

**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
CÂMPUS DE ILHA SOLTEIRA**

Ana Julia da Silva Sá

**CONTROLE ROBUSTO \mathcal{H}_∞ DE UM HELICÓPTERO DE BANCADA 3-DOF
REALIMENTANDO APENAS AS POSIÇÕES.**

Ilha Solteira
2024



Ana Julia da Silva Sá

**CONTROLE ROBUSTO \mathcal{H}_∞ DE UM HELICÓPTERO DE BANCADA 3-DOF
REALIMENTANDO APENAS AS POSIÇÕES**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira – UNESP como parte dos requisitos para obtenção do título de Bacharel em Engenharia Elétrica e grau de Engenheiro Eletricista.

Orientador(a): Prof. Dr. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira

Ilha Solteira

2024

FICHA CATALOGRÁFICA

Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

S111c Sá, Ana Julia da Silva.
Controle robusto \mathcal{H}^∞ de um helicóptero de bancada 3-DOF realimentando apenas as posições / Ana Julia da Silva Sá. -- Ilha Solteira: [s.n.], 2024
48 f. : il.

Trabalho de conclusão de curso (Graduação em Engenharia Elétrica) -
Universidade Estadual Paulista (UNESP), Faculdade de Engenharia, Ilha Solteira,
2024

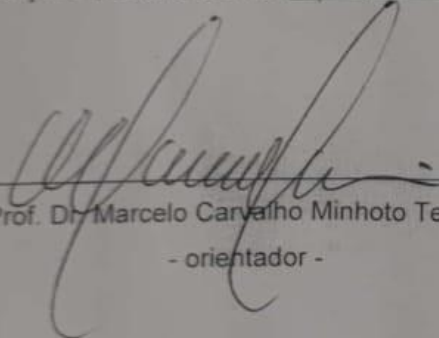
Orientador: Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira

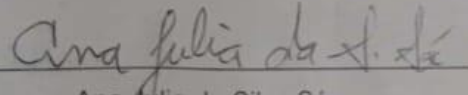
Inclui bibliografia

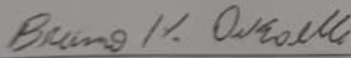
1. Controle Robusto \mathcal{H}^∞ . 2. Desigualdades Matriciais Lineares. 3. ??-
Estabilidade. 4. Helicóptero De Bancada 3-Dof.

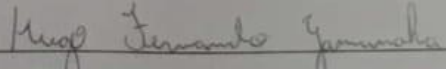
ATA DE DEFESA DE TRABALHO DE GRADUAÇÃO

Aos dezessete dias do mês de dezembro do ano de dois mil e vinte e quatro, a discente *Ana Julia da Silva Sá*, matriculada sob o nº 171052961, tendo como banca examinadora o seu orientador, o *Prof. Dr. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira*, o *Eng. Bruno Hiromoto Oikawa* e o *Mestrando Hugo Fernando Yamanaka* apresentou o Trabalho de Graduação intitulado "Controle Robusto H^∞ de um Helicóptero de Bancada 3-DOF Realimentado Apenas as Posições", obtendo a nota 9,0 (NOVE INTEIROS) e conceito APROVA.


Prof. Dr. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira
- orientador -


Ana Julia da Silva Sá
- discente -


Eng. Bruno Hiromoto Oikawa
- Membro da Banca -


Mestrando Hugo Fernando Yamanaka
- Membro da Banca -

DEDICATÓRIA

Dedico esse trabalho de graduação a minha mãe Adriane Cristina da Silva Sá, que me apoiou de diversas formas durante a graduação. Seu trabalho possibilitou que eu frequentasse a universidade e chegasse até aqui.

AGRADECIMENTO

Ao meu orientador, Prof. Dr. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira, pela oportunidade e orientação nesse trabalho.

Ao mestrando Hugo Fernando Yamanaka, pela ajuda e conselhos durante a realização desse trabalho.

Ao meu namorado, Pedro Paulo Pizzoquero, pelo apoio e incentivo durante o período do trabalho, sempre acreditando que eu conseguiria mesmo quando nem eu acreditava.

“O conhecimento nos faz responsáveis”.

Che Guevara

RESUMO

Este trabalho de graduação apresenta um método de controle em que a simulação do projeto dos controladores de um sistema mecânico no qual não se tem fácil acesso a todas as variáveis de estado. É considerada apenas a realimentação com as variáveis de estado das posições, de forma que o projeto apenas dependa dessas variáveis e não tenha necessidade de estimativa das variáveis de velocidades. O projeto se utiliza da técnica de controle robusto \mathcal{H}_∞ com método baseado nas desigualdades matriciais lineares (LMIs) e a teoria da \mathcal{D} -estabilidade. O sistema no qual foi aplicado esse projeto é o Helicóptero de Bancada 3-DOF da Quanser, que possui três graus de liberdade (arfagem, elevação e deslocamento) e oito variáveis de estado em sua representação no espaço de estados. Considerou-se uma falha de 30% da potência do motor traseiro do equipamento, criando uma incerteza na matriz de entrada do sistema em sua simulação. Na simulação do projeto do controlador do sistema foi utilizado o *software* MatLab/Simulink, o solver SeDuMi que resolve as Desigualdades Matriciais Lineares e a *toolbox* de interface YALMIP, que facilita a programação e resolução das LMIs. Os resultados de simulação são apresentados ao longo desse trabalho.

Palavras-chave: Controle Robusto \mathcal{H}_∞ ; Desigualdades Matriciais Lineares; \mathcal{D} -Estabilidade; Helicóptero de Bancada 3-DOF.

ABSTRACT

This graduation work presents a control method in which the simulation of the design of the controllers of a mechanical system in which one does not have easy access to all state variables. Only the feedback with the position state variables is considered, so that the project depends only on these variables and does not need to estimate the speed variables. The project uses the robust control technique \mathcal{H}_∞ with a method based on linear matrix inequalities (LMIs) and the theory of \mathcal{D} -stability. The system in which this project was applied is the Quanser 3-DOF Bench Helicopter, which has three degrees of freedom (pitch, elevation and travel) and eight state variables in its representation in the state space. It was considered a failure of 30% of the power of the rear engine of the equipment, creating an uncertainty in the input matrix of the system in its simulation. In the simulation of the system controller design, MatLab/Simulink software was used, SeDuMi solver that resolves the Linear Matrix Inequalities and YALMIP interface toolbox, which facilitates the programming and resolution of LMIs. The simulation results are presented throughout this work.

Keywords: \mathcal{H}_∞ Robust control; Linear Matrix Inequalities; \mathcal{D} -Stability; 3-DOF Bench Helicopter.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Região de interesse para os autovalores em malha de fechada do sistema.....	24
Figura 2 - Diagrama de blocos de um sistema de segunda ordem.....	25
Figura 3 - Helicóptero de Bancada 3-DOF.....	27
Figura 4 - Diagrama de corpo livre do Helicóptero de bancada 3-DOF.....	28
Figura 5 - Diagrama de blocos do sistema com acesso às variáveis das posições e das velocidades.....	34
Figura 6 - Diagrama de blocos do sistema com acesso apenas às variáveis de estado das posições.....	35
Figura 7 - Diagrama de blocos do sistema do Helicóptero de Bancada 3-DOF com acesso apenas às variáveis de estado das posições.....	36
Figura 8 - Ângulos de elevação, arfagem e deslocamento do sistema na simulação.....	38
Figura 9 - Sinal de controle dos motores do Helicóptero.....	38

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Parâmetros do sistema do Helicóptero de Bancada 3-DOF.....	28
--	----

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

LMI	Linear Matrix Inequalities (Desigualdades Matriciais Lineares).
3-DOF	3 Degrees Of Freedom (3 graus de liberdade).
SeDuMi	Self-Dual Minimization Inequalities (Desigualdade de Minimização Auto-Dual).
Yalmip	Yet Another LMI Parser (Mais um analisador de LMI).
MIMO	Multiple-input, multiple-output (Sistema com múltiplas entradas e múltiplas saídas).
SISO	Single-input and single-output (Sistema com uma entrada e uma saída).
PO	Porcentagem de overshoot.
MS	Máximo sobressinal.

LISTA DE SÍMBOLOS

\mathfrak{R}^n	Conjunto de vetores reais de dimensão n .
$\mathfrak{R}^{m \times n}$	Conjunto de matrizes reais de dimensão $m \times n$.
\mathbb{K}_n	Conjunto $\{1, 2, \dots, N\} \subset \mathfrak{R}$, dos primeiros N números naturais.
t	Tempo.
t_0	Tempo inicial.
P	Matriz simétrica definida positiva.
β, μ e γ	Constantes positivas.
λ	Travel (Deslocamento)
ε	Elevation (Elevação)
τ	Pitch (Arfagem).
A e B	Matrizes de espaço de estados do Helicóptero 3-DOF
V_f e V_b	Sinais de controle dianteiro e traseiro

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	15
1.1. Objetivos	16
1.2. Estrutura do Trabalho	16
2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS	17
2.1. Espaço de Estados	17
2.2. Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs)	18
2.3. Critério de Estabilidade de Lyapunov	19
2.4. Sistemas Lineares Invariantes no Tempo com Incertezas	20
2.5. Controle Robusto \mathcal{H}_∞	21
2.6. Teoria da \mathcal{D} -Estabilidade	23
3. SISTEMA ESTUDADO	27
3.1. Helicóptero de Bancada com 3 Graus de Liberdade	27
3.2. Descrição em Espaço de Estados	28
4. O CONTROLE COM REALIMENTAÇÃO DAS POSIÇÕES	32
4.1. Teoria de Controle com Realimentação das Posições	32
5. RESULTADOS.....	37
6. CONSIDERAÇÕES FINAIS	39
6.1. Perspectivas futuras	39
REFERÊNCIAS.....	40
ANEXO A - Código de programação no MatLab do projeto do controlador do Helicóptero de Bancada 3-DOF.....	42
ANEXO B - Simulação do sistema Helicóptero de bancada 3-DOF da Quanser no Simulink do MatLab.....	47

1 INTRODUÇÃO

O projeto de controladores é um tema muito estudado na área de Controle e Automação, acompanhado da estabilidade dos sistemas dinâmicos. O estudo da estabilidade de um sistema é de grande importância na área de controle e pode ser feito de diferentes formas. Uma dessas técnicas é de Lyapunov, que estuda a estabilidade do sistema através de uma função escalar $V(x)$ candidata a função energia do sistema. Para desenvolver essa teoria de estabilidade Lyapunov criou as Desigualdades Lineares Matriciais (LMIs), que representam restrições do sistema como condições e limites de estabilidade, entre outros (Gahinet *et al.*, 1995).

A teoria da estabilidade de Lyapunov foi utilizada em diversas pesquisas e estudos, sendo muito explorada até os dias de hoje. Dentre esses estudos está o controle robusto \mathcal{H}_∞ , que possui diversos métodos para projetar os controladores, sendo alguns baseados em LMIs. As técnicas de síntese \mathcal{H}_∞ podem abordar objetivo do controle clássico como atenuação de distúrbios, estabilização robusta de sistemas incertos, entre outros. Sua resolução tem baixa complexidade em relação a outras técnicas, porém deve-se lidar com domínio da frequência e possui pouco controle sobre comportamento transitório e localização de polos em malha fechada. Para alcançar índices de desempenho esperados e assegurar limites máximos dos parâmetros, os autovalores de malha fechada do sistema devem estar em uma região específica. Essa técnica de alocação de autovalores utiliza a \mathcal{D} -Estabilidade e permite que as restrições do projeto sejam descritas através das LMIs.

Dentre as restrições possíveis em um projeto do controlador de um sistema, tem-se a limitação do acesso às suas variáveis de estado. Em alguns sistemas não é possível obter todas as variáveis para realimentação, tornando necessária a busca de outras soluções para resolver este problema. Uma das soluções possíveis mais comum de ser aplicada é a estimativa desses dados que não são de fácil acesso, porém essas estimativas se tornam mais complexas quando existem parâmetros incertos na planta. Outra abordagem do problema é projetar um controlador que não dependa dos estados com acesso dificultado. Esse método foi proposto em (Esteves *et al.*, 2022), em que foi desenvolvido um método para o sistema com acesso reduzido às variáveis de estado do sistema. São realizados dois projetos, um que a

realimentação do sistema é realizada somente com as posições e outro com realimentação somente com velocidades.

Esse método é utilizado nesse trabalho, sendo aplicado no Helicóptero de Bancada 3-DOF, da empresa Quanser e simulando o projeto de controle somente com acesso às variáveis de estado de posições no *software* MatLab/Simulink.

1.1 OBJETIVOS

O objetivo deste trabalho é implementar o método de controle proposto em Esteves *et al.* (2022), no qual se utiliza apenas a realimentação das posições, no sistema do Helicóptero de Bancada 3-DOF da Quanser. Deseja-se controlar o sistema MIMO (Múltiplas Entradas e Múltiplas Saídas) com duas entradas e oito variáveis de estado utilizando apenas as posições angulares do sistema.

1.2 ESTRUTURA DO TRABALHO

A apresentação das ferramentas utilizadas neste trabalho se dá pela seguinte organização:

- Capítulo 1: Breve apresentação sobre os tópicos do trabalho, objetivos e estrutura;
- Capítulo 2: Apresentação da teoria sobre ferramentas e conceitos matemáticos utilizados no trabalho;
- Capítulo 3: Descrição do sistema do Helicóptero de Bancada 3-DOF;
- Capítulo 4: Apresentação do método de controle utilizando apenas as posições na realimentação;
- Capítulo 5: Apresentação dos resultados da simulação do sistema;
- Capítulo 6: Conclusões finais sobre o trabalho e perspectivas futuras do tema.

2 FUNDAMENTOS TEÓRICOS

2.1 ESPAÇO DE ESTADOS

Para controlar sistemas modernos atualmente consideraram-se múltiplas entradas e múltiplas saídas, que aumentam a complexidade dos sistemas, além da necessidade de satisfazer requisitos do projeto, alcançar índices de desempenho e a estabilidade do sistema. Este sistema de múltiplas entradas e múltiplas saídas é chamado de MIMO (do inglês, Multiple Input Multiple Output) e sua representação pode ser feita através do espaço de estados, pois este facilita o manuseio de dados ausentes e a variedade de possíveis de modelos gerados a partir destes dados.

A dinâmica de um sistema pode ser descrita através das chamadas variáveis de estado, sendo que o conjunto destas variáveis de estado compõem o estado do sistema. Conhecendo essas variáveis de estado no tempo $t = t_0$ e os valores de entrada para $t > t_0$ pode-se determinar o comportamento do sistema para qualquer $t > t_0$ (Ogata, 2010).

Nessa teoria de controle moderno é possível descrever o sistema através de equações diferenciais utilizando-se da notação matricial-vetorial. Considerando que para descrever um sistema sejam necessárias $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ variáveis de estados, pode-se considerar essas n variáveis como componentes de um vetor x chamado de vetor de estados. O espaço de estados é definido por um espaço de dimensão n cujos eixos são definidos por $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$, sendo possível representar qualquer estado do sistema por um ponto.

A forma genérica de uma equação de estado é dada por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} u(t), \quad (1)$$

$$y(t) = [c_1 \quad c_2 \quad \cdots \quad c_n] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Na forma compacta

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (3)$$

$$y(t) = Cx(t). \quad (4)$$

em que $x \in \mathfrak{R}^n$ é o vetor de estado, $y(t)$ é o vetor de saídas medidas e $u(t)$ é o vetor de entradas de controle.

2.2 DESIGUALDADES MATRICIAIS LINEARES (LMIS)

As Desigualdades Matriciais Lineares (LMIs) são definidas como restrições na forma matricial que descrevem a dinâmica do sistema. Essas restrições do projeto se dão como a positividade e negatividade de matrizes simétricas, possibilitando a consideração de múltiplas variáveis ao mesmo tempo. Por serem escritas na forma de inequações, pode-se descrever o projeto de controlador do sistema como problema de otimização convexo, no qual abrange possíveis limitações do sistema e suas soluções existentes podem ser encontradas com uso de *solvers* matemáticos. Essas inequações possuem matrizes com elementos conhecidos e matrizes com escalares desconhecidos os quais são determinados de acordo com as condições do projeto do sistema.

Uma LMI é dada pela forma (BOYD *et al.*, 1994):

$$F(X) \triangleq F_0 + \sum_{i=1}^n x_i F_i > 0. \quad (5)$$

Na qual $x \in \mathfrak{R}^n$ é a variável vetorial com suas componentes $x_i, i = 1, 2, \dots, n$. As matrizes simétricas $F_i = F_i^T \in \mathfrak{R}^{m \times m}, i = 0, 1, \dots, n$, são conhecidas. As LMIs podem ser escritas de outra maneira, com suas variáveis sendo matrizes:

$$R + M_1^T P_1 N_1 + N_1^T P_1 M_1 + \dots + M_n^T P_n N_n + N_n^T P_n M_n < 0. \quad (6)$$

Em que M_i, N_i e $R, i = 1, 2, \dots, n$, são matrizes fixas e $P_i, i = 1, 2, \dots, n$, são matrizes variáveis. A desigualdade utilizando a teoria de Lyapunov é um exemplo de LMI com variável matricial:

$$A^T P + P A < 0, \quad (7)$$

em que $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ é uma matriz dada e $P = P^T > 0$ é variável.

Existe uma propriedade algébrica relacionada às LMIs, onde há uma transformação da desigualdade quadrática em desigualdade linear, através do Complemento de Schur. Dadas as matrizes $A = A^T$ e $C = C^T$, então as condições abaixo são equivalentes:

$$C > 0, A - B C^{-1} B^T > 0, \quad (8)$$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ B^T & C \end{bmatrix} > 0. \quad (9)$$

A matriz B é uma variável matricial. As matrizes simétricas $A, C \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ são congruentes se existir $X = P^{-1} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ não singular tal que $A = X^T C X$. Se A e C são congruentes, $A > 0$ se e somente se $C > 0$.

2.3 CRITÉRIO DE ESTABILIDADE DE LYAPUNOV

O estudo de estabilidade em sistemas dinâmicos sempre foi muito interessante para pesquisadores matemáticos que tentavam definir o conceito de estabilidade. Dentre eles se destacam Torricelli, um dos primeiros a relacionar um ponto de estabilidade como um ponto de energia total mínima local. Laplace e Lagrange utilizaram desse princípio e definiram que um sistema conservativo tem um ponto de equilíbrio estável quando esse estado possui energia cinética zero e energia potencial mínima.

Porém, foi apenas em 1892 que Lyapunov definiu um critério de estabilidade através de um método que considera a energia total de um sistema, assim como Torricelli. Ele propôs estudar a estabilidade do sistema com uma função que seja candidata a função de energia. Dada $V(x(t))$, uma função escalar que representa a função energia do sistema e assumindo-se que essa energia é positiva para todo $x(t) \neq 0$ e $V(0) = 0$, tem-se:

$$V(x(t)) > 0. \quad (10)$$

Para o sistema ser assintoticamente estável no conceito de Lyapunov é necessário que a derivada da função energia menor que zero, ou seja $\dot{V}(x(t)) < 0$ para todo $x(t) \neq 0$.

Uma função candidata à função de Lyapunov que pode ser analisada na questão de estabilidade é do tipo Escalar de Forma Quadrática na forma

$$V(x(t)) = x^T P x = [x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n] \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1n} \\ P_{12} & P_{22} & \cdots & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{1n} & P_{2n} & \cdots & P_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (11)$$

Em que P é uma matriz simétrica com elementos que pertencem ao conjunto dos números reais. A positividade da função pode ser avaliada com a positividade da matriz P .

$$P > 0 \Leftrightarrow V(x(t)) = x^T P x > 0, x \neq 0. \quad (12)$$

A positividade P pode ser verificada utilizando o critério de Sylvester, que estabelece a positividade P se todos os menores principais líderes de P forem positivos.

$$P_{11} > 0, \det \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} > 0, \dots, \det \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1n} \\ P_{21} & P_{22} & \dots & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n1} & P_{n2} & \dots & P_{nn} \end{bmatrix} > 0. \quad (13)$$

Deve-se garantir que $\dot{V}(x(t)) < 0$ para todo $x(t) \neq 0$, sendo $V(x(t))$ uma função quadrática.

$$\dot{V}(x(t)) = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x}, \quad (14)$$

definindo $\dot{x} = Ax$:

$$\dot{V}(x(t)) = (Ax)^T P x + x^T P (Ax) \quad (15)$$

$$\dot{V}(x(t)) = x^T A^T P x + x^T P A x \quad (16)$$

$$\dot{V}(x(t)) = x^T (A^T P + P A) x. \quad (17)$$

A equação (16) é definida negativa se:

$$A^T P + P A < 0. \quad (18)$$

2.4 SISTEMAS LINEARES INVARIANTES NO TEMPO COM INCERTEZAS

As equações (19) e (20) apresentam as equações diferenciais de primeira ordem que representam o estado e a saída de um sistema linear invariante no tempo que não possui incertezas.

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (19)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t), \quad (20)$$

sendo $x(t) \in \mathfrak{R}^n$ é o vetor de estados, $u(t) \in \mathfrak{R}^m$ é a entrada controlada, $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ é a matriz de estado, $B \in \mathfrak{R}^{n \times m}$ é a matriz de entrada controlada, $y(t) \in \mathfrak{R}^q$ é a saída controlada, $C \in \mathfrak{R}^{q \times n}$ é a matriz de saída e $D \in \mathfrak{R}^{q \times m}$ é a matriz de transmissão direta.

Porém a planta de um sistema pode ter algumas incertezas nos seus parâmetros. Também pode-se apresentar algumas entradas exógenas, que influenciam nas variáveis de estados e nas saídas do sistema. Essas incertezas podem ser apresentadas da seguinte forma:

$$\dot{x}(t) = A(\beta)x(t) + B(\beta)u(t) + H(\beta)\omega(t), \quad (21)$$

$$y(t) = C(\beta)x(t) + D(\beta)u(t) + G(\beta)\omega(t), \quad (22)$$

em que $\omega(t) \in \mathfrak{R}^p$ é a entrada exógena limitada. $A(\beta)$, $B(\beta)$, $C(\beta)$, $D(\beta)$, $H(\beta)$, $G(\beta)$ são matrizes que descrevem o sistema e pertencem a um conjunto convexo de natureza politópica dado por

$$(A, B, C, D, H, G)(\beta) = \sum_{i=1}^N \beta_i (A, B, C, D, H, G)_i \quad (23)$$

Em que $N = 2^\Phi$ e Φ é o número de elementos incertos das matrizes (A, B, C, D, H, G) . $(A, B, C, D, H, G)_i$ são os vértices do politopo formado pelas incertezas e β_i são os parâmetros invariantes no tempo que pertence ao simples unitário Λ_p dado por:

$$\Lambda_p = \{\beta \in \mathfrak{R}^n: \sum_{i=1}^N \beta_i = 1, \beta_i \geq 0, i \in \mathbb{K}_N, \mathbb{K}_N = \{1, 2, \dots, N\}\}. \quad (24)$$

Considerando-se a lei de controle clássica $u(t) = -Kx(t)$ e substituindo nas equações (19) e (20):

$$\dot{x}(t) = (A(\beta) - B(\beta)K)x(t) + H(\beta)\omega(t) \quad (25)$$

$$y(t) = (C(\beta) - D(\beta)K)x(t) + G(\beta)\omega(t) \quad (26)$$

As equações (25) e (26) representam um sistema linear invariante no tempo em malha fechada com incertezas.

2.5 CONTROLE ROBUSTO \mathcal{H}_∞

O projeto de controladores \mathcal{H}_∞ foi formulado por Zames (1981) para minimizar o maior pico da resposta de frequência do sistema e pode ser utilizado quando deve-se garantir os níveis de desempenho e estabilidade relacionados com distúrbios externos. Foram desenvolvidos diversos métodos para resolver o projeto dos controladores \mathcal{H}_∞ , como os baseados nas desigualdades matriciais lineares, que tornam o projeto dos controladores \mathcal{H}_∞ de ordem completa em um problema de otimização convexa (Boyd *et al.*, 1994).

Alguns problemas do controle moderno, como atenuação de distúrbios, estabilização robusta de sistemas incertos ou modelagem da resposta de malha aberta podem ser expressos em termos de desempenho \mathcal{H}_∞ e abordados por técnicas de síntese \mathcal{H}_∞ . A síntese \mathcal{H}_∞ possui baixa complexidade em relação a outras técnicas, por envolver apenas a resolução de duas equações de Ricatti. Entretanto, o projeto lida com aspectos de domínio de frequência e não possui muito controle sobre o comportamento transitório e localização dos polos de malha fechada. Porém, pode-se alcançar o tempo de resposta satisfatório e amortecimento de malha fechada forçando

os polos de malha fechada em uma sub-região adequada do semi-plano real negativo. Pode-se evitar dinâmicas rápidas com a proibição de polos de malha fechada grandes demais, o que é desejado em implementações digitais. Para ajustar o desempenho \mathcal{H}_∞ e o comportamento transitório simultaneamente pode-se combinar os objetivos do \mathcal{H}_∞ e do posicionamento de polos (Chilali e Gahinet, 1996)

O projeto \mathcal{H}_∞ reduz a norma infinito da função de transferência da saída de desempenho com respeito às entradas exógenas, o que representa a minimização do maior pico da resposta em frequência do sistema em malha fechada. Para sistemas MIMO, a resposta em frequência refere-se ao diagrama de valores singulares e para os sistemas de única entrada e única saída (SISO) refere-se ao diagrama de Bode. (Skogestad; Postlethwaite, 2005, Zhou; Doyle, 1998).

A norma \mathcal{H}_∞ se dá por uma relação entre a saída $y(t)$ e a entrada exógena $\omega(t)$ do sistema (25)-(26) (de Oliveira *et al.*, 2014):

$$\|H(s)\|_\infty = \max_{\omega \neq \infty} \frac{\|y(t)\|_2}{\|\omega(t)\|_2}, \omega(t) \in \mathcal{L}_2, \quad (27)$$

em que $H(s)$ é a função de transferência, $\|\cdot\|_2$ a norma euclidiana e \mathcal{L}_2 o conjunto de todos os sinais $w(t)$, tais que $\int_0^\infty w(t)^2 dt < \infty$.

O custo garantido \mathcal{H}_∞ ótimo do sistema é dado pelo valor mínimo de $\gamma > 0$ e finito, tal que

$$\|y(t)\|_2 < \gamma \|\omega(t)\|_2. \quad (28)$$

Para qualquer saída $y(t) \in \mathcal{L}_2$ como resposta para qualquer entrada exógena $\omega(t) \in \mathcal{L}_2$. Então:

$$\|H(s)\|_\infty < \gamma. \quad (29)$$

Considerando a função quadrática de Lyapunov:

$$v(x) = x^T P x, P = P^T > 0. \quad (30)$$

A estabilidade do sistema (25)-(26) com custo garantido \mathcal{H}_∞ é garantida com a desigualdade (BOYD *et al.*, 1994):

$$\dot{v}(x) + y^T y - \gamma^2 \omega^T \omega < 0. \quad (31)$$

É necessário encontrar uma matriz de ganho de realimentação $K \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ para estabilizar o sistema (25)-(26) e minimize o custo garantido \mathcal{H}_∞ ao mesmo tempo.

Segue o teorema.

Teorema 1 - O sistema (25)-(26) é assintoticamente estável se, dado um escalar $\mu > 0$, existirem $X = X^T > 0$ e M , de dimensões adequadas, satisfazendo o seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned}
& \min \mu \\
& \text{s. a. } X = X^T > 0 \\
& \begin{bmatrix} \text{He}\{A_i X - B_i M\} & H_i & X C_i^T - M^T D_i^T \\ * & -\mu I & G_i^T \\ * & * & -I \end{bmatrix} < 0
\end{aligned} \tag{32}$$

para $i = \mathbb{K}_N$, $\mathbb{K}_N = \{1, 2, \dots, N\}$, sendo $\gamma^2 = \mu > 0$. Se (32) for factível, então a matriz de ganho de realimentação é dada por $K = M X^{-1}$ e assegura $\|H(s)\|_\infty \leq \sqrt{\mu}$. $\text{He}\{\cdot\}$ é o operador hermitiano, $\text{He}\{U\} = U + U^T$ (Boyd *et al.*, 1994).

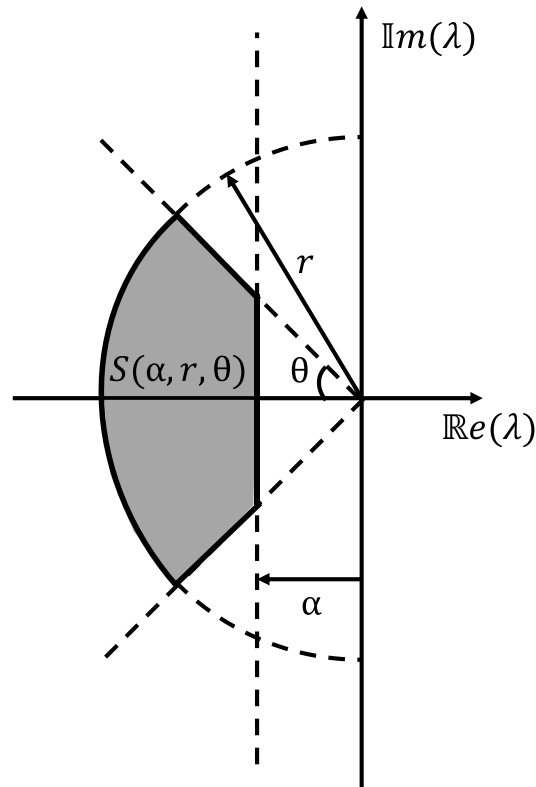
Demonstração: A prova deste teorema pode ser encontrada em Boyd *et al.* (1994).

2.6 TEORIA DA \mathcal{D} -ESTABILIDADE

Para aplicações práticas a estabilização do sistema pode não ser suficiente, pois os projetos de controle devem atender determinados índices de desempenho. É necessário que os autovalores de malha fechada do sistema estejam em uma região específica, para assegurar limites máximos para parâmetros como o *overshoot*, tempo de subida e tempo de estabelecimento. A Porcentagem de *overshoot* (PO) é definida como a porcentagem de máximo sobressinal em relação ao valor do regime permanente de saída e o máximo sobressinal (MS) é a diferença entre o valor de pico e o valor de regime permanente na saída.

A região de interesse $S(\alpha, r, \theta)$ vista na Figura 1, possui números complexos $x + jy$ que satisfazem (33).

Figura 1 – Região de interesse para os autovalores em malha de fechada do sistema.



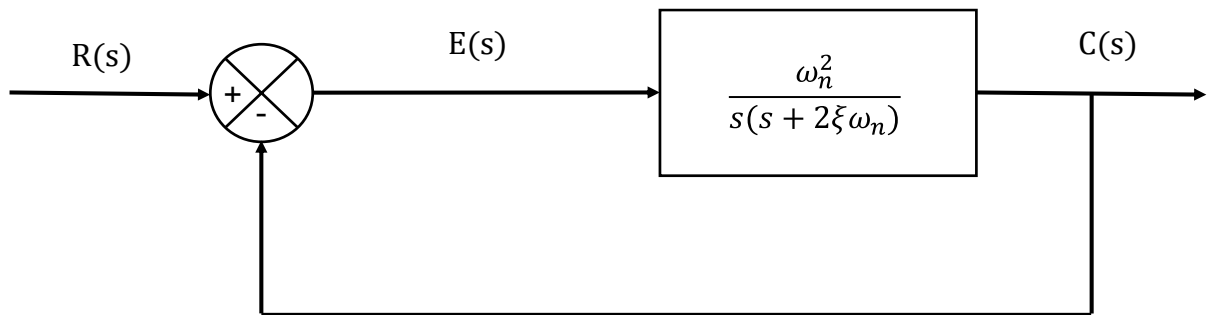
Fonte: De Oliveira *et al.* (2014).

$$S(\alpha, r, \theta) = \begin{cases} x < -\alpha < 0 \\ |x + jy| < r \\ \tan(\theta) < -|y|. \end{cases} \quad (33)$$

Caso o sistema de segunda ordem possua autovalores pertencentes à região $S(\alpha, r, \theta)$, ele possui uma taxa de decaimento α mínima, coeficiente de amortecimento $\xi = \cos(\theta)$ mínimo e frequência amortecida $\omega_d = r \sin(\theta)$ máxima. A alocação de autovalores é uma técnica que utiliza o conceito de \mathcal{D} -Estabilidade, que permite que as restrições de projeto sejam caracterizadas através das LMIs.

O comportamento dinâmico de um sistema de segunda ordem possui dois parâmetros que podem descrevê-lo, o coeficiente de amortecimento ξ e a frequência natural não amortecida ω_n (Ogata, 2010). A Figura 2 apresenta o diagrama de blocos de um sistema de segunda ordem qualquer.

Figura 2 – Diagrama de blocos de um sistema de segunda ordem.



Fonte: Esteves (2020).

A função transferência em malha fechada do sistema de segunda ordem é dada por:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \quad (34)$$

O sistema em malha fechada é subamortecido e possui resposta transitória oscilatória caso o valor do coeficiente de amortecimento seja $0 < \xi < 1$. Para $\xi = 0$, o sistema é não-amortecido e a resposta transitória não decai. Se o coeficiente de amortecimento for $\xi = 1$, o sistema é criticamente amortecido e $\xi > 1$ torna o sistema superamortecido (Ogata, 2010).

O seguinte teorema apresenta a condição para restringir os autovalores dos vértices do politopo em malha fechada na região $S(\alpha, r, \theta)$.

Teorema 2 - O sistema (25)-(26), com lei de controle $u(t) = -Kx(t)$ possui autovalores na região $S(\alpha, r, \theta)$ se existirem as matrizes $X = X^T > 0$ e M , de dimensões adequadas, tais que:

$$A_i X + X A_i^T - B_i M - M^T B_i^T + 2\alpha X < 0, \quad (35)$$

$$\begin{bmatrix} -rX & A_i X - B_i M \\ * & -rX \end{bmatrix} < 0, \quad (36)$$

$$\begin{bmatrix} \Gamma & \cos(\theta) (A_i X - X A_i^T - B_i M + M^T B_i^T) \\ * & \Gamma \end{bmatrix} < 0, \quad (37)$$

sendo $\Gamma = \sin(\theta) (A_i X + X A_i^T - B_i M - M^T B_i^T)$, $i \in \mathbb{K}_n$ e a matriz de ganho de realimentação é dada por $K = M X^{-1}$ (Chilali e Gahinet, 1996).

Demonstração: A prova deste teorema pode ser encontrada em Chilali e Gahinet (1996).

Os Teoremas 1 e 2 juntos permitem que o projeto do controlador robusto \mathcal{H}_∞ utilize uma matriz de ganhos fixa para a estabilização do sistema realimentado e a garantia de que seus polos se encontram na região \mathcal{D} -Estável.

3 SISTEMA ESTUDADO

3.1 O HELICÓPTERO DE BANCADA COM 3 GRAUS DE LIBERDADE

O Helicóptero de Bancada 3-DOF, desenvolvido pela Quanser, possui dois motores de corrente contínua conectados a duas hélices em pontos opostos. Esse conjunto está ligado a uma haste metálica fixada na base de sustentação, que possui um contrapeso na outra ponta. O módulo possui um sistema de massa ativa que simula perturbações no vôo. A Figura 3 apresenta a estrutura do sistema do Helicóptero.

Figura 3 – Helicóptero de Bancada 3-DOF.



Fonte: Quanser (2012).

O sistema possui três graus de liberdade:

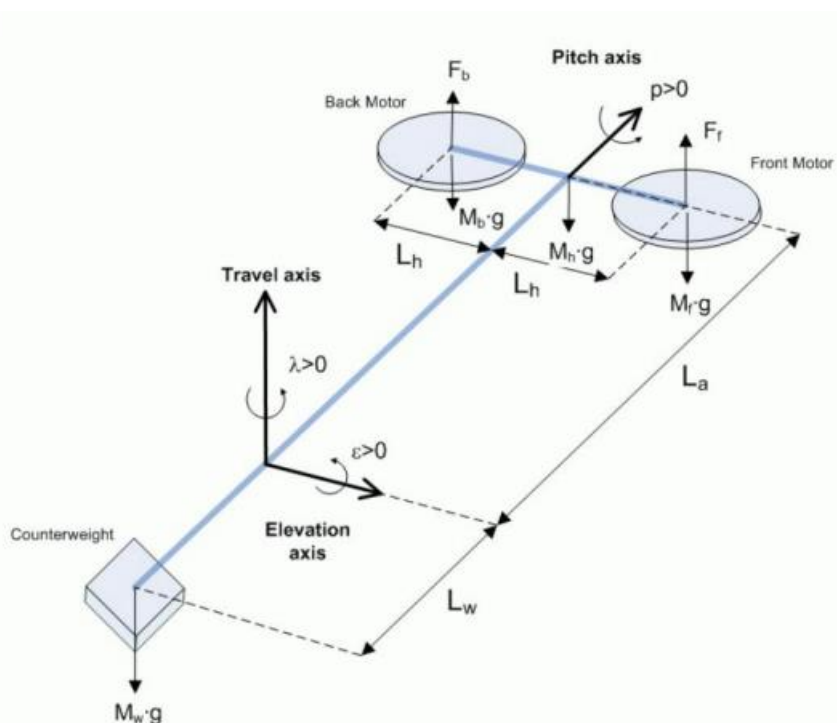
- Ângulo de Deslocamento (“*Travel*” em inglês): Ângulo “ λ ” que apresenta o movimento em torno da base de sustentação, que varia de 0° a 360° ;
- Ângulo de Elevação (“*Elevation*” em inglês): Ângulo “ ε ” formado entre a haste metálica e o eixo horizontal, que varia da posição de repouso do helicóptero de $-27,5^\circ$ a 0° , no qual a haste se encontra paralela ao eixo horizontal;
- Ângulo de Arfagem (“*Pitch*” em inglês): Ângulo “ τ ” que apresenta a inclinação do helicóptero, responsável pela direção do seu deslocamento. Seu ângulo inicial é 0° e qualquer variação inicia o movimento. É controlado pela diferença da força de propulsão dos motores, é considerado positivo caso a força de

propulsão do motor traseiro for maior que a do motor dianteiro é negativo caso contrário.

3.2 DESCRIÇÃO EM ESPAÇO DE ESTADOS

Entender a descrição do espaço de estados do sistema se faz necessário para projetar seu controlador, pois visualiza-se as entradas, os parâmetros e suas influências no comportamento do sistema. A Figura 4 apresenta o diagrama de corpo livre do sistema.

Figura 4 – Diagrama de corpo livre do Helicóptero de bancada 3-DOF



Fonte: Quanser (2012).

A Tabela 1 apresenta os valores dos parâmetros mostrados na figura anterior.

Tabela 1 – Parâmetros do sistema do Helicóptero de Bancada 3-DOF.

Símbolo	Descrição	Valor	Unidade
M_w	Massa do contrapeso	1,87	kg
M_f	Massa do motor dianteiro	0,713	kg
M_b	Massa do motor traseiro	0,713	kg
M_h	Massa aproximada do helicóptero	1,15	kg
K_f	Constante de força-empuxo das hélices	0,1188	N/V
L_h	Distância entre o eixo de rotação e cada motor	0,178	m
L_a	Distância do eixo de deslocamento até o helicóptero	0,660	m

L_w	Distância do eixo de deslocamento até o contrapeso	0,470	m
g	Força da gravidade	9,81	m/s^2

Fonte: Adaptado de QUANSER (2019).

Dado os parâmetros físicos do sistema, verifica-se sua descrição do espaço de estados:

$$\begin{bmatrix} \dot{\varepsilon} \\ \dot{\tau} \\ \dot{\lambda} \\ \ddot{\varepsilon} \\ \ddot{\tau} \\ \ddot{\lambda} \\ \dot{\xi} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \tau \\ \lambda \\ \dot{\varepsilon} \\ \dot{\tau} \\ \dot{\lambda} \\ \xi \\ \gamma \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} V_f \\ V_b \end{bmatrix}. \quad (38)$$

As variáveis de estado ε (ângulo de altura), τ (ângulo de arfagem) e λ (ângulo de deslocamento) representa os três graus de liberdade do helicóptero, enquanto ξ e γ são dados inseridos artificialmente para melhorar o rastreamento das posições em relação aos valores de referência, ε_{ref} e λ_{ref} . Esses dados são definidos como integrais dos ângulos ε e λ .

$$\xi = \int_0^t (\varepsilon - \varepsilon_{ref}) dt. \quad (39)$$

$$\gamma = \int_0^t (\lambda - \lambda_{ref}) dt. \quad (40)$$

As variáveis V_f e V_b são as tensões aplicadas nos motores frontal e dianteiro.

As matrizes A e B são definidas por:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{6,2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ b_{4,1} & b_{4,2} \\ b_{5,1} & b_{5,2} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (41)$$

$$a_{6,2} = -\frac{(L_w M_w - 2L_a M_f)g}{M_w L_w^2 + 2M_f L_h^2 + 2M_f L_a^2}, \quad (42)$$

$$b_{4,1} = b_{4,2} = \frac{L_a K_f}{M_w L_w^2 + 2M_f L_a^2}, \quad (43)$$

$$b_{5,1} = -b_{5,2} = \frac{1}{2} \frac{K_f}{M_f L_h}. \quad (44)$$

Os valores de (42), (43) e (44) são definidos pelos parâmetros anteriormente citados.

Para verificar a resposta do controlador projetado, durante o trajeto se implementará uma queda de 30% de potência no motor traseiro utilizando uma chave temporizadora conectada a um amplificador com ganho de 0,7 ligada à tensão do motor. Constitui-se um politopo de dois vértices com uma incerteza na matriz de entrada do sistema do helicóptero, sobre o motor traseiro entre 70% a 100% do valor de V_b .

Com base em Manesco *et al.* (2012), os vértices do politopo são descritos como:

- Vértice 1 (ganho = 1 no canal):

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1,2304 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0,0858 & 0,0858 \\ 0,5810 & -0,5810 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (45)$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, D_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (46)$$

$$H_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1,6521 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, G_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (47)$$

- Vértice 2 (ganho = 0,7 no canal):

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1,2304 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0,0858 & 0,0601 \\ 0,5810 & -0,4067 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (48)$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (49)$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1,6521 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad G_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (50)$$

4 CONTROLE COM REALIMENTAÇÃO DAS POSIÇÕES

Nesta seção será apresentado o método proposto por Esteves et al. (2022), no qual o sistema tem variáveis de estado relacionadas de posições e velocidades. Porém, a simulação do projeto considera apenas o acesso às variáveis de estado de posições na realimentação.

4.1 TEORIA DO CONTROLE COM REALIMENTAÇÃO DAS POSIÇÕES

Dada a equação em espaço de estado de um sistema linear invariante no tempo em (51):

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(t) = [d(t)^T \quad \dot{d}(t)^T]^T, \quad (51)$$

em que $x(t) \in \mathfrak{R}^n$, $d(t) \in \mathfrak{R}^q$, $u(t) \in \mathfrak{R}^m$, $A \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ e $B \in \mathfrak{R}^{n \times m}$, sendo $n = 2q$.

Para projetar o controlador, observa-se a lei de controle (52):

$$\dot{u}(t) = -[K_1 \quad K_2 \quad K_3] \begin{bmatrix} d(t) \\ \dot{d}(t) \\ u(t) \end{bmatrix}, \quad (52)$$

em que $d(t)$ é o vetor de estado das posições e $\dot{d}(t)$ é o vetor de estado das velocidades, considerados disponíveis no sistema. Os termos $K_1 \in \mathfrak{R}^{m \times q}$, $K_2 \in \mathfrak{R}^{m \times q}$ e $K_3 \in \mathfrak{R}^{m \times m}$ são os ganhos do controlador. O sistema de malha fechada é representado por:

$$\dot{x}_{tp}(t) = (A_{tp} - B_{tp}K_{tp})x_{tp}(t), \quad (53)$$

$$x_{tp}(t) = \begin{bmatrix} d(t) \\ \dot{d}(t) \\ u(t) \end{bmatrix}, A_{tp} = \begin{bmatrix} A_{n \times n} & B_{n \times m} \\ 0_{m \times n} & 0_{m \times m} \end{bmatrix}, B_{tp} = \begin{bmatrix} 0_{q \times m} \\ 0_{q \times m} \\ I_{m \times m} \end{bmatrix}, \quad (54)$$

$$K_{tp} = [K_1 \quad K_2 \quad K_3]. \quad (55)$$

Dado o sistema em malha fechada, o seguinte teorema é proposto.

Teorema 3 - Se a planta (A,B) apresentada em (51) for controlável, então a nova planta (A_{tp},B_{tp}) apresentada em (53) e (54) também será controlável (Esteves *et al.*, 2022).

Demonstração:

Analisando a matriz de controlabilidade do sistema aumentado (52), tem-se:

$$\mathbb{C} = [B_{tp} \quad A_{tp}B_{tp} \quad \cdots \quad A_{tp}^{n+m-1}B_{tp}], \quad (56)$$

$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} 0 & B & AB & \cdots & A^{n-1}B & A^n B & \cdots & A^{n+m-1}B \\ I_m & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}. \quad (57)$$

Define-se duas novas matrizes, \mathbb{C}_p e \mathbb{C}_a , como

$$\mathbb{C}_p = [B \quad AB \quad \cdots \quad A^{n-1}B], \quad \mathbb{C}_a = [A^n B \quad \cdots \quad A^{n+m-1}B]. \quad (58)$$

Logo, a matriz \mathbb{C} pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\mathbb{C} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{C}_p & \mathbb{C}_a \\ I_m & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (59)$$

sendo que $\mathbb{C}_p \in \mathfrak{R}^{n \times (n.m)}$ tem posto n , pois a planta original é controlável. Assim, como $\mathbb{C} \in \mathfrak{R}^{(n+m) \times (n+m).m}$, a partir de (58) nota-se que:

$$\mathbb{C}\mathbb{C}^T = \begin{bmatrix} 0 & \mathbb{C}_p & \mathbb{C}_a \\ I_m & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I_m \\ \mathbb{C}_p^T & 0 \\ \mathbb{C}_a^T & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{C}_p\mathbb{C}_p^T + \mathbb{C}_a\mathbb{C}_a^T & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix}. \quad (60)$$

Como o posto de \mathbb{C}_p é igual a n e $\mathbb{C}_p \in \mathfrak{R}^{n \times (n.m)}$, então $\mathbb{C}_p\mathbb{C}_p^T > 0$. Além disso, $\mathbb{C}_a\mathbb{C}_a^T \geq 0$ para todo $\mathbb{C}_a \in \mathfrak{R}^{n \times m^2}$. Tem-se, então:

$$\mathbb{C}\mathbb{C}^T = \begin{bmatrix} \mathbb{C}_p\mathbb{C}_p^T + \mathbb{C}_a\mathbb{C}_a^T & 0 \\ 0 & I_m \end{bmatrix} > 0. \quad (61)$$

Desta forma, $\mathbb{C} \in \mathfrak{R}^{(n+m) \times (n+m).m}$ tem posto igual a $(n+m)$ e (A_{tp}, B_{tp}) é controlável. Então, é provado que a controlabilidade da planta aumentada é mantida.

Tendo o vetor de estados $x_{tp}(t)$ disponível, o ganho K_{tp} é projetado para garantir que o sistema realimentado (48) apresente desempenho adequado utilizando técnicas baseadas em LMIs e considerando vários índices de desempenho, como robustez, região de operação, taxa de decaimento, entre outros. Considere dado $K_{tp} = [K_1 \quad K_2 \quad K_3] \in \mathfrak{R}^{m \times (n+m)}$, tal que o sistema de controle apresente um desempenho adequado. A condição inicial $u(0)$ pode ser especificada se necessário e a lei de controle projetada (52) pode ser representada por:

$$\begin{aligned} \int_0^t \dot{u}(t) dt &= u(t) - u(0) \\ &= \int_0^t [-K_1 d(t) - K_2 \dot{d}(t) - K_3 u(t)] dt \\ &= \int_0^t [-K_1 d(t) - K_3 u(t)] dt + \int_0^t [-K_2 \dot{d}(t)] dt \end{aligned}$$

$$= \int_0^t [-K_1 d(t) - K_3 u(t)] dt - K_2 [d(t) - d(0)]. \quad (62)$$

Define-se uma nova função $z(t)$:

$$z(t) = u(t) + K_2 d(t). \quad (63)$$

Utilizando-se (62) e (63), tem-se:

$$z(t) = \int_0^t [-K_1 d(t) - K_3 u(t)] dt + u(0) + K_2 d(0), \quad (64)$$

$$z(0) = u(0) + K_2 d(0). \quad (65)$$

Com (63)-(65), tem-se a lei de controle (52) como:

$$\dot{z}(t) = -K_1 d(t) - K_3 u(t), \quad (66)$$

$$u(t) = z(t) - K_2 d(t), \quad (67)$$

$$z(0) = u(0) + K_2 d(0). \quad (68)$$

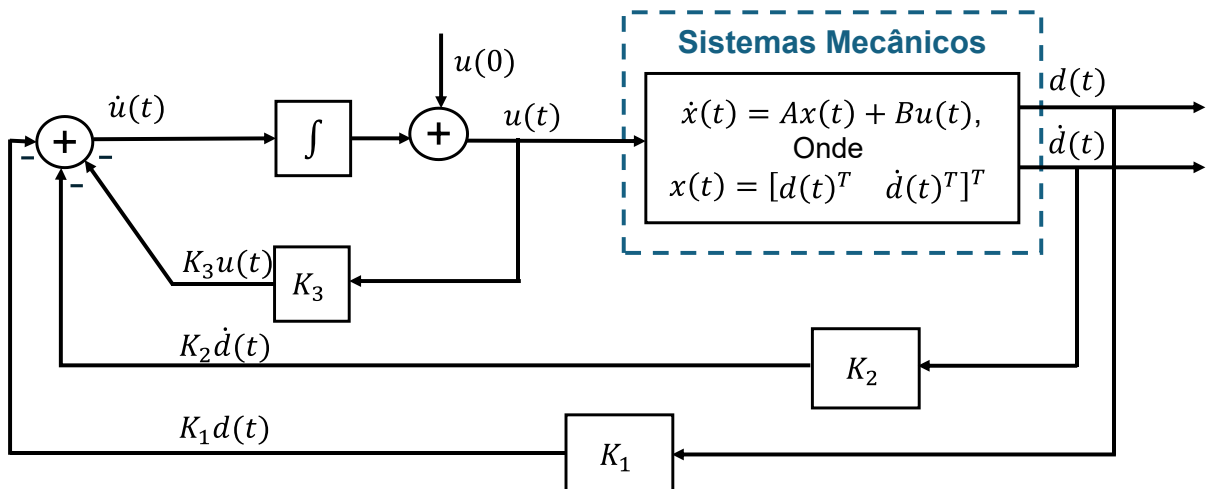
Substituindo (67) em (66):

$$\dot{z}(t) = (-K_1 + K_3 K_2) d(t) - K_3 z(t). \quad (69)$$

A lei de controle (67) não depende do vetor de velocidades $\dot{d}(t)$, é formada apenas com a realimentação do vetor de posições $d(t)$ e do sinal $z(t)$.

A Figura 5 apresenta o diagrama de blocos do sistema descrito nas equações (51) e (52), enquanto na Figura 6 o sistema é descrito por (51) e (67)-(69).

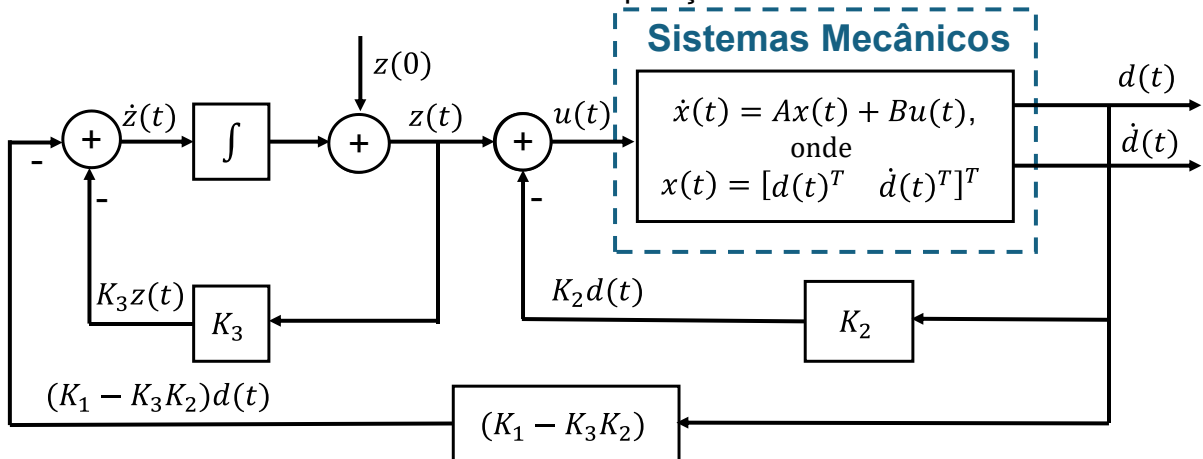
Figura 5 – Diagrama de blocos do sistema com acesso às variáveis das posições e das velocidades.



Fonte: Esteves *et al.* (2022).

O sistema descrito pela Figura 5 possui uma desvantagem do uso do integrador para geral o sinal de controle $u(t)$, que pode dificultar em obter certos índices de desempenho devido ao $u(t)$ poder ser visto como área do sinal na entrada do integrador adicionada à condição inicial $u(0)$.

Figura 6 – Diagrama de blocos do sistema com acesso apenas às variáveis de estado das posições.



Fonte: Esteves *et al.* (2022).

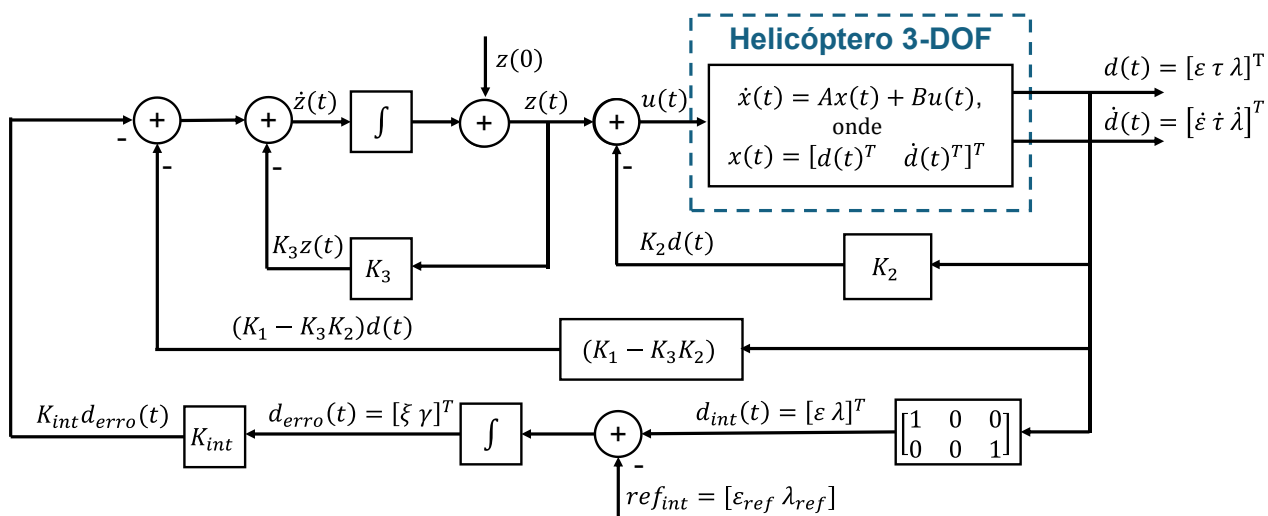
Especificando $u(0)$ como demonstra o sistema da Figura 6, se $u(0) = -K_2d(0)$ então $z(0) = u(0) + K_2d(0) = 0$. Desta forma, a condição inicial diferente de zero que influencia no sistema é $x(0) = [d(0)^T \quad \dot{d}(0)^T]^T$.

O sistema proposto é uma boa opção para o projeto de realimentação de estados de ordem completa para plantas mecânicas com parâmetros incertos, não sendo necessário estimar as velocidades das plantas. Além de ser mais barato, por apenas precisar medir as posições.

No caso de um sistema composto por mais vetores de estados além dos vetores de posições e de velocidades ($n \neq 2q$), o sistema proposto na Figura 6 também é aplicável.

Para o sistema do Helicóptero tem-se um diagrama de blocos com uma peculiaridade devido às duas variáveis artificiais de rastreamento da elevação e do deslocamento (39) e (40). A Figura 7 apresenta o diagrama de blocos do circuito do helicóptero.

Figura 7 – Diagrama de blocos do sistema do Helicóptero de Bancada 3-DOF com acesso apenas às variáveis de estado das posições.



Fonte: Próprio autor.

Para esse sistema, $\dot{z}(t)$ possui um termo a mais representando as variáveis de rastreamento.

$$\dot{z}(t) = -K_{int}d_{erro}(t) - (K_1 - K_3K_2)d(t) - K_3z(t). \quad (70)$$

5 RESULTADOS

Neste capítulo serão apresentados os resultados da simulação do sistema, através do código escrito no *software* MatLab presente no Anexo A e do circuito do Simulink presente no Anexo B. Utilizando o solver SeDuMi com a toolbox YALMIP para resolver as LMIs (32), (35), (36) e (37), com parâmetros $\alpha = 1,2$, $r = 1,5$, $\theta = \frac{\pi}{6}$, $\mu = 533$, obtendo assim tais ganhos do controlador:

$$K = [K_1 \quad K_2 \quad K_{int} \quad K_3] \quad (71)$$

$$K_1 = \begin{bmatrix} 60,3682 & 41,3854 & -20,8717 \\ 86,2395 & -58,0760 & 29,0081 \end{bmatrix} \quad (72)$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 62,4064 & 22,4925 & -35,7910 \\ 89,1515 & -31,7308 & 49,9781 \end{bmatrix} \quad (73)$$

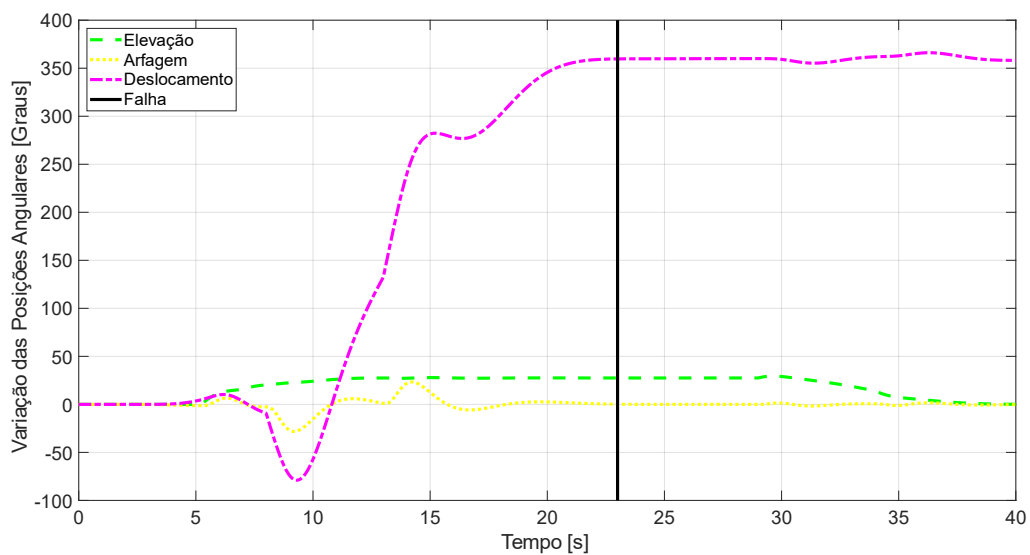
$$K_{int} = \begin{bmatrix} 23,1027 & -5,2110 \\ 33,0035 & 7,2099 \end{bmatrix} \quad (74)$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} 6,4926 & -0,9142 \\ -1,8280 & 6,4661 \end{bmatrix} \quad (75)$$

$$K = \begin{bmatrix} 60,3682 & 41,3854 & -20,8717 & 62,4064 & 22,4925 & -35,7910 & \dots \\ 86,2395 & -58,0760 & 29,0081 & 89,1515 & -31,7308 & 49,9781 & \dots \\ 23,1027 & -5,2110 & 6,4926 & -0,9142 \\ 33,0035 & 7,2099 & -1,8280 & 6,4661 \end{bmatrix} \quad (76)$$

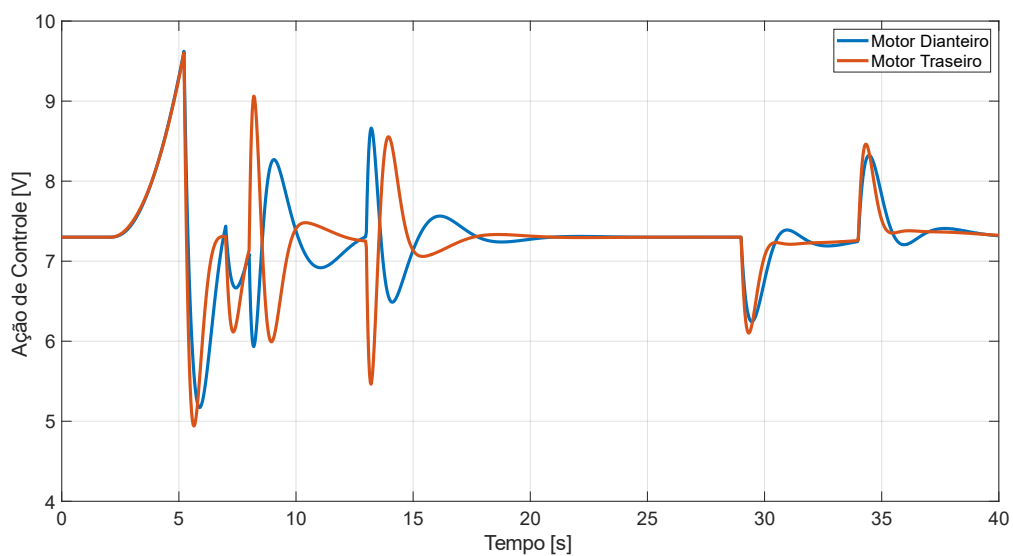
A Figura 8 seguir apresenta o gráfico dos três estado sistema, onde verifica-se seus comportamentos durante a simulação. Também foi apontado o momento da falha no motor traseiro em $t = 23 s$, apesar de não ser visível alterações significativas nas curvas na simulação. Apesar do ângulo de elevação inicial do helicóptero ser $-27,5^\circ$ quando está em repouso sobre a bancada e chegar à 0° quando se encontra paralelo ao eixo horizontal, não foi possível aplicar esses valores na simulação. Então o ângulo de elevação inicia-se em 0° e chega à $27,5^\circ$, representando o comportamento desse grau de liberdade do helicóptero. Na Figura 9 se apresenta o gráfico da curva do sinal de controle dos motores do helicóptero.

Figura 8 – Ângulos de elevação, arfagem e deslocamento do sistema na simulação.



Fonte: Próprio autor.

Figura 9 – Sinal de controle dos motores do Helicóptero.



Fonte: Próprio Autor.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Durante o desenvolvimento desse trabalho foram estudadas diversas ferramentas matemáticas, como representação de um sistema com espaço de estados, teoria das LMIs, critério de estabilidade de Lyapunov, sistemas lineares invariantes no tempo com incertezas, teoria do controle robusto, teoria da \mathcal{D} -estabilidade. Também foi necessário o estudo do Helicóptero de Bancada 3-DOF.

Com o uso dessas ferramentas foi possível projetar um controlador que assegurasse a estabilidade do sistema, o qual possui uma incerteza em uma das matrizes de entrada devido à queda de 30% de potência no motor traseiro. Apesar do sistema contar apenas com realimentação das posições, o controlador projetado apresenta resultados satisfatórios na simulação, vistos nas curvas de elevação, deslocamento e arfagem da Figura 8. Sendo assim, o sistema de realimentação de posições é aplicável ao Helicóptero de Bancada.

6.1 Perspectivas futuras

Como sugestão para futuros estudos sobre os tópicos desse trabalho, tem-se:

- O estudo do sistema utilizando a realimentação de velocidades, podendo comparar os dois métodos;
- A implementação desta teoria no módulo do Helicóptero de Bancada;
- Estudo do sistema com mais incertezas, aumentando o número de vértices do politopo.

REFERÊNCIAS

ESTEVEES, L. M.; CARDIM, R.; TEIXEIRA, M. C. M.; DE OLIVEIRA, D. R.; RIBEIRO, J. M. S.; ASSUNÇÃO, E.; SILVA, H. R. M. Implementations of Full State Feedback Robust Control Designs for Mechanical Systems Using Only Positions or Velocities Output Feedback. **IEEE Access**, vol. 10, pp. 23234-23247, 2022.

GAHINET, P.; NEMIROVSKII, A.; LAUB, A. J.; CHILALI, M. **LMI Control Toolbox for Use with Matlab**. 1. ed. Natick, MA, USA: MathWorks, 1995.

OGATA, K. **Engenharia de Controle Moderno**. 5. ed. São Paulo, SP: Pearson Prentice Hall, 2010.

BOYD, S.; GHAOUI, L. E.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. **Linear matrix inequalities in system and control theory**. University City Science Center, Philadelphia, Pennsylvania, USA: Society For Industrial And Applied Mathematics - SIAM, 1994.

CHILALI, M.; GAHINET, P. \mathcal{H}_∞ design with pole placement constraints: An LMI approach. **IEEE Transactions on Automatic Control**, Piscataway, v. 41, n. 3, p. 358-367, 1996.

SKOGESTAD, S.; POSTLETHWAITE, I. **Multivariable Feedback Control - Analysis and Design**. John Wiley & Sons, 2005.

ZHOU, K.; DOYLE, J. C. Essentials of robust control. New York: Prentice Hall, 1998
DOYLE, J. C.; GLOVER, K.; KHARGONEKAR, P.; FRANCIS, B. State-space solutions to standard \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ control problems. **IEEE Transaction Automatic Control**, Piscataway, v. 34, p. 831-847, 1989.

DE OLIVEIRA, D. R.; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; SOUZA, W. A. S.; MOREIRA, M. R.; SILVA, J. H. P. **Projeto de controle robusto \mathcal{H}_∞ chaveado: Implementação prática em um sistema de suspensão ativa**. In: Anais do XX

CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA, CBA, 20, 2014, Belo Horizonte. Anais [...]. Belo Horizonte, 2014. p. 2194-2201.

QUANSER. **Position Control 3-DOF Helicopter Reference Manual**. 2012.

ESTEVES, L. M. **Controle robusto \mathcal{H}^∞ com realimentação parcial dos estados aplicado a diferentes sistemas mecânicos**. p. 69, 2020. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) — Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira.

Anexos

Anexo A – Código de programação do projeto do controlador do Helicóptero de Bancada 3-DOF

```

% Helicoptero 3-DOF - Quanser
close all
clear all
clc

%Parametros
% Propeller force-thrust constant found experimentally
(N/V)
    Kf = 0.1188;
    % Mass of the helicopter body (kg)
    m_h = 1.15;
    % Mass of counter-weight (kg)
    m_w = 1.87;
    % Mass of front propeller assembly = motor + shield
+ propeller + body (kg)
    m_f = m_h / 2;
    % Mass of back propeller assembly = motor + shield +
propeller + body (kg)
    m_b = m_h / 2;
    % massa da peaaas do conjunto de massa ativa (Kg)
    m=0.154;
    % Distance between pitch pivot and each motor (m)
    Lh = 7.0 * 0.0254;
    % Distance between elevation pivot to helicopter
body (m)
    La = 26.0 * 0.0254;
    % Distance between elevation pivot to counter-weight
(m)
    Lw = 18.5 * 0.0254;
    % Gravitational Constant (m/s^2)
    g = 9.81;
    Je=(m_w*Lw^2)+(m_f*La^2)+(m_b*La^2);
    %Momento de Inercia de Deslocamento

Jt=(m_w*Lw^2)+(m_f*((La^2)+(Lh^2)))+(m_b*((La^2)+(Lh^2))
);
    %Je=0.91;
    %Jt=Je;

%Equa__es
A62=(2*m_f*La-
m_w*Lw)*g/(2*m_f*La^2+2*m_f*Lh^2+m_w*Lw^2);

```

```

B41=La*Kf/(m_w*Lw^2+2*m_f*La^2);
B51=1/2*Kf/m_f/Lh;
B42=B41;
B52=-B51;
H41 = -(m*g)/Je;

% ARTIGO - MANESCO, R. M.; SILVA, J. H. P.; MOREIRA, M.
R.; BUZACHERO, L. F. S.; SILVA, E. R. P. da;
% ASSUN_O, E.; TEIXEIRA, M. C. M.; GALV_O, R. K. H.
Estabilidade robusta Hoo de sistemas
% lineares: uma implementaçao em um helic3optero 3-DOF de
bancada. In: CBA 2012, 19. Anais. Campina
% Grande - PB, 2012.

A1=[0 0 0 1 0 0 0 0;0 0 0 0 1 0 0 0;0 0 0 0 0 1 0 0;0 0
0 0 0 0 0;0 0 0 0 0 0 0 0;0 A62 0 0 0 0 0 0;1 0 0 0 0
0 0 0;0 0 1 0 0 0 0 0];
A2 = A1;
B1=[0 0 0 B41 B51 0 0 0; 0 0 0 B42 B52 0 0 0]';
B2=[0 0 0 B41 B51 0 0 0; 0 0 0 B42*0.7 B52*0.7 0 0 0]';
% 70% de V_b
C1=[1 0 0 0 0 0 0 0;0 1 0 0 0 0 0 0;0 0 1 0 0 0 0 0];
D1 = [0 0; 0 0; 0 0];

A{1} = [A1 B1; 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0
0];
B{1} = [0 0 0 0 0 0 0 0 1 0; 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1]';

A{2} = [A1 B2; 0 0 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 0
0];
B{2} = B{1};

C{1}=[1 0 0 0 0 0 0 0 0;0 1 0 0 0 0 0 0;0 0 1 0 0
0 0 0 0];
C{2} = C{1};

H{1} = [0 0 0 H41 0 0 0 0 0]';
H{2} = H{1};

D{1}=[0 0; 0 0; 0 0];
D{2}=D{1};

G{1} = [0 0 0]';
G{2} =G{1};

r=1; % N_mero de Incertezas
N=2^r; % N_mero de v3rtices do politopo

```

```

% Parâmetros do Modelo
n = size(A{1},1); % Número de estados, que seria o
número de linhas da matriz A
m = size(B{1},2); % Número de entradas, que seria o
número de colunas da matriz B
p = size(C{1},1); % Número de Linhas
mm = size(H{1},2); % Número de colunas

% Programação LMIs
alpha = 1.2; %1.5
r = 1.5; % 2
theta = deg2rad(30);
mi = 533;

X = sdpvar(n,n);
M = sdpvar(m,n);

% Definição das Restrições
for i=1:N
    LMIs = [X>=0, ...
            [A{i}*X-B{i}*M+X*A{i}'-M'*B{i}'          H{i}
X*C{i}'-M'*D{i}'];
            H{i}'          -mi*eye(mm)
G{i}';
            C{i}*X-D{i}*M          G{i}
-eye(p)]<=0, ...
            ((A{i}*X+X*A{i}'-B{i}*M-
M'*B{i}'+2*alpha*X)<=0), ...
            [ -r*X          A{i}*X-B{i}*M;
X*A{i}'-M'*B{i}'          -r*X]<=0, ...
            [sin(theta)*(A{i}*X+X*A{i}'-B{i}*M-M'*B{i}')
cos(theta)*(A{i}*X-X*A{i}'-B{i}*M+M'*B{i}')];
            cos(theta)*(X*A{i}'-A{i}*X-M'*B{i}'+B{i}*M)
sin(theta)*(A{i}*X+X*A{i}'-B{i}*M-M'*B{i}')]<=0];
end

% Configuração do Solver
options = sdpsettings('verbose',0,'solver','sedumi'); %
Para não ficar aparecendo as coisas na tela

% Resolução
optimize(LMIs,[],options);

% Análise da solução
primal = check(LMIs);
if sum(primal<0) == 0
    disp('Solu_o Encontrada: Problema Factive!')

```

```

M = double(M);
X = double(X);
K = M*inv(X) %u (t) = Kint (t)
AutoW = eig(X)

else
    disp('Solução Não Encontrada: Problema não
Factive1')
end

disp('Autovalores em Malha fechada')
auto1 = eig(A{1}-B{1}*K)
auto2 = eig(A{2}-B{2}*K)

disp ('Norma do controlador=')
Norma=norm(K)

% Acho que vai ficar mais intuitivo se separar os ganhos
assim, pois ficou
% parecido com a ideia do artigo

K1 = K(:,1:3);
K2 = K(:,4:6);
Kint = K(:,7:8);
K3 = K(:,9:10);

x0 = [1 -0.1 -1 0 0 0 0 0];

sim('TesteVoo_meu'); % Simular no simulink

t=0:0.001:40;
figure(1)
plot(t,posicao1,'LineWidth', 3);
hold on
plot(t,posicao2,'r:','LineWidth', 3);
plot(t,posicao3,'k-.','LineWidth', 3);
grid on;
set(gca,'FontName', 'Arial','FontSize',18);
ylabel('Variação das Posições Angulares [Graus]');
xlabel('Tempo [s]');
legend('Elevação','Arfagem','Deslocamento','Location','n
orthwest');
figure(2)
plot(t,sinal_contr(:,1)+7.3,'LineWidth', 3);
hold on
plot(t,sinal_contr(:,2)+7.3,'LineWidth', 3);

```

```
grid on;
set(gca,'FontName','Arial','FontSize',18);
ylabel('Ação de Controle [V]');
xlabel('Tempo [s]');
legend('Motor Dianteiro','Motor
Traseiro','Location','northeast')

% save controlador K1 K2 Kint K3
```

Anexo B – Simulação do sistema Helicóptero de bancada 3-DOF da Quanser no Simulink do MatLab

