

Luiz Fernando da Silva Gouveia

Classificação de centros e estudo de ciclos limite para sistemas lineares por partes em duas zonas no plano

São José do Rio Preto - SP
2014

Luiz Fernando da Silva Gouveia

Classificação de centros e estudo de ciclos limite para sistemas lineares por partes em duas zonas no plano

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de Sistemas Dinâmicos, junto ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de São José do Rio Preto.

Orientador: Prof. Dr. Claudio Gomes Pessoa.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Claudio Gomes Pessoa
UNESP - São José do Rio Preto

Prof. Dr. João Carlos da Rocha Medrado
Universidade Federal de Goiás

Prof. Dr. Weber Flávio Pereira
UNESP - São José do Rio Preto

São José do Rio Preto
2014

Aos meus pais Alfredo e Maria Teresa que cotidianamente dão a vida por mim.
dedico.

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, gostaria de agradecer a Deus, sem Ele, nada disto seria possível, mesmo trilhando por muitas vezes no caminho da descrença, a mostra de sua paciência e bondade é abundante e cotidiana. Este trabalho também não seria possível sem ajuda de meus pais Alfredo Marques de Gouveia e Maria Teresa Velosa da Silva Gouveia, tudo o que tenho de melhor é devido a vocês que dia a dia se sacrificam por mim, que me ensinaram a ter honra, dignidade, respeito, educação e honestidade. Não existem palavras nas quais posso exprimir o quanto vocês são importantes para mim e cada conquista da minha vida se deve em muito à vocês, muito obrigado por tudo. Aos meus irmãos Paulo Sérgio da Silva Gouveia e Rui Manuel da Silva Gouveia, obrigado pelos ensinamentos de irmãos mais velhos, pela paciência, pelo incentivo e por toda a ajuda que vocês dispuseram na minha vida. Gostaria de agradecer também a minha cunhada Marina Curado Valsechi e a toda minha família por todos os conselhos, todo o apoio, toda paciência e toda prestatividade que sempre tiveram comigo.

Queria dizer um muito obrigado a minha cunhada Talita Storti Garcia, primeiro por todo o apoio e carinho. Segundo, por nos momentos difíceis que vivenciei, ter se preocupado e cuidado de mim como uma irmã.

A minha namorada Monisse Postigo Alves que há dois anos está do meu lado nos momentos bons e ruins, sempre me apoiando, me ajudando, me incentivando e me ensinando, muito obrigado meu amor, essa conquista também é sua. Gostaria também de agradecer aos pais da minha namorada Amélia e Geraldino(pelo almoço de muitos dias hahahaha) e aos meus cunhados Luciana e Neiton pelo incentivo, pelo apoio e pelos conselhos.

Gostaria de agradecer aos meus amigos Kamael, Giordano e Ariadne, nossa amizade perdura desde os tempos de colégio, muito obrigado pelas conversas, saídas, conselhos, compreensão e diversão que vocês proporcionaram, vossa amizade é muito importante para mim.

Não poderia deixar de fora meu companheiro Leonardo Pereira, estamos juntos desde o primeiro dia de faculdade, foram muitas histórias juntas. Muito obrigado meu querido, pela companhia desses seis anos juntos, por muitas vezes vir de Bálsamo para me ajudar a estudar e por tantas outras coisas.

Muito obrigado a melhor turma do mundo, Pedro Benedini, Rafaella Martins, Ana

Maria, Giane, Leonardo, Monisse, sem sombra de dúvidas fomos a melhor turma que o Ibilce alguma vez já teve, nenhuma turma é tão engraçada quanto a gente, faz lanchinhos a tarde como a gente, brinca como a gente, zoa como a gente e faz barulho como a gente, essa conquista também é de vocês.

Na minha vida acadêmica, gostaria de agradecer imensamente ao Prof. Claudio Pessoa, meu orientador. Muito obrigado pelos ensinamentos, pela orientação acadêmica, pela paciência, pela amizade e pela torcida. Gostaria de deixar um muito obrigado a Prof^a. Maria Gorete que me ajudou muito no mestrado e ao Prof. Claudio Buzzi que foi meu orientador na graduação e que proporcionou toda a base para hoje estar terminando o Mestrado. A esses três professores, terei uma eterna gratidão, pois sem dúvida vocês foram peças fundamentais na minha formação profissional.

Por fim, gostaria de agradecer a todas as pessoas (colegas e funcionários do Ibilce) que de forma indireta tiveram participação neste trabalho.

Muito Obrigado a todos vocês.

RESUMO

Este trabalho está dividido em duas partes. Na primeira, iremos introduzir a nomenclatura de Fillipov e os conceitos básicos e em seguida iremos estudar a classificação de centros em sistemas lineares por partes em duas zonas no plano. Para tal fim, iremos encontrar uma mudança de variáveis que nos permita reduzir o número de parâmetros de doze para cinco. Na segunda parte deste trabalho iremos estudar o surgimento de ciclos limites para esta classe de campo de vetores descontínuos através das aplicações de Poincaré em cada zona. Neste trabalho nos restringiremos ao caso em que não há regiões de sliding no conjunto de descontinuidade.

Palavras-chave: Fillipov, Problema do Centro-Foco, Aplicações de Poincaré, Regiões de Costura

ABSTRACT

This work is divided into two parts. At first part we introduce the nomenclature of Fillipov and the basics concepts and then we will study the classification of centers in piecewise linear systems in the plan. To this end we find a change of variables that allows us to reduce the initial twelve parameters to five. In the second part of this work we study the emergence of limit cycles for this class of systems through the Poincaré applications in each region of the plan. In this work we will consider only the case where the set of discontinuity has no sliding regions.

Key-words: Fillipov, Center Problem-Focus, Applications Poincaré Regions Sewing

SUMÁRIO

Introdução	1
1 Preliminares	3
1.1 Sistemas Lineares por Partes em Duas Zonas no Plano	3
1.2 Pontos Singulares Monodrômicos	6
1.3 Formas Normais	7
2 Problema do Centro-Foco em Duas Zonas	14
2.1 Caso 1	14
2.2 Caso 2	19
2.3 Caso 3	20
2.4 Caso 4	20
2.5 Caso 5	21
2.6 Caso 6	21
2.7 Caso 7	22
2.8 Caso 8	22
2.9 Caso 9	23
2.10 Caso 10	23
2.11 Caso 11	24
2.12 Caso 12	25
2.13 Caso 13	25
3 Aplicação de Poincaré e Ciclos Limites	29
3.1 A Aplicação de Poincaré $P_L(y)$	33
3.2 A Aplicação de Poincaré $P_R(y)$	37
3.3 A Aplicação Geral de Poincaré	40

3.4 Ciclos Limites	43
4 Conclusão	49
Bibliografia	50
A Unicidade do Ciclo Limite	52

INTRODUÇÃO

O surgimento de ciclos limites na teoria clássica de Sistemas Dinâmicos Contínuos é um dos problemas mais intrigantes e que até hoje não se tem uma resposta completa. Ao migrarmos para o estudo de Sistemas Dinâmicos Descontínuos, é natural que certos problemas da teoria clássica sejam migrados também, e o surgimento de ciclos limites não foge a regra.

No estudo de Sistemas Dinâmicos Descontínuo, buscamos, sempre que possível, estender os resultados da teoria clássica do caso contínuo. Entretanto em vários problemas estas ferramentas não se aplicam ou necessitam de novas reformulações e estratégias para serem utilizadas. Além disso, no caso descontínuo, muitas vezes surgem resultados inesperados que fogem a nossa intuição. Por exemplo, o surgimento de ciclos limites em sistemas lineares por partes.

Sistemas lineares por partes constituem uma classe de sistemas diferenciais que são amplamente utilizados para modelar muitos problemas reais em diferentes ambientes e são, muitas vezes motivados por problemas da engenharia e biomatemática [3]. Após o trabalho pioneiro de Filippov [7], deve-se destacar nesta área os trabalhos de Coll, Gasull e Prohens [2], Giannakopoulos e Pliete [8], Huan e Yang [12], Kuznetsov, Rinaldi e Gragnani [17], Llibre, Ponce e Torres [13], Shui, Zhang e Li [16] e o trabalho minucioso de Guardia, Seara e Teixeira [9].

O caso dos sistemas lineares por partes em duas zonas no plano é a mais simples configuração possível em sistemas suaves por partes e tal família de sistemas, no caso contínuo, foi completamente estudado em [6], no qual, em particular, foi estabelecida a existência de no máximo um ciclo limite. No entanto, este resultado está longe de ser um resultado geral, pois como mencionado em [12], o estudo dos sistemas lineares por partes no plano, além de ser uma tarefa trabalhosa, apresenta um alto grau de dificuldade, devido à falta de uma forma canônica que possa lidar com uma classe suficientemente ampla de sistemas. Por isso, os resultados apresentados até então são referentes a casos particulares, como os apresentados na segunda parte deste nosso trabalho. Mais precisamente, estudamos sistemas da forma

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = Z(u, v) = \begin{cases} X^+(u, v) = A^+ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + B^+ & \text{se } u \geq 0 \\ X^-(u, v) = A^- \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + B^- & \text{se } u \leq 0 \end{cases} \quad (1)$$

onde $A^\pm = a_{ij}^\pm$ são matrizes constantes 2×2 e $B^\pm$ são vetores constantes de $\mathbb{R}^2$, permitindo apenas regiões de costura. Neste caso, mostramos que o sistema acima apresenta no máximo um ciclo limite (veja a Seção 3.4 do Capítulo 3).

Ainda para sistemas lineares por partes em duas zonas no plano, um dos problemas mais clássicos foi o *Problema do Centro-Foco*, que consiste em determinar condições necessárias e suficientes que nos permita classificar quando uma singularidade monodrômica é centro ou foco. Para resolvermos tal problema podemos calcular a solução explícita do campo e encontrarmos as constantes de Lyapunov através da Aplicação de Poincaré. Em [11] é apresentada uma outra ferramenta que nos permite também resolver o *Problema do Centro-Foco*. No nosso trabalho resolvemos o problema em questão através de treze casos, nos quais em oito casos mostramos a existência de centros e nos demais a existência de focos. Estes casos estão detalhados no Capítulo 2.

Preliminares

1.1 Sistemas Lineares por Partes em Duas Zonas no Plano

Seja $\Sigma = f^{-1}(0)$, onde $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ é a função $f(x, y) = y$. Então, Σ divide o plano em dois semiplanos $\Sigma^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ e $\Sigma^- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < 0\}$. O campo de vetores descontínuo Z , denotado pelo par $Z = (X, Y)$ é definido por

$$Z(q) = \begin{cases} X(q) & \text{se } f(q) \geq 0 \\ Y(q) & \text{se } f(q) \leq 0, \end{cases}$$

onde X, Y são campos de vetores no plano. Note que Z pode ser bi-avaluado nos pontos de Σ . Seguindo a terminologia de Filippov (veja [7]), vamos distinguir os seguintes arcos em Σ .

- *Arco de costura (AC) caracterizado por $Xf \cdot Yf > 0$ (Figura 1.1 (a)).*
- *Arco de deslize (AD) caracterizado por $Xf < 0$ e $Yf > 0$ (Figura 1.1 (b)).*
- *Arco de escape (AE) caracterizado por $Xf > 0$ e $Yf < 0$ (Figura 1.1 (c)).*

De forma usual, Xf denotará a derivada da função f na direção do vetor X , isto é, $Xf = \langle \nabla f, X \rangle$.

Nos arcos AE e AD vamos definir o campo de vetores de Filippov F_Z associado ao campo $Z = (X, Y)$ do seguinte modo. Se $p \in AD$ ou AE então $F_Z(p)$ denota o vetor do cone gerado por $X(p)$ e $Y(p)$ tangente a Σ . Um ponto $p \in \Sigma$ é chamado de *ponto regular* de Z se $p \in AC$ ou $F_Z(p) \neq 0$ e $p \in AD \cup AE$. Caso contrário p será um *ponto singular* de Z em Σ .

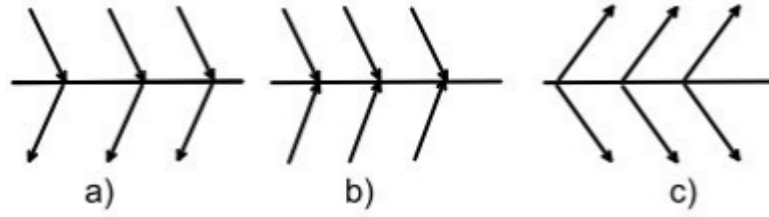


Figura 1.1:

Dado $p \in \Sigma^+ \cup \Sigma^-$ dizemos que p é um ponto singular real (virtual) de $Z = (X, Y)$ se p é um ponto singular de X e $p \in \Sigma^+$ ou é um ponto singular de Y e $p \in \Sigma^-$ (p é um ponto singular de X e $p \in \Sigma^-$ ou p é um ponto singular de Y e $p \in \Sigma^+$).

Uma curva fechada contínua γ consistindo de duas trajetórias, uma de X e outra de Y , e dois pontos $\{p_1, p_2\} = \Sigma \cap \gamma$ é chamada de *pseudo-órbita fechada* de Z se $\{p_1, p_2\}$ são pontos de costura e γ intercepta Σ transversalmente em $\{p_1, p_2\}$.

Seja $p \in \Sigma$ um ponto singular isolado do campo de vetores descontínuo Z . Dizemos que p tem uma pseudo-órbita característica de Z se ocorre um dos itens a seguir:

- Se γ é uma trajetória regular de X (Y) com $p = \gamma(t_0)$, para algum $t_0 \in \mathbb{R}$, então $p \in \gamma \cap \Sigma^+$ ($p \in \gamma \cap \Sigma^-$) (figura 1.2 a));
- Se γ é uma trajetória regular de X (respectivamente Y) com $\lim_{\pm\infty} \gamma(t_0) = p$, então existe uma vizinhança V de p tal que $\gamma \cap V \subset V \cap \Sigma^+$ (respectivamente $\gamma \cap V \subset V \cap \Sigma^-$) (figura 1.2 b));
- Existe uma vizinhança V de p tal que $Xf \cdot Yf < 0$ em $V \cap (\Sigma - \{p\})$ (figura 1.2 c)).

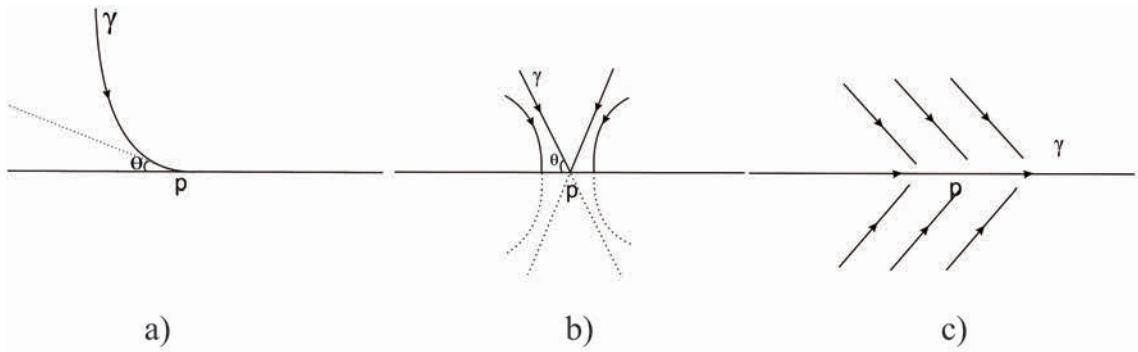


Figura 1.2:

Se $p \in \Sigma$ é um ponto singular isolado de Z e p não possui uma órbita característica, então dizemos que p é um *ponto singular monodrômico* de Z . Um ponto singular de Z

em Σ é um *centro* se existe uma vizinhança V de p tal que para todo $q \in V - \{p\}$ existe uma pseudo-órbita fechada de Z passando por q . Um ponto singular p em Σ de Z é um *foco* se p é um ponto monodrômico mas não é um centro.

Um ponto singular $p \in \Sigma$ é um ponto de dobra de ordem n em X (Y) se $n \in \mathbb{N}$ é par, $X^i f(p) = 0$, para $1 \leq i \leq n-1$ e $X^n f(p) \neq 0$ ($Y^i f(p) = 0$ e $Y^n f(p) \neq 0$). Note que neste caso X (Y) tem contato de ordem n com Σ em p . Considere um sistema de equações diferenciais associado ao campo de vetores descontínuo Z da forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= P(x, y), \\ \dot{y} &= Q(x, y),\end{aligned}\tag{1.1}$$

onde

$$(P(x, y), Q(x, y)) = \begin{cases} (P^+(x, y), Q^+(x, y)) & \text{se } y > 0, \\ (P^-(x, y), Q^-(x, y)) & \text{se } y < 0, \end{cases}$$

e $P^\pm$ e $Q^\pm$ polinômios de grau 1 nas variáveis x e y . Assim, podemos definir os seguintes sistemas de equações diferenciais lineares

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P^+(x, y) \\ Q^+(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^+ & b^+ \\ c^+ & d^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha^+ \\ \beta^+ \end{pmatrix},\tag{1.2}$$

e

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P^-(x, y) \\ Q^-(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^- & b^- \\ c^- & d^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha^- \\ \beta^- \end{pmatrix}.\tag{1.3}$$

Iremos denominar de norte e sul os subsistemas (1.2) e (1.3) respectivamente do sistema (1.1). De [7] sabemos que o fluxo de (1.1) denotado por $\phi(t, (x, y))$ pode ser definido usando os fluxos $\phi^\pm(t, (x, y))$ de (1.2) e (1.3). Por exemplo, para um ponto $(x_0, y_0) \in \Sigma$ satisfazendo $Xf \cdot Yf|_{(x_0, y_0)} > 0$, isto é, $Q^+(x, y)Q^-(x, y) > 0$ definimos o fluxo $\phi(t, (x_0, y_0))$ como segue

$$\phi(t, (x_0, y_0)) = \begin{cases} (\phi^-(t, (x_0, y_0))) & \text{se } t < 0, \text{ e } \phi^-(t, (x, y)) \in \Sigma^- \\ (x_0, y_0) & \text{se } t = 0 \\ (\phi^+(t, (x_0, y_0))) & \text{se } t > 0, \text{ e } \phi^+(t, (x, y)) \in \Sigma^+, \end{cases}$$

se $Q^+(x_0, y_0) > 0$ e $Q^-(x_0, y_0) > 0$; e

$$\phi(t, (x_0, y_0)) = \begin{cases} (\phi^+(t, (x_0, y_0))) & \text{se } t < 0, \text{ e } \phi^+(t, (x, y)) \in \Sigma^+ \\ (x_0, y_0) & \text{se } t = 0 \\ (\phi^-(t, (x_0, y_0))) & \text{se } t > 0, \text{ e } \phi^-(t, (x, y)) \in \Sigma^-, \end{cases}$$

se $Q^+(x_0, y_0) < 0$ e $Q^-(x_0, y_0) < 0$.

Uma vez que o estudo de sistemas diferenciais lineares é conhecido desde as obras de Laplace em 1892, o único campo de pesquisa possível em sistemas diferenciais lineares por partes em duas zonas é sobre as órbitas que se movem em ambos os lados do segmento $y = 0$. Estamos interessados na existência de pseudo-órbitas periódicas em torno de um ponto singular de Z em Σ , em particular no problema *Centro – Foco*.

Se Z possui uma pseudo-órbita fechada, então podemos definir a aplicação de Poincaré a partir de $y = 0$. Vamos começar definindo aplicações de transição através do fluxo da forma $\psi : I \rightarrow J$ com intervalos (limitados ou não) I e J em Σ tal que $\psi(I) = J$. Então para $q \in I$ temos $\phi(t, q) \in J$ onde o tempo t pode ser diferente para cada ponto do intervalo I . O conjunto das órbitas que vão do intervalo I ao intervalo J define o que chamamos de fluxo de transição. Assim, para termos órbitas fechadas em torno de um ponto singular de Z em Σ devemos ter um fluxo de transição $\psi^+ : I^+ \rightarrow J^+$ e $\psi^- : I^- \rightarrow J^-$ para cada subsistema, de modo que $J^+ \cap I^- \neq \emptyset$ e $J^- \cap I^+ \neq \emptyset$. Desse modo, podemos definir a aplicação de Poincaré $\psi^- \circ \psi^+$ e determinar a existência ou não de órbitas fechadas.

1.2 Pontos Singulares Monodrômicos

Nesta seção daremos condições suficientes e necessárias para que um ponto singular de Z em Σ seja monodrômico.

Proposição 1.2.1. *Sejam X e Y campos de vetores associados aos sistemas (1.2) e (1.3) respectivamente. Se p é um ponto singular isolado de Z em Σ e $Xf(p) = X^2f(p) = 0$, então p é um ponto singular de X . Analogamente, se p é um ponto singular isolado de Z em Σ e $Yf(p) = Y^2f(p) = 0$, então p é um ponto singular de Y .*

Demonstração. Temos $p = (x_0, 0)$, então

$$Xf(p) = \langle X(p), \nabla f(p) \rangle = \langle (a^+x_0 + \alpha^+, c^+x_0 + \beta^+), (0, 1) \rangle = c^+x_0 + \beta^+.$$

Como p é ponto singular isolado de Z em Σ e $Xf(p) = 0$, segue que $c^+ \neq 0$ e então $x_0 = -\beta^+/c^+$, isto é, $p = (-\beta^+/c^+, 0)$. Note que $Xf(p) = Q^+(p)$ e

$$X^2f(p) = \langle X(p), \nabla(Xf)(p) \rangle = \langle (P^+(p), Q^+(p)), (c^+, d^+) \rangle = c^+P^+(p) + d^+Q^+(p).$$

Como $Xf(p) = X^2f(p) = 0$, segue que p é ponto singular de X . De modo análogo, provamos o resultado para o campo Y .

□

Corolário 1.2.1. *Sejam X e Y campos de vetores associados aos sistemas (1.2) e (1.3) respectivamente. Se p é um ponto de dobra de X (respectivamente Y), então X (respectivamente Y) tem contato de ordem 2 com Σ .*

Demonstração. A demonstração deste resultado segue diretamente da Proposição 1.2.1. □

Proposição 1.2.2. *Seja p um ponto singular de $Z = (X, Y)$ em Σ . Se p é um ponto singular monodrômico, então $Xf(p) = Yf(p) = 0$ e existe uma vizinhança V de p em Σ com $Xf \cdot Yf|_V > 0$ exceto em p .*

Demonstração. De fato, pois se a condição necessária enunciada na proposição não for satisfeita, então p tem uma órbita característica em Σ e assim p não seria um ponto singular monodrômico de Z . □

O teorema abaixo classifica os pontos singulares monodrômicos de Z .

Teorema 1.2.1. *Seja $Z = (X, Y)$ um campo de vetores descontínuo. Suponhamos que p é um ponto singular de Z em Σ tal que $Xf(p) = Yf(p) = 0$ e $Xf \cdot Yf|_\Sigma > 0$ em uma vizinhança de p em Σ exceto em p . Com essas hipóteses, seguem os seguintes resultados.*

i) Se $X(p) \neq 0$ e $Y(p) \neq 0$ então p é um ponto singular monodrômico de Z se, e somente se, p é uma dobra de ordem n de X com $X^n f(p) < 0$ e p é uma dobra de ordem m de Y com $Y^m f(p) > 0$.

ii) Se $X(p) = 0$ ($Y(p) = 0$) e $Y(p) \neq 0$ ($X(p) \neq 0$), então p é um ponto singular monodrômico de Z se, e somente se p é um ponto singular monodrômico de X (Y) e p é uma dobra de ordem n de Y (X) com $Y^n f(p) > 0$ ($X^n f(p) < 0$).

iii) Se $X(p) = Y(p) = 0$ então p é um ponto singular monodrômico de Z se, e somente se p é um ponto monodrômico de X e Y .

Demonstração. Como p é um ponto singular de Z tal que $Xf(p) = 0 = Yf(p)$ e $Xf \cdot Yf|_\Sigma > 0$ em uma vizinhança V de p em Σ exceto em p , segue que p é um ponto singular isolado de Z . Agora, p é um ponto singular monodrômico de Z se, e somente se p é isolado e Z não possui órbitas características em p . Portanto, as hipóteses e as condições em cada caso são necessárias e suficientes para a não existência de órbitas características. □

1.3 Formas Normais

Nesta seção iremos estudar as formas normais de campos de vetores descontínuos $Z = (X, Y)$ onde X e Y são campos de vetores associados a (1.2) e (1.3) respectivamente.

Em sistemas suaves polinomiais, podemos fazer uma mudança de coordenadas, incluindo o rescalamento da variável independente, que permita reduzir o número de parâmetros. Em sistemas diferenciais por partes formados por duas regiões separados por

um segmento, podemos fazer mais simplificações dos parâmetros, veja [1]. Assim, pode-se fazer duas mudanças de variáveis, incluindo rescalonamento da variável independente, diferentes em cada subsistema que mantém as propriedades abaixo:

1. a mudança de variáveis deve ser não degenerada;
2. cada ponto $(x, 0)$ de Σ deve ser transformado por as ambas mudanças de variáveis no mesmo ponto $(z, 0)$ de Σ ;
3. os pontos singulares reais e virtuais devem permanecer na mesma região na qual estavam anteriormente;
4. o rescalonamento da variável independente deve ter o mesmo sinal para os dois subsistemas.

Vamos encontrar então as mudanças de coordenadas que satisfaz as condições acima. Primeiramente, vamos considerar o sistema geral

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E^\pm & F^\pm \\ G^\pm & H^\pm \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I^\pm \\ J^\pm \end{pmatrix}.$$

Olhando para o item 2 devemos ter $E^+x + I^+ = E^-x + I^-$, o que nos dá $E^+ = E^-$ e $I^+ = I^-$ que denotaremos por $E^+ = E^- = A$ e $I^+ = I^- = D$. Por outro lado, $G^+x + J^+ = 0 = G^-x + J^-$ o que nos dá $G^+ = 0 = G^-$ e $J^+ = 0 = J^-$. Olhando o item 3 agora, temos, se $y < 0$ então (u, v) deve estar em Σ^- , isto é, $H^-y < 0$. Logo $H^- > 0$. De modo análogo, concluímos que $H^+ > 0$. Para satisfazermos o item 1, devemos ter $\det \begin{pmatrix} A & F^\pm \\ 0 & H^\pm \end{pmatrix} \neq 0$ o que nos dá $(AH^+)(AH^-) \neq 0$, isto é, $A \neq 0$.

Denotando $F^\pm = B^\pm$ e $H^\pm = C^\pm$, a mudança de variável que mantém todas as condições acima é dada por $(x, y, t) = (u, v, T)$ tal que

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B^\pm \\ 0 & C^\pm \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (1.4)$$

no qual, $T = K^\pm t$, $K^+K^- > 0$ (condição 4), $A \neq 0$ e $C^+ > 0$, $C^- > 0$.

Como estamos interessados em resolver o problema do *Centro – Foco* para este tipo de campo de vetores, vamos impor algumas condições. Primeiramente, vamos supor que os sistemas (1.2) e (1.3) são não degenerados, isto é, ambos possuem um único ponto singular. Além disso, vamos impor também que Z possui um ponto singular monodrômico p . Assim, pela Proposição 1.2.2, temos $Xf(p) = Yf(p) = 0$ e $Xf \cdot Yf|_\Sigma > 0$ em uma vizinhança de p em Σ exceto em p . Note ainda que

$$Xf(x, y) \cdot Yf(x, y)|_\Sigma = \langle X(x, 0), \nabla f(x, 0) \rangle \langle Y(x, 0), \nabla f(x, 0) \rangle =$$

$$=< (a^+x + \alpha^+, c^+x + \beta^+), (0, 1) > < (a^-x + \alpha^-, c^-x + \beta^-), (0, 1) > =$$

$$= (c^+x + \beta^+)(c^-x + \beta^-) = c^+c^-x^2 + (c^+\beta^- + c^-\beta^+)x + \beta^+\beta^-, \quad (1.5)$$

ou seja, $Xf(x, y) \cdot Yf(x, y) = c^+c^-x^2 + (c^+\beta^- + c^-\beta^+)x + \beta^+\beta^-$.

Portanto, $Xf(p) = Yf(p) = 0$ implica $p = (-\frac{\beta^+}{c^+}, 0) = (-\frac{\beta^-}{c^-}, 0)$ e então

$$c^+\beta^- - c^-\beta^+ = 0. \quad (1.6)$$

Assim, se (1.6) é satisfeita e $c^+c^- > 0$, como (1.5) é um polinômio quadrático, segue que $Xf(x, y) \cdot Yf(x, y)|_{\Sigma}$ possui uma única raiz quadrada em p e $Xf(x, y) \cdot Yf(x, y)|_{\Sigma} > 0$ em Σ exceto em p . Daí, temos o seguinte resultado.

Corolário 1.3.1. *Sejam X e Y campos de vetores associados aos sistemas (1.2) e (1.3) respectivamente. Se p é um ponto singular monodrômico de $Z = (X, Y)$ então $c^+c^- > 0$, $c^+\beta^- - c^-\beta^+ = 0$, e p é o único ponto singular monodrômico de Z .*

Os pontos singulares monodrômicos são classificados pelo Teorema 1.2.1, no qual temos três casos considerados. No entanto, para simplificar o estudo vamos apenas distinguir dois casos. No primeiro, p é uma dobra de X ou Y , que corresponde aos casos (i) e (ii). De fato, sempre podemos supor p um ponto de dobra de X , caso contrário p é um ponto de dobra de Y e basta fazer assim uma mudança de variáveis da forma

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

e assim, consideremos o campo de vetores descontínuo $Z = (Y, X)$. O segundo caso corresponde ao caso (iii), no qual p não é um ponto de dobra de X e nem de Y . Portanto, pela Proposição 1.1.1 temos $X(p) = 0 = Y(p)$. Considere então dois casos:

Caso 1 : $c^+c^- > 0$, $c^+\beta^- - c^-\beta^+ = 0$ e $X^2f(p) \neq 0$. Como

$$X^2f(p) = X^2f(-\frac{\beta^+}{c^+}, 0) = -(a^+\beta^+ - c^+\alpha^+), \quad (1.7)$$

segue que $a^+\beta^+ - c^+\alpha^+ > 0$, pois caso contrário p teria uma órbita característica. Como $c^+\beta^- - c^-\beta^+ = 0$, segue que, $\beta^+ = \frac{c^+\beta^-}{c^-}$. Assim, fazendo a mudança de coordenadas (1.4) com

$$\begin{aligned} A &= \frac{c^+}{K^+(a^+\beta^+ - c^+\alpha^+)}, & B^+ &= \frac{d^+}{K^+(a^+\beta^+ - c^+\alpha^+)} \\ C^+ &= \frac{1}{(K^+)^2(a^+\beta^+ - c^+\alpha^+)}, & B^- &= \frac{c^+d^-}{K^+c^-(a^+\beta^+ - c^+\alpha^+)} \\ C^- &= \frac{c^+}{K^+K^-c^-(a^+\beta^+ - c^+\alpha^+)}, & D &= \frac{\beta^+}{K^+(a^+\beta^+ - c^+\alpha^+)}. \end{aligned}$$

os sistemas (1.2) e (1.3) ficam na forma

$$\begin{aligned}\dot{x} &= tr^+ K^+ x - det^+(K^+)^2 y - 1 \\ \dot{y} &= x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{x} &= tr^- K^- x - det^-(K^-)^2 y - \frac{c^+(a^-\beta^- - c^-\alpha^-)K^-}{c^-(a^+\beta^+ - c^+\alpha^+)K^+} \\ \dot{y} &= x\end{aligned}$$

respectivamente, onde $tr^\pm = a^\pm + d^\pm$ e $det^\pm = a^\pm d^\pm - b^\pm c^\pm$. Assumindo $det^\pm = a^\pm d^\pm - b^\pm c^\pm \neq 0$, podemos tomar $K^\pm = \frac{1}{\sqrt{|det^\pm|}}$, e então conseguimos obter a seguinte forma normal para este caso

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax + by - 1 \\ \dot{y} &= x\end{aligned},$$

e

$$\begin{aligned}\dot{x} &= cx + dy + \alpha \\ \dot{y} &= x\end{aligned},$$

onde $b = \pm 1$, $d = \pm 1$, $a = \frac{tr^+}{\sqrt{|det^+|}}$, $c = \frac{tr^-}{\sqrt{|det^-|}}$ e $\alpha = \frac{c^+(a^-\beta^- - c^-\alpha^-)\sqrt{|det^+|}}{c^-(a^+\beta^+ - c^+\alpha^+)\sqrt{|det^-|}}$. Note que $AC^+ > 0$, $AC^- > 0$, $K^+K^- > 0$, $C^+ > 0$ e $C^- > 0$.

De fato, fazendo $T = \frac{1}{K^\pm}t$, temos $\frac{dx}{dT} = \frac{dx}{dt} \frac{dt}{dT} = \frac{dx}{dt} K^\pm$. Usando a mudança de coordenadas (1.4), temos

$$\begin{cases} u = Ax + B^+y + D \\ v = C^+y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{u}{A} - \frac{B^+v}{C^+A} - D \\ y = \frac{v}{C^+}. \end{cases}.$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned}\dot{u} &= (K^+)(A\dot{x} + B^+\dot{y} + D) \\ \dot{v} &= (K^+)C^+\dot{y}.\end{aligned}$$

Assim, substituindo $\dot{x}$ e $\dot{y}$ na equação acima e expandindo em termos de u e v , temos

$$\begin{aligned}\dot{u} &= (K^+)(u(a^+ + \frac{B^+c^+}{A}) + v(-a^+\frac{B^+}{C^+} + \frac{b^+A}{C^+} - \frac{(B^+)^2c^+}{AC^+} + \frac{B^+d^+}{C^+}) + \\ &\quad (-a^+D + A\alpha^+ - \frac{B^+c^+D}{A} + B^+\beta^+)) \\ \dot{v} &= (K^+)(u(\frac{C^+c^+}{A}) + v(\frac{-B^+c^+}{A} + d^+) - \frac{C^+c^+D}{A} + C^+\beta^+).\end{aligned}$$

$$\text{E portanto, devemos ter } \begin{cases} \frac{C^+ c^+ K^+}{A} & = 1 \\ -\frac{B^+ c^+ K^+}{A} + \frac{d^+}{K^+} & = 0 \\ -\frac{C^+ c^+ D K^+}{A} + C^+ \beta^+ K^+ & = 0 \end{cases}$$

Com isso, concluimos que

$$\begin{cases} C^+ & = \frac{A}{c^+ K^+} \\ B^+ & = \frac{A d^+}{c^+} \\ D & = \frac{A \beta^+}{c^+} \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} A & = C^+ c^+ K^+ \\ B^+ & = C^+ d^+ K^+ \\ D & = C^+ \beta^+ K^+ \end{cases} \quad (1.8)$$

Note ainda que temos mais uma condição a considerar, devemos ter

$$-a^+ D + A \alpha^+ - \frac{B^+ c^+ D}{A} + B^+ \beta^+ = 0.$$

Fazendo a substituição de (1.8) nessa última condição obtemos os valores de C^+ , B^+ , A e D . Para obtermos os valores de B^- e C^- devemos utilizar a expressão do campo Y e o procedimento é análogo.

Caso 2 : $c^+ c^- > 0$, $c^+ \beta^+ - c^- \beta^- = 0$ e $X(p) = Y(p) = 0$. Neste caso temos $X^2 f(p) = Y^2 f(p) = 0$. Note que

$$Y^2 f(p) = Y^2 f\left(\frac{-\beta^+}{c^+}, 0\right) = -(a^- \beta^- - c^- \alpha^-). \quad (1.9)$$

Por (1.7) e (1.9) temos $a^+ \beta^+ - c^+ \alpha^+ = 0 = a^- \beta^- - c^- \alpha^-$ e como $c^+ \beta^- - c^- \beta^+ = 0$, segue que

$$\alpha^+ = \frac{a^+ \beta^+}{c^+}, \quad \alpha^- = \frac{a^- \beta^+}{c^+}, \quad \beta^- = \frac{c^- \beta^+}{c^+}.$$

Fazendo novamente a mudança de coordenadas dada por (1.4) com $A = (c^+)^2 c^- K^+$, $B^+ = c^+ c^- d^+ K^+$, $B^- = (c^+)^2 d^- K^+$, $C^- = \frac{(c^+)^2 K^+}{K^-}$, $C^+ = c^+ c^-$ e $D = c^+ c^- \beta^+ K^+$ os sistemas (1.2) e (1.3) tornam-se

$$\begin{aligned} \dot{x} &= tr^+ K^+ x - det^+(K^+)^2 y \\ \dot{y} &= x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= tr^- K^- x - det^-(K^-)^2 y \\ \dot{y} &= x \end{aligned}$$

respectivamente. Assumindo $\det^\pm = a^\pm d^\pm - b^\pm c^\pm \neq 0$, podemos tomar $K^\pm = \frac{1}{\sqrt{|\det^\pm|}}$, e assim a forma normal para este caso se torna

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax + by \\ \dot{y} &= x\end{aligned},$$

e

$$\begin{aligned}\dot{x} &= cx + dy \\ \dot{y} &= x\end{aligned},$$

onde $b = \pm 1$, $d = \pm 1$, $a = \frac{tr^+}{\sqrt{|\det^+|}}$ e $c = \frac{tr^-}{\sqrt{|\det^-|}}$. Note que $AC^+ > 0$, $AC^- > 0$, $K^+K^- > 0$, $C^+ > 0$ e $C^- > 0$.

De fato, obtemos os termos $B^\pm$, $C^\pm$ e D , tomando $A = (c^+)^2 c^- K^+$ e procedendo de modo análogo ao caso 1

Dos casos 1 e 2 vistos acima, obtemos o seguinte resultado.

Teorema 1.3.1. *Seja $Z = (X, Y)$ um campo de vetores linear descontínuo com X e Y determinados pelos sistemas (1.2) e (1.3) respectivamente. Se X, Y são não degenerados, p é um ponto singular de Z em Σ tal que $Xf(p) = Yf(p) = 0$ e $Xf \cdot Yf|_\Sigma > 0$ em uma vizinhança de p em Σ , exceto em p , isto é, $c^+c^- > 0$, $c^+\beta^- - c^-\beta^+ = 0$, então, existe uma mudança de coordenadas (1.4) tal que os sistemas (1.2) e (1.3) tornam-se*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax + by + \beta, \\ \dot{y} &= x,\end{aligned}\tag{1.10}$$

e

$$\begin{aligned}\dot{x} &= cx + dy + \alpha, \\ \dot{y} &= x,\end{aligned}\tag{1.11}$$

respectivamente, com $b = \pm 1$, $d = \pm 1$, no qual $\beta = -1$ e $\alpha \geq 0$ se $X^2f(p) < 0$ e $\beta = \alpha = 0$ se $X(p) = 0 = Y(p)$.

Além disso, esta mudança de coordenadas é um homeomorfismo que preserva os pontos do conjunto de descontinuidade Σ , aplicando os seus respectivos arcos de costura, deslize, escape, pontos de dobra e singularidades dos campos de vetores X e Y em arcos e pontos do mesmo tipo. Mais ainda, a mudança de coordenadas estabelece uma equivalência topológica entre os campos de vetores descontínuo determinado por (1.2)-(1.3) e (1.10)-(1.11) para todas as órbitas que não possuem pontos em comum com os conjuntos de deslize e escape. De fato, pois dos sistemas (1.2)-(1.3) temos

$$X \cdot f|_{(x,0)} = c^+x + \beta^+.$$

$$Y \cdot f|_{(x,0)} = c^- x + \beta^-.$$

Utilizando a forma normal (1.4) temos

$$\begin{aligned} u &= Ax + B^\pm y + D \\ v &= C^\pm y \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x &= \frac{u}{A} - \frac{B^\pm v}{AC^\pm} - \frac{D}{A} \\ y &= \frac{v}{C^\pm}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\tilde{f}(u, v) = \begin{cases} \frac{v}{C^+} & \text{se } v > 0 \\ \frac{v}{C^-} & \text{se } v < 0 \end{cases}$$

e

$$\begin{aligned} \dot{u} &= (a^\pm + d^\pm)u - (a^\pm d^\pm - b^\pm c^\pm)v - 1 = \tilde{P}^\pm(u, v), \\ \dot{v} &= u = \tilde{Q}^\pm(u, v). \end{aligned}$$

Assim, temos $\tilde{X} = (\tilde{P}^+(u, v), \tilde{Q}^+(u, v))$ e $\tilde{Y} = (\tilde{P}^-(u, v), \tilde{Q}^-(u, v))$. Daí,

$$\tilde{X} \cdot \tilde{f}|_{(u,0)} = \frac{1}{C^+} u = (a^+ \beta^+ - c^+ \alpha^+) (Ax + D) = c^+ x + \beta^+$$

$$\tilde{Y} \cdot \tilde{f}|_{(u,0)} = \frac{1}{C^-} u = \frac{c^-(a^+ \beta^+ - c^+ \alpha^+)}{c^+} (Ax + D) = \frac{c^-}{c^+} (c^+ x + \beta^+).$$

Note que $\frac{c^-}{c^+} > 0$ pois $C^- > 0$. Logo, $(\tilde{X} \cdot \tilde{f}|_{(u,0)})(\tilde{Y} \cdot \tilde{f}|_{(u,0)}) = \lambda(X \cdot f|_{(x,0)})(Y \cdot f|_{(x,0)})$, $\lambda > 0$ e temos assim nossa afirmação demonstrada.

Problema do Centro-Foco em Duas Zonas

O problema do *Centro-Foco* para campos de vetores lineares por partes em duas zonas (como no caso contínuo) consiste em determinar condições necessárias e suficientes que permitam distinguir quando uma singularidade monodrômica é um centro ou um foco e pode ser estudado usando as formas normais encontradas em (1.10)-(1.11). O caso (i) estabelecido no Teorema 1.2.1 corresponde as formas normais com $\beta = -1$ e $\alpha > 0$. O caso (ii) corresponde as formas normais com $\beta = -1$ e $\alpha = 0$ e no caso (iii) temos $\beta = 0 = \alpha$. Além disso, de (1.10) e (1.11) e do Corolário 1.2.1 segue que a origem é o único ponto singular de Z em Σ .

Primeiramente, vamos estudar o Problema do *Centro-Foco* associados aos campos X e Y nas formas normais (1.10) e (1.11) com $\beta = -1$ e $\alpha > 0$. Usaremos algumas das técnicas do artigo [1].

A seguir iremos distinguir os seguintes casos.

2.1 Caso 1

Os autovalores das partes lineares de X e de Y são reais com dois autovetores linearmente independentes, isto é, $a^2 + 4b > 0$ e $c^2 + 4d > 0$.

A órbita passando pelo ponto $q = (r, 0)$ do sistema (1.1) tendo como subsistemas (1.10) e (1.11) com $\beta = -1$ e $\alpha > 0$ é dada por

$$\phi^+(t, q) = \left(\frac{r\lambda_1^+ - 1}{\sqrt{a^2 + 4b}} e^{\lambda_1^+ t} - \frac{r\lambda_2^+ - 1}{\sqrt{a^2 + 4b}} e^{\lambda_2^+ t}, \frac{r\lambda_1^+ - 1}{\lambda_1^+ \sqrt{a^2 + 4b}} e^{\lambda_1^+ t} - \frac{r\lambda_2^+ - 1}{\lambda_2^+ \sqrt{a^2 + 4b}} e^{\lambda_2^+ t} + \frac{1}{b} \right), \quad (2.1)$$

$$\phi^-(t, q) = \left(\frac{r\lambda_1^- + \alpha}{\sqrt{c^2 + 4d}} e^{\lambda_1^- t} - \frac{r\lambda_2^- + \alpha}{\sqrt{c^2 + 4d}} e^{\lambda_2^- t}, \frac{r\lambda_1^- + \alpha}{\lambda_1^- \sqrt{c^2 + 4d}} e^{\lambda_1^- t} - \frac{r\lambda_2^- + \alpha}{\lambda_2^- \sqrt{c^2 + 4d}} e^{\lambda_2^- t} + \frac{\alpha}{b} \right), \quad (2.2)$$

onde, $\lambda_1^+ = \frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2}$, $\lambda_2^+ = \frac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2}$, $\lambda_1^- = \frac{c+\sqrt{c^2+4d}}{2}$ e $\lambda_2^- = \frac{c-\sqrt{c^2+4d}}{2}$.

De fato, para provarmos esta afirmação, observe que o sistema norte é dado por

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Escrevendo o sistema acima na forma vetorial $\dot{x} = Ax + v$, onde $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ e $v = (-1, 0)^T$, queremos resolvê-lo com a seguinte condição inicial $x(0) = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}$.

Vamos fazer a seguinte mudança de coordenadas $y = x + A^{-1}v$. Observe que esta mudança de coordenadas translada o ponto singular para a origem. Assim, $\dot{x} = \dot{y}$ e $\dot{y} = \dot{x} = Ax + v = A(y - A^{-1}v) + v = Ay$, ou seja, obtemos o sistema $\dot{y} = Ay$ com condição inicial $y(0) = \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix} + A^{-1}b$. Seja P a matriz cuja as colunas são os autovetores de A . Considere agora a seguinte mudança de coordenadas $u = P^{-1}y$. Assim, $\dot{u} = P^{-1}\dot{y} = P^{-1}Ay = P^{-1}APu = Du$, onde $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ e $\lambda_i, i = 1, 2$ são os autovalores da matriz A . Note agora que a condição inicial $u(0)$ é dada por $P^{-1}(\begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix} + A^{-1}b)$.

Resolvendo o sistema $\dot{u} = Du$ com a condição inicial $u(0)$ dada temos

$$u = \begin{pmatrix} -\frac{e^{\lambda_1 t}(-2rb - a + \sqrt{a^2 + 4b})}{2b\sqrt{a^2 + 4b}} \\ -\frac{e^{\lambda_2 t}(-2rb + a + \sqrt{a^2 + 4b})}{2b\sqrt{a^2 + 4b}} \end{pmatrix}.$$

Fazendo agora $y = Pu$, encontramos

$$\begin{pmatrix} y = \frac{\sqrt{a^2 + 4b}e^{\lambda_2 t}r + \sqrt{a^2 + 4b}e^{\lambda_1 t}r - 2e^{\lambda_1 t} + 2e^{\lambda_2 t} - e^{\lambda_2 t}ra + e^{\lambda_1 t}ra}{2\sqrt{a^2 + 4b}} \\ -\frac{-2e^{\lambda_1 t}rb - e^{\lambda_1 t}a + \sqrt{a^2 + 4b}e^{\lambda_1 t} + 2e^{\lambda_2 t}rb + e^{\lambda_2 t}a + \sqrt{a^2 + 4b}e^{\lambda_2 t} - 2\sqrt{a^2 + 4b}}{2b\sqrt{a^2 + 4b}} \end{pmatrix}.$$

E por fim, substituindo o valor de y em $x = y - A^{-1}v$, obtemos a fórmula (2.1). De maneira análoga obtemos a expressão (2.2).

Vamos determinar o tempo $t^\pm$, em função de r , necessário para ir do ponto $(r, 0)$ para o ponto $(r^\pm, 0)$ através do fluxo $\phi^\pm(t, (r, 0))$ dos sistemas norte e sul, respectivamente. Note que isso é possível pois

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{r\lambda_1^+ - 1}{\lambda_1^+ \sqrt{a^2 + 4b}} e^{\lambda_1^+ t} - \frac{r\lambda_2^+ - 1}{\lambda_2^+ \sqrt{a^2 + 4b}} e^{\lambda_2^+ t} + \frac{1}{b} \right) \Big|_{t=0} = \frac{r(\lambda_1^+ - \lambda_2^+) - 1}{\sqrt{a^2 + 4b}}$$

é diferente de zero para r suficientemente pequeno. Daí, pelo Teorema da Função Implícita, é possível determinar t^+ como uma função de r resolvendo a equação obtida igualando a segunda componente de $\phi^+(t, (r, 0))$ a zero. Analogamente, podemos expressar t^- como função de r .

Como não é possível isolar $t = t^\pm$ resolvendo as equações obtidas igualando a segunda componente de $\phi^\pm(t, (r, 0))$ a zero, vamos expandir a segunda coordenada de $\phi^+(t, (r, 0))$ em série de Taylor na variável t . Em seguida, escrevendo a série de Taylor de $t(r)$, isto é, $t = b_1 r + b_2 r^2 + b_3 r^3 + \dots$, e substituindo esta expressão na série anterior obtemos a expansão da segunda coordenada de $\phi^+(t, (r, 0))$ em uma série de potências de r . Agora, igualando esta série de potências de r a zero, podemos obter os valores dos b_i 's em função dos parâmetros a e b do sistema norte. De forma análoga, pode-se obter uma expansão para t^- em potências de r .

Para exemplificar o método, vejamos explicitamente como fazer o cálculo de b_1 e b_2 .

Fazendo a expansão de Taylor na variável t em $t = 0$ da segunda coordenada de $\phi^+(t, (r, 0))$ até ordem 3 temos

$$\begin{aligned} & \frac{b(\lambda_1^+ - \lambda_2^+) + \sqrt{a^2 + 4b}\lambda_1^+\lambda_2^+}{b\sqrt{a^2 + 4b}\lambda_1^+\lambda_2^+} + \frac{r(\lambda_1^+ - \lambda_2^+)t}{\sqrt{a^2 + 4b}} + \frac{(-\lambda_1^+ + (\lambda_1^+)^2 r + \lambda_2^+ - r(\lambda_2^+)^2)t^2}{2\sqrt{a^2 + 4b}} + \\ & + \frac{-(\lambda_1^+)^2 + (\lambda_1^+)^3 r + (\lambda_2^+)^2 - r(\lambda_2^+)^3}{6\sqrt{a^2 + 4b}} + O(t^4) = \\ & = rt + \frac{1}{2}(-1 + ar)t^2 + \frac{1}{6}(-a + a^2 r + br)t^3 + O(t^4) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Substituindo $t = b_1 r + b_2 r^2 + b_3 r^3 + b_4 r^4$ em (2.3) temos

$$\begin{aligned} & r(b_1 r + b_2 r^2 + b_3 r^3 + b_4 r^4) + \frac{1}{2}(-1 + ar)(b_1 r + b_2 r^2 + b_3 r^3 + b_4 r^4)^2 + \\ & + \frac{1}{6}(-a + a^2 r + br)(b_1 r + b_2 r^2 + b_3 r^3 + b_4 r^4)^3 = \\ & = (b_1 - \frac{b_1^2}{2})r^2 + (\frac{-ab_1^3}{6} + b_2 + \frac{1}{2}(2b_1 b_2))r^3 + O(r^4) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Expandindo a expressão acima em função de r , temos que o coeficiente de r é zero e o coeficiente de r^2 é $b_1 - \frac{b_1^2}{2}$. Resolvendo $b_1 - \frac{b_1^2}{2} = 0$, temos $b_1 = 0$ ou $b_1 = 2$. Note que $b_1 = 0$ não nos interessa, pois caso contrário teríamos todos os b'_i s iguais a 0. Portanto, iremos considerar $b_1 = 2$. Substituindo $b_1 = 2$ em (2.4), obtemos que o coeficiente de r^3 é

$$-\frac{4a}{3} + \frac{1}{2}(4a - 4b_2) + b_2.$$

Resolvendo $-\frac{4a}{3} + \frac{1}{2}(4a - 4b_2) + b_2 = 0$ encontramos $b_2 = \frac{2a}{3}$. Substituindo $b_2 = \frac{2a}{3}$ em (2.4) encontramos que o termo que multiplica r^4 que é dado por

$$\frac{2}{3}(-a^2 - b) + \frac{1}{6}(-8a^2 + 8(a^2 + b)) + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{20a^2}{9}\right) - 4b_3\right) + b_3.$$

Resolvendo $\frac{2}{3}(-a^2 - b) + \frac{1}{6}(-8a^2 + 8(a^2 + b)) + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{20a^2}{9}\right) - 4b_3\right) + b_3 = 0$ encontramos b_3 que é dado por $\frac{2}{9}(2a^2 + 3b)$.

Continuando com o processo acima obtemos

$$t^+ = 2r + \frac{2a}{3}r^2 + \frac{2(2a^2 + 3b)}{9}r^3 + \frac{4a(11a^2 + 27b)}{135}r^4 + \frac{2(52a^4 + 108a^2b + 81b^2)}{405}r^5. \quad (2.5)$$

De modo análogo encontramos t^- .

$$t^- = \frac{2r}{\alpha} - \frac{2a}{3\alpha^2}r^2 + \frac{2(2a^2 + 3b)}{9\alpha^3}r^3 - \frac{4a(11a^2 + 27b)}{135\alpha^4}r^4 + \frac{2(52a^4 + 108a^2b + 81b^2)}{405\alpha^5}r^5. \quad (2.6)$$

Agora, substituindo $t = t^+$ na primeira componente de $\phi^+(t, (r, 0)) = (r^+, 0)$ e $t = t^-$ na primeira componente de $\phi^-(-t, (r, 0)) = (r^-, 0)$, obtemos $r^\pm = R^\pm(r)$. Podemos calcular agora a aplicação de Poincaré $R(r^-) = R^+((R^-)^{-1}(r^-))$ e calcular as soluções de $R(r^-) = r^-$ que nos dará órbitas periódicas. Sendo assim, tendo como objetivo a simplificação dos cálculos, ao invés de considerarmos esta aplicação, vamos considerar a aplicação de Poincaré dada por $\Pi(r) = R^+(r) - R^-(r) = r^+ - r^-$, cujos zeros determinam exatamente o número de órbitas periódicas. Os coeficientes V_i de Π na expansão de Taylor, isto é,

$$\Pi(r) = V_0 + V_1r + V_2r^2 + V_3r^3 + V_4r^4 + V_5r^5 + V_6r^6 + \dots$$

são chamados de coeficientes de Lyapunov. Note que $V_0 \equiv 0$, pois $\Pi(0) = 0$. Além disso, $V_1 \equiv 0$ como veremos a seguir. Iremos calcular explicitamente apenas os dois primeiros coeficientes, os demais se calculam de maneira semelhante.

Fazendo a expansão de Taylor na variável t em $t = 0$ de ordem 4 da expressão

$$\frac{r\lambda_1^+-1}{\sqrt{a^2+4b}}e^{\lambda_1^+t} - \frac{r\lambda_2^+-1}{\sqrt{a^2+4b}}e^{\lambda_2^+t}$$

temos

$$r + (-1 + ar)t + \frac{1}{2}(-a + a^2r + br)t^2 + \frac{1}{6}(-a^2 - b + a^3r + 2abr)t^3.$$

Sustituindo (2.5) nessa última expressão obtemos

$$r + (-1 + ar) \left(2r + \frac{2ar^2}{3} \right). \quad (2.7)$$

De modo análogo para

$$\frac{r\lambda_1^-+\alpha}{\sqrt{c^2+4d}}e^{\lambda_1^-t} - \frac{r\lambda_2^-+\alpha}{\sqrt{c^2+4d}}e^{\lambda_2^-t}$$

obtemos

$$r + (-\alpha - cr) \left(\frac{2r}{\alpha} - \frac{2cr^2}{3\alpha^2} + \frac{(4c^2 + 6d)r^3}{9\alpha^3} \right). \quad (2.8)$$

Subtraindo da equação (2.7) a equação (2.8), obtemos

$$\Pi(r) = -\frac{2(c+a\alpha)}{3\alpha}r^2 + \frac{4(c^2-a^2\alpha^2)}{9\alpha^2}r^3.$$

Continuando o raciocínio, obtemos os sete coeficientes de Lyapunov.

$$\begin{aligned} V_1 &= 0, \\ V_2 &= -\frac{2(c+a\alpha)}{3\alpha}, \\ V_3 &= \frac{4(c^2-a^2\alpha^2)}{9\alpha^2}, \\ V_4 &= -\frac{2(9dc+22c^3+22a^3\alpha^3+9a\alpha^3b)}{135\alpha^4}, \\ V_5 &= \frac{4(27c^2d+26c^4-26a^4\alpha^4-27a^2\alpha^4b)}{405\alpha^4}, \\ V_6 &= -\frac{2(100c^5+27cd^2+176c^3d+100a^5\alpha^5+27a\alpha^5b^2+176a^3\alpha^5b)}{945\alpha^5}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Note que $V_3 = V_2 \frac{(c-a\alpha)}{3\alpha}$, logo se $V_2 = 0$ temos $V_3 = 0$. Além disso, quando $V_2 = 0$, temos $c = -a\alpha$. Substituindo o valor de c em V_4 , V_5 e V_6 obtemos

$$\begin{aligned} V_4 &= \frac{2a(d-\alpha^2b)}{15\alpha^2}, \\ V_5 &= \frac{4a^2(d-\alpha^2b)}{15\alpha^2}, \\ V_6 &= \frac{2a(d-\alpha^2b)(27d+176a^3\alpha^2+27\alpha^2b)}{945\alpha^4}. \end{aligned}$$

Note que se $V_2 = 0 = V_4$ então $V_5 = 0 = V_6$. No entanto, gostaríamos que todos os V_i fossem zeros, pois assim provaríamos a existência de um centro. Então, se $V_2 = 0 = V_4$, temos a seguinte relação

$$c = -a\alpha, \quad d = \alpha^2 b.$$

Pelas formas normais (1.10) e (1.11), sabemos que $b = \pm 1$ e $d = \pm 1$. Portanto, das condições acima, temos os seguintes casos: $\{a = 0 = c, b = 1 = d\}$, $\{c = -a, b = 1 = d, \alpha = 1\}$ e $\{c = -a, b = -1 = d, \alpha = 1\}$.

No primeiro caso temos

$$\begin{aligned} t^+ &= \log\left(\frac{1+r}{1-r}\right) \\ t^- &= \log\left(\frac{\alpha+r}{\alpha-r}\right) \\ r^+ &= -r \\ r^- &= -r \end{aligned}$$

o que prova que a origem é um centro.

Nos dois últimos casos, não é possível obter uma expressão explícita de $t^\pm$, mas é fácil ver que $P^+(x, y) = -P^-(x, -y)$ e $Q^+(x, y) = Q^-(x, -y)$ e temos assim, pela simetria do sistema, um centro na origem.

2.2 Caso 2

Os autovalores da parte linear de X são reais com autovetores linearmente independentes e a parte linear de Y tem um autovalor duplo com um autoespaço de dimensão 1, isto é, $a^2 + 4b > 0$ e $c^2 + 4d = 0$ com $c \neq 0$. Sabemos que a órbita passando pelo ponto $(r, 0)$ do sistema (1.1) tendo os subsistemas (1.10) e (1.11) com $\beta = -1$ e $\alpha > 0$, é constituída por $\phi^+(t, (r, 0))$ dada em (2.1) e

$$\phi^-(t, (r, 0)) = \left(\frac{cr+2\alpha}{2}te^{\frac{c}{2}t} + re^{\frac{c}{2}t}, \quad \frac{cr+2\alpha}{c}te^{\frac{c}{2}t} - \frac{4\alpha}{c^2}re^{\frac{c}{2}t} + \frac{4\alpha}{c^2} \right). \quad (2.10)$$

Analogamente ao caso 1, temos que os primeiros seis coeficientes de Lyapunov são dados por

$$\begin{aligned} V_1 &= 0, \\ V_2 &= -\frac{2(c+a\alpha)}{3\alpha}, \\ V_3 &= \frac{4(c^2-a^2\alpha^2)}{9\alpha^2}, \\ V_4 &= -\frac{79c^3+88a^3\alpha^3+36aa^3b}{270\alpha^3}, \\ V_5 &= \frac{77c^4-104a^4\alpha^4-108a^2\alpha^4b}{405\alpha^4}, \\ V_6 &= -\frac{923c^5+1600a^5\alpha^5+2816a^3\alpha^5b+432a\alpha^5b^2}{7560\alpha^5}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Novamente, $V_2 = 0$ implica em $V_3 = 0$. Além disso, quando $V_2 = 0$, isto é, $c = -a\alpha$, temos $V_4 = \frac{-a(a^2+4b)}{30}$. Note agora que $V_4 = 0$ se, e somente se $a = 0$ ou $a^2 + 4b = 0$. No entanto, $a = 0$ implica $c = 0$ (absurdo pois $c \neq 0$) e $a^2 + 4b > 0$ por hipótese. Portanto, $V_4 \neq 0$ e assim a origem será um foco estável se $V_4 < 0$ ou instável se $V_4 > 0$.

2.3 Caso 3

Os autovalores da parte linear de X são reais com dois autovetores linearmente independentes e a parte linear de Y possui dois autovalores complexos. Temos assim, $a^2 + 4b > 0$ e $c^2 + 4d < 0$. Sabemos que a órbita passando pelo ponto $q = (r, 0)$ do sistema (1.1) tendo os subsistemas (1.10) e (1.11) com $\beta = -1$ e $\alpha > 0$ é constituída por $\phi^+(t, (r, 0))$ dada em (2.1) e

$$\phi^-(t, q) = \left(re^{\mu t} \cos \nu t + \frac{rc+2\alpha}{2\nu} e^{\mu t} \sin(\nu t), \frac{\alpha}{d} e^{\mu t} \cos \nu t + \frac{2dr-c\alpha}{2d\nu} e^{\mu t} \sin(\nu t) - \frac{\alpha}{d} \right) \quad (2.12)$$

onde $\mu = \frac{c}{2}$ e $\nu = \frac{\sqrt{-(c^2+4d)}}{2}$. De modo análogo ao caso 1, os primeiros cinco coeficientes de Lyapunov na origem são dados por (2.9). Logo, obtemos as mesmas condições, isto é, $c = -a\alpha$ e $d - \alpha^2 b = 0$. Utilizando as formas normais (1.10) e (1.11), sabemos que $b = \pm 1$, $d = \pm 1$ e como $\alpha > 0$, $c^2 - 4d < 0$, temos novamente dois casos $\{a = 0 = c, b = 1, d = -1\}$ e $\{b = -1 = d, c = -a, \alpha = 1\}$. No primeiro caso, $\{a = 0 = c, b = 1, d = -1\}$, temos

$$\begin{aligned} t^+ &= \log\left(\frac{1+r}{1-r}\right) \\ t^- &= \arctg\left(\frac{2r\alpha}{\alpha^2 - r^2}\right) \\ r^+ &= -r \\ r^- &= -r \end{aligned}$$

o que nos garante que a origem é um centro. No segundo caso, $\{b = -1 = d, c = -a, \alpha = 1\}$, não é possível obter uma expressão explícita de $t^\pm$, mas é fácil ver que $P^+(x, y) = -P^+(x, -y)$ e $Q^+(x, y) = Q^-(x, y)$, e daí pela simetria do sistema, a origem é um centro.

2.4 Caso 4

A parte linear de X tem um autovalor duplo com um autoespaço de dimensão 1 e a parte linear de Y possui dois autovalores reais com dois autovetores linearmente independentes. Temos assim, $a^2 + 4b = 0$ e $c^2 + 4d > 0$. Sabemos que a órbita passando pelo ponto $(r, 0)$ do sistema (1.1) tendo os subsistemas (1.10) e (1.11) com $\beta = -1$ e $\alpha > 0$ é constituída por $\phi^-(t, (r, 0))$ dada por (2.2) e

$$\phi^+(t, (r, 0)) = \left(\frac{ar-2}{2} t e^{\frac{\alpha}{2}t} + r e^{\frac{\alpha}{2}t}, \frac{ar-2}{a} t e^{\frac{\alpha}{2}t} + \frac{4}{a^2} e^{\frac{\alpha}{2}t} - \frac{4}{a^2} \right). \quad (2.13)$$

De modo análogo ao caso 1, os primeiros seis coeficientes de Lyapunov na origem são dados por

$$\begin{aligned}
V_1 &= 0, \\
V_2 &= -\frac{2(c+a\alpha)}{3\alpha}, \\
V_3 &= \frac{4(c^2-a^3\alpha^2)}{9\alpha^2}, \\
V_4 &= -\frac{36dc+88c^3+79a^3\alpha^3}{270\alpha^3}, \\
V_5 &= \frac{104c^4+108dc^2-77a^4\alpha^4}{405\alpha^4}, \\
V_6 &= -\frac{432cd^2+2816c^3d+1600c^5+923a^5\alpha^5}{7560\alpha^5}.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Note que se $V_2 = 0$, então $V_3 = 0$ e $c = -a\alpha$. Além disso, temos também $V_4 = \frac{a(a^2\alpha^2+4d)}{30\alpha^2}$. Agora, $V_4 = 0$ se, e somente se $a = 0$ ou $a^2\alpha^2 + 4d = 0$, mas isso não é possível, pois pela hipótese $a \neq 0$, caso contrário teríamos $b = 0$ (absurdo pois $b = \pm 1$). Portanto, $V_4 \neq 0$ e neste caso teremos um foco estável se $V_4 < 0$ ou instável se $V_4 > 0$.

2.5 Caso 5

As partes lineares de X e de Y possuem um autovalor duplo com um autoespaço de dimensão 1. Temos assim, $a^2 + 4b = 0$ e $c^2 + 4d = 0$ com $ac \neq 0$. Sabemos que a órbita passando pelo ponto $(r, 0)$ do sistema (1.1) tendo os subsistemas (1.10) e (1.11) com $\beta = -1$ e $\alpha > 0$ é constituída por (2.13) e (2.10).

De modo análogo ao caso 1, os primeiros seis coeficientes de Lyapunov são dados por

$$\begin{aligned}
V_1 &= 0, \\
V_2 &= -\frac{2(c+a\alpha)}{3\alpha}, \\
V_3 &= \frac{4(c^2-a^2\alpha^2)}{9\alpha^2}, \\
V_4 &= -\frac{79(c^3+a^3\alpha^3)}{270\alpha^3}, \\
V_5 &= \frac{77(c^4-a^4\alpha^4)}{405\alpha^4}, \\
V_6 &= -\frac{923(c^5+923a^5\alpha^5)}{7560\alpha^5},
\end{aligned}$$

Note que se $V_2 = 0$, então $V_3 = V_4 = V_5 = V_6 = 0$. Queremos provar aqui que todos os V_i 's são zeros, pois assim, teremos um centro. De $V_2 = 0$, temos $c = -a\alpha$. Denotando $\phi^+(t, (r, 0)) = (\phi_1^+(t, r), \phi_2^+(t, r))$ e $\phi^-(t, (r, 0)) = (\phi_1^-(t, r), \phi_2^-(t, r))$, segue de $c = -a\alpha$ e (2.13) e (2.10) que $\phi_1^-(-t, r) = \phi_1^+(\alpha t, r)$ e $\phi_2^-(-t, r) = -\frac{1}{\alpha}\phi_2^+(\alpha t, r)$. Assim, $t^+ = \alpha t^-$ e então a origem é um centro.

2.6 Caso 6

A parte linear de X tem um autovalor duplo com autoespaço de dimensão 1 e a parte linear de Y possui um par de autovalores complexos, isto é, $a^2 + 4b = 0$ e $c^2 + 4d < 0$. Sabemos que a órbita passando pelo ponto $(r, 0)$ do sistema (1.1) tendo os subsistemas (1.10) e (1.11) com $\beta = -1$ e $\alpha > 0$ é constituída por (2.13) e (2.12) respectivamente.

De modo análogo ao caso 1, os primeiros cinco coeficientes de Lyapunov na origem são dados por (2.14). Note que $V_4 = 0$ se, e somente se $a = 0$ ou $a^2\alpha^2 + 4d = 0$, mas isso não é possível pois pela hipótese $a \neq 0$, pois caso contrário teríamos $b = 0$. Portanto, $V_4 \neq 0$ e neste caso teremos um foco estável se $V_4 < 0$ e instável se $V_4 > 0$.

2.7 Caso 7

Os autovalores da parte linear de X são complexos e a parte linear de Y possui dois autovalores reais com dois autovetores linearmente independentes. Temos assim, $a^2 + 4b < 0$ e $c^2 + 4d > 0$. Sabemos que a órbita passando pelo ponto $q = (r, 0)$ do sistema (1.1) tendo os subsistemas (1.10) e (1.11) com $\beta = -1$ e $\alpha > 0$ é constituída por

$$\phi^+(t, q) = \left(re^{\mu t} \cos \nu t + \frac{ra-2}{2\nu} e^{\mu t} \sin(\nu t), -\frac{1}{b} e^{\mu t} \cos \nu t + \frac{2br+a}{2b\nu} e^{\mu t} \sin(\nu t) + \frac{1}{b} \right), \quad (2.15)$$

onde $\mu = \frac{a}{2}$ e $\nu = \frac{\sqrt{-(a^2+4b)}}{2}$ e $\phi^-(t, (r, 0))$ é dada por (2.2). De modo análogo ao caso 1, os primeiros cinco coeficientes de Lyapunov na origem são dados por (2.9). Logo, obtemos as mesmas condições, isto é, $c = -a\alpha$ e $d - \alpha^2 b = 0$. Utilizando as formas normais (1.10) e (1.11), sabemos que $b = \pm 1$, $d = \pm 1$ e como $\alpha > 0$, $a^2 - 4b < 0$, temos novamente dois casos $\{a = 0 = c, b = 1, d = -1\}$ e $\{b = -1 = d, c = -a, \alpha = 1\}$. No primeiro caso, $\{a = 0 = c, b = 1, d = -1\}$, temos

$$\begin{aligned} t^+ &= \arctg\left(\frac{2r}{1-r^2}\right), \\ t^- &= \log\left(\frac{\alpha+r}{\alpha-r}\right), \\ r^+ &= -r, \\ r^- &= -r, \end{aligned}$$

o que nos garante que a origem é um centro. No segundo caso, $\{b = -1 = d, c = -a, \alpha = 1\}$, não é possível obter uma expressão explícita de $t^\pm$, mas é fácil ver que $P^+(x, y) = -P^-(x, -y)$ e $Q^+(x, y) = Q^-(x, y)$, e daí pela simetria do sistema, a origem é um centro.

2.8 Caso 8

A parte linear de X possui um par de autovalores complexos e a parte linear de Y possui um autovalor duplo com um autoespaço de dimensão 1, isto é, $a^2 + 4b < 0$ e $c^2 + 4d = 0$. Sabemos que a órbita passando pelo ponto $(r, 0)$ do sistema (1.1) tendo os subsistemas (1.10) e (1.11) com $\beta = -1$ e $\alpha > 0$ é constituída por (2.15) e (2.10) respectivamente. De modo análogo ao caso 1, os primeiros cinco coeficientes de Lyapunov na origem são dados por (2.11). Note que $V_4 = 0$ se, e somente se $a = 0$ ou $a^2 + 4b = 0$, mas isso não é possível pois pela hipótese $c \neq 0$. Portanto, $V_4 \neq 0$ e neste caso teremos um foco estável se $V_4 < 0$ e instável se $V_4 > 0$.

2.9 Caso 9

A parte linear de X e de Y possui um par de autovalores complexos. Sabemos que a órbita passando pelo ponto $(r, 0)$ do sistema (1.1) tendo os subsistemas (1.10) e (1.11) com $\beta = -1$ e $\alpha > 0$ é constituída por (2.15) e (2.12). Note que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(-\frac{1}{b} e^{t\mu} \cos(t\nu) + \frac{2br + a}{2b\nu} e^{t\mu} \sin t\nu + \frac{1}{b} \right) \Big|_{t=0} &= \\ &= \frac{-\mu}{b} + r + \frac{a}{2b} = r \neq 0. \end{aligned}$$

Daí, podemos usar o Teorema da Função Implícita e prosseguir como no caso 1. Os primeiros cinco coeficientes de Lyapunov são dados por (2.9) e assim, obtemos $c = -a\alpha$ e $d - \alpha^2 b = 0$. Utilizando as formas normais (1.10) e (1.11), sabemos que $b = \pm 1$, $d = \pm 1$ e como $\alpha > 0$, $a^2 + 4b < 0$ e $c^2 + 4d < 0$, temos novamente dois casos $\{a = 0 = c, b = -1 = d\}$ e $\{b = -1 = d, c = -a, \alpha = 1\}$. No primeiro caso, $\{a = 0 = c, b = -1 = d\}$, temos

$$\begin{aligned} t^+ &= \arctg\left(\frac{2r}{1-r^2}\right), \\ t^- &= \arctg\left(\frac{2r\alpha}{\alpha^2-r^2}\right), \\ r^+ &= -r, \\ r^- &= -r, \end{aligned}$$

o que nos garante que a origem é um centro. No segundo caso, $\{b = -1 = d, c = -a, \alpha = 1\}$, não é possível obter uma expressão explícita de $t^\pm$, mas é fácil ver que $P^+(x, y) = -P^+(x, -y)$ e $Q^+(x, y) = Q^-(x, -y)$, e daí pela simetria do sistema, a origem é um centro.

Agora iremos estudar o Problema do *Centro-Foco* para os casos associados aos sistemas X e Y nas formas normais (1.10) e (1.11) com $\beta = -1$ e $\alpha = 0$. Neste caso, Y possui um ponto singular em Σ , isto é, na origem. Além disso, pelo Teorema 1.2.1, o ponto singular é monodrômico, ou seja, a parte linear de Y possui um par de autovalores complexos e assim $c^2 + 4d < 0$.

Vamos distinguir os seguintes casos.

2.10 Caso 10

A parte linear de X possui dois autovalores reais com dois autovetores linearmente independentes, isto é, $a^2 + 4b > 0$. Sabemos que a órbita passando pelo ponto $(r, 0)$ do sistema (1.1) tendo os subsistemas (1.10) e (1.11) com $\beta = -1$ e $\alpha = 0$ é constituída por $\phi^+(t, (r, 0))$ dada em (2.1) e

$$\phi^-(t, (r, 0)) = \left(re^{\mu t} \cos \nu t + \frac{rc}{2\nu} e^{\mu t} \sin(\nu t), \quad \frac{r}{\nu} e^{\mu t} \sin \nu t \right), \quad (2.16)$$

onde $\mu = \frac{c}{2}$ e $\nu = \frac{\sqrt{-(c^2+4d)}}{2}$. Utilizando a notação dos casos anteriores, por (2.16) temos

$$t^- = \frac{2\pi}{\sqrt{-(c^2+4d)}}. \text{ Portanto, } R^-(r) = -re^{\frac{c\pi}{\sqrt{-(c^2+4d)}}}, \text{ e então } \Pi = R^+(r) - R^-(r) =$$

$R^+(r) + re^{\frac{c\pi}{\sqrt{-(c^2+4d)}}}$. Neste caso, não é possível obter a expressão explícita de $R^+(r)$, mas como nos casos anteriores, podemos calcular a série de Taylor de $R^+(r)$. Os primeiros seis coeficientes de Lyapunov na origem são dados por

$$\begin{aligned} V_1 &= e^{\frac{c\pi}{\sqrt{-(c^2+4d)}}} - 1, \\ V_2 &= -\frac{2a}{3}, \\ V_3 &= -\frac{4a^2}{9}, \\ V_4 &= -\frac{2a(22a^2 + 9b)}{135}, \\ V_5 &= -\frac{4a^2(26a^2 + 27b)}{405}, \\ V_6 &= -\frac{2a(100a^4 + 27b^2 + 176a^2b)}{945}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Claramente $V_1 = V_2 = V_3 = V_4 = V_5 = V_6 = 0$ se, e somente se $a = c = 0$. Queremos verificar que todos os V_i 's são zeros, provando assim a existência de um centro. Daí se $a = c = 0$, pelas formas normais (1.10) e (1.11), sabemos que $b = \pm 1$, $d = \pm 1$ e como $\alpha = 0$, $a^2 + 4b > 0$ e $c^2 + 4d < 0$ temos $\{a = 0 = c, b = 1, d = -1\}$. Assim,

$$\begin{aligned} t^+ &= \log\left(\frac{r+1}{r-1}\right), \\ t^- &= \pi, \\ r^+ &= -r, \\ r^- &= -r, \end{aligned}$$

o que prova que a origem é um centro.

2.11 Caso 11

A parte linear de X possui um autovalor duplo com um autoespaço de dimensão 1, isto é, $a^2 + 4b = 0$. Sabemos que a órbita passando pelo ponto $(r, 0)$ do sistema (1.1) tendo os subsistemas (1.10) e (1.11) com $\beta = -1$ e $\alpha = 0$ é constituída por (2.13) e (2.16) respectivamente.

Analogamente ao caso 10, os primeiros seis coeficientes de Lyapunov são dados por

$$\begin{aligned}
V_1 &= e^{\frac{c\pi}{\sqrt{-(c^2+4d)}}} - 1, \\
V_2 &= -\frac{2a}{3}, \\
V_3 &= -\frac{4a^2}{9}, \\
V_4 &= -\frac{79a^4}{270}, \\
V_5 &= -\frac{77a^4}{405}, \\
V_6 &= -\frac{923a^5}{7560}.
\end{aligned} \tag{2.18}$$

Claramente $V_1 = 0$ se, e somente se $c = 0$. Agora, $V_2 = V_3 = V_4 = V_5 = V_6 = 0$ se, e somente se $a = 0$, mas isto não é possível por causa da hipótese. Portanto, $V_2 \neq 0$ e neste caso teremos um foco estável se $V_2 < 0$ e instável se $V_2 > 0$.

2.12 Caso 12

A parte linear de X possui um par de autovalores complexos, isto é, $a^2 + 4b < 0$. Sabemos que a órbita passando pelo ponto $(r, 0)$ do sistema (1.1) tendo os subsistemas (1.10) e (1.11) com $\beta = -1$ e $\alpha = 0$ é constituída por (2.15) e (2.16) respectivamente. Analogamente ao caso (10), os coeficientes de Lyapunov são dados por (2.17). Logo, obtemos as mesmas condições, $a = 0 = c$. Pelas formas normais temos $\{a = 0 = c, b = -1 = d\}$. Assim, temos

$$\begin{aligned}
t^+ &= \arctg\left(\frac{2r}{1-r^2}\right), \\
t^- &= \pi, \\
r^+ &= -r, \\
r^- &= -r,
\end{aligned}$$

o que comprova que a origem é um centro.

Vamos estudar agora o Problema do *Centro-Foco* com $\beta = 0 = \alpha$. Temos o seguinte caso.

2.13 Caso 13

As partes lineares de X e de Y possuem um par de autovalores complexos, isto é, $a^2 + 4b < 0$ e $c^2 + 4d < 0$. Sabemos que a órbita passando pelo ponto $(r, 0)$ do sistema (1.1) tendo os subsistemas (1.10) e (1.11) com $\beta = 0 = \alpha$ é constituída por

$$\phi^+(t, (r, 0)) = \left(re^{\mu t} \cos \nu t + \frac{rc}{2\nu} e^{\mu t} \sin(\nu t), \frac{r}{\nu} e^{\mu t} \sin \nu t \right), \tag{2.19}$$

onde $\mu = \frac{c}{2}$ e $\nu = \frac{\sqrt{-(a^2 + 4b)}}{2}$ e $\phi^-(t, (r, 0))$ é dada por (2.16). Das equações (2.19) e (2.16), temos $t^+ = \frac{2\pi}{\sqrt{-(a^2 + 4b)}}$ e $t^- = \frac{2\pi}{\sqrt{-(c^2 + 4d)}}$. Portanto, $R^+(r) = -re^{\frac{a\pi}{\sqrt{-(a^2 + 4b)}}}$

e $R^-(r) = -re^{\frac{a\pi}{\sqrt{-(a^2+4b)}}} + re^{\frac{c\pi}{\sqrt{-(c^2+4d)}}}$ e daí

$$\Pi(r) = R^+(r) - R^-(r) = -re^{\frac{a\pi}{\sqrt{-(a^2+4b)}}} + re^{\frac{c\pi}{\sqrt{-(c^2+4d)}}}.$$

Logo, a origem é um centro se, e somente se $\Pi(r) = 0$, isto é, $c = -a$.

Após estes trezes casos, podemos enunciar os seguintes teoremas. Nos próximos teoremas, até que seja dito o contrário, vamos considerar $c^+c^- > 0, \beta^+ = \frac{c^+\beta^-}{c^-}$ e $X^2f(p) \neq 0$.

Teorema 2.13.1. *Assuma que o sistema (1.1) possua uma singularidade monodrômica. Se os subsistemas (1.2) e (1.3) possuem duas singularidades com dois autovalores reais e dois autovetores linearmente independentes então o sistema possui um centro se, e somente se*

- i) $tr^+ = 0 = tr^-$, $det^+ > 0$ e $det^- > 0$ ou
- ii) $tr^+ = -tr^-$, $det^+ > 0$, $det^- > 0$ e $\frac{c^+(a^-\beta^- - c^-\alpha^-)\sqrt{|det^+|}}{c^-(a^+\beta^+ - c^+\alpha^+)\sqrt{|det^-|}} = 1$ ou
- iii) $tr^+ = -tr^-$, $det^+ < 0$, $det^- < 0$ e $\frac{c^+(a^-\beta^- - c^-\alpha^-)\sqrt{|det^+|}}{c^-(a^+\beta^+ - c^+\alpha^+)\sqrt{|det^-|}} = 1$.

Demonstração. A demonstração deste resultado está feito na caso 1 do *Problema do Centro-Foco* $\square$

Teorema 2.13.2. *Assuma que o sistema (1.1) possua uma singularidade monodrômica. Se os subsistemas (1.2) e (1.3) possuem respectivamente duas singularidades com dois autovalores reais e dois autovetores linearmente independentes e dois autovalores complexos, então o sistema possui um centro se, e somente se*

- i) $tr^+ = 0 = tr^-$, $det^+ > 0$ e $det^- < 0$ e ou
- ii) $tr^+ = -tr^-$, $det^+ < 0$, $det^- < 0$ e $\frac{c^+(a^-\beta^- - c^-\alpha^-)\sqrt{|det^+|}}{c^-(a^+\beta^+ - c^+\alpha^+)\sqrt{|det^-|}} = 1$.

Demonstração. A demonstração deste resultado está feito na caso 3 do *Problema do Centro-Foco* $\square$

Teorema 2.13.3. *Assuma que o sistema (1.1) possua uma singularidade monodrômica. Se os subsistemas (1.2) e (1.3) possuem duas singularidades com um autovalor duplo e um autovetor então o sistema possui um centro se, e somente se $tr^- = \alpha tr^+$, $\frac{c^+(a^-\beta^- - c^-\alpha^-)\sqrt{|det^+|}}{c^-(a^+\beta^+ - c^+\alpha^+)\sqrt{|det^-|}} > 0$.*

Demonstração. A demonstração deste resultado está feito na caso 5 do *Problema do Centro-Foco* $\square$

Teorema 2.13.4. *Assuma que o sistema (1.1) possua uma singularidade monodrômica. Se os subsistemas (1.2) e (1.3) possuem duas singularidades com dois autovalores complexos e dois autovalores reais com dois autovetores linearmente independentes, respectivamente, então o sistema possui um centro se, e somente se*

i) $tr^+ = 0 = tr^-$, $det^+ > 0$ e $det^- < 0$ ou

ii) $tr^+ = -tr^-$, $det^+ < 0$, $det^- < 0$ e $\frac{c^+(a^-\beta^- - c^-\alpha^-)\sqrt{|det^+|}}{c^-(a^+\beta^+ - c^+\alpha^+)\sqrt{|det^-|}} = 1$.

Demonstração. A demonstração deste resultado está feito na caso 7 do *Problema do Centro-Foco* $\square$

Teorema 2.13.5. *Assuma que o sistema (1.1) possua uma singularidade monodrômica. Se os subsistemas (1.2) e (1.3) possuem duas singularidades com dois autovalores complexos então o sistema possui um centro se, e somente se*

i) $tr^+ = 0 = tr^-$, $det^+ < 0$ e $det^- < 0$ ou

ii) $tr^+ = -tr^-$, $det^+ < 0$, $det^- < 0$ e $\frac{c^+(a^-\beta^- - c^-\alpha^-)\sqrt{|det^+|}}{c^-(a^+\beta^+ - c^+\alpha^+)\sqrt{|det^-|}} = 1$.

Demonstração. A demonstração deste resultado está feito na caso 9 do *Problema do Centro-Foco* $\square$

Teorema 2.13.6. *Assuma que o sistema (1.1) possua uma singularidade monodrômica. Se o subsistema (1.2) possui uma singularidade com dois autovalores reais e dois autovetores linearmente independentes e o subsistema (1.3) possui um par de autovalores complexos então o sistema possui um centro se, e somente se $tr^+ = 0 = tr^-$, $det^+ > 0$ e $det^- < 0$.*

Demonstração. A demonstração deste resultado está feito na caso 10 do *Problema do Centro-Foco* $\square$

Teorema 2.13.7. *Assuma que o sistema (1.1) possua uma singularidade monodrômica. Se os subsistemas (1.2) e (1.3) possuem duas singularidade com dois autovalores complexos então o sistema possui um centro se, e somente se $\frac{c^+(a^-\beta^- - c^-\alpha^-)\sqrt{|det^+|}}{c^-(a^+\beta^+ - c^+\alpha^+)\sqrt{|det^-|}} = 0$, $tr^+ = 0 = tr^-$, $det^+ < 0$ e $det^- < 0$.*

Demonstração. A demonstração deste resultado está feito na caso 12 do *Problema do Centro-Foco* $\square$

Vamos assumir agora $c^+c^- > 0$, $\beta^+ = \frac{c^+\beta^-}{c^-}$, $X(p) = 0 = Y(p)$, $X^2f(p) = 0 = Y^2f(p)$, $a^+\beta^+ - c^+\alpha^+ = 0 = a^-\beta^- - c^-\alpha^-$.

Teorema 2.13.8. *Assuma que o sistema (1.1) possua uma singularidade monodrômica. Se os subsistemas (1.2) e (1.3) possuem duas singularidade com dois autovalores complexos então o sistema possui um centro se, e somente se $\frac{c^+(a^-\beta^- - c^-\alpha^-)\sqrt{|det^+|}}{c^-(a^+\beta^+ - c^+\alpha^+)\sqrt{|det^-|}} = 0$ e $tr^+ = -tr^-$.*

Demonstração. A demonstração deste resultado está feito na caso 13 do *Problema do Centro-Foco* $\square$

Aplicação de Poincaré e Ciclos Limites

Neste capítulo, iremos estudar a aplicação de Poincaré para campos de vetores lineares por partes em duas zonas em que ambas as dinâmicas são do tipo foco. Este estudo foi feito por Freire, Ponce e Torres em [5], onde os autores provam também a existência de no máximo um ciclo limite permitindo apenas regiões de costura.

Considere o sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = Z(u, v) = \begin{cases} X^+(u, v) = A^+ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + B^+ & \text{se } u \geq 0 \\ X^-(u, v) = A^- \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + B^- & \text{se } u \leq 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

onde $A^\pm = a_{ij}^\pm$ são matrizes constantes 2×2 e $B^\pm$ são vetores constantes de $\mathbb{R}^2$. Este sistema depende inicialmente de doze parâmetros. Tal quantidade de parâmetros pode tornar o estudo do sistema inviável. Por este motivo iremos reduzir o número de parâmetros de tal forma que simplifique o nosso estudo.

Proposição 3.0.1. *Assuma que $a_{12}^+ a_{12}^- > 0$ no sistema (3.1). O homeomorfismo $(x, y) = h(u, v)$ dado por*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_{22}^- & -a_{12}^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ b_1^- \end{pmatrix} \quad \text{se } u \leq 0$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{a_{12}^+} \begin{pmatrix} a_{12}^- & 0 \\ a_{12}^- a_{22}^+ & -a_{12}^- a_{12}^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ b_1^- \end{pmatrix} \quad \text{se } u \geq 0$$

transforma o sistema (3.1) na forma canônica

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} &= X^- = \begin{pmatrix} T^- & -1 \\ D^- & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ a^- \end{pmatrix} \quad \text{se } x < 0, \\
\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} &= X^+ = \begin{pmatrix} T^+ & -1 \\ D^+ & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b \\ a^+ \end{pmatrix} \quad \text{se } x > 0,
\end{aligned} \tag{3.2}$$

no qual, $a^- = a_{12}^- b_2^- - a_{22}^- b_1^-$, $b = \frac{a_{12}^-}{a_{12}^+} b_1^+ - b_1^-$, $a^+ = \frac{a_{12}^-}{a_{12}^+} (a_{12}^+ b_2^+ - a_{22}^+ b_1^+)$.

Demonstração. Vamos determinar o campo X^- . Temos então,

$$\dot{x} = \dot{u} = a_{11}^- u + a_{12}^- v + b_1^-,$$

e como,

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = -\frac{1}{a_{12}^-} \begin{pmatrix} -a_{12}^- & 0 \\ -a_{22}^- & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y + b_1^- \end{pmatrix}$$

isto é, $u = x$ e $v = \frac{a_{22}^-}{a_{12}^-} x - \frac{1}{a_{12}^-} y - \frac{b_1^-}{a_{12}^-}$. Logo,

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= a_{11}^- x + a_{12}^- \left(\frac{a_{22}^-}{a_{12}^-} x - \frac{1}{a_{12}^-} y - \frac{b_1^-}{a_{12}^-} \right) + b_1^- = \\
&= (a_{11}^- + a_{22}^-) x - y = \text{tr}(A^-) x - y = T^- x - y.
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
\dot{y} &= \frac{d}{dt} (a_{22}^- u - a_{12}^- v - b_1^-) = a_{22}^- \dot{u} - a_{12}^- \dot{v} = \\
&= a_{22}^- (a_{11}^- u + a_{12}^- v + b_1^-) - a_{12}^- (a_{21}^- u + a_{22}^- v + b_2^-) = \\
&= (a_{11}^- a_{22}^- - a_{12}^- a_{21}^-) u + (a_{12}^- a_{22}^- - a_{12}^- a_{22}^-) v + (a_{22}^- b_1^- - a_{12}^- b_2^-) = \\
&= \det(A^-) u + a^- = D^- x + a^-.
\end{aligned}$$

Vamos determinar agora o campo X^+ . Temos então,

$$\dot{x} = \frac{a_{12}^-}{a_{12}^+} \dot{x} = \frac{a_{12}^-}{a_{12}^+} (a_{11}^+ u + a_{12}^+ v + b_1^+),$$

e como

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = -\frac{a_{12}^+}{(a_{12}^-)^2} \begin{pmatrix} -a_{12}^- & 0 \\ -\frac{a_{12}^- a_{22}^+}{a_{12}^+} & \frac{a_{12}^-}{a_{12}^+} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y + b_1^- \end{pmatrix},$$

isto é, $x = \frac{a_{12}^+}{a_{12}^-}X$ e $y = \frac{a_{22}^+}{a_{12}^-}x - \frac{1}{a_{12}^-}y - \frac{b_1^-}{a_{12}^-}$. Logo,

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{a_{12}^-}{a_{12}^+}(a_{11}^+u + a_{12}^+v + b_1^+) = \frac{a_{12}^-}{a_{12}^+}\left(a_{11}^+\left(\frac{a_{12}^+}{a_{12}^-}x\right) + a_{22}^+\left(\frac{a_{22}^+}{a_{12}^-}x - \frac{1}{a_{12}^-}y - \frac{b_1^-}{a_{12}^-}\right) + b_1^+\right) = \\ &= (a_{11}^+ + a_{22}^+)x - y + (-b_1^- + \frac{b_1^+a_{12}^-}{a_{12}^+}) = \text{tr}(A^+)x - y + b = T^+x - y + b.\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}\dot{y} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{a_{12}^-a_{22}^+}{a_{12}^+}u - a_{12}^-v - b_1^-\right) = \frac{a_{12}^-a_{22}^+}{a_{12}^+}\dot{u} - a_{12}^-\dot{v} = \\ &= \frac{a_{12}^-a_{22}^+}{a_{12}^+}(a_{11}^+u + a_{12}^+v + b_1^+) - a_{12}^-(a_{21}^+u + a_{22}^+v + b_2^+) = \\ &= \frac{a_{12}^-a_{22}^+}{a_{12}^+}\left(a_{11}^+\left(\frac{a_{12}^+}{a_{12}^-}x\right) + a_{11}^+\left(\frac{a_{22}^+}{a_{12}^-}x - \frac{1}{a_{12}^-}y - \frac{b_1^-}{a_{12}^-}\right) + b_1^+\right) - \\ &= -a_{12}^-(a_{21}^+\left(\frac{a_{12}^+}{a_{12}^-}x\right) + a_{22}^+\left(\frac{a_{22}^+}{a_{12}^-}x - \frac{1}{a_{12}^-}y - \frac{b_1^-}{a_{12}^-}\right) + b_2^+) = \\ &= (a_{11}^+a_{22}^+ - a_{12}^+a_{21}^+)x + \frac{a_{12}^-}{a_{12}^+}(a_{22}^+b_1^+ - a_{12}^+b_2^+) = \\ &= \det(A^+)x + a^+ = D^+x + a^+.\end{aligned}$$

Concluimos assim a demonstração. Observe agora que o nosso sistema depende apenas de cinco parâmetros.

□

Analogamente à observação feita após o enunciado do Teorema 1.3.1, a mudança de coordenadas acima é um homeomorfismo que preserva os pontos do conjunto de descontinuidade Σ , aplicando os seus respectivos arcos de costura, deslize, escape, pontos de dobra e singularidades dos campos de vetores X^+ e X^- em arcos e pontos do mesmo tipo. Mais ainda, a mudança de coordenadas estabelece uma equivalência topológica entre os campos de vetores descontínuos para todas as órbitas que não possuem pontos em comum com os conjuntos de deslize e escape.

Nosso objetivo agora é simplificar um pouco mais a forma canônica acima, no caso em que ambas as dinâmicas são do tipo foco nas duas zonas, isto é, $(T^\pm)^2 - 4D^\pm < 0$. Portanto, os autovalores de $A^\pm$ são da forma $\lambda^\pm = \alpha^\pm \pm \beta^\pm i$, com $\beta^\pm > 0$. Note que $T^\pm = 2\alpha^\pm$ e $D^\pm = (\alpha^\pm)^2 + (\beta^\pm)^2$.

Considere a mudança de variável

$$(X, Y, T) \mapsto \left(\frac{x}{\beta(x)}, y, \frac{t}{\beta(x)} \right), \text{ com } \beta(x) = \begin{cases} \beta^- & \text{se } x < 0 \\ \beta^+ & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

Como $t = \beta(x)T$, temos $\frac{dt}{dT} = \beta(x)$. Daí,

$$\dot{X} = \frac{dX}{dt} \frac{dt}{dT} = \frac{d}{dt} \left(\frac{x}{\beta(x)} \right) \beta(x) = \dot{x},$$

$$\dot{Y} = \frac{dY}{dt} \frac{dt}{dT} = \frac{dy}{dt} \beta(x) = \beta(x) \dot{y}.$$

Assim, usando a forma canônica dada por (3.2) temos o novo sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{X} = \dot{x} \\ \dot{Y} = \dot{y}\beta^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha^- & -1 \\ (\alpha^-)^2 + (\beta^-)^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{x}{\beta^-} \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ a^- \end{pmatrix} \quad \text{se } x \geq 0$$

$$\begin{pmatrix} \dot{X} = \dot{x} \\ \dot{Y} = \dot{y}\beta^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\alpha^+ & -1 \\ (\alpha^+)^2 + (\beta^+)^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -b \\ a^+ \end{pmatrix} \quad \text{se } x \leq 0.$$

Logo, (escrevendo X e Y como x e y) para $x < 0$ e $x > 0$, temos respectivamente os seguintes sistemas

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2\frac{\alpha^-}{\beta^-}x - y, \\ \dot{y} &= ((\alpha^-)^2 + (\beta^-)^2) \left(\frac{x}{(\beta^-)^2} \right) - \frac{a^-}{\beta^-}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2\frac{\alpha^+}{\beta^+}x - y + b, \\ \dot{y} &= ((\alpha^+)^2 + (\beta^+)^2) \left(\frac{x}{(\beta^+)^2} \right) - \frac{a^+}{\beta^+}. \end{aligned}$$

Denotando $\gamma_R = \frac{\alpha^+}{\beta^+}$, $\gamma_L = \frac{\alpha^-}{\beta^-}$, $a_R = \frac{a^+}{\beta^+}$ e $a_L = \frac{a^-}{\beta^-}$, o sistema fica na forma

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\gamma_L & -1 \\ 1 + \gamma_L^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ a_L \end{pmatrix} \quad \text{se } x \leq 0, \quad (3.3)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\gamma_R & -1 \\ 1 + \gamma_R^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -b \\ a_R \end{pmatrix} \quad \text{se } x > 0. \quad (3.4)$$

Para $(x, y) \neq 0$, o sistema

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\gamma & -1 \\ 1 + \gamma^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sigma \\ \rho \end{pmatrix}.$$

possui soluções da forma

$$\begin{pmatrix} x(t) - \bar{x} \\ y(t) - \bar{y} \end{pmatrix} = e^{\gamma t} \begin{pmatrix} \cos(t) + \gamma \sin(t) & -\sin(t) \\ 1 + \gamma^2 \sin(t) & \cos(t) - \gamma \sin(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x(0) - \bar{x} \\ y(0) - \bar{y} \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

onde $(\bar{x}, \bar{y}) = (\frac{\rho}{1+\gamma^2}, \frac{2\gamma\rho}{1+\gamma^2} + \sigma)$ é a singularidade do sistema.

Para facilitar os cálculos, iremos recorrer a função auxiliar

$$\varphi_\gamma(t) = 1 - e^{\gamma t}(\cos(t) - \gamma \sin(t)). \quad (3.6)$$

Note que $\varphi_{-\gamma}(-t) = \varphi_\gamma(t)$ e $\varphi_{-\gamma}(t) = \varphi_\gamma(-t)$ para todo $\gamma, t \in \mathbb{R}$.

3.1 A Aplicação de Poincaré $P_L(y)$

Para o sistema (3.3), a direção do fluxo através da reta $x = 0$ assegura que a órbita começa no ponto $(0, y_0)$, com $y_0 \geq 0$, permanece em Σ^- até atingir Σ no ponto $(0, y_1)$, com $y_1 \leq 0$ após um tempo t^- . Assim, definimos a aplicação de Poincaré P_L como sendo $y_1 = P_L(y_0)$, com $P_L(0) = 0$. Vamos determinar explicitamente a aplicação de Poincaré P_L .

Chamaremos de t^- o menor valor de t positivo que satisfaz $x(t^-) = 0$. Por (3.5) a solução $(x(t), y(t))$ do sistema (3.3) com condição inicial $(x(0), y(0)) = (0, y_0)$ satisfaz

$$\begin{aligned} x(t^-) - \frac{a_L}{1 + \gamma_L^2} &= -\frac{a_L}{1 + \gamma_L^2} = \\ e^{\gamma_L t^-} \left(\frac{a_L}{1 + \gamma_L^2} (\cos t^- + \gamma_L \sin t^-) - \sin t^- \left(y_0 - \frac{2\gamma_L a_L}{1 + \gamma_L^2} \right) \right). \end{aligned}$$

Isolando y_0 na equação acima temos

$$\begin{aligned} y_0 &= -\frac{a_L}{1 + \gamma_L^2} e^{-\gamma_L t^-} + \frac{a_L}{(1 + \gamma_L^2)(-\sin t^-)} (\cos t^- + \gamma_L \sin t^-) + \frac{2\gamma_L a_L}{1 + \gamma_L^2} = \\ &= \frac{a_L}{1 + \gamma_L^2} \frac{e^{-\gamma_L t^-} \varphi_{\gamma_L}(t^-)}{\sin t^-}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Como $y(t^-) = y_1$, substituindo y_0 em

$$y_1 - \frac{2\gamma_L a_L}{1 + \gamma_L^2} = e^{\gamma_L t^-} \left((1 + \gamma_L^2) \sin t^- \left(\frac{-\gamma_L}{1 + \gamma_L^2} \right) + (\cos t^- - \gamma_L \sin t^-) \left(y_0 - \frac{2\gamma_L a_L}{1 + \gamma_L^2} \right) \right),$$

temos

$$y_1 = -\frac{a_L}{1 + \gamma_L^2} \frac{e^{\gamma_L t^-} \varphi_{-\gamma_L(t^-)}}{\sin t^-}.$$

Daí,

$$P_L(y) = -\frac{a_L}{1 + \gamma_L^2} \frac{e^{\gamma_L t^-} \varphi_{-\gamma_L(t^-)}}{\sin t^-}. \quad (3.8)$$

Para calcularmos $P'_L(y_0)$, usaremos as expressões parametrizadas (3.7), (3.8) e a função auxiliar (3.6). Como $\frac{dP_L}{dy_0} = \frac{dP_L}{dt} / \frac{dy_0}{dt}$, temos

$$P'_L(y_0) = -\frac{\varphi_\gamma(t)}{\varphi_{-\gamma}(t)} = \frac{y_0}{P_L(y_0)} e^{2\gamma_L t^-}. \quad (3.9)$$

A segunda derivada de P_L em y_0 é dada por $\frac{d}{dt} \left(\frac{dP_L}{dy_0} \right) / \left(\frac{dy_0}{dt} \right)$. Assim, de forma análoga ao cálculo de $P'_L(y_0)$ temos

$$P''_L(y_0) = \frac{2a_L^2}{1 + \gamma_L^2} \frac{\sinh(\gamma_L t^-) - \gamma_L \sin t^-}{(P_L(y_0))^3} e^{3\gamma_L t^-}.$$

Provaremos abaixo algumas propriedades referentes à aplicação de Poincaré $P_L(y)$.

Proposição 3.1.1. *Assuma que $a_L \geq 0$ no sistema (3.3). Então, temos as seguintes propriedades para a aplicação de Poincaré P_L :*

a) *Se $a_L \gamma_L = 0$ então $P_L(y) = -ye^{\gamma_L \pi}$ para todo $y \geq 0$*

b) *Se $a_L > 0$ então a aplicação de Poincaré P_L dada em (3.8) é bem definida para todo $y \geq 0$ com $t \in (0, \pi)$; Em particular, temos $P_L(0) = 0$ e as quatro primeiras derivadas no ponto $y = 0$ são dadas por*

$$\begin{aligned} P'_L(0) &= -1 \\ P''_L(0) &= -\frac{8\gamma_L}{3a_L} \\ P'''_L(0) &= -\frac{32\gamma_L^2}{3a_L^2} \\ P^{IV}_L(0) &= -32\gamma_L \frac{79\gamma_L^2 - 9}{45a_L^3} \end{aligned} \quad (3.10)$$

c) *Se $a_L > 0$ e $\gamma_L \neq 0$, então para todo $y \geq 0$, temos $P'_L(y) < 0$, $\lim_{y \rightarrow 0^+} P'_L(y) = -1$, $\lim_{y \rightarrow \infty} P'_L(y) = -e^{\gamma_L \pi}$ e $\text{sgn}(P''_L(y)) = -\text{sgn}(\gamma_L)$.*

Demonstração. **a)** Se $\gamma_L = 0$ então temos $\bar{x} = a_L$ e $\bar{y} = 0$. Daí, de (3.8) e (3.7), temos $P_L(y) = \frac{-a_L(1 - \cos t)}{\sin t}$ e $y = \frac{a_L(1 - \cos t)}{\sin t}$. Logo, $\frac{P_L(y)}{y} = -1$ o que implica $P_L(y) = -y$.

Se $a_L = 0$, temos o ponto de equilíbrio pertencente a Σ , isto é, $\bar{x} = 0 = \bar{y}$. Assim, de (3.5) temos $x(t) = -e^{\gamma_L t} \sin t y_0$ e $y(t) = e^{\gamma_L t} \cos t y_0$. Note que $x(t) = 0$ se, e somente se $t = \pi$. Logo, $y(\pi) = -e^{\gamma_L \pi} y_0$.

b) Claramente a aplicação está bem definida para todo $y \geq 0$ e $P_L(0) = 0$. Vamos determinar então as quatro primeiras derivadas de $P_L(y)$ no ponto $y = 0$ através da expansão em série de P_L em $y = 0$.

Procederemos de maneira semelhante ao caso 1 do capítulo 2. De (3.5) e substituindo y_0 por ϵ temos

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{a_L}{1 + \gamma_L} + e^{\gamma_L t} \left(\frac{a_L}{1 + \gamma_L^2} (\cos t + \gamma_L \sin t) - \sin t \left(\epsilon - \frac{2\gamma_L a_L}{1 + \gamma_L^2} \right) \right) = \\ &= \frac{a_L - a_L(e^{\gamma_L t} \cos t - e^{\gamma_L t} \sin t(-a_L \gamma_L + \gamma_L^2 \epsilon + \epsilon))}{1 + \gamma_L^2} \end{aligned}$$

A expansão em série de $x(t)$ em relação à t é dada por

$$-t\epsilon + \frac{1}{2}t^2(a_L - 2\gamma_L\epsilon) + \frac{1}{6}t^3(2a_L\gamma_L - 3\gamma_L^2\epsilon + \epsilon) + \frac{1}{24}t^4(3a_L\gamma_L^2 - a_L - 4\gamma_L^3\epsilon + 4\gamma_L\epsilon) + \dots$$

Substituindo t por $b_1\epsilon + b_2\epsilon^2 + b_3\epsilon^3 + b_4\epsilon^4 + b_5\epsilon^5$ na expressão acima temos

$$\begin{aligned} &-(b_1\epsilon + b_2\epsilon^2 + b_3\epsilon^3 + b_4\epsilon^4 + b_5\epsilon^5)\epsilon + \frac{1}{2}(b_1\epsilon + b_2\epsilon^2 + b_3\epsilon^3 + b_4\epsilon^4 + b_5\epsilon^5)^2(a_L - 2\gamma_L\epsilon) + \\ &\frac{1}{6}(b_1\epsilon + b_2\epsilon^2 + b_3\epsilon^3 + b_4\epsilon^4 + b_5\epsilon^5)^3(2a_L\gamma_L - 3\gamma_L^2\epsilon + \epsilon) + \frac{1}{24}(b_1\epsilon + b_2\epsilon^2 + b_3\epsilon^3 + b_4\epsilon^4 + \\ &b_5\epsilon^5)^4(3a_L\gamma_L^2 - a_L - 4\gamma_L^3\epsilon + 4\gamma_L\epsilon) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\left(\frac{-b_1 + a_L b_1^2}{2} \right) \epsilon^2 + \left(\frac{1}{3} a_L b_1^3 \gamma_L + a_L b_1 b_2 - b_1^2 \gamma_L - b_2 \right) \epsilon^3 + \frac{1}{24} (3a_L b_1^4 \gamma_L^2 - a_L b_1^4 + \\ &+ 24a_L b_1^2 b_2 \gamma_L + 24a_L b_1 b_3 + 12a_L b_2^2 - 12b_1^3 \gamma_L^2 + 4b_1^3 - 41b_1 b_2 \gamma_L - 24b_3) \epsilon^4 + \dots \end{aligned}$$

Daí, igualando a expressão acima a zero, isto é, anulando os coeficientes que multiplicam as potências de ϵ , obtemos as expressões para os b_i 's. Por exemplo, o coeficiente que multiplica ϵ^2 é $\frac{-b_1 + a_L b_1^2}{2}$, o que implica $b_1 = \frac{2}{a_L}$. Substituindo o valor de b_1 , obtemos que o coeficiente que multiplica ϵ^3 é $b_2 - \frac{4\gamma_L}{3a_L^2}$, o que implica $b_2 = \frac{4\gamma_L}{3a_L^2}$. Continuando com o processo encontramos $b_3 = \frac{2(-3 + 5\gamma_L^2)}{9a_L^3}$ e $b_4 = \frac{8\gamma_L(-9 + 7\gamma_L^2)}{27a_L^4}$. Assim,

$$b_1\epsilon + b_2\epsilon^2 + b_3\epsilon^3 + b_4\epsilon^4 = \frac{2\epsilon}{a_L} + \frac{4\gamma_L\epsilon^2}{3a_L^2} + \frac{2(5\gamma_L^2 - 3)\epsilon^3}{9a_L^3} + \frac{8\gamma_L(7\gamma_L^2 - 9)\epsilon^4}{27a_L^4}.$$

Calculando a série de

$$y(t) = \frac{2a_L\gamma_L}{1 + \gamma_L^2} + e^{\gamma_L t} \left(\left(y_0 - \frac{2a_L\gamma_L}{1 + \gamma_L^2} \right) (\cos t - \gamma_L \sin t) - a_L \sin t \right)$$

e substituindo t por

$$\frac{2\epsilon}{a_L} + \frac{4\gamma_L\epsilon^2}{3a_L^2} + \frac{2(5\gamma_L^2 - 3)\epsilon^3}{9a_L^3} + \frac{8\gamma_L(7\gamma_L^2 - 9)\epsilon^4}{27a_L^4}$$

temos

$$-\epsilon - \frac{4\gamma_L\epsilon^2}{3a_L} - \frac{16\gamma_L^2\epsilon^3}{9a_L^2} - \frac{4(23\gamma_L^3 - 9\gamma_L)\epsilon^4}{27a_L^3} + \dots$$

Derivando a expressão acima e tomando $\epsilon = 0$ encontramos (3.10).

c) Por definição $P_L(y) < 0$ e $y > 0$, logo de (3.9) segue que $P'_L(y) < 0$. Para provarmos que $\lim_{y \rightarrow 0^+} P'_L(y) = -1$ note que quando $y \rightarrow 0$ temos $t \rightarrow 0$, logo

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} P'_L(y) = \lim_{t \rightarrow 0^+} -\frac{\varphi_{\gamma_L}(t^-)}{\varphi_{-\gamma_L}(t^-)} = \lim_{t \rightarrow 0^+} -\frac{1 - e^{\gamma_L t}(\cos t - \gamma_L \sin t)}{1 - e^{-\gamma_L t}(\cos t + \gamma_L \sin t)}.$$

Note que $\lim_{t \rightarrow 0^+} -\frac{1 - e^{\gamma_L t}(\cos t - \gamma_L \sin t)}{1 - e^{-\gamma_L t}(\cos t + \gamma_L \sin t)}$ é uma indeterminação, logo aplicando a regra de L'Hospital temos $\lim_{t \rightarrow 0^+} -\frac{(1 + \gamma_L^2)e^{-\gamma_L t} \sin t}{(1 + \gamma_L^2)e^{\gamma_L t} \sin t}$ que é novamente uma indeterminação. Aplicando novamente L'Hospital

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} -\frac{(1 + \gamma_L^2)e^{\gamma_L t}(\gamma_L \sin t + \cos t)}{(1 + \gamma_L^2)e^{-\gamma_L t}(\gamma_L \sin t + \cos t)} = -1.$$

Para provarmos que $\lim_{y \rightarrow \infty} P'_L(y) = -e^{\gamma_L \pi}$ basta notar que quando $y \rightarrow \infty$ temos $t \rightarrow \pi$, logo

$$\lim_{y \rightarrow \infty} P'_L(y) = \lim_{t \rightarrow \pi} -\frac{\varphi_{\gamma_L}(t^-)}{\varphi_{-\gamma_L}(t^-)} = \lim_{t \rightarrow \pi} -\frac{1 - e^{\gamma_L t}(\cos t - \gamma_L \sin t)}{1 - e^{-\gamma_L t}(\cos t + \gamma_L \sin t)} = -e^{\gamma_L \pi}.$$

Por fim, vamos provar que $\text{sgn}P_L''(y) = -\text{sgn}(\gamma_L)$. Note que como $(P_L(y))^3 < 0$, devemos analisar o sinal de $h(t) = \sinh \gamma_L t - \gamma_L \sin t$. Vamos considerar $\gamma_L > 0$, para $\gamma_L < 0$ o raciocínio é análogo.

Temos $h'(t) = \gamma_L \cosh \gamma_L t - \gamma_L \cos t$, $h''(t) = \gamma_L^2 \sinh \gamma_L t + \gamma_L \sin t$ e $h'''(t) = \gamma_L^3 \cosh \gamma_L t + \gamma_L \cos t$. Note que $h(0) = h'(0) = h''(0) = 0$ e $h'''(0) > 0$ para todo $t \in (0, \frac{\pi}{2})$. Logo $h''(t)$ é crescente em $(0, \frac{\pi}{2})$. Como $h''(0) = 0$ temos $h''(t) > 0$ todo $t \in (0, \frac{\pi}{2})$, logo $h'(t)$ é crescente em $(0, \frac{\pi}{2})$. Novamente como $h'(0) = 0$ temos $h'(t) > 0$ para todo $t \in (0, \frac{\pi}{2})$, portanto $h(t)$ é crescente em $(0, \frac{\pi}{2})$.

Dado $t \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, temos $\sinh \gamma_L t > 0$ e $-\gamma_L \sin t > 0$ e ambas são crescentes pois $\gamma_L > 0$. Daí, $h(t) > 0$ é crescente em $(\frac{\pi}{2}, \pi)$. Logo $h(t) > 0$ é crescente em $(0, \pi)$. Note que o sinal de $h(t)$ depende do sinal de γ_L . Portanto $\text{sgn}P_L''(y) = -\text{sgn}(\gamma_L)$.

□

3.2 A Aplicação de Poincaré $P_R(y)$

Vamos encontrar agora a forma explícita da aplicação de Poincaré P_R . Chamaremos de t^+ o menor valor de t positivo que satisfaz $x(t^+) = 0$. Por (3.5) a solução $(x(t), y(t))$ do sistema (3.4) com condição inicial $(x(0), y(0)) = (0, z_0)$ satisfaz

$$x(t^+) - \left(\frac{a_R}{1 + \gamma_R^2} \right) = -\frac{a_R}{1 + \gamma_R^2} = e^{\gamma_R t^+} \left(-\frac{a_R}{1 + \gamma_R^2} (\cos t^+ + \gamma_R \sin t^+) - \sin t^+ \left(z_0 - \left(\frac{2\gamma_R a_R}{1 + \gamma_R^2} + b \right) \right) \right).$$

Isolando z_0 na equação temos

$$\begin{aligned} z_0 &= -\frac{a_R}{1 + \gamma_R^2} e^{-\gamma_R t^+} + \frac{a_R}{(1 + \gamma_R^2)(-\sin t^+)} (\cos t^+ + \gamma_R \sin t^+) + \frac{2\gamma_R a_R}{1 + \gamma_R^2} + b = \\ &= b + \frac{a_R}{1 + \gamma_R^2} \frac{e^{-\gamma_R t^+} \varphi_{\gamma_R(t^+)}}{\sin t^+}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Como $y(t^+) = z_1$, substituindo z_0 em

$$\begin{aligned} z_1 - \left(\frac{2\gamma_R a_R}{1 + \gamma_R^2} + b \right) &= \\ e^{\gamma_R t^+} ((1 + \gamma_R^2) \sin t^+ \left(\frac{-\gamma_R}{1 + \gamma_R^2} \right) + (\cos t^+ - \gamma_R \sin t^+)) &\left(z_0 - \left(b + \frac{2\gamma_R a_R}{1 + \gamma_R^2} \right) \right) \end{aligned}$$

temos

$$z_1 = b - \frac{a_R}{1 + \gamma_R^2} \frac{e^{\gamma_R t^+} \varphi_{-\gamma_R(t^+)}}{\sin t^+}.$$

Portanto,

$$P_R(y) = b - \frac{a_R}{1 + \gamma_R^2} \frac{e^{\gamma_R t^+} \varphi_{-\gamma_R(t^+)}}{\sin t^+}. \quad (3.12)$$

De modo análogo feito à aplicação $P_L(y_0)$, temos

$$P'_R(z_0) = \frac{z_0 - b}{P_R(z_0) - b} e^{2\gamma_R t^+} < 0,$$

$$P''_R(z_0) = \frac{2a_R^2}{1 + \gamma_R^2} \frac{\sinh(\gamma_R t^+) - \gamma_R \sin t^+}{(P_R(z_0) - b)^3} e^{3\gamma_R t^+}.$$

Provaremos abaixo algumas propriedades referentes a aplicação de Poincaré $P_R(y)$.

Proposição 3.2.1. *Assuma que $a_R \leq 0$ no sistema (3.4). Então, temos as seguintes propriedades para a aplicação de Poincaré P_R :*

a) *Se $a_R \gamma_R = 0$ então $P_R(z) = -z e^{\gamma_R \pi} + (1 + e^{\gamma_R \pi})b$ para todo $z \leq b$.*

b) *Se $a_R < 0$ então a aplicação de Poincaré P_R dada em (3.12) é bem definida para todo $z \leq b$ com $t \in (0, \pi)$; Em particular, temos $P_R(b) = b$ e as quatro primeiras derivadas no ponto $z = b$ são dados por*

$$\begin{aligned} P'_R(b) &= -1 \\ P''_R(b) &= -\frac{8\gamma_R}{3a_R} \\ P'''_R(b) &= -\frac{32\gamma_R^2}{3a_R^2} \\ P^{IV}_R(b) &= -32\gamma_R \frac{79\gamma_R^2 - 9}{45a_R^3} \end{aligned} \quad (3.13)$$

c) *Se $a_R < 0$ e $\gamma_R \neq 0$, então para todo $z \leq b$, temos $P'_R(z) < 0$, $\lim_{z \rightarrow b^-} P'_R(z) = -1$, $\lim_{z \rightarrow -\infty} P'_R(z) = -e^{\gamma_R \pi}$ e $\text{sgn}(P''_R(z)) = \text{sgn}(\gamma_R)$*

Demonstração. a) Se $\gamma_R = 0$, de (3.12) e (3.11) temos $P_R(z) = b - \frac{a_r(1 - \cos t)}{\sin t}$ e $z = b + \frac{a_r(1 - \cos t)}{\sin t}$. Logo, $\frac{P_R(z) - b}{z - b} = -1$ o que implica $P_R(z) = 2b - z$.

Se $a_r = 0$, então temos o ponto de equilíbrio pertencente a Σ , isto é, $\bar{x} = 0$ e $\bar{y} = b$. Assim, de (3.5) temos $x(t) = -e^{\gamma_R t} \sin t (z_0 - b)$ e $y(t) = -e^{\gamma_R t} (\cos t - \gamma_R \sin t) (z_0 - b)$. Note que $x(t) = 0$ se, e somente se $t = \pi$. Logo, $y(\pi) = b - e^{\gamma_R \pi} (z_0 + b) = -e^{\gamma_R \pi} z_0 + b(1 - e^{\gamma_R \pi})$.

b) Para demonstrarmos este item, basta trocarmos z_0 por $b + \epsilon$ e seguir os mesmos passos da demonstração do item (b) da proposição anterior.

c) Para provarmos que $\lim_{y \rightarrow b^-} P'_R(z) = -1$, note que quando $z \rightarrow b^-$ temos $t \rightarrow 0$, logo

$$\lim_{z \rightarrow b^-} P'_R(z) = \lim_{t \rightarrow 0} e^{2\gamma_R t} \frac{z_0 - b}{P_R(z_0) - b} = \lim_{t \rightarrow 0} -\frac{\varphi_{\gamma_R}(t^+)}{\varphi_{-\gamma_R}(t^+)} = \lim_{t \rightarrow 0} -\frac{1 - e^{\gamma_R t} (\cos t - \gamma_R \sin t)}{1 - e^{-\gamma_R t} (\cos t + \gamma_R \sin t)}.$$

Note que $\lim_{t \rightarrow 0^-} -\frac{1 - e^{\gamma_R t} (\cos t - \gamma_R \sin t)}{1 - e^{-\gamma_R t} (\cos t + \gamma_R \sin t)}$ é uma indeterminação, logo aplicando a regra de L'Hospital temos $\lim_{t \rightarrow 0^-} -\frac{(1 + \gamma_R^2) e^{-\gamma_R t} \sin t}{(1 + \gamma_R^2) e^{\gamma_R t} \sin t}$ que é novamente uma indeterminação. Aplicando novamente L'Hospital

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} -\frac{(1 + \gamma_R^2) e^{\gamma_R t} (\gamma_R \sin t + \cos t)}{(1 + \gamma_R^2) e^{-\gamma_R t} (\gamma_R \sin t + \cos t)} = -1.$$

Para provarmos que $\lim_{z \rightarrow -\infty} P'_R(z) = -e^{\gamma_R \pi}$, basta notar que quando $z \rightarrow \infty$ temos $t \rightarrow \pi$, logo

$$\lim_{y \rightarrow \infty} P'_R(z) = \lim_{t \rightarrow \pi} -\frac{\varphi_{\gamma_R}(t^+)}{\varphi_{-\gamma_R}(t^+)} = \lim_{t \rightarrow -\pi} -\frac{1 - e^{\gamma_R t} (\cos t - \gamma_R \sin t)}{1 - e^{-\gamma_R t} (\cos t + \gamma_R \sin t)} = -e^{\gamma_R \pi}.$$

Por fim, vamos provar que $\text{sgn} P''_R(z) = \text{sgn}(\gamma_R)$. Note que como $P_R^3(y) > 0$, devemos analisar o sinal de $g(t) = \sinh \gamma_R t - \gamma_R \sin t$. Vamos considerar $\gamma_R > 0$, para $\gamma_R < 0$ o raciocínio é análogo.

Temos $g'(t) = \gamma_R \cosh \gamma_R t - \gamma_R \cos t$, $g''(t) = \gamma_R^2 \sinh \gamma_R t + \gamma_R \sin t$ e $g'''(t) = \gamma_R^3 \cosh \gamma_R t + \gamma_R \cos t$. Note que $g(0) = g'(0) = g''(0) = 0$ e $g'''(0) > 0$ para todo $t \in (0, \frac{\pi}{2})$. Logo $g''(t)$ é crescente em $(0, \frac{\pi}{2})$. Como $g''(0) = 0$ temos $g''(t) > 0$ todo $t \in (0, \frac{\pi}{2})$, logo $g'(t)$ é crescente em $(0, \frac{\pi}{2})$. Novamente como $g'(0) = 0$ temos $g'(t) > 0$ para todo $t \in (0, \frac{\pi}{2})$, portanto $g(t)$ é crescente em $(0, \frac{\pi}{2})$.

Dado $t \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, temos $\sinh \gamma_R t > 0$ e $-\gamma_R \sin t > 0$ e ambas são crescentes pois $\gamma_R > 0$. Daí, $g(t) > 0$ é crescente em $(\frac{\pi}{2}, \pi)$. Logo $g(t) > 0$ é crescente em $(0, \pi)$. Note que o sinal de $g(t)$ depende do sinal de γ_R . Portanto $\text{sgn} P''_R(z) = \text{sgn}(\gamma_R)$.

□

3.3 A Aplicação Geral de Poincaré

Definiremos agora a aplicação geral de Poincaré P . É natural que tal função seja definida como a composta das aplicações de Poincaré em cada campo, isto é, $P(y) = P_R(P_L(y))$.

Proposição 3.3.1. *Assumindo $a_R \leq 0 \leq a_L$ nos sistemas (3.3) e (3.4), segue que*

a) *A aplicação de Poincaré P é definida para todo $y \geq 0$.*

b) *Se $a_L\gamma_L = 0 = a_R\gamma_R$, então a aplicação de Poincaré P é dada por*

$$P(y) = ye^{(\gamma_L + \gamma_R)\pi} + (1 + e^{\gamma_R\pi})b.$$

c) *Para todo $y \geq 0$, a derivada da aplicação de Poincaré é dada por*

$$P'(y) = \frac{y}{P_L(y)} \frac{P_L(y) - b}{P(y) - b} e^{2(\gamma_R t^+ + \gamma_L t^-)}$$

e satisfaz $\lim_{y \rightarrow \infty} P'(y) = e^{(\gamma_R + \gamma_L)\pi}$.

d) *Se $b = 0$ e $a_R < 0 < a_L$, então as primeiras três derivadas da aplicação de Poincaré na origem são dadas por*

$$\begin{aligned} P'(0) &= 1 \\ P''(0) &= \frac{8}{3} \left(\frac{\gamma_L}{a_L} - \frac{\gamma_R}{a_R} \right) \\ P'''(0) &= \frac{3}{2} P''(0)^2. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Quando $a_R\gamma_L = a_L\gamma_R$, então $P''(0) = P'''(0) = 0$ e

$$P^{(4)}(0) = -\frac{32\gamma_R(\gamma_R - \gamma_L)(\gamma_R + \gamma_L)}{5a_R^3\gamma_L^2}.$$

e) *Se $a_R < 0 < a_L$ e $\gamma_L = -\gamma_R \neq 0$, então*

$$P_R \left[b - \frac{a_R}{a_L} P_L(y) \right] = b - \frac{a_R}{a_L} y.$$

Se $a_R = -a_L$ e $b = 0$ então $P(y) = y$ e temos assim um centro não linear global em torno da origem.

f) *Se $a_R < 0$ e $a_L = 0$ então $\operatorname{sgn} P''(y) = \operatorname{sgn} \gamma_R$. Além disso, se tivermos $b = 0$ então $P'(0) = e^{\gamma_L\pi}$.*

g) *Se $a_R = 0$ e $a_L > 0$ então $\operatorname{sgn} P''(y) = \operatorname{sgn} \gamma_L$. Além disso, se tivermos $b = 0$ então $P'(0) = e^{\gamma_R\pi}$.*

Demonstração. **a)** Como $P(y) = P_R(P_L(y))$ é fácil ver que a aplicação está definida para todo $y \geq 0$.

b) Temos $P_R(y) = -e^{\gamma_R \pi} y + (1 + e^{\gamma_R \pi})b$ e $P_L(y) = -e^{\gamma_L \pi} y$. Logo,

$$P(y) = P_R(P_L(y)) = P_R(-e^{\gamma_L \pi} y) = -e^{\gamma_R \pi}(-e^{\gamma_L \pi} y) + (1 + e^{\gamma_R \pi})b = e^{(\gamma_R + \gamma_L)\pi} + (1 + e^{\gamma_R \pi})b.$$

c) Note que

$$P'(y) = P'_R(P_L(y))P'_L(y) = e^{2\gamma_R t^+} \frac{P_L(y) - b}{P_R(P_L(y)) - b} \frac{e^{2\gamma_L t^-} y}{P_L(y)} = \frac{P_L(y) - b}{P(y) - b} \frac{y}{P_L(y)} e^{2(\gamma_R t^+ + \gamma_L t^-)}.$$

Como $P'(y) = P'_R(P_L(y))P'_L(y)$, das Proposições 3.1.1 (c) e 3.2.1 (c) segue que

$$\lim_{y \rightarrow \infty} = -e^{\gamma_R \pi}(-e^{\gamma_L \pi}) = e^{(\gamma_R + \gamma_L)\pi}.$$

d) Como $P'(y) = P'_R(P_L(y))P'_L(y)$, das Proposições 3.1.1 (b) e 3.2.1 (b) temos

$$P'(0) = P'_R(P_L(0))P'_L(0) = (-1)(-1) = 1.$$

Note que $P''(y) = P''_R(P_L(y))(P'_L(y))^2 + P'_R(P_L(y))P'_L(y)$. Logo, pelas Proposições 3.1.1 (b) e 3.2.1 (b) temos

$$P''(0) = P''_R(P_L(0))(P'_L(0))^2 + P'_R(P_L(0))P'_L(0) = -\frac{8\gamma_R}{3a_R}(-1)^2 - \frac{8\gamma_L}{3a_L}(-1) = \frac{8}{3}\left(\frac{\gamma_L}{a_L} - \frac{\gamma_R}{a_R}\right).$$

Para provarmos que $P'''(0) = \frac{3}{2}(P''(0))^2$ vamos expandir $P_R(y)$ e $P_L(y)$ na fórmula de Taylor em torno de $y = 0$. Então temos

$$P_L(0) = -\epsilon - \frac{1}{2!} \frac{8\gamma_L}{3a_L} \epsilon^2 - \frac{1}{3!} \frac{32\gamma_L^2}{a_L^2 3} \epsilon^3 - \frac{1}{4!} 32\gamma_R \frac{79\gamma_R^2 - 9}{45a_R^3} \epsilon^4 + \dots$$

$$P_R(0) = -\epsilon - \frac{1}{2!} \frac{8\gamma_R}{3a_R} \epsilon^2 - \frac{1}{3!} \frac{32\gamma_R^2}{a_R^2 3} \epsilon^3 - \frac{1}{4!} 32\gamma_R \frac{79\gamma_R^2 - 9}{45a_R^3} \epsilon^4 + \dots$$

Fazendo agora $P_R(P_L(0))$ temos

$$P(0) = -\left(-\epsilon - \frac{1}{2!} \frac{8\gamma_L}{3a_L} \epsilon^2 - \frac{1}{3!} \frac{32\gamma_L^2}{a_L^2 3} \epsilon^3 - \frac{1}{4!} 32\gamma_R \frac{79\gamma_R^2 - 9}{45a_R^3} \epsilon^4 + \dots\right) - \frac{1}{2} \frac{8\gamma_R}{3a_R} \left(-\epsilon - \frac{1}{2!} \frac{8\gamma_L}{3a_L} \epsilon^2 - \frac{1}{3!} \frac{32\gamma_L^2}{a_L^2 3} \epsilon^3 - \frac{1}{4!} 32\gamma_R \frac{79\gamma_R^2 - 9}{45a_R^3} \epsilon^4 + \dots\right)^2 -$$

$$\frac{1}{3!} \frac{32\gamma_R^2}{a_R^2 3} \left(-\epsilon - \frac{1}{2!} \frac{8\gamma_R}{3a_R} \epsilon^2 - \frac{1}{3!} \frac{32\gamma_R^2}{a_R^2 3} \epsilon^3 - \frac{1}{4!} 32\gamma_R \frac{79\gamma_R^2 - 9}{45a_R^3} \epsilon^4 + \dots \right)^3 -$$

$$\frac{1}{4!} 32\gamma_R \frac{79\gamma_R^2 - 9}{45a_R^3} \left(-\epsilon - \frac{1}{2!} \frac{8\gamma_R}{3a_R} \epsilon^2 - \frac{1}{3!} \frac{32\gamma_R^2}{a_R^2 3} \epsilon^3 - \frac{1}{4!} 32\gamma_R \frac{79\gamma_R^2 - 9}{45a_R^3} \epsilon^4 + \dots \right)^4$$

Daí, os coeficientes que multiplicam ϵ , ϵ^2 , ϵ^3 e ϵ^4 são respectivamente

$$1, \frac{8}{3} \left(\frac{\gamma_L}{a_L} - \frac{\gamma_R}{a_R} \right), 3! \left(\frac{1}{3!} \frac{32\gamma_L^2}{3a_L^2} - \frac{1}{2!} \frac{64\gamma_L\gamma_R}{9a_L a_R} + \frac{1}{3!} \frac{32\gamma_R^2}{3a_R^2} \right) = \frac{3}{2} (P''(0))^2$$

e

$$\frac{32(a_R^3\gamma_L(79\gamma_L^2 - 9) - 240a_L a_R^2\gamma_L^2\gamma_R + 240a_L^2 a_R\gamma_L\gamma_R^2 + a_L^3\gamma_R(9 - 79\gamma_R^2))}{45a_L^3 a_R^3}.$$

Se tivermos $\gamma_L a_R = \gamma_R a_L$ então temos $P''(0) = 0 = P'''(0)$ e

$$P^{(4)}(0) = -\frac{32(\gamma_R - \gamma_L)\gamma_R(\gamma_L + \gamma_R)}{5a_R^3\gamma_L^2}.$$

e) Queremos mostrar que $P_R\left(b - \frac{a_R}{a_L}P_L(y)\right) = b - \frac{a_R}{a_L}y$. Vamos tomar então $z_0 = b - \frac{a_R}{a_L}P_L(y)$. Daí, temos

$$z_0 = b - \frac{a_R}{a_L} \left(-\frac{a_L}{1 + \gamma_L^2} \frac{e^{\gamma_L t^-} \varphi_{-\gamma_L(t^-)}}{\sin t^-} \right).$$

Substituindo $\gamma_L = -\gamma_R$ temos

$$z_0 = b + \frac{a_R}{1 + \gamma_R^2} \frac{e^{-\gamma_R t^-} \varphi_{\gamma_R(t^-)}}{\sin t^-}.$$

Por (3.11), segue que $t^+ = t^-$ e temos $x^+(t^-, z_0) = 0$. Logo, para esse z_0 , temos $P_R(z_0) = z_1$, isto é,

$$P_R(z_0) = P_R\left(b - \frac{a_R}{a_L}P_L(y)\right) = b - \frac{a_R}{1 + \gamma_R^2} \frac{e^{\gamma_R t^-} \varphi_{-\gamma_R(t^-)}}{\sin t^-} = b - \frac{a_R}{1 + \gamma_L^2} \frac{e^{-\gamma_L t^-} \varphi_{\gamma_L(t^-)}}{\sin t^-},$$

ou seja,

$$P_R\left(b - \frac{a_R}{a_L}P_L(y)\right) = b - \frac{a_R}{a_L}y.$$

A outra afirmação é imediata.

f) Note que $P''(y) = P_R''(P_L(y))(P_L'(y))^2 + P_R'(P_L(y))P_L''(y)$. Como por hipótese $a_L = 0$, temos $P_L''(y) = 0$. Logo, $\text{sgn}P''(y) = \text{sgn}P_R''(P_L(y))$ que pela Proposição 3.2.1 (c) é igual ao $\text{sgn}(\gamma_R)$.

Como $a_L = 0$, temos $P_L(y) = -ye^{\gamma_L\pi}$. Por outro lado $P_R'(0) = -1$. Logo $P'(y) = P_R'(P_L(0))P_L'(0) = e^{\gamma_L\pi}$.

g) Note que $P''(y) = P_R''(P_L(y))(P_L'(y))^2 + P_R'(P_L(y))P_L''(y)$. Como por hipótese $a_R = 0$, temos $P_R''(y) = 0$. Logo, $\text{sgn}P''(y) = \text{sgn}P_L''(y)P_R'(P_L(y))$. Como $P_R'(y) < 0$, segue que $\text{sgn}P''(y) = -\text{sgn}P_L''(y)$ que pela Proposição 3.1.1 (c) é igual ao $-\text{sgn}(\gamma_L)$. Portanto, $\text{sgn}P''(y) = \text{sgn}(\gamma_L)$.

Como $a_R = 0$ e $b = 0$, temos $P_R(y) = -ye^{\gamma_R\pi}$. Por outro lado $P_L'(0) = -1$. Logo $P'(y) = P_R'(P_L(0))P_L'(0) = e^{\gamma_R\pi}$.

□

3.4 Ciclos Limites

Provaremos a seguir uma condição necessária para a existência de ciclos limites.

Proposição 3.4.1. *Se o sistema*

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = S^-(x, y) = \begin{pmatrix} T^- & -1 \\ D^- & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ a^- \end{pmatrix} \quad \text{se } x < 0,$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = S^+(x, y) = \begin{pmatrix} T^+ & -1 \\ D^+ & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -b \\ a^+ \end{pmatrix} \quad \text{se } x > 0$$

possuir uma órbita periódica Γ transversal a Σ nos pontos $(0, y)$ e $(0, y + h)$, com $h > 0$, então

$$T^-\sigma^- + T^+\sigma^+ + bh = 0,$$

onde $\sigma^\pm$ é a área da região limitada por Σ e pelo arco de órbita $\Gamma^\pm = \Gamma \cap \Sigma^\pm$,

Demonstração. Considere os seguintes segmentos orientados

$$L^- = \{(x, y) : x = 0, y = (1 - \mu)y_L + \mu(y_L + h), 0 \leq \mu \leq 1\}$$

e

$$L^+ = \{(x, y) : x = 0, y = \mu y_L + (1 - \mu)(y_L + h), 0 \leq \mu \leq 1\},$$

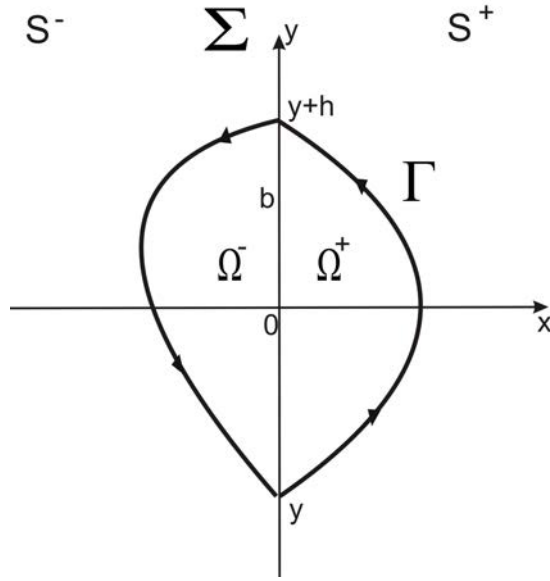


Figura 3.1:

$\Omega^\pm = \text{int}\{\Gamma^\pm \cup L^\pm\}$ e $\sigma^\pm = \text{área}(\Omega^\pm)$. Pelo Teorema de Green (ver [10].) segue que

$$\oint_{\Gamma^- \cup L^-} (S^-)^\perp dr = \int \int_{\Omega^-} T^- d\sigma = T^- \sigma^-$$

De modo análogo,

$$\oint_{\Gamma^+ \cup L^+} (S^+)^\perp dr = \int \int_{\Omega^+} T^+ d\sigma = T^+ \sigma^+.$$

Observe que

$$\int_{\Gamma^\pm} (S^\pm)^\perp dr = \int_a^b \langle (X^\pm)^\perp, \Gamma'(t) \rangle dt = 0$$

pois $(\Gamma^\pm(t))' = (S^\pm)^\perp$. Logo,

$$\int_{\Gamma^- \cup L^-} (S^-)^\perp dr = \int_{L^-} (S^-)^\perp dr = \int_{y_L}^{y_L+h} (-D^- x - a^-) dx + (T^- x - y) dy = \int_{y_L}^{y_L+h} (-y) dy.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma^+ \cup L^+} (S^+)^\perp dr &= \int_{L^+} (S^+)^\perp dr = \int_{y_L}^{y_L+h} (-D^- x - a^+) dx + (T^- x - y + b) dy = \\ &= \int_{y_L}^{y_L+h} (-y + b) dy. \end{aligned}$$

Assim,

$$T^-\sigma^- + T^+\sigma^+ = \int_{y_L}^{y_L+h} (-y)dy + \int_{y_L}^{y_L+h} (-y+b)dy = -bh$$

Portanto, $T^-\sigma^- + T^+\sigma^+ + bh = 0$.

□

Usando as propriedades das aplicações de Poincaré e a proposição dadas acima, temos condições de provar os seguintes resultados.

Proposição 3.4.2. *Considere os sistemas (3.3) e (3.4), assumindo $b = 0$ e $a_R \leq 0 \leq a_L$, temos:*

a) *A origem é assintoticamente estável para $a_L\gamma_R < a_R\gamma_L$ e instável para $a_L\gamma_R > a_R\gamma_L$.*

b) *Se $a_L\gamma_R = a_R\gamma_L$ então a origem é instável para $\gamma_R + \gamma_L > 0$, assintoticamente estável para $\gamma_R + \gamma_L < 0$ e um centro global para $\gamma_R + \gamma_L = 0$.*

Demonstração. a) Vamos assumir que $a_L\gamma_R < a_R\gamma_L$. Note que neste caso não podemos ter $a_L = 0 = a_R$. Se $a_R < 0 < a_L$, temos $\frac{\gamma_L}{a_L} - \frac{\gamma_R}{a_R} < 0$. Da Proposição 3.3.1 (d) temos $P'(0) = 1$ e $\text{sgn}P''(0) < 0$. Agora, se tivermos $a_R < 0$ e $a_L = 0$, como $a_L\gamma_R < a_R\gamma_L$, devemos ter $\gamma_L < 0$ e assim pela Proposição 3.3.1 (f) temos $P'(0) = e^{\gamma_L\pi} < 1$. Se tivermos $a_R = 0$ e $a_L > 0$, como $a_L\gamma_R < a_R\gamma_L$, devemos ter $\gamma_R < 0$ e daí pela Proposição 3.3.1 (g) temos $P'(0) = e^{\gamma_R\pi} < 1$. Portanto, em todos os casos temos que a origem é estável.

Vamos assumir que $a_L\gamma_R > a_R\gamma_L$. Note que neste caso não podemos ter $a_L = 0 = a_R$. Se $a_R < 0 < a_L$, temos $\frac{\gamma_R}{a_R} - \frac{\gamma_L}{a_L} < 0$. Da Proposição 3.3.1 (d) temos $P'(0) = 1$ e $\text{sgn}P''(0) > 0$. Agora, se tivermos $a_R < 0$ e $a_L = 0$, como $a_L\gamma_R > a_R\gamma_L$, devemos ter $\gamma_L > 0$ e assim pela Proposição 3.3.1 (f) temos $P'(0) = e^{\gamma_L\pi} > 1$. Se tivermos $a_R = 0$ e $a_L > 0$, como $a_L\gamma_R > a_R\gamma_L$, devemos ter $\gamma_R > 0$ e daí pela Proposição 3.3.1 (g) temos $P'(0) = e^{\gamma_R\pi} > 1$. Portanto, em todos os casos temos que a origem é instável.

b) Observação: Note que se considerarmos $a_R < 0 < a_L$, do fato de $a_L\gamma_R = a_R\gamma_L$ temos $\gamma_R\gamma_L < 0$. Assim, temos $\gamma_R(\gamma_R - \gamma_L) > 0$. Como $a_R^3\gamma_L^2 < 0$, temos pela Proposição 3.3.1 (d) que $\text{sgn}P^{(4)}(0) = \text{sgn}(\gamma_R + \gamma_L)$.

Considere agora $a_L\gamma_R = a_R\gamma_L$. Se $a_L\gamma_R = 0 = a_R\gamma_L$ então da proposição 3.1.1 (b) temos $P'(y) = e^{(\gamma_R + \gamma_L)\pi}$. Se $a_L\gamma_R = a_R\gamma_L \neq 0$, da hipótese de $a_R < 0 < a_L$, $\gamma_R\gamma_L < 0$ e da Proposição 3.3.1 (d) temos $P'(0) = 1$, $P''(0) = 0 = P'''(0)$ e $\text{sgn}P^{(4)}(0) = \text{sgn}(\gamma_R + \gamma_L)$.

Portanto, concluímos que a origem é assintoticamente estável para $\gamma_R + \gamma_L < 0$ e instável para $\gamma_R + \gamma_L > 0$.

No caso em que $\gamma_R + \gamma_L = 0$, se $\gamma_R \neq 0$ temos da igualdade $a_L\gamma_R = a_R\gamma_L$ que $a_L = \frac{a_R\gamma_L}{\gamma_R} = -a_R$. Assim, de (3.3) e (3.4) segue que

$$P^+(x, y) = 2\gamma_R x - y = -2\gamma_R(-x) - y = P^-(-x, y)$$

e

$$Q^+(x, y) = (1 + \gamma_R^2)x - a_R = -((1 + \gamma_R^2)(-x) + a_R) = -Q^-(-x, y),$$

isto é, da simetria do sistema, concluímos a existência de um centro global.

Se $\gamma_R = 0$, temos $\gamma_L = 0$ e daí pela Proposição 3.3.1 (b) segue que $P(y) = y$ o que prova a existência de um centro global. Portanto, se $\gamma_R + \gamma_L = 0$ temos a existência de um centro global.

□

Teorema 3.4.1. *Considerando os sistemas (3.3) e (3.4), assumindo $b = 0$ e $a_R \leq 0 \leq a_L$, temos:*

- a) *Se $\gamma_R + \gamma_L = 0$ então existe um centro global em torno da origem para $a_R\gamma_L = a_L\gamma_R$ e no caso $a_R\gamma_L \neq a_L\gamma_R$ não temos órbitas periódicas.*
- b) *Se $\gamma_R + \gamma_L \neq 0$ e $\gamma_R\gamma_L \geq 0$ então não há órbitas periódicas.*
- c) *Se $\gamma_R + \gamma_L \neq 0$ e $\gamma_R\gamma_L < 0$ então para $(\gamma_R + \gamma_L)(a_L\gamma_R - a_R\gamma_L) < 0$ existe uma única órbita periódica que é estável para $(\gamma_R + \gamma_L) < 0$ e instável para $(\gamma_R + \gamma_L) > 0$. Quando $(\gamma_R + \gamma_L)(a_L\gamma_R - a_R\gamma_L) \geq 0$, não há órbitas periódicas.*

Demonstração. Por hipótese, $b = 0$ e temos assim $P(0) = 0$. Se o sistema formado por (3.3) e (3.4) possuir uma órbita periódica, então a aplicação de Poincaré possui um ponto fixo $\bar{y}$ com $P(\bar{y}) = \bar{y}$ e assim pelo Teorema do Valor Médio existe $\xi \in (0, \bar{y})$ tal que $P'(\xi) = 1$.

a) Se considerarmos $a_R\gamma_L = a_L\gamma_R = 0$, pela Proposição 3.3.1 (b) temos $P(y) = y$ para todo $y \geq 0$ e assim temos a existência de um centro global.

A seguir distinguiremos os seguintes casos.

i) Assuma $a_R < 0 < a_L$. Se $a_R\gamma_L = a_L\gamma_R$, temos $a_R = -a_L$ e pela Proposição 3.3.1 (e) temos $P(y) = y$. Agora se tivermos $a_R\gamma_L \neq a_L\gamma_R$, então $a_R \neq -a_L$. Tomando $0 < k = \frac{-a_L}{a_R} \neq 1$, como existe $\bar{y}$ tal que $P_R(P_L(\bar{y})) = \bar{y}$, pela Proposição 3.3.1 (e) temos $P_R(kP_L(\bar{y})) = k\bar{y}$ o que implica

$$P_L(\bar{y}) = \frac{1}{k}P_R^{-1}(k\bar{y}) = P_R^{-1}(\bar{y}),$$

pois $P_R^{-1}(\bar{y}) = P_L(\bar{y})$.

Vamos introduzir a função $h(y) = P_R^{-1}(ky) - kP_R^{-1}(y)$. Observe que $h(0) = 0 = h(\bar{y})$, logo existe $\xi \in (0, \bar{y})$ tal que $h'(\xi) = k[(P_R^{-1})'(k\xi) - (P_R^{-1})'(\xi)] = 0$ o que é um absurdo pois a função $(P_R^{-1})'$ é monótona. De fato, pela Proposição 3.2.1 (c) segue que $\text{sgn}(P_R''(y)) = \text{sgn}(\gamma_R)$, isto é, P_R' é monótona. Portanto, nosso sistema não possui órbitas periódicas.

ii) Suponha $a_R < 0$ e $a_L = 0$. Então $a_R\gamma_L \neq a_L\gamma_R$. Das Proposições 3.3.1 (c) e (f) temos

$$\lim_{y \rightarrow \infty} P'(y) = 1, \text{ sgn}P''(y) = \text{sgn}(\gamma_R) \text{ e } P'(0) = e^{\gamma_L\pi}.$$

Assumindo $\gamma_R < 0$ e $\gamma_L > 0$, pelas igualdades acima temos P' decrescente e $P'(y) > 1$ para todo y . Logo, não existe ξ tal que $P'(\xi) = 1$. Se considerarmos $\gamma_R > 0$ e $\gamma_L < 0$, teremos P' crescente e $P'(y) < 1$ para todo y . Logo, não existe ξ tal que $P'(\xi) = 1$. Portanto, em ambos os casos não temos órbitas periódicas.

Para o caso $a_R = 0$ e $a_L > 0$, basta aplicar a Proposição 3.3.1 (c) e (g) e o raciocínio é análogo.

b) Os sistemas (3.3) e (3.4) são casos particulares do sistema (3.2) com $T^+ = 2\gamma_R$ e $T^- = 2\gamma_L$. Uma condição para termos órbitas periódicas é termos $T^-\sigma^- + T^+\sigma^+ + bh = 0$. Como por hipótese temos $T^+T^- \geq 0$, $T^+ + T^- \neq 0$ e $b = 0$, segue que $T^-\sigma^- + T^+\sigma^+ + bh \neq 0$. Portanto, não temos órbitas periódicas.

c) Por hipótese temos $\gamma_L\gamma_R < 0$. Vamos assumir $\gamma_R + \gamma_L < 0$, para os demais casos, basta aplicarmos a tabela de simetria Π_1 dada abaixo.

Π_1
$x \rightarrow x$
$y \rightarrow -y$
$t \rightarrow -t$
$\gamma_e \rightarrow -\gamma_e$
$\gamma_d \rightarrow -\gamma_d$
$a_e \rightarrow a_e$
$a_d \rightarrow a_d$
$b \rightarrow -b$

Da Proposição 3.3.1 (c) temos $\lim_{y \rightarrow \infty} P'(y) < 1$. Devemos analisar 3 casos.

i) Dado $a_R < 0 < a_L$, vamos assumir $\gamma_L < 0$ e $\gamma_R > 0$. Pela Proposição 3.3.1 (d) temos $P'(0) = 1$ e $\text{sgn}P''(0) = \text{sgn}(a_L\gamma_R - a_R\gamma_L)$. Como $\lim_{y \rightarrow \infty} P'(y) < 1$, tem-se $P(y) < y$ para y suficientemente grande. Quando $a_L\gamma_R = a_R\gamma_L$, pela Proposição 3.3.1 (d) temos $P''(0) = P'''(0) = 0$ e $\text{sgn}(P^{(4)}(0)) = \text{sgn}(\gamma_R + \gamma_L) < 0$. Quando $a_L\gamma_R < a_R\gamma_L$ tem-se $P''(0) < 0$. Assim, quando $a_L\gamma_R \leq a_R\gamma_L$, o número de órbitas periódicas se houver é par (veja figura 3.2), no entanto o Teorema 1.0.2 do Apêndice A nos garante que se houver órbita periódica, ela é única, portanto, não temos órbitas periódicas neste caso. Quando $a_L\gamma_R > a_R\gamma_L$, temos o caso representado pela figura 3.3 e do Teorema 1.0.2 do Apêndice A podemos concluir a existência de no máximo uma órbita periódica.

ii) Se $a_L = a_R = 0$ então $a_R\gamma_L = a_L\gamma_R$ e pela Proposição 3.3.1 (b) temos $P(y) = ye^{\gamma_R + \gamma_L} < y$ e nesse caso não temos órbitas periódicas.

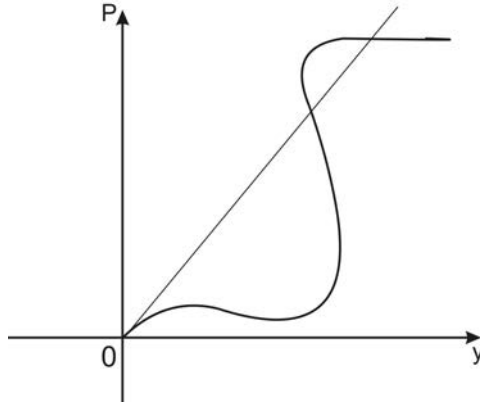


Figura 3.2:

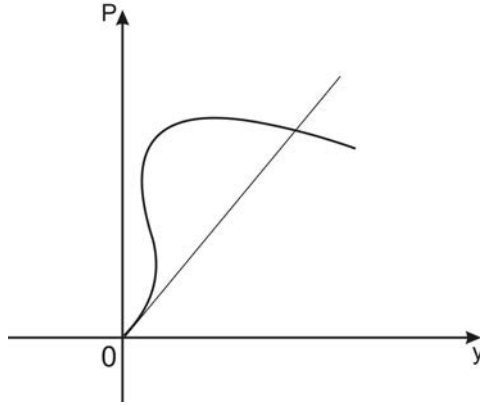


Figura 3.3:

iii)) Se $a_R < 0$ e $a_L = 0$ então $a_R\gamma_L \neq a_L\gamma_R$ e daí temos dois casos distintos a considerar.

Se $\gamma_L > 0$ então $\gamma_R < 0$ e da Proposição 3.3.1 (f) temos $P'(0) > 1$, $P''(y) < 0$ para todo $y > 0$ e pelo item (c) da mesma proposição segue que $\lim_{y \rightarrow \infty} P'(y) = e^{(\gamma_L + \gamma_R)\pi}$. Logo, P' é decrescente de $P'(0) > 1$ à $e^{(\gamma_R + \gamma_L)\pi} < 1$. Daí, existe um único $\bar{y}$ com $P(\bar{y}) = \bar{y}$. Além disso, $P'(\bar{y}) < 1$ e o sistema possui uma única órbita periódica.

Se $\gamma_L < 0$ então $\gamma_R > 0$ e da Proposição 3.3.1 (f) temos $P'(0) < 1$ e $P''(y) > 0$ para todo $y > 0$. Assim, P' é crescente com $P'(0) < P'(y) < e^{(\gamma_R + \gamma_L)\pi} < 1$ e daí não temos órbitas periódicas.

□

Conclusão

Tivemos a oportunidade de estudar no decorrer desta dissertação de Mestrado, dois dos problemas clássicos da teoria de Sistemas Dinâmicos para sistemas diferenciais lineares por partes em duas zonas. Primeiramente, vimos que dado um sistema linear por partes em duas zonas no plano, é possível efetuar uma mudança de variáveis que reduz o número de parâmetros de doze para cinco, o que facilita o estudo de sistemas dessa gama. Em seguida, abordamos o *Problema do Centro-Foco*, sendo necessário a análise de treze casos distintos. Nos quais determinamos as condições necessárias e suficientes para que uma singularidade monodrômica no conjunto de descontinuidade seja um foco ou um centro. Por fim, estudamos o surgimento de ciclos limites em sistemas lineares por partes no plano. Para cada parte do plano, exibimos a respectiva aplicação de Poincaré e em seguida definimos a aplicação geral de Poincaré. Essas ferramentas nos ajudaram a concluir que ao não permitirmos a regiões de escape ou deslize na região de descontinuidade, temos no máximo um ciclo limite no caso em que o sistema possua um foco ou um centro virtual.

Neste trabalho, consegui aprofundar meus conhecimentos referentes ao Problema do *Centro-Foco* e ao surgimento de ciclos limite em sistemas de equações diferenciais por partes em duas zonas no plano. Acredito que isso me possibilitou ter uma base forte no assunto e no futuro terei condições de me aprofundar em trabalhos referentes ao surgimento de órbitas periódicas, uma vez que é um assunto que possui uma extensa gama de problemas a serem estudados.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Artés, Joan C. ; Llibre, Jaume ; Medrado, João C. ; Teixeira, Marco A., Piecewise linear differential systems with two real saddles. *Mathematics and Computers in Simulation* (Print), v. 95, p. 13-22, 2014.
- [2] Coll, B., Gasull, A., Prohens, R., Degenerated Hopf bifurcations in discontinuous planar systems, *J. Math. Anal. Appl.*, 253 (2001), pp. 671–690.
- [3] Di Bernardo, M., Budd, C. J., A. R. Champneys, A. R., Kowalczyk, P., *Piecewise-Smooth Dynamical Systems: Theory and Applications*, Appl. Math. Sci. 163, Springer-Verlag, London, 2008.
- [4] Dumortier F., Llibre, J. e Artés, J. C., *Qualitative Theory of Planar Differential Systems*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2006.
- [5] Freire, E., Ponce, E., Torres, F.: Canonical discontinuous planar piecewise linear systems. *SIAM J. Applied Dynamical Systems*; Vol. 11, No. 1, pp. 181-211,(2012).
- [6] Freire, E., Ponce, E., Rodrigo F., Torres, F., Bifurcation sets of continuous piecewise linear systems with two zones, *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, 8 (1998), pp. 2073–2097.
- [7] Filippov, A. F., *Differential Equation with Discontinuous Right-Hand Sides*, Kluwer Academic, Netherlands, 1988.
- [8] Giannakopoulos, F., Pliete, K., Closed trajectories in planar relay feedback systems, *Dyn. Syst.*, 17 (2002), pp. 343–358.
- [9] Guardia, M., Seara, M. T., Teixeira, M. A., Generic bifurcations of low codimension of planar Filippov systems, *J. Differential Equations*, 250 (2011), pp. 1967–2023.
- [10] Guidorizzi, H. L. *Cálculo*. Vol. 2, Ed. LTC, 5ª edição, 2001.
- [11] Han, M., Zhang, W., On Hopf bifurcation in non-smooth planar systems, *J. Differential Equations*, 248 (2010), pp. 2399–2416.
- [12] Huan, S., Yang, X., On the number of limit cycles in general planar piecewise linear systems, *Discrete Contin. Dynam. Systems*, (2012), to appear.

- [13] Llibre, J., Ponce, E., Torres, F.: On the existence and uniqueness of limit cycles in Liénard differential equations allowing discontinuities. *Nonlinearity*; Vol 21, No. 9, pp. 2121–2142. , (2008).
- [14] Perko, L., *Differential equations and dynamical systems*. Texts in Applied Mathematics lines, 7, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [15] Sotomayor, J. - *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*. Rio de Janeiro, IMPA, Projeto Euclides, 1979.
- [16] Shui, S., Zhang, X., Li, J., The qualitative analysis of a class of planar Filippov systems, *Nonlinear Anal.*, 73 (2010), pp. 1277–1288.
- [17] Yu., Kuznetsov, A., Rinaldi, S., Gragnani, A., One-parameter bifurcations in planar Filippov systems, *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, 13 (2003), pp. 2157–2188.

Unicidade do Ciclo Limite

Neste apêndice temos o intuito de provar a unicidade da órbita periódica do Teorema 3.4.1 (c). Vamos considerar para $x \in [a, b]$, $-\infty < a < 0 < b < \infty$ a equação diferencial de Liénard

$$x'' - f(x)x' + g(x) = 0, \quad (\text{A.1})$$

onde

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{se } x < 0 \\ f_2(x) & \text{se } x > 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) = \begin{cases} g_1(x) & \text{se } x < 0 \\ g_2(x) & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

com f_1 e g_1 diferenciáveis em $[a, 0]$ e f_2 e g_2 são diferenciáveis em $[0, b]$. Note que as funções f e g não estão definidas em $x = 0$ de modo que, se eventualmente definirmos $f(0)$ e $g(0)$, teremos assim uma descontinuidade na origem.

Usando a forma clássica do sistema de Liénard no plano, podemos obter o sistema diferencial equivalente

$$\begin{aligned} x' &= F(x) - y \\ y' &= g(x) \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

onde $F(x) = \int_0^x f(s)ds$ com $F(0) = 0$ e considerando que $g(0)$ não está definido por hora. Esse sistema possui o seguinte campo de vetores associados

$$X(x) = \begin{cases} X_1(x) & \text{se } x \leq 0 \\ X_2(x) & \text{se } x \geq 0 \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

onde $X_i(x) = \begin{pmatrix} F(x) - y \\ g_i(x) \end{pmatrix}$.

Vamos assumir também as seguintes hipóteses:

H1) A função g satisfaz $xg(x) > 0$ para $x \neq 0$. Esta hipótese nos mostra que ambas as dobras devem ser invisíveis.

De fato. Como de costume, o conjunto de descontinuidade será dado como a imagem inversa do zero pela função k . Temos então $Xk = \langle (1, 0), (F(x) - y, g(x)) \rangle = F(x) - y = -y$ no ponto $(0, y)$. Temos também $X^2k = \langle (0, -1), (F(x) - y, g(x)) \rangle = -g(x)$. Como devemos ter $xg(x) > 0$, para $x < 0$ temos $g_1(x) < 0$ o que implica $X^2k > 0$ e para $x > 0$ temos $g_2 > 0$ o que implica $X^2k < 0$.

H2) A função f satisfaz $xf(x) > 0$ para $x \neq 0$. Sob as últimas hipóteses teremos que o divergente será positivo para $x > 0$ e negativo para $x < 0$. De fato, pois

$$\operatorname{div} X = \frac{x'}{dx} + \frac{y'}{dy} = f(x).$$

Sob as hipóteses de **H2)** e considerando a definição de F em A.2, vamos definir a variável $p = p(x) = F(x)$. Como $p'(x) = f(x)$, então $p(x) \geq 0$ para todo x e $\operatorname{sgn}(p'(x)) = \operatorname{sgn}(x)$ para todo $x \neq 0$. Deduzimos que a função $p(x)$ possui funções inversas para $x \leq 0$ e $x \geq 0$, ou seja, a função não positiva decrescente

$$x_1 : [0, F(a)] \rightarrow [a, 0] \text{ tal que } F(x_1(p)) = p$$

e a função não negativa crescente

$$x_2 : [0, F(b)] \rightarrow [0, b] \text{ tal que } F(x_2(p)) = p$$

Portanto, para $x \neq 0$, ambos os sistemas (A.2), (A.3) são equivalentes as duas equações diferenciais

$$\frac{dy(x_i(p))}{dp} = \frac{g(x_i(p))}{F_i(x(p)) - y} \frac{1}{f(x_i(p))} = \frac{1}{p - y} \frac{g(x_i(p))}{f(x_i(p))}, \quad (\text{A.4})$$

onde $i = 1, 2$ de acordo com $x < 0$ ou $x > 0$ respectivamente e ambas as equações só estão definidas para $p > 0$. Considere agora as funções

$$h_i(p) = \frac{g(x_i(p))}{f(x_i(p))}. \quad (\text{A.5})$$

Com isso, as equações (A.4) podem ser escritas de uma forma mais simples

$$\frac{dy(x_i(p))}{dp} = \frac{h_i(p)}{p - y}. \quad (\text{A.6})$$

H3) Assuma a existência dos dois limites

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} h_1(p) = l_1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} h_2(p) = l_2$$

satisfazendo $0 \leq l_2 \leq l_1 < \infty$ e se $l_2 = l_1$ então $h_2(p) < h_1(p)$ para p suficientemente pequeno e $p > 0$.

Lema 1.0.1. *Assumindo as hipóteses $H_1 - H_3$, se o sistema*

$$\begin{aligned} x' &= F(x) - y \\ y' &= g(x) \end{aligned}$$

possui uma órbita periódica em $a < x < b$ então as equações

$$F(x_1) = F(x_2), \quad \frac{g(x_1)}{f(x_1)} = \frac{g(x_2)}{f(x_2)} \quad (\text{A.7})$$

possuem pelo menos uma solução $(x_1, x_2) = (s_1, s_2)$ com $a < s_1 < 0 < s_2 < b$ ou equivalentemente existe pelo menos uma solução $\bar{p} \in (0, F(a)) \cap (0, F(b))$ para a equação $h_1(p) = h_2(p)$.

Lema 1.0.2. *Nas condições do Lema 1.0.1, assumindo que o sistema (A.7) possui exatamente uma solução $(x_1, x_2) = (s_1, s_2)$ com $a < s_1 < 0 < s_2 < b$ ou equivalentemente existe exatamente uma solução $\bar{p} \in (0, F(a)) \cap (0, F(b))$ para a equação $h_1(p) = h_2(p)$. Se o sistema possui uma órbita periódica e se a função*

$$\alpha(x) = \frac{g(x)}{f(x)F(x)}$$

é crescente para $x \in (a, 0)$ ou a função positiva

$$\frac{h_1(p)}{p}$$

é decrescente para $\bar{p} \in (0, F(a))$, então o sistema (A.2) possui no máximo uma órbita periódica em $a < x < b$ e além disso tal órbita é atratora.

A demonstração destes dois lemas foram omitidos devido a sua extensão e complexidade e por também fugir dos propósitos principais desta dissertação. A demonstração destes dois resultados se encontra em [3].

Teorema 1.0.2. *Considere o sistema de Liénard abaixo*

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_1 & -1 \\ d_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a_1 \end{pmatrix} \text{ se } x < 0 \quad (\text{A.8})$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_2 & -1 \\ d_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a_2 \end{pmatrix} \text{ se } x \geq 0 \quad (\text{A.9})$$

onde $t_1 < 0, d_1 > 0, a_1 < 0, t_2 > 0, d_2 > 0, a_2 > 0$. Segue então os seguintes resultados.

a) Se $\frac{a_2}{t_2} < \frac{a_1}{t_1}$ então uma condição necessária para a existência de órbitas periódicas é $\frac{d_2}{t_2^2} > \frac{d_1}{t_1^2}$. Se o sistema possui órbita periódica então tal órbita é única e estável.

b) Se $\frac{a_2}{t_2} > \frac{a_1}{t_1}$ então uma condição necessária para a existência de órbitas periódicas é $\frac{d_2}{t_2^2} < \frac{d_1}{t_1^2}$. Se o sistema possui órbita periódica então tal órbita é única e instável.

c) Se $\frac{a_2}{t_2} = \frac{a_1}{t_1}$ então o sistema não possui órbita periódica quando $\frac{d_2}{t_2^2} \neq \frac{d_1}{t_1^2}$ ou possui um centro quando $\frac{d_2}{t_2^2} = \frac{d_1}{t_1^2}$.

Demonstração. Primeiramente vamos checar as hipóteses **H1**, **H2** e **H3**. É fácil ver que **H1** e **H2** são satisfeitas e vamos usar a função h_i para provarmos que **H3** é satisfeita. Note que $x_i(p) = \frac{p}{t_i}, i = 1, 2$.

Usando a função h_i para analisar **H3**

$$h_1(p) = \frac{g_1(x_1(p))}{f_1(x_1(p))} = \frac{d_1 x_1(p) + a_1}{t_1} = \frac{d_1 p}{t_1^2} + \frac{a_1}{t_1} \rightarrow \lim_{p \rightarrow 0^+} h_1(p) = \frac{a_1}{t_1}.$$

$$h_2(p) = \frac{g_2(x_2(p))}{f_2(x_2(p))} = \frac{d_2 x_2(p) + a_2}{t_2} = \frac{d_2 p}{t_2^2} + \frac{a_2}{t_2} \rightarrow \lim_{p \rightarrow 0^+} h_2(p) = \frac{a_2}{t_2}.$$

A hipótese **H3** é satisfeita sempre que $l_2 = \frac{a_2}{t_2} < l_1 = \frac{a_1}{t_1}$ ou se $\frac{a_2}{t_2} = \frac{a_1}{t_1}$ quando $\frac{d_2}{t_2^2} < \frac{d_1}{t_1^2}$.

a) Temos

$$\frac{a_2}{t_2} < \frac{a_1}{t_1} \Leftrightarrow l_2 < l_1 \rightarrow h_1(p) < h_2(p).$$

Como $h_1(p) = h_2(p) \Leftrightarrow \left(\frac{d_1}{t_1^2} - \frac{d_2}{t_2^2} \right) p = \frac{a_2}{t_2} - \frac{a_1}{t_1}$, segue que $h_1(p) = h_2(p)$ tem uma única solução positiva quando

$$\left(\frac{d_1}{t_1^2} - \frac{d_2}{t_2^2}\right) \left(\frac{a_2}{t_2} - \frac{a_1}{t_1}\right) > 0.$$

pois $p > 0$. Logo, segue do Lema 1.0.1 que $\frac{d_1}{t_1^2} < \frac{d_2}{t_2^2}$. Note que

$$\frac{h_1(p)}{p} = \frac{1}{p} \left(\frac{d_1}{t_1^2} p + \frac{a_1}{t_1} \right) = \frac{d_1}{t_1^2} + \frac{a_1}{t_1 p}$$

que é decrescente. Logo, do Lema 1.0.2 segue que a órbita periódica é única e atratora.

b) para provarmos o item **b)**, basta fazermos a mudança de variável $(x, y, t) \rightarrow (-x, y - t)$ e a demonstração é análoga ao item anterior.

c) Temos $\frac{a_2}{t_2} = \frac{a_1}{t_1} \Leftrightarrow l_2 = l_1$, isto é, $\lim_{p \rightarrow 0^+} h_1(p) = \lim_{p \rightarrow 0^+} h_2(p)$ e como

$$h_1(p) = \frac{d_1}{t_1^2} p + \frac{a_1}{t_1} \quad h_2(p) = \frac{d_2}{t_2^2} p + \frac{a_2}{t_2}$$

segue que

$$h_2(p) - h_1(p) = \left(\frac{d_2}{t_2^2} - \frac{d_1}{t_1^2} \right) p \Rightarrow h_2(p) < h_1(p)$$

quando $\frac{d_2}{t_2^2} < \frac{d_1}{t_1^2}$. Temos então que a hipótese **H3** esta satisfeita. Assim, tem-se que $h_1(p) = h_2(p)$ não tem solução. Logo, do Lema 1.0.1 concluímos que não existe órbita periódica. Se

$$\left(\frac{d_2}{t_2^2} - \frac{d_1}{t_1^2} \right) = 0,$$

segue que todo p é solução e daí temos um centro na origem. □