



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA

Pós-Graduação em Engenharia Civil

AD O

1210001206



**“MODELO CINEMÁTICO APROXIMADO PARA
ANÁLISE DINÂMICA NÃO-LINEAR FÍSICA
DE CHAPAS DE AÇO”**

ENG.º EDSON FLORENTINO DE SOUZA

Ilha Solteira - SP





UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"

FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA

"MODELO CINEMÁTICO APROXIMADO PARA
ANÁLISE DINÂMICA NÃO-LINEAR FÍSICA
DE CHAPAS DE AÇO"

1210001206



Insc. 040/2001 - NPD 08461

UNESP - "CAMPUS DE ILHA SOLTEIRA"	
SERVIÇO TÉCN. DE BIBLIOTECA E DOCUMENTAÇÃO	
DATA DE CHEGADA	DATA DE FOLIO
10.8.01	30.8.01
IL.	TOMO
Ailza	Te. 1206
AQUIÇÃO	CLASSIFICAÇÃO
logica auto R. 10.00	

ENG^o EDSON FLORENTINO DE SOUZA

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Civil.

ORIENTADOR: Prof. Dr. Rogério de Oliveira Rodrigues

Ilha Solteira

Junho - 2001

BCpIS - FEIS - UNESP



"MODELO CINEMÁTICO APROXIMADO PARA
ANÁLISE DINÂMICA NÃO-LINEAR FÍSICA
DE CHAPAS DE AÇO"

Souza, Edson Florentino de

S729m

Modelo cinemático aproximado para análise dinâmica não-linear física de chapas de aço / Edson Florentino de Souza -- Ilha Solteira, 2001
vi, 122p. : il.

Dissertação (mestrado)-Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira. Área de concentração : Engenharia de Estruturas, 2001

Orientador: Rogério de Oliveira Rodrigues

Bibliografia: p.118-122

1.Dinâmica estrutural 2.Comportamento não-linear 3.Estrutura de aço 4.Método dos elementos finitos

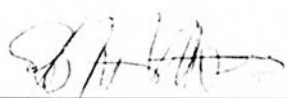
“Modelo Cinemático Aproximado para Análise Dinâmica Não-Linear Física de Chapas de Aço”

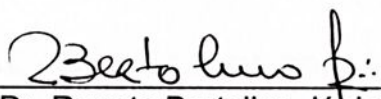
EDSON FLORENTINO DE SOUZA

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À FACULDADE DE ENGENHARIA – CAMPUS DE
ILHA SOLTEIRA – UNESP – COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS
PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO DE MESTRE EM ENGENHARIA CIVIL (ME).

COMISSÃO EXAMINADORA:


Prof. Dr. Rogério de Oliveira Rodrigues - orientador


Prof. Dr. Roberto Chust Carvalho


Prof. Dr. Renato Bertolino Júnior

Ilha Solteira – SP, julho de 2001

BCpIS - FEIS - UNESP

AGRADECIMENTOS

À Prof. Dr. Antônio de Almeida Rodrigues, pelo
orientamento e acompanhamento durante o trabalho de
pesquisa, e especialmente pelo incentivo e estímulo
para a realização deste trabalho, que deu origem a esta
monografia.

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São
Paulo - FAPESP, pela bolsa de estudos concedida.

À todos os amigos do Departamento de Engenharia
Civil - FAPESP, pelo apoio e incentivo.

À minha mãe, Maria, e ao meu pai, João, por
sempre estarem ao meu lado, me incentivando e
ajudando em todas as dificuldades.

À todos os amigos e familiares, especialmente
aos meus irmãos, pelo apoio e incentivo.

A meu pai que, ao seu modo, sendo pai e mãe,
deu-me a referência exata de que é preciso
não ter medo da morte para, de frente,
encarar o desafio da vida.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Rogério de Oliveira Rodrigues, pelo cuidadoso trabalho de orientação e incentivo e especialmente pela compreensão demonstrada em muitos instantes; o que revelou uma amizade durante todo o desenvolvimento deste trabalho a qual serei sempre grato.

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo - FAPESP, pela bolsa de estudo concedida.

A todos os amigos do Departamento de Engenharia Civil - FEIS/UNESP pelo gratificante convívio e amizade.

Ao amigo, Dr. Mário Márcio Estremote, por acompanhar-me sempre na edificação sólida do valor de uma amizade.

Acima de tudo, a DEUS, engenheiro do universo, companheiro fiel, presente em todos os momentos difíceis da minha vida.



SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS.....	i
ABREVIATURAS, SIGLAS E SÍMBOLOS.....	iv
RESUMO.....	v
ABSTRACT.....	vi
CAPÍTULO 1 INTRODUÇÃO.....	1
1.1 Tema e motivação.....	1
1.2 Objetivos.....	3
1.3 Apresentação do trabalho.....	3
CAPÍTULO 2 ANÁLISE DINÂMICA VIA MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS.....	5
2.1 Generalidades.....	5
2.2 Relações básicas.....	7
2.3 Equação geral do movimento.....	9
2.4 Elemento CST.....	14
2.4.1 Formulação em coordenadas homogêneas.....	15
2.4.2 Funções de Forma.....	20
2.5 Matriz de Rigidez.....	22
2.6 Matriz de massas.....	25
2.7 Matriz de amortecimento.....	27
2.7.1 Amortecimento Crítico.....	29
2.7.2 Amortecimento Rayleigh.....	32
CAPÍTULO 3 INTEGRAÇÃO NUMÉRICA DA EQUAÇÃO GERAL DO MOVIMENTO.....	35
3.1 Métodos de integração numérica.....	35
3.2 Equações de Newmark.....	37

3.2.1	Aceleração constante durante o intervalo de tempo.....	37
3.2.2	Aceleração variando linearmente durante o intervalo de tempo.....	38
3.2.3	Equações generalizadas.....	39
3.3	Algoritmos numéricos para resolução de sistemas não lineares.....	40
3.3.1	Processos iterativos.....	41
3.3.2	Método de Newmark para integração numérica no tempo.....	41
3.3.2.1	Equacionamento básico.....	42
3.3.2.2	Algoritmo numérico para resolução do processo.....	45
CAPÍTULO 4 MODELOS FÍSICOS NÃO-LINEARES PARA O AÇO		
	ESTRUTURAL.....	49
4.1	Generalidades.....	49
4.2	Comportamento uniaxial do aço estrutural.....	49
4.2.1	Carregamento unidirecional.....	50
4.2.2	Descarregamento e recarregamento.....	51
4.2.3	Inversão do carregamento.....	52
4.3	Modelos com endurecimento linear para carregamentos cíclicos.....	53
4.3.1	Modelo isotrópico.....	53
4.3.2	Modelo independente.....	55
4.3.3	Modelo cinemático.....	56
4.4	Superfície de Plastificação.....	57
4.5	Critério da Máxima Energia de Distorção.....	59
4.6	Superfície de von Mises.....	64
4.7	Modelo Numérico Aproximado.....	66
CAPÍTULO 5 RELAÇÃO CONSTITUTIVA ELASTOPLÁSTICA CONSISTENTE - UMA ABORDAGEM MATEMÁTICA.....		
5.1	Generalidades.....	68



5.2 Relação Constitutiva Elastoplástica.....	68
5.2.1 Decomposição aditiva das deformações infinitesimais totais.....	69
5.2.2 Critério de plastificação.....	69
5.2.3 Lei de evolução das deformações plásticas (Flow Rule).....	69
5.2.4 Lei de evolução do encruamento.....	77
5.2.4.1 Encruamento isotrópico.....	77
5.2.4.2 Encruamento cinemático.....	79
5.3 Abordagem numérica.....	80
5.3.1 Particularização do modelo.....	81
5.3.1.1 Critério de plastificação.....	81
5.3.1.2 Deformações plásticas.....	82
5.3.1.3 Parâmetro de encruamento cinemático.....	83
5.3.1.4 Tensões.....	83
5.3.2 Algoritmo implícito ('Backward Euler').....	85
5.3.2.1 Integração das tensões.....	87
5.3.3 Estudo da condição de consistência.....	90
5.3.4 Matriz tangente elastoplástica consistente..	96
5.3.5 Procedimento incremental iterativo.....	100
 CAPÍTULO 6 ANÁLISE NUMÉRICA.....	 105
6.1 Generalidades.....	105
6.2 Exemplos.....	105
6.2.1 Exemplo 01.....	105
6.2.2 Exemplo 02.....	108
6.2.3 Exemplo 03.....	111
 CAPÍTULO 7 CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	 116
7.1 Conclusões.....	116
7.2 Propostas de Desenvolvimento.....	117
 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	 118
BIBLIOGRAFIA CONSULTADA.....	121

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1	Elemento Finito Triangular de 1ª ordem.....	15
Figura 2.2	Sistemas de coordenadas.....	16
Figura 2.3	Sistemas de coordenadas oblíquas.....	17
Figura 2.4	Resposta do sistema livre com amortecimento crítico.....	32
Figura 3.1	Diagrama de blocos para o processo de Newmark.....	48
Figura 4.1	Relação tensão X deformação elastoplástica. Carregamento.....	50
Figura 4.2	Relação tensão X deformação elastoplástica. Descarregamento.....	51
Figura 4.3	Relação tensão X deformação elastoplástica. Recarregamento.....	52
Figura 4.4	Relação tensão X deformação elastoplástica. Efeito Bauschinger.....	52
Figura 4.5	Modelo com endurecimento linear isotrópico.....	54
Figura 4.6	Modelo com endurecimento linear independente.....	55
Figura 4.7	Modelo com endurecimento linear cinemático.....	56
Figura 4.8	Superfície de plastificação para o estado plano de tensões.....	58
Figura 4.9	Superfície de plastificação. (a) Modelo isotrópico. (b) Modelo cinemático.....	59
Figura 4.10	Estado geral de tensão.....	59
Figura 4.11	Base ortogonal.....	60
Figura 4.12	Vetor total das tensões e o respectivo afastamento hidrostático.....	61
Figura 4.13	Superfície de von Mises. (a) Estado triaxial das tensões principais. (b) Estado plano das tensões principais.....	65

Figura 4.14	Fluxograma do modelo numérico aproximado considerando-se a não-linearidade do material aço.....	67
Figura 5.1	Superfície de Plastificação: princípio da normalidade.....	70
Figura 5.2	Procedimento de integração implícito e explícito.....	86
Figura 5.3	Algoritmo de integração implícito para estado plano de tensão.....	90
Figura 5.4	Aspectos da função de consistência.....	91
Figura 5.5	Interpretação geométrica do método de Newton-Raphson.....	94
Figura 5.6	Divergência do método de Newton-Raphson....	94
Figura 5.7	Algoritmo de Newton-Raphson específico para a equação de consistência.....	96
Figura 5.8	Estratégia de solução incremental-iterativa (caso unidimensional).....	104
Figura 6.1	Viga em balanço.....	106
Figura 6.2	Gráfico (d x f) da análise estática não-linear física do nó 203, na direção global y.....	107
Figura 6.3	Gráfico (d x f) da análise estática não-linear física. Efeito Bauschinger.....	108
Figura 6.4	Viga em balanço.....	109
Figura 6.5	Gráfico (d x f) da análise estática não-linear física do nó 38, na direção global y.	110
Figura 6.6	Gráfico (d x f) da análise estática não-linear física. Efeito Bauschinger.	111
Figura 6.7	Viga biapoiada.....	112
Figura 6.8	Gráfico (d x t) da análise dinâmica linear do nó 20, na direção global Y.	113
Figura 6.9	Gráfico (d x t) da análise dinâmica não-linear física do nó 20, na direção global y.....	113
Figura 6.10	Primeiro modo de vibração da viga biapoiada, $\omega_1=1022,07$ rad/s.....	114



Figura 6.11 Segundo modo de vibração da viga biapoçada,
 $\omega = 3354,56$ rad/s..... 115



ABREVIATURAS, SIGLAS E SÍMBOLOS

As principais abreviaturas e siglas utilizadas neste trabalho são listadas a seguir:

MEF - Método dos Elementos Finitos.

Já os símbolos utilizados são identificados no transcorrer do trabalho, quando da sua primeira utilização ou quando se fizer necessário.



RESUMO

SOUZA, E. F. (2001). *Modelo cinemático aproximado para análise dinâmica não-linear física de chapas de aço*. Ilha Solteira, 122p. Dissertação (Mestrado) - Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho".

Este trabalho tem como objetivo principal a análise do comportamento dinâmico de estruturas laminares de aço, com carregamento contido no plano médio, através da consideração da não-linearidade física do material.

Para a solução de tal problema utiliza-se o Método dos Elementos Finitos através da discretização estrutural feita com o elemento triangular CST (Constant Strain Triangle). Na dedução das matrizes de rigidez e de massas do elemento CST utiliza-se a formulação com parâmetros generalizados e com coordenadas homogêneas. Já para a consideração do amortecimento utiliza-se o Método de Rayleigh.

Com relação à não-linearidade física do material utiliza-se plasticidade considerando-se encruamento cinemático, com relação tensão x deformação bilinear, associada ao critério da Máxima Energia de Distorção. Para a implementação de tal modelo utiliza-se o Método de Newmark para integração numérica no tempo, via processo previsor / corretor.

Palavras-chave: Dinâmica estrutural; Comportamento não-linear; Estrutura de aço; Método dos elementos finitos.



ABSTRACT INTRODUÇÃO

SOUZA, E. F. (2001). *Approximate cinematic model to physical non-linear dynamic analysis of steel plates*. Ilha Solteira, 122p. Dissertação (Mestrado) - Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho".

This work analyzes the dynamic behavior of steel laminate structures. The load is applied in the medium plane, taking into account the material physical non-linear behavior.

Finite Element Method is used to the solution of such problem with the discretization done by the triangular element CST (Constant Strain Triangle). The stiffness and masses matrix of the element CST are used with generalization parameters and with homogeneous coordinates. The Rayleigh Method is used to consideration in structural dumping.

The material physical non-linear effect is considered by the cinematic hardening. The bilinear relationship tension x deformation is associated to the criterion of the Maximum Distortion Energy. For the implementation of such model, the Newmark Method is used to numeric integration in the time, through predictor / corrector scheme.

Keywords: Structural dynamics; Non-linear behavior; Structure of steel; Finite element method.



CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO

1.1 - Tema e motivação

Entre os principais objetivos almejados pelo Engenheiro Civil que atue na área de estruturas está a preocupação em analisar, de forma tão realista quanto possível, o comportamento estático e dinâmico dos sistemas estruturais.

Com a idealização do Método dos Elementos Finitos, MEF, que ocorreu na década de cinquenta com os trabalhos de Argyris e Kelsey, publicados em 1954, e de Turner **et al.** publicado em 1956, os pesquisadores passaram a ter uma ferramenta poderosa que permite a modelação matemática de fenômenos envolvidos na análise estrutural, tais como os provenientes da alteração da geometria do sistema estrutural (não-linearidade geométrica) e da alteração das propriedades físicas dos materiais que compõem o mesmo (não-linearidade física).

Na década de sessenta, com o trabalho de Clough, publicado em 1960, inicia-se uma nova fase na Engenharia de Estruturas, onde se procura empregar o MEF na análise estrutural com auxílio de computadores de grande porte, através da sua implementação via linguagem FORTRAN. Ao final da mesma década surgem alguns programas comerciais que fazem este tipo de análise, tais como o "STARDINE", "NEST", "NASTRAN", "SAP", "ANSYS" e outros, como mostra BRASIL (1990), deflagrando, assim, uma corrida em busca de melhores programas computacionais, sempre baseados em modelos estruturais mais precisos e abrangentes.



Nas décadas de setenta e oitenta é publicado um número muito grande de trabalhos que tratam do assunto, vide CORRÊA (1991) e CILONI (1993), em especial aqueles que consideram a não-linearidade geométrica na análise estática de edifícios altos e a não-linearidade física para materiais usuais, como o aço e o concreto armado.

Com a disseminação da informática ocorrida no final da década de oitenta, e principalmente em função do aumento vertiginoso da capacidade de armazenamento, gerenciamento e processamento de dados aduzido pelos computadores de pequeno porte, o Engenheiro de Estruturas passa a ter acesso a equipamentos e programas computacionais que possibilitam uma análise estrutural baseada em modelos mais refinados, proporcionando um aumento de segurança e diminuição de custos dos projetos e das construções.

Atualmente, em função desse avanço científico e tecnológico, a realização de análises dinâmicas não-lineares se torna cada vez mais premente, tendo em vista a necessidade de simular, da forma mais realista possível, o comportamento das edificações e equipamentos existentes, tais como fundações de máquinas, pontes rodoviárias e ferroviárias sujeitas a grandes deslocamentos, edifícios altos submetidos à ação do vento e estruturas em geral sujeitas a vibrações induzidas por abalos sísmicos.

Neste contexto, o autor deste trabalho de dissertação sentiu-se motivado em analisar o comportamento dinâmico de estruturas laminares planas de aço, com carregamento contido no plano médio, através da consideração da não-linearidade física do material utilizando modelos físicos bilineares. Para esta finalidade, foi desenvolvido um programa computacional,



em linguagem PASCAL, que contemple as diversas possibilidades de análise estrutural, permitindo, sempre que possível, realizar a comparação entre o comportamento estático e dinâmico de tais sistemas estruturais.

1.2 - Objetivos

O presente trabalho de dissertação tem por objetivos:

- a implementação da não-linearidade física para o material aço na análise dinâmica estrutural utilizando modelos bilineares;
- a elaboração de um programa computacional que contemple as diversas possibilidades de análise estrutural, permitindo o seu acoplamento com outros programas já desenvolvidos;
- a análise e a otimização do comportamento estático e dinâmico de chapas de aço, através da consideração da não-linearidade física do material.

1.3 - Apresentação do trabalho

Faz-se neste item uma apresentação sucinta do conteúdo referente a cada capítulo. Os capítulos foram organizados, o quanto possível, de acordo com a lógica de concepção de uma análise estrutural; e de forma clara e seqüencial objetivando-se a compreensão dos conceitos abordados e do assunto a ser discutido.

Assim, no capítulo 2 apresenta-se um dos princípios básicos que regem o comportamento de estruturas em repouso e em movimento. Através da utilização do método dos elementos finitos, com elementos escolhidos de forma



adequada à análise de chapas, apresenta-se a equação geral do movimento com a explicitação das matrizes de rigidez, de massas e de amortecimento, tendo esta última sido obtida com a utilização do método de Rayleigh.

Já o capítulo 3 traz em seu conteúdo os métodos utilizados na integração numérica da equação geral do movimento, bem como as equações de Newmark e os algoritmos utilizados na resolução de sistemas não-lineares. Com a escolha do método de Newmark para integração numérica temporal, elabora-se o equacionamento adequado.

No capítulo 4, a fim de tratar a não-linearidade do material estrutural aço, são estudados o comportamento uniaxial e os modelos elastoplásticos unidimensionais, tais como: isotrópico, cinemático e independente, com endurecimento linear para carregamentos cíclicos. Neste capítulo, apresenta-se o modelo numérico aproximado para análise dinâmica não-linear física.

O capítulo 5 trata da abordagem matemática de um modelo consistente que incorpore a não-linearidade física do material, derivada a partir da linearização do algoritmo implícito de integração das tensões.

O capítulo 6 traz alguns exemplos relativos à análise estática e dinâmica não-linear física de chapas de aço, onde são avaliados quantitativamente e qualitativamente os resultados encontrados através do modelo aproximado, validando a sua implementação.

Para finalizar, o capítulo 7 apresenta as conclusões finais dos estudos desenvolvidos e propõe sugestões para o prosseguimento dos trabalhos nessa mesma linha de pesquisa.



CAPÍTULO 2 - ANÁLISE DINÂMICA VIA MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

2.1 - Generalidades

Alguns fatores inerentes às ações dinâmicas como a variação temporal da magnitude, direção e sentido, ou ainda da posição do ponto de aplicação de forças, tornam a análise estrutural relativamente mais complexa do que problemas que envolvam apenas ações estáticas. Conseqüentemente, a resposta estrutural à ação dinâmica dada pela magnitude dos esforços internos, das velocidades, das acelerações e dos deslocamentos, também varia com o tempo.

Com relação ao tipo de análise que pode ser feita destacam-se a análise linear e a não-linear, sendo a linear proveniente da manutenção da geometria inicial como referência para a verificação do equilíbrio e da manutenção das propriedades físicas específicas do material da estrutura. Já a não-linear pode ser proveniente da alteração da geometria e/ou das propriedades físicas do material estrutural.

A característica principal da análise dinâmica não-linear, tendo em vista as possíveis alterações já mencionadas, é dada pela grande variabilidade de opções que podem ser adotadas na sua elaboração. A seguir, destacam-se os vários níveis de decisão que estão envolvidos em tal análise, dados por:

a - discretização do sistema estrutural contínuo;



- b - definição das forças atuantes no sistema estrutural;
- c - escolha de um princípio para elaborar a equação de equilíbrio do sistema estrutural;
- d - escolha do método de integração da equação que descreve o movimento do sistema estrutural;
- e - escolha do algoritmo para resolução do sistema de equações;
- f - escolha do sistema de coordenadas;
- g - definição do modelo elemental;
- h - formalismo adotado na decomposição das matrizes de rigidez;
- i - definição da relação entre tensão x carregamento e deformação x deslocamento.

Assim é evidente que um problema dinâmico não pode ter uma solução simples como possui um problema estático. Tal procedimento deverá fornecer uma ampla gama de resultados numéricos, compatíveis com a história temporal do carregamento aplicado, cuja avaliação de forma qualitativa viabilizará a sua utilização na elaboração do projeto estrutural do sistema analisado.

Uma distinção mais fundamental entre problemas estáticos e dinâmicos reside no fato de que no primeiro caso os esforços internos e as deformações dependem diretamente de como e onde o carregamento está aplicado, utilizando-se o princípio estabelecido através do equilíbrio de forças. Já no caso de problemas dinâmicos os esforços internos e as deformações dependem, não só do equilíbrio das forças externas, mas também das forças de inércia resultantes da aplicação do carregamento e das forças amortecedoras. Forças de inércia, conforme será visto adiante, são forças que se opõem à aceleração de



uma estrutura quando a mesma está sujeita à ação de um carregamento dinâmico.

Dentro deste contexto deve-se então buscar métodos que forneçam os requeridos históricos de deslocamento para análise dinâmica. Em muitos casos, uma análise aproximada envolvendo apenas um número limitado de graus de liberdade fornece uma resposta suficiente precisa e assim, o problema pode ser reduzido à determinação de um histórico temporal dessas componentes escolhidas do deslocamento. As expressões matemáticas que definem os deslocamentos dinâmicos são chamadas de equações do movimento das estruturas e a solução dessas equações fornecerá os exigidos históricos de deslocamento.

Em um procedimento de análise dinâmica estrutural a formulação das equações de movimento é talvez a fase mais importante e também a mais difícil. Desse modo, vários métodos diferentes são aplicados para a formulação dessas equações, e neste trabalho, conforme será visto a seguir, tal equacionamento será feito através do Princípio dos Trabalhos Virtuais (P.T.V.).

2.2 - Relações básicas

A idéia básica do Método dos Elementos Finitos consiste em utilizar como parâmetros as variáveis nodais de um número finito de pontos previamente escolhidos, denominados de nós.

Efetuando-se tal procedimento, os deslocamentos " u " de um elemento finito podem ser escritos em função dos deslocamentos nodais " d " através da utilização de funções de forma apropriadas. Essa relação matricial é definida por:



$$\underset{\sim}{u} = \underset{\sim}{\phi} \underset{\sim}{d} \quad (2.1)$$

onde " $\underset{\sim}{\phi}$ " é a matriz que contém as funções de forma e relaciona os deslocamentos que ocorrem ao longo do elemento com os deslocamentos nodais do mesmo.

Sendo assim, pode-se derivar tal equação em relação ao tempo obtendo-se as seguintes relações básicas:

$$\underset{\sim}{\dot{u}} = \underset{\sim}{\phi} \underset{\sim}{\dot{d}} \quad (2.2)$$

e

$$\underset{\sim}{\ddot{u}} = \underset{\sim}{\phi} \underset{\sim}{\ddot{d}} \quad (2.3)$$

Outra relação básica importante é dada pela associação entre a deformação longitudinal " $\underset{\sim}{\varepsilon}$ " e os deslocamentos axiais e transversais que ocorrem no elemento finito:

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = \underset{\sim}{L} \underset{\sim}{u} \quad (2.4)$$

onde " $\underset{\sim}{L}$ " é a matriz que contém os operadores diferenciais.

Substituindo-se a equação (2.1) na equação (2.4), obtém-se, também:

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = \underset{\sim}{L} \underset{\sim}{\phi} \underset{\sim}{d} \quad (2.5)$$

ou

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = \underset{\sim}{B} \underset{\sim}{d} \quad (2.6)$$

onde

$$\underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{L} \underset{\sim}{\phi} \quad (2.7)$$

Da Lei de Hooke vem:

$$\underset{\sim}{\sigma} = \underset{\sim}{E} \underset{\sim}{\varepsilon} \quad (2.8)$$

onde " $\underset{\sim}{E}$ " é a matriz que contém os coeficientes elásticos do material estrutural.

Dessa forma, substituindo-se (2.6) em (2.8) tem-se:

$$\underset{\sim}{\sigma} = \underset{\sim}{E} \underset{\sim}{B} \underset{\sim}{d} \quad (2.9)$$

2.3 - Equação geral do movimento

A equação do equilíbrio que governa a resposta dinâmica de um sistema estrutural discreto pode ser obtida utilizando-se o Princípio dos Trabalhos Virtuais (P.T.V.) para estruturas em movimento.

Este princípio estabelece que se um sistema em equilíbrio sob a ação de um conjunto de forças for submetido a um deslocamento virtual, o trabalho realizado pelas forças é igual a zero. Assim, uma vez identificadas todas as forças atuantes no sistema, as equações de equilíbrio podem ser obtidas pela introdução de



deslocamentos virtuais correspondendo a cada grau de liberdade e equacionando o trabalho realizado como zero.

Desse modo, um sistema estrutural submetido a "n" esforços externos "F" estará em equilíbrio se:

$$\sum_j^n F_j = 0 \quad (2.10)$$

Introduzindo-se um deslocamento virtual " δu ", sendo este infinitesimal, cinematicamente compatível com o sistema estrutural e na direção dos esforços, pode-se calcular o trabalho virtual realizado pelo sistema através de:

$$\delta W = \sum_j^n F_j \delta u_j \quad (2.11)$$

Pelo P.T.V. tem-se:

$$\begin{aligned} \delta W &= 0 \\ \delta W &= \sum_j^n F_j \delta u_j = 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$

Em concordância com o Princípio de D'Alembert, pode-se escrever:

$$\delta W = \sum_j^n F_j \delta u_j = \sum_j^n m_j \ddot{u}_j \delta u_j \quad (2.13)$$

Em outras palavras, tem-se a igualdade entre o trabalho dos esforços internos e externos da estrutura, isto é:

$$W_I = W_E \quad (2.14)$$

Aplicando-se, então, um deslocamento virtual e lembrando-se que tal sistema está submetido a esforços volumétricos, superficiais e concentrados, além das tensões restauradoras provocadas pela deformação do sistema, obtém-se a equação de equilíbrio para um elemento genérico do sistema, dada por:

$$\begin{aligned} \int_{V_e} \delta \tilde{u}^T \tilde{p}_{Ve} dV_e + \int_{S_e} \delta \tilde{u}^T \tilde{p}_{Se} dS_e + \sum_i^{nc} \delta \tilde{u}_i^T \tilde{p}_{Ci} = \\ \int_{V_e} \delta \tilde{\varepsilon}^T \tilde{\sigma} dV_e + \int_{V_e} \delta \tilde{u}^T \tilde{\rho} \ddot{u} dV_e + \int_{V_e} \delta \tilde{u}^T \tilde{\mu} \dot{u} dV_e \end{aligned} \quad (2.15)$$

onde

$\tilde{p}_{Ve}$: é o vetor dos esforços volumétricos;

$\tilde{p}_{Se}$: é o vetor dos esforços superficiais;

$\tilde{p}_{Ci}$: é o vetor dos esforços concentrados;

$\delta \tilde{u}$: é o vetor dos deslocamentos virtuais;

$\delta \tilde{\varepsilon}$: é o vetor das deformações virtuais

correspondentes à " $\delta \tilde{u}$ ";

$\tilde{\sigma}$: é o vetor das tensões restauradoras;

δu_i : é o vetor de deslocamentos virtuais correspondentes aos pontos onde os esforços do vetor " p_{Ci} " são aplicados;

nc: é o número de pontos nodais do elemento.

A equação (2.15) fornece na primeira parte da igualdade o trabalho dos esforços externos, dado pelo produto dos esforços atuantes no elemento com os respectivos deslocamentos virtuais. Já a segunda parte fornece o trabalho total interno, dado pelo produto entre as deformações virtuais e as tensões restauradoras, e pelo produto das forças inerciais e dissipativas com os respectivos deslocamentos virtuais.

Para a obtenção da equação geral do movimento de um sistema estrutural discreto, substituem-se as equações (2.1), (2.2), (2.3), (2.6) e (2.9) na equação (2.15), resultando:

$$\begin{aligned} & \int_{Ve} \delta d^T \phi^T p_{Ve} dVe + \int_{Se} \delta d^T \phi^T p_{Se} dSe + \\ & \sum_i^{nc} \delta d_i^T p_{Ci} = \int_{Ve} \delta d^T B^T E B d dVe + \\ & \int_{Ve} \delta d^T \phi^T \rho \phi \ddot{d} dVe + \int_{Ve} \delta d^T \phi^T \mu \phi \dot{d} dVe \end{aligned} \quad (2.16)$$

Colocando-se os deslocamentos nodais virtuais em evidência e rearrumando-se a equação (2.16), obtém-se:

$$\delta \underset{\sim}{d}^T \left\{ \int_{\underset{\sim}{V_e}} \underset{\sim}{\phi}^T \underset{\sim}{p_{V_e}} dV_e + \int_{\underset{\sim}{S_e}} \underset{\sim}{\phi}^T \underset{\sim}{p_{S_e}} dS_e + \sum_i^{nc} \underset{\sim}{p_{C_i}} - \right. \\ \left. \int_{\underset{\sim}{V_e}} \underset{\sim}{B}^T \underset{\sim}{E} \underset{\sim}{B} dV_e d - \int_{\underset{\sim}{V_e}} \underset{\sim}{\rho} \underset{\sim}{\phi}^T \underset{\sim}{\phi} dV_e \ddot{\underset{\sim}{d}} - \int_{\underset{\sim}{V_e}} \underset{\sim}{\mu} \underset{\sim}{\phi}^T \underset{\sim}{\phi} dV_e \dot{\underset{\sim}{d}} \right\} = 0 \quad (2.17)$$

Para que o produto dado na equação anterior seja nulo, tendo em vista que os deslocamentos nodais virtuais são arbitrários, ou seja, não nulos simultaneamente, é necessário que seja mantida a seguinte igualdade:

$$\int_{\underset{\sim}{V_e}} \underset{\sim}{\phi}^T \underset{\sim}{p_{V_e}} dV_e + \int_{\underset{\sim}{S_e}} \underset{\sim}{\phi}^T \underset{\sim}{p_{S_e}} dS_e + \sum_i^{nc} \underset{\sim}{p_{C_i}} \\ = \int_{\underset{\sim}{V_e}} \underset{\sim}{B}^T \underset{\sim}{E} \underset{\sim}{B} dV_e d + \int_{\underset{\sim}{V_e}} \underset{\sim}{\rho} \underset{\sim}{\phi}^T \underset{\sim}{\phi} dV_e \ddot{\underset{\sim}{d}} + \int_{\underset{\sim}{V_e}} \underset{\sim}{\mu} \underset{\sim}{\phi}^T \underset{\sim}{\phi} dV_e \dot{\underset{\sim}{d}} \quad (2.18)$$

A expressão (2.18) fornece a equação do movimento para um elemento finito genérico, que escrita de forma simplificada resulta:

$$\underset{\sim}{m} \ddot{\underset{\sim}{d}} + \underset{\sim}{c} \dot{\underset{\sim}{d}} + \underset{\sim}{k} \underset{\sim}{d} = \underset{\sim}{f_E}(t) \quad (2.19)$$

onde "t" é a variável tempo e:

$$\underset{\sim}{m} = \int_{\underset{\sim}{V_e}} \underset{\sim}{\rho} \underset{\sim}{\phi}^T \underset{\sim}{\phi} dV_e \quad (2.20)$$

$$\underset{\sim}{c} = \int_{\underset{\sim}{V_e}} \underset{\sim}{\mu} \underset{\sim}{\phi}^T \underset{\sim}{\phi} dV_e \quad (2.21)$$

$$\underset{\sim}{k} = \int_{\underset{\sim}{V_e}} \underset{\sim}{B}^T \underset{\sim}{E} \underset{\sim}{B} dV_e \quad (2.22)$$

$$\underset{\sim}{f}_E(t) = \int_{\underset{\sim}{V_e}} \underset{\sim}{\phi}^T \underset{\sim}{p}_{Ve} dV_e + \int_{\underset{\sim}{S_e}} \underset{\sim}{\phi}^T \underset{\sim}{p}_{Se} dS_e + \sum_i^{nc} \underset{\sim}{p}_{Ci} \quad (2.23)$$

Para todo o sistema estrutural discreto utiliza-se o processo de expansão e acumulação, obtendo-se, finalmente, a equação geral do movimento dada pelo sistema de equações:

$$\underset{\sim}{M} \underset{\sim}{\ddot{D}} + \underset{\sim}{C} \underset{\sim}{\dot{D}} + \underset{\sim}{K} \underset{\sim}{D} = \underset{\sim}{F}_E(t) \quad (2.24)$$

Cabe ressaltar que na equação anterior os esforços externos " $\underset{\sim}{F}_E$ " e a matriz de rigidez " $\underset{\sim}{K}$ " variam com o tempo. Já a matriz de massas " $\underset{\sim}{M}$ " e a matriz de amortecimento " $\underset{\sim}{C}$ " permanecerão constantes durante o procedimento de integração.

2.4. - Elemento CST

Para realizar a discretização de chapas em elementos finitos podem ser usadas diversas formas de polígonos, entre as quais a triangular apresenta interesse em primeiro lugar pelo fato de apresentar melhor aproximação em quaisquer contornos de chapas, inclusive onde existam trechos de contorno em forma curva.

É possível usar tanto a chamada formulação generalizada quanto à formulação em coordenadas homogêneas. Em se considerando a futura integração na área do elemento, a formulação generalizada apresenta alguns inconvenientes, pois faz uso de funções



aproximadoras dependentes das dimensões do elemento, o que dificulta a referida integração. Já a formulação em coordenadas homogêneas permite exprimir polinômios aproximadores em função de coordenadas adimensionais, deixando assim o integrando " $B^T E B$ " formado apenas por matrizes com elementos sem dimensão.

Posto isso, a formulação a seguir apresentada é preferível em relação à generalizada.

2.4.1 - Formulação em coordenadas homogêneas

O elemento finito CST (*Constant Strain Triangle*) é o mais simples para se efetuar a discretização de chapas. Apresenta três nós de vértice onde serão adotados os valores de " u " e " v " como parâmetros nodais, conforme mostra a figura 2.1.

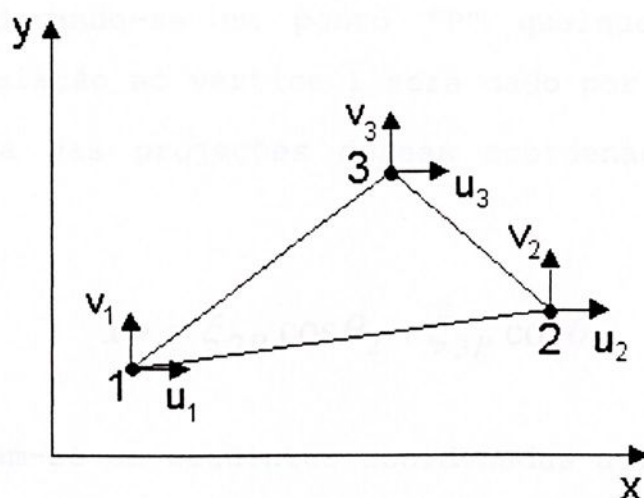


Figura 2.1 - Elemento Finito Triangular de 1ª ordem.

Primeiramente definem-se as coordenadas homogêneas para o domínio triangular do elemento finito conforme descrição dada pela figura 2.2.

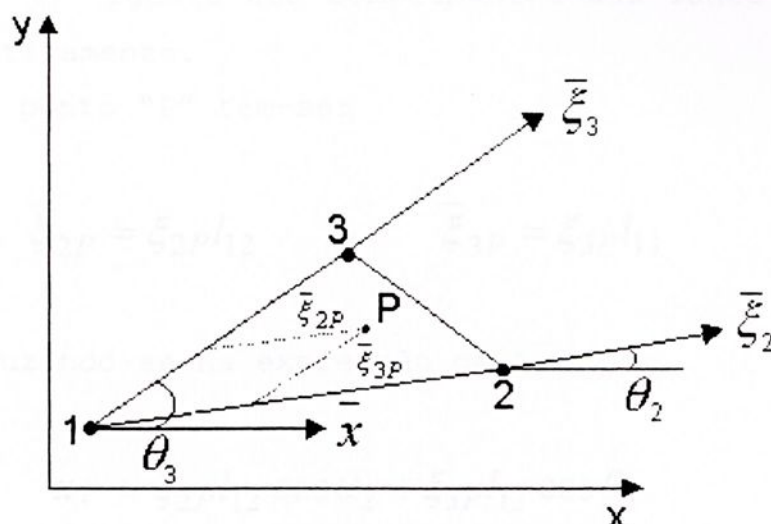


Figura 2.2 - Sistemas de coordenadas.

Sendo esse triângulo referido ao sistema cartesiano "x" e "y", adota-se um sistema de coordenadas oblíquas $(\bar{\xi}_2, \bar{\xi}_3)$, que contenha dois lados do elemento, com origem no vértice 1 e um eixo auxiliar " $\bar{x}$ " também com origem no vértice 1 e paralelo a "x".

Considerando-se um ponto "P" qualquer, a posição deste em relação ao vértice 1 será dado por $\bar{\xi}_{2P}, \bar{\xi}_{3P}$.

A soma das projeções dessas coordenadas sobre " $\bar{x}$ " resultará:

$$\bar{x}_P = \bar{\xi}_{2P} \cos \theta_2 + \bar{\xi}_{3P} \cos \theta_3$$

Definam-se as seguintes coordenadas adimensionais:

$$\xi_2 = \frac{\bar{\xi}_2}{l_{12}} \quad \text{e} \quad \xi_3 = \frac{\bar{\xi}_3}{l_{13}}$$

com " l_{12} " e " l_{13} " iguais aos comprimentos dos lados "12" e "13" respectivamente.

Para o ponto "P" tem-se:

$$\bar{\xi}_{2P} = \xi_{2P} l_{12} \quad \text{e} \quad \bar{\xi}_{3P} = \xi_{3P} l_{13}$$

Introduzindo-se na expressão de " $\bar{x}_P$ ":

$$\begin{aligned} \bar{x}_P &= \xi_{2P} l_{12} \cos \theta_2 + \xi_{3P} l_{13} \cos \theta_3 \\ \bar{x}_P &= \xi_{2P} (x_2 - x_1) + \xi_{3P} (x_3 - x_1) \end{aligned}$$

Uma vez que "P" é um ponto genérico, pode-se dizer que para qualquer ponto:

$$x = x_1 + \xi_2 (x_2 - x_1) + \xi_3 (x_3 - x_1)$$

Além do sistema oblíquo já usado, com vértice no nó 1, poderia ser usado um outro sistema alternativo com vértice no nó 2, como mostra a figura 2.3.

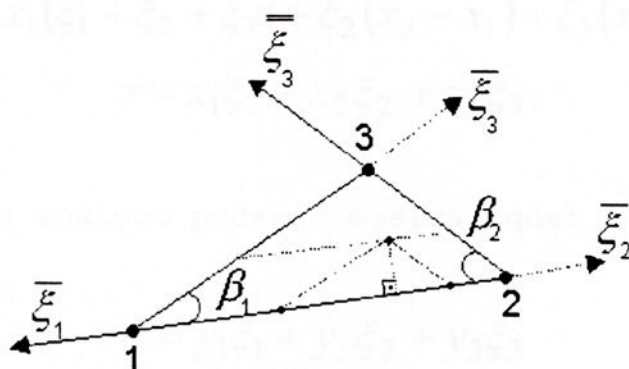


Figura 2.3 - Sistemas de coordenadas oblíquas.

Definam-se as coordenadas adimensionais:

$$\xi_3 = \frac{\bar{\xi}_3}{l_{23}} \quad \text{e} \quad \xi_1 = \frac{\bar{\xi}_1}{l_{12}}$$

Pode-se escrever com base na geometria, segundo a figura 2.3:

$$l_{12} = \bar{\xi}_2 + \bar{\xi}_1 + \bar{\xi}_3 \cos \beta_1 + \bar{\xi}_3 \cos \beta_2$$

$$1 = \frac{\bar{\xi}_2 + \bar{\xi}_1 + \bar{\xi}_3 \cos \beta_1 + \bar{\xi}_3 \cos \beta_2}{l_{12}}$$

$$1 = \xi_2 + \xi_1 + \frac{l_{13}}{l_{12}} \xi_3 \cos \beta_1 + \frac{l_{23}}{l_{12}} \xi_3 \cos \beta_2$$

$$1 = \xi_1 + \xi_2 + \frac{\xi_3}{l_{12}} (l_{13} \cos \beta_1 + l_{23} \cos \beta_2)$$

$$1 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 \quad (2.25)$$

Substituindo (2.25) na expressão de "x":

$$x = x_1(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3) + \xi_2(x_2 - x_1) + \xi_3(x_3 - x_1)$$

$$x = x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + x_3\xi_3 \quad (2.26)$$

De modo análogo pode-se mostrar que:

$$y = y_1\xi_1 + y_2\xi_2 + y_3\xi_3 \quad (2.27)$$

Agrupando-se os resultados obtidos na forma matricial tem-se:



$$\begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Bmatrix}$$

ou

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix} = T \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Bmatrix}$$

que invertendo:

$$\begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Bmatrix} = T^{-1} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix}$$

Assim, tem-se:

$$\begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 & y_2 - y_3 & x_3 - x_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 & y_3 - y_1 & x_1 - x_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 & y_1 - y_2 & x_2 - x_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix}$$

onde "A" é a área do triângulo que pode ser calculada por:

$$\text{Det } T = (x_2 y_3 + x_3 y_1 + x_1 y_2 - x_2 y_1 - x_1 y_3 - x_3 y_2) = 2A$$

Chamando-se,

$$\begin{cases} a_i = x_j y_k - x_k y_j \\ m_i = y_j - y_k \\ n_i = x_k - x_j \end{cases}$$

com os índices variando ciclicamente, ou seja:

$$\begin{cases} P/i = 1 \rightarrow j = 2, k = 3 \\ P/i = 2 \rightarrow j = 3, k = 1 \\ P/i = 3 \rightarrow j = 1, k = 2 \end{cases}$$

chega-se a relação geral:

$$\xi_i = \frac{1}{2A} (a_i + m_i x + n_i y) \quad (2.28)$$

2.4.2 - Funções de Forma

Devido a presença de apenas dois nós por lado, adota-se uma variação linear para "u" e "v" em função de "x" e "y" e por consequência em relação a " ξ_2 " e " ξ_3 ", por exemplo. Desse modo, a função interpoladora será:

$$\begin{aligned} u(\xi_2, \xi_3) &= \alpha_0 + \alpha_1 \xi_2 + \alpha_2 \xi_3 \\ v(\xi_2, \xi_3) &= \beta_0 + \beta_1 \xi_2 + \beta_2 \xi_3 \end{aligned} \quad (2.29)$$

Particularizando-se a dedução para a componente "u" dos deslocamentos nos nós, tem-se como condições de contorno:

$$\begin{cases} \text{nó 1} \rightarrow u(0,0) = u_1 = -\alpha_0 \\ \text{nó 2} \rightarrow u(1,0) = u_2 = u_1 + \alpha_1 \\ \text{nó 3} \rightarrow u(0,1) = u_3 = u_1 + \alpha_2 \end{cases}$$

Então:

$$\alpha_0 = u_1$$

$$\alpha_1 = u_2 - u_1$$

$$\alpha_2 = u_3 - u_1$$

Substituindo-se os resultados obtidos em (2.29):

$$u(\xi_2, \xi_3) = u_1 + (u_2 - u_1)\xi_2 + (u_3 - u_1)\xi_3$$

$$u(\xi_2, \xi_3) = u_1(1 - \xi_2 - \xi_3) + u_2\xi_2 + u_3\xi_3$$

e, substituindo-se (2.25) na equação acima:

$$u(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = u_1\xi_1 + u_2\xi_2 + u_3\xi_3$$

ou na forma matricial:

$$\underset{\sim}{u}^* = \begin{Bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (2.30)$$

ou

$$\underset{\sim}{u}^* = \underset{\sim}{\varphi} \cdot \underset{\sim}{u}^n$$

De forma análoga:

$$v(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = v_1\xi_1 + v_2\xi_2 + v_3\xi_3$$

ou na forma matricial

$$\underset{\sim}{v}^* = \begin{Bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{Bmatrix} \quad (2.31)$$

ou

$$\underset{\sim}{v}^* = \underset{\sim}{\varphi} \cdot \underset{\sim}{v}^n$$



De (2.30) e (2.31) tem-se:

$$\underset{\sim}{u} = \begin{Bmatrix} \xi_1 & 0 & \xi_2 & 0 & \xi_3 & 0 \\ 0 & \xi_1 & 0 & \xi_2 & 0 & \xi_3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix}$$

2.5 - Matriz de Rigidez

Utilizando-se a equação (2.22) que define a matriz de rigidez:

$$\underset{\sim}{k} = \int_{\underset{\sim}{V_e}} \underset{\sim}{B}^T \underset{\sim}{E} \underset{\sim}{B} dV_e$$

mas

$$dV_e = a \cdot dA$$

onde "a" é a espessura da chapa. Assim:

$$\underset{\sim}{k} = a \int_{\underset{\sim}{A}} \underset{\sim}{B}^T \underset{\sim}{E} \underset{\sim}{B} dA$$

sendo

$$\underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{L} \underset{\sim}{\phi}$$

Para o caso particular de estado plano de tensões, tem-se:

$$\begin{cases} \sigma_z = 0 \\ \tau_{xz} = 0 \\ \tau_{yz} = 0 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} \varepsilon_z = cte \\ \gamma_{xz} = 0 \\ \gamma_{yz} = 0 \end{cases}$$

Desse modo, pode-se escrever " L " como:

$$\underset{\sim}{L} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{Bmatrix}$$

Resolvendo-se por partes:

$$\underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{L} \underset{\sim}{\phi} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_1 & 0 & \xi_2 & 0 & \xi_3 & 0 \\ 0 & \xi_1 & 0 & \xi_2 & 0 & \xi_3 \end{Bmatrix}$$

Utilizando-se a equação genérica (2.28) tem-se:

$$\underset{\sim}{B} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} m_1 & 0 & m_2 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & n_1 & 0 & n_2 & 0 & n_3 \\ n_1 & m_1 & n_2 & m_2 & n_3 & m_3 \end{bmatrix}$$

Como os elementos da matriz " $\underset{\sim}{B}$ " são constantes tem-se:

$$\underset{\sim}{k} = a \underset{\sim}{B}^T \underset{\sim}{E} \underset{\sim}{B} \int_A dA$$

$$\underset{\sim}{k} = a \underset{\sim}{B}^T \underset{\sim}{E} \underset{\sim}{B} A \quad (2.32)$$

A matriz " $\underset{\sim}{E}$ " de constantes elásticas é definida por:

$$\underset{\sim}{E} = \bar{E} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}$$

onde

$$\bar{E} = \frac{E}{1-\nu^2} \quad \text{e} \quad \mu = \frac{1-\nu}{2}$$

Logo:

$$\underset{\sim}{B}^T \underset{\sim}{E} = \frac{\bar{E}}{2A} \begin{bmatrix} m_1 & 0 & n_1 \\ 0 & n_1 & m_1 \\ m_2 & 0 & n_2 \\ 0 & n_2 & m_2 \\ m_3 & 0 & n_3 \\ 0 & n_3 & m_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{B}^T \underset{\sim}{E} = \frac{\bar{E}}{2A} \begin{bmatrix} m_1 & \nu m_1 & \mu n_1 \\ \nu m_1 & n_1 & \mu m_1 \\ m_2 & \nu m_2 & \mu n_2 \\ \nu m_2 & n_2 & \mu m_2 \\ m_3 & \nu m_3 & \mu n_3 \\ \nu m_3 & n_3 & \mu m_3 \end{bmatrix}$$

Multiplicando-se esse resultado por " $\underset{\sim}{B}A$ ", obtém-se:

$$\underset{\sim}{B}^T \underset{\sim}{E} \underset{\sim}{B} A = \frac{\bar{E}}{2A} \begin{bmatrix} m_1 & \nu m_1 & \mu n_1 \\ \nu m_1 & n_1 & \mu m_1 \\ m_2 & \nu m_2 & \mu n_2 \\ \nu m_2 & n_2 & \mu m_2 \\ m_3 & \nu m_3 & \mu n_3 \\ \nu m_3 & n_3 & \mu m_3 \end{bmatrix} \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} m_1 & 0 & m_2 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & n_1 & 0 & n_2 & 0 & n_3 \\ n_1 & m_1 & n_2 & m_2 & n_3 & m_3 \end{bmatrix} A$$

Finalmente a matriz "k" na forma explícita é dada por:

$$K = \frac{\bar{E}a}{4A} \begin{bmatrix} m_1^2 + \mu n_1^2 & \nu m_1 n_1 + \mu m_1 n_1 & m_1 m_2 + \mu m_1 n_2 & \nu m_1 n_2 + \mu m_2 n_1 & m_1 m_3 + \mu m_1 n_3 & \nu m_1 n_3 + \mu m_3 n_1 \\ n_1^2 + \mu m_1^2 & \nu m_2 n_1 + \mu m_1 n_2 & n_1 n_2 + \mu m_2 n_1 & \nu m_3 n_1 + \mu m_1 n_3 & n_1 n_3 + \mu m_3 n_1 \\ m_2^2 + \mu n_2^2 & \nu m_2 n_2 + \mu m_2 n_2 & m_2 m_3 + \mu m_2 n_3 & \nu m_3 n_2 + \mu m_2 n_3 & m_2 m_3 + \mu m_3 n_3 \\ n_2^2 + \mu m_2^2 & \nu m_3 n_2 + \mu m_2 n_3 & n_2 n_3 + \mu m_3 n_3 & \nu m_3 n_3 + \mu m_3 n_3 & n_2 n_3 + \mu m_3 n_3 \\ m_3^2 + \mu n_3^2 & \nu m_3 n_3 + \mu m_3 n_3 & n_2 n_3 + \mu m_3 n_3 & \nu m_3 n_3 + \mu m_3 n_3 & n_2 n_3 + \mu m_3 n_3 \end{bmatrix}$$

SIMÉTRICA

(2.33)

2.6 - Matriz de massas

Retomando-se a equação (2.20) que define a matriz de massas:

$$m = \int_{Ve} \rho \phi^T \phi dVe$$

Como a espessura e a massa específica " ρ " da chapa são invariantes, tem-se:

$$m = \int_A \rho \phi^T \phi dA$$

$$m = a \rho \int_A \phi^T \phi dA \quad (2.34)$$



Tem-se do item (2.4) a matriz " ϕ ":

$$\phi = \begin{Bmatrix} \xi_1 & 0 & \xi_2 & 0 & \xi_3 & 0 \\ 0 & \xi_1 & 0 & \xi_2 & 0 & \xi_3 \end{Bmatrix}$$

Resolvendo-se por partes, tem-se:

$$\phi \phi^T = \begin{Bmatrix} \xi_1 & 0 \\ 0 & \xi_1 \\ \xi_2 & 0 \\ 0 & \xi_2 \\ \xi_3 & 0 \\ 0 & \xi_3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_1 & 0 & \xi_2 & 0 & \xi_3 & 0 \\ 0 & \xi_1 & 0 & \xi_2 & 0 & \xi_3 \end{Bmatrix}$$

$$\phi \phi^T = \begin{bmatrix} \xi_1^2 & 0 & \xi_1 \xi_2 & 0 & \xi_1 \xi_3 & 0 \\ 0 & \xi_1^2 & 0 & \xi_1 \xi_2 & 0 & \xi_1 \xi_3 \\ \xi_1 \xi_2 & 0 & \xi_2^2 & 0 & \xi_2 \xi_3 & 0 \\ 0 & \xi_1 \xi_2 & 0 & \xi_2^2 & 0 & \xi_2 \xi_3 \\ \xi_1 \xi_3 & 0 & \xi_2 \xi_3 & 0 & \xi_3^2 & 0 \\ 0 & \xi_1 \xi_3 & 0 & \xi_2 \xi_3 & 0 & \xi_3^2 \end{bmatrix}$$

Uma maneira de resolver a integral proposta é utilizar o seguinte procedimento numérico, sendo " q ", " r " e " s " parâmetros de integração:

$$\int_A \xi_1^q \xi_2^r \xi_3^s dA = \frac{q! r! s!}{(q+r+s+2)!} \cdot 2A$$

Assim:

$$\underset{\sim}{m} = a\rho \int_{\underset{\sim}{A}} \underset{\sim}{\phi}^T \underset{\sim}{\phi} dA = Aa\rho \begin{bmatrix} 1/6 & 0 & 1/12 & 0 & 1/12 & 0 \\ 0 & 1/6 & 0 & 1/12 & 0 & 1/12 \\ 1/12 & 0 & 1/6 & 0 & 1/12 & 0 \\ 0 & 1/12 & 0 & 1/6 & 0 & 1/12 \\ 1/12 & 0 & 1/12 & 0 & 1/6 & 0 \\ 0 & 1/12 & 0 & 1/12 & 0 & 1/6 \end{bmatrix}$$

$$\underset{\sim}{m} = \frac{1}{12} a\rho A \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

E finalmente a matriz " $\underset{\sim}{m}$ " na forma explícita é dada por:

$$\underset{\sim}{m} = \frac{1}{12} a\rho A \begin{bmatrix} 2I_2 & I_2 & I_2 \\ I_2 & 2I_2 & I_2 \\ I_2 & I_2 & 2I_2 \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

2.7 - Matriz de amortecimento

A observação das expressões que definem as matrizes de amortecimento elemental " $\underset{\sim}{c}$ " e a matriz de massas " $\underset{\sim}{m}$ " apontam para um processo análogo de obtenção das duas matrizes, em virtude de que o fator diferenciador entre

elas reside nos parâmetros que multiplicam o produto entre as funções de forma de cada elemento. A determinação do parâmetro de amortecimento viscoso " μ " do material torna-se a grande barreira na obtenção da expressão da matriz " c ", HALLAN **et al.** (1978).

Com a utilização do método de amortecimento Rayleigh, tal problema pode ser tratado, no qual o amortecimento viscoso é introduzido por meio de frações específicas do amortecimento crítico, conforme será visto a seguir.

Para um sistema estrutural com comportamento linear, sem a ação de carregamento externo e ausente de qualquer mecanismo de amortecimento, o comportamento dinâmico tratado pela equação (2.24) pode ser expresso por:

$$\underset{\sim}{M} \underset{\sim}{\ddot{D}} + \underset{\sim}{K}_o \underset{\sim}{D} = \underset{\sim}{O} \quad (2.36)$$

cujas solução analítica é dada pela equação:

$$\underset{\sim}{D} = \underset{\sim}{X} \text{sen } \omega t \quad (2.37)$$

na qual " $\underset{\sim}{X}$ " é chamado autovetor, e " ω " é um escalar que quantifica a frequência natural de vibração da estrutura.

Substituindo-se a equação (2.37) na equação de vibração livre sem amortecimento (2.36), observando que o termo " $\text{sen}(\omega t)$ " pode assumir qualquer valor, obtém-se:

$$\left(\underset{\sim}{K}_o^{-1} \underset{\sim}{M} \right) \underset{\sim}{X} = \underset{\sim}{X} \underset{\sim}{\Lambda} \quad (2.38)$$

onde " $\underset{\sim}{\Lambda}$ " é o autovalor dado por:



$$\Lambda = \frac{I}{\omega^2} \quad (2.39)$$

Utilizando-se o método de Householder, GRAD **et al.** (1980), haja visto que o produto " $\tilde{K}_o^{-1} \tilde{M}$ " não resulta necessariamente uma matriz simétrica, pode-se obter, a partir da equação (2.38), os autovalores " λ " e o autovalor " Λ " aplicando-se na matriz " $\tilde{K}_o$ " a decomposição Cholesky, onde " $\tilde{L}$ " é a matriz triangular, GOLUB **et al.** (1985), o que resulta:

$$\left[\tilde{L}^T \right]^{-1} \tilde{M} \tilde{L}^{-1} \tilde{X} = \tilde{X} \Lambda \quad (2.40)$$

O método de Jacobi pode então ser utilizado para a obtenção dos autovalores e autovetores de tal matriz, uma vez que o produto " $\left[\tilde{L}^T \right]^{-1} \tilde{M} \tilde{L}^{-1}$ " resulta uma matriz simétrica.

Com cada um dos autovalores determinados, as frequências naturais de vibração do sistema estrutural são calculadas através da equação:

$$\omega_i = \sqrt{\frac{I}{\Lambda_i}} \quad (2.41)$$

2.7.1 - Amortecimento Crítico

Mais uma vez, considerando-se um sistema estrutural com comportamento linear livre de carregamentos externos

dependentes do tempo e acrescido de um mecanismo de amortecimento, pode-se obter o comportamento dinâmico estrutural através da equação (2.42).

$$\underset{\sim}{M} \underset{\sim}{\ddot{D}} + \underset{\sim}{C} \underset{\sim}{\dot{D}} + \underset{\sim}{K} \underset{\sim}{D} = 0 \quad (2.42)$$

Querendo tratar-se do comportamento de um sistema simples, como, por exemplo, um sistema massa-mola com um grau de liberdade, considerando-se ainda o efeito do amortecimento, a equação (2.42) pode ser simplificada de modo a representar tal comportamento, da seguinte maneira:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0 \quad (2.43)$$

cujas solução é dada por:

$$u = G \cdot e^{st} \quad (2.44)$$

Substituindo-se (2.44) em (2.42) obtém-se:

$$(ms^2 + cs + k)Ge^{st} = 0 \quad (2.45)$$

Dividindo-se por mGe^{st} e introduzindo-se a notação $\omega^2 = k/m$ vem:

$$s^2 + \frac{c}{m}s + \omega^2 = 0 \quad (2.46)$$

Pode-se, dessa forma, explicitar o valor da constante s , dado por:

$$s = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \omega^2} \quad (2.47)$$

Na equação (2.47), é possível que no cálculo da raiz quadrada obtenha-se um valor positivo, nulo ou negativo. A cada um desses valores associa-se a um tipo de movimento. A condição de amortecimento crítico é associada à nulidade da raiz quadrada, onde se obtém que:

$$\frac{c}{2m} = \omega$$

E assim:

$$c_c = 2m\omega$$

Então o valor de s na equação (2.47) é definido por:

$$s = -\frac{c}{2m} = -\omega$$

E a resposta é então dada pela equação (2.48).

$$u(t) = (G_1 + G_2 t) e^{-\omega t} \quad (2.48)$$



Introduzindo-se os valores de " $u(t)$ " e " $\dot{u}(t)$ " para o instante " $t=0$ " na equação (2.48), tem-se a forma final da resposta amortecida crítica:

$$u(t) = [u(0)(1 + \omega t) + \dot{u}(0)t]e^{-\omega t} \quad (2.49)$$

que pode ser observada graficamente pela figura 2.4. Na figura, verifica-se que o deslocamento tende a zero de acordo com a equação (2.49), ou seja, que a resposta livre do sistema amortecido crítico não inclui oscilações ao redor do deslocamento inicial. Uma definição útil de condição de amortecimento crítico pode ser descrita como sendo uma pequena quantidade de amortecimento para que não ocorra oscilação na resposta livre.

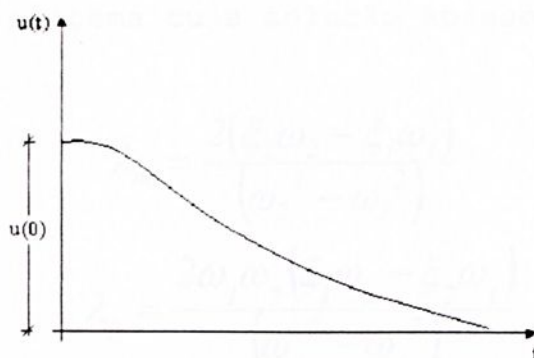


Figura 2.4 - Resposta do sistema livre com amortecimento crítico.

2.7.2 - Amortecimento Rayleigh

Definido pela combinação linear entre as matrizes de rigidez e de massas, CLOUGH **et al.** (1975), o amortecimento Rayleigh é dado por:

$$\tilde{C} = \lambda_m \tilde{M} + \lambda_k \tilde{K}_o \quad (2.50)$$

onde as constantes da matriz de amortecimento " C ", " λ_m " e " λ_k ", quantificam uma proporção das matrizes de massas e de rigidez, respectivamente.

Para uma dada frequência natural de vibração, a relação existente entre as constantes de amortecimento " λ_m " e " λ_k " e a fração do amortecimento " ξ " pode ser expressa pela seguinte equação:

$$\xi_i = \frac{1}{2} \left(\lambda_k \omega_i + \frac{\lambda_m}{\omega_i} \right) \quad (2.51)$$

Assim, para a determinação das constantes de amortecimento pode-se utilizar frações de amortecimento para duas distintas frequências naturais de vibração, resultando num sistema cuja solução apresenta:

$$\lambda_m = \frac{2(\xi_2 \omega_2 - \xi_1 \omega_1)}{(\omega_2^2 - \omega_1^2)} \quad (2.52)$$

$$\lambda_k = \frac{2\omega_1 \omega_2 (\xi_1 \omega_2 - \xi_2 \omega_1)}{(\omega_2^2 - \omega_1^2)} \quad (2.53)$$

Os valores das frequências naturais são, geralmente, COOK **et al.** (1989), tomados da seguinte forma: para " ω_1 " adota-se a menor frequência natural de vibração da estrutura e para " ω_2 " adota-se uma frequência relacionada com o carregamento externo de maior importância ou a frequência subsequente à " ω_1 ".

Em função do tipo de material e do tipo de sistema estrutural empregado, obtêm-se as frações do

amortecimento crítico, lembrando-se que o amortecimento crítico é dado pela relação $\xi_i = 1$. Desta forma, para estruturas convencionais o valor de " ξ_i " é sempre menor que a unidade (amortecimento subcrítico), sendo que para estruturas de aço adota-se $0,5\% < \xi_i < 5,0\%$ e para estruturas de concreto adota-se $2,0 < \xi_i < 15,0\%$.



CAPÍTULO 3 - INTEGRAÇÃO NUMÉRICA DA EQUAÇÃO GERAL DO MOVIMENTO

3.1 - Métodos de integração numérica

A integração numérica da equação geral que descreve o movimento de sistemas lineares pode ser feita utilizando-se métodos numéricos, onde se destacam os métodos de integração direta e as técnicas de superposição modal, OWEN (1980), ou através da resolução analítica da mesma. As hipóteses básicas para sistemas lineares são dadas pelas relações lineares entre tensão x deformação, permitindo-se, por exemplo, a utilização do princípio da superposição como ferramenta para a obtenção das soluções numéricas.

No caso de sistemas estruturais com comportamento não-linear, as propriedades físicas dos materiais podem não ser assumidas como constantes. Essas alterações podem causar uma modificação apreciável no valor dos coeficientes de rigidez, tendo como efeito uma resposta estrutural não-linear. Em função disto, as técnicas de superposição modal e a resolução analítica não são normalmente utilizadas na análise de tais sistemas. Conseqüentemente, o procedimento da aplicação geral para a resolução de sistemas não lineares é dado pelos métodos de integração direta, sendo que tais métodos são geralmente classificados em métodos explícitos e implícitos, OWEN **et al.** (1980).



Os métodos explícitos permitem expressar os deslocamentos finais " D_n ", do intervalo de tempo " $n\Delta t$ ", em função da história temporal anterior, sendo esta composta pelos deslocamentos e suas respectivas derivadas temporais finais em relação aos intervalos de tempo anteriores " $(n-1)\Delta t$ " e " $(n-2)\Delta t$ ", conforme equação (3.1). Entre os métodos explícitos destacam-se o processo da diferença central e o processo generalizado de Adams, HENRYCH (1990).

$$\underset{\sim}{D_n} = f \left(\underset{\sim}{D_{n-1}}, \overset{\bullet}{\underset{\sim}{D_{n-1}}}, \overset{\bullet\bullet}{\underset{\sim}{D_{n-2}}}, \underset{\sim}{D_{n-2}}, \dots \right) \quad (3.1)$$

Já os métodos implícitos permitem expressar os deslocamentos finais " D_n ", do intervalo de tempo " $n\Delta t$ ", em função das derivadas temporais dos deslocamentos " D_n ", que **a priori** não são conhecidas, e dos deslocamentos e suas respectivas derivadas finais em relação ao intervalo de tempo " $(n-1)\Delta t$ ", conforme equação (3.2). Entre os métodos implícitos destacam-se o processo de Newmark e o processo previsor corretor, HENRYCH (1990).

$$\underset{\sim}{D_n} = f \left(\overset{\bullet}{\underset{\sim}{D_n}}, \overset{\bullet\bullet}{\underset{\sim}{D_n}}, \underset{\sim}{D_{n-1}}, \overset{\bullet}{\underset{\sim}{D_{n-1}}}, \dots \right) \quad (3.2)$$

Existe, ainda, a possibilidade de se utilizar os métodos explícitos para resolver uma sub-região específica do sistema estrutural e os métodos implícitos

para resolver o restante. Tal esquema é chamado de método implícito-explicito.

Em geral, os métodos implícitos possuem essencialmente duas vantagens quando comparados com os métodos explícitos, WILSON **et al.** (1973) e GERADIN **et al.** (1986), a saber: elevada exatidão e estabilidade numérica melhorada. Em contra partida, a desvantagem dos métodos implícitos reside na necessidade de ter que se resolver o sistema de equações a cada iteração, que ocorre durante o processo de integração para cada intervalo de tempo " $n\Delta t$ ".

Na sequência deste trabalho, abordar-se-á o método implícito de Newmark, tendo em vista que esse método é indicado para análise determinística de sistemas estruturais com comportamento não-linear submetidos a carregamentos prescritos, ARGYRIS **et al.** (1991).

3.2 - Equações de Newmark

Conforme o exposto no item antecedente, os métodos implícitos estão fundamentados no conhecimento das derivadas temporais dos deslocamentos finais " D_n " do intervalo de tempo " $n\Delta t$ ", conforme equação (3.2).

Para isso, utilizam-se as equações de Newmark que serão mostradas na sequência.

3.2.1 - Aceleração constante durante o intervalo de tempo

Assumindo-se que a aceleração durante o intervalo de tempo " $n\Delta t$ " seja igual à uma constante, dada pela média



entre a aceleração do início do intervalo e do final, tem-se:

$$\ddot{D}_{\sim}(\tau) = \frac{1}{2} \left(\ddot{D}_{\sim n} + \ddot{D}_{\sim n-1} \right) \quad (3.3)$$

onde " τ " é uma variável de tempo auxiliar, variando de zero até " Δt ".

Integrando-se duas vezes a equação (3.3) em relação a variável " τ ", obtém-se:

$$\dot{D}_{\sim}(\tau) = \dot{D}_{\sim n-1} + \frac{1}{2} \left(\ddot{D}_{\sim n} + \ddot{D}_{\sim n-1} \right) \tau \quad (3.4)$$

$$D_{\sim}(\tau) = D_{\sim n-1} + \dot{D}_{\sim n-1} \tau + \frac{1}{4} \left(\ddot{D}_{\sim n} + \ddot{D}_{\sim n-1} \right) \tau^2 \quad (3.5)$$

Calculando-se as variáveis ao final do intervalo de tempo, com " $\tau = \Delta t$ ", e organizando-se o resultado, obtém-se:

$$\dot{D}_{\sim n} = \dot{D}_{\sim n-1} + \left(1 - \frac{1}{2} \right) \Delta t \ddot{D}_{\sim n-1} + \frac{1}{2} \Delta t \ddot{D}_{\sim n} \quad (3.6)$$

$$D_{\sim n} = D_{\sim n-1} + \Delta t \dot{D}_{\sim n-1} + \left(1 - \frac{1}{4} \right) \Delta t^2 \ddot{D}_{\sim n-1} + \frac{1}{4} \Delta t^2 \ddot{D}_{\sim n} \quad (3.7)$$

3.2.2 - Aceleração variando linearmente durante o intervalo de tempo

Assumindo-se que a aceleração durante o intervalo de tempo " $n\Delta t$ " varie linearmente entre a aceleração do início do intervalo e do final do intervalo tem-se:

$$\underset{\sim}{\ddot{D}}(\tau) = \underset{\sim}{\ddot{D}}_{n-1} + \left(\underset{\sim}{\ddot{D}}_n - \underset{\sim}{\ddot{D}}_{n-1} \right) \frac{\tau}{\Delta t} \quad (3.8)$$

Analogamente ao item anterior, obtém-se:

$$\underset{\sim}{\dot{D}}(\tau) = \underset{\sim}{\dot{D}}_{n-1} + \underset{\sim}{\ddot{D}}_{n-1} \tau + \left(\underset{\sim}{\ddot{D}}_n - \underset{\sim}{\ddot{D}}_{n-1} \right) \frac{\tau^2}{2\Delta t} \quad (3.9)$$

$$\underset{\sim}{D}(\tau) = \underset{\sim}{D}_{n-1} + \underset{\sim}{\dot{D}}_{n-1} \tau + \underset{\sim}{\ddot{D}}_{n-1} \frac{\tau^2}{2} + \left(\underset{\sim}{\ddot{D}}_n - \underset{\sim}{\ddot{D}}_{n-1} \right) \frac{\tau^3}{6\Delta t} \quad (3.10)$$

Calculando-se as variáveis ao final do intervalo de tempo, com " $\tau = \Delta t$ ", e organizando-se o resultado, obtém-se:

$$\underset{\sim}{\dot{D}}_n = \underset{\sim}{\dot{D}}_{n-1} + \left(1 - \frac{1}{2} \right) \Delta t \underset{\sim}{\ddot{D}}_{n-1} + \frac{1}{2} \Delta t \underset{\sim}{\ddot{D}}_n \quad (3.11)$$

$$\underset{\sim}{D}_n = \underset{\sim}{D}_{n-1} + \Delta t \underset{\sim}{\dot{D}}_{n-1} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \right) \Delta t^2 \underset{\sim}{\ddot{D}}_{n-1} + \frac{1}{6} \Delta t^2 \underset{\sim}{\ddot{D}}_n \quad (3.12)$$

3.2.3 - Equações generalizadas

Conforme visto nos itens 3.2.1 e 3.2.2, o resultado final obtido é o mesmo a menos de coeficientes numéricos que multiplicam determinadas parcelas.

Com isto pode-se unificar as respostas encontradas, resultando as equações generalizadas de Newmark, WARBURTON (1976), dadas por:

$$\underset{\sim}{D}_n^{\bullet} = \underset{\sim}{D}_{n-1}^{\bullet} + (1-\gamma)\Delta t \underset{\sim}{D}_{n-1}^{\bullet\bullet} + \gamma\Delta t \underset{\sim}{D}_n^{\bullet\bullet} \quad (3.13)$$

$$\underset{\sim}{D}_n = \underset{\sim}{D}_{n-1} + \Delta t \underset{\sim}{D}_{n-1}^{\bullet} + \left(\frac{1}{2} - \beta\right)\Delta t^2 \underset{\sim}{D}_{n-1}^{\bullet\bullet} + \beta\Delta t^2 \underset{\sim}{D}_n^{\bullet\bullet} \quad (3.14)$$

onde " γ " e " β " são conhecidos como parâmetros de Newmark.

Desse modo, para aceleração constante durante o intervalo de tempo tem-se $\gamma=1/2$ e $\beta=1/4$, e para aceleração variando linearmente durante o intervalo de tempo tem-se $\gamma=1/2$ e $\beta=1/6$.

Com a obtenção das equações (3.13) e (3.14), pode-se calcular o valor dos deslocamentos e das velocidades ao final do intervalo de tempo, tendo ainda como incógnita o valor das acelerações do final do intervalo.

3.3 - Algoritmos numéricos para resolução de sistemas não-lineares

A utilização de algoritmos numéricos está relacionada com a necessidade de ter que se resolver sistemas de equações não-lineares, originadas pela discretização de estruturas que manifestam este tipo de comportamento, tendo em vista que a solução de tais sistemas só é possível com aplicação de procedimentos incrementais e/ou iterativos.

Assim sendo, destacam-se, na sequência, os principais processos numéricos relacionados com o assunto em questão.



3.3.1 - Processos iterativos

Para a equação geral do movimento de um sistema estrutural deve-se adotar um procedimento iterativo, visto que tal equação resulta um sistema de equações não-lineares.

A primeira relação importante para descrever tal procedimento é dada pelo equilíbrio dinâmico ao longo de cada intervalo de tempo " Δt ", que pode ser expressa através da adaptação da equação (2.24), conforme mostra a seguinte equação:

$$\underset{\sim}{R}\left(\underset{\sim}{D}_k\right) = \underset{\sim}{F}_E(t) - \underset{\sim}{M} \underset{\sim}{\ddot{D}}_k - \underset{\sim}{C} \underset{\sim}{\dot{D}}_k - \underset{\sim}{F}_R\left(\underset{\sim}{D}_k\right) \quad (3.15)$$

onde " $\underset{\sim}{R}\left(\underset{\sim}{D}_k\right)$ " é o resíduo das forças dinâmicas não equilibradas, em função de deslocamentos previstos " $\underset{\sim}{D}_k$ ".

A condição de equilíbrio ao final do intervalo de tempo " $n\Delta t$ " para sistemas não-lineares é dada por:

$$\underset{\sim}{R}\left(\underset{\sim}{D}_k + \Delta \underset{\sim}{D}_k\right) = 0 \quad (3.16)$$

onde " $\Delta \underset{\sim}{D}_k$ " é o acréscimo de deslocamentos que ocorre durante o intervalo de tempo.

3.3.2 - Método de Newmark para integração numérica no tempo

A idéia básica do método é dada pela previsão do valor das acelerações ao final do intervalo de tempo que se deseja conhecer. Com isso, aplicando-se as equações

generalizadas de Newmark, pode-se prever, também, o valor dos deslocamentos e das velocidades ao final do mesmo intervalo de tempo. Na sequência utiliza-se um método iterativo onde, ao final de cada iteração, faz-se uma correção nos valores dos deslocamentos e suas derivadas temporais, em função da última resposta encontrada. Quando for atingida uma determinada tolerância para o resíduo das forças dinâmicas, assume-se que os últimos valores obtidos estão corretos e inicia-se novamente o processo de integração para o próximo intervalo de tempo.

3.3.2.1 - Equacionamento básico

Expandindo-se a função dada pela equação (3.16) pela relação linearizada de Taylor, obtém-se:

$$\underset{\sim}{R}\left(\underset{\sim}{D}_k + \Delta \underset{\sim}{D}_k\right) = \underset{\sim}{R}\left(\underset{\sim}{D}_k\right) + \frac{\partial \underset{\sim}{R}\left(\underset{\sim}{D}_k\right)}{\partial \underset{\sim}{D}_k} \Delta \underset{\sim}{D}_k = 0 \quad (3.17)$$

ou simplesmente:

$$-\frac{\partial \underset{\sim}{R}\left(\underset{\sim}{D}_k\right)}{\partial \underset{\sim}{D}_k} \Delta \underset{\sim}{D}_k = \underset{\sim}{R}\left(\underset{\sim}{D}_k\right) \quad (3.18)$$

Derivando-se o resíduo, dado pela equação (3.13), em relação aos deslocamentos " $\underset{\sim}{D}_k$ ", chega-se a:



$$-\frac{\partial R\left(\underset{\sim}{D_k}\right)}{\partial \underset{\sim}{D_k}} = \frac{\partial F_E(t)}{\partial \underset{\sim}{D_k}} - M \frac{\partial \ddot{\underset{\sim}{D_k}}}{\partial \underset{\sim}{D_k}} - C \frac{\partial \dot{\underset{\sim}{D_k}}}{\partial \underset{\sim}{D_k}} - \frac{\partial F_R\left(\underset{\sim}{D_k}\right)}{\partial \underset{\sim}{D_k}} \quad (3.19)$$

Como os esforços externos são dependentes, neste trabalho, apenas do tempo, tem-se:

$$\frac{\partial F_E(t)}{\partial \underset{\sim}{D_k}} = 0 \quad (3.20)$$

Já as equações generalizadas de Newmark podem ser escritas da seguinte forma:

$$\dot{\underset{\sim}{D_k}} = \dot{\underset{\sim}{D_{k-1}}} + (1-\gamma)\Delta t \ddot{\underset{\sim}{D_{k-1}}} + \gamma\Delta t \ddot{\underset{\sim}{D_k}} \quad (3.21)$$

$$\underset{\sim}{D_k} = \underset{\sim}{D_{k-1}} + \Delta t \dot{\underset{\sim}{D_{k-1}}} + \left(\frac{1}{2} - \beta\right)\Delta t^2 \ddot{\underset{\sim}{D_{k-1}}} + \beta\Delta t^2 \ddot{\underset{\sim}{D_k}} \quad (3.22)$$

Derivando a equação (3.22) em relação à " $\ddot{\underset{\sim}{D_k}}$ ",

obtem-se:

$$\frac{\partial \underset{\sim}{D_k}}{\partial \ddot{\underset{\sim}{D_k}}} \cong \beta\Delta t^2 \quad (3.23)$$

ou ainda,

$$\frac{\partial \ddot{D}_k}{\partial \ddot{D}_k} = \frac{1}{\beta \Delta t^2} \quad (3.24)$$

Por outro lado, derivando a equação (3.21) em

relação à " $\ddot{D}_k$ ", obtém-se:

$$\frac{\partial \dot{D}_k}{\partial \ddot{D}_k} \cong \gamma \Delta t \quad (3.25)$$

Já a derivada de " $\ddot{D}_k$ " em relação à " $\ddot{D}_k$ " pode ser obtida pela regra da cadeia, como pode ser observado na equação (3.26).

$$\frac{\partial \dot{D}_k}{\partial \ddot{D}_k} = \frac{\partial \dot{D}_k}{\partial \ddot{D}_k} \frac{\partial \ddot{D}_k}{\partial \ddot{D}_k} = \gamma \Delta t \frac{1}{\beta \Delta t^2} = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \quad (3.26)$$

Substituindo as equações (3.20), (3.24) e (3.26) na equação (3.19), chega-se a:

$$\frac{\partial R(\ddot{D}_k)}{\partial \ddot{D}_k} = - \left\{ M \frac{1}{\beta \Delta t^2} + C \frac{\gamma}{\beta \Delta t} + \frac{\partial F_R(\ddot{D}_k)}{\partial \ddot{D}_k} \right\} \quad (3.27)$$



Desta forma, com a substituição da equação anterior na equação (3.18), obtém-se a equação que fornecerá o acréscimo de deslocamentos " ΔD_k ", dada por (3.28), sendo esta utilizada na correção dos deslocamentos ocorridos ao longo de cada iteração.

$$\left\{ M \frac{1}{\beta \Delta t^2} + C \frac{\gamma}{\beta \Delta t} + \frac{\partial F_R(D_k)}{\partial D_k} \right\} \Delta D_k = R(D_k) \quad (3.28)$$

3.3.2.2 - Algoritmo numérico para resolução do processo

O conhecimento das condições do problema em questão no instante $t=0$ é o ponto de partida para o processo de integração. Tais condições são dadas pelos deslocamentos

" D_0 " e velocidades " $\dot{D}_0$ ". Com isso, é possível obter as

acelerações " $\ddot{D}_0$ ", utilizando-se a equação de equilíbrio

(2.24) da seguinte forma:

$$\ddot{D}_0 = M^{-1} \left\{ F_E(0) - C \dot{D}_0 - F_R(D_0) \right\} \quad (3.29)$$

Dado o início da integração numérica ao longo do tempo, deve-se fazer uma previsão das acelerações, dos deslocamentos e das velocidades para o primeiro intervalo



de tempo " $n\Delta t$ ", com $k=n=1$, fazendo o uso das equações generalizadas de Newmark da seguinte forma:

$$\underset{\sim}{D_k}^{\bullet\bullet} = \underset{\sim}{D_{n-1}}^{\bullet\bullet} \quad (3.30)$$

$$\underset{\sim}{D_k}^{\bullet} = \underset{\sim}{D_{n-1}}^{\bullet} + (1-\gamma)\Delta t \underset{\sim}{D_{n-1}}^{\bullet\bullet} + \gamma\Delta t \underset{\sim}{D_k}^{\bullet\bullet} \quad (3.31)$$

$$\underset{\sim}{D_k} = \underset{\sim}{D_{n-1}} + \Delta t \underset{\sim}{D_{n-1}}^{\bullet} + \left(\frac{1}{2} - \beta\right)\Delta t^2 \underset{\sim}{D_{n-1}}^{\bullet\bullet} + \beta\Delta t^2 \underset{\sim}{D_k}^{\bullet\bullet} \quad (3.32)$$

Assim, as forças inerciais, dissipativas e restauradoras são calculadas a partir destas primeiras aproximações; bem como, através da equação (3.13), o resíduo das forças dinâmicas não equilibradas.

Através de uma tolerância ε verifica-se o equilíbrio pela equação:

$$\frac{\left\| \underset{\sim}{R} \left(\underset{\sim}{D_k} \right) \right\|}{\left\| \underset{\sim}{F_E}(n\Delta t) \right\|} < \varepsilon \quad (3.33)$$

onde " $\left\| \underset{\sim}{R} \left(\underset{\sim}{D_k} \right) \right\|$ " e " $\left\| \underset{\sim}{F_E}(n\Delta t) \right\|$ " são, respectivamente, as normas Euclidianas do resíduo e das forças externas.

Se a verificação acima for satisfeita, o processo deve ser reiniciado incrementando-se os valores de " k " e



"n". Caso contrário, deve-se recorrer a equação (3.28) para que seja calculado o acréscimo de deslocamentos " ΔD_k ", para que seja efetuada a correção nos valores dos deslocamentos da seguinte maneira:

$$\begin{array}{ccc} D_k & = & D_k + \Delta D_k \\ \sim (corrigido) & \sim & \sim \end{array} \quad (3.34)$$

Com o auxílio da equação (3.26) que permite o cálculo do acréscimo das velocidades, corrige-se as velocidades a partir da equação (3.36).

$$\begin{array}{ccc} \dot{D}_k & = & \dot{D}_k + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \Delta D_k \\ \sim (corrigido) & \sim & \sim \end{array} \quad (3.35)$$

E com o auxílio da equação (3.24), temos analogamente para a correção das acelerações dada pela equação (3.36).

$$\begin{array}{ccc} \ddot{D}_k & = & \ddot{D}_k + \frac{1}{\beta \Delta t^2} \Delta D_k \\ \sim (corrigido) & \sim & \sim \end{array} \quad (3.36)$$

Com a correção destas variáveis, retorna-se a verificação do equilíbrio e conclui-se o processo numérico de integração.

Para uma visualização de forma global dos passos antes descritos, a figura 3.1 apresenta um diagrama de blocos contendo o equacionamento básico.

Figura 3.1 - Diagrama de blocos para o equacionamento básico.

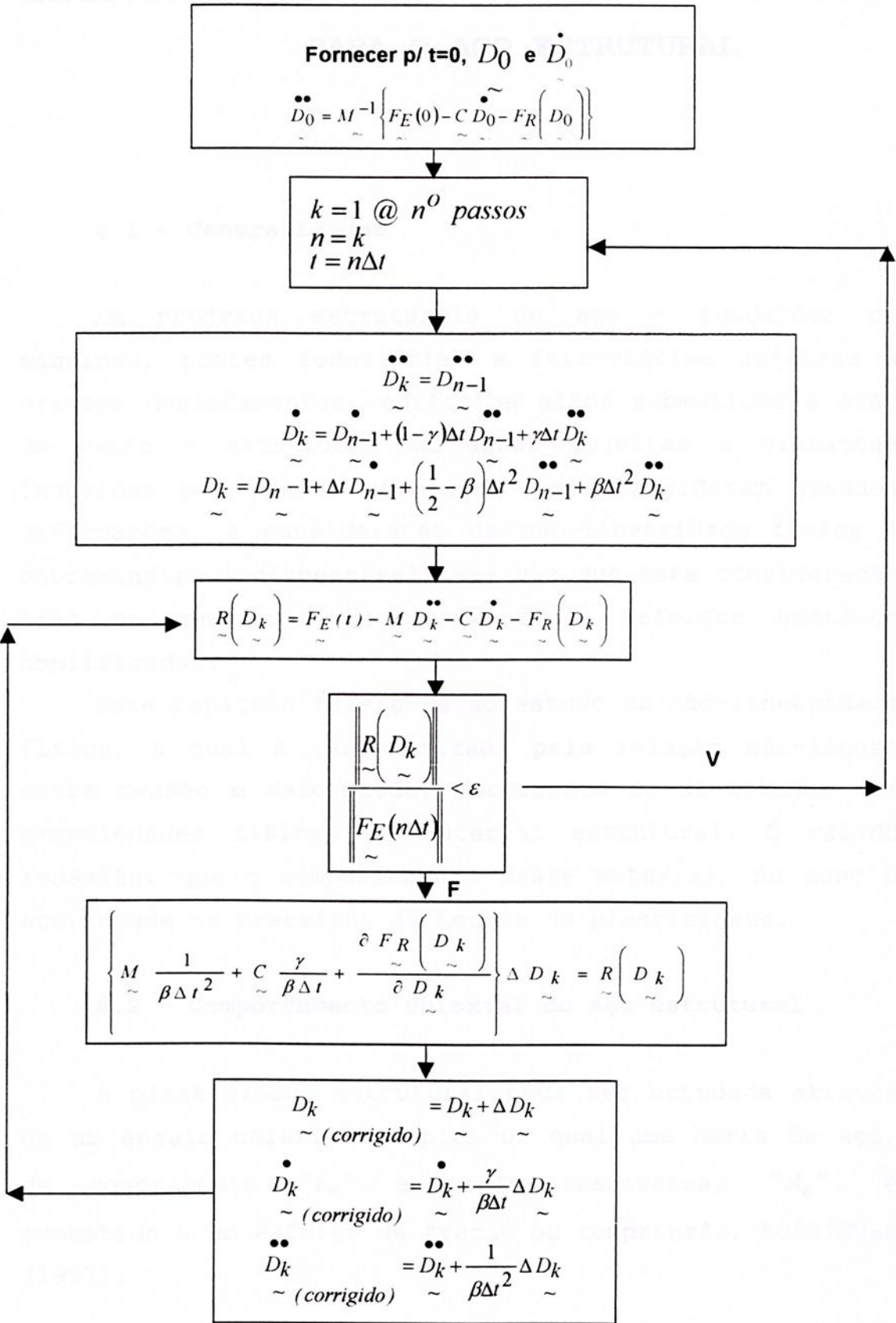


Figura 3.1 - Diagrama de blocos para o processo de Newmark.

CAPÍTULO 4 - MODELOS FÍSICOS NÃO-LINEARES PARA O AÇO ESTRUTURAL

4.1 - Generalidades

Em projetos estruturais de aço - fundações de máquinas, pontes rodoviárias e ferroviárias sujeitas a grandes deslocamentos, edifícios altos submetidos à ação do vento e estruturas em geral sujeitas a vibrações induzidas por abalos sísmicos - que consideram grandes deformações, a consideração da não-linearidade física é sobremaneira indispensável, uma vez que esta consideração traz no seu bojo deslocamentos e esforços bastante amplificados.

Este capítulo refere-se ao estudo da não-linearidade física, a qual é caracterizada pela relação não-linear entre tensão e deformação, decorrente de alterações das propriedades físicas do material estrutural. É válido ressaltar que o comportamento deste material, no caso o aço, segue os preceitos da teoria da plasticidade.

4.2 - Comportamento uniaxial do aço estrutural

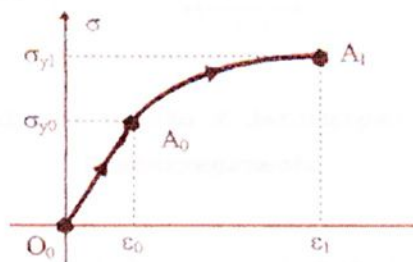
A plasticidade estrutural pode ser estudada através de um ensaio uniaxial simples no qual uma barra de aço, de comprimento " L_e " e seção transversal " A_e ", é submetida a um esforço de tração ou compressão, RODRIGUES (1997).



Através dos cálculos das deformações provocadas pelas diversas tensões na barra, obtém-se a relação tensão x deformação.

4.2.1 - Carregamento unidirecional

A figura 4.1 resume o comportamento típico do aço, partindo da suposição de que a barra descrita anteriormente esteja submetida a um esforço de tração crescente.



**Figura 4.1 - Relação tensão X deformação elastoplástica.
Carregamento.**

A figura 4.1 revela, para o trecho " $O_0 - A_0$ ", o regime elástico linear, no qual a correspondente relação tensão deformação é linear, valendo, portanto, a lei de Hooke ($\sigma = E\varepsilon$), até o nível da tensão de escoamento " σ_{y0} ". Seguidamente, ao ultrapassar-se essa tensão, observa-se o início de uma reorganização interna dos cristais que compõem o material, provocando uma alteração das propriedades físicas do mesmo. Este processo acarreta a modificação do módulo de deformação longitudinal, notada pela diminuição progressiva da inclinação da curva tensão x deformação, ilustrada pelo trecho " $A_0 - A_1$ "

4.2.2 - Descarregamento e recarregamento

A figura 4.2 aponta a possível execução de dois caminhos, quando da consideração do descarregamento da mesma barra descrita anteriormente.

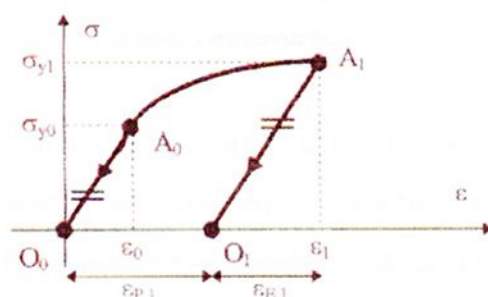


Figura 4.2 - Relação tensão X deformação elasto-plástica.
Descarregamento.

No primeiro caminho o descarregamento segue o caminho inverso ao do carregamento inicial - trecho " O_0-A_0 ". Nele o valor de " σ_{y0} " ainda é superior à tensão inicial aplicada. Quando o valor de " σ_{y0} " é ultrapassado pela tensão aplicada, a segunda possibilidade de caminho é indicada no trecho " A_1-O_1 ", no qual o descarregamento se dá pela reta " A_1-O_1 ", paralela à reta " O_0-A_0 ". Neste caso, quando de um descarregamento completo, há recuperação da deformação elástica e uma deformação residual permanente, dada pela deformação plástica " $\varepsilon_{p,1}$ ".

Uma vez completado o processo de descarregamento acima descrito, a barra pode ser carregada novamente, conforme ilustra a figura 4.3.

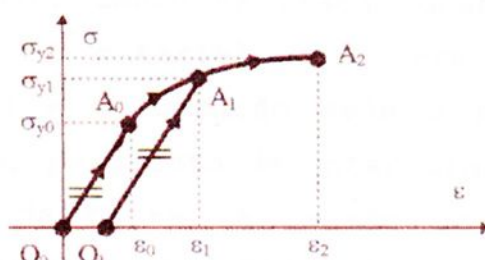


Figura 4.3 - Relação tensão X deformação elastoplástica.
Recarregamento.

Conforme a figura 4.3, até que a curva original não-linear " A_0-A_2 " seja atingida, o recarregamento segue o caminho inverso do descarregamento. A partir desse ponto, o comportamento dá-se como se descarregamento e recarregamento não houvessem ocorrido, e a relação tensão x deformação segue conforme descrito no item 4.2.1.

4.2.3 - Inversão de carregamento

Retomando-se o caso do descarregamento dado pela figura 4.2, suponhamos agora que, após o descarregamento completo, dado pela reta " O_1-A_1 ", a barra comece a ser comprimida, o que equivale dizer que há uma inversão do carregamento aplicado. Neste caso, a figura 4.4 mostra a relação tensão x deformação.

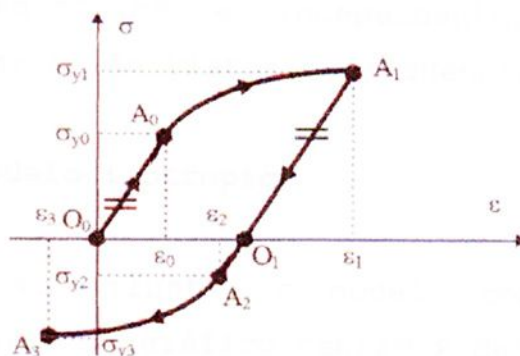


Figura 4.4 - Relação tensão X deformação elastoplástica.
Efeito Bauschinger.

A princípio, tanto na tração quanto na compressão o comportamento do material é o mesmo, de forma que a relação tensão x deformação seja a mesma para os dois casos. Contudo, pelo fato de anteriormente ter ocorrido a plastificação da barra, a tensão de escoamento para o carregamento inverso é modificada, com o módulo da nova tensão de escoamento " σ_{y2} " menor que a tensão de escoamento inicial " σ_{y0} ". A partir deste ponto, o comportamento do material é mantido conforme descrição anterior.

4.3 - Modelos com endurecimento linear para carregamentos cíclicos

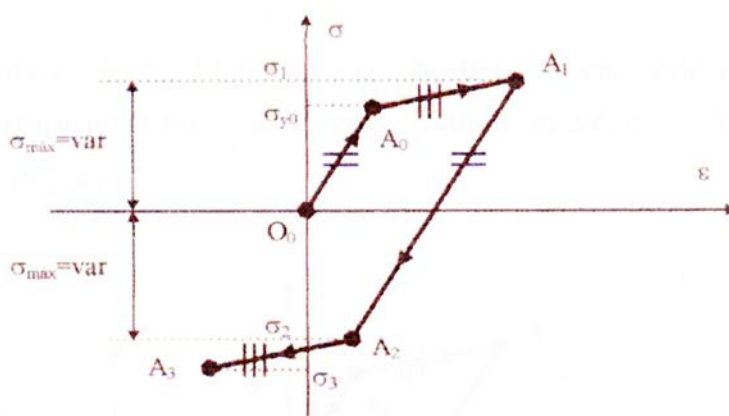
Os problemas dinâmicos caracterizam-se pelo fato dos elementos estruturais serem, freqüentemente, submetidos a esforços alternados; logo, faz-se imprescindível a consideração de um modelo matemático que contemple a inversão do carregamento, conforme visto no item 4.2.3.

Entre os vários modelos destinados para esta finalidade destacam-se os modelos com endurecimento cinemático, isotrópico e independente, CHEN et al. (1991), conforme serão vistos na sequência.

4.3.1 - Modelo isotrópico

A figura 4.5 ilustra o modelo com endurecimento isotrópico através do gráfico tensão x deformação do aço.





Neste modelo, a tensão de escoamento do material é dada pela máxima tensão calculada, devendo ser sempre maior ou igual a " σ_{y0} ". Esse valor permanecerá constante, tanto para a tração como para a compressão, até que um valor maior de tensão seja obtido. Tal mecanismo é mostrado pela figura 4.5, onde uma barra submetida a um esforço de tração tem como tensão atuante o valor " σ_1 ". Como " σ_1 " é maior que " σ_{y0} ", tal valor passa a ser o novo valor da tensão de escoamento. Efetuando-se o descarregamento e inversão do mesmo, a tensão de escoamento na compressão é dada por " $\sigma_2 = -\sigma_{m\acute{a}x} = -\sigma_1$ ". Aumentando-se a compressão na barra, a mesma começa a escoar até atingir-se o ponto " A_3 ", com tensão " σ_3 ". Como " $|\sigma_3|$ " é maior que " σ_1 ", este último valor passa a ser a nova tensão de escoamento do material, e assim sucessivamente. Dessa forma, a tensão de escoamento " σ_{esc} " é dada pela seguinte equação:

$$|\sigma_{esc}| = |\sigma_{max}| \quad (4.5)$$

4.3.2 - Modelo independente

A figura 4.6 ilustra o modelo com endurecimento linear independente através do gráfico tensão x deformação do aço.

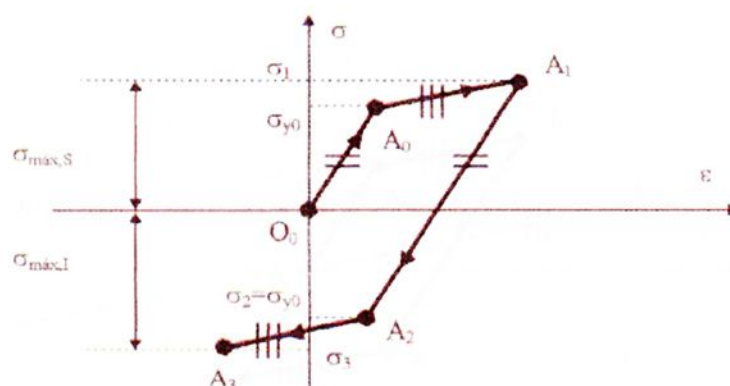


Figura 4.6 - Modelo com endurecimento linear independente.

Neste modelo, a tensão de escoamento do material é dada pela máxima tensão calculada para o caso da tração e da compressão, de tal forma que o valor da tensão de escoamento na tração " $\sigma_{máx,S}$ " independa do valor da tensão de escoamento na compressão " $\sigma_{máx,I}$ ". A figura 4.5 mostra tal mecanismo, onde após o descarregamento e inversão do carregamento a tensão de escoamento inicial na compressão é dada por " $\sigma_2 = -\sigma_{y0}$ ", passando posteriormente para " $\sigma_{esc,c} = \sigma_{máx,I}$ ", enquanto que " $\sigma_{esc,T} = \sigma_{máx,S}$ " permanece inalterado. Analiticamente, a tensão de escoamento é dada por:

$$|\sigma_{esc\ C,T}| = |\sigma_{máx\ I,S}| \quad (4.6)$$

4.3.3 - Modelo cinemático

A figura 4.7 ilustra o modelo com endurecimento linear cinemático através do gráfico tensão x deformação do aço.

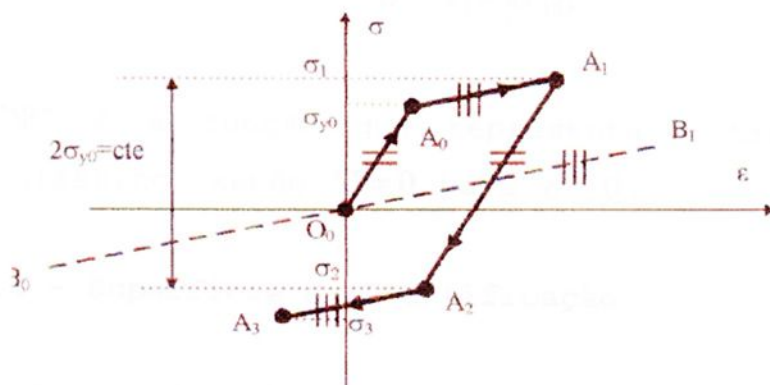


Figura 4.7 - Modelo com endurecimento linear cinemático.

Neste modelo, a diferença entre a tensão de escoamento para carregamentos de tração e de compressão é mantida constante com valor igual ao dobro da tensão de escoamento " σ_{y0} ". Tal mecanismo é mostrado pela figura 4.7, onde o valor da tensão de escoamento referente ao ponto " A_2 " é dado por $|\sigma_2| = |2\sigma_{y0} - \sigma_1|$. Dessa forma, a equação que rege tal modelo é dada por:

$$\sigma_{esc,T} + |\sigma_{esc,C}| = 2\sigma_{y0} \quad (4.7)$$

onde " $\sigma_{esc,T}$ " e " $\sigma_{esc,C}$ " são as tensões de escoamento para a tração e para a compressão, respectivamente.

Cabe ressaltar que este modelo reproduz de forma simplificada o efeito Bauschinger descrito no item 4.2.3, uma vez que o centro elástico é movido ao longo da reta " $B_0 - B_1$ ". Alternativamente, pode-se expressar tal modelo pela seguinte equação:

$$|\sigma - \Psi| = |\sigma_{y0}| \quad (4.8)$$

onde " Ψ " é a função que representa a trajetória do centro elástico, sendo $\Psi = 0$ para $\sigma = 0$.

4.4 - Superfície de Plastificação

Conforme descrito anteriormente no item 4.3, em estados uniaxiais, um intervalo de valores define os limites de resposta elástica de um material. Já em estados multiaxiais, a região elástica é limitada no espaço das tensões principais por uma superfície. Esta superfície, conhecida como superfície de plastificação, ilustrada pela figura 4.8, separa os estados de tensão daqueles que geram deformações irreversíveis; ressaltando-se que a mesma pode assumir outras formas diferentes da apresentada na figura 4.8. Assim, a plastificação em um ponto fica caracterizada, na equação (4.9) que define a superfície, pela verificação da igualdade:

$$F(\sigma, k, \alpha) \geq 0 \quad (4.9)$$

onde " σ " representa o estado de tensão, " k " e " α " são variáveis internas responsáveis, respectivamente, pelos modos de encruamento isotrópico e cinemático.

Na equação (4.9), assume-se que a condição " $F=0$ " implica que as tensões limites foram atingidas. Partindo-se desta hipótese, valores negativos de " F " traduzem variações no estado de tensão que evidenciam um retorno à região elástica (descarregamento). Já alterações no estado de tensão que conduzam à condição " $F>0$ " indicam o aparecimento de deformações irreversíveis, caracterizando uma situação de carregamento plástico. Nesta situação, de acordo com o modelo de encruamento do material, a superfície de plastificação tende a evoluir, de forma que o novo estado de tensão ainda seja pertencente à mesma.

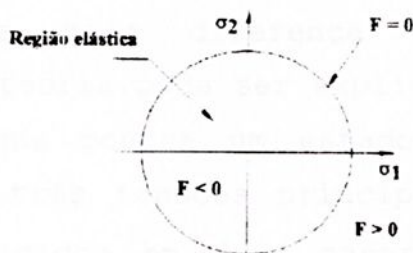


Figura 4.8 - Superfície de plastificação para o estado plano de tensões.

Analogamente ao caso uniaxial, se com o processo de plastificação houver uma expansão uniforme da superfície original em torno da origem, com a manutenção da forma e da orientação inicial, o modelo é dito isotrópico, figura 4.9(a). Quando as superfícies originais mantêm suas dimensão e forma iniciais, porém transladam como corpo

rígido no espaço definido pelas tensões, o modelo é dito cinemático, 4.9(b).

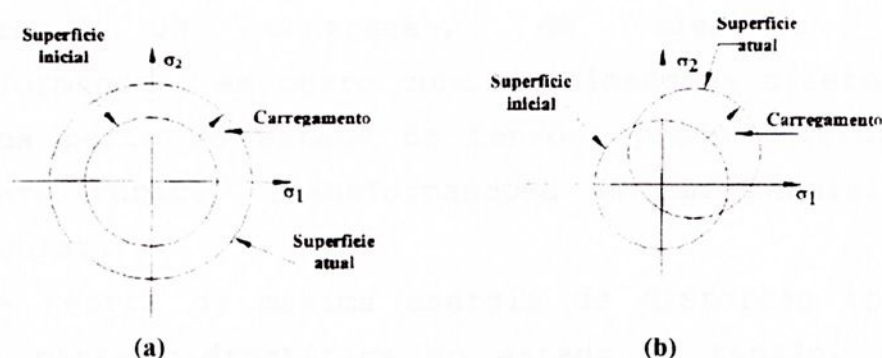


Figura 4.9 - Superfície de plastificação. (a) Modelo isotrópico.
(b) Modelo cinemático.

4.5 - Critério da Máxima Energia de Distorção

O critério da máxima energia de distorção, desenvolvida e explicitada por R. von Mises (1913), estabelece que a causa pela ruptura por escoamento de um material é dada pela diferença entre as tensões principais. Essa teoria pode ser explicada com referência à figura 4.10, que mostra um estado geral de tensão, representado por três tensões principais diferentes σ_1 , σ_2 e σ_3 ; subdivididos em dois casos. O primeiro caso consiste em três tensões iguais, cada uma dada por $\sigma_{médio}$. O segundo caso consiste em três tensões que, quando adicionadas a σ_m em cada face, nos dá as tensões σ_1 , σ_2 e σ_3 .

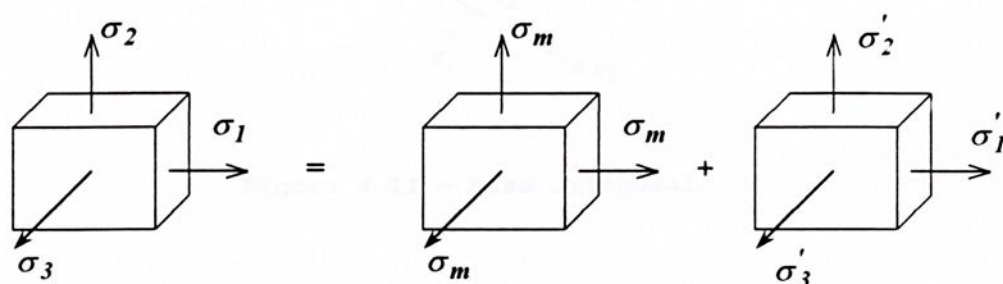


Figura 4.10 - Estado geral de tensão.

Na figura 4.10, as três tensões iguais σ_m representam a parte hidrostática de determinado estado de tensão. Essa parte do estado de tensão produz expansão uniforme, ou contração, do elemento cúbico, transformando-a em outro cubo de dimensões diferentes. A segunda parte do estado de tensões produz distorção do elemento cúbico, transformando-a em um paralelepípedo retangular.

A teoria da máxima energia de distorção considera que a parte hidrostática do estado de tensão, seja em tração ou compressão, não tem nenhuma influência no escoamento, com isso pode-se dizer que o afastamento do estado hidrostático é a causa da ruptura destes materiais.

Dado um estado qualquer de tensão, caracterizado por σ_1 , σ_2 e σ_3 , procura-se a região no espaço na qual estão situados os pontos $P=(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ que não atingem a ruptura do material.

A figura 4.11 representa uma base ortogonal formada por vetores unitários $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ e $\vec{e}_3$, ortogonais dois a dois.

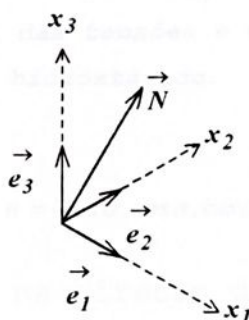


Figura 4.11 - Base ortogonal.

A partir da figura 4.11, onde " $\vec{N} = (x_1, x_2, x_3)$ " é um vetor qualquer, considerando-se ainda que " $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = |\vec{e}_3| = 1$ ", pode-se concluir as seguintes relações:

$$\begin{cases} \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 0, & i \neq j; \\ \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = 1, & i = j; \end{cases} \quad (4.10)$$

Situando nesta base ortogonal o vetor total das tensões para um estado de tensões qualquer, " $\vec{t} = \vec{OP}$ ", e ainda a parcela hidrostática deste vetor, " $\vec{h} = \vec{OQ}$ ", o afastamento do estado hidrostático, " $\vec{d}$ ", pode ser observado através da figura 4.12.

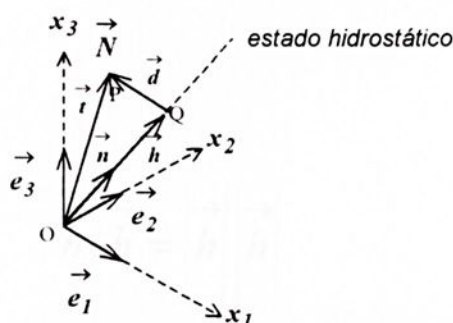


Figura 4.12 - Vetor total das tensões e o respectivo afastamento hidrostático.

Na figura 4.12, " $\vec{n} = (\cos \alpha, \cos \alpha, \cos \alpha)$ " é o vetor unitário com co-senos diretores na direção do eixo médio. Sendo $\vec{n}$ um vetor unitário, pode-se deduzir que:

$$|\vec{n}| = 1 \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad (4.11)$$

Como $\vec{n}$ possui a mesma direção e sentido do vetor $\vec{h}$, tem-se:

$$\vec{h} = n \cdot \left| \vec{h} \right| \quad (4.12)$$

Observando-se ainda a figura 4.12, focando-se o triângulo "OQP", retângulo em Q, e observando-se que os vetores " $\vec{h}$ " e " $\vec{d}$ " são perpendiculares, conclui-se que:

$$\vec{d} = \vec{t} - \vec{h} \quad (4.13)$$

$$\vec{h} \cdot \vec{d} = 0 \quad (4.14)$$

e ainda que:

$$\vec{h} \cdot \vec{h} = \left| \vec{h} \right| \cdot \left| \vec{h} \right| \quad (4.15)$$

Substituindo-se as equações (4.13) e (4.15) na equação (4.14), obtém-se:

$$\left| \vec{h} \right| = \frac{\sqrt{3}}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (4.16)$$

De maneira análoga, isto é, substituindo-se a equação (4.16) na equação (4.12), conclui-se que:

$$\vec{h} = \frac{l}{3} \left(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \right) (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (4.17)$$

ou simplesmente:

$$\vec{h} = (\sigma_m, \sigma_m, \sigma_m) \quad (4.18)$$

Através da equação (4.18), o módulo de " $\vec{d}$ " pode ser expresso por:

$$|\vec{d}| = \sqrt{\frac{2}{3} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_1 \sigma_3 - \sigma_2 \sigma_3)} \quad (4.19)$$

Na iminência de ruptura por escoamento no ensaio de tração simples, tem-se:

$$\begin{cases} \sigma_{esc} = \sigma_1 \neq 0 \\ \sigma_2 = \sigma_3 = 0 \end{cases} \quad (4.20)$$



Através da substituição da equação (4.20) na equação (4.19), o critério da máxima energia de distorção é dado por:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 \leq 2\sigma_{esc}^2 \quad (4.21)$$

Para o estado plano de tensão, a equação (4.21) pode ser reduzida a:

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_{esc}}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_{esc}} \frac{\sigma_2}{\sigma_{esc}}\right) + \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_{esc}}\right)^2 = 1 \quad (4.22)$$

4.6 - Superfície de von Mises

O critério formulado por R. von Mises admite que a plastificação inicia quando a tensão cisalhante octaédrica em um ponto atinge um valor crítico $\bar{k}$. O valor inicial de $\bar{k}$ pode ser estabelecido por um ensaio de tração simples ou cisalhamento puro. O critério de von Mises pode ser apresentado ainda pela equação (4.23):

$$\tau_{oct} = \sqrt{\frac{2}{3}} J_2 = \bar{k} \quad (4.23)$$



onde " τ_{oct} " é a tensão octaédrica, expressa por:

$$\tau_{oct}^2 = \frac{1}{9} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2] \quad (4.24)$$

e " J_2 " é o segundo invariante do tensor desviador, expresso por:

$$J_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2] \quad (4.25)$$

No sistema triaxial das tensões principais, o critério é representado como um cilindro, cuja geratriz é paralela ao eixo hidrostático, conforme figura 4.13. Uma análise geométrica permite concluir que acréscimos de tensões hidrostáticas não provocam plastificação.

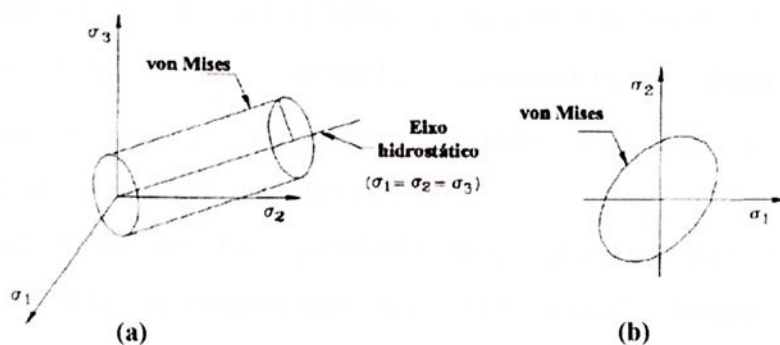


Figura 4.13 - Superfície de von Mises. (a) Estado triaxial das tensões principais. (b) Estado plano das tensões principais.

Uma vantagem deste critério é a ausência de irregularidades na superfície. A continuidade da superfície facilita a definição das derivadas, necessárias para a dedução das relações constitutivas elastoplásticas incrementais.

4.7 - Modelo Numérico Aproximado

Para a consideração da não-linearidade do material aço, o modelo numérico aproximado considerando-se encruamento cinemático é ilustrado pela figura 4.14.

Tal modelo, particularizado para o estado plano de tensões, identifica o momento exato em que ocorre a plastificação de cada elemento, utilizando-se o critério da máxima energia de distorção. Neste momento, são armazenados os valores superior e inferior para a deformação elástica que será utilizada quando do descarregamento. Tal procedimento apenas é realizado quando ocorrer a plastificação no final do regime elástico (" $vapla = 1$ "). Considerando-se ainda o carregamento (" $vapla \neq 1$ "), armazena-se o valor da deformação plástica do elemento para a deformação superior e a deformação inferior, que identificará a plastificação no descarregamento, é corrigida considerando-se o intervalo constante " $2\sigma_{y0}$ " do modelo cinemático. Desta forma, corrige-se o módulo de elasticidade visando a alteração da matriz de rigidez da estrutura.

A validade de tal procedimento poderá ser verificada no exemplo 02, apresentado no item 6.2.2 deste trabalho, onde se procura simular efeitos de carregamento e descarregamento considerando-se não-linearidade física do material.



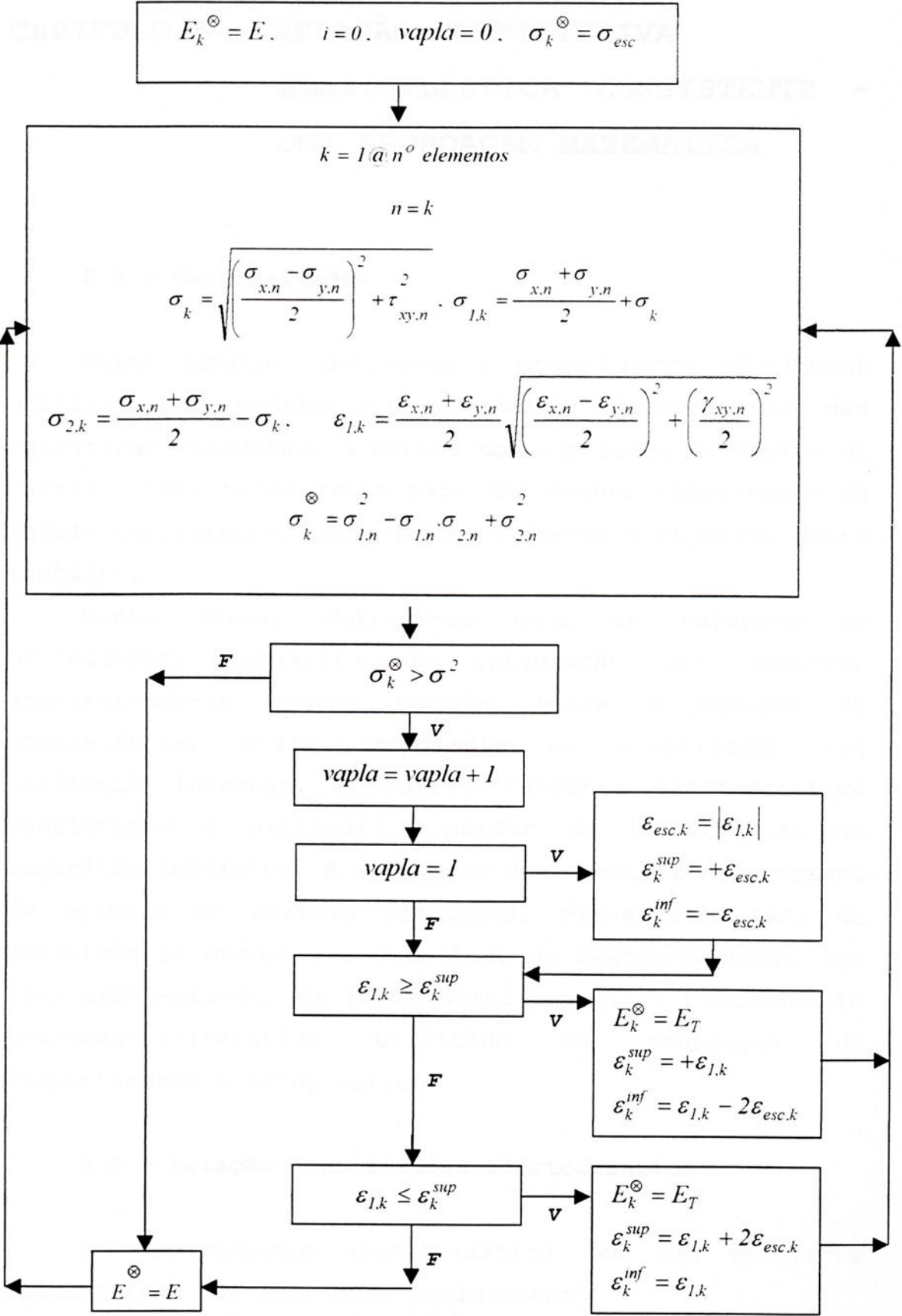


Figura 4.14 - Fluxograma do modelo numérico aproximado considerando-se a não-linearidade do material aço.

CAPÍTULO 5 - RELAÇÃO CONSTITUTIVA ELASTOPLÁSTICA CONSISTENTE - UMA ABORDAGEM MATEMÁTICA

5.1 - Generalidades

Neste capítulo define-se o procedimento não-linear utilizado para modelar o comportamento elastoplástico das estruturas estudadas, a partir dos conceitos da teoria da plasticidade, necessários para uma melhor compreensão do modelo consistente, cujo desenvolvimento é objetivo deste trabalho.

Desta forma, definem-se aqui as relações do procedimento implícito de integração das tensões, apresentando-se alguns estudos sobre a equação de consistência, muito importante na atualização das variáveis internas. A matriz tangente elastoplástica consistente é derivada a partir da linearização do algoritmo implícito. A aplicação desta matriz no processo de solução do sistema não-linear preserva a taxa de convergência quadrática do método de Newton-Raphson. Por fim, apresenta-se, de forma simplificada, o procedimento incremental-iterativo utilizado na modelagem do comportamento elastoplástico.

5.2 - Relação Constitutiva Elastoplástica

O comportamento elastoplástico tem sua modelagem fundamentada nas seguintes definições:



- Decomposição aditiva das deformações infinitesimais totais;
- Critério de plastificação;
- Lei de evolução das deformações plásticas;
- Lei de evolução do encruamento.

5.2.1 - Decomposição aditiva das deformações infinitesimais totais

Durante um acréscimo de tensão, o acréscimo de deformação total " $d\epsilon$ ", para um material elastoplástico, pode ser expresso em termos dos incrementos infinitesimais de deformação elástica e plástica, como:

$$d\epsilon = d\epsilon^e + d\epsilon^p \quad (5.1)$$

5.2.2 - Critério de plastificação

O critério de plastificação, para um caso mais geral, como apresentado no item 4.4, é uma função do estado de tensão e do encruamento, de tal modo que a plastificação em um ponto fica caracterizada por:

$$F(\sigma, k, \alpha) \geq 0 \quad (5.2)$$

5.2.3 - Lei de evolução das deformações plásticas (Flow Rule)

Segundo ZIENKIEWICZ & TAYLOR (1991), von Mises foi o primeiro a sugerir que a taxa de deformação plástica está



relacionada com a superfície de plastificação. Muitos pesquisadores expõem diversos argumentos para demonstrar a validade da relação proposta, entre eles estão DRUCKER (1951) e NAYAK & ZIENCKIEWICZ (1972). Segundo MESQUITA (1978), a hipótese mais aceita é que:

$$d\varepsilon = d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma} \quad (5.3)$$

onde " $d\lambda$ " é uma constante de proporcionalidade denominada de *multiplicador plástico*, que deve ser determinada para solucionar-se o problema não-linear. Esta relação é definida como *princípio da normalidade*, pois o vetor " $\partial F / \partial \sigma$ " é um vetor de direção normal à superfície de escoamento no ponto referente ao estado de tensão considerado, no espaço das tensões principais, conforme figura 5.1.

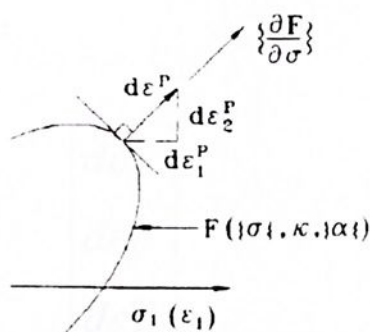


Figura 5.1 - Superfície de Plastificação: princípio da normalidade.

Pode-se tornar menos rígida a restrição imposta à relação (5.3), tomando-se um *potencial plástico* " Q ", com

unidade de tensão, escrito em função do estado de tensão " σ " e das variáveis internas de encruamento " k " e " α ",

$$Q = Q(\sigma, k, \alpha) \quad (5.4)$$

que expresse o incremento infinitesimal de deformação plástica de maneira similar a equação (5.3), conforme é verificado pela equação (5.5).

$$d\varepsilon = d\lambda \frac{dQ}{d\sigma} \quad (5.5)$$

Denomina-se plasticidade associada o caso particular onde " $Q=F$ ". Se tal igualdade não for verificada, a plasticidade é dita não associada. Na dedução da matriz constitutiva elastoplástica adota-se a expressão mais geral, isto é, " $Q \neq F$ ". Desta forma os incrementos infinitesimais de tensão " $d\sigma$ " e das deformações elásticas " $d\varepsilon^e$ " e plásticas " $d\varepsilon^p$ ", podem ser explicitados utilizando-se uma notação vetorial, da seguinte maneira:

$$\underset{\sim}{\sigma} = \begin{Bmatrix} d\sigma_x \\ d\sigma_y \\ d\sigma_z \\ d\tau_x \\ d\tau_y \\ d\tau_z \end{Bmatrix}; \quad \underset{\sim}{d\varepsilon^e} = \begin{Bmatrix} d\varepsilon_x^e \\ d\varepsilon_y^e \\ d\varepsilon_z^e \\ d\gamma_{xy}^e \\ d\gamma_{yz}^e \\ d\gamma_{xz}^e \end{Bmatrix}; \quad \underset{\sim}{d\varepsilon^p} = \begin{Bmatrix} d\varepsilon_x^p \\ d\varepsilon_y^p \\ d\varepsilon_z^p \\ d\gamma_{xy}^p \\ d\gamma_{yz}^p \\ d\gamma_{xz}^p \end{Bmatrix} = d\lambda \begin{Bmatrix} \partial Q / \partial \sigma_x \\ \partial Q / \partial \sigma_y \\ \partial Q / \partial \sigma_z \\ \partial Q / \partial \tau_{xy} \\ \partial Q / \partial \tau_{yz} \\ \partial Q / \partial \tau_{xz} \end{Bmatrix} \quad (5.6)$$

Os incrementos infinitesimais das deformações elásticas relacionados com os diferenciais de tensão por meio de uma matriz simétrica " D ", definida pela lei de Hooke a qual é independente do tempo e da história do carregamento, logo

$$\underset{\sim}{d\varepsilon^e} = \underset{\sim}{D}^{-1} \underset{\sim}{d\sigma} \quad (5.7)$$

Substituindo-se as relações (5.5) e (5.7) na expressão da deformação total (5.1), tem-se:

$$\underset{\sim}{d\varepsilon} = \underset{\sim}{D}^{-1} \underset{\sim}{d\sigma} + d\lambda \underset{\sim}{\frac{\partial Q}{\partial \sigma}} \quad (5.8)$$

Supondo-se que o estado de tensão atual verifique a função de plastificação num processo de carregamento, o ponto representativo do novo estado de tensão deve estar sobre a superfície, logo " $F=0$ " e " $dF=0$ ", que é chamada condição de consistência. Assim, diferenciando-se a equação (5.2), obtém-se que:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \sigma_x} d\sigma_x + \frac{\partial F}{\partial \sigma_y} d\sigma_y + \dots + \frac{\partial F}{\partial \tau_{xz}} d\tau_{xz} + \left(\frac{\partial F}{\partial \alpha} \right)^T \underset{\sim}{d\alpha} + \frac{\partial F}{\partial k} dk = 0 \quad (5.9)$$

ou ainda que:



$$\left(\frac{\partial F}{\partial \sigma} \right)^T d\sigma - d\lambda A = 0 \quad (5.10)$$

onde

$$A = -\frac{1}{d\lambda} \left(\left(\frac{\partial F}{\partial \alpha} \right)^T d\alpha + \frac{\partial F}{\partial k} dk \right) \quad (5.11)$$

As equações (5.8) e (5.10) podem ser agrupadas em uma única expressão matricial como:

$$\begin{Bmatrix} d\varepsilon \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D^{-1} & \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \\ \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma} \right)^T & -A \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\sigma \\ d\lambda \end{Bmatrix} \quad (5.12)$$

ou, ainda mais explicitamente, como

$$\begin{Bmatrix} d\varepsilon_x \\ d\varepsilon_y \\ d\varepsilon_z \\ d\gamma_{xy} \\ d\gamma_{yz} \\ d\gamma_{xz} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D^{-1} & \frac{\partial Q}{\partial \sigma_x} & \frac{\partial Q}{\partial \sigma_y} & \frac{\partial Q}{\partial \sigma_z} & \frac{\partial Q}{\partial \tau_{xy}} & \frac{\partial Q}{\partial \tau_{yz}} & \frac{\partial Q}{\partial \tau_{xz}} \\ \frac{\partial F}{\partial \sigma_x} & \frac{\partial F}{\partial \sigma_y} & \frac{\partial F}{\partial \sigma_z} & \frac{\partial F}{\partial \tau_{xy}} & \frac{\partial F}{\partial \tau_{yz}} & \frac{\partial F}{\partial \tau_{xz}} & -A \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\sigma_x \\ d\sigma_y \\ d\sigma_z \\ d\tau_{xy} \\ d\tau_{yz} \\ d\tau_{xz} \\ d\lambda \end{Bmatrix} \quad (5.13)$$

O multiplicador plástico " $d\lambda$ " pode ser obtido manipulando-se a expressão (5.12). Desta forma, pode-se determinar explicitamente a relação constitutiva elastoplástica que relaciona infinitésimos de tensão com infinitésimos de deformação. Assim, multiplicando-se a primeira das equações de (5.12) por " $(\partial F / \partial \sigma)^T D$ ", obtém-se:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \sigma} \right)^T d\sigma = \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma} \right)^T D d\varepsilon - \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma} \right)^T D \left(\frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right) d\lambda \quad (5.14)$$

Substituindo-se a igualdade (5.14) na segunda equação de (5.12), tem-se:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \sigma} \right)^T D d\varepsilon - \left[\left(\frac{\partial F}{\partial \sigma} \right)^T D \left(\frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right) + A \right] d\lambda = 0 \quad (5.15)$$

de onde pode-se observar que:

$$d\lambda = \frac{\left(\frac{\partial F}{\partial \sigma} \right)^T D d\varepsilon}{\left(\frac{\partial F}{\partial \sigma} \right)^T D \left(\frac{\partial Q}{\partial \sigma} \right) + A} \quad (5.16)$$

Encontrado a expressão para o multiplicador, buscase a relação constitutiva elastoplástica. Substituindo-se



a equação (5.16) na primeira equação de (5.12), escreve-se:

$$\underset{\sim}{d\varepsilon} = \underset{\sim}{D}^{-1} \underset{\sim}{d\sigma} + \left(\underset{\sim}{\frac{\partial Q}{\partial \sigma}} \right) \frac{\left(\underset{\sim}{\frac{\partial F}{\partial \sigma}} \right)^T \underset{\sim}{D} \underset{\sim}{d\varepsilon}}{\left(\underset{\sim}{\frac{\partial F}{\partial \sigma}} \right)^T \underset{\sim}{D} \left(\underset{\sim}{\frac{\partial Q}{\partial \sigma}} \right) + A} \quad (5.17)$$

Explicitando-se o valor de " $\underset{\sim}{d\sigma}$ ", obtém-se:

$$\underset{\sim}{d\sigma} = \underset{\sim}{D} \underset{\sim}{d\varepsilon} - \frac{\underset{\sim}{D} \left(\underset{\sim}{\frac{\partial Q}{\partial \sigma}} \right) \left(\underset{\sim}{\frac{\partial F}{\partial \sigma}} \right)^T \underset{\sim}{D} \underset{\sim}{d\varepsilon}}{\left(\underset{\sim}{\frac{\partial F}{\partial \sigma}} \right)^T \underset{\sim}{D} \left(\underset{\sim}{\frac{\partial Q}{\partial \sigma}} \right) + A} \quad (5.18)$$

Colocando-se em evidência o valor de " $\underset{\sim}{d\varepsilon}$ ", resulta a relação constitutiva elastoplástica procurada:

$$\underset{\sim}{d\sigma} = \underset{\sim}{D_{ep}} \underset{\sim}{d\varepsilon} \quad (5.19)$$

sendo " $\underset{\sim}{D_{ep}}$ " a matriz tangente elastoplástica "clássica" de um material com encruamento misto, expressa por:



$$\underset{\sim}{D}_{ep} = \underset{\sim}{D} - \frac{\underset{\sim}{D} \left(\frac{\partial \underline{Q}}{\partial \underline{\sigma}} \right) \left(\frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}} \right)^T \underset{\sim}{D}}{\left(\frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}} \right)^T \underset{\sim}{D} \left(\frac{\partial \underline{Q}}{\partial \underline{\sigma}} \right) + A} \quad (5.20)$$

Para o caso particular de elasticidade associada, a matriz constitutiva elastoplástica " $\underset{\sim}{D}_{ep}$ " passa a ser:

$$\underset{\sim}{D}_{ep} = \underset{\sim}{D} - \frac{\underset{\sim}{D} \left(\frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}} \right) \left(\frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}} \right)^T \underset{\sim}{D}}{\left(\frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}} \right)^T \underset{\sim}{D} \left(\frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}} \right) + A} \quad (5.21)$$

A matriz tangente elastoplástica " $\underset{\sim}{D}_{ep}$ ", escrita em função da matriz constitutiva para elasticidade linear " $\underset{\sim}{D}$ ", relaciona incrementos infinitesimais de tensão com infinitesimais de deformação, daí a necessidade de uma análise por incrementos sucessivos.

Nos casos de plasticidade não associada, a matriz " $\underset{\sim}{D}_{ep}$ " pode não ser simétrica. Sendo assim, dificuldades serão encontradas quando for utilizado um dos métodos de Newton-Raphson, caracterizado pela atualização da matriz de rigidez. Neste caso, não é possível fazer uso de



técnicas de armazenamentos em banda, muito importantes na redução do processamento computacional, principalmente quando se tratam de problemas não-lineares. Se a plasticidade é associada, pode-se garantir que a matriz em questão é simétrica, como se constata na expressão (5.21).

5.2.4 - Lei de evolução do encruamento

5.2.4.1- Encruamento isotrópico

Este tipo de encruamento é caracterizado pelo aumento da superfície de plastificação sem qualquer translação ou rotação no espaço das tensões, sendo relacionado com o parâmetro " k ". Assim, para um corpo plástico, um infinitésimo " dk " pode ser representado por duas hipóteses, a de encruamento por trabalho (*Work-hardening*) ou ainda a de encruamento por deformação (*Strain-hardening*).

Na hipótese de encruamento por trabalho considera-se que o incremento infinitesimal " dk " é igual a quantidade de trabalho plástico que se dissipa durante a deformação plástica, assim:

$$dk = dW^P = \underset{\sim}{\sigma}^T \underset{\sim}{d\varepsilon}^P = \sigma_x d\varepsilon_x^P + \sigma_y d\varepsilon_y^P + \dots + \tau_{xz} d\gamma_{xz}^P \quad (5.22)$$

de maneira que:

$$k = W^P = \int \underset{\sim}{\sigma}^T \underset{\sim}{d\varepsilon}^P \quad (5.23)$$



Já na hipótese de encruamento por deformação o diferencial "dk" é relacionado com a norma do tensor dos incrementos infinitesimais de deformação plástica, logo tem-se:

$$dk = d\bar{\varepsilon}^P = \bar{K} \left\| d\bar{\varepsilon}^P \right\| = \bar{K} \sqrt{d\varepsilon_x^{P^2} + d\varepsilon_y^{P^2} + d\varepsilon_z^{P^2} + \frac{1}{2} \left(d\gamma_{xy}^{P^2} + d\gamma_{yz}^{P^2} + d\gamma_{xz}^{P^2} \right)} \quad (5.24)$$

desta forma obtém-se:

$$k = \bar{\varepsilon}^P = \int \bar{K} \left\| d\varepsilon^P \right\| \quad (5.25)$$

onde " $d\varepsilon^P$ " é o tensor dos infinitésimos de deformações plásticas, " $\bar{\varepsilon}^P$ " é conhecida como deformação plástica equivalente ou efetiva e " $\bar{K}$ " é uma constante cujo valor deve ser escolhido de tal forma que a partir do modelo generalizado possa-se recuperar o caso unidimensional. Em particular, para um material que obedeça a condição de incompressibilidade, onde estados hidrostáticos não influenciam no processo de plastificação, verificando a seguinte expressão:

$$d\varepsilon_x^P + d\varepsilon_y^P + d\varepsilon_z^P = 0 \quad (5.26)$$

pode ser demonstrado que $\bar{K} = \sqrt{2/3}$. Deve-se notar que, para esses materiais incompressíveis, a equação (5.24) pode também ser escrita em função do tensor dos



infinitésimos de deformações plásticas desviadoras. Assim:

$$dk = d\bar{\epsilon}^P = \sqrt{\frac{2}{3}} \left\| [d\epsilon^P] \right\| = \sqrt{\frac{2}{3}} \left\| [de^P] \right\| \quad (5.27)$$

onde " $[de^P]$ " é o tensor dos infinitésimos de deformações plásticas desviadoras. Pode-se ainda aplicar a equação (5.26), eliminando-se " $d\epsilon_z^P$ " na relação (5.27), escrevendo-se " dk " como:

$$dk = d\bar{\epsilon}^P = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{d\epsilon_x^{P^2} + d\epsilon_y^{P^2} + d\epsilon_x^P d\epsilon_y^P + \frac{1}{4} \left(d\gamma_{xy}^{P^2} + d\gamma_{yz}^{P^2} + d\gamma_{xz}^{P^2} \right)} \quad (5.28)$$

Observa-se que, na determinação do parâmetro " A " definido na equação (5.11), para o caso específico da superfície de plastificação de von Mises, as formulações de *encruamento por trabalho* e *por deformação* coincidem, conforme demonstrado em CRISFIELD (1991).

5.2.4.2- Encruamento cinemático

Neste modelo, admite-se que não ocorram rotações nem alterações de tamanho na superfície de plastificação, sendo esta apenas transladada no espaço das tensões durante o fluxo plástico.

Assume-se como hipótese que a translação da superfície, com relação à origem, se dá segundo a direção do incremento infinitesimal de deformação plástica. Assim, sendo o vetor " α " responsável pela localização do

centro da superfície de plastificação no espaço das tensões, um infinitésimo " $d\alpha$ " pode ser expresso como:

$$\{d\alpha\} = C \{d\varepsilon^p\} \quad (5.29)$$

de forma que:

$$\{\alpha\} = \int C \{d\varepsilon^p\} \quad (5.30)$$

onde " C " pode ser assumido como uma constante do material e para o encruamento puramente cinemático tem-se " $C = K$ ", onde " K " é o módulo plástico para o caso uniaxial, definido na figura 4.6. É importante observar que a evolução das variáveis internas " k " e " $\{\alpha\}$ " é sempre proporcional a evolução da deformação plástica.

5.3 - Abordagem Numérica

O comportamento plástico dos sólidos, descrito de forma sumária nos itens anteriores, é marcado por expressões baseadas em quantidades diferenciais de tensão e deformação. A solução do problema físico exige a integração dessas quantidades diferenciais. Integram-se numericamente as expressões da plasticidade, considerando-se os diferenciais de tensão e deformação como incrementos finitos. Como a situação de equilíbrio não pode ser determinada de forma fechada, algoritmos iterativos devem ser empregados. Neste item, apresenta-se uma abordagem numérica do problema elastoplástico, com o

objetivo de esclarecer os aspectos computacionais envolvidos na solução do problema não-linear. Assim, procurando-se enfatizar a forma incremental das relações, substituem-se os termos diferenciais por termos incrementais representados pelo símbolo " Δ ".

5.3.1 - Particularização do modelo

As expressões para a atualização das variáveis internas, particularizadas para o modelo elastoplástico implementado no elemento finito de chapa, são definidas neste item. Adota-se a superfície de escoamento de von Mises para o estado plano de tensão. Esta superfície, como citado anteriormente, é bastante adequada para o estudo de materiais metálicos.

5.3.1.1 - Critério de plastificação

O critério de plastificação de von Mises pode ser escrito da seguinte forma:

$$F(\underset{\sim}{\sigma}, \underset{\sim}{\alpha}) = f(\underset{\sim}{\sigma}) - \bar{\sigma}(\underset{\sim}{\alpha}) \quad (5.31)$$

onde " $\bar{\sigma}$ " é uma função dependente variável interna responsável pelo encruamento cinemático " α ", podendo ser compreendida como um valor convencional da tensão de escoamento, analogamente ao descrito para o caso uniaxial. Tal função é definida como:

$$\bar{\sigma}(k) = \frac{1}{3} (\sigma_y + Hk)^2 \quad (5.32)$$



sendo " σ_y " a tensão de escoamento inicial e " H " o módulo de encruamento cinemático.

A função escalar " f " pode ser interpretada como uma tensão equivalente (ou associativa) uniaxial, dependendo apenas do estado de tensão. Para o critério de von Mises e estado plano de tensão esta função é apresentada como:

$$f(\underset{\sim}{\sigma}) = \frac{1}{3}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2) = \frac{1}{2} \underset{\sim}{\sigma}^T \underset{\sim}{P} \underset{\sim}{\sigma} \quad (5.33)$$

onde " P " é uma matriz simétrica, de forma que:

$$\underset{\sim}{P} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad (5.34)$$

5.3.1.2 - Deformações plásticas

Os incrementos das deformações plásticas podem ser obtidos, adotando-se uma lei de fluxo associativa, como:

$$\underset{\sim}{\Delta \varepsilon}^P = \begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_x^P \\ \Delta \varepsilon_y^P \\ \Delta \gamma_{xy}^P \end{Bmatrix} = \Delta \lambda \begin{Bmatrix} \partial f / \partial \sigma_x \\ \partial f / \partial \sigma_y \\ \partial f / \partial \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \Delta \lambda \frac{1}{3} \begin{Bmatrix} 2\sigma_x - \sigma_y \\ 2\sigma_y - \sigma_x \\ 6\tau_{xy} \end{Bmatrix} = \Delta \lambda \underset{\sim}{P} \underset{\sim}{\sigma} \quad (5.35)$$

A expressão de atualização das deformações totais em um instante " $t+1$ ", segundo um procedimento implícito, pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\varepsilon^p_{\sim t+1} = \varepsilon^p_{\sim t} + \Delta \varepsilon^p_{\sim t+1} = \varepsilon^p_{\sim t} + \Delta \lambda P \sigma_{\sim t+1} \quad (5.36)$$

onde " $\varepsilon^p_{\sim t}$ " é a deformação plástica acumulada no instante anterior. Cabe ressaltar que o termo instante refere-se, aqui, ao processo iterativo.

5.3.1.3 - Parâmetro de encruamento cinemático

Utilizando a expressão definida para um infinitésimo " $d\alpha$ " na equação (5.29) e aplicando-se a equação (5.35), pode-se escrever para o estado plano de tensão que:

$$\Delta \alpha_{\sim} = C \Delta \varepsilon^p_{\sim} = C \Delta \lambda P \sigma_{\sim} \quad (5.37)$$

De forma semelhante ao descrito para as deformações plásticas, a atualização do parâmetro de encruamento, segundo um procedimento implícito, pode ser expressa por:

$$\alpha_{\sim t+1} = \alpha_{\sim t} + \Delta \alpha_{\sim t+1} = \alpha_{\sim t} + C \Delta \lambda P \sigma_{\sim} \quad (5.38)$$

5.3.1.4 - Tensões

A expressão para atualização de tensões pode ser obtida para a superfície de von Mises. Utilizando-se as relações diferenciais (5.1) e (5.7), escreve-se a



expressão de atualização incremental implícita para as tensões:

$$\sigma_{\sim t+1} = \sigma_{\sim t} + \Delta \sigma_{\sim t+1} = \sigma_{\sim t} + D \begin{pmatrix} \Delta \varepsilon_{\sim t+1} & -\Delta \varepsilon^p_{\sim t+1} \end{pmatrix} \quad (5.39)$$

onde "D" é a matriz constitutiva para materiais isotrópicos em estado plano de tensão, sendo:

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (5.40)$$

Pode-se reescrever a expressão (5.39), definindo-se um estado de tensão de tentativa puramente elástico " $\sigma_{\sim t+1}^{ten}$ ", como:

$$\sigma_{\sim t+1}^{ten} = \sigma_{\sim t} + D \Delta \varepsilon_{\sim t+1} \quad (5.41)$$

Aplicando-se as equações (5.41) e (5.35) em (5.39) tem-se:

$$\sigma_{\sim t+1} = \sigma_{\sim t+1}^{ten} - \Delta \lambda D P \sigma_{\sim t+1} \quad (5.42)$$

Explicitando-se " $\sigma_{\sim t+1}$ " na equação anterior, obtém-se a expressão de atualização implícita das tensões, expressa por:

$$\underset{\sim}{\sigma}_{t+1} = \underset{\sim}{\Xi} \underset{\sim}{D}^{-1} \underset{\sim}{\sigma}_{t+1}^{ten} \quad (5.43)$$

onde " Ξ " é a matriz tangente elástica modificada (algorítmica) segundo SIMO & TAYLOR (1986), de forma que:

$$\underset{\sim}{\Xi} = \left[\underset{\sim}{D}^{-1} + \Delta\lambda \underset{\sim}{P} \right]^{-1} \quad (5.44)$$

5.3.2 - Algoritmo implícito ('Backward Euler')

O procedimento implícito por si só fornece suficiente precisão, evitando a aplicação de técnicas, tais como sub-incrementação, para melhorar o seu desempenho. Segundo JETTEUR (1986), o erro associado a este tipo de algoritmo, para análise em estado plano, é da mesma ordem daqueles encontrados em análises tridimensionais. O procedimento implícito é "incondicionalmente estável", ou seja, é estável independente de que certas condições sejam satisfeitas no passo de tempo; e caracteriza-se, através de uma interpretação geométrica, por proporcionar um retorno à superfície de plastificação segundo a direção normal à própria superfície na posição atual, conforme ilustra a figura 5.2.

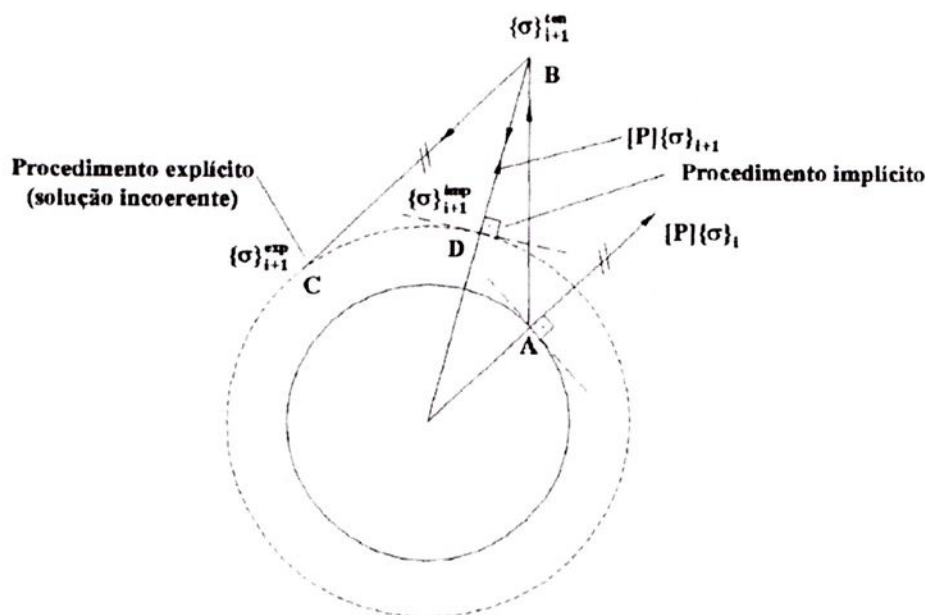


Figura 5.2 - Procedimento de integração implícito e explícito.

Para o caso específico do critério de von Mises com lei de fluxo associativa e encruamento isotrópico, a projeção proporcionada pelo procedimento implícito ocorre sempre na direção radial, sendo por isso denominado "Radial Return Mapping", SIMO & TAYLOR (1985). Segundo SIMO & HUGHES (1988), este procedimento implícito permite a definição de uma matriz tangente elastoplástica consistente, sem a perda de sua simetria, com o algoritmo de retorno. Dessa forma, fazendo-se uso da matriz tangente elastoplástica consistente, a convergência quadrática do método de Newton-Raphson é garantida. As relações do algoritmo implícito, particularizadas para o modelo proposto, podem ser escritas, da seguinte forma:

Deformações totais

$$\varepsilon_{t+1} = \varepsilon_t + \nabla U$$

Deformações plásticas	$\varepsilon_{t+1}^p = \varepsilon_t^p + \Delta \varepsilon_{t+1}^p = \varepsilon_t^p + \Delta \lambda P \sigma_{t+1}$
Tensões	$\sigma_{t+1} = D \left(\varepsilon_{t+1} - \varepsilon_{t+1}^p \right)$
Parâmetro de encruamento	$k_{t+1} = k_t + \Delta k_{t+1} = k_t + \Delta \bar{\varepsilon}_{t+1}^p$
Deformação plástica efetiva	$\Delta \bar{\varepsilon}_{t+1}^p = \frac{2}{\sqrt{3}} \Delta \lambda f_{t+1}^{1/2}$ (5.45)
Lei de encruamento	$\bar{\sigma}(k_{t+1}) = (\sigma_y + H k_{t+1})^2 / 3$
Critério de plastificação	$F(\sigma_{t+1}, k_{t+1}) = f(\sigma_{t+1}) - \bar{\sigma}(k_{t+1}) \leq 0$

onde " ∇ " é o operador de deformações que atua sobre o campo de deslocamentos " U " definido no passo de tempo $[t, t + \Delta t]$.

5.3.2.1 - Integração das tensões

No processo de integração das tensões pelo procedimento implícito, é necessário considerar uma etapa de previsão, que é tomado como um passo puramente elástico, através das seguintes relações:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{t+1} &= \varepsilon_t + \nabla U \\
 \sigma_{t+1}^{ten} &= D \left(\varepsilon_{t+1} - \varepsilon_{t+1}^p \right) \\
 F(\sigma_{t+1}^{ten}, k_t) &= f(\sigma_{t+1}^{ten}) - \bar{\sigma}(k_t)
 \end{aligned}
 \tag{5.46}$$

Se o estado de tensão, obtido na previsão elástica, não violar a condição de plastificação, encontrando-se na superfície de plastificação ou em seu interior, significa que o estado obtido é admissível e compatível com o modelo adotado. Por outro lado, se as tensões obtidas estiverem fora da superfície de plastificação um outro estado de tensão deve ser procurado de modo a se tornar compatível com o modelo adotado. Desta forma tem-se:

$$\begin{aligned}\sigma_{\sim t+1} &= \left[\bar{\varepsilon}(\Delta\lambda) \right]_{\sim} D^{-1} \sigma_{\sim t+1}^{ten} \\ k_{t+1} &= k_t + \Delta k_{t+1} = k_t + \Delta \bar{\varepsilon}_{t+1}^P \\ \varepsilon_{\sim t+1}^P &= \varepsilon_{\sim t}^P + \Delta \varepsilon_{\sim t+1}^P = \varepsilon_{\sim t}^P + \Delta \lambda P \sigma_{\sim \sim t+1}\end{aligned} \quad (5.47)$$

Deve-se observar que as expressões (5.47) dependem da determinação do parâmetro " $\Delta\lambda$ " - multiplicador plástico. Segundo SIMO & TAYLOR (1986), tal parâmetro pode ser obtido aplicando-se condição de consistência no instante " $t+1$ ", ou seja:

$$F\left(\sigma_{\sim t+1}, k_{t+1}\right) = f\left(\sigma(\Delta\lambda)_{\sim t+1}\right) - \bar{\sigma}(k(\Delta\lambda)_{t+1}) = 0 \quad (5.48)$$

Conforme apresentado em SIMO & TAYLOR (1986) e SIMO & HUGHES (1988), para estado plano de tensão com material isotrópico, fazendo uso do critério de von Mises, a expressão (5.48) possui uma forma particularmente simples, expressa como:



$$f(\Delta\lambda) = \frac{1}{2} \left[\frac{(\sigma_x^{ten} + \sigma_y^{ten})^2}{6 \left[1 + \Delta\lambda \left[\frac{E}{3(1-\nu)} \right] \right]} + \frac{(\sigma_x^{ten} - \sigma_y^{ten})^2 + 4(\tau_{xy}^{ten})^2}{2(1 + 2G\Delta\lambda)^2} \right] \quad (5.49)$$

$$\bar{\sigma}(\Delta\lambda) = \frac{1}{3} \left[\sigma_y + H \left[k_t + \Delta\lambda \frac{2}{\sqrt{3}} f^{1/2} \right] \right]^2 \quad (5.50)$$

Tais expressões são encontradas aplicando-se a expressão de atualização das tensões definida em (5.43) ou (5.47-1) na equação que expressa a condição de consistência, equação (5.48). Assim, pode-se resolver tal equação, função apenas do parâmetro $\Delta\lambda$, utilizando-se métodos iterativos para encontrar os "zeros da função", tais como método secante, Newton-Raphson, entre outros. O método utilizado no presente trabalho e o estudo da equação de consistência serão apresentados no item 5.3.3. Para uma melhor compreensão de todo o procedimento implícito aqui discutido, apresenta-se, de forma resumida, os passos do algoritmo na figura 5.3.

1. Atualizar as deformações e calcular as tensões de tentativa

$$\varepsilon_{t+1} = \varepsilon_t + \nabla U$$

$$\sigma_{t+1}^{ten} = D \left(\varepsilon_{t+1} - \varepsilon_t^p \right)$$

2. Verificar o critério de plastificação com as tensões de tentativa

$$F \left(\sigma_{t+1}^{ten}, k_t \right) = f \left(\sigma_{t+1}^{ten} \right) - \bar{\sigma}(k_t)$$

3. Se $F_{t+1}^{ten} \leq 0$

Então: finalizar

Senão: Resolver a equação de consistência e determinar $\Delta\lambda$

$$F \left(\sigma_{t+1}, k_{t+1} \right) = f \left(\sigma_{t+1}(\Delta\lambda) \right) - \bar{\sigma}(k_{t+1}(\Delta\lambda)) = 0$$

4. Atualizar as variáveis internas com o valor de $\Delta\lambda$

$$\sigma_{t+1} = \left[\Xi(\Delta\lambda) \right] D^{-1} \sigma_{t+1}^{ten}$$

$$k_{t+1} = k_t + \Delta k_{t+1} = k_t + \Delta \bar{\varepsilon}_{t+1}^p$$

$$\varepsilon_{t+1}^p = \varepsilon_t^p + \Delta \varepsilon_{t+1}^p = \varepsilon_t^p + \Delta\lambda P \sigma_{t+1}$$

Figura 5.3 - Algoritmo de integração implícito para estado plano de tensão.

5.3.3 - Estudo da condição de consistência

A condição de consistência definida nas equações (5.48), (5.49) e (5.50), para o modelo elastoplástico perfeito, possui um papel importante na atualização das variáveis internas. Através desta condição, obtém-se o valor do multiplicador plástico " $\Delta\lambda$ ". Conhecido o valor de " $\Delta\lambda$ ", encontra-se facilmente o novo estado de tensão compatível com o modelo adotado e conseqüentemente, as deformações plásticas e o parâmetro do encruamento. Para

encontrar " $\Delta\lambda$ ", deve-se resolver a equação de consistência obtendo os "zeros da função" (ou raízes da equação). Contudo, essas raízes não podem ser obtidas analiticamente através de fórmulas explícitas. Assim, torna-se necessário aplicar métodos numéricos iterativos que fornecem soluções suficientemente aproximadas.

Para adotar-se um método numérico, é imprescindível um estudo sobre a função de consistência. Na figura 5.4 apresentam-se gráficos da função de consistência referentes a estados de tentativa elásticos que conduzem a $F_{i+1}^{ten} \leq 0$, estados de tentativa que verificam a equação com a igualdade ($F_{i+1}^{ten} = 0$) e estados de tentativa inadmissíveis ($F_{i+1}^{ten} > 0$).

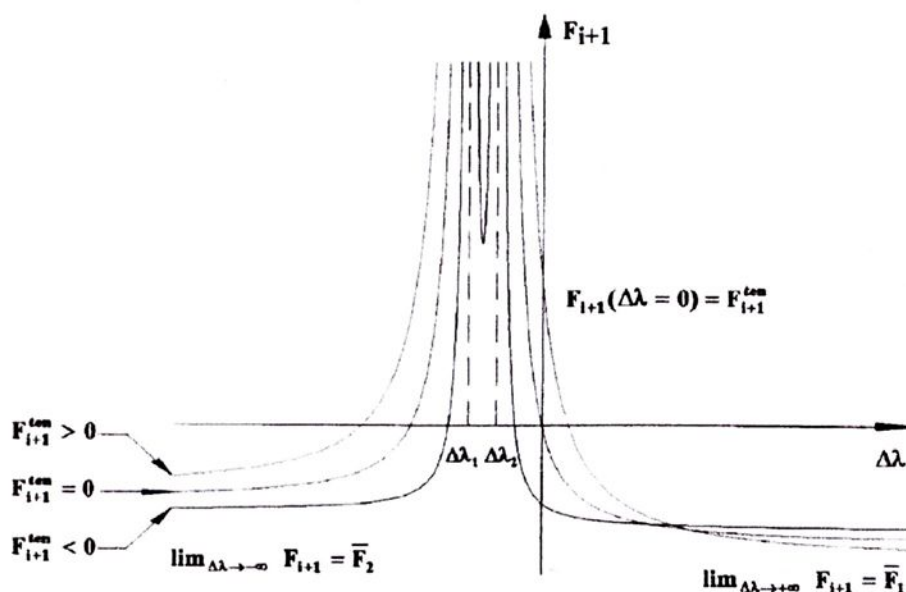


Figura 5.4 - Aspectos da função de consistência.

Observando-se a figura 5.4 é possível caracterizar alguns aspectos importantes da função de consistência. Esta função apresenta dois pontos de singularidade definidos como:

$$\Delta\lambda_1 = -\frac{3(1-\nu)}{E} \quad (5.51)$$

$$\Delta\lambda_2 = -\frac{I}{2G} \quad (5.52)$$

Nota-se que esses pontos de singularidade independem do estado de tensão de tentativa e são sempre valores negativos. Dessa forma, é possível garantir a inexistência de singularidades para o intervalo de interesse, ou seja, para valores de $\Delta\lambda \geq 0$. Um outro aspecto da função, é que esta pode possuir até quatro raízes reais. Todavia, pela característica dos pontos de singularidade serem negativos, esta apresentará no máximo uma raiz positiva. A situação onde todas as raízes são negativas, refere-se apenas aos estados de tentativa elásticos que conduzem a $F_{t+1}^{ten} \leq 0$. Para estados de tentativa que conduzam a valores de $F_{t+1}^{ten} = 0$, existe apenas uma raiz real no intervalo de $[0, +\infty)$, que é exatamente $\Delta\lambda = 0$. Para estas duas situações, anteriormente descritas, não é necessário resolver a equação de consistência, pois o estado procurado é exatamente o estado de tentativa elástica independente do multiplicador plástico. Desta forma, pode-se concluir que para o intervalo de interesse existe no máximo uma raiz real para a função de consistência. Esta raiz é definida nas situações onde as tensões de tentativa elásticas conduzem a um estado de tensões inadmissível ($F_{t+1}^{ten} > 0$). Pode-se ainda calcular os limites da função de consistência para " $\Delta\lambda \rightarrow +\infty$ " e " $\Delta\lambda \rightarrow -\infty$ ", expressos como:

$$\bar{F}_1 = \lim_{\Delta\lambda \rightarrow +\infty} F_{t+1} = -\frac{1}{3} \left[\sigma_y + H \left[k_t + \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{(\sigma_x^{ten} + \sigma_y^{ten})^2}{12 \left[\frac{E}{3(1-\nu)} \right]^2} + \frac{(\sigma_x^{ten} - \sigma_y^{ten})^2 + 4(\tau_{xy}^{ten})^2}{16G^2}} \right] \right]^2 \quad (5.53)$$

$$\bar{F}_1 = \lim_{\Delta\lambda \rightarrow -\infty} F_{t+1} = -\frac{1}{3} \left[\sigma_y + H \left[k_t + \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{(\sigma_x^{ten} + \sigma_y^{ten})^2}{12 \left[\frac{E}{3(1-\nu)} \right]^2} + \frac{(\sigma_x^{ten} - \sigma_y^{ten})^2 + 4(\tau_{xy}^{ten})^2}{16G^2}} \right] \right]^2 \quad (5.54)$$

Observando-se as equações (5.53) e (5.54) e a figura 5.4, conclui-se que a função apresenta um comportamento assintótico para os valores negativos " $\bar{F}_1$ " e " $\bar{F}_2$ " quando " $\Delta\lambda$ " tende a " $+\infty$ " e " $-\infty$ ", respectivamente. Analisando-se as características da função de consistência, ressaltando-se a inexistência de singularidades no intervalo de $[0, +\infty)$, propõe-se o método iterativo de Newton-Raphson para encontrar a raiz de interesse. Esse método possui uma taxa de convergência quadrática. Além disso, não é necessário definir um intervalo, apenas uma aproximação inicial para a raiz. A idéia básica para aplicação deste método, é partir de uma aproximação inicial " $\Delta\lambda_0$ " para a raiz e, através de um processo iterativo, refinar a aproximação. O refinamento consiste em calcular a interseção da tangente (no ponto $\Delta\lambda_k$) com o eixo das abscissas encontrando uma nova aproximação " $\Delta\lambda_{k+1}$ " para a raiz. Este processo é repetido até que a resposta atinja a precisão desejada. Na figura 5.5 é possível interpretar melhor o procedimento descrito.

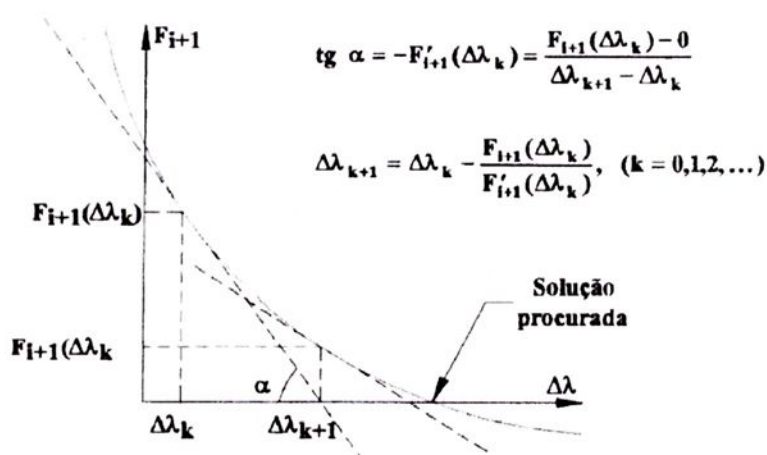


Figura 5.5 - Interpretação geométrica do método de Newton-Raphson.

Na figura 5.5, a expressão para " $\Delta\lambda_{k+1}$ " do método iterativo de Newton-Raphson é apresentada. Deve-se ressaltar a importância da escolha da aproximação inicial " $\Delta\lambda_0$ ". Se forem adotados valores iniciais maiores que a raiz procurada o método poderá fornecer uma das soluções negativas, figura 5.6(a) ou até mesmo entrar em um processo de "looping", figura 5.6(b). Desta forma, como não se conhece a solução do problema, a aproximação inicial mais confiável é $\Delta\lambda_0 = 0$.

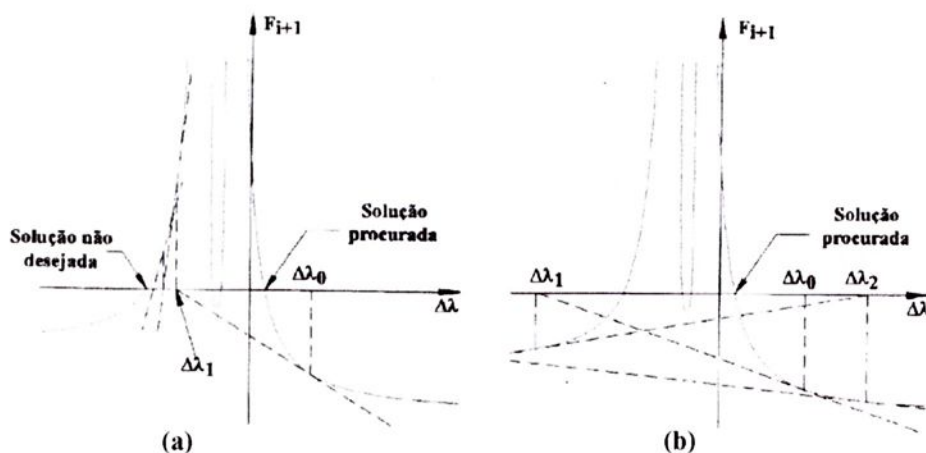


Figura 5.6 - Divergência do método de Newton-Raphson.

Na figura 5.7 apresenta-se o algoritmo de Newton-Raphson para o caso específico da função de consistência utilizada neste trabalho.

1. Aproximação inicial e tolerância

$$\Delta\lambda_0 = 0, \quad \text{Tolerância} = \chi$$

1. Definir constantes

$$\begin{aligned} C_1 &= (\sigma_x^{ten} + \sigma_y^{ten})^2 & C_4 &= 2G \\ C_2 &= (\sigma_x^{ten} - \sigma_y^{ten})^2 + 4(\tau_{xy}^{ten})^2 & C_5 &= \sigma_y + Hk_t \\ C_3 &= \frac{E}{3(1-\nu)} & C_6 &= \frac{2}{\sqrt{3}}H \end{aligned}$$

2. Calcular F no ponto $\Delta\lambda_0$

$$\begin{aligned} f &= \frac{1}{2} \left[\frac{C_1}{6(1 + \Delta\lambda_0 C_3)^2} + \frac{C_2}{2(1 + \Delta\lambda_0 C_4)^2} \right] \\ \bar{\sigma} &= \frac{1}{3} [C_5 + \Delta\lambda_0 f^{1/2} C_6]^2 \\ F &= f - \bar{\sigma} \end{aligned}$$

3. Se $|F(\Delta\lambda_0)| < \chi$

Então: finalizar ($\Delta\lambda_0$ é a solução)

Senão: Faça

3.1. Calcular a derivada de F no ponto $\Delta\lambda_0$

$$\begin{aligned} f' &= \frac{1}{2} \left[\frac{C_1 C_3}{6(1 + \Delta\lambda_0 C_3)^2} + \frac{C_2 C_4}{2(1 + \Delta\lambda_0 C_4)^2} \right] \\ \bar{\sigma}' &= \frac{1}{3} C_6 \left[2C_5 \sqrt{f} + \frac{1}{\sqrt{f}} C_5 f' \Delta\lambda_0 + 2C_6 f \Delta\lambda_0 + C_6 f' \Delta\lambda_0^2 \right] \\ F' &= f' - \bar{\sigma}' \end{aligned}$$

3.2. Calcular a nova aproximação $\Delta\lambda_1$

$$\Delta\lambda_1 = \Delta\lambda_0 - \frac{F}{F'}$$

4.3 Calcular F no ponto $\Delta\lambda_1$

$$f = \frac{I}{2} \left[\frac{C_1}{6(1 + \Delta\lambda_1 C_3)^2} + \frac{C_2}{2(1 + \Delta\lambda_1 C_4)^2} \right]$$

$$\bar{\sigma} = \frac{I}{3} [C_5 + \Delta\lambda_1 f^{1/2} C_6]$$

$$F = f - \bar{\sigma}$$

4.4 Se $|F(\Delta\lambda_1)| < \chi$ e $|\Delta\lambda_1 - \Delta\lambda_0| < \chi$

Então: finalizar ($\Delta\lambda_1$ é a solução).

Senão: Faça $\Delta\lambda_0 = \Delta\lambda_1$ e volte ao passo 4.1.

Figura 5.7 - Algoritmo de Newton-Raphson específico para a equação de consistência.

5.3.4 - Matriz tangente elastoplástica consistente

A derivação da matriz tangente elastoplástica consistente (ou algorítmica) pode ser encontrada em RUNESSON & SAMUELSSON (1985), SIMO & TAYLOR (1986), SIMO & HUGHES (1988) e CRISFIELD (1991). Esta matriz é consistente com o algoritmo de integração implícito (backward Euler) e, segundo SIMO & TAYLOR (1986), a aplicação desta preserva a característica de convergência quadrática do método de Newton-Raphson. Técnicas padrão podem utilizar a matriz tangente elastoplástica clássica em (5.21), que é inconsistente (hipótese eliminada se o tamanho do incremento for infinitesimal) com o procedimento de integração implícito, provocando a perda da característica de convergência quadrática do Método de Newton-Raphson, CRISFIELD (1991). A expressão da matriz tangente elastoplástica consistente pode ser obtida

através da linearização do algoritmo implícito. As expressões de atualização das tensões e do encruamento podem ser escritas como:

$$\sigma_{\sim i+1} = D \left(\varepsilon_{\sim i+1} - \varepsilon_{\sim i}^p - \Delta\lambda P \sigma_{\sim i+1} \right) \quad (5.55)$$

$$k_{i+1} = k_i + \frac{2}{\sqrt{3}} \Delta f_{i+1}^{1/2} \quad (5.56)$$

Escrevendo-se os diferenciais das equações do algoritmo implícito (5.55) e (5.56), para um instante "i+1", obtém-se:

$$\Delta\sigma_{\sim i+1} = D \Delta\varepsilon_{\sim i+1} - d\lambda D P \sigma_{\sim i+1} - \Delta\lambda D P \Delta\sigma_{\sim i+1} \quad (5.57)$$

$$\Delta k_{i+1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(d\lambda f_{i+1}^{1/2} + \Delta\lambda \left(\frac{\partial(f^{1/2})}{\partial\sigma} \right)^T_{\sim i+1} \Delta\sigma_{\sim i+1} \right) \quad (5.58)$$

onde " $\Delta\lambda$ " foi escrito como " $d\lambda$ " e representa a variação do próprio multiplicador plástico na iteração estudada. Deve-se notar que o último termo em (5.57) é omitido na obtenção da matriz tangente elastoplástica, equação (5.8). O segundo termo diferencial da equação (5.58) pode ser expresso como:

$$\left(\frac{\partial(f^{1/2})}{\partial \sigma} \right)_{i+1}^T \Delta \sigma_{i+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial \sqrt{\sigma^T P \sigma}}{\partial \sigma} \right)_{i+1}^T \Delta \sigma_{i+1} = \frac{1}{2f_{i+1}^{1/2}} \sigma_{i+1}^T P \Delta \sigma_{i+1} \quad (5.59)$$

Aplicando-se a equação (5.59) em (5.58) e explicitando-se o valor de $\Delta \sigma_{i+1}$ na expressão (5.57), obtém-se:

$$\Delta \sigma_{i+1} = \Xi \left(\Delta \varepsilon_{i+1} - d\lambda P \sigma_{i+1} \right) \quad (5.60)$$

$$\Delta k_{i+1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(d\lambda f_{i+1}^{1/2} + \Delta \lambda \frac{l}{2f_{i+1}^{1/2}} \sigma_{i+1}^T P \Delta \sigma_{i+1} \right) \quad (5.61)$$

onde " Ξ " é a matriz tangente elástica modificada (algorítmica), definida em (5.44). Diferenciando-se a condição de consistência plástica expressa em (5.48), no instante " $i+1$ " tem-se:

$$\Delta F_{i+1} = \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)_{i+1}^T \Delta \sigma_{i+1} - \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial k} \Big|_{i+1} \Delta k_{i+1} = 0 \quad (5.62)$$

$$\Delta F_{i+1} = \sigma_{i+1}^T P \Delta \sigma_{i+1} - \frac{2}{\sqrt{3}} H \bar{\sigma}_{i+1}^{1/2} \Delta k_{i+1} = \sigma_{i+1}^T P \Delta \sigma_{i+1} - \frac{2}{\sqrt{3}} H f_{i+1}^{1/2} \Delta k_{i+1} = 0 \quad (5.63)$$

Pode-se explicitar o escalar " $d\lambda$ " substituindo as expressões de " $\Delta \sigma_{i+1}$ " e " Δk_{i+1} " apresentadas

respectivamente nas equações (5.60) e (5.61) na equação (5.63), de maneira que:

$$d\lambda = \frac{\sigma_{\sim i+1}^T P \Xi \Delta \varepsilon_{\sim i+1}}{\sigma_{\sim i+1}^T P \Xi P \sigma_{\sim i+1} + A} \quad (5.64)$$

onde **A** é definido como:

$$A = \frac{4Hf_{i+1}}{3 - 2H\Delta\lambda} \quad (5.65)$$

Substituindo-se o valor de " $d\lambda$ " encontrado em (5.64) na expressão (5.60), obtém-se a seguinte relação entre o incremento de tensão " $\Delta\sigma_{\sim i+1}$ " e o incremento de deformação " $\Delta\varepsilon_{\sim i+1}$ ",

$$\Delta\sigma_{\sim i+1} = D_{\sim epc} \Delta\varepsilon_{\sim i+1} \quad (5.66)$$

onde " $D_{\sim epc}$ " é a matriz tangente elastoplástica consistente expressa como:

$$D_{\sim epc} = \Xi - \frac{\Xi P \sigma_{\sim i+1} \sigma_{\sim i+1}^T P \Xi^T}{\sigma_{\sim i+1}^T P \Xi P \sigma_{\sim i+1} + A} \quad (5.67)$$

Deve-se notar que, quando o incremento da carregamento tende a zero, o parâmetro " $\Delta\lambda$ " também tende

a zero, de maneira que a matriz algébrica " Ξ " apresentada na equação (5.44) se degenera na matriz constitutiva elástica " D ". Dessa forma, a matriz tangente elastoplástica consistente " D_{epc} " definida na expressão (5.67) reduz-se à matriz tangente elastoplástica clássica " D_{ep} " apresentada na equação (5.21). Segundo SIMO & HUGHES (1988) esta característica, apresentada pela matriz " D_{epc} ", expressa o requerimento de consistência.

5.3.5 - Procedimento incremental-iterativo

Conforme já comentado, em um material com comportamento elastoplástico, a relação constitutiva expressa em forma diferencial conduz à necessidade de uma análise por incrementos sucessivos. Entretanto, em uma simulação numérica, só é possível aplicar incrementos de carregamento finitos e não infinitesimais. Conseqüentemente, um erro de aproximação é cometido. Pode-se reduzir este erro, reaplicando-se, através de um processo iterativo, o resíduo de forças sobre a estrutura, de maneira que o equilíbrio seja novamente estabelecido. Este procedimento, conhecido como incremental-iterativo, será aqui descrito de forma sucinta, nos passos a seguir.

Inicialmente, admitem-se conhecidas, no final de um instante (passo de carregamento) " t ", as componentes de tensão " σ^t ", as componentes de deformação " ε^t ", a variável interna " k^t " responsável pelo encruamento e os



deslocamentos nodais " δ^t ". Ressalta-se que os índices " i " e " t " referem-se, respectivamente, ao processo iterativo e incremental.

Passo 1 - Início de um novo incremento de carregamento (instante $t + \Delta t$):

$$\underset{\sim}{F}^{t+\Delta t} = \underset{\sim}{F}^t + \underset{\sim}{\Delta F}^{t+\Delta t} \quad (5.68)$$

Passo 2 - Cálculo dos deslocamentos nodais:

Em cada iteração assume-se um comportamento linear. Assim, os deslocamentos são obtidos pela aplicação da matriz de rigidez tangente, da seguinte forma:

$$\underset{\sim}{\Delta \delta}^{t+\Delta t}_i = \underset{\sim}{K}^{-1(t+\Delta t)} \underset{\sim}{\Delta F}^{t+\Delta t} \quad (5.69)$$

$$\underset{\sim}{\delta}^{t+\Delta t}_i = \underset{\sim}{\delta}^t + \underset{\sim}{\Delta \delta}^{t+\Delta t}_i \quad (5.70)$$

onde " $\underset{\sim}{\Delta F}^{t+\Delta t}$ " e " $\underset{\sim}{\Delta \delta}^{t+\Delta t}$ " são os incrementos de força e os incrementos de deslocamentos nodais referentes ao instante " $t + \Delta t$ ", respectivamente. Na primeira iteração, este incremento de força pode ser aplicado juntamente com o resíduo de forças final do incremento anterior, melhorando a precisão no equilíbrio de forças. A matriz de rigidez tangente " $\underset{\sim}{K}^{t+\Delta t}$ " é expressa como:

$$K_{\sim i+1}^{I+\Delta I} = \int_{V \sim} B^T D_{\sim epe(i)}^{I+\Delta I} B dV \quad (5.71)$$

onde " $D_{\sim epe(i)}^{I+\Delta I}$ " é a matriz tangente elastoplástica consiste com o procedimento implícito de integração das tensões, apresentada em (5.67). Deve-se notar que a matriz tangente é sempre atualizada, correspondendo ao método de Newton-Raphson clássico. Porém, a atualização poderia não ser freqüente, caracterizando o método de Newton-Raphson modificado.

Passo 3 - Cálculo das deformações:

As deformações são calculadas nos pontos de Gauss distribuídos ao longo da área e da espessura do elemento e são relacionadas com os deslocamentos através da matriz da deformação " B ", da seguinte forma:

$$\varepsilon_{\sim i}^{I+\Delta I} = B_{\sim i} \delta_{\sim i}^{I+\Delta I} \quad (5.72)$$

Passo 4 - Cálculo das tensões:

Semelhantemente as deformações, calculam-se as tensões nos pontos de Gauss, através do algoritmo de integração implícito, apresentado na figura 5.3.

$$\sigma_{\sim i}^{I+\Delta I} = \sigma_{\sim i}^I + \int_I^{I+\Delta I} d\sigma_{\sim i} \quad (5.73)$$



Passo 5 - Cálculo das forças internas:

As forças internas de um elemento finito são obtidas através da integração numérica das tensões em todo o volume do elemento. Posteriormente, estas forças são transferidas para as coordenadas globais e distribuídas em um vetor nas posições dos respectivos graus de liberdade.

$$R_{\sim i}^{t+\Delta t} = \int_{V \sim} B^T \sigma_{\sim i}^{t+\Delta t} dV \quad (5.74)$$

onde " $R_{\sim i}^{t+\Delta t}$ " é o vetor de forças nodais equivalentes (forças internas), geradas pelo estado de tensão interno.

Passo 6 - Cálculo do resíduo de forças:

$$\Psi_{\sim i}^{t+\Delta t} = F_{\sim}^{t+\Delta t} - R_{\sim i}^{t+\Delta t} \quad (5.75)$$

Passo 7 - Verificação da convergência:

O critério de convergência verifica se a solução considerada é suficientemente precisa. Este pode ser expresso basicamente de duas maneiras:

$$\text{Convergência em força} \quad \frac{\|\Psi_{\sim i}^{t+\Delta t}\|}{\|\Delta F_{\sim i}^{t+\Delta t}\|} \leq e_f \quad (5.76)$$

$$\text{Convergência em deslocamento} \quad \frac{\left\| \underset{\sim i}{\delta^{t+\Delta t}} - \underset{\sim i-1}{\delta^{t+\Delta t}} \right\|}{\left\| \underset{\sim 1}{\delta^{t+\Delta t}} \right\|} \leq e_d \quad (5.77)$$

onde os termos " e_f " e " e_d " referem-se a tolerância em força e em deslocamento respectivamente.

Verifica-se a convergência, retorna-se ao **passo 1**, dando início a um novo incremento de carregamento. Caso contrário, retorna-se ao **passo 2**, substituindo-se apenas o incremento de forças " $\underset{\sim i}{\Delta F^{t+\Delta t}}$ " em (5.69), pelo resíduo de forças " $\underset{\sim i}{\Psi^{t+\Delta t}}$ ", caracterizando assim, o processo iterativo.

A estratégia de solução anteriormente apresentada, pode ser melhor compreendida através dos diagramas carregamento-deslocamento e tensão-deformação (adotando-se uma lei qualquer) para o caso unidimensional, apresentados na figura 5.8.

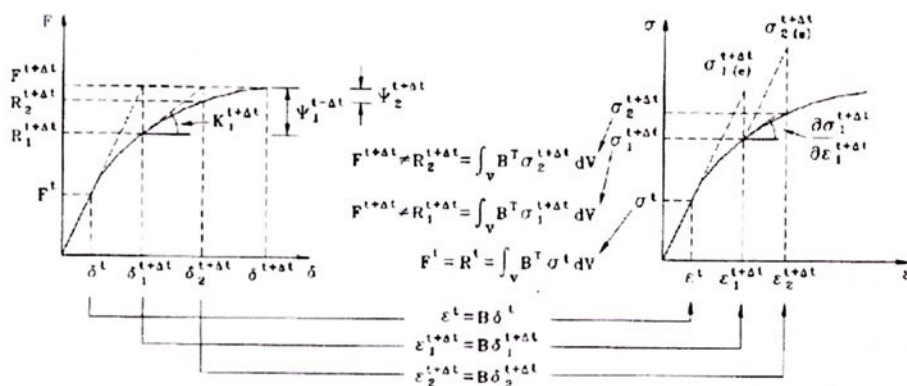


Figura 5.8 - Estratégia de solução incremental-iterativa (caso unidimensional).

CAPÍTULO 6 - ANÁLISE NUMÉRICA

6.1 - Generalidades

Conforme exposto na apresentação deste trabalho, este capítulo tem a finalidade de apresentar, a partir de alguns exemplos elucidativos, uma análise do comportamento estático e dinâmico de chapas de aço, considerando-se a não-linearidade física, efetuando-se assim uma análise quantitativa e qualitativa dos resultados obtidos.

Na resolução de tais exemplos utiliza-se o programa computacional "DINCHPNF", para análise estática e dinâmica; e o programa "CHAPAAUT", para a obtenção das frequências naturais e dos modos de vibração.

6.2 - Exemplos

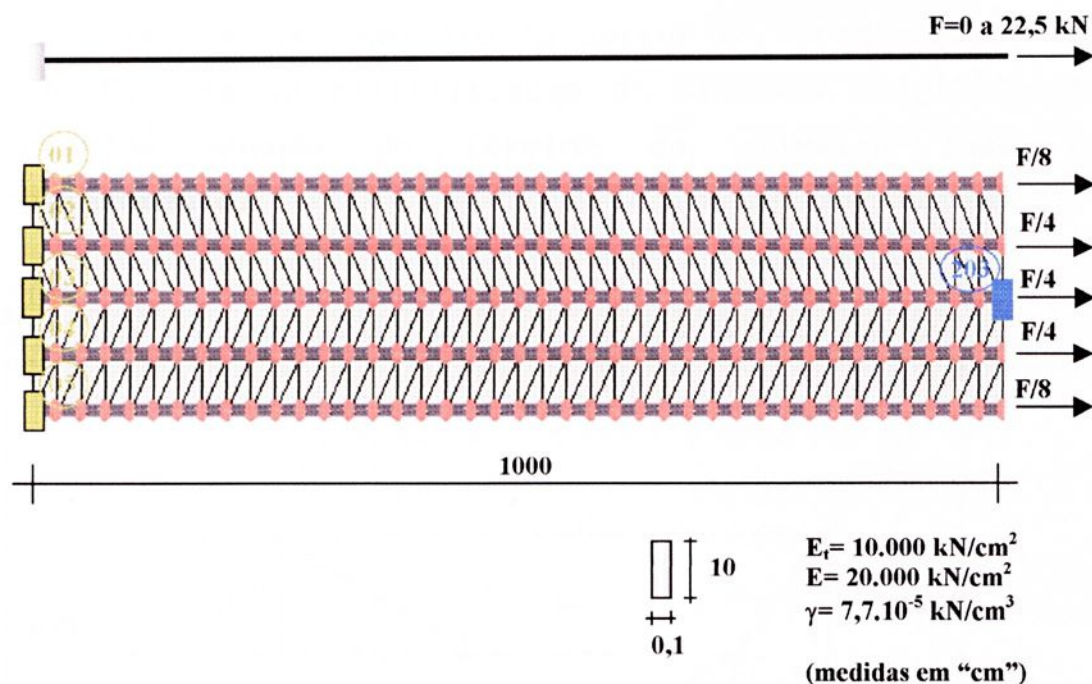
6.2.1 - Exemplo 01

A estrutura desse exemplo é composta de uma chapa (viga) engastada em uma das extremidades, solicitada por uma força concentrada, na extremidade do balanço, aplicada de forma incremental em quatro fases. O sistema estrutural é discretizado por elementos finitos triangulares (CST), conforme mostra a figura 6.1.



Progr. : DINCHPNF
Versão : 01/00

Projeto : 001
Chapa : 004



Plano X Y / Inter. Tempo : 1

ENTER para Sair

Figura 6.1- Viga em balanço.

A análise estática considerando-se a não-linearidade física é feita adotando-se um procedimento incremental, no qual o carregamento é dividido em quatro fases distintas, com a mesma quantidade de incrementos. A figura 6.2 ilustra o gráfico deslocamento x força, analisando-se o nó 203. Na primeira etapa, o carregamento varia de 0,0 kN a 15,0 kN, com plastificação do material. Já na segunda etapa, o carregamento varia de 15,0 kN a 0,0 kN, simulando o descarregamento completo da estrutura, apresentando também plastificação do material e deformação residual. Na terceira etapa, o carregamento varia novamente de 0,0 kN a 15,0 kN, simulando o recarregamento completo da estrutura, apresentando também plastificação do material, provocando o retorno da

estrutura à sua posição original antes do descarregamento. Finalmente, na quarta etapa, o carregamento varia de 15,0 kN a 22,5 kN, simulando o acréscimo de carregamento da estrutura, apresentando uma continuidade da plastificação do material originalmente atingida quando do término da primeira fase de carregamento.

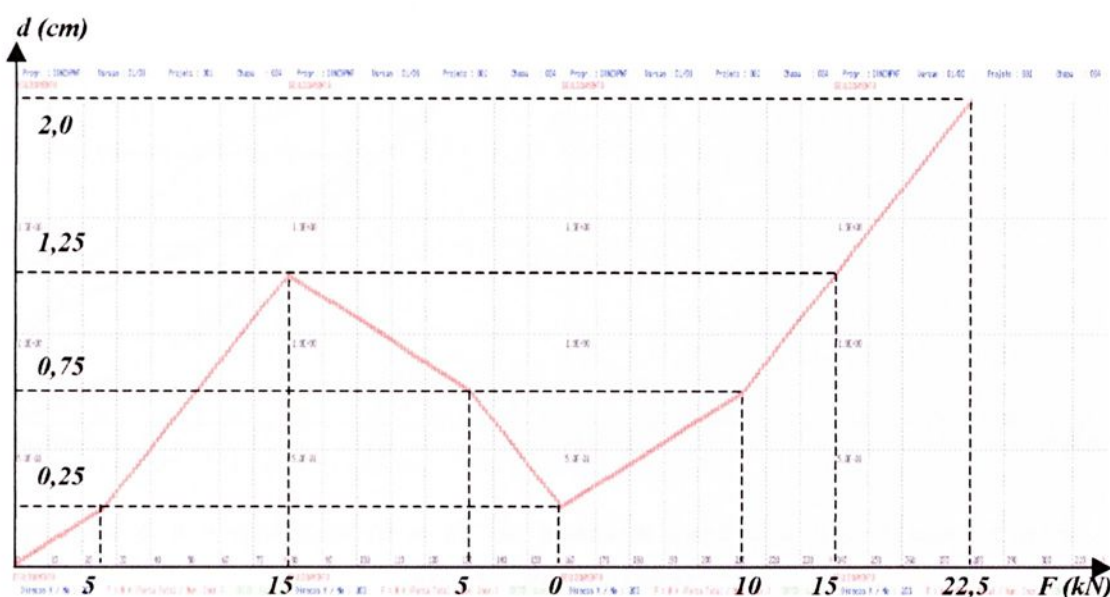


Figura 6.2 - Gráfico ($d \times f$) da análise estática não-linear física do nó 203, na direção global y .

A figura 6.3 refere-se ao comportamento estrutural relatado anteriormente, apresentando uma melhor visualização do efeito Bauschinger relativo ao comportamento cinemático do modelo numérico aproximado aqui proposto.

Como se trata de exemplo unidimensional, pode-se facilmente obter os resultados apresentados utilizando os conceitos elementares da Mecânica dos Sólidos Deformáveis, com o intuito de comparar os resultados e testar a validade do modelo numérico aqui proposto.

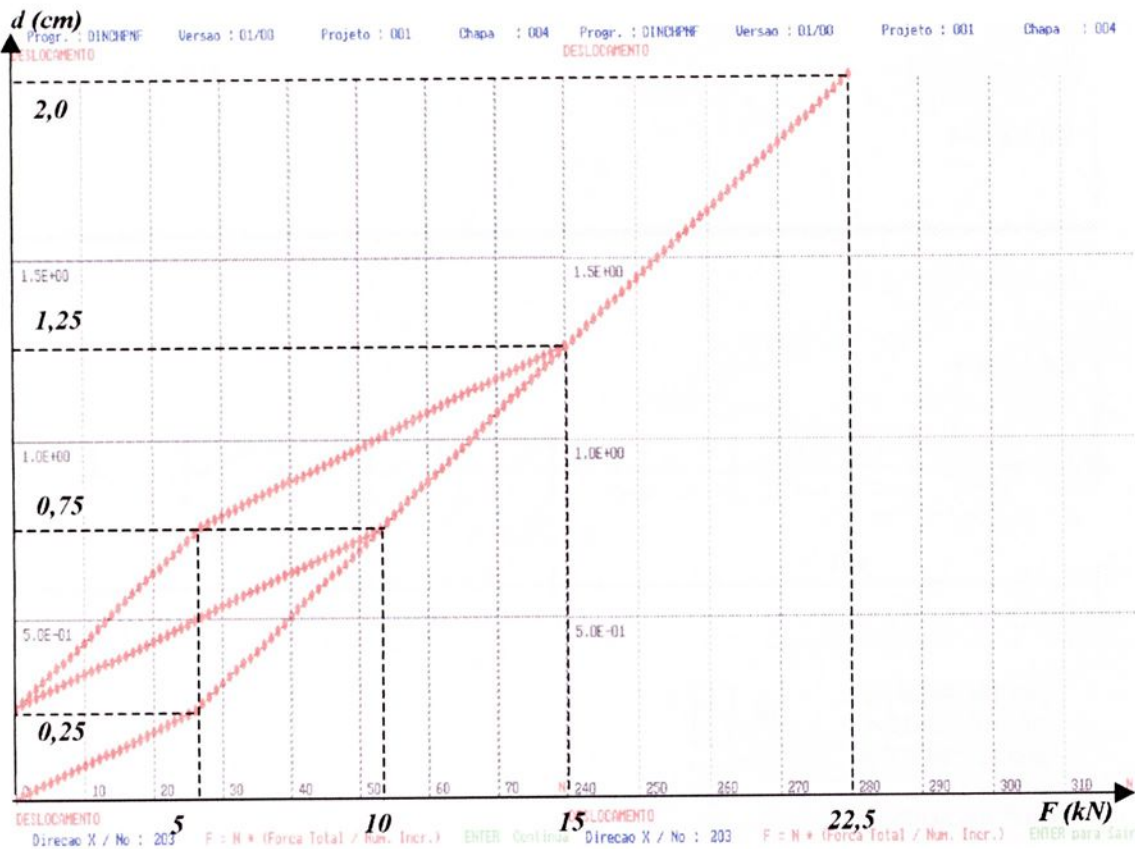


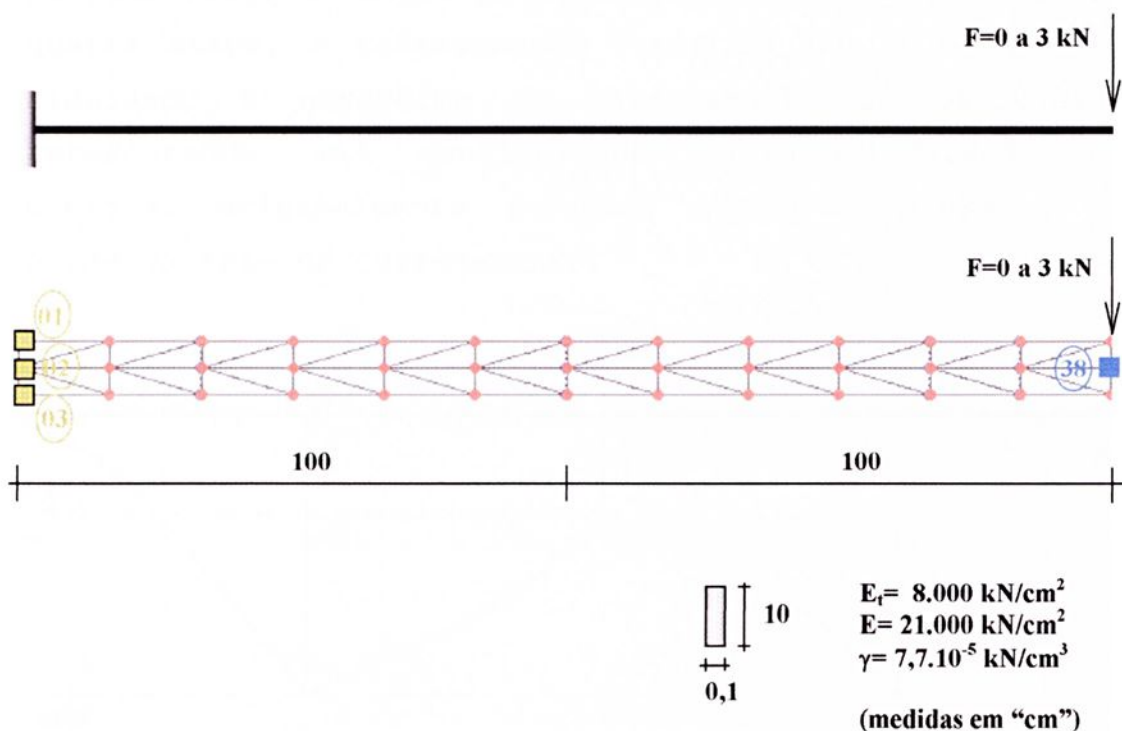
Figura 6.3 - Gráfico ($d \times f$) da análise estática não-linear física.
Efeito Bauschinger.

6.2.2 - Exemplo 02

A estrutura desse exemplo é composta de uma chapa engastada em uma das extremidades, solicitada por uma força concentrada, na extremidade do balanço, aplicada de forma incremental em quatro fases. O sistema estrutural é discretizado por elementos finitos triangulares (CST), conforme mostra a figura 6.4.

Progr. : DINCHPNF
Versão : 01/00

Projeto : 002
Chapa : 003



Plano X Y / Inter. Tempo : 400

ENTER para Sair

Figura 6.4 - Viga em balanço.

No exemplo, a análise estática considerando-se a não-linearidade física é feita adotando-se um procedimento incremental, no qual o carregamento é dividido em quatro fases distintas, com a mesma quantidade de incrementos.

A figura 6.5 ilustra o gráfico deslocamento x força, analisando-se o nó 38. Na primeira etapa, o carregamento varia de 0,0 kN a 2,0 kN, com plastificação do material. Já na segunda etapa, o carregamento varia de 2,0 kN a 0,0 kN, simulando o descarregamento completo da estrutura, apresentando também plastificação do material e deformação residual. Na terceira etapa, o carregamento varia de 0,0 kN a 2,0 kN, simulando o recarregamento

completo da estrutura, apresentando também plastificação do material, provocando o retorno da estrutura à sua posição original antes do descarregamento. Finalmente, na quarta etapa, o carregamento varia de 2,0 kN a 3,0 kN, simulando o acréscimo de carregamento da estrutura, apresentando uma continuidade da plastificação do material originalmente atingida quando do término da primeira fase de carregamento.

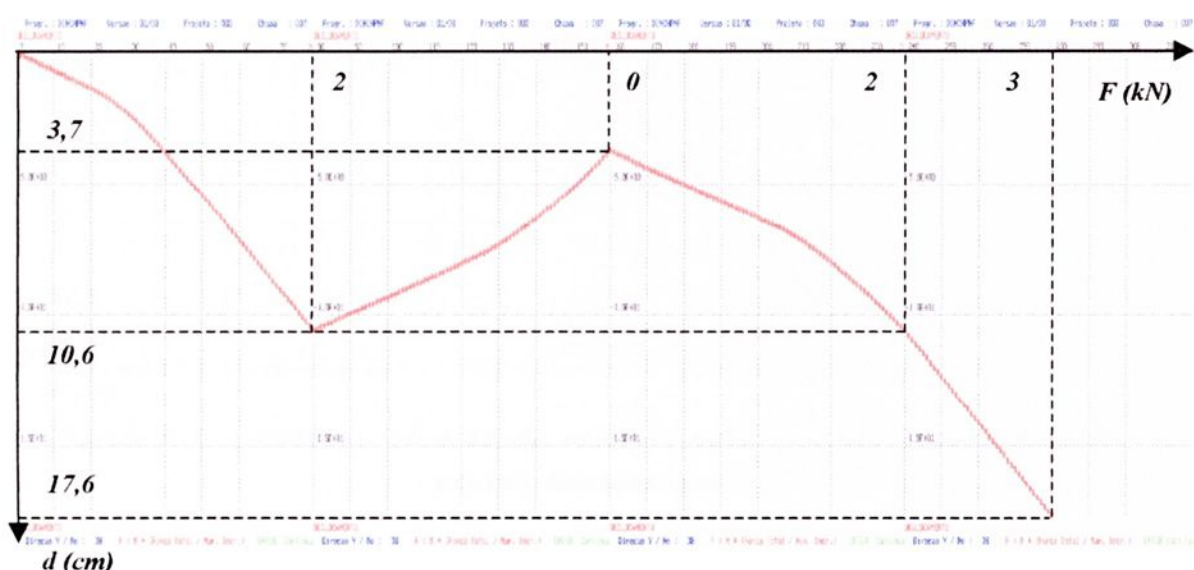


Figura 6.5 – Gráfico ($d \times f$) da análise estática não-linear física do nó 38, na direção global y.

Para uma melhor visualização do comportamento estrutural relatado anteriormente, apresenta-se a figura 6.6 que ilustra o efeito Bauschinger relativo ao comportamento cinemático do modelo numérico aproximado aqui proposto.

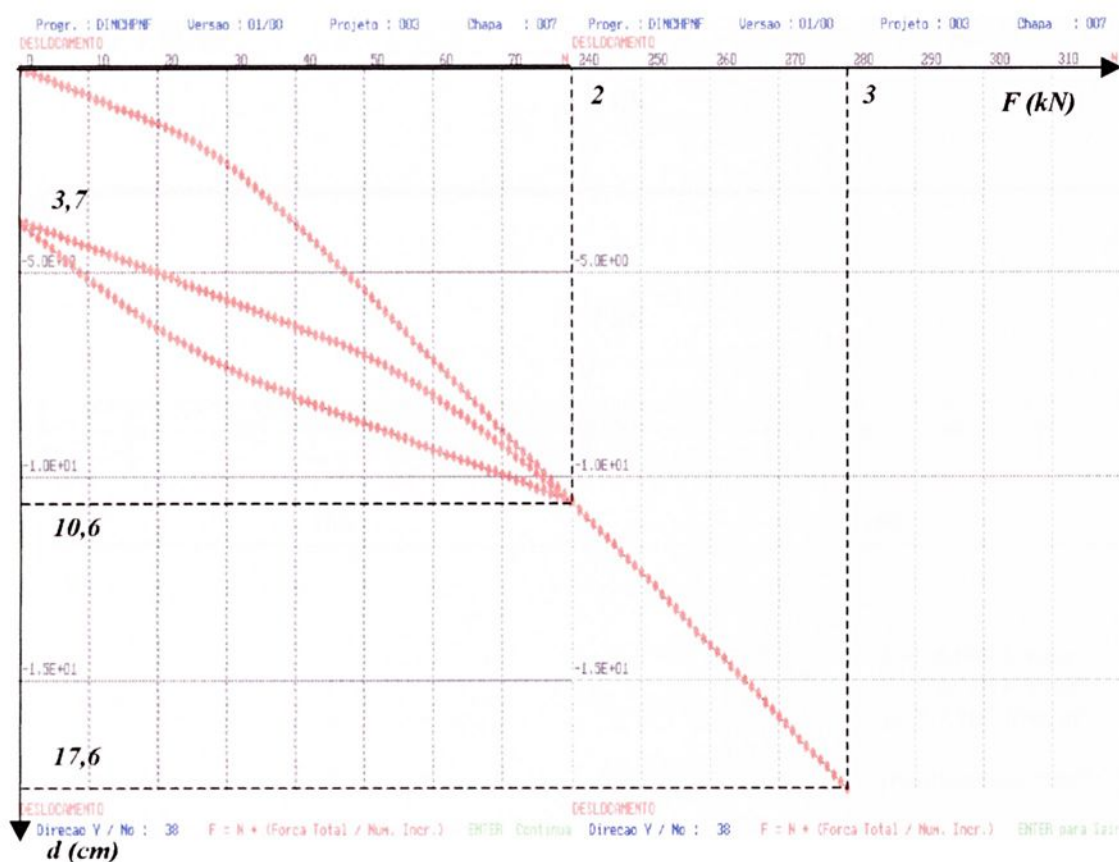


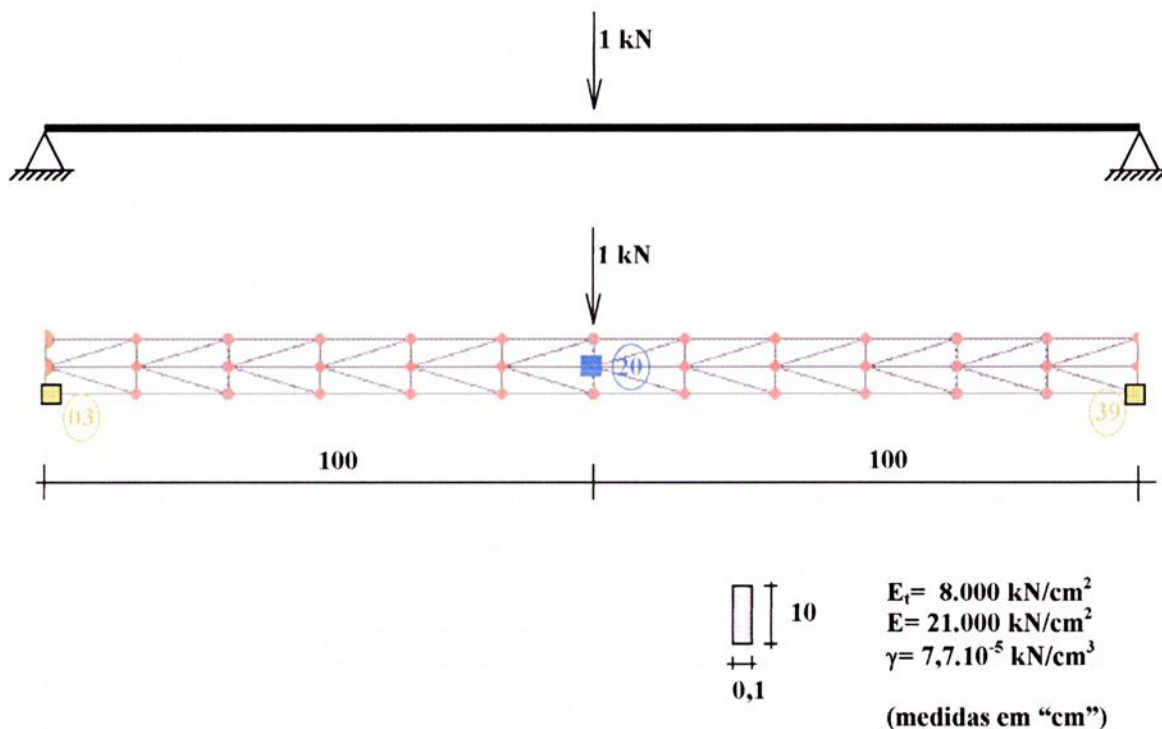
Figura 6.6 - Gráfico (d x f) da análise estática não-linear física. Efeito Bauschinger.

6.2.3 - Exemplo 03

A estrutura desse exemplo é uma viga biapoiada, solicitada por uma força concentrada no meio do vão e discretizada por elementos finitos triangulares (CST), conforme mostra a figura 6.7.

Progr. : DINCHPNF
Versão : 01/00

Projeto : 002
Chapa : 003



Plano X Y / Inter. Tempo : 400

ENTER para Sair

Figura 6.7 - Viga biapoiada.

Efetutando-se uma análise estática do comportamento estrutural da chapa, obtém-se um deslocamento para o nó 20 de $d = 0,3042 \text{ cm}$, adotando-se um comportamento elástico linear com carregamento aplicado de forma incremental.

Contemplando-se outras possibilidades de análise, pode-se efetuar para a chapa em questão, uma análise dinâmica linear e outra através da consideração da não-linearidade física do material, conforme ilustram as figuras 6.8 e 6.9.

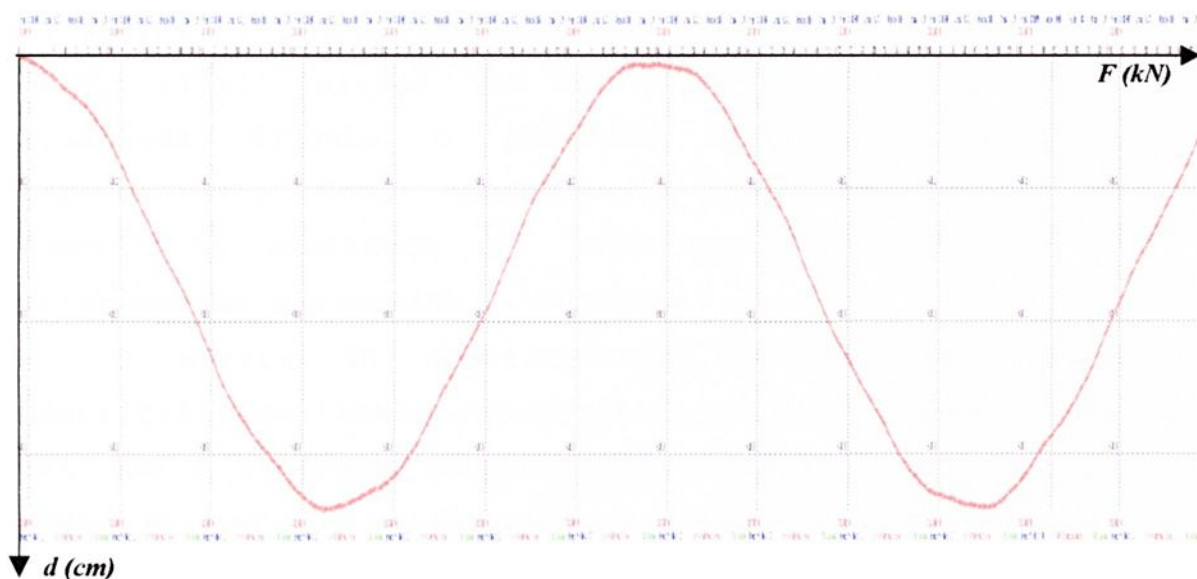


Figura 6.8 - Gráfico ($d \times t$) da análise dinâmica linear do nó 20, na direção global Y.

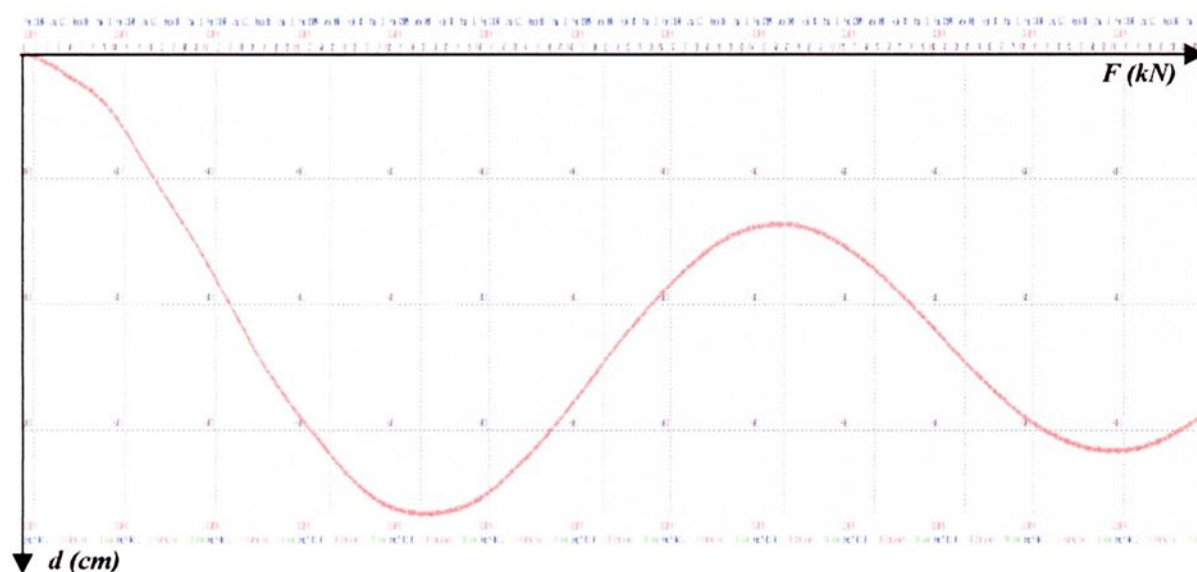


Figura 6.9 - Gráfico ($d \times t$) da análise dinâmica não-linear física do nó 20, na direção global y.

A figura 6.8 mostra a estrutura deslocando-se em regime elástico de forma permanente, sem plastificação de elementos, com deslocamento máximo de aproximadamente $d = 0,256530 \text{ cm}$.

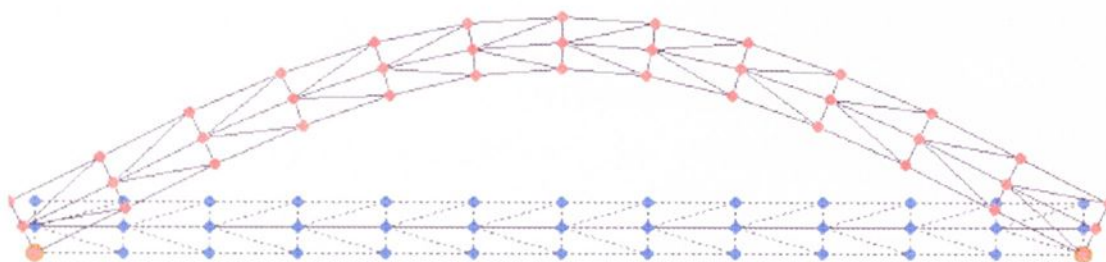
Já a figura 6.9 apresenta uma alteração do comportamento, pois após a plastificação de alguns

elementos os mesmos não conseguem retornar a sua posição de equilíbrio inicial, uma vez que a deformação plástica acumulada durante o processo de plastificação é irreversível. Como consequência imediata tem-se um aumento da amplitude dos deslocamentos, inclusive do valor máximo encontrado ($d=0,3670\text{ cm}$).

O efeito do amortecimento nas análises acima descritas pode também ser possivelmente considerado, uma vez que o programa computacional "CHAPAAUT" calcula os modos de vibração da estrutura e fornece suas frequências naturais, que por sua vez, possibilitam a determinação dos parâmetros de amortecimento. As figuras 6.10 e 6.11 mostram, respectivamente, o primeiro e o segundo modos de vibração da estrutura em questão.

Progr. : CHAPAAUT
Versao : 01/00

Projeto : 003
Chapa : 009



Modo Vibrac. : 1

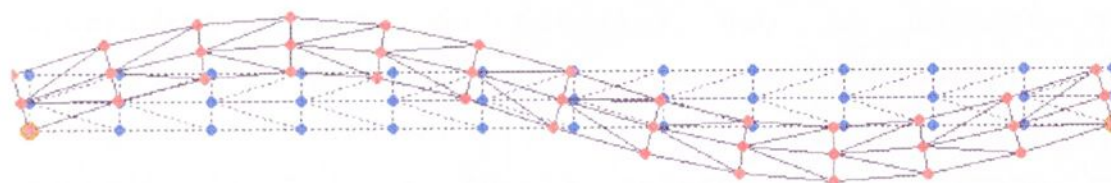
ENTER para Sair

Figura 6.10 - Primeiro modo de vibração da viga biapoiada,

$$\omega_1=1022,07\text{ rad/s.}$$

Progr. : CHAPPAUT
Versao : 01/00

Projeto : 003
Chapa : 009



Modo Vibrac. : 2

ENTER para Sair

Figura 6.11 - Segundo modo de vibração da viga biapoiada, $\omega_2=3354,56$ rad/s.

CAPÍTULO 7 - CONSIDERAÇÕES FINAIS

7.1 - Conclusões

No presente trabalho procurou-se considerar a não-linearidade física do material aço na análise do comportamento dinâmico de estruturas laminares, com carregamento contido no plano médio da estrutura. Uma vez estabelecida toda a teoria referente ao assunto em questão, desenvolveram-se programas computacionais que, mesmo com modelo numérico cinemático aproximado, já permitem a realização de vários tipos de análise numérica, possibilitando a visualização do comportamento estrutural de tais sistemas de uma forma mais realista.

Neste contexto, os problemas que foram resolvidos no capítulo 6 mostraram diferenças entre os resultados obtidos via comportamento linear e não-linear, tanto para análises dinâmicas quanto estáticas. Dessa forma, se a análise estrutural for feita sem as premissas de tais considerações, os resultados obtidos podem conduzir o Engenheiro de Estruturas a projetar uma estrutura com resultados não compatíveis com aquela originalmente idealizada. Há que se dizer ainda sobre o desperdício de materiais utilizados em estruturas antieconômicas, projetadas para respostas considerando-se apenas comportamento linear.

É importante salientar que uma análise estrutural mais refinada requer maiores sutilezas no fornecimento de dados da estrutura de forma coerente e exige uma maior interpretação dos resultados obtidos de acordo com a teoria utilizada na análise escolhida.



Com relação ao modelo elastoplástico consistente, o capítulo 5 traz uma abordagem matemática com a definição de um algoritmo implícito de integração das tensões incondicionalmente estável. Além disso, o algoritmo permite a definição da matriz tangente elastoplástica consistente que preserva a taxa de convergência quadrática do Método de Newton-Raphson. Outros procedimentos, por exemplo, como o explícito, além de não serem incondicionalmente estáveis, não permitem a definição (simétrica) do operador tangente elastoplástico consistente. Nestes casos, utilizar-se-ia a matriz tangente elastoplástica clássica, definida para passos infinitesimais, o que provocaria a perda da taxa de convergência quadrática do método de Newton-Raphson.

7.2 - Propostas de desenvolvimento

O modelo elastoplástico abordado aqui matematicamente, relativamente simples, pode ser implementado numericamente em substituição ao modelo numérico aproximado aqui apresentado.

Tal modelo serve de base para futuras modelagens de materiais mais complexos tais como: concreto armado, compostos fibrosos, etc. A implantação de novos critérios de plastificação específicos para certos tipos de materiais, considerando-se uma distribuição anisotrópica, possibilita caracterizar diferentes taxas de armaduras em diferentes direções, para o caso de estruturas de concreto armado, por exemplo.

Além disso, pode-se sugerir ainda, como continuidade deste trabalho, a consideração dos efeitos não-lineares geométricos, muito importantes na análise estrutural dinâmica.



REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ARGYRIS, J.H.; MLEJNEK, H.P.(1991). **Dynamics of structures**. Netherlands, Elsevier Science. v.5.
- BRASIL, R.M.L.R.F.(1990). **Não-linearidade geométrica na dinâmica de estruturas aporticadas planas: um tratamento pelo método dos elementos finitos**. São Paulo. Tese (Doutorado) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo.
- CHEN, W.F.; ZHANG, H.(1991). **Structural plasticity: theory, problems, and CAE software**. New York, Springer-Verlag. 250p.
- CILONI, A.D.(1993). **Sobre o comportamento em serviço de estruturas planas de concreto armado**. São Carlos. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- CLOUGH, R. W.; PENZIEN, J.(1975). **Dynamics of structures**. New York, McGraw-Hill. 633p.
- COOK, R.D.; MALKUS, D.S.; PLESHA, M.E.(1989). **Concepts and applications of finite element analysis**. New York, John Wiley & Sons. 630p.
- CORRÊA, M.R.S.(1991). **Aperfeiçoamento de modelos usualmente empregados no projeto de sistemas estruturais de edifícios**. São Carlos. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo.
- CRISFIELD, M.A. (1991). **Non-linear finite element analysis of solids and structures**. V.1, England, John Wiley & Sons.



- DRUCKER, D.C. (1951). **A more fundamental approach to plastic stress-strain solution.** U. S. NAT. CONG. APPL. MECH., 1st. *Proceedings*. P.487-91.
- GERADIN, M., HOGGE, M., IDELSOHN, S.(1986). **Implicit finite element methods.** In: BELYTSCHKO, T.; HUGHES, T.J.R. ed. **Computational methods for transient analysis.** Amsterdam, North-Holland. p.417-471.
- GOLUB, G.H.; LOAN, C.F.V.(1985). **Matrix: computations.** Baltimore, The Johns Hopkins University Press. 476p.
- GRAD, J.; BREBNER, M.A.(1980). **Eigenvalues and eigenvectors of a real general matrix [F2].** New York, ACM. v.2 (Algorithm, 343)
- HALLAM, M.G.; HEAF, N.J.; WOOTTON, L.R.(1978). **Dynamics of marine structures: methods of calculating the dynamic response of fixed structures subject to wave and current action.** London, CIRIA Underwater Engineering Group. 313p.
- HENRYCH, J.(1990). **Finite models and methods of dynamics in structures.** Czechoslovakia, Elsevier Science. 541p.
- JETTEUR, P. (1986). **Implicit integration algorithm for elastoplasticity in plane stress analysis.** *Eng. Comput.*, v.3, p.251-253.
- NAYAK, G.C.; ZIENKIEWICZ, O.C. (1972). **Elasto-plastic stress analysis. Generalisation for various constitutive relations including strain softening.** *Int. J. Num. Meth. Eng.*, v.5, p.113-35
- OWEN, D.R.J.(1980). **Implicit finite element methods for the dynamic transient analysis of solids with particular reference to non-linear situations.** In: DONÉA, J. ed. **Advanced structural dynamics.** London, Applied Science. P.123-152.



- RUNESSON, K.; SAMUELSSON, ^a (1985). **Aspects on numerical techniques in small deformation plasticity.** In: MINDDLETON, J. et al. *Numerical methods in engineering: theory and applications*, NUMETA 85. A. A. Balkema, Rotterdam, v.1, p.337-438.
- SIMO, J.C.; HUGHES, T.J.R. (1988). **Elastoplasticity and viscoplasticity: computational aspects,** to be published.
- SIMO, J.C.; TAYLOR, R.L. (1985). **Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity.** *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, n.48, p.101-118.
- SIMO, J.C.; TAYLOR, R.L. (1986). **A return mapping algorithm for plane stress elastoplasticity.** *Int. J. Numer. Methods Eng.*, v.22, p.649-670.
- WARBURTON, G.B. (1976). **The dynamical behaviour of structures.** Oxford, Pergamon Press. 354p.
- WILSON, E.L.; FARHOOMAND, I.; BATHE, K.J. (1973). **Nonlinear dynamic analysis of complex structures. Earthquake Engineering and Structural Dynamics,** v.1, p.241-252.
- ZIENKIEWICZ, O.C.; TAYLOR, R.L. (1991). **The finite element method.** 4.ed. v.1 and v.2, London, McGraw-Hill.



BIBLIOGRAFIA CONSULTADA

- BATHE, K.J.; WILSON, E.L.(1973). Stability and accuracy analysis of direct integration methods. **Earthquake Engineering and Structural Dynamics**, v.1, p.283-291.
- BIGGS, J.M.(1964). **Introduction to structural dynamics**. New York, McGraw-Hill. 341p.
- CARNAHAN, B.; LUTHER, H.A.; WILKES, J.O.(1969). **Applied numerical methods**. New York, John Wiley & Sons. 604p.
- CASTIGLIONI, A.(1978). **Introduzione alla dinamica delle strutture**: appunti per le lezioni del corso di dinamica delle costruzioni. Milano, Masson Italia Editori. 373p.
- HENRYCH, J.(1990). **Finite models and methods of dynamics in structures**. Czechoslovakia, Elsevier Science. 541p.
- HURTY, W.C.; RUBINSTEIN, M.F.(1967). **Dynamics of structures**. New Delhi, Prentice-Hall of India Private. 455p.
- HURTY, W.C.; RUBINSTEIN, M.F.(1967). **Dynamics of structures**. New Delhi, Prentice-Hall of India Private. 455p.
- OWEN, D.R.J.; GOMES, C.M.B.(1984). **Some recent developments in solution techniques for nonlinear finite element problems**. s.l., s.ed. p.137-153.
- PANDIT, G.S.; GUPTA, S.P.(1981). **Structural analysis: a matrix approach**. New Delhi, Tata McGraw-Hill. 602p.
- PAZ, M.(1991). **Structural dynamics: theory and computation**. New York, VNR. 626p.
- SAVASSI, W.(1996). **Introdução ao método dos elementos finitos**: em análise linear de estruturas. São Carlos, EESC-USP. 260p.



WARBURTON, G.B.(1976). The dynamical behaviour of structures. Oxford, Pergamon Press. 354p.





UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"

Câmpus de Ilha Solteira
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil
Av. Brasil Centro, 56
15385-000 Ilha Solteira - SP
www.dec.feis.unesp.br

