um mesmo plano, então outro vetor podia ser expresso como: $\rho = a\alpha + b\beta + c\gamma$ com α, β, γ vetores unidades e a, b, c escalares. Se $\rho = \overline{OP}$ (segmento $\overline{OP}$) e α, β, γ fossem vetores unidades, então a, b, c eram as coordenadas cartesianas do ponto P em relação aos eixos.

Um vetor era caracterizado em termos de três vetores.

Para Gibbs, as letras i, j, k eram apropriadas para designação do sistema normal de vetores unitários, isto é, os três vetores unitários, cada um deles perpendicularmente aos outros dois e determinado na direção por eles de uma maneira perfeitamente definida.

Supondo que k está no plano ij em uma rotação de i para j , através de um ângulo reto, apareceria no sentido anti-horário. Em outras palavras, as direções i, j, k seriam determinadas se fossem transformadas, permanecendo rigidamente conectadas entre si, de modo que se i apontasse para leste, j para norte e k apontaria para cima.

Quando eixos retangulares, X, Y, Z fossem empregados, as direções eram confirmadas com uma condição similar, e i, j, k , quando não fosse indicado o contrário, seria supostamente paralelo a esses eixos respectivamente.

Na página 5, Gibbs definiu produto “direto” $\alpha \cdot \beta$ como sendo o produto de suas magnitudes pelo cosseno do ângulo entre as direções, que atualmente é conhecido como produto escalar. Também definiu produto “oblíquo”, conhecido por produto vetorial $\alpha \times \beta$ que seria uma função vetorial de α e β , cuja magnitude seria o produto das magnitudes de α e β pelo seno do ângulo entre elas.

As operações com as unidades i, j, k seriam:

$$i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = 1$$

$$i \cdot j = j \cdot i = k \cdot i = i \cdot k = k \cdot j = j \cdot k = 0$$

$$i \times i = 0 \quad i \times j = k \quad i \times k = -j$$

$$j \times j = 0 \quad j \times k = i \quad j \times i = -k$$

$$k \times k = 0 \quad k \times i = j \quad k \times j = -i$$

A partir dessas operações Gibbs definiu: $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$ e $\alpha \times \beta = -\beta \times \alpha$ e a propriedade distributiva dos dois produtos:

$$\alpha \cdot [\beta + \gamma] = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma \quad \text{e} \quad \alpha \times [\beta + \gamma] = \alpha \times \beta + \alpha \times \gamma.$$

No capítulo II, página 14, Gibbs apresentou a definição de diferencial de vetores, que seria a diferença geométrica de dois valores daquele vetor que diferem infinitamente e suas propriedades.

Em relação aos eixos fixos, os componentes da diferencial de um vetor seriam iguais às diferenciais dos componentes do vetor, considerando α, β, γ unidades vetoriais.

$$\text{Então se: } \rho = x\alpha + y\beta + z\gamma \quad \text{então} \quad d\rho = dx\alpha + dy\beta + dz\gamma.$$

Nesse livro, Gibbs definiu vetor como algo que tivesse magnitude e direção.

Mostrou uma relação linear onde um vetor ρ poderia ser expresso em termos de vetores unidade α, β, γ e escalares a, b, c , ou seja, $\rho = a\alpha + b\beta + c\gamma$.

Apresentou um sistema normal de vetores unidade i, j, k , perpendiculares dois a dois e com magnitude unitária.

Definiu também produto direto e produto oblíquo, respectivamente, produto interno e produto vetorial.

2.14 GASTON DARBOUX

Figura 14: Darboux



Fonte: MacTutor History³⁵

Nascido em 14 de Agosto de 1842 , França

Morto em 23 de Fevereiro de 1917, Paris, França

Estudou na École Normale Supérieure, e ainda estudante, publicou seu primeiro trabalho sobre superfícies ortogonais.

Concluiu seu doutorado em 1866 com a tese, *Sur les surfaces orthogonales*, um trabalho sobre sistemas ortogonais de superfícies.

Ele ficou mais conhecido pela integral de Darboux, que leva o nome dele. Esta integral foi introduzida em um artigo sobre equações diferenciais de segunda ordem, que ele escreveu em 1870.

Em 1873, Darboux escreveu um artigo sobre ciclídeos e, entre 1887 e em 1896, produziu quatro volumes sobre geometria infinitesimal, que incluiu a maior parte de seu trabalho anterior, intitulado *Leçons sur la théorie général des surfaces et les applications geometria du calcul infinitesimal*.

³⁵Disponível em: <http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/PictDisplay/Darboux.html> Acesso em 25 maio 2020

Em 1875, ele estudou a integral de Riemann, definindo somas superiores e inferiores e definiu que uma função para ser integrável a diferença entre as somas superior e inferior deveria tender a zero.

Também em 1875, publicou *Sur La composition des forces em statique*, onde houve uma tentativa de axiomatização de espaço vetorial sobre os reais.

2.14.1 *Sur La composition des forces em statique* (1875)

Em 1875, Gastón Darboux publicou em *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques*, uma revista sobre Matemática e Astronomia, o artigo *Sur La composition des forces em statique* sobre composição de forças num sistema tridimensional, analisando várias provas da composição de forças na estática, a lei do paralelogramo. Tratava-se de uma demonstração geométrica da composição das forças e uma abordagem sobre axiomatização de vetores.

Na página 283, Darboux assumiu dois pressupostos ou axiomas:

Dadas n linhas todas começando no mesmo ponto O , a lei da composição seria tal que:

I. A resultante total única e determinada, permaneceria invariável e independente da ordem das resultantes parciais.

II. A resultante seria independente da orientação do sistema no espaço, isto é, se moveria formando com as linhas um sistema invariável quando fossem impressos alguns deslocamentos ao redor do ponto O . Ou ainda, a resultante total seria inalterada por uma rotação dos segmentos sobre O .

Na página 285, as três linhas P, Q, R que tinham origem em O em que a resultante seja nula, vide figura em Apêndice XXII.

Na página 286, Darboux apresentou $OA = \Phi(P)$, $OB = \Phi(Q)$, $OC = \Phi(R)$ que seriam as direções dos segmentos OA, OB, OC .

OP , seria em direção, a diagonal do paralelogramo construído sobre OB , OC , OR a diagonal do paralelogramo construído sobre OB e OA .

Nas páginas 286 e 287, Darboux enunciou o terceiro axioma, vide figura em Apêndice XXII:

III. A lei da composição das linhas se reduziria a adição algébrica das linhas de mesma direção.

Ele considerou duas linhas quaisquer P e Q de mesma direção e sentido e outras quaisquer linhas S e T . O polígono de linhas resultantes da composição apareceu com dois lados paralelos $\Phi(P)$ e $\Phi(Q)$. Mas se a composição P, Q em outra linha $P+Q$, os dois lados $\Phi(P)$ e $\Phi(Q)$ seriam substituídos por um único $\phi(P+Q)$ que seria paralelo. Como a resultante total não deveria ser alterada, então:

$$\phi(P+Q) = \phi(P) + \phi(Q) .$$

Ainda na página 287, Darboux então, supôs $\Phi(P)$ uma função contínua tal que $\Phi(P) = aP$.

Se $\Phi(x)$ fosse estritamente positiva então: $\Phi(P+Q) - \Phi(P) = \Phi(Q)$.

Uma consequência seria: $\Phi\left(\frac{P}{q}\right) = \frac{P}{q} \Phi(1)$

A função $\Phi(x) = ax$ seria válida para todos os valores comensuráveis de x .

Com o aumento da função, a mesma fórmula também serviria obviamente, sem que fosse necessário supor que fosse contínua, para os incomensuráveis valores de x .

Se x fosse um incomensurável, entre $\frac{p}{q}$ e $\frac{p+1}{q}$ tem-se

$\Phi\left(\frac{p}{q}\right) < \Phi(x) < \Phi\left(\frac{p+1}{q}\right)$ ou $a\frac{p}{q} < \Phi(x) < a\left(\frac{p+1}{q}\right)$ e $\Phi(x)$ estaria entre duas grandezas de limite ax .

De acordo com a observação acima, pode-se dividir por a e pegando $\Phi(x) = x$, o que levaria a lei do paralelogramo.

Nas páginas 287 e 288, Darboux no quarto axioma apresentou que :

$\phi(P)$ e $\phi(Q)$ deveriam ser positivas e ter o mesmo sinal;

$\phi(P)$ deveria ser uma função contínua;

$\phi(P)$ se tivesse o mesmo sinal, a resultante das forças P, Q seria sempre direcionada a seu ângulo;

$\phi(P)$ se fosse contínua, a direção da magnitude resultante seria função contínua das duas forças.

A soma das resultantes era única considerando a permutação da ordem das resultantes parciais; a resultante inalterada por uma rotação de segmentos em torno de um ponto O ; a lei de composição que reduziu a uma adição algébrica de segmentos de mesma direção e a direção e magnitude da resultante eram funções contínuas dos segmentos formaram os 4 axiomas de Darboux.

Nesse artigo, Darboux utilizou a lei do paralelogramo, para composição de forças estáticas, o que significou uma tentativa de caracterizar vetores tridimensionais, onde valeria $\phi(P+Q)=\phi(P)+\phi(Q)$ e $\Phi(x)=ax$ para todos valores comensuráveis, numa tentativa de axiomatização de espaço vetorial sobre os reais.

2.15 OLIVER HEAVISIDE

Figura 15: Heaviside



Fonte: Educalingo³⁶

Nascido em 18 de maio de 1850, Londres, Inglaterra

Morto em 3 de fevereiro de 1925, Torquay, Inglaterra.

Estudou eletricidade, chegando a publicar alguns artigos inspirados pelo Tratado de Eletricidade e Magnetismo de Maxwell. Apesar dos vários contributos para o eletromagnetismo, mais conhecido pelo estudo da análise vetorial.

³⁶Disponível em: <https://educalingo.com/pt/dic-de/heaviside> Acesso em 25 maio 2020

Introduziu o cálculo para resolver equações diferenciais dos circuitos, tornando-as equações algébricas facilmente resolvíveis. Suas resoluções usavam métodos cuja demonstração rigorosa iriam manter ocupadas futuras gerações de matemáticos.

No entanto, o seu trabalho foi alvo de fortes críticas por falta de rigor matemático; Heaviside achava que não se devia perder tempo em demonstrações de algo que intuitivamente parecia estar certo.

2.15.1 Eletrical Papers Vol 2 (1894)

Na página 4, Heaviside definiu escalares e vetores e afirmou que numa equação escalar todo termo seria escalar ou uma quantidade algébrica ou magnitude e que $+$ ou $-$ teriam um significado comum ou trivial. Numa equação vetorial todo termo representaria um vetor ou magnitude ordenada e os sinais $+$ ou $-$ deveriam ser entendidos como composição de forças e velocidades.

Heaviside considerou vetores numa forma geral:

$A+B+C+\dots=0$ com $A, B, C \dots$ vetores e se n fosse o número de vetores, essa soma seria zero porque representaria os n lados de um polígono.

Dados A_1, A_2, A_3 três componentes escalares comuns de A referidos a um conjunto de três eixos retangulares, e similarmente para outros vetores. Então as equações escalares seriam:

$$A_1+B_1+C_1+\dots=0$$

$$A_2+B_2+C_2+\dots=0$$

$$A_3+B_3+C_3+\dots=0$$

O sinal negativo antes de um vetor inverteria sua direção e seria negativa nas três componentes.

Na mesma página Heaviside considerou i, j, k como vetores retangulares de comprimento unitário e assim:

$A = iA_1 + jA_2 + kA_3$ onde A_1, A_2, A_3 seriam os componentes de A em relação ao eixo i, j, k , ou seja, A seria a soma dos três vetores iA_1, jA_2, kA_3 de comprimentos A_1, A_2, A_3 .

Para o produto escalar, Heaviside definiu $AB = A_1B_1 + A_2B_2 + \dots$ onde $A = iA_1 + jA_2 + kA_3$ e $B = iB_1 + jB_2 + kB_3$ pois:

$$i^2 = j^2 = k^2 = 1 \text{ e } ij = jk = ki = 0.$$

Na página 5, Heaviside definiu o produto vetorial como:

$VAB = i(A_2B_3 - A_3B_2) + j(A_3B_1 - A_1B_3) + k(A_1B_2 - A_2B_1)$ que significava produto vetorial de A por B . Sua magnitude seria de $A \times B \times \text{seno}$ do ângulo entre A e B e sua direção deveria ser perpendicular a A e B com a relação convencional entre direções positivas de translação e rotação. Para tal: $Vij = k$, $Vjk = i$, $Vki = j$.

Heaviside notou que $VAB = -VBA$, em que a direção inversa, inverteria a ordem das letras.

Heaviside ainda utilizou o operador ∇ de Hamilton como:

$$\nabla = i \frac{d}{dx} + j \frac{d}{dy} + k \frac{d}{dz}.$$

O operador ∇ poderia, desde que as diferenciações fossem escalares, ser tratado como um vetor. O produto vetorial seria:

$$V \nabla A = i \left(\frac{dA_3}{dy} - \frac{dA_2}{dz} \right) + j \left(\frac{dA_1}{dz} - \frac{dA_3}{dx} \right) + k \left(\frac{dA_2}{dx} - \frac{dA_1}{dy} \right).$$

Nesse artigo, Heaviside definiu vetores e escalares utilizando vetores retangulares de comprimento unitário i, j, k , definiu também produto escalar e produto vetorial, além do

tratar operador hamiltoniano $\nabla = i \frac{d}{dx} + j \frac{d}{dy} + k \frac{d}{dz}$ como vetor quando as diferenciações eram escalares.

2.16 GIUSEPPE PEANO

Figura 16: Peano



Fonte: Wikipédia³⁷

Nascido em 27 de agosto de 1858 ,Turim, Itália.

Morto em 20 de abril de 1932, Turim, Itália

Frequentou o Liceo Classico Cavour em Turim e se matriculou na Universidade de Turim em 1876, se graduando em 1880 com mérito.

Seu primeiro grande trabalho, um livro sobre cálculo, foi publicado em 1884 e creditado a Genocchi³⁸.

Em 1886 Peano provou que se $f(x, y)$ era contínua então a equação diferencial de primeira ordem $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ tinha uma solução.

Em 1888, Peano publicou o livro *Calcolo geometrico*, que foi iniciado com um capítulo sobre lógica matemática. Este foi seu primeiro trabalho sobre o tema que desempenharia um papel importante em sua pesquisa nos próximos anos e foi baseado no trabalho de Schröder, Boole e Charles Peirce. Uma característica mais significativa do livro é que nele Peano expõe com grande clareza as idéias de Grassmann que certamente foram apresentadas de maneira bastante obscura pelo próprio Grassmann. Este livro contém a primeira definição de um espaço vetorial com notação e estilo notavelmente modernos e, embora não tenha sido apreciado por muitos na época.

Em 1890, Peano fundou a revista *Rivista di Matematica*, publicou sua primeira edição em janeiro de 1891. Em 1891, ele começou o Projeto *Formulario*, uma Enciclopédia de

³⁷Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Giuseppe_Peano Acesso em 25 maio 2020

³⁸Matemático italiano (1817-1889) especializado em teoria dos números que trabalhou com Peano.

Matemática, contendo todas as fórmulas e teoremas conhecidos da ciência matemática usando uma notação padrão inventada por ele.

Em 1901, ele estava no topo da sua carreira matemática e tinha feito avanços na área de análise, fundamentos e lógica, dado muitas contribuições para o ensino de cálculo e também contribuído para os campos de equações diferenciais e análise de vetores. Desempenhou um papel fundamental na axiomatização da matemática e foi pioneiro de liderança no desenvolvimento da lógica matemática.

Peano introduziu os elementos básicos de cálculo geométrico.

Ele produziu uma definição axiomática do sistema de número natural e mostrou como o sistema de número real pode ser derivado destes postulados.

Em 1908, ele publicou a quinta e última edição do Projeto *Formulario*, intitulada *Formulario Mathematico*. Continha 4200 fórmulas e teoremas, a maioria deles provada.

2.16.1 *Intégration par series des équations différentielles linéaires* (1888)

Esse artigo faz parte de *Mathematische Annalen Vol.32*.

Na página 450, o objetivo do artigo de Peano era provar o seguinte teorema:

Item 1) Dadas n equações diferenciais lineares homogêneas com n funções $x_1, x_2, \dots, x_n$ na variável real t , que r_{ij} eram os coeficientes das funções em t , contínuas em um intervalo fechado e limitado (p, q) expressos como:

$$\frac{dx_1}{dt} = r_{11}x_1 + r_{12}x_2 + \dots + r_{1n}x_n$$

$$\frac{dx_2}{dt} = r_{21}x_1 + r_{22}x_2 + \dots + r_{2n}x_n$$

$\vdots$

$$\frac{dx_n}{dt} = r_{n1}x_1 + r_{n2}x_2 + \dots + r_{nn}x_n$$

Substituindo n constantes arbitrárias $a_1, a_2, a_3 \dots a_n$ no lugar de $x_1, x_2 \dots x_n$ do lado direito das equações e integrando de t_0 a t com $t, t_0 \in (p, q)$ foram obtidas n funções de t , denotadas por $a'_1, a'_2, \dots a'_n$.

Procedendo a substituição de $a'_1, a'_2, \dots a'_n$ no lado direito das equações dadas, no lugar de $x_1, x_2 \dots x_n$ e integrando de t_0 a t foram obtidas n novas funções de t $a''_1, a''_2, \dots a''_n$.

Repetindo o processo :

$$x_1 = a_1 + a'_1 + a''_1 + \dots$$

$$x_2 = a_2 + a'_2 + a''_2 + \dots$$

$\vdots$

$$x_n = a_n + a'_n + a''_n + \dots$$

Essas n séries convergiam no intervalo (p, q) . Suas somas foram indicadas por $x_1, x_2 \dots x_n$ e eram funções de t . Para $t = t_0$ foi assumido o valor de $a_1, a_2, a_3 \dots a_n$.

Para provar esse teorema, Peano introduziu a notação vetorial e matriz e usou também a teoria de complexos e transformações, desenvolvida Grassmann, Hamilton, Cayley e Sylvester.

Num item 2, Peano desenvolveu uma série de números chamados "complexos", de ordem n , a série de números reais designados com a notação $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]$. Considerou a relação de igualdade, a soma e o produto escalar, comprovando as propriedades associativas, comutativas e distributivas.

Na página 451, Peano apresentou igualdade entre dois "complexos", soma e subtração, além de considerar $i_1, i_2 \dots i_n$ de ordem n , onde: $i_1 = [1, 0, 0, 0 \dots 0]$ $i_2 = [0, 1, 0, 0, \dots 0]$ $i_n = [0, 0, 0, 0 \dots 1]$ e cada "complexo" de ordem n , $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ poderia ser escrito na forma: $x = x_1 i_1 + x_2 i_2 + \dots x_n i_n$. Chamou de substituição de números complexos de ordem n uma operação que dado um número complexo $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]$, outro número complexo era correspondido:

$$[r_{11}x_1 + r_{12}x_2 + \dots r_{1n}x_n + \dots r_{n1}x_1 + \dots + r_{nn}x_n]$$

Somou dois "complexos": $x = x_1 i_1 + x_2 i_2 + \dots x_n i_n$ e $y = y_1 i_1 + y_2 i_2 + \dots y_n i_n$

$$x + y = [x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n]$$

Multiplicou por k um número real: $k[x_1, x_2, \dots, x_n] = [kx_1, kx_2, \dots, kx_n]$.

Na página 452, Peano mostrou definições e propriedades dos funcionais lineares:

Utilizando a matriz : $\begin{Bmatrix} r_{11} & \dots & r_{1n} \\ r_{n1} & \dots & r_{nn} \end{Bmatrix} = \{r_{ij}\}$, chamou a substituição de R e o

complexo de x , Rx representava um outro complexo na substituição R correspondente a x .

Identificou propriedades válidas:

$(R=S)$ então $Rx=Sx$ que significava igualdade de substituições.

$(R+S)x=Rx+Sx$ a substituição da soma.

$RSx=R(Sx)$ o produto de R por S .

Na página 453, ele afirmou algumas noções básicas de análise no espaço dos "complexos", definições de limite, derivadas e integrais:

$$d(R+S)=dR+dS \quad , \quad d.RS=dR.S+R.dS \quad , \quad dR^{-1}=-R^{-1}.dR.R^{-1} \quad .$$

Nessa mesma página, Peano definiu módulo de um "complexo" x como:

$$mod x = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \quad .$$

Nesse artigo, Peano desenvolveu os chamados números "complexos" de ordem n , que eram uma série de números reais da forma $x=[x_1, x_2, \dots, x_n]$ ou $x=x_1i_1+x_2i_2+\dots+x_ni_n$ considerando $i_1, i_2, \dots, i_n$ e que $i_1=[1, 0, 0, 0, \dots, 0]$, $i_2=[0, 1, 0, 0, \dots, 0]$... $i_n=[0, 0, 0, 0, \dots, 1]$ próximo ao entendimento atual de uma base de ordem n . Somou, multiplicou esses "complexos" e calculou seu módulo.

2.16.2 Calcolo geometrico secundo l'Ausdeshungslahre di H. Grassmann, precedutto dalle operazione della logica dedutiva (1888)

Calcolo geometrico(1888) foi um ponto de virada na carreira científica de Peano porque, com este livro, ele iniciou seus trabalhos em lógica. As teorias de Grassmann tiveram um papel significativo na concepção desse livro. Trata-se de um trabalho sobre cálculo aplicado à geometria, baseado nas formulações estabelecidas por Grassmann, que por sua vez se baseou em Barycentric Calculus de Möbius. O livro consiste em grande parte de cálculos com pontos, linhas, planos e figuras sólidas.

Em seu Prefácio, Peano diz que cálculo geométrico consistiria em um sistema de operações aplicáveis aos seres geométricos, análogos à aqueles que a álgebra efetua sobre os números e estudou operações sobre lógica dedutiva. No Capítulo I, há as noções de linha(reta), superfície e volume.

Nos Capítulos II, III e IV, Peano discorre sobre a formação de primeira, segunda e terceiras espécies e operações incluindo soma e produto. As espécies seriam pontos, segmentos e superfícies.

No Capítulo II, página 37, Peano define que uma formação de primeira espécie da forma $B-A$ que seria chamada de vetor e que os pontos A e B seriam a origem e término do vetor respectivamente.

No Capítulo V, Peano tratou da formação de uma reta utilizando duas formações de primeira espécie (pontos).

No Capítulo VI, ele estudou a formação de um plano. No Capítulo VII, a formação de um espaço e no Capítulo VIII, as derivadas e limites.

No Capítulo IX Peano apresentou a definição de um Sistema linear, sendo a primeira definição axiomática mais próxima do que chamamos atualmente de espaço vetorial. No décimo e último capítulo Peano apresentou definições que são muito próximas das definições axiomáticas atuais. Peano se refere ao que atualmente é chamado de vetor como "*ente*".

Ele estudou independência linear, "*grupo*" (base), dimensão e transformação de coordenadas.

No capítulo, IX, página 141, Peano apresentou um sistema com as seguintes definições:

1. Igualdade: Se a , b e c são "*entes*" do sistema então:

$(a=b)=(b=a)$ e se $(a=b) \cap (b=c) < (a=c)$.(lê-se: se $a=b$ e $b=c$, então $a=c$).

Verifica-se que o sinal $<$ significava implica $\Rightarrow$ ou então e o sinal $\cap$ intersecção interpretado como o sinal lógico $\wedge$.

2. Soma

Se $a=b$ então $(a+c)=(b+c)$.

$(a+b)=(b+a)$.

$a+(b+c)=(a+b)+c$.

E o valor comum da última igualdade é $a+(b+c)=(a+b)+c$.

2. Soma:

Se $a=b < (a+c=b+c)$.

$$(a+b)=(b+a) \text{ .}$$

$$a+(b+c)=(a+b)+c \text{ .}$$

3. Dado m e n positivos e inteiros:

Se $a=b < ma=mb$ então $(ma=mb)$.

$$m(a+b)=ma+mb \text{ .}$$

$$(m+n)a=ma+na \text{ .}$$

$$m(na)=(mn)a \text{ .}$$

$$1a=a \text{ .}$$

Na página 142, Peano continuou com as propriedades:

4. "Ente" nulo 0 tal que: $0a=0$.

À escrita $a-b$ foi atribuída o significado $a+(-1)b$ ou $a-b=a+(-1)b$.

E deduzido $a-a=0$ e $a+0=a$.

Um sistema de "entes" para os quais são dadas as definições 1,2,3,4, para atender as condições impostas, diga-se sistema linear.

Se a, b, c são "entes" de um mesmo sistema linear, m, n, p números reais, uma função linear homogênea da forma $ma+nb+pc+\dots$ representa um "ente" desse mesmo sistema.

Na definição seguinte, página 142, Peano considerou os "entes" de um sistema linear dependentes $a_1, a_2, \dots, a_n$ se determinados os n números $m_1, m_2, \dots, m_n$, não fossem todos nulos quando substituídos na equação: $m_1a_1+m_2a_2+\dots+m_na_n=0$. Se o coeficiente de algum "ente" fosse não nulo, ele poderia ser expresso numa função linear homogênea dos demais.

Na página 143, $a_1, a_2, \dots, a_n$ seriam independentes entre eles, se na equação $m_1a_1+m_2a_2+\dots+m_na_n=0$, $m_1, m_2, \dots, m_n$ todos fossem nulos. $m_1=m_2=\dots=m_n=0$.

O número da dimensão do sistema seria o maior número de "entes" independentes do sistema.

Ainda na página 143, Peano enunciou o teorema: Dado um sistema linear de dimensão n com n "entes" independentes $a_1, a_2, \dots, a_n$ e dado um novo a , deveria ser determinado de forma única. De forma não declarada ou através de uma definição de "grupo", Peano concluiu que se a dimensão do sistema linear fosse n qualquer conjunto de n

"entes" linearmente independentes formaria um "grupo" ou base, termo atual, desse sistema linear.

Peano supôs $a = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n$ e por absurdo, supôs que a pudesse ser determinado com outros coeficientes utilizando os mesmos entes independentes:

$$a = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n = x'_1 a_1 + x'_2 a_2 + \dots + x'_n a_n \text{ o que seria deduzido que:}$$

$$x_1 = x'_1, \quad x_2 = x'_2, \quad \dots \quad x_n = x'_n$$

Ele ainda afirmou que se a fosse adicionado à dimensão n , o número de "entes" tornaria $n+1$ que resultaria num coeficiente de a diferente de zero, contrariando a hipótese.

Na página 144, Peano, na definição 3, apresentou a soma de "entes":

$$(x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n) + (y_1 a_1 + y_2 a_2 + \dots + y_n a_n) = (x_1 + y_1) a_1 + (x_2 + y_2) a_2 + \dots + (x_n + y_n) a_n.$$

Na definição 4, Peano apresentou agora a multiplicação por escalar:

$$m(x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n) = m x_1 a_1 + m x_2 a_2 + \dots + m x_n a_n.$$

Peano então considerou um outro "grupo": $b_1, b_2, \dots, b_n$ e que cada $a_1, a_2, \dots, a_n$ poderia ser escrita nesse outro "grupo". Aqui verifica-se que Peano usou a palavra "grupo" correspondendo à palavra base, atualmente utilizada. E segue:

$$a = (m_{11} x_1 + \dots + m_{n1} x_n) b_1 + \dots + (m_{1n} x_1 + \dots + m_{nn} x_n) b_n.$$

Na página 145, Peano apresentou uma operação R aplicada num "ente" de um sistema linear A , atualmente são chamados funcionais lineares e seguem as propriedades da soma e multiplicação por escalar.

$$R(a + a') = Ra + Ra'.$$

$R(ma) = m(Ra)$ onde a e a' são quaisquer "entes" do sistema A e m um número real qualquer.

Nesse livro, Peano utilizou a palavra "ente" para o que entendemos atualmente como vetor e a palavra "grupo" para base. Definiu sistema linear e suas propriedades e a relação entre os "entes" de um sistema linear. As relações entre os "entes" foram definidas por Peano como dependência e independência e são as mesmas empregadas até hoje considerando conjuntos de vetores em espaços vetoriais. De forma não clara, porque não houve uma definição de "grupo", Peano concluiu que se dimensão do sistema linear fosse n qualquer conjunto de n "entes" linearmente independentes formaria um "grupo" ou base desse sistema linear e também que um "ente" seria escrito de forma única num determinado "grupo".

Peano verificou também que se for adicionado um novo "ente" num sistema linear de dimensão n esse novo "ente" não seria independente dos outros, ou seja, poderia ser escrito como combinação linear, termo atual, dos "entes" que faziam parte do "grupo" de dimensão n .

Peano deu uma definição axiomática de espaço vetorial sobre os números reais.

2.16.3 Sur les déterminant Wronskien (1889)

Esse artigo faz parte de *Mathesis Recueil Mathématique a l'usage des écoles spéciales* publicado por P.Mansion e J.Neuberg.

Peano estudou o chamado wronskiano, ou o determinante de Wronski.

Na página 75, ele enunciou a seguinte proposição:

Se um determinante formado por n funções da mesma variável e suas derivadas de ordem 1 até $n-1$ fosse identicamente nulo, existiria entre essas funções uma relação linear homogênea com coeficientes constantes.

Peano exemplificou com duas funções: $x=t^2[1+\phi(t)]$ e $y=t^2[1-\phi(t)]$ onde:

$$\phi(t)=-1 \quad t<0$$

$$\phi(t)=0 \quad t=0$$

$$\phi(t)=1 \quad t>0$$

Na página 76, Peano calculou as derivadas das funções: $x=t^2[1+\phi(t)]$ e $y=t^2[1-\phi(t)]$. Suas derivadas eram contínuas e seriam $x'=2t[1+\phi(t)]$ e $y'=2t[1-\phi(t)]$ respectivamente e o determinante nulo para todos valores de t :

$$\begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} = 0$$

Segundo Peano a proposição seria verdadeira se não existisse um valor que cancelasse todos os elementos de uma linha do determinante.

Peano encontrou um contra-exemplo em que as funções eram linearmente independentes, mas o determinante era nulo para todos os valores de t .

2.16.4 Sur les Wronskiens (1889)

Esse artigo faz parte de *Opere Scelte Vol I* que trata de Análise Matemática e Cálculo Numérico.

Nas páginas 93 e 94, Peano enunciou uma proposição que se um determinante fosse formado por n funções, de mesma variável t , $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ e suas derivadas de ordem $1 \dots (n-1)$ fossem nulas para todos os valores de t , existiria uma relação linear homogênea, com coeficientes constantes, em outras palavras, eram determinadas n constantes, $C_1, C_2, \dots, C_n$ nem todas nulas para todos os valores de t na relação linear:

$$C_1 x_1 + C_2 x_2 + \dots + C_n x_n = 0.$$

Se uma dessas funções x_1 fosse identicamente nula, essas funções estariam ligadas pela relação linear $x_1 + 0 x_2 + 0 x_3 + \dots + 0 x_n = 0$. Concluiu que a proposição em questão não seria modificada.

Em contraposição, Peano citou um exemplo em que considerou duas variáveis x e y na variável t , o determinante de $xy' - x'y$ era identicamente nulo, mas não existiria relação linear. Nenhuma das funções era identicamente nula, $x > 0$ se $t > 0$ e $y > 0$ se $t < 0$.

Ele citou o exemplo $X = t^2$ e $Y = t \operatorname{mod} t$ que satisfaziam a condição: $xy' - x'y$ se cancelando apenas em $t = 0$ e que entre as duas funções não existiria uma relação linear homogênea.

Nesse artigo, Peano verificou que se o Wronskiano fosse identicamente nulo não implicaria que as funções tivessem uma relação linear e deu contra-exemplo com as funções linearmente independentes $X = t^2$ e $Y = t \operatorname{mod} t$ que se cancelaria apenas em $t = 0$ e com determinante nulo.

2.16.5 Sul determinante wronskiano (1897)

Esse artigo faz parte de *Opere Scelte Vol. III* que trata de Geometria e Fundamentos de Mecânica.

Na página 282, Peano verificou que dadas funções em t , $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ e $C_1 x_1 + C_2 x_2 + \dots + C_n x_n = 0$ onde nem todos coeficientes eram nulos, então o determinante no formato $x, Dx, D^{2x}, \dots, D^{n-1}x$ era identicamente nulo.

A proposição inversa, ao contrário de uma opinião generalizada, teria algumas restrições.

Se as funções x e y satisfizessem a equação: $xdy - ydx = 0$ e a relação de x e y fosse constante, se fosse dividida por xy e depois integrada; não se deveria assumir que as funções x e y eram nulas. Se dividida por y^2 ou por $x^2 + y^2$ e houvesse uma proporção, as funções não poderiam ser canceladas ao mesmo tempo.

Que o inverso da proposição citada não existia não havia dúvida:

No exemplo, $x = t^2$ $y = t \bmod t$, o determinante era sempre nulo, mas x/y teria valores de $+1$ ou -1 se t fosse positivo ou negativo.

Peano, provou agora que se dadas funções linearmente dependentes, então o determinante era nulo para todos os valores de t . A inversa da proposição não era verdadeira.

2.16.6 Analisi della teoria dei vettori (1898)

Esse artigo faz parte de *Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino Volume Trentatreesimo*.

Peano propôs nesse artigo, página 513, examinar quais ideias deveriam ser reunidas na teoria dos vetores e classificá-las em primitivas, se somente eram obtidas através da observação do espaço físico e derivadas que eram deduzidas através de processos lógicos, sem recorrer à intuição. Ele conceituou duas ideias primitivas de ponto e relação de quatro pontos:

$$a - b = c - d \quad .$$

Na página 514, ele mostrou o paralelogramo $abcd$ e suas propriedades, a, b, c, d, e, f , eram pontos e os segmentos ab e cd tinham o mesmo comprimento, mesma direção e mesmo sentido. Com uma translação ab coincidiria com cd .

Peano admitiu como proposições primitivas:

$$P1 \quad a-b=a-b \quad .$$

$$P2 \quad a-b=c-d \quad \text{então} \quad c-d=a-b \quad .$$

$$P3 \quad a-b=c-d \quad \text{e} \quad c-d=e-f \quad \text{então} \quad a-b=e-f \quad .$$

$$P4 \quad a-b=c-d \quad \text{então} \quad a-c=b-d \quad .$$

Na página 515, Peano diz que $a-b=c-d$ como a distância de a a b igual à distância de c a d , ab seria paralela à reta cd .

Peano denominou de “equidiferença” geométrica a proposição P4: $a-b=c-d$ então $a-c=b-d$ que significaria também que a distância ab seria igual a distância cd e a reta ab seria paralela à reta cd .

Na página 516, definiu vetor como a diferença $b-a$ entre dois pontos e sua abreviatura como vtt.

$$vtt = \bar{x} \in [\exists (\overline{a, b}) \in (a, b \in \text{pnt} . x = b - a)] \quad .$$

Ele fez algumas definições, na página 520, incluindo produto de um número inteiro por vetor.

Item 30: Multiplicação por 0. Se $u \in vtt$ então $0.u = 0$.

Item 31: Propriedade Distributiva. Se $u \in vtt$, $a \in n$ então $(a+1)u = au + u$ e $1.u = u$.

A notação de Peano para o item 32 $u \in vtt$, $a \in n$ então $au \in vtt$ a inteiro, ou seja, se u era vetor, então au também era vetor com $a \in N$.

Item 32': $u \in vtt$, $a \in n$ então $ua = au$.

Item 33: $u \in vtt$, $a, b \in n$ então $(a+b)u = au + bu$ propriedade distributiva.

Outra propriedade foi apresentada na página 523:

Se $a \in N$, $u, v \in vtt$ e $au = ar$ então $u = r$.

Atualmente conhecida como propriedade do “cancelamento”.

Na página 530, Peano fez a definição de módulo:

$$u \in vtt \quad \text{então} \quad \text{mod } u = \sqrt{u^2} \quad .$$

Na página 531, ele apresentou a atualmente conhecida por Desigualdade de Cauchy-Schwarz :

$$(\text{mod } u)^2(\text{mod } v)^2 \geq (u|v)^2 .$$

Afirmou, na página 533, que se i era um vetor não nulo, então qi era um vetor paralelo a i .

Se j um vetor não paralelo a i , $qi+qj$ representaria um sistema de vetores na forma $xi+jy$.

$qi+qj$ representaria um vetor coplanar com i e j

Dado um vetor i não nulo, e um vetor j não paralelo a i , existiria um vetor não coplanar com i e j , se vetor k satisfizesse, então o vetor $qi+qj+qk$ representaria um vetor na forma $xi+yj+zk$ quaisquer reais x, y, z .

Ou: $v_{tt}=qi+qj+qk$.

Nesse artigo, Peano definiu vetor e suas propriedades: multiplicação por 0 , a comutativa da multiplicação, distributiva, a atual propriedade do cancelamento. Também definiu de módulo de um vetor e a apresentação com a desigualdade de Cauchy- Schwarz. Paralelismo e coplanaridade de vetores foram analisados.

3. AS PRIMEIRAS NOÇÕES DE BASE ATÉ AXIOMATIZAÇÃO DA ÁLGEBRA LINEAR COM PEANO

Este capítulo está disposto em ordem cronológica dos artigos e livros apresentados de cada autor estudado, trata-se de uma gênese dos textos apresentados sobre independência linear, base e axiomatização de espaço vetorial.

3.1. Uma cronologia sobre Vetor, Espaço Vetorial, Base e Axiomatização

A noção mais antiga do que hoje chamamos de vetor vem da Física, que significava uma quantidade tendo magnitude e direção (por exemplo, velocidade ou força).

A ideia do paralelogramo de velocidades já foi encontrada em vários autores gregos antigos e o conceito de paralelogramo de forças era comum no século XVI e XVII.

Aristóteles (384-322 AC), e o autor de um tratado apócrifo “Problemas da Mecânica”(tradução do grego antigo) iniciaram a História da Mecânica. Aristóteles, entre outros estudos, se preocupou com a composição dos movimentos:

*“Deixe um corpo em movimento ser simultaneamente acionado por dois movimentos tais que as distâncias percorridas no mesmo tempo estão em uma constante proporcional, então ele se moverá ao longo da diagonal de um paralelogramo que tem como lados duas linhas cujos comprimentos estão nessa relação constante”. Por outro lado, se a razão entre as duas distâncias componentes percorridas pelo corpo em movimento no mesmo tempo varia de um instante para o outro, o corpo não pode ter um movimento retilíneo”.*³⁹

O princípio acima é também chamado de paralelogramo de forças é enunciado atualmente como:

Dado um paralelogramo $ABDC$: Se um corpo for acionado por duas forças cujas direções coincidem com as linhas AB e AC , e cujas magnitudes são proporcionais os comprimentos AB e AC estas duas forças produzem o mesmo efeito que uma simples força que age na direção da diagonal AD do paralelogramo $ABDC$ e é proporcional à diagonal. AB e AC são chamadas forças componentes e AD é a força resultante.

³⁹Do livro *A History of Mechanics* de René Dugas. Dover (2011).
René Dugas foi engenheiro e historiador francês(1897-1957).

Inversamente, uma única força é substituível por duas ou mais outras forças. Conforme a figura abaixo:

Figura 17: Paralelogramo de forças



Fonte: Livro *The Science of Mechanics* (1919) de Ernst Mach.

Como vimos anteriormente, a proposta de Leibniz no século XVII, foi sobre a possibilidade da criação de um sistema que serviria como um método de análise espacial. As principais ideias de Leibniz apareceram em uma carta datada de 08/09/1679, escrita a Christian Huygen, que havia a necessidade e a imposição de um ente que representasse grandezas e movimento nas diversas áreas da ciência. Para Leibniz: “*Álgebra tem a característica de números indeterminados ou magnitudes somente, mas não expressa a situação, ângulos ou movimentos diretamente*”.

Como havia uma referência no artigo de Jeremy Gray(1980) em relação a uma possível base em Euler (1743), que se tratava de um artigo sobre resolução de equações diferenciais, este estudo a princípio, analisou além desse artigo, outros artigos e livros de Euler, como também outros autores que estudaram resolução de equações diferenciais antes e depois de Euler (1743). Leibniz, os irmãos Bernoulli, Jakob e Johann e Riccati teriam influenciado Euler em métodos que se reportassem à resolução de equações diferenciais. Leibniz também foi conhecido por seus trabalhos com Cálculo Diferencial onde estudou métodos de resolução de equações diferenciais, desenvolvendo o método de separação de variáveis e fator integrante. Os irmãos Bernoulli eram correspondentes de Leibniz e entre eles havia um produtivo intercâmbio de conhecimentos. Johann Bernoulli foi professor de Euler, além disso Euler tinha amizade e parentesco com membros da família Bernoulli.

No campo de resolução de equações diferenciais, um artigo publicado em 1724, *Animadversiones in aequationes differentiales secundi gradus*, por Jacopo Riccati teria influenciado Euler para o estudo de resolução de equações diferenciais de 2º grau, atual 2ª ordem. Nesse artigo, Riccati reduz uma equação diferencial de 2ª ordem em uma equação de 1ª ordem não linear, posteriormente chamada de equação de Riccati, como é conhecida atualmente, utilizando um método de substituições, onde algumas variáveis adequadas foram

consideradas constantes. Em *Constructio aequationis differentialis* (1733), Euler comentou essa solução de Riccati.

No artigo *De Integratione Aequationum Differentialium Altiorum Graduum* (1743), citado por Jeremy Gray(1980), Euler ratificou as ideias de Riccati em *Animadversiones in aequationes differentiales secundi gradus* em relação às constantes arbitrárias conseguidas através da redução de ordem. Euler verificou em seu artigo, que a equação integral teria número de constantes arbitrárias exatamente igual ao seu grau ou ordem, no entendimento atual.

No parágrafo VIII, o autor afirmou que todas as equações integrais particulares deveriam estar contidas na integral completa e que uma equação integral só seria completa se todas as equações integrais particulares fossem consideradas.

No parágrafo IX, Euler afirmou que dadas duas equações integrais particulares de uma equação diferencial, atualmente chamada homogênea, de ordem n , a junção, ou num termo atual, a combinação linear, dos dois valores ou das duas soluções também seria solução. Nota-se, no entanto, que ele não esclareceu se essas integrais particulares, ou soluções, eram no entendimento atual, linearmente independentes. Nada sobre a relação ou condição entre as integrais particulares foi avaliado por Euler.

No parágrafo X, Euler observou que dados valores particulares para a equação diferencial de ordem n , atualmente chamada homogênea, a combinação linear de n equações integrais particulares também seria solução. Para Euler, esse valor seria completo se estivessem presentes n constantes arbitrárias. Novamente, nada foi dito sobre alguma condição que envolvesse esses valores particulares. Para um valor completo Euler só observou o número de constantes arbitrárias.

No parágrafo XI, ele nos esclareceu que o número de constantes arbitrárias deveria ser no máximo n para uma equação diferencial de ordem n , ou seja, era necessário um número até n (máximo) de equações integrais particulares para a equação completa.

No parágrafo XII, foi dada a equação diferencial

$$0 = Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2} + \frac{Dd^3y}{dx^3} + \frac{Ed^4y}{dx^4} + \frac{Fd^5y}{dx^5} + etc \text{ com } A, B, C, \dots \text{ coeficientes}$$

constantes e uma equação integral particular foi encontrada, $y = e^{\int p dx}$. Ele observou que se substituída a integral particular a ordem da equação diferencial era reduzida.

No parágrafo XIII, Euler apresentou uma equação algébrica $0 = (A + Bp + Cp^2 + Dp^3 + \dots + Np^n)$, considerando p constante e os coeficientes $A, B, C, \dots, N$ constantes então uma equação integral particular ou uma solução particular seria $y = e^{px}$ para a equação diferencial correspondente. Resumindo, os valores de p seriam obtidos através das raízes da equação característica correspondente.

Em *Institutionum Calculi Integralis* Volume II (1769), num teorema, item 837, apareceu uma noção de base para o conjunto solução de uma equação diferencial da diferencial, atualmente chamada de equação diferencial homogênea de 2ª ordem, onde foram dadas duas equações integrais particulares e a razão entre elas não era constante, ou também pode-se entender que as soluções eram linearmente independentes, a equação integral completa seria a combinação linear, termo moderno, das duas integrais particulares. Deve-se atentar que para uma equação diferencial de 2ª ordem, as integrais particulares não serem múltiplas, ou $\frac{M}{N} \neq k$, k constante, tem o mesmo significado que serem linearmente independentes. Nesse caso específico, de uma equação diferencial de 2ª ordem entende-se que um conjunto solução da equação diferencial homogênea é um espaço vetorial de dimensão 2, uma base com 2 elementos. Como visto anteriormente, não seria válido para equações diferenciais de ordens diferentes de 2. Verifica-se que, por exemplo, numa equação diferencial de 3ª ordem, dadas três integrais particulares não múltiplas entre si, a combinação linear de duas integrais particulares poderia ser uma solução da equação diferencial, mas o conjunto fundamental da solução da equação diferencial não teria dimensão 3, pois uma das integrais particulares seria combinação linear das outras duas, obtendo um conjunto linearmente dependente.

Em *Institutionum Calculi Integralis* Volume II (1769), Seção I, item 851, nota-se a utilização do Método de Variação dos Parâmetros ou das Constantes, nome conhecido atualmente, na obtenção de uma solução particular da equação diferencial linear de 2ª ordem não homogênea, considerando as soluções da equação diferencial homogênea. Euler já havia empregado esse método em *Recherches sur la question des inégalités du mouvement de Saturne et de Jupiter* (1748) no estudo das órbitas de Saturno e Júpiter. O Método de D'Alembert, que permitia transformar uma equação diferencial linear (atual homogênea) de ordem n em uma outra equação linear homogênea de ordem $n-1$ a partir de uma solução particular também foi utilizado por Euler no Volume II desse livro. O Teorema da solução

geral da equação diferencial não homogênea foi aplicado no item 860 em busca da solução geral para uma equação diferencial não homogênea.

Ainda no Volume II, Seção II, item 1117, Euler resolveu a equação diferencial de 3º grau, 3ª ordem, $Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2} + \frac{Dd^3y}{dx^3} = 0$ considerando A, B, C constantes e $y = e^{\lambda x}$ obtendo três valores para λ como solução da equação algébrica $A + \lambda B + \lambda^2 C + \lambda^3 D = 0$. Nesse caso entende-se, em termos atuais, que o conjunto solução é um espaço vetorial de dimensão 3, pois as integrais particulares formam um conjunto linearmente independente, com a forma exponencial $y = e^{\lambda x}$. Da mesma forma, no item 1125, Euler resolveu uma equação diferencial de ordem n

$Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2} + \frac{Dd^3y}{dx^3} + \frac{Ed^4y}{dx^4} + \dots = 0$ e obteve n valores que satisfaziam a equação algébrica $A + \lambda B + \lambda^2 C + \lambda^3 D + \lambda^4 E + \dots = 0$ formando a equação integral completa, o que pode-se deduzir que o conjunto solução da equação diferencial seria um espaço vetorial de dimensão n .

Considerando o artigo *De Integratione Aequationum Differentialium Altiorum Graduum* (1743) que citava somente a ideia que uma integral seria completa se tivesse o número de constantes arbitrárias fosse igual à ordem da equação diferencial dada, não havendo referência a alguma relação entre as integrais particulares, houve um avanço em *Institutionum Calculi Integralis* Volume II (1769), pois finalmente pôde ser concluída, no item 837, fundamentando-se na definição atual⁴⁰, a noção de base considerando que o conjunto solução de uma equação diferencial linear homogênea de ordem 2 é um espaço vetorial de dimensão 2. No item 1125, Euler buscava a integral completa de uma equação diferencial de ordem n , conclui-se que o conjunto solução é um espaço vetorial de ordem n , pois as integrais particulares tinham a forma exponencial $y = e^{\lambda x}$, eram linearmente independentes.

⁴⁰Definição atual de base de um espaço vetorial: Dado um conjunto $\{v_1, v_2 \dots v_n\}$ de V um espaço vetorial será base se $\{v_1, v_2 \dots v_n\}$ for linearmente independente e $[v_1, v_2 \dots v_n] = V$, gerar V .

Pode-se provar, considerando a definição acima, que se V for um espaço vetorial e $\dim V = n$ qualquer conjunto de n vetores linearmente independentes forma uma base de V . Álgebra Linear (1980) de J. Boldrini.

Euler analisou dois fatos determinantes e necessários para que a noção de base se apresentasse: o número de constantes arbitrárias deveria ser igual à ordem da equação diferencial e a necessidade de que as integrais particulares fossem linearmente independentes, uma integral particular não poderia ser gerada a partir das outras restantes.

Lagrange foi contemporâneo de Euler e entre eles houve troca de correspondências, trabalhos feitos juntos, além de que Lagrange sucedeu Euler como diretor na Academia de Berlim. Lagrange em muitos estudos, se dedicou à resolução de equações diferenciais.

Em *Solution de différens problèmes du calcul integral* (1766), Lagrange solucionou uma equação diferencial, atual homogênea, de 2ª ordem utilizando soluções da equação algébrica correspondente, o que implicaria em dois valores particulares para equação diferencial de 2ª ordem linear homogênea, esses valores particulares $y_1 = e^{k_1 t}$ e $y_2 = e^{k_2 t}$ são linearmente independentes, pois são exponenciais sendo impossível um valor particular ser múltiplo do outro. Assim como Euler, para Lagrange o número de constantes arbitrárias deveria ser o mesmo que o grau ou ordem da equação diferencial.

O conjunto solução da equação diferencial linear homogênea correspondente é um espaço vetorial de dimensão 2.

Em *Sur L'intégration d'une équation différentielle a différences finies* (1769), Lagrange também resolveu as equações diferenciais lineares com coeficientes constantes com as equações algébricas ou características, termo atual, correspondentes. Nesse artigo ele utilizou o Método de Variação dos Parâmetros ou das Constantes para resolver uma equação não homogênea dada a solução da equação homogênea, termo moderno. O Método de Variação dos Parâmetros ou das Constantes não estava totalmente completo. Lagrange resolveu uma equação diferencial não homogênea de 1ª ordem então o conjunto solução da equação diferencial homogênea de 1ª ordem correspondente é um espaço vetorial de dimensão 1.

Em *Recherches sur lès suites recurrentes dont lès termes varient de plusieurs manieres différentes ou sur l'intégration dès équations linéaires aux différences finies partielles* (1775), o Método de Variação dos Parâmetros ou das Constantes já estava mais completo e próximo do atual. Na utilização desse método, Lagrange levou em conta a integral completa da equação diferencial linear homogênea de ordem n correspondente e considerando que os valores particulares ou soluções eram linearmente independentes,

conclui-se que o conjunto solução da equação diferencial de ordem n é um espaço vetorial de dimensão n .

Enquanto alguns matemáticos, entre eles, Euler e Lagrange, exploravam a noção de base na resolução de equações diferenciais, a representação de números complexos era estudada por Wessel. Os números complexos teriam surgido no século XVI, em meio a disputa entre Cardano⁴¹ e Tartaglia⁴², pela resolução da equação de 3º grau, que apresentava raiz negativa onde foi percebido que os números reais não eram suficientes para a resolução dessas equações. Anos mais tarde, coube a Bombelli⁴³ iniciar as operações com os números complexos.

Wessel desenhava mapas, era cartógrafo e trabalhou no levantamento de Oldenburg, ele desenvolveu métodos matemáticos sofisticados de levantamento e escreveu um relatório em 1787. Esse relatório já continha uma brilhante inovação matemática de Wessel, ou seja, a interpretação geométrica de números complexos.

Em 1797, Wessel publicou seu *Essai sur La Représentation Analytique de La Directione*, onde há a representação gráfica de números complexos, aqui aparece o uso mais precoce de segmentos orientados. Nesse artigo, Wessel interpretou geometricamente os números complexos considerando ângulo e comprimento, adicionou seus segmentos orientados, multiplicou, dividiu e extraiu a raiz m -ésima.

O trabalho de Argand sobre a interpretação geométrica dos números complexos, o diagrama de Argand, se tornou conhecido de forma atípica. Seu trabalho ficou esquecido por anos até que em 1813 Jacques Français⁴⁴ publicou um trabalho no qual ele deu uma representação geométrica de números complexos baseadas nas ideias de Argand. Ele terminou seu artigo dizendo que a ideia se baseava no trabalho de um matemático desconhecido e pediu que o matemático se desse a conhecer para poder receber o crédito por suas ideias.

Em *Essai Sur Une Maniere Une de Représenter Les Quantités Imaginaires* (1806) Argand publicou seu ensaio com sua interpretação geométrica dos números complexos, representados por $\pm a \pm b\sqrt{-1}$ e também responsável pelo conhecido diagrama de Argand. e seu famoso diagrama apareceram nesse artigo.

Wronski trabalhou com análise matemática e álgebra. Em análise estudou expansão de funções em série de potência e equações diferenciais. Na publicação de seu primeiro livro

⁴¹Girolamo Cardano(1501-1576) astrólogo, médico, filósofo e matemático italiano.

⁴²Niccolò Fontana Tartaglia (1499-1557) matemático italiano.

⁴³Rafael Bombelli(1526-1572) algebrista e engenheiro hidráulico italiano.

⁴⁴Jacques Français(1775-1833) matemático francês.

sobre os fundamentos da matemática em 1810, recebeu críticas de Lacroix e Lagrange e rompeu relações com o Instituto em Paris. Em *Réfutation de la théorie des fonctions analytiques de Lagrange* publicado em 1812, Wronski criticou o uso de séries de funções analíticas de Lagrange e introduziu suas próprias ideias para expansões em série de uma função.

Em *Réfutation de la théorie des fonctions analytiques de Lagrange* (1812), Wronski, deu uma forma geral para a série $Fx = A_0 + A_1 \Phi x + A_2 \Phi^2 x^{\frac{2}{\Phi}} + \dots$ e no cálculo de seus coeficientes, ele desenvolveu o importante determinante, chamado de wronskiano por Thomas Muir. Mais tarde, Peano estudou esse determinante para verificação de funções linearmente independentes.

Laplace e Lagrange eram visitantes na casa da família Cauchy e Lagrange em particular se interessou pela educação matemática do jovem Cauchy. Em 1807 ele se formou na *École Polytechnique*. Seu texto *Cours d'analyse*, em 1821, foi criado para os estudantes da *École Polytechnique* e preocupava-se em desenvolver os teoremas básicos do cálculo o mais rigorosamente possível.

Em *Cours D'Analyse de École Royale Polytechnique* (1821) provou a desigualdade de Cauchy, atualmente conhecida também como desigualdade de Cauchy-Schwarz, utilizando ideias para conjuntos linearmente independentes, termo atual, para demonstrar parte de sua desigualdade. Considerando:

$(a, a', a'', \dots)$ e $(\alpha, \alpha', \alpha'' \dots)$ linearmente independentes, então:

$$(a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' + \dots) < \sqrt{(a^2 + a'^2 + a''^2 + \dots)} \cdot \sqrt{(\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 + \dots)} \quad .$$

Se $(a, a', a'', \dots) = \lambda(\alpha, \alpha', \alpha'' \dots)$ com λ escalar, então:

$$(a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' + \dots) = \sqrt{(a^2 + a'^2 + a''^2 + \dots)} \cdot \sqrt{(\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 + \dots)}$$

Portanto para quaisquer conjuntos :

$$(a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' + \dots) \leq \sqrt{(a^2 + a'^2 + a''^2 + \dots)} \cdot \sqrt{(\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 + \dots)} \quad .$$

Möbius era astrônomo e matemático e estudou astronomia com Gauss em 1813, se doutorou em 1815 com a dissertação *De computandis occultationibus fixarum* sobre planetas com o mesmo orientador de Gauss. Gauss estudou a representação dos números complexos, tanto que o diagrama de Argand também é conhecido como diagrama de Argand-Gauss.

Em 1827, Möbius em seu *Der Barycentrische Calcul*, apresentou a ideia de um “vetor”, não nome, mas no sentido da palavra. No seu estudo sobre centros de gravidade e geometria projetiva, usando o conceito geométrico, Möbius desenvolveu uma aritmética de segmentos de reta orientados; adicionou-os e mostrou como multiplicá-los por um número real.

Deve-se a Gauss a representação gráfica dos números complexos pensando nas partes real e imaginária como coordenadas de um plano. Em sua tese de 1799, Gauss fez uma demonstração do chamado teorema fundamental da álgebra. Considerou um polinômio $P(x+iy)$ da variável complexa, ele separou a parte real $Q(x,y)$ da parte imaginária $R(x,y)$, $P(x+iy)=Q(x,y)+iR(x,y)$.

Em 1831, Gauss em *Theoria residuorum biquadraticum Commentatio segunda*, apresentou sua representação geométrica envolvendo números complexos, considerou operações de multiplicação, divisão e extraiu raiz quadrada, estudou a decomposição de um número inteiro como produto de números complexos.

Utilizando números complexos como pares ordenados, Hamilton em *Theory of Conjugate Functions or Algebraic Couples* (1837), apresentou operações de soma, subtração, multiplicação e divisão.

Hamilton então, vislumbrou a possibilidade de um sistema de quádruplos ordenados (a,b,c,d) de números reais, tendo imersos neles tanto os números reais como os números complexos. Chamou esses elementos de quatérnios. Hamilton definiu a adição e a multiplicação dos quatérnios, podendo verificar as propriedades associativas e comutativa da adição, a multiplicação era associativa e distributiva em relação à adição, mas não valeria a lei comutativa da multiplicação. Este foi historicamente, o primeiro exemplo de uma álgebra não-comutativa.

Em *On Quaternions or on a New System of Imaginaries in Algebra* (1844) de Hamilton, a palavra “vetor” e a palavra “escalar” apareceram pela primeira vez. O quatérnio era formado por uma parte por escalar e outra parte por vetor. As operações de soma e multiplicação entre quatérnios foram desenvolvidas nesse livro.

Grassmann trabalhou com um ensaio sobre a teoria das marés, que elaborou em 1840 tomando como base a teoria da *Méchanique analytique* de Lagrange e da *Méchanique Celeste* de Laplace, expondo estas teorias por métodos “vetoriais”, termo utilizado a partir dos estudos de Hamilton, nos quais trabalhava desde 1832.

Em 1844, Grassmann publica sua obra-prima, *Die Lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik* mais conhecido como *Ausdehnungslehre*, aprofundando essas ideias.

Com seu *Die Lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik*, Grassmann construiu um sistema extensivo no espaço n dimensional, com propriedades de soma e multiplicação. Afirmou que um sistema de m -ésima ordem era gerável por qualquer m métodos de evolução pertencentes a ele que eram mutuamente independentes, indicando a ideia de base com elementos independentes e com uma dimensão determinada. Todo deslocamento de um sistema de m -ésima ordem deveria ser representado como uma soma de deslocamentos pertencentes a dados m métodos independentes de evolução, do sistema, sendo a soma única para cada conjunto, ou seja, representou de forma única um elemento como somatória, ou uma combinação linear, de elementos independentes. Definiu o conceito de dependência, onde uma magnitude elementar de primeira ordem dependente era representada como soma múltipla de magnitudes elementares de primeira ordem independentes e essas magnitudes independentes não podiam ser representadas como múltiplo ou soma do restante das magnitudes independentes.

Em *Lectures on Quaternions* (1853), Hamilton se aprofundou nos estudos dos quatérnios e apresentou as propriedades associativa da soma e subtração e distributiva dos quatérnios, neste caso mantendo a ordem dos fatores.

Peirce foi um defensor influente das ideias de William Hamilton. Seu trabalho, *Linear Associative Algebra* (1870) foi um estudo de possíveis sistemas de álgebras múltiplas, resultou de seu interesse em quatérnios.

Em *Linear Associative Algebra* (1870), Peirce, apresentou uma álgebra associativa, não comutativa, tal que o princípio associativo se estendia a todas as letras do alfabeto e definiu:

$$\begin{aligned} A &= \sum (ai) = ai + a_1j + a_2k + \dots & B &= \sum (bi) = bi + b_1j + b_2k + \dots \\ C &= \sum (ci) = ci + c_1j + c_2k + \dots \\ AB &= \sum (ab_1ij) \quad , \quad BC = \sum (bc_1ij) \\ (AB)C &= \sum (ab_1c_2ijk) = A(BC) = ABC \end{aligned}$$

Para Peirce, as álgebras poderiam ser distintas entre si pelo número de suas concepções fundamentais independentes ou pelas letras de seu alfabeto, indicando já uma noção de base e da sua dimensão, termos conhecidos atualmente. As chamadas unidades

originais A, B, C seriam representadas pelas letras do alfabeto i, j, k , uma forma representativa de que todo elemento poderia ser expresso através dessas letras.

Darboux foi sobretudo um geômetra e a sua maneira geométrica de pensar levou-o a fazer descobertas análogas, também trabalhou com sistemas ortogonais de superfícies.

Darboux em 1875, em *Sur La composition des forces en statique*, analisou a composição de forças, ou seja, a lei do paralelogramo. Ele encontrou 4 axiomas: a soma das resultantes era única considerando a permutação da ordem das resultantes parciais; a resultante inalterada por uma rotação de segmentos em torno de um ponto O ; a lei de composição que reduziu a uma adição algébrica de segmentos de mesma direção e a direção e magnitude da resultante eram funções contínuas dos segmentos. Esse artigo significou uma tentativa de caracterização de vetores tridimensionais, onde valeria $\phi(P+Q)=\phi(P)+\phi(Q)$ e $\Phi(x)=ax$ para todos valores comensuráveis, numa tentativa de axiomatização de espaço vetorial sobre os reais.

A Álgebra Linear teria surgido por ser um sistema unificado que abrange partes diferentes das ciências, da matemática de equações diferenciais a teoria dos anéis e na física, principalmente com as Teorias sobre Eletricidade e Eletromagnetismo. Neste contexto, as noções abstratas de espaço vetorial e módulo tiveram papéis fundamentais.

Gibbs foi um físico e matemático cujo trabalho foi baseado nas ideias de Grassmann em análise de vetores, foi de grande importância para matemática pura. Ele inventou o moderno cálculo vetorial independentemente de Oliver Heaviside, que realizou um trabalho similar durante o mesmo período. Gibbs produziu um sistema muito mais facilmente aplicado à física do que o de Hamilton.

Gibbs em *Elements of Vector Analysis* (1881-1884), no capítulo I, *Concerning Algebra of Vectors*, Gibbs definiu vetor como algo que tivesse magnitude e direção. Mostrou uma relação linear onde um vetor ρ poderia ser expresso em termos de vetores unidade α, β, γ e escalares a, b, c , ou seja, $\rho = a\alpha + b\beta + c\gamma$. Apresentou um sistema normal de vetores unidade i, j, k , perpendiculares dois a dois e com magnitude unitária. Definiu também produto direto e produto oblíquo, respectivamente, produto interno e produto vetorial. Considerou operações entre vetores, soma e os produtos “direto” e “oblíquo”.

Peano estudou análise, fundamentos e lógica e deu muitas contribuições para o ensino de cálculo, equações diferenciais e análise de vetores. Desempenhou um papel fundamental na axiomatização da matemática e foi pioneiro em lógica matemática.

Peano, em *Intégration par series des équations différentielles linéaires* (1888), definiu o chamado “número complexo” de ordem n , ou seja, se $x = [x_1, x_2 \dots x_n]$. Apresentou para esses “complexos” a relação de igualdade, a soma e o produto escalar, comprovando as propriedades associativas, comutativas e distributivas. Escreveu a combinação linear, termo atual, $x = x_1 i_1 + x_2 i_2 + \dots x_n i_n$ considerando $i_1, i_2 \dots i_n$ de ordem n , que $i_1 = [1, 0, 0, 0 \dots 0]$ $i_2 = [0, 1, 0, 0, \dots 0]$... $i_n = [0, 0, 0, 0 \dots 1]$ para espaços dimensionais finitos. Peano deu uma prova da existência de uma solução para n equações diferenciais lineares homogêneas em n variáveis, e introduziu os “complexos” numéricos de ordem n .

Em 1888, Peano publicou o livro *Calcolo geometrico*. Uma característica mais significativa do livro é que nele Peano expõe com grande clareza as idéias de Grassmann que certamente foram apresentadas de maneira bastante obscura pelo próprio Grassmann. Este livro contém a primeira definição de um espaço vetorial com notação e estilo notavelmente modernos, embora não tenha sido apreciado por muitos na época.

O conceito geral de espaço vetorial foi formulado pela primeira vez por Peano em um contexto geométrico em 1888 e manteve-se quase desconhecido na época.

Em *Calcolo geometrico* (1888), Peano utilizou a palavra “ente” para o que entendemos atualmente como vetor e a palavra “grupo” para base. Definiu sistema linear e suas propriedades e a relação entre os “entes” de um sistema linear. As relações entre os “entes” foram definidas por Peano como dependência e independência e são as mesmas empregadas até hoje considerando conjuntos de vetores em espaços vetoriais. De forma não clara, porque não houve uma definição de “grupo”, Peano concluiu que se dimensão do sistema linear fosse n qualquer conjunto de n “entes” linearmente independentes formaria um “grupo” ou base desse sistema linear. Um “ente” seria escrito de forma única num determinado “grupo”, ou seja, dado um sistema linear de dimensão n com n “entes” independentes $a_1, a_2, \dots a_n$ então, $a = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots x_n a_n$. Peano verificou também que se for adicionado um novo “ente” num sistema linear de dimensão n esse novo “ente” não seria independente dos outros, ou seja, poderia ser escrito como combinação linear, termo atual, dos “entes” que faziam parte do “grupo” de dimensão n .

Peano deu uma definição axiomática de espaço vetorial sobre os números reais.

Peano estudou o determinante conhecido como wronskiano, com propósito de analisar se funções eram linearmente independentes.

Em Sur les déterminant Wronskien (1889), Peano enunciou que se um determinante (wronskiano) formado por n funções da mesma variável e suas derivadas de ordem 1 até $n-1$ for identicamente nulo, entre essas funções existiria uma relação linear com coeficientes constantes. Segundo Peano a proposição seria verdadeira se não existisse um valor que cancelasse todos os elementos de uma linha do determinante, para tal conclusão, Peano encontrou um contra-exemplo em que as funções eram linearmente independentes, mas o determinante era nulo para todos os valores de t .

Em Sur les Wronskiens, de 1889, Peano enunciou uma proposição que se um determinante fosse formado por n funções, de mesma variável t , $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ e suas derivadas de ordem $1 \dots (n-1)$ fossem nulas para todos os valores de t , existiria uma relação linear homogênea, com coeficientes constantes, em outras palavras, eram determinadas n constantes, $C_1, C_2, \dots, C_n$ nem todas nulas para todos os valores de t na relação linear. Nesse artigo, Peano verificou que se o Wronskiano fosse identicamente nulo não implicaria que as funções tivessem uma relação linear e deu contra-exemplo com as funções linearmente independentes $X=t^2$ e $Y=t \operatorname{mod} t$ que se cancelaria apenas em $t=0$ e com determinante nulo.

Heaviside estudou eletricidade, chegando a publicar alguns artigos inspirados pelo Tratado de Eletricidade e Magnetismo de Maxwell. Apesar dos vários contributos para o eletromagnetismo, ele ficou mais conhecido pelo estudo da análise vetorial.

Heaviside em Eletrical Papers Vol 2 (1894), definiu vetores e escalares utilizando vetores retangulares de comprimento unitário i, j, k , definiu também produto escalar e produto vetorial, além de tratar o operador hamiltoniano $\nabla = i \frac{d}{dx} + j \frac{d}{dy} + k \frac{d}{dz}$ como vetor quando as diferenciações eram escalares.

Em 1897, Peano em Sul determinante wronskiano, verificou que dadas as funções em t , $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ e $C_1 x_1 + C_2 x_2 + \dots + C_n x_n = 0$ com nem todos coeficientes nulos, então o determinante no formato $x, Dx, D^2x, \dots, D^{n-1}x$ era identicamente nulo. Peano, provou agora que se dadas funções linearmente dependentes, então o determinante era nulo para todos os valores de t . A inversa da proposição não era verdadeira.

Em 1898 em Analisi della teoria del vettori, Peano estabeleceu axiomas que requeriam relação de equidiferença, ou seja, se $a-b=c-d$.

Peano definiu vetor como a diferença $b - a$ entre dois pontos e sua abreviatura como vtt: $vtt = \bar{x} \in [\exists (a, b) \in (a, b \in pnt . x = b - a)]$. As propriedades de vetor também foram estudadas por Peano: a multiplicação por 0, a comutativa da multiplicação, distributiva, a atual propriedade do cancelamento. Também definiu de módulo de um vetor e a apresentação com a desigualdade de Cauchy-Schwarz. Paralelismo e coplanaridade de vetores também foram analisados por Peano.

Peano nos presenteou com a primeira axiomatização geométrica de espaço vetorial, um marco divisor para o estudo da Álgebra Linear e para o tema deste trabalho sobre conjuntos linearmente independentes e base que justamente tem término com os estudos de Peano.

Das noções mais antigas de paralelogramo de forças com os estudos de Aristóteles à axiomatização de espaço vetorial com Peano, percorrendo várias áreas da Matemática e da Física, e alguns séculos, a necessidade desses entes que caracterizam magnitude e movimento e suas propriedades teve e têm relevância efetiva na construção das Ciências, tal como Leibniz previu em 1679.

Uma cronologia histórica, uma parte da história foi construída baseada em textos, artigos e livros de 16 autores, entre eles, matemáticos e físicos, em diversas áreas da Matemática ou da Física, que apresentassem ideias ou noções sobre conjuntos linearmente independentes e base.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho teve como principal objetivo encontrar as primeiras ideias de independência linear e de base até os trabalhos de Peano, com os primeiros processos de axiomatização de espaço vetorial. Foi disposto em ordem cronológica dos nascimentos dos matemáticos e físicos. Essas ideias encontravam-se subentendidas na resolução das equações diferenciais lineares de Euler, nos primórdios da axiomatização da Álgebra Linear com Grassmann com construção de um espaço n dimensional, mas principalmente com os trabalhos de Peano que teria se apoiado nos estudos de Grassmann, que por sua vez se teria baseado em Möbius.

As equações diferenciais foram concebidas principalmente por Newton e Leibniz e trabalhadas pelos irmãos Bernoulli, além de outros matemáticos como Jacopo Riccati. No entanto, Euler teve o benefício dos trabalhos anteriores, generalizou métodos existentes e criou novas técnicas. Ele estudou funções, suas propriedades e definições, que seriam a chave para entender equações diferenciais e desenvolver métodos para suas resoluções.

Em um de seus trabalhos, *De Integratione Aequationum Differentialium Altiorum Graduum* (1743), a única condição para uma integral ser considerada completa era que o número de constantes arbitrárias fosse igual à ordem da equação diferencial.

Já em seu livro *Institutionum calculi integralis* Volume II (1769), Seção I, Euler analisou dois fatos determinantes e necessários para que a noção de base se apresentasse: o número de constantes arbitrárias deveria ser igual à ordem da equação diferencial e a necessidade de que as integrais particulares fossem linearmente independentes, para obtenção da integral completa.

Do artigo *De Integratione Aequationum Differentialium Altiorum Graduum* (1743) a *Institutionum calculi integralis* Volume II (1769) houve uma evolução na análise de Euler, a partir desse último, pôde-se concluir que o conjunto solução de uma equação diferencial linear homogênea de ordem n é um espaço vetorial de dimensão n , uma base com n elementos.

O artigo *The History of the Concept of a Finite-Dimensional Vector* (1980) de Jeremy Gray citou *De Integratione Aequationum Differentialium Altiorum Graduum* (1743) como possível base, no entanto, a análise de que o número de constantes arbitrárias fosse igual a or-

dem da equação diferencial é insuficiente para formação do conjunto solução de uma equação diferencial, falta a observação sobre a independência linear das integrais particulares.

Os princípios das ideias de base, considerando a definição atual, iniciaram com os trabalhos de Euler *De Integratione Aequationum Differentialium Altiorum Graduum* (1743) e se consolidaram com *Institutionum Calculi Integralis* Volume II (1769), portanto antes da primeira axiomatização de espaço vetorial em 1888 com Peano.

Outros matemáticos também utilizaram essa noção de base na resolução de equações diferenciais não homogêneas, como Lagrange, que trabalhou no aperfeiçoamento do Método de Variação dos Parâmetros ou das Constantes. Esse método embora tenha sido desenvolvido por Euler, foi utilizado por Lagrange e é baseado na resolução da equação diferencial homogênea para obtenção de uma solução particular da equação diferencial não homogênea. A ideia de que para uma equação diferencial de ordem n fossem necessárias n constantes arbitrárias e consequentemente n integrais particulares, permanecia.

Por outro lado, a noção matemática de “vetor” originada da representação geométrica de números complexos foi introduzida independentemente por vários autores no final do século XVIII e início do século XIX. Começou com Wessel em 1797 e culminou com Gauss em 1831. A representação dos números complexos nessas obras foi totalmente geométrica, como pontos ou como segmentos de linha direcionados no plano. Em 1837, Hamilton definiu os números complexos algebricamente como pares ordenados de reais, com as operações habituais adição e multiplicação, bem como a multiplicação por números reais. Um desenvolvimento importante foi a extensão das ideias vetoriais para o desenvolvimento tridimensional.

Hamilton construiu uma álgebra de vetores dentro de seu sistema de quatérnios, que foram representados na forma $ai+bj+ck$, onde a, b, c eram números reais e i, j, k as unidades de quatérnios precursoras de uma base para o espaço euclidiano tridimensional. Hamilton introduziu o termo “vetor” para esses objetos ou entes.

Grassmann em seu *Die Lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik*, (1844) construiu um sistema no espaço n dimensional, com propriedades de soma e multiplicação entre os chamados deslocamentos. Definiu sistema extensivo, baseado no conceito de dependência. Representou de forma única um elemento como somatória, ou uma combinação linear, de elementos independentes.

Peano fez um resumo de algumas das ideias de Grassmann em seu *Calcolo Geometrico* (1888). No último capítulo deste trabalho, intitulado *Transformazioni di sistemi lineari*,

Peano deu uma definição axiomática de um espaço vetorial sobre os reais. Ele chamou isso de "Sistema linear". Ele postulou as operações de fechamento, associatividade, distributividade e existência de um elemento zero. Peano também definiu outros conceitos de Álgebra Linear, incluindo dimensão e transformação linear, e provou vários teoremas. Por exemplo, definiu a dimensão de um espaço vetorial como o número máximo de elementos linearmente independentes e mostrou que qualquer conjunto de n elementos linearmente independentes em um vetor n -dimensional constituiria um grupo ou uma base.

Posteriormente a Peano, outros matemáticos contribuíram para que a axiomatização de espaço vetorial e definições de conjuntos linearmente independentes e de base tivesse o formato atual. Hamel (1905), Weyl (1918), Banach (1920) foram os principais responsáveis pela axiomatização de espaço vetorial. Em Banach (1932), destacou-se a primeira definição de base.

Hamel⁴⁵ em *Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Lösungen der Funktionalgleichung*: $f(x+y)=f(x)+f(y)$ (1905), definiu sua base como um conjunto máximo de números linearmente independentes, “a base para todos os números”, uma base para o espaço vetorial dos números reais sobre o campo dos números racionais. Esse artigo deu uma solução descontínua para $f(x+y)=f(x)+f(y)$ e foi publicada por Hilbert, seu orientador de doutorado, no *Mathematische Annalen*.

Weyl⁴⁶, em 1918, em *Space-Time-Matter*, axiomatizou espaços vetoriais reais em seu livro, *Raum, Zeit, Materie* (1918), baseado em palestras sobre a relatividade geral que ele tinha dado no ano anterior em Zurique. No livro de Weyl, os vetores faziam parte dos fundamentos da geometria. Ele concebeu de um vetor intuitivamente como um deslocamento no espaço. As propriedades da adição, multiplicação e elemento neutro também foram desenvolvidas.

Os axiomas de Weyl eram divididos em duas partes: A primeira parte, que axiomatizou vetores, é essencialmente o primeiro conjunto de axiomas de Peano (1888).

O último dos axiomas de Weyl foi seu Axioma da Dimensão ou da Dimensionalidade: Existem n vetores linearmente independentes, então todos os vetores $n+1$ são linearmente dependentes.

⁴⁵Georg Hamel(1877-1954), matemático alemão.

⁴⁶Hermann Weyl(1885-1955), matemático alemão.

Banach⁴⁷ em sua dissertação de doutorado, *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales* (1920) introduziu a noção de espaço de Banach com seus 13 axiomas. Essa abordagem axiomática foi influenciada pela teoria dos conjuntos.

Os 13 axiomas são enunciados por Banach como:

Seja E uma classe composta pelo menos por dois elementos, arbitrários, designados por $X, Y, Z, \dots$ e $a, b, c, \dots$ são números reais quaisquer, são definidas para E duas operações a seguir:

1) Adição de elementos de E

$$X+Y, X+Z, \dots$$

2) Multiplicação de um elemento de E por um número real:

$$aX, bY \dots$$

Propriedades:

I_1 $X+Y$ é um elemento bem determinado da classe

$$I_2 \quad X+Y=Y+X$$

$$I_3 \quad X+(Y+Z)=(X+Y)+Z$$

$$I_4 \quad X+Y=X+Z \text{ então } Y=Z$$

I_5 Existe um elemento da classe E determinado 0 tal que $X+0=X$

I_6 $a.X$ é um elemento bem determinado da classe E

$$I_7 \quad a.X=0 \text{ equivale a } aX=0 \text{ ou } a=0$$

$$I_8 \quad a \neq 0 \text{ e } a.X=a.Y \text{ então } X=Y$$

$$I_9 \quad X \neq 0 \text{ e } a.X=b.X \text{ então } a=b$$

$$I_{10} \quad a.(X+Y)=a.X+a.Y$$

$$I_{11} \quad (a+b).X=a.X+b.X$$

$$I_{12} \quad 1.X=X$$

$$I_{13} \quad a.(b.X)=(a.b)X$$

Em 1932, Banach, em *Théorie des opérations linéaires*, já se percebe um número menor de axiomas de espaços vetoriais e suas propriedades, mais próximo da axiomatização atual. Banach enunciou seus 7 axiomas e propriedades elementares:

⁴⁷Stefan Banach (1892-1945), matemático polonês.

Dado um conjunto não vazio E , admite-se que qualquer par ordenado x, y de elementos de E , venha corresponder um elemento $x+y$ de E (que é a soma de x e y) e que para um número t e para $x \in E$ um elemento tx de E o produto de um número t por um elemento x , que são definidas para essas operações, nomeadamente adição dos elementos e multiplicação de números por elementos preenchidas as seguintes condições (x, y, z designados elementos arbitrários e a, b os números):

- 1) $x+y=y+x$
- 2) $x+(y+z)=(x+y)+z$
- 3) $x+y=x+z$ então $y=z$
- 4) $a(x+y)=ax+ay$
- 5) $(a+b)x=ax+bx$
- 6) $a(bx)=(ab)x$
- 7) $1.x=x$

Nesse livro, Banach estudou também funcional linear em um espaço vetorial e suas propriedades e espaços normados e suas métricas.

O conceito da base de um espaço vetorial sobre os números reais em termos de independência linear só foi dada numa formulação geral por Banach para espaços tipo (B), os espaços normados.

Base de um espaço tipo B:

Uma série $\{x_i\}$ de elementos de E é chamada base quando existe para todo $x \in E$ exatamente uma série de números $\{\eta_i\}$ tal que:

$$x = \sum_{i=0}^{\infty} \eta_i x_i .$$

Quanto às questões que fundamentaram essa tese, as ideias de conjuntos linearmente independentes e de base teriam inicialmente aparecido na resolução de equações diferenciais, com Euler e posteriormente Lagrange. A ideia de vetores impulsionada por Leibniz, a gênese de segmentos orientados com Wessel, o diagrama de Argand, os quatérnios de Hamilton, a álgebra extensiva de Grassmann, Darboux com sua tentativa de axiomatização de vetores tridimensionais e Peano com a axiomatização de espaço vetorial, propiciaram um panorama de como esse tema se delineou por esses dois séculos. As questões de como e quando apareceram as primeiras ideias de independência linear e de base até as atuais definições de espaço vetorial foram atendidas com a produção desse trabalho.

Como esse trabalho propôs uma cronologia histórica matemática, fica claramente facilitado seu uso didático, uma síntese temporal em forma de tabela com os dados pertinentes dos autores e suas contribuições poderia ser elaborada. A forma cronológica e matemática trazendo uma construção possível de como e quando apareceram as ideias linearmente independentes e base num espaço vetorial, quem foram os autores clássicos que trabalharam essas ideias, as relações entre eles que ensejaram conhecimentos trocados, tornará o aprendizado desse tema com mais significado.

Esta tese verificou ideias de conjuntos linearmente independentes e de base num conjunto restrito aos principais matemáticos e físicos do século XVII até o século XIX com Peano. Não se trata de uma História completa sobre as ideias de base e conjuntos linearmente independentes através desses séculos, mas de um “recorte” muito provável numa cronologia das obras estudadas.

REFERÊNCIAS

- ARGAND, J.R. **Essai sue une mamére de représent lês quantités imaginaires Dans les constructions géométriques**. Paris, 1874.
- BANACH, S. **Sur lês opérations dans lês ensembles abstraits et leur application aux equations integrals**. 1920.
- BANACH, S. **Théorie des opérations linéaires**.1932.
- BARON, M.; BOS, H. **Curso de História da Matemática. Origens e Desenvolvimento do Cálculo**. Unidade 3. Open University, 1985.
- BARON, M.; BOS, H. **Curso de História da Matemática. Origens e Desenvolvimento do Cálculo**. Unidade 4. Open University, 1985.
- BASSALO, J. **A Crônica do Cálculo III: Após Newton e Leibniz. Século XVIII**. *Revista Brasileira de Ensino de Física*. v. 18, nº 4, dez. 1996.
- BASSALO, J. **A Crônica do Cálculo IV: Após Newton e Leibniz. Século XVIII**. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, v. 19, nº 4, dezembro, 1997.
- BERNOULLI, J. **Modus Generalis Construendi di omnes equationes differentiales primi gradus**. In *Acta Eruditorum*. 1694. p.435-440.
- BERNOULLI, J. **Solutiones Problematis a J.B. In Acta Eruditorum**. 1691. p. 273-276.
- BERNOULLI, J. **Opera Omnia**,1762.
- BITTANTI, S. **Count Riccati and the early days on the Riccati equations**. Pitagora Editrice Bologna, 1989.
- BOLDRINI, J. et al. **Álgebra linear** . 3ª edição. Unicamp. Campinas, 1980.
- CAUCHY, A. **Cours D'Analyse L'École Royale Polytechnique**. Paris, 1821.
- CROWE, M. **A History of Vector Analysis**. Dover Publications. New York, 1994.
- D'AMBRÓSIO, U. **A História da Matemática: Questões Historiográficas e Políticas e Reflexões na Educação Matemática**. In: BICUDO, M. A. V. *Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas*. São Paulo: Editora da Unesp, 1999. p.97-115.
- DARBOUX, G. **Sur la composition des forces en statique**. In: *Bulletin des sciences mathématiques at astronomiques*, 1875. tome 9, p. 281-288.
- DUGAS, R. **A History of Mechanics**, 1955.

ENGELSMAN, S. **Lagrange's Early Contributions to the Theory of First Order Partial Differential Equations** . Historia Mathematica 7, 1980, p. 7-23.

EULER, L. **Institutionum calculi integralis volumen secundum**. Opera Omnia. 1769.

EULER, L. **Institutionum calculi integralis volumen primum**. Opera Omnia. 1768.

EULER, L. **Institutiones calculi differentialis cum eius usu in analysi finitorum ac doctrina serierum**. Opera Omnia: Series 1, 1755, v. 10.

EULER, L. **Methodus aequationes differentiales altiorum graduum integrandi ulterius promota** . Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 3, 1753, p. 3-35.

EULER, L. **De Integratione Aequationum Differentialium Altiorum Graduum**. Miscellanea Berolinensia 7, 1743, p. 193-242.

EULER, L. **De Integratione Aequationum Differentialium**. Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 8, 1755, p. 3-63.

EULER, L. **Additamentum ad Dissertationem de Infinitis Curvis Eiusdem**. Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 7, 1740, pp. 184-200.

EULER, L. **De infinitis curvis eiusdem generis seu methodus inveniendi aequationes pro infinitis curvis eiusdem generis**. Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 7, 1740, pp. 174-189.

EULER, L. **Constructio aequationis differentialis** $ax^n dx = dy + x^2 dx$. Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 6, 1738, p. 124-137.

EULER, L. **Nova methodus innumerabiles aequationes differentiales secundi gradus reducendi ad aequationes differentiales primi gradus**. Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 3, 1732, pp. 124-137.

FAUVEL, J; GRAY, J. **The History of Mathematics: A Reader**. Macmillan Press, London, 1987.

GALLETO, B; BARBERIS, B. **Euler e Lagrange**. In Quaderni dell Accademia di Torino. 2008, p.61-81.

GAUSS, J. **Theoria residuorum biquadraticorum** , werke II, 1831, pp. 93-148.

GIBBS, J. **Elements of Vector Analysis**. New Haven, 1881-4.

GRASMAN H. **Die Lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik**. Leipzig, 1844.

GRAY, J. **The History Of The Concept a Finite-Dimensional Vector Space**. In: *Historia Mathematica* 7, 1980, p.65-70.

GRAY, J. **Fuchs and the theory of differential equations**. In: *Bulletin of American Mathematical Society*, v. 10, n. 1, jan 1984.

GRIMBERG, G. **Gauss, os Resíduos Biquadráticos e a Representação Geométrica dos Números Complexos**. In: *Revista Brasileira de História da Matemática*, v. 14, n.29, 2014, p.145-168.

HAMEL, G. **Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Losungen der Funktionalgleichung: $f(x+y)=f(x)+f(y)$** , 1905.

HAMILTON, W. **Theory of Conjugate Functions, or Algebraic Couples; with a Preliminary and Elementary Essay on Algebra as the Science of Pure Time**. Royal Irish Academy, v.17, part 1, 1837, pp. 293–422.

HAMILTON, W. **On Quaterinons or on a New System of Imaginaires in Algebra**. In: *Philosophical Magazine*, series 3, 1832-1850, 1941.

HAMILTON, W. **Lecture on Quaternions**. Dublin, 1853.

HEAVISIDE, O. **Eletrical Papers**, v.2, 1894.

INCE, E. **Ordinary Differential Equations**. Dover, 1926.

JARDINE, D ;GELLASCH, A. **Mathematical Time Capsules**. In: MAA, 2009

KANNENBERG, L. **A New Branch of Mathematics. The *Ausdhnungslehre* of 1844 and Others Works**, 1995.

KATZ, V. **A History of Mathematics**, 3^a edition, 2008.

KLINE, M. **Mathematical Thought from Ancient to Modern**, Vol. 2, 1972.

LAGRANGE, J. **Théorie des variations périodiques des mouvements des Planetes, premiere partie**. In: *Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-lettres*. Berlin, 1783 p. 161–190.

LAGRANGE, J. **Théorie des variations séculaires des éléments des Planetes , seconde partie**. In: *Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-lettres* Berlin, 1782, p. 169–292.

LAGRANGE, J. **Théorie des variations séculaires des éléments des Planetes, premiere partie**. In: *Nouveaux Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-lettres*. Berlin, 1781, p. 199–276.

LAGRANGE, J. **Sur les integrales particulieres des equations diffkentielles.**In Noveaux Mémoires de L'Academie Royale, 1774.

LAGRANGE, J. **Sur l'integration des equations a differences partielles du premier ordre.**In: Noveaux Mémoires de L'Academie Royale, 1776.

LAGRANGE, J. **Sur les suites recurrentes don't les termes variant de plusieurs manieres differences.** In: Noveaux Mémoires de L'Academie Royale, 1775.

LEIBNIZ, G. **Explication de l'Arithmétique Binaire, qui se sert des seuls caracteres O & I; avec des Remarques sur son utilité, & sur ce qu'elle donne le sens des anciennes Figures Chinoises de Fohy.** In: Histoire de l'Académie royale des sciences ... avec les mémoires de Académie des sciences, 1703.

LEIBNIZ, G. **De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum.** In: Acta Eruditorum, 1686.

LEIBNIZ, G. **Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus .**In: Acta Eruditorum, 1684.

LEIBNIZ, G. **Philosophical Papers and Letters.** In: KNUUTTILA, S et al. The New Synthese Historical Library v. 2. Kluwer Academic Publishers Second Edition, 1989, p 248. Translated Leroy Loemker.

LUCIANO, E. **At The Origins of Functional Analysis: G Peano and M. Gramegna on Ordinary Differential Equations .** In: Revue d'histoire des mathématiques 12, 2006, p. 35–79.

MACH, E. **The Science of Mechanics,** 1919.

MOBIUS, A. **Der Barycentrische Calkül.** Leipzig, 1827.

MOORE, G. **Axiomatization of Linear Algebra: 1875-1940.** In: Historia Mathematica 22, 1995, p. 262-303.

PEANO, G. **Analisi della teoria dei vettori.** In: Atti della R. Accademia delle scienze di Torino, v. 33, 1897-1898.

PEANO, G. **Sul determinante wronskiano.** In: Atti Della Reale Accademia Dei Lincei Rendiconti. v. 6, 1897, p. 413-415.

PEANO, G. **Démonstration de l'intégrabilité des équations différentielles ordinaires.** In: Mathematische Annalen 37, 1890.

PEANO, G. **Sur les wronkiens**. In: Mathesis Recueil Mathématiques 9, 1889, p 110-112.

PEANO, G. **Sur les déterminant wronskien**. In: Mathesis Recueil Mathématiques 9, 1889, p 75-76.

PEANO, G. **Calcolo Geometrico**. Fratelli Bocca Editori, Torino, 1888.

PEANO, G. **Intégration par séries des équations différentielles linéaires..** In: Mathematische Annalen 32, 1888, p 450-456.

PEIRCE, B. **Linear Associative Algebra**. New York, 1882.

PRAGACZ, P. **Notes on the life and work of Joséf Maria Hoene**. In: Wronski In Polish Journal Wiadomosci Matematyczne (Ann. Soc. Math. Pol.) v. 43, 2007. Tradução Jan Spalinski.

RICCATI, J. **Observations Regarding Differential Equations of the second order**. Acta Eruditorum Lipsiae, 1724. Translated Ian Bruce, 2007.

RICCATI, J. **Opere**. tomo primo, Lucca, 1761.

SMITH, David Eugene (Org) **A Source Book in Mathematics**. Dover, 1959.

WEYL, H. **Raum, Zeit, Materie**, 1918.

WESSEL, C. **Essay sur la Représentation Analytique de La Direction**. Translated Thiele e Valentiner. Copenhagen, 1897.

WRONSKI, H. **Réfutation de la théorie des fonctions analytiques de Lagrange**, Paris, 1812.

WRONSKI, H. **Introduction a la philosophie des mathématiques**. Paris, 1811.

As biografias de todos os autores estudados foram baseadas em:

<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/>. Acesso em 12 set. 2019.

https://pt.wikipedia.org/wiki/Wikip%C3%A9dia:P%C3%A1gina_principal

Acesso em 12 set. 2019.

ALGUNS AUTORES QUE INFLUENCIARAM EULER NA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES

As aplicações de equações diferenciais no século XVIII eram motivadas de problemas em astronomia e ciências físicas. Jakob Bernoulli estudou equações diferenciais para o movimento planetário, usando os princípios desenvolvidos por Newton. O trabalho de Jakob Bernoulli incluiu o desenvolvimento da catenária e o uso de coordenadas polares. Nesta época, as equações diferenciais estavam interagindo com outros tipos de matemática e ciências para resolver problemas aplicados significativos. O irmão de Jakob, Johann Bernoulli, foi provavelmente o primeiro matemático a entender o cálculo de Leibniz e os princípios de mecânica para modelar matematicamente fenômenos físicos usando equações diferenciais e a encontrar suas soluções, ele também foi professor de Euler. As ideias de Leibniz também se fizeram presentes nos trabalhos de Euler, como a utilização de fator integrante e o uso de separação por variáveis para solucionar equações diferenciais lineares.

Riccati elaborou trabalhos sobre redução de ordem de equações diferenciais e provavelmente influenciou Euler com seu *Animadversiones in aequationes differentiales secundi gradus*, onde solucionou a equação diferencial por redução de ordem, transformando uma equação de segunda ordem em uma equação de primeira ordem conhecida atualmente como equação de Riccati, fazendo análise das infinitas soluções obtidas através das constantes arbitrárias conseguidas com a integração.

Os Bernoullis, Jakob, Johann e Daniel, filho de Johann, estudaram os casos da equação de Riccati e dada a proximidade e amizade entre Johann Bernoulli e Euler, provavelmente este último estava conectado com os trabalhos de Johann Bernoulli. Taylor usou séries para resolver equações diferenciais. No início do século XVIII, muitos matemáticos tinham acumulado técnicas para analisar e resolver equações diferenciais.

Euler teve o benefício dos trabalhos anteriores, mas se baseou no estudo das funções e generalizou métodos existentes além de criar novas técnicas. Nos trechos analisados do artigo *De Integratione Aequationum Differentialium Altiorum Graduum* (1743) e no livro *Institutionum Calculi Integralis* (1768-1770) foram empregados o Método de D'Alembert, o Método da Variação dos Parâmetros ou das Constantes, a Relação de Euler e o atual Teorema da solução geral da equação diferencial não homogênea. Euler teria iniciado o

desenvolvimento do Método de Variação de Parâmetros ou das Constantes e Lagrange o teria completado.

APÊNDICE I *Nova methodus pro maximis et minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus* (1684)

MENSIS OCTOBRIŒ A. M DC LXXXIV. 467

NOVA METHODUS PRO MAXIMIS ET MINIMIS, itemque tangentibus, quae nec fractas, nec irrationales quantitates moratur, & singulare pro illis calculi genus, per G. G. L.

Sit axis AX, & curvæ plures, ut VV, WW, YY, ZZ, quarum ordi. TAB. XII.
nata, ad axem normales, VX, WX, YX, ZX, quæ vocentur respec-
tive, v, w, y, z; & ipsa AX abscissa ab axe, vocetur x. Tangentes sint
VB, WC, YD, ZE axi occurrentes respective in punctis B, C, D, E.
Jam recta aliqua pro arbitrio assumpta vocetur dx; & recta quæ sit ad
dx, ut v (vel w, vel y, vel z) est ad VB (vel WC, vel YD, vel ZE) vo-
cetur d (vel d w, vel dy vel dz) sive differentia ipsarum v (vel ipsa-
rum w, aut y, aut z) His positis calculi regulæ erunt tales:

Sit a quantitas data constans, erit da æqualis 0; & d ax erit æquæ
a dx: si sit y æqu v (seu ordinata quævis curvæ YY, æqualis cuivis or-
dinatæ respondentis curvæ VV) erit dy æqu. dv. Jam *Additio & Sub-*
tractio: si sit z = y + w, x æqu. v, erit dz = y + w + x seu dv, æqu
dz = dy + dw + dx. *Multiplicatio*: dx v æqu. x dv + v dx, seu positò
y æqu. x v, fiet dy æqu. x dv + v dx. In arbitrio enim est vel formulam,
ut x v, vel compendiosè pro ea literam, ut y, adhibere. Notandum & x
& d x eodem modo in hoc calculo tractari, ut y & dy, vel aliam literam
indeterminatam cum sua differentiali. Notandum etiam non dari
semper regressum a differentiali Equatione, nisi cum quadam cautio-
ne, de quo alibi. Porro, *Divisio*, d $\frac{v}{y}$ vel (positò z æqu. $\frac{v}{y}$) dz æqu.
 $\frac{y dy - v dx}{y^2}$

yy

Quoad *Signa* hoc probe notandum, cum in calculo pro litera
substituatur simpliciter ejus differentialis, servari quidem eadem signa,
& pro + scribi + dz, pro - scribi - dz, ut ex additione & subtra-
ctione paulo ante posita apparet; sed quando ad exegesis valorum
venitur, seu cum consideratur ipsius z relatio ad x, tunc apparere, an
valor ipsius dz sit quantitas affirmativa, an nihilo minor seu negativa:
quod posterius cum sit, tunc tangens ZE ducitur a puncto Z non ver-
sus A, sed in partes contrarias seu infra X. id est tunc cum infra ordinata

APÊNDICE II *De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum* (1686)

192

ACTA ERUDITORUM

nam sumitur, circumferentia autem per verticem transit, sectionem conicam in vertice osculatur, adeoque assumpto arcu, quantum satis est parvo, ab ea non differt ad sensum. Quæ causa est, cur focus speculi concavi circularis absit a speculo quarta parte diametri, quia focus parabolæ a vertice abest quarta parte parametri, & focus parabolæ atque circuli osculantis coincidunt. Eadem in omni alio linearum & utilium proprietatum genere, pro re nata locum habent. Quæ quantum conferant ad subtilitates Geometricas in usum vitæ transferendas, nemo talium intelligens non videt. Nobis vero aditum aperuisse, ne forte periret hæc meditatio, nunc quidem satis fuit. Nec injucundum erit considerare, quomodo ita tandem controversia Geometrarum de Angulo contactus, quæ plerisque inanis visa est, in veritates defierit solidas & profuturas.

**G. G. L. DE GEOMETRIA RECONDITA ET
Analyfi Indivisibilium atque infinitorum, Addenda
bis quæ dicta sunt in Actis a. 1684, Maji p. 233; Octob.
p. 264; Decemb. p. 586.**

Cum intelligam nonnulla, quæ in his Actis ad Geometriæ profectum publicavi, non mediocriter a viris quibusdam doctis probari, quin & paulatim in usum transferri, quædam tamen, siue scribentis vitio, siue aliam ob causam ab aliquibus non satis fuisse percepta, ideo pretium operæ putavi hoc loco adjicere, quæ illustrare priora possint. Accepi nimirum tractatum Dn. Craigii de dimensione figurarum, Londini anno superiore editum, ex quo sane apparet, autorem non contemnendos in Geometria interiore progressus fecisse. Is quidem valde approbat distinctionem a me aliquoties inculcatam, inter *dimensiones figurarum generales & speciales*, quam pag. 1 ait optime nuper a Geometris fuisse observatam, & neglectiõni hujus distinctionis paralogismos complures tetragonismi impossibilitatem probare conantium, recte tribuit. Mecum etiam figuras, quas vulgo e Geometria rejiciunt, agnoscit esse *Transcendentes* pag. 26; Methodum quoque *Tangentium* a me in Actis Octobr. 1684 publicatam, pro humanitate sua plurimum laudat pag. 27 & 29, tanquam præstantissimam & cujus ope Methodus dimensionum valde ju-

APÊNDICE III JOHANN BERNOULLI

Figura 18: Johann Bernoulli

Fonte: Wikipédia⁴⁸

Nascido a 07 de agosto de 1667 na Basiléia, Suíça

Morto a 03 de janeiro de 1748 na Basiléia, Suíça

Foram os Bernoullis que usaram pela primeira vez a palavra integral (1669) e, pouco depois, Leibniz concordaria que *Cálculus Integralis* seria um nome melhor que *Cálculus Sommatorius*. A família Bernoulli teve sua origem na Holanda, na cidade da Antuérpia, fugindo para a Suíça, por serem protestantes. Johann escreveu uma tese de doutoramento em medicina sobre fermentação, com apenas 23 anos de idade.

Johann Bernoulli foi um dos grandes matemáticos pertencente à família Bernoulli. Johann e seu irmão mais velho Jakob mantinham correspondências, além de forte amizade com Leibniz, os irmãos absorveram grande parte do trabalho deste matemático em suas próprias descobertas e estudos.

Os primeiros contatos dos irmãos Bernoulli com o trabalho de Leibniz ocorreram em 1685, após Leibniz publicar seu primeiro artigo sobre Cálculo escrito em 1684. Os irmãos começaram a estudar os trabalhos de Leibniz e a trocar correspondências com ele.

A partir de 1691, Johann tornou-se um apaixonado pela teoria do cálculo diferencial e integral, escreveu dois livros sobre cálculo. Em 1692, Johann encontrava-se em Paris e, para ganhar a vida, tornou-se professor particular de um jovem, Guilherme François L'Hôpital,

⁴⁸Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Johann_Bernoulli Acesso em 25 maio 2020

Marquês de St Mesme. O resultado deste acordo foi que uma das mais importantes contribuições de Johann Bernoulli, datada de 1694, para resolução de limites indeterminados, passou a ser conhecida mundialmente como regra de L'Hôpital, *Analysis des Infinites Petits* publicado em Paris em 1699. A publicação é tida como primeiro livro de cálculo diferencial e integral editado no mundo, cuja importância foi enorme para a divulgação do cálculo entre os estudiosos do século XVIII. No prefácio, L'Hôpital agradece de maneira especial a Johann Bernoulli e a Leibniz.

Ainda em 1694, Johann resolveu equações diferenciais homogêneas utilizando o método de separação de variáveis de um modo mais completo do que Leibniz já havia sugerido e feito em 1691.

Em 1694, casa-se com Marie Euler, sobrinha de Euler, com a qual teve três filhos, todos gênios: Nicolau I, Daniel I e Johann II.

Em 1695 Bernoulli foi convidado a ser professor da Universidade de Groningen onde permaneceu até 1705 e teve como discípulo o grande Euler.

Em 1742, Johann Bernoulli utilizou o método do fator integrante para solução de equação diferencial, segundo Victor Katz (2008) e teria procedido da seguinte forma:

Dada a equação diferencial:

$2ydx - xdy = 0$ a equação integral seria conseguida multiplicando-se pelo fator integrante $\frac{x}{y^2}$. Que resultaria em $\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{y}\right) = 0$.

Havia uma ligação estreita com Euler. Eram parentes, amigos e Johann foi professor de Euler em Groningen. Johann deve ter influenciado Euler nos métodos de resolução das equações diferenciais.

APÊNDICE IV JACOPO FRANCESCO RICCATI

Figura 19: Riccati

Fonte: Wikipédia⁴⁹

Nascido em 28 de maio de 1676 em Veneza, Itália

Morto em 15 de abril de 1754 em Treviso, Itália

Jacopo Riccati foi um dos matemáticos italianos mais conhecidos de seu tempo. Pertencia a uma família nobre e rica de Castelfranco Veneto.

Também efetuou trabalhos sobre hidráulica que foram muito importantes para a cidade de Veneza. Ele próprio ajudou a projetar os diques ao longo de vários canais. É conhecido principalmente pela Equação de Riccati da qual fez um elaborado estudo e deu soluções em alguns casos especiais.

Riccati usufruiu de uma extraordinária rede de relacionamentos valiosos para atualização e progresso dos estudos matemáticos na Itália. Ele se correspondeu com renomados estudiosos italianos e estrangeiros, entre os quais Bernardino Zendrini, John Poleni, Antonio Vallisnieri, Gabriele Manfredi, Giulio Carlo Fagnano, Jacob Hermann, Johann, Daniel, Nicolaus I e Nicolau II Bernoulli, Giuseppe Suzzi, Lodovico Riva, Ramiro Rampinelli e Maria Gaetana Agnesi.

Ele influenciou Euler para integração de equações diferenciais lineares de qualquer ordem, percebe-se a importância de Riccati para que Euler compreendesse as primeiras noções de base na integração de equações diferenciais.

Riccati trabalhou principalmente com resolução de equações diferenciais com métodos para reduzir a ordem e separar variáveis para a resolução de equações diferenciais.

⁴⁹Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Jacopo_Francesco_Riccati Acesso em 25 maio 2020

Seu filho Giordano Riccati publicou *Opere*, em 1765, após a morte do pai. *Opere* foi publicado em Lucca por G. Rocchi e tem 04 volumes.

Entre Riccati e Johann Bernoulli existia um intercâmbio de ideias e conhecimentos, onde os Bernoulli's são citados em vários trechos de seu livro *Opere*, com soluções de equações diferenciais.

Em *Opere*, Riccati apresentou métodos inventados por vários autores para separar as equações diferenciais de primeira ordem, também foi estudada a equação: $\ddot{x} = \alpha t^m$ “equazione ingannatrice”.

Riccati publicou em *Acta Eruditorum Lipsiae* em 1724, *Animadversiones in aequationes differentiales secundi gradus*, é considerado o primeiro documento oficial sobre a Equação de Riccati, apesar de que em 1723, já ter sido publicado no Apêndice do mesmo jornal. Esse artigo teria influenciado Euler na resolução de equações de segunda ordem. Riccati utilizou algumas transformações e substituições que teriam motivado Euler em seus estudos. Ele transformou ou reduziu uma equação diferencial de 2ª ordem na conhecida Equação de Riccati, uma equação diferencial não linear de 1ª ordem e constatou a necessidade de uma constante que significaria uma infinidade de soluções a cada redução de ordem. Em *Constructio aequationis differentialis* (1733), Euler comentou essa solução de Riccati.

Em *Animadversiones in aequationes differentiales secundi gradus*, Riccati manipulou a equação $x^m dx = dy + dy^2$ fazendo substituições, considerando $dx:q = dp$, $dy = udp$ e dp constante. Reduziu a ordem da equação diferencial de 2ª ordem $x^m dx = dy + dy^2$ para a equação $x^m dq = du + udx:q$ de primeira ordem, atualmente conhecida por Equação de Riccati.

Constatou que se $q = x^n$ a questão seria conseguir encontrar valores de expoente n para que a separação de variáveis fosse possível. Riccati apresentou também outros exemplos onde não era possível a redução de ordem, pois havia dificuldade na separação de variáveis.

Em 1742, Euler encontrou a mesma solução de Riccati integrando séries aplicando na equação: $dy + ayydx = b x^m dx$ em *De Resolutione aequationis* $dy + ayydx = b x^m dx$.

APÊNDICE V *De Integratione Aequationum Differentialium Altiorum Graduum* (1743)

Os parágrafos ou itens desse artigo foram resolvidos considerando o conhecimento matemático existente na época, mas trazendo esses dados para uma análise atual.

Parágrafo VI

§. VI.

Quo discrimen inter æquationes integrales completas & incompletas clarius intelligatur, juvabit rem exemplo illustraffe. Sit igitur proposita hæc æquatio differentialis $aady + yydx = (aa + xx)dx$; cui satisfacere patet hunc valorem $y = x$, quippe qui substitutus producit æquationem identicam. Est igitur $y = x$ æquatio integralis, at minime completa, cum ea neque constantem a , quæ in æquatione differentiali inest, neque præterea aliam constantem arbitra-

197

bitariam contineat, quemadmodum æquatio differentialis primi gradus postulat. Vehementer igitur falleretur, qui hanc æquationem $y = x$ pro integrali completa hujus $aady + yydx = (aa + xx)dx$ venditare vellet: æquatio enim integralis completa est

$$y = x + \frac{aabe^{-\frac{xx}{aa}}}{aa + b \int e^{-\frac{xx}{aa}} dx} : \text{quæ faciendo constantem arbitariam } b = 0 \text{ utique reddit integram particularem } y = x.$$

Nesse parágrafo, Euler resolveu a equação conhecida atualmente como equação de Riccati, pois foi este último quem a propôs.

Foi dada a equação:

$$a \cdot ady + y \cdot ydx = (a \cdot a + x \cdot x) dx$$

É claro que $y = x$ era uma equação integral, mas não era uma integral completa, pois nem a constante a estava incluída nessa solução, nem outra constante exigida pela equação diferencial de ordem 1 aparecia na solução, portanto era uma integral particular.

E Euler nos apresentou a equação integral completa como:

$$y = x + \frac{aabe^{-\frac{xx}{aa}}}{aa + b \int e^{-\frac{xx}{aa}} dx}.$$

Uma possível solução foi analisada neste momento, levando em conta as estruturas e conhecimento de Euler. Uma análise de boa parte de sua obra foi verificada para poder entender quais os caminhos matemáticos conhecidos até então por ele.

O método do fator integrante já era conhecido por Euler, pois foi primeiramente utilizado por Leibniz em 1694. Euler em *Nova methodus innumerabiles aequationes differentiales secundi gradus reducendi ad aequationes differentiales primi gradus* (1732), em *De Integratione Aequationum Differentialium* (1755), e na parte I do Capítulo VII de *Institutionum calculi differentialis* Volume 1 (1755) utilizou esse método.

Riccati publicou o artigo *Animadversiones in aequationes differentiales secundi gradus* em *Acta* e Euler teria se baseado nesse artigo para resolução das equações diferenciais de 2ª ordem, usando as transformações e substituições de Riccati que o inspiraram.

Euler, em seu artigo *Constructio aequationis differentialis* $ax^n dx = dy + y^2 dx$, que foi publicado em 1738, utilizou um método para resolução da equação diferencial proposta primeiramente por Riccati e resolvida, por Euler, para todos os valores de n . Ele utilizou séries e as integrações são consideradas somas dessas séries.

Mais tarde, em 1755, em seu artigo *De Integratione Aequationum Differentialium*, problema 9, página 32, Euler chamou a atenção para o fato de que dada uma solução particular v para a equação Riccatiana a solução geral poderia ser obtida:

Numa possibilidade para a resolução da equação diferencial de Riccati desse artigo de Euler, houve a comparação com interpretações atuais:

Euler considerou uma solução do tipo:

$y = v + \frac{1}{z}$ que transformaria a equação de Riccati não linear numa equação diferencial linear.

Retomando a equação do parágrafo IV:

$$a \cdot dy + y \cdot y dx = (a \cdot a + x \cdot x) dx$$

Considerando agora, uma equação análoga, nos termos:

$$y' = p(x) + q(x)y + r(x)y^2$$

Então:

$$y' = \frac{a^2 + x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2}$$

Considerando uma solução particular y_p e uma solução geral dada por:

$$y(x) = y_{p(x)} + \frac{1}{v(x)}$$

E substituindo:

$$\frac{d}{dx}\left(y_p + \frac{1}{v}\right) = p(x) + q(x)\left(y_p + \frac{1}{v}\right) + r\left(y_p + \frac{1}{v}\right)^2$$

Obtém-se:

$$\frac{dv}{dx} + q(x) + 2r(x)y_p \cdot v = -r(x) \quad .$$

Para resolução dessa equação diferencial de 1ª ordem linear, Euler deve ter utilizado o método do fator integrante que ao considerar uma equação do tipo:

$$y' + p(x)y = q(x)$$

$u(x)$ seria o fator integrante tal que:

$$\frac{d}{dx}(u(x)y) = u(x) \cdot (y' + p(x) \cdot y) = u(x) \cdot q(x)$$

E integrando:

$$y = \frac{1}{u(x)} \int u(x)q(x)dx + \frac{C}{u(x)} \quad (\text{Equação I})$$

Considerando $p(x) \neq \text{constante}$

$$\frac{d}{dx}(u(x)y) = u(x) \cdot y' + u(x) \cdot p(x) \cdot y = u' \cdot y + u \cdot y'$$

$$u' \cdot y = u \cdot p(x) \cdot y$$

$$\int \frac{du}{u} = \int p(x)dx$$

$$\ln(u) = \int p(x)dx + C_1$$

$$u(x) = e^{\int p(x)dx} \cdot e^{C_1}$$

$$u(x) = e^{\int p(x)dx} \cdot C_2 \quad (\text{Equação II})$$

Considerando a Equação I

$$y = \frac{1}{u(x)} \int u(x)q(x)dx + \frac{C}{u(x)} \quad \text{e substituindo em II em I:}$$

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx} \cdot \int e^{\int p(x)dx} \cdot q(x)dx + C_3 e^{-\int p(x)dx}$$

Voltando à equação $a \cdot ady + y \cdot ydx = (a \cdot a + x \cdot x)dx$ de Riccati do Parágrafo VI:

$$\frac{dv}{dx} + (q(x) + 2r(x)y_p) \cdot v = -r(x)$$

Resolvendo pelo método do fator integrante:

$$v' + (q(x) + 2r(x)y_p) \cdot v = -r(x) \quad .$$

Agora o fator integrante para essa equação será:

$$u(x) = e^{\int (q(x) + 2r(x)y_p) dx} \cdot C_4 \quad (\text{Equação III})$$

$$v(x) = \frac{1}{u(x)} \cdot \int u(x)(-r(x)dx + \frac{C_5}{u(x)})$$

$$\frac{1}{v(x)} = \frac{u(x)}{\int (u(x)(-r(x)dx + C_5))} \quad (\text{Equação IV})$$

Substituindo III em IV e depois em :

$$y(x) = y_p(x) + \frac{1}{v(x)}$$

Obtém-se finalmente:

$$y(x) = y_{p(x)} - \frac{e^{\int q(x) + 2r(x)y_{p(x)} dx}}{C_6 + \int r(x) \cdot e^{\int q(x) + 2r(x)y_{p(x)} dx} dx} \quad (\text{Equação V})$$

Voltando ao artigo de Euler e resolvendo a equação de Riccati:

$$y' = \frac{(a^2 + x^2)}{a^2} - \frac{y^2}{a^2}$$

Colocando na forma:

$$y' = p(x) + q(x)y + r(x)y^2 \quad \text{então:}$$

$$p(x) = \frac{(a^2 + x^2)}{a^2}$$

$$q(x) = 0 \quad r(x) = \frac{-1}{a^2}$$

Considera-se: $y_{p(x)} = x$ pois x é solução da equação, Euler em seu artigo já considerava uma solução particular.

$$a \cdot dy + y \cdot y dx = (a \cdot a + x \cdot x) dx$$

Substituindo na Equação V, $y_{p(x)} = x$, $r(x) = \frac{-1}{a^2}$, $q(x) = 0$, obtém-se:

$$y(x) = x - \frac{e^{-\frac{x^2}{a^2}}}{C_6 + \int -\frac{1}{a^2} e^{-\frac{x^2}{a^2}} dx}$$

Multiplicando a fração $\frac{1}{v(x)} = -\frac{e^{-\frac{x^2}{a^2}}}{C_6 + \int -\frac{1}{a^2} e^{-\frac{x^2}{a^2}} dx}$ por ba^2 numerador e

denominador e considerando $b = -\frac{1}{C_6}$, a integral completa apresentada por Euler seria:

$$y = x + \frac{aabe^{\frac{-xx}{aa}}}{aa + b \int e^{\frac{-xx}{aa}} dx}.$$

Observa-se que se $b=0$ obtém-se a solução particular.

Euler observou que *uma* constante arbitrária aparecia na solução da equação diferencial de 1º grau (1ª ordem).

Parágrafo VII

§. VII.

Simili modo videmus huic æquationi differentio-differentiali $y = \frac{x dy}{dx} + \frac{ax ddy}{dx^2}$ satisfacere hanc æquationem finitam $y = x$; procul autem abest, quominus sit integralis completa, omnemque vim æquationis differentio-differentialis exhauriat, quoniam æquatio integralis completa præter constantem a duas quantitates arbitrarías continere debet. Videmus vero etiam hanc æquationem $y = nx$ satisfacere, quæ autem, quia unicam constantem n continet, tantum modo est, particularis. Æquatio autem integralis completa est $y = nx + bx \int \frac{e^{-\frac{x}{a}} dx}{xx}$, quæ præter constantem a duas continet constantes arbitrarías b & n ; uti natura rei postulat.

Nesse parágrafo, Euler resolveu uma equação diferencial da diferencial (equação diferencial de 2ª ordem):

$$y = x \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{ax ddy}{dx^2}.$$

A equação finita $y=x$ não era a integral completa.

A equação integral completa precisaria duas constantes arbitrárias.

Euler percebeu $y=nx$ também satisfazia a equação, mas que se tratava de uma equação particular.

Ele resolveu e obteve:

$$y=nx+bx \int \frac{e^{\frac{-x}{a}} dx}{x^2} \text{ que teria duas constantes arbitrárias } b, n, \text{ além da constante } a.$$

Provavelmente Euler utilizou o método para redução de ordem, atualmente conhecido como Método d'Alembert, pois já o conhecia.

Considerando $C(x)$ uma função de x , $y_1(x)$ uma solução particular, obtém-se uma outra solução $y_2(x)$, com:

$$y_2(x)=C(x) \cdot y_1(x) \text{ e derivando:}$$

$$y_2'=C' y_1 + C y_1' \text{ derivando novamente}$$

$$y_2''=C'' y_1 + C' y_1' + C' y_1' + C y_1''$$

$$y_2''=C'' y_1 + 2 C' y_1' + C y_1''$$

Considerando que uma equação de 2ª ordem é do tipo:

$$y_2''+p(x)y_2'+q(x)y_2=0$$

Substituindo tem-se:

$$C(y_1''+py_1'+qy_1)+C''y_1+C'(2y_1'+py_1)=0$$

Como:

$$y_1''+py_1'+qy_1=0, \text{ implica em:}$$

$$\frac{C''}{C} = -\frac{2y_1'}{y_1} - p$$

Integrando ambos os lados:

$$\ln(C') = -\ln(y_1)^2 - \int p(x) dx + \ln(A)$$

$$C' = \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x) dx} \cdot A$$

Integrando:

$$C = B + A \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p(x) dx} \cdot dx \text{ (Equação VI)}$$

Voltando ao Parágrafo VII em questão,

$$y=x \cdot \frac{dy}{dx} + ax \frac{d^2y}{dx^2}$$

Colocando na forma:

$$y = xy' + axy''$$

Deixando na forma:

$$y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2 = 0$$

Obtém-se:

$$y'' + \frac{y'}{a} - \frac{y}{ax} = 0$$

Com $y_1 = x$ e $p(x) = \frac{1}{a}$

Substituindo na Equação VI, obtém-se:

$$C = B + A \int \frac{1}{x^2} e^{-\frac{x}{a}} dx$$

Como $y_2 = C \cdot x$ então:

$$y_2 = Bx + Ax \int \frac{1}{x^2} e^{-\frac{x}{a}} dx$$

Ainda considerando: $A = b$ e $B = n$

A equação integral completa seria:

$$y = nx + bx \int \frac{e^{-\frac{x}{a}} dx}{x^2}.$$

Euler notou que haviam duas constantes arbitrárias na solução b e n , ou seja, como tratava-se de equação de 2ª ordem, o esperado é que deveria conter *duas* constantes.

Parágrafo VIII

§. VIII.

Cum autem omnes æquationes integrales particulares in completa contineantur, patet ex pluribus integralibus particularibus completam constare; atque adeo ex integralibus particularibus integrale completum conflabitur. Sæpe numero quidem æque difficile est ex cognitis aliquot integralibus particularibus integrale completum vel saltem integrale latius patens, atque idem ex ipsa æquatione differentiali per integrationem colligere. At vero æquatio quam tractare suscepimus

$$0 = A y + \frac{B dy}{dx} + \frac{C ddy}{dx^2} + \frac{D d^3 y}{dx^3} + \frac{E d^4 y}{dx^4} + \&c.$$

ita est comparata, ut cognitis valoribus particularibus ipsius y duobus pluribusve, ex iis facile valor latius patens illos nempe valores in se complectens ipsius y formari queat. Hocque pacto ex sufficienti numero valorum particularium pro y inventorum valor completus, seu æquatio integralis completa concinnari poterit.

Euler afirmou nesse parágrafo que todas as equações integrais particulares estavam contidas na integral completa e a integral se tornaria completa quando todas as equações integrais particulares fossem consideradas.

Parágrafo IX

§. IX.

Primo autem perspicitur si p fuerit valor conveniens ipsius y , ita ut sit $y = p$, tum etiam fore $y = ap$; namque si valor p loco y substitutus reddit $A y + \frac{B dy}{dx} + \frac{C ddy}{dx^2} + \&c. = 0$, tum valor ap loco y substitutus eandem expressionem evanescentem efficiet: hocque modo una constans arbitraria a in æquationem integram particularem

$$y = p$$

$y = p$ introduci potest. Sin autem præterea hæc æquatio $y = q$ satisfaciatur, tum pari modo quoque satisfaciet $y = \beta q$: ex his autem duobus valoribus particularibus $y = \alpha p$ & $y = \beta q$, colligetur hic latius patens $y = \alpha p + \beta q$. Si enim expressio $Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2} + \frac{Dd^3y}{dx^3} + \dots$ nihilo æqualis redditur, posito tam αp quam βq loco y , manifestum est, eandem expressiorem nihilo æqualem fieri debere, si loco y ponatur $\alpha p + \beta q$.

Dada a equação:

$$Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2} = 0$$

Considerando as soluções: $y = p$ e $y = q$

$$Ap + \frac{Bdp}{dx} + \frac{Cddp}{dx^2} = 0$$

$$Aq + \frac{Bdq}{dx} + \frac{Cddq}{dx^2} = 0$$

Serão também soluções $y = \alpha p$ e $y = \beta q$, pois:

$$\alpha Ap + \alpha \frac{Bdp}{dx} + \alpha \frac{Cddp}{dx^2} = 0$$

$$\beta Aq + \beta \frac{Bdq}{dx} + \beta \frac{Cddq}{dx^2} = 0$$

Será solução: $y = \alpha p + \beta q$ porque:

$$A(\alpha p + \beta q) + B \frac{d(\alpha p + \beta q)}{dx} + C \frac{dd(\alpha p + \beta q)}{dx^2} = 0$$

Parágrafo X

§. X.

Simili modo si p, q, r, s , &c. fuerint ejusmodi functionis ipsius x , ut singula: seorsim loco y substitutæ expressionem $Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2} + \&c.$ evanescentem efficiant, tum etiam hic valor $\alpha p + \beta q + \gamma r + \delta s + \&c.$ loco y substitutus eandem expressionem nihilo æqualem producet. Quare si p, q, r, s , &c. fuerint valores particulares ipsius y , qui ipsi ex æquatione proposita conveniunt, tum ex iis colligitur iste valor longe latius patens $y = \alpha p + \beta q + \gamma r + \delta s + \&c.$ æquationi propositæ pariter satisfaciens. Hicque valor adeo erit completus, si tot affuerint constantes arbitrariæ $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, &c. quoti fuerit gradus æquatio differentialis proposita. Facilem igitur nacti sumus modum, ex pluribus valoribus particularibus ipsius y , ejus-valorem completum assignandi, qui omnes omnino valores ipsius y æquationi satisfaciens in se complectatur: sicque habebi.

Euler observou que dados valores particulares $p, q, r, s \dots$ para a equação diferencial dada, a solução $y = \alpha p + \beta q + \gamma r + \delta s + \dots$ também seria solução. Esse valor só seria completo o número de constantes arbitrárias fosse igual à ordem da equação diferencial dada.

Parágrafo XI

§. XI.

Totum ergo negotium pro inveniendi integrali completo æquationis propositæ

$$0 = A y + \frac{B dy}{dx} + \frac{C ddy}{dx^2} + \frac{D d^3 y}{dx^3} + \dots + \frac{N d^n y}{dx^n}$$

huc reducitur, ut valores particulares investigemus, qui pro y substituti æquationem identicam reddant. Tot autem ejusmodi valoribus particularibus erit opus, quoad iis præscripto modo colligendis tot constantes arbitrariæ affuerint, quot exponens maximus n continet unitates. Quare si singulæ æquationes particulares unam secum gerant constantem arbitrariam, ejusmodi æquationes numero n requiruntur, ad æquationem integram completam constituendam. Sin autem quædam harum æquationum particularium plures una constantes arbitrarias implicent, tum eo paucioribus opus erit æquationibus particularibus ad completam ex iis colligendam.

Nesse item, Euler nos esclareceu que o número de constantes arbitrárias deveria ser no máximo n , ou seja, a ordem da equação diferencial.

Parágrafo XII

§. XII.

Denotent jam omnes litteræ $A, B, C, D, \&c.$ quantitates constantes, ita ut integrari debeat hæc æquatio differentialis gradus n

$$0 = A y + \frac{B dy}{dx} + \frac{C ddy}{dx^2} + \frac{D d^3 y}{dx^3} + \dots + \frac{N d^n y}{dx^n}.$$

Quoniam y cum suis differentialibus ubique unicam dimensionem complet, secundum methodum meam in Tomo III.

Com.

201

Comment. Academia Petropol. traditam hæc æquatio differentialis uno gradu deprimetur, si ponamus $y = e^{\int p dx}$; unde singula differentialia ipsius y erunt

$$\frac{dy}{dx} = e^{\int p dx} p$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = e^{\int p dx} \left(p p + \frac{d p}{dx} \right)$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = e^{\int p dx} \left(p^3 + \frac{2 p dp}{dx} + \frac{d^2 p}{dx^2} \right)$$

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = e^{\int p dx} \left(p^4 + \frac{6 p p dp}{dx} + \frac{4 p d^2 p}{dx^2} + \frac{3 d p^2}{dx^2} + \frac{d^3 p}{dx^3} \right)$$

&c.

qui valores si in proposita substituantur, ea dividi poterit per $e^{\int p dx}$, atque remanebit æquatio differentialis gradus $n-1$.

Na equação:

$$0 = Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2} + \frac{Dd^3y}{dx^3} + \frac{Ed^4y}{dx^4} + \frac{Fd^5y}{dx^5} + etc$$

Foi dada uma solução ou integral particular $y = e^{\int p dx}$ então:

$$\frac{dy}{dx} = p \cdot e^{\int p dx}$$

$$\frac{ddy}{dx^2} = \frac{dp}{dx} \cdot e^{\int p dx} + p^2 e^{\int p dx} = e^{\int p dx} \left(p^2 + \frac{dp}{dx} \right)$$

$$\frac{ddy}{dx^3} = e^{\int p dx} \left(p^3 + 2p \frac{dp}{dx} + \frac{d^2 p}{dx^2} \right)$$

Logo dividindo por $y = e^{\int p dx}$ reduziria a ordem da equação diferencial para $n-1$.

Parágrafo XIII

§. XIII.

Hic autem primum patet, si capiatur p constans, ita ut ejus differentialia dp , ddp , d^3p , &c. evanescent, tum ob A, B, C, D, &c. constantes, variabilem x prorsus ex æquatione esse excessuram; atque in hac hypothefi orietur sequens æquatio algebraica:

$$0 = A + Bp + Cp^2 + Dp^3 + Ep^4 + \dots + Np^n :$$

ex qua si valor aliquis pro p eruat, simul habebitur æquatio integralis particularis $y = e^{px}$, æquationi differentiali propositæ satisfaciens; satisfaciet ergo etiam uti vidimus hæc

D d æqua-

*** 202 ***

æquatio $y = \alpha e^{px}$, quoties p fuerit quantitas constans ac radix hujus æquationis algebraicæ $0 = A + Bp + Cp^2 + Dp^3 + \dots + Np^n$.

Dada uma equação diferencial, hoje homogênea, de ordem n :

$$0 = Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2} + \frac{Dd^3y}{dx^3} + \frac{Ed^4y}{dx^4} + \frac{Fd^5y}{dx^5} + \text{etc}$$

Considerando $p = \text{constante}$, portanto $dp, ddp, dddp$ muito pequenos e $y = e^{px}$ uma integral particular, ou solução, obtém-se a equação algébrica de acordo com parágrafo anterior: $0 = A + Bp + Cp^3 + Dp^4 + \dots + Np^n$.

$y = \alpha e^{px}$ também seria solução, bastaria substituir e fazer a verificação.

Euler demonstrou que a solução dessa equação seria dada por valores de p que eram raízes da equação algébrica:

$$0 = (A + Bp + Cp^3 + Dp^4 + \dots + Np^n) .$$

Parágrafo XIV

§. XIV.

Perduximus ergo inventionem valorum particularium pro variabili y , ad resolutionem æquationis algebraicæ n dimensionum, pro qua sumamus hanc

$$0 = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \dots + Nz^n$$

hujusque æquationis singulæ radices seu divisores dabunt totidem valores particulares ipsius y . Si enim fuerit $pz - q$

divisor istius æquationis, ex quo oritur $z = \frac{q}{p}$, erit $y =$

$\alpha e^{\frac{qx}{p}}$; qui valor particularis unam continet constantem ar-

bitrariam α . Cum autem illa æquatio algebraica n dimensionum contineat n radices seu divisores, hinc quoque orientur n valores particulares pro y ; qui junctim sumti dabunt valorem universalem pro y ; hicque simul erit valor completus, eo quod n contineat constantes arbitrarias; quod est criterium æquationis integralis completæ.

Analogamente dada uma equação algébrica:

$$0 = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \dots + Nz^n \quad \text{e} \quad pz - q \quad \text{um divisor, ou seja,}$$

$$z - \frac{q}{p} = 0 \quad .$$

Então:

Se $z = \frac{q}{p}$ então $y = e^{\frac{qx}{p}}$ seria solução da equação diferencial

$$0 = Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2} + \frac{Dd^3y}{dx^3} + \frac{Ed^4y}{dx^4} + \frac{Fd^5y}{dx^5} + \text{etc} \quad \text{com essas constantes e} \quad y = \alpha e^{\frac{qx}{p}}$$

também seria solução.

A equação integral completa deveria ter n constantes arbitrarias.

Parágrafo XVI

§. XVI.

Utrique incommodo medelam afferemus, si nexum inter æquationem differentialem propositam

$$0 = Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2} + \frac{Dd^2y}{dx^3} + \dots + \frac{Nd^n}{dx^n}$$

atque inter æquationem algebraicam formatam

$$0 = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \dots + Nz^n$$

attentius contemplemur. Quemadmodum enim ex hac illa

oritur, si loco z^0 ponatur y , loco z vero $\frac{dy}{dx}$, & generaliter

loco z^k scribatur $\frac{d^k y}{dx^k}$: ita similimodo ex factoribus sin-

gulis æquationis algebraicæ formabuntur æquationes dif-

ferentiales, quæ necessario in æquatione differentiali pro-

posita continebuntur, atque ex quibus proinde valores

particulares pro y reperientur. Sic si $pz - q$ vel $q - pz$

fuerit divisor æquationis algebraicæ, ex hoc per legem ne-

D d 2

xus

204

xus oritur hæc æquatio differentialis $qy - \frac{pdy}{dx} = 0$ quæ

integrata dat $y = \alpha e^{\frac{qx}{p}}$, quæ est ea ipsa, quam ex eodem

factore $pz - q$ eliciimus.

Nesse parágrafo, considerando os divisores: $pz - q$ e $q - pz$ da equação algébrica:

$$0 = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \dots + Nz^n$$

Como $z = \frac{q}{p}$, $z = \frac{dy}{dx}$ e $y = z^0$ obtém-se $qy - \frac{pdy}{dx} = 0$ ou $\frac{y'}{y} = \frac{q}{p}$ que

integrando $y = \alpha e^{\frac{qx}{p}}$ é solução.

Parágrafo XVII

§. XVII.

Hinc intelligitur si habeatur divisor quicunque æquationis illius algebraicæ puta, $p + qz + rz^2$ tum æquationem ex hoc divifore oriundam $py + \frac{qdy}{dx} + \frac{rddy}{dx^2} = 0$ dare valorem pro y , qui etiam fatisfacit æquationi differentiali propofita. Ex hoc ergo illam difficultatem tollere poterimus, quæ locum habet, fi æquatio algebraica habeat duos pluresve factores æquales. Sit igitur $(p - qz)^2$ divisor æquationis algebraicæ, ex hocque evoluto refultabit hæc æquatio differentio-differentialis $ppy - \frac{2pqdy}{dx} + \frac{qqddy}{dx^2} = 0$. Ponamus $y = e^{\frac{px}{q}} u$, facta que fubftitutione habebimus $ddu = 0$, hincque $u = \alpha + \beta x$. Quare ex factore quadrato $(p - qz)^2$ oritur fequens valor $y = e^{\frac{px}{q}} (\alpha + \beta x)$, qui duas constantes arbitrarias complectitur.

Se $(pz - q)^2$ é um fator da equação algébrica, então Euler considerou $y = e^{\frac{px}{q}} u$ onde $y = e^{\frac{px}{q}}$ é uma solução conhecida e u uma função desconhecida, do tipo $u = \alpha + \beta x$, ou seja, $ddu = 0$.

Nesse parágrafo Euler utilizou ideias do atualmente conhecido Método de D'Alembert.

Dada a equação algébrica: $p + qz + rz^2$, $z = \frac{dy}{dx}$ e $y = z^0$ então:

$$py + \frac{qdy}{dx} + r \frac{ddy}{dx^2} = 0$$

Se $(pz - q)^2$ for divisor dessa equação algébrica, uma equação de 2º grau e consequentemente uma equação diferencial de 2ª ordem correspondente seria:

$$p^2 y - 2pq \frac{dy}{dx} + q^2 \frac{ddy}{dx^2} = 0$$

Considerando solução: $y = e^{\frac{px}{q}} u$ e $ddu = 0$, pois $du = \text{constante}$ então u tem a forma $u = \alpha + \beta x$.

Obtém-se $y = e^{\frac{px}{q}} (\alpha + \beta x)$.

Euler percebeu duas constantes arbitrárias α, β .

APÊNDICE VI *Institutionum Calculi Integralis* (1768-1770)

Volume I; Seção I; Capítulo I

Nesta Seção, a definição de constantes arbitrárias que foram fundamentais para a percepção de Euler para as ideias de base.

DEFINITIO

40. *Formula differentialis rationalis est, quando variabilis x , cuius functio quaeritur, differentiale dx multiplicatur in functionem rationalem ipsius x , seu si X designet functionem rationalem ipsius x , haec formula differentialis Xdx dicitur rationalis.*

COROLLARIUM 1

41. In hoc ergo capite eiusmodi functio ipsius x quaeritur, quae si ponatur y , ut $\frac{dy}{dx}$ aequetur functioni rationali ipsius x , seu posita tali functione $= X$ ut sit $\frac{dy}{dx} = X$.

COROLLARIUM 2

42. Hinc quaeritur eiusmodi functio ipsius x , cuius differentiale sit $= Xdx$; huius ergo integrale, quod ita indicari solet $\int Xdx$, praebebit functionem quaesitam.

COROLLARIUM 3

43. Quodsi P fuerit eiusmodi functio ipsius x , ut eius differentiale dP sit $= Xdx$, quoniam. quantitatis $P + C$ idem est differentiale, formulae propositae Xdx integrale completum est $P + C$.

Definição:

A fórmula de um diferencial seria racional, quando o diferencial dx da variável x cuja função seria procurada, fosse multiplicada por uma função racional de x , ou seja, X designaria essa função racional de x , a fórmula Xdx do diferencial seria racional.

Corolário 1:

Por isso, neste capítulo, buscou-se uma função de x , X , tal que: $\frac{dy}{dx} = X$

Corolário 2:

Euler obteve uma função de x cuja diferença seria igual a Xdx , portanto a integral $\int Xdx$ forneceria a função procurada.

Corolário 3:

Se P fosse uma função de x , de modo que o diferencial $dy = Xdx$, e como a quantidade $P+C$ seria o mesmo diferencial. Logo, a integral completa Xdx seria $P+C$ com C uma constante arbitrária.

Volume I; Seção II; Capítulo I

Nesta Seção, Euler apresentou seus estudos com constantes arbitrárias, separação por variáveis e quando isto não era possível, utilizou um fator integrante que possibilitasse essa separação por variáveis. A solução da equação de Riccati apareceu também nessa Seção.

PROBLEMA 49

402. *Aequationem differentialem, in qua variables sunt separatae, integrare seu aequationem inter ipsas variables invenire.*

SOLUTIO

Aequatio separationem variabilium admittens semper ad hanc formam $Ydy = Xdx$ reducitur, ubi Xdx tanquam differentiale functionis cuiusdam ipsius x et Ydy tanquam differentiale functionis cuiusdam ipsius y spectari potest. Cum igitur differentialia sint aequalia, eorum integralia quoque aequalia esse vel quantitate constante differre necesse est. Integrentur ergo per praecepta superioris sectionis seorsim ambae formulae seu quaerantur integralia $\int Ydy$ et $\int Xdx$, quibus inventis erit utique $\int Ydy = \int Xdx + \text{Const.}$, qua aequatione relatio finita inter quantitates x et y exprimitur.

Para integração de uma equação com variáveis separadas: $\int Y dy = \int X dx + C$

Apareceu uma constante arbitrária C .

PROBLEMA 50

406. *Aequationem differentialem $Pdx = Qdy$, in qua P et Q sint functiones homogeneae eiusdem dimensionum numeri ipsarum x et y , ad separationem variabilium reducere eiusque integrale invenire.*

SOLUTIO

Cum P et Q sint functiones homogeneae ipsarum x et y eiusdem dimensionum numeri, erit $\frac{P}{Q}$ functio homogenea nullius dimensionis, quae ergo posito $y = ux$ abit in functionem ipsius u . Ponatur igitur $y = ux$ abeatque $\frac{P}{Q}$ in U functionem ipsius u , ita ut sit $dy = Udx$. Sed ob $y = ux$ fit $dy = udx + xdu$ qua substitutione nostra aequatio induet hanc formam $udx + xdu = Udx$ inter binas variables x et u , quae manifesto sunt separabiles. Nam dispositis terminis dx continentibus ad unam partem habetur $xdu = (U - u)dx$ ideoque

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{U-u}$$

quae integrata dat $\ln x = \int \frac{du}{U-u}$ ita ut iam ex variabili u determinetur x , unde porro cognoscitur $y = ux$.

Nesse problema, dada a equação $Pdx=Qdy$ onde P e Q eram funções homogêneas de x e y de mesmas dimensões.

$y=ux$ seria função de u .

Se $\frac{P}{Q}$ que mudou para a função U de u e se tornou:

$$dy=Udx$$

Se $y=ux$ então $dy=udx+xdu$ e substituindo $dy=Udx$

Obtém-se:

$$Udx=udx+xdu$$

$$xdu=(U-u)dx$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{(U-u)}$$

$$\ln(x) = \frac{\int du}{(U-u)}$$

E como $y=ux$

$$\ln(y) = \ln(u) + \ln(x)$$

$$\ln(y) = \ln(u) + \int \frac{du}{(U-u)}$$

$$\ln(y) = \int \frac{du}{u} + \int \frac{du}{(U-u)}$$

$$\ln(y) = \int \frac{Udu}{u(U-u)}.$$

Volume I; Seção II ; Capítulo II

Euler definiu seu novo método, a procura de um multiplicador adequado que permitisse que uma equação diferencial se tornasse uma diferencial exata e pudesse ser integrada.

PROBLEMA 58

443. *Propositam aequationem differentialem examinare, utrum per se sit integrabilis necne.*

SOLUTIO

Dispositis omnibus aequationis terminis ad eandem partem signi aequalitatis, ut huiusmodi habeatur forma $Pdx + Qdy = 0$, aequatio per se erit integrabilis, si formula $Pdx + Qdy$ fuerit verum differentiale functionis cuiuspiam binarum variabilium x et y . Hoc autem evenit, uti in *Calculo Differentiali* ostendimus, si differentiale ipsius P sumta sola y variabili ad dy eandem habeat rationem ac differentiale ipsius Q sumta sola x variabili ad dx , seu adhibito signandi modo, quo in *Calculo Differentiali* sumus usi, si fuerit

$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right).$$

Nam si Z sit ea functio, cuius differentiale est $Pdx + Qdy$, erit hoc signandi modo hinc ergo sequitur

$$P = \left(\frac{dZ}{dx}\right) \text{ et } Q = \left(\frac{dZ}{dy}\right);$$

hinc ergo sequitur

$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{ddZ}{dx dy}\right) \text{ et } \left(\frac{dQ}{dx}\right) = \left(\frac{ddZ}{dy dx}\right).$$

At est

$$\left(\frac{ddZ}{dx dy}\right) = \left(\frac{ddZ}{dy dx}\right),$$

unde colligitur

$$\left(\frac{dP}{dy}\right) = \left(\frac{dQ}{dx}\right).$$

A função Z é tal que $dZ = Pdx + Qdy$.

sciamus esse $dZ = Pdx + Qdy$, haud difficulter praestabitur. Nam quia sumta tantum x variabili et altera y ut constante spectata est $dZ = Pdx$, habemus hic formulam differentialem simplicem unicam variabilem x involventem, quae per praecepta superioris sectionis integrata dabit $Z = \int Pdx + \text{Const.}$, ubi autem notandum est in hac constante quantitatem hic pro constanti habitam y utcunque inesse posse, unde eius loco scribatur Y ut sit

$$Z = \int Pdx + Y.$$

Deinde simili modo x pro constante habeatur spectata sola y ut variabili, et cum sit $dZ = Qdy$, erit quoque $Z = \int Qdy + \text{Const.}$, quae constans autem quantitatem x involvet, ita ut sit functio ipsius x , qua posita X erit

$$Z = \int Qdy + X.$$

Euler procurou Z constante tal que $dZ = Pdx + Qdy$ e considerou primeiramente y constante obtendo: $dZ = Pdx$ logo $Z = \int Pdx + C$ no entanto, essa constante envolvia algum y consequentemente Y : $Z = \int Pdx + Y$.

Analogamente fazendo x constante: $Z = \int Qdy + X$.

Finalizando: $\int Pdx - \int Qdy = X - Y$.

THEOREMA

459. *Pro omni aequatione, quae per se non est integrabilis, semper datur quantitas, per quam ea multiplicata redditur integrabilis.*

DEMONSTRATIO

Sit $Pdx + Qdy = 0$ aequatio differentialis et concipiamus eius integrale completum, quod erit aequatio quaedam inter x et y , in quam constans quantitas arbitraria ingrediatur. Ex hac aequatione eruatur haec ipsa constans arbitraria, ut prodeat huiusmodi aequatio

$$\text{Const.} = \text{functioni cuidam ipsarum } x \text{ et } y,$$

quae differentiata praebeat

$$0 = Mdx + Ndy;$$

quae aequatio iam a constante illa arbitraria per integrationem ingressa est libera ideoque necesse est, ut haec aequatio differentialis conveniat cum proposita, alioquin integrale suppositum non esset verum. Oportet ergo, ut relatio inter dx et dy utrinque prodeat eadem, unde erit

$$\frac{P}{Q} = \frac{M}{N}$$

ideoque

$$M = LP \quad \text{et} \quad N = LQ.$$

Sed quia $Mdx + Ndy$ est verum differentiale ex differentiatione cuiuspiam functionis ipsarum x et y ortum, est $\left(\frac{dM}{dy}\right) = \left(\frac{dN}{dx}\right)$. Quare pro aequatione $Pdx + Qdy = 0$ dabitur certo quidam multiplicator L , ut sit

Euler considerou agora, uma equação diferencial não exata, que precisava ser integrada. Euler procurava um fator multiplicador para que a tornasse integrável: $0 = Pdx + Qdy$.

Euler queria uma constante arbitrária que fosse uma função de x e y tal que diferenciando chegasse a:

$$0 = Mdx + Ndy$$

$$\text{Com isso: } \frac{P}{Q} = \frac{M}{N}$$

$$M = LP \quad \text{e} \quad N = LQ$$

Como

$$0 = Mdx + Ndy \quad \text{exata}$$

$$\frac{dM}{dx} = \frac{dQ}{dy}$$

$$\frac{dLP}{dx} = \frac{dLQ}{dy}.$$

Volume II; Seção I ; Capítulo I

Ele considerou $dy = p dx$ e $dp = q dx$ e q função de p para procurar a relação entre as variáveis a relação entre as variáveis x e y .

PROBLEMA 92

719. Posito $dy = p dx$ et $dp = q dx$ si q aequetur functioni cuicunque ipsius p , invenire relationem inter ipsas variables x et y .

SOLUTIO

Sit ergo $q = P$ denotante P functionem quamcunque ipsius p ; quoniam igitur est $q = \frac{dp}{dx}$, erit $dp = P dx$ hincque $dx = \frac{dp}{P}$ et $dy = p dx = \frac{p dp}{P}$. Ex quo consequimur integrando

$$x = a + \int \frac{dp}{P} \quad \text{et} \quad y = b + \int \frac{p dp}{P},$$

ita ut tam x quam y per eandem novam variabilem p determinetur. Atque cum duae novae constantes a et b per duplicem integrationem sint introductae, hoc integrale pro completo erit habendum.

Considerando $q = P$ com P função de p , então $q = \frac{dp}{dx}$ e $dp = P dx$

consequentemente $dx = \frac{dp}{P}$ e $dy = p dx = \frac{p dp}{P}$. Integrando Euler obteve: $x = a + \int \frac{dp}{P}$ e

$y = b + \int \frac{p dp}{P}$ duas constantes a e b são obtidas. Ele observou que as duas variáveis

poderiam ser obtidas com a mesma variável p . Então a integral seria completa.

SCHOLION

724. Cum scilicet aequatio differentio-differentialis duplici integratione indigeat, si utraque omni extensione instituat, duae novae constantes arbitrariae introducuntur; in quo criterium, num huiusmodi integrale sit completum, consistit. Quemadmodum enim aequationum differentialium primi gradus integratio completa unam constantem arbitrariam implicat, ita, si aequatio differentialis fuerit secundi gradus, binae constantes novae in integrale completum ingredientur, ternae autem ac plures, si aequatio differentialis fuerit tertii altiorisve gradus. Problemata autem, quorum resolutio ad huiusmodi aequationes differentiales altiorum graduum deducunt, natura sua ita sunt comparata, ut solutionis determinatio totidem constantes requirat. Ita in aequatione $q = f$ seu sumto dx constante $ddy = f dx^2$ aequatio integralis completa $y = \frac{1}{2} f x^2 + Cx + D$ duas constantes novas C et D involvit, quod etiam in subiunctis exemplis patebit.

Se $q = f$ e considerando dx constante:

Na equação:

$$ddy = f dx^2 \quad dx \text{ constante e utilizando } p = \frac{dy}{dx} \text{ e } q = \frac{dp}{dx}$$

Na primeira integração apareceu C e na segunda integração D e a integração completa:

$$y = \frac{1}{2} x^2 f + Cx + D \text{ onde } C \text{ e } D \text{ eram constantes arbitrárias.}$$

EXEMPLUM 1

725. *Aequationis differentio-differentialis addy = dx dy, in qua elementum dx constans est sumtum, integrale completum invenire.*

Posito $dy = p dx$ et $dp = q dx$ erit $ddy = q dx^2$ hincque $aq = p$ et $P = \frac{p}{a}$.
Quocirca integratio praebet

$$x = \int \frac{adp}{p} = C + a \ln p \quad \text{et} \quad y = \int adp = D + ap.$$

Cum igitur sit $p = \frac{y-D}{a}$, erit

$$x = C + a \ln \frac{y-D}{a},$$

quae est aequatio integralis completa binas constantes C et D involvens.

Na equação diferencial: $addy = dx dy$ são dados: $dy = p dx$, $dp = q dx$ e dx constante.

Então $ddy = dp dx$ e $adp dx = dx dy$ que dividindo por dx que era constante:

$$y = \int adp = D + ap \quad \text{e} \quad p = \frac{y-D}{a}.$$

Como $addy = dx dy = a q dx^2$

$$addy = dx p dx = a q dx^2 \quad \text{portanto} \quad p = a q$$

Logo:

$$x = \int \frac{dp}{q} + C = \int \frac{dp}{p} a + C = C + a \ln p$$

Ou ainda:

$$x = C + a \ln \frac{(y-D)}{a} \text{ com duas constantes arbitrárias.}$$

SCHOLION

799. Operae igitur pretium erit eos casus perpendere, quibus aequatio $vdu = pdp - udp$ integrationem admittit; quamobrem examinemus, qualis functio v debeat esse ipsarum p et u , ut hoc eveniat. Primum autem patet hoc fieri, si v fuerit functio homogenea unius dimensionis ipsarum p et u , quoniam tum ipsa haec aequatio fit homogenea ac per regulas supra expositas ad integrationem perducere potest. Deinde etiam integratio succedit, si fuerit v functio quaecunque ipsius p , quoniam tum altera variabilis u unam dimensionem non superat et aequationis $du + \frac{udp}{v} = \frac{pdp}{v}$ integrale est

$$e^{\int \frac{dp}{v}} u = \int e^{\int \frac{dp}{v}} \frac{pdp}{v}$$

Tertio integrationem absolvere licebit, si v fuerit functio quaecunque quantitatis $p - u$. Posito enim $p - u = s$, ut sit v functio ipsius s , ob $p = s + u$ nostra aequatio erit $vdu = sds + sdu$ ideoque $du = \frac{sds}{(v-s)}$ et $u = \int \frac{sds}{(v-s)}$, quae integratio adeo ad formulas simplices est referenda. Quarto manente $s = p - u$ si P, Q, R denotent functiones quascunque ipsius s , aequatio nostra $vdu = sds + sdu$ tractari poterit, si fuerit $v = s + \frac{Ps}{Qu + Ru^n}$; tum enim fit $Pdu = Quds + Ru^n ds$. Quinto etiam patet, si denotantibus V et U functiones quascunque ipsius u fuerit $v = s + Vss + Us^n$, integrationem quoque fore in potestate; fit enim aequatio nostra $Vsdu + Us^{n-1} du = ds$. Atque in genere si aequatio differentialis $ds = Zdu$ fuerit integrabilis existente Z functione binarum variabilium s et U , cum nostra aequatio sit $sds = (v - s)du$, habebimus $v = s + Zs$ pro omnibus casibus integrationem admittentibus.

Nesse item apareceu o fator integrante para a equação diferencial de primeira ordem que foi reduzida a partir de uma equação de segunda ordem.

A equação é:

$$vdu = pdp - udp$$

Que rearrajando tornou-se:

$$du + \frac{udp}{v} = \frac{pdp}{v} \quad \text{cujo fator integrante é } e^{\int \frac{dp}{v}}.$$

Volume II Seção I Cap IV

Neste Volume, duas soluções (não múltiplas entre si) formariam a integral completa.

THEOREMA

837. Sumto elemento dx constante si aequationi differentio-differentiali

$$ddy + Pdx dy + Qy dx^2 = 0$$

satisfaciant integralia particularia $y = M$ et $y = N$, ita ut ratio $M:N$ non sit constans, erit eius integrale completum $y = \alpha M + \beta N$.

DEMONSTRATIO

Cum valores $y = M$ et $y = N$ satisfaciant aequationi propositae, erit

$$ddM + Pdx dM + QM dx^2 = 0 \quad \text{et} \quad ddN + Pdx dN + QN dx^2 = 0,$$

unde patet ponendo $y = \alpha M + \beta N$ aequationi quoque satisfieri, cum fiat

$$\alpha (ddM + Pdx dM + QM dx^2) + \beta (ddN + Pdx dN + QN dx^2) = 0.$$

Quoniam vero hoc integrale $y = \alpha M + \beta N$ duas constantes α et β complectitur, quas pro lubitu definire licet, id completum sit necesse est, nisi forte N sit multipulum ipsius M .

Dadas duas integrais particulares onde a razão entre elas não era constante, ou seja, não eram múltiplas, Euler obteve a equação integral completa.

As duas integrais particulares não eram múltiplas, ou seja, eram linearmente independentes no entendimento atual, então a integral completa seria a combinação linear dessas duas integrais particulares ou soluções. No caso de duas integrais particulares ou soluções, a razão entre elas não ser uma constante, equivale a dizer que não são múltiplas, ou ainda que são linearmente independentes.

COROLLARIUM 2

839. Cum posito $y = e^{\int u dx}$ seu $u = \frac{dy}{y dx}$ prodeat

$$du + u u dx + P u dx + Q dx = 0,$$

si huic aequationi satisfaciant valores $u = \frac{dM}{M dx}$ et $u = \frac{dN}{N dx}$, eidem quoque

satisfaciet valor $u = \frac{\alpha dM + \beta dN}{(\alpha N + \beta M) dx}$.

Nesse Corolário, uma integral particular da equação diferencial $ddy + Pxdy + Qydx^2 = 0$ seria $y = e^{\int u dx}$ que substituída na equação diferencial reduz sua ordem para a equação diferencial em u de 1ª ordem $du + udx + Pudx + Qdx = 0$.

Agora Euler, substituiu $y = \alpha M + \beta N$ na derivada de $y = e^{\int u dx}$, ou seja,

$$\frac{dy}{ydx} = u \text{ o que resultou em } u = \frac{\alpha dM + \beta dN}{(\alpha M + \beta N) dx}.$$

COROLLARIUM 3

840. Si ergo aequationis $du + udx + Pudx + Qdx = 0$ habeantur duo integralia particularia $u = R$ et $u = S$, ob $M = e^{\int R dx}$ et $N = e^{\int S dx}$ integrale completum erit

$$u = \frac{\alpha e^{\int R dx} R + \beta e^{\int S dx} S}{\alpha e^{\int R dx} + \beta e^{\int S dx}} \text{ sive } u = R + \frac{\beta e^{\int S dx} (S - R)}{\alpha e^{\int R dx} + \beta e^{\int S dx}}$$

Euler substituiu $M = e^{\int R dx}$ e $N = e^{\int S dx}$ na expressão do corolário anterior

$$u = \frac{\alpha dM + \beta dN}{(\alpha M + \beta N) dx}.$$

PROBLEMA 102

842. Sumto elemento dx constante invenire integrale completum huius aequationis differentio- differentialis

$$ddy + A dy dx + B y dx^2 = 0.$$

SOLUTIO

Posito $y = e^{\int u dx}$ prodit haec aequatio

$$du + udx + Audx + Bdx = 0$$

sive

$$dx = \frac{-du}{uu + Au + B},$$

cui satisfit tribuendo ipsi u eiusmodi valorem constantem, ut evadat $uu + Au + B = 0$, qui sunt

$$u = -\frac{1}{2}A \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}AA - B\right)}$$

Esse problema possibilitou a resolução da equação algébrica correspondente.

Hinc ergo cum habeantur bina integralia particularia $y = e^{\int u dx}$, posito

$\sqrt{\left(\frac{1}{4}AA - B\right)} = n$ erit integrale completum

$$y = e^{-\frac{1}{2}Ax} (\alpha e^{nx} + \beta e^{-nx}),$$

ac si sit n numerus imaginarius, puta $n = m\sqrt{-1}$, erit

$$y = e^{-\frac{1}{2}Ax} (\alpha \cos mx + \beta \sin mx) = Ce^{-\frac{1}{2}Ax} \sin(mx + \gamma).$$

Sin autem sit $n = 0$, prodibit

$$y = e^{-\frac{1}{2}Ax} (\alpha + \beta x).$$

COROLLARIUM 1

843. Ad integrale ergo aequationis propositae inveniendum resolvi oportet aequationem algebraicam

$$uu + Au + B = 0,$$

quae oritur ex proposita $ddy + A dy dx + B y dx^2 = 0$, si loco y , dy , ddy scribatur

u^0, u^1, u^2 et elementum dx reiiciatur; tum enim binae radices illius aequationis dabunt integrale completum.

No item 842, dada a equação:

$$ddy + A dy dx + B y dx^2 = 0$$

Que se tornou $du + u^2 dx + A u dx + B dx = 0$ pela substituição de $y = e^{\int u dx}$ e considerando $ddx = 0$.

Que rearranjando tornou-se:

$$dx = -\frac{du}{(u^2 + Au + B)} \text{ observando o denominador e verificando que } u \text{ seria}$$

constante, portanto, $\frac{du}{dx} = 0$ então $u^2 + Au + B = 0$.

Euler resolveu como equação de 2º grau e obteve:

$$e \quad u = -\frac{1}{2}A \pm \sqrt{\frac{1}{4}AA - B} \text{ substituindo em } y = e^{\int u dx}$$

Ele utilizou a ideia de que a combinação linear de duas integrais particulares, não múltiplas, era integral completa da equação diferencial de 2ª ordem em u .

$$y = e^{-\frac{1}{2}Ax} (\alpha e^{nx} + \beta e^{-nx}) \text{ fazendo } n = \sqrt{\frac{1}{4}AA - B}$$

Se $n = 0$ então $y = e^{-\frac{1}{2}Ax} (\alpha + \beta x)$.

Nesse caso, haviam duas raízes iguais, ou seja, o valor $n = \sqrt{\left(\frac{1}{4}A^2 - B\right)} = 0$.

Um dos valores então encontrado seria: $y = e^{-\frac{1}{2}Ax}$.

Para encontrar o outro valor, Euler sabia que não poderia ser um valor múltiplo.

Considerando $y_1 = e^{-\frac{1}{2}Ax}$ e utilizando o Método de D'Alembert a outra solução seria $y_2 = ky_1$, onde k uma função da variável independente x .

Considerando $y_1 = e^{-\frac{1}{2}Ax}$ utilizando o Método de D'Alembert e chamando a outra solução de $y_2 = ky_1$, ele substituiu na equação diferencial homogênea $ddy + Adydx + Bydx^2 = 0$ e obteve:

$k''y_1 = 0$ então $k'' = 0$ e consequentemente:

$k = c_1x + c_2$ e como $y_2 = ky_1$ então $y = e^{-\frac{1}{2}Ax}(\alpha + \beta x)$.

Euler também considerou as raízes imaginárias, caso $n = \sqrt{\left(\frac{1}{4}AA - B\right)} < 0$ pois já eram conhecidas dele a relação que hoje é chamada de *relação de Euler* $e^{iw} = \cos w + i \sin w$ e neste corolário $n = \sqrt{-1}m$

$$y_1 = e^{-\frac{1}{2}Ax} \cdot (\cos mx + i \sin mx)$$

$$y_2 = e^{-\frac{1}{2}Ax} \cdot (\cos mx - i \sin mx)$$

Como já era entendido por Euler, combinação linear de duas soluções da equação diferencial homogênea é também solução da equação diferencial.

$y = e^{-\frac{1}{2}Ax} \cdot (\alpha \cos mx + \beta \sin mx)$ era solução.

No corolário do item 843, Euler ratificou a ideia de tratar $ddy + Adydx + Bydx^2 = 0$ substituindo y, dy, ddy por u^0, u^1, u^2 resultando $u^2 + Au + B = 0$.

PROBLEMA 104

851. *Sumto elemento dx constante si P , Q et X denotent functiones quascunque ipsius x , integrationem huius aequationis differentio-differentialis*

$$ddy + Pdydx + Qydx^2 = Xdx^2$$

ad aequationem differentialem primi ordinis reducere.

SOLUTIO

Para redução de ordem de uma equação diferencial de 2ª ordem, Euler procedeu da seguinte forma:

Considerou v uma integral particular da equação diferencial de 2ª ordem homogênea e $y=uv$ a solução da equação diferencial de 2ª ordem não homogênea $ddy + Pdydx + Qydx^2 = Xdx^2$ onde u é dependente de x , ou seja, $du = sdx$.

Substituindo $y=uv$ em $ddy + Pdydx + Qydx^2 = Xdx^2$ e considerando v solução da equação homogênea:

$$ddv + Pdvdv + Qvdx^2 = 0 \quad \text{e} \quad 2dudv + vddu + Pvdxdv = Xdx^2, \text{ substituindo ainda}$$

$$du = sdx \text{ em } 2dudv + vddu + Pvdxdv = Xdx^2 \text{ chega-se a equação diferencial de 1ª}$$

ordem: $vds + 2sdv + Psvdx = Xdx$ e utilizando o fator integrante $ve^{\int Pdx}$ obtém-se

$$s = \frac{e^{-\int Pdx}}{vv} \int e^{\int Pdx} Xvdx \quad \text{e} \quad u = \int \frac{e^{-\int Pdx}}{vv} dx \int e^{\int Pdx} Xvdx.$$

SCHOLION

860. In genere autem si huiusmodi aequationis

$$ddy + A dy dx + B y dx^2 = X dx^2$$

constet integrale particulare seu valor ipsi satisfaciens $y = t$, integrale completum facile reperitur ponendo $y = t + z$. Cum enim per hypothesin sit

$$ddt + A dt dx + B t dx^2 = X dx^2$$

facta hac substitutione orietur

$$ddz + A dz dx + B z dx^2 = 0,$$

unde, si $A = f + g$ et $B = fg$, colligitur $z = \alpha e^{-fx} + \beta e^{-gx}$ sicque integrale completum erit

$$y = t + \alpha e^{-fx} + \beta e^{-gx}$$

quemadmodum etiam in exemplo allato invenimus.

Dada uma equação diferencial:

$$ddy + A dy dx + B y dx^2 = X dx^2 \text{ e sabendo que uma integral particular era } y = t \text{ então } ddt + A dt dx + B t dx^2 = X dx^2.$$

Se $y = t + z$ fosse a integral completa, substituindo em $ddy + A dy dx + B y dx^2 = X dx^2$ obteve $ddz + A dz dx + B z dx^2 = 0$ que se tratava de equação diferencial homogênea, ou seja, z é solução.

Dadas duas soluções da equação diferencial homogênea em z , $t_1 = -f$ e $t_2 = -g$ $A = -(f + g)$ e $B = fg$ onde A , é o simétrico da soma das raízes da equação de 2º grau e B o produto.

$$\text{A solução da equação diferencial: } z = \alpha e^{-fx} + \beta e^{-gx}$$

$$\text{Substituindo em } y = t + z, \text{ Euler obteve: } y = t + \alpha e^{-fx} + \beta e^{-gx}$$

Volume II Seção II Cap II

PROBLEMA 144

1117. Aequationis differentialis tertii gradus

$$Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2} + \frac{Dd^3y}{dx^3} = 0$$

sumto elemento dx constante integrale completum invenire.

SOLUTIO

Cum A, B, C, D sint quantitates constantes, levi attentione adhibita patet isti aequationi huiusmodi formam $y = e^{\lambda x}$ satisfacere; cum enim hinc sit

$$\frac{dy}{dx} = \lambda e^{\lambda x}, \quad \frac{ddy}{dx^2} = \lambda^2 e^{\lambda x}, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = \lambda^3 e^{\lambda x},$$

his substitutis et aequatione per $e^{\lambda x}$ divisa fit

$$A + \lambda B + \lambda^2 C + \lambda^3 D = 0,$$

unde exponens λ determinatur; qui cum tres valores sortiatur, qui sint α, β, γ , habebimus tres formulas satisfacientes

$$y = e^{\alpha x}, \quad y = e^{\beta x}, \quad y = e^{\gamma x}.$$

Verum ex natura aequationis propositae perspicuum est, si ei satisfaciant valores $y = P, y = Q, y = R$, etiam his utcumque coniungendis satisfacturum $y = \mathfrak{A}P + \mathfrak{B}Q + \mathfrak{C}R$. Quare ex ternis formulis inventis nanciscimur hanc latissime patentem aequae satisfacientem

Euler resolve uma equação diferencial homogênea de 3ª ordem

$$Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2} + \frac{Dd^3y}{dx^3} = 0 \text{ com } dx \text{ constante e } A, B, C, D \dots \text{ constantes utilizando}$$

equação característica. Considerou uma solução do tipo $y = e^{\lambda x}$, verificando que satisfazia a equação diferencial fazendo as substituições.

$$\frac{dy}{dx} = \lambda e^{\lambda x}, \quad \frac{ddy}{dx^2} = \lambda^2 e^{\lambda x}, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = \lambda^3 e^{\lambda x}.$$

Dividindo por $e^{\lambda x}$ torna-se:

$A + \lambda B + \lambda^2 C + \lambda^3 D = 0$ e considerando três valores encontrados para λ , α , β e

γ , então: $y = e^{\alpha x}$, $y = e^{\beta x}$ e $y = e^{\gamma x}$ deveriam satisfazer a equação diferencial.

Logo: $y = Xe^{\alpha x} + Ye^{\beta x} + Ze^{\gamma x}$ com X, Y, Z constantes arbitrárias que formariam a integral completa.

PROBLEMA 145**1125.** *Aequationis differentialis cuiuscunque gradus*

$$Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2} + \frac{Dd^3y}{dx^3} + \frac{Ed^4y}{dx^4} + \text{etc.} = 0$$

*sumto elemento dx constante integrale completum invenire.***SOLUTIO**

Et huic aequationi evidens est satisfacere formulam $y = e^{\lambda x}$; cum enim hinc sit $\frac{dy}{dx} = \lambda e^{\lambda x}$, $\frac{ddy}{dx^2} = \lambda^2 e^{\lambda x}$, $\frac{d^3y}{dx^3} = \lambda^3 e^{\lambda x}$, et in genere $\frac{d^n y}{dx^n} = \lambda^n e^{\lambda x}$, facta substitutione pervenietur ad hanc aequationem, postquam scilicet per $e^{\lambda x}$ diviserimus,

$$A + B\lambda + C\lambda^2 + D\lambda^3 + E\lambda^4 + \text{etc.} = 0,$$

ex qua valorem ipsius λ definiri oportet. Hinc littera λ totidem valores obtinebit, quoti fuerit ordinis aequatio differentialis proposita, quorum singuli aequationi aequae satisficient. Qui valores si sint $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ etc., integralia quidem particularia erunt

$$y = \mathfrak{A}e^{\alpha x}, \quad y = \mathfrak{B}e^{\beta x}, \quad y = \mathfrak{C}e^{\gamma x} \quad \text{etc.}$$

Verum ex ipsa aequationis natura perspicuum est aggregata quotcunque horum valorum ideoque etiam omnium perinde satisfacere. Cum igitur aggregatum omnium

$$y = \mathfrak{A}e^{\alpha x} + \mathfrak{B}e^{\beta x} + \mathfrak{C}e^{\gamma x} + \mathfrak{D}e^{\delta x} + \text{etc.}$$

tot complectatur constantes arbitrias $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$ etc., quoti ordinis differentialis est aequatio proposita, quin haec forma eius sit integrale completum, dubitari nequit.

Dada uma equação diferencial de qualquer grau, ordem,

$$Ay + \frac{Bdy}{dx} + \frac{Cddy}{dx^2} + \frac{Dd^3y}{dx^3} + \frac{Ed^4y}{dx^4} + \dots = 0 \quad \text{evidentemente } y = e^{\lambda x} \text{ satisfaria a equação e}$$

consequentemente :

$$\frac{dy}{dx} = \lambda e^{\lambda x}, \quad \frac{ddy}{dx^2} = \lambda^2 e^{\lambda x}, \quad \frac{d^3y}{dx^3} = \lambda^3 e^{\lambda x} \quad \dots \quad \frac{d^n y}{dx^n} = \lambda^n e^{\lambda x} \quad \text{que resultaria em:}$$

$$A + \lambda B + \lambda^2 C + \lambda^3 D + \lambda^4 E + \dots = 0$$

Então se considerados valores de λ , $\alpha, \beta, \dots$ seriam as integrais particulares

$$y = Xe^{\alpha x}, \quad y = Ye^{\beta x} \quad \text{e} \quad y = Ze^{\gamma x} \quad \dots \text{e seria evidente que a somatória também deveria}$$

satisfazer a equação diferencial. Logo: $y = Xe^{\alpha x} + Ye^{\beta x} + Ze^{\gamma x} + \dots$ com $X, Y, Z \dots$ as constantes arbitrarias que formariam a integral completa.

APÊNDICE VII *Solution de Différents Problèmes* (1766)

11. Soit l'équation

$$L y + M \frac{dy}{dt} + N \frac{d^2 y}{dt^2} = T,$$

pour laquelle on connaît deux valeurs particulières de y dans le cas de $T = 0$.

On aura d'abord l'équation en z (3)

$$z \left[\left(M - \frac{dN}{dt} \right) y + N \frac{dy}{dt} \right] - \frac{dz}{dt} N y = \text{const.};$$

donc, supposant que y_1 et y_2 soient les deux valeurs de y qui satisfont à l'équation

$$L y + M \frac{dy}{dt} + N \frac{d^2 y}{dt^2} = 0,$$

on aura

$$z \left[\left(M - \frac{dN}{dt} \right) y_1 + N \frac{dy_1}{dt} \right] - \frac{dz}{dt} N y_1 = A,$$

$$z \left[\left(M - \frac{dN}{dt} \right) y_2 + N \frac{dy_2}{dt} \right] - \frac{dz}{dt} N y_2 = B,$$

A et B étant deux constantes arbitraires.

476 SOLUTION DE DIFFÉRENTS PROBLÈMES

On tire de ces deux équations

$$z = \frac{A y_1 - B y_2}{N \left(y_2 \frac{dy_1}{dt} - y_1 \frac{dy_2}{dt} \right)}.$$

Soit d'abord $A = 0$, on aura

$$z = - \frac{B}{N} \frac{y_2}{y_2 \frac{dy_1}{dt} - y_1 \frac{dy_2}{dt}} = z_1;$$

soit ensuite $B = 0$, on aura

$$z = \frac{A}{N} \frac{y_1}{y_2 \frac{dy_1}{dt} - y_1 \frac{dy_2}{dt}} = z_2.$$

Ayant deux valeurs de z , savoir z_1 et z_2 , on les substituera successivement dans l'équation (C), et l'on aura

$$y \left(M z_1 - \frac{dN z_1}{dt} \right) + \frac{dy}{dt} N z_1 = \int T z_1 dt,$$

$$y \left(M z_2 - \frac{dN z_2}{dt} \right) + \frac{dy}{dt} N z_2 = \int T z_2 dt;$$

d'où l'on tire

$$(F) \quad y = \frac{z_2 \int T z_1 dt - z_1 \int T z_2 dt}{N \left(z_1 \frac{dz_2}{dt} - z_2 \frac{dz_1}{dt} \right)}.$$

C'est la valeur générale et complète de y qui satisfait à l'équation proposée.

Si l'on ne connaissait que la valeur y_1 , on aurait simplement l'équation

$$z \left[\left(M - \frac{dN}{dt} \right) y_1 + N \frac{dy_1}{dt} \right] - \frac{dz}{dt} N y_1 = A,$$

laquelle étant intégrée donnerait

$$z = e^{\int \left(\frac{M}{N} - \frac{dN}{N dt} + \frac{dy_1}{y_1 dt} \right) dt} \left[\text{const.} - A \int \frac{e^{-\int \left(\frac{M}{N} - \frac{dN}{N dt} + \frac{dy_1}{y_1 dt} \right) dt}}{N y_1} dt \right]$$

478 SOLUTION DE DIFFÉRENTS PROBLÈMES

Or, k_1 et k_2 étant les racines de l'équation $L + Mk + Nk^2 = 0$, on aura

$$k_1 + k_2 = -\frac{M}{N};$$

donc

$$k_1 + \frac{M}{N} = -k_2 \quad \text{et} \quad M + 2Nk_1 = N(k_1 - k_2);$$

donc, en faisant $C = -\frac{B}{k_1 - k_2}$, les valeurs de z_1 et de z_2 seront les mêmes que ci-dessus.

Ces valeurs pourraient encore se trouver d'une manière plus simple par la remarque du n° 10. Car l'équation (B) sera, dans le cas présent,

$$Lz - M\frac{dz}{dt} + N\frac{d^2z}{dt^2} = 0;$$

d'où l'on tire

$$z = Fe^{k_1 t} = z_1 \quad \text{et} \quad z = Ge^{k_2 t} = z_2,$$

F, G étant deux constantes arbitraires, et k_1, k_2 les racines de l'équation $L - Mk + Nk^2 = 0$; de sorte qu'on aura

$$h_1 = -k_1 \quad \text{et} \quad h_2 = -k_2.$$

Lagrange supôs uma equação diferencial com coeficientes constantes L, M, N :

$$Ly + M\frac{dy}{dt} + N\frac{d^2y}{dt^2} = T$$

Ele multiplicou a equação diferencial por zdt , z uma variável indeterminada e encontrou duas constantes arbitrárias A e B , onde cada constante arbitrária seria função de um dos dois valores particulares y_1 ou y_2 que satisfaziam a equação diferencial quando $T=0$, ou que satisfaziam a equação diferencial homogênea.

Supôs dois valores particulares de y quando $T=0$.

Ele afirmou que $y_1 = e^{k_1 t}$ e $y_2 = e^{k_2 t}$ satisfaziam a equação diferencial homogênea e que k_1 e k_2 e que foram obtidos como raízes da equação $L + Mk + Nk^2 = 0$.

Lagrange verificou a necessidade de duas constantes arbitrárias e obteve dois valores particulares $y_1 = e^{k_1 t}$ e $y_2 = e^{k_2 t}$, não múltiplos, linearmente independentes na solução da equação diferencial homogênea correspondente.

APÊNDICE VIII Sur L'intégration d'une équation différentielle à différences finies qui contient la théorie des suites récurrentes (1769)

SUR L'INTÉGRATION
d'une
ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

À DIFFÉRENCES FINIES,
QUI CONTIENT LA THÉORIE DES SUITES RÉCURRENTES.

(Miscellanea Taurinensia, t. 1, 1769.)

1. Soit proposée l'équation différentielle

$$dy + yXdx = Zdx,$$

où X et Z expriment des fonctions quelconques de la variable x ; l'on sait que pour intégrer cette équation il suffit de faire

$$y = uz,$$

ce qui donne

$$udz + zdu + uzXdx = Zdx,$$

où l'on peut faire évanouir deux termes par une valeur convenable de u ou de z . Supposons donc

$$zdu + uzXdx = 0,$$

et divisant par z , on aura

$$du + uXdx = 0,$$

et par conséquent

$$\frac{du}{u} = -Xdx \quad \text{et} \quad \ln u = -\int Xdx,$$

savoir

$$u = e^{-\int Xdx},$$

où e est le nombre dont le logarithme hyperbolique est 1. Par cette supposition la proposée deviendra

$$udz = Zdx,$$

ce qui donne

$$dz = \frac{Zdx}{u}, \quad z = \int \frac{Zdx}{u} = \int e^{\int Xdx} Zdx,$$

et enfin

$$y = uz = \frac{\int e^{\int Xdx} Zdx}{e^{\int Xdx}}.$$

Lagrange resolveu a equação diferencial $dy + yXdx = Zdx$, onde X e Z eram funções de x . Tomou $y = uz$ e substituiu em $dy + yXdx = Zdx$ que retornou $udz + zdu + uzXdx = Zdx$.

Considerou valores convenientes de u e z obtendo $zdu + uzXdx = 0$. Dividiu por z conseguindo $du + uXdx = 0$.

Integrando: $u = e^{-\int Xdx}$ e como acima Lagrange considerou $udz = Zdx$ ele encontrou

$$z = \int e^{\int Xdx} Zdx \quad \text{e enfim} \quad y = \frac{\int e^{\int Xdx} Zdx}{e^{\int Xdx}}.$$

Ele considerou u solução da equação diferencial homogênea, termo atual, que satisfazia $du + uXdx = 0$ e induziu que uma solução y da equação diferencial não homogênea fosse $y = uz$, definindo o Método de Variação dos Parâmetros e das Constantes.

APÊNDICE IX *Recherches Sur lès suites recurrentes dont lès termes varient de plusieurs manieres différentes ou sur l'intégration dès équations linéaires aux différences finies partielles* (1775)

190 NOUVEAUX MÉMOIRES DE L'ACADÉMIE ROYALE

Mémoires de Turin. M. le Marquis de Condorcet & M. de la Place avoient déjà remarqué que ce théoreme sur les équations aux différences infiniment petites étoit aussi applicable aux cas des différences finies; & ce dernier en a donné une démonstration générale & ingénieuse, mais un peu compliquée (voyez le Tome IV. des Mémoires de Turin, & les Mémoires présentés à l'Académie des Sciences de Paris en 1773); c'est ce qui m'a engagé à traiter ici cette matiere par une méthode nouvelle & aussi simple qu'on puisse le désirer.

R E M A R Q U E.

5. Les principes de la méthode précédente peuvent s'appliquer aussi aux équations différentielles ordinaires, & sont en général d'un très grand usage dans tout le calcul intégral. Quoique ce ne soit pas ici le lieu de nous occuper de cette matiere, je vais néanmoins en traiter en peu de mots, me réservant de le faire ailleurs avec plus d'étendue.

Et d'abord, si l'on a une équation linéaire de l'ordre n telle que

$$Py + Q \frac{dy}{dx} + R \frac{d^2y}{dx^2} + \&c. + V \frac{d^n y}{dx^n} = X$$

où $P, Q, R \&c. V$, & X soient des fonctions données de x , & qu'on connoisse l'intégrale complete de cette équation dans le cas de $X = 0$, laquelle sera nécessairement de la forme

$$y = ap + bq + cr + \&c.$$

$a, b, c \&c.$ étant des constantes arbitraires au nombre de n , & $p, q, r \&c.$ des fonctions de x , où les constantes $a, b, c \&c.$ n'entrent pas, & qui sont autant de valeurs particulieres de y dans l'hypothese de $X = 0$; on en pourra déduire aisément l'intégrale complete de la proposée. Car en regardant les arbitraires $a, b, c \&c.$ comme des variables indéterminées, & supposant nulles dans les valeurs de $dy, d^2y, d^3y \&c. d^{n-1}y$ les parties qui dépendent de la variabilité de ces quantités $a, b, c \&c.$ on aura

$$dy = a dp + b dq + c dr + \&c.$$

$$0 = p da + q db + r dc + \&c.$$

$$d^2y = a d^2p + b d^2q + c d^2r + \&c.$$

$$0 = dp da + dq db + dr dc + \&c.$$

Lagrange considerou uma equação linear de ordem n com $P, Q, R \dots V$, funções de x e a integral completa da equação quando $X=0$ tem necessariamente a forma: $y=ap+bq+cr+\dots$, com $a, b, c \dots$ constantes arbitrárias num total de n e $p, q, r \dots$, funções de x . Considerou as arbitrárias $a, b, c \dots$ como variáveis indeterminadas e supôs nulos os valores de $dy, d^2y, d^3y \dots d^{n-1}y$.

$$d^2y = ad^2p + bd^2q + cd^2r + \&c.$$

$$0 = d^2pda + d^2qdb + d^2rdc + \&c.$$

&c.

$$d^{n-1}y = ad^{n-1}p + bd^{n-1}q + cd^{n-1}r + \&c,$$

$$0 = d^{n-1}pda + d^{n-1}qdb + d^{n-1}rdc + \&c.$$

ensuite

$$d^ny = ad^np + bd^nq + cd^nr + \&c.$$

$$+ d^{n-1}pda + d^{n-1}qdb + d^{n-1}rdc + \&c.$$

De cette manière on voit que les expressions de y , dy , d^2y &c. $d^{n-1}y$ ont la même forme que si a , b , c &c. étoient constantes, & que celle de d^ny ne diffère de ce qu'elle seroit dans ce cas que par les termes $d^{n-1}pda + d^{n-1}qdb + d^{n-1}rdc + \&c.$ qui y sont ajoutés; or comme dans le cas de a , b , c &c. constantes, les valeurs de y , dy , d^2y &c. d^ny satisfont par l'hypothèse à l'équation proposée lorsqu'on y suppose $X = 0$, quelles que soient d'ailleurs les valeurs de ces constantes, il est aisé de conclure que si on substitue dans cette équation les valeurs ci-dessus de y , dy , d^2y &c. d^ny , tous les termes s'y détruiront, à l'exception des termes de la valeur de d^ny qui dépendent de la variation des quantités a , b , c &c, & du terme X , qui avoit été supposé auparavant nul. De sorte qu'on aura, en divisant par V , l'équation

$$d^{n-1}pda + d^{n-1}qdb + d^{n-1}rdc + \&c. = \frac{X}{V} dx^n;$$

& cette équation étant combinée avec les $n - 1$ équations de condition

$$pda + qdb + rdc + \&c. = 0,$$

$$dpda + dqdb + drdc + \&c. = 0,$$

&c.

$$d^{n-2}pda + d^{n-2}qdb + d^{n-2}rdc + \&c. = 0,$$

on en tirera par les règles ordinaires de l'élimination les valeurs des n différentielles da , db , dc &c.; & de là on aura par l'intégration celles de

Assim ele obteve:

$$dy = adp + bdq + cdr + \dots$$

$$0 = pda + qdb + rdc + \dots$$

$$d^2y = ad^2p + bd^2q + cd^2r + \dots$$

$$0 = dpda + dqdb + dcd r + \dots$$

⋮

$$d^{n-1}y = ad^{n-1}p + bd^{n-1}q + cd^{n-1}r + \dots$$

$$0 = d^{n-2} p da + d^{n-2} q db + d^{n-2} r dc + \dots$$

$$d^n y = a d^n p + b d^n q + c d^n r + \dots d^{n-1} p da + d^{n-1} q db + d^{n-1} r dc + \dots$$

Um sistema com $n-1$ condições foram obtidas:

$$0 = p da + q db + r dc + \dots$$

$$0 = dp da + dq db + dc dr + \dots$$

$\vdots$

$$0 = d^{n-2} p da + d^{n-2} q db + d^{n-2} r dc + \dots$$

A última equação foi obtida substituindo os valores $y, dy, d^2 y, \dots, d^n y$ na equação diferencial:

$$P y + Q \frac{dy}{dx} + R \frac{d^2 y}{dx^2} + \dots V \frac{d^n y}{dx^n} = X$$

Resultando:

$$\frac{X}{V} dx^n = d^{n-1} p da + d^{n-1} q db + d^{n-1} r dc + \dots$$

Um sistema formado por $n-1$ condições obtidas envolvendo as derivadas das constantes $a, b, c \dots$ que foram substituídas por funções da variável independente x somando-se com a equação obtida acima, totalizou um sistema com n equações e n incógnitas, um sistema possível e determinado, como é chamado nos dias atuais.

APÊNDICE X *Essai sur La Représentation Analytique de La Direction* (1797)

§ 2.

Pour ajouter plus de deux segments, on suit la même règle: on les combine de façon que l'extrémité du premier coïncide avec le premier point du second, l'extrémité de celui-ci avec le premier point du troisième, etc.; puis on joint par un segment le point où le premier segment commence au point où le dernier se termine, et on appelle ce dernier segment la somme de tous les segments donnés.

Peu importe quel segment on prend pour le premier, quel pour le second, le troisième, etc. Car si un point décrit un segment de droite, ce segment aura le même effet sur les distances du point à trois plans perpendiculaires entre eux, quelle que soit sa situation par rapport aux plans; par conséquent, lorsqu'on ajoute plusieurs segments, la contribution de l'un d'eux à la détermination de la position de l'extrémité de la somme reste la même, que ce segment soit le premier, qu'il soit le dernier, ou qu'il occupe un autre rang quelconque. Par conséquent, dans l'addition des segments, l'ordre des termes est arbitraire, et la somme reste toujours la même, parce que, supposé donné son premier point, le dernier aura toujours la même position.

Pour cette raison on peut aussi dans ce cas représenter la somme en unissant par le signe $+$ les segments ajoutés. Par exemple, lorsqu'on a tiré dans un quadrilatère le premier côté de a à b , le second de b à c , le troisième de c à d , mais le quatrième de a à d , on aura $ad = ab + bc + cd$.

No parágrafo 2, Wessel adicionou segmentos. Num quadrilátero $abcd$, o segmento: $ad = ab + bc + cd$.

Ele designou $+1$ como uma unidade positiva retilínea e direção 0° e $+\varepsilon$ como uma unidade perpendicular positiva com mesma origem e direção 90° e as regras do produto considerando soma de ângulos.

10

§ 6.

Le cosinus d'un arc de cercle ayant pour origine l'extrémité de son rayon $+1$ est le segment de ce rayon ou du rayon diamétralement opposé qui commence au centre et se termine à la projection orthogonale de l'autre bout de l'arc. Le sinus du même arc est mené perpendiculairement de l'extrémité du cosinus à l'extrémité de l'arc.

D'après le § 5, le sinus d'un angle droit est donc égal à $\sqrt{-1}$. Posons $\sqrt{-1} = \varepsilon$; désignons par v un angle quelconque et par $\sin v$ un segment de la même longueur que le sinus de l'angle, mais positif lorsque l'arc qui mesure l'angle se termine sur la première demi-circonférence, négatif lorsqu'il se termine sur la dernière demi-circonférence. Alors d'après les §§ 4 et 5, $\varepsilon \sin v$ exprimera le sinus de l'angle v en direction et en grandeur.

§ 7.

Conformément aux §§ 1 et 6, le rayon qui commence au centre et dévie de l'angle v de l'unité positive ou absolue est égal à $\cos v + \varepsilon \sin v$. Or, d'après le § 4, le produit de deux facteurs dont l'un fait avec l'unité l'angle v , et l'autre l'angle u , fera avec la même unité l'angle $u + v$. Donc, lorsqu'on multiplie le segment de droite $\cos v + \varepsilon \sin v$ par le segment $\cos u + \varepsilon \sin u$, le produit sera un segment de droite dont l'angle de direction est égal à $v + u$. Par conséquent on peut, d'après les §§ 1 et 6, désigner le produit par $\cos(v + u) + \varepsilon \sin(v + u)$.

§ 8.

On peut encore exprimer d'une autre manière ce produit

$$(\cos v + \varepsilon \sin v)(\cos u + \varepsilon \sin u) \text{ ou } \cos(u + v) + \varepsilon \sin(u + v)$$

en formant la somme des produits partiels obtenus en multipliant chacun des segments dont la somme constitue l'un des facteurs par chacun des segments dont la somme constitue l'autre facteur. On aura ainsi

$$(\cos v + \varepsilon \sin v)(\cos u + \varepsilon \sin u) = \cos v \cos u - \sin v \sin u + \varepsilon(\cos v \sin u + \cos u \sin v),$$

ce qui est une conséquence des deux formules bien connues de la trigonométrie

$$\cos(v + u) = \cos v \cos u - \sin v \sin u,$$

$$\sin(v + u) = \cos v \sin u + \cos u \sin v.$$

On peut, rigoureusement et sans aucune difficulté, démontrer ces formules dans tous les cas, que les deux angles ou seulement l'un deux soient positifs ou

No parágrafo 6, o cosseno de um arco de círculo seria o segmento do raio $+1$ que começaria no centro e terminaria na projeção ortogonal da outra extremidade do arco. O seno do mesmo arco seria conduzido perpendicularmente da extremidade do cosseno à extremidade do arco. O seno do ângulo reto seria igual a $\varepsilon = \sqrt{-1}$.

No parágrafo 7, Wessel verificou que o raio que começava no centro e se desviava de um ângulo v da unidade positiva ou absoluta e deveria ser igual a $\cos v + \varepsilon \sin v$. Nesse

mesmo parágrafo, ele apresentou a multiplicação de dois segmentos orientados resultando a soma dos ângulos, ou seja, multiplicação de $\cos u + \varepsilon \operatorname{senu}$ por $\cos v + \varepsilon \operatorname{senv}$ que obtiveram direção igual a $u+v$. Os ângulos determinavam o posicionamento dos segmentos orientados.

No parágrafo 8, Wessel apresentou as conhecidas relações trigonométricas de cosseno da soma e seno da soma de argumentos, onde $\cos(u+v) = \cos u \cos v - \operatorname{senu} \operatorname{senv}$ e $\operatorname{sen}(u+v) = \operatorname{senu} \cos v + \operatorname{senv} \cos u$ através do produto de $(\cos u + \varepsilon \operatorname{senu})(\cos v + \varepsilon \operatorname{senv})$.

$$\begin{aligned}(\cos v + \varepsilon \operatorname{senv})(\cos u + \varepsilon \operatorname{senu}) &= \cos v \cos u - \operatorname{senu} \operatorname{senv} + \varepsilon (\cos v \operatorname{senu} + \cos u \operatorname{senv}) \\(\cos v + \varepsilon \operatorname{senv})(\cos u + \varepsilon \operatorname{senu}) &= \cos(v+u) + \varepsilon \operatorname{sen}(u+v).\end{aligned}$$

§ 9.

Le segment de droite représenté par $\cos v + \varepsilon \operatorname{senv}$ est, d'après le § 7, un rayon de cercle dont la longueur est égale à 1 et dont la déviation par rapport à $\cos 0^\circ$ est égale à l'angle v . Il s'ensuit que $r \cdot \cos v + r \cdot \varepsilon \operatorname{senv}$ désigne un segment de droite dont la longueur est égale à r et dont l'angle de direction est v ; car si l'on rend les côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle r fois plus grands, l'hypoténuse devient en même temps r fois plus grande et les angles restent inaltérés. Or, la somme des côtés de l'angle droit est, d'après le § 1, égale à l'hypoténuse; par conséquent on a $r \cdot \cos v + r \cdot \varepsilon \operatorname{senv} = r(\cos v + \varepsilon \operatorname{senv})$. Voilà donc l'expression générale d'un segment de droite quelconque, qui est situé dans le plan de $\cos 0^\circ$ et de $\varepsilon \operatorname{sen} 90^\circ$, qui dévie de v degrés par rapport à $\cos 0^\circ$ et dont la longueur est r .

§ 10.

Si nous désignons par a, b, c, d des segments de droite directs d'une longueur quelconque, positifs ou négatifs, et que les deux segments indirects $a + \varepsilon b$ et $c + \varepsilon d$ se trouvent dans le même plan que l'unité absolue, on pourra trouver leur produit, même dans le cas où leurs déviations par rapport à l'unité absolue est inconnue*). Il suffit en effet de multiplier chacun des segments qui constituent l'une des sommes par chacun de ceux qui constituent l'autre somme; alors la somme de ces produits représentera le produit cherché en longueur et en direction, de sorte que $(a + \varepsilon b)(c + \varepsilon d) = ac - bd + \varepsilon(ad + bc)$.

Démonstration. Soient A la longueur du segment $a + \varepsilon b$ et v degrés sa déviation par rapport à l'unité absolue; soient C la longueur du segment $c + \varepsilon d$ et u sa déviation; alors, d'après le § 9, on aura

$$a + \varepsilon b = A \cdot \cos v + A \cdot \varepsilon \operatorname{senv}, \quad c + \varepsilon d = C \cdot \cos u + C \cdot \varepsilon \operatorname{sen} u,$$

et par conséquent

$$a = A \cdot \cos v, \quad b = A \cdot \operatorname{senv}, \quad c = C \cdot \cos u, \quad d = C \cdot \operatorname{sen} u \quad (\S 3).$$

No parágrafo 9, o autor se refere ao segmento $r \cos v + r \varepsilon \operatorname{senv}$, que era representado por um raio de um círculo cujo comprimento era igual a 1 e cujo desvio de $\cos 0^\circ$ era

igual ao ângulo v . O segmento teria comprimento igual a r e v seria o ângulo de direção.

No parágrafo 10, Wessel fez a demonstração da multiplicação dos segmentos e a soma dos ângulos obtida para o segmento resultante. Chamou de quantidades ou segmentos diretos, positivos ou negativos e de quantidades ou segmentos indiretas, $a+\varepsilon b$ e $c+\varepsilon d$, por exemplo.

Considerou A como comprimento do segmento $a+\varepsilon b$ e v graus, seu desvio da unidade absoluta e ainda C como comprimento do segmento $c+\varepsilon d$ e u como seu desvio.

Então:

$$a+\varepsilon b = A \cdot \cos v + A \varepsilon \operatorname{senv} \quad \text{e} \quad c+\varepsilon d = A \cdot \cos u + A \varepsilon \operatorname{senu}$$

Consequentemente:

$$a = A \cos v, \quad b = A \operatorname{senv}, \quad c = C \cos u, \quad d = C \operatorname{senu}.$$

Multiplicou dois segmentos orientados e utilizando as relações trigonométricas de soma de ângulos: $\cos(v+u) = \cos v \cos u - \operatorname{senv} \operatorname{senu}$ e $\operatorname{sen}(v+u) = \cos v \operatorname{senu} + \cos u \operatorname{senv}$

concluiu que:

$$(a+\varepsilon b)(c+\varepsilon d) = A(\cos v + \varepsilon \operatorname{senv})C(\cos u + \varepsilon \operatorname{senu}) = A \cdot C(\cos(u+v) + \varepsilon \operatorname{sen}(u+v)).$$

Or, d'après le § 4, on aura

$$\begin{aligned}(a+eb)(c+ed) &= A \cdot C \cdot [\cos(v+u) + \varepsilon \sin(v+u)] \\ &= A \cdot C \cdot [\cos v \cos u - \sin v \sin u + \varepsilon (\cos v \sin u + \cos u \sin v)]\end{aligned}$$

(§ 8). Donc, en remplaçant $A \cdot C \cos v \cos u$ par ac et $A \cdot C \sin v \sin u$ par bd , etc., on obtiendra le résultat qu'il fallait démontrer.

Il s'ensuit que les cas mêmes où les segments à ajouter ne sont pas tous directs ne font point exception à la règle bien connue qui est la base soit de la théorie des équations soit de la théorie des fonctions entières et de leurs *divisores simples*, à savoir que, pour multiplier deux sommes l'une par l'autre, il faut multiplier chaque terme de l'une des sommes par chaque terme de l'autre. Donc, si une équation entre des segments de droite admet une racine de la forme $a+eb$, cette racine représentera un segment indirect. Mais si l'on avait à multiplier des segments de droite qui ne se trouvent pas tous les deux dans un plan passant par l'unité absolue, on ne pourrait appliquer la règle précédente. C'est pour cette raison que je ne m'occupe pas de la multiplication de tels segments. Une autre manière de représenter la variation de leurs directions se trouve plus loin aux §§ 24—35.

§ 11.

Le quotient multiplié par le diviseur doit reproduire le dividende. Il n'est donc pas nécessaire de démontrer que les trois segments doivent se trouver dans un plan passant par l'unité absolue, car cela résulte immédiatement de la définition donnée au § 4. De même on voit aisément que le quotient doit faire l'angle $v-u$ avec l'unité absolue, si le dividende fait l'angle v et le diviseur l'angle u avec cette même unité.

Si par exemple on a à diviser $A(\cos v + \varepsilon \sin v)$ par $B(\cos u + \varepsilon \sin u)$, le quotient sera $\frac{A}{B}[\cos(v-u) + \varepsilon \sin(v-u)]$, parce qu'on a d'après le § 7

$$\frac{A}{B}[\cos(v-u) + \varepsilon \sin(v-u)] \cdot B(\cos u + \varepsilon \sin u) = A(\cos v + \varepsilon \sin v);$$

ou bien, comme $\frac{A}{B}[\cos(v-u) + \varepsilon \sin(v-u)]$ multiplié par le diviseur $B(\cos u + \varepsilon \sin u)$ est égal au dividende $A(\cos v + \varepsilon \sin v)$, le quotient cherché sera

$$\frac{A}{B}[\cos(v-u) + \varepsilon \sin(v-u)].$$

No parágrafo 11, Wessel mostrou a divisão de segmentos com a subtração dos

ângulos, onde $A(\cos v + \varepsilon \sin v)$ $B(\cos u + \varepsilon \sin u)$ e $\frac{A}{B}(\cos(v-u) + \varepsilon \sin(v-u))$.

$$\frac{A(\cos v + \varepsilon \sin v)}{B(\cos u + \varepsilon \sin u)} = \frac{A(\cos v + \varepsilon \sin v)}{B(\cos u + \varepsilon \sin u)} \cdot \frac{(\cos u - \varepsilon \sin u)}{(\cos u - \varepsilon \sin u)} = \frac{A}{B}(\cos(v-u) + \varepsilon \sin(v-u))$$

14

§ 13.

m étant un nombre entier, on obtient, en multipliant l'expression $\cos \frac{v}{m} + \varepsilon \sin \frac{v}{m}$ m fois par elle-même, la puissance $\cos v + \varepsilon \sin v$ (§ 7); donc

$$(\cos v + \varepsilon \sin v)^{\frac{1}{m}} = \cos \frac{v}{m} + \varepsilon \sin \frac{v}{m}.$$

Mais, d'après le § 11,

$$\begin{aligned} \cos \left(-\frac{v}{m} \right) + \varepsilon \sin \left(-\frac{v}{m} \right) &= \frac{1}{\cos \frac{v}{m} + \varepsilon \sin \frac{v}{m}} \\ &= \frac{1}{(\cos v + \varepsilon \sin v)^{\frac{1}{m}}} = (\cos v + \varepsilon \sin v)^{-\frac{1}{m}}; \end{aligned}$$

par conséquent on a toujours, que m soit positif ou négatif,

$$\cos \frac{v}{m} + \varepsilon \sin \frac{v}{m} = (\cos v + \varepsilon \sin v)^{\frac{1}{m}};$$

donc on aura toujours

$$(\cos v + \varepsilon \sin v)^{\frac{n}{m}} = \cos \frac{n}{m} v + \varepsilon \sin \frac{n}{m} v,$$

m et n étant des nombres entiers quelconques.

On trouve de cette manière la valeur des expressions telles que $\sqrt[n]{b + c\sqrt{-1}}$ ou $\sqrt[n]{a + \sqrt[n]{b + c\sqrt{-1}}}$; on peut par exemple représenter $\sqrt[3]{4\sqrt{3} + 4\sqrt{-1}}$ par un segment de droite dont la longueur est égale à 2 et dont l'angle avec l'unité positive a pour mesure 10° .

§ 14.

Deux angles qui ont le même sinus et le même cosinus ont une différence qui est égale soit à 0, soit à ± 4 angles droits, soit à un multiple de ± 4 angles droits; et réciproquement, si la différence de deux angles est égale soit à 0, soit à ± 4 angles droits, pris une ou plusieurs fois, alors leurs sinus, ainsi que leurs cosinus, sont égaux respectivement.

No parágrafo 13 temos a raiz m -ésima de uma quantidade indireta, ou complexo, como atualmente chamamos. O ângulo resultante da radiciação é dividido por m .

Como:

$$\left(\cos \frac{v}{m} + \varepsilon \sin \frac{v}{m} \right) \left(\cos \frac{v}{m} + \varepsilon \sin \frac{v}{m} \right) \dots \left(\cos \frac{v}{m} + \varepsilon \sin \frac{v}{m} \right) = \left(\cos \frac{v}{m} + \varepsilon \sin \frac{v}{m} \right)^m$$

$$\left(\cos \frac{v}{m} + \varepsilon \operatorname{sen} \frac{v}{m}\right) \left(\cos \frac{v}{m} + \varepsilon \operatorname{sen} \frac{v}{m}\right) \dots \left(\cos \frac{v}{m} + \varepsilon \operatorname{sen} \frac{v}{m}\right) = \left(\cos m \frac{v}{m} + \varepsilon \operatorname{sen} m \frac{v}{m}\right)$$

$$\left(\cos \frac{v}{m} + \varepsilon \operatorname{sen} \frac{v}{m}\right)^m = \cos v + \varepsilon \operatorname{sen} v$$

$$\left(\cos v + \varepsilon \operatorname{sen} v\right)^{\frac{1}{m}} = \left(\cos \frac{v}{m} + \varepsilon \operatorname{sen} \frac{v}{m}\right) \quad .$$

No parágrafo 14, o autor enunciou que se dois ângulos que têm o mesmo seno ou mesmo cosseno, sua diferença é zero ou ± 4 ângulos retos .

APÊNDICE XI *Essai Sur Une Maniere Une de Représenter Les Quantités Imaginaires*
(1806)

1. Soit a une grandeur prise à volonté. Si à cette grandeur on en ajoute une seconde qui lui soit égale, pour ne former qu'un seul tout, on aura une nouvelle grandeur, qui sera exprimée par $2a$. Faisant sur cette dernière grandeur une pareille opération, le résultat sera exprimé par $3a$, et ainsi de suite. On obtiendra ainsi une suite de grandeurs

$$a, 2a, 3a, 4a, \dots,$$

dont chaque terme naît du précédent, par une opération qui est la même pour tous les termes, et qui peut être répétée indéfiniment.

Considérons cette même suite à rebours, savoir :

$$\dots, 4a, 3a, 2a, a.$$

On peut encore concevoir, dans cette nouvelle suite, chaque terme comme déduit du précédent, par une opé-

Na página 1, Argand iniciou seu ensaio refletindo sobre uma grandeza a escolhida à vontade se essa grandeza fosse adicionada a uma segunda, expressaria $2a$ e assim se adicionado novamente $3a$ e assim por diante obtendo uma série $a, 2a, 3a, \dots$.

ration inverse de celle qui sert à la formation de la première suite; mais il existe une différence notable entre les deux suites : la première peut être poussée aussi loin qu'on voudra; il n'en est pas de même de la seconde. Après le terme a , on trouvera le terme 0; mais, pour aller plus loin, il faut que la nature de la grandeur a soit telle, qu'on puisse opérer à l'égard de 0 comme on l'a fait à l'égard des termes $\dots, 4a, 3a, 2a, a$. Or c'est ce qui n'est pas toujours possible.

Si a , par exemple, désigne un poids matériel, comme le *gramme*, la suite des quantités $\dots, 4a, 3a, 2a, a, 0$ ne peut être continuée au delà de 0; car on ôte bien 1 gramme de 3, de 2 ou de 1 gramme, mais on ne saurait l'ôter de 0. Ainsi les termes qui devraient suivre 0 ne peuvent avoir d'existence que dans l'imagination; ils peuvent, par cela même, être appelés *imaginaires*.

Mais, au lieu d'une suite de poids matériels, considérons les divers degrés de pesanteur qui agissent sur le bassin A d'une balance qui contient des poids dans ses deux bassins, et supposons, pour donner plus d'appui à nos idées, que les mouvements des bras de cette balance soient proportionnels aux poids ajoutés ou retranchés, effet qui aurait lieu, par exemple, au moyen d'un ressort adapté à l'axe. Si l'addition du poids n dans le bassin A fait varier de la quantité n' l'extrémité du bras A, l'addition des poids $2n, 3n, 4n, \dots$ occasionnera, sur cette même extrémité, des variations $2n', 3n', 4n', \dots$, et ces variations pourront être prises pour mesure de la pesanteur agissant sur le bassin A : cette pesanteur est 0 pour le cas d'égalité entre les deux bassins. On pourra, en ajoutant dans le bassin A des poids $n, 2n, 3n, \dots$, ob-

— 3 —

tenir les pesanteurs n' , $2n'$, $3n'$, ..., ou, en partant de la pesanteur $3n'$, obtenir, en retranchant des poids, les pesanteurs $2n'$, n' , 0. Mais ces divers degrés peuvent être produits non-seulement en enlevant des poids au bassin A, mais aussi en en ajoutant au bassin B. Or l'addition de poids sur le bassin B peut être répétée indéfiniment; ainsi, en la continuant, on formera de nouveaux degrés de pesanteur exprimés par $-n'$, $-2n'$, $-3n'$, ..., et ces termes, appelés *negatifs*, exprimeront des quantités aussi réelles que les termes positifs. On voit donc aussi que, si deux termes, de signes différents, ont le même nombre pour coefficient, comme $3n'$, $-3n'$, ils exprimeront deux états du levier tels, que l'extrémité qui marque les degrés de pesanteur sera, dans l'un et dans l'autre, également éloignée du point 0. On peut considérer cet éloignement en faisant abstraction du *sens* dans lequel il a lieu, et lui donner alors le nom d'*absolu*.

Considérons encore dans une autre espèce de grandeurs la génération des quantités négatives. Si, pour compter une somme d'argent, on adopte pour unité le *franc* matériel, on pourra opérer des diminutions successives sur cette somme, et la réduire à zéro par la soustraction d'un certain nombre de francs. Arrivé à ce terme, on voit que la soustraction cesse d'être praticable, et que, par conséquent, -1 franc, -2 francs, ... sont des quantités imaginaires.

Prenons maintenant le franc de compte pour unité, à dessein d'évaluer la fortune d'un individu, laquelle se compose de valeurs actives et de valeurs passives. Ce que nous appelons *diminution* dans cette fortune pourra avoir lieu soit par le retranchement d'un nombre de francs à

Nas páginas 2 e 3, Argand imaginou uma balança com duas bacias, dois pratos, A e B onde os movimentos dos braços dessa balança fossem proporcionais aos pesos somados ou subtraídos. Adicionado o peso n no prato A corresponderia a uma variação n' na extremidade do braço, as variações seriam $2n'$, $3n'$, $4n'$, Se o prato A tiver os pesos n , $2n$, $3n$.. , obtendo n' , $2n'$, $3n'$... e se a partir de $3n'$ fossem tirados os pesos, a sequência $2n'$, n' , 0 seria obtida. Mas essas variações seriam conseguidas não só removendo pesos do prato A , mas adicionando em B indefinidamente, assim formarão

novos pesos expressos por $-n, -2n, -3n$ e esses termos chamados negativos expressariam quantidades tão reais como os positivos. Portanto entende-se que se dois termos de sinais diferentes, tem o mesmo coeficiente, como $3n$ e $-3n$, eles expressariam dois estados da alavanca que a extremidade que marca os pesos, em ambos, igualmente afastada do ponto 0. Argand considerou esse afastamento abstraindo o sentido que ocorre dando o nome de *absoluto*.

— 4 —

l'actif, soit par l'addition d'un nombre de francs au passif, et, en poussant à un certain terme cette diminution par l'un de ces deux moyens, on parviendra à une fortune négative, telle que — 100 francs, — 200 francs, . . . Ces expressions signifieront que le nombre de francs des valeurs passives, considéré abstraitement, est plus grand de 100, de 200, . . . que celui des valeurs actives. Ainsi — 100 francs, — 200 francs, . . ., qui n'exprimaient dans le premier cas que des quantités imaginaires, représentent ici des quantités aussi réelles que celles que désignent les expressions positives.

2. Ces notions sont très-élémentaires; néanmoins il n'est pas si aisé qu'il pourrait le paraître d'abord de les établir d'une manière bien lumineuse, et d'y donner cette généralité que demande leur application aux calculs. On ne peut d'ailleurs douter de la difficulté du sujet, si l'on réfléchit que les sciences exactes avaient été cultivées pendant un grand nombre de siècles, et qu'elles avaient fait de très-grands progrès avant qu'on eût acquis les véritables notions des quantités négatives, et qu'on eût conçu la manière générale de les employer.

Au reste, on ne s'est nullement proposé de donner ici des principes plus rigoureux ou plus évidents que ceux qu'on trouve dans les Ouvrages qui traitent ce sujet; on a eu simplement pour but de faire deux remarques sur les quantités négatives. La première est que, selon l'espèce de grandeurs à laquelle on applique la numération, la quantité négative est réelle ou imaginaire (*); la se-

— 3 —

conde est que, deux quantités d'une espèce susceptible de fournir des valeurs négatives étant comparées entre elles, l'idée de leur rapport est complexe. Elle comprend : 1^o l'idée du rapport numérique dépendant de leurs grandeurs respectives considérées *absolument*; 2^o l'idée du rapport des *directions* ou *sens* auxquels elles appartiennent, rapport qui en est l'identité ou l'opposition.

3. Maintenant, si, faisant abstraction du rapport des grandeurs absolues, on considère les différents cas que peut présenter le rapport des directions, on trouvera qu'ils se réduisent à ceux qu'offrent les deux proportions suivantes :

$$\begin{aligned} +1 : +1 &:: -1 : -1, \\ +1 : -1 &:: -1 : +1. \end{aligned}$$

L'inspection de ces proportions et de celles qu'on formerait par le renversement des termes montre que les termes moyens sont de signes semblables ou différents, suivant que les extrêmes sont eux-mêmes de signes semblables ou différents.

Qu'on se propose actuellement de déterminer la moyenne proportionnelle géométrique entre deux quantités de signes

Nas páginas 4 e 5, Argand faz duas observações sobre as quantidades negativas, a primeira é que de acordo com a espécie de grandeza, a quantidade negativa poderia ser real ou imaginária, a segunda, é que se duas quantidades de uma espécie suscetível fornecerem valores negativos se comparadas, a ideia seria complexa. Inclui 1º) a ideia de relação numérica dependente das grandezas respectivas consideradas *absolutamente*; 2º) a ideia da relação de *direções* ou *sentidos* aos quais pertenceriam, a relação seria sua identidade ou oposição.

Argand apresentou duas relações de proporção entre essas grandezas direcionadas:

$$+1 : +1 :: -1 : -1,$$

$$+1 : -1 :: -1 : +1.$$

Onde : significa “está para” e :: significa “assim como”.

— 6 —

différents, c'est-à-dire la quantité x qui satisfait à la proportion

$$+1 : +x :: +x : -1.$$

On est arrêté ici comme on l'a été en voulant continuer au delà de 0 la progression arithmétique décroissante, car on ne peut égaler x à aucun nombre positif ou négatif; mais, puisqu'on a trouvé plus haut que la quantité négative, imaginaire lorsque la numération était appliquée à de certaines espèces de grandeurs, devenait réelle lorsque l'on combinait d'une certaine manière l'idée de *grandeur absolue* avec l'idée de *direction*, ne serait-il pas possible d'obtenir le même succès relativement à la quantité dont il s'agit, quantité réputée imaginaire par l'impossibilité où l'on est de lui assigner une place dans l'échelle des quantités positives ou négatives?

En y réfléchissant, il a paru qu'on parviendrait à ce but si l'on pouvait trouver un genre de grandeurs auquel pût s'allier l'idée de direction, de manière que, étant adoptées deux directions opposées, l'une pour les valeurs positives, l'autre pour les valeurs négatives, il en existât une troisième telle, que la direction positive fût à celle dont il s'agit comme celle-ci est à la direction négative.

4. Or, si l'on prend un point fixe K (fig. 1) et qu'on adopte pour unité positive la ligne KA considérée comme ayant sa direction de K en A, ce qu'on pourra désigner par $\overline{KA}$, pour distinguer cette quantité de la ligne KA dans laquelle on ne considère ici que la grandeur absolue, l'unité négative sera $\overline{KI}$, le trait supérieur ayant la même destination que celui qui est placé sur $\overline{KA}$, et la condi-

Na página 6, sabendo que a média proporcional geométrica entre duas quantidades de sinais diferentes, isto, é a quantidade x que satisfaria a proporção: $+1 : +x :: +x : -1$.

Argand sugeriu ainda a possibilidade de encontrar uma grandeza que poderia combinar a ideia de direção, de maneira que sendo adotadas duas direções opostas, uma para valores positivo e outra para valores negativos.

— 12 —

7. En rapportant aux dénominations d'usage les diverses espèces de lignes en direction qui s'engendrent d'une unité primitive $\overline{KA}$, on voit que toute ligne parallèle à la direction primitive est exprimée par un nombre réel, que celles qui lui sont perpendiculaires sont exprimées par des nombres imaginaires ou de la forme $\pm a\sqrt{-1}$, et, enfin, que celles qui sont tracées dans une direction autre que les deux précédentes appartiennent à la forme $\pm a \pm b\sqrt{-1}$, qui se compose d'une partie réelle et d'une partie imaginaire.

Mais ces lignes sont des quantités tout aussi réelles que l'unité primitive; elles en dérivent par la combinaison de l'idée de la direction avec l'idée de la grandeur, et elles sont, à cet égard, ce qu'est la ligne négative, qui n'est nullement regardée comme imaginaire. Les noms de *réel* et d'*imaginaire* ne s'accordent donc pas avec les notions qui viennent d'être exposées. Il est superflu d'observer que ceux d'*impossible* et d'*absurde*, qu'on rencontre quelquefois, y sont encore plus contraires. On peut d'ailleurs s'étonner de voir ces termes employés dans les sciences exactes autrement que pour qualifier ce qui est contraire à la vérité (*).

Na página 12, Argand apresentou os números imaginários e sua formação por parte real e imaginária. $\pm a \pm b\sqrt{-1}$.

Observons que, quoiqu'il existe une infinité d'espèces différentes de lignes dérivées de l'unité primitive, on ramène, dans la pratique du calcul, et par les moyens dont nous nous occuperons bientôt, toutes les lignes en direction aux espèces $\overline{KA}$, $\overline{KC}$, $\overline{KB}$, $\overline{KD}$. $\overline{KA}$ est l'unité primitive ou positive; $\overline{KC}$ est l'unité négative; $\overline{KB}$ et $\overline{KD}$ sont les unités moyennes (*fig. 4*).

De plus il convient d'embrasser sous un même nom les espèces opposées, positives et négatives réciproques. La réunion de deux espèces ainsi relatives formera un

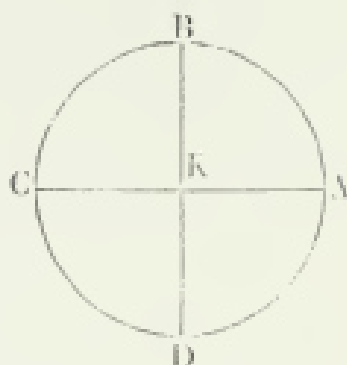
Na página 13, Argand definiu os segmentos para o diagrama :

Ele observou que existiam um número infinito de espécies de linhas derivadas da unidade primitiva $\overline{KA}$, $\overline{KB}$, $\overline{KC}$, $\overline{KD}$. $\overline{KA}$ seria a unidade primitiva ou positiva sendo $\overline{KC}$ unidade negativa e $\overline{KB}$ e $\overline{KD}$ unidades médias.

— 14 —

ordre. Nous appellerons *ordre prime* celui que composent l'espèce primitive $\overline{KA}$ et sa négative $\overline{KC}$, et *ordre mé-*

Fig. 4.



diane celui qui contient les espèces moyennes $\overline{KB}$ et $\overline{KD}$. Nous dirons aussi *quantité prime*, *quantité médiane*, pour *quantité de l'ordre prime*, *de l'ordre médiane*. Ces dénominations sont tirées de la génération de ces quantités et de la manière dont nous en concevons l'existence. On pourra donner le nom général d'*intermédianes* à toutes les autres, qu'il n'est pas nécessaire de désigner particulièrement (*).

Na página 14 a ordem primária é composta pela espécie primitiva $\overline{KA}$ e a negativa $\overline{KC}$, a ordem mediana contém as espécies médias $\overline{KB}$ e $\overline{KD}$.

São chamadas quantidade primária, quantidade mediana, quantidade de ordem mediana, quantidade de ordem primária e ordem mediana.

— 13 —

8. On pourrait aussi, d'après les idées qui précèdent, modifier l'expression des quantités dites *imaginaires*, de manière à donner plus de simplicité à cette partie de la notation.

Lorsqu'on écrit $+a\sqrt{-1}$ ou $-a\sqrt{-1}$, on indique explicitement la génération de la quantité $\sqrt{-1}$, ce qui peut être bon dans certains cas; mais, pour l'ordinaire, on fait abstraction de cette génération, et $\sqrt{-1}$ n'est autre chose que l'espèce particulière d'unité à laquelle s'applique le nombre a . Il n'est donc pas essentiellement nécessaire de rappeler aux yeux cette génération. D'ailleurs l'expression $a\sqrt{-1}$ présente $\sqrt{-1}$ comme un facteur qui multiplie a ; mais, au fond, $\sqrt{-1}$, dans $a\sqrt{-1}$, n'est pas plus un facteur que $+1$ dans $+a$ ou -1 dans $-a$. Or on n'écrit pas $+1.a$, $-1.a$, mais simplement $+a$, $-a$, et le signe qui précède a indique lui-même quelle espèce d'unité exprime ce nombre. On peut donc employer un moyen semblable relativement aux quantités imaginaires, en écrivant, par exemple, $\sim a$ et $\triangleleft a$, au lieu de $+a\sqrt{-1}$, $-a\sqrt{-1}$, les signes $\sim$ et $\triangleleft$ étant positifs et négatifs réciproques.

Pour la multiplication de ces signes, on observera que, multipliés par eux-mêmes, ils donnent $-$, et que, par conséquent, multipliés l'un par l'autre, ils donnent $+$. On peut, d'ailleurs, établir une règle unique pour tous les signes, qui s'étend à un nombre quelconque de facteurs.

Qu'on affecte la valeur 2 à chacun des traits droits, soit perpendiculaires, soit horizontaux, qui entrent dans les signes à multiplier, et la valeur 1 à chacun des traits courbes : on aura, pour les quatre signes, les valeurs sui-

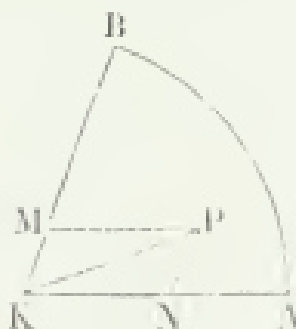
Na página 15, Argand sugeriu modificar a expressão das chamadas quantidades imaginárias, para se tornar mais simples. Ao escrever $+a\sqrt{-1}$ ou $-a\sqrt{-1}$ por $\sqrt{-1} . a$ seria um fator que multiplica a , assim como $+1$ em $+a$ e -1 em $-a$. O sinal que precede o a que tipo de espécie de unidade expressa esse número. Argand empregou símbolos para designar quantidades imaginárias.

São chamadas quantidade primária, quantidade mediana, quantidade de ordem mediana, quantidade de ordem primária e ordem mediana.

10. Toute ligne en direction peut ainsi être décomposée d'une infinité de manières.

Veut-on, par exemple, décomposer la ligne $\overline{KP}$ (fig. 6)

Fig. 6.



en deux parties, l'une de l'ordre $\overline{KA}$, l'autre de l'ordre $\overline{KB}$: on tirera, sur KA, PN parallèle à BK, et on

— 20 —

aura

$$\overline{KP} = \overline{KN} + \overline{NP}.$$

On aurait pu également tirer PM parallèle à KA, et on aurait eu

$$\overline{KP} = \overline{KM} + \overline{MP};$$

Nas páginas 19 e 20, vide figura Apêndice XVIII, Argand mostrou a decomposição da linha $\overline{KP}$ em duas partes, uma na ordem $\overline{KA}$ e outra na ordem de $\overline{KB}$, desenhando em $\overline{KA}$, $\overline{PN}$ paralelo a $\overline{BK}$ obtendo $\overline{KP} = \overline{KN} + \overline{NP}$ ou também se $\overline{PM}$ for paralelo a $\overline{KA}$ obtém-se $\overline{KP} = \overline{KM} + \overline{MP}$

APÊNDICE XII *Theoria residuorum biquadraticum Commentatio segunda* (1831)

Quemadmodum scilicet arithmetica sublimior in quaestionibus hactenus pertractatis inter solos numeros integros reales versatur, ita theoremata circa residua biquadratica tunc tantum in summa simplicitate ac genuina venustate resplendent, quando campus arithmeticae ad quantitates *imaginarias* extenditur, ita vt absque restrictione ipsius obiectum constituent numeri formae $a + bi$, denotantibus i , pro more quantitatem imaginariam $\sqrt{-1}$, atque a, b indefinite omnes numeros reales integros inter $-\infty$ et $+\infty$. Tales numeros vocabimus *numeros integros complexos*, ita quidem, vt reales complexis non opponantur, sed tamquam species sub his contineri censeantur. Commentatio praesens tum doctrinam elementarem de numeris complexis, tum prima initia theoriae residuorum

Na página 8, item 30, Gauss iniciou seus estudos com números complexos, onde a, b são números reais inteiros e o número complexo foi definido como: $a + bi$.

31.

Ante omnia quasdam denominationes praemittimus, per quarum introductionem breuitati et perspicuitati consulatur.

Campus numerorum complexorum $a + bi$ continet

I. numeros reales, vbi $b = 0$, et, inter hos, pro indole ipsius a

- 1) cifras
- 2) numeros positivos
- 3) numeros negativos

II. numeros imaginarios, vbi b cifrae inaequalis. Hic iterum distinguuntur

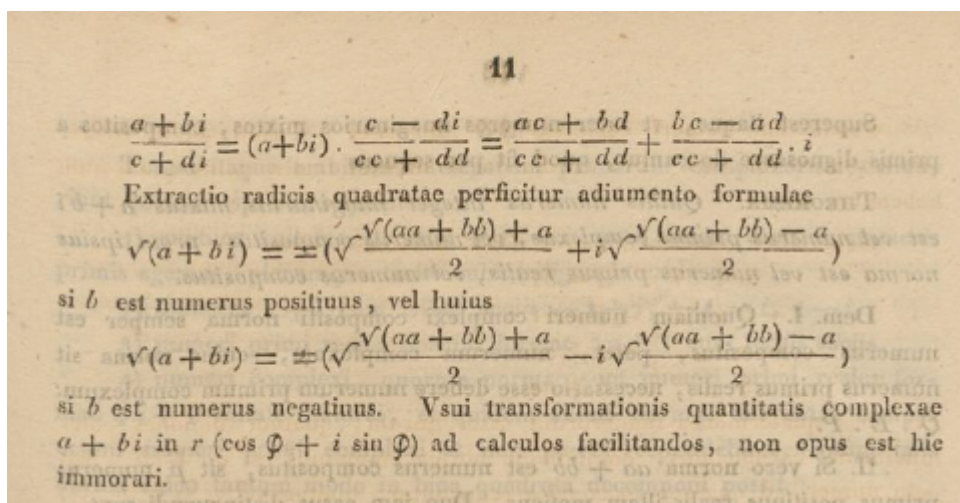
- 1) numeri imaginarii absque parte reali, i. e. vbi $a = 0$
- 2) numeri imaginarii cum parte reali, vbi neque b neque $a = 0$.

Priores si placet numeri imaginarii puri, posteriores numeri imaginarii mixti vocari possunt.

Vnitatibus in hac doctrina vtimur quaternis, $+1, -1, +i, -i$, quae simpliciter positua, negatiua, positua imaginaria, negatiua imaginaria audient.

Nessa página 9, Gauss mostrou um número complexo e considerou a e b números reais e i a abreviação de $\sqrt{-1}$. os complexos poderiam ser reais ou imaginários.

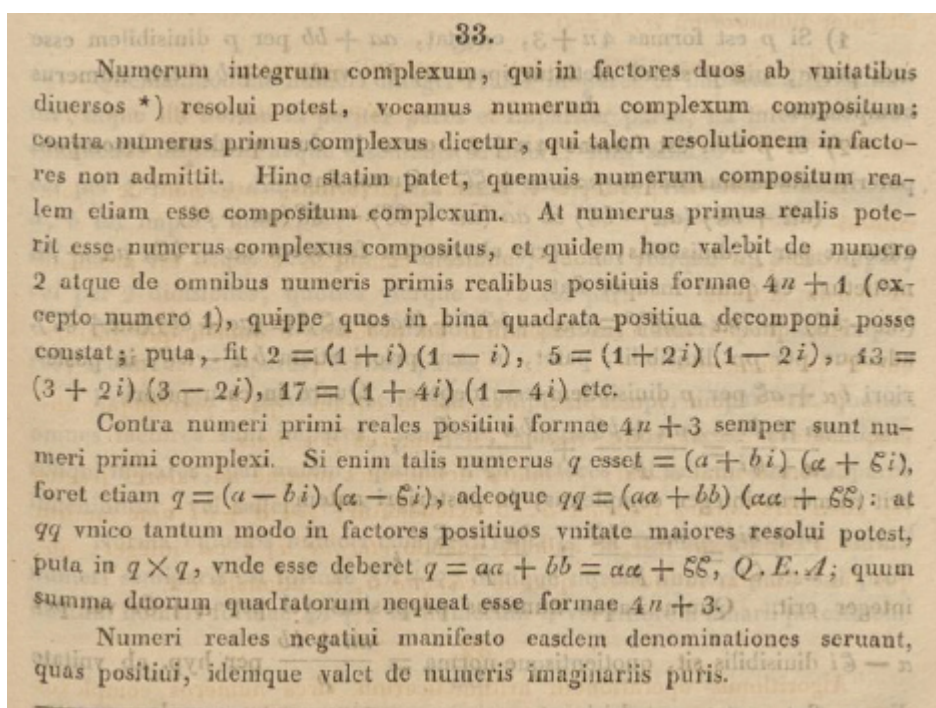
As grandezas complexas não excluíam as reais, mas compreendiam entre si aquelas enquanto caso especial, para $b=0$, os reais e se $a=0$, os imaginários. Ele considerou quatro unidades: $+1$, -1 , $+i$, $-i$.



Na página 11, ele apresentou a divisão de complexos: $\frac{a+bi}{c+di}$

$$\frac{a+bi}{c+di} \cdot \frac{c-di}{c-di} = a+bi \cdot \frac{c-di}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd+(bc-ad)i}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

A radiciação $\sqrt{a+bi}$ e a transformação do complexo $a+bi$ em $r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ que facilitaria os cálculos.



Na mesma página 11, Gauss enunciou a fatoração de um número primo.

$$2=(1+i)(1-i) \ ; \ 5=(1+2i)(1-2i) \ ; \ 13=(3+2i)(3-2i) \ ;$$

$$17=(1+4i)(1-4i) \ .$$

Chamou de composto a um número complexo inteiro, se for o produto de dois fatores inteiros diferentes das unidades; um número complexo que não admitia tal decomposição foi chamado número complexo primo. Assim é primo o número real 3, considerado também como número complexo primo, enquanto 5 como número complexo é composto e igual a $(1+2i)(1-2i)$.

APÊNDICE XIII *Réfutation de la théorie des fonctions analytiques de Lagrange* (1812)**Réfutation de la Théorie des Fonctions analytiques
de Lagrange.**

NÉCESSITÉ à donner cette réfutation, l'auteur doit, avant tout, fixer des limites à l'intention qu'on pourrait lui supposer. — Plein d'admiration pour l'illustre géomètre qu'il est forcé de combattre, il se plaît à rappeler ici l'opinion qu'il a manifestée ailleurs (*) à son égard; et il déclare que ses intentions portent exclusivement sur la **THÉORIE DES FONCTIONS ANALYTIQUES**, qui, en quelque sorte, est une production philosophique. — Venons au fait.

La forme générale des séries est . . . (1)

$$Fx = A_0 + A_1 \cdot \phi x + A_2 \cdot \phi x^2 | \xi + A_3 \cdot \phi x^3 | \xi + \text{etc.},$$

ainsi que nous l'avons montré dans notre Philosophie des Mathématiques, sous la marque (VIII), en supposant que ϕx soit une fonction quelconque de x , prise pour la mesure algorithmique de la fonction Fx dont la série donne la valeur ou le développement, et ξ un accroissement arbitraire pour former les facultés progressives

$$\phi x, \quad \phi x^2 | \xi, \quad \phi x^3 | \xi, \quad \text{etc.} \quad (**).$$

Dans l'ouvrage que nous venons de nommer, cette forme générale

Na página 13, foi dada uma forma geral das séries: $Fx = A_0 + A_1 \Phi x + A_2 \Phi x^{\frac{2}{\xi}} + \dots$ e suponha que Φx seja uma função qualquer de x e ξ um aumento arbitrário.

des séries se trouve déduite de la manière la plus rigoureuse; et il ne nous reste qu'à donner la loi de la détermination des coefficients A_0, A_1, A_2 , etc.

Soient X_1, X_2, X_3 , etc., plusieurs fonctions d'une quantité variable. Nommons *somme combinatoire*, et désignons par la lettre hébraïque $\sin$, de la manière que voici,

$$\sin [\Delta^a X_1 . \Delta^b X_2 . \Delta^c X_3 \dots \Delta^p X_v],$$

la somme des produits des différences de ces fonctions, composés de la manière suivante : Formez, avec les exposans $a, b, c, \dots p$ des différences dont il est question, toutes les permutations possibles; donnez ces exposans, dans chaque ordre de leurs permutations, aux différences consécutives qui composent le produit

$$\Delta X_1 . \Delta X_2 . \Delta X_3 \dots \Delta X_v;$$

donnez de plus, aux produits séparés, formés de cette manière, le signe positif lorsque le nombre de variations des exposans a, b, c , etc., considérés dans leur ordre alphabétique, est nul ou pair, et le signe négatif lorsque ce nombre de variations est impair; enfin, prenez la somme de tous ces produits séparés. — Vous aurez ainsi, par exemple,

$$\sin [\Delta^a X_1] = \Delta^a X_1,$$

$$\sin [\Delta^a X_1 . \Delta^b X_2] = \Delta^a X_1 . \Delta^b X_2 - \Delta^b X_1 . \Delta^a X_2,$$

$$\sin [\Delta^a X_1 . \Delta^b X_2 . \Delta^c X_3] = \Delta^a X_1 . \Delta^b X_2 . \Delta^c X_3 - \Delta^a X_1 . \Delta^c X_2 . \Delta^b X_3 +$$

$$+ \Delta^b X_1 . \Delta^c X_2 . \Delta^a X_3 - \Delta^b X_1 . \Delta^a X_2 . \Delta^c X_3 + \Delta^c X_1 . \Delta^a X_2 . \Delta^b X_3 -$$

$$- \Delta^c X_1 . \Delta^b X_2 . \Delta^a X_3,$$

$$\text{etc., etc.}$$

On voit que la formation de ces sommes combinatoires, est analogue

Nessa página 14, foi fornecida a lei de formação dos coeficientes $A_0, A_1, \dots$. Foram dadas as funções $X_1, X_2, X_3, \dots$ de única variável, Wronski apresentou essa soma combinatória como $\sin [\Delta^a X_1 . \Delta^b X_2 . \Delta^c X_3 . \Delta^d X_4 \dots \Delta^p X_v]$, que seria a somatória dos produtos das diferenças dessas funções, compostas com os expoentes $a, b, c, \dots$ das diferenças em questão, com todas as permutações possíveis.

As diferenças consecutivas que compõe o produto seriam $\Delta X_1 . \Delta X_2 . \Delta X_3 . \Delta X_4 \dots \Delta X_v$.

Wronski deu a esses produtos separadamente, sinal positivo quando o número de variações dos expoentes $a, b, c, \dots$ estiver em ordem alfabética e o sinal negativo quando esse número de variações for ímpar.

Por exemplo:

$$W[\Delta^a X_1] = \Delta^a X_1$$

$$W[\Delta^a X_1 \cdot \Delta^b X_2] = \Delta^a X_1 \cdot \Delta^b X_2 - \Delta^b X_1 \cdot \Delta^a X_2$$

PREMIER MEMOIRE.

15

à celle des valeurs des inconnues données par les équations linéaires ou du premier degré. On voit également que ces sommes combinatoires peuvent être exprimées de différentes manières; entre autres, suivant les procédés indiqués par Laplace dans son Mémoire sur le Calcul intégral et sur le Système du monde, inséré parmi ceux de l'Académie de Paris de l'année 1772, deuxième partie.

Or, si Fx est la fonction qu'il s'agit de développer en série, ϕx la fonction arbitraire qu'on prend, dans la série, pour la mesure algorithmique de la fonction proposée Fx , c'est-à-dire, pour la fonction génératrice (*) du développement; et si, de plus, on considère les séries dans leur plus grande généralité, d'après la forme donnée plus haut (1), savoir,

$$Fx = A_0 + A_1 \cdot \phi x + A_2 \cdot \phi x^2 | \xi + A_3 \cdot \phi x^3 | \xi + \text{etc.},$$

qui procède suivant les facultés progressives ϕx , $\phi x^2 | \xi$, $\phi x^3 | \xi$, etc. de la fonction génératrice ϕx , l'accroissement ξ étant arbitraire, on aura, pour la détermination des coefficients A_1 , A_2 , A_3 , etc., exprimés généralement par A_μ , μ étant un indice quelconque depuis un jusqu'à l'infini, la loi . . . (2)

$$A_\mu = \frac{W[\Delta^a \phi x \cdot \Delta^b \phi x^2 | \xi \cdot \Delta^c \phi x^3 | \xi \cdot \dots \cdot \Delta^l \phi x^{(\mu-1)} | \xi \cdot \Delta^m Fx]}{\Delta^a \phi x \cdot \Delta^b \phi x^2 | \xi \cdot \Delta^c \phi x^3 | \xi \cdot \dots \cdot \Delta^l \phi x^{(\mu-1)} | \xi \cdot \Delta^m \phi x^\mu | \xi},$$

en observant de faire égal à ξ l'accroissement dont dépendent les différences Δ , et en donnant, aux exposans a , b , c , etc. de ces différences, les valeurs

$$a = 1, \quad b = 2, \quad c = 3, \quad d = 4, \quad \text{etc.} \quad \dots \quad l = \mu - 1, \quad m = \mu,$$

et à la variable x , une valeur telle que $\phi x = 0$. Quant à la quantité A_0 ,

(*) Il faut observer que ce ne sont pas ici les Fonctions génératrices de Laplace (Mém. de l'Acad. de Paris, de l'année 1779).

Na página 15, Wronski afirmou que a formação dessa soma combinatória seria utilizada para obtenção dos coeficientes $A_0, A_1, A_2, \dots$ a serem determinados da função

$Fx = A_0 + A_1 \cdot \Phi x + A_2 \cdot \Phi^2 | \varepsilon + \dots$ e seriam obtidos por:

$$A_\mu = \frac{W[\Delta^a \Phi x \cdot \Delta^b \Phi x^{2/\varepsilon} \cdot \Delta^c \Phi x^{3/\varepsilon} \dots]}{\Delta^a \Phi x \cdot \Delta^b \Phi x^{2/\varepsilon} \cdot \Delta^c \Phi x^{3/\varepsilon} \dots} \quad \text{onde } \mu \text{ varia de } 1 \text{ a } \infty.$$

452

NOTE II.

$$\sqrt{(a^2)}, \sqrt{(a'^2)}, \sqrt{(a''^2)}, \&c....$$

représentant précisément les valeurs numériques des quantités données

$$a, a', a'' \dots,$$

il suit de la formule (24) qu'on obtiendra une moyenne entre ces valeurs, si l'on divise par $\sqrt{n}$ l'expression très-simple

$$\sqrt{(a^2 + a'^2 + a''^2 \dots)}.$$

Cette expression, qui surpasse la plus grande des valeurs numériques dont il s'agit, est ce qu'on pourrait appeler le *module* du système des quantités $a, a', a'' \dots$. Le module du système de deux quantités a et b ne serait alors autre chose que le module même de l'expression imaginaire $a + b\sqrt{-1}$ [voyez le chapitre VII, §. 2]. Quoi qu'il en soit, les expressions réelles de la forme

$$\sqrt{(a^2 + a'^2 + a''^2 \dots)}$$

jouissent de propriétés très-remarquables. Dans la géométrie, elles servent à déterminer les longueurs mesurées en ligne droite, et les aires de surfaces planes, par le moyen de leurs projections orthogonales. En algèbre, elles fournissent le sujet de plusieurs théorèmes importants, parmi lesquels je me contenterai d'énoncer ceux qui suivent.

14.^e THÉORÈME. *Si les fractions*

$$\frac{a}{b}, \frac{a'}{b'}, \frac{a''}{b''}, \&c....$$

sont égales, la valeur numérique de chacune d'elles sera exprimée par le rapport

$$\frac{\sqrt{(a^2 + a'^2 + a''^2 \dots)}}{\sqrt{(b^2 + b'^2 + b''^2 \dots)}};$$

No teorema 14 da página 452 de *Cours D'Analyse de École Royale Polytechnique*, Cauchy, iniciou o teorema com uma ideia de módulo de um sistema.

NOTE II.

453

en sorte qu'on aura

$$(25) \quad \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''} = \&c... = \pm \frac{\sqrt{(a^2 + a'^2 + a''^2 \dots)}}{\sqrt{(b^2 + b'^2 + b''^2 \dots)}},$$

le signe + ou le signe — devant être adopté suivant que les fractions proposées sont positives ou négatives.

DÉMONSTRATION. En effet, dans l'hypothèse admise les fractions

$$\frac{a^2}{b^2}, \frac{a'^2}{b'^2}, \frac{a''^2}{b''^2}, \&c....$$

seront égales, et l'on aura en conséquence

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{a'^2}{b'^2} = \frac{a''^2}{b''^2} = \&c... = \frac{a^2 + a'^2 + a''^2 \dots}{b^2 + b'^2 + b''^2 \dots}.$$

En extrayant les racines carrées on retrouvera la formule (25).

Considere os módulos de $(a, a', a'', \dots)$ e $(b, b', b'', \dots)$

$$\sqrt{a^2 + a'^2 + a''^2 \dots} \text{ e } \sqrt{b^2 + b'^2 + b''^2 \dots}$$

Se as frações forem iguais, então:

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''} = \frac{\sqrt{(a^2 + a'^2 + a''^2)}}{\sqrt{(b^2 + b'^2 + b''^2)}} \text{ demonstrado algebricamente, considerando}$$

$(a, a', a'', \dots) = \lambda(b, b', b'')$ com λ escalar e fazendo as substituições pertinentes.

Considerando o 14º teorema, se frações equivalentes forem:

$$\frac{a}{\alpha} = \frac{a'}{\alpha'} = \frac{a''}{\alpha''} = \frac{\sqrt{(a^2 + a'^2 + a''^2)}}{\sqrt{(\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2)}} \text{ e}$$

$(a, a', a'', \dots) = \lambda(\alpha, \alpha', \alpha'')$ com λ escalar e verifica-se que:

$$(a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' + \dots) = \sqrt{(a^2 + a'^2 + a''^2 + \dots)} \cdot \sqrt{(\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 + \dots)}, \text{ pois substituindo}$$

$$a = \lambda\alpha \text{ e } a' = \lambda\alpha' \text{ na equação } \frac{a}{\alpha} = \frac{a'}{\alpha'} = \frac{a''}{\alpha''} = \frac{\sqrt{(a^2 + a'^2 + a''^2)}}{\sqrt{(\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2)}} \text{ a igualdade é}$$

constatada.

15.° THÉOREME. Soient $a, a', a'' \dots$ des quantités quelconques, en nombre n . Si ces quantités ne sont pas toutes égales entre elles, la valeur numérique de la somme

$$a + a' + a'' \dots$$

sera inférieure au produit

$$\sqrt{n} \cdot \sqrt{(a^2 + a'^2 + a''^2 \dots)};$$

en sorte qu'on aura

$$(26) \text{ val.num.}(a + a' + a'' \dots) < \sqrt{n} \cdot \sqrt{(a^2 + a'^2 + a''^2 \dots)}.$$

DÉMONSTRATION. En effet, si au carré de la somme

$$a + a' + a'' \dots$$

on ajoute les carrés des différences entre les quantités $a, a', a'' \dots$ combinées deux à deux de toutes les ma-

454

NOTE II.

nières possibles, savoir,

$$(a - a')^2, (a - a'')^2, \dots (a' - a'')^2, \&c. \dots,$$

on trouvera

$$(27) \left\{ \begin{aligned} &(a + a' + a'' \dots)^2 + (a - a')^2 + (a - a'')^2 + \dots + (a' - a'')^2 + \&c. \dots \\ &= n(a^2 + a'^2 + a''^2 \dots) \end{aligned} \right.$$

et l'on en conclura

$$(a + a' + a'' \dots)^2 < n(a^2 + a'^2 + a''^2 \dots).$$

En extrayant les racines carrées positives des deux membres de cette dernière formule, on obtiendra précisément la formule (26).

No 15º teorema, Cauchy fez a demonstração de que:

$$(a + a' + a'' + \dots) < \sqrt{n} \cdot \sqrt{(a^2 + a'^2 + a''^2)} \text{ ele usou uma combinação de todas as maneiras}$$

possíveis com dois a dois membros $(a + a' + a'' + \dots)^2 + (a - a')^2 + (a - a'')^2 \dots = n(a^2 + a'^2 + \dots)$

Então: $(a + a' + a'' + \dots)^2 < n(a^2 + a'^2 + a''^2)$ pois todos os outros termos são positivos

por serem quadrados. Consequentemente: $(a + a' + a'' + \dots) < \sqrt{n} \cdot \sqrt{(a^2 + a'^2 + a''^2)}$

COROLLAIRE. Si l'on divise par n les deux membres de la formule (26), on trouvera

$$(28) \quad \text{val. num. } \frac{a+a'+a''\dots}{n} < \frac{\sqrt{(a^2+a'^2+a''^2\dots)}}{\sqrt{n}}.$$

Ainsi la valeur numérique de la moyenne arithmétique entre plusieurs quantités $a, a', a'' \dots$ est inférieure au rapport

$$\frac{\sqrt{(a^2+a'^2+a''^2\dots)}}{\sqrt{n}},$$

qui représente, comme on l'a remarqué plus haut, une moyenne entre les valeurs numériques de ces mêmes quantités.

No Corolário da página 454 que diz respeito ao 15º teorema, Cauchy utilizou o resultado desse teorema e dividiu os dois lados da desigualdade

$$(a+a'+a''+\dots) < \sqrt{n} \cdot \sqrt{(a^2+a'^2+a''^2)} \quad \text{por } n, \text{ obtendo: } \frac{(a+a'+a''+\dots)}{n} < \frac{\sqrt{(a^2+a'^2+a''^2)}}{\sqrt{n}}$$

pois $\frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

$$(29) \left\{ \begin{array}{l} (a+a')^2 + (a-a')^2 = 2(a^2 + a'^2), \\ (a+a'+a'')^2 + (a-a')^2 + (a-a'')^2 + (a'-a'')^2 = 3(a^2 + a'^2 + a''^2), \\ \&c. \dots \end{array} \right.$$

16.^e THÉORÈME. Soient $a, a', a'' \dots, a, a', a'' \dots$ deux suites de quantités, et supposons que chacune de ces suites renferme un nombre n de termes. Si les rapports

$$\frac{a}{a}, \frac{a'}{a'}, \frac{a''}{a''}, \&c. \dots$$

ne sont pas tous égaux entre eux, la somme

$$aa + a'a' + a''a'' \dots$$

sera inférieure au produit

$$\sqrt{(a^2 + a'^2 + a''^2 \dots)} \cdot \sqrt{(a^2 + a'^2 + a''^2 \dots)};$$

en sorte qu'on aura

$$(30) \left\{ \begin{array}{l} \text{val. num. } (aa + a'a' + a''a'' \dots) \\ < \sqrt{(a^2 + a'^2 + a''^2 \dots)} \cdot \sqrt{(a^2 + a'^2 + a''^2 \dots)}. \end{array} \right.$$

DÉMONSTRATION. En effet, si au carré de la somme

$$aa + a'a' + a''a'' \dots$$

on ajoute les numérateurs des fractions qui représentent les carrés des différences entre les rapports

$$\frac{a}{a}, \frac{a'}{a'}, \frac{a''}{a''}, \dots$$

combinés entre eux de toutes les manières possibles, savoir,

$$(aa' - a'a)^2, (aa'' - a''a)^2, \dots (a'a'' - a''a')^2, \&c. \dots,$$

on trouvera

456

NOTE II.

$$(31) \left\{ \begin{aligned} & (a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' + \dots)^2 + (a\alpha' - a'\alpha)^2 + (a\alpha'' - a''\alpha)^2 + \dots \\ & \dots + (a'\alpha'' - a''\alpha')^2 + \dots = (a^2 + a'^2 + a''^2 + \dots)(\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 + \dots) \end{aligned} \right.$$

et l'on en conclura

$$(a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' + \dots)^2 < (a^2 + a'^2 + a''^2 + \dots)(\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 + \dots).$$

En extrayant les racines carrées des deux membres de cette dernière formule, on obtiendra précisément la formule (30).

No 16º teorema, página 455, Cauchy fez a demonstração de que se:

$$\frac{a}{\alpha}, \frac{a'}{\alpha'}, \frac{a''}{\alpha''}, \dots \text{ não são frações iguais ou equivalentes, então:}$$

$$(a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' + \dots) < \sqrt{(a^2 + a'^2 + a''^2 + \dots)} \cdot \sqrt{(\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 + \dots)}.$$

A ideia da somatória: $a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' + \dots$ remete a produto interno, como atualmente é chamado.

Cauchy novamente combinou diferenças ao quadrado com dois a dois membros, considerando todas as maneiras possíveis:

$$(a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' + \dots)^2 + (a\alpha' - a'\alpha)^2 + (a\alpha'' - a''\alpha)^2 + \dots = (a^2 + a'^2 + a''^2 + \dots)(\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 + \dots)$$

Considerando termos positivos, então:

$$(a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' + \dots)^2 < (a^2 + a'^2 + a''^2 + \dots)(\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 + \dots)$$

Extraíu a raiz quadrada e obteve:

$$(a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' + \dots) < \sqrt{(a^2 + a'^2 + a''^2 + \dots)} \cdot \sqrt{(\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 + \dots)}.$$

Nesse 16º teorema, as frações não eram iguais, ou seja, não havia um λ escalar que fizesse $(a, a', a'', \dots) = \lambda(\alpha, \alpha', \alpha'' \dots)$ então $(a, a', a'', \dots)$ e $(\alpha, \alpha', \alpha'' \dots)$ são linearmente independentes, termo atual, verificando a desigualdade:

$$(a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' + \dots) < \sqrt{(a^2 + a'^2 + a''^2 + \dots)} \cdot \sqrt{(\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 + \dots)}.$$

E r s t e s C a p i t e l .

V o m S c h w e r p u n k t e .

§. 1. *Vorerinnerung.* Die Bezeichnung eines Theils einer geraden Linie durch Nebeneinanderstellung der zwei Buchstaben, womit man die Grenzpunkte desselben benannt hat, soll hier nicht allein als Ausdruck für den absoluten Werth des Theils gebraucht werden, sondern zugleich durch die verschiedene Stellung der Buchstaben angeben, ob dieser Werth, nach der einmal festgesetzten positiven Richtung der Linie, als positiv oder negativ zu betrachten ist.

Ein Punkt kann sich nämlich in einer geraden Linie nach zwei verschiedenen Richtungen bewegen, von denen die eine der andern entgegengesetzt ist. Die eine dieser Richtungen heisse die positive, die andere die negative. Sind nun A und B beliebige zwei Punkte einer geraden Linie, so verstehe man unter dem Ausdrücke AB den Werth des zwischen A und B enthaltenen Theils der Linie, positiv oder negativ genommen, je nachdem ein in der Linie fortgehender Punkt, um von dem, in dem Ausdrücke zuerst gesetzten, Punkte A zu dem nachfolgenden B zu gelangen, sich in der positiven oder negativen Richtung bewegen muss.

Hiernach ist also immer: $AB + BA = 0$; und wenn C einen dritten Punkt derselben Geraden bedeutet, mag

Em seu primeiro capítulo, página 3, Möbius definiu os pontos A e B de uma mesma linha reta. Um segmento que saía de um ponto A até um ponto B como AB . Consequentemente, um segmento que fosse de B para A como BA que poderia também ser definido como $-AB$, pois teria sentido oposto a AB , assim $AB + BA = 0$ onde 0 também era um ponto da mesma linha reta que A e B .

dieser dritte Punkt zwischen A und B , oder ausserhalb, auf der Seite von A oder der Seite von B liegen :

$$\text{I. } BC + CA + AB = 0,$$

$$\text{II. } CB - CA = AB, \text{ u. s. w.}$$

Bei zwei verschiedenen geraden Linien ist die positive Richtung der einen von der der andern im Allgemeinen ganz unabhängig. Sind sich aber die Linien parallel, so wollen wir, nach Festsetzung der positiven Richtung der einen, die der andern so bestimmen, dass, wenn die andere parallel mit sich fortbewegt wird, bis sie mit der erstern Linie zusammenfällt, sie dann beide auch hinsichtlich der positiven Richtung identisch sind.

Sind daher A, B, C, D die vier auf einander folgenden Spitzen eines Parallelogramms, so hat man $AB = DC$ und $BC = AD$, dagegen $AB + CD = 0$ und $BC + DA = 0$. — Ist ferner P (Fig. 1.) der Durchschnitt der zwei Geraden AB und $A'B'$, und laufen AA' und BB' einander parallel, so verhält sich immer $AP : BP = AA' : BB'$, mögen die zwei Parallelen AA' und BB' auf einerlei oder verschiedenen Seiten des Punktes P liegen, nur dass im erstern Falle die Exponenten der beiden Verhältnisse positiv, im letztern negativ sind.

§. 2. Aufgabe. Durch zwei gegebene Punkte A und B (Fig. 1.) sind zwei Parallellinien AA' und BB' gezogen. Bezeichnen ferner a und b zwei Zahlen, die in einem gegebenen Verhältnisse zu einander stehen, deren Summe aber nicht Null ist. Es wird verlangt, die zwei Parallelen durch eine dritte Gerade so zu schneiden, dass wenn A' und B' die resp. Durchschnittspunkte sind,

$$a \cdot AA' + b \cdot BB' = 0$$

Na página 4, um ponto C na mesma linha reta, entre A e B ou fora do lado de A ou do lado de B foi determinada a expressão $BC + CA + AB = 0$ e consequentemente $CB - CA = AB$.

Se $BC + CA + AB = 0$ então $AB = -BC - CA$ pois:

$$BC - BC + CA - CA + AB = 0 - BC - CA$$

$$0 + 0 + AB = 0 - BC - CA$$

como $CB = -BC$ então $AB = CB - CA$.

Möbius utilizou a ideia de um paralelogramo e somou segmentos colineares. No paralelogramo $ABCD$, ele utilizou o paralelismo dos lados desse quadrilátero verificando que:

$$AB = DC \text{ , } BC = AD \text{ , } AB + CD = 0 \text{ .}$$

Verificou ainda que dados os pontos A e B , foram traçadas duas linhas paralelas AA' e BB' tais que $a.AA' + b.BB' = 0$ e dados os números a e b relacionados entre si, cuja soma era diferente de zero. Qualquer linha reta através de um ponto definido P satisfaz essa condição

É encontrado o ponto P , o centro de gravidade dos pontos A e B , com pesos a e b e está entre a e b forem ambos positivos.

Schneide ferner eine andere nicht durch Q gehende Ebene die vorigen Parallelen in A'', B'', C'', D'', P'' , und eine noch durch Q gezogene in Q'' , so ist wegen 1): $a \cdot AA'' + b \cdot BB'' = (a + b) \cdot PP''$, und wegen 2): $(a + b) \cdot PP'' + c \cdot CC'' + d \cdot DD'' = (a + b + c + d) \cdot QQ''$, folglich $a \cdot AA'' + b \cdot BB'' + c \cdot CC'' + d \cdot DD'' = (a + b + c + d) \cdot QQ''$, also nicht $= 0$.

§. 7. Zusatz. Heisse der so gefundene Punkt Q , aus demselben Grunde wie bei den vorigen Aufgaben, der Schwerpunkt der Punkte A, B, C, D mit den resp. Coëfficienten a, b, c, d . Er ist eben so wenig, wie dort, von der Lage der Parallelen und von der Folge, in welcher man die vier Punkte nach und nach in Betrachtung zieht, abhängig.

§. 8. So wie in den bisherigen Aufgaben von zwei zu drei und von drei zu vier gegebenen Punkten übergegangen wurde, lässt sich nun weiter von vier zu fünf Punkten u. s. w. fortgehen, und somit im Allgemeinen folgender Satz erweisen.

Ist eine beliebige Anzahl $= v$ von Punkten $A, B, C \dots N$ mit resp. Coëfficienten $a, b, c \dots n$ gegeben, deren Summe nicht $= 0$ ist, so kann immer ein Punkt S , und nur einer, — der Schwerpunkt — von der Beschaffenheit gefunden werden, dass, wenn man durch die gegebenen Punkte und den Punkt S nach einer beliebigen Richtung Parallelen zieht, und diese mit einer willkürlich gelegten Ebene schneidet, welches resp. in $A', B', C', \dots N', S'$ geschehe, dass dann immer

$$a \cdot AA' + b \cdot BB' + c \cdot CC' + \dots + n \cdot NN' \\ = (a + b + c + \dots + n) SS',$$

Na página 9 e 10, num teorema, Möbius declarou que dado um número v de pontos $A, B, C, \dots, N$ com coeficientes $a, b, c, \dots, n$, onde a soma dos coeficientes não era igual a zero, era sempre encontrado um ponto S , com a propriedade de que se forem desenhadas

linhas paralelas em qualquer direção por pontos dados e o ponto S e se essas linhas interceptarem algum plano nos pontos $A', B', C' \dots N', S'$ então:

$$a AA' + b BB' + c CC' + \dots + n NN' = (a + b + c + \dots + n) SS'$$

S seria o centro de gravidade do sistema $A, B \dots N$ com os pesos $a, b, c \dots n$

Um conjunto definido de coeficientes $a, b, c \dots n$ ou pesos determina um ponto definido de centro de gravidade.

und folglich, wenn die Ebene durch S selbst geht,

$$a.AA' + b.BB' + c.CC' + \dots + n.NN' = 0 \text{ ist.}$$

Um diesen Satz sogleich in seiner Allgemeinheit darzuthun, suche man nach §. 2. von beliebigen zweien der gegebenen Punkte, z. B. von A und B mit ihren Coëfficienten a und b , den Schwerpunkt. Heisse dieser P , und eine durch ihn gezogene Parallele schneide die beliebig gelegte Ebene in P' , so ist $a.AA' + b.BB' = (a+b).PP'$, und folglich

$$\begin{aligned} a.AA' + b.BB' + c.CC' + \dots + n.NN' \\ = (a+b).PP' + c.CC' + \dots + n.NN' \end{aligned}$$

Auf diese Weise ist das gegebene System von ν Punkten mit ihren Coëfficienten auf ein anderes von $\nu - 1$ Punkten $P, C, \dots N$ mit den Coëfficienten $a+b, c, \dots n$ zurückgebracht, bei welchem die Summe der Coëfficienten $(a+b) + c + \dots + n$ und die Summe der Producte aus den Coëfficienten in die Abschnitte der Parallelen, der Summe der Coëfficienten und der Summe der Producte im ersten Systeme gleich sind. Eben so lässt sich dieses zweite System von $\nu - 1$ Punkten in ein drittes von $\nu - 2$ Punkten umwandeln, und so ferner, bis man endlich nach $\nu - 1$ solchen Umwandlungen auf einen einzigen Punkt S kommt, bei dem der Coëfficient und das Product aus diesem Coëfficienten in den dem S zugehörigen Abschnitt SS' , der Summe der Coëfficienten und der Summe der Producte in dem ursprünglich gegebenen Systeme gleich sind.

Dass es übrigens nur Einen Punkt dieser Art geben kann, und folglich immer derselbe Punkt gefunden werden muss, in welcher Folge man auch die gegebenen Punkte verbindet, erhellet schon daraus, weil, wenn

E se o plano passasse por S então:

$$a AA' + b BB' + c CC' + \dots + n NN' = 0$$

sie herabsehend denkt, die positive; die andere von der Rechten nach der Linken, die negative. Ist nun das Dreieck, wie gewöhnlich, durch irgend eine Zusammenstellung der drei an die Spitzen gesetzten Buchstaben ausgedrückt, so bezeichne dieser Ausdruck den positiven oder negativen Werth der Fläche des Dreiecks, je nachdem die Bewegung eines Punktes, durch den man sich den Perimeter des Dreiecks so beschrieben denkt, dass er die Spitzen in der durch den Ausdruck gegebenen Folge trifft, nach der vorhin gemachten Bestimmung positiv oder negativ ist. Wir ziehen hieraus nachstehende Folgerungen.

§. 18. a. Bezeichnen A, B, C die drei Spitzen eines Dreiecks, so haben die Ausdrücke für den Flächeninhalt: ABC, BCA, CAB einerlei Werth, den entgegengesetzten aber von CBA, BAC, ACB .

b. Seyen B, C, D drei Punkte in gerader Linie und A ein vierter ausserhalb derselben. So wie nun nach §. 1. $CD + DB + BC = 0$ war, eben so ist mit Voraussetzung von A die Summe der Dreiecke:

$$ACD + ADB + ABC = 0;$$

Na página 21, dados três pontos B, C, D em linha reta e um ponto A fora dela então: $CD + DB + BC = 0$ e $ACD + ADB + ABC = 0$.

Möbius adicionou triângulos: $ACD + ADB + ABC = 0$

Man habe z. B. $BADC$ und $DBAC$. Aus $\pm BADC$ wird
 1) $\mp DABC$ und 2) $\pm DBAC$.

Seyen zu vergleichen $ABCD$ und $BCDA$. Aus $\pm ABCD$ wird
 1) $\mp BACD$, 2) $\pm BCAD$ und 3) $\mp BCDA$.

b. Sind C, D, E drei Punkte einer geraden Linie, B ein vierter Punkt ausserhalb derselben, und A ein fünfter Punkt ausserhalb der durch B, C, D, E gehenden Ebene, so war (§. 18. b.) $BDE + BEC + BCD = 0$, und auf gleiche Weise ist mit Vorsetzung des Buchstaben A , die Summe der Pyramiden:

$$ABDE + ABEC + ABCD = 0;$$

auch verhält sich:

$$\begin{aligned} ABDE : ABEC : ABCD &= BDE : BEC : BCD \\ &= ADE : AEC : ACD = DE : EC : CD. \end{aligned}$$

c. Sind B, C, D, E irgend vier Punkte einer Ebene, und A ein fünfter Punkt ausserhalb derselben, so war (§. 18. c.) $CDE - DEB + EBC - BCD = 0$, und eben so ist mit Vorsetzung von A die Summe der Pyramiden:

$$ACDE - ADEB + AEBC - ABCD = 0,$$

und es verhält sich:

$$ACDE : ADEB : AEBC : ABCD = CDE : DEB : EBC : BCD.$$

d. Seyen A, B, C, D, E irgend fünf Punkte im Raume überhaupt, von denen keine vier in einer Ebene liegen. Schneide die Gerade DE die Ebene ABC in Punkte Z . (Denn immer wird wenigstens eine von den durch E und einen der vier Punkte A, B, C, D gelegten, Geraden die durch die drei übrigen Punkte gehende Ebene schneiden. Diese eine sey hier DE .) Da hiernach erstens die Punkte D, E, Z in einer Geraden liegen, so hat man:

$$BCEZ + BCZD + BCDE = 0$$

Na página 24, C, D, E são três pontos em linha reta e um quarto ponto B fora dela e um quinto ponto A que não passa por B, C, D, E então $ABDE + ABEC + ABCD = 0$. Möbius adicionou pirâmides: $ABDE + ABEC + ABCD = 0$

APÊNDICE XVI: *Theory of Conjugate Functions, or Algebraic Couples; with a Preliminary and Elementary Essay on Algebra as the Science of pure Time* (1837)

On the Addition, Subtraction, Multiplication, and Division, of Number-Couples, as combined with each other.

6. Proceeding to operations upon number-couples, considered in combination with each other, it is easy now to see the reasonableness of the following definitions, and even their necessity, if we would preserve in the simplest way, the analogy of the theory of couples to the theory of singles:

$$(b_1, b_2) + (a_1, a_2) = (b_1 + a_1, b_2 + a_2); \quad (52.)$$

$$(b_1, b_2) - (a_1, a_2) = (b_1 - a_1, b_2 - a_2); \quad (53.)$$

$$(b_1, b_2)(a_1, a_2) = (b_1, b_2) \times (a_1, a_2) = (b_1 a_1 - b_2 a_2, b_2 a_1 + b_1 a_2); \quad (54.)$$

$$\frac{(b_1, b_2)}{(a_1, a_2)} = \left(\frac{b_1 a_1 + b_2 a_2}{a_1^2 + a_2^2}, \frac{b_2 a_1 - b_1 a_2}{a_1^2 + a_2^2} \right). \quad (55.)$$

Nesse artigo, Hamilton percebeu operações de pares ordenados (a, b) com $a, b \in \mathbb{R}$

Na página 95, ele apresentou as operações de soma, subtração, multiplicação e divisão entre esses números, considerados pares ordenados.

APÊNDICE XVII *On Quaternions or on a New System of Imaginaires in Algebra* (1844)

VI. *On Quaternions ; or on a New System of Imaginaries in Algebra.* By Sir WILLIAM ROWAN HAMILTON, LL.D., V.P.R.I.A., F.R.A.S., Corresponding Member of the Institute of France, Member of several other Scientific Societies in these and in Foreign Countries, Andrews' Professor of Astronomy in the University of Dublin, and Royal Astronomer of Ireland.

[Continued from vol. xxvi. p. 224.]

18. **T**HE separation of the real and imaginary parts of a quaternion is an operation of such frequent occurrence, and may be regarded as being so fundamental in this theory, that it is convenient to introduce symbols which shall denote concisely the two separate results of this operation. The algebraically *real* part may receive, according to the question in which it occurs, all values contained on the one *scale* of progression of number from negative to positive infinity; we shall call it therefore the *scalar part*, or simply the *scalar* of the quaternion, and shall form its symbol by prefixing, to the symbol of the quaternion, the characteristic *Scal.*, or simply *S.*, where no confusion seems likely to arise from using this last abbreviation. On the other hand, the algebraically *imaginary* part, being geometrically constructed by a straight line, or radius vector, which has, in general, for each determined quaternion, a determined length and determined direction in space, may be called the *vector part*, or

Hamilton relatou sobre a separação da parte real e imaginária dos quatérnios, chamando a parte real de escalar, denominando de *Scal* ou *S* e a parte imaginária que seria geometricamente construída por uma reta ou um raio vetor, determinando uma direção no espaço e se chamaria parte vetor, denominando *Vect* ou *V.A* .

simply the *vector* of the quaternion; and may be denoted by prefixing the characteristic Vect., or V. We may therefore say that a quaternion is in general the sum of its own scalar and vector parts, and may write

$$Q = \text{Scal. } Q + \text{Vect. } Q = S. Q + V. Q,$$

or simply

$$Q = S Q + V Q.$$

By detaching the characteristics of operation from the signs of the operands, we may establish, for this notation, the general formulæ:

$$1 = S + V; \quad 1 - S = V; \quad 1 - V = S;$$

$$S. S = S; \quad S. V = 0; \quad V. S = 0; \quad V. V = V;$$

and may write

$$(S + V)^n = 1,$$

if n be any positive whole number. The scalar or vector of a sum or difference of quaternions is the sum or difference of the scalars or vectors of those quaternions, which we may express by writing the formulæ:

$$S\Sigma = \Sigma S; \quad S\Delta = \Delta S; \quad V\Sigma = \Sigma V; \quad V\Delta = \Delta V.$$

19. Another general decomposition of a quaternion, into factors instead of summands, may be obtained in the following way:—Since the square of a scalar is always positive, while the square of a vector is always negative, the algebraical excess of the former over the latter square is always a positive number; if then we make

$$(TQ)^2 = (SQ)^2 - (VQ)^2,$$

and if we suppose TQ to be always a real and positive or absolute number, which we may call the *tensor* of the quaternion Q , we shall not thereby diminish the generality of that quaternion. This *tensor* is what was called in former articles the *modulus**; but there seem to be some conveniences in not

* The writer believes that what originally led him to use the terms "modulus" and "amplitude," was a recollection of M. Cauchy's nomenclature respecting the usual imaginaries of algebra. It was the use made by his friend, John T. Graves, Esq., of the word "constituents," in connexion with the ordinary imaginary expressions of the form $x + \sqrt{-1}y$, which led Sir William Hamilton to employ the same term in connexion with his own imaginaries. And if he had not come to prefer to the word "modulus," in this theory, the name "tensor," which suggested the characteristic T , he would have borrowed the symbol M , with the same signification, from the valuable paper by Mr. Cayley, "On Certain Results respecting Quaternions," which appeared in the Number of this Magazine for February 1845. It will be proposed by the present writer, in a future article, to call the *logarithmic modulus* the "mensor" of a quaternion, and to denote it by the foregoing characteristic M ; so as to have

$$MQ = \log. TQ, \quad M. Q Q' = MQ + MQ'.$$

Na página 27, Hamilton considerou que o quatérnio era formado por uma parte por escalar e outra parte por vetor.

$Q = \text{Scal. } Q + \text{Vect. } Q = SQ + VQ$. Operações possíveis com vetores foram mostradas, como $S.S=S$; $V.V=V$; $V.S=0$; $1=S+V$; $1-S=V$; $1-V=S$ e a fórmula

do que Hamilton denominou de tensor ou módulo: $(TQ)^2 = (SQ)^2 - (VQ)^2$. O módulo ou tensor seria sempre um número real e positivo ou número absoluto.

30 Sir W. Rowan Hamilton on *Quaternions*.

$$\begin{array}{ll} 2S.a = a - a = 0; & 2V.a = a + a = 2a; \\ 2S.aa' = aa' + a'a; & 2V.aa' = aa' - a'a; \\ 2S.aa'a'' = aa'a'' - a''a'a; & 2V.aa'a'' = aa'a'' + a''a'a; \\ \&c. & \&c. \end{array}$$

of which the law is evident.

21. The fundamental rules of multiplication in this calculus give, in the recent notation, for the scalar and vector parts of the product of any two vectors, the expressions,

$$\begin{aligned} S.aa' &= -(xx' + yy' + zz'); \\ V.aa' &= i(yz' - zy') + j(zx' - xz') + k(xy' - yx'); \end{aligned}$$

if we make

$$a = ix + jy + kz, \quad a' = ix' + jy' + kz',$$

x, y, z and x', y', z' being real and rectangular co-ordinates, while i, j, k are the original imaginary units of this theory. The *geometrical meanings* of the symbols $S.aa'$, $V.aa'$, are therefore fully known. The former of these two symbols will be found to have an intimate connexion with the theory of *reciprocal polars*; as may be expected, if it be observed that the equation

$$S.aa' = -a^2$$

expresses that *with reference to the sphere of which the equation is*

$$a^2 = -a'^2,$$

that is, with reference to the sphere of which the centre is at the origin of vectors, and of which the radius has its length denoted by a , the vector a' terminates in the polar plane of the point which is the termination of the vector a . The latter of the same two symbols, namely $V.aa'$, denotes, or may be constructed by a straight line, which is in direction perpendicular to both the lines denoted by a and a' , being also such that the rotation round it from a to a' is positive; and bearing, in length, to the unit of length, the same ratio which the area of the *parallelogram under the two factor lines* bears to the unit of area. The *volume of the parallelepipedon* under any three coinitial lines, or the *sextuple volume of the tetrahedron* of which those lines are conterminous edges, may easily be shown, on the same principles, to be equal to the *scalar of the product of the three vectors* corresponding; this scalar $S.aa'a''$, which is equal to $S(V.aa'.a'')$, being positive or negative according as a'' makes an obtuse or an acute angle with $V.aa'$, that is, according as the rotation round a'' from a' towards a is positive or negative. To express that two

Na página 30, Hamilton aplicou a multiplicação de dois quatérnios. São dados dois quatérnios: $\alpha = ix + jy + kz$ e $\alpha' = ix' + jy' + kz'$, então: $S\alpha \cdot \alpha' = -(xx' + yy' + zz')$ que significava a parte escalar da multiplicação ou produto dos dois quatérnios.

Consequentemente, a parte vetor da multiplicação ou produto desses mesmos dois quatérnios seria: $V\alpha \cdot \alpha' = i(yz' - zy') + j(zx' - xz') + k(xy' - yx')$. A multiplicação desses quatérnios fornecendo a parte escalar e a parte vetor, somente foi obtida se fosse considerado

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j.$$

APÊNDICE XVIII *Lectures on Quaternions* (1853)

450. I shall take this occasion to remark that a *quaternion*, generally, may *now* be seen, more clearly perhaps than at any former stage of the present Course, to admit of being expressed by the QUADRINOMIAL FORM,

$$q = w + ix + jy + kz;$$

where the sum of the *three terms* ix, jy, kz composes (compare 407) the *vector part*, while the remaining term w denotes the *scalar part* of the quaternion: so that we may write, in connexion with the recent form,

$$Sq = w; \quad Vq = ix + jy + kz.$$

Indeed this *quadrinomial form* for a quaternion, which may (compare 111) be regarded as an *expansion* of the shorter form $w + \rho$, where ρ denotes a vector, was communicated by me, so long ago as 1843, to the Royal Irish Academy, along with the values above assigned (in arts. 394, &c.) for the *squares* and *products* of i, j, k ; and it has been referred to by anticipation, in this Course, so early as at the close (art. 78) of the Second Lec-

No Capítulo VII, Hamilton iniciou com a expressão da forma de um quatérnio: $q = w + ix + jy + kz$, onde a parte escalar seria $Sq = w$ e a parte vetor seria $Vq = ix + jy + kz$.

ture. But the *signification* of this quadrinomial form may be now more fully understood, in consequence of the recent remarks on *sums of several summands*. We may now see, for instance, by the *associative* property (449) of such *summation*, that although we *may* interpret this quadrinomial form as simply equivalent to the *binomial form* $w + \rho$, or NUMBER PLUS LINE, to which in an earlier part of the present Lecture a quaternion was proved to be reducible; and may with that view write the expression for q as follows:

$$q = w + (ix + jy + kz);$$

yet we may also *otherwise combine* the *four terms*, w , ix , jy , kz , *into partial groups*, writing, for example,

$$q = (w + ix) + (jy + kz),$$

where the partial sum $w + ix$ is *itself* a certain *quaternion*, which is to be *added*, according to the general rule of arts. 446, 447, to the *line* $jy + kz$. Again, if we write, as the analogous quadrinomial expression for *another quaternion*,

$$q' = w' + ix' + jy' + kz',$$

we shall have no difficulty now in establishing the following expressions for the *sum* and *difference* of these *two* quaternions:

$$\begin{aligned} q' + q &= w' + w + i(x' + x) + j(y' + y) + k(z' + z); \\ q' - q &= w' - w + i(x' - x) + j(y' - y) + k(z' - z). \end{aligned}$$

THE FOUR SCALARS, w , x , y , z , are called (78) the FOUR CONSTITUENTS of the quaternion $w + ix + jy + kz$; and a *quaternion* q cannot *vanish*, or become equal to *zero*, without EACH of these *four constituents separately vanishing*: that is, in symbols,

$$\text{if } q = 0, \text{ then } w = 0, \ x = 0, \ y = 0, \ z = 0.$$

Hamilton garantiu a propriedade associativa na soma e subtração de dois quatérnios:

$$q = w + ix + jy + kz \quad \text{e} \quad q' = w' + ix' + jy' + kz' \quad \text{que resultou em:}$$

$$q' + q = w' + w + i(x' + x) + j(y' + y) + k(z' + z)$$

$$q' - q = w' - w + i(x' - x) + j(y' - y) + k(z' - z) \quad \text{e se o quatérnio } q = 0 \text{ então:}$$

$$w = x = y = z = 0 \quad .$$

AN EQUATION BETWEEN TWO QUATERNIONS is therefore equivalent to a SYSTEM OF FOUR EQUATIONS BETWEEN SCALARS; or in other words, *two quaternions* cannot be *equal*, unless *each constituent* of the *one* be equal to the *corresponding* constituent of the *other*. The importance therefore of the *number* FOUR in this whole theory, from which indeed (compare 91, 106, 107, 120) the present CALCULUS derives its *name*, exhibits itself here again.

451. The *distributive principle*, or property, of the multiplication of quaternions, has (in the present Lecture) been *in part* already established by *definition*, and has been used as the chief element (446) in the *general interpretation of a sum*: just as the *associative property* of multiplication of quaternions had been previously established, in these Lectures, *to some extent*, by definition, for the sake of interpreting a *product* (compare 309, 310). We have lately *defined* that

$$(r + q) a = ra + qa,$$

as we had at an earlier stage defined that

$$rq \cdot a = r \cdot qa,$$

Na página 449, dados os quatérnios r, q, a , Hamilton apresentou o princípio da distributiva $(r+q)a=ra+qa$ e propriedade da multiplicação entre quatérnios $rq \cdot a = r \cdot qa$.

APÊNDICE XIX *Linear Associative Algebra* (1870)

20. The sign $+$ is called *plus* in common algebra and denotes *addition*. It may be retained with the same name, and the process which it indicates may be called addition. In the simplest cases it expresses a mere mixture, in which

PEIRCE: *Linear Associative Algebra*.

7

the elements preserve their mutual independence. If the elements cannot be mixed without mutual action and a consequent change of constitution, the mere union is still expressed by the sign of addition, although some other symbol is required to express the character of the mixture as a peculiar compound having properties different from its elements. It is obvious from the simplicity of the union recognized in this sign, that the order of the admixture of the elements cannot affect it; so that it may be assumed that

$$A + B = B + A$$

and

$$(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C.$$

21. The sign $-$ is called *minus* in common algebra, and denotes *subtraction*. Retaining the same name, the process is to be regarded as the reverse of addition; so that if an expression is first added and then subtracted, or the reverse, it disappears from the result; or, in algebraic phrase, it is *canceled*. This gives the equations

$$A + B - B = A - B + B = A$$

and

$$B - B = 0.$$

The sign minus is called the negative sign in ordinary algebra, and any term preceded by it may be united with it, and the combination may be called a *negative term*. This use will be adopted into all the algebras, with the provision that the derivation of the word negative must not transmit its interpretation.

22. The sign $\times$ may be adopted from ordinary algebra with the name of the sign of *multiplication*, but without reference to the meaning of the process. The result of multiplication is to be called the *product*. The terms which are combined by the sign of multiplication may be called *factors*; the factor which precedes the sign being distinguished as the *multiplier*, and that which follows it being the *multiplicand*. The words multiplier, multiplicand, and product, may also be conveniently replaced by the terms adopted by Hamilton, of *facient*, *faciend*, and *factum*. Thus the equation of the product is

$$\text{multiplier} \times \text{multiplicand} = \text{product}; \text{ or } \text{facient} \times \text{faciend} = \text{factum}.$$

Nas páginas 6 e 7, Peirce relacionou algumas definições:

O sinal $+$ é chamado mais na álgebra comum e indica adição. A soma também não seria afetada pela composição dos elementos.

$$A + B = B + A$$

$$(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C$$

O sinal $-$ é chamado de menos na álgebra comum e denota subtração. Mantendo o mesmo nome, o processo foi considerado como o reverso da adição; de modo que, se uma expressão fosse adicionada e subtraída primeiro, ou o inverso, ela desapareceria do resultado; ou seria cancelada.

$$A+B-B=A-B+B=A \text{ e } B-B=0 \text{ .}$$

O sinal $\times$ foi adotado a partir de álgebra comum com o nome do sinal de multiplicação, mas sem referência ao significado do processo. O resultado da multiplicação deveria ser chamado de produto. Os termos combinados pelo sinal de multiplicação foram chamados de fatores; o fator que precedesse o sinal como o multiplicador e o que se seguiria como multiplicando.

23. When an expression used as a factor in certain combinations gives a product which vanishes, it may be called in those combinations a *nilfactor*. Where as the multiplier it produces vanishing products it is *nilfacient*, but where it is the multiplicand of such a product it is *nilfaciend*.

24. When an expression used as a factor in certain combinations overpowers the other factors and is itself the product, it may be called an *idemfactor*. When in the production of such a result it is the multiplier, it is *idemfacient*, but when it is the multiplicand it is *idemfaciend*.

25. When an expression raised to the square or any higher power vanishes, it may be called *nilpotent*; but when, raised to a square or higher power, it gives itself as the result, it may be called *idempotent*.

The defining equation of nilpotent and idempotent expressions are respectively $A^n = 0$, and $A^n = A$; but with reference to idempotent expressions, it will always be assumed that they are of the form

$$A^2 = A,$$

unless it be otherwise distinctly stated.

26. *Division* is the reverse of multiplication, by which its results are verified. It is the process for obtaining one of the factors of a given product when the other factor is given. It is important to distinguish the position of the given factor, whether it is facient or faciend. This can be readily indicated by combining the sign of multiplication, and placing it before or after the given factor just as it stands in the product. Thus when the multiplier is the given factor, the correct equation of division is

$$\text{quotient} = \frac{\text{dividend}}{\text{divisor} \times}$$

and the equation of verification is

$$\text{divisor} \times \text{quotient} = \text{dividend}.$$

But when the multiplicand is the given factor, the equation of division is

$$\text{quotient} = \frac{\text{dividend}}{\times \text{divisor}}$$

and the equation of verification is

$$\text{quotient} \times \text{divisor} = \text{dividend}.$$

Na página 8, Peirce continuou com as definições:

Quando uma expressão usada como fator em certas combinações produzisse um produto que desapareceu, seria chamada nessas combinações de "nilfator".

Quando uma expressão usada como fator em certas combinações sobre potências e ela própria fosse o produto, seria chamada de "idemfator".

Quando uma expressão elevada ao quadrado ou a qualquer potência superior desaparecesse, poderia ser chamada "nilpotente"; mas quando, elevado a uma potência quadrada ou superior, se apresentasse como resultado, poderia ser chamada de "idempotente"

As equações que definissem expressões nilpotentes e idempotentes foram respectivamente $A^n = 0$ e $A^n = A$; mas com referência a expressões idempotentes, sempre seria assumido que elas teriam a forma $A^2 = A$, a menos que fosse indicado de outra forma.

Divisão seria o inverso da multiplicação. Seria o processo para obter um dos fatores de um determinado produto quando o outro fator fosse dado.

same influence whether it be facient or faciend, so that with the notation of § 14, there is the equation

$$Aa = aA,$$

and in such a product, the quantity a may be called the *coefficient*.

In like manner, terms which only differ in their coefficients, may be added by adding their coefficients; thus,

$$(a \pm b)A = aA \pm bA = Aa \pm Ab = A(a \pm b).$$

30. The exceeding simplicity of the conception of an equation involves the identity of the equations

$$A = B \text{ and } B = A$$

and the substitution of B for A in every expression, so that

$$MA \pm C = MB \pm C,$$

or that, *the members of an equation may be mutually transposed or simultaneously increased or decreased or multiplied or divided by equal expressions.*

31. How far the principle of § 16 limits the extent within which the ordinary symbols may be used, cannot easily be decided. But it suggests limitations which may be adopted during the present discussion, and leave an ample field for curious investigation.

The distributive principle of multiplication may be adopted; namely, the principle that the product of an algebraic sum of factors into or by a common factor, is equal to the corresponding algebraic sum of the individual products of the various factors into or by the common factor; and it is expressed by the equations

$$(A \pm B)C = AC \pm BC.$$

$$C(A \pm B) = CA \pm CB.$$

32. *The associative principle of multiplication* may be adopted; namely, that the product of successive multiplications is not affected by the order in which the multiplications are performed, provided there is no change in the relative position of the factors; and it is expressed by the equations

$$ABC = (AB)C = A(BC).$$

This is quite an important limitation, and the algebras which are subject to it will be called *associative*.

Na página 10, $Aa = aA$ e a foi chamado de coeficiente por Peirce.

Da mesma maneira, termos que diferissem apenas em seus coeficientes, poderiam ser adicionados adicionando seus coeficientes:

$$(a \pm b)A = aA \pm bA = Aa \pm Ab = A(a \pm b)$$

A simplicidade excessiva da concepção de uma equação envolveria a identidade das equações $A = B$ e $B = A$ e a substituição de B por A em todas as expressões, para que

$MA \pm C = MB \pm C$ ou os membros de uma equação poderiam ser transpostos mutuamente ou aumentados ou diminuídos simultaneamente ou multiplicados ou divididos por expressões iguais.

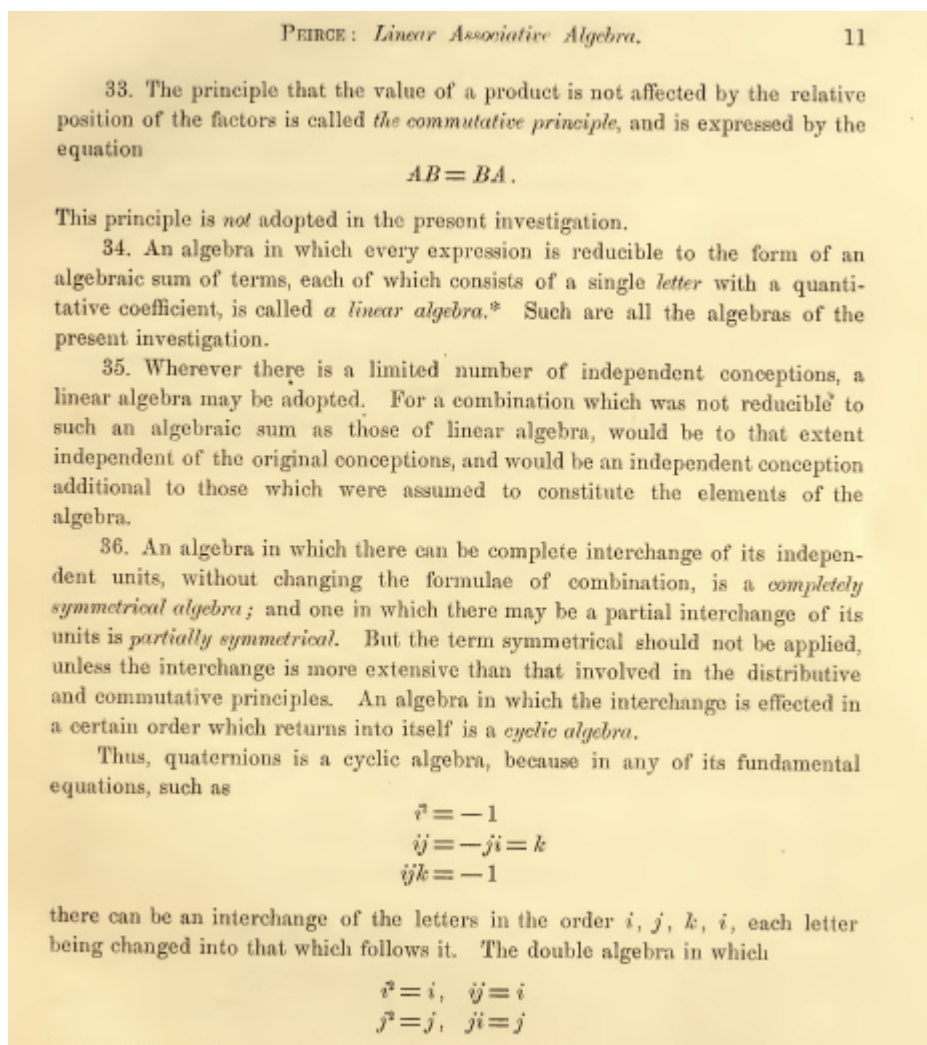
O Princípio distributivo da multiplicação foi enunciado como:

$$(A \pm B)C = AC \pm BC$$

$$C(A \pm B) = CA \pm CB$$

O Princípio associativo da multiplicação foi enunciado como:

$$ABC = (AB)C = A(BC)$$



Na página 11, o Princípio comutativo da multiplicação foi enunciado como:

$AB=BA$ que não é valido para a álgebra associativa.

Uma álgebra na qual toda expressão fosse redutível à forma de uma soma algébrica de termos, cada uma das quais consistiria em uma única letra com um coeficiente quantitativo, Peirce chamou de Álgebra Linear.

Peirce utilizou a álgebra dos quatérnios, caracterizando-a como álgebra cíclica onde:

$i^2=-1$, $ij=-ji=k$ e $ijk=-1$. Essas unidades foram chamadas independentes.

is cyclic because the letters are interchangeable in the order i, j, i . But neither of these algebras is commutative.

37. When an algebra can be reduced to a form in which all the letters are expressed as powers of some one of them, it may be called a *potential algebra*. If the powers are all squares, it may be called *quadratic*; if they are cubes, it may be called *cubic*; and similarly in other cases.

Linear Associative Algebra.

38. All the expressions of an algebra are distributive, whenever the distributive principle extends to all the letters of the alphabet.

For it is obvious that in the equation

$$(i+j)(k+l) = ik + jk + il + jl$$

each letter can be multiplied by an integer, which gives the form

$$(ai + bj)(ck + dl) = acik + bcjk + adil + bdjl,$$

in which a, b, c and d are integers. The integers can have the ratios of any four real numbers, so that by simple division they can be reduced to such real numbers. Other similar equations can also be formed by writing for a and b, a_1 and b_1 , or for c and d, c_1 and d_1 , or by making both these substitutions simultaneously. If then the two first of these new equations are multiplied by J and the last by -1 ; the sum of the four equations will be the same as that which would be obtained by substituting for a, b, c and $d, a + Ja_1, b + Jb_1, c + Jc_1$ and $d + Jd_1$. Hence a, b, c and d may be any numbers, real or imaginary, and in general whatever mixtures A, B, C and D may represent of the original units under the form of an algebraic sum of the letters i, j, k , &c., we shall have

$$(A+B)(C+D) = AC + BC + AD + BD,$$

which is the complete expression of the distributive principle.

39. An algebra is associative whenever the associative principle extends to all the letters of its alphabet.

$$\begin{aligned} \text{For if} \quad A &= \sum (ai) = ai + a_1j + a_2k + \&c. \\ B &= \sum (bi) = bi + b_1j + b_2k + \&c. \end{aligned}$$

Na página 12, para quaisquer combinações ou operações A, B, C poderiam representar as unidades originais sob a forma de soma das letras i, j, k como:

$(A+B)(C+C) = AC + BC + AD + BD$ que se tratava da completa expressão do princípio distributivo.

Uma álgebra é associativa quando o princípio associativo se estende a todas as letras do alfabeto e definiu:

$$\begin{aligned} A &= \sum (ai) = ai + a_1j + a_2k + \dots & B &= \sum (bi) = bi + b_1j + b_2k + \dots \\ C &= \sum (ci) = ci + c_1j + c_2k + \dots & \text{e definiu:} \\ AB &= \sum (ab_1ij) & BC &= \sum (bc_1ij) \\ (AB)C &= \sum (ab_1c_2ijk) = A(BC) = ABC. \end{aligned}$$

APÊNDICE XX *Die Lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik* (1844)

§ 3

Gleichheit — Verknüpfung.

3

knüpft werden, und so gelangt man zu einer Verknüpfung mehrerer Glieder, welche aber zunächst immer nur als eine Verknüpfung je zweier erscheint. Der Bequemlichkeit wegen bedienen wir uns der üblichen abgekürzten Klammerbezeichnung, indem wir nämlich die zusammengehörigen Zeichen einer Klammer weglassen, wenn deren Oeffnungszeichen $[(]$ entweder am Anfang des ganzen Ausdrucks steht, oder nach einem andern Oeffnungszeichen folgen würde; z. B. statt $((a \frown b) \frown c)$ schreiben wir $a \frown b \frown c$.

§ 3. Die besondere Art der Verknüpfung wird nun dadurch bestimmt, was bei derselben als Ergebniss festgehalten, d. h. unter welchen Umständen und in welcher Ausdehnung das Ergebniss als sich gleich bleibend gesetzt wird. Die einzigen Veränderungen, welche man, ohne die einzelnen verknüpften Formen selbst zu ändern, vornehmen kann, ist Aenderung der Klammern und Umordnung der Glieder. Nehmen wir zuerst die Verknüpfung so an, dass bei drei Gliedern das Setzen der Klammern keinen realen Unterschied, d. h. keinen Unterschied des Ergebnisses begründet, also dass $a \frown (b \frown c) = a \frown b \frown c$ ist, so folgt zunächst, dass man auch in jeder mehrgliedrigen Verknüpfung dieser Art, ohne ihr Ergebniss zu ändern, die Klammern weglassen kann. Denn jede Klammer schliesst vermöge der darüber festgesetzten Bestimmung zunächst einen zweigliedrigen Ausdruck ein, und dieser Ausdruck muss wieder als Glied verbunden sein mit einer andern Form, kurz es tritt eine Verbindung von drei Formen hervor, für welche wir voraussetzen, dass man die Klammer weglassen könne, ohne das Ergebniss ihrer Verknüpfung zu ändern; also wird auch, da man statt jeder Form die ihr gleiche setzen darf, das Gesamtergebniss durch das Weglassen jener Klammer nicht geändert.

Nos parágrafos 2 e 3, páginas 2 e 3, ele iniciou sua teoria introduzindo uma simbologia nova $\frown$ a conexão sintética, entre os termos ou magnitudes a, b, c . Tratava-se de uma operação muito próxima à adição, pois:

$$(a \frown b) \frown c = a \frown (b \frown c) = a \frown b \frown c$$

$$\text{similar a } (a+b)+c=a+(b+c)=a+b+c.$$

§. 5. Das analytische Verfahren besteht darin, dass man zu dem Ergebniss der Verknüpfung und dem einen Gliede derselben das andere sucht. Es gehören daher zu einer Verknüpfung zwei analytische Verfahrensarten, je nachdem nämlich deren Vorderglied oder Hinterglied gesucht wird; und beide Verfahrensarten liefern nur dann ein gleiches Ergebniss, wenn die beiden Glieder der ursprünglichen Verknüpfung vertauschbar sind. Da auch dies analytische Verfahren als Verknüpfung kann aufgefasst werden, so unterscheiden wir die ursprüngliche oder synthetische Verknüpfung und die auflösende oder analytische Verknüpfung. Im Folgenden werden wir nun zunächst die synthetische Verknüpfung in dem Sinne des vorigen Paragraphen als eine einfache voraussetzen und als Zeichen derselben das Zeichen $\sim$ beibehalten, für die entsprechende analytische Verknüpfung, da hier die beiden Arten derselben zusammenfallen, hingegen das umgekehrte Zeichen $\smile$ wählen, und zwar so, dass wir das Ergebniss der synthetischen Verknüpfung, was bei der analytischen gegeben ist, hier zum Vordergliede machen. Sonach bezeichnet hier $a \sim b$ diejenige Form, welche mit b synthetisch verknüpft a giebt, so dass also alle mal $a \sim b \sim b = a$ ist. Hierin liegt sogleich eingeschlossen, dass $a \sim b \smile c$ diejenige Form bedeutet, welche mit c und dann mit b synthetisch verknüpft a giebt, d. h. also auch nach § 4 diejenige Form, welche mit denselben Werthen in umgekehrter Folge, oder auch mit $b \smile c$ synthetisch verknüpft a giebt, d. h.

$$\begin{aligned} a \sim b \smile c &= a \smile c \smile b \\ &= a \smile (b \smile c); \end{aligned}$$

und da dieselbe Schlussfolge für beliebig viele Glieder gilt, so folgt, dass auch die Ordnung der Glieder, welche analytische Vorzeichen haben, gleichgültig ist, und man diese Glieder in eine Klammer schliessen darf, wenn man nur die in die Klammer rückenden Vorzeichen umkehrt. Hieraus nun folgt weiter, dass

$$a \smile (b \smile c) = a \sim b \smile c$$

6

Allgemeine Formenlehre.

§ 6

sei. In der That hat man aus der Definition der analytischen Verknüpfung

$$a \smile (b \smile c) = a \smile (b \smile c) \smile c \smile c;$$

dieser Ausdruck ist wieder vermöge des so eben erwiesenen Gesetzes

$$= a \smile (b \smile c \smile c) \smile c,$$

und dies letztere ist endlich vermöge der Definition der analytischen Verknüpfung

$$= a \sim b \smile c,$$

No parágrafo 5, páginas 5 e 6, um símbolo novo $\smile$ foi apresentado conectando os termos. Grassmann chamou de conexão analítica. Seria análogo a uma subtração.

$$a \smile (b \smile c) = a \smile b \frown c$$

$$\text{similar a } a - (b - c) = a - b + c$$

8

Allgemeine Formenlehre.

§ 7

§ 7. Durch das analytische Verfahren gelangt man zur indifferenten und zur analytischen Form. Die erstere erhält man durch die analytische Verknüpfung zweier gleicher Formen, also $a \smile a$ stellt die indifferente Form dar, und zwar ist dieselbe unabhängig von dem Werthe a . In der That ist $a \smile a = b \smile b$; denn $b \smile b$ stellt die Form dar, welche mit b synthetisch verknüpft b giebt, eine solche Form ist $a \smile a$, da $b \frown (a \smile a) = b \frown a \smile a = b$ ist. In dem Umfange nun, in welchem zugleich das Ergebniss der analytischen Verknüpfung eindeutig ist, muss daher auch $a \smile a$ gleich $b \smile b$ gesetzt werden. Da somit die indifferente Form unter der gemachten Voraussetzung immer nur Einen Werth darstellt, so ergibt sich daraus die Nothwendigkeit, sie durch ein eigenes Zeichen zu fixiren. Wir wählen dazu für den Augenblick das Zeichen $\circ$, und bezeichnen die Form $(\circ \smile a)$ mit $(\smile a)$, und nennen $(\smile a)$ die rein analytische Form, und zwar wenn die synthetische Verknüpfung die Addition war, die negative Form. Dass $(a \frown \circ)$ und $(a \smile \circ)$ gleich a , dass ferner $\frown(\smile a)$ gleich $\smile a$, und $\smile(\smile a)$ gleich $\frown a$ ist, ergibt sich direkt, indem man nur die so eben dargestellten vollständigen Ausdrücke diesen Formen zu substituiren hat, um sogleich die Richtigkeit dieser Gleichungen zu übersehen*) Die analytische Form zur Addition nannten wir ins Besondere die negative Form, und die indifferente in Bezug auf die Addition und Subtraktion nennen wir Null.

Outro símbolo no parágrafo 7, página 8, foi apresentado por Grassmann, ele o chamou de “indiferente” próximo ao que seria um zero, ou nulo, pois $(\circ \smile b)$ resultaria $(\smile b)$.

§. 9. Wir haben bisher nur Eine synthetische Verknüpfungsart für sich und in ihrem Verhältnisse zur entsprechenden analytischen betrachtet. Es kommt jetzt darauf an, die Beziehung zweier verschiedener synthetischer Verknüpfungsarten darzulegen. Zu dem Ende muss die eine durch die andere ihrem Begriffe nach bestimmt sein. Diese Begriffsbestimmung hängt von der Art ab, wie ein Ausdruck, welcher beide Verknüpfungsweisen enthält, ohne Aenderung des Gesamtergebnisses umgestaltet werden kann. Die einfachste Art, wie in einem Ausdrucke beide Verknüpfungen vorkommen können, ist die, dass das Ergebniss der einen Verknüpfung der zweiten unterworfen wird, also wenn $\sim$ und $\approx$ die Zeichen der beiden Verknüpfungen sind, so hängt das Verhältniss beider von den Umgestaltungen ab, welche mit dem Ausdruck $(a \sim b) \approx c$ vorgenommen werden dürfen. Wenn sich die zweite Verknüpfung auf beide Glieder der ersten gleichmässig beziehen soll, so bietet sich als die einfachste Umgestaltung die dar, dass man jedes Glied der ersten Verknüpfung der zweiten unterwerfen, und dann diese einzelnen Ergebnisse als Glieder der ersten Verknüpfungsweise setzen könne. Wenn diese Umgestaltung ohne Aenderung des Gesamtergebnisses vorgenommen werden kann, d. h. also $(a \sim b) \approx c \equiv (a \approx c) \sim (b \approx c)$ ist, so nennen wir die zweite Verknüpfung die jener ersten entsprechende Verknüpfung nächst höherer Stufe. Sind ins besondere bei dieser zweiten Verknüpfung beide Glieder auf gleiche Weise abhängig von der ersten, so dass also jene Bestimmung sowohl für das Hinterglied der neuen Verbindung gilt, wie für deren Vorderglied, und ist ferner die erstere Verknüpfung eine einfache, und ihre entsprechende analytische eine eindeutige, so nennen wir die letztere Multiplikation, während wir für die erstere schon oben den Namen der Addition festgesetzt hatten. Es ist dies überhaupt die Art, wie von vorne herein, d. h. wenn noch keine Verknüpfungsart gegeben ist, eine solche nebst der sich daran anschliessenden höheren bestimmt werden kann. Daher betrachten wir auch die Addition als die Verknüpfung erster Stufe,

No parágrafo 9, página 10, foi apresentado o símbolo $\approx$, uma nova conexão sintética entre os termos, poderia ser chamado de multiplicação.

§ 10 Verkn. höherer Stufen — Multiplikation. 11

die Multiplikation also als die Verknüpfung zweiter Stufe *). Wir wählen von nun an statt der allgemeinen Verknüpfungszeichen die bestimmten für diese Verknüpfungsarten üblichen, und zwar wählen wir für die Multiplikation das blosse Aneinanderschreiben.

§ 10. Die Beziehung der Multiplikation zur Addition haben wir dahin bestimmt, dass

$$(a+b)c = ac+bc$$

$$c(a+b) = ca+cb$$

ist; und dadurch war uns der Begriff der Multiplikation festgestellt. Durch wiederholte Anwendung dieses Grundgesetzes gelangt man sogleich zu dem allgemeineren Satze, dass man, wenn beide Faktoren zerstückt sind, jedes Stück des einen mit jedem Stück des andern multipliciren und die Produkte addiren kann. Hieraus ergibt sich für die Beziehung der Multiplikation zur Subtraktion ein entsprechendes Gesetz, nämlich zunächst, dass

$$(a-b)c = ac-bc$$

ist. Nämlich setzt man, um den zweiten Ausdruck auf den ersten zurückzuführen, in demselben statt a das ihm Gleiche $(a-b)+b$, so hat man

$$ac-bc = ((a-b)+b)c-bc;$$

der zweite Ausdruck ist nach dem so eben aufgestellten Gesetze

$$= (a-b)c+bc-bc,$$

und dieser Ausdruck nach § 8

$$= (a-b)c,$$

also der erste Ausdruck dem letzten gleich. Auf gleiche Weise folgt, wenn der zweite Faktor eine Differenz ist, das entsprechende Gesetz. Durch wiederholte Anwendung dieser Gesetze gelangt man zu dem allgemeineren Satze:

„Wenn die Faktoren eines Produktes durch Addition und Subtraktion gegliedert sind, so kann man ohne Aenderung des Gesamtergebnisses, jedes Glied des einen mit jedem Gliede des andern multipliciren, und die so erhaltenen Produkte

durch vorgesetzte Additions- oder Subtraktionszeichen verknüpfen, je nachdem die Vorzeichen ihrer Faktoren gleich oder ungleich waren.“

§. 11. Für die Division gilt ganz allgemein, mag nun ihr Resultat eindeutig oder vieldeutig sein, das Gesetz der Zerstückung des Dividend, nämlich

$$\frac{a \mp b}{c} = \frac{a}{c} \mp \frac{b}{c},$$

wobei wir aber noch zu merken haben, dass, da für die Multiplikation im Allgemeinen nicht Vertauschbarkeit der Faktoren angenommen wurde, auch im Allgemeinen zwei Arten der Division unterschieden werden müssen, je nachdem nämlich das Vorderglied oder das Hinterglied der multiplikativen Verknüpfung gesucht wird. Da indessen beide Faktoren eine gleiche Beziehung zur Addition und Subtraktion haben, so wird dies auch von beiden Arten der Division gelten; und wenn das obige Gesetz für eine Art erwiesen ist, so wird es aus denselben Gründen auch für die andere erwiesen sein. Wir wollen annehmen, es sei das Vorderglied gesucht; also wenn z. B.

$$\frac{a}{c} = x \text{ ist *)}, \text{ so sei } xc = a.$$

Es bedeutet $\frac{a+b}{c}$ hiernach diejenige Form, die als Vorderglied mit c multiplicirt $a+b$ giebt. Ich kann zuerst jede Form in zwei Stücke sondern, deren eins willkürlich angenommen werden kann.

Es sei daher die gesuchte mit $\frac{a+b}{c}$ gleichgesetzte Form $= \frac{a}{c} + x$.

Diese nun als Vorderglied mit c multiplicirt, giebt nach dem vorigen § $a + xc$; sie soll aber bei dieser Multiplikation $a+b$ geben, folglich ist

$$a + xc = a + b, \text{ d. h. } xc = b, x = \frac{b}{c}$$

also die gesuchte Form, da sie gleich $\frac{a}{c} + x$ gesetzt war, gleich $\frac{a}{c} + \frac{b}{c}$. Auf dieselbe Weise ergibt sich das Gesetz für die Differenz.

No parágrafo 10 e 11, páginas 11 e 12, Grassmann mostrou uma distributiva, o elemento simétrico e a divisão.

Grassmann introduziu a divisão pela equação:

$$\frac{a \mp b}{c} = \frac{a}{c} \mp \frac{b}{c}$$

$$\frac{a}{c} = x \text{ se } xc = a .$$

Grassmann explicou também que: Se $\frac{a}{b} = c$ e $a = 0$ então b não era determinado unicamente.

Página 29

§ 19. Wir haben bisher den Begriff der Summe der Strecken abhängig gemacht von der besonderen Erzeugungsweise des ganzen Systems, indem, wenn Anfangs- und Endelement der Summe durch stetiges Aneinanderschliessen der Strecken gegeben war, nun die zwischen beiden liegende Strecke, als Theil eines Systemes erster Stufe, durch die ursprünglichen Aenderungsweisen des ganzen Systemes konstruirt wurde. Diese Abhängigkeit haben wir noch schliesslich aufzuheben. Wir haben schon oben (§ 18) gezeigt, dass, wenn mehrere Strecken auf entsprechende Weise erzeugt sind, dann nicht nur jedem Element und jedem Theil der einen ein Element und ein Theil in jeder der andern entspricht, sondern auch die Summe auf dieselbe Weise entsprechend erzeugt ist, nämlich so, dass die Summe der entsprechenden Theile jedesmal diesen Theilen entspricht. Hat man nun zwei beliebige Strecken des Systemes, nämlich p_1 und p_2 , und es sind beide als Summen von Strecken dargestellt, welche den ursprünglichen Aenderungsarten des ganzen Systemes angehören, nämlich

$$\begin{aligned} p_1 &= a_1 + b_1 + \dots \\ p_2 &= a_2 + b_2 + \dots, \end{aligned}$$

so dass man hat

$$p_1 + p_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) + \dots,$$

und sind ferner $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \dots$ entsprechende Theile der Strecken $a_1, a_2, b_1, b_2 \dots$, also auch $(\alpha_1 + \alpha_2), (\beta_1 + \beta_2) \dots$ in demselben Sinne entsprechende Theile von $(a_1 + a_2), (b_1 + b_2)$, so wird nach dem vorigen § jeder Theil der Summe $(p_1 + p_2)$, als Summe der entsprechenden Theile gewonnen, d. h. also ein solcher ist jedesmal gleich

$$\begin{aligned} &(\alpha_1 + \alpha_2) + (\beta_1 + \beta_2) + \dots \\ \text{d. h.} &= (\alpha_1 + \beta_1 + \dots) + (\alpha_2 + \beta_2 + \dots) \end{aligned}$$

No parágrafo 19, Grassmann apresentou a soma de deslocamentos onde são dados dois deslocamentos de um mesmo sistema p_1 e p_2 e ambos são exibidos como somas de deslocamentos:

$$p_1 = a_1 + b_1 + c_1 + \dots \text{ e } p_2 = a_2 + b_2 + c_2 + \dots$$

$p_1 + p_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) + \dots$ e se $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \dots$ forem partes correspondentes dos deslocamentos a_1, a_2, b_1, b_2 então a soma seria $(\alpha_1 + \alpha_2) + (\beta_1 + \beta_2) + \dots$.

§ 20. Durch die im vorigen § geführte Entwicklung ist die selbständige Darstellung der Systeme höherer Stufen vorbereitet. Nämlich es waren diese bisher als abhängig von gewissen zu Grunde gelegten Aenderungsweisen dargestellt, durch welche sie eben erzeugt wurden. Diese Abhängigkeit können wir in so fern aufheben, als wir zeigen können, dass dasselbe System m -ter Stufe durch je m Aenderungsweisen erzeugbar sei, welche demselben angehören, und welche von einander unabhängig sind (in dem Sinne von § 16), d. h. von keinem System niederer Stufe (als der m -ten) umfasst werden. Ich will zuerst zeigen, dass, wenn das System durch irgend welche m Aenderungsweisen erzeugbar ist, ich dann statt jeder beliebigen derselben eine neue von den $(m-1)$ übrigen unabhängige demselben System m -ter Stufe angehörige Aenderungsweise (p) einführen, und durch diese in Verbindung mit den $(m-1)$ übrigen das gegebene System erzeugen kann. Da nach der Voraussetzung p dem gegebenen Systeme m -ter Stufe angehört, so

§ 20 Selbständigkeit der Systeme. 31

wird es sich (§ 18) darstellen lassen als Summe von Strecken, die den ursprünglichen Aenderungsweisen angehören, d. h.

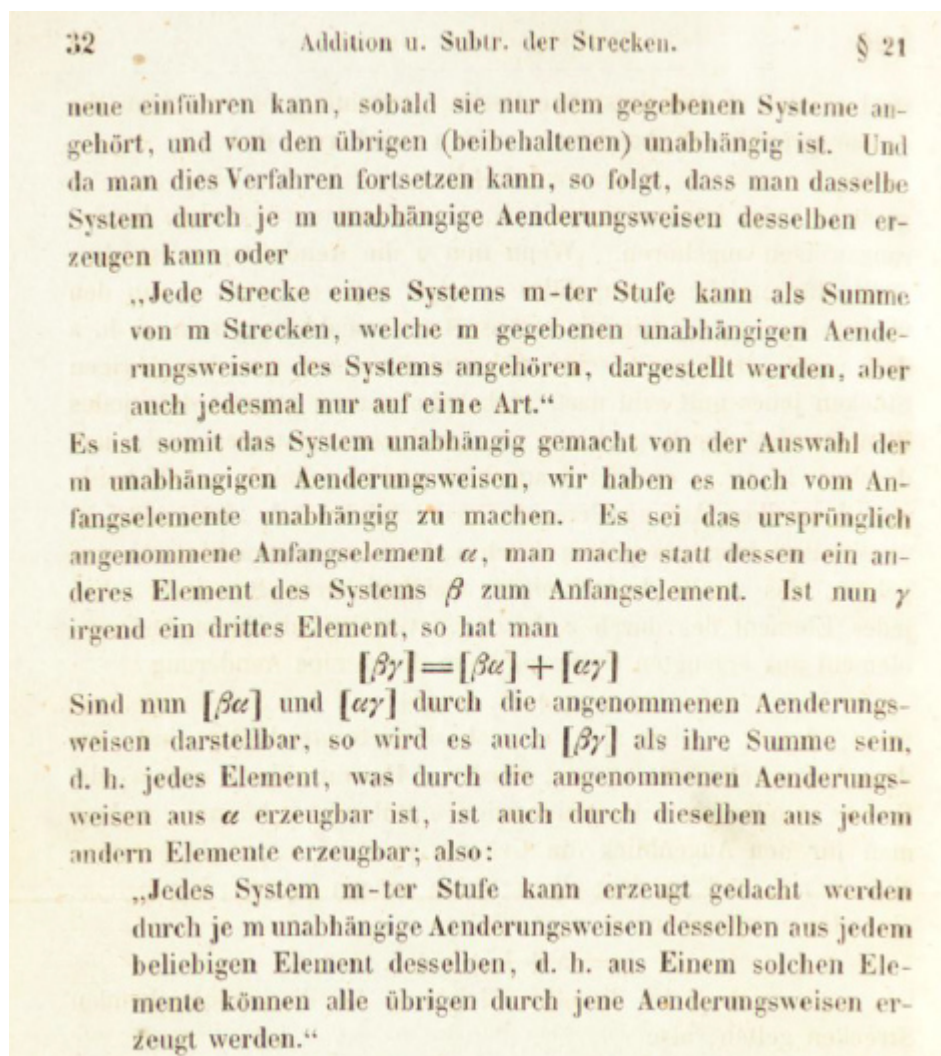
$$p = a + b + c + \dots$$

gesetzt werden können, wenn $a, b, c, \dots$ den ursprünglichen Aenderungsweisen angehören. Wenn nun a die Aenderungsweise dar-

No parágrafo 20, que trata da independência de um sistema de alta ordem, Grassmann afirmou que um sistema de m -ésima ordem era gerável por qualquer m métodos de evolução pertencentes a ele que eram mutuamente independentes.

Ele supôs que se p pertencesse a um sistema de m -ésima ordem, poderia ser escrito como uma soma dos deslocamentos pertencentes ao método original de evolução.

$p = a + b + c + \dots$ se a, b, c pertencessem ao método original de evolução.



Grassmann afirmou que todo deslocamento de um sistema de m -ésima ordem pode ser representado como uma soma de m deslocamentos pertencentes a m dados métodos independentes de evolução, do sistema, sendo a soma única para cada conjunto.

der Faktoren eines äusseren Produktes nicht fest genug einprägen kann, indem es den gewöhnlichen Vorstellungen zu widerstreiten scheint, so will ich noch auf eine Analogie hindeuten, welche aber hier nur als Abschweifung aufgefasst sein will. Nämlich den Flächeninhalt eines Spathecks $a.b$ kann man, wenn der von a und b eingeschlossene Winkel mit (ab) und die Längen der Strecken a und b mit $\underline{a}$ und $\underline{b}$ bezeichnet werden, ausdrücken durch die Formel:

$$a.b = \underline{a} \underline{b} \sin(ab), \text{ und}$$

$$b.a = \underline{b} \underline{a} \sin(ba),$$

wo das Produkt der Längen das gewöhnliche, also $\underline{a} \underline{b} = \underline{b} \underline{a}$ ist. Da nun die Winkel (ab) und (ba) entgegengesetzt sind, und die Sinusse entgegengesetzter Winkel gleichfalls entgegengesetzt sind, so ist

$$\sin(ab) = -\sin(ba),$$

und also auch hiernach

$$a.b = -b.a.$$

§ 39. Mit der hier gegebenen Entwicklung steht nun die Darstellung des Rechtecks durch das Produkt seiner Seitenlängen nicht im Widerspruch, sobald man nur die blossen Seitenlängen, in irgend einem gemeinschaftlichen Mass gemessen, als Faktoren dieses Produktes festhält, und nur meint, dass der absolute (vom Zeichen unabhängige) Flächenraum des Rechtecks so oft das Quadrat dieses Masses enthalten solle, als das Produkt jener Zahlen beträgt. Will man aber damit noch mehr ausdrücken, und namentlich behaupten, dass der Flächenraum jenes Rechtecks an sich, d. h. auch seinem Zeichen nach, dem Produkte jener Seiten gleichgesetzt werden könne, so steht dies, wenn man eben für das Produkt noch die Eigenthümlichkeit des algebraischen Produktes festhalten will (wie bisher immer geschehen ist), mit den so eben erwiesenen Wahrheiten in offenbarem Widerspruch. Es erscheint vielmehr das Parallelogramm (also auch das Rechteck) nothwendiger Weise als ein solches Produkt seiner Seiten, in welchem die Vertauschung seiner Faktoren nur mit Zeichenwechsel statt finden

No parágrafo 39, Grassmann estudou a multiplicação de termos, similar ao produto vetorial atual. Neste exemplo verifica-se a expressão da área de um paralelogramo ab . Área: $a.b = ab \sin(ab)$ e $b.a = ba \sin(ba)$ consequentemente $a.b = -b.a$.

einem Punkte der Kurve oder Oberfläche gezogen ist, eine Gleichung aufgestellt wird. Es sei $p = xa + yb + zc$ diese Strecke, und

$$f(x, y, z) = 0$$

die Gleichung, welche eine Oberfläche bestimmt; sucht man nun die Gleichung derselben Oberfläche zunächst für denselben Anfangspunkt der Koordinaten, aber in Bezug auf neue Richtaxen und auf die ihnen zugehörigen Richtmasse, e_1, e_2, e_3 , so hat man, wenn $p = u_1 e_1 + u_2 e_2 + u_3 e_3$ ist, die Gleichung

$$f\left(\frac{p \cdot b \cdot c}{a \cdot b \cdot c}, \frac{a \cdot p \cdot c}{a \cdot b \cdot c}, \frac{a \cdot b \cdot p}{a \cdot b \cdot c}\right) = 0,$$

eine Gleichung, welche, wenn man statt p seinen Werth substituirt, als Gleichung zwischen den neuen Variabeln u_1, u_2, u_3 erscheint. Will man auch den Anfangspunkt der Koordinaten etwa um die Strecke e verlegen, so hat man nun, wenn q die Strecke ist, von dem neuen Anfangspunkt nach demselben Punkte der Oberfläche, nach welchem der entsprechende Werth von p gerichtet, und

$$q = v_1 e_1 + v_2 e_2 + v_3 e_3$$

ist, nur in der obigen Gleichung statt p seinen Werth $q + e$ einzuführen, um die verlangte Gleichung zu erhalten, oder ist $e = \alpha a + \beta b + \gamma c$, so hat man, wie sich sogleich ergibt,

$$f\left(\frac{q \cdot b \cdot c}{a \cdot b \cdot c} + \alpha, \frac{a \cdot q \cdot c}{a \cdot b \cdot c} + \beta, \frac{a \cdot b \cdot q}{a \cdot b \cdot c} + \gamma\right) = 0$$

als die verlangte Gleichung zwischen den neuen Variabeln v_1, v_2, v_3 . Will man diese Gleichung als blossе Zahlengleichung darstellen, so hat man nur die neuen Grundmasse auf bestimmte Weise als Vielfachensummen der ursprünglichen darzustellen und in die Gleichung einzuführen. Es sei

$$\begin{aligned} e_1 &= \alpha_1 a + \beta_1 b + \gamma_1 c \\ e_2 &= \alpha_2 a + \beta_2 b + \gamma_2 c \\ e_3 &= \alpha_3 a + \beta_3 b + \gamma_3 c, \end{aligned}$$

so zeigt sich unmittelbar, wie sich die verlangte Gleichung darstellt in der Form

O parágrafo 92 tratou da transformação de coordenadas em geometria, na página 128, foram dadas três medidas fundamentais e três medidas fundamentais mutualmente independentes dadas como soma de múltiplos de medidas originais fundamentais. Nesse item,

a, b, c eram três quantidades ou medidas fundamentais e e_1, e_2, e_3 três novas quantidades ou medidas independentes fundamentais, onde:

$$e_1 = \alpha_1 a + \beta_1 b + \gamma_1 c \quad e_2 = \alpha_2 a + \beta_2 b + \gamma_2 c \quad e_3 = \alpha_3 a + \beta_3 b + \gamma_3 c$$

E o elemento p e q podiam ser escritos:

$$p = u_1 e_1 + u_2 e_2 + \dots + u_n e_n$$

$$q = v_1 e_1 + v_2 e_2 + \dots + v_n e_n$$

§ 107. Ehe wir nun zu dem vollständigen Begriffe des äusseren Produktes der Elementargrössen übergehen, wollen wir den Begriff der Elementarsysteme feststellen. Dieser Begriff gründet sich wie der der Ausdehnungssysteme (§ 16) auf den Begriff der Abhängigkeit. Wir nennen eine Elementargrösse erster St. abhängig von andern Elementargrössen, wenn sie sich als Vielfachensumme derselben darstellen lässt, hingegen nennen wir mehrere Elementargrössen erster St. unabhängig, wenn zwischen ihnen keine Abhängigkeit in dem angegebenen Sinne statt findet, d. h. keine von ihnen sich als Vielfachensumme der übrigen darstellen lässt. Nun verstehen wir unter einem Elementarsysteme n -ter Stufe die Gesamtheit der Elemente, welche von n Elementen abhängig sind, während diese n Elemente von einander unabhängig sind. Sind nun $\alpha, \beta, \gamma \dots$ die n von einander unabhängigen Elemente, und ich betrachte zwei von ihnen abhängige Elemente, ρ und σ , so wird auch ihre Differenz sich als Vielfachensumme jener n Elemente darstellen lassen; diese Differenz, welche die gegenseitige Abweichung beider Elemente darstellt, hat zum Gewichte null, und man erhält daher $\rho - \sigma$ in der Form dargestellt:

$$\rho - \sigma = a\alpha + b\beta + c\gamma + \dots,$$

wo zugleich

No parágrafo 107, página 149, foram dados $\alpha, \beta, \gamma \dots n$ elementos mutualmente independentes e se ρ e δ são dependentes, então sua diferença podia ser representada como múltiplo da soma desses n elementos, ou seja, $\rho - \sigma = a.\alpha + b.\beta + c.\gamma + \dots$

oder, indem man die Gesetze der äusseren Multiplikation anwendet, wenn $b \cdot \alpha\beta$ gleich bezeichnet ist mit $a\alpha\beta$, d. h. b gleich bezeichnet ist mit a ; d. h., da ihre Summe eins, also positiv ist, wenn beide Koeffizienten oder Gewichte positiv sind. Ist einer derselben null, so ist das Element ein Gränzelement. Durch Fortsetzung desselben Verfahrens können wir nun beweisen, dass ein Element ρ dann und nur dann zwischen einer Reihe von Elementen $\alpha, \beta, \gamma \dots$, welche von einander unabhängig sind, liege, wenn es sich in der Form

$$\rho = a\alpha + b\beta + c\gamma + \dots$$

mit lauter positiven Koeffizienten darstellen lasse. Wir sagten, dass ein Element ρ dann und nur dann zwischen einer Reihe von Elementen liege, wenn es zwischen dem ersten Elemente dieser Reihe und einem zwischen den folgenden befindlichen Elemente liege. Soll ρ daher zwischen $\alpha, \beta, \gamma \dots$ liegen, so muss es zwischen α und einem zwischen $\beta, \gamma \dots$ liegenden Elemente sich befinden, es muss also ρ sich als Vielfachensumme von α und einem zwischen $\beta, \gamma \dots$ liegenden Elemente, deren Koeffizienten beide positiv sind, darstellen lassen; also muss zuerst der Koeffizient von α positiv sein, demnächst aber auch der Koeffizient des zwischen $\beta, \gamma \dots$ liegenden Elementes, dies Element muss sich aber aus demselben Grunde als Vielfachensumme von β und einem zwischen den folgenden Elementen $\gamma \dots$ befindlichen Elemente mit positiven Koeffizienten darstellen lassen; in dem Ausdrucke für ρ war aber dies zwischen $\beta, \gamma \dots$ liegende Element mit einem positiven Koeffizienten multiplicirt; also werden wir, indem wir den für dies Element gefundenen Ausdruck in den Ausdruck für ρ einführen, und die Klammer auflösen, ρ als Vielfachensumme von den Elementen α, β und einem zwischen den folgenden Elementen $\gamma \dots$ befindlichen Elemente mit positiven Koeffizienten dargestellt haben, und da wir dies Verfahren bis zum letzten Elemente hin fortsetzen können, so folgt, dass jedes zwischen $\alpha, \beta, \gamma \dots$ liegende Element sich als Vielfachensumme von $\alpha, \beta, \gamma \dots$ mit positiven Koeffizienten darstellen lasse. Es ist nun noch zu zeigen, dass auch jedes Element, was sich in dieser Form darstellen lasse, Zwischenelement sei. Ist ein Element ρ in der obigen Form dargestellt

$$\rho = a\alpha + b\beta + c\gamma + \dots,$$

No parágrafo 110, página 155, Grassmann tratou da multiplicação, divisão e projeção de magnitudes elementares, ele apresentou um elemento ρ que seria representado de única forma pela somatória dos n elementos independentes $\alpha, \beta, \gamma \dots$ onde $a, b, c \dots$ eram coeficientes positivos, ou seja, $\rho = a\alpha + b\beta + c\gamma + \dots$.

ELEMENTS OF VECTOR ANALYSIS.

BY J. WILLARD GIBBS.

[The fundamental principles of the following analysis are such as are familiar under a slightly different form to students of quaternions. The manner in which the subject is developed is somewhat different from that followed in treatises on quaternions, since the object of the writer does not require any use of the conception of the quaternion, being simply to give a suitable notation for those relations between vectors, or between vectors and scalars, which seem most important, and which lend themselves most readily to analytical transformations, and to explain some of these transformations. As a precedent for such a departure from quaternionic usage, Clifford's *Kinematic* may be cited. In this connection, the name of Grassmann may also be mentioned, to whose system the following method attaches itself in some respects more closely than to that of Hamilton.]

CHAPTER I.

CONCERNING THE ALGEBRA OF VECTORS.

Fundamental Notions.

1. *Definition.*—If anything has magnitude and direction, its magnitude and direction taken together constitute what is called a *vector*.

The numerical description of a vector requires three numbers, but nothing prevents us from using a single letter for its symbolical designation. An algebra or analytical method in which a single letter or other expression is used to specify a vector may be called a *vector algebra* or *vector analysis*.

Def.—As distinguished from vectors the real (positive or negative) quantities of ordinary algebra are called *scalars*.*

As it is convenient that the form of the letter should indicate whether a vector or a scalar is denoted, we shall use the small

Na página 1, Gibbs definiu vetor como algo tivesse magnitude e direção, esta magnitude e direção juntas constituiriam o que seria chamado de vetor.

Distintas de vetores as quantidades reais (positiva ou negativa) da álgebra comum foram chamadas de escalares.

Greek letters to denote vectors, and the small English letters to denote scalars. (The three letters, i, j, k , will make an exception, to be mentioned more particularly hereafter. Moreover, π will be used in its usual scalar sense, to denote the ratio of the circumference of a circle to its diameter.)

2. *Def.*—Vectors are said to be *equal* when they are the same both in direction and in magnitude. This equality is denoted by the ordinary sign, as $\alpha = \beta$. The reader will observe that this *vector equation* is the equivalent of three scalar equations.

A vector is said to be equal to zero, when its magnitude is zero. Such vectors may be set equal to one another, irrespectively of any considerations relating to direction.

3. Perhaps the most simple example of a vector is afforded by a directed straight line, as the line drawn from A to B. We may use the notation $\overline{AB}$ to denote this line as a vector, i. e., to denote its length and direction without regard to its position in other respects. The points A and B may be distinguished as the *origin* and the *terminus* of the vector. Since any magnitude may be represented by a length, any vector may be represented by a directed line; and it will often be convenient to use language relating to vectors, which refers to them as thus represented.

Reversal of Direction, Scalar Multiplication and Division.

4. The negative sign (—) reverses the direction of a vector. (Sometimes the sign + may be used to call attention to the fact that the vector has not the negative sign.)

Def.—A vector is said to be *multiplied* or *divided* by a *scalar* when its magnitude is multiplied or divided by the numerical value of the scalar and its direction is either unchanged or reversed according as the scalar is positive or negative. These operations are represented by the same methods as multiplication and division in algebra, and are to be regarded as substantially identical with them. The terms *scalar multiplication* and *scalar division* are used to denote multiplication and division by scalars, whether the quantity multiplied or divided is a scalar or a vector.

5. *Def.*—A unit vector is a vector of which the magnitude is unity.

Any vector may be regarded as the product of a positive scalar (the magnitude of the vector) and a unit vector.

The notation α_0 may be used to denote the magnitude of the vector α .

Na página 2, Gibbs usou letras gregas para denotar vetores e letras para denotar escalares. As letras i, j, k foram uma exceção. Vetores seriam iguais se tiverem a mesma magnitude e direção.

Vetores foram ditos iguais se tiverem as mesmas direção e magnitude.

A ideia mais simples de um vetor seria uma linha reta direcionada, por exemplo, de A para B. Gibbs utilizou a notação $\overline{AB}$ para denotar a linha como um vetor. Os pontos A e B seriam a origem e o término do vetor. Magnitude seria representada por comprimento e um vetor seria representado por uma linha direcionada.

O sinal negativo inverteria a direção do vetor.

Um vetor poderia ser multiplicado ou dividido por um escalar quando a magnitude fosse multiplicada ou dividida pelo valor numérico do escalar e a direção seria inalterada ou invertida de acordo com o escalar ser positivo ou negativo.

Um vetor unidade seria um vetor cuja magnitude fosse a unidade.

Addition and Subtraction of Vectors.

6. *Def.*—The *sum* of the vectors α, β , &c. (written $\alpha + \beta + \&c.$) is the vector found by the following process. Assuming any point A, we determine successively the points B, C, &c., so that $AB = \alpha$, $BC = \beta$, &c. The vector drawn from A to the last point thus determined is the sum required. This is sometimes called the *geometrical* sum, to distinguish it from an *algebraic* sum or an *arithmetical* sum. It is also called the resultant, and α, β , &c., are called the components. When the vectors to be added are all parallel to the same straight line, geometrical addition reduces to algebraic: when they have all the same direction, geometrical addition like algebraic reduces to arithmetical.

It may easily be shown that the value of a sum is not affected by changing the order of two consecutive terms, and therefore that it is not affected by any change in the order of the terms. Again, it is evident from the definition that the value of a sum is not altered by uniting any of its terms in brackets, as $\alpha + [\beta + \gamma] + \&c.$, which is in effect to substitute the sum of the terms enclosed for the terms themselves among the vectors to be added. In other words, the commutative and associative principles of arithmetical and algebraic addition hold true of geometrical addition.

7. *Def.*—A vector is said to be subtracted when it is added after reversal of direction. This is indicated by the use of the sign $-$ instead of $+$.

8. It is easily shown that the distributive principle of arithmetical and algebraic multiplication applies to the multiplication of sums of vectors by scalars or sums of scalars:—i. e.,

$$(m + n + \&c.) [\alpha + \beta + \&c.] = m\alpha + n\alpha + \&c. \\ + m\beta + n\beta + \&c. \\ + \&c.$$

9. *Vector Equations.*—If we have equations between sums and differences of vectors, we may transpose terms in them, multiply or divide by any scalar, and add or subtract the equations, precisely as in the case of the equations of ordinary algebra. Hence, if we have several such equations containing known and unknown vectors, the processes of elimination and reduction by which the unknown vectors may be expressed in terms of the known are precisely the same, and subject to the same limitations, as if the letters representing vectors represented scalars. This will be evident if we consider that in the multiplications incident to elimination in the supposed scalar equations the multipliers are the coefficients of the unknown quantities, or functions of these coefficients, and that such

Na página 3, Gibbs definiu soma e subtração de vetores:

A soma dos vetores $\alpha, \beta \dots$ (escrita $\alpha + \beta + \dots$) seria o vetor encontrado pelo seguinte processo indicado por Gibbs:

Assumindo qualquer ponto A, foram determinados sucessivamente os pontos B, C, ... , de modo que $AB = \alpha$, $BC = \beta$, etc. O vetor traçado de A até o último ponto assim determinado seria a soma necessária. Chamada de soma geométrica, para distingui-la de uma soma algébrica ou de uma soma aritmética. Também foi chamada de resultante, e $\alpha, \beta, \dots$ foram chamados de componentes. Quando os vetores a serem adicionados forem todos paralelos à mesma linha reta, a adição geométrica se reduziria à algébrica; quando eles tiverem a mesma direção, a adição geométrica, como algébrica, se reduziriam à aritmética. O valor da soma não seria afetado pela alteração da ordem de dois

termos consecutivos e, portanto, não seria afetado por nenhuma alteração na ordem dos termos. Novamente, seria evidente a partir da definição que o valor de uma soma não fosse alterado associando qualquer um de seus termos entre parênteses, como $\alpha + [\beta + \gamma] + \dots$.

Em outras palavras, os princípios comutativos e associativos da aritmética e adição algébrica valeriam para adição geométrica.

Em outra definição, um vetor seria subtraído quando fosse adicionado após a inversão de direção. Isso é indicado pelo uso do sinal $-$ em vez de $+$.

10. *Linear relation of four vectors, Coördinates.*—If α , β , and γ are any given vectors not parallel to the same plane, any other vector ρ may be expressed in the form

$$\rho = a\alpha + b\beta + c\gamma.$$

If α , β , and γ are unit vectors, a , b , and c are the ordinary scalar components of ρ parallel to α , β , and γ . If $\rho = \overline{OP}$, (α , β , γ being unit vectors,) a , b , and c are the cartesian coördinates of the point P referred to axes through O parallel to α , β , and γ . When the values of these scalars are given, ρ is said to be given in terms of α , β , and γ . It is generally in this way that the value of a vector is specified, viz., in terms of three known vectors. For such purposes of reference, a system of three mutually perpendicular vectors have certain evident advantages.

11. *Normal systems of unit vectors.*—The letters i , j , k are appropriated to the designation of a *normal system of unit vectors*, i. e., three unit vectors, each of which is at right angles to the other two and determined in direction by them in a perfectly definite manner. We shall always suppose that k is on the side of the i - j plane on which a rotation from i to j (through one right angle) appears counter-clock-wise. In other words, the directions of i , j , and k are to be so determined that if they be turned (remaining rigidly connected with each other) so that i points to the east, and j to the north, k will point upward. When rectangular axes of X , Y , and Z are employed, their directions will be conformed to a similar condition, and i , j , k (when the contrary is not stated) will be supposed parallel to these axes respectively. We may have occasion to use more than one such system of unit vectors, just as we may use more than one system of coördinate axes. In such cases, the different systems may be distinguished by accents or otherwise.

12. *Numerical computation of a geometrical sum.*—If

$$\begin{aligned}\rho &= a\alpha + b\beta + c\gamma, \\ \sigma &= a'\alpha + b'\beta + c'\gamma, \\ &\&c.,\end{aligned}$$

then

$$\rho + \sigma + \&c. = (a + a' + \&c.)\alpha + (b + b' + \&c.)\beta + (c + c' + \&c.)\gamma.$$

Na página 4, Gibbs deu uma relação linear de quatro vetores ou coordenadas: se α, β, γ fossem vetores não paralelos a um mesmo plano, então outro vetor podia ser expresso como: $\rho = a\alpha + b\beta + b\gamma$ com α, β, γ vetores unidades e a, b, c escalares. Se $\rho = \overline{OP}$ (segmento $\overline{OP}$) e α, β, γ fossem vetores unidades, então a, b, c eram as coordenadas cartesianas do ponto P em relação aos eixos.

Um vetor era caracterizado em termos de três vetores.

Para Gibbs, as letras i, j, k eram apropriadas para designação do sistema normal de vetores unitários, isto é, os três vetores unitários, cada um deles perpendicularmente aos outros dois e determinado na direção por eles de uma maneira perfeitamente definida.

Supondo que k está no plano ij em uma rotação de i para j , através de um ângulo reto, apareceria no sentido anti-horário. Em outras palavras, as direções i, j, k seriam determinadas se fossem transformadas, permanecendo rigidamente conectadas entre si, de modo que se i apontasse para leste, j para norte e k apontaria para cima.

Quando eixos retangulares, X, Y, Z fossem empregados, as direções eram confirmadas com uma condição similar, e i, j, k , quando não fosse indicado o contrário, seria supostamente paralelo a esses eixos respectivamente.

Direct and Skew Products of Vectors.

13. *Def.*—The *direct product* of α and β (written $\alpha.\beta$) is the scalar quantity obtained by multiplying the product of their magnitudes, by the cosine of the angle made by their directions.

14. *Def.*—The *skew product* of α and β (written $\alpha \times \beta$) is a vector function of α and β . Its magnitude is obtained by multiplying the product of the magnitudes of α and β by the sine of the angle made by their directions. Its direction is at right angles to α and β , and on that side of the plane containing α and β (supposed drawn from a common origin), on which a rotation from α to β through an arc of less than 180° appears counter-clock-wise.

The direction of $\alpha \times \beta$ may also be defined as that in which an ordinary screw advances as it turns so as to carry α toward β .

Again, if α be directed toward the east, and β lie in the same horizontal plane and on the north side of α , $\alpha \times \beta$ will be directed upward.

15. It is evident from the preceding definitions that

$$\alpha.\beta = \beta.\alpha, \quad \text{and} \quad \alpha \times \beta = -\beta \times \alpha.$$

16. Moreover,

$$\begin{aligned} [n\alpha].\beta &= \alpha.[n\beta] = n[\alpha.\beta], \\ \text{and} \quad [n\alpha] \times \beta &= \alpha \times [n\beta] = n[\alpha \times \beta]. \end{aligned}$$

The brackets may therefore be omitted in such expressions.

17. From the definitions of No. 11 it appears that

$$\begin{aligned} i.i &= j.j = k.k = 1, \\ i.j &= j.i = i.k = k.i = j.k = k.j = 0, \\ i \times i &= 0, \quad j \times j = 0, \quad k \times k = 0, \\ i \times j &= k, \quad j \times k = i, \quad k \times i = j, \\ j \times i &= -k, \quad k \times j = -i, \quad i \times k = -j. \end{aligned}$$

18. If we resolve β into two components β' and β'' , of which the first is parallel and the second perpendicular to α , we shall have

$$\alpha.\beta = \alpha.\beta' \quad \text{and} \quad \alpha \times \beta = \alpha \times \beta''.$$

19. $\alpha.[\beta + \gamma] = \alpha.\beta + \alpha.\gamma$ and $\alpha \times [\beta + \gamma] = \alpha \times \beta + \alpha \times \gamma$.

To prove this, let $\sigma = \beta + \gamma$, and resolve each of the vectors β , γ , σ into two components, one parallel and the other perpendicular to α . Let these be β' , β'' , γ' , γ'' , σ' , σ'' . Then the equations to be proved will reduce by the last section to

Na página 5, Gibbs definiu produto “direto” $\alpha.\beta$ como sendo o produto de suas magnitudes (atualmente módulos) pelo cosseno do ângulo entre as direções, que atualmente é conhecido como produto escalar. Também definiu produto “oblíquo”, conhecido por produto

vetorial $\alpha \times \beta$ que seria uma função vetorial de α e β , cuja magnitude seria o produto das magnitudes de α e β pelo seno do ângulo entre elas.

As operações com as unidades da base i, j, k seriam:

$$i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = 1$$

$$i \cdot j = j \cdot i = k \cdot i = j \cdot k = k \cdot j = 0$$

$$i \times i = 0 \quad i \times j = k \quad i \times k = -j$$

$$j \times j = 0 \quad j \times k = i \quad j \times i = -k$$

$$k \times k = 0 \quad k \times i = j \quad k \times j = -i$$

A partir dessas operações Gibbs definiu: $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$ e $\alpha \times \beta = -\beta \times \alpha$ e a propriedade distributiva dos dois produtos: $\alpha \cdot [\beta + \gamma] = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$
 $\alpha \times [\beta + \gamma] = \alpha \times \beta + \alpha \times \gamma$.

CHAPTER II.

CONCERNING THE DIFFERENTIAL AND INTEGRAL CALCULUS
OF VECTORS.

42. *Differentials of vectors.*—The *differential* of a vector is the *geometrical* difference of two values of that vector which differ infinitely little. It is itself a vector, and may make any angle with the vector differentiated. It is expressed by the same sign (d) as the differentials of ordinary analysis.

With reference to any fixed axes, the components of the differential of a vector are manifestly equal to the differentials of the components of the vector, i. e., if α , β , and γ are fixed unit vectors, and

$$\begin{aligned}\rho &= x\alpha + y\beta + z\gamma, \\ d\rho &= dx\alpha + dy\beta + dz\gamma.\end{aligned}$$

43. *Differential of a function of several variables.*—The differential of a vector or scalar function of any number of vector or scalar variables is evidently the sum (geometrical or algebraic, according as the function is vector or scalar,) of the differentials of the function due to the separate variation of the several variables.

44. *Differential of a product.*—The differential of a product of any kind due to the variation of a single factor is obtained by prefixing the sign of differentiation to that factor in the product. This is evidently true of differentials, since it will hold true even of finite differences.

45. From these principles we obtain the following identical equations:

$$d(\alpha + \beta) = d\alpha + d\beta, \quad (1)$$

$$d(n\alpha) = dn\alpha + n d\alpha, \quad (2)$$

$$d(\alpha.\beta) = d\alpha.\beta + \alpha.d\beta, \quad (3)$$

$$d[\alpha \times \beta] = d\alpha \times \beta + \alpha \times d\beta, \quad (4)$$

$$d(\alpha.\beta \times \gamma) = d\alpha.\beta \times \gamma + \alpha.d\beta \times \gamma + \alpha.\beta \times d\gamma, \quad (5)$$

$$d[(\alpha.\beta)\gamma] = (d\alpha.\beta)\gamma + (\alpha.d\beta)\gamma + (\alpha.\beta)d\gamma. \quad (6)$$

46. *Differential coefficient with respect to a scalar.*—The quotient obtained by dividing the differential of a vector due to the variation of any scalar of which it is a function by the differential of that scalar is called the differential coefficient of the vector with respect to the scalar, and is indicated in the same manner as the differential coefficients of ordinary analysis.

No capítulo II, página 14, Gibbs apresentou a definição de diferencial de vetores, que seria a diferença geométrica de dois valores daquele vetor que diferem infinitamente e suas propriedades.

Em relação aos eixos fixos, os componentes da diferencial de um vetor eram iguais às diferenciais dos componentes do vetor, considerando α, β, γ unidades vetoriais.

Então se: $\rho = x\alpha + y\beta + z\gamma \quad d\rho = dx\alpha + dy\beta + dz\gamma$.

APÊNDICE XXII *Sur La composition des forces em statique* (1875)

Étant données n lignes $OA_1, OA_2, \dots, OA_n$, ayant leur origine en un point O , déterminer pour ces lignes une loi de composition d'après les conditions suivantes :

I. La résultante totale, unique et déterminée, demeurera invariable quand, à quelques-unes de ces lignes, on substituera leur résultante partielle. Elle sera indépendante de l'ordre dans lequel auront été faites les compositions partielles.

II. Elle sera aussi indépendante de l'orientation du système dans l'espace, c'est-à-dire qu'elle se déplacera en formant avec les lignes un système invariable quand on leur imprimera un déplacement quelconque autour du point O .

Dans cette manière de poser la question, il est nécessaire de bien prouver les points qui paraîtraient le plus évidents s'il s'agissait réellement de forces ; la conclusion aura d'autant plus de valeur qu'on aura moins admis de conditions pour l'obtenir.

Étant données n lignes $OA_1, OA_2, \dots, OA_n$, ayant leur origine en un point O , déterminer pour ces lignes une loi de composition d'après les conditions suivantes :

I. La résultante totale, unique et déterminée, demeurera invariable quand, à quelques-unes de ces lignes, on substituera leur résultante partielle. Elle sera indépendante de l'ordre dans lequel auront été faites les compositions partielles.

II. Elle sera aussi indépendante de l'orientation du système dans l'espace, c'est-à-dire qu'elle se déplacera en formant avec les lignes un système invariable quand on leur imprimera un déplacement quelconque autour du point O .

Dans cette manière de poser la question, il est nécessaire de bien prouver les points qui paraîtraient le plus évidents s'il s'agissait réellement de forces ; la conclusion aura d'autant plus de valeur qu'on aura moins admis de conditions pour l'obtenir.

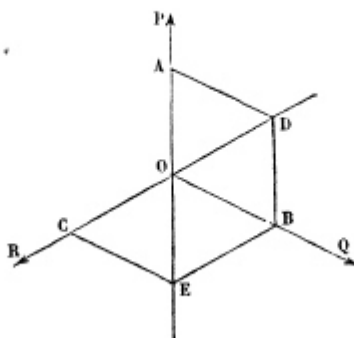
Na página 283, Darboux assumiu dois pressupostos ou axiomas:

Dadas n linhas todas começando no mesmo ponto O , a lei da composição seria tal que:

I. A resultante total única e determinada, permaneceria invariável e independente da ordem das resultantes parciais.

II. A resultante seria independente da orientação do sistema no espaço, isto é, se moveria formando com as linhas um sistema invariável quando fossem impressos alguns deslocamentos ao redor do ponto O . Ou ainda, a resultante total seria inalterada por uma rotação dos segmentos sobre O .

Soient, en effet, P, Q, R trois lignes dont la résultante soit nulle.



Na página 285, dadas três linhas P, Q, R que tinham origem em O em a resultante fosse nula.

286

BULLETIN DES SCIENCES

Prenons

$$OA = \varphi(P), \quad OB = \varphi(Q), \quad OC = \varphi(R);$$

OP sera, en direction, la diagonale du parallélogramme construit sur OB, OC ; OR la diagonale du parallélogramme construit sur OA, OB . On a donc

$$OD = BE = OC, \quad \text{ou} \quad OD = \varphi(R).$$

Comme R est la grandeur de la résultante des deux lignes P, Q , on voit que la diagonale du parallélogramme construit sur $\varphi(P), \varphi(Q)$ a pour grandeur $\varphi(R)$, comme nous l'avions annoncé. De tout ce qui précède résulte la loi de composition suivante :

Étant données n lignes $P_1, P_2, \dots, P_n$, la loi de composition la plus générale satisfaisant aux conditions I, II sera la suivante. On choisira une fonction $\varphi(x)$ et l'on portera des longueurs égales à $\varphi(P_1), \varphi(P_2), \dots, \varphi(P_n)$ respectivement sur $P_1, P_2, \dots, P_n$, dans un sens déterminé par le signe de chacune de ces fonctions. On composera toutes ces lignes d'après les règles du polygone des forces, c'est-à-dire en les portant successivement les unes à la suite des autres; le côté qui fermera ce polygone donnera la direction de la résultante R , et il sera égal en grandeur à $\varphi(R)$.

Na página 286, Darboux apresentou $OA = \Phi(P)$, $OB = \Phi(Q)$, $OC = \Phi(R)$ que seriam as direções dos segmentos OA, OB, OC .

OP , seria em direção, a diagonal do paralelogramo construído sobre OB , OC ,
 OR a diagonal do paralelogramo construído sobre OB e OA .

III. La loi de la composition des lignes doit se réduire à celle de l'addition algébrique pour des lignes de même direction.

Voyons les conséquences de cette hypothèse sur la forme de la fonction $\varphi(P)$.

Considérons deux lignes quelconques P, Q , de même direction et de même sens, et d'autres lignes quelconques $S, T, \dots$. Dans le polygone des lignes résultant de la composition figurent deux côtés parallèles, $\varphi(P)$ et $\varphi(Q)$. Mais, si l'on compose P, Q en une autre

Nas páginas 286 e 287, Darboux enunciou o terceiro axioma, vide figura em Apêndice XXII:

III. A lei da composição das linhas se reduziria a adição algébrica das linhas de mesma direção.

Ele considerou duas linhas quaisquer P e Q de mesma direção e sentido e outras quaisquer linhas S e T . O polígono de linhas resultante da composição apareceu com dois lados paralelos $\Phi(P)$ e $\Phi(Q)$. Mas se a composição P, Q em outra linha $P+Q$, os dois lados $\Phi(P)$ e $\Phi(Q)$ seriam substituídos por um único $\phi(P+Q)$ que seria paralelo. Como a resultante total não deveria ser alterada, então:

$$\phi(P+Q) = \phi(P) + \phi(Q) \quad .$$

On sait résoudre l'équation précédente en supposant $\varphi(P)$ continue. La fonction qu'on obtient alors est

$$\varphi(P) = aP.$$

Mais nous allons montrer que, en supposant $\varphi(P)$ simplement positif, on arrive au même résultat.

En effet, de l'équation

$$\varphi(P+Q) - \varphi(P) = \varphi(Q)$$

on déduit que la fonction $\varphi(x)$, si elle est positive, est toujours croissante. D'ailleurs c'est une conséquence bien connue de l'équation fonctionnelle, que l'on a

$$\varphi\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q} \varphi(1),$$

c'est-à-dire $\varphi(x) = ax$, pour toutes les valeurs commensurables de x .

Ainda na página 287, Darboux então, supôs $\Phi(P)$ uma função contínua tal que $\Phi(P) = aP$.

Se $\Phi(x)$ fosse estritamente positiva então: $\Phi(P+Q) - \Phi(P) = \Phi(Q)$.

Uma consequência seria: $\Phi\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q} \Phi(1)$

A função $\Phi(x) = ax$ seria válida para todos os valores comensuráveis de x .

Com o aumento da função, a mesma fórmula também serviria obviamente, sem que fosse necessário supor que fosse contínua, para os incommensuráveis valores de x .

Se x fosse um incommensurável, entre $\frac{p}{q}$ e $\frac{p+1}{q}$ tem-se

$\Phi\left(\frac{p}{q}\right) < \Phi(x) < \Phi\left(\frac{p+1}{q}\right)$ ou $a\frac{p}{q} < \Phi(x) < a\left(\frac{p+1}{q}\right)$ e $\Phi(x)$ estaria entre duas grandezas de limite ax .

De acordo com a observação acima, pode-se dividir por a e pegando $\Phi(x) = x$, o que levaria a lei do paralelogramo.

Página 287

IV. $\varphi(P)$ est toujours positif, c'est-à-dire $\varphi(P)$ et $\varphi(Q)$ sont de même signe.

Página 288

288

BULLETIN DES SCIENCES

IV_a. $\varphi(P)$ est une fonction continue.

Examinons la signification mécanique de ces deux hypothèses

IV. Si $\varphi(P)$ est toujours de même signe, la résultante des forces P, Q sera toujours dirigée dans leur angle.

IV_a. Si $\varphi(P)$ est continue, la direction de la résultante grandeur seront des fonctions continues des deux forces.

Nas páginas 287 e 288, Darboux no quarto axioma apresentou que :

$\phi(P)$ e $\phi(Q)$ deveriam ser positivas e ter o mesmo sinal;

$\phi(P)$ deveria ser uma função contínua;

$\phi(P)$ se tivesse o mesmo sinal, a resultante das forças P, Q seria sempre direcionada a seu ângulo;

$\phi(P)$ se fosse contínua, a direção da magnitude resultante seria função contínua das duas forças.

APÊNDICE XXIII *Electrical Papers Vol 2* (1894)

4

ELECTRICAL PAPERS.

want as regards definitions; most of the rest of the preliminary consists of developments and reference-formulae, which, were they given later, in the electromagnetic problem, would inconveniently interrupt the argument, and much lengthen the work.

Scalars and Vectors.—In a scalar equation every term is a scalar, or algebraic quantity, a mere magnitude; and + and - have the ordinary signification. But in a vector equation every term stands for a vector, or directed magnitude, and + and - are to be understood as compounding like velocities, forces, etc. Putting all vectors upon one side, we have the general form

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} + \mathbf{D} + \dots = 0;$$

where $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, ..., are any vectors, which, if n in number, may be represented, since their sum is zero, by the n sides of a polygon. Let A_1 , A_2 , A_3 be the three ordinary scalar components of $\mathbf{A}$ referred to any set of three rectangular axes, and similarly for the other vectors. This notation saves multiplication of letters. Then the above equation stands for the three scalar equations

$$\left. \begin{aligned} A_1 + B_1 + C_1 + D_1 + \dots &= 0, \\ A_2 + B_2 + C_2 + D_2 + \dots &= 0, \\ A_3 + B_3 + C_3 + D_3 + \dots &= 0. \end{aligned} \right\}$$

The - sign before a vector simply reverses its direction—that is, negatives its three components.

According to the above, if $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, be rectangular vectors of unit length, we have

$$\mathbf{A} = iA_1 + jA_2 + kA_3, \dots\dots\dots(1)$$

etc.; if A_1 , A_2 , A_3 be the components of $\mathbf{A}$ referred to the axes of $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$. That is, $\mathbf{A}$ is the sum of the three vectors iA_1 , jA_2 , kA_3 , of lengths A_1 , A_2 , A_3 parallel to $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ respectively.

Scalar Product.—We define $\mathbf{AB}$ thus,

$$\mathbf{AB} = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3, \dots\dots\dots(2)$$

and call it the scalar product of the vectors $\mathbf{A}$ and $\mathbf{B}$. Its magnitude is that of $\mathbf{A} \times$ that of $\mathbf{B} \times$ the cosine of the angle between them. Thus, by (1) and (2),

$$A_1 = \mathbf{Ai}, \quad A_2 = \mathbf{Aj}, \quad A_3 = \mathbf{Ak};$$

and in general, $\mathbf{N}$ being any unit vector, $\mathbf{AN}$ is the scalar component of $\mathbf{A}$ parallel to $\mathbf{N}$, or, briefly, the $\mathbf{N}$ component of $\mathbf{A}$. Similarly,

$$\mathbf{i}^2 = 1, \quad \mathbf{j}^2 = 1, \quad \mathbf{k}^2 = 1,$$

because $\mathbf{i}$ and $\mathbf{i}$ are parallel and of length unity, etc. And

$$\mathbf{ij} = 0, \quad \mathbf{jk} = 0, \quad \mathbf{ki} = 0,$$

because $\mathbf{i}$ and $\mathbf{j}$, for instance, are perpendicular. Notice that $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$.

We have also

$$\mathbf{A} = \frac{\mathbf{A}^2}{\mathbf{A}} = \frac{\mathbf{A}^3}{\mathbf{A}^2} = \text{etc.},$$

and

$$\frac{1}{\mathbf{A}} \text{ or } \mathbf{A}^{-1} = \frac{\mathbf{A}}{\mathbf{A}^2} = \frac{\mathbf{A}^2}{\mathbf{A}^3} = \text{etc.}$$

Na página 4, Heaviside definiu escalares e vetores e afirmou que numa equação escalar todo termo seria escalar ou uma quantidade algébrica ou magnitude e que + ou -

teriam um significado comum ou trivial. Numa equação vetorial todo termo representaria um vetor ou magnitude ordenada e os sinais $+$ ou $-$ deveriam ser entendidos como composição de forças e velocidades.

Heaviside considerou vetores numa forma geral:

$A+B+C+\dots=0$ com $A, B, C \dots$ vetores e se n fosse o número de vetores, essa soma seria zero porque representaria os n lados de um polígono.

Dados A_1, A_2, A_3 três componentes escalares comuns de A referidos a um conjunto de três eixos retangulares, e similarmente para outros vetores. Então as equações escalares seriam:

$$A_1+B_1+C_1+\dots=0$$

$$A_2+B_2+C_2+\dots=0$$

$$A_3+B_3+C_3+\dots=0$$

O sinal negativo antes de um vetor inverteria sua direção e seria negativa nas três componentes.

Na mesma página Heaviside considerou i, j, k como vetores retangulares de comprimento unitário e assim:

$A=iA_1+jA_2+kA_3$ onde A_1, A_2, A_3 seriam os componentes de A em relação ao eixo i, j, k , ou seja, A seria a soma dos três vetores iA_1, jA_2, kA_3 de comprimentos A_1, A_2, A_3 .

Para o produto escalar, Heaviside definiu $AB=A_1B_1+A_2B_2+\dots$ onde

$A=iA_1+jA_2+kA_3$ e $B=iB_1+jB_2+kB_3$ pois:

$$i^2=j^2=k^2=1 \text{ e } ij=jk=ki=0$$

Thus A^{-1} has the same direction as A ; its length is the reciprocal of that of A .

Vector Product.—We define VAB thus,

$$VAB = i(A_2B_3 - A_3B_2) + j(A_3B_1 - A_1B_3) + k(A_1B_2 - A_2B_1), \dots (3)$$

and call VAB the vector product of A and B . Its magnitude is that of $A \times$ that of $B \times$ the sine of the angle between them. Its direction is perpendicular to A and to B with the usual conventional relation between positive directions of translation and of rotation (the vine system). Thus,

$$Vij = k, \quad Vjk = i, \quad Vki = j.$$

Notice that $VAB = -VBA$, the direction being reversed by reversing the order of the letters; for, by exchanging A and B in (3), we negative each term.

Hamilton's ∇ .—The operator

$$\nabla = i \frac{d}{dx} + j \frac{d}{dy} + k \frac{d}{dz} \dots (4)$$

may, since the differentiations are scalar, be treated as a vector, of course with either a scalar or a vector to follow it. If it operate on a scalar P we have the vector

$$\nabla P = i \frac{dP}{dx} + j \frac{dP}{dy} + k \frac{dP}{dz}, \dots (5)$$

whose three components are dP/dx , etc. If it operate on a vector A , we have, by (2), the scalar product

$$\nabla A = \frac{dA_1}{dx} + \frac{dA_2}{dy} + \frac{dA_3}{dz}, \dots (6)$$

and, by (3), the vector product

$$V\nabla A = i \left(\frac{dA_3}{dy} - \frac{dA_2}{dz} \right) + j \left(\frac{dA_1}{dz} - \frac{dA_3}{dx} \right) + k \left(\frac{dA_2}{dx} - \frac{dA_1}{dy} \right). \dots (7)$$

The scalar product ∇A is the divergence of the vector A , the amount leaving the unit volume, if it be a flux. The vector product (7) is the curl of A , which will occur below. There are three remarkable theorems relating to ∇ , viz.,

$$P_2 - P_1 = \int_1^2 \nabla P ds, \dots (8)$$

$$\int A ds = \iint B dS, \dots (9)$$

$$\iint C dS = \iiint \nabla C dx. \dots (10)$$

Starting with P , a single-valued scalar function of position, the rise in its value from any point to another is expressed in (8) as the line-integral, along any line joining the points, of $\nabla P ds$, the scalar product of ∇P and ds , the vector element of the curve.

Then passing from an unclosed to a closed curve, let A be any vector function of position (single-valued, of course). Its line-integral round

Na página 5, Heaviside definiu o produto vetorial como:

$$VAB = i(A_2B_3 - A_3B_2) + j(A_3B_1 - A_1B_3) + K(A_1B_2 - A_2B_1) \quad \text{que significava produto}$$

vetorial de A por B . Sua magnitude seria de $A \times B \times \text{seno}$ do ângulo entre A e B e

sua direção deveria ser perpendicular a A e B com a relação convencional entre direções positivas de translação e rotação. Para tal: $V_{ij}=k$, $V_{jk}=i$, $V_{ki}=j$.

Heaviside notou que $VAB=-VBA$, em que a direção inversa, inverteria a ordem das letras.

Heaviside ainda utilizou o operador ∇ de Hamilton como:

$$\nabla = i \frac{d}{dx} + j \frac{d}{dy} + k \frac{d}{dz} .$$

O operador ∇ poderia, desde que as diferenciações fossem escalares, ser tratado como um vetor. O produto vetorial seria:

$$\nabla A = i \left(\frac{dA_3}{dy} - \frac{dA_2}{dz} \right) + j \left(\frac{dA_1}{dz} - \frac{dA_3}{dx} \right) + k \left(\frac{dA_2}{dx} - \frac{dA_1}{dy} \right) .$$

Substituindo n constantes arbitrárias $a_1, a_2, a_3 \dots a_n$ no lugar de $x_1, x_2 \dots x_n$ do lado direito das equações e integrando de t_0 a t com $t, t_0 \in (p, q)$ foram obtidas n funções de t , denotadas por $a'_1, a'_2, \dots, a'_n$.

Procedendo a substituição de $a'_1, a'_2, \dots, a'_n$ no lado direito das equações dadas, no lugar de $x_1, x_2 \dots x_n$ e integrando de t_0 a t foram obtidas n novas funções de t $a''_1, a''_2, \dots, a''_n$.

Repetindo o processo:

$$x_1 = a_1 + a'_1 + a''_1 + \dots$$

$$x_2 = a_2 + a'_2 + a''_2 + \dots$$

$$\vdots$$

$$x_n = a_n + a'_n + a''_n + \dots$$

Essas n séries convergiam no intervalo (p, q) . Suas somas foram indicadas por $x_1, x_2 \dots x_n$ que são funções de t . Para $t = t_0$ foi assumido o valor de $a_1, a_2, a_3 \dots a_n$.

2) Peano desenvolveu uma série de números chamados "complexos" de ordem n , a série de números reais $x = [x_1, x_2 \dots x_n]$. Peano definiu para estes complexos a relação de igualdade, a soma e o produto escalar, comprovando as propriedades associativas, comutativas e distributivas.

différents points de vue, par Grassmann, Hamilton, Cayley, Sylvester, etc. Pour notre but il faut énoncer les définitions principales, et les propriétés qui en découlent immédiatement. *)

2. On appelle *nombre complexe*, ou *complexe*, d'ordre n , la suite de n nombres réels $x_1 \dots x_n$, et on le désigne par la notation $[x_1, \dots, x_n]$. Les nombres $x_1 \dots x_n$ se nomment les éléments du nombre complexe donné. Nous indiquerons aussi un nombre complexe par une seule lettre $\mathbf{x} = [x_1 \dots x_n]$, $\mathbf{y} = [y_1 \dots y_n]$, etc.

Définition de l'égalité $\mathbf{x} = \mathbf{y}$:

$$(\mathbf{x} = \mathbf{y}) = (x_1 = y_1) (x_2 = y_2) \dots (x_n = y_n).^{**})$$

Déf. de la somme:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = [x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n].$$

Déf. du produit $k\mathbf{x}$, où k est un nombre réel:

$$k[x_1, \dots, x_n] = [kx_1, \dots, kx_n].$$

Déf. de la différence:

$$\mathbf{x} - \mathbf{y} = \mathbf{x} + (-1)\mathbf{y}.$$

Déf. du nombre complexe 0:

$$0 = [0, 0, \dots, 0].$$

On déduit que si $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \dots$ sont des complexes d'ordre $n, k, k', \dots$ des nombres réels, $k\mathbf{x} + k'\mathbf{y} + \dots$ représente toujours un complexe. L'addition des nombres complexes est commutative et associative; son module est 0; le produit $k\mathbf{x}$ est distributif par rapport aux deux facteurs.

Si l'on pose

$$\mathbf{i}_1 = [1, 0, 0, \dots, 0], \quad \mathbf{i}_2 = [0, 1, 0, \dots, 0], \quad \dots, \quad \mathbf{i}_n = [0, 0, \dots, 0, 1],$$

tout nombre complexe $\mathbf{x} = [x_1 \dots x_n]$ pourra se réduire à la forme

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{i}_1 + x_2\mathbf{i}_2 + \dots + x_n\mathbf{i}_n.$$

Na página 451, Peano apresentou igualdade entre dois "complexos", soma e subtração, além de considerar $i_1, i_2 \dots i_n$ de ordem n , onde: $i_1 = [1, 0, 0, 0 \dots 0]$ $i_2 = [0, 1, 0, 0, \dots, 0]$ $i_n = [0, 0, 0, 0 \dots 1]$ e cada "complexo" de ordem n , $x = [x_1, x_2 \dots x_n]$ poderia ser escrito na forma: $x = x_1 i_1 + x_2 i_2 + \dots + x_n i_n$.

Somou dois "complexos": $x = x_1 i_1 + x_2 i_2 + \dots + x_n i_n$ e $y = y_1 i_1 + y_2 i_2 + \dots + y_n i_n$

$$x + y = [x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n].$$

Multiplicou por k um número real: $k[x_1, x_2 \dots x_n] = [kx_1, kx_2 \dots kx_n]$.

3. On appelle *substitution* des nombres complexes d'ordre n une opération par laquelle à tout nombre complexe $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]$ correspond un autre complexe

$$[r_{11}x_1 + \dots + r_{1n}x_n, \dots, r_{n1}x_1 + \dots + r_{nn}x_n]$$

Peano chamou de substituição de números complexos de ordem n uma operação que dado um número complexo $x = [x_1, x_2 \dots x_n]$, outro número complexo seria correspondido:

$$[r_{11}x_1 + r_{12}x_2 + \dots + r_{1n}x_n, \dots, r_{n1}x_1 + \dots + r_{nn}x_n].$$

dont les éléments sont des fonctions linéaires et homogènes des éléments du complexe donné. Nous désignerons une substitution par la matrice

$$\begin{pmatrix} r_{11} & \dots & r_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ r_{n1} & \dots & r_{nn} \end{pmatrix} = \{r_{ij}\}$$

formée avec les n^2 coefficients de la substitution; nous indiquerons aussi une substitution par une seule lettre $\mathbf{R}, \mathbf{S}, \dots$. Si $\mathbf{x}$ est un nombre complexe, $\mathbf{R}$ une substitution, $\mathbf{R}\mathbf{x}$ représente le complexe qui dans la substitution $\mathbf{R}$ correspond à $\mathbf{x}$.

Définition de l'égalité de deux substitutions:

$$(\mathbf{R} = \mathbf{S}) = (\text{pour tout complexe } \mathbf{x} \text{ on a } \mathbf{R}\mathbf{x} = \mathbf{S}\mathbf{x}).$$

Déf. de l'égalité d'une substitution et d'un nombre réel k

$$(\mathbf{R} = k) = (\text{pour tout complexe } \mathbf{x} \text{ on a } \mathbf{R}\mathbf{x} = k\mathbf{x}).$$

$$\text{Déf. } (\mathbf{R} + \mathbf{S})\mathbf{x} = \mathbf{R}\mathbf{x} + \mathbf{S}\mathbf{x}.$$

L'opération $\mathbf{R} + \mathbf{S}$ est une substitution qu'on appelle *somme* de $\mathbf{R}$ et $\mathbf{S}$.

$$\text{Déf. } \mathbf{RS}\mathbf{x} = \mathbf{R}(\mathbf{S}\mathbf{x}).$$

L'opération $\mathbf{RS}$ est une substitution qu'on nomme *produit* de $\mathbf{R}$ et $\mathbf{S}$.

On déduit:

$$(\mathbf{R} = \mathbf{S}) = (\text{les coefficients de } \mathbf{R} \text{ et } \mathbf{S} \text{ sont respectivement égaux}).$$

$$\begin{pmatrix} k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & k \end{pmatrix} = k.$$

$$\{r_{ij}\} + \{s_{ij}\} = \{t_{ij}\}, \quad \text{où } t_{ij} = r_{ij} + s_{ij}.$$

$$\{r_{ij}\} \cdot \{s_{ij}\} = \{t_{ij}\}, \quad \text{où } t_{ij} = r_{i1}s_{1j} + r_{i2}s_{2j} + \dots + r_{in}s_{nj}.$$

Na página 452, Peano mostrou definições e propriedades dos funcionais lineares:

$$\text{Utilizando a matriz : } \begin{pmatrix} r_{11} & \dots & r_{1n} \\ r_{n1} & \dots & r_{nn} \end{pmatrix} = \{r_{ij}\}$$

Peano chamou a substituição de $\mathbf{R}$ e o complexo de $\mathbf{x}$, $\mathbf{R}\mathbf{x}$ representaria um outro complexo na substituição $\mathbf{R}$ correspondente a $\mathbf{x}$.

As propriedades válidas:

$$(\mathbf{R} = \mathbf{S}) \text{ então } \mathbf{R}\mathbf{x} = \mathbf{S}\mathbf{x} \text{ igualdade de substituições.}$$

$$(\mathbf{R} + \mathbf{S})\mathbf{x} = \mathbf{R}\mathbf{x} + \mathbf{S}\mathbf{x} \text{ substituição da soma.}$$

$$\mathbf{RS}\mathbf{x} = \mathbf{R}(\mathbf{S}\mathbf{x}) \text{ produto de } \mathbf{R} \text{ por } \mathbf{S}.$$

constante $\mathbf{A}$, si les éléments de $\mathbf{x}$, ou les coefficients de $\mathbf{R}$, ont pour limites les éléments de $\mathbf{a}$, ou les coefficients de $\mathbf{A}$. On prouve tout de suite les théorèmes sur les limites des sommes, des produits, etc. On définit la convergence des séries dont les termes sont des nombres complexes, ou des substitutions, comme pour les séries à termes réels ou imaginaires. La convergence d'une série dont les termes sont des nombres complexes, ou des substitutions, emporte la convergence des n séries formées avec les éléments des termes complexes, ou des n^2 séries formées avec les coefficients des substitutions.

Si le complexe, ou la substitution, $\mathbf{x}(t)$ est fonction de la variable numérique t , on pose

$$\mathbf{x}'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [\mathbf{x}(t+h) - \mathbf{x}(t)], \text{ pour } h \rightarrow 0.$$

On déduit les définitions des dérivées successives, des différentielles, des intégrales définies et indéfinies, etc. On a les formules

$$\begin{aligned} d(\mathbf{R} + \mathbf{S}) &= d\mathbf{R} + d\mathbf{S}, & d \cdot \mathbf{R}\mathbf{S} &= d\mathbf{R} \cdot \mathbf{S} + \mathbf{R} \cdot d\mathbf{S}, \\ d \cdot \mathbf{R}^2 &= d\mathbf{R} \cdot \mathbf{R} + \mathbf{R} \cdot d\mathbf{R}, & d \cdot \mathbf{R}^{-1} &= -\mathbf{R}^{-1} \cdot d\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^{-1}, \text{ etc.} \end{aligned}$$

5. Pour simplifier les recherches sur les limites, nous introduirons les *modules* des complexes et des substitutions.

Déf. $\text{mod. } \mathbf{x} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}; \quad \text{mod. } \mathbf{x} \geq 0.$

On déduit:

$$(\lim \mathbf{x} = \mathbf{a}) = (\lim (\mathbf{x} - \mathbf{a}) = 0).$$

Une série à termes complexes est convergente si la série formée avec les modules des termes est convergente.

De l'identité

$$\begin{aligned} (x_1^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + \dots + y_n^2) - (x_1 y_1 + \dots + x_n y_n)^2 \\ = \sum (x_i y_j - x_j y_i)^2 \end{aligned}$$

on déduit

Na página 453, ele afirmou algumas noções básicas de análise no espaço dos "complexos", definições de limite, derivadas e integrais:

$$d(\mathbf{R} + \mathbf{S}) = d\mathbf{R} + d\mathbf{S}$$

$$d \cdot \mathbf{R}\mathbf{S} = d\mathbf{R} \cdot \mathbf{S} + \mathbf{R} \cdot d\mathbf{S}$$

$$d\mathbf{R}^{-1} = -\mathbf{R}^{-1} \cdot d\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}^{-1}$$

Nessa mesma página, Peano definiu o módulo de um "complexo" $\mathbf{x}$.

$$\text{mod } \mathbf{x} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \quad .$$

Trasformazioni di sistemi lineari.

72. Esistono dei sistemi di enti sui quali sono date le seguenti definizioni:

1. È definita l'*eguaglianza* di due enti a e b del sistema, cioè è definita una proposizione, indicata con $a = b$, la quale esprime una condizione fra due enti del sistema, soddisfatta da certe coppie di enti, e non da altre, e la quale soddisfa alle equazioni logiche:

$$(a = b) = (b = a), (a = b) \cap (b = c) < (a = c).$$

2. È definita la *somma* di due enti a e b , vale a dire è definito un ente, indicato con $a + b$, che appartiene pure al sistema dato, e che soddisfa alle condizioni:

$$(a = b) < (a + c = b + c), a + b = b + a, a + (b + c) = (a + b) + c,$$

e il valor comune dei due membri dell'ultima eguaglianza si indicherà con $a + b + c$.

3. Essendo a un ente del sistema, ed m un numero intero e positivo, colla scrittura ma intenderemo la somma di m enti eguali ad a . È facile riconoscere, essendo $a, b, \dots$ enti del sistema, $m, n, \dots$ numeri interi e positivi, che

$$(a = b) < (ma = mb); m(a + b) = ma + mb; (m + n)a = ma + na; m(na) = (mn)a; 1a = a.$$

Nesse último capítulo, capítulo IX, página 141, Peano definiu sistema de "*entes*" com as seguintes definições:

1. Igualdade: Se a , b e c são "*entes*" do sistema então:

$$(a = b) = (b = a) \text{ e se } (a = b) \cap (b = c) < (a = c) \quad b = c \text{ então } a = c.$$

Verifica-se que o sinal $<$ significava implica $\Rightarrow$ e o sinal $\cap$ intersecção foi interpretado como o sinal lógico $\wedge$.

2. Soma:

Se $a=b$ $\Rightarrow$ $(a+c=b+c)$.

$$(a+b)=(b+a) \text{ .}$$

$$a+(b+c)=(a+b)+c \text{ .}$$

3. Dado m e n positivos e inteiros:

Se $a=b$ $\Rightarrow$ $ma=mb$ então $(ma=mb)$.

$$m(a+b)=ma+mb \text{ .}$$

$$(m+n)a=ma+na \text{ .}$$

$$m(na)=(mn)a \text{ .}$$

$$1a=a \text{ .}$$

— 142 —

Noi supporremo che sia attribuito un significato alla scrittura ma , qualunque sia il numero reale m , in guisa che siano ancora soddisfatte le equazioni precedenti. L'ente ma si dirà *prodotto* del numero (reale) m per l'ente a .

4. Infine supporremo che esista un ente del sistema, che diremo *ente nullo*, e che indicheremo con 0 , tale che, qualunque sia l'ente a , il prodotto del numero 0 per l'ente a dia sempre l'ente 0 , ossia

$$0a = 0.$$

Se alla scrittura $a - b$ si attribuisce il significato $a + (-1)b$, si deduce:

$$a - a = 0, \quad a + 0 = a.$$

DEF. I sistemi di enti per cui sono date le definizioni 1, 2, 3, 4, in guisa da soddisfare alle condizioni imposte, diconsi sistemi lineari.

Si deduce che se $a, b, c, \dots$ sono enti d'uno stesso sistema lineare, $m, n, p, \dots$ numeri reali, ogni funzione lineare omogenea della forma $ma + nb + pc + \dots$ rappresenta un ente dello stesso sistema.

Costituiscono sistemi lineari i numeri reali, e le formazioni della stessa specie nello spazio.

Costituiscono pure sistemi lineari le formazioni di prima specie su d'una retta, o nel piano, i vettori nel piano o nello spazio, e così via. Ma i punti dello spazio non costituiscono un sistema lineare, perchè le loro somme, secondo le definizioni date, non sono più punti, ma formazioni qualunque di prima specie.

Na página 142, Peano continuou com as propriedades:

4. "Ente" nulo 0 tal que: $0a = 0$.

À escrita $a - b$ foi atribuída o significado $a + (-1)b$ ou $a - b = a + (-1)b$.

E deduzido $a - a = 0$ e $a + 0 = a$.

Um sistema de "entes" para os quais são dadas as definições 1,2,3,4, para atender as condições impostas, diga-se sistema linear.

Se a, b, c são "entes" de um mesmo sistema linear, m, n, p números reais, uma função linear homogênea da forma $ma + nb + pc + \dots$ representa um "ente" desse mesmo sistema.

73. DEF. Più enti $a_1 a_2 \dots a_n$ d'un sistema lineare diconsi fra loro dipendenti, se si possono determinare n numeri $m_1 m_2 \dots m_n$, non tutti nulli, in guisa che risulti

$$m_1 a_1 + m_2 a_2 + \dots + m_n a_n = 0.$$

In questo caso uno qualunque degli enti, il cui coefficiente non sia nullo, si può esprimere qual funzione lineare omogenea dei rimanenti.

Na definição seguinte, página 142, Peano considerou os "entes" de um sistema linear dependentes $a_1, a_2, \dots, a_n$ se determinados os n números $m_1, m_2, \dots, m_n$, não fossem todos nulos quando substituídos na equação: $m_1 a_1 + m_2 a_2 + \dots + m_n a_n = 0$. Se o coeficiente de algum "ente" fosse não nulo, ele poderia ser expresso numa função linear homogênea dos demais.

— 143 —

Se gli enti $a_1 \dots a_n$ sono fra loro indipendenti, e se fra essi passa una relazione $m_1 a_1 + \dots + m_n a_n = 0$, si deduce $m_1 = 0, \dots, m_n = 0$.

Essendo $AB \dots$ formazioni di prima specie nello spazio, le equazioni $AB = 0$, $ABC = 0$, $ABCD = 0$ esprimono la dipendenza fra 2 o 3 o 4 formazioni. 5 formazioni di prima specie nello spazio sono sempre fra loro dipendenti.

DEF. Numero delle dimensioni d'un sistema lineare è il massimo numero di enti fra loro indipendenti che si possono prendere nel sistema.

Ad esempio le formazioni di prima specie su d'una retta, o nel piano, o nello spazio, formano sistemi lineari rispettivamente a 2, 3 e 4 dimensioni; i vettori nel piano o nello spazio formano sistemi a 2 e 3 dimensioni; le formazioni di seconda specie nello spazio formano un sistema a 6 dimensioni. I numeri reali formano un sistema lineare ad una dimensione; i numeri immaginari o complessi ordinarii formano un sistema a due dimensioni. Un sistema lineare può anche avere infinite dimensioni.

Na página 143, $a_1, a_2, \dots, a_n$ seriam independentes entre eles, se na equação $m_1 a_1 + m_2 a_2 + \dots + m_n a_n = 0$, $m_1, m_2, \dots, m_n$ todos fossem nulos. $m_1 = m_2 = \dots = m_n = 0$.

O número da dimensão do sistema seria o maior número de "entes" independentes do sistema.

TEOR. Se il sistema A è ad n dimensioni, presi nel sistema n enti indipendenti $a_1 \dots a_n$, e dato un nuovo ente a , si possono sempre determinare n numeri $x_1 \dots x_n$, in guisa che risulti

$$(1) \quad a = x_1 a_1 + \dots + x_n a_n.$$

Inoltre essi sono determinati univocamente, ossia

$$(2) \quad (x_1 a_1 + \dots + x_n a_n = x'_1 a_1 + \dots + x'_n a_n) = (x_1 = x'_1) \cap \dots \cap (x_n = x'_n).$$

Infatti, poichè il sistema a è ad n dimensioni, fra gli $n+1$ enti $a, a_1, \dots, a_n$ passerà una relazione della forma della definizione 1ª; in questa relazione il coefficiente di a non è nullo, perchè altrimenti passerebbe una relazione fra $a_1 \dots a_n$, cosa contraria all'ipotesi; risolta quindi questa relazione rispetto ad a si ha la formula a dimostrarsi.

Se poi fosse $x_1 a_1 + \dots = x'_1 a_1 + \dots$, si deduce $(x_1 - x'_1) a_1 + \dots = 0$; e quindi, poichè $a_1 \dots$ sono indipendenti, $x_1 = x'_1, x_2 = x'_2, \dots$

Ainda na página 143, Peano enunciou o teorema: Dado um sistema linear de dimensão n com n "entes" independentes $a_1, a_2, \dots, a_n$ e dado um novo a , deveria ser determinado de forma única:

Peano supôs $a = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n$ e por absurdo, supôs que a pudesse ser determinado com outros coeficientes utilizando os mesmos "entes" independentes:

$$a = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n = x'_1 a_1 + x'_2 a_2 + \dots + x'_n a_n \quad \text{o que seria deduzido que:}$$

$$x_1 = x'_1, \quad x_2 = x'_2, \quad \dots, \quad x_n = x'_n$$

Ele ainda afirmou que se a fosse adicionado a dimensão n , o número de "entes" tornaria $n+1$ que resultaria num coeficiente de a diferente de zero, contrariando a hipótese.

DEF. Essendo $a_1, \dots, a_n$ n enti indipendenti d'un sistema ad n dimensioni, i numeri $x_1 \dots x_n$ che soddisfano alla relazione (1) diconsi le coordinate di a rispetto agli enti di riferimento $a_1 \dots a_n$.

Le formule

$$(3) (x_1 a_1 + \dots + x_n a_n) + (y_1 a_1 + \dots + y_n a_n) = (x_1 + y_1) a_1 + \dots + (x_n + y_n) a_n,$$

$$(4) m(x_1 a_1 + \dots + x_n a_n) = m x_1 a_1 + \dots + m x_n a_n,$$

danno le coordinate della somma di due enti, e del prodotto d'un numero m per un ente in funzione delle coordinate di questi enti. Le coordinate dell'ente 0 sono tutte nulle.

La definizione precedente coincide colle definizioni date ai N. 34, 38, 46, 50, 60 per le formazioni di prima specie su d'una retta, pei vettori nel piano, per le formazioni di prima e seconda specie nel piano, ecc.

Se $x_1 \dots x_n$ sono le coordinate di a rispetto agli enti di riferimento $a_1 \dots a_n$, ossia

$$a = x_1 a_1 + \dots + x_n a_n,$$

e si conoscono le coordinate di $a_1 \dots a_n$ rispetto ad un altro gruppo di enti di riferimento $b_1 \dots b_n$, ossia

$$a_1 = m_{11} b_1 + \dots + m_{1n} b_n, \dots, a_n = m_{n1} b_1 + \dots + m_{nn} b_n,$$

sostituendo si deduce:

$$a = (m_{11} x_1 + \dots + m_{n1} x_n) b_1 + \dots + (m_{1n} x_1 + \dots + m_{nn} x_n) b_n.$$

Si hanno in tal modo calcolate le coordinate di a rispetto a $b_1 \dots b_n$; esse sono funzioni lineari ed omogenee delle coordinate di a rispetto ad $a_1 \dots a_n$; i coefficienti di queste funzioni sono le coordinate di $a_1 \dots a_n$ rispetto a $b_1 \dots b_n$.

Na página 144, Peano, na definição 3, definiu a soma de "entes".

$$(x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n) + (y_1 a_1 + y_2 a_2 + \dots + y_n a_n) = (x_1 + y_1) a_1 + (x_2 + y_2) a_2 + \dots + (x_n + y_n) a_n$$

Na definição 4, Peano definiu agora a multiplicação por escalar:

$$m(x_1 a_1 + x_2 a_2 + \dots + x_n a_n) = m x_1 a_1 + m x_2 a_2 + \dots + m x_n a_n.$$

Peano considerou um outro "grupo": $b_1, b_2, \dots, b_n$ e que cada $a_1, a_2, \dots, a_n$ poderia ser escrita nesse outro "grupo". Aqui verifica-se que Peano usou a palavra "grupo" correspondendo à atual palavra base. E segue:

$$a = (m_{11}x_1 + \dots + m_{n1}x_n)b_1 + \dots + (m_{1n}x_1 + \dots + m_{nn}x_n)b_n .$$

75. DEF. Un'operazione $\mathbf{R}$, a eseguirsi su ogni ente $\mathbf{a}$ d'un sistema lineare A , dicesi distributiva, se il risultato dell'operazione $\mathbf{R}$ sull'ente $\mathbf{a}$, che indicheremo con $\mathbf{Ra}$, è pure un ente d'un sistema lineare, e sono verificate le identità

$$\mathbf{R}(\mathbf{a} + \mathbf{a}') = \mathbf{Ra} + \mathbf{Ra}', \quad \mathbf{R}(m\mathbf{a}) = m(\mathbf{Ra}),$$

ove $\mathbf{a}$ e $\mathbf{a}'$ sono enti qualunque del sistema A , ed m un numero reale qualunque.

L'ente $\mathbf{Ra}$, cioè il risultato dell'operazione distributiva $\mathbf{R}$ sull'ente $\mathbf{a}$, dicesi *funzione distributiva* di $\mathbf{a}$. Un'operazione distributiva si chiamerà anche *trasformazione lineare*, o *trasformazione* senz'altro. Se l'ente $\mathbf{Ra}$ appartiene allo stesso sistema lineare A cui appartengono gli enti $\mathbf{a}$, l'operazione $\mathbf{R}$ si dirà una *sostituzione*. L'ente $\mathbf{Ra}$ dicesi anche prodotto della trasformazione $\mathbf{R}$ per l'ente $\mathbf{a}$.

PEANO, *Calcolo Geometrico*.

10

Na página 145, Peano apresentou uma operação R aplicada num "ente" de um sistema linear A , atualmente são chamados funcionais lineares e seguem as propriedades da soma e multiplicação por escalar.

$$R(\mathbf{a} + \mathbf{a}') = \mathbf{Ra} + \mathbf{Ra}' .$$

$R(m\mathbf{a}) = m(\mathbf{Ra})$ onde $\mathbf{a}$ e $\mathbf{a}'$ eram quaisquer "entes" do sistema A e m um número real qualquer.

APÊNDICE XXVI *Sur les déterminant Wronskien* (1889)

— 75 —

droite comprise entre les deux cônes augmentera; si le déplacement parallèle de DD' se fait dans les deux autres angles, la longueur diminue; enfin, si on déplace DD' le long de l'un ou l'autre arc, δ ne varie que d'un infiniment petit d'ordre supérieur.

Dans les deux premiers cas, les deux cônes rendus tangents auront en D un point commun isolé qui devient une courbe fermée, infiniment peu tordue et possédant quatre points réels de rétrotorsion sur les génératrices g et g' , si l'on fait que les deux cônes *mordent* un peu l'un dans l'autre.

NOTES MATHÉMATIQUES.

1. *Sur le déterminant Wronskien* (par G. PEANO, professeur à l'Université de Turin). Dans presque tous les traités, on trouve énoncée la proposition : *Si le déterminant formé avec n fonctions d'une même variable et leurs dérivées des ordres $1, \dots (n-1)$ est identiquement nul, on a entre ces fonctions une relation linéaire homogène à coefficients constants.*

Cet énoncé est trop général. Posons, en effet,

$$x = t^2 [1 + \varphi(t)], \quad y = t^2 [1 - \varphi(t)],$$

où $\varphi(t)$ désigne une fonction nulle pour $t = 0$, égale à 1 pour t positif, à -1 , pour t négatif(*). On a pour

$$t < 0, \quad \varphi(t) = -1, \quad x = 0, \quad y = 2t^2;$$

pour

$$t = 0, \quad \varphi(t) = 0, \quad x = 0, \quad y = 0;$$

pour

$$t > 0, \quad \varphi(t) = 1, \quad x = 2t^2, \quad y = 0.$$

(*) Par exemple :

$$\varphi(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin tx}{x} dx,$$

dit M. Peano. Si l'on veut un exemple plus élémentaire, posons

$$\psi(t) = E\left(\frac{1}{1+t^2}\right), \quad \varphi(t) = [1 - \psi(t)] \frac{t + \psi(t)}{\text{mod. } t + \psi(t)},$$

où $E(u)$ désigne le plus grand entier inférieur à u , mod. t , la valeur absolue de t .
(P. M.).

Na página 75, ele enunciou a seguinte proposição:

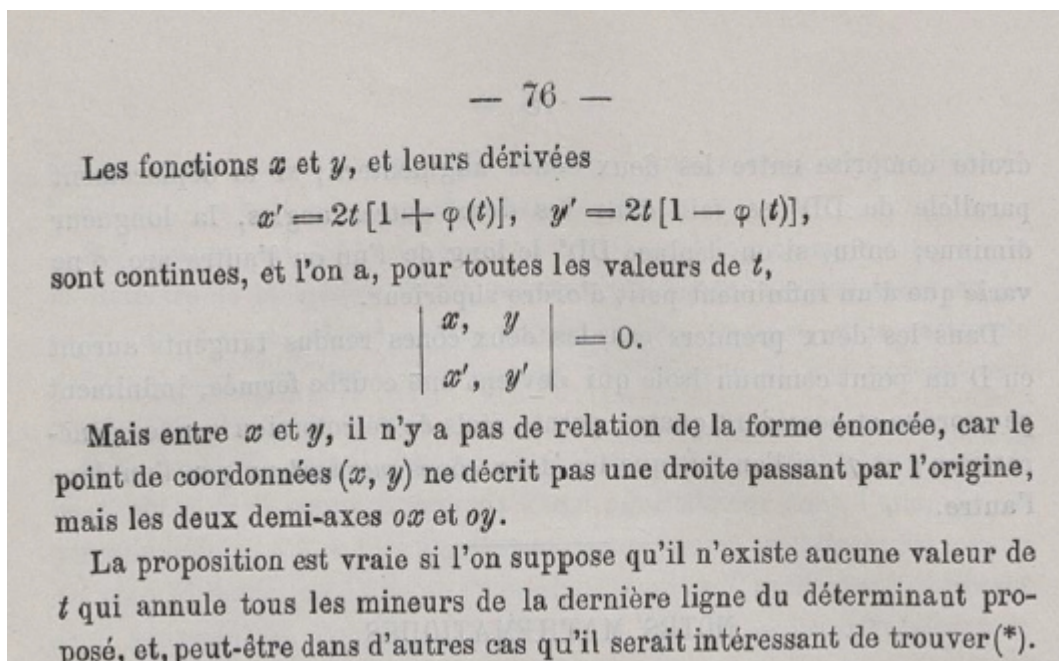
Se um determinante formado por n funções da mesma variável e suas derivadas de ordem 1 até $n-1$ fosse identicamente nulo, existiria entre essas funções uma relação linear homogênea com coeficientes constantes.

Peano exemplificou com duas funções: $x = t^2[1 + \phi(t)]$ e $y = t^2[1 - \phi(t)]$ onde :

$$\phi(t) = -1 \quad t < 0 \quad .$$

$$\phi(t) = 0 \quad t = 0 \quad .$$

$$\phi(t) = 1 \quad t > 0 \quad .$$



Na página 76, Peano calculou as derivadas das funções: $x = t^2[1 + \phi(t)]$ e $y = t^2[1 - \phi(t)]$. Suas derivadas eram contínuas e seriam: $x' = 2t[1 + \phi(t)]$ e $y' = 2t[1 - \phi(t)]$ respectivamente e o determinante nulo para todos valores de t :

$$\begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} = 0 \quad .$$

Segundo Peano a proposição seria verdadeira se não existisse um valor que cancelasse todos os elementos de uma linha do determinante.

APÊNDICE XXVII *Sur les Wronskiens* (1889)

(17). SUR LES WRONSKIENS

(Mathesis, Tome IX, A. 1888, pp. 110-112)

Sulla questione dei Wronskiani, G. PEANO è ritornato nel lavoro n. 92 (del 1897). U. C.

La note ajoutée à la fin de mon petit article sur les Wronskiens (*Mathesis*, p. 75-76) si elle contribue à la clarté, n'ajoute rien à la rigueur de la proposition contestée; et je dois revenir sur ce sujet.

I. La proposition que je conteste est la suivante: *Si le déterminant formé avec n fonctions $x_1, \dots, x_n$ d'une même variable t , et leurs dérivées des ordres $1, \dots, (n-1)$ est nul pour toutes les valeurs de t , il y a entre ces fonctions une relation linéaire homogène à coefficients constants; autrement dit, on peut déterminer n constantes, $C_1, \dots, C_n$, non toutes nulles à la fois, telles que $C_1x_1 + \dots + C_nx_n = 0$ pour toutes les valeurs de t .*

Si une des fonctions, par exemple x_1 , est identiquement nulle, ces fonctions sont liées par la relation linéaire $x_1 + 0x_2 + \dots + 0x_n = 0$. Donc la conclusion de la proposition en question n'est point modifiée si l'on ajoute les mots: *ou bien l'une des fonctions est identiquement nulle.*

Cette proposition peut encore s'énoncer ainsi: *Si le Wronskien des fonctions $x_1, \dots, x_n$ est identiquement nul, le déterminant formé avec les valeurs des fonctions, lorsque l'on donne à la variable n valeurs quelconques, est également nul.*

Un cas particulier du théorème général est le suivant: *Si le déterminant formé avec les dérivées des ordres $1, 2, 3$ des fonctions x, y, z d'une même variable t est identiquement nul, la courbe décrite par le point de coordonnées x, y, z est plane.*

II. Pour démontrer que ces propositions ne sont pas toujours vraies, j'ai indiqué dans ma note précédente, un exemple, où je ne considère que deux fonctions x et y de la variable t ; le déterminant $xy' - x'y$ est identiquement nul; mais entre elles n'existe aucune

Na página 93, Peano enunciou uma proposição que se um determinante fosse formado por n funções, de mesma variável t $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ e suas derivadas de ordem $1, \dots, (n-1)$ fossem nulas para todos os valores de t , existiria uma relação linear homogênea, com coeficientes constantes, em outras palavras, eram determinadas n constantes, $C_1, C_2, \dots, C_n$ nem todas nulas para todos os valores de t na relação linear:

$$C_1x_1 + C_2x_2 + \dots + C_nx_n = 0.$$

Se uma dessas funções x_1 fosse idênticamente nula, essas funções estariam ligadas pela relação linear $x_1 + 0x_2 + 0x_3 + \dots + 0x_n = 0$.

relation linéaire. Ni l'une ni l'autre des deux fonctions n'est identiquement nulle, car x est > 0 si $t > 0$, et y est > 0 si $t < 0$.

Mais ces deux fonctions présentent cette particularité que, pour toutes les valeurs de t , l'une ou l'autre est nulle. Pour faire disparaître cette particularité, posons

$$X = t^2, \quad Y = t \bmod t.$$

Ces deux fonctions de t satisfont à la condition $XY' - X'Y = 0$; elles s'annulent seulement pour $t = 0$, et entre elles n'existe pas de relation linéaire homogène. La somme et la différence de ces fonctions sont les fonctions de mon premier exemple; le point de coordonnées (X, Y) décrit maintenant les deux demi-bissectrices des axes.

Na página 94, Peano citou um contra-exemplo em que considerou duas variáveis x e y na variável t , o determinante de $xy' - x'y$ era identicamente nulo, mas não existia relação linear.

Ele citou o exemplo: $X = t^2$ e $Y = t \bmod t$ que satisfazia a condição: $xy' - x'y$ se cancelaria apenas em $t = 0$, mas entre as duas funções não existia relação linear homogênea.

APÊNDICE XXVIII *Sul determinante wronskiano* (1897)

(92). SUL DETERMINANTE WRONSKIANO

(Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, Serie 5^a, Vol. VI, 1^a Sem., A. 1897, pp. 413-415)

Complemento al lavoro n. 17 del 1889. U. C.

Siano $x_1 x_2 \dots x_n$ funzioni reali d'una variabile reale t . Se fra esse passa la relazione

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n = 0,$$

ove $c_1 c_2 \dots c_n$ sono costanti non tutte nulle, è noto che il Wronskiano, cioè il determinante formato colle $x, Dx, D^2x, \dots D^{n-1}x$ è identicamente nullo.

La proposizione inversa, contrariamente ad un'opinione diffusa, richiede qualche restrizione. Invero, se le funzioni sono semplicemente due, x ed y , per dedurre dall'equazione

$$x dy - y dx = 0$$

che il rapporto di x ad y è costante, si suol dividere per xy , e poi integrare; si dovrà perciò supporre mai nulle le funzioni x ed y . Si potrebbe dividere per y^2 , o per $x^2 + y^2$, e si dimostra la proposizione, supposta mai nulla la funzione y , ovvero rispettivamente che non esista alcun valore della variabile che annulli ad un tempo x ed y .

Che l'inversa della proposizione citata non sussista senz'altro, risulta dall'esempio ⁽¹⁾

$$x = t^2 \quad y = t \bmod t,$$

ove il determinante Wronskiano è sempre nullo, mentre il rapporto x/y vale $+1$ o -1 secondochè t è positivo o negativo.

⁽¹⁾ Diedi quest'esempio nel *Mathesis*, a. 1889, pag. 110.

Na página 282, Peano verificou que dadas funções em t , $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ e $C_1 x_1 + C_2 x_2 + \dots + C_n x_n = 0$ onde nem todos coeficientes eram nulos, então o determinante no formato $x, Dx, D^2x, \dots, D^{n-1}x$ era identicamente nulo.

A proposição inversa, ao contrário de uma opinião generalizada, teria algumas restrições.

Se as funções x e y satisfizessem a equação: $xdy - ydx = 0$ e a relação de x e y fosse constante, se fosse dividida por xy e depois integrada; não se deveria assumir que as funções x e y eram nulas. Se dividida por y^2 ou por $x^2 + y^2$ e houvesse uma proporção, as funções não poderiam ser canceladas ao mesmo tempo.

Que o inverso da proposição citada não existia não havia dúvida:

No exemplo, $x = t^2$ $y = t \bmod t$, o determinante era sempre nulo, mas x/y teria valores de $+1$ ou -1 se t fosse positivo ou negativo.

APÊNDICE XXIX *Analisi della teoria dei vettori* (1898)*Analisi della teoria dei vettori;*

Nota del Socio GIUSEPPE PEANO.

Per esporre la teoria dei vettori, e il calcolo geometrico, si sogliono presupporre cognizioni di Geometria più o meno vaste.

Mi propongo in questo lavoro di esaminare quali idee si incontrano nella teoria di vettori, e di classificarle in primitive, che si ottengono dall'osservazione dello spazio fisico, e in derivate di cui si dà la definizione; e di esaminare quali sono le proposizioni che si devono assumere come primitive, e quali se ne deducono in conseguenza, con puri processi logici, senza oltre ricorrere all'intuizione.

Così la teoria dei vettori risulta sviluppata senza presupporre alcuno studio geometrico precedente. E poichè con questa teoria si può trattare l'intera Geometria, ne deriva la possibilità teorica di sostituire alla Geometria elementare stessa, la teoria dei vettori.

In studii di questo genere è strumento pressochè indispensabile la logica matematica. Farò quindi uso dei segni logici $\epsilon, \cap, \cup, =, \sim, \mathfrak{H}, \bar{\cdot}$, nel preciso significato che hanno nel *Formulaire de Mathématiques*, t. II, § 1, indicato con F_2 § 1 (*).

Idee primitive.

Assumeremo due idee primitive. L'una è quella di "punto", termine che abbreviamo in "pnt".

La seconda idea primitiva è la relazione fra quattro punti a, b, c, d , che indichiamo colla scrittura

$$a - b = c - d,$$

e che si può interpretare, col linguaggio comune, come segue:

Ele conceituou duas ideias primitivas:

Ponto seria abreviado como *pnt* e a relação de quatro pontos:

$$a - b = c - d \quad .$$

* I segmenti ab e cd hanno la stessa lunghezza, la stessa direzione e lo stesso verso »;

ovvero « La figura $abdc$ è un parallelogrammo »,

ovvero « Con un moto di traslazione, si può portare ab a coincidere con cd ».

Assumendo come primitiva la relazione indicata, non ci tocca analizzare le espressioni corrispondenti del linguaggio ordinario; ma ci basta assumere, quali proposizioni primitive, quelle proprietà della relazione considerata, da cui dipendono tutte le altre.

Ammettiamo come proposizioni primitive, e le indichiamo con Pp, le seguenti:

$$a, b, c, d, e, f \in \text{pnt} . \text{O}.$$

$$1. \quad a - b = a - b \quad \text{Pp}$$

$$2. \quad a - b = c - d . \text{O} . c - d = a - b \quad \text{Pp}$$

$$3. \quad a - b = c - d . c - d = e - f . \text{O} . a - b = e - f . \text{Pp}$$

Na página 514, ele mostrou o paralelogramo $abcd$ e suas propriedades, a, b, c, d, e, f , eram pontos e os segmentos ab e cd tinham o mesmo comprimento, mesma direção e mesmo sentido. Com uma translação ab coincidiria com cd .

O símbolo lógico que conecta as sentenças de igualdade nas proposições 1 e 2, pode ser entendido como "então".

Peano admitiu como proposições primitivas:

$$P1 \quad a - b = a - b .$$

$$P2 \quad a - b = c - d \text{ então } c - d = a - b .$$

$$P3 \quad a - b = c - d \text{ e } c - d = e - f \text{ então } a - b = e - f .$$

$$P4 \quad a - b = c - d \text{ então } a - c = b - d .$$

$$4. \quad a - b = c - d . \circ . a - c = b - d \quad Pp$$

e che a causa della sua identità formale con una proposizione d'aritmetica si enuncia: " in una equidifferenza geometrica si possono alternare i medii „.

Che la P4 non sia conseguenza delle precedenti risulta dal fatto, che se con $a - b = c - d$ intendiamo " la distanza da a a b è eguale alla distanza da c a d „, " la retta ab è parallela alla cd „, ecc. Sono verificate le 1, 2, 3 e non la 4.

Dalle P2, 3, 4 si deduce:

$$\begin{aligned} 5. \quad a - b = c - d . &= . a - c = b - d \\ &= . b - a = d - c \\ &= . b - d = a - c \\ &= . c - a = d - b \\ &= . c - d = a - b \\ &= . d - b = c - a \\ &= . d - c = b - a \end{aligned}$$

cioè ogni equidifferenza geometrica si può mettere sotto 8 forme equivalenti. Per dimostrare ad es. la 2^a proposizione, da

$$a - b = c - d$$

alternando (P4) si ha:

$$a - c = b - d,$$

Na página 515, Peano diz que $a - b = c - d$ como a distância de a a b igual à distância de c a d , ab seria paralela à reta cd .

Peano denominou de "equidiferença" geométrica a proposição P4: $a - b = c - d$ então $a - c = b - d$ que significaria também que a distância ab seria igual a distância cd e a reta ab e seria paralela à reta cd .

Vettori.

La differenza $b - a$ di due punti dicesi " vettore ", abbreviato in " vtt ".

$$10. \quad \text{vtt} = \overline{x} \in [\exists \overline{(a, b)} \in (a, b \in \text{pnt} . x = b - a)]. \quad \text{def.}$$

Peano, na página 516, definiu vetor como a diferença $b - a$ entre dois pontos sua abreviatura como vtt.

$$\text{vtt} = \overline{x} \in [\exists \overline{(a, b)} \in (a, b \in \text{pnt} . x = b - a)] \quad .$$

Prodotto d'un vettore per un numero.

Dovendo occuparci di numeri interi, e fratti, positivi e negativi, bisogna supporre nota la teoria (F_2 § 2), ed i simboli relativi, che sono:

$N = (\text{numero intero positivo})$

$n = (\text{numero intero})$

$r = (\text{numero razionale}),$

e in seguito

$Q = (\text{numero reale positivo})$

$q = (\text{numero reale}),$

e i segni di operazioni sui numeri $+, -, \times, /$.

Per definire il prodotto d'un intero a per un vettore u , basta porre queste eguaglianze:

$$30. \quad u \in \text{vtt} . 0 . 0u = 0 \quad \text{def.}$$

$$31. \quad u \in \text{vtt} . a \in n . 0 . (a + 1)u = au + u. \quad \text{def.}$$

Ele fez algumas definições, na página 520, incluindo produto de um número inteiro por vetor.

Item 30: Multiplicação por 0 . Se $u \in \text{vtt}$ então $0.u = 0$.

Item 31: Propriedade Distributiva. Se $u \in \text{vtt}$, $a \in n$ então $(a+1)u = au + u$ e $1.u = u$.

Dalla seconda, ove si faccia $a = 0$, e tenendo conto della prima, si ha $1u = u$.

Fatto nella seconda $a = 1$, e tenendo conto del risultato ora ottenuto, si ha $2u = u + u$; e così $3u = u + u + u$, ecc.; cioè se a è un N , au è la somma di a vettori eguali ad u . Facendo nella stessa $a = -1$, e tenendo conto della prima, si ha $0 = (-1)u + u$, onde $(-1)u = -u$; $(-2)u = -2u$, ecc. Così ne risulta il significato di au , qualunque si sia l'intero a , cioè:

$$32. \quad u \in \text{vtt} . a \in n . \mathcal{O} . au \in \text{vtt}.$$

Colla scrittura ua , non ancora definita, ci conviene indicare lo stesso au , cioè porremo:

$$32'. \quad u \in \text{vtt} . a \in n . \mathcal{O} . ua = au. \quad \text{def.}$$

$$33. \quad u \in \text{vtt} . a, b \in n . \mathcal{O} . (a + b)u = au + bu.$$

A notação de Peano para o item 32 $u \in \text{vtt}$, $a \in n$ então $au \in \text{vtt}$ a inteiro, ou seja, se u era vetor, então au também era vetor com $a \in N$.

Item 32': $u \in \text{vtt}$, $a \in n$ então $ua = au$.

Item 33: $u \in \text{vtt}$, $a, b \in n$ então $(a+b)u = au + bu$ propriedade distributiva.

e all'equidifferenza $a - b = c - d$ attribuisco il significato "l'arco ab si può portare a coincidere con cd con un moto rotatorio attorno al centro", cioè "gli archi ab e cd sono eguali, e dello stesso verso", sono verificate tutte le Pp finora introdotte, P1, 2, 3, 4, 12, ma non la P36; poichè in questa interpretazione, un vettore rappresenta una rotazione; lo 0 rappresenta l'identità; e una rotazione ripetuta può produrre l'identità.

Ne deriva:

$$36'. \quad a \in N, u, v \in vtt. au = av. \supset u = v.$$

Invero

$$Hp. \supset au - av = 0.$$

$$" \quad P34. \supset a(u - v) = 0.$$

$$" \quad P36. \supset Ths.$$

Dividere un vettore u per il numero intero positivo a , o come preferiamo di dire per non introdurre forme nuove di operazione, moltiplicarlo per $1/a$, cioè pel reciproco di a , significa trovare quel vettore v , che moltiplicato per a dà u :

$$37. \quad u \in vtt. a \in N. \supset u/a = \bar{1} vtt \bar{v} \in (av = u). \quad \text{def.}$$

Na página 523, Peano apresentou a propriedade:

Se $a \in N \quad u, v \in vtt \quad au = av$ então $u = v$.

Atualmente conhecida como propriedade do "cancelamento".

$$57. \quad u \in vtt. \supset \text{mod } u = \sqrt{u^2}. \quad \text{def.}$$

Il segno " modulo di u " corrisponde alle frasi " lunghezza o grandezza del vettore u ", " distanza degli estremi del vettore u , questa distanza essendo misurata con una fissata unità di misura".

Si ricava

$$58. \quad u \in vtt. \supset \text{mod } u = 0. = . u = 0.$$

$$59. \quad \text{mod } (-u) = \text{mod } u$$

$$60. \quad u \in vtt. x \in r. \supset \text{mod } (xu) = \text{mod } x \text{ mod } u.$$

Na página 530, Peano fez a definição de módulo:

$$u \in vtt \quad \text{então} \quad \text{mod } u = \sqrt{u^2}.$$

Questa formula, differente delle formule algebriche, esige dimostrazione speciale.

Essendo x un r, per la P54 si ha:

$$(xu + v)^2 \geq 0.$$

Sviluppando si ha:

$$x^2 u^2 + 2x u |v + v^2 \geq 0$$

$$\left(x \bmod u + \frac{u|v}{\bmod u}\right)^2 + v^2 - \left(\frac{u|v}{\bmod u}\right)^2 \geq 0.$$

Ora il primo termine si può rendere tanto piccolo quanto si vuole prendendo convenientemente il razionale x ; è quindi necessario, perchè sia soddisfatta questa diseguaglianza, che sia

$$v^2 - \left(\frac{u|v}{\bmod u}\right)^2 \geq 0,$$

cioè

$$(\bmod u)^2 (\bmod v)^2 \geq (u|v)^2,$$

Na página 531, Peano apresentou a atualmente chamada Desigualdade de Cauchy-Schwarz :

$$(\bmod u)^2 (\bmod v)^2 \geq (u|v)^2 \quad .$$

sistono tutte se al posto di "pnt" leggiamo "r", attribuendo ai segni d'operazione il significato che hanno in aritmetica; e non è verificata quest'ultima.

Sussistono in conseguenza tutte le identità coincidenti formalmente con identità algebriche, e che sono interpretabili colle convenzioni geometriche finora fatte.

Essendo i un vettore non nullo, qi significa "vettore parallelo ad i ". Fra essi è compreso il vettore 0; poichè basta moltiplicare i per 0.

Ma esistono vettori non paralleli ad i :

$$67. \quad i \in \text{vtt} \sim 10. \quad \cap. \quad \exists \text{vtt} \sim (qi). \quad \text{Pp.}$$

Sia j un vtt non parallelo ad i ; $qi + qj$ rappresenta il sistema dei vettori della forma $xi + yj$, ove x ed y sono dei q. Quindi

$$qi + qj = \text{"vettore coplanare con } i \text{ ed } j \text{"}$$

Ma questi non formano ancora l'insieme dei vettori; cioè

$$68. \quad i \in \text{vtt} \sim 10. \quad j \in \text{vtt} \sim (qi). \quad \cap. \quad \exists \text{vtt} \sim (qi + qj). \quad \text{Pp.}$$

"Dato un vettore i non nullo, ed un vettore j non parallelo ad i , esistono vettori non coplanari con i ed j ". Detto k un vettore siffatto, $qi + qj + qk$ rappresenta tutti i vettori della forma $xi + yj + zk$, qualunque siano i numeri reali x, y, z . Ora tutti i vettori sono di tale forma, cioè:

$$69. \quad i \in \text{vtt} \sim 10. \quad j \in \text{vtt} \sim (qi). \quad k \in \text{vtt} \sim (qi + qj). \quad \cap. \\ \text{vtt} = qi + qj + qk. \quad \text{Pp.}$$

Afirmou, na página 533, que se i fosse um vetor não nulo, então qi era um vetor paralelo a i .

Se j um vetor não paralelo a i , $qi + qj$ representaria um sistema de vetores na forma $xi + jy$.

$qi + qj$ representaria um vetor coplanar com i e j

Dado um vetor i não nulo, e um vetor j não paralelo a i , existiria um vetor não coplanar com i e j , se o vetor k satisfizesse, então o vetor $qi + qj + qk$ representaria um vetor na forma $xi + yj + zk$ quaisquer reais x, y, z .

Ou: $\text{vtt} = qi + qj + qk$.