

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
CÂMPUS DE GUARATINGUETÁ

FELIPE PINHEIRO

Modelagem de Estruturas Coerentes em Escoamentos Turbulentos

Guaratinguetá - SP
2025

Felipe Pinheiro

Modelagem de Estruturas Coerentes em Escoamentos Turbulentos

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Aeroespacial na área de Aerodinâmica.

Orientador: Prof^a Dr^a. Leandra Isabel de Abreu
Coorientador: Prof^o Dr. Denilson Paulo Souza dos Santos

Guaratinguetá - SP
2025

P654m	Pinheiro, Felipe Modelagem de estruturas coerentes em escoamentos turbulentos / Felipe Pinheiro – Guaratinguetá, 2025. 49 : il. Bibliografia: f. 45-49 Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia e Ciências de Guaratinguetá, 2025. Orientadora: Prof.^a Dr.^a Leandra Isabel de Abreu Coorientador: Prof. Dr. Denilson Paulo Souza dos Santos 1. Escoamento turbulento. 2. Análise espectral. 3. Reynolds, números de. 4. Mecânica dos fluidos. I. Título. CDU 532 (043)
-------	--

Luciana Máximo
Bibliotecária CRB-8/3595

IMPACTO POTENCIAL DESTA PESQUISA

Neste trabalho desenvolveu-se uma abordagem que aprimora a compreensão e a modelagem de estruturas coerentes em escoamentos turbulentos, fornecendo subsídios para estratégias inovadoras de controle de escoamento, redução de arrasto aerodinâmico, de ruído aeroacústico e maior eficiência em aplicações de engenharia e ciência.

POTENTIAL IMPACT OF THIS RESEARCH

In this work, an approach was developed that advances the understanding and modeling of coherent structures in turbulent flows, providing a foundation for innovative strategies in flow control, aerodynamic drag reduction, aeroacoustic noise mitigation, and improved efficiency in engineering and scientific applications.

FELIPE PINHEIRO

Modelagem de Estruturas Coerentes em Escoamentos Turbulentos.

Dissertação apresentada à Universidade Estadual Paulista (UNESP), Faculdade de Engenharia e Ciências de Guaratinguetá, para obtenção do título de Mestre em Engenharia

Data da defesa: 05/09/2025

Banca Examinadora:

Leandra Isabel De
Abreu:097996376
19

Assinado de forma digital
por Leandra Isabel De
Abreu:09799637619
Dados: 2025.09.05 10:43:23
-03'00'

Prof^a Dr^a LEANDRA ISABEL DE ABREU

Orientador - UNESP



Documento assinado digitalmente
DANIEL SAMPAIO SOUZA
Data: 05/09/2025 17:14:55-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. DANIEL SAMPAIO SOUZA

UNESP



Documento assinado digitalmente
ANDRE FERNANDO DE CASTRO DA SILVA
Data: 08/09/2025 08:40:24-0300
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

Prof. Dr. ANDRÉ FERNANDO DE CASTRO DA SILVA

ITA

DADOS CURRICULARES

FELIPE PINHEIRO

NASCIMENTO 20/12/1996 – Campinas / São Paulo

FILIAÇÃO Marilza Concetta Ciaramella Pinheiro
Antonio Carlos Pinheiro

2023 / 2025 Graduação em 2022

AGRADECIMENTOS

Gostaria de expressar meus sinceros agradecimentos ao meu pai, minha mãe e minha irmã pelo apoio incondicional, incentivo constante e compreensão ao longo de toda minha trajetória acadêmica. A presença e o suporte de cada um foram fundamentais para que eu pudesse superar os desafios e alcançar os objetivos propostos neste trabalho.

Registro igualmente minha gratidão à minha amada Verônica Liberali Messias, pelo apoio e paciência durante o período de dedicação a esta pesquisa, e aos amigos João Pedro Spadão, Peterson dos Santos Maurício e Lukas Nicolas Tito da Silva, pelo companheirismo e estímulo contínuo, que contribuíram para tornar esta jornada mais leve e significativa.

Agradeço aos docentes e orientadores, Profa. Dra. Leandra Isabel de Abreu e Prof. Dr. Denilson Paulo dos Santos, que contribuíram de maneira decisiva para minha formação científica.

A todos os que, de alguma forma, colaboraram para a realização desta tese, deixo aqui meu mais profundo reconhecimento e gratidão.

RESUMO

Este trabalho investiga as estruturas coerentes bidimensionais em um escoamento turbulento sobre uma placa plana com gradiente adverso de pressão nulo, utilizando dados numéricos de simulações LES para números de Reynolds de fricção variando entre $Re_\tau \approx 300$ e 2480. A análise espectral revelou a presença de estruturas coerentes com $k_z \rightarrow 0$, indicativas de ondas hidrodinâmicas relevantes na direção da envergadura, com potencial aplicação em aeroacústica. Utilizou-se a Decomposição Ortogonal Própria Espectral (SPOD) para extrair os modos mais energéticos desse escoamento, que foram modeladas por meio da análise de resolvente localmente paralela. A comparação entre os modos dominantes da SPOD e as respostas ótimas da análise de resolvente mostrou boa concordância para baixos e intermediários números de Reynolds, enquanto para alto número de Reynolds a correspondência se deteriora, evidenciando o aumento das interações não lineares. Os resultados indicam que a análise de resolvente é um modelo de ordem reduzida promissor para perturbações bidimensionais em escoamentos turbulentos de parede, especialmente em regimes de baixo a moderado números de Reynolds. A combinação entre SPOD e análise de resolvente se mostra uma abordagem pertinente para a modelagem e controle de escoamentos turbulentos em contextos científicos e de engenharia.

PALAVRAS-CHAVE: estruturas coerentes; escoamentos turbulentos de parede; SPOD; análise de resolvente.

ABSTRACT

This work investigates bidimensional coherent structures in a turbulent boundary layer flow over a flat plate with zero adverse pressure gradient, using numerical data from LES simulations for friction Reynolds numbers ranging from $Re_\tau \approx 300$ to 2480. Spectral analysis revealed the presence of coherent structures with $k_z \rightarrow 0$, indicating spanwise-extended hydrodynamic waves with potential applications in aeroacoustics. Spectral Proper Orthogonal Decomposition (SPOD) was employed to extract the most energetic modes of the flow, which were then modeled using locally parallel resolvent analysis. The comparison between the leading SPOD modes and the optimal responses from resolvent analysis showed good agreement for low to intermediate Reynolds numbers, while for higher Reynolds numbers the correspondence deteriorated, indicating stronger nonlinear interactions. The results suggest that resolvent analysis is a promising reduced-order model for bidimensional perturbations in wall-bounded turbulent flows, particularly in low to moderate Reynolds regimes. The combination of SPOD and resolvent analysis proves to be a relevant approach for modeling and controlling turbulent flows in both scientific and engineering applications.

KEYWORDS: coherent structures; wall-bounded turbulent flows; SPOD; resolvent analysis.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Divisão típica do arrasto em uma aeronave de transporte.	14
Figura 2 – Variação do coeficiente de atrito de superfície com o número de Reynolds em termos de corda para uma placa plana, evidenciando a transição do escoamento laminar para turbulento.	14
Figura 3 – Ilustração das diferentes regiões da parede em unidades internas (y^+) e externas (y/δ), para uma ZPGTBL com $Re_\tau = 2480$, com dados de LES. . .	19
Figura 4 – Visualização de estruturas coerentes do tipo <i>hairpin</i> em escoamento turbulento próximo à parede. Observam-se padrões organizados que emergem do campo turbulento instantâneo.	22
Figura 5 – Visualização da ocorrência de <i>streaks</i> sobre uma placa plana.	23
Figura 6 – Esboço representando os <i>streaks</i> de velocidade u (linhas sólidas) e vórtices quase longitudinais $w - v$ (setas) em um plano transversal. Regiões de fluido ascendente $+v$ associadas a flutuações de baixa velocidade $-u$ (contornos azuis) e fluido descendente $-v$ com flutuações de alta velocidade $+u$ (contornos vermelhos).	24
Figura 7 – Vórtices do tipo <i>hairpin</i> sendo gerados acima da subcamada tampão. . . .	24
Figura 8 – (a) Perfis de velocidade média na direção do escoamento para $Re_\tau \approx 300$ (linha preta sólida), 730 (linha preta tracejada), 1370 (linha azul sólida) e 2480 (linha azul tracejada), em unidades viscosas. A linha verde representa a lei linear, $\bar{u}^+ = y^+$, enquanto a linha vermelha representa a lei logarítmica, $\bar{u}^+ = (1/\kappa) \ln y^+ + B$, com $\kappa = 0.41$ e $B = 5.2$. b) Variância das flutuações de velocidade na direção do escoamento em unidades viscosas, para todos os números de Reynolds analisados.	37
Figura 9 – Densidade espectral de potência pré-multiplicada bidimensional das flutuações de velocidade na direção do escoamento, em unidades internas, $k_z E_{uu}^+$, em $y^+ \approx 15$, para os números de Reynolds de fricção de $Re_\tau \approx 300, 730, 1370$ e 2480.	38
Figura 10 – Densidade espectral de potência bidimensional, sem pré-multiplicar, das flutuações de velocidade na direção do escoamento, em unidades internas, E_{uu}^+ , em $y^+ \approx 15$, para os números de Reynolds de fricção de $Re_\tau \approx 300, 730, 1370$ e 2480.	39
Figura 11 – Contribuição dos dez primeiros autovalores da SPOD em função do número de Strouhal para os números de Reynolds de fricção de $Re_\tau \approx 300, 730, 1370$ e 2480.	40
Figura 12 – Contribuição cumulativa dos modos SPOD para a energia cinética turbulenta a $St = 0,02$ para os números de Reynolds de fricção de $Re_\tau \approx 300, 730, 1370$ e 2480.	40

Figura 13 – Primeiros três ganhos da análise de resolvente em função do número de onda na direção do escoamento a $St = 0,02$ para os números de Reynolds de fricção de $Re_\tau \approx 300, 730, 1370$ e 2480	41
Figura 14 – Primeiro modo SPOD (linha preta sólida) comparado com a resposta associada à forçagem ótima da análise de resolvente (linha vermelha tracejada) para $St = 0,02$ e $Re_\tau \approx 300, 730, 1370$ e 2480	43

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

CFD	Computational Fluid Dynamics
DDES	Delayed Detached Eddy Simulation
DES	Detached Eddy Simulation
DFT	Discrete Fourier Transform
DNS	Direct Numerical Simulation
ECF	Estrutura Coerente de Fluxo
LES	Large Eddy Simulation
LNS	Linearized Navier–Stokes Equations
PIV	Particle Image Velocimetry
POD	Proper Orthogonal Decomposition
RANS	Reynolds-Averaged Navier–Stokes Equations
SPOD	Spectral Proper Orthogonal Decomposition
SVD	Singular Value Decomposition
UNESP	Universidade Estadual Paulista
VLSM	Very Large-Scale Motion
ZPGTBL	Zero Pressure Gradient Turbulent Boundary Layer

LISTA DE SÍMBOLOS

Re Número de Reynolds

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
2	OBJETIVOS	16
2.1	OBJETIVOS ESPECÍFICOS	16
3	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	17
3.1	Escoamento Turbulento	17
3.2	Escoamento Turbulento em Presença de Parede	18
3.2.1	Subcamada Viscosa	20
3.2.2	Camada Tampão	20
3.2.3	Camada Logarítmica	21
3.3	Estruturas Coerentes	21
3.3.1	Estruturas Bidimensionais	25
3.4	Análise Espectral	25
3.5	Equações e Formulações Básicas	26
4	METODOLOGIA	29
4.1	POD - Proper Orthogonal Decomposition	29
4.1.1	POD Apenas no Domínio do Espaço	29
4.1.2	Spectral Proper Orthogonal Decomposition (SPOD)	30
4.1.3	Solucionando o SPOD Numericamente	31
4.2	Comparação entre SPOD e Análise de Resolvente	33
4.3	Base de Dados	34
5	RESULTADOS E DISCUSSÕES	36
5.1	Análises Estatísticas e Espectral	36
5.2	Resultados da SPOD	37
5.3	Parâmetros da Análise de Resolvente	39
5.4	Comparação entre SPOD e Análise de Resolvente	42
6	CONCLUSÃO	44
6.1	Sugestões para Trabalhos Futuros	45
	REFERÊNCIAS	46

1 INTRODUÇÃO

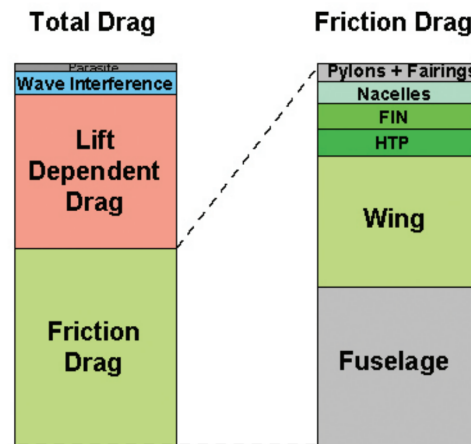
A turbulência é uma das áreas mais intrigantes e desafiadoras da mecânica dos fluidos, caracterizando-se por sua irregularidade, tridimensionalidade e comportamento caótico. Embora sua aparência seja desordenada, a turbulência exhibe estruturas organizadas, periódicas no tempo e no espaço, conhecidas como estruturas coerentes, que desempenham um papel crucial no transporte de massa, energia e momento em escoamentos fluidos (Pope, 2001). Essa interação dinâmica de múltiplas escalas, desde grandes vórtices até pequenas flutuações dissipativas, torna a turbulência um fenômeno complexo e fundamental na engenharia, ciência atmosférica e diversas aplicações industriais (Jones, 1934; Smits; Marusic, 2013).

A turbulência em presença de superfícies sólidas ou paredes representa um cenário especialmente importante, pois a interação entre o fluido e a parede gera condições únicas, como a condição de não-deslizamento na superfície. Nessas situações, surgem gradientes elevados de velocidade próximos à superfície, e a dinâmica do escoamento é dominada por uma fina região de cisalhamento chamada de camada limite. Introduzida por Ludwig Prandtl em 1904, a teoria da camada limite revolucionou a compreensão dos escoamentos ao descrever como a viscosidade, negligenciável na maior parte do escoamento, se torna significativa em uma região próxima à parede (Busemann, 1960).

O impacto do regime turbulento sobre o arrasto aerodinâmico é uma questão central em aplicações práticas, especialmente na indústria aeroespacial. O arrasto aerodinâmico é tradicionalmente classificado em arrasto parasita, que inclui o arrasto de forma (*form drag*) e o arrasto de atrito (*skin drag*), e arrasto induzido, associado à geração de sustentação. No contexto das camadas limite, o arrasto de forma não se restringe a regimes turbulentos, podendo também ocorrer em regimes laminares em função da separação do escoamento, enquanto o arrasto de atrito superficial decorre diretamente dos gradientes de velocidade próximos à parede. Ambos os tipos de arrasto influenciam significativamente o desempenho de aeronaves, turbomáquinas e veículos terrestres, elevando o consumo energético e reduzindo a eficiência. Apesar disso, destaca-se que o regime turbulento contribui de forma predominante para o arrasto total em altas velocidades e na maioria das aplicações de engenharia, tornando seu estudo essencial para compreender, modelar e reduzir as perdas associadas à dissipação de energia. A separação do escoamento, em particular, pode levar a perdas significativas de sustentação e estabilidade, sendo um dos fatores limitantes em projetos aerodinâmicos. Aproximadamente metade do combustível consumido por um avião comercial moderno durante o voo é consumido para superar o arrasto associado às camadas limites turbulentas (Marusic; Mathis; Hutchins, 2010). A Figura 1 ilustra a contribuição típica do arrasto parasita, de interferência, induzido e de atrito na composição do arrasto total de uma aeronave de transporte. Observa-se que o arrasto por atrito constitui mais da metade do arrasto total da aeronave (Schrauf, 2005).

A Figura 2 ilustra como o coeficiente de atrito varia com o número de Reynolds no escoamento sobre uma placa plana. Para baixos valores de Reynolds, observa-se a significativa

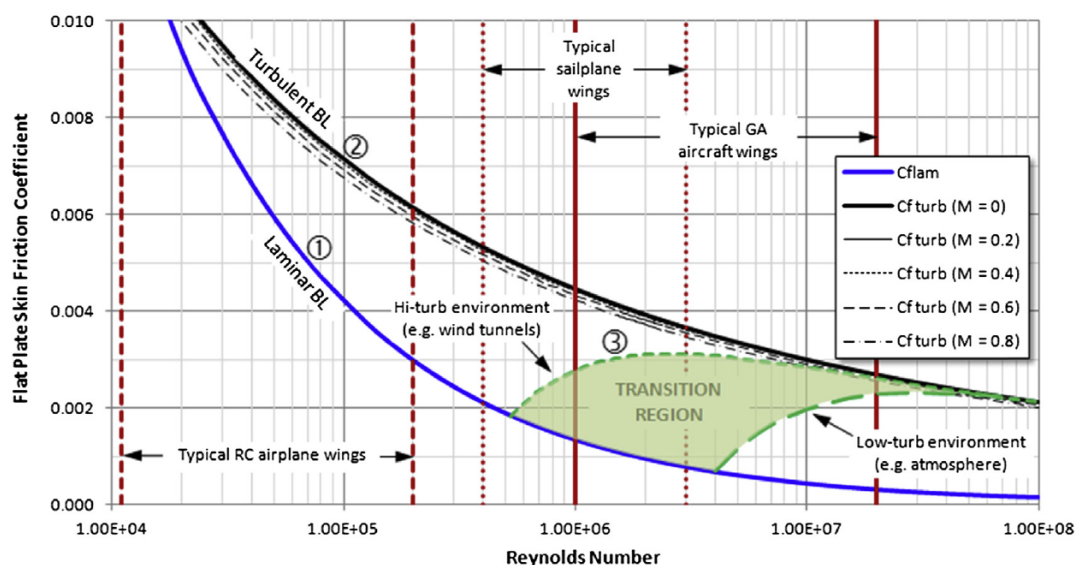
Figura 1 – Divisão típica do arrasto em uma aeronave de transporte.



Fonte: (Schrauf, 2005).

vantagem do regime laminar, com menor atrito em comparação ao regime turbulento. No entanto, essa condição é sensível a irregularidades da superfície e à qualidade do escoamento, o que torna difícil manter a camada limite laminar em aplicações práticas (Gudmundsson, 2013). Para aeronaves em configuração de voo de cruzeiro, o escoamento na maior parte da superfície da fuselagem e das asas encontra-se em regime turbulento, o que torna o arrasto de atrito a principal parcela do arrasto total. O comportamento do escoamento próximo à parede, conhecido como turbulência de parede (*wall-bounded turbulence*), exerce influência direta sobre o valor desse arrasto.

Figura 2 – Variação do coeficiente de atrito de superfície com o número de Reynolds em termos de corda para uma placa plana, evidenciando a transição do escoamento laminar para turbulento.



Fonte: Adaptado de Gudmundsson (2013).

A dinâmica das estruturas coerentes em camadas limite turbulentas exerce influência

determinante sobre o comportamento de escoamentos próximos à parede, afetando diretamente o arrasto por atrito e a transferência de calor. Tais fenômenos são de particular relevância para aplicações de engenharia como aeronaves, turbomáquinas e sistemas de geração de energia. Apesar dos avanços na compreensão da turbulência, a natureza não-linear desses escoamentos ainda impõe desafios substanciais à modelagem e ao controle das estruturas que os compõem (Jiménez, 2018).

A região próxima à parede em escoamentos turbulentos é marcada pela presença de estruturas coerentes como os *streaks* e vórtices quasi-longitudinais, responsáveis por uma intensa produção e dissipação de energia turbulenta. A elucidação dos mecanismos responsáveis por sua formação, amplificação e persistência é fundamental para o desenvolvimento de estratégias de controle de arrasto e para a otimização de sistemas propulsivos e aerodinâmicos (Adrian, 2007).

Neste trabalho, propõe-se uma abordagem combinada entre análise de resolvente, fundamentada na linearização das equações de Navier-Stokes em torno do escoamento médio, e Decomposição Ortogonal Própria Espectral (SPOD), uma técnica baseada em dados que permite extrair modos energeticamente dominantes a partir de um escoamento turbulento em uma placa plana, com gradiente adverso de pressão nulo, para vários números de Reynolds. Essa combinação teórico-empírica possibilita a identificação de mecanismos de amplificação lineares e a análise das escalas estruturais que governam o comportamento do escoamento turbulento (McKeon; Sharma, 2010). A partir dessa abordagem, busca-se investigar a relação entre os modos resolvente e SPOD, com foco na compreensão dos mecanismos de transporte de energia e momento em escoamentos turbulentos de parede. Análises comparativas em diferentes números de Reynolds serão realizadas com o objetivo de identificar padrões estruturais dominantes e avaliar seu papel na modelagem da turbulência (Towne; Schmidt; Colonius, 2018).

2 OBJETIVOS

O principal objetivo desta tese é modelar as estruturas coerentes presentes em escoamentos turbulentos de parede com gradiente de pressão nulo sobre uma placa plana, para vários números de Reynolds, por meio da combinação de abordagens baseadas em dados e métodos analíticos. Essa modelagem será construída por meio da combinação de abordagens baseadas em dados e métodos analíticos, utilizando uma base de dados proveniente de simulação numérica *Large Eddy Simulation* (LES) de uma camada limite turbulenta desenvolvendo-se sobre uma placa plana. A análise será conduzida com duas metodologias complementares: a SPOD, uma técnica baseada em dados que permite identificar estruturas coerentes dominantes em diferentes escalas temporais e espaciais, e a análise de resolvente, uma abordagem teórica fundamentada na linearização das equações de Navier–Stokes em torno de um escoamento médio e na modelagem da resposta do sistema às forças não lineares.

Através da aplicação conjunta desses dois métodos, busca-se compreender a relação entre os modos resolvente e os modos SPOD, avaliando a capacidade da análise de resolvente em prever as estruturas coerentes extraídas pela SPOD. O efeito do aumento do número de Reynolds também será analisado. Essa comparação tem como finalidade identificar as escalas e regiões do escoamento onde a modelagem linear é mais eficaz, contribuindo para o desenvolvimento de modelos reduzidos e estratégias de controle em escoamentos turbulentos de parede.

2.1 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Desenvolver uma modelagem para estruturas coerentes em escoamentos turbulentos de parede a partir de dados LES e métodos analíticos.
- Aplicar a análise resolvente às equações linearizadas de Navier-Stokes para identificar modos de resposta ótimos em escoamentos turbulentos próximos à parede.
- Implementar a técnica de SPOD para extrair modos dominantes de energia em diferentes frequências e escalas do campo turbulento.
- Comparar os resultados da análise resolvente com os modos SPOD para avaliar a correspondência entre mecanismos de amplificação linear e estruturas coerentes observadas.
- Avaliar o efeito do aumento do número de Reynolds nos resultados.
- Validar o modelo como ferramenta para as referidas análises;

3 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

3.1 ESCOAMENTO TURBULENTO

O escoamento de um fluido pode ser classificado, de forma geral, em dois regimes distintos: laminar ou turbulento. No contexto de escoamento sobre placa plana, sob regime laminar as partículas do fluido movem-se de maneira ordenada, com trajetórias paralelas e bem definidas, caracterizando um escoamento predominantemente unidimensional, onde a velocidade é praticamente constante em cada linha de corrente. Já o regime turbulento apresenta um comportamento aparentemente instável e tridimensional, no qual as flutuações de velocidade superpõem-se ao escoamento médio, resultando em uma distribuição altamente caótica e dependente do tempo (Pope, 2001).

A transição entre esses dois regimes é governada principalmente pelo número de Reynolds, parâmetro adimensional que relaciona as forças inerciais às forças viscosas do escoamento. Valores elevados de número de Reynolds indicam maior suscetibilidade do escoamento à amplificação de perturbações. No entanto, o surgimento de instabilidades não ocorre apenas pela magnitude do número de Reynolds, mas decorre da presença e do crescimento de perturbações externas ou internas (por exemplo, rugosidade, flutuações de pressão, ruídos ou vibrações), que são amplificadas pelos mecanismos do escoamento. Dessa forma, a transição para turbulência não se dá em um valor fixo do número de Reynolds, mas depende também da geometria e das condições de contorno do problema (Schlichting; Gersten, 2000).

O regime turbulento é caracterizado por maior dissipação de energia e resistência ao escoamento, o que impacta diretamente no desempenho de sistemas de engenharia na forma de arrasto. Um exemplo típico é o arrasto de atrito na superfície de aeronaves (*skin drag*), que representa parcela significativa do consumo energético durante o voo (Marusic; Mathis; Hutchins, 2010). Por isso, há um interesse crescente em estratégias de controle da turbulência, seja para reduzi-la, manipulá-la ativamente ou retardar sua transição. Outro fenômeno associado à turbulência é a geração de ruído aerodinâmico.

Do ponto de vista matemático, o campo de velocidades de um escoamento laminar pode ser representado predominantemente por uma única componente, a velocidade na direção do escoamento, usualmente denotada por u . Em contraste, o escoamento turbulento é usualmente descrito por meio da decomposição de Reynolds, na qual o campo de velocidades é representado como a soma de uma componente de velocidade média $\bar{u}$ e a outra componente sendo as flutuações instantâneas da velocidade, dadas por u' , v' e w' nas direções do escoamento, da envergadura e vertical, respectivamente. Essa decomposição é fundamental para o desenvolvimento de modelos e análises estatísticas da turbulência (Tennekes; Lumley, 1972).

3.2 ESCOAMENTO TURBULENTO EM PRESENÇA DE PAREDE

O escoamento turbulento em presença de paredes apresenta características singulares, resultantes da interação direta entre o fluido e a superfície sólida. A principal consequência dessa interação é a aplicação da condição de não escorregamento (*no-slip condition*), que impõe velocidade nula do escoamento em contato com a parede. Essa condição gera intensos gradientes de velocidade na direção normal à superfície, promovendo uma região de forte cisalhamento onde estruturas turbulentas passam a interagir de forma complexa (Pope, 2001).

A região adjacente à parede, com espessura tipicamente pequena, é conhecida como camada limite turbulenta. É justamente nessa região que ocorrem as maiores taxas de dissipação de energia, sendo responsável por uma parcela significativa do arrasto de atrito em sistemas de engenharia. Estima-se que, em escala global, cerca de metade da energia consumida no transporte de fluidos por dutos ou no deslocamento de veículos através do ar e da água, como aviões comerciais, navios cargueiros, submarinos e até drones e embarcações de pequeno porte, seja dissipada em virtude da turbulência gerada pelo escoamento em presença de parede (Marusic; Mathis; Hutchins, 2010). Essa realidade confirma a importância do estudo detalhado dessas regiões na busca por estratégias de modelagem dessa região para controle de escoamento.

A dinâmica do escoamento próximo à parede pode ser descrita em termos de diferentes sub-camadas, cada uma com características distintas de distribuição de velocidade, estruturas coerentes dominantes e mecanismos de produção e dissipação turbulenta. Essas regiões compreendem a subcamada viscosa (*viscous sub-layer*) e a camada tampão (*buffer layer*), que compreendem a região viscosa da camada limite, e a camada logarítmica (*log layer*) que está entre a camada interna e a externa. Essas sub-camadas estão ilustradas na Figura 3, na qual se observa sua delimitação em termos das variáveis adimensionais y^+ e y/δ , para uma camada limite turbulenta com gradiente adverso de pressão nulo (ZPGTBL, do inglês *Zero Pressure Gradient Turbulent Boundary Layer*), obtida por meio de simulações do tipo *Large Eddy Simulation* (LES) para Reynolds de fricção de $Re_\tau = 2480$ (Eitel-Amor; Örlü; Schlatter, 2014).

O escoamento turbulento em presença de paredes (típico de dutos, canais e camadas limites) apresenta comportamento médio aproximadamente paralelo à parede. Isso permite a aplicação da decomposição de Reynolds:

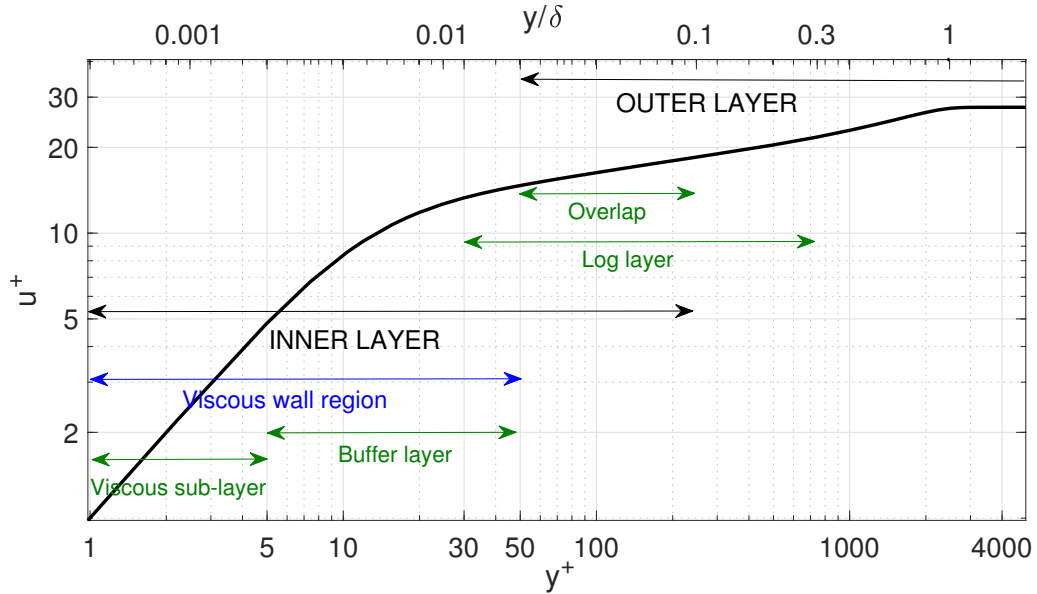
$$q = \bar{q} + q', \quad (3.1)$$

onde $q = [u, v, w, p]$ representa as componentes de velocidade nas direções do escoamento, normal à parede, transversal e a pressão, respectivamente; $\bar{q}$ é a média temporal e q' são as flutuações associadas à turbulência.

As principais escalas de comprimento associadas ao escoamento turbulento próximo à parede incluem:

- Escala viscosa: dada por ν/u_τ , onde ν é a viscosidade cinemática e u_τ a velocidade de

Figura 3 – Ilustração das diferentes regiões da parede em unidades internas (y^+) e externas (y/δ), para uma ZPGTBL com $Re_\tau = 2480$, com dados de LES.



Fonte: (Eitel-Amor; Örlü; Schlatter, 2014).

fricção;

- Microscala de Kolmogorov: $\eta = (\nu^3/\epsilon)^{1/4}$, que representa a menor escala de movimento, associada à dissipação turbulenta local ϵ ;
- Espessura da camada-limite: δ , que representa uma escala externa do escoamento, relacionada à geometria do canal ou ao deslocamento da camada-limite.

A velocidade de fricção é definida por:

$$u_\tau = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}}, \quad (3.2)$$

com a tensão de cisalhamento na parede expressa como:

$$\tau_w(x) = \nu \rho \left. \frac{\partial \bar{u}(x, y)}{\partial y} \right|_{y=0}, \quad (3.3)$$

e a densidade do fluido indicada por ρ . O número de Reynolds de fricção, uma medida adimensional de intensidade turbulenta próxima à parede, é dado por:

$$Re_\tau = \frac{\delta u_\tau}{\nu}. \quad (3.4)$$

As quantidades normalizadas por variáveis internas (escala da parede) são denotadas pelo sobrescrito $+$, como em $y^+ = y u_\tau / \nu$ e $u^+ = u / u_\tau$.

3.2.1 Subcamada Viscosa

A subcamada viscosa (*Viscous sub-layer*) corresponde à região mais próxima da parede em um escoamento turbulento, tipicamente definida para $y^+ < 5$, onde y^+ é a coordenada normal adimensionalizada por variáveis internas (comprimento de parede e velocidade de fricção). Nessa região, os efeitos viscosos dominam e o escoamento se comporta de maneira quase laminar, com baixa influência das flutuações turbulentas. A distribuição da velocidade média obedece, de forma aproximada, a uma relação linear com a distância da parede, ou seja, $u^+ = y^+$ (Pope, 2001).

Esse comportamento pode ser justificado a partir de uma expansão em série de Taylor para pequenos valores de y^+ . Considerando a condição de não deslizamento na parede, a qual impõe $u^+(0) = 0$, e assumindo que o esforço de cisalhamento na parede τ_w permanece constante, satisfazendo $du^+/dy^+ = 1$ em $y^+ = 0$. Assim, a expansão em série para a velocidade é dada por:

$$u^+(y^+) = y^+ + \mathcal{O}((y^+)^2). \quad (3.5)$$

Dessa forma, observa-se que, para $y^+ < 5$, o termo linear domina, e a relação $u^+ = y^+$ descreve adequadamente o perfil médio de velocidades. No entanto, para valores maiores de y^+ , essa aproximação deixa de ser válida: por exemplo, em $y^+ = 12$, o erro relativo é de aproximadamente 25% (Schlichting; Gersten, 2000).

A compreensão precisa da subcamada viscosa é fundamental em aplicações práticas que envolvem controle de arrasto em superfícies, pois essa região contém a maior taxa de gradientes de velocidade e é diretamente responsável pela geração do esforço de cisalhamento na parede (Pope, 2001).

3.2.2 Camada Tampão

A subcamada tampão (*buffer layer*) ($5 < y^+ < 50$) representa uma região de transição entre a subcamada viscosa, onde os efeitos de viscosidade dominam, e a região logarítmica, governada majoritariamente pelos efeitos inerciais da turbulência. Nessa faixa, os dois mecanismos, viscoso e turbulento, coexistem, e começam a emergir as primeiras estruturas coerentes do escoamento, como vórtices quase-organizados de baixa intensidade (Pope, 2001).

Nesta região intermediária, o perfil de velocidade não segue nenhuma das leis assintóticas usuais. A aproximação linear válida na subcamada viscosa, dada por $u^+ = y^+$, e a lei logarítmica típica da região externa, $u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + B$, não se aplicam com precisão na camada tampão:

$$u^+ \neq y^+;$$

$$u^+ \neq \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + B.$$

É nessa região que ocorre a rápida intensificação das flutuações turbulentas e a transferência de energia da componente média para as estruturas coerentes passa a ganhar importância. Por conta da complexidade da interação entre os mecanismos dissipativos e os mecanismos de produção de turbulência, a modelagem adequada da camada tampão continua sendo um desafio relevante para fechamentos turbulentos (Schlichting; Gersten, 2000).

Além disso, por ser uma região crítica na definição do esforço de cisalhamento na parede e da distribuição de tensões turbulentas, a camada tampão tem papel decisivo no controle de arrasto e na concepção de estratégias de modificação de escoamentos em aplicações práticas de engenharia (White, 2016).

3.2.3 Camada Logarítmica

A camada logarítmica (*log layer*) é a faixa intermediária da camada limite turbulenta próxima à parede, compreendida entre a subcamada tampão e a região externa em que os efeitos inerciais passam a dominar sobre os viscosos, tipicamente para $30 < y^+ < 300$, embora essa faixa possa variar com o número de Reynolds (Marusic et al., 2013). Nesta região, o perfil médio de velocidade assume uma forma logarítmica bem definida, expressa pela chamada *lei do logaritmo*, descrita por:

$$u^+ = \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + B, \quad (3.6)$$

onde κ é a constante de von Kármán (tipicamente $\kappa \approx 0,41$) e B é uma constante adimensional que depende do tipo de escoamento e das condições de contorno (Pope, 2001; Schlichting; Gersten, 2000; White, 2016).

É nesta região que se estabelecem as estruturas coerentes autossustentadas da turbulência de parede, como os chamados *streaks* e vórtices quasi-longitudinais. Tais estruturas, organizadas espacialmente, são responsáveis pela manutenção do ciclo de regeneração turbulenta e pela redistribuição de energia entre diferentes escalas do escoamento, observadas nos estudos de Jiménez; Hamilton; Kim; Waleffe.

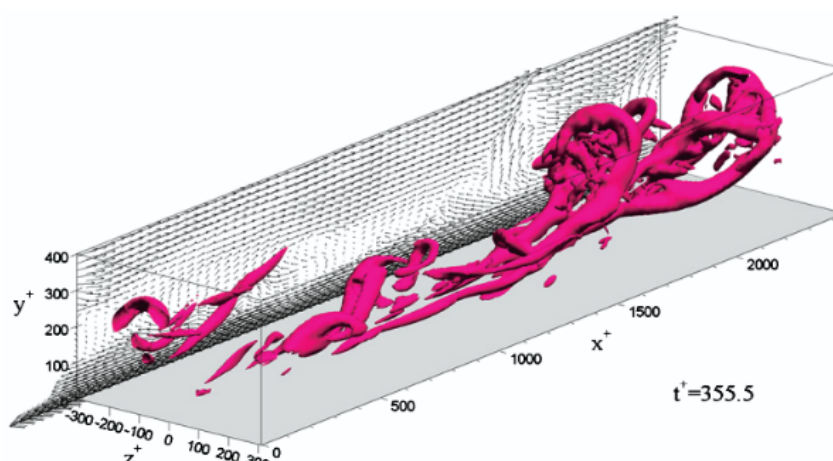
3.3 ESTRUTURAS COERENTES

O escoamento turbulento, embora caracterizado por comportamento caótico e aparente desordem, apresenta padrões organizados recorrentes que podem ser identificados no tempo e no espaço. Utilizando-se de técnicas apropriadas de visualização de escoamento, medições experimentais ou análises estatísticas de grandes bases de dados, é possível detectar regiões do escoamento com comportamento padronizado, conhecidas como *estruturas coerentes* (Pope, 2001).

Essas estruturas não ocorrem simultaneamente e nem em posições fixas do espaço, mas

compartilham características similares que permitem sua classificação. São observadas em diferentes geometrias e regimes, sendo especialmente relevantes em escoamentos turbulentos próximos a paredes, onde controlam mecanismos de transporte de quantidade de movimento, calor e massa (Adrian, 2007). A Figura 4 ilustra uma visualização típica de estruturas coerentes, evidenciando padrões ordenados que emergem do campo turbulento.

Figura 4 – Visualização de estruturas coerentes do tipo *hairpin* em escoamento turbulento próximo à parede. Observam-se padrões organizados que emergem do campo turbulento instantâneo.



Fonte: Adaptado de Adrian (2007).

O interesse no estudo das estruturas coerentes reside em diversos fatores, entre os quais se destacam:

- Modelagem do escoamento turbulento;
- Buscar certo grau de ordem dentro do aparente caos turbulento;
- Compreender padrões observados experimentalmente em escoamentos;
- Relacionar os mecanismos dominantes da turbulência às estruturas físicas associadas;
- Desenvolver estratégias de controle de escoamento visando à redução de arrasto.

As estruturas coerentes em escoamentos turbulentos limitados por paredes organizam-se segundo diferentes escalas características, associadas principalmente à distância em relação à parede. De modo geral, distingue-se entre estruturas de pequenas e grandes escalas (Hutchins; Marusic, 2007a).

As estruturas de pequenas escalas, também denominadas de *near-wall cycle structures*, situam-se predominantemente na subcamada viscosa e na camada tampão, com dimensões da ordem da escala viscosa ν/u_τ . Suas variáveis são adimensionalizadas pelas unidades internas (ou unidades de parede), utilizando a velocidade de fricção u_τ e a viscosidade cinemática ν .

Nessa escala, os componentes de velocidade são representados por $\langle u^+, v^+, w^+ \rangle$, enquanto as coordenadas espaciais são expressas por $\langle x^+, y^+, z^+ \rangle$. Essas estruturas apresentam comportamento praticamente universal e, em primeira ordem, independem da geometria do escoamento ou do número de Reynolds (Pope, 2001).

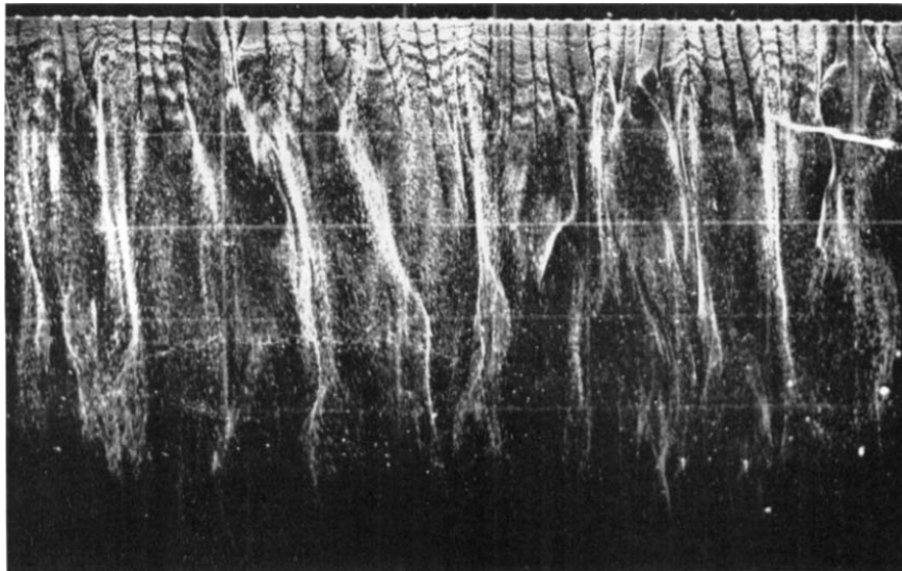
As estruturas de grandes escalas, por outro lado, estendem-se por distâncias comparáveis à espessura da camada limite δ , ao meio diâmetro de dutos ou à meia altura de canais. Elas predominam nas regiões logarítmica e externa, sendo responsáveis por uma fração significativa da energia cinética turbulenta e transportes de momento. Tais estruturas incluem as chamadas superestruturas, ou do inglês *very large-scale motions* (VLSMs), cuja influência cresce com o número de Reynolds (Hutchins; Marusic, 2007b).

Apesar das diferenças geométricas entre camadas limites desenvolvidas sobre placas planas, canais e dutos, observa-se uma notável similaridade no comportamento do escoamento na região próxima à parede. Essa universalidade sugere a existência de mecanismos físicos comuns responsáveis pela organização das estruturas coerentes nessa região (Pope, 2001).

Na região próxima à parede, em particular na subcamada tampão ($y^+ < 40$), predominam os *streaks* de baixa e alta velocidade, que são estruturas alongadas na direção do escoamento. Essas estruturas são formadas por vórtices quase alinhados à direção principal, que redistribuem o momento entre regiões ascendentes e descendentes.

A primeira observação detalhada dessas estruturas foi feita experimentalmente por Kline et al., por meio de técnicas de visualização de escoamento, mostrado na Figura 5. Posteriormente, sua presença foi confirmada estatisticamente por meio de análises espectrais. Em particular, os estudos de Monty et al. mostraram que os *streaks* correspondem a um pico de energia no espectro premultiplicado de energia cinética turbulenta, em escala viscosa.

Figura 5 – Visualização da ocorrência de *streaks* sobre uma placa plana.

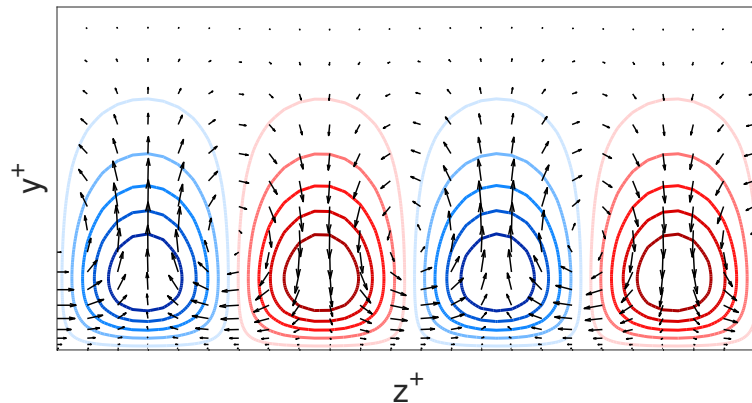


Fonte: (Kline et al., 1967).

Esses *streaks* são caracterizados por comprimentos de onda internos típicos de $\lambda_x^+ \approx 1000$

na direção do escoamento e $\lambda_z^+ \approx 100$ na direção transversal, com velocidade de fase $c^+ \approx 10$. Essas estruturas estão associadas a flutuações de baixa velocidade ($-u'$) nas regiões de ejeção ascendente ($+v'$) e de alta velocidade ($+u'$) nas regiões de varredura descendente ($-v'$), e podem ser observadas pela Figura 6.

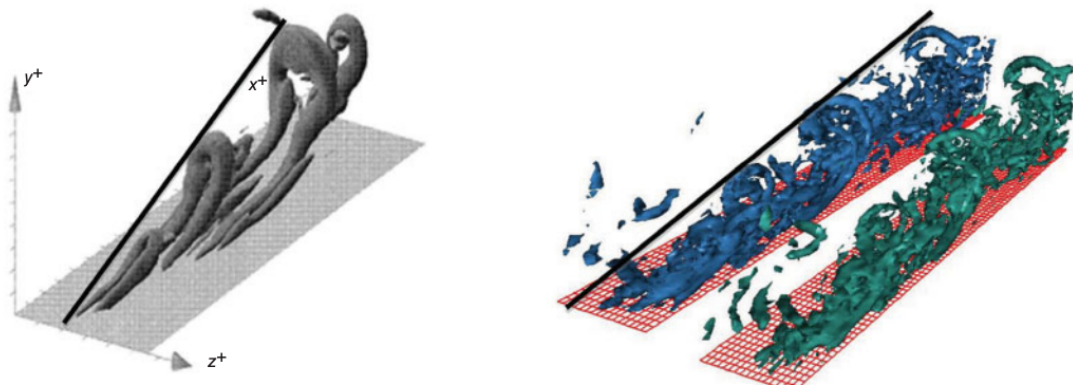
Figura 6 – Esboço representando os *streaks* de velocidade u (linhas sólidas) e vórtices quase longitudinais $w - v$ (setas) em um plano transversal. Regiões de fluido ascendente $+v$ associadas a flutuações de baixa velocidade $-u$ (contornos azuis) e fluido descendente $-v$ com flutuações de alta velocidade $+u$ (contornos vermelhos).



Fonte: Adaptado de Abreu (2019).

Acima da subcamada tampão, na região logarítmica, é comum a presença de estruturas em forma de grampo de cabelo, chamadas *hairpins vortices*, que se organizam em pacotes coerentes e contribuem para o transporte de quantidade de movimento e a manutenção da turbulência (Adrian; Meinhart; Tomkins, 2000). Esses vórtices têm sido estudados extensivamente em simulações numéricas e experimentos, e sua dinâmica é considerada fundamental na auto-sustentação da turbulência de parede.

Figura 7 – Vórtices do tipo *hairpin* sendo gerados acima da subcamada tampão.



Fonte: Adaptado de Adrian, Meinhart & Tomkins (2000).

Nas camadas mais externas, as estruturas coerentes crescem em escala, dando origem aos chamados superestruturas, ou movimentos de escala muito ampla, do inglês *very-large-scale motions* (VLSMs), cuja extensão pode ultrapassar 10δ na direção do escoamento (Hutchins; Marusic, 2007b). Essas superestruturas são caracterizadas por forte correlação espacial e dominância no espectro de energia de escoamentos com altos números de Reynolds.

3.3.1 Estruturas Bidimensionais

Diversos estudos identificaram a presença de estruturas alongadas na direção do escoamento próximas à parede, comumente chamadas de *streaks*, caracterizadas por um comprimento $\lambda_x \gg \lambda_z$. No entanto, Hussain; Reynolds e Reynolds; Hussain apresentaram indícios da existência de estruturas bidimensionais, alongadas na direção transversal (*spanwise*), onde $\lambda_z \gg \lambda_x$, por meio de experimentos em canais turbulentos forçados com fios vibratórios. Tais estruturas foram também observadas por Abreu et al. numericamente.

Essas estruturas bidimensionais não correspondem aos *streaks* usuais encontrados em camadas limites turbulentas, sendo, em vez disso, ondas bidimensionais coerentes de baixa energia, com número de onda na direção da envergadura nulo, $k_z = 0$, o que as torna invisíveis nos espectros pré-multiplicados comumente utilizados.

Estruturas análogas também estão presentes em jatos turbulentos, onde são comumente denominadas pacotes de ondas, ou *wavepackets* (Cavaleri; Jordan; Gervais, 2013). Embora estruturas com $k_z = 0$ não sejam amplamente estudadas em escoamentos turbulentos de parede, devido à predominância do uso de espectros pré-multiplicados (Hutchins; Marusic, 2007a), elas são particularmente relevantes para problemas de aeroacústica. Isso ocorre porque perturbações associadas a $k_z = 0$ são sempre radiantes, ou seja, estão diretamente relacionadas à fonte de geração de ruído, como demonstrado por Amiet.

Dada sua importância para a geração de ruído aerodinâmico, especialmente em escoamentos internos e jatos, as perturbações bidimensionais associadas a $k_z = 0$ serão analisadas com maior profundidade nesta dissertação.

3.4 ANÁLISE ESPECTRAL

A análise espectral é uma ferramenta fundamental para a caracterização da turbulência, especialmente em escoamentos limitados por paredes. Por meio da decomposição das flutuações de velocidade em suas componentes espectrais, é possível identificar escalas dominantes de energia e inferir a organização espacial e temporal do escoamento. Uma das abordagens mais comuns consiste no cálculo da densidade espectral de potência da componente de velocidade na direção do escoamento principal, u , como função da frequência ou dos números de onda k_x e k_z (Smits; Marusic, 2013).

Para facilitar a interpretação física dos espectros, é comum a utilização de uma forma pré-multiplicada, em que o espectro de energia normalizado, E_{uu}^+ , é multiplicado por k_x e k_z , resultando em $k_x k_z E_{uu}^+$. Essa representação permite que áreas iguais no gráfico correspondam a contribuições iguais para a energia total, oferecendo uma visão mais clara das escalas de maior relevância no escoamento (Hutchins; Marusic, 2007a).

Em escoamentos turbulentos de parede, o espectro de potência pré-multiplicado revela uma organização energética que reflete a dinâmica de estruturas coerentes distintas. Em tais espectros observa-se um alto pico de energia localizado na subcamada tampão, tipicamente em $y^+ \approx 15$. Este pico está associado a comprimentos de onda internos característicos $\lambda_x^+ \approx 1000$ e $\lambda_z^+ \approx 100$, e é atribuído ao chamado ciclo auto-sustentado da turbulência próximo à parede, que envolve a geração de *streaks* e vórtices quasi-longitudinais (Hamilton; Kim; Waleffe, 1995). Esse mecanismo foi evidenciado tanto por simulações numéricas quanto por medições experimentais com alta resolução espacial.

À medida que o número de Reynolds aumenta, surge um segundo pico de energia no espectro, mais afastado da parede, nas camadas externas do escoamento. Esse segundo pico está associado a estruturas de grande escala, também chamadas de superestruturas ou *VLSMs*, com comprimentos de onda significativamente maiores, da ordem de várias vezes a espessura da camada limite (Hutchins; Marusic, 2007b; Monty et al., 2009). Essas estruturas influenciam fortemente a dinâmica da camada externa e podem modular as flutuações na região próxima à parede por mecanismos de interação entre escalas.

Portanto, a análise espectral não apenas permite quantificar a distribuição de energia entre diferentes escalas, mas também fornece evidências fundamentais da existência e importância relativa de diferentes estruturas coerentes em regiões distintas do escoamento. A identificação dos picos espectrais em diferentes regiões contribui para a construção de modelos de ordem reduzida e para estratégias de controle de turbulência.

3.5 EQUACÕES E FORMULACÕES BÁSICAS

A formulação matemática da mecânica dos fluidos fundamenta-se nos princípios de conservação da massa e nos balanços de momento linear e energia, aplicados sob a hipótese de meio contínuo. O movimento de um fluido é regido pelas equações de Navier-Stokes, um sistema de equações diferenciais parciais não lineares. Exceto em casos simples, essas equações não admitem soluções analíticas em forma fechada e exigem elevado custo computacional para serem resolvidas numericamente (White, 2016). Em contextos onde se busca compreender a dinâmica de escoamentos turbulentos, abordagens baseadas em modelos linearizados têm se mostrado particularmente úteis. Neste trabalho, emprega-se a forma linearizada das equações de Navier-Stokes para escoamentos newtonianos em regime incompressível com base no perfil médio de velocidade, a fim de analisar a resposta do escoamento a perturbações harmônicas.

Assume-se que o fluido obedece à hipótese do contínuo, ou seja, as variáveis de interesse são funções suaves no tempo e no espaço, e que o escoamento é incompressível, o que implica em densidade constante e desacoplamento da equação de energia. As equações de conservação de massa e momento, nas formas incompressíveis e adimensionais, são expressas por:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0; \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \nabla^2 \mathbf{v}, \quad (3.8)$$

onde $\mathbf{v} = [u; v; w]^T$ é o vetor de velocidades, p é a pressão e Re é o número de Reynolds.

A equação ((3.8)) de momento é não linear, o que dificulta sua manipulação direta. Para torná-la tratável, considera-se uma decomposição aditiva entre campo médio e flutuações, $\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}'$, e de forma análoga para a pressão. Adotando o vetor de estado $\mathbf{q} = [u; v; w; p]^T$, e supondo que as flutuações sejam pequenas em relação ao campo médio ($\mathbf{q}' \ll \bar{\mathbf{q}}$), pode-se linearizar as equações em torno de um escoamento base paralelo.

Em escoamentos paralelos, assume-se que o perfil médio varia apenas na direção normal à parede (y), ou seja, $\partial \bar{u} / \partial x = \partial \bar{u} / \partial z = 0$, e que $\bar{v} = \bar{w} = 0$. A forma linearizada das equações de Navier-Stokes é então:

$$\begin{cases} \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial u'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial u'}{\partial x} + v' \frac{d\bar{u}}{dy} = -\frac{\partial p'}{\partial x} + \frac{1}{Re} \nabla^2 u' \\ \frac{\partial v'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial v'}{\partial x} = -\frac{\partial p'}{\partial y} + \frac{1}{Re} \nabla^2 v' \\ \frac{\partial w'}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial w'}{\partial x} = -\frac{\partial p'}{\partial z} + \frac{1}{Re} \nabla^2 w' \end{cases} \quad (3.9)$$

Dada a homogeneidade nas direções x , z e no tempo t , supõe-se uma solução harmônica do tipo:

$$\mathbf{q}'(x, y, z, t) = \hat{\mathbf{q}}'(y) e^{i(k_x x + k_z z - \omega t)}, \quad (3.10)$$

onde ω é a frequência angular, e k_x , k_z são os números de onda nas direções longitudinal e transversal, respectivamente. Substituindo-se essa hipótese na equação ((3.9)), obtém-se a forma de operadores do problema:

$$\mathcal{L}\{\hat{\mathbf{q}}'\} = 0, \quad (3.11)$$

sendo $\mathcal{L} = (i\omega \mathcal{I} - \mathcal{A})$ o operador linear aplicado ao campo transformado de Fourier.

Para modelar a ação dos termos não lineares como uma força externa, estes podem ser deslocados para o lado direito da equação:

$$\mathcal{L}\{\hat{\mathbf{q}}'\} = \mathbf{f}, \quad (3.12)$$

com $\mathbf{f}$ representando as não linearidades remanescentes. Esta equação pode ser reescrita na forma de espaço de estados:

$$\begin{cases} \mathcal{L} \hat{\mathbf{q}}' = \mathcal{B} \mathbf{f} \\ \hat{\mathbf{y}}' = \mathcal{C} \hat{\mathbf{q}}' \end{cases} \quad (3.13)$$

Em que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são operadores que impõem restrições nas entradas (forçantes) e nas saídas (variáveis observadas), respectivamente. Neste estudo, a saída de interesse é o campo de velocidades, $\hat{\mathbf{y}}' = [\hat{u}'; \hat{v}'; \hat{w}']^T$.

Consideram-se as seguintes condições de contorno homogêneas de Dirichlet:

$$\begin{aligned} \hat{u}'(y=0) = \hat{v}'(y=0) = \hat{w}'(y=0) = 0 \\ \hat{u}'(y \rightarrow \infty) = \hat{v}'(y \rightarrow \infty) = \hat{w}'(y \rightarrow \infty) = 0 \end{aligned}$$

A formulação de entrada-saída é então dada por:

$$\hat{\mathbf{y}}' = \mathcal{C} \mathcal{L}^{-1} \mathcal{B} \mathbf{f}, \quad (3.14)$$

de modo que o operador de resolvente $\mathcal{R}$, fundamental para a análise resolvente, é definido por:

$$\mathcal{R} = \mathcal{C} \mathcal{L}^{-1} \mathcal{B}. \quad (3.15)$$

Este operador relaciona as forçagens $\mathbf{f}$ com as respostas do sistema $\hat{\mathbf{y}}'$, e será utilizado na próxima seção para caracterizar a resposta ótima do escoamento às excitações harmônicas.

4 METODOLOGIA

4.1 POD - PROPER ORTHOGONAL DECOMPOSITION

O método POD, do inglês *Proper Orthogonal Decomposition* (ou Decomposição Ortogonal Própria), foi introduzido no contexto do estudo de escoamentos turbulentos por (Lumley, 1967) e tornou-se uma das ferramentas mais úteis na identificação de estruturas coerentes. A técnica baseia-se em uma formulação estatística para decompor um campo de escoamento (obtido por simulações numéricas ou experimentos) em modos ortogonais que maximizam a energia média quadrática. Esses campos instantâneos, denominados *snapshots*, são considerados como amostras de um processo estocástico de média zero.

O método fornece uma base modal em que os primeiros modos, chamados modos principais, concentram a maior parte da energia e representam as estruturas mais energéticas do escoamento. Assim, se o campo turbulento for dominado por estruturas de larga escala, apenas poucos modos são necessários para representar adequadamente sua dinâmica. Como destacado em (Abreu et al., 2021), essa capacidade de redução da dimensionalidade torna a POD uma ferramenta eficaz na modelagem e controle de escoamentos.

4.1.1 POD Apenas no Domínio do Espaço

O *Space-only POD* (POD apenas no espaço) é a forma mais comum de gerar modos espaciais. Seja $q(x, t)$ um conjunto de snapshots do campo de escoamento sobre um domínio espacial $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, onde cada instante no tempo é tratado como uma realização de um processo estocástico. Considera-se que $q(x, t) \in \mathcal{H}$, um espaço de Hilbert, com produto interno definido por:

$$\langle u, v \rangle_x = \int_{\Omega} v^*(x, t) W(x) u(x, t) dx, \quad (4.1)$$

onde $W(x)$ é uma função de ponderação (frequentemente $W(x) = 1$), e o asterisco denota o transposto conjugado.

Seja $E\{\cdot\}$ o operador de valor esperado no espaço de probabilidade. O objetivo é encontrar as funções base $\Phi(x) \in \mathcal{H}$ que maximizem a quantidade:

$$\lambda = \frac{E \{ |\langle q(x, t), \Phi(x) \rangle_x|^2 \}}{\langle \Phi(x), \Phi(x) \rangle_x^2}. \quad (4.2)$$

Esse problema leva à formulação do problema de autovalor integral de Fredholm:

$$\int_{\Omega} C(x, x') W(x') \Phi(x') dx' = \lambda \Phi(x), \quad (4.3)$$

em que $C(x, x')$ é o tensor de correlação espacial de dois pontos, definido por:

$$C(x, x') = E \{q(x, t) q^*(x', t)\}. \quad (4.4)$$

A teoria de Hilbert-Schmidt assegura que o operador é compacto e autoadjunto, e, portanto, admite uma infinidade numerável de autovalores λ_i e autovetores $\Phi_i(x)$. Esses autovalores podem ser ordenados de forma decrescente $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq 0$, e cada λ_i representa a fração de energia capturada pelo modo correspondente. A soma de todos os autovalores representa a energia total do campo, de acordo com o teorema de Mercer (Cordier; Bergmann, 2003).

Os autovetores $\Phi_i(x)$ formam uma base ortonormal do espaço $\mathcal{H}$, permitindo que cada snapshot do campo de escoamento seja representado por uma expansão modal:

$$q(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(t) \Phi_i(x), \quad (4.5)$$

com coeficientes temporais obtidos por projeção:

$$a_i(t) = \langle q(x, t), \Phi_i(x) \rangle_x. \quad (4.6)$$

Essa abordagem fornece informações sobre as correlações espaciais no escoamento. Como discutido em (Towne; Schmidt; Colonius, 2018), embora o POD apenas espacial ignore correlações temporais, ele continua sendo um método robusto para extrair as estruturas coerentes mais energéticas, sendo aplicado com sucesso em escoamentos de jatos (Freund; Colonius, 2009), camadas de mistura (Wei; Freund, 2006), tubos (Hellström; Marusic; Smits, 2016), canais (Alfonsi et al., 2001), e esteiras de cilindros (Noack et al., 2003).

4.1.2 Spectral Proper Orthogonal Decomposition (SPOD)

Diferentemente da decomposição POD apenas no espaço, a Spectral Proper Orthogonal Decomposition (SPOD) busca modos que são simultaneamente dependentes do espaço e da frequência, permitindo uma análise no domínio espaço-tempo. A metodologia foi formalmente sistematizada para a comunidade de dinâmica de fluidos por (Towne; Schmidt; Colonius, 2018), sendo baseada em uma transformação temporal de Fourier, que fornece uma decomposição modal em frequências específicas.

Os modos SPOD resultantes são estruturas coerentes para cada frequência, ranqueadas da mais energética para a menos, permitindo não apenas a identificação das regiões espacialmente organizadas no escoamento, mas também de suas frequências dominantes. Esse aspecto é particularmente útil para investigar fenômenos oscilatórios persistentes, como pacotes de ondas em jatos ou modos instáveis em camadas de mistura.

Para a aplicação do método, considera-se a transformação temporal de Fourier do campo de flutuações $\hat{q}(x, f)$, onde o chapéu denota o domínio da frequência. Em seguida, define-se o problema de autovalor espectral, semelhante ao problema de Fredholm, como:

$$\int_{\Omega} C(x, x', f) W(x') \Psi(x', f) dx' = \lambda(f) \Psi(x, f) \quad (4.7)$$

em que $\Psi(x, f)$ representa o modo SPOD espacial para a frequência f , $\lambda(f)$ é o autovalor associado (energia do modo), $W(x')$ é uma função de ponderação (geralmente relacionada à métrica do domínio), e $C(x, x', f)$ é o tensor de densidade espectral cruzada, dado por:

$$C(x, x', f) = E \{ \hat{q}(x, f) \hat{q}^*(x', f) \} \quad (4.8)$$

O operador $E\{\cdot\}$ indica valor esperado, e o símbolo $*$ denota a transposta conjugada. Como C é um operador Hermitiano e positivo definido, os autovalores $\lambda(f)$ são reais e não-negativos, e os modos $\Psi(x, f)$ formam uma base ortogonal para o espaço das realizações $\hat{q}(x, f)$ em cada frequência f .

A reconstrução do campo espectral $\hat{q}(x, f)$ é feita pela expansão nos modos SPOD:

$$\hat{q}(x, f) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i(f) \Psi_i(x, f) \quad (4.9)$$

com coeficientes projetados dados por:

$$a_i(f) = \langle \hat{q}(x, f), \Psi_i(x, f) \rangle \quad (4.10)$$

A função de base no tempo é dada por:

$$\phi_i(x, t) = \Psi_i(x, f) e^{i2\pi f t} \quad (4.11)$$

Essa formulação permite associar um conteúdo físico claro aos modos extraídos: estruturas com coerência espaço-temporal associadas a uma frequência bem definida. Isso difere da POD clássica, cujos modos são estatisticamente ótimos apenas no espaço, e não necessariamente possuem comportamento harmônico no tempo.

A SPOD tem sido utilizado com sucesso em escoamentos turbulentos compressíveis e incompressíveis, destacando-se em aplicações como jatos (Cavaleri; Jordan; Gervais, 2013), camadas de mistura (Towne; Schmidt; Colonius, 2018), escoamentos em aerofólios (Abreu et al., 2021), entre outros. Sua utilização é especialmente relevante em análises aeroacústicas, pois permite a identificação de fontes coerentes dominantes que irradiam som em faixas de frequência específicas.

4.1.3 Solucionando o SPOD Numericamente

O algoritmo utilizado para computar o SPOD numericamente segue o procedimento apresentado em (Towne; Schmidt; Colonius, 2018). Seja $\mathbf{Q} \in R^{N \times N_t}$ a matriz de dados contendo N_t snapshots temporais de um campo vetorial com N graus de liberdade espaciais.

Assim, temos:

$$\mathbf{Q} = [\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_{N_t}], \quad (4.12)$$

onde cada coluna $\mathbf{q}_j$ representa o vetor de estado do escoamento em um instante de tempo.

Para extrair a informação espectral, utiliza-se o método de Welch. O procedimento consiste em dividir as linhas da matriz $\mathbf{Q}$ em blocos temporais sobrepostos contendo N_f snapshots cada. A sobreposição entre blocos pode ser, por exemplo, de 50% ou 75%, resultando em um número total de blocos N_b dado, respectivamente, por:

$$N_b = \frac{2N_t}{N_f} - 1, \quad \text{para 50\% de sobreposição} \quad (4.13)$$

$$N_b = \frac{4N_t}{N_f} - 3, \quad \text{para 75\% de sobreposição} \quad (4.14)$$

Em seguida, aplica-se a transformada discreta de Fourier (DFT) ao longo do tempo em cada bloco, previamente multiplicado por uma função de janela w_j , a fim de mitigar os efeitos de *leakage* espectral devido à não-periodicidade dos dados. A frequência f_k de interesse é então extraída, e os dados transformados são organizados em uma nova matriz:

$$\hat{\mathbf{Q}} = [\hat{\mathbf{q}}_1, \hat{\mathbf{q}}_2, \dots, \hat{\mathbf{q}}_{N_b}] \in C^{N \times N_b}, \quad (4.15)$$

onde os chapéus indicam quantidades transformadas por Fourier. Cada vetor $\hat{\mathbf{q}}_n$ é calculado como:

$$\hat{q}_n^{(k)} = \frac{\text{ECF}}{\sqrt{N_f N_b}} \sum_{j=1}^{N_f} w_j q_{n,j} e^{-i2\pi(k-1)\frac{j-1}{N_f}}, \quad (4.16)$$

para $n = 1, \dots, N$ e $k = 1, \dots, N_f$, sendo ECF o fator de correção de energia da janela.

Com os dados organizados por frequência, o SPOD pode ser resolvido via decomposição em valores singulares (SVD) da matriz $\hat{\mathbf{Q}}$:

$$\hat{\mathbf{Q}} = \mathbf{\Psi} \mathbf{\Lambda}^{1/2} \mathbf{\Theta}^T, \quad (4.17)$$

onde:

- $\mathbf{\Psi} \in C^{N \times N_b}$ contém os modos espaciais SPOD nas colunas; - $\mathbf{\Lambda} \in R^{N_b \times N_b}$ é uma matriz diagonal cujos elementos são os autovalores (energias modais); - $\mathbf{\Theta} \in C^{N_b \times N_b}$ contém os modos complexos, ortogonais entre si.

A ortogonalidade discreta dos modos SPOD é assegurada por:

$$\mathbf{\Psi}^* \mathbf{W} \mathbf{\Psi} = \mathbf{I}, \quad (4.18)$$

onde $\mathbf{W} \in R^{N \times N}$ é a matriz de ponderação que incorpora o peso espacial $W(x)$ e a regra de quadratura na malha discreta.

Alternativamente, a equação de autovalores pode ser expressa diretamente usando o tensor de densidade espectral cruzada estimado:

$$\mathbf{C} = \hat{\mathbf{Q}}\hat{\mathbf{Q}}^*, \quad (4.19)$$

resultando no problema espectral:

$$\mathbf{C}\mathbf{W}\Psi = \Psi\Lambda. \quad (4.20)$$

Para domínios onde $N \gg N_b$, como frequentemente ocorre em problemas numéricos com grande resolução espacial, é vantajoso utilizar o método de snapshots (Sirovich, 1987), que reduz o custo computacional ao reformular o problema como:

$$\hat{\mathbf{Q}}^*\mathbf{W}\hat{\mathbf{Q}}\Theta = \Theta\tilde{\Lambda}, \quad (4.21)$$

onde $\tilde{\Lambda} \in R^{N_b \times N_b}$ é a matriz diagonal de autovalores. Os modos SPOD podem então ser reconstruídos por:

$$\Psi = \hat{\mathbf{Q}}\Theta\tilde{\Lambda}^{-1/2}. \quad (4.22)$$

Todas as simulações numéricas consideradas neste trabalho foram analisadas utilizando o SPOD conforme descrito nesta seção, aplicando-se o método de snapshots, uma vez que, para todos os casos, $N \gg N_b$.

4.2 COMPARAÇÃO ENTRE SPOD E ANÁLISE DE RESOLVENTE

Trabalhos recentes exploraram a conexão dos modos SPOD com modos de resposta da análise de resolvente; tais respostas são obtidas usando o operador resolvente linearizado (Cavaliere; Jordan; Lesshafft, 2019; Towne; Schmidt; Colonius, 2018). Essas respostas linearizadas podem frequentemente ser relacionadas a resultados da teoria da estabilidade hidrodinâmica, com modos correspondendo a ondas de instabilidade ou a mecanismos não modais, como o *lift-up* (Abreu et al., 2020).

Um resultado importante demonstrado por (Towne; Schmidt; Colonius, 2018) é que, sob a hipótese de força do tipo ruído branco, espera-se uma correspondência direta entre os modos obtidos por SPOD e aqueles fornecidos pela análise resolvente. Nesse contexto, a SPOD atua como uma ferramenta de processamento de sinais, extraindo os modos mais energéticos de um conjunto de snapshots, enquanto a análise resolvente fornece a fundamentação teórica para descrever os mecanismos responsáveis por essas estruturas. Essa abordagem integrada permite a

construção de modelos de ordem reduzida que preservam os principais mecanismos dinâmicos do escoamento.

A relação matemática entre SPOD e análise resolvente pode ser estabelecida a partir da equação:

$$\hat{\mathbf{Q}} = \mathcal{R}\mathbf{f}, \quad (4.23)$$

onde $\hat{\mathbf{Q}}$ representa as variáveis de interesse do escoamento, $\mathcal{R}$ é o operador resolvente e $\mathbf{f}$ é a força não linear estocástica. Combinando essa expressão com a decomposição SPOD, obtém-se:

$$\Psi \Lambda^{1/2} \Theta^\dagger = \mathcal{R} \hat{\mathbf{f}}, \quad (4.24)$$

onde Ψ contém os modos SPOD, Λ é a matriz diagonal dos autovalores SPOD, Θ contém os coeficientes temporais, e $\hat{\mathbf{f}}$ é a representação espectral da força. Multiplicando a equação (4.24) pela sua conjugada transposta e tomando o valor esperado, tem-se:

$$\Psi \Lambda \Psi^\dagger = \mathcal{R} \mathcal{E}(\hat{\mathbf{f}} \hat{\mathbf{f}}^\dagger) \mathcal{R}^\dagger. \quad (4.25)$$

Assumindo que $\hat{\mathbf{f}}$ é ruído branco em espaço, isto é, $\mathcal{E}(\hat{\mathbf{f}} \hat{\mathbf{f}}^\dagger) = \mathcal{I}$, a equação se reduz a:

$$\Psi \Lambda \Psi^\dagger = \mathbf{U} \Sigma^2 \mathbf{U}^\dagger, \quad (4.26)$$

o que implica que os modos SPOD coincidem com os modos de resposta da análise resolvente, sendo os autovalores SPOD iguais ao quadrado dos ganhos resolventes.

4.3 BASE DE DADOS

A simulação utilizada como base neste trabalho foi originalmente apresentada por Eitel-Amor; Örlü; Schlatter e consiste em uma *Large-Eddy Simulation*-(LES) de uma camada limite turbulenta incompressível, com gradiente de pressão adverso nulo (*Zero Pressure Gradient Turbulent Boundary Layer* – ZPGTBL), se desenvolvendo espacialmente sobre uma placa plana. Trata-se de simulação única com desenvolvimento do número de Reynolds.

O domínio computacional foi definido com dimensões $L_x \times L_y \times L_z = 13,500 \times 400 \times 540$, expressas em unidades de espessura de deslocamento na entrada do escoamento (d_{H0}), nas direções do escoamento (x), normal à parede (y) e na direção da envergadura (z), respectivamente. O domínio apresenta condição de contorno aberta na direção normal à parede. O escoamento entra como uma solução de Blasius (laminar) e é forçado à transição por um mecanismo de *tripping*. A transição para o regime turbulento é considerada completa por volta de $Re_\theta \approx 600$, com o escoamento se desenvolvendo naturalmente até atingir $Re_\theta \approx 8300$ no final do domínio computacional.

Foi empregada uma malha espectral, com $13,824 \times 513 \times 1,152$ pontos nas direções x , y e z , respectivamente. A resolução espacial, em unidades de parede, foi de $\Delta x^+ \approx 18$ na direção do escoamento e $\Delta z^+ \approx 8$ na direção da envergadura. Essas resoluções garantem uma captação adequada das estruturas turbulentas relevantes, embora ligeiramente inferiores às exigidas para uma simulação DNS pura. Para compensar essa redução de resolução nas escalas menores, foi utilizado o modelo de submalha ADM-RT (*Approximate Deconvolution Model – Relaxation Term*), responsável por cerca de 10% da dissipação total de energia. Combinado à precisão numérica do código espectral SIMSON (Chevalier et al., 2007), o modelo permitiu uma representação fidedigna das estatísticas do escoamento.

A simulação foi realizada em um ambiente de computação paralela de alta performance, utilizando 4096 núcleos de processamento e aproximadamente 10^6 horas de CPU para garantir a convergência estatística dos resultados. A qualidade da simulação foi validada por meio de comparações com dados de *Direct Numerical Simulation* (DNS) de alta fidelidade, especialmente aqueles obtidos por Schlatter; Örlü, assegurando a confiabilidade da simulação ao longo de toda a faixa de Reynolds considerada.

Para o presente estudo foi utilizado os números de Reynolds baseados na espessura de momento de $Re_\theta \approx 880, 2240, 4430$ e 8000 , que correspondem ao número de Reynolds de fricção de $Re_\tau \approx 300, 730, 1370$ e 2480 . A base de dados para cada número de Reynolds possui 1940 *snapshots*, com um passo de tempo em unidades viscosas de $dt^+ = 0, 5$.

5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Com base no banco de dados descrito na metodologia, foi possível analisar as características do escoamento turbulento para uma variedade de números de Reynolds. Neste capítulo vamos apresentar os principais resultados das análises estatísticas do escoamento turbulento de parede, a análise espectral, bem como resultados da comparação SPOD com análise de resolvente. Por fim, discute-se o efeito do aumento do número de Reynolds sobre cada uma dessas análises.

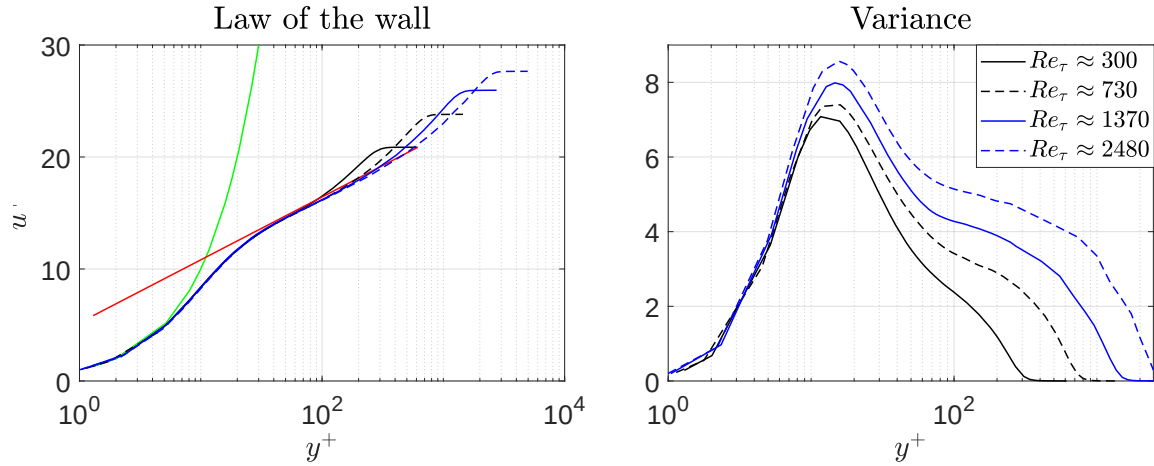
5.1 ANÁLISES ESTATÍSTICAS E ESPECTRAL

A análise dos dados foi conduzida utilizando a decomposição de Reynolds, considerando a velocidade em unidades internas, onde a velocidade pode ser descrita como a soma da sua média com a flutuação, $u^+ = \bar{u}^+ + u'^+$. Os perfis de velocidade médias na direção do escoamento $\bar{u}^+$ para os números de Reynolds analisados pode ser observado na Figura 8 (a). Os resultados foram obtidos para números de Reynolds de fricção de $Re_\tau \approx 300, 730, 1370$ e 2480 com a base de dados de Eitel-Amor; Örlü; Schlatter. Os perfis de velocidade médias seguem a forma característica de escoamentos turbulentos próximos à paredes quando plotados em função da distância à parede normalizada por variáveis internas y^+ , obedecendo as leis da parede descritas por Marusic; Mathis; Hutchins.

Os perfis de variância das flutuações da velocidade na direção do escoamento, $\overline{(u'^+)^2}$, para os números de Reynolds analisados estão apresentados na Figura 8 (b). Os perfis de variância exibem o comportamento típico observado nesse tipo de escoamento, com um pico de maior intensidade localizado dentro da camada limite a $y^+ \approx 15$. Esse pico aumenta em magnitude à medida que o número de Reynolds cresce. Pode-se observar também o surgimento de um segundo pico com o aumento do número de Reynolds, que também aumenta em magnitude com o aumento do número de Reynolds. Esses resultados correspondem ao que é esperado em escoamentos turbulentos de parede (Eitel-Amor; Örlü; Schlatter, 2014).

Para investigar as estruturas turbulentas presentes na camada limite, foi feita a análise espectral. A Figura 9 apresenta o espectro de potência pré-multiplicado, em unidades internas para a velocidade na direção do escoamento, $k_z E_{uu}^+$, para números de Reynolds de fricção de $Re_\tau \approx 300, 730, 1370$ e 2480 . Aqui, k_z representa o número de onda na direção da envergadura. Pode-se observar que todos os resultados revelam a presença de um pico altamente energético próximo à parede, associado à combinação de parâmetros $(y^+, \lambda_z^+) \approx (15, 100)$. Essa combinação reflete o ciclo da turbulência próximo à parede, caracterizado por estruturas coerentes chamadas *streaks* (estrias alongadas) e vórtices que dão origem aos *streaks*. Este comportamento é amplamente documentado na literatura, ocorrendo tipicamente para os parâmetros $(y^+, \lambda_x^+, \lambda_z^+) \approx (15, 1000, 100)$, sendo corroborado por estudos como os de Hoyas; Jiménez, Monty et al., Smits; Marusic. Pode-se observar também o surgimento de um segundo pico com o aumento do número de Reynolds, a partir de $Re_\tau \approx 730$, que aumenta em magnitude com

Figura 8 – (a) Perfis de velocidade média na direção do escoamento para $Re_\tau \approx 300$ (linha preta sólida), 730 (linha preta tracejada), 1370 (linha azul sólida) e 2480 (linha azul tracejada), em unidades viscosas. A linha verde representa a lei linear, $\bar{u}^+ = y^+$, enquanto a linha vermelha representa a lei logarítmica, $\bar{u}^+ = (1/\kappa) \ln y^+ + B$, com $\kappa = 0.41$ e $B = 5.2$. b) Variância das flutuações de velocidade na direção do escoamento em unidades viscosas, para todos os números de Reynolds analisados.



Fonte: Elaborado pelo autor.

o aumento do número de Reynolds, com maior protuberância a $Re_\tau \approx 2480$. Esses resultados correspondem ao que é esperado em escoamentos turbulentos de parede (Monty et al., 2009).

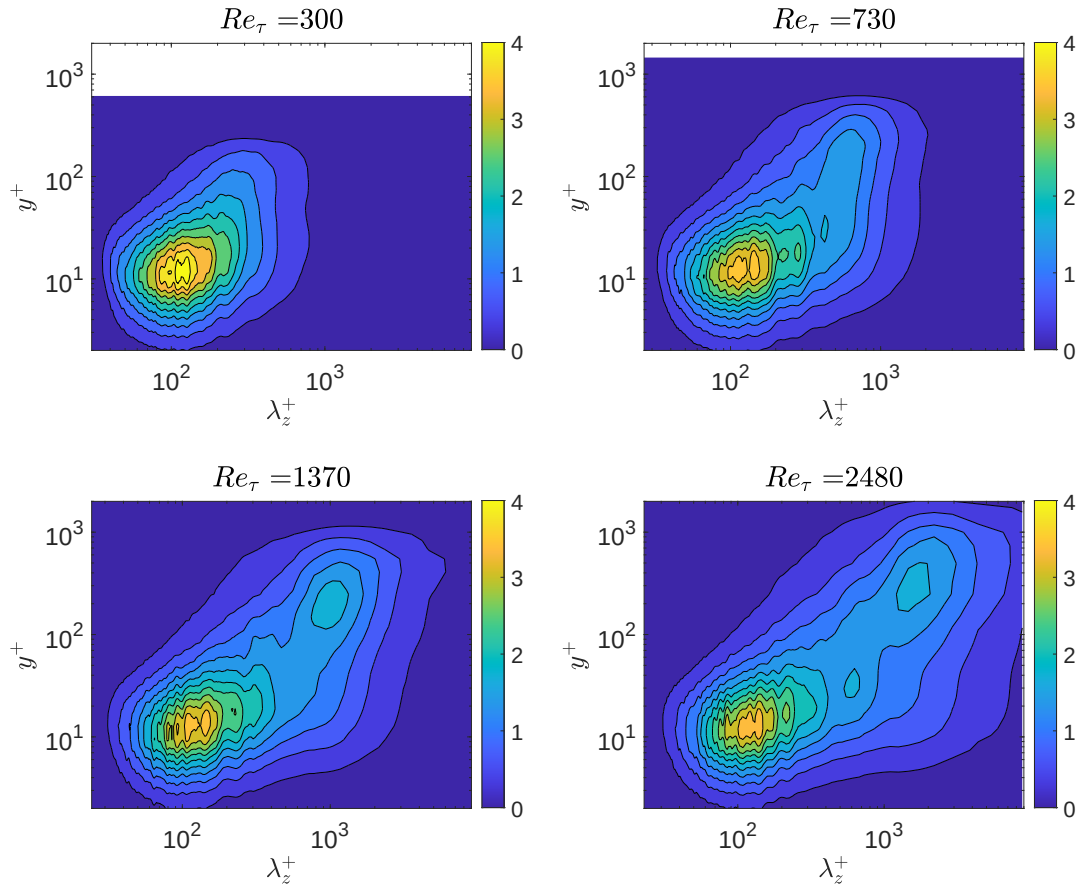
Para avaliar as estruturas bidimensionais do escoamento turbulento de parede, foi analisado a densidade espectral de potência bidimensional, sem pré-multiplicar pelo número de onda k_z , como mostrado na Figura 10. Pode-se observar que, para todos os números de Reynolds, há um platô do espectro tendendo a $k_z = 0$ sem decaimento da magnitude do espectro de energia, indicando a presença de uma estrutura bidimensional similar aos pacotes de onda, também observada no estudo de Abreu et al.. Tais estruturas possuem menos energia que os *streaks*, porém se mostraram relevantes em ruído de bordo de fuga (Sano et al., 2019), e por isso serão as principais estruturas analisadas no presente estudo, com as ferramentas de SPOD e análise de resolvente.

5.2 RESULTADOS DA SPOD

Nesta seção, analisamos as bases de dados para todos os números de Reynolds utilizando o método da SPOD, com o objetivo de destacar as estruturas coerentes bidimensionais dominantes. A fim de obter as estruturas coerentes bidimensionais, calculamos a média na direção da envergadura antes de aplicar a SPOD, assim garantimos que $k_z = 0$ em todos os casos analisados.

Para todas as bases de dados, as FFTs (*Fast Fourier Transforms*) necessárias para a SPOD foram realizadas considerando blocos de 128 instantes de tempo com sobreposição de 75%, resultando em um número total de blocos de $N_b = 57$. Tais escolhas resultam em uma discretização do número de Strouhal de $\Delta St = 0,02$ para ambos os casos, onde o número de

Figura 9 – Densidade espectral de potência pré-multiplicada bidimensional das flutuações de velocidade na direção do escoamento, em unidades internas, $k_z E_{uu}^+$, em $y^+ \approx 15$, para os números de Reynolds de fricção de $Re_\tau \approx 300, 730, 1370$ e 2480 .



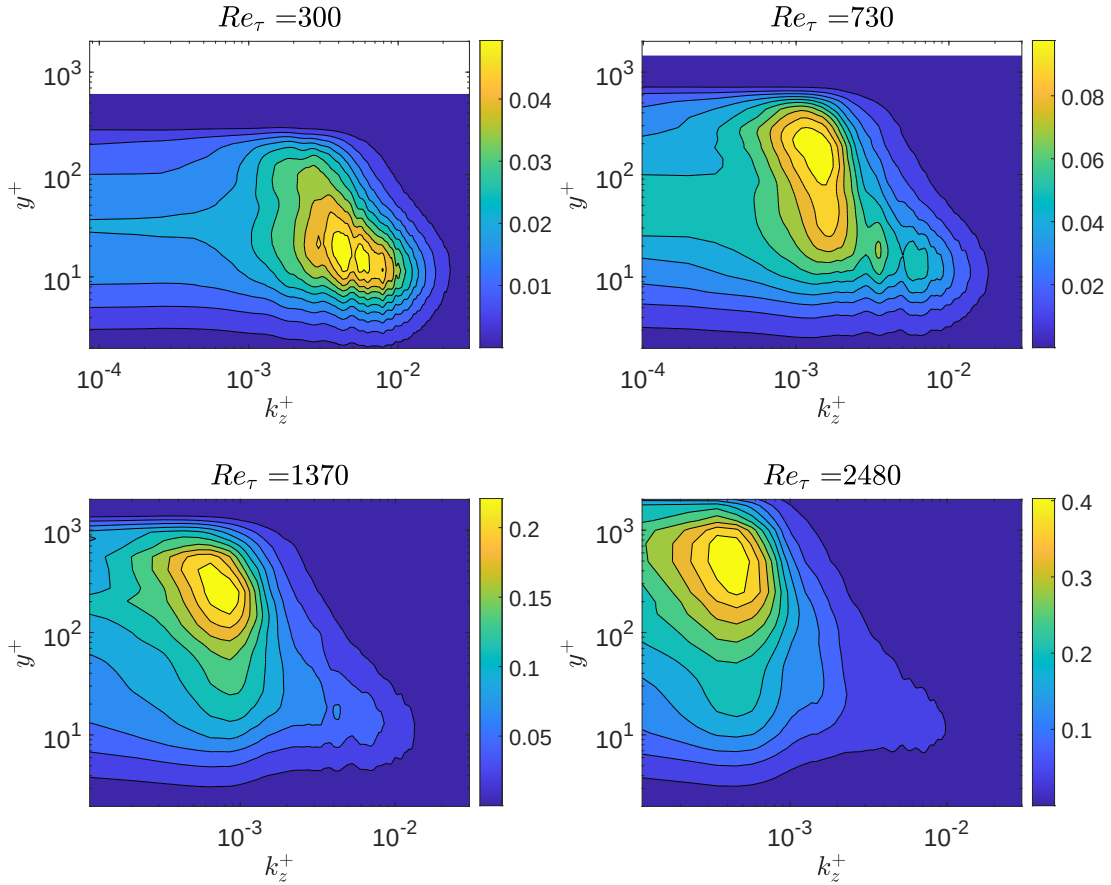
Fonte: Elaborado pelo autor.

Strouhal é definido como $St = f\delta/u_\tau$, sendo f a frequência, δ a espessura da camada limite e u_τ a velocidade de fricção.

Com o objetivo de verificar a dependência dos resultados em relação ao tamanho do bloco e à porcentagem de sobreposição, a SPOD também foi avaliada para todos os números de Reynolds utilizando blocos com 64 e 128 instantes de tempo, com 50% e 75% de sobreposição em cada caso, levando a resultados muito semelhantes. De modo geral, as variações nos autovalores dominantes não excederam 2% para a maioria das frequências, indicando que os resultados da SPOD são confiáveis e podem ser analisadas com fidelidade.

Para verificar se os dados possuem uma frequência dominante, foi calculada a SPOD para uma variedade de frequências, e obtêve-se os resultados apresentados na Figura 11, que apresentam a raiz quadrada dos dez primeiros autovalores da SPOD em função do número de Strouhal para $Re_\tau \approx 300, 730, 1370$ e 2480 . Vale ressaltar que os modos do SPOD possuem norma unitária, de forma que a raiz quadrada dos autovalores correspondem à amplitude que cada modo apresenta no escoamento. Os resultados mostram que as amplitudes aumentam com o aumento do número de Reynolds, o que é esperado, pois o aumento do número de Reynolds

Figura 10 – Densidade espectral de potência bidimensional, sem pré-multiplicar, das flutuações de velocidade na direção do escoamento, em unidades internas, E_{uu}^+ , em $y^+ \approx 15$, para os números de Reynolds de fricção de $Re_\tau \approx 300, 730, 1370$ e 2480 .



Fonte: Elaborado pelo autor.

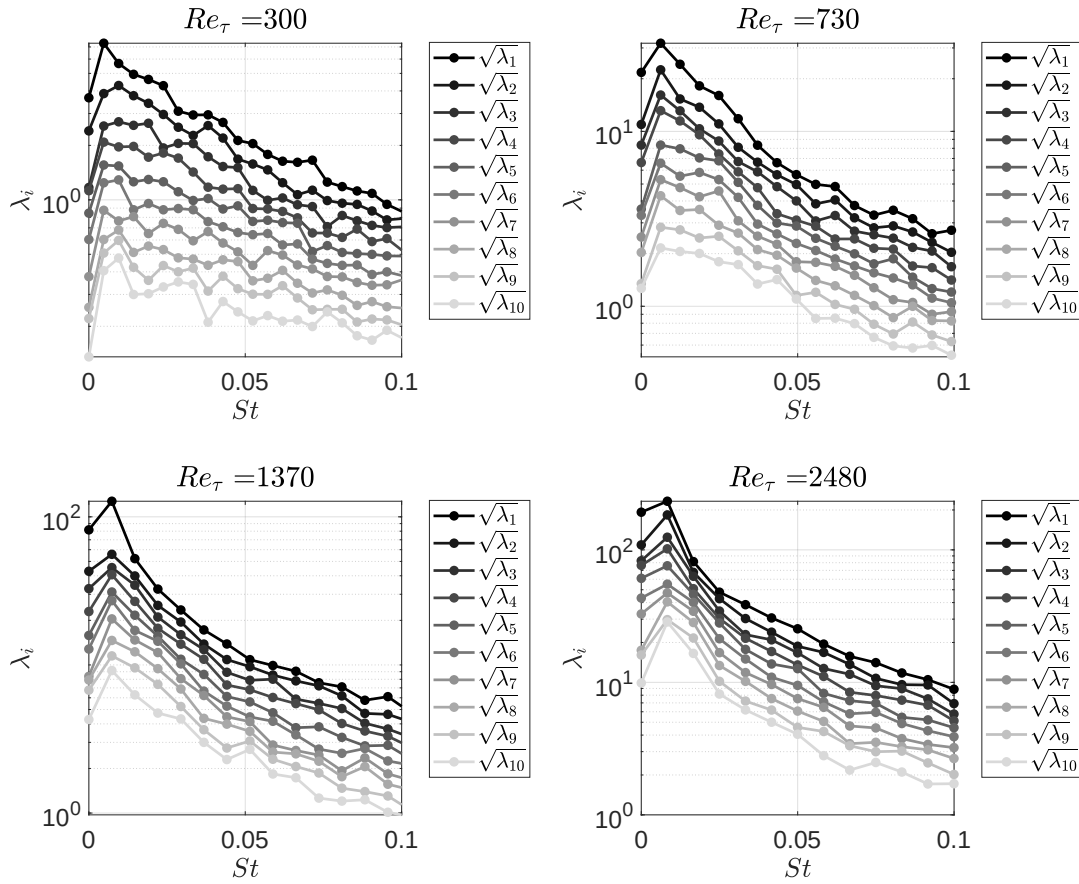
favorece o aparecimento de estruturas com maiores amplitudes das flutuações de velocidade na camada limite. Também é possível observar que para todos os casos há um pico para o primeiro autovalor em $St \approx 0,02$, indicando uma frequência dominante para o caso em que $k_z = 0$.

A Figura 12 mostra a contribuição cumulativa dos modos SPOD para a energia cinética turbulenta a $St = 0,02$ para todos os números de Reynolds de fricção analisados. Pode-se observar que a convergência dos autovalores do SPOD é relativamente rápida em todos os casos; observa-se que aproximadamente 40% da energia cinética turbulenta total pode ser reconstruída utilizando apenas o primeiro modo do SPOD para $Re_\tau \approx 300$ e 1370 , e cerca de 35% para $Re_\tau \approx 730$ e 2480 . Os cinco primeiros modos do SPOD representam mais de 80% da energia total em todas as frequências, chegando a 90% para $Re_\tau \approx 300$.

5.3 PARÂMETROS DA ANÁLISE DE RESOLVENTE

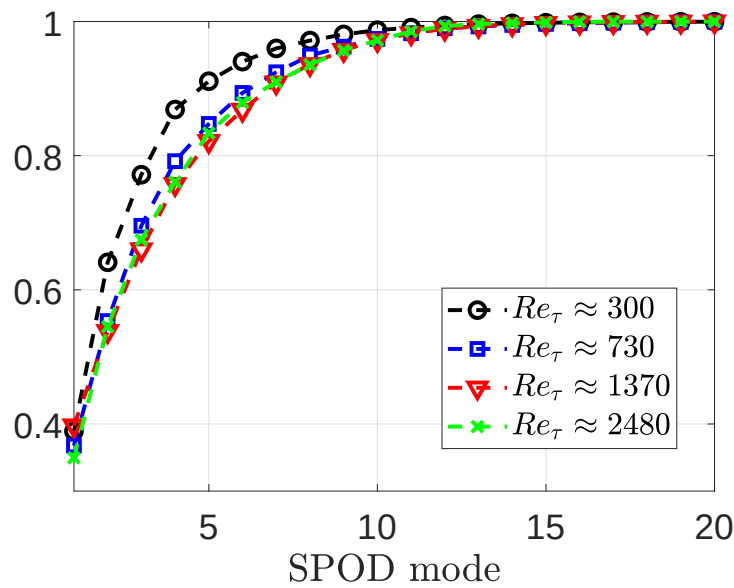
A análise de resolvente foi realizada para uma frequência equivalente a $St = 0,02$ e número de onda na direção da envergadura $k_z = 0$, com o objetivo de comparação com os

Figura 11 – Contribuição dos dez primeiros autovalores da SPOD em função do número de Strouhal para os números de Reynolds de fricção de $Re_\tau \approx 300, 730, 1370$ e 2480 .



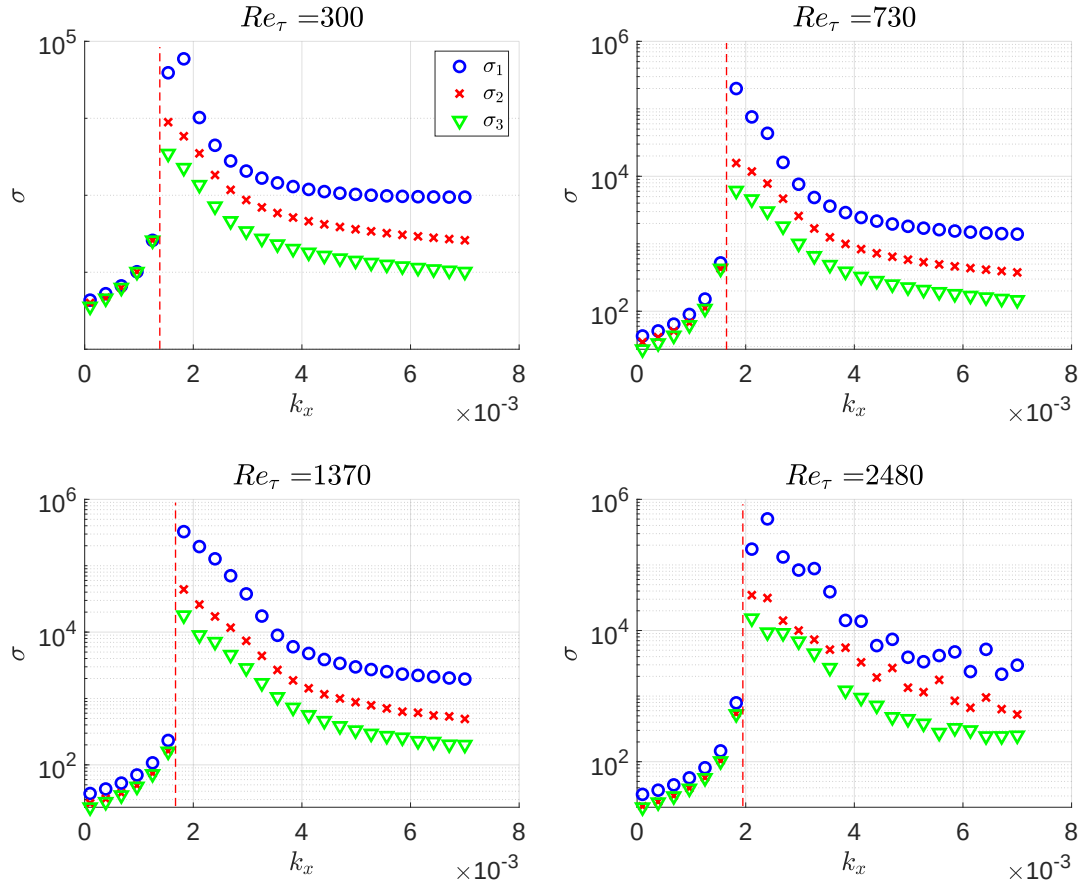
Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 12 – Contribuição cumulativa dos modos SPOD para a energia cinética turbulenta a $St = 0,02$ para os números de Reynolds de fricção de $Re_\tau \approx 300, 730, 1370$ e 2480 .



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 13 – Primeiros três ganhos da análise de resolvente em função do número de onda na direção do escoamento a $St = 0,02$ para os números de Reynolds de fricção de $Re_\tau \approx 300, 730, 1370$ e 2480 .



Fonte: Elaborado pelo autor.

resultados da SPOD. O número de onda na direção do escoamento, k_x , também é um parâmetro da análise de resolvente e não é conhecido a priori, uma vez que diferentes comprimentos de onda podem estar presentes no termo de forçamento. Para estudar o efeito de k_x na análise de resolvente, variou-se inicialmente esse parâmetro e analisaram-se os ganhos dominantes para todos os números de Reynolds avaliados. Os resultados estão apresentados na Figura 13. A linha tracejada vermelha em todos os casos corresponde a perturbações localizadas fora da camada limite, onde a velocidade de fase é igual à velocidade do escoamento livre, e o ganho do resolvente tende à infinito. As análises dos modos de forçamento e resposta para esses números de onda revelam que eles correspondem a modos do escoamento livre (*free-stream modes*), de forma semelhante ao observado por Dergham; Sipp; Robinet para uma configuração de degrau com escoamento reverso. Verificou-se que os modos de forçamento e resposta, nesses casos, estão predominantemente fora da camada limite e não são de interesse imediato para a dinâmica da camada limite.

Na Figura 13 é possível identificar um pico para o ganho ótimo (σ_1) dentro da camada limite para todos os números de Reynolds analisados. Esses picos estão associados a perturbações

dentro da camada limite, onde a velocidade de fase é inferior à do escoamento livre. Ademais, para esses picos em σ_1 , observa-se uma clara dominância da forçagem ótima, que resulta em uma resposta com ganho pelo menos uma ordem de grandeza superior aos subótimos (σ_2 e σ_3). Para a realização da análise de resolvente, utilizou-se, portanto, o valor de $k_x = 0,002$ correspondente aos maiores ganhos ótimos para cada um dos números de Reynolds analisados.

5.4 COMPARAÇÃO ENTRE SPOD E ANÁLISE DE RESOLVENTE

Nosso objetivo é realizar comparações quantitativas adicionais e detalhadas entre o primeiro modo da SPOD obtida a partir da base de dados da LES e a resposta ótima proveniente da análise de resolvente. Para avaliar a concordância entre esses dois métodos, definimos a seguinte métrica:

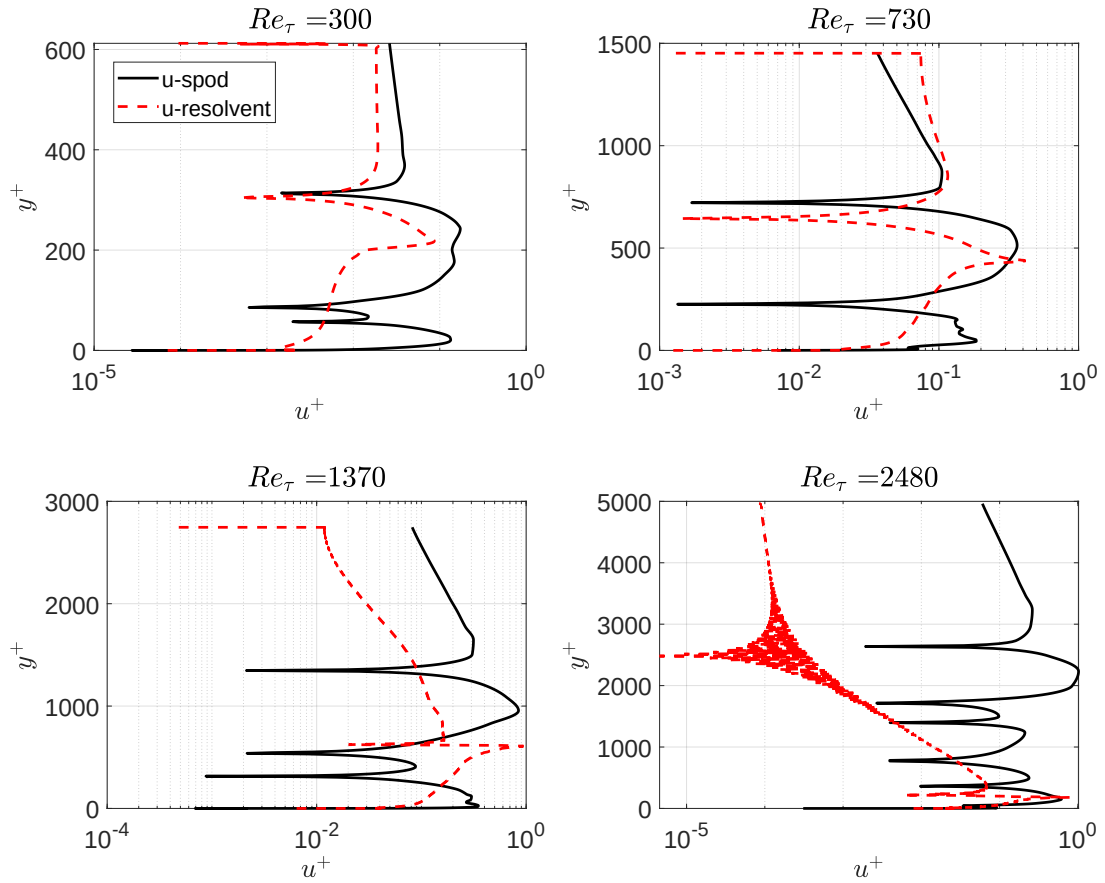
$$\beta = \frac{\langle \mathbf{q}_{1_{SPOD}}, \mathbf{q}_{1_{res}} \rangle}{\|\mathbf{q}_{1_{SPOD}}\| \|\mathbf{q}_{1_{res}}\|}, \quad (5.1)$$

onde $\mathbf{q}_{1_{SPOD}}$ é o primeiro modo da SPOD, $\mathbf{q}_{1_{res}}$ é a resposta ótima obtida por meio da análise de resolvente, e β representa a projeção de $\mathbf{q}_{1_{SPOD}}$ sobre $\mathbf{q}_{1_{res}}$; note que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto interno. Assim, $\beta = 1$ indica alinhamento perfeito entre os dois vetores, enquanto $\beta = 0$ indica desalinhamento total entre os vetores.

As comparações entre o primeiro modo SPOD e a resposta ótima da análise de resolvente, representadas pelo valor absoluto da parte real, estão apresentadas na Figura 14 para todos os números de Reynolds analisados. Podemos observar que para o resultado de $Re_\tau \approx 300$ a resposta ótima da análise de resolvente está bem próxima ao primeiro modo SPOD, com uma métrica de $\beta \approx 0,75$ entre eles, indicando um forte alinhamento entre os mecanismos de amplificação linear previstos pela análise de resolvente e as estruturas coerentes mais energéticas obtidas pela SPOD. Este resultado sugere que, para números de Reynolds mais baixos, as estruturas coerentes próximas à parede são bem modeladas pela resposta ótima da análise de resolvente, que corresponde a características fundamentais do escoamento.

Para os números de Reynolds intermediários, $Re_\tau \approx 730$ e 1370 , observa-se um decaimento no alinhamento entre o modo resolvente e o modo SPOD, com uma métrica de $\beta \approx 0,59$ e $\beta \approx 0,54$, respectivamente. Embora ainda exista uma similaridade notável entre o primeiro modo SPOD e a resposta ótima da análise de resolvente, o aumento do número de Reynolds introduz escalas adicionais do escoamento turbulento. Para o número de Reynolds mais alto, $Re_\tau \approx 2480$, a comparação entre os modos SPOD e resolvente deteriora ainda mais, com uma métrica de $\beta \approx 0,28$, indica a presença de interações mais complexas, sugerindo que os resultados se afastam das previsões fornecidas pelo modelo. O primeiro modo SPOD captura as estruturas energéticas dominantes do escoamento, porém a análise de resolvente identifica interações mais amplas entre forçagem e resposta, que podem não ser totalmente capturadas por um único modo. Isso sugere que, à medida que o número de Reynolds aumenta, o escoamento

Figura 14 – Primeiro modo SPOD (linha preta sólida) comparado com a resposta associada à forçagem ótima da análise de resolvente (linha vermelha tracejada) para $St = 0,02$ e $Re_\tau \approx 300, 730, 1370$ e 2480 .



Fonte: Elaborado pelo autor.

se torna mais multiescalar, e modos adicionais da análise de resolvente podem ser necessários para representar a gama completa de dinâmicas envolvidas.

Essas comparações destacam a eficácia da análise de resolvente em capturar as estruturas dominantes em escoamentos turbulentos em números de Reynolds mais baixos e intermediários.

6 CONCLUSÃO

No presente trabalho, utilizamos uma base de dados numérica de um escoamento turbulento sobre uma placa plana com gradiente adverso de pressão nulo, para os números de Reynolds de fricção de $Re_\tau \approx 300, 730, 1370$ e 2480 , obtida via LES por Eitel-Amor; Örlü; Schlatter, para estudar estruturas coerentes bidimensionais, ou seja, estruturas onde $k_z = 0$, e o efeito do aumento do número de Reynolds.

Uma análise espectral do escoamento, considerando a densidade espectral de potência das flutuações de velocidade na direção do escoamento sem a pré-multiplicação usual adotada em turbulência de parede, mostrou a presença de estruturas coerentes na direção da envergadura, com $k_z \rightarrow 0$, que não aparecem nos espectros pré-multiplicados padrões. Assim, nossos resultados indicam que essas ondas hidrodinâmicas coerentes têm significado físico e não são apenas um artefato da simulação. Elas devem ser entendidas como perturbações coerentes na direção da envergadura, cujo comprimento característico é muito maior do que a espessura da camada limite. Tais estruturas tem sido exploradas recentemente na literatura de turbulência limitada por parede, elas se mostram relevantes para aplicações aeroacústicas (Abreu et al., 2021; Amiet, 1976).

Neste estudo, utilizamos o método baseado em dados, a SPOD, para extrair as estruturas coerentes bidimensionais mais energéticas do escoamento. Tais estruturas foram observadas nos modos dominantes da SPOD, e foram modeladas utilizando a análise de resolvente localmente paralela, na qual perfis médios turbulentos obtidos de estações específicas da placa plana, ou seja, para diferentes números de Reynolds, foram utilizados como escoamentos base. Os resultados das comparações para baixo número de Reynolds, $Re_\tau \approx 300$, mostraram uma boa concordância entre a resposta ótima do escoamento e o modo dominante do SPOD, com um alinhamento de $\beta \approx 0,75$. Para números de Reynolds intermediários, $Re_\tau \approx 730$ e 1370 , esse alinhamento cai para $\beta \approx 0,59$ e $\beta \approx 0,54$, respectivamente, mas ainda pode-se observar uma concordância entre o primeiro modo SPOD e a resposta ótima da análise de resolvente. Já para o número de Reynolds mais alto, $Re_\tau \approx 2480$, a comparação se deteriora, chegando a um alinhamento de $\beta \approx 0,28$. Para números de Reynolds mais altos, as interações não lineares do escoamento turbulento se intensificam e a análise de Resolvente não consegue modelar com fidelidade.

Como lidamos com uma camada limite turbulenta, não se espera uma correspondência exata, mas as comparações aqui apresentadas para números de Reynolds baixos e intermediários mostram que a análise de resolvente fornece um modelo de ordem reduzida promissor para as perturbações bidimensionais consideradas neste estudo. Dessa forma, os resultados deste estudo contribuem para o aprofundamento do entendimento das estruturas coerentes em escoamentos turbulentos, fornecendo subsídios para a modelagem mais precisa e eficiente desses fenômenos e ampliando as possibilidades de aplicação em engenharia e ciência. Além disso, a integração de métodos como a análise resolvente e a SPOD pode ser explorada em aplicações práticas para controle de escoamentos turbulentos em diversas áreas.

6.1 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Com base nos resultados obtidos neste trabalho, sugerem-se as seguintes direções para pesquisas futuras:

- Análises adotando outros números de onda na direção da envergadura, kz diferente de zero.
- Análises adotando outros tipos de janelamento e modelos de ruído.

REFERÊNCIAS

- ABREU, L. I. **Coherent structures in wall-bounded turbulent flows and trailing edge noise**. 2019. Tese (Doctoral Thesis in Aeronautical and Mechanical Engineering) — Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, SP, Brazil, 2019. Disponível em: Biblioteca ITA. Acesso em: 05 set. 2024.
- ABREU, L. I. et al. **SPOD and resolvent analysis of near-wall coherent structures in turbulent pipe flows**. 2020. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/2004.11452>. Acesso em: 05 set. 2024.
- ABREU, L. I. et al. Spanwise-coherent hydrodynamic waves around flat plates and airfoils. **Journal of Fluid Mechanics**, Cambridge, v. 927, p. A1, 2021. Disponível em: <https://www.cambridge.org/core/journals/journal-of-fluid-mechanics/article/abs/spanwise-coherent-hydrodynamic-waves-around-flat-plates-and-airfoils/A39CE7C9DAC51974E183892188A00D3C>. Acesso em: 05 set. 2024.
- ADRIAN, R. J. Hairpin vortex organization in wall turbulence. **Physics of fluids**, New York, v. 19, n. 4, 2007. Disponível em: <https://pubs.aip.org/aip/pof/article/19/4/041301/256145/Hairpin-vortex-organization-in-wall-turbulence>. Acesso em: 05 set. 2024.
- ADRIAN, R. J.; MEINHART, C. D.; TOMKINS, C. D. Vortex organization in the outer region of the turbulent boundary layer. **Journal of fluid Mechanics**, Cambridge, v. 422, p. 1–54, 2000. Disponível em: <https://www.cambridge.org/core/journals/journal-of-fluid-mechanics/article/abs/vortex-organization-in-the-outer-region-of-the-turbulent-boundary-layer/14F269798F1EE2AF42AF2C4A6014B567>. Acesso em: 25 set. 2024.
- ALFONSI, G. et al. Proper orthogonal decomposition of turbulent channel flow. In: **Computational Fluid Dynamics 2000: Proceedings of the First International Conference on Computational Fluid Dynamics, ICCFD, Kyoto, Japan, 10–14 July 2000**. Berlin: Springer, 2001. p. 473–478. Disponível em: https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-642-56535-9_71. Acesso em: 25 set. 2024.
- AMIET, R. K. Noise due to turbulent flow past a trailing edge. **Journal of Sound and Vibration**, v. 47, n. 3, p. 387–393, 1976. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/0022460X76909482>. Acesso em: 05 set. 2024.
- BUSEMANN, A. **Ludwig Prandtl, 1875-1953**. [S.l.]: London, 1960. Disponível em: <https://royalsocietypublishing.org/doi/10.1098/rsbm.1960.0015>. Acesso em: 25 set. 2024.
- CAVALIERI, A. V.; JORDAN, P.; LESSHAFFT, L. Wave-packet models for jet dynamics and sound radiation. **Applied Mechanics Reviews**, New York, v. 71, n. 2, p. 020802, 2019. Disponível em: <https://asmedigitalcollection.asme.org/appliedmechanicsreviews/article-abstract/71/2/020802/726704/Wave-Packet-Models-for-Jet-Dynamics-and-Sound?redirectedFrom=fulltext>. Acesso em: 05 set. 2024.
- CAVALIERI, A. V. G.; JORDAN, P.; GERVAIS, Y. Axisymmetric superdirectivity in subsonic jets. **Journal of Fluid Mechanics**, Cambridge, v. 730, p. 559–592, 2013. Disponível em: [cambridge.org/core/journals/journal-of-fluid-mechanics/article/axisymmetric-superdirectivity-in-subsonic-jets/FA17FEB31A27CAA57C6AEC6313C6C036](https://www.cambridge.org/core/journals/journal-of-fluid-mechanics/article/axisymmetric-superdirectivity-in-subsonic-jets/FA17FEB31A27CAA57C6AEC6313C6C036). Acesso em: 05 set. 2024.

CHEVALIER, M. et al. **SIMSON: a pseudo-spectral solver for incompressible boundary layer flows**. [S.l.: s.n.], 2007. Disponível em: <https://www.semanticscholar.org/paper/SIMSON-> Acesso em: 05 set. 2024.

CORDIER, L.; BERGMANN, M. Post-processing of experimental and numerical data. **Proper Orthogonal Decomposition: An Overview, von Karman Institute for Fluid Dynamics, Lecture Series**, v. 3, p. 2003, 2003. Disponível em: http://fluid.ippt.gov.pl/pkor/LIMSI_PPT/documents/CordierBergmann.pdf. Acesso em : 25 set. 2024.

DERGHAM, G.; SIPP, D.; ROBINET, J.-C. Stochastic dynamics and model reduction of amplifier flows: the backward facing step flow. **Journal of Fluid Mechanics**, Cambridge, v. 719, p. 406–430, 2013. Disponível em: <https://www.cambridge.org/core/journals/journal-of-fluid-mechanics/article/abs/stochastic-dynamics-and-model-reduction-of-amplifier-flows-the-backward-facing-step-flow/0EDCED1E280DD7D5683E95C759100D14>. Acesso em: 05 set. 2024.

EITEL-AMOR, G.; ÖRLÜ, R.; SCHLATTER, P. Simulation and validation of a spatially evolving turbulent boundary layer up to $Re_\theta = 8300$. **International Journal of Heat and Fluid Flow**, Guildford, v. 47, p. 57–69, 2014. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0142727X14000319>. Acesso em: 25 set. 2024.

FREUND, J.; COLONIUS, T. Turbulence and sound-field pod analysis of a turbulent jet. **International Journal of Aeroacoustics**, London, v. 8, n. 4, p. 337–354, 2009. Disponível em: <https://journals.sagepub.com/doi/10.1260/147547209787548903>. Acesso em: 25 set. 2024.

GUDMUNDSSON, S. **General aviation aircraft design: Applied Methods and Procedures**. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2013.

HAMILTON, J. M.; KIM, J.; WALEFFE, F. Regeneration mechanisms of near-wall turbulence structures. **Journal of Fluid Mechanics**, v. 287, p. 317–348, 1995. Disponível em: <https://www.cambridge.org/core/journals/journal-of-fluid-mechanics/article/abs/regeneration-mechanisms-of-nearwall-turbulence-structures/3A4EDE208C75EFC5250278B4D11DC0F9>. Acesso em: 25 set. 2024.

HELLSTRÖM, L. H.; MARUSIC, I.; SMITS, A. J. Self-similarity of the large-scale motions in turbulent pipe flow. **Journal of Fluid Mechanics**, Cambridge, v. 792, p. R1, 2016. Disponível em: <https://people.eng.unimelb.edu.au/imarusic/publications/Edited> Acesso em: 05 set. 2024.

HOYAS, S.; JIMÉNEZ, J. Scaling of the velocity fluctuations in turbulent channels up to $Re_\tau = 2003$. **Physics of fluids**, Melville, v. 18, n. 1, 2006. Disponível em: <https://pubs.aip.org/aip/pof/article-abstract/18/1/011702/255572/Scaling-of-the-velocity-fluctuations-in-turbulent?redirectedFrom=fulltext>. Acesso em: 05 set. 2024.

HUSSAIN, A.; REYNOLDS, W. The mechanics of an organized wave in turbulent shear flow. **Journal of Fluid Mechanics**, Cambridge, v. 41, n. 2, p. 241–258, 1970. Disponível em: <https://www.cambridge.org/core/journals/journal-of-fluid-mechanics/article/abs/mechanics-of-an-organized-wave-in-turbulent-shear-flow/8FE76E0E31505D1039E0AB8F249CE304>. Acesso em: 05 set. 2024.

HUTCHINS, N.; MARUSIC, I. Evidence of very long meandering features in the logarithmic region of turbulent boundary layers. **Journal of Fluid Mechanics**, Cambridge, v. 579, p. 1–28, 2007. Disponível em: <https://www.cambridge.org/core/journals/journal-of-fluid-mechanics/article/abs/evidence-of-very-long-meandering-features-in-the-logarithmic-region-of-turbulent-boundary-layers/9E6EC2D03345C83E78742B9DCBCB9E59>. Acesso em: 05 set. 2024.

HUTCHINS, N.; MARUSIC, I. Large-scale influences in near-wall turbulence. **Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences**, London, v. 365, n. 1852, p. 647–664, 2007. Disponível em: <https://royalsocietypublishing.org/doi/10.1098/rsta.2006.1942>. Acesso em: 25 set. 2024.

JIMÉNEZ, J. Coherent structures in wall-bounded turbulence. **Journal of Fluid Mechanics**, Cambridge, v. 842, p. P1, 2018.

JONES, B. M. Stalling. **The Aeronautical Journal**, v. 38, n. 285, p. 753 – 770, 1934. Disponível em: <https://www.cambridge.org/core/journals/aeronautical-journal/article/abs/stalling/7F51CCB8F56E649D26D9274A52CBF518>. Acesso em: 05 set. 2024.

KLINE, S. J. et al. The structure of turbulent boundary layers. **Journal of Fluid Mechanics**, Cambridge, v. 30, n. 4, p. 741–773, 1967. Disponível em: <https://www.cambridge.org/core/journals/journal-of-fluid-mechanics/article/abs/structure-of-turbulent-boundary-layers/D0DEB24FDF12498D1574F36FA976B688>. Acesso em: 05 set. 2024.

LUMLEY, J. Similarity and the turbulent energy spectrum. **Journal of Fluid Mechanics**, New York, v. 10, n. 4, p. 855–858, 1967. Disponível em: <https://pubs.aip.org/aip/pfl/article-abstract/10/4/855/894579/Similarity-and-the-Turbulent-Energy-Spectrum?redirectedFrom=fulltext>. Acesso em: 05 set. 2024.

MARUSIC, I. et al. On the logarithmic region in wall turbulence. **Journal of Fluid Mechanics**, v. 716, p. R3, 2013. Disponível em: <https://www.cambridge.org/core/journals/journal-of-fluid-mechanics/article/on-the-logarithmic-region-in-wall-turbulence/77139D250215B6497D243B46F56977DD>. Acesso em: 05 set. 2024.

MARUSIC, I.; MATHIS, R.; HUTCHINS, N. Predictive model for wall-bounded turbulent flow. **Science**, Washington, v. 329, n. 5988, p. 193–196, 2010. Disponível em: <https://www.science.org/doi/10.1126/science.1188765>. Acesso em: 25 set. 2024.

MCKEON, B. J.; SHARMA, A. S. A critical-layer framework for turbulent pipe flow. **Journal of Fluid Mechanics**, Cambridge, v. 658, p. 336–382, 2010. Disponível em: <https://www.cambridge.org/core/journals/journal-of-fluid-mechanics/article/abs/criticallayer-framework-for-turbulent-pipe-flow/9F24E435E35F63E8D2A8BC20E8EE2C99>. Acesso em: 05 set. 2024.

MONTY, J. et al. A comparison of turbulent pipe, channel and boundary layer flows. **Journal of fluid mechanics**, Cambridge, v. 632, p. 431–442, 2009. Disponível em: <https://www.cambridge.org/core/journals/journal-of-fluid-mechanics/article/abs/comparison-of-turbulent-pipe-channel-and-boundary-layer-flows/EBDE151D3900E5EBD5F7DB8A6A6D3873>. Acesso em: 25 set. 2024.

NOACK, B. R. et al. A hierarchy of low-dimensional models for the transient and post-transient cylinder wake. **Journal of Fluid Mechanics**, Cambridge, v. 497, p. 335–363, 2003. Disponível em: <https://www.cambridge.org/core/journals/journal-of-fluid-mechanics/article/abs/hierarchy-of-lowdimensional-models-for-the-transient-and-posttransient-cylinder-wake/0F114BEB5DD20B7342E99ED8D0070C01>. Acesso em: 25 set. 2024.

POPE, S. B. **Turbulent flows. Measurement Science and Technology**, v. 12, n. 11, p. 2020–2021, 2001. Disponível em: <https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0957-0233/12/11/705/meta>. Acesso em: 05 set. 2024.

REYNOLDS, W.; HUSSAIN, A. The mechanics of an organized wave in turbulent shear flow. part 3. theoretical models and comparisons with experiments. **Journal of Fluid Mechanics**, Cambridge, v. 54, n. 2, p. 263–288, 1972. Disponível em: <https://www.cambridge.org/core/journals/journal-of-fluid-mechanics/article/abs/mechanics-of-an-organized-wave-in-turbulent-shear-flow-part-3-theoretical-models-and-comparisons-with-experiments/0D38C5E7F34321F377672DC4749D0664>. Acesso em: 05 set. 2024.

SANO, A. et al. Trailing-edge noise from the scattering of spanwise-coherent structures. **Physical Review Fluids**, New York, v. 4, n. 9, p. 094602, 2019. Disponível em: <https://journals.aps.org/prfluids/abstract/10.1103/PhysRevFluids.4.094602>. Acesso em: 05 set. 2024.

SCHLATTER, P.; ÖRLÜ, R. Assessment of direct numerical simulation data of turbulent boundary layers. **Journal of Fluid Mechanics**, Cambridge, v. 659, p. 116–126, 2010. Disponível em: <https://www.cambridge.org/core/journals/journal-of-fluid-mechanics/article/abs/assessment-of-direct-numerical-simulation-data-of-turbulent-boundary-layers/A3F3653249AEAC86A13E7E37B6FDABCD>. Acesso em: 05 set. 2024.

SCHLICHTING, H.; GERSTEN, K. Extensions to the prandtl boundary-layer theory. In: **Boundary-Layer Theory**. Berlin: Springer, 2000. p. 377–411. Disponível em: https://doi.org/10.1007/978-3-642-85829-1_4. Acesso em: 05 set. 2024.

SCHRAUF, G. Status and perspectives of laminar flow. **The aeronautical journal**, Cambridge, v. 109, n. 1102, p. 639–644, 2005. Disponível em: <https://www.cambridge.org/core/journals/aeronautical-journal/article/abs/status-and-perspectives-of-laminar-flow/BC5EE06B4032AC2D494AC3518BA0BAD3>. Acesso em: 05 set. 2024.

SIROVICH, L. **Turbulence and the dynamics of coherent structures. I. Coherent structures. Quarterly of applied mathematics**, v. 45, n. 3, p. 561–571, 1987.

SMITS, A. J.; MARUSIC, I. Wall-bounded turbulence. **Physics Today**, New York, v. 66, n. 9, p. 25–30, 2013.

TENNEKES, H.; LUMLEY, J. L. **A first course in turbulence**. Cambridge: MIT press, 1972. Disponível em: <https://books.google.com/books?hl=pt-BR&lr=id=h4coCj-IN0cCoi=fndpg=PR11&dq=A+first+course+in+turbulence&ots=DIncAdxcF&sig=Lc1H1vChBiSGRfDwXVDdx&pg=onepage>. Acesso em: 05 set. 2024.

TOWNE, A.; SCHMIDT, O. T.; COLONIUS, T. Spectral proper orthogonal decomposition and its relationship to dynamic mode decomposition and resolvent analysis. **Journal of Fluid Mechanics**, Cambridge, v. 847, p. 821–867, 2018. Disponível em: <https://www.cambridge.org/core/journals/journal-of-fluid-mechanics/article/spectral-proper-orthogonal-decomposition-and-its-relationship-to-dynamic-mode-decomposition-and-resolvent-analysis/EC2A6DF76490A0B9EB208CC2CA037717>. Acesso em: 05 set. 2024.

WEI, M.; FREUND, J. B. A noise-controlled free shear flow. **Journal of Fluid Mechanics**, Cambridge, v. 546, p. 123–152, 2006. Disponível em: <https://www.cambridge.org/core/journals/journal-of-fluid-mechanics/article/abs/noisecontrolled-free-shear-flow/573243AB8231A248B2BF7B9C996F8C15>. Acesso em: 25 set. 2024.

WHITE, F. M. **Fluid Mechanics**. 8. ed. New York: McGraw Hill, 2016. 1040 p. (Mechanical Engineering).