ASPECTOS DA HISTÓRIA DA ANÁLISE MATEMÁTICA DE CAUCHY A LEBESGUE

ROSA LÚCIA SVERZUT BARONI
SÍLVIO CÉSAR OTERO-GARCIA

CULTURA ACADÊMICA
Editora

Aspectos da História da Análise Matemática de Cauchy a Lebesgue

ROSA LÚCIA SVERZUT BARONI
SÍLVIO CÉSAR OTERO-GARCIA

Aspectos da História da Análise Matemática de Cauchy a Lebesgue

CULTURA ACADÊMICA
Editora

Cultura Acadêmica
Praça da Sé, 108
01001-900 – São Paulo – SP
Tel.: (0xx11) 3242-7171
Fax: (0xx11) 3242-7172
www.culturaacademica.com.br
feu@editora.unesp.br

CIP – BRASIL. Catalogação na Fonte
Sindicato Nacional dos Editores de Livros, RJ

B245a

Baroni, Rosa Lúcia Sverzut

Aspectos da história da análise matemática de Cauchy a Lebesgue [recurso eletrônico] / Rosa Lúcia Sverzut Baroni, Sílvio César Otero-Garcia. São Paulo: Cultura Acadêmica, 2014.

recurso digital

Formato: ePDF

Requisitos do sistema: Adobe Acrobat Reader

Modo de acesso: World Wide Web

Inclui bibliografia

ISBN 978-85-7983-601-5 (recurso eletrônico)

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Matemática – História. 3. Livros eletrônicos. I. Otero-Garcia, Sílvio César. II. Título.

14-18667 CDD: 510.9
CDU: 51(09)

Este livro é publicado pelo Programa de Publicações Digitais da Pró-Reitoria de Pós-Graduação da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" (Unesp)

Editora afiliada:

Asociación de Editoriales Universitarias de América Latina y el Caribe

Associação Brasileira de Editoras Universitárias

Sumário

Introdução

A disciplina de análise, oferecida em cursos de graduação em matemática, é, em geral, tida como geradora de grande ansiedade nos alunos (Bortoloti, 2003). Concebemos a análise matemática "não apenas como uma tentativa de fornecer rigor e fundamento ao Cálculo, mas como um conjunto de objetos histórico-matemáticos que criaram necessidades que não existiam, e para elas dispensaram esforços que culminaram em uma crise de fundamentos e no estabelecimento de novas concepções" (Baroni; Teixeira; Nobre, 2009, p.181). Seu conteúdo trata primordialmente dos processos infinitos em cujo centro encontra-se o conjunto dos números reais, sendo que o formalismo e abstração presentes em sua estrutura causa forte impacto, e o índice de reprovação costuma ser alto. Vários outros aspectos referentes à disciplina de análise foram, também, alvo de investigações por pesquisadores brasileiros, tais como Reis (2001), Pinto (2001, 2009), Ávila (2002), Bolognezi (2003), Souza (2003), Moreira, Cury e Vianna (2005), Batarce (2006), Lima (2006), Ciani, Ribeiro e Junior (2006). A maioria desses trabalhos apresenta resultados que diagnosticam e apontam as dificuldades dos alunos com a disciplina, mas não se percebem propostas explícitas para enfrentar os problemas detectados.

Dentro de um estudo abrangente a esse respeito, temos pesquisado alguns aspectos, por exemplo, como a análise se constituiu como disciplina no Brasil; como a aritmetização da análise tem sido trabalhada, à luz da história, em cursos de licenciatura; que conteúdos podem ser caracterizados como componentes da estrutura da disciplina; a contribuição de matemáticos para o desenvolvimento da análise, tanto no Brasil como em nível mundial; como as licenciaturas têm trabalhado com essa disciplina; qual o movimento existente na busca da separação dessa disciplina nos cursos de licenciatura e de bacharelado; as condições de funcionamento da aprendizagem no ensino de análise; a formação matemática do professor enquanto um problema vinculado às políticas cognitivas; algumas propostas para o trabalho em sala de aula, dentre outros (Otero-Garcia, 2011; Martinês, 2012; Otero-Garcia; Cammarota, 2013; Gomes, 2013).

Este texto, mais um elemento dessa pesquisa, apresenta alguns aspectos históricos da análise, de forma a construir subsídios que possam colaborar com o aluno e o professor para uma compreensão mais profunda dos conceitos que fazem parte da disciplina de análise. Isso porque, conforme nos apontam Baroni, Teixeira e Nobre (2009), utilizando argumentos presentes em Fauvel e Maanen (2000), reconhecidos estudiosos das relações entre história e educação matemática, o desenvolvimento histórico da matemática:

> [...] mostra que as ideias, dúvidas e críticas que foram surgindo não devem ser ignoradas diante de uma organização linear da matemática. Ele revela que esse tipo de organização axiomática surge apenas após as disciplinas adquirirem maturidade, de forma que a matemática está em constante reorganização [...] a História pode evidenciar que a matemática não se limita a um sistema de regras e verdades rígidas, mas é algo humano e envolvente. (Baroni; Nobre; Teixeira, 2009, p.166-7)

Nesse contexto, com relação ao ensino de funções, por exemplo, a respeito de todo esforço para dar uma fundamentação poderosa a esse conceito fundamental da matemática (Capítulo 1), Eisenberg (1991) mostra que até hoje ele é considerado como um dos mais difíceis de ser ensinado/aprendido:

> É um dos conceitos mais difíceis para o professor na sequência de ensino da matemática escolar. Em parte isso é devido aos diversos graus de complexidade e às numerosas noções subjacentes associadas com o conceito, mesmo funções do nível mais elementar podem ser abordadas em vários contextos, e dependendo da abordagem feita, várias dificuldades emergem desde o início. (p.140)

Já Grugnetti (2000) defende que a rica história das funções pode fornecer valiosas ideias sobre como introduzir, sob diferentes abordagens, esse conceito na escola básica, levando-se em conta, por exemplo, os diferentes níveis de representação, as diferentes notações, os diferentes nomes (operação, correspondência, relação, transformação etc.). Esses aspectos refletem as circunstâncias históricas nas quais esses objetos apareceram nos campos da matemática, da física, da lógica.

> Enquanto dois séculos atrás funções eram pensadas como fórmulas que descreviam relações entre duas variáveis envolvendo expressões algébricas (na visão de Euler), a definição moderna de função não é tão limitada... Na educação matemática é frequente esquecer que o conceito de função foi o resultado de um longo encadeamento do pensamento matemático desenvolvido vagarosamente. Ao contrário, na escola básica esse conceito é em geral introduzido muito cedo como uma base para a introdução de outros conceitos. Mas essa base realmente foi bem compreendida? O que aconteceu durante sua longa história? (Grugnetti, 2000, p.34)

***

Um segundo exemplo está relacionado com o infinito, importante conceito tanto em filosofia, ciências e matemática. Entretanto, dependendo do contexto, o termo infinito assume significados diferentes, muitas vezes conflitantes. No caso da matemática, são inegáveis as dificuldades em seu uso, conforme veremos neste texto (Capítulo 7). Isso também se reflete na educação matemática, como aponta Tirosh (1991):

> É claro que com essa grande variedade de significados técnicos [infinito potencial, infinito atual, infinito ordinal, infinitésimo], que frequentemente possuem propriedades diferentes, e mesmo conflitantes, os possíveis significados intuitivos que emergem em vários contextos também são variados e conflitantes. De fato, é bastante frequente encontrarmos ao longo de pesquisas de natureza cognitiva imagens conceituais associadas com infinito. Elas são geralmente transitórias, instáveis e conflitantes. (p.199)

Uma das conclusões do trabalho de Tirosh foi "que no caso da comparação de conjuntos infinitos, muitas das intuições primárias dos estudantes eram semelhantes àquelas experimentadas pelos matemáticos na história do desenvolvimento do conceito" (p.214).

***

Por fim, um último exemplo que gostaríamos de trazer, dentre os mais diversos possíveis em que a compreensão histórica de conceitos pode auxiliar em seu aprendizado, diz respeito à ideia de limite. Quando olhamos os aspectos relativos às questões de ensino e aprendizagem desse conceito (Capítulo 2), deparamo-nos com diversas pesquisas indicando a dificuldade que ele traz em si. Citamos, por exemplo, Cornu (1991), que realizou estudos a respeito dos vários obstáculos que aparecem no caminho dos alunos que vão aprender o conceito de limite:

> O conceito matemático de limite é uma noção particularmente difícil, típica da natureza de pensamento matemático avançado. Ele ocupa uma posição central que permeia a análise matemática toda. [...] Uma das maiores dificuldades no [seu] ensino e aprendizagem está não somente em sua riqueza e complexidade, mas também na

> extensão para a qual os aspectos cognitivos não podem ser produzidos puramente a partir da definição matemática. A diferença entre a definição e o próprio conceito [...] é didaticamente muito importante (Cornu, 1991, p. 153).

***

Ainda, se pensarmos que o ensino não se resume ao acúmulo de conteúdos e regras, mas a um conjunto de atitudes críticas em relação ao conhecimento, a história se manifesta como um dos mais importantes desafios para professores e alunos de matemática.

> Uma análise histórica e epistemológica permite que professores compreendam porque determinado conceito é difícil para o estudante (como, por exemplo, o conceito de função, o conceito de limite, mas também frações, operações com zero etc.) e pode ajudar na abordagem e desenvolvimento didático. (Grugnetti, 2000, p.30)

Embora a área de pesquisa que trata das relações entre a história e a educação matemática seja relativamente nova, vários matemáticos importantes, como Henri Poincaré e Felix Klein, já aclamavam essa importância.

Com as seguintes palavras, Poincaré (1908) começou sua palestra no quarto Congresso Internacional de Matemática em Roma: "Para prever o futuro da matemática, o verdadeiro método é estudar a sua história e o seu estado presente" (Poincaré, 1908, p.930).[1] Embora ele próprio nunca tenha se dedicado à história da matemática, a partir de sua observação, tanto historiadores quanto pesquisadores puderam obter uma orientação metodológica valiosa; nem tanto para satisfazer uma profecia improvável sobre o estado futuro da matemática, mas, sobretudo, para encontrar na história as origens e motivações das teorias contemporâneas, e para achar no presente a exposição mais proveitosa possível dessas teorias (Bottazini, 1986).

---

1 Pour prévoir l'avenir des Mathématiques, la vraie méthode est d'en étudier l'histoire et l'état présent.

Já Félix Klein fez, em sua própria casa, seminários sobre a história da matemática para um seleto grupo de participantes. Esses seminários foram publicados posteriormente por Courant e Neugebauer (Klein, 1979) e são considerados até hoje como uma das mais valiosas e compreensíveis a respeito da história da matemática no último século (Bottazini, 1986).

A concepção de história que Poincaré e Klein tinham não é, evidentemente, a mesma contida neste texto, que, ao tentar valorizar um aspecto histórico/epistemológico, poderia se aproximar de uma abordagem típica da história conceitual. No entanto, é importante destacar que, dentro dessa abordagem, temos consciência das fragilidades inerentes a ela, muitas delas decorrentes da impossibilidade de se recuperar tanto a totalidade dos acontecimentos quanto o próprio passado, impossibilitando o despojamento e fazendo com que o nosso relato seja apenas um construto pessoal que contém reconstituições de coisas que talvez nunca tenham sido construídas como tal. Ademais, as fontes que aqui foram usadas podem indicar, àqueles que se sentirem impelidos e motivados a fazê-lo, caminhos de estudos mais profundos e essenciais.

Nessa direção, apresentamos alguns fatos que marcaram a consolidação de certos conceitos, no contexto do movimento chamado de *aritmetização da análise*, e que se constituíram no que hoje chamamos de análise matemática ou análise real, ou simplesmente análise. Focamo-nos, para isso, nos eventos ocorridos no decurso do século XIX – que representamos simbolicamente como o período compreendido entre a publicação do *Cours d'Analyse* de Cauchy, em 1821 e a tese de doutorado de Lebesgue, em 1902; obras essas escolhidas por conta da importância que tiveram nessa época e têm neste texto. Tomamos essa decisão por considerar que já há suficiente material histórico sobre o período anterior acessível em língua portuguesa. Isso não quer dizer que não faremos incursões a certos aspectos do desenvolvimento da análise referentes a séculos anteriores, até porque foi essa matemática que influenciou, estimulou e serviu de base aos matemáticos que estudaremos.

***

O que precedeu o que hoje denominamos de análise foi o desenvolvimento do cálculo, que no período de Isaac Newton e Gottfried Leibniz "consistia de um conjunto de regras especiais e técnicas para diferenciação e integração, juntamente com a geometria de coordenadas desenvolvida desde Descartes" (Baron; Bos, 1974, p.43). Alguns autores consideram que a análise, pensada como um objeto independente, começou a se estabelecer em meados do século XVII durante a revolução científica, tendo vários nomes de destaque, como Johannes Kepler, Galileu Galilei, René Descartes, Pierre de Fermat, Christiaan Huygens; além dos já citados Newton e Leibniz, contribuído para sua origem (Jahnke, 2003). Além desses, também outros matemáticos do mesmo período deram importantes contribuições com trabalhos que aplicavam métodos da análise em disciplinas das ciências naturais. Por exemplo, em mecânica e dinâmica temos os trabalhos de Leonhard Euler (1736), Jean le Rond d'Alembert (1743) e Joseph-Louis Lagrange (1788); em mecânica dos fluidos temos Daniel Bernoulli (1738); e em mecânica dos movimentos dos corpos celestes temos Pierre Simon Laplace (1799a, 1799b, 1803, 1805, 1825). Outra teoria que recebeu contribuições com o desenvolvimento da análise foi a da probabilidade e estatística, sobretudo com os trabalhos de Jacques Bernoulli (1713).

Esse processo iniciado no século XVII se consolidou no século XIX, e o nome de Augustin-Louis Cauchy (Capítulo 2) é peça fundamental nele, por ter sido o primeiro a defender e divulgar a nova forma rigorosa de se fazer matemática que invadiu quase toda a análise, tendo sido figura primordial no estabelecimento de certos conceitos como os de *variável*, *limite*, *continuidade*, *convergência*, *derivada* e *integral*. Apesar disso, com o passar do tempo e o aprimoramento das ideias, perceberam-se algumas falhas nos trabalhos de Cauchy e imprecisões decorrentes da sua linguagem. Dentro do movimento em direção a dar mais precisão e/ou generalidade aos seus resultados, podemos destacar os nomes de Carl Friedrich Gauss, Bernard Bolzano e Niels Henrik Abel (Capítulo 3); Jean-Baptiste Joseph Fourier (Capítulo 4); Bernhard Riemann, Camille Jordan e Henri Lebesgue (Capítulo 6); e, claro, Karl Weierstrass

(Capítulos 5 e 7). O último deles tem seu nome muitas vezes tomado como sinônimo de rigor; ele e seus seguidores deram continuidade ao trabalho iniciado por Cauchy com notável sucesso. É costume dizer que Weierstrass "aritmetizou a análise", ou seja, que ele libertou a análise de seus argumentos geométricos e de sua compreensão intuitiva que prevaleciam na época, mas isso só foi possível com a ajuda de Richard Dedekind, Georg Cantor e David Hilbert que, juntamente com ele próprio, no fim do século XIX, apresentaram suas construções do conjunto dos números reais (Capítulo 7).

Assim, num movimento com idas e vindas que se estendeu por pelo menos duzentos anos, a análise foi se estabelecendo como área da matemática, ganhando cada vez mais rigor e generalidade. Há quem considere que muitas das restrições geradas por esse movimento são desnecessárias, uma vez que ele teria resolvido problemas que ele mesmo criou. Seja como for, conforme veremos ao longo deste texto, não se pode negar que a maioria das ideias desenvolvidas no século XX tiveram como base esse rigor e generalidade que foram aos poucos tomando conta da análise a partir dos séculos XVII e, principalmente, XIX.

***

Antes de finalizarmos esta introdução, gostaríamos de ressaltar que na maior parte do tempo seguimos grandes autores de obras de história da matemática, como Burton (2011), Cajori (2007), Eves (2004), Katz (1998), Lintz (2007), Struik (1948), e Wussing (1998); e de história da análise, como Dugac (2003) e Jahnke (2003), além de outros livros, artigos, dissertações e teses. Dessa forma, nosso relato, em certo sentido, divulga algo já escrito. Apesar disso, sempre que possível, também recorremos aos trabalhos originais, o que nos demandou muito tempo, mas acreditamos ter valido a pena: resultaram em numerosas citações, tanto em português como em suas línguas originais. E por falar nisso, observamos que todas as citações de obras em língua estrangeira foram traduzidas livremente por nós, de forma que quaisquer eventuais erros ou impropriedades são de nossa inteira responsabilidade.

1
O conceito de função

Segundo alguns historiadores, a ideia de dependência funcional já podia ser identificada em textos antigos, como em algumas funções tabuladas empiricamente usadas na astronomia, em tábuas para achar raízes quadradas, cúbicas etc., mas, a essa época, ainda não tinham sido criadas noções gerais de quantidade variável ou de função. Também podemos encontrar, já no século XIV, uma sugestão do que hoje chamaríamos de representação gráfica de funções a partir das ideias de Nicole d'Oresme (1323-1382), Thomas Bradwardine (1290-1349), ou das "escolas" de Oxford e Paris, com os estudos sobre "latitude de formas" que tornaram familiar a noção de dependência entre grandezas e quantidades, introduzindo os primeiros rudimentos de representação gráfica.

No entanto, a noção de função, como conhecemos hoje, começa a se manifestar quando se faz necessária uma ferramenta matemática para investigar fenômenos naturais – estudos iniciados por Galileu Galilei (1564-1642) e Johannes Kepler (1571-1630). Seu desenvolvimento se deu, sobretudo, graças às várias possibilidades permitidas pela notação algébrica criada por François Viète (1540-1603) e pela geometria analítica introduzida por René Descartes (1596-1650) e Pierre de Fermat (1601-1665).

Descartes já havia estabelecido que uma equação em duas variáveis, geometricamente representada por uma curva, indicava uma dependência. Todavia, essa ideia ficava restrita ao contexto das curvas, ou seja, essas variáveis geométricas estavam associadas à própria curva e não entre si. Entretanto, esse foi um momento importante. O estudo das quantidades variáveis veio a ser o divisor de águas entre a matemática clássica e a matemática moderna. De acordo com o matemático alemão Hermann Hankel (1839-1873),

> [...] a matemática moderna data do momento quando Descartes foi além do tratamento puramente algébrico das equações para estudar a variação das grandezas que uma expressão algébrica sofre quando uma de suas grandezas, dada de forma geral, passa através de uma série contínua de valores. (Hankel, 1870, p.1)[1]

Neste texto, vamos tratar do conceito de função a partir do século XVII, enfatizando, porém, seu desenvolvimento no século XIX, e as várias tentativas de esclarecimento desse conceito que levaram à aritmetização da análise, ou, segundo termo cunhado por Felix Klein (1849-1925),[2] *aritmetização da matemática* (Arithmetisierung der Mathematik) (Klein, 1895).

O conceito de função no século XVIII

Há inúmeras diferenças entre o cálculo da época de Isaac Newton (1642-1727) e Gottfried Leibniz (1646-1716) e o cálculo que veio depois da época de Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), e uma dessas diferenças recai sobre o conceito de função. Por volta

---

1 [...] neuere Mathematik von dem Augenblicke, als Descartes von der rein algebraischen Behandlung der Gleichungen, dazu fortschritt, die Grössen Veränderungen zu untersuchen, welche ein algebraischer Ausdruck er leidet, indem eine in ihm allgemein bezeichnete Grösse eine stetige Folge von Werten durchläuft.

2 Para mais detalhes, ver Bottazzini (2003).

de 1700, o cálculo lidava com a noção de variáveis e pelos anos 1800 já se usava a ideia de função. Veremos mais adiante que o conceito de função foi usado por Cauchy para esclarecer o conceito de limite e tornar possível uma definição rigorosa de derivada.

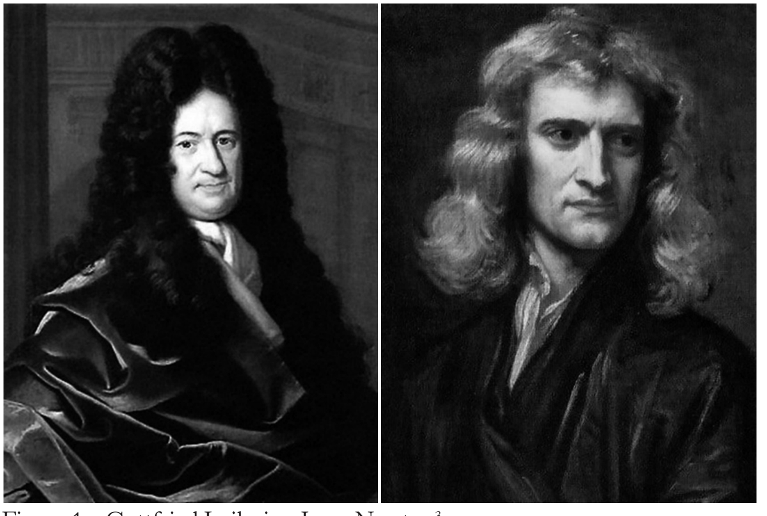

Figura 1 – Gottfried Leibniz e Isaac Newton[3]

Baseado em motivações físicas (movimento de corpos), Newton estabeleceu uma relação íntima entre os conceitos de função, variação e cálculo fluxional. O método de fluxões descreve as variações em termos de grandezas fluentes (funções) e só tem sentido se pensado em contextos naturais. Já Leibniz teve seu interesse despertado pelo estudo de curvas e o problema de tangentes; e foi nesse contexto que elaborou os conceitos fundamentais do cálculo. Tanto a ideia de função como a distinção entre curvas algébricas e transcendentes ocorreram a Leibniz quando ele se deparou com problemas de natureza geométrica ligados ao cálculo.

A palavra *função* apareceu, pela primeira vez, num artigo escrito por Leibniz em 1692 (Leibniz, 1692). Ele chamava de funções as quantidades geométricas variáveis relacionadas a uma curva, tais como coordenadas, tangentes, subtangentes, normais, raios de cur-

3 Todas as figuras presentes neste livro estão em domínio público.

vatura etc. Mas foi juntamente com Johann Bernoulli (1667-1748) que o conceito e a simbologia usados para representar funções ficaram estabelecidos. Isso porque Bernoulli, em um artigo sobre um problema isoperimétrico (1698) – originalmente em latim, republicado em francês alguns anos depois (Bernoulli, 1706; 1707) –, usava o termo *fonctions quelconques de appliquées*[4] para quaisquer expressões que contivessem as ordenadas como variáveis. Leibniz não se opôs ao uso do termo por Bernoulli e os dois discutiram, por cartas, como designar simbolicamente as "funções". Finalmente, em 1718, Bernoulli (1718; 1741) definiu o conceito formalmente pela primeira vez, e essa definição foi usada e padronizada por Leonhard Euler (1707-1783) em sua obra *Introductio in analysin infinitorum* (1748) da seguinte maneira: "Uma função de uma quantidade variável é uma *expressão analítica* formada de qualquer modo por tal quantidade variável e por números ou quantidades constantes" (Euler, 1748, p.4).[5] Euler não explicita o que seja *expressão analítica*, mas subentende-se que incluíam expressões algébricas (compostas por somas, subtrações, produtos, quocientes e raízes), expressões que envolviam funções elementares transcendentes (exponencial, logarítmica, trigonométricas), e também séries de potências e outras expressões que envolviam limites (Bottazzini, 1986; Jahnke, 2003).

Essa obra de Euler representou um importante momento na história da análise porque o conceito de função foi colocado em seu centro, ou seja, foram as funções (ao invés das curvas) os principais objetos de estudo que permitiram a algebrização da geometria e a consequente separação da análise infinitesimal da geometria propriamente dita. Em sua outra obra, *Institutiones Calculi Differentialis*, Euler (1755) retoma o conceito de função com mais genialidade: "Aquelas quantidades que dependem de outras, isto é, aquelas quantidades que experimentam uma variação quando

4 Literalmente, funções quaisquer de ordenadas. O termo "*appliquée*", nesse contexto, pode ser traduzido como "ordenadas" – ainda que literalmente não tenha esse sentido.

5 Functio quantitatis variabilis, est expressio analytica quomodocunque composita ex illa quantitate variabili et numeris seu quantitatibus constantibus.

outras variam, chamam-se funções dessas quantidades" (Euler, 1755, p.vi),[6] mais próximo, portanto, não só do conceito atual de função, como também do conceito que seria adotado por Cauchy no século seguinte.

Figura 2 – Johann Bernoulli e Leonhard Euler

O conceito de função a partir do século XIX

Cauchy (1821), em seu *Cours d'analyse*, obra percursora da nova era de rigor que caracterizou o século XIX,[7] escreveu:

> Quando quantidades variáveis estão de tal forma ligadas entre si que, os valores de algumas sendo dados, podemos determinar os valores de todas aquelas outras, imaginamos essas diversas quantidades expressas por meio de algumas dentre elas, as quais recebem então o nome de variáveis independentes; e as quantidades res-

6 Quae autem quantitates hoc modo ab aliis pendent, ut his mutatis etiam ipsae mutationes subeant, eae harum functiones appellari solent.

7 Para mais detalhes sobre o conceito de função na obra de Euler, recomendamos a leitura de Martínez (2008).

> tantes, expressas por meio das variáveis independentes, são o que chamamos de funções dessas variáveis. (Cauchy, 1821, p.19-20)[8]

Além disso, introduziu a ideia de *função explícita* (por exemplo $\log x$, $\operatorname{sen} x$, $x + y$, xyz etc.) e de *função implícita* (quando somente as relações entre as funções e as variáveis são dadas, ou seja, as funções não podem ser expressas diretamente em termos das variáveis), mas sempre indicando que funções são dadas por meio de alguma equação ou expressão. Isso também ocorre quando ele define funções simples e compostas. Dessa forma, mesmo que Cauchy tenha suprimido o termo *expressões analíticas* de sua definição, essa noção ainda estava presente em sua mente – por outro lado, conforme veremos em *As contribuições de Cauchy*, nem todas as suas demonstrações e conceitos relacionados a funções estavam baseados na ideia de expressão analítica.

Também Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), um ano depois de Cauchy, apresentou seu conceito de função:

> Em geral, a função fx representa uma sequência de valores ou de ordenadas das quais cada uma é arbitrária. A abscissa x podendo receber uma infinidade de valores, haverá um mesmo número de ordenadas fx. Todas têm valores numéricos reais, ou positivos, ou negativos, ou zero. Não supomos que essas ordenadas estejam sujeitas a uma lei comum; elas se sucedem de uma maneira qualquer, e cada uma delas é dada como se fosse uma única quantidade. (Fourier, 1822, p.552)[9]

---

8 Lorsque des quantités variables sont tellement liées entre elles que, les valeurs de quelques-unes étant données, on puisse en conclure celles de toutes des autres, on conçoit ces diverses quantités exprimées au moyen de plusieurs d'entre elles, que prennent alors le nom de variables indépendantes; et les quantités restantes, exprimées au moyen des variables indépendantes, sont ce qu'on appelle des fonctions de ces mêmes variables.

9 En général, la fonction fx représente une suite de valeurs ou d'ordonnées dont chacune est arbitraire. L'abscisse x pouvant recevoir une infinité de valeurs, il y a un pareil nombre d'ordonnées fx. Toutes ont des valeurs numériques actuelles, ou positives, ou négatives, ou nulles. On ne suppose point que ces

Diferentemente de Cauchy, Fourier, ao se referir a função como uma sucessão de valores quaisquer, evitou conscientemente a ideia de que as ordenadas devessem seguir uma lei matemática única. Como resultado, a identificação, até então em voga de função como expressão analítica, também passou a ser discutida (Wussing, 1998). Entretanto, Fourier, em sua demonstração da convergência da série (de Fourier) de uma função arbitrária, explicitamente usou o fato de que se dois valores a e x diferem *muito pouco* (um valor infinitamente pequeno), então os valores $f(a)$ e $f(x)$ coincidem, ou seja, Fourier ainda atrelava ao conceito de função o de continuidade (Fourier, 1822; Lützen, 2003).

Figura 3 – Nicolas Lobachevskiy

Os primeiros passos mais claros dados na direção de, num primeiro momento, retirar a exigência de uma expressão analítica para a definição de função, foram dados pelos matemáticos Nicolas Ivanovich Lobachevskiy (1793-1856) e Johann Peter Gustav Lejeune

ordonnées soient assujetties à une loi commune; elles se succèdent d'une manière quelconque, et chacune d'elles est donnée comme le serait une seule quantité.

Dirichlet (1805-1859). Em 1834, Lobachevskiy, em seu trabalho sobre séries trigonométricas, escreveu:

> O conceito geral sugere que como função de se denomine um número dado para todo x e que varia progressivamente com ele. O valor da função pode tanto ser obtido por meio de uma expressão analítica, quanto por meio de uma condição que ofereça uma maneira de se examinar todos os números e de eleger um dentre eles; bem, por último, pode existir uma dependência que permaneça desconhecida. (apud Youschkevitch, 1976, p.77, em inglês e russo)[10]

Três anos mais tarde, Dirichlet (1837) conceituou função, baseando-se na definição de Fourier:

> Vamos supor que a e b são dois valores dados e seja uma quantidade variável que assume, gradualmente, todos os valores entre a e b. Agora, se a cada x corresponde um único, finito y de modo que, conforme x varia continuamente através do intervalo de a até b, $y = f(x)$ varia do mesmo modo gradualmente, então y é chamado uma função contínua de x para esse intervalo. (p.152)[11]

Como se nota, tanto Lobachevskiy (*para todo* x *e que varia progressivamente com ele*), quanto Dirichlet (x *seja uma quantidade*

---

10 Общее понятие требует, чтобы функцией от x называть число, которое дается для каждого x и вместе с x постепенно изменяется. Значение функции может быть дано и аналитическим выражением, или условием, которое подает средство испытывать все числа и выбирать одно из них; или, наконец, зависимость может существовать, и оставаться неизвестной.

11 Man denke sich unter a und b zwei feste Werthe und unter x eine veränderliche Grösse, welche nach und nach alle zwischen a und b liegenden Werthe annehmen soll. Entspriecht unn jedem x ein einziges endliches y und zwar so, dass, während x das Intervall von a bis b stetig durchläuft, $y = f(x)$ sieh ebenfalls allmählich verändert, so heisst y eine stetige oder continuirliche Function von x für dieses Intervall.

que assume, gradualmente, todos os valores entre a *e* b), tinham em mente exclusivamente funções contínuas. Assim, uma vez que a questão das expressões analíticas fora resolvida, restava a da continuidade para que uma definição mais geral de função fosse obtida; e esse segundo e decisivo passo foi dado por Hankel (1870, 1871) em seus dois trabalhos *Grenze* e *Untersuchungen über die unendlich oft oszillierenden und unstetigen Funktionen* (Hawkins, 1970; Wussing, 1998).

Nesses trabalhos, Hankel analisa a noção de função dada por Dirichlet (e a compara com a dada por Euler), que, para ele, não permitia que as funções possuíssem propriedades mais gerais, uma vez que as relações existentes entre seus diferentes valores simplesmente desapareciam. A partir disso, apresenta uma nova definição, muito próxima da noção moderna de correspondência entre dois conjuntos de números:

> Uma função se diz y de x se a cada valor da magnitude variável x que se move dentro de um certo intervalo, corresponde-lhe um determinado valor de y; não importa se y depende de x em todo o intervalo segundo a mesma lei ou não; se a dependência pode ser expressa por meio de operações matemáticas ou não. (Hankel, 1870, p.5)[12]

Vale ressaltar, no entanto, que nem o conceito de "conjunto" nem o de "número" estavam estabelecidos na época. Na verdade, a definição em termos de conjuntos arbitrários apareceu apenas no início do século XX, quando Georg Cantor (1845-1918), com a teoria dos conjuntos, definiu função como um subconjunto do

---

12 Eine Function heisst y von x, wenn jedem Werthe der veränderlichen Grösse, x innerhalb eines gewissen Intervalles ein bestimmter Werth von y entspricht; gleichviel, ob y in dem ganzen Intervalle nach demselben Gesetze von x abhängt oder nicht; ob die Abhängigkeit durch mathematische Operstionen ausgedrückt werden kann oder nicht.

produto cartesiano de dois ou mais conjuntos com determinadas propriedades (Wussing, 1998).

Figura 4 – Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet e Hermann Hankel

2
As contribuições de Cauchy

Figura 5 – Augustin-Louis Cauchy

Cauchy apresentou um novo estilo de rigor que formou o princípio guia para grande parte do desenvolvimento da análise no século XIX. (Baron; Bos, 1985, p.45)

Para terminar nossos breves comentários sobre a influência de Cauchy na Matemática ocidental, iremos colocá-lo dentro da perspectiva histórica apropriada. Assim, ele pertence ao período prévio ao "estágio de arte" de nossa Matemática, sendo um de seus precursores. Ocupa, portanto, a posição que Eudoxo ocupou na Matemática grega. Com mais precisão, Eudoxo resolveu o "impasse dos incomensuráveis" na Geometria grega com sua "teoria das magnitudes", como exposta no Livro V dos *Elementos* de Euclides, e Cauchy resolveu o "impasse dos infinitésimos" com sua "teoria dos

> limites". Esses fatos fundamentais são em geral obscurecidos porque não são colocados dentro de uma perspectiva histórica correta, isto é, como períodos correspondentes na evolução de duas Culturas Históricas distintas: a Grega e a Ocidental. (Lintz, 2007, p.357)

Como já foi observado, o século XIX é chamado de "era do rigor". Esse rigor podemos compreender como sendo algo que invadiu quase toda a análise, transformando-a na disciplina que hoje em dia é ensinada nas universidades; não foi apenas uma questão de tornar mais claros determinados conceitos básicos e mudar as demonstrações de uns poucos teoremas. Foi um processo de criação que produziu novas áreas e conceitos na matemática como, por exemplo, continuidade uniforme e pontual, convergência uniforme e pontual, compacidade, completude etc.

Mas o rigor em si não era o objetivo dos matemáticos da época; eles estavam voltados a resolver questões técnicas e desenvolver novos teoremas. Um exemplo disso é o interesse despertado pelas séries de Fourier, que acabou mudando velhas ideias a respeito de funções, integral, convergência, continuidade etc. Também podemos citar o desenvolvimento das equações diferenciais, teoria do potencial e funções elípticas como outras áreas que contribuíram com o processo de rigorização (Lützen, 2003).

Também podemos olhar o aspecto educacional como um grande motivador no que dizia respeito ao rigor, uma vez que vários professores buscavam mudanças ao ensinar os fundamentos da análise. Esse foi o pano de fundo para as reformas promovidas por Cauchy e Karl Weierstrass (1815-1897) e da construção dos números reais por Richard Dedekind (1831-1916) (Lützen, 2003, Grabiner, 1981, Bottazzini, 1986).

* * *

No século XVIII e começo do século XIX, na França, a análise estava bastante ligada à física teórica; por outro lado, sobretudo na Alemanha, na primeira metade do século XIX, as escolas e universidades tomaram o lugar das escolas técnicas com relação a formação e pesquisa em matemática (Schubring, 1983). Esse cenário, combinado com o movimento neo-humanista, culminou no desenvolvimento da matemática como campo independente. Ao mesmo tempo, a análise estava se separando da geometria: Newton e Leibniz são considerados os pais do cálculo, mas inconsistências em suas teorias fundamentadas nos infinitésimos,[1] cuja base maior era a geometria, fizeram com que se procurasse uma alternativa para constituir a análise: os números. Os reais foram construídos a partir dos racionais, que, por sua vez, foram construídos a partir dos naturais, e a análise passou a se basear diretamente nessas novas ideias, desligando-se, assim, completamente da geometria (veja o Capítulo 7) (Lützen, 2003; Reis, 2001).

O movimento de rigorização da análise pode ser dividido, segundo Lützen (2003), em dois períodos: o francês — dominado por Cauchy, tratado neste capítulo; e o alemão – dominado por Weierstrass, que será tratado no Capítulo 5. É evidente que outros matemáticos tiveram importante papel nesse processo; muitos deles serão lembrados no decorrer de nossas colocações.

***

Augustin-Louis Cauchy nasceu em Paris, em 21 de agosto de 1789, logo depois da queda da Bastilha, e faleceu em Sceaux, próximo a Paris, em 22 de maio de 1857. Seu pai ocupou várias posições de destaque na administração pública, e Cauchy sempre viveu em ambientes de alto nível cultural. Em 1805, foi estudar na École Polytechnique e, a partir de 1810, atuou como engenheiro numa base naval em Cherbourg até 1813, quando voltou a Paris para dedicar-se a seus estudos nas ciências matemáticas. Após a restauração da monarquia na França, Cauchy foi contratado, em 1816, para ensinar análise na mesma École Polytechnique onde estudara e, nesse mesmo ano se tornou membro da Académie Royale des Sciences. Durante o período de quinze anos em que foi professor na École, Cauchy produziu grande parte de seus trabalhos ligados à

1 Euler (1755) definiu infinitésimos como quantidades menores que qualquer outra quantidade dada. Modernamente, $x \in \mathbb{R}^*$, em que $\mathbb{R}^*$ é uma extensão do conjunto dos números reais, é um infinitesimal se $|x| < r$, para todo real positivo r (Keisler, 1976). Voltaremos a tratar desse ponto mais adiante.

fundamentação da análise. Isso se deve, em parte, ao compromisso estabelecido pelos professores dessa escola de escreverem textos em todos os níveis (didático, científico). Cauchy seguiu essa tradição e, nesse período, escreveu três livros: *Cours d'analyse de l'École Polytechnique* (1821); *Résume des leçons sur le calcul infinitésimal* (1823), e *Leçons sur le calcul différentiel* (1829).[2] Apesar de gostar muito de lecionar, Cauchy nem sempre era bem aceito, tanto pelos seus alunos, que não apreciavam seu estilo teórico, quanto pelos seus próprios colegas e superiores, que consideravam que ele gastava muito tempo com detalhes na parte introdutória, em detrimento das aplicações. Mas foram exatamente essas características que o tornaram famoso e iniciaram o movimento em torno do rigor (Cauchy, 1929; Diedonné, 2012; Gilain, 1989).

Cauchy tem trabalhos em diversas áreas, tais como na teoria de funções complexas, álgebra (permutações), teoria dos erros, mecânica celeste, física matemática, mas seu nome está associado definitivamente à análise, pela contribuição que deu em seus fundamentos. Na verdade, foi a obra de Cauchy sobre o cálculo, como um todo, e não seus elementos separadamente, que a fizeram tão diferente da de seus predecessores. Talvez, por isso, alguns autores indicam que Cauchy "tomou" várias ideias de Bernard Bolzano (1781-1848) – é fato que ideias semelhantes às de Cauchy a respeito do cálculo foram desenvolvidas ao mesmo tempo por Bolzano, um padre tcheco que sempre viveu em Praga. Tudo indica, no entanto, que durante o período em que Bolzano viveu lá, Cauchy não o encontrou, e que a semelhança entre as ideias de ambos foi uma simples coincidência; retomaremos esse assunto no item 3.2. Além disso, são encontradas várias semelhanças entre certos pontos de seus trabalhos com os de Euler, Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), Sylvestre François Lacroix (1765-1843) e Siméon Denis

2 De início, os professores deveriam, antes de ensinar cálculo diferencial e integral, apresentar por escrito o que chamavam de "análise algébrica", correspondendo mais ou menos ao volume um do Introductio de Euler (1828). O famoso *Cours d'analyse* de Cauchy teve, a princípio, esse papel.

Poisson (1781-1840); indicando, de certa forma, raízes naturais para seus conceitos, teoremas e demonstrações (Jourdain, 1913).

Euler assumia que toda expressão algébrica tinha um significado também para as variáveis complexas – era função dos matemáticos achar esses valores, ou seja, Euler, assim como Lagrange, aceitava a generalidade dessas expressões. Já Cauchy defendia que uma expressão analítica somente assumia valores onde havia sido definida. Se se quisesse estender além do domínio inicialmente dado, seria necessário dar uma nova definição. Na própria introdução do *Cours d'analyse*, ele menciona isso como algo que seus leitores poderiam ter dificuldade de aceitar. Assim, mesmo que Cauchy confundisse o conceito de função com o de expressão analítica, ele não aceitava a generalidade dessas expressões.

Vamos, agora, semelhantemente a Lützen (2003), detalhar um pouco mais alguns conceitos da análise de Cauchy, listando uma série de definições que aparecem em seu *Cours d'analyse* (variável, limite, quantidade infinitamente pequena, continuidade) (Cauchy, 1821) e em seu *Résumé* (derivada, integral) (Cauchy, 1823).

Variáveis e limites

> Nomeamos quantidade *variável* aquela que se considera como passível de receber sucessivamente muitos valores diferentes uns dos outros. [...] Chamamos, ao contrário, quantidade *constante* [...] toda quantidade que recebe um valor fixo e determinado. Quando os valores sucessivamente atribuídos a uma mesma variável se aproximam indefinidamente de um valor fixo, de maneira a terminar por dele diferir tão pouco quanto queiramos, esse último é chamado o *limite* de todos os outros. (Cauchy, 1821, p.4)[3]

3 On nome quantité *variable* celle que l'on considère comme devant recevoir successivement plusieurs valeurs différentes les unes des autres. [...] On appelle au contraire quantité *constante* [...] toute quantité qui reçoit une valeur fixe et déterminée. Lorsque les valeurs successivement attribuées à une même

A definição de Cauchy de variável diferencia-se da de Euler em alguns aspectos. Por exemplo, Euler (1748, p.4) definiu variável como "uma quantidade numérica indeterminada, ou geral, que abrange todos os valores determinados",[4] enquanto para Cauchy as variáveis assumem diferentes valores, mas não necessariamente todos, ou seja, podem estar limitadas a um certo intervalo. Além disso, o conceito de Cauchy é dinâmico já que, em particular, as variáveis podem ter limites, enquanto o conceito de Euler se aproxima mais do sentido moderno de elemento arbitrário ou genérico de um conjunto. Porém, deve ser observado que, diferentemente do que temos hoje, Cauchy permitia, em alguns casos, que uma variável (ou sequência) pudesse ter mais do que um limite. Isso pode ser visto em sua formulação do teste da raiz para convergência de séries de termos positivos, mais propriamente na demonstração desse resultado em que o limite, no caso, é o que hoje consideramos um ponto de acumulação,[5] e o maior valor desses limites é exatamente o que chamamos de *lim sup* (Lützen, 2003).

> Primeiro Teorema: procura o limite, ou os limites, para os quais converge, ao mesmo tempo em que n cresce indefinidamente, a expressão $(u_n)^{1/n}$; e designa por k o maior desses limites, ou, em outros termos, o limite dos maiores valores da expressão da qual se trata. A série $[u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots]$ será convergente, se se tem $k < 1$, e divergente se se tem $k > 1$. (Cauchy, 1821, p.132)[6]

---

variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, cette dernière est appelée la *limite* de toutes les autres.

4 Cum ergo omnes valores determinati numeris exprimi queant, quantitas variabilis omnes numeros cujusvis generis involvit.

5 Dizemos que $a \in \mathbb{R}$ é ponto de acumulação do conjunto $X \subset \mathbb{R}$ se todo aberto A contendo a contém pelo menos um ponto de X distinto de a.

6 Premier Théorème. Cherchez la limite ou les limites vers lesquelles converge, tandis que n croit indéfiniment, l'expression $(u_n)^{1/n}$; et désignez par k la plus grande de ces limites, ou, en d'autres termes, la limite des plus grandes valeurs de l'expression dont il s'agit. La série série $[u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots]$ sera convergente, si l'on $k < 1$, et divergente, si l'on a $k > 1$.

O conceito de limite de Cauchy, conforme aponta Grabiner (2005), se aproxima muito da correspondente concepção moderna quando consideramos não propriamente a maneira como limite foi definido por ele, mas como de fato operava com essa definição. Quando provava algum resultado, Cauchy traduzia sua definição de limite em termos de desigualdades e épsilons e deltas, como se faz atualmente. Para efeitos comparativos, definições comuns no século XVIII, como a de Jean le Rond d'Alembert (1717-1783) e Jean-Baptiste de La Chapelle (1710-1792) (na *Encyclopédie*) nunca foram traduzidas em termos de inequações e, também, nunca foram usadas para provar nenhum resultado substancial (Grabiner, 2005).

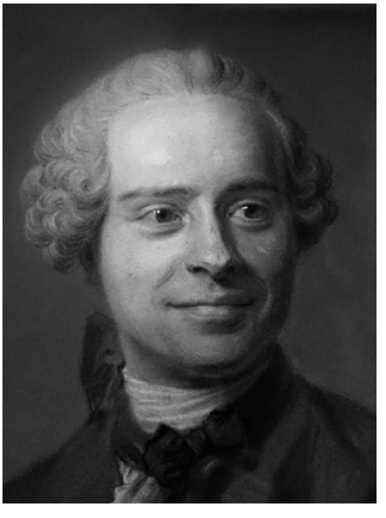

Figura 6 – Jean le Rond d'Alembert

Quantidade infinitamente pequena

> Dizemos que uma quantidade variável torna-se infinitamente pequena, quando seu valor numérico decresce indefinidamente de maneira a convergir para o limite zero. (Cauchy, 1821, p.26)[7]

A noção de grandeza infinitamente pequena já pode ser percebida na matemática antiga dos gregos em suas tentativas de superar as dificuldades lógicas encontradas em expressar razões e proporções de segmentos (vaga ideia de continuidade), em termos de números (para eles sempre discretos). Todavia, o rigor grego excluía o *infinitamente pequeno* das demonstrações geométricas e o que prevaleceu na época foi o chamado *método de exaustão*. Problemas de variação não eram abordados quantitativamente pelos cientistas gregos. Também podemos perceber algumas aproximações desse conceito, por exemplo, com os filósofos escolásticos, nos indivisíveis de Bonaventura Cavalieri (1598-1647) e na introdução da geometria analítica e representação de quantidades variáveis, no século XVII (Bourbaki, 2007; Thiele, 2003).

Mas foi com a constituição do cálculo, sobretudo com Newton e Leibniz, que os infinitésimos tomaram importância. Newton, embora os usasse, dizia que seu cálculo (fluxões) não dependia deles; já Leibniz trabalhou bastante com essas quantidades, sobretudo com as diferenciais. Sabemos ainda que as ideias de Newton e Leibniz receberam várias críticas, e esse processo acabou por estabelecer um movimento de aprimoramento das noções do cálculo. Euler defendia que uma quantidade infinitamente pequena (ou evanescente) era simplesmente algo que viria a ser zero, mas também recebeu críticas. E assim foi com d'Alembert, Lagrange e outros, até chegarmos a Cauchy que, como vimos, escreveu que uma variável que tem zero como limite *se torna* infinitamente pequena. Esse conceito

7 On dit qu'une quantité variable devient infiniment petite, lorsque sa valeur numérique décroit indéfiniment de manière à converger vers la limite zéro.

é usado por Cauchy em várias de suas obras, mas hoje muitos historiadores defendem que a centralidade está no conceito de limite e os infinitésimos seriam apenas abreviações úteis para as variáveis que têm limite nulo. Assim, devemos ressaltar que, mesmo aceitando a simplicidade dos infinitésimos, Cauchy redefiniu esse conceito, sobretudo em relação às concepções de Euler e Leibniz, para quem os infinitésimos eram constantes. Para Cauchy, essas quantidades eram variáveis.

Por fim, apesar dos avanços que Cauchy conseguiu na direção do rigor pretendido a sua época, ressalta-se que os seus infinitésimos também não foram aceitos, pois ainda se baseavam em ideias e conceitos em vigor desde o século XVIII. Além disso, o atrelamento dos infinitésimos à geometria (considerada pouco rigorosa) não havia sido totalmente superado. Conforme já apontamos, esse problema só seria resolvido com o movimento que ficou conhecido como aritmetização da análise, a partir do qual a base dos conceitos foi dos infinitésimos para os limites e, consequentemente, da geometria para os números.

Continuidade

> Seja $f(x)$ uma função da variável x, e suponhamos que, para cada valor de x entre dois limites dados, essa função admita constantemente um valor único e finito. Se, partindo de um valor de x compreendido entre esses limites, atribuímos à variável x um acréscimo infinitamente pequeno α, a função receberá ela mesma por acréscimo a diferença $f(x+\alpha)-f(x)$, que dependerá ao mesmo tempo da nova variável α e do valor de x. Isso posto, a função $f(x)$ será, entre os dois limites fixados para a variável x, função *contínua* dessa variável, se, para cada valor de x central entre esses limites, o valor numérico da diferença $f(x+\alpha)-f(x)$ decresce indefinidamente com o de α. Em outros termos, a função $f(x)$ permanecerá contínua em relação a x entre os limites dados se, entre esses

> limites, um acréscimo infinitamente pequeno da variável produzir sempre um acréscimo infinitamente pequeno da própria função. Dizemos ainda que a função $f(x)$ é, na vizinhança de um valor particular atribuído a variável x, função contínua dessa variável, todas as vezes que ela for contínua entre dois limites de x, mesmo muito próximos, que contêm o valor a que se referem. (Cauchy, 1821, p.34-35)[8]

A maior novidade, e talvez o conceito mais central na obra de Cauchy, é a noção de continuidade, notadamente diferente da de Euler, que na época era a mais aceita. Por exemplo, para Euler a função

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{se} \quad x < 0 \\ x, & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

era descontínua, já que era representada por mais de uma expressão analítica.[9] Essa concepção levava a algumas incoerências, como observou Cauchy (1844). Ao se escrever a série de Fourier da função anterior obtém-se uma expressão analítica que indica que essa

---

8 Soit $f(x)$ une fonction de la variable x, et supposons que, pour chaque valeur de x intermédiaire entre deux limite données, cette fonction admette constamment une valeur unique et finie. Si, en partant d'une valeur de x comprise entre ces limites, on attribue à la variable x un accroissement infiniment petit α, la fonction elle-même recevra pour accroissement la différence $f(x+\alpha)-f(x)$, qui dépendra en même temps de la nouvelle variable α et de la valeur de x. Cela posé, la fonction $f(x)$ sera, entre les deux limites assignées à la variable x, fonction *continue* de cette variable, si, pour chaque valeur de x intermédiaire entre ces limites, la valeur numérique de la différence $f(x+\alpha)-f(x)$ décroit indéfiniment avec celle de α. En d'autres termes, la fonction $f(x)$ restera continue par rapport à x entre les limites données, si, entre ces limites, un accroissement infiniment petit de la variable produit toujours un accroissement infiniment petit de la fonction elle-même. On dit encore que la fonction $f(x)$ est, dans la voisinage d'une valeur particulière attribuée à la variable x, fonction continue de cette variable, toutes les fois qu'elle est continue entre deux limites de x, même très-rapprochées, qui renferment la valeur dont il s'agit.

9 Segundo nos esclarece Jahnke (2003), para Euler eram contínuas as funções que podiam ser representadas por uma única expressão analítica, e as demais, descontínuas.

função poderia ser contínua segundo a própria definição de Euler (Lützen, 2003):

$$(2.2) \qquad f(x) = \begin{cases} -x, & se \quad x < 0 \\ x, & se \quad x \geq 0 \end{cases} = \sqrt{x^2} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{x^2}{t^2 + x^2}\, dt,$$

ou seja, "uma simples mudança de notação é suficiente para transformar uma função contínua no sentido de Euler em uma função descontínua no sentido de Euler, e vice-versa". (Lützen, 2003, p.165)

* * *

A alternativa de Cauchy para a definição de Euler, segundo entende Lützen (2003), foi concebida por meio do estudo das funções com saltos. O matemático francês Louis François Antoine Arbogast (1759-1803) já havia trabalhado com a definição de (des)continuidade nesse tipo de função, tendo dado ao conceito o nome de "(des)contiguidade" (Arbogast, 1791; Jourdain, 1913). Entretanto, tratava-se, ainda, apenas de uma generalização da definição de Euler. Cauchy foi além. Alguns anos antes de seu *Cours d'Analyse*, em suas investigações sobre integrais definidas, Cauchy (1814; 1827) escreveu:

> A primeira dificuldade que se apresenta concerne as funções de uma só variável. Se uma integral indefinida é expressa por uma certa função da variável aumentada de uma constante arbitrária, a mesma integral, tomada entre dois limites dados, a e b, será expressa em geral pela diferença dos valores da função relativa a esses dois limites. Todavia, esse teorema não é verdadeiro, senão no caso em que a função encontrada cresce ou decresce de uma maneira continua entre os dois limites em questão. Mas, se, quando fazemos crescer a variável em graus imperceptíveis, a função encontrada passe subitamente de um valor a outro, a diferença estando sempre compreendida entre os limites de integração, a diferença desses dois valores deverá ser retirada da integral definida, como de costume, e

cada um dos saltos bruscos que poderá fazer a função necessitará de uma correção de mesma natureza. (p.614-615)[10]

E mais adiante:

Se a função $\varphi(z)$ cresce ou decresce de uma maneira contínua entre os limites $z = b'$, $z = b''$, o valor da integral será representado, como de costume, por

$$\left[\int_{b'}^{b''} \varphi'(z)dz = \right]\varphi(b'') - \varphi(b').$$

Mas, se para um certo valor de z representado por Z e compreendido entre os limites de integração, a função $\varphi(z)$ passa subitamente de um valor determinado a outro valor sensivelmente diferente do primeiro, de sorte que designando por ξ uma quantidade muito pequena, tenhamos $\varphi(Z+\xi) - \varphi(Z-\xi) = \delta$, então o valor ordinário da integral definida, a saber, $\varphi(b'') - \varphi(b')$, deverá ser diminuído da quantidade δ, como se pode facilmente demonstrar. (p.687-688)[11]

10 La première difficulté que se présente regarde les fonctions d'une seule variable. Si une intégrale indéfinie est exprimée par une certaine fonction de la variable augmentée d'une constante arbitraire, la même intégrale, prise entre deux limites donnés, a e b, sera exprimée en général par la différence des valeurs de la fonction relative à ces deux limites. Toutefois ce théorème n'est vrais que dans le cas où la fonction trouvée croit ou décroit d'une manière continue entre les deux limites dont il s'agit. Mais si, lorsqu'on fait croitre la variable par degrés insensibles, la fonction trouvée passe subitement d'une valeur à une autre, la variable étant toujours comprise entre les limites de l'intégration, la différence de ces deux valeurs devra être retranchée de l'intégrale définie prise à l'ordinaire, et chacun des sauts brisques que pourra faire la fonction trouvée nécessitera une correction de même nature.

11 Si la fonction $\varphi(z)$ croit ou décroit d'une manière continue entre les limites $z = b'$, $z = b''$, la valeur de l'intégrale sera représentée, à l'ordinaire, par $\varphi(b'') - \varphi(b')$. Mais, si, pour certaine valeur de z représentée par Z et comprise entre les limites de l'intégration, la fonction $\varphi(z)$ passe subitement d'une valeur déterminée à une autre valeur sensiblement différent de la première, en sorte qu'en désignant par ξ une quantité très-petite, on ait $\varphi(Z+\xi) - \varphi(Z-\xi) = \delta$,

Assim, o que Cauchy fez em 1814 foi definir descontinuidade por meio de uma tradução de propriedades das funções com salto. Entretanto, essa formulação algébrica de 1814 não é, embora possa parecer, inconsistente com a definição de continuidade que apareceria anos depois em seu *Cours* (Grabiner, 2005). São definições de naturezas diversas. Vamos analisar essa afirmação com um pouco mais de cuidado.

Em sua definição de 1821, Cauchy especifica claramente um valor da variável x e estabelece que $f(x+\alpha)-f(x)$ tende a zero quando α tende a zero. Isso lembra o conceito atual de continuidade pontual. Por outro lado, na definição de 1814, não se fala em um valor específico de x, mas do acréscimo da função. Isso pode remeter à ideia de continuidade uniforme. Embora Cauchy trabalhasse com as duas definições e conseguisse estabelecer sua análise com elas, ele não conseguia distingui-las claramente. Isso só seria feito por Bolzano em 1830; entretanto, esse trabalho só seria publicado cem anos depois (Bolzano, 1830; 1930; Grabiner, 2005; Lützen, 2003). Voltaremos a falar disso em 3.2.

Convergência

> Chamamos série uma sequência indefinida de quantidades $u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots$ que derivam umas das outras segundo uma lei determinada. Essas quantidades são os diferentes termos da série que consideramos. Seja $s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1}$ a soma dos n primeiros termos, n designando um número inteiro qualquer. Se, para valores de n sempre crescentes, a soma s_n se aproxima indefinidamente de um certo limite s, a série será dita convergente, e o limite em questão se chamará a soma da série. Ao contrário, se, ao mesmo tempo que n cresce indefinidamente, a soma s_n não se

alors la valeur ordinaire de l'intégrale définie, savoir, $\varphi(b'') - \varphi(b')$, devra être diminuée de la quantité δ, comme on peut aisément s'en assurer.

aproxima de algum limite fixo, a série será divergente e não terá soma. (Cauchy, 1821, p.123)[12]

Durante o século XVIII, era comum definir a convergência ou divergência de uma série em termos de seu n-ésimo termo. Assim, a série cujo n-ésimo termo tendia a zero, convergia; do contrário, não. Sabemos que essa condição não é sempre verdadeira, e a série harmônica $\sum 1/n$ talvez seja o contraexemplo mais emblemático. Esse resultado já era conhecido desde pelo menos Nicole d'Oresme, mas isso não era exatamente um problema, já que a própria ideia de convergência era outra, ou seja, a série harmônica convergia mesmo que sua soma não fosse finita (Grabiner, 2005).

Na definição de Cauchy, a atenção se desloca dos termos da série (convergindo para zero) para sua própria soma (convergindo para um valor fixo). É evidente que essa noção gerou problemas, já que uma mesma série poderia divergir no sentido de Cauchy e convergir no sentido descrito no parágrafo anterior. Ou seja, o desafio ia além da definição matemática, perpassava pela própria definição do conceito; em outros termos, não bastava explicitar rigorosa e matematicamente o conceito de convergência, era necessário também se estabelecer o que se entendia por ele. E Cauchy, de fato, não foi o precursor dessa nova ideia de convergência; Euler, por exemplo, às vezes operava com ela em seu *Institutiones Calculi Differentialis* (1755).

12 On appelle série une suite indéfinie de quantités $u_0, u_1, u_2, u_3, \ldots$ qui dérivent les unes des autres suivant une loi déterminée. Ces quantités elles-mêmes sont les différens termes de la série que l'on considère. Soit $s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1}$ la somme des n premiers termes, n désignanant un nombre entier quelconques. Si, pour des valeurs de n toujours croissantes, la somme s_n s'approche indéfiniment d'une certaine limite s, la série sera dite convergente, et la limite en question s'appellera la somme de la série. Au contraire, si, tandis que n croit indéfiniment, la somme s_n ne s'approche d'aucune limite fixe, la série sera divergente, et n'aura plus de somme.

Figura 7 – Nicole d'Oresme

Então, qual foi, de fato, a contribuição de Cauchy? Nossa resposta poderá ser restritiva, mas, ainda que sob esse risco, destacaremos alguns dos pontos que Lützen (2003) e Grabiner (2005) trazem sobre o assunto: a caracterização da convergência de séries, em várias demonstrações, por meio do par $\varepsilon - N$ e, em particular, sua insistência em afirmar que séries divergentes não têm soma. Essa posição "chocou" os matemáticos da época, de modo que Cauchy se sentiu impelido a, antes de encontrar as somas das séries, melhor caracterizar (ou estabelecer) a convergência. A partir disso, provou diversos testes de convergência, como o da raiz, o do quociente e aquele que, por vezes, é conhecido como critério de Cauchy.[13] Alguns desses testes já eram conhecidos, entretanto, Cauchy ino-

13 Uma série $\sum u_i$ converge se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ existe um natural N tal que $|u_n + u_{n+1} + \cdots + u_{n+p}| < \varepsilon$, para todo $n > N$. Ou, equivalentemente, a série converge se, e somente se, suas somas parciais formam uma sequência de Cauchy. Entretanto, Cauchy apenas demonstrou a suficiência desse resultado. E isso é compreensível, pois a necessidade é um resultado derivado da completude do conjunto dos números reais. Por fim, vale ressaltar que, por vezes, damos o nome de Cauchy ao teste da raiz, então convém não confundir esse teste com o que chamamos aqui de critério de Cauchy.

vou realmente nas provas rigorosas desses testes e na importância fundamental que deu a eles pela preocupação estabelecida com a questão da convergência das séries.

Apesar da incontestável contribuição dada por Cauchy no que diz respeito ao parágrafo anterior, o teorema que liga os conceitos de continuidade e convergência obteve mais destaque dentro do seu *Cours*.

> Quando os diferentes termos da série $[u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n, u_{n+1}]$ são funções de uma mesma variável x, contínuas em relação a essa variável em uma vizinhança de um valor particular para o qual a série é convergente, a soma s da série é também, na vizinhança desse valor particular, função contínua de x. (p.131-132)[14]

Como já adiantamos, esse teorema seria alvo de algumas controvérsias, tendo sua demonstração, alguns anos depois, contestada por Niels Henrik Abel (1802-1829) (veja o item 3.3). Modernamente, por um lado, alguns historiadores consideram que Cauchy cometeu um erro, pois se consideramos os modernos significados atribuídos a alguns elementos da demonstração, esse teorema é falso. Por outro lado, se considerarmos que Cauchy tinha à mente à época convergência uniforme numa vizinhança de x, o resultado é verdadeiro (Lützen, 2003; Schubring, 1983). Voltaremos a tratar desse assunto nos próximos capítulos.

Derivada

> Quando a função $y = f(x)$ permanece contínua entre dois limites dados da variável x, e quando determinamos a essa variável

14 Lorsque les différens termes de la série (1) sont des fonctions d'unes même variable x, continues par rapport à cette variable dans le voisinage d'une valeur particulière pour laquelle la série est convergente, la somme s de la série est aussi, dans le voisinage de cette valeur particulière, fonction continue de x.

um valor compreendido entre os dois limites a que se referem, um acréscimo infinitamente pequeno, atribuído à variável, produz um acréscimo infinitamente pequeno da própria função. Por consequência, se pusermos então $\Delta x = i$, os dois termos do quociente das diferenças

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i},$$

serão quantidades infinitamente pequenas. Mas, enquanto esses dois termos se aproximam indefinidamente e simultaneamente do limite zero, o quociente poderá ele mesmo convergir rumo a um outro limite, seja positivo, seja negativo. Esse limite, quando existe, tem um valor determinado para cada valor particular de x, mas ele varia com x. [...] a forma da função nova que servirá de limite ao quociente $\frac{f(x+i) - f(x)}{i}$ dependerá da forma da função proposta $y = f(x)$. Para indicar essa dependência, damos à nova função o nome de função derivada, e a designamos adicionando a ela um acento, pela notação y' ou $f'(x)$. (Cauchy, 1823, p.9)[15]

Embora Cauchy tenha usado de Lagrange o termo "derivada" e até mesmo a sua notação f', "rejeitou" a definição (de Lagrange) em

15 Lorsque la fonction $y = f(x)$ reste continue entre deux limites données de la variable x, et que l'on assigne à cette variable une valeur comprise entre les deux limites dont il s'agit, un accroissement infiniment petit, attribué à la variable, produit un accroissement infiniment petit de la fonction elle-même. Par conséquent, si l'on pode alors $\Delta x = i$, les deux termes du rapport aux différences $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i}$, seront des quantités infiniment petites. Mais, tandis que ces deux termes s'approcheront indéfiniment et simultanément de la limite zéro, le rapport lui-même pourra converger vers une autre limite, soit positive, soit négative. Cette limite, lorsqu'elle existe, a une valeur déterminée, pour chaque valeur particulière de x; mais elle varie avec x. [...] la forme de la fonction nouvelle qui servira de limite au rapport $\frac{f(x+i) - f(x)}{i}$ dépendra de la forme de la fonctions proposée $y = f(x)$. Pour indiquer cette dépendance, on donne à la nouvelle fonctions le nom de fonctions dérivée, et on la désigne, à l'aide d'un accent, par la notation y' ou $f'(x)$.

termos de expansões de séries de potências –, $f(x+i)=f(x)+if'(x)+iV$, em que V é uma função que tende a zero junto com i –, optando por traduzi-la a partir de uma percepção semelhante à de Lacroix, que definiu derivada em termos do quociente das diferenças[16] (Grabiner, 2005; Katz, 1998; Lacroix, 1820; Lagrange, 1797). Entretanto, foi além e tratou esse quociente como um limite, eliminando assim a ideia de quociente de infinitésimos – presente nos trabalhos de Euler. Inclusive, o próprio termo infinitésimo (ou quantidade infinitamente pequena) é bastante evitado na obra de Cauchy, aparecendo mais como um recurso estilístico (linguagem abreviada) ou para indicar um limite que tende a zero (ver item 2.2) (Lintz, 2007).

Cauchy calculou a derivada de um grande número de funções, como $f(x)=\operatorname{sen} x$, $f(x)=x^a$, com a real. Para Katz (1998), no que diz respeito à definição de derivada, Cauchy não fez nada de particularmente relevante. Grande parte de suas demonstrações, por exemplo, já haviam sido feitas por Lagrange. Entretanto, a definição de Lagrange presumia que toda função podia ser expandida em séries de potências. Esse falso resultado, conjuntamente com o fato de Cauchy ter traduzido boa parte dessa linguagem e de outros matemáticos contemporâneos seus em uma definição conveniente para se demonstrar teoremas, fez com que sua abordagem prevalecesse por tanto tempo, estando ainda em considerável parte presente em textos universitários modernos (Eves, 2004).

---

16 Sobre a vida e obra de Lacroix em língua portuguesa, recomendamos a leitura de Andrade (2012).

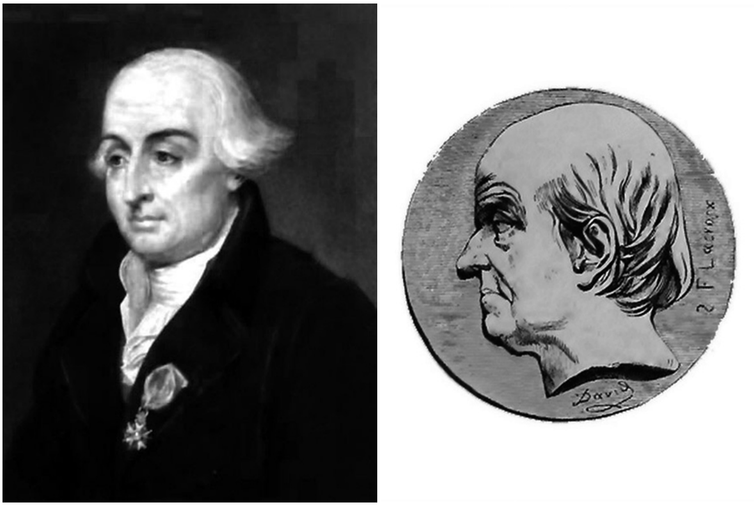

Figura 8 – Joseph-Louis Lagrange e Sylvestre-François Lacroix

Integral

Suponhamos que a função $y = f(x)$ seja contínua com relação à variável x entre dois limites finitos $x = x_0$, $x = X$, designamos por $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ os novos valores de x interpostos entre esses limites, e que estejam sempre crescendo ou decrescendo desde o primeiro limite até o segundo. Poderemos nos servir desses valores para dividir a diferença $X - x_0$ em elementos $x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \ldots, X - x_{n-1}$, que serão todos de mesmo sinal. Isso posto, concebemos que multiplicamos cada elemento pelo valor de $f(x)$ correspondente à origem desse mesmo elemento, a saber, o elemento $x_1 - x_0$ por $f(x_0)$, o elemento $x_2 - x_1$ por $f(x_1), \ldots,$ enfim, o elemento $X - x_{n-1}$ por $f(x_{n-1})$; e seja $S = (x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \cdots + (X - x_{n-1})f(x_{n-1})$ a soma dos produtos assim obtidos. A quantidade S dependerá, evidentemente, primeiro do número n de elementos dentro dos quais tivermos dividido a diferença $X - x_0$, segundo dos próprios valores desses elementos, e, por consequência, do modo de divisão adotado. Ora, é importante notar que, se os valores numéricos dos elementos tornam-se muito pequenos e o número n muito significativo, o modo de dividir não terá mais sobre o valor de S uma influência senão imperceptível; [...] o valor de S terminará por ser sensivelmente constante, ou, em outros termos, ele terminará por alcançar um certo limite que dependerá unicamente da forma da função $f(x)$ e dos valores extremos, x_0, X, atribuídos à variável x. Esse limite é o que chamamos uma integral definida. (Cauchy, 1823, p.81-83)[17]

Se Cauchy não apresentou grandes inovações em relação às derivadas, o mesmo não podemos dizer quanto ao tratamento dado por ele às integrais. Seus antecessores (século XVIII) aceitavam a ideia, advinda principalmente de Newton, de integração como o inverso da diferenciação. Cauchy apresentou um novo enfoque, mais inspirado em Leibniz – que havia considerado as integrais como somas de infinitésimos, definindo a integral como um somatório que tende a um limite. A ideia de integral como inversa da deriva-

17 Supposons que, la fonctions $y=f(x)$ étant continue par rapport à la variable x entre deux limites finies $x=x_0$, $x=X$, on désigne par $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ de nouvelles valeurs de x interposées entre ces limites, et qui aillent toujours en croissant ou en décroissant depuis la première limite jusqu'à la seconde. On pourra se servir de ces valeurs, pour diviser la différence $X-x_0$ en élements $x_1-x_0, x_2-x_1, x_3-x_2, \ldots, X-x_{n-1}$, qui seront tous de même signe. Cela posé, concevons que l'on multiplie chaque élément par la valeur de $f(x)$ correspondante à l' *origine* de ce même élément, savoir, l'élément x_1-x_0 par $f(x_0)$, l'élément x_2-x_1 par $f(x_1)$, ..., enfin l'élément $X-x_{n-1}$ par $f(x_{n-1})$; et soi $S=(x_1-x_0)f(x_0)+(x_2-x_1)f(x_1)+\cdots+(X-x_{n-1})f(x_{n-1})$ la somme des produits ainsi obtenus. La quantité S déprendra évidentemente, 1°. du nombre n des éléments dans lesquels on aura divise la différence $X-x_0$, 2°. des valeurs mêmes de ces élémens, et par conséquent du mode de division adopté. Or, il importe de remarquer que, si les valeurs numériques des éléments deviennent très-petites et le nombre n très-considerable, le mode de division n'aura plus sur la valeur de S qu'une influente insensible; [...] la valeur de S finira par être sensiblement constante, ou, en d'autres termes, elle finira par atteindre une certaine limite qui dépendra uniquement de la forme de la fonction $f(x)$, et les valeurs extrêmes x_0, X attribuées à la variable x. Cette limite est ce qu'on appelle une intégrale définie.

da tornava o cálculo integral uma espécie de apêndice do cálculo diferencial. Cauchy rompe com esse ponto de vista, já que define a integral de maneira independente da derivada. Por conta disso, Cauchy teve que provar a relação de dependência, e o fez por meio do Teorema do Valor Médio, que já era conhecido à sua época (ver próximo item).

Seja como for, devemos observar que foi Fourier, em um trabalho de 1822, quem primeiro mudou esse cenário, ao perceber que para calcular certos coeficientes – que hoje levam seu nome (veja o item 4.1) – de funções arbitrárias, ele não poderia usar o cálculo diferencial, que não se aplicava a determinados tipos de funções. Assim, ele focou nas integrais definidas e estabeleceu seu significado como a área entre a curva e o eixo. Também foi Fourier quem estabeleceu a notação $\int_a^b f(x)dx$ colocando os limites de integração a e b na parte superior e inferior do símbolo da integral (Fourier, 1822).

Cauchy, de certa forma, seguiu Fourier, mas foi mais longe ao definir sua integral como o limite de uma soma à esquerda. Isso se mostrou mais preciso e permitiu que ele provasse que a continuidade era uma condição suficiente para a integrabilidade. Essa demonstração, segundo Lützen (2003, p.170), "é uma das obras-primas do *Calculus de Cauchy*".

Cauchy (1823) ainda define a integral de funções descontínuas num conjunto finito de valores. Essa definição pode ser comparada com a de Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866), que, por outro lado, em 1854 se baseou na definição de integral de Cauchy para estendê-la a uma classe mais abrangente de funções que as contínuas (Lützen, 2003; Riemann, 1854; 1876). Voltaremos a tratar disso em 6.1.

Teorema Fundamental do Cálculo

Se na integral definida $\int_{x_0}^{X} f(x)dx$ fizermos variar um dos dois limites, por exemplo, a quantidade X, a integral variará com essa quantidade; e, se substituirmos o limite X, tornado variável, por x, obteremos por resultado uma nova função de x, que será o que chamamos de uma integral tomada a partir da origem $x = x_0$. Seja

(1) $$\mathfrak{F}(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)dx$$

essa nova função. Obtemos da fórmula (19) [Lição 22][18]

(2) $$\mathfrak{F}(x) = (x - x_0) f[x_0 + \theta(x - x_0)],\ \mathfrak{F}(x_0) = 0,$$

θ sendo um número inferior à unidade; e da fórmula (7) [Lição 23][19]

$$\int_{x_0}^{x+\alpha} f(x)dx - \int_{x_0}^{x} f(x)dx = \int_{x}^{x+\alpha} f(x)dx = \alpha f(x + \theta\alpha), \text{ ou}$$

(3) $$\mathfrak{F}(x+\alpha) - \mathfrak{F}(x) = \alpha f(x + \theta\alpha),$$

segue das equações (2) e (3) que, se a função $f(x)$ é finita e contínua na vizinhança de um valor particular arbitrário da variável x, a nova função $\mathfrak{F}(x)$ será não somente finita, mas também contínua na vizinhança desse valor, pois um incremento infinitamente pequeno de x corresponderá um incremento infinitamente pequeno de $\mathfrak{F}(x)$. Portanto, se a função $f(x)$ permanece finita e contínua desde $x = x_0$ até $x = X$, o mesmo ocorrerá com a função $\mathfrak{F}(x)$. Acrescentemos ainda que, se dividirmos por α os dois membros da fórmula (3), concluiremos, passando o limite, que

18 Isto é, $\int_{x_0}^{X} f(x)dx = (X - x_0) f[x_0 + \theta(X - x_0)]$.

19 Isto é, $\int_{x_0}^{X} f(x)dx = \int_{x_0}^{\xi} f(x)dx + \int_{\xi}^{X} f(x)dx$, em que $x_0 \le \xi \le X$.

(4) $$\mathfrak{F}'(x) = f(x).$$

Portanto a integral (1), considerada como função de x, tem por derivada a função $f(x)$ contida abaixo do sinal $\int$ dessa integral. (Cauchy, 1823, p.101)[20]

Uma vez que Cauchy definiu as operações de integração e derivação de modo independente, foi necessário estabelecer a relação existente entre esses dois conceitos, o que se deu por meio da demonstração do *Teorema Fundamental do Cálculo* (TFC).[21] Ele mostrou que se $f(x)$ é uma função contínua, então $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)dx$ tem por derivada a função f. Newton e Leibniz já haviam formulado o TFC,[22] mas foi Cauchy o primeiro, ao que se sabe, a trazer

---

20 Si, dans l'intégrale défine $\int_{x_0}^{X} f(x)dx$, on fait varier l'une des deux limites, par exemple, la quantité X, l'intégrale variera elle-même avec cette quantité; et, si l'on remplace la limite X devenue variable par x, on obtiendra pour résultat une nouvelle fonction de x, qui sera ce qu'on appelle une intégrale prise à partir de l'origine $x = x_0$. Soit (1) $\mathfrak{F}(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)dx$ cette fonction nouvelle. On tirera de la formule (19) [[22.^{e} leçon] (2) $\mathfrak{F}(x) = (x - x_0)f[x_0 + \theta(x - x_0)], \mathfrak{F}(x_0) = 0, \theta$ étant um nombre inférieur à l'unité; et de la formule (7) [23.^{e} leçon] $\int_{x_0}^{x+\alpha} f(x)dx - \int_{x_0}^{x} f(x)dx = \int_{x}^{x+\alpha} f(x)dx = \alpha f(x + \theta\alpha)$, ou (3) $\mathfrak{F}(x+\alpha) - \mathfrak{F}(x) = \alpha f(x + \theta\alpha)$, Il suit des équations (2) et (3) que, si la fonction $f(x)$ est finie et continue dans le voisinage d'une valeur particulière attribuée à la variable x, la nouvelle fonction $\mathfrak{F}(x)$ sera non-seulement finie, mais encore continue dans le voisinage de cette valeur, puisqu'à un accroissement infiniment petit de x correspondra un accroissement infiniment petit de $\mathfrak{F}(x)$. Donc, si la fonction $f(x)$ reste finie et continue depuis $x = x_0$ jusqu'à $x = X$, il en sera de même de la fonction $\mathfrak{F}(x)$. Ajoutons que, si l'on divise par α les deus membres de la formule (3), on en conclura, en passant aux limites, (4) $\mathfrak{F}'(x) = f(x)$. Donc l'intégrale (1), considérée comme fonction de x, a pour dérivée la fonction $f(x)$ renfermée sous le signe $\int$ dans cette intégrale.

21 Vale salientar que essa denominação para o referido teorema é mais moderna. Segundo Sriraman (2012), o nome desse teorema conforme hoje o conhecemos provavelmente se deve à tradição francesa de utilizar a palavra *fondamentale* (fundamental) para designar algo básico.

22 Segundo Toeplitz e Bressound (2007), foi o matemático Isaac Barrow, ainda em 1667, o primeiro a demonstrar esse teorema. Para mais detalhes, consultar a referida obra (p.95-99).

uma prova rigorosa desse importante teorema para o cálculo e para a análise (Boyer, 1949).

Em sua prova, Cauchy utilizou essencialmente dois conceitos: o do Teorema do Valor Médio para integrais, resultado bem conhecido atribuído a Lagrange; e a linearidade da integração para com a operação de adição, resultado este que, para Cauchy, resultou imediatamente da sua definição de integral. Na realidade, Cauchy não utilizou somente o resultado de Lagrange para o Teorema do Valor Médio para Integrais (TVMI),[23] mas também a sua própria demonstração do TFC (Grabiner, 2005).

Lagrange, em sua demonstração do TVMI, definiu a integral como o inverso da derivada, e estabeleceu esse teorema como uma variação do Teorema do Valor Médio para Derivadas.[24] Como Cauchy definiu a integração por meio de uma soma, não pôde usar do mesmo artifício. Ele derivou o seu TVMI a partir de alguns dos passos da sua própria definição de integral. Com relação ao TFC, a demonstração de Lagrange possuía diversas limitações, uma vez que ele não havia definido o conceito de integral definida e, em sua prova, exigiu que a função tomada fosse monótona. Mais uma vez, como no caso do TVMI, Cauchy tomou esse resultado já dado, deu a ele uma base lógica distinta e tornou-o suficientemente rigoroso (Grabiner, 2005).

Assim, Cauchy, baseando-se numa prova aceitável do TVMI, estabeleceu uma prova do TFC que pode ser utilizada mesmo nos dias de hoje. Mais que isso, de uma maneira mais geral, refletindo sobre seus conceitos de derivada, integral e sua demonstração do TFC, podemos dizer que ele iniciou um processo que primeiro

23 Se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ é contínua em seu intervalo de definição, então existe um valor z, com $a<z<b$ tal que $\int_a^b f(x)dx = f(z)(b-a)$. Geometricamente, esse teorema nos garante que existe um valor z tal que o retângulo de base $(b-a)$ e altura $f(z)$ tem exatamente a mesma área da região sob a curva de f.

24 Se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ é contínua em seu intervalo de definição, e derivável em (a,b), então existe $c\in(a,b)$ tal que $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Geometricamente, esse teorema nos diz que existe um ponto c no gráfico de f cuja reta tangente tem exatamente a mesma inclinação do segmento AB.

converteu o cálculo integral, antes entendido apenas como inverso do cálculo diferencial, em uma disciplina autônoma, e, posteriormente, com contribuições sobretudo de Riemann e Henri Léon Lebesgue (1875-1941) (veja no Capítulo 6), no estudo de uma classe de funções que possuem ou não integral, seja qual for a concepção de integral usada.

3
Gauss, Bolzano e Abel

Escolhemos falar desses três matemáticos, no contexto da fundamentação da análise, porque tanto Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855) quanto Bolzano tiveram ideias a esse respeito bastante semelhantes às de Cauchy, e Abel teve papel importante nesse início de reformas nos fundamentos da matemática. Além disso, Gauss, Bolzano e Abel, assim como seu contemporâneo Cauchy, foram pioneiros do moderno rigor da matemática. O século XVII tinha sido essencialmente um período de experimentação, no qual os resultados surgiram com grande abundância. Tinha chegado a época de se refletir sobre o significado dos resultados... (Struik, 1948).

Carl Friedrich Gauss

Carl Friedrich Gauss nasceu em Brunswick, na Alemanha, em 1777. Estudou em Göttingen de 1795 a 1798 e lá permaneceu trabalhando ativamente, de 1807 até sua morte em 1855. Jamais saiu da Alemanha, mas esse isolamento não o impediu de produzir grandes resultados, com ideias tão inovadoras que indicavam que um novo período para a matemática estava se abrindo. Entretanto, perfeccionista que era, não publicava nenhuma de suas obras antes que estivessem completas, concisas, acabadas e convincentes; adotando o lema *Pauca sed matura* (poucos, porém maduros). Em decorrência disso, as publicações oficiais de Gauss não refletem toda a grandeza de suas descobertas: os diários e cartas encontrados após sua morte mostram que ele guardou para si muitos resultados que não teve disposição de revelar publicamente, como as geometrias não-euclidianas (Eves, 2004).

Figura 9 – Carl Friedrich Gauss

Gauss trabalhou em diversas áreas, como teoria dos números, álgebra, geometria, astronomia, cristalografia, magnetismo, e análise. No que tange a última, Lützen (2003) observa que há grande semelhança entre a introdução de Cauchy, no seu *Cours d'Analyse,* e as ideias de Gauss contidas numa carta endereçada a Heinrich Christian Schumacher (1780-1850), no que diz respeito ao ataque que fazem à crença na generalidade do mecanismo da análise e a uma especial repulsa [pelos matemáticos] às séries divergentes.

Embora essa carta tenha sido escrita em 1850, bem depois da publicação do *Cours d'Analyse*, as ideias expressas nela eram da época da juventude de Gauss, portanto bastante anteriores ao

Cours. Por exemplo, por volta de 1800, numa discussão sobre séries trigonométricas, Gauss começou a analisar os fundamentos da teoria das séries infinitas e, em uma de suas anotações, já aparecem as noções de $\limsup$ e $\liminf$ para séries, de forma bastante precisa e "até mais rigorosa que a encontrada mais tarde no *Cours d'Analyse* de Cauchy" (Lützen, 2003, p.174).[1]

A relutância de Gauss em publicar seus resultados fez com que ele tivesse pouco impacto no desenvolvimento dos fundamentos da análise. Entretanto, ele levantou a questão das séries infinitas em sua tese de doutorado (Gauss, 1799; 1866) quando tratava do teorema fundamental da álgebra e também em seu artigo (Gauss, 1813) sobre séries hipergeométricas.

Bernard Bolzano

Filho de um vendedor de artes italiano que escolheu Praga como seu novo lar depois do casamento com a filha de um comerciante daquela cidade, Bolzano nasceu em 1781 em meio a um conturbado momento histórico na Europa. No ano da chegada de seu pai à Boêmia, cinco anos antes, o despotismo esclarecido de Maria Teresa e José II juntamente com os tímidos reflexos das tendências iluministas da França pré-revolução fizeram-se abater sobre a vida cultural, social e, sobretudo, educacional da Boêmia. No próprio ano de seu nascimento, a servidão foi abolida, bem como garantida a liberdade religiosa aos não católicos. Bolzano se formou na escola secundária, com honras, em 1796, tendo, em seguida, iniciado seus estudos em filosofia na Universidade Carolina de Praga. A essa altura, o Iluminismo de José III já vinha sendo substituído por um crescente medo da monarquia austríaca, com relação às possíveis influências da Revolução Francesa. Em decorrência disso, a repressão e endurecimento da censura e do regime policial alteraram

1 Esses conceitos aparecem em Cauchy quando ele tenta tornar mais clara a prova do teste da raiz.

radicalmente a vida por lá. Esse quadro mudaria só em 1848 com a Revolução Burguesa. Uma das instituições mais ativas na campanha antirrevolução foi a Igreja Católica – Bolzano chegou a ser padre (Folta, 1981).

Figura 10 – Bernard Bolzano

À parte da própria importância histórica dessas fatos, esse quadro como um todo influenciou fortemente a vida e a obra de Bolzano, muitas vezes prejudicando sua carreira profissional. Com efeito, apesar de Bolzano ter ido mais longe nos fundamentos da análise do que qualquer outro de seus contemporâneos – e hoje ser considerado um dos pioneiros em estabelecer bases rigorosas aos conceitos do cálculo, observadas em sua aritmetização e no estudo cuidadoso sobre o infinito –, a maneira como conduziu sua carreira, com um quase absoluto isolamento, o fato de Praga não ser um centro matemático importante à época e de boa parte dos mais importantes resultados seus não terem sido publicados em vida fizeram com que seus trabalhos permanecessem praticamente desconhecidos por cerca de cinquenta anos (Folta, 1981; Lützen, 2003).

Segundo Lützen (2003), uma das mais importantes obras de Bolzano é o seu *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwei Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren,* *wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege* (1817). Nesse trabalho são provados diversos resultados e dadas diversas definições, como a de função contínua, que, à primeira vista, indicava claramente que a ideia básica de continuidade estava no conceito de limite:

> [...] uma função $f(x)$ varia de acordo com a lei de continuidade para todos os valores x dentro e fora de certos limites da seguinte maneira: se x é algum tal valor, a diferença $f(x+\omega)-f(x)$ pode se tornar menor do que qualquer quantidade dada, desde que ω pode ser tomado tão pequeno quanto se quiser. (Bolzano, 1817, p.11-12)[2]

Essa definição não é essencialmente diferente da dada por Cauchy, em 1821, mas, na opinião de alguns, como de Grabiner (2005), é muito mais elegante. A partir dela, Bolzano provou o teorema do valor intermediário. A prova, consideravelmente diferente da apresentada por Cauchy, usou o que modernamente chamamos de propriedade dos números reais de Bolzano-Weierstrass (Grabiner, 2005).

Outra semelhança com Cauchy está nas sequências fundamentais (hoje também conhecidas como sequências de Cauchy). Bolzano as definiu e "provou" que elas convergem para uma quantidade constante, porém essa demonstração não foi satisfatória. De fato, Bolzano provou, em primeiro lugar, possível assumir que o limite seja uma constante e, em segundo lugar, que esse limite é único e pode ser determinado de forma tão precisa quanto desejarmos. Seja como for, a partir desse resultado, Bolzano demonstrou a existência do supremo de um conjunto não vazio limitado superiormente, i.e., a propriedade de Bolzano-Weierstrass de que há pouco fala-

2 [...] eine Function fx für alle Werthe von x, die inner- oder außerhalb gewisser Grenzen liegen, nach dem Gesetze der Stetigkeit sich ändre, nur so viel daß, wenn x irgend ein solcher Werth ist, der Unterschied $f(x+\omega)-f(x)$ kleiner als jede gegebene Größe gemacht werden könne, wenn man ω so klein, als man nur immer will, annehmen kann.

mos. Hoje sabemos que esse resultado caracteriza a completude do conjunto dos números reais, mas na época de Bolzano isso ainda não estava em pauta. Nos livros modernos, uma das provas mais comumente encontradas é a que usa a propriedade dos intervalos encaixados, o que nada mais do que uma equivalência da propriedade do supremo de Bolzano.

Para Bolzano, seu resultado principal era a demonstração do teorema do valor intermediário. Porém, resultados secundários advindos desse – como os que citamos – também possuem grande importância para a história da análise, muito embora tenham sido por muito tempo ignorados.

Por fim, os últimos resultados que gostaríamos de destacar advêm de uma publicação póstuma de Bolzano, *Funktionenlehre* (Bolzano, 1830; 1930). Nela, Bolzano traz outra definição de continuidade pontual, mais precisa em relação à que havia apresentado em 1817, sendo adequada, inclusive, para os padrões atuais:

> Se a função monótona de uma ou mais variáveis Fx é constituída de tal forma que a variação sofrida, quando uma de suas variáveis passa de um determinado valor x para um diferente valor $x + \Delta x$, diminui infinitamente à medida que Δx diminui infinitamente, isto é, quando Fx, bem como $F(x + \Delta x)$ – o último, pelo menos, para certos valores de Δx e menores que ele – forem mensuráveis[3] e o valor absoluto da diferença $F(x + \Delta x) - Fx$ tornar-se inferior a qualquer fração $1/N$ para Δx suficientemente pequeno, que, no entanto, pode ser tomado ainda menor, então eu digo que a função Fx é contínua em x para um incremento positivo (ou em uma direção positiva), quando o que acabamos de dizer ocorre para um valor positivo de Δx; e contínua em x para um incremento negativo (ou em uma direção negativa), por outro lado, quando o que acabamos de dizer ocorre para um valor negativo de Δx; se, finalmente, a condição descrita é satisfeita tanto para um incremento positivo

3 Não no sentido da teoria da medida, como veremos adiante; nesse contexto, reais e finitos.

> quanto negativo de x, eu digo, simplesmente, que Fx é contínua em x. (Bolzano, 1830, 1930, p.14)[4]

Podemos notar que Bolzano define até mesmo continuidade à direita e à esquerda. Mais importante que essa definição de continuidade pontual, certamente é a distinção que Bolzano faz entre esse tipo de continuidade e a uniforme, conceitos que pareciam confusos da obra de Cauchy (ver item 3.2):

> Não é porque uma função Fx é contínua para todos os valores de sua variável x que se encontra entre a e b, que para todo x entre esses valores há um número fixo e pequeno o suficiente que se possa afirmar que é necessário tomar Δx em valor absoluto $< e$ a fim de garantir que $F(x+\Delta x) - Fx < 1/N$. (Bolzano, 1830; 1930, p.23-24)[5]

---

4 Wenn eine einförmige Function Fx von einer oder auch mehreren Veränderlichen so beschaffen ist, daß die Veränderung, die sie erfährt, indem eine ihrer Veränderlichen x aus dem bestimmten Werthe x in den Veränderten $x+\Delta x$ übergehet, in das Unendliche abnimmt, wenn Δx in das Unendliche abnimmt, wenn also der Werth Fx sowohl als auch der Werth $F(x+\Delta x)$, der letztere wenigstens anzufangen von einem gewissen Werthe der Differenz Δx für alle kleineren abermahls meßbar ist, der Unterschied $F(x+\Delta x) - Fx$ aber seinem absoluten Werthe nach kleiner als jeder gegebene Bruch $1/N$ wird und verbleibt, wenn man nur Δx klein genug nimmt, und so klein man es dann auch noch ferner werden läßt: so sage ich, daß die Function Fx für den Werth x stetig verändere, und zwar bey einem positiven Zuwachse oder im positiver Richtung, wenn das nur eben gesagte bey einem positiven Werthe von Δx eintritt: und daß sie dagegen sich stetig verändere bey einem negativen Zuwachse oder in negativer Richtung, wenn das Gesagte bey einem negativen Werthe von Δx Statt hat: wenn endlich das Gesagte bey einem positiven sowohl als negativen Zuwachs von Δx gilt: so sage ich schlechtweg nur, daß Fx stetig sey für den Werth x.

5 Blos daraus, daß eine Function Fx für alle innerhalb a und b gelegenen Werthe ihrer Veränderlichen x stetig sey, folgt nicht, daß es für alle innerhalb dieser Grenze gelegenen Werthe von x eine und eben dieselbe Zahl e geben müsse, klein genug, um behaupten zu können, daß man Δx nach seinem absoluten Werthe nie $< e$ zu machen brauche, damit der Unterschied $F(x+\Delta x) - Fx < 1/N$ ausfalle.

Ou seja, Bolzano diz que não é por que uma função é contínua em um intervalo que ela é necessariamente uniformemente contínua.

Entretanto, embora originalmente escrita em 1830, essa obra de Bolzano só foi publicada cem anos depois. Por esse motivo que costumamos atribuir esses resultados ao matemático Eduard Heine (1821-1881), que teve sua obra publicada sessenta anos antes da de Bolzano (veja Capítulo 5) (Heine, 1871).

Ainda em *Funktionenlehre*, Bolzano construiu uma função contínua não diferenciável em um conjunto denso (na realidade, não diferenciável em ponto algum). Esse resultado, portanto, *contrariaria* as expectativas de Lagrange e André-Marie Ampère (1775-1836), que por muito tempo tentaram provar que todas as funções contínuas, exceto por pontos isolados, eram diferenciáveis. Embora Cauchy não tenha tentado exatamente o mesmo que Lagrange e Ampère, podemos notar pelo seu trabalho (ver Capítulo 2) que muitas vezes ele passa essa impressão.

Essa função criada por Bolzano em 1830 *poderia* ter servido para a matemática como algo crucial naquele momento, mostrando, a despeito de todas as intuições geométricas e sugestões da física, que funções contínuas não necessariamente possuem derivadas. Todavia, destacamos o *contrariaria* e o *poderia* em linhas anteriores porque o trabalho de Bolzano não foi reconhecido naquele tempo e, conforme já apontamos, sua obra de 1830 só fui publicada muito tempo depois. Por esse motivo, assim como os louros da continuidade ficaram para Heine, o primeiro a publicar um exemplo de função não diferenciável em conjunto denso acabou sendo Weierstrass em 1872, quase quarenta anos depois de Bolzano, portanto (Weierstrass, 1872; 1895).

De modo geral, pudemos observar que, embora as ideias de Bolzano indicassem a direção que deveriam seguir não só a formulação das leis do cálculo, mas também a maioria do pensamento do século XIX, elas não foram decisivas para isso. Seu trabalho permaneceu sem divulgação até ser redescoberto e publicado muitos anos depois, quando Cauchy, Heine e Weierstrass, com ideias semelhantes, mas escritas de forma diferente, já haviam estabelecido os fundamentos da análise e traçado a história de outra maneira[6].

Niels Henrik Abel

Figura 11 – Niels Henrik Abel

Terceiro nome importante no contexto da reforma dos fundamentos da matemática, Niels Henrik Abel (1802-1829), em sua curta vida interrompida pela tuberculose, sofreu muitas privações, mas apesar disso o seu grande talento manifestou-se por meio de trabalhos valiosos para a matemática. Esteve na Alemanha, Itália e França, mas pessoalmente estabeleceu poucos contatos matemáticos. Morreu logo após retornar à Noruega e não teve tempo de ver o reconhecimento de seus trabalhos por parte de grandes figuras da época, como Adrien-Marie Legendre (1752-1833), Carl Gustav Jakob Jacobi (1804-1851) e Gauss. Um de seus mais famosos textos

6 Para mais detalhes sobre o papel de Bolzano na história da análise matemática, recomendamos a leitura de Jarník (1981) e Rusnock e Kerr-Lawson (2005).

(Abel, 1824) é o que prova a impossibilidade de resolver a equação geral do quinto grau por meio de radicais – um problema que tinha ocupado matemáticos como Rafael Bombelli (1526-1572), Viète e Paolo Ruffini (1765-1822) (Eves, 2004; Burton, 2011).

Durante o período de sua viagem, Abel escreveu vários artigos sobre convergência de séries, trazendo grande contribuição à tentativa de definir de forma precisa esse conceito. Isso o coloca como um dos precursores, junto com Cauchy, da defesa de que algo deveria ser feito para fundamentar a Matemática em "bases sólidas e rigorosas". É sobre esse aspecto de Abel que vamos discorrer.

Em março de 1826, numa carta a seu professor Christopher Hansteen (1784-1873), ele manifestava sua intenção de "trazer mais luz à vasta escuridão que, sem dúvida, existe na análise" (Abel, 1902, p.21).[7] Dizia ainda que pouquíssimos teoremas haviam sido provados com rigor convincente, e que em todo lugar ele encontrava métodos imprecisos que concluíam do particular para o geral. Também numa carta a seu amigo Bernt Michael Holmboe (1745-1850), ele tece críticas à falta de fundamentação nos estudos das séries infinitas e questiona, por exemplo, o fato de que vários resultados eram aplicados a essas séries como se fossem finitas (diferenciação, multiplicação, divisão etc.) (Stubhaug, 2002). Além disso, pontuava:

> Nós podemos deduzir qualquer coisa que quisermos quando as usamos [séries divergentes], e elas têm feito muito dano e causado muitos paradoxos. Você pode pensar em algo mais terrível do que dizer que $0 = 1 - 2^n + 3^n - 4^n$ + etc. quando n é um inteiro positivo. Meus olhos têm sido abertos da forma mais espantosa; de fato quando você excetua os casos simples, por exemplo, as séries geométricas, dificilmente existe em toda a matemática uma única série infinita cuja soma tenha sido determinada de maneira rigorosa. Em outras palavras a parte mais importante da matemática

7 Alle mine Kræfter vil jeg anvende paa at bringe noget mere Lys i det uhyre Mørke som der uimodsigelig nu tindes i Analysen.

está sem uma fundamentação. Muito disso está correto, é verdade, e é muito estranho. Eu tentarei encontrar as razões para isso. (Abel, 1902, p.16)[8]

Nessa mesma carta, ele diz que encontrou uma prova rigorosa da convergência de $\varphi(x+\alpha)=\varphi x+\alpha\varphi' x+\alpha/2\varphi'' x+\cdots$ no *Resumé* de Cauchy (1823).


Figura 12 – Carl Gustav Jakob Jacobi e François Viète

Essas críticas de Abel mostram que ele apontava fraquezas nos argumentos de seus contemporâneos, como Cauchy e Gauss. Em algumas de suas cartas, anuncia que publicaria alguns pequenos artigos sobre essas questões, entretanto, sua morte prematura o impe-

8 Man kan faae frem hvad man vil naar man bruger dem, og det er dem som har gjort saa megen Ulykke og saa mange Paradoxer. Kan der tænkes noget skrækkelige[re] end at sige at $0=1-2^n+3^n-4^n+\text{etc}$ hvor n er et heelt positivt Tal. Risum teneatis amici. Jeg har i det hele faaet Øjnene op paa en meget forbausende Maneer; thi naar man [undtager] de aller- simpleste Tilfælde for Ex: de geometriske Rækker, saa gives der i hele Mathe- niatiken næsten ikke en eneste uendelig Række, hvis Sum er bestemt paa en stræng Maade: med andre Ord det vigtigste af Mathematiken staaer uden Begrundelse. Det meeste er rigtigl; det er sandt, og det er overordentlig forunderligt. Jeg bestræber mig for at søge Grunden dertil.

diria de tal feito, ou ao menos todo ele. Um desses trabalhos, sobre o teorema binomial, foi publicado em 1826 (Abel, 1826; 1895; 1902; Lützen, 2003).

Apesar desse reconhecimento a respeito do trabalho de Cauchy, Abel tinha uma certa mágoa dele, pois, quando esteve em Paris, em 1826, entregou-lhe um extenso tratado na esperança de que Cauchy pudesse indicá-lo como professor a alguma universidade. Mas Cauchy não lhe deu atenção, tendo esquecido o trabalho por longos anos. Sua publicação só de deu quatorze anos após a morte de Abel (Sylow, 1902).

> Cauchy é desagradável (repugnante) e inatingível, embora no momento ele seja o matemático que mais sabe como a matemática precisa ser feita. Suas coisas são excelentes, mas ele escreve muito superficialmente. De início eu não entendia quase nada de seus trabalhos, agora eu já estou melhor. Ele tem uma série de artigos publicados sob o título *Exercises des Mathématiques*. Eu os comprei e li aplicadamente. [...] Cauchy é tremendamente católico e fanático (intolerante). Uma coisa muito estranha para um matemático. Por outro lado, ele é o único que trabalha em matemática pura. Poisson, Fourier, Ampère etc. etc. estão somente ocupados com magnetismo e outras coisas físicas. (Abel, 1902, p.4)[9]

De certa forma, Abel deu maior precisão a alguns resultados de Cauchy, como, por exemplo, ao estudar a definição de convergência, no caso de uma série de funções convergentes (no sentido

9 Cauchy er fou, og der er ingen Udkomme med ham, omendskjøndt han er den Mathematiker som for nærværende Tid veed hvorledes Mathematiken skal behandles. Hans Sager ere fortræffelige men han skriver meget utydelig. I Førstningen forstod jeg næsten ikke et Gran af hans Arbeider nu gaaer det bedre. Han lader nu trykke en Række Afhandlinger under Titel Exercises des Mathématiques. Jeg kjøber og læser dem flittig [...] Cauchy er umaadelig catholsk og bigott. En saare forunderlig Ting for en Mathematiker. Han er ellers den eneste som nu arbeider i den rene Mathematik. Poisson, Fourier, Ampère etc. etc. beskjæftige sig udelukkende med Magnetisme og andre physiske Sager.

pontual). Ele achou que o teorema de Cauchy (sobre a continuidade da soma de séries de funções contínuas, ver 2.4) era incorreto no sentido de que ele não valia para todas as séries. Ele exemplificou sua ideia com a série sen $\varphi - 1/2$ sen $2\varphi + 1/3$ sen $3\varphi - \cdots$, que é descontínua para cada valor $(2m+1)\pi$ de φ, em que m é um inteiro (Abel, 1826; 1895, p.9).[10] A série em questão é a série de Fourier da função que é, de fato, descontínua nos pontos indicados.

A fim de dar uma formulação mais precisa do teorema de Cauchy, Abel enunciou os dois resultados que se seguem:

> Quando a série $f(\alpha) = v_0 + v_1\alpha + v_2\alpha^2 + \cdots + v_m\alpha^m + \cdots$ converge para um valor definido δ de α, então ela irá convergir para qualquer valor menor do que α, de modo que $f(\alpha - \beta)$ se aproximará do limite $f(\alpha)$ para valores decrescentes de β, uma vez que α é menor ou igual a δ [...] Seja $v_0 + v_1\alpha + v_2\alpha^2 + \cdots$, uma série convergente para a qual $v_0, v_1, v_2, \ldots$ são funções contínuas de uma mesma variável x entre os limites $x = a$ e $x = b$, então a série $f(x) = v_0 + v_1\alpha + v_2\alpha^2 + \cdots$, para $\alpha < \delta$ é convergente e é uma função contínua de x entre os mesmos limites. (Abel, 1826/1895, p.7-8)[11]

Apesar de seus esforços, ainda podem ser observados problemas nesses teoremas de Abel. A demonstração do primeiro deles parece ser correta em princípio, mas seu enunciado não é suficientemente claro com relação à questão da uniformidade, fato esse que é completamente ignorado na demonstração do teorema seguinte. Isso é

10 Hoje sabemos que há uma infinidade de séries com propriedades semelhantes.

11 Wenn die Reihe $f(\alpha) = v_0 + v_1\alpha + v_2\alpha^2 + \cdots + v_m\alpha^m + \cdots$ für einen gewissen Werth δ von α convergirt, so wird sie auch für jeden kleineren Werth von α convergiren, und von der Art sein, dass $f(\alpha - \beta)$ für stets abnehmende Werthe von β sich der Grenze $f(\alpha)$ beliebig nähert, vorausgesetzt, dass α gleucg ider kleiner ist als δ [...] Es sei $v_0 + v_1\alpha + v_2\alpha^2 + \cdots$, eine convergente Reihe, in welcher $v_0, v_1, v_2, \ldots$ continuirliche Functionen einer und derselben veränderlichen Grösse x sind zeischen den Grenzen $x = a$ e $x = b$, so ist die Reihe $f(x) = v_0 + v_1\alpha + v_2\alpha^2 + \cdots$, wo $\alpha < \delta$ convergent und eine stetige Function von zwichen denselben Grenzen.

muitas vezes considerado uma falha e deixa dúvidas se Abel de fato tinha o conceito de convergência uniforme em mente. Seja como for, conforme já apontamos, essa questão só seria resolvida em definitivo por Weierstrass (Lützen, 2003).

4
Séries de Fourier e o teorema de Cauchy

Quando se trata da questão do rigor na análise, pode ser observado que dois problemas estiveram em cena impulsionando diversos matemáticos a buscar cada vez mais a perfeição: o da convergência das séries de Fourier e o teorema de Cauchy da continuidade da soma de uma série de funções contínuas. Por isso, vamos dar um destaque particular a cada um deles neste capítulo.

Convergência das séries de Fourier

Vimos no capítulo anterior que Abel apresentou a série $\operatorname{sen}\varphi - 1/2\operatorname{sen}2\varphi + 1/3\operatorname{sen}\varphi - 1/4\operatorname{sen}4\varphi + \cdots$ como um contraexemplo ao teorema de Cauchy (2.4). Ele provou a convergência e determinou a soma usando sua própria versão complexa do teorema binomial. Na verdade, ele não poderia se referir a uma prova geral da convergência da série de Fourier, porque tal prova rigorosa ainda não existia (Lützen, 2003).

Figura 13 – Jean Baptiste Joseph Fourier

* * *

Jean Baptiste Joseph Fourier nasceu em Auxerre, na França, em 1768, e faleceu em Paris em 1830. Foi assistente de Lagrange e Gaspard Monge (1746-1818) na Escola Politécnica de Paris a partir de 1795. Ao longo de sua vida, ocupou várias posições acadêmicas e administrativas em diversos locais da França. O trabalho em que ele introduz as *séries de Fourier* (Fourier, 1822) acabou por se tornar fundamental para o desenvolvimento da matemática, conforme já pontuamos anteriormente. Nesse trabalho, Fourier afirma que se f é uma função (veja o Capítulo 1) definida em um intervalo finito, como $(-\pi, \pi)$, então pode ser representada por:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \tag{4.1}$$

em que as constantes a_n e b_n são determinadas pelas seguintes fórmulas:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \tag{4.2}$$

(4.3) $$a_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx (n \geq 1),$$

(4.4) $$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} nx dx (n \geq 1).$$

Essa afirmação causou muita polêmica, pois, à época, já havia trabalhos que afirmavam que algumas funções bem comportadas podiam ser representadas por séries trigonométricas, mas Fourier foi ousado ao estendê-la para qualquer função definida em um intervalo finito. Tal ousadia lhe rendeu alguns infortúnios, como a recusa de uma versão anterior de seu *Théorie Analytique* de 1811, julgado por Lagrange, Pierre Simon Laplace (1749-1827) e Legendre. Entretanto, a Academia de Ciências da França, para encorajar Fourier a desenvolver suas ideias, instituiu um prêmio cujo tema era justamente a propagação do calor. Fourier ganhou-o, mas ainda assim não teve seu trabalho aceito nas Mémoires da Academia. Foi só com a publicação do seu tratado da teoria analítica do calor de 1822 que obteve reconhecimento. Nomeado então secretário da Academia dois anos depois, conseguiu, finalmente, publicar seu trabalho original de 1811 nas Mémoires de 1821–1822 (Fourier, 1826), (Burton, 2011; Eves, 2004).

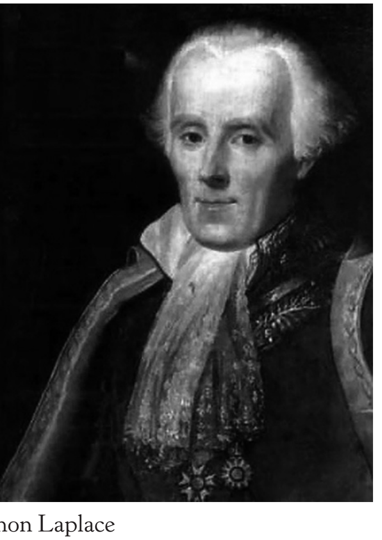

Figura 14 – Pierre Simon Laplace

O ponto central da discórdia, conforme já adiantamos, era mesmo a questão da convergência das séries de Fourier. O próprio Fourier tentou provar que em alguns casos sua expansão em séries de fato convergia para a função que representava calculando explicitamente coeficientes em termos de integrais que representavam áreas reais. Para ele, esse era um argumento suficiente. Entretanto, nos casos em que a função considerada não se comporta muito bem, $f(x)\cos nx$ ou $f(x)\operatorname{sen} nx$ podem gerar gráficos cheios de cantos e quebras (Burton, 2011; Katz, 1998).

Poisson (1820) também publicou seu próprio argumento. Sua ideia foi, ao invés de trabalhar com os coeficientes dados pela integral de Fourier, ver o que aconteceria se a série dos cossenos fosse multiplicada pelos termos da série geométrica $\sum p^n$ para $p \in (0,1)$. Com a série $\sum_{n=1}^{\infty} p^n a_n \cos nx$ ele mostrou ser convergente, e sua soma foi obtida em termos das chamadas integrais de Poisson. Para finalizar, fez $p = 1$ e, por meio de argumentos questionáveis, concluiu que o resultado era f. Ou seja, também Poisson não conseguiu resolver o problema satisfatoriamente do ponto de vista do rigor matemático, de modo a demonstrar que a série original converge para a função f (Lützen, 2003).

Figura 15 – Siméon Denis Poisson

Cauchy, em 1823 (Cauchy, 1827), mostrou, usando argumentos parecidos com os de Poisson, que a soma "é equivalente" a f, mas não deixou claro o significado dessa equivalência. Sua prova, no contexto das variáveis complexas, usava seu recém-descoberto teorema dos resíduos, mas Dirichlet (1829) mostrou que era incompleta, argumentando que a teoria de funções complexas não poderia ser aplicada no caso em que a função f não era dada como uma expressão analítica, porque não fica claro quais valores podem ser designados a ela fora do conjunto dos reais.

> A caminhada que esse geômetra célebre [Cauchy] seguiu nessa pesquisa exige que se considerem os valores que a função $\varphi(x)$, que se trata de desenvolver, obtêm quando se substitui a variável x por uma quantidade da forma $u+v\sqrt{-1}$. A consideração desses valores parece estranha à questão, e não se vê bem em parte alguma o que se deve compreender pelo resultado de uma tal substituição quando a função na qual é feita não pode ser expressa por uma fórmula analítica. (Dirichlet, 1829, p.157)[1]

No mesmo trabalho em que tece críticas ao argumento de Cauchy, Dirichlet também apresenta a primeira prova rigorosa de que, sob certas condições, as séries de Fourier de uma função f convergem (Hawkins, 1970). Ele mostrou, primeiramente, que a representação de f por 4.1 pode ser reescrita como:

$$f(x)=\frac{1}{x}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\operatorname{sen}\left[1/2(2n+1)(t-x)\right]}{\operatorname{sen}\left[1/2(t-x)\right]}dt. \qquad (4.5)$$

1 La marche que ce géomètre célèbre suit dans cette recherche exige que l'on considère les valeurs que la fonction $\varphi(x)$ qu'il s'agit de développer, obtient, lorsqu'on y remplace la variable x par une quantité de la forme $u+v\sqrt{-1}$. La considération de ces valeurs semble étrangère à la question et l'on ne voit d'ailleurs pas bien ce que l'on doit entendre par le résultat d'une pareille substitution lorsque la fonctions dans laquelle elle a lieu, ne peut pas être exprimée par une formule analytique.

A partir disso, ele conclui que, em um dado intervalo, se f é limitada[2] e contínua, exceto no máximo por um número finito de pontos, então a igualdade em 4.1 ou, equivalentemente, em 4.5, é verdadeira, já que o lado esquerdo dessas igualdades, para $x \in (-\pi, \pi)$ converge para $\lim_{\varepsilon \to 0} 1/2(f(x+\varepsilon)+(f(x-\varepsilon))$, e para $\lim_{\varepsilon \to 0} 1/2(f(-\pi+\varepsilon)+(f(\pi-\varepsilon))$, quando $x=-\pi$ ou $x=\pi$; o que, em ambos os casos, é igual a $f(x)$, já que f é contínua. Em sua prova, Dirichlet não utiliza a hipótese da continuidade, entretanto, precisou considerá-la para que a integral definida fizesse sentido (Hawkins, 1970; Katz, 1998). Dirichlet, no fim de seu artigo, diz ser possível generalizar esse resultado para funções com menos restrições que as impostas por ele. Tal generalização seria apresentada em uma nota posterior, que, entretanto, jamais foi publicada.

Esse problema só seria tratado com grande generalidade apenas vários anos depois, com a filosofia do *quase sempre* de Henri Lebesgue (veja o item 6.8). De fato, modernamente definimos a série de Fourier de funções, em geral, dadas no intervalo $(-\pi, \pi)$ e que pertençam ao espaço de funções integráveis segundo Lebesgue. Antes disso, porém, o estudo das séries de Fourier promoveu o desenvolvimento de várias ideias centrais da análise. Para citar alguns exemplos, Riemann (ao que se sabe) foi levado a estudar a integral que hoje tem seu nome a partir do estudo das séries trigonométricas (veja o item 6.2); Cantor, ao investigar o problema da unicidade da representação de funções por séries trigonométricas, definiu os números reais como limites de sucessões de racionais e criou a chamada Teoria dos Conjuntos (veja o item 7.3); e, finalmente, Weierstrass define, por meio de uma série de Fourier, o primeiro exemplo de função contínua sem derivada em ponto algum (veja o item 5.1) (Bourbaki, 2007; Gandulfo, 1990; Lintz, 2007).

2 Diz que uma função f é limitada se existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a \leq f(x) \leq b$ para todo x.

O teorema de Cauchy e a convergência uniforme

Como vimos (2.4), alguns autores interpretaram as noções básicas de Cauchy de tal modo que o teorema se torna verdadeiro. Também foi visto que Abel (3.3) apontou uma saída interessante admitindo um domínio adequado em que um caso especial do teorema permanece válido. Isso posto, seguindo de perto as exposições feitas por Lützen (2003) e Bottazzini (1986) sobre o assunto, teceremos nossas considerações sobre os trabalhos que três importantes matemáticos desempenharam nesse campo.

Iniciemos falando dos trabalhos do matemático alemão Philipp Ludwig von Seidel (1821-1896) e do matemático irlandês George Stokes (1819-1903), que fizeram uma análise bastante profunda do teorema de Cauchy.

Em suas considerações, Seidel (1848) seguiu um procedimento próprio que, mais tarde, seria denominado de método de provas e refutações. A ideia central desse método consiste, a partir de um contraexemplo, em descobrir qual hipótese oculta foi usada na demonstração do teorema e que não pertence ao contraexemplo. A partir disso, uma nova versão do teorema pode ser dada:

> Se uma série convergente representa uma função descontínua de uma quantidade x, e seus termos são funções contínuas, então na vizinhança imediata do ponto em que a função dá o salto, existem valores de x em que a série converge arbitrariamente devagar. (Seidel, 1848, p.383)[3]

3 Hat man eine convergirende Reihe, welche eine discontinuirliche Function einer Grösse x darstellt, von der ihre einzelnen Glieder continuirliche Functionen sind, so muss man in der unmittelbaren Umgebung der Stelle, vo die. Function springt, Werthe von x angeben können, für welche die Reihe beliebig langsam convergiert.

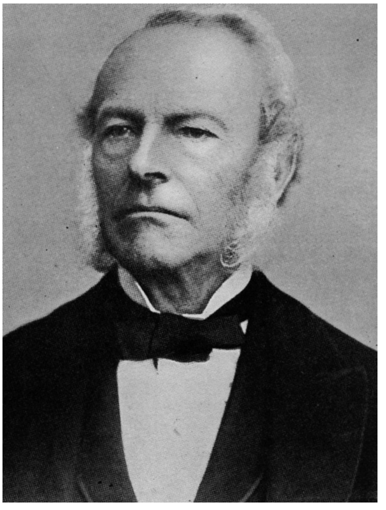

Figura 16 – George Stokes

Seidel não explicita o que seja *convergência arbitrariamente devagar*, mas pela sua demonstração pode ser visto que essa foi a maneira que ele encontrou para descrever a falta de convergência uniforme perto do ponto de descontinuidade, ou seja, para Seidel, uma série converge arbitrariamente devagar se ela não converge uniformemente numa vizinhança do ponto.

Segundo o matemático inglês Godfrey Harold Hardy,[4] que publicou em 1918 um artigo no qual discute vários conceitos de convergência uniforme presentes nas obras de importantes matemáticos da época, como o próprio Seidel, Stokes e Weierstrass, a *convergência arbitrariamente devagar* de Seidel pode ser identificada com o conceito que modernamente chamamos de *convergência uniforme em uma vizinhança de um ponto*:

> Uma série $[s_n(x)]$ é dita uniformemente convergente na vizinhança de um ponto ξ de um intervalo (a,b) [...] se existir

4 Godfrey Harold Hardy (1877-1947) é reconhecido, principalmente, pelos seus trabalhos tanto dentro da análise matemática, de um modo geral, como na teoria dos números, de modo mais particular.

> $\delta(\xi)$ para o qual (A) $[|r_n(x)| \leq \epsilon]$ é verdade para todo ϵ positivo, $n \geq n_0(\xi,\delta,\epsilon) = n_0(\xi,\epsilon)$, e para $\xi - \delta(\xi) \leq x \leq \xi + \delta(\xi)$ [...] é substancialmente isso que foi definido por Seidel em 1848. (Hardy, 1918, p.150)[5]

Se $s(x)$ representa a soma de uma série, então $s_n(x)$ e $r_n(x)$ são, respectivamente, a soma dos n primeiros termos, e o resto, i.e. $s(x) = s_n(x) + r_n(x)$.

Stokes (1849; 2009) definiu o que chamou de *convergência infinitamente devagar* de forma semelhante:

> A convergência de uma série é dita infinitamente devagar quando, se n é o número de termos que precisam ser tomados em ordem para tornar a soma dos termos desprezados numericamente menor que uma dada quantidade, e que pode ser tão pequena quanto desejarmos, n cresce além de todos os limites conforme h decresce além de todos os limites. (p.281)[6]

Mas ele deu um tratamento diferente ao problema. Ele considera uma sequência de funções v_n, implicitamente tomadas como contínuas num intervalo $[0,a]$, com $v_n(0) = u_n$. Também assume que a série $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(h)$ é convergente para todo $h \in [0,a]$, sendo $V(h)$ o limite da série para $h \neq 0$ e U o limite para $h = 0$. Nesse contexto, ele afirma que o limite $V = \lim_{h \to 0} V(h)$ é igual a U, exceto quando a convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} v_n(h)$ se torna infinitamente devagar quando h se

5 The series is said to be uniformly convergent in the neighbourhood of the point ξ of the interval (a,b) [...] if a positive $\delta(\epsilon)$ exists such that (A) is true for every positive ϵ, for $n \geq n_0(\xi,\delta,\epsilon) = n_0(\xi,\epsilon)$, and for $\xi - \delta(\xi) \leq x \leq \xi + \delta(\xi)$. [...] is substantially that defined by Seidel in 1848.

6 The convergency of the series in here said to become infinitely slow when, if n be the number of terms which must be taken in order to render the sum of the neglected terms numerically less than a given quantity e which may be as small as we please, n increases beyond all limit as h decreases beyond all limit.

anula. A menos da exceção, o problema pode ser colocado como uma questão de intercâmbio entre limite e soma, ou seja,

$$\lim_{h\to 0}\sum_{n=1}^{\infty} v_n(h) = \sum_{n=1}^{\infty}\lim_{h\to 0} v_n(h)\,. \tag{4.6}$$

Stokes também provou a recíproca, entretanto, pelo fato de descrever alguns de seus resultados e conceitos essencialmente por meio de palavras, há controvérsia de interpretação. Por exemplo, se interpretarmos a definição de *convergência infinitamente devagar* como o que modernamente entendemos como convergência quase-uniforme em uma vizinhança, a recíproca de seu teorema será falsa. Para Hardy (1918), é exatamente esse o caso:

> Uma série $[s_n(x)]$ é dita quase-uniformemente convergente na vizinhança de um ponto ξ [...] se existir um $\delta(\xi)$ positivo para o qual (A) $[|r_n(x)|\le \epsilon]$ é verdade para todo ϵ positivo, todo N, e $n_0(\xi,\delta,\epsilon,N) = n_0(\xi,\epsilon,N)$ maior que N, para $\xi-\delta(\xi)\le x\le \xi+\delta(\xi)$ [...] esta foi a definição que realmente Stokes deu. (Hardy, 1918, p.152, grifo do autor)[7]

Por outro lado, se entendermos seu conceito como o que modernamente conhecemos como convergência quase-uniforme em um ponto, conforme defende Lützen (2003), a recíproca será verdadeira e, nesse caso, Stokes pode ter sido o primeiro a encontrar o teorema correto, estabelecendo que a soma $s(x)$ é contínua em ξ se, e somente se, a série converge quase-uniformemente nesse ponto. Para Hardy (1918), no entanto, não tendo Stokes estabelecido o conceito de convergência quase-uniforme em um ponto, mas sim o de convergência quase-uniforme em uma vizinhança, o pioneirismo na formulação correta do teorema de Cauchy ficou mesmo para

7 The series is said to be quasi-uniformly convergent in the neighbourhood of ξ [...] if a positive $\delta(\xi)$ exists such that (A) ir true for every positive ϵ, every N, an $n_0(\xi,\delta,\epsilon,N) = n_0(\xi,\epsilon,N)$ greater than N, and $\xi-\delta(\xi)\le x\le \xi+\delta(\xi)$ [...] it is really *this* definition that is given by Stokes.

o italiano Ulisse Dini (1845-1918), que publicou esse resultado quase trinta anos depois de Stokes.

> Uma série $[s_n(x)]$ é dita quase-uniformemente convergente em $x = \xi$ se para todo ϵ positivo e N, todo corresponde um $\delta(\xi, \epsilon, N)$ positivo e um $n_0(\xi, \epsilon, \delta, N) = n_0(\xi, \epsilon, N)$ maior que N, tal que (A) $[|r_n(x)| \leq \epsilon]$ é verdade para $n = n_0(\xi, \epsilon, N)$ e para $\xi - \delta(\xi, \epsilon, N) \leq x \leq \xi + \delta(\xi, \epsilon, N)$ [...] [Essa] definição [...] é de grande interesse, tanto em si mesma quanto em relação ao trabalho de Stokes. *A condição necessária e suficiente para que $s(x)$ seja contínua em $x = \xi$ é que a série seja quase-uniformemente convergente* em $x = \xi$. Esse teorema é essencialmente atribuído a Dini. (Hardy, 1918, p.152-153, grifo do autor)[8]

* * *

Cauchy acabou voltando, depois de muitos anos, a esse teorema problemático a partir de uma observação de dois alunos seus, Charles Auguste Briot (1817-1882) e Jean Claude Bouquet (1819-1885) – da parceria de Cauchy com esses alunos, inclusive, resultariam diversos outros resultados (Cajori, 2007). E, em 1853 (Cauchy, 1853), ele publicou o teorema em que chega muito perto do conceito de *convergência uniforme num intervalo*. Entretanto, não cita os resultados de Abel, tampouco os de Stokes ou Seidel. O referido conceito só seria de fato formulado anos mais tarde por Weierstrass, conforme veremos no capítulo seguinte. E a formulação rigorosa e mais geral do teorema de Cauchy, como afirmamos em linhas anteriores, seria dada por Dini quase no fim daquele século (Dini, 1878).

---

8 The series is said to be quasi-uniformly convergent for $x = \xi$ if to every positive ϵ and every N correspond a positive $\delta(\xi, \epsilon, N)$ and an $n_0(\xi, \epsilon, \delta, N) = n_0(\xi, \epsilon, N)$, greater than N, such that(A) is true for $n = n_0(\xi, \epsilon, N)$ and for $\xi - \delta(\xi, \epsilon, N) \leq x \leq \xi + \delta(\xi, \epsilon, N)$ [...] [This] definition is also of great interest, both in itself and in relation to Stoke's memoir. For *the necessary and sufficient condition that $s(x)$ should be continuous for $x = \xi$ is that the series shoud be quasi-uniformly convergent for $x = \xi$*. This theorem is in substance due to Dini.

5
Weierstrass e o movimento do rigor

Neste capítulo, vamos falar do matemático Weierstrass, que teve papel fundamental no desenvolvimento da análise, especialmente no uso dos épsilons e deltas, característica do formalismo que a disciplina possui até hoje. O exemplo de função contínua derivável em ponto algum dado por ele se tornou um dos mais emblemáticos exemplos das funções patológicas definidas à sua época, desencadeando um processo complexo, com idas e vindas, com o qual a análise ganhou rigor e generalidade.

Figura 17 – Karl Theodor Wilhelm Weierstrass

O Formalismo dos $\varepsilon - \delta$

Karl Theodor Wilhelm Weierstrass nasceu em Ostefeld, Alemanha, em 1815, e faleceu em Berlim, em 1897. Com quatorze anos já gostava de ler o *Jornal de Crelle* (*Journal für die reine und angewandte Mathematik*), especialmente as memórias de Abel que, pelo resto de sua vida, foram constantes fontes de inspiração. Por conta de seu pai, que trabalhava para o serviço de impostos da Prússia, inicialmente se orientou para o estudo de leis e finanças, entretanto estudou matemática por conta própria, sobretudo os trabalhos de Laplace. Foi professor no ensino secundário até pelo menos 1856, quando se tornou professor da Universidade de Berlim e membro da Academia de Ciências dessa cidade. A partir de então, passa a poder se dedicar integralmente à matemática avançada (Eves, 2004; Cajori, 2007).

Um grande influenciador das ideias de Weierstrass foi um de seus professores, Christoph Guderman (1815-1897), de quem foi aluno quando ainda cursava a faculdade de direito e administração. Isso porque, ao ver as notas desse professor sobre transcendentes elípticas, por meio de um ex-aluno seu, Weierstrass se interessou e acabou sendo seu único aluno durante um semestre inteiro em 1839 (Cajori, 2007; Lintz, 2007).

Weierstrass sofreu com vários problemas de saúde ao longo de sua vida, mas, apesar disso, suas aulas eram famosas pela originalidade de suas ideias e pelo famoso *rigor weierstrassiano*. Além disso, possuía uma energia extraordinária para o trabalho e encarnava o equilíbrio ideal entre o professor e o pesquisador, atraindo um grande número de alunos e colaboradores tais como Adolf Hurwitz (1859-1919), Cantor, Ferdinand Georg Frobenius (1849-1917), Felix Klein (1849-1925), Friedrich Engel (1861-1941), Hermann Amandus Schwartz (1843-1921), Hermann Minkowski (1864-1909), Sophus Lie (1842-1899), e até mesmo o filósofo Edmund Gustav Albrecht Husserl (1859-1938), que também era matemático. É considerado, junto com Gauss e Riemann, representante da supremacia matemática na Alemanha do século XIX (Lintz, 2007). Sobre seu papel na história da análise, vamos pontuar algumas de suas contribuições, levando em conta, principalmente, Lützen (2003).

* * *

Weierstrass lidou com o conceito de convergência uniforme influenciado pelo seu professor Guderman, que, em seu artigo sobre funções elípticas (1838) usou o termo *convergência de um modo uniforme* para indicar uma convergência de séries $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x,\varphi,\tau)$ que fosse independente das variáveis φ e τ. Guderman não deu uma definição exata desse conceito, que, mais tarde, seria identificado com o que conhecemos por convergência normal. Weierstrass, que deve ter tomado contato com esse trabalho quando foi aluno de Guderman, em 1839, usou o conceito de seu professor de outro modo, em um artigo de 1841, no qual ele introduz (sem definir): "[...] qualquer que seja o número positivo δ, podemos retirar da série um número finito de termos de modo que o restante da série, para todo x dentro do domínio [de convergência], seja menor em valor absoluto que δ" (Weierstrass, 1841;1894, p.68-69).[1] Nesse mesmo trabalho (p.73-74), Weierstrass mostrou que se uma série de funções analíticas converge uniformemente num determinado domínio, sua soma é analítica, e podemos diferenciá-la termo a termo. Esse artigo não foi publicado até 1894 e essas ideias de Weierstrass só viriam a público quando ele foi ensinar na Universidade de Berlim (Dugac, 2003; Lützen, 2003). De qualquer modo, conforme nos aponta Bottazzini (1986), Weierstrass só de fato definiu convergência uniforme vários anos após seu trabalho de 1841, durante sua longa carreira na Universidade de Berlim. Em suas notas de aula,[2]

1 [...] einer beliebigen positiven Grösse δ eine endliche Anzahl von Gliedern so herausheben, dass die Summe aller übrigen Glieder für jedes der angegebenen Werthsysteme [...] ihrem absoluten Betrage nach $< \delta$ ist.

2 Algumas dessas notas foram recentemente reeditadas e publicadas no todo ou em partes por Pierre Dugac (Eléments d'analyse de Karl Weierstrass), W. Scharlau e P. Ullrich (Einleitung in die Theorie der analytischen Funktionen), e R. Siegmund-Schultz (Ausgewählte Kapitel aus der Funktionenlehre).

definiu convergência uniforme em um intervalo da seguinte maneira: "a série $\sum u_n(x)$ converge uniformemente em um intervalo $[a,b]$ quando para todo ε positivo arbitrariamente pequeno existe um $n_0(\varepsilon)$ de modo que $|r_n(x)| < \varepsilon$ para $n > n_0$ e para todo $a < x < b$" (Weierstrass apud Bottazini, 1986, p.204).

Os trabalhos sobre convergência uniforme (veja no item 4.2) são apenas uma pequena parte da contribuição de Weierstrass para o que costumamos chamar de *refundamentação da análise*. E, como já se pode observar, o período em que Weierstrass atuou na Universidade de Berlim foi particularmente produtivo. Nos primeiros anos, Weierstrass explicava sua abordagem sobre os fundamentos da análise no começo de seu primeiro curso[3] e, a menos de algumas variações, ele desenvolveu esse ciclo por 16 vezes, de 1857 a 1887. O conteúdo desse primeiro curso nunca foi publicado enquanto Weierstrass viveu, mas suas ideias principais foram se tornando conhecidas por meio de testemunhos, anotações e trabalhos de muitos de seus alunos, tanto alemães como estrangeiros que estiveram reunidos em Berlim, muitos com o especial objetivo de assistir às suas aulas. A partir de 1864, ele mudou um pouco a maneira de dar início aos seus cursos, passando a introduzir a teoria das funções analíticas com a construção dos números reais (veja o Capítulo 7).

A abordagem de Weierstrass aos fundamentos da análise é encontrada em sua discussão geral sobre funções e séries, de maneira muito semelhante ao que é feito hoje em dia, e, em sua construção dos reais, ele resolveu questões sobre completude que haviam escapado a Cauchy e Bolzano. Além disso, a definição dada por ele de função contínua (em um ponto) não contém certas ambiguidades presentes nas definições de seus antecessores:

> Se $f(x)$ é uma função de x, e x é um valor definido, então a função mudará para $f(x+h)$ quando x for trocado por $x+h$. A dife-

3 As aulas de Weierstrass eram dadas num ciclo de quatro semestres, consistindo dos seguintes cursos: teoria das funções analíticas; teoria das funções elípticas; aplicações das funções elípticas à geometria e mecânica; teoria das funções abelianas.

rença $f(x+h)-f(x)$ é chamada de mudança que a função sofre quando x é trocado por $x+h$. Agora, se é possível determinar um limite δ, tal que para todos os valores de h, com valor absoluto menor do que δ, $f(x+h)-f(x)$ torna-se menor do que qualquer quantidade arbitrariamente pequena ε, então dizemos que mudanças infinitamente pequenas no argumento correspondem a mudanças infinitamente pequenas da função. De fato, se o valor absoluto de uma quantidade pode se tornar menor do que uma quantidade arbitrariamente pequena, então dizemos que ela pode se tornar infinitamente pequena. Quando uma função é de tal natureza que mudanças infinitamente pequenas do argumento correspondem a mudanças infinitamente pequenas da função, então dizemos que é uma função contínua do argumento ou que varia continuamente com o argumento. (Weierstrass apud Dugac, 1973, p.119-120)[4]

Nessa definição, Weierstrass usava o conceito de infinitamente pequeno, mas apenas como uma abreviação útil, podendo ser retirado facilmente sem prejuízo do entendimento, o que, mais tarde, acabou sendo feito de fato por ele mesmo e seus sucessores. Outro ponto a se destacar nessa definição é o uso que Weierstrass faz dos épsilons e deltas (muitos chamam isso de *estilo epsilônico*). Cauchy

4 Ist $f(x)$ eine Funktion von x und x ein bestimmter Wert, so wird sich die Funktion, wenn x in $x+h$ übergeht, in $f(x+h)$ ändern; die Differenz $f(x+h)-f(x)$ nennt man die Veränderung, welche die Funktion dadurch erfährt, daß das Argument von x in $x+h$. übergeht. Ist es nun rn6glich, für h eine Grenze δ zu bestimmen, sodaß für alle Werte von h welche ihrem absoluten Betrage noch kleiner als δ sind, $f(x+h)-f(x)$ kleiner werde als irgendeine noch so kleine Größe ε, so sagt man, es entsprechen unendlich kleine Aenderungen des Arguments unendlich kleinen Aenderungen der Funktion. Denn man sagt, wenn der absolute Betrag einer Größe kleiner werden kann als irgendeine beliebig angenommene noch so kleine Größe, sie kann unendlich klein werden. Wenn nun eine Funktion so beschaffen ist, daß unendlich kleinen Aenderungen des Arguments unendlich kleine Aenderungen der Funktion entsprechen, so sagt man, daß dieselbe eine continuierliche Funktion sei vom Argument, oder daß sie sich stetig mit diesem Argument ändere.

havia usado quantificadores ε's e δ's em algumas demonstrações mais difíceis, mas Weierstrass usou a técnica não só nessa e em outras definições, mas em todas as suas provas.

Uma distinção entre continuidade pontual e uniforme, entretanto, só ficou evidente em 1871, quando Heine, de posse do formalismo dos $\varepsilon - \delta$ de Weierstrass, separou os dois conceitos e provou que uma função contínua num intervalo fechado e limitado é uniformemente contínua (Dunham, 2005; Heine, 1871).[5] Conforme já apontamos (veja o item 3.2), Bolzano já havia demonstrado esses resultados em 1830, entretanto, sua obra só foi publicada quase sessenta anos depois da de Heine.

Os resultados de Heine em 1871, juntamente com duas palestras proferidas por Weierstrass, em 1870 e 1872, foram os primeiros vislumbres que o público teve dos métodos de Weierstrass. Essas palestras foram responsáveis pela divulgação de dois grandes resultados que chegaram a desfiar algumas crenças da época: o primeiro (Weierstrass, 1870; 1895) foi o estabelecimento definitivo da diferença entre máximo e supremo (ou mínimo e ínfimo)[6] e o segundo (Weierstrass, 1872; 1895) foi a exibição de um exemplo de função contínua sem derivada em algum ponto,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b^n \cos(a^n x\pi), \tag{5.1}$$

em que a é impar, $b \in [0,1)$ e $ab > 1 + 3/2\pi$; o que contradizia a intuição da maioria de seus contemporâneos de que funções contínuas eram diferenciáveis, exceto em *pontos especiais.*[7] Essa função se tornou o exemplo mais conhecido de um grande número de funções ditas patológicas. Vamos detalhar um pouco mais esse assunto.

---

5 Heine não foi aluno de Weierstrass, mas tomou conhecimento de sua abordagem relativamente à analise por meio de Cantor e Schwartz.

6 Apontamos anteriormente que Bolzano já havia chamado atenção, antes de Weierstrass, para essa diferença importante, mas ainda havia muita confusão a esse respeito.

7 Também apontamos que Bolzano havia descoberto, mas não publicado em vida, um exemplo semelhante.

Funções patológicas

Antes do exemplo de Weierstrass, algumas funções poderiam ser classificadas como patológicas, por exemplo, a função nunca diferenciável dada por Dirichlet em 1829, $D:[0,1]\to\mathbb{R}$ em que:

$$D(x)=\begin{cases}1, & \text{se } x\in\mathbb{Q}\\ 0, & \text{se } x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}\end{cases} \tag{5.2}$$

Além disso, essa função não é Riemann-integrável. A função de Dirichlet, assim como outro notável exemplo de função patológica, a função de Volterra – cuja derivada também não é Riemann-integrável (veja o item 6.4) –, foram usadas por Henri Lebesgue em seu famoso artigo de 1901, como exemplos das limitações dessa integral (Lebesgue, 1901).[8]

O próprio Riemann, em conexão com seus estudos de séries trigonométricas e integração, também deu numerosos exemplos de funções patológicas em 1854; assim como seu fiel seguidor, o matemático francês Jean Gaston Darboux (1842-1917), que apresentou vários exemplos de funções patológicas em seus estudos sobre a integral de Riemann (veja o item 6.3) (Darboux, 1872; 1875; 1879; Riemann, 1854; 1876).

Hankel, em 1870, não só deu vários exemplos de funções desse tipo como também utilizou um método que criava funções patológicas, denominado por ele de *condensação de singularidades* que consistia no seguinte: a partir de uma função com uma determinada singularidade num ponto, ele construía uma nova função que possuía essa propriedade num conjunto denso de pontos (Hankel, 1870). Esse método, na realidade, foi apresentado pela primeira vez por Riemann, e perfeitamente aperfeiçoado por Hankel. O fato mais curioso é que Riemann o apresentou para exibir exemplos de funções que, sendo integráveis segundo seu conceito, mostravam a generalidade com que ele tinha definido sua integral. Entretanto, anos depois, a *condensação de singularidades* foi usada para produzir

8 A tradução para o português pode ser encontrada em Otero-Garcia (2012).

funções patológicas que demonstraram que a integral de Riemann não era geral o suficiente.

Figura 18 – Henri Poincaré

Esses exemplos mostram que as séries trigonométricas, assim como a teoria de integração, fomentaram a criação e o estudo dessas funções bizarras. Entretanto, as funções patológicas eram vistas com certa desconfiança ainda no fim do século XIX e início do século XX. Muitos matemáticos da época diziam que o estudo de tais casos particulares desviaria os jovens estudantes de problemas mais importantes que ainda estavam em aberto. Henri Poincaré (1854-1912) partilhava dessa desconfiança: "Antigamente, quando se inventava uma função nova, era com vistas a algum objetivo prático; hoje em dia inventam-se expressamente para colocar defeito nos raciocínios de nossos predecessores" (Poincaré, 1899, p.159).[9]

Essa desconfiança, no entanto, não impediu que elas também cumprissem um papel importante que foi justamente o reconhecimento pelos próprios matemáticos de algumas deficiências em

9 Autrefois quand on inventait une fonction nouvelle, c'était en vue de quelque but pratique; aujourd'hui on les invente tout exprès pour mettre en défaut les raisonnements de nos pères.

definições ou demonstrações, levando ao aprimoramento dos fundamentos da análise. *Verbi gratia*, por meio desses exemplos pôde ser visto que o conceito de Dirichlet de função (veja o Capítulo 1) era muito geral para servir como uma base para a análise. Esse movimento passou por Weierstrass, Riemann, Hankel, Lebesgue... E assim, num processo complexo, com idas e vindas, a análise ganhou rigor e generalidade, mas perdeu "em elegância e simplicidade e se afastou da intuição e aplicações físicas" (Lützen, 2003, p.188).

Difusão e aceitação do movimento do rigor

Do mesmo modo que ocorreu com as funções patológicas, o processo de rigorização não foi aceito de imediato por toda comunidade matemática, e, consequentemente, também não foi tão logo incorporado ao ensino ou à pesquisa.

Vimos que, quando Cauchy introduziu seu novo modelo de rigor na Escola Politécnica (veja o Capítulo 2), ele foi criticado por seus colegas e superiores por enfatizar a fundamentação em detrimento das aplicações. Seu primeiro colaborador no curso, Ampère, seguiu Cauchy em alguns aspectos, mas Claude Louis Marie Henri Navier (1785-1836), que havia iniciado sua carreira de professor nessa escola em 1819, continuou enfatizando as aplicações e não concordava com a abordagem rigorosa de Cauchy. Durante os anos 1840, os métodos de Cauchy voltaram a ser ensinados na escola, mesmo sem o entusiasmo de alguns professores, como Joseph Liouville (1809-1882) e Jacques Charles François Sturm (1803-1855). Mesmo assim, esse último acabou se tornando responsável, de forma indireta, pela disseminação das ideias de Cauchy, já que suas notas de aulas, publicadas depois de sua morte, fizeram muito sucesso, com sucessivas reedições até pelo menos o começo do século XX. Ainda na França, destacamos o papel de Darboux, que, em uma série de trabalhos, chamou a atenção da comunidade matemática francesa para a necessidade de se estabelecer métodos mais rigorosos na análise ao mostrar os perigos existentes em confiar demasiadamente intuição (Darboux, 1872; 1875; 1879; Gispert, 1983; Hochkirchen, 2003).

Já o rigor weierstrassiano teve em Schwartz, que foi aluno de Weierstrass e editou um livro com suas notas e palestras (Weierstrass, 1893), e nos matemáticos franceses Georges Henri Halphen (1844-1889) e Camille Jordan (1838-1922), que introduziram os $\varepsilon - \delta$ em suas obras (Halphen, 1886; 1888; 1891; Jordan, 1893; 1894; 1896), seus principais propagadores (Klein; Sommerfeld, 2010). Particularmente com relação a Jordan, o seu bastante popular *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique* (segunda edição, totalmente reformulada) foi o maior responsável pela difusão dos novos padrões, influenciando uma legião de matemáticos, como Émile Borel (1871-1956) e Henri Lebesgue:

> Ousando incorporar certas partes da teoria dos conjuntos em seu curso da École Polytechnique, Jordan, de certa forma, restabeleceu essa teoria; ele afirmou que ela é um braço útil da matemática. Ele fez mais que afirmar, ele provou isso por meio de seus estudos sobre a medida de áreas e de conjuntos, sobre integração que, como seus estudos sobre a retificação de curvas, sobre as séries trigonométricas, sobre a análise situs,[10] têm preparado o caminho para diversos trabalhos, especialmente o meu. (Lebesgue, 1922, p.16)[11]

10 Nome pelo qual a Topologia era conhecida à época. Isso porque esse era o título da obra de Henri Poincaré considerada a pioneira desse ramo da matemática.

11 En osant incorporer certaines parties de la théorie des ensembles dans son cours de l'École Polytechnique, Jordan réhabilitait en quelque sorte cette théorie; il affirmait qu'elle est une branche utile des mathématiques. Il faisait plus que l'affirmer, il le prouvait par ses recherches sur la mesure des aires et des ensembles, sur l'intégration qui, comme ses études sur la rectification des courbes, sur les séries trigonométriques, sur l'analysis situs, ont si bien préparé certains travaux, les miens en particulier.

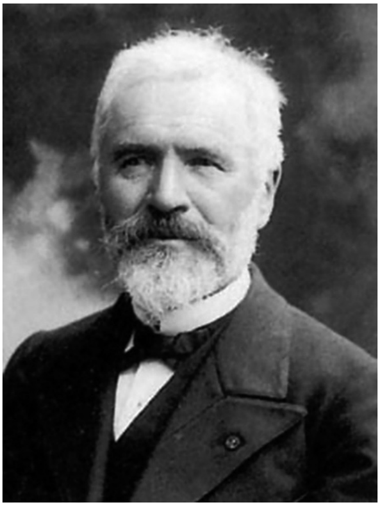

Figura 19 – Camille Jordan

No prefácio do segundo volume, Jordan (1894) enaltece a abordagem de Weierstrass e cita a edição feita por Schwartz e a obra de Halphen: "A superioridade incontestável dos métodos do Sr. Weierstrass fez com que decidíssemos tomar por guia nessa nova exposição os *Formeln und Lehrsätze* do Sr. Schwartz e o *Traité des fonctions elliptiques de Halphen* (p.v).[12] Voltaremos a falar de algumas das contribuições de Jordan para a análise no item 6.6.

O cenário foi parecido no que diz respeito às pesquisas. O próprio Cauchy várias vezes transgrediu contra seu próprio método, e, no que tange a matemática aplicada, o rigor nem sempre era considerado. Por exemplo, quando as séries divergentes não puderam mais ser usadas, com elas também foram excluídos muitos argumentos que haviam feito sucesso na física aplicada e astronomia. Nessa direção, Oliver Heaviside (1850-1925) deu grande contribuição para a teoria do eletromagnetismo usando séries divergentes

12 Le supériorité incontestable des méthodes de M. Weierstrass nous a décidé à prendre pour guide dans cette nouvelle exposition les *Formeln und Lehrsätze* de M. Schwartz et le *Traité des fonctions elliptiques* d'Halphen.

e fazia críticas ácidas a esse "engessamento" que o rigor da análise exigia.

Desse modo, a dificuldade encontrada em aceitar os novos métodos advinha não só da própria dificuldade em trabalhar com eles – alguns matemáticos prodigiosos, como Joseph Liouville (1809-1882 –, relatavam não conseguir entender os argumentos empregados), e eventualmente do conservadorismo, como também da necessidade que esses métodos criaram de rever antigos resultados que há muito eram considerados corretos.

* * *

Retomando o exemplo das séries divergentes, alguns matemáticos começaram a criar novas teorias para tentar contornar esse radicalismo imposto pela análise. Poincaré (1886) criou uma teoria das assim chamadas séries assintóticas que recuperava muitos argumentos das séries divergentes. Thomas Joannes Stieltjes (1856-1894), na mesma época e de forma independente de Poincaré, apresentou uma teoria semelhante (Stieltjes, 1886).[13] Outra abordagem foi iniciada por Frobenius e por Otto Hölder (1859-1937), e desenvolvida por Ernesto Cesàro (1859-1906), que definia a soma de uma grande classe de séries divergentes (Cesàro, 1890). Embora a soma de uma série divergente não se aproxime de um limite quando o número de termos cresce, a soma de Cesàro fazia sentido tanto para as aplicações quanto para trabalhos teóricos. Não só a questão das séries divergentes foi alvo de críticas, mas também a de diferenciabilidade, o que levou, por exemplo, à criação da moderna teoria das distribuições (já na metade do século XX) de Laurent Schwartz (1915-2002), em que as derivadas não necessariamente existem como funções, mas como funções generalizadas (Schwartz, 1950; 1951/1978).

Por fim, como já adiantamos em capítulos anteriores, esse movimento do rigor fez com que se procurasse uma alternativa à abor-

13 Após os trabalhos de Poincaré e Stieltjes, as chamadas séries assintóticas ganharam grande importância dentro da análise. Antes disso, eram empregadas apenas na astronomia (Cajori, 2007, p.484).

dagem dos infinitésimos, que, como nos demais casos do parágrafo anterior, apesar de se mostrar útil, recebia críticas por conta de certas inconsistências lógicas. Nesse contexto surge uma conceptualização rigorosa do conceito de limite de uma função, que passou a fundamentar o cálculo a partir de então. Tal conceitualização dependeu de releituras da definição de função e do conceito de número (notadamente o de número real), pois a partir delas foi possível demonstrar, sem o recurso da geometria, teoremas fundamentais da análise. Esse processo é chamado por muitos de *aritmetização da análise*, e dele nos ocuparemos no Capítulo 7.

E, assim, com a evolução dessas pesquisas de "releitura", do fim do século XIX para o início do século XX, o novo modelo de rigor passou a dominar as pesquisas matemáticas. Há quem considere esse modelo como uma restrição desnecessária (criando problemas que antes não existiam), mas devemos reconhecer que a maior parte das ideias desenvolvidas no século XX tiveram sua base no rigor do século XIX.

6
A MODERNA TEORIA DA INTEGRAÇÃO

Sílvio César Otero-Garcia

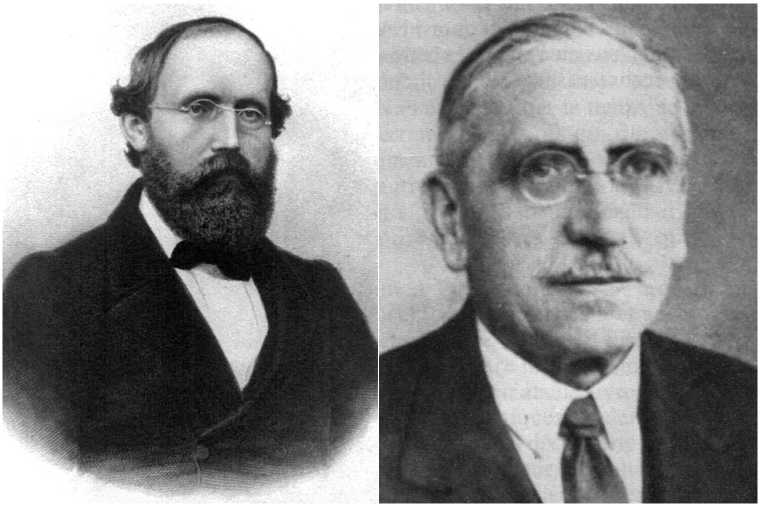

Figura 20 – Georg Friedrich Bernhard Riemann e Henri Léon Lebesgue

Como vimos no item 2.6, Riemann, a partir dos trabalhos de Cauchy, definiu e ampliou o conceito de integração a uma classe mais ampla de funções que as contínuas. Durante algum tempo, essa generalização foi considerada como a melhor que se poderia obter, e os pontos fracos da definição de Riemann, embora já fossem conhecidos, não eram tomados como críticos. Entretanto, o crescente interesse pelas funções patológicas, como a função nunca diferenciável dada por Dirichlet, e os estudos em teoria da medida de Camille Jordan e Émile Borel abriram caminho para que Lebesgue obtivesse um novo conceito de integral.

Assim, com base principalmente nas ideias contidas em Horchkirchen (2003) e Hawkins (1970), e, em menor medida, nas de Desanti (1998) e Grattan-Guinness (1970), faremos um breve passeio histórico no desenvolvimento dos conceitos de integração de Riemann a Lebesgue, sem deixar de lado, claro, o conceito de medida, fundamental para a generalização de integral proposta por Lebesgue.

As contribuições de Fourier, Cauchy e Dirichlet

Até meados do século XVIII, integrar era uma ideia fortemente vinculada à de derivar, isso é, integrar significava procurar a primitiva de uma função. É evidente que já se conhecia a relação existente entre a integração e o cálculo de áreas, entretanto, este era visto apenas como uma mera aplicação daquele. Foi a partir dos trabalhos de Fourier e principalmente dos de Cauchy que a integral deixou de ser vista apenas como uma antiderivada (veja o item 2.7).

Fourier (1822), ao definir os coeficientes

$$(6.1) \qquad a_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx \text{ e } b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\operatorname{sen}(nx)dx$$

da sua expansão de uma função arbitrária em séries trigonométricas, levantou uma questão: é possível definir $\int_a^b f(x)dx$ para qualquer f?

Cauchy (1823) respondeu a essa questão, ao menos em parte: toda função contínua limitada em um intervalo (ou no máximo seccionalmente contínua)[1] é integrável, e sua integral é o limite da soma

$$(6.2) \qquad \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}),$$

1 Uma função é dita seccionalmente contínua em um dado intervalo quando possui, no máximo, um número finito de pontos de descontinuidade nesse intervalo.

que pode ser reescrita, utilizando-se a notação introduzida por Fourier (1822), como

$$(6.3) \qquad \int_{x_0}^{X} f(x)dx.$$

Para o caso em que f é contínua em $(x_0, x_1), (x_1, x_2), \ldots, (x_m, X)$ e descontínua em $x_1, x_2, \ldots, x_m$,

$$(6.4) \int_{x_0}^{X} f(x)dx = \lim_{\epsilon \to 0}\left(\int_{x_0}^{x_1 - \epsilon\mu_1} f(x)dx + \int_{x_1+\nu_1}^{x_2 - \epsilon\mu_2} + \cdots + \int_{x_n - \epsilon\nu_n}^{X} f(x)dx\right),$$

desde que o limite exista e independa da escolha dos μ_i, ν_i.[2]

Quem também respondeu à questão levantada por Fourier foi Dirichlet (1829), que, a partir dos seus estudos do *Cours* de Cauchy e dos trabalhos sobre condução de calor de Fourier, publicou em seu *Sur la convergence des séries trigonométriques* a primeira prova rigorosa de que, se f, limitada em um dado intervalo, é monótona e contínua, exceto por um número finito de pontos, então ela admite uma expansão em séries de Fourier. Conforme já discutirmos (veja o item 4.1), em sua prova, Dirichlet não utiliza a continuidade de f, entretanto, necessita considerar essa hipótese para que a integral definida faça sentido, já que a definição de integral de Cauchy (1823) garante a existência da integral para f com, no máximo, um número finito de pontos de descontiuidade.

Dirichlet acreditava que quando f possuísse pontos de descontinuidade em número infinito, seria possível reduzi-la ao caso já considerado por ele:

2 Isso é equivalente a dizer que os limites laterais à direita e à esquerda dos pontos de descontinuidade devem existir. Ou seja, em uma linguagem mais moderna – reduzindo o número de pontos de descontinuidades a um, já que para um número finito de descontinuidades a definição é inteiramente análoga –, se f é limitada em $[a,b]$ e descontínua em $c \in (a,b)$, então (6.5) $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon \to 0^-} \int_a^{c-\epsilon} f(x)dx^{\epsilon} + \lim_{\epsilon \to 0^+} \int_{c+\epsilon}^{b} f(x)dx$, desde que existam os limites laterais.

> [...] se designarmos por a e b duas quantidades quaisquer compreendidas entre $-\pi$ e π, podemos sempre colocar entre a e b outras quantidades r e s suficientemente próximas para que a função permaneça contínua no intervalo de r a s. Perceberemos facilmente a necessidade dessa restrição considerando que os diferentes termos da série são integrais definidas [...]. (Dirichlet, 1829, p.169)[3]

Modernamente, isso significa que o conjunto de pontos de descontinuidade da função f deveria ser denso em parte alguma.[4] Apesar de mais geral que a condição de Cauchy, que admitia apenas um número finito de descontinuidades, Dirichlet não provou sua afirmação, embora tenha dito em seu artigo que o faria posteriormente em outro trabalho (que jamais existiu).

Seja como for, Dirichlet não só compreendeu a necessidade de estender o conceito de integral de Cauchy, como também a dificuldade em fazê-lo, tanto que finaliza o seu artigo apresentando um exemplo de função que não atendia ao critério que ele próprio estabelecera:

> Teríamos um exemplo de uma função que não satisfaz essa condição se supuséssemos $\varphi(x)$ igual a uma constante determinada c quando a variável x obtém um valor racional, e igual a uma outra constante d, quando essa variável é irracional. (Dirichlet, 1829, p.169)[5]

3 [...] si l'on désigne par a et b deux quantités quelconques comprises entre $-\pi$ et π, on puisse toujours placer entre a et b d'autres quantités r et s assez rapprochées pour que la fonction reste continue dans l'intervalle de r à s. On sentira facilment la nécessité de cette restriction en considérant que les différens termes de la série sont des intégrales définies [...].

4 Um conjunto $S \subset \mathbb{R}$ é dito denso em parte alguma se sempre for possível tomar um intervalo (a,b) em $\mathbb{R}$ que não contenha pontos de S. Analogamente, $S \subset \mathbb{R}$ é dito denso se todo intervalo (a,b) de S contiver pontos de $\mathbb{R}$. O conjunto dos números racionais é denso, enquanto que o conjunto dos números inteiros é denso em parte alguma.

5 On aurait un exemple d'une fonction que ne remplit pas cette condition, si l'on supposait $\varphi(x)$ égale à une constante déterminée c lorque la variable x obtient

Se, por um lado, Riemann, anos mais tarde, definiria sua integral que resolveria boa parte dos problemas de Dirichlet, por outro, mais adiante, Lebesgue iria além, conseguindo dar conta, inclusive, da função apresentada no excerto mostrado anteriormente, que, como se nota, é a famosa função que muito já discutimos: a função de Dirichlet. Assim, podemos afirmar, sem embargo, que os trabalhos de Dirichlet não só abriram caminho para a ampliação da integral de Cauchy por Riemann, como também a deste por Lebesgue.

A teoria da integração de Riemann

Georg Friedrich Bernhard Riemann nasceu em Bresenlenz, Alemanha, em 1826; e faleceu em 1866, na Itália, antes de completar quarenta anos, portanto. A sua morte relativamente prematura, por conta de complicações causadas pela tuberculose, certamente não o impediu de trazer à matemática valiosas contribuições. Desde muito pequeno, Riemann já demonstrava grande interesse e talento pela matemática, fato bastante recorrente quando se fala de matemáticos ilustres. Quase tão comum quanto isso era o fato de esses prodiciosos talentos não iniciarem seus estudos superiores diretamente na matemática; Riemann, por exemplo, foi para Göttingen estudar Teologia e Filosofia, possivelmente influenciado por seu pai, que era um ministro protestante. Seja como for, Riemann acabou se dedicando apenas à matemática, transferindo-se para Berlim em 1847, uma vez que a universidade na antiga cidade, apesar da presença de Gauss, tinha um ambiente matemático relativamente pobre se comparado à capital. Lá, ele conheceu Dirichlet, que se tornou seu mentor. Nessa intrincada rede, Riemann retorna a Göttingen para estudar com Gauss – obtendo seu doutorado em 1851 (Riemann, 1851, 1876) –, o qual seria, anos mais tarde, substituído justamente por Dirichlet, a quem, por sua vez, o próprio Riemann,

---

um valeur rationelle, et égale à une autre constante *d*, lorsque cette variable est irrationalle.

finalmente, substituiria em 1859 (data da morte de Dirichlet), tornando-se, assim, professor ordinário (equivalente ao cargo de professor titular no Brasil). Esse cargo, tão almejado por Riemann durante toda a sua carreira, lhe deu a estabilidade financeira necessária para que pudesse se dedicar com tranquilidade à matemática, o que infelizmente não durou muito, visto que ele viria a falecer cerca de sete anos mais tarde, em Selasca, onde vivera seus últimos quatro anos de vida para cuidar de sua enfermidade (Hervé, 2012; Katz, 1998; Lintz, 2007).

A influência de Dirichlet na vida de Riemann, como se nota, não foi pequena e, claro, se estendeu também para o campo acadêmico, repercutindo diretamente sobre seus trabalhos. De fato, para citar apenas o exemplo mais emblemático e de interesse aqui, poucos anos antes da morte de Dirichlet, Riemann defendeu sua *Habilitationsschrift*[6] (Riemann, 1854; 1876), na qual ele se dedica a, justamente, estudar a representação de funções por meio de séries trigonométricas, como já fizera seu mentor anos antes.

Nesse contexto, Riemann, como era de se esperar, não pôde escapar daquela questão deixada por Fourier e que não fora respondida plenamente nem por Cauchy, nem por Dirichlet: sob que condições uma função é integrável? Mas, antes, ele respondeu primeiramente a outra questão:

> O que devemos entender por $\int_a^b f(x)dx$? A fim de estabelecer isso, tomamos entre a e b a sequência de valores ordenados por tamanho $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, e denotamos, por brevidade, $x_1 - a$ por δ_1, $x_2 - x_1$ por δ_2, ..., $b - x_{n-1}$ por δ_n, e por ϵ_i uma fração própria positiva. Então, o valor da soma

6 Algo como uma *habilitação*, título de mais alto grau acadêmico que um doutor pode atingir em alguns países da Europa, como a Alemanha. No Brasil, seria equivalente ao título de livre-docente, que, para ser obtido, requer igualmente do candidato uma segunda tese a ser defendida de forma similar à feita para se obter um doutorado.

$$S = \delta_1 f(a+\epsilon_1\delta_1) + \delta_2 f(x_1+\epsilon_2\delta_2) + \delta_3 f(x_2+\epsilon_3\delta_3) + \cdots$$
$$+\delta_n f(x_{n-1}+\epsilon_n\delta_n)^{7}$$

> depende da escolha dos intervalos δ_i e dos valores ϵ_i. Se ela possuir a propriedade de, se todos os δ_i tornarem-se infinitamente pequenos, tender a um limite fixado A, não importando quais δ_i e ϵ_i sejam escolhidos, então seu valor será chamado $\int_a^b f(x)dx$.(Riemann, 1854; 1876, p.225)[8]

Ou seja, se, ao refinarmos a partição tomada, a soma de Riemann convergir para um valor fixado A, independentemente da escolha dos pontos $x_{i-1}+\epsilon_i\delta_i$, $\epsilon_i \in (0,1)\cap\mathbb{Q}$, então f será dita integrável em $[a,b]$ e A será sua integral.

Tendo-a definida, restava a Riemann, ainda, responder a questão de Fourier. Para isso, estabeleceu dois critérios equivalentes, que ainda hoje conhecemos como *Critérios de Integrabilidade de Riemann*:

1. Sendo $P=\{a=x_0<x_1<\ldots<x_{n-1}<x_n=b\}$ uma partição do intervalo [a,b], e $\|P\|=\max\{(x_i-x_{i-1})\}$ a norma de P, então a integral de f no intervalo considerado existirá se, e somente se,

$$\lim_{\|P\|\to 0}(D_1\delta_1 + D_2\delta_2 + \cdots + D_n\delta_n) = 0,$$

---

7 Modernamente, quando se define a integral de Riemann via o que se costuma chamar por "Somas de Riemann", designa-se δ_i por Δ_i e $f(x_{i-1}+\epsilon_i\delta_i)$ por $f(\xi_i)$, com $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$.

8 Um dieses festzusetzen, nehmen wir zwischen a und b der Grösse nach auf einander folgend, eine Reihe von Werthen $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ an und bezeichnen der Kürze wegen $x_1 - a$ durch δ_1, $x_2 - x_1$ durch δ_2, … , $b - x_{n-1}$ durch δ_n, und durch ϵ_i einen positiven ächten Bruch. Es wird alsdann der Werth der Summe

$$S = \delta_1 f(a+\epsilon_1\delta_1) + \delta_2 f(x_1+\epsilon_2\delta_2) + \delta_3 f(x_2+\epsilon_3\delta_3) + \cdots$$
$$+\delta_n f(x_{n-1}+\epsilon_n\delta_n)$$

von der Wahl der Intervalle δ und der Grössen ϵ abhängen. Hat sie nun die Eigenschaft, wie auch δ und ϵ gewähtl werden mögen, sich einer festen Grenze A unendlich zu nähern, sobald sämmtliche δ unendlich klein werden, so heisst dieser Werth $\int_a^b f(x)dx$.

em que δ_i, como já definido, denota o comprimento dos subintervalos de $[a,b]$ e D_i a oscilação de f nos correspondentes intervalos.[9]

2. Sendo $s(P,\sigma)$ a soma dos comprimentos dos δ_i para os quais D_i é maior do que σ, então f será integrável se, e somente se, para quaisquer ϵ e σ positivos, existir $d > 0$ tal que, se P for uma partição de $[a,b]$ tal que $\| P \| \leq d$, então $s(P,d) < \epsilon$.

De posse de tais critérios, Riemann pôde exibir algo inimaginável até então, um exemplo de função integrável descontínua em um subconjunto denso de $\mathbb{R}$:

$$f(x) = (x) + \frac{(2x)}{4} + \frac{(3x)}{9} + \cdots + \frac{(nx)}{n^2} + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(nx)}{n^2}, \tag{6.6}$$

em que

$$(x) = \begin{cases} x - \lfloor x \rfloor, & \text{se } x - \lfloor x \rfloor < 1/2 \\ 0, & \text{se } x - \lfloor x \rfloor = 1/2 \\ x - \lfloor x \rfloor - 1, & \text{se } x - \lfloor x \rfloor > 1/2 \end{cases}, \tag{6.7}$$

com $\lfloor x \rfloor = \max\{m \in \mathbb{Z}; m \leq x\}$. Essa função é descontínua em todos os pontos da forma $m/2n$ com m e n primos entre si. De fato, para tais valores de x, os limites de f pela direita e esquerda são:

$$f(x+) = f(x) - \frac{1}{2n^2}\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}\right] = f(x) - \frac{\pi^2}{16n^2}; \tag{6.8}$$

$$f(x-) = f(x) + \frac{1}{2n^2}\left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}\right] = f(x) + \frac{\pi^2}{16n^2}. \tag{6.9}$$

Entretanto, f é integrável, já que para qualquer $\sigma > 0$ existe apenas um número finito de pontos $x = m/2n$ para os quais o salto $f(x-) - f(x+) = \pi^2/8n^2$ é maior do que σ, o que satisfaz o segundo critério de integrabilidade.

9 Ou seja, $D_i = M_i - m_i$, com $M_i = \max\{f(x), x_{i-1} < x < x_I\}$ e $m_i = \min\{f(x), x_{i-1} < x < x_I\}$.

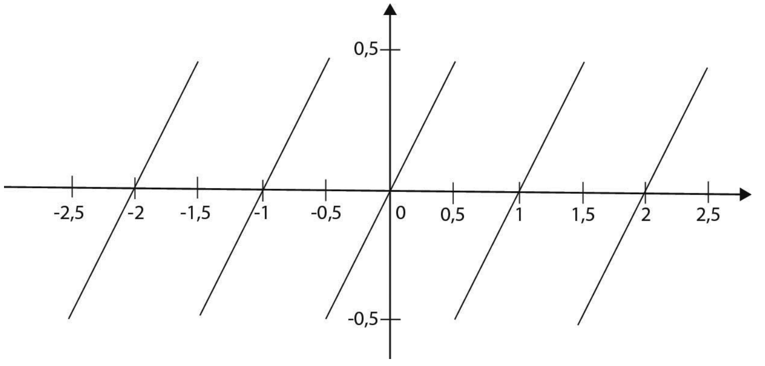

Figura 21 – Esboço da função $f(x)$ de Riemann

* * *

Vemos, assim, que se Riemann, por um lado, baseou-se nas ideias de Cauchy para estabelecer sua nova integral, partindo, por exemplo, de uma partição para defini-la; por outro, construiu diferentes somas e se distanciou desse matemático francês ao expandir o conjunto das funções integráveis muito além das simplesmente contínuas ou seccionalmente contínuas. Essa generalidade com a qual Riemann tratou a questão causou uma certa comoção na comunidade matemática da época, que acreditava ter chegado ao limite até onde era possível chegar com relação ao assunto. Segundo Paul du Bois-Reymond,[10] o mais entusiasta expoente da nova teoria da integração, "Riemann estendeu o escopo das funções integráveis ao seu extremo limite" (Du Bois-Reymond, 1883, p.274).[11] Entretanto, alguns anos mais tarde se perceberia que esse não era bem o caso.

10 Paul David Gustav du Bois-Reymond (1831-1889) foi um importante matemático alemão de família francesa que trabalhou com equações integrais, cálculo variacional e séries de Fourier. É irmão do renomado fisiologista Emil Heinrich du Bois-Reymond.

11 Riemann den Spielraum integrierbarer Functionen bis an seine äusserste Grenze.

A integral de Darboux

Um dos primeiros passos mais importantes dados na direção de se estender a teoria de Riemann foi dado pelo matemático francês Jean-Gaston Darboux.

Figura 22 – Jean-Gaston Darboux

Nascido em Nîmes, em 1842, e morto em Paris, em 1917; após seus estudos na École Normale Supérieure, Darboux foi assistente de Joseph Bertrand[12] na cadeira de matemática do Collège de France, entre 1866 e 1867; lecionou no Lycée Louis-le-Grand entre 1867 e 1872 e na École Normale entre 1872 e 1873. Finalmente, antes de se tornar professor titular de geometria superior na Faculdade de Ciências de Paris em 1881, foi mestre de conferências[13]

12 O francês Joseph Louis François Bertrand (1882-1900) foi um importante matemático, economista e historiador das ciências. A partir de uma revisão de um trabalho de Bertrand feita por Darboux, surgiu o que hoje conhecemos como problema de Darboux-Bertrand. Para mais detalhes, ver Smirnov (2008).

13 À época, na França, o mestre de conferências era o cargo imediatamente inferior ao de professor titular.

a partir de 1873 nessa mesma instituição (Gispert, 1983; Meyer, 2012).

Darboux foi um dos maiores responsáveis pela disseminação das ideias de Riemann na França. Em seu trabalho *Mémoire sur les Fonctions Discontinues* (Darboux, 1875), ele traz algumas das suas mais importantes considerações sobre a teoria da integração de Riemann. Por esse motivo, concentraremos nossas considerações sobre os trabalhos de Darboux nessa obra. Considerando apenas funções limitadas, para uma função f definida no intervalo $[a,b]$, Darboux define três números:

> [...] podemos fixar dois números M, m dando lugar às seguintes propriedades: M é maior ou igual aos diversos valores da função, e há ao menos um valor da função maior que $M-\epsilon$, ϵ sendo tão pequeno quanto se queira. Analogamente, m é menor ou igual a todos os valores da função, e há ao menos um valor da função menor que $m+\epsilon$. [...] A diferença, positiva ou nula, $M-m$ se chamará, conforme Riemann, a oscilação da função no intervalo dado. (Darboux, 1875, p.61)[14]

Assim, Darboux distingue os conceitos de supremo (que ele chama de limite máximo) e máximo e, analogamente, os de ínfimo (limite mínimo) e mínimo.[15] A diferença $M-m$ é denotada por Δ.

Na sequência, para o conjunto de valores compreendidos entre $[a,b]$, $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, já tomados em ordem crescente (trata-se de uma partição do intervalo), Darboux define:

1. $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ números positivos inferiores a 1 (i.e., $\theta_i \in [0,1]$);

14 [...] on peut assigner deux nombres M, m donnant lieu aux propriétés suivantes: M est supérieur ou égal au diverses valeurs de la fonction, et il y a au moins un valeur de la fonction supérieure à $M-\epsilon$, ϵ étant aussi petit qu'on le veut. De même m est inférieur ou égal à toutes les valeurs de la fonction, et il y a au moins une valeur de la fonction inférieure à $m+\epsilon$. [...] La différence positive ou nulle $M-m$ s'appellera, d'après Riemann, l'*oscillation de la fonction* dans l'intervalle donné.

15 Modernamente, $M=\sup\{f(x); a \le x \le b\}$, $m=\inf\{f(x); a \le x \le b\}$.

2. $\delta_1 = x_1 - a$, $\delta_2 = x_2 - x_1$, e assim sucessivamente;
3. $\Sigma = \delta_1 f(a+\theta_1\delta_1) + \delta_2 f(x_1+\theta_2\delta_2) + \cdots + \delta_n f(x_{n-1}+\theta_n\delta_n)$.

Sendo M_i e m_i o limite máximo (supremo) e o limite mínimo (ínfimo) da função no i-ésimo intervalo, então o termo $\delta_i f(x_i+\theta_{i+1}\delta_{i+1})$ ficará compreendido entre $\delta_i m_i$ e $\delta_i M_i$. Portanto,

$$\delta_1 m_1 + \cdots + \delta_n m_n := m_{ab} \leq \Sigma \leq M_{ab} := \delta_1 M_1 + \cdots + \delta_n M_n. \tag{6.10}$$

Se o comprimento dos intervalos δ_i tender a zero e, consequentemente, o conjunto de valores x_n aumentar indefinidamente, Darboux diz que uma condição necessária e suficiente para que Σ tenha um limite é que

$$M_{ab} = m_{a,b},\ \Delta_{ab} = 0. \tag{6.11}$$

Ou seja,

> [...] a condição necessária e suficiente para que a soma Σ tenha um limite é que o tamanho total dos intervalos nos quais as oscilações são maiores que σ tenda a zero quando todos os intervalos tenderem a zero, σ sendo fixado, mas tão pequeno quanto se queira. (Darboux, 1875, p.72)[16]

Como se nota, há grandes semelhanças entre esse critério de Darboux e os dois critérios de integrabilidade de Riemann.

Satisfeita a condição do tamanho dos intervalos, "o limite de Σ é dito integral de $f(x)$ entre os limites a e b. Temos: $\lim \Sigma = \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$" (Darboux, 1878, p.72-73).[17]

16 [...] la condition nécessaire et suffisante pour que la somme Σ ait une limite, c'est que la grandeur totale des intervalles dans lesquels les oscillations sont plus grandes que σ tende vers zéro quand tous le intervalles tendent vers zéro, σ étant fixe, mais aussi petit qu'on le veut.

17 la limite de Σ est dite l'intégrale de $f(x)$ entre les limites a, b. On a $\lim \Sigma = \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

Em linguagem moderna, a soma de Darboux

$$(6.12) \qquad S(n,\delta,\theta)=\sum_{i=1}^{n}\delta_i f(x_{i-1}+\theta_i\delta_i),$$

converge para um limite único (que independe de δ e θ) se, e somente se, a oscilação $\Delta(n)$ tender a zero, i.e., se

$$(6.13) \qquad \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}m_i\delta_i=\underline{\int_a^b} f(x)dx=\overline{\int_a^b} f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}M_i\delta_i.$$

A partir disso, Darboux conclui e demonstra que: *i*) Toda função contínua é integrável; *ii*) A integral de $f(x)$ continuará a existir e não mudará de valor caso se altere o valor de f para um número finito de valores de x; *iii*) A função $x\to\int_a^x f(y)dy$ é contínua em x; e, finalmente: *iv*) se f é integrável e é a derivada de uma outra função F, então

$$(6.14) \qquad \int_a^x f(x)dx=F(x)-F(a).$$

Provado o Teorema Fundamental do Cálculo, pode-se dizer que, então, Darboux havia estabelecido seu conceito de integral. Talvez não exatamente uma extensão da proposta por Riemann, mas sim uma releitura conveniente. Tanto que muitos livros-texto atuais, ao introduzirem o conceito de integral, tendem a usar o elegante tratamento feito por Darboux do conceito original de Riemann (Dunham, 2005). De qualquer maneira, a integral de Riemann e a de Darboux são equivalentes, i.e., f é Darboux-integrável se, e somente se, é Riemann-integrável.[18]

18 Uma prova dessa equivalência pode ser vista em Bartle e Sherbert (2011).

O Teorema Fundamental do Cálculo e a procura por primitivas

Segundo Baroni, Batarce e Nascimento (2009), tanto do ponto de vista da teoria da medida quanto do cálculo de áreas, as preocupações de Riemann eram mais locais, voltadas essencialmente à questão deixada por Fourier. Nesse sentido, não é de se espantar que ele não tenha se preocupado em estender o Teorema Fundamental do Cálculo de Cauchy. Conforme vimos no item 2.7, uma importante restrição se aplicava a f para que o teorema fosse válido: continuidade. A mesma restrição que havia para a própria definição de integral de Cauchy. Riemann fez a extensão para o caso da integral, mas com relação ao TFC, quem o fez, conforme vimos no item anterior, foi Darboux, que passou a imputar a f' a condição de ser integrável ao invés de f ser contínua.

Embora mais geral, o tratamento dado por Darboux logo se mostrou ainda incompleto para as necessidades da época, principalmente no tocante a procura de primitivas. O primeiro a apontar esses problemas, segundo Hochkirchen (2003), foi o matemático italiano Ulisse Dini:

> Se uma função finita e contínua $F(x)$, sem ser sempre constante entre α e β,tendo máximo e mínimo ou passagens de invariabilidade em qualquer parte arbitrária do intervalo (α,β), e, ao mesmo tempo, sua derivada ordinária $F'(x)$ [...] sendo sempre determinada e finita, então essa derivada não será integrável em nenhum intervalo contido entre α e β e nem em qualquer passagem de invariabilidade da função (incluindo o intervalo (α,β)). (Dini, 1878, p.283)[19]

19 Se una funzione finita e continua $F(x)$, senza essere sempre constante fra α e β, presenta dei massimi e minimi o dei tratti d'invariabilità in qualunque porzione dell'intervallo (α,β), e al tempo stesso la sua derivata ordinaria $F'(x)$ [...] sono sempre determinate e finite, queste derivate non saranno mai atte alla integrazione in nessun intervallo compreso fra α e β che non sia un tratto d'invariabilità della funzione (l'intervallo (α,β) incl.).

Ou seja, Dini havia mostrado que existem funções cuja derivada não é integrável.

Pouco depois disso, em consequência das discussões sobre funções patológicas (ver item 5.2), numerosos exemplos surgiram para ilustrar a afirmação de Ulisse Dini. Um dos mais emblemáticos – e de especial interesse para a teoria da medida e da integração – foi dado por Vito Volterra (1860-1940), conterrâneo de Dini.

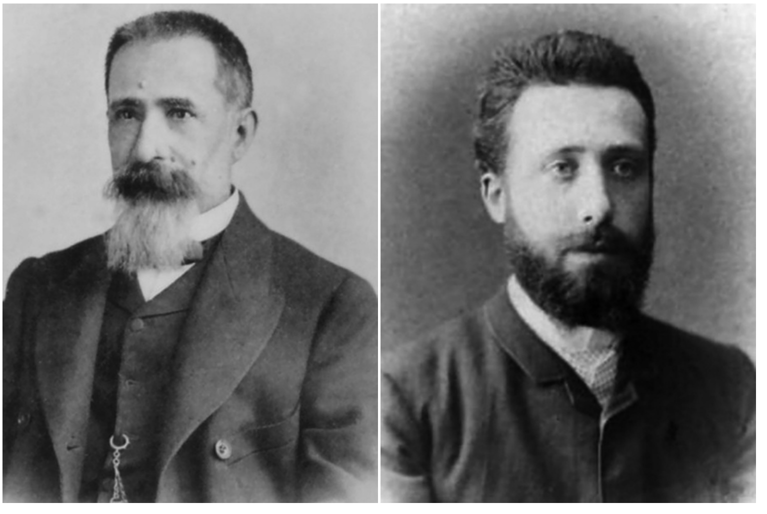

Figura 23 – Ulisse Dini e Vito Volterra

Vito Volterra foi influenciado em sua procura por exemplos de funções cuja derivada não é integrável justamente por conta do resultado anos antes publicado por Ulisse Dini. Em seu trabalho de 1881, escreve: "Prof. Dini levanta dúvidas se em alguns casos a definição ordinária de integral pode não estar contemplada na de Riemann, ou seja, as funções cujas derivadas não podem ser integradas. Proponho-me a dar exemplos de tais funções" (Volterra, 1881, p.334).[20] E foi o que Volterra fez.

20 Prof. Dini solleva il dubbio che in alcuni casi possa la definizione ordinaria di integrale non rientrare in quella di Riemann, cioè vi siano delle funzioni le cui dèrivate non sono atte alla integrazione. Mi propongo di dare alcuini esempi di tali funzioni.

Tomando[21] o intervalo $(0,1)$, Volterra define nele P um subconjunto denso em parte alguma de medida positiva,[22] obtido como o complementar de uma família infinita enumerável $F \subset (0,1)$ de intervalos abertos disjuntos.

> No intervalo $(0,1)$ pode-se construir um grupo de pontos de P, de segunda espécie, os quais têm a propriedade de não poderem ser enclausurados por um número finito de intervalos de soma tão pequena quanto se queira, mas tal que no interior de cada intervalo $(0,1)$ existe um outro intervalo no qual faltam pontos do grupo. (Volterra, 1881, p.334)[23]

Constrói, então, um intervalo genérico (a,b) de F, e a função $f(x,a,b)$ cujas propriedades são:

1. $f(a) = f(b) = 0$.
2. Se $a < x \leq x_1$, em que x_1 é o maior ponto à direita de a e à esquerda do ponto médio do intervalo no qual a função atinge seu máximo, então

$$f(x) = A = (x-a)^2 \ \text{sen} \frac{1}{x-a} .$$

21 Tomaremos por base em nossa exposição, tanto a construção original de Volterra (1881) como leituras mais modernas de seu trabalho: tais como Katchi (1982), principalmente, e Benedetto e Czaja (2009, p.10-11), Bruckner (1978, p.45-47, 73), Bruckner, Bruckner e Thomson (1997, p.49-50), Hawkins (1970, p.56-58), e Wise e Hall (1993).

22 Um dado conjunto C é de medida zero se dado qualquer $\varepsilon > 0$, C pode ser coberto por um número infinito enumerável de intervalos de comprimento menor que ε. Caso contrário, diremos que X possui medida positiva. Por sua vez, dizemos que uma família de conjuntos cobre um dado conjunto C se os conjuntos dessa família contiverem C .

23 Nell'intervallo $(0,1)$ può costruirsi un gruppo di punti P di seconda specie i quali godono della proprietà che non si possono rinchiudere in un numero finito di intervalli di cui la somma sia tanto piccola quanto si vuole, tale però che nell'interno di ogni intervallo entro a quello totale $(0,1)$ esista un nuovo intervallo in cui mancano punti del gruppo.

3. Se $x_2 \leq x < b$, em que x_2 é o menor ponto à esquerda de b e à direita do ponto médio do intervalo no qual a função atinge seu máximo, então

$$f(x) = B = (x-b)^2 \ \text{sen}\frac{1}{b-x}.$$

4. Se $x_1 < x < x_2$, então $f(x)$ é constante e igual a $f(x_1) = A_{x_1} = B_{x_2} = f(x_2)$.

A função f será finita, contínua, inferior a $(b-a)^2$, e terá derivada finita sempre inferior a $2(b-a)+1$ em todo o seu domínio.

A partir de f, Volterra define a função φ como se segue:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in P \\ f(x,a,b), & \text{se } x \notin P \end{cases}.$$

Do modo como P foi definido, se $x \notin P$, então x pertence a um intervalo aberto do tipo (a,b). A função φ será diferenciável em $[0,1]$, desde que se pode mostrar que é em P, e sua derivada será limitada, evidentemente primitivável, porém não será integrável em $[0,1]$, pois é descontínua em P, que, como já dissemos, tem medida positiva.

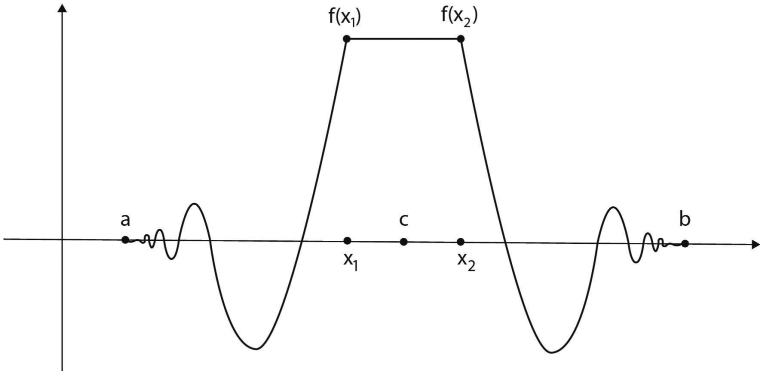

Figura 24 – Esboço da função $f(x,a,b)$

Esse exemplo já seria suficiente para ilustrar a afirmação de Ulisse Dini, afinal, ele mostra a existência de uma função que admite primitiva, mas que não é integrável (no sentido de Riemann). Entretanto, Volterra foi além e, a partir de φ, definiu uma nova função cuja derivada não é integrável em nenhum ponto do intervalo $(0,1)$.[24] Não entraremos em maiores detalhes sobre essa nova função, visto que a sua construção é demasiado longa e, para nossos objetivos, i.e., exibir uma função cuja derivada não admite primitiva, a função φ é suficiente.

***

Chegamos, portanto, ao segundo ponto crítico da teoria da integração de Riemann – se considerarmos que a existência de funções não integráveis no sentido de Riemann, como a função de Dirichlet, se configuraria como o primeiro. Essas questões levariam, anos mais tarde, ao desenvolvimento de uma nova teoria da medida e da integração por Henri Lebesgue, que, em sua abordagem, permitiu a reversibilidade para todas as funções, i.e., toda função derivada passou a ser integrável. Entretanto, alguns problemas de longa data, como o da convergência uniforme de sequências e séries de funções, ainda precisavam ser rediscutidos.

A integral de Riemann e a compatibilidade com o limite

Fourier foi mesmo um matemático bem ousado, e muito embora tenha feito afirmações consideradas incorretas anos depois, foi pela procura da confirmação ou refutação delas que muita matemática se desenvolveu. Conforme vimos no item 4.1, uma dessas afirmações era a que dizia que toda função definida em um intervalo finito podia ser representada por uma série de Fourier. Cauchy mostrou que eram necessárias mais restrições para que isso fosse verdade e, mais adiante, veremos que de fato a questão toda não se encerra nem de um lado, nem de outro. Seja como for, nosso destaque aqui é outro ponto que Fourier tocou, a questão da compatibilidade do

---

24 Notemos que φ' não é integrável em $P \subset (0,1)$ e não em todo o intervalo.

conceito de integral com o de limite no contexto das sequências e séries de funções. Fourier (1822) afirma que a integral de uma soma infinita convergente de funções contínuas é a soma da integral de seus termos, i.e.:

$$\int_a^b \sum_{i=1}^{\infty} v_i(x)dx = \sum_{i=1}^{\infty} \int_a^b v_i(x)dx, \tag{6.15}$$

ou, equivalentemente,

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} s_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b s_n(x)dx, \tag{6.16}$$

para $v_i(x):[a,b]\to\mathbb{R}$ e $s_n(x)=v_1(x)+v_2(x)+\ldots+v_n(x)$. Em outros termos, Fourier garantiu que era possível comutar a integral e o limite para quaisquer séries (ou sequências) convergentes de funções contínuas (ou integráveis, no sentido de Cauchy) e, consequentemente, que era possível integrar termo a termo uma série nessas condições.

Os matemáticos, pelo menos até a segunda metade do século XIX, usavam sem muita hesitação essas premissas. Esse quadro começou a mudar por volta de 1870, quando Eduard Heine divulgou um importante resultado de Weierstrass a esse respeito:

> Até recentemente acreditava-se que a integral de uma série convergente cujos termos permanecem finitos entre os limites de integração poderia ser a soma das integrais dos termos individuais, e apenas o Sr. Weierstrass notou que a prova desse teorema requer que a série não seja apenas convergente dentro dos limites de integração, mas que também convirja uniformemente. (Heine, 1870, p.353)[25]

25 Bis in die neueste Zeit glaubte man, es sei das Integral einer convergenten Reihe, deren Glieder zwischen endlichen Integrationsgrenzen endlich bleiben, gleich der Summe aus den Integralen der einzelnen Glieder, und erst Herr *Weierstrass* hat bemerkt, der Beweis dieses Satzes erfordere, dass die

Os trabalhos de Weierstrass sobre continuidade uniforme são bem anteriores a isso, entretanto, conforme vimos no item 5.1 eles só se tornaram conhecidos pela comunidade matemática da época algum tempo depois. Heine, que era amigo de Weierstrass, foi um dos grandes divulgadores das suas ideias.

Em suas notas de aula, Weierstrass provou que uma condição suficiente para a (6.16) era a uniformidade da convergência (Heine, 1870; Hawkins, 1980). Darboux, que fez uma revisão do trabalho de Heine sobre séries, também mostrou esse resultado no mesmo artigo em que trata da sua versão da integral de Riemann:

> Se todos os termos de uma série são funções contínuas ou descontínuas suscetíveis à integração, e se a série é uniformemente convergente em um intervalo dado (a,b), a função que representa a série, que não é necessariamente contínua, será suscetível à integração. Sua integral será a soma das integrais de todos os seus termos. (Darboux, 1875, p.82)[26]

Alguns anos depois dos trabalhos de Heine e Darboux, os matemáticos Cesare Arzelà (1847-1912) e William Fogg Osgood (1864-1943) mostraram que era possível estender o resultado de Weierstrass ao estabelecer a limitação uniforme (Arzelà, 1885; Osgood, 1897)[27] como condição essencial para que a igualdade de 6.16 fosse verificada. Ou seja, se f_n for uma sequência de funções (eventualmente uma série) uniformemente limitadas e integráveis e que converge pontualmente para uma função integrável, então verifica-se a igualdade em 6.16.

Reihe in den Integrationsgrenzen nich nur convergire, sondern dass sie auch in gleichem Grade convergire.

26 Si tous les termes d'une série sont des fonctions continues ou discontinues susceptibles d'intégration, et si la série est uniformement convergente dans un intervalle donné (a,b), la fonction que répresente la série, et qui n'est pas nécessairement continue, sera susceptible d'intégration. Son intégrale sera la somme des intégrales de tous ses termes.

27 Uma sequência f_n de funções se diz uniformemente limitada se existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $|f_n(x)| \leq a$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Notemos, no entanto, que o resultado de Heine e Darboux, embora mais restritivo por necessitar da convergência uniforme, não requer, por hipótese, que a função para a qual a sequência converge seja integrável, isso já é uma consequência do teorema. O resultado de Arzelà e Osgood, ao contrário, pede essa hipótese adicional. Apesar disso, esses dois matemáticos não apresentaram um exemplo de função uniformemente limitada, convergente pontualmente cujo limite não fosse integrável a Riemann. Isso foi feito por Réné-Louis Baire (1874-1932) em 1889 (Baire, 1889; Hawkins, 1980).

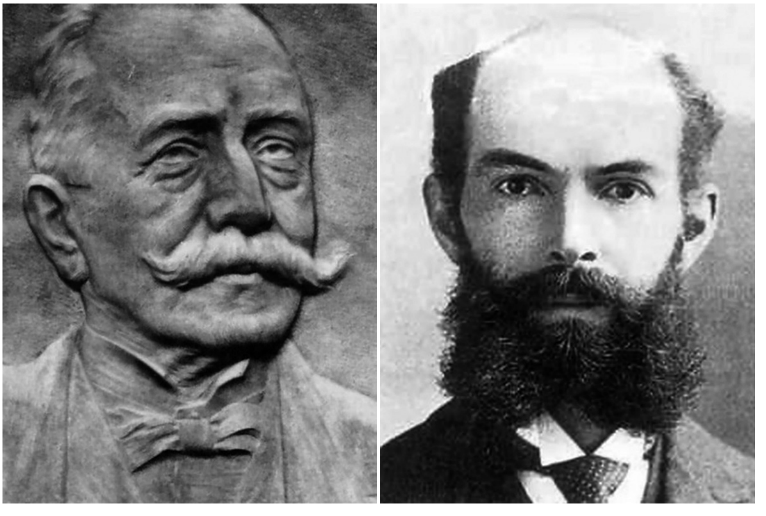

Figura 25 – Cesare Arzelà e William Fogg Osgood

Baire (1889) considerou a sequência $f_n(x)$ com x no intervalo $[0,1]$ da seguinte forma: $f_n(x)=1$ se x puder ser escrito na forma p/q, com p e q inteiros, primos entre si, e $q \leq n$; nos demais casos, $f_n(x)=0$. Cada f_n é integrável, visto que é constante igual a zero, exceto por um número finito de pontos. Além disso, $|f_n(x)| \leq 1$ para todo n, donde f_n é uniformemente limitada. A função limite existe e é justamente a já tão comentada função de Dirichlet: $f(x)=1$ se x é racional; $f(x)=0$ se x é irracional. Essa função, como se sabe, não é Riemann-integrável.

Em face dos resultados de Heine e Darboux, bem como do exemplo dado por Baire, pode-se dizer que "a integral de Riemann não é, em geral, compatível com o limite (Hochkirchen, 2003, p. 273)". Esse fato foi observado por Lebesgue (1902) que, em sua teoria, mostra que se uma sequência de funções integráveis (a Lebesgue) é uniformemente limitada, então a função para a qual essa sequência converge é integrável (a Lebesgue) e, no caso das séries, sua integral é a soma das integrais de seus termos. A teoria de Lebesgue exclui, assim, a hipótese adicional sobre a função limite, de maneira que sua integral é compatível com o limite sob condições bem mais gerais que as da de Riemann.

Antes de adentrarmos finalmente na teoria de Lebesgue, ainda precisaremos discutir mais alguns passos que foram fundamentais para que esse matemático francês pudesse estabelecer seus novos conceitos de medida e de integral. Isso porque as falhas da integral de Riemann já apontadas não eram consideradas à época como pontos críticos e muito possivelmente elas por si só não teriam levado a se rediscutir a integração de Riemann.

O desenvolvimento da teoria da medida: Camille Jordan

Marie-Ennemond-Camille Jordan nasceu em Lyon, França, em 1838. Engenheiro de formação, atuou na área até meados de 1885, o que, entretanto, não o impediu de exercer uma intensa atividade matemática. Foi nomeado examinador na École Polytechnique em 1873 e depois professor em 1876. Entrou para a Academia de Ciências em 1881 e dez anos depois sucedeu o matemático Joseph Liouville no Collège de France. Entre 1885 e 1921, assumiu a direção do *Journal de Mathématiques Pures et Apliquées*, fundado por Liouville em 1836. Faleceu em 1822 (Verley, 2012).

Jordan é bastante conhecido pelas suas contribuições à álgebra, notadamente nos campos dos grupos finitos e grupos clássicos. Entretanto, também foi substancial sua contribuição à análise, não só pelo seu *Cours d'analyse de l'École Polytechnique*, que, conforme já apontamos (item 5.3), influenciou diversas gerações de matemáticos, como também, dentre outras, sua contribuição para o desenvolvimento da teoria da medida. É precisamente desse ponto que falaremos nesta seção.

***

Em seu trabalho *Remarques sur les intégrales définies*, Jordan (1892) faz um breve apanhado sobre a integral de Riemann e sobre alguns resultados de Darboux; em seguida afirma que os resultados desses dois matemáticos são bastante nítidos e deixam bem claro o papel que desempenha a função na integral. Entretanto, ressalva que essa mesma clareza não se aplica quando o assunto é o domínio.[28] Em outras palavras, Jordan estava interessado em analisar a natureza da medida dos conjuntos, ou ainda, em desenvolver uma teoria do *conteúdo* para subconjuntos do R^n. Isso porque em todas as demonstrações de Riemann e Darboux são usados dois fatos que para Jordan não eram autoevidentes: i) todo conjunto tem comprimento determinado, ii) se decompusermos um conjunto em n partes, a soma dos comprimentos desses n subconjuntos será igual ao comprimento do conjunto original. E Jordan tinha razão, desde os gregos até Riemann, em se tratando de medida, a maior preocupação era simplesmente medir, e não definir ou discutir o que isso significava.[29]

28 Em francês, a palavra utilizada é *champ*, que literalmente significa *campo*. Embora seja essa uma tradução possível, visto que essa palavra possui significado dentro do contexto da matemática, optamos por utilizar *domínio* porque, em nossas referências em língua portuguesa, essa foi a tradução mais comumente utilizada para a palavra em questão. Por outro lado, sem prejuízo, conforme apontam Baroni, Batarce e Nascimento (2009), é possível ainda o uso da palavra *região* que, inclusive, pode parecer até mais natural dentro do referido contexto.

29 Há quem afirme que nem mesmo Jordan se interessou muito por isso, visto que ele desenvolveu sua teoria da medida para satisfazer o que ele entendia como sendo uma lacuna na teoria da integração, ao contrário, por exemplo, de Lebesgue, que desenvolveu uma teoria da medida e trouxe a sua integral como uma consequência dela. Para mais detalhes, veja Baroni, Batarce e Nascimento (2009).

Concentrando-se em subconjuntos do plano – ainda que seus resultados permaneçam válidos para R^n –, Jordan coloca:

> Decomponhamos esse plano por paralelas aos eixos em quadrados de lado r. O conjunto daqueles desses quadrados cujos pontos são todos interiores a E forma um domínio S interior a E; o conjunto daqueles que são interiores a E,ou que contêm um ponto de sua fronteira, formam um novo domínio $S+S'$, ao qual E é interior. Esses domínios, sendo formados pela reunião de quadrados, possuem áreas determinadas, que podemos também representar por S e $S+S'$. Façamos variar a decomposição em quadrados de tal forma que r tenda a zero: as áreas S e $S+S'$ tenderão a limites fixos. (Jordan, 1892, p.77, grifo do autor)[30]

Portanto, ele toma E um subconjunto limitado arbitrário de R^2. Sendo P uma partição do plano em quadrados de lado r, Jordan define S como a união dos quadrados completamente contidos em E, e $S+S'$ a união dos quadrados que contêm ao menos um ponto de E. Posto dessa forma, podemos ver que S' consiste dos quadrados que cobrem a fronteira de E.[31]

Na demonstração da última afirmação do excerto anteriores, Jordan utiliza sucessivos refinamentos para mostrar que a área de S pode ser indefinidamente aumentada sem que ultrapasse um limite fixado A. Por outro lado, a área de $S+S'$ pode ser reduzi-

30 Décomposons ce plan par des parallèles aux axes en carrés de côté r. L'ensemble de ceux de ces carrés dont tous les points sont intérieurs à E forme un domaine S intérieur à E; l'ensemble de ceux que sont intérieurs à E ou qui contiennent au point de sa frointière forment un nouveu domaine $S+S'$, auquel E est intérieur. Ces domaines, étant formés par la réunion de carrés, ont des aires détermines, qu'on peut également représenter par S et $S+S'$. Faisons varier la décomposition en carrés, de telle sorte que r tende vers zéro: *les aires S et $S+S'$ tendront vers des limites fixes.*

31 Dado um subconjunto $X \subset R^2$, a fronteira $\partial(X)$ de X é o conjunto de todos os $x \in X$ tais que qualquer que seja o aberto $U \subset \mathbb{R}^2$, $U \cap X \neq 0$ e $U \cap (\mathbb{R} - X) \neq 0$. Ou seja, todo aberto na fronteira de X contém tanto pontos de X quanto de seu complementar.

da tanto quanto se queira sem que fique menor o limite a fixado. Ou seja, $S \to A$ quando $r \to 0$, da mesma forma que $S + S' \to a$ quando $r \to 0$. Jordan chama, então, A de área interior de E, e a de área exterior de E. Se S' tiver zero por limite, então E será dito quadriculável.[32] Quando $E \subset R^n$ para $n > 2$, Jordan utiliza outra nomenclatura, diz que E é *mensurável* se a *extensão exterior* A é igual à *extensão interior* a: "As considerações precedentes são evidentemente aplicáveis a conjuntos com um número qualquer de dimensões. Poderemos determinar para cada um deles uma *extensão interior* e uma *extensão exterior*. Se elas coincidem, o conjunto será dito *mensurável*" (Jordan, 1892, p.79).[33]

Isso posto, Jordan define sua integral:

> Seja $f(x, y, \ldots)$ uma função que conserva um valor limitado no interior de um domínio E que supomos mensurável. Decomponhamos E em domínios elementares $e_1, e_2, \ldots$ Designemos por M, m o máximo e o mínimo da função f em E; por M_k, m_k seu máximo e mínimo em e_k, e formemos as somas
>
> $$S = \sum M_k e_k, \quad s = \sum m_k e_k .$$
>
> Como temos evidentemente que
>
> $$m \le m_k \le M_k \le M,$$
>
> S e s estarão entre
>
> $$M \sum e_k = M \cdot E \text{ e } m \sum e_k = m \cdot E,$$

32 Em francês, *quarrable*, i.e., que pode ser dividido em pequenos quadrados.

33 Les considérations précédents sont évidemment applicables aux ensembles d'un nombre quelconque de dimensions. On pourra déterminer pour chacun d'eux une étendue intérieure et une *etendue extérieure*. Si elles coincident, l'ensemble sera *mesurable*.

e seus módulos serão, no máximo, iguais a $L{\cdot}E$, L designando o maior dentre os dois módulos $|M|$ e $|m|$ (ou o máximo de $|f|$ no domínio E). O Sr. Darboux mostrou que, se fizermos variar a decomposição de tal modo que os diâmetros dos elementos tendam a zero, S e s tenderão a limites fixos. [...] Esse número fixo $T = \lim S$ se chama integral por excesso da função $f(x, y, \cdots)$ no interior de E. Demonstramos analogamente que as somas s tendem ao seu máximo t, que será a integral por falta da função $f(x, y, \ldots)$. Temos evidentemente que $T \geq t$. Se $T = t$, a função será dita integrável, e $T = t$ será sua integral, a qual poderá ser representada pela notação $S_E f(x, y, \ldots) de$. (Jordan, 1892, p.81-84)[34]

Jordan possivelmente optou pela notação $S_E f(x, y, \ldots) de$ para diferenciar a sua integral, definida para funções com número de variáveis arbitrário, das integrais de Riemann e Darboux, definidas para funções de uma variável. Precisamente era essa uma das motivações de Jordan para definir sua medida: para ele, a extensão do conceito da integral de Riemann para os casos $n > 1$ não parecia clara, principalmente porque a sua definição e existência estavam baseadas em um conceito de área que não era suficientemente preciso para gerar uma adequada definição geral (Baroni; Batarce; Nascimento, 2009; Hawkins, 1970). Esse ponto crítico na defini-

34 Soit $f(x, y, \cdots)$ une fonction qui conserve une valeur bornée dans l'interieur d'un domaine E, supposé mesurable. Décomposons E en domaines élémentaires mesurables $e_1, e_2, \ldots$ Désignons par M, m le maximum et le minimum de la fonction f dans E; par M_k, m_k son maximum et son minimum dans e_k, et formons les sommes $S = \sum M_k e_k$, $s = \sum m_k e_k$. Comme on a évidemment $m \leq m_k \leq M_k \leq M$, S et s seront comprises entre $M \sum e_k = M \cdot E$ e $m \sum e_k = m \cdot E$, et leurs modules seront, au plus, égaux à $L{\cdot}E$, L désignant le plus grand des deux modules $|M|$ et $|m|$ (ou le maximum de $|f|$ dans le domaine E). M Darboux a montré que, si l'on fait varier la décomposition de telle sorte que les diamètres des éléments tendent vers zéro, S et s tendront vers des limites fixes. [...] Ce nombre fixe $T = \lim S$ se nomme l'intégrale par excès de la fonction $f(x, y, \ldots)$ dans l'intérieur de E. On démontre de même que les sommes s tendent vers leur maximum t, qui sera l'intégrale par défaut de $f(x, y, \ldots)$. On a évidemment $T \geq t$. Si $T = t$, la fonction sera dite intégrable, et $T = t$ sera son intégrale, laquelle pourra être représentée par la notation $S_E f(x, y, \ldots) de$.

ção de Riemann já havia sido notado anos antes pelo matemático italiano Giuseppe Peano (1858-1932) em sua obra de 1883 (Peano, 1883).

Considerando que Darboux dividiu o intervalo $[a,b]$ em um número finito de subintervalos, e, que Jordan admitiu conjuntos mensuráveis arbitrários, podendo ser, em particular, intervalos, fica claro que para o caso $n=1$, se f é integrável a Riemann, e, consequentemente, à Darboux, é também integrável a Jordan. Nessa direção, é possível pensar: podemos generalizar o conceito de integral por meio de uma generalização do conceito de medida? Sim, na realidade, a medida de Jordan influenciou fortemente Émile Borel e Henri Lebesgue, e permitiu o desenvolvimento de um novo conceito de integral por meio de sua conexão com o conceito de medida, como veremos nas seções seguintes (Wasiolek, 2010).

O desenvolvimento da teoria da medida: Émile Borel

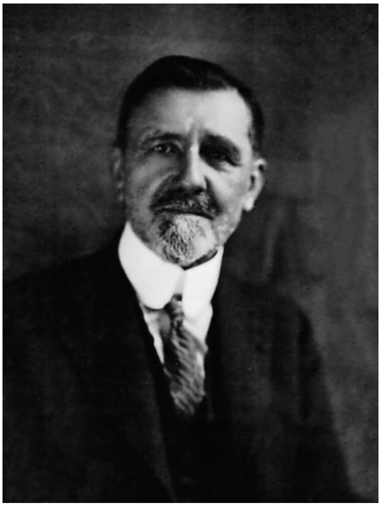

Figura 26 – Émile Borel

O matemático francês Félix Édouard Justin Émile Borel nasceu em 1871, em Saint-Affrique, e faleceu em 1956, em Paris.[35] Filho de um pastor protestante e de uma filha de comerciantes, ainda criança já demonstrava grande habilidade com a matemática – como já é de praxe constatarmos nas biografias dos matemáticos[36] –, tendo ingressado no liceu (algo como nosso ensino médio) precocemente com onze anos. Anos depois, já em Paris, pouco antes do seu ingresso na École Normale Supérieure em 1889, frequentou o círculo de amizades de Darboux, que viria a ser o orientador de sua tese. Primeiramente como aluno, depois como professor, permaneceu ligado à École praticamente durante toda a sua vida, mesmo depois de ter ido para a Sorbonne após a Primeira Guerra Mundial. Fundou o Instituto Henri Poincaré em 1928 (Lintz, 2007).

Borel, como se nota, era bem relacionado; além de Darboux e Poincaré, foi casado com a filha mais velha de Paul Émile Appel (1855-1930), importante matemático contemporâneo seu, orientou a tese de doutorado de Lebesgue e era um defensor e admirador das ideias de Cantor. Todas essas diferentes relações, evidentemente, foram fundamentais para sua carreira, em especial com Lebesgue, da qual nos ocuparemos na próxima seção, e com Cantor, da qual nos ocuparemos nesta.

Georg Cantor introduziu noções topológicas sobre conjuntos que foram essenciais para o desenvolvimento da teoria da medida de Borel, isso porque foi por meio delas que as noções de dois tipos distintos de conjuntos finalmente se tornaram bem definidas: conjuntos de medida zero e conjuntos densos em parte alguma. Para

35 Um fato curioso, porém interessante, é que, segundo Lintz (2003), Borel visitou o Brasil um ano antes de seu falecimento, por conta de um simpósio organizado pelo Instituto Internacional de Estatística. Ao regressar ao navio, escorregou em uma casca de banana, e devido às complicações decorrentes dessa queda, seu estado de saúde se agravou, o que culminou em sua morte em 1956.

36 Por conta da natureza da matemática e da maneira como as crianças lidam com ela? Ou, quem sabe, por questões de como a história é contada? Seja como for, o relato recorrente é esse: em geral, grandes matemáticos foram crianças prodígio.

que possamos entender – ainda que não profundamente, visto não ser esse o nosso enfoque – o motivo pelo qual os matemáticos confundiam as noções desses dois tipos de conjuntos, vamos defini-los (ou redefini-los, visto que já falamos deles anteriormente).

Um conjunto $A \subset B$ é dito denso em parte alguma se para todo $x \in A$ é sempre possível definir uma vizinhança de x que não contém pontos de B. Analogamente, esse conjunto será dito denso se toda vizinhança de x contiver algum ponto de B. Nesse contexto, o conjunto dos números inteiros é denso em parte alguma em $\mathbb{R}$, já o conjunto dos racionais é denso em $\mathbb{R}$. Apesar de $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ gozarem de propriedades distintas com relação à densidade, ambos, por outro lado, têm medida zero. Isso significa que podem ser cobertos por um número finito ou no máximo enumerável de intervalos.

Para muitos matemáticos importantes da época, como o já mencionado Hermann Hankel, conjuntos densos em parte alguma e conjuntos de medida zero eram conceitos equivalentes. No mesmo trabalho em que trata do conceito abstrato de função e traz a sua definição desse ente matemático, Hankel (1870) discute a questão da continuidade, pois, como vimos no Capítulo 1 essas duas ideias estiveram por muito tempo atreladas dentro da história da matemática. Nesse contexto, ele analisa as características de certos conjuntos de pontos de descontinuidade de funções singulares geradas por meio do já comentado método de condensação de singularidades (ver 5.2). A partir desses exemplos, Hankel enuncia e demonstra que toda função cujo conjunto de pontos de continuidade é denso, é integrável. Na demonstração ele assume que os conjuntos densos em parte alguma possuem medida nula. Por conta dessa confusão, a demonstração estava incorreta e, na verdade, o próprio teorema se mostraria falso. Em 1875 o matemático inglês Henri John Stephen Smith (1826-1883) apresenta um exemplo de função não integrável cujo conjunto de pontos de descontinuidade é denso em parte alguma (Smith, 1875).

Parte da referida confusão entre conjuntos densos em parte alguma e conjuntos de medida nula devia-se ao fato da não existência de exemplos que a contrariasse. Entretanto, a função de que falamos anteriormente apresentada por Smith fazia exatamente isso: seu conjunto de pontos de descontinuidade, embora denso em parte alguma, possuía medida positiva (e por isso não era integrável). Apesar do exemplo de Smith, os dois conceitos ainda seriam confundidos pelo menos até os trabalhos de Volterra (1881) e Cantor (1879; 1880; 1882; 1883a; 1883b; 1884) serem publicados, isso porque os resultados de Smith não ficaram tão conhecidos em sua época.

Cantor (1879; 1880; 1882; 1883a; 1883b; 1884), em sua série de trabalhos publicados na renomada revista *Mathematische Annalen,* não só apresenta exemplos como os de Smith, mas também "introduz todas as ideias que depois se generalizariam para espaços topológicos, como 'ponto de acumulação', 'conjunto derivado', 'conjunto denso', 'perfeito' e outros" (Lintz, 2007, p.493).

* * *

Para os matemáticos da época, por conta da confusão de que falamos antes, parecia muito estranho que um conjunto denso como $\mathbb{Q}$ pudesse ter medida nula. Assim, quando Jordan elaborou sua medida, ele simplesmente não contemplou tais conjuntos, ou seja, conjuntos densos não são mensuráveis a Jordan (Baroni; Batarce; Nascimento, 2009). Uma vez que a tal confusão foi desfeita e certos resultados e conceitos relativos à teoria dos conjuntos estavam melhor definidos após os trabalhos de Cantor, Borel finalmente pôde dar um passo na direção de estender a medida de Jordan: conjuntos densos são mensuráveis a Borel.

Borel, em seu trabalho de 1898, introduziu seu conceito de medida por meio de um axioma intuitivo relativo à medida de intervalos, em seguida, apresentou um axioma sobre a aditividade de sua medida e finalizou com um axioma sobre a medida de um conjunto contido em outro:

> Todos os conjuntos que consideraremos serão formados de pontos compreendidos entre 0 e 1. Quando um conjunto é formado por todos os pontos contidos em uma infinidade enumerável de intervalos que não se sobrepõem uns aos outros e cujo compri-

> mento é s, diremos que o conjunto tem por medida s. Quando dois conjuntos não possuem pontos em comum, e suas medidas são s e s', o conjunto obtido pela sua reunião, quer dizer, sua soma, tem por medida $s+s'$. [...] Mais geralmente, se temos uma infinidade enumerável de conjuntos que, dois a dois, não possuem nenhum ponto em comum e que possuem, respectivamente, $s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$ por medidas, sua soma (ou o conjunto formado por sua reunião) tem por medida
>
> $$s_1 + s_2 + \cdots + s_n + \cdots .$$
>
> [...] se um conjunto E tem por medida s e contém todos os pontos de um conjunto E' cuja medida é s', o conjunto $E-E'$, formado por todos os pontos de E que não pertencem a E', será dito de medida $s-s'$. [...] Os conjuntos para os quais a medida pode ser definida em virtude das definições precedentes serão chamados mensuráveis [...] a medida jamais é negativa; todo conjunto cuja medida não é nula não é enumerável. (Borel, 1898, p.46-48)[37]

Os conjuntos de Borel, definidos como no início do excerto anterior, podem, portanto, gerar outros conjuntos por meio da diferença ou da união enumerável de outros conjuntos de Borel. A

37 Tous les ensembles que nous considérerons seront formés de points compris entre 0 et 1. Lorsqu'un ensemble sera formé de tous les points compris dans une infinité dénombrable d'intervalles n'empiétant pas les uns sur les autres et ayant une longueur totale s, nous dirons que l'ensemble *a pour mesure s*. Lorsque deux ensembles n'ont pas de points communs, et que leurs merures sont s et s', l'ensemble obtenu en les réunissant, c'est-à-dire leur somme, a pour mesure $s+s'$. [...] Plus généralement, si l'on a une infinité dénombrable d'ensembles n'ayant deux à deux aucun point commun et ayant respectivement par mesures $s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$ leur somme (ou ensemble formé par leur réunion) a pour mesure $s_1 + s_2 + \cdots + s_n + \cdots$. [...] si un ensemble E a pour mesure s, et contient tous le points d'un ensemble E' dont la mesure est s', l'ensemble *$E-E'$, formé des points de E qui n'appartiennent pas à E', sera dit avoir pour mesure $s-s'$* [...]*Les ensembles dont on peut définir la mesure en vertu des définitions précédents seront dits par nous ensembles mesurables* [...]*la mesure n'est jamais négative; tout ensemble dont la mesure n'est pas nulle n'est pas dénombrable*.

sua medida corresponde à do comprimento dos intervalos. Borel, entretanto, não discute o quão extensíveis seus conjuntos eram, i.e., que conjuntos seriam Borel-mensuráveis e quais não seriam. O máximo que faz é mostrar que os conjuntos perfeitos[38] e limitados são mensuráveis – interessante notar que, para definir esses conjuntos, Borel cita justamente os trabalhos de Cantor de que já falamos. Além disso, Borel também não conecta seu conceito de medida ao de integração, como havia feito Jordan.

Apesar de muito valoroso para a teoria da medida, o próprio Borel considerava o trabalho de Jordan mais geral que o seu, talvez por isso ele não tenha se dedicado a estudar algumas consequências dos conjuntos que havia definido: "Seria interessante comparar as definições que nós demos com as definições mais gerais que o Sr. Jordan deu em seu *Cours d'Analyse*" (Borel, 1898, p.46, grifo nosso).[39] Seja como for, tanto os trabalhos de Jordan como os de Borel foram fundamentais para que o jovem matemático Henri Lebesgue desenvolvesse suas ideias.

Integral, comprimento, área

O matemático francês nascido em Beauvois, em 1875, Henri Léon Lebesgue, conforme já adiantamos, propôs, no começo do século XX, novos conceitos de integral e de medida. O primeiro deles generalizava as integrais propostas por Riemann e Cauchy, sanando diversas deficiências dessas, e, o segundo, as medidas de Jordan e Borel (Hochkirchen, 2003; Cajori, 2007). Não por acaso, essas generalizações levaram o seu nome: integral de Lebesgue e medida de Lebesgue.

A integral de Riemann é aplicável tanto a funções contínuas como a funções que admitem um número finito de descontinui-

38 Um conjunto P é dito perfeito se coincide com seu conjunto derivado P', que, por sua vez, é formado pelos pontos de acumulação de P.

39 Il serait intéressant de comparer les définitions que nous avons donées avec les définitions plus générales que M. Jordan donne dans son Cours d'Analyse.

dades, entretanto, há restrições no caso do número de descontinuidades ser infinito. Além dessa limitação, a definição dada por Riemann, muito embora tenha satisfeito os matemáticos durante algum tempo, apresentava outras falhas. Seguindo Chae (1995), apontaremos novamente algumas delas usando uma linguagem mais moderna.

A primeira e mais notável é que a classe de funções integráveis a Riemann é muito restrita, ainda que seja uma ampliação das funções integráveis a Cauchy. A própria função de Dirichlet pode ser tomada como um exemplo dessa limitação (e, de fato acabou sendo usada por Lebesgue nesse sentido). Um segundo ponto fraco é que, em geral, não é verdade que

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

quando $f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$ é uma sequência de funções Riemann-integráveis em $[a.b]$ que tende a $f(x)$. Isso porque o limite da esquerda pode não existir, e, mesmo que exista, a função f pode não ser integrável a Riemann e, finalmente, ainda que ela seja e o limite exista, a igualdade pode não ser satisfeita. Por último, ainda que tenhamos uma função f contínua e derivável em um certo intervalo $[a,b]$, f' não será sempre Riemann-integrável, isto é, a relação fundamental

$$f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)dt$$

não é sempre verificável.

Precisamente nessas falhas residiam os pontos de partida de Lebesgue. Entretanto, exemplos como o da função de Dirichlet, conforme vimos no item 5.2, eram vistos com certa desconfiança ainda no início do século XX. Muitos matemáticos da época diziam que o estudo de tais casos particulares desviaria os jovens estudantes de problemas mais importantes que ainda estavam em aberto. Além disso, as demais falhas da integral de Riemann nem sempre foram consideradas como *pontos críticos*. Do mesmo modo, também não foi bem recebida naquela época a tese de doutorado de Lebesgue, *Intégrale, Longueur, Aire*, defendida em 1902 pela Universidade de Nancy (Hoare; Lord, 2002; Lebesgue, 1902). Nessa obra, Lebesgue desenvolveu suas ideias sobre seus conceitos de medida e integração que haviam sido introduzidos um ano antes em seu artigo de 1901 (Lebesgue, 1901).

Após seu doutoramento, Lebesgue iniciou carreira acadêmica, durante a qual direcionou esforços não só para a matemática, mas também para questões pedagógicas e relacionadas com a sua história. Trabalhou no Tennes et Poitiers e ministrou cursos no Collège de France que resultaram nos livros *Leçons sur la integration et la recherche des fonctions primitives*, de 1904, e *Leçons sur les séries trigonométriques*, de 1906 (Lebesgue, 1904, 1906). Em 1910 foi nomeado para a Sorbonne, onde obteve a cátedra em 1918. Em 1921 ingressou no Collège de France, onde permaneceu até sua morte, que ocorreu em 26 de julho de 1941. Foi eleito para a Academia de Ciências de Paris e para as Sociedade Matemática e Sociedade Real de Londres, entre outras (Hochkirchen, 2003).

A brilhante trajetória acadêmica de Lebesgue, bem como a importância de seus novos conceitos de medida e de integral tanto dentro da própria matemática como em aplicações, especialmente para a análise dos fenômenos descontínuos e de natureza estatística e probabilística, permitiram que a sua teoria da medida e integração finalmente fosse aceita (Lintz, 2007; Hochkirchen, 2003). Mas, de que tratam a medida e a integral de Lebesgue?

***

Lebesgue tomou contato com o *Cours d'Analyse* de Jordan durante o tempo em que estudou na École Normale Superieure, entre 1894 e 1897. Durante esse período, foi também aluno de Borel, que viria a se tornar orientador de sua tese posteriormente. Não por acaso, as ideias desses dois matemáticos foram fundamentais para o desenvolvimento dos conceitos de Lebesgue.

Embora tenha inicialmente exposto suas ideias em uma série de artigos publicados no *Comptes Rendus* (Lebesgue, 1899a; 1899b; 1900a; 1900b; 1901), concentraremos nossas observações em sua tese (Lebesgue, 1902), visto que nela Lebesgue retoma e aprimora suas ideias anteriores; sua tese é, também, mais representativa dentro da história da matemática no que diz respeito à introdução das suas teorias da medida e da integração (Michel, 1992).

No primeiro capítulo de sua tese, Lebesgue apresenta os seguintes axiomas que devem ser verificados para qualquer medida:

> Nós nos propomos a vincular a cada conjunto limitado um número positivo ou nulo, que chamaremos de sua medida e satisfará às condições seguintes:
>
> 1. Existem conjuntos cuja medida não é nula.
> 2. Dois conjuntos iguais têm a mesma medida.
> 3. A medida da soma de um número finito, ou de uma infinidade enumerável de conjuntos, sem pontos em comum; dois a dois, é a soma das medidas desses conjuntos. (Lebesgue, 1902, p.6)[40]

Como se pode notar, à exceção do segundo axioma, os demais foram definidos à maneira como Borel havia feito em 1898. Com forte apelo geométrico, Lebesgue, então, define sua medida e demonstra certos resultados relativos a ela a partir do caso em que os elementos dos conjuntos são pontos de uma reta, em seguida estende os resultados para o plano e para dimensões quaisquer.

Lebesgue define o que ele chama de *medida exterior* de um conjunto de pontos contido num intervalo aberto como sendo o limite inferior da soma dos comprimentos dos intervalos (infinitos) que cobrem esses pontos. Ou seja, a medida exterior, denotada por m_e do conjunto $E \subseteq (a,b)$, pode ser definida como

$$m_e(E) := \inf\left\{\sum_i l(I_i); E \subseteq \cup_i I_i\right\},$$

40 Nous nous proposons d'attacher à chaque ensemble borné un nombre positif ou nul que nous appellerons sa mesure et satisfaisant aux conditions suivantes: 1. Il existe des ensembles dont la mesure n'est pas nulle. 2. Deux ensembles égaux ont même mesure. 3. La mesure de la somme d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'ensembles, sans points communs; deux à deux, est la somme des mesures de ces ensembles

em que $I_i = (a_i, b_i]$ e $l(I_i) = b_i - a_i$, já que não importa quais intervalos sejam escolhidos para cobrir E. Essa definição generaliza a *extensão exterior* da medida de Jordan.

Por outro lado, denotando por $C_{ab}(E)$ o complementar de $E \subset (a,b)$ em relação a (a,b), Lebesgue define a *medida interior* de um conjunto como sendo:

$$m_i(E) = m(ab) - m_e[C_{ab}(E)],$$

em que $m(a,b) = b - a$, o comprimento do intervalo, como em Borel. Um conjunto é dito mensurável se $m_e = m_i$.

Lebesgue mostra adiante que se $E_1 \subset E_2$, então $m(E_2 - E_1) = m(E_2) - m(E_1)$, exatamente como colocado por Borel em um de seus axiomas. Além disso, sua medida assim definida satisfaz os três axiomas por ele colocados no início de seu trabalho. Mais que isso, em linguagem moderna, Lebesgue mostra que sua medida forma uma σ-álgebra. De fato, o conjunto vazio é mesurável, já que $0^C = (a,b)$; o complementar de qualquer conjunto mensurável é mensurável, pela própria definição; finalmente, a união enumerável de conjuntos mensuráveis é mensurável. Mais geralmente, o que Lebesgue nos afirma é que a tripla $((a,b), \ell, m)$ – em que ℓ é a família de subconjuntos de (a,b) (mensuráveis), e m é a função medida de Lebesgue – é um espaço de medida. Com efeito, (a,b) é um conjunto, ℓ é uma σ-álgebra (como mostramos), a função medida de Lebesgue é tal que $m(\varnothing) = 0$, e, sendo os conjuntos E_i disjuntos, $m(\cup_i E_i) = \sum m(E_i)$.

Antes de estabelecer as conexões entre sua medida e o conceito de integral, Lebesgue demonstra que os conjuntos mensuráveis a Jordan são também mensuráveis com relação à sua medida, e, além disso, essas medidas são iguais. Ou seja, a definição de Lebesgue estende à de Jordan. Da mesma forma, no que se refere à medida de Borel: "todo conjunto mensurável está contido em um conjunto E_1 e contém um conjunto E_2, E_1 e E_2, sendo mensuráveis (B) [a Borel] e de mesma medida" (Lebesgue, 1902, p.11).[41] Ou seja, a medida de Lebesgue também prolonga a de Borel.

* * *

No segundo capítulo de sua tese, Lebesgue aplica a sua teoria da medida à integração.[42] Partindo da ideia de que nem toda função derivada é Riemann-integrável, e que, portanto, essa integral não resolve o problema da procura por funções primitivas, Lebesgue sugere que, ao invés de subdividir um intervalo do domínio da função para o cômputo da integral, a subdivisão de um intervalo do conjunto imagem leva a uma generalização do conceito posto. Isso significa que sua integral tem, como caso particular, a de Riemann e, ao mesmo tempo, consegue apresentar primitivas de funções que Riemann não conseguiu.

Seja $m \leq f \leq M$ uma função limitada em um intervalo fechado $[a,b]$. Sendo P a partição

$$m = a_0 < a_1 < \cdots < a_{n-1} < M = a_p \ ,$$

a integral de Lebesgue estará compreendida entre as seguintes somas:

$$\sigma = \sum_{i=0}^{n-1} a_i m(e_i), \ \ \Sigma = \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1} m(e_i) \ ;$$

sendo que $e_i = y^{-1}(a_i, a_{i+1}] = \{x \in [a,b];\ a_i < y(x) \leq a_i\}$ e $m(e_i)$ é a medida de Lebesgue do conjunto e_i. A diferença $\Sigma - \sigma$ não supera $\| P \| (b-a)$, já que a medida dos comprimentos e_i é evidentemente menor que a medida de $(b-a)$ e $\| P \| = \max\{a_{i+1} - a_i\}$. Dessa forma:

$$\Sigma - \sigma = \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) m(e_i) \leq \| P \| (b-a) \ .$$

41 [...] tout ensemble mesurable est contenu dans un ensemble E_1 et contient un ensemble E_2, E_1 et E_2 étant mesurables (B) et de même mesure.

42 Embora tenhamos seguido de perto a exposição feita em Lebesgue (1902), cumpre salientar que, por questões didáticas e de economia, fizemos algumas pequenas alterações em relação ao que se encontra no original.

Quando os a_i se tornam suficientemente pequenos, ou seja, $\| P \| \to 0$, as duas somas convergem para o mesmo valor que será a integral de Lebesgue no intervalo considerado:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} a_i m(e_i) = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1} m(e_i) \ .$$

Essa definição – embora tenhamos usado o caso particular de funções de uma variável, é estendida para o caso de mais variáveis –, como Lebesgue deixou claro em sua tese que era de seu desejo, generalizou o conceito de integral definida, superando todas as limitações da integral de Riemann que apontamos ao longo deste capítulo. Com efeito, a função de D de Dirichlet passou a ser integrável. Na realidade, de um modo mais geral, toda função que se torna contínua ao se retirar dela um conjunto de medida nula é Lebesgue-integrável – i.e. uma função *quase sempre* contínua. Evidentemente esse é o caso da função D, e sua integral é zero. Além disso, se f definida em $[a,b]$ é tal que sua derivada f' é limitada, então sempre será válido que

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a) \ .$$

Finalmente, se uma sequência f_n de funções integráveis é uniformemente limitada e tem f como limite, então f será integrável e sua integral será o limite das integrais de f_n, ou seja

$$\lim_{n \to \infty} \int f_n(x)dx = \int \lim_{n \to \infty} f_n(x)dx \ ,$$

ou ainda, o limite e a integral são intercambiáveis.

7
Construções dos números reais

> O que uma derivada realmente é? Resposta: um limite. – O que uma integral realmente é? Resposta: um limite. – O que uma série infinita realmente é? Resposta: um limite. Isso nos leva a: – O que é um limite? Resposta: um número. E, finalmente, a última questão: – O que é um número? (Hairer; Wanner, 2008, p.170-171)

Muitos fatos, resultados e ideias foram construídos e divulgados até chegar ao que hoje conhecemos como a construção dos números reais. Um fato marcante que colaborou com esse processo foi a percepção de Bolzano, ao apontar que a primeira prova de Gauss do teorema do valor intermediário, hoje também conhecido como teorema de Bolzano,[1] não era rigorosa. Ele, então, deu uma prova puramente analítica do teorema, em 1817, o que é considerado por alguns autores como a origem da aritmetização da análise, que veio culminar com a caracterização abstrata do conceito de número.

---

1 Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ uma função contínua. Se $f(a)<c$ e $f(b)>c$, então existe $\xi\in(a,b)$ tal que $f(\xi)=c$. Em outra formulação, esse teorema afirma que se uma função contínua é negativa num extremo de um intervalo fechado e positiva no outro, então ela se anula em algum ponto intermediário. Esse teorema foi usado por Euler, Lagrange e Gauss sem grandes preocupações, já que geometricamente ele parece bastante imediato.

Essa prova de Bolzano (1817) mostrou a necessidade de uma boa definição de número real.

A partir da metade do século XIX, muitos matemáticos começaram a publicar trabalhos que abordavam o conceito de número real.[2] Com abordagens bastante distintas, tratavam tanto da definição precisa dos números reais como também do conceito de função real baseado nessa definição. Entretanto, segundo Epple (2003, p.292), nessas diferentes abordagens é possível encontrar essencialmente três concepções: a) a tradicional, de que a análise foi definitivamente estabelecida na noção (intuitiva ou lógica) de uma quantidade contínua; b) a de que a noção de quantidade poderia ser trocada por uma construção estritamente aritmética dos números reais, ou seja, uma construção baseada na noção de números naturais ou racionais que podem ser assumidos por ser uma opção menos problemática do que as quantidades contínuas; c) a de que os conceitos fundamentais da análise poderiam e deveriam ser estruturados de uma forma puramente formal, evitando questões filosóficas tanto quanto possível.

Neste texto, vamos abordar apenas as concepções do segundo grupo, representado por Dedekind, Weierstrass e Cantor-Heine (também vamos dar uma ideia do método axiomático proposto por David Hilbert (1862-1943), do terceiro grupo).[3] Embora esses três matemáticos tenham definido (e construído) os reais a partir dos naturais, os diferentes motivos que estavam subjacentes aos trabalhos desses três matemáticos levaram a três teorias conceptualmente diferentes, mesmo se considerarmos que os campos numéricos obtidos são mutuamente isomorfos. Para Dedekind, o problema mais urgente era encontrar uma fundamentação aritmética rigorosa para o cálculo diferencial; para Cantor, chegar a um teorema de

2 Recomendamos a leitura de Epple (2003, p.293), que faz uma listagem de alguns desses trabalhos.

3 Essa opção se justifica exatamente pela nossa proposta de produzir um material que possa ser usado por alunos e professores da disciplina de análise em cursos de licenciatura em matemática, já que a maioria dos livros destinados a esses cursos usam essas abordagens.

unicidade para a representação de uma função por séries trigonométricas; e para Weierstrass era construir sua teoria de funções analíticas, e, para isso, considerava uma teoria dos números reais como um passo indispensável.

Vamos, então, apresentar alguns aspectos do desenvolvimento de ideias que deram ao conjunto dos números reais a importância hoje reconhecida que permitiu estabelecer a verdadeira natureza do que hoje chamamos de análise matemática. Por fim, o que segue está fortemente baseado em Epple (2003).

Os números de Weierstrass

Weierstrass estabeleceu uma noção de número real em bases puramente aritméticas, usando argumentos acerca de certos conjuntos infinitos de números racionais admitidos *a priori*. Consta que sua abordagem foi apresentada pela primeira vez em 1863 numa aula do curso de funções analíticas. Vários matemáticos que passaram por Berlim tomaram contato com essas suas ideias, como Georg Cantor e Paul du Bois-Reymond, mas foi por meio do um livro publicado por Ernst Kossak (1839-1902), em 1872, que elas foram divulgadas amplamente (Kossak, 1982).

Weierstrass via os números como "ajuntamento" ("*aggregates*") de certos elementos. Por exemplo, para ele, *inteiros positivos* se referem ao ajuntamento de "coisas idênticas em pensamento", ou seja, unidades de mesma espécie; *racionais positivos* se referem ao ajuntamento de unidades básicas (denotada por 1) e "partes exatas" de tais unidades $(1/a; a \in \mathbb{N})$; e as *quantidades numéricas* (*irracionais*) *arbitrárias* foram entendidas semelhantemente como ajuntamento infinito de elementos de mesma espécie. Ou seja, uma "quantidade numérica" era representada por qualquer membro de uma classe de ajuntamento a partir de uma relação de equivalência de "igualdade". Para isso, Weierstrass considerava dois tipos de transformações de "quantidades numéricas" que não as altera em sua essência: i) "quaisquer n elementos $1/n$ podem ser trocados pela unidade principal"; ii) "qualquer elemento pode ser trocado por suas partes exatas", isso é, 1 por $n \cdot 1/n$, $1/a$ por $b \cdot 1/ab$ etc.

Uma quantidade numérica a' é uma parte de a'' se: a' consiste de muitos (finitos) elementos e pode ser transformada em algum a'' por uma sequência finita de transformações (i) e (ii) de tal modo que todos os elementos de a''ocorrem em a o mesmo número de vezes que em a'', de tal forma que a contenha outros elementos ou um número maior dos mesmos elementos. Duas quantidades numéricas a e b são "iguais" se: toda parte de a pode ser uma parte de b (por transformação) e vice-versa. Se as partes de a podem ser transformadas em partes de b, mas as partes de b não podem ser transformadas em partes de a, então b é chamado *maior* que a. Uma quantidade numérica a é *finita* se existem quantidades c, consistidas de um número finito de elementos, que são maiores do que a. Observe que o próprio a poderia possuir infinitos elementos.

Weierstrass definiu as operações de adição e multiplicação da mesma maneira que definiu para os inteiros positivos – pelas manipulações óbvias de suas unidades. Também definiu "números negativos" introduzindo o conceito de "ajuntamento oposto" e convencionou que o ajuntamento oposto e o ajuntamento igual se "cancelam" entre si.

Esta fundamentação de Weierstrass, embora mereça ser vista com certa cautela, no que diz respeito à questão das somas infinitas, permitiu que ele apresentasse provas rigorosas de teoremas sobre limites de sequências de números e de funções. Um desses teoremas é o que diz que todo conjunto infinito limitado de números reais tem pelo menos um ponto de acumulação, hoje conhecido por Teorema de Bolzano-Weierstrass. Outro é o teorema que diz que todo conjunto não vazio de números reais, limitado superiormente, possui supremo, que caracteriza a completude dos reais.

A abordagem de Weierstrass reduziu o conceito de quantidade ao conceito de número. Nominalmente, ele continuou usando o termo quantidade, mas fazia uma separação lógica, por expressões como "quantidade aritmética" ou "quantidade numérica", conforme sua intuição o levasse mais para o sentido geométrico ou para o físico.

Os números de Dedekind

Julius Wilhelm Richard Dedekind nasceu em Brunswick, Alemanha, em 6 de outubro de 1831, e faleceu na mesma cidade em 12 de fevereiro de 1916. Richard era o mais jovem dos quatro filhos do casal Julius e Caroline, pessoas cultas e bem relacionadas, e nunca se casou. Ingressou na Universidade de Göttingen, em 1850, com um nível de conhecimento bem acima da média. Foi aluno de Gauss e Riemann e estabeleceu uma grande amizade com Dirichlet, cujas ideias o influenciaram bastante. Em 1858, foi chamado para dar aulas na Politécnica, em Zurique, mas depois se dedicou ao ensino secundário, principalmente em Brunswick, pelo resto de sua vida. Em 1862, tornou-se membro da Academia de Göttingen; em 1880 da Academia de Berlim e, em 1900, da Academia de Ciências de Paris. Sua modéstia era comparada à de Gauss e seu espírito de rigor e precisão o coloca, juntamente com Weierstrass e Cantor, "como um dos primeiros autênticos representantes da *Matemática como arte* no Ocidente" (Lintz, 2007, p.467). Mas sua maior e mais conhecida contribuição foi a célebre introdução dos "cortes" para uma construção puramente aritmética dos números reais (Lintz, 2007).

No prefácio de um pequeno trabalho de 1872, Dedekind aponta dois artigos que o estimularam a escrever sua própria construção, um de Heine (1871) e o outro de Cantor (1872), com quem mantinha uma boa relação, conforme apontaremos no próximo item. Ainda nesse prefácio, ele explica a razão mais imediata que o levou à sua construção dos reais:

> As considerações que constituem o tema deste pequeno livro datam do outro de 1858. Como professor da Escola Politécnica de Zurique, eu tinha, pela primeira vez, o dever de apresentar os

elementos do cálculo diferencial, e senti, mais intensamente do que nunca, a falta de uma base verdadeiramente científica para a aritmética. (Dedekind, 1872, p.9)[4]

Figura 27 – Richard Dedekind

Nesse curso, Dedekind queria provar os teoremas básicos da análise sem usar ideias geométricas como recurso. Isso mostra que a sua abordagem foi motivada não apenas por um interesse por provas rigorosas, mas por reflexões gerais sobre a relação entre análise (ou aritmética) e a geometria. Sua construção trouxe à tona uma ideia antiga, a definição de Eudoxo de proporcionalidade de quatro grandezas presente no livro *Os Elementos* de Euclides:

Magnitudes são ditas estar na mesma razão, uma primeira para uma segunda e uma terceira para uma quarta, quando os mesmos múltiplos da primeira e da terceira ou, ao mesmo tempo, excedam,

4 Die Betrachtungen, welche den Gegenstand dieser kleinen Schrift bilden, stammen aus dem Herbst des Jahres 1858. Ich befand mich damals als Professor am eidgenössischen Polytechnicum zu Zürich zum ersten Male in der Lage, die Elemente der Differentialrechnung vortragen zu müssen, und fühlte dabei empfindlicher als jemals früher den Mangel einer wirklich wissenschaftlichen Begründung der Arithmetik.

> ou, ao mesmo tempo, sejam iguais ou, ao mesmo tempo, sejam inferiores aos mesmos múltiplos da segunda e da quarta, relativamente a qualquer tipo que seja de multiplicação, cada um de cada um, tendo sido tomados correspondentes. (Euclides, 2009, p.205)[5]

A interpretação de Dedekind para essa definição foi: qualquer razão entre segmentos de retas a,b produz um "corte" no conjunto dos números racionais (ou seja, o conjunto das razões n/m entre inteiros) que o decompõe em dois conjuntos disjuntos, conforme vale $ma < nb$ ou sua negação. Duas razões são iguais (isto é, as quatro grandezas envolvidas são proporcionais) se, e somente se, os cortes correspondentes são os mesmos (Epple, 2003, p.297).

Devemos observar que, assim como Weierstrass, Dedekind usa conjuntos infinitos de racionais em sua construção. Outro aspecto que merece destaque é que, além da abordagem aritmética dada, ele acrescentou a problemática sobre a relação que essa construção tem com a ideia geométrica de pontos numa reta, ou seja, com a noção intuitiva de uma grandeza contínua. Estava claro que toda razão entre segmentos de reta definia um corte nos racionais, mas a recíproca precisava de uma resposta, ou seja, será que todo corte define uma possível razão entre segmentos de reta? Ou ainda, se um segmento unitário foi fixado, a todo corte corresponde um ponto bem determinado na reta? Foi nesse ponto que Dedekind viu uma saída decisiva em relação à concepção antiga, estabelecendo a conexão entre aritmética e geometria por meio de um postulado, um aspecto geométrico da condição de corte, hoje chamado axioma de Cantor-Dedekind, que estabelece que os pontos sobre uma reta podem ser postos em correspondência biunívoca com os números reais:

> Se todos os pontos de uma reta são decompostos em duas classes de tal modo que todo ponto na primeira classe está à esquerda de

5 Em notação algébrica, essa definição é equivalente a: a) se $ma > nb$, então $mA > nB$; b) se $ma = nb$, então $mA = nB$; c) se $ma < nb$, então $mA < nB$. E reciprocamente (Thiele, 2003, p.9).

todo ponto na segunda classe, então existe um e somente um ponto que produz essa decomposição de todos os pontos em duas classes, esse corte da reta em duas partes. (Dedekind, 1872, p.18)[6]

Usando linguagem moderna, podemos resumir da seguinte maneira a construção dos reais dada por Dedekind, conforme Epple (2003), que se baseou no próprio texto de Dedekind:

> Considere todas as decomposições dos números racionais $\mathbb{Q}$ em dois conjuntos A_1, A_2 tais que $a_1 < a_2$ para todo $a_1 \in A_a$ e $a_2 \in A_2$. O conjunto dos racionais é, então, a união disjunta de A_1 e A_2. Qualquer decomposição desse tipo é chamada um corte (nos racionais). Se, para um corte (A_1, A_2), ou A_1 tem um elemento máximo ou A_2 tem um elemento mínimo, $a \in \mathbb{Q}$, e dizemos que o corte *foi produzido* por a; nessa situação, os dois possíveis cortes produzidos por a são considerados essencialmente o mesmo. Obviamente, há muitos cortes que não são produzidos por racionais. Um exemplo é dado por
>
> $$\left(\left\{a \in \mathbb{Q}; a < 0 \text{ ou } a^2 \leq 2\right\}, \left\{a \in \mathbb{Q}; a^2 > 2\right\}\right).$$
>
> "Cada vez que um dado corte (A_1, A_2) não é produzido por um número racional, criamos um novo número, um número irracional α, que fica completamente definido pelo corte (A_1, A_2), e dizemos que o número α corresponde a esse corte, ou que é produzido pelo corte" (Dedekind, 1872, p.21).[7] O conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais é então o resultado de um ato intelectual para o qual todo corte

---

6 Zerfallen alle Puncte der Geraden in zwei Classen von der Art, daß jeder Punct der ersten Classe links von jedem Puncte der zweiten Classe liegt, so existirt ein und nur ein Punct, welcher diese Eintheilung aller Puncte in zwei Classen, diese Zerschneidung der Geraden in zwei Stücke hervorbringt.

7 Jedesmal nun, wenn ein Schnitt (A_1, A_2) vorliegt, welcher durch keine rationale Zahl hervorgebracht wird, so erschaffen wir eine neue, eine irrationale Zahl α welche wir als durch diesen Schnitt (A_1, A_2) vollständig definirt ansehen; wir werden sagen, daß die Zahl α diesem Schnitt entspricht, oder daß sie diesen Schnitt hervorbringt.

> (A_1, A_2) nos racionais é associado a um número (racional ou recém-criado irracional) real α.
>
> Com base na ordenação natural dos cortes, uma ordem nos números reais pode ser introduzida.[8] Em relação a essa ordenação, os reais satisfazem a chamada *condição de corte*:
>
> Teorema: Se o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais é decomposto em dois subconjuntos A_1 e A_2 tais que para todo $a_1 \in A_1$ e $a_2 \in A_2$ tem-se $a_1 < a_2$, então existe um único número $\alpha \in \mathbb{R}$ que produz esse corte, ou seja, tal que uma das duas possibilidades ocorra: $A_1 = \{\beta \in \mathbb{R}; \beta < \alpha\}$ e $A_2 = \mathbb{R} / A_1$, ou $A_2 = \{\beta \in \mathbb{R}; \beta > \alpha\}$ e $A_1 = \mathbb{R} / A_2$ (Epple, 2008, p. 298).

Esse teorema foi visto por Dedekind como uma propriedade característica de continuidade para um *continuum* unidimensional,[9] mas ele levou alguns anos antes de assumir essa ideia publicamente, em 1888, num estudo no qual ele deu uma apresentação axiomática do conceito de número natural (Dedekind, 1888; 1893).[10]

A partir do que já expusemos, é trabalhoso, mas não difícil, definir as operações aritméticas e verificar as propriedades dessas operações. Para isso, indicamos, por exemplo, Rudin (2006).[11] Já em Lintz (2007, p.468-469) há uma interessante apresentação dessas ideias de Dedekind, onde são apontadas certas inconsistências lógicas nos argumentos do matemático alemão. Mas, para nossos

---

8 Sejam α e β dois números reais quaisquer, caracterizados respectivamente pelos cortes (A_1, B_1) e (A_2, B_2) que determinam no conjunto $\mathbb{Q}$. Então $\alpha = \beta$ se $A_1 = A_2$ e $\alpha < \beta$ se A_1 é subconjunto próprio de A_2. Essa ordem preserva a ordem já existente em $\mathbb{Q}$, como era de se esperar.

9 Hoje é o que dizemos ser a propriedade de completude dos reais, dita numa maneira simplificada da seguinte forma: "Todo corte de números reais possui elemento de separação" ou equivalentemente: "Todo conjunto não vazio de números reais, limitado superiormente, possui supremo".

10 No ano seguinte, Peano também apresentou semelhante trabalho. Entretanto, a axiomatização de Peano, de modo geral, prevaleceu, sendo considerada como padrão para os números naturais (Peano, 1889).

11 Indicamos também nosso trabalho em fase de redação final *Números Reais e uma Introdução à Análise: dos naturais à topologia da reta*.

objetivos, nos restringiremos ao que foi exposto anteriormente, uma vez que as ideias principais de Dedekind estão aí presentes e podem ser identificadas e relacionadas com o conteúdo de grande parte dos livros usados na disciplina de análise.

Os números de Cantor-Heine

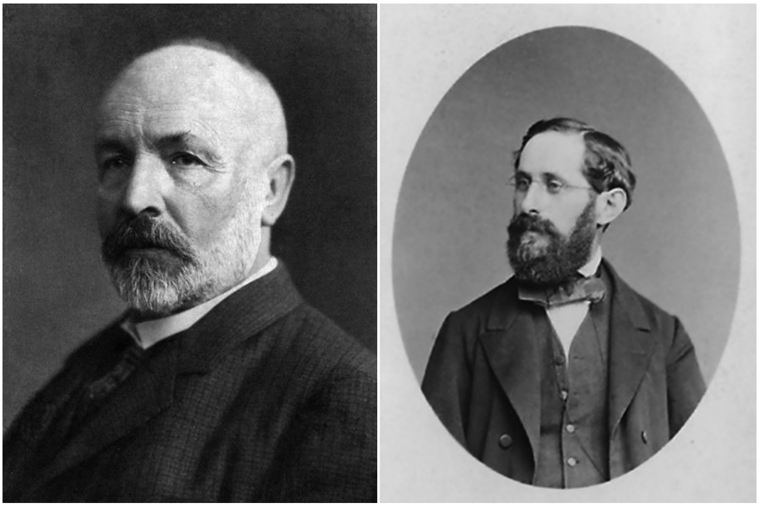

Figura 28 – Georg Cantor e Eduard Heine

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor nasceu em São Petersburgo, Rússia, em 3 de março de 1845 e faleceu em Halle, Alemanha, em 6 de janeiro de 1918. Sua família emigrou para a Alemanha em 1856, e, em 1862, Cantor ingressou na Universidade de Berlim para estudar matemática. Foi aluno de Weierstrass, Ernst Kummer (1810-1893) e Leopold Kronecker (1823-1891), com os quais estabeleceu relações de natureza bastante distintas. Em 1867 apresentou sua tese de doutorado e em 1869 foi contratado como professor na Universidade de Halle, onde permaneceu até o fim de sua vida. Todavia, sua ambição sempre foi se tornar professor na Universidade de Berlim, mas ele nunca conseguiu, talvez devido ao confronto de ideias que teve com Kronecker durante toda a sua vida.

Apesar de tudo, em Halle, Cantor continuou realizando pesquisas intensivas em análise matemática, influenciado, sobretudo, pelas ideias de Weierstrass, de quem era grande admirador. Também se envolveu profundamente com os métodos do infinito potencial utilizados desde os gregos antigos, definiu os números transfinitos e elaborou a hipótese do *continuum*.[12] A partir de 1884, sua saúde começou a deteriorar, principalmente com problemas mentais, em parte, segundo dizem, motivados pela frustração que ele sentia em face das tentativas malsucedidas de provar a hipótese do *continuum*. Finalmente, graças à influência de Hilbert e outros matemáticos ilustres, suas ideias foram depois reconhecidas na sua importância devida (Lintz, 2007).

Segundo Lintz (2007, p.492), a contribuição fundamental de Cantor para a matemática foi a sistematização da ideia de infinito atual, englobada em sua teoria dos conjuntos, isto é, o estudo de "coleções arbitrárias de objetos independentemente da natureza desses objetos e considerada como um todo perceptível pela nossa mente". No caso desse conjunto ser dos pontos na reta, Cantor introduziu todas as ideias que depois se generalizaram para espaços topológicos, como ponto de acumulação, conjunto derivado, conjunto denso e outros. Daí surgiu também a ideia de continuidade

---

12 Cantor aceitava a ideia de infinito real em vez da noção segura de infinito potencial dos gregos e dos seus contemporâneos. Além disso, acreditava que poderia haver tipos diferentes de infinito – um maior que o outro –, e precisando de uma linguagem para descrever esses infinitos, chamou-os de números transfinitos. Cantor, porém, foi mais longe e percebeu que existia o menor dos transfinitos, que indicou por $\aleph_0$ (Aleph zero), que seria a cardinalidade dos números inteiros e racionais (ou de modo geral, de qualquer conjunto enumerável). Ele acreditava – e esperava provar – que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, conhecida como a *hipótese do continuum*. O que Cantor não sabia – era impossível que soubesse – era que estava trabalhando em um problema de solução impossível. A hipótese do *continuum*, em nosso sistema de matemática, não tem solução e esse fato só foi descoberto muito tempo depois da morte de Cantor, em 1964, por Paul Joseph Cohen (1934-2007) (Cohen, 1963; 1964).

da reta e a definição de números reais distinta da considerada por Dedekind.[13]

Heine, de quem Cantor foi colega em Halle e com quem trocou muitas ideias a esse respeito, publicou, com modificações, as ideias de Cantor em 1871 (Heine, 1871), o que levou ao chamado desenvolvimento de Cantor-Heine (Dugac, 2003). Nesse artigo, Heine começa fazendo referência a vários teoremas que formavam a base da análise de Weierstrass e indicava algumas dúvidas, uma delas a definição não muito bem estabelecida dos números irracionais. Escolhendo uma abordagem formal para "dissolver o mistério dos irracionais", escreveu:

> Suponha que eu não esteja satisfeito em ter apenas os números racionais positivos. Eu não respondo a questão "O que é um número?" definindo número conceitualmente, isto é introduzindo irracionais como limites cuja existência é presumida. Eu fico com a definição cujo ponto de vista é puramente formal, chamando de números certos símbolos tangíveis, de modo que não possa haver nenhuma dúvida sobre a existência desses números. A ênfase deve ser colocada sobre as operações aritméticas, e os numerais devem ser selecionados, ou ser equipados com um aparato, de tal forma que forneçam indicações sobre a definição das operações. (Heine, 1871, p.173)[14]

---

13 Dedekind foi um grande amigo de Cantor e um dos poucos que entendia e simpatizava com a sua nova teoria dos conjuntos. Trocaram muitas correspondências, nas quais Cantor expunha suas descobertas, muitas delas bastante polêmicas, como quando concluiu que existem exatamente tantos pontos na reta quanto no plano, mais ainda no espaço tridimensional, quadrimensional ou de dimensões superiores. Dedekind era cauteloso em suas respostas, pois sabia que essas ideias revolucionárias de Cantor desafiavam o pensamento matemático tradicional e que não eram aceitas por muitos, especialmente Kronecker.

14 Die Frage, was eine Zahl sei, beantworte ich, wenn ich nicht bei den rationalen positiven stehen bleiben will, nicht dadurch dass ich die Zahl begrifflich definire, die irrationalen etwa gar als Grenze einführe, deren Existenz eine Voraussetzung wäre. Ich stelle mich bei der Definition auf den rein formalen Standpunkt indem ich gewisse greifbare Zeichen Zahlen nenne, so dass die

Assim, consoante com a abordagem de Cantor, Heine partia de sequências de números racionais que satisfaziam o que hoje chamamos de critério de convergência de Cauchy,[15] e os números reais eram introduzidos, então, como símbolos associados a classes de equivalência de tais sequências.

Vamos descrever a ideia da construção dos reais dada por Heine, (1871) conforme Epple (2003), que se baseou no próprio texto de Heine:

> Considere dado o símbolo e o sistema de operações dos números racionais. Uma sequência infinita $a_1, a_2, a_3, \ldots$ de racionais é chamada uma sequência numérica (em termos modernos, uma sequência de Cauchy), "se para todo número [positivo, racional] η dado, por menor que seja, existe um valor n de modo que, para todo inteiro positivo v, $|a_n - a_{n+v}|$ é menor do que η" (Heine, p.174).[16] Se $a_1, a_2, a_3, \ldots$ e b_1, b_2, b_3 são sequências numéricas, então $a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, a_3 \pm b_3, \ldots$ também o é. Uma sequência numérica que converge para zero é chamada uma sequência elementar.
>
> Sequências numéricas $a_1, a_2, a_3, \ldots$ e b_1, b_2, b_3 são iguais se, e só se, $a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3, \ldots$ for uma sequência elementar. Então um símbolo é associado a cada sequência numérica. O símbolo associado a uma sequência numérica que consiste de repetições constantes de um único número racional é escolhido para ser esse número racional. Para uma sequência numérica arbitrária, o símbolo escolhido é "a própria sequência, colocada entre colchetes", isso é, um símbolo como $[a, b, c, \ldots]$. Símbolos associados com sequências numéricas equivalentes ("iguais") são considerados também "iguais". Em particular, 0 é o símbolo de toda seqüência

---

Existenz dieser Zahlen also nicht in Frage steht. Ein Hauptgewicht ist auf die Rechenoperation zu legen, und das Zahlzeichen muss so gewählt, oder mit einem solchen Apparate ausgerüstet werden, dass es einen Anhalt zur Definition der Operationen gewährt.

15 Essas sequências são chamadas de sequências fundamentais ou de Cauchy, que podem não convergir para nenhum número racional e, nesse caso, ela é considerada uma "nova entidade".

16 [...] wenn für jede noch so klein gegebene von Null verschiedene Zahl η ein Werth n existirt, der bewirkt, dass $a_n - a_{n+v}$ für alle ganzen v unter η liegt.

> elementar. Os números assim construídos são chamados "números irracionais de primeira ordem, mesmo se eles forem racionais em casos particulares" (Heine, p. 180).[17]
>
> Operações aritméticas são introduzidas para os novos símbolos numéricos aplicando essas operações termo a termo; na definição de divisão devemos tomar cuidado para que o denominador não seja uma sequência elementar e não possua termos nulos. Da mesma maneira, uma relação de ordem pode ser introduzida.
>
> Com esses novos símbolos numéricos, podemos formar novas sequências numéricas (sequências de Cauchy) e "irracionais de segunda ordem" etc. Todavia, para todo $m > 0$, o seguinte teorema vale: "Os irracionais de ordem $m+2$ não são irracionais novos, mas coincidem com aqueles de primeira ordem" (Heine, p.180)[18] (Epple, 2003, p.300).

Antes que a construção de Heine e Cantor despertasse interesse, uma ideia bastante semelhante fora usada pelo matemático francês Charles Méray (1835-1911). Méray também considerou sequências de racionais satisfazendo o critério de convergência de Cauchy e, no caso em que elas não convergiam a um racional, ele as chamou de um "limite de ficção". Também considerou a necessidade de estabelecer uma relação de equivalência entre sequências cuja diferença fosse uma sequência que converge para zero. O conjunto formado pelos racionais e pelos limites de ficção foi considerado por Méray como o domínio das quantidades reais. Apesar da grande semelhança entre as ideias de Méray e as de Heine e Cantor, tudo indica que os modelos foram desenvolvidos de forma independente.

O próprio Cantor, um ano depois de Heine, publicou suas ideias no artigo *Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der tri-*

---

17 Die allgemeineren Zahlen, wenn sie auch in besonderen Fällen rationale werden, sollen irrationale Zahlen erster Ordnung beissen.

18 Die Irrationalitäten $m+2$ Ordnung sind keine neuen, sondern stimmen mit denen erster Ordnung überein.

gonometrischen Reihen (Cantor, 1872).[19] Os artigos de Heine (1871) e de Cantor (1872) foram justamente os trabalhos que Dedekind citou no prefácio de seu livro.

A abordagem de Cantor era semelhante à de Heine (1871), mas ela colocava mais ênfase na possibilidade de obter o método interativo de formar (classes de equivalências de) sequências de Cauchy. O teorema que garante que todos os domínios de quantidades numéricas de espécie superior são equivalentes ao de primeira espécie (teorema visto no trabalho de Heine), foi estabelecido por Cantor de forma apenas informal, mas insistia que nos diferentes sentidos nos quais os números de diferentes espécies eram dados. Também como Dedekind, Cantor refletiu sobre a relação entre suas quantidades numéricas e os pontos de uma reta, e reconhecia que havia necessidade de um princípio que ligasse essas ideias: "a todo número [real] corresponde um ponto definido da reta [euclidiana], cuja coordenada é igual a esse número" (Cantor, 1872, p.128).[20] Com esse axioma, Cantor estava apto para interpretar seus resultados a respeito dos números reais como proposições sobre conjuntos de pontos da reta, o que o levou a estabelecer os conceitos de *ponto limite* (hoje chamado ponto de acumulação) e *conjunto derivado* (conjunto dos pontos de acumulação).

* * *

Nos anos subsequentes, Cantor dedicou-se a responder se um *continuum* unidimensional (i.e. o conjunto dos números reais) era enumerável. Em 1874, no *Jornal de Crelle*, ele publicou que o conjunto dos números reais não é enumerável (Cantor, 1874). Vamos agora apresentar duas provas baseadas nas que Cantor deu a esse resultado, uma no artigo de 1874:

---

19 Esse artigo foi publicado como consequência de outro trabalho, de 1871, a respeito de séries trigonométricas e leva-o a um estudo sistemático dos números reais e dos transfinitos. Cantor necessitava de uma definição precisa de número real (Cantor, 1871).

20 [...] zu jeder Zahlengrösse ein bestimmter Punkt der Geraden gehört, dessen Coordinate gleich ist jener Zahlengrösse.

> Seja $w = \{w_1, w_2, \ldots\}$ uma sequência infinita de números reais. Então, em todo intervalo aberto (a,b) existe algum y que não é um elemento de w. De fato, suponha que os dois primeiros elementos de w estejam em (a,b), se eles existem sejam denotados por a_1, b_1, escolhendo $a_1 < b_1$. Do mesmo modo, para todo $n \in \mathbb{N}$, sejam a_{n+1}, b_{n+1} os dois primeiros elementos de w que estejam em (a_n, b_n), se existem, escolhemos novamente $a_{n+1} < b_{n+1}$. Então um dos seguintes casos deve ocorrer: (i) a sequência de intervalos (a_n, b_n) é finita. Então segue a afirmação: (ii) a sequência de intervalos (a_n, b_n) é infinita. Então a sequência $\{a_k\}$, crescente e limitada, converge para um limite a_∞ e, do mesmo modo, $b_\infty := \lim_k b_k$ existe. Se $a_\infty = b_\infty$, então escolhemos y como a_∞. Se $a_\infty < b_\infty$, então todo $y \in (a_\infty, b_\infty)$ e um número real não enumerado por w.(Epple, 2002, p.307)

E outra, usando o argumento da diagonal em artigo publicado em 1892 (Cantor, 1892):

> Desde que os pontos em $[0,1]$ podem ser representados por expansões binárias, é suficiente mostrar que o conjunto ϕ, consistindo de todas as funções $\phi : \mathbb{N} \to [0,1]$, não é enumerável. A fim de mostrar isso, suponhamos que $\phi_1, \phi_2, \ldots$ seja uma enumeração dos elementos de ϕ. Então $\psi(k) := 1 - \phi_k(k)$ também define uma função $\psi \in \phi$. Mas, obviamente, ψ é diferente de todas as ϕ_k. Se na segunda demonstração, $\mathbb{N}$ for substituído por um conjunto M de cardinalidade m, então $\phi := \{\phi : M \to [0,1]\}$ tem cardinalidade 2^m. Aplicando o argumento da diagonal a uma suposta "enumeração" das funções em ϕ por elementos de M, mostra-se que $2^m > m$. (Epple, 2003, p.307)

Esses resultados de Cantor deixam claro que, se sua (ou a de Dedekind ou a de Weierstrass) construção dos números reais é válida, então existem pelo menos dois tipos de conjuntos infinito:

um do tipo dos naturais e outro do tipo do *continuum*.[21] E, daí, dois conjuntos representam diferentes tipos de infinito se, e só se, for impossível estabelecer uma correspondência biunívoca entre eles.

Finalmente, entre 1879 e 1884, Cantor escreveu uma série de artigos que conectaram de maneira precisa as ideias a respeito de sua teoria. E acabou por abrir um novo universo para a matemática: os números transfinitos.

Os números de Hilbert

Durante os anos 1890 outra área da matemática – os fundamentos da geometria – foi se desenvolvendo rapidamente, sobretudo em torno de dois grandes matemáticos: Giuseppe Peano, em Turim, Itália, e David Hilbert, em Königsberg (Prússia, atualmente Kaliningrado, divisão federal da Rússia) e depois Göttingen, na Alemanha. Os estudos desenvolvidos por esses matemáticos foram decisivos para dar à análise novas bases aos seus fundamentos: a axiomatização. Neste texto, vamos tratar apenas, e rapidamente, da abordagem de Hilbert, que se tornou uma das mais influentes em novos desenvolvimentos da matemática.

David Hilbert nasceu em Königsberg em 1862, onde percorreu toda a sua vida de estudante até 1884, quando terminou seu doutorado. Na realidade, mesmo após esse evento, permaneceu por mais uma década em sua cidade natal, atuando como professor na mesma universidade em que estudara: a Universidade de Königsberg (muitas vezes conhecida como Albertina). Durante esse

21 Não vamos nos aprofundar nesse assunto; para isso, recomendamos a leitura de Guillemot (1993), que mostra como alguns povos ou alguns matemáticos lidaram com a ideia do infinito ao longo do tempo. A narrativa não é estritamente cronológica; a fim de elucidar certos pontos, os autores fazem digressões, quer no tempo, quer no espaço. Não é uma história "comum" do conceito do infinito, e o artigo já deixa isso claro em sua introdução onde nos mostra que ao invés de seguir caminhos mais "famosos", a opção foi tomar "atalhos".

período, passou de *Privatdozent*[22] a professor titular, substituindo nomes como Adolf Hurwitz e Ferdinand von Lindemann. Em 1895 ocupou uma cátedra na Universidade de Göttingen (Georg-August-Universität Göttingen) substituindo Heinrich Weber. Juntamente com outros grandes nomes da matemática, como Félix Klein, Richard Courant, Edmund Landau e Hermann Minkowski, tornaram Göttingen um polo mundial da matemática na época. Hilbert aposentou-se em 1930 e permaneceu em Göttingen até sua morte em decorrência de uma anemia incurável até então, em 1943 (Corry, 2004; Kantor, 2012; Lintz, 2007).

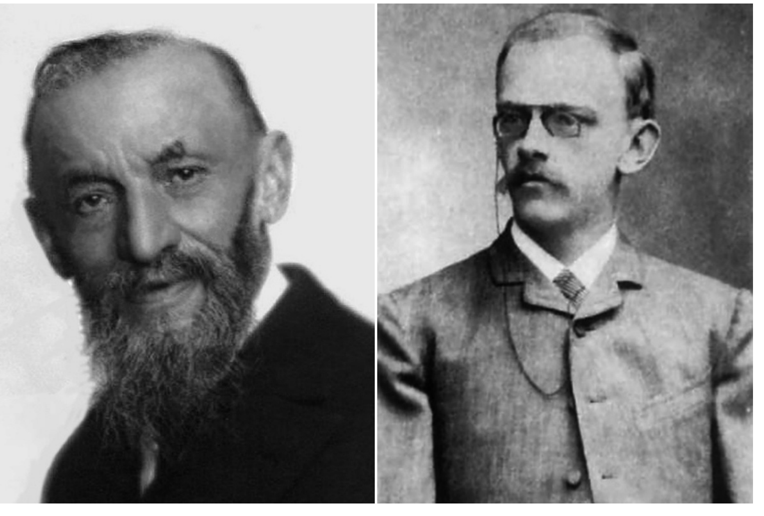

Figura 29 – Giuseppe Peano e David Hilbert

***

Hilbert pode ser considerado, juntamente com Henri Poincaré, o matemático que mais influenciou ideias matemáticas na primeira

22 Essa posição acadêmica era obtida por meio de um exame de títulos e da apresentação de uma tese especial de habilitação. O *Privatdozent* não possuía nenhum vínculo com a Universidade, porém a ele era concedida a permissão de dar aulas particulares a seus alunos. Ou seja, o *Privatdozent* era como um professor particular reconhecido pela universidade. Apesar disso, não era fácil se tornar um, e essa etapa era indispensável na carreira de todo professor que quisesse obter a cátedra posteriormente.

metade do século XX, tendo seu nome associado a diversos termos e teoremas (Espaço de Hilbert, simbologia de Hilbert em teoria dos números, Teorema dos Zeros de Hilbert, Teorema Fundamental de Hilbert etc.). Suas contribuições extrapolam sua especialidade, tendo alcançado reflexões mais gerais dentro da ciência (Kantor, 2012). Dentre suas numerosas obras, merece destaque dentro do contexto da análise seu trabalho apresentado num pequeno folheto em 1900 (Hilbert, 1900). Nesse trabalho, Hilbert apresenta a sua construção dos reais; é o primeiro ensaio de Hilbert sobre os fundamentos da aritmética, baseado fortemente em suas investigações sobre os fundamentos axiomáticos da geometria (Ewald, 2007).

A construção dos reais por Hilbert leva em conta quatro grupos de axiomas. Essa caracterização possui relações com ideias dos matemáticos alemães Hankel e Carl Johannes Thomae (1840-1921). Todas as construções aritméticas dos números reais satisfazem os axiomas de Hilbert, enquanto que, de um modo mais geral, todo sistema que satisfaça tais axiomas pode, no caso da reta, ser interpretado como um modelo para os axiomas usuais da geometria. Isso, segundo Hilbert, garantia que a consistência da aritmética real acarretasse a consistência dos axiomas da geometria. É interessante observar que, num primeiro momento, Hilbert não incluiu um axioma que garantiria tanto a unicidade do sistema dos números reais quanto a continuidade da reta, já que isso não era essencial para seus propósitos no campo da geometria. Mas, logo depois, ele acrescentou esse axioma sob o nome de "axioma de completude". Modernamente, o axioma de completude de Hilbert pode ser substituído por outras versões, tais como o postulado do corte de Dedekind, ou a existência de limites para todas as sequências de Cauchy.

Vamos, agora, apresentar os números de Hilbert, conforme o artigo original (Hilbert, 1900), e a sua tradução para o inglês de Ewald (2007):

> Pensamos em um sistema de coisas, chamamos essas coisas de números e as designamos por $a, b, c, \ldots$. Pensamos que esses núme-

ros estão baseados em certas relações recíprocas cujas exatas e completas explicações são dadas pelos seguintes axiomas:

I. Axiomas de Combinação

I 1. Do número a e do número b surge, pela "adição", um número definido c; em símbolos: $a+b=c$ ou $c=a+b$. I 2. Se a e b são números dados, então sempre existe um, e apenas um, número x e, também um, e apenas um, número y, tais que: $a+x=b$ e $t+a=b$, respectivamente. I 3. Existe um determinado número – chamado de 0 –tal que para todo a: $a+0=a$ e $0+a=a$. I 4. Do número a e do número b, surge de outro modo, por "multiplicação", um determinado número c; em símbolos: $ab=c$ ou $c=ab$. I 5. Se a e b são números arbitrários dados e a não é 0, então sempre existe um, e apenas um número x, e, também, um, e apenas um, número y, tais que: $ax=b$ e $ya=b$. I 6. Existe um determinado número – chamado de 1 – tal que para todo a: $a \cdot 1=a$ e $1 \cdot a=a$.

II. Axiomas de Cálculo

Se a,b,c são números arbitrários, as seguintes fórmulas sempre valem: II 1. $a+(b+c)=(a+b)+c$; II 2. $a+b=b+a$; II 3. $a(bc)=(ab)c$; II 4. $a(b+c)=ab+ac$; II 5. $(a+b)c=ac+bc$; II 6. $ab=ba$.

III. Axiomas de Ordem

III 1. Se a,b são dois números diferentes quaisquer, então um deles (digamos a) é sempre maior que o outro ($>$); que é chamado o menor deles em símbolos $a>b$ e $b<a$. III 2. Se $a>b$ e $b>c$, então $a>c$. III 3. Se $a>b$, então temos $a+c>b+c$ e $c+a>c+b$. III 4. Se $a>b$ e $c>0$, então sempre temos $ac>bc$ e $ca>cb$.

IV. Axiomas de Continuidade

IV 1. (Axioma de Arquimedes) Se $a > 0$ e $b > 0$ são dois números arbitrários, então é sempre possível adicionar a a ele mesmo muitas vezes de modo que a soma tenha a propriedade: $a + a + \ldots + a > b$. IV 2. (Axioma da Completude) É impossível juntar ao sistema de números qualquer outro sistema de coisas de modo que no sistema resultante dessa combinação os axiomas I, II, III, IV 1. estejam satisfeitos; ou resumidamente: os números formam um sistema de coisas que é incapaz de qualquer outra extensão se todos os axiomas continuarem a ser satisfeitos (Hilbert, 1900, p.181-183).[23]

23 Wir denken ein System von Dingen; wir nennen diese Dinge Zahlen und bezeichnen sie mit $a, b, c \ldots$ Wir denken diese Zahlen in gewissen gegenseitigen Beziehungen, deren genaue und vollständige Beschreibung durch die folgenden Axiome geschieht: I. *Axiome der Verknüpfung*. I 1. Aus der Zahl a und der Zahl b entsteht durch, Addition" eine bestimmte Zahl c, in Zeichen: $a + b = c$ oder $c = a + b$. I 2. Wenn a und b gegebene Zahleb sind, so existirt stets eine uns nur eine Zahl x und auch eine und nur Zahl y, so daſs $a + x = b$ bezw. $y + a = b$ wird. I 3. Es giebt eine bestimmte Zahl – sie heiſse 0 – so daſs für jedes a zugleich $a + 0 = a$ und $0 + a = 0$ ist. I 4. Aus der Zahl a und der Zahl b entsteht noch auf eine andere Art, durch, Multiplication" eine bestimmte Zahl c, in Zeichen: $ab = c$ order $c = ab$. I 5. Wenn a und b beliebig gegebene Zahlen sind, und a nicht 0 ist, so so existirt stets eine und nur eine Zahl x, und auch eine und nur eine Zahl y so daſs $ax = b$ bezw. $ya = b$ wird. I 6. Es giebt eine bestimmte Zahl – sie heiſse 1 –, so daſs für jedes a zugleich $a \cdot 1 = a$ und $1 \cdot a = a$ ist. II *Axiome der Rechnung*. Wenn a, b, c beliebige sind, so gelten stets folgende Formeln: II 1 $a + (b + c) = (a + b) + c$; II 2. $a + b = b + a$; II 3. $a(bc) = (ab)c$; II 4. $a(b + c) = ab + ac$; II 5. $(a + b)c = ac + bc$; II 6. $ab = ba$. *Axiome der Anordnung*. III 1. Wenn a, b irgend zwei verschiedene Zahlen sind, so ist stets eine bestimmte von ihnen (etwa a) gröſse ($>$) als die andere; die letztere heiſst dann die kleinere, in Zeichen: $a > b$ und $b < a$. III 2. Wenn $a > b$ und $b < a$, so ist auch $a > c$. III 3. Wenn $a > b$ ist, so ist auch stets $a + c > b + c$ und $c + a > c + b$. III 4. Wenn $a > b$ und $c > 0$ ist; so ist auch stets $ac > bc$ und $ca > cb$. IV. *Axiome der Stetigkeit*. IV 1. (Archimedisches Axiom.) Wenn $a > 0$ und $b > 0$ zwei beliebige Zahlen sind, so ist es stets möglich, a zu sich selbst so oft zu addiren, daſs die entstehende Summe die Eigenschaft hat $a + a + \ldots + a > b$. IV 2. (Axiom der Vollständigkeit.) Es ist nicht möglich, dem Systeme der Zahlen ein anderes System von Dingen hinzuzufügen, so daſs auch in dem durch Zusammensetzung entstehenden Systeme die Axiome I, II, III, IV 1. sämtlich erfüllt sind; oder kurz: die Zahlen bilden ein System von

A axiomatização apresentada por Hilbert é praticamente a mesma encontrada em grande parte dos livros usados nas disciplinas de análise; com isso, e com uma citação de Wussing, encerramos este capítulo.

> Junto com o aprofundamento nos fundamentos do cálculo infinitesimal, o desenvolvimento rigoroso do sistema numérico aparece também no difícil caminho percorrido no século XIX na fundamentação da matemática. De alguma maneira, o desenvolvimento dos conceitos foi em direção contrária ao desenvolvimento histórico: se a humanidade desde seu início havia conquistado passo a passo novos campos numéricos e havia aprendido a dominar paulatinamente o trato com os números naturais, racionais, negativos, irracionais e, por último, complexos, agora a fundamentação rigorosa do sistema numérico teve novo lugar, por assim dizer, de cima para baixo: a teoria dos números complexos se reduz à dos números reais, a dos irracionais à dos racionais, e esta, por último, à teoria axiomática dos números naturais. (Wussing, 1998, p.206)

Dingen, welches bei Aufrechterhaltung sämtlicher Axiome keiner Erweiterung mehr fähig ist.

Referências

ABEL, N. H. *Mémoire sur les équations algébriques où on démontre l'impossibilité de la résolution de l'équation générale du cinquième degré*. Christiania: Imprimerie de Groendahl, 1824. 8p.

______. (1826). *Untersuchungen über die Rheihe*. Leipzig: Verlag von Wilhelm Engelmann, 1895.

______. Texte Original des Lettres Écrites par Abel en Norvégien. In: HOLST, E.; STROMER, C.; SYLOW, L. (Orgs.). *Niels Henrik Abel mémorial publié l'occasion du centenaire de sa naissance*. Kristiania: Jacob Dybwad, 1902. p.1-61.

ANDRADE, M. M. *Ensaios sobre o ensino em geral e o de matemática em Particular*, de Lacroix: análise de uma forma simbólica à luz do Referencial Metodológico da Hermenêutica de Profundidade. 2012. 281 f. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Unesp, Rio Claro, 2012.

ARBOGAST, L. F. A. *Mémoire sur la nature des fonctions arbitraires qui entrent dans les intégrales des équations aux différentielles partielles*. St. Pétersbourg: Académie Impériale des Sciences, 1791.

ARZELÀ, C. Sulla Integrazione per Serie. *Atti Della Accademia Nazionale dei Lincei*, Roma, v.4, n.1, p.532-537, 596-599.

ÁVILA, G. *Introdução à análise matemática*. 2.ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1999.

______. O ensino do cálculo e da análise. *Revista Matemática Universitária*, São Paulo, n.33, p.83-95, dez. de 2002.

BAIRE, R. Sur les fonctions de variables réelles. *Annali di matematica pura ed applicata*, Firenze, v.3, n.1, p.1-123, 1889.

BARON, M. E.; BOS, H. J. M. *Curso de história da matemática*: origens e desenvolvimento do cálculo. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1985. Unidade 4: O cálculo do século XVIII – Fundamentos.

BARONI, R. L. S.; BATARCE, M. S.; NASCIMENTO, V. M. Elementos sobre o desenvolvimento da teoria da medida. In: FOSSA, J. A. *Matemática e medida*: três momentos históricos. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

______.; TEIXEIRA, M. V.; NOBRE, S. R. A investigação científica em história da matemática e suas relações com o programa de pós-graduação em Educação Matemática. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani; BORBA, M. C. (Orgs.). *Educação matemática*: pesquisa em movimento. 3.ed. São Paulo: Cortez, 2009. p.164-185.

BARTLE, R. G.; SHERBERT, D. R. *Introduction to real analysis*. 4.ed. Hoboken: John Wiley & Sons, Inc., 2011.

BATARCE, M. S. *Um contexto histórico para análise matemática para uma educação matemática*. 2003. 52f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2003.

BENEDETTO, J. B.; CZAJA, W. *Integration and modern analysis*. Boston: Birkhäuser, 2009.

BERNOULLI, D. *Hydridynamica, sive de viribus et motibus fluidorum commentarii*. Argentorati, Sumptibus Johannis Reinholdi Dulseckeri, 1738.

BERNOULLI, J. *Ars Conjectandi*. Basileæ: Impensis Thurnisiorum, 1713.

______. Sur les Isoperimetres. (1706). In: Académie Royale des Sciences de Paris (Ed.). *Histoire de l'Academie Royale des Sciences*: avec les memoires de Mathématique & de Physique pour le même année. Paris: Chez Jean Boudot, 1707. p. 235-245

______. Remarques sur ce qu'on a donné jusqu'ici de solutions des problèmes sur les isopérimètres. (1718). *Histoire de l'Academie Royale des Sciences*: avec les memoires de Mathématique & de Physique pour le même année. Paris: De L'Imprimerie Royale, 1741.

BOLOGNEZI, R. A. L. *A disciplina de análise matemática na formação de professores de matemática para o ensino médio*. 2006. 109f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica do Paraná, Curitiba, 2006.

BOLZANO, B. *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwei Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege*. Prag: Gottlieb Haase, 1817.

______. *Bernard Bolzano's Schriften*. Band 1. Functionenlehre. Praha: Královská \v{c}eská Spolecnost nauk v Praze, 1930.

BOREL, É. *Leçons sur la théorie des fonctions*. Paris: Gauthier-Villarts et Fils, 1888.

BORTOLOTI, R. D. M. *Emoções que emergem da prática avaliativa em matemática*. 2003. 142f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória, 2003.

BOTTAZZINI, U. *The higher calculus*: a history of real and complex analysis from Euler to Weierstrass. Translated by Warren Van Egmond. New York: Springer-Verlag, 1986. 332 p.

______. Complex Function Theory, 1780-1900. In: JAHNKE, H. N. (Ed.). *A history of analysis*. Translated from the German by the authors. Providence: American Mathematical Society, 2003. Geschichte der Analysis.

BOURBAKI, N. *Eléments d'histoire des mathématiques*. [Heidelberg]: Springer-Verlag, 2007. Réimpression inchangée de l'édition originale de 1984.

BOYER, C. B. *The history of the calculus and its conceptual development*. New York: Dover Publications Inc., 1949.

BRUCKNER, A. M. *Differentiation of Real Functions*. New York: Springer-Verlag, 1978.

______.; BRUCKNER, J. B.; THOMSON, B. *Real analysis*. New Jersey: Prentice Hall (Pearson), 1997.

BURTON, D. *The history of mathematics*: an introduction. 7.ed. New York: McGraw Hill, 2011.

CAJORI, F. *Uma História da Matemática*. Tradução de Lázaro Coutinho. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2007. Título original A History of Mathematics, 5.ed.

CANTOR, G. F. L. P. Notiz zu dem Aufsatze: Beweis, das seine für jeden reellen Werth von x durch eine trigonometrische Reihe gegebene Function $f(x)$ sich nur auf eine einzige Weise in dieser Form farstellen lässt. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Berlin, v.73, n. , p.294-296, 1871.

______. Ueber die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen. *Mathematische Annalen,* [S.L.], v.5, n.1, p.123-132, 1872.

______. Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Berlin, v.77, n. , p.258-262, 1874.

______. Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten. *Mathematische Annalen*, [S.L.], v.15, n.1, p.1-7, 1879.

______. Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten. *Mathematische Annalen*, [S.L.], v.17, n.3, p.355-358, 1880.

______. Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten. *Mathematische Annalen*, [S.L.], v.20, n.1, p.113-121, 1882.

______. Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten. *Mathematische Annalen*, [S.L.], v.21, n.1, p.51-58, 1883.

______. Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten. *Mathematische Annalen*, [S.L.], v.21, n.4, p.545-591, 1883.

______. Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten. *Mathematische Annalen*, [S.L.], v.22, n.4, p.453-488, 1884.

______. Ueber eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, Berlin, v. 1, n. , p. 75-78, 1892. Enthaltend die Chronik de Vereinigung für 1890-91.

CAUCHY, A. L. Mémoire sur les intégrales définies. (1814) In: Académie Royale des Sciences (Ed.). *Mémoires présentés par divers savants a l'Académie (Royale) des Sciences de l'Institut de France*. Tome Premier. Paris: Imprimerie Royale, 1827. Lu à l'Institut le 22 août 1814.

______. *Cours d'Analyse de l'École Royale Polytechnique*: premier partie, analyse algébrique. Paris: Chez Debure frères, 1821.

______. *Résumé des Leçons Données a l'École Royale Polytechnique, sur le Calcul Infinitésimal*. Paris: Chez Debure, 1823.

______. Mémoire sur le développements des fonctions en séries périodiques. *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences de l'Institut de France*, v.6, n. , p.603-612, 1827. Année 1823.

______. *Leçons sur le Calcul Différentiel*. Paris: Chez Debure, 1829.

______. Mémoire sur les fonctions continues. *Comptes rendus*: hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, Paris, v.18, n.4, p.116-130, 22 jan. 1844.

______. Note sur les séries convergentes dont les divers termes sont des fonctions continues d'une variable réelle ou imaginaire, entre des limites données. *Comptes rendus*: hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, Paris, v. 36, n. 11, p. 454-459, 14 mar. 1853.

CESÀRO, E. Sur la multiplication des séries. *Bulletin des Sciences Mathématiques*, Paris, v.14, n. , p.114-120, 1890. Tome XXIV de la Collection.

CHAE, S. B. *Lebesgue integration*. New York: Springer, 1995.

CIANI, A. B.; RIBEIRO, D. M.; JÚNIOR, M. A. G. Formação de professores de matemática: um ponto de vista de egressos. In: ENCONTRO GAÚCHO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9, 2006, Caxias do Sul. *Anais do IX Encontro Gaúcho de Educação Matemática*. Caxias do Sul: Universidade de Caxias do Sul, 2006.

COHEN, P. J. The independence of the continuum hypothesis. In: *Proceedings of the national academy of Sciences of the United States of America*, Washington, v.50, n.6, p.1.143-1.148, dec. 1963.

______. The independence of the continuum hypothesis II. *Proceedings of the national academy of Sciences of the United States of America*, Washington, v.51, n.1, p.105-110, jan. 1964.

CORNU, B. Limits. In: TALL, D. (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking*. Cambridge: Kluwer Academic Publishers, 1991. p.153-166.

CORRY, L. *David Hilbert and the axiomatization of physics (1898-1918)*: from Grundlagen der Geometrie to Grundlagen der Physik. Dordrecht: Springer-Science+Business Media B.V., 2004.

D'ALEMBERT, J. R. *Traité de dynamique*. Paris: Chez David l'Aîné, 1743.

DARBOUX, J. G. Sur un théorème relatif à la continuité des fonctions. *Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques*, Paris, v.3, n. , p.307-313, 1872.

______. Mémoire sur les Fonctions Discontinues. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, Paris, v.4, n.2, p.57-112, 1875.

______. Addition au Mémoire sur les fonctions discontinues. *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, Paris, v.8, n. , p.195-202, 1879.

DEDEKIND, R. *Stetigkeit und irrationale Zahlen*. Braunschweig: Vieweg, 1872.

______. *Was sind und wass sollen die Zahlen?* (1888). 2.ed. Braunschweig: Vieweg: 1893.

DESANTI, J. De Cauchy à Riemann, ou la naissance de la théorie des fonctions de variables réelles. In: LIONNAIS, F. (Ed.). *Les grands courants de la pensée mathématique*. Paris: Hermann, 1998. p.179-187.

DIEUDONNÉ, J. Cauchy Augustin-Louis (1789-1857). In: SOCIETÉ D'ÉDITION ENCYCLOÆDIA UNIVERSALIS S.A. (Ed.) *Encyclopædia universalis*. Disponível em: <http://www.universalis.fr/encyclopedie/augustin-louis-cauchy/>. Acesso em: 30 dez. 12.

DINI, U. *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali*. Pisa: Tipografia T. Nistri e C., 1878.

DIRICHLET, J. P. G. L. Sur la convergence des sérires trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites arbitraire. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Berlin, v.4, n. , p.157-169, 1829.

______. Ueber die Darstellung ganz willkürilicher Functionen durcj Sinus-und Cosinusreihen. *Repertorium der Physik*, Berlin, v.1, n. , p.152-174, 1837. Republicado In: OSTWALD, W. (Ed.). *Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften*. Leipzig: Verlag von Wilhelm Engelmann, 1900. p.3-34.

DUGAC, P. Eléments d'analyse de Karl Weierstrass. *Archive for History of Exact Sciences*, [S.L.], v.10, n.1-2, p.41-174, 28 jun. 1973.

______. *Histoire de l'analyse*. Paris: Vuibert, 2003. Texte édité par Bernard Bru e Roger Laurent.

DUNHAM, W. *The Calculus Gallery*: masterpieces from Newton to Lebesgue. New Jersey: Princeton University Press, 2005.

EISENBERG, T. Functions and associated learning difficulties. In: TALL, David (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking*. [Cambridge]: Kluwer Academic Publishers, 1991. p. 140-152.

EPPLE, M. The end of the science of quantity: foundations of Analysis, 1860-1910. In: JAHNKE, H. N. (Ed.). *A History of Analysis*. Translated from the German by the authors. Providence: American Mathematical Society, 2003. p.291-323. Geschichte der Analysis.

EUCLIDES. *Os Elementos*. Tradução e Introdução de Irineu Bicudo. São Paulo: Unesp, 2009.

EULER, L. *Institutiones calculi differentialis cum eius vsu in analysi finitorum*. Petropolitanae: Imprensis Academiae Imperialis Scientarum, 1755.

EVES, H. *Introdução à história da matemática*. Tradução de Higyno H. Domingues. Campinas: Editora da Unicamp, 2004. Título original: An Introduction to the History of Mathematics.

______. *Mechanica, sive motvs scientia analytice*. Petropoli: Academiae Scientiarvm, 1736.

______. *Introductio in analysin infinitorum*. Lausannæ: Marcum-Michaelem Bousquet, 1748. 2v.

EWALD, W. *From Kant to Hilbert*: a source book in the foundations of Mathematics. New York: Oxford University Press, 2007. 2v.

FAUVEL, J.; MAANEN, J. V. *History in mathematics education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000.

FOLTA, J. Life and scientific endeavor of Bernard Bolzano. In: JARNÍK, V. *Bolzano and the foundations of mathematical Analysis*. Praha: Society of Czechoslovak Mathematicians and Physicists, 1981. p. 11-32.

FOURIER, J. B. J. *Théorie analytique de la chaleur*. Paris: Chez Firmin Didot, 1822.

______. Théorie du mouvement de la chaleur dans le corps solides. *Mémoires de l'Académie des Sciences de l'Institut de France*, Paris, v.5, p.153-246, 1826.

GANDULFO, R. O. Séries de Fourier e Convergência. *Revista Matemática Universitária*, Rio de Janeiro, n.11, p.27-52, jun. 1990.

GAUSS, C. F. (1799). Demonstratio nova theorematis omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse. In: ______. *Werke 3*. Göttingen: Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften, 1866. p.1-30.

______. Disquistiones generales circa seriem infinitam. (1812). In: ______, Carl Friedrich. *Werke 3*. Göttingen: Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften, 1866. p.1-30.

GILAIN, C. Cauchy et le cours d'analyse de l'École Polytechinique. *Bulletin SABIX*, Paris, n.5, p.3-46, jul. 1989.

GISPERT, H. Sur les fondements de l'analyse en France. *Archive for History of Exact Sciences*, v.28, n.1, p.37-106, 1983.

GOMES, D. O. *A disciplina de análise segundo licenciandos e professores de matemática da educação básica*. 2013. 266f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2013.

GRABINER, J. V. *The origins of Cauchy's rigorous calculus*. Mineola: Dover Publications, 2005.

GRATTAN-GUINESS, I. *The development of the foundations of mathematical analysis from Euler to Riemann*. Massachusetts: The Colonial Press Inc., 1970. Copyright by The Massachussetts Institute of Technology.

GRUGNETTI, L. The history of mathematics and its influence on pedagogical problems. In: KATZ, V. (Ed.). *Using History to Teach Mathematics*: an international perspective. Washington: The Mathematical Association of America, 2000.

GUDERMANN, C. Theorie der Modular-Functionen und der Modular-Integrale. *Journal für die reine und angewandte mathematik*, Berlin, v.18, n. , p.1-54, 1838.

GUILLEMOT, M. En route vers l'infini. In: COMISSION INTER-IREM. *Histoire de problèmes*: histoire des mathématiques. Paris: Ellipses, 1993. p.7-32.

HAIRER, E.; WANNER, G. *Analysis by its history*. [S.L.]: Springer, 2008.

HALPHEN, G. H. *Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications*. Paris: Gauthier-Villars, 1886. Premier Partie.

______. *Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications*. Paris: Gauthier-Villars, 1888. Deuxième Partie.

______. *Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications*. Paris: Gauthier-Villars, 1891. Troisième Partie.

HANKEL, H. *Untersuchungen über die unendlich oft oszillierenden und unstetigen funktionen*. Tübingen: Ludwig Friedrich Fues, 1870.

______. Grenze. In: ERSCH, J. S.; GRUBER, J. G. (Eds.). *Allgemeine encyclopädie der Wissenschaften und Künste*. Leipzig: F. A. Brockhaus, 1871. v.90. p.185-211.

HARDY, G. H. Sir George Stokes and the concept of uniform convergence. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*. London, v.19, n.4, p.148-156, 1918.

HAWKINS, T. *Lebesgue's Theory of Integration*. Madison: The University of Wisconsin Press, 1970.

______. The origins of moderns theories of integration. In: GRATTAN-GUINNESS, I. (Ed.). *From the calculus to set theory, 1630-1910*: an introductory history. Princeton: Princeton University Press, 1980. p.149-180.

HEINE, H. E. Die elemente der functionenlehre. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, Berlin, v.74, n. , p.172-188, 1871.

HERVÉ, M. Bernhard Riemann (1826-1866). In: SOCIETÉ D'ÉDITION ENCYCLOÆDIA UNIVERSALIS S.A. (Ed.). *Encyclopædia Universalis*. Disponível em: <http://www.universalis.fr/encyclopedie/bernhard-riemann/>. Acesso em: 30 dez. 12.

HILBERT, D. Über den Zahlbegriff. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, Leipzig, v.8, n. , p.180-184, 1900.

HOCHKIRCHEN, T. Theory of measure and integration from Riemann to Lebesgue. In: JAHNKE, H. N. (Ed.). *A history of analysis*. Translated from the German by the authors. Providence: American Mathematical Society, 2003. p.261-290. Geschichte der Analysis.

JAHNKE, H. N. (Ed.). *A history of analysis*. Translated from the german by the authors. Providence: American Mathematical Society, 2003.

______. Algebraic Analysis in the 18th Century. In: JAHNKE, Hans Niels (Ed.). *A history of analysis*. Translated from the German by the authors. Providence: American Mathematical Society, 2003. p.105-136. Geschichte der Analysis.

______. Introduction. In: JAHNKE, Hans Niels (Ed.). *A history of analysis*. Translated from the german by the authors. Providence: American Mathematical Society, 2003. p.vii-ix. Geschichte der Analysis.

JARNÍK, V. *Bolzano and the foundations of mathematical analysis*. Praha: Society of Czechoslovak Mathematicians and Physicists, 1981.

JORDAN, C. Remarques sur les intégrales définies. *Journal de Mathématiques Pures et Apliquées*, Paris, v.8, p.69-100, 1892. 4ª série.

______. *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*. 2.ed. Paris: Gauthier-Villars, 1893. Tome Premier. Édition Entièrement Refondue.

______. *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*. 2.ed. Paris: Gauthier-Villars, 1894. Tome Deuxième. Édition Entièrement Refondue.

______. *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*. 2.ed. Paris: Gauthier-Villars, 1896. Tome Troisième. Édition Entièrement Refondue.

JOURDAIN, P. E. B., The origin of Cauchy's conceptions of a definite integral and of the continuity of a function. *Isis*, Chicago, v.1, n.4, p.661-703, 1913.

KANTOR, J. M. David Hilbert (1862-1943). In: SOCIETÉ D'ÉDITION ENCYCLOÆDIA UNIVERSALIS S.A. (Ed.) *Encyclopædia Universalis*. Disponível em: <http://www.universalis.fr/encyclopedie/david-hilbert/>. Acesso em: 30 dez. 12.

KATCHI, H. O exemplo de Volterra de uma função primitivável mas não integrável. *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática*, Lisboa, v.82, n.5, p.49-55. nov. 1982.

KATZ, V. J. *A History of Mathematics*: an introduction. [S.L.]: Addison-Wesley, 1998.

KEISLER, H. J. *Foundations of Infinitesimal Calculus*. Boston: Prindle, Weber&Schmidt, 1976.

KLEIN, F. Über die Arithmetisierung der Mathematik. *Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der wissenschaften zu Göttingen*, Göttingen, v.2, p.82-91, 2 nov. 1895.

______. *Vorlesungen über die entwicklung der mathematik im 19. Jahrhundert*. Berlin: Springer-Verlag, 1970. Für den druck bearbeitet von R. Courant und O. Neugebauer.

______.; SOMMERFELD, A. *The theory of the top*. Translated by Raymond J. Nagem and Guido Sandri. Boston: Birkhäuser, 2010. v. 2.

KOSSAK, E. *Die elemente der arithmetik*. Berlin: Nicolapsche Verlagsbuchhandlung, 1872.

LACROIX, S. *Traité Elémentaire du calcul différentiel et du calcul intégral*. Paris: Chez Duprat, 1797.

LAGRANGE, J. L. *Théorie des Fonctions Analytiques*: contenant les principes du calcul différentiel, dégages de toute considération d'infiniment petits, d'évanouissans, de limites et de fluxions, et réduits a l'analyse algébrique des quantités finies. Paris: Chez Bernard, 1797.

______. *Méchanique Analitique*. Paris: Chez Veuve Desaint, 1788.

LAPLACE, P. S. *Théorie Analytique des Probabilités*. Paris: Chez Courcier, 1812.

______. *Traité de Mécanique Céleste*. Paris: Chez Duprat, 1799. Tome 1.

______. *Traité de Mécanique Céleste*. Paris: Chez Duprat, 1799. Tome 2.

______. *Traité de Mécanique Céleste*. Paris: Chez Duprat, 1803. Tome 3.

______. *Traité de Mécanique Céleste*. Paris: Chez Duprat, 1805. Tome 4.

______. *Traité de Mécanique Céleste*. Paris: Chez Duprat, 1825. Tome 5.

LEBESGUE, H. L. Sur quelques surfaces non réglées applicables sur le plan. *Comptes rendus*: hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, Paris, v.128, n.25, p.1502-1505. 19 jun. 1899.

______. Sur la définition de l'aire d'une surface. *Comptes rendus*: hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, Paris, v.129, n.22, p.870-873. 27 nov. 1899.

______. Sur la definition de certaines intégrales de surface. *Comptes rendus*: hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, Paris, v.131, n.22, p.867-870. 26 nov. 1900.

______. Sur le minimum de certaines intégrales. *Comptes rendus*: hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, Paris, v.131, n.23, p.935-937. 3 dec. 1900.

______. Sur une généralisation de l'intégrale défine. *Comptes rendus*: hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, Paris, v.132, n.17, p.1025-1028, 29 abr. 1901.

______. *Intégrale, Longueur, Aire*. 1902. 134 f. Tese (Doutorado) – Sciences Mathématiques, Faculté des Sciences de Paris, Paris, 1902.

______. *Leçons sur la integration et la recherche des fonctions primitives*. Paris: Gauthier-Villars, 1904.

______. *Leçons sur les series trigonometriques*. Paris: Gauthier-Villars, 1906.

______. *Notice sur les travaux scientifiques*. Toulouse: Imprimerie et Librarie Édouard Privat, 1922.

LEIBNIZ, G. W. De linea ex lineis numero infinitis ordinatim ductis. *Acta Eruditorum*, Lipsiæ, v.11, n. , p.168-171, 1692.

LIMA, E. B. *Dos infinitésimos aos limites:* a contribuição de Omar Catunda para a modernização da análise matemática no Brasil. 2006, 145f. Dissertação (Mestrado em Ensino, Filosofia e História das Ciências) – Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2006.

LINTZ, R. G. *História da matemática*. Campinas: Unicamp, Centro de Lógica, Epistemologia e História da Ciência, 2007. v.2.

LÜTZEN, J. The foundation of analysis in the 19th century. In: JAHNKE, H. N. (Ed.). *A history of analysis*. Translated from the German by the authors. Providence: American Mathematical Society, 2003. p.155-195. Geschichte der Analysis.

MARTINÊS, P. T. *O papel da disciplina de análise segundo professores e coordenadores*. 2012. 157f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2012.

MARTÍNEZ, C. A. El concepto matemático de función en la obra de Euler. *Miscelánea Matemática*, Cildad de México, n.46, p.73-91, may. 2008.

MEYER, J. Gaston Darboux. In: SOCIETÉ D'ÉDITION ENCYCLOÆDIA UNIVERSALIS S.A. (Ed.). *Encyclopædia Universalis*. Disponível em: <http://www.universalis.fr/encyclopedie/bernhard-riemann/>. Acesso em: 30 dez.12.

MICHEL, A. *Constitution de la théorie moderne de l'Intégration*. [S.L.]: Vrin, 1992.

MOREIRA, P. C.; CURY, H.N.; VIANNA, C. R. Por que Análise Real na Licenciatura? *Zetetiké*, Campinas, n.23, p.11-42, 2005.

OSGOOD, W. F. Non-Uniform Convergence and the Integration of Series Term by Term. *American Journal of Mathematics*, Baltimore, v.19, n.2, p.155-190, 1897.

OTERO-GARCIA, S. C. *Uma trajetória da disciplina de análise e um estado do conhecimento sobre seu ensino*. 2011. 2v. Dissertação (Mestrado em Educação matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2011.

______. Sobre uma generalização da integral definida: tradução do primeiro trabalho de Henri Lebesgue sobre sua nova integral. *Revista Brasileira de História da Matemática*, Campinas, v.12, n.25, p.65-71, ago./dez. 2012.

OTERO-GARCIA, S. C.; CAMMAROTA, G. Releituras de um estado do conhecimento do ensino de análise a partir da noção de cognição inventiva. *Alexandria*: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, Florianópolis, v.6, n.1, p.235-260, abr. 2013.

PEANO, G. Sulla integrabilità delle funzioni. *Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino*, Torino, v.8, p.307-314, apr. 1883.

______. *Arithmetices principia*: nova methodo exposita. Romae: Augustae Taurinorum, 1889.

PINTO, M. M. F. Discutindo a transição dos cálculos para a análise real. In: LAUDARES, J. B.; LACHINI, J. (Org.). *A prática educativa sob o olhar de professores de cálculo*. Belo Horizonte: Fumarc, 2001. p.123-145.

______. Revisitando uma teoria. In: FROTA, M. C. R.; NASSER, L. (Orgs.). *Educação matemática no ensino superior*. Recife: SBEM, 2009. cap.2, p.27-42.

POINCARÉ, H. Sur les Intégrales Irrégulières des Équations Linéaires. *Acta Mathematica*, Stockholm, v.8, n.1, p.295-344, 1886.

______. L'avenir des mathématiques. *Revue Générale des Sciences Pures et Appliquées*, Paris, v.19, n.23, p.930-939, 15 dez. 1908.

POISSON, S. D. Mémoire sur la Manière d'exprimer les Fonctions par des Séries de quantités périodiques, et sur l'Usage de cette Transformation dans la Résolution de différens Problémes. *Journal de l'École Royale Polytechnique*, v.11, n.18, p.417-489,1820.

REIS, F. da S. *A tensão entre rigor e intuição no ensino de cálculo e análise*: a visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos. 2001. 302f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2001.

RIEMANN, G. F. B. Grundlagen für eine allgemeine theorie der (1851). Functionen einer veränderlichen complexen Grösse. In: ______., *Gesammelte mathematische werke, wissenschaftlicher nachlass und nachträge*. Leipzig: Druck und Verlag von B. G. Teubner, 1876. Herausgegeben Unter Mitwirkung von R. Dedekind von H. Weber.

______. Über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe. (1854). In: ______. *Gesammelte Mathematische Werke, Wissenschaftlicher Nachlass und Nachträge*. Leipzig: Druck und Verlag von B. G. Teubner, 1876. Herausgegeben Unter Mitwirkung von R. Dedekind von H. Weber.

RUDIN, W. *Principles d'Analyse Mathématique*. Traduit par Guy Auliac. Paris: Dunod, 2006. Ce livre est la traduction de la 3e édition américaine de Principles of Mathematical Analysis.

RUSNOCK, P.; KERR-LAWSON, A. Bolzano and uniform continuity. *Historia mathematica*, Amsterdam, v.32, p.303-311, 2005.

SCHUBRING, G. The german mathematical community. In: FAUVEL, J.; FLOOD, R.; WILSON, R. (Eds.). *Möbius and his band*. Oxford: Oxford University Press, 1993. p.21-34.

______. *Conflicts between generalization, rigor, and intuition*: numbers concepts underlying the development of analysis in 17-19th century France and Germany. New York: Springer, 2005.

SCHWARTZ, L. *Théorie des distributions*. (1950-1951). Paris: Hermann, 1978. Le tome I a été publié en 1950 et le tome II, publié d'abord en 1951.

SEIDEL, P. L. Note über eine Eigenschaft der Reihen, welche discontinuierliche Functionen darstellen. *Abhandlungen der Mathem.-Physikalischen Classe der Königlich Bayerischen Akademie der Wissenschaften*, München, v.7, n. , p.379-394, 1848.

SMIRNOV, R. G. The classical Bertrand-Darboux problem. *Journal of Mathematical Sciences*, v.151, n.4, p.3230-3244, 2008.

SMITH, H. J. S. On the integration of discontinuous functions. *Proceedings of the London Mathematical Society*, v.6, p.140-153, 1875.

SOUZA, L. G. S. *Como alunos do curso de licenciatura em matemática que já cursaram uma vez a disciplina de cálculo diferencial e integral lidam com alguns conceitos matemáticos básicos*. 2003. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2003.

SRIRAMAN, B. *Crossroads in the history of mathematics and mathematics education*. Missoula: Information Age Publishing, 2012.

STIELTJES, T. J. Recherches sur quelques sérires semi-convergentes. *Annales Scientifiques de l'École Normale Superiorieure*, Paris, v.3, n.3, p.201-258, 1886.

STOKES, G. G. On the Critical Values of the Sum of Periodic Series. (1849). In: ______. *Mathematical and Physical Papers*. New York: Cambridge University Press, 2009. From the Transactions of the Cambridge Philosophical Society, v.VIII, p.533.

STRUIK, D. J. *A concise history of mathematics*. New York: Dover Publications, 1948. 2v.

SYLOW, L. Les Études d'Abel et ses Découvertes. In: HOLST, E.; STRORMER, C.; SYLOW, L. (Orgs.). *Niels Henrik Abel Mémorial Publié l'occasion du centenaire de sa naissance*. Kristiania: Jacob Dybwad, 1902. p.1-59.

THIELE, R. Antiquity. In: JAHNKE, H. N. (Ed.). *A history of analysis*. Translated from the german by the authors. Providence: American Mathematical Society, 2003. p.1-39. Geschichte der Analysis.

TIROSH, D. The role of students' intuitions of infinity in teaching the cantorian theory. In: TALL, D. (Ed.). *Advanced mathematical thinking*. Cambridge: Kluwer Academic Publishers, 1991. p. 199-214.

TOEPLITZ, O. *The calculus*: a genetic approach. Chicago: The University of Chicago Press, 2007.

VERLEY, J. L. Camille-Jordan (1838-1921). In: SOCIETÉ D'ÉDITION ENCYCLOÆDIA UNIVERSALIS S.A. (Ed.) *Encyclopædia Universalis*. Disponível em: <http://www.universalis.fr/encyclopedie/augustin-louis-cauchy/>. Acesso em: 30 dez. 12.

VOLTERRA, V. Sui principii del calcolo integrale. *Giornale di Matematiche*, Napoli, v.19, p.333-372, 1881.

WEIERSTRASS, K. Zur Theorie der Potenzreihen. (1841). In: ______. *Mathematische Werk 1*. Berlin: Mayer&Müller, 1894. p.67-74.

______. Über das sogenannte Dirichletsche Prinzip. (1870). In: ______. *Mathematische Werk 2*. Berlin: Mayer&Müller, 1895. p.49-54.

______. Über continuierliche Funktionen eines reellen arguments, die für keinen werth des letzteren einen bestimmten differentialquotienten bezitsen. (1872). In: ______. *Mathematische Werk 2*. Berlin: Mayer&Müller, 1895. p.71-74.

______. *Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen functionen*. Berlin: Verlag von Julius Springer, 1893. Bearbeitet und Herausgegeben von H. A. Schwarz.

WISE, G. L.; HALL, E. *Counterexamples in probability and real analysis*. New York: Oxford University Press, 1993.

WUSSING, H. *Leciones de historia de las matematicas*. Tradução de Elena Ausejo, José Luis Escorihuela, Mariano Hormigón, Daria Kara-Murzá, Ana Millán. Madrid: Siglo XXI de España Editores, 1998. Título original: Vorlesungen zur Geschichte der Mathematik.

YOUSCHKEVITCH, A. P. The concept of function up to the middle of the 19th century. *Archive for History of Exact Sciences*, [S. L], v.16, n.1, p.37-85, 27 sep. 1976.

SOBRE O LIVRO

Formato: 14 x 21 cm
Mancha: 23,7 x 42,5 paicas
Tipologia: Horley Old Style 10,5/14

EQUIPE DE REALIZAÇÃO

Coordenação Geral
Oitava Rima

CULTURA
ACADÊMICA
Editora