

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Campus de Rio Claro

**Bilhares Dependentes do Tempo:
Um Mecanismo para Suprimir
Aceleração de Fermi.**

Diego Fregolente Mendes de Oliveira
Orientador Prof. Dr. Edson Denis Leonel

Dissertação de Mestrado elaborada junto ao
Programa de Pós-Graduação em Física, Área de
Física Aplicada, para obtenção do título de Mestre em Física.

Rio Claro - SP

2009

“Dedico este trabalho a todos àqueles
que me ensinaram a pesquisar
e à meus pais Aládia e Benedito
por sempre acreditarem que eu seria capaz de descobrir.”

RESUMO

O problema de bilhar teve origem em 1927 quando G.D. Birkhoff considerou um sistema para descrever o movimento de uma partícula livre dentro de uma região fechada por uma fronteira com a qual sofre colisões. Ao atingir a fronteira a partícula é refletida e viaja com velocidade constante até a próxima colisão. Nesse trabalho consideramos um modelo bidimensional conhecido na literatura como Bilhar Elíptico-ovóide. O raio da fronteira em coordenadas polares é dado por $R(\theta, p, e, \epsilon) = (1 - e^2) / [1 + e \cos(\theta)] + \epsilon \cos(p\theta)$. Este modelo comporta-se como uma combinação dos bilhares elíptico e ovóide. Se considerarmos o caso em que a excentricidade $e = 0$ recuperamos os resultados para o bilhar ovóide, por outro lado, se a deformação na fronteira for nula, $\epsilon = 0$, os resultados para o bilhar elíptico são recuperados. Tal modelo consiste em considerar o movimento de uma partícula clássica de massa m movendo-se livremente no interior de uma região fechada. Ao colidir com a fronteira a trajetória da partícula muda de direção sem sofrer perdas de energia. Encontramos as expressões que descrevem a dinâmica do modelo nas variáveis posição angular e ângulo que a trajetória faz com a reta tangente à curva no ponto de colisão e discutimos nossos resultados numéricos. Observamos que o espaço de fases é do tipo misto, contendo ilhas do tipo Kolmogorov-Arnold-Moser (KAM) geralmente envolvidas por um mar de caos, caracterizado por um expoente de Lyapunov positivo, e curvas invariantes do tipo *spanning* separando diferentes regiões do espaço de fases. Entretanto, à medida que os parâmetros de controle são variados, a forma da fronteira se altera, podendo ocorrer que algumas regiões da fronteira passam a ter curvatura negativa. Uma implicação imediata deste comportamento é a destruição das curvas invariantes *spanning* no espaço de fases. Encontramos, analiticamente, a expressão para o expoente crítico ϵ_c onde as curvas invariantes são destruídas. Mostramos que o expoente de Lyapunov cresce à medida que o parâmetro de controle ϵ aumenta, atinge um valor máximo então sofre uma ligeira queda.

Após estudarmos a versão estática do modelo, introduzimos dependência temporal na fronteira. O problema é descrito usando um mapeamento de quatro dimensões nas variáveis velocidade da partícula; o instante imediatamente após a colisão com a fronteira em movimento; o ângulo que a trajetória da partícula faz com a reta tangente à fronteira

na posição da colisão; e a posição angular da partícula ao colidir com a fronteira. Nosso principal objetivo é descrever e compreender o comportamento da velocidade média da partícula (e conseqüentemente, a sua energia) em função do número de colisões com a fronteira. Resultados recentes para o bilhar ovóide dependente do tempo mostram que para o caso de dependência temporal do tipo *breathing* a partícula não apresenta crescimento ilimitado da energia. Como mostramos em nosso trabalho, tanto para a perturbação do tipo *breathing* quanto não *breathing* o fenômeno conhecido como aceleração de Fermi pode ser observado. Entretanto, a inclinação do crescimento é consideravelmente menor quando comparado ao caso não *breathing*. Nossos resultados reforçam a conjectura Loskutov-Ryabov-Akinshin (LRA). Discutimos também algumas propriedades de escalas para as velocidades médias em função do número de colisões com a fronteira para diferentes casos.

Após confirmarmos a existência do mecanismo de Aceleração Fermi tanto para o caso *breathing* quanto para o caso não *breathing*, introduzimos dissipação no modelo via colisões inelásticas. Observamos que a dissipação provoca uma drástica mudança no comportamento do sistema, em particular da velocidade média. Observamos que, para tempos curtos, a velocidade média, bem como a sua energia cresce de acordo com uma lei potência e após um *crossover* elas tendem a um regime de saturação para valores de tempo suficientemente longos. Devemos ressaltar que diferentes valores de dissipação geram comportamentos diferentes. Tal dinâmica pode ser descrita utilizando uma abordagem de escala. Observamos também que dependendo da intensidade da dissipação é possível observar diferentes comportamentos assintóticos incluindo transientes, ponto fixo atrativo, atrator caótico, e até mesmo eventos de crise de fronteira a medida que os coeficientes de amortecimento são variados.

ABSTRACT

The interest in understanding the dynamics of billiard problems becomes in early 1927 when Birkhoff introduced a system to describe the motion of a free particle inside a closed region with which the particle suffers elastic collisions. Inside the billiard, a point particle of mass m moves freely along a straight line until it hits the boundary. After the collision, it is assumed that the particle is specularly reflected. In our work we propose a special geometry for the boundary of a classical billiard, which we call as elliptical-oval boundary. The radius of the boundary in polar coordinates is given by $R(\theta, p, e, \epsilon) = (1 - e^2)/[1 + e \cos(\theta)] + \epsilon \cos(p\theta)$. It is important to say that the shape of the boundary is controlled by three relevant control parameters, namely p =integer number, ϵ = deformation of the boundary and e is the eccentricity. We obtain and discuss some numerical results considering different possible combinations of the control parameters. In our approach, we obtained a map that describes the particle's dynamics and show that there are critical values for the parameter ϵ . We show that the phase space has different structures when $\epsilon > \epsilon_c$ and $\epsilon < \epsilon_c$. Finally, we obtained the positive Lyapunov Exponent reinforcing that the model has a chaotic behaviour. After studying the static version, we revisit the problem of a classical particle bouncing elastically inside a periodically time varying Oval billiard. The problem is described using a four dimensional mapping for the variables velocity of the particle; time immediately after a collision with the moving boundary; the angle that the trajectory of the particle does with the tangent at the position of the hit; and the angular position of the particle along the boundary. Our main goal is to understand and describe the behaviour of the particle's average velocity (and hence its energy) as a function of the number of collisions with the boundary. It was recently shown for a time dependent oval billiard that, in certain cases under the breathing perturbation, the particle does not exhibit unlimited energy growth. As we shall show in our work, the breathing geometry can indeed lead the particle to experience Fermi acceleration. However, the slope of growth is rather smaller as compared to the non breathing case. The small growing exponent for the average velocity was the main reason to conclude that Fermi acceleration was not observed in the breathing case. Our results reinforce the Loskutov-Ryabov-Akinshin (LRA) conjecture. Scaling Properties are

also considered.

After confirm the existence the mechanism of Fermi acceleration we introduced inelastic collision into the model. We observe that dissipation causes a drastic consequence on the velocity's behaviour. We observed that for short times, the deviation of the average velocity as well as its energy grows according to a power law and suddenly it bends towards a regime of saturation for long enough values of time. It must be emphasized that different values of dissipation generate different behaviours, such kind of behaviours can be usually described using scaling approach. We observed that depending on what kind of dissipation we introduce one can observe different asymptotic behaviors including transients, attracting fixed points and locking, chaotic attractors and even crisis events as the damping coefficients are varied.

AGRADECIMENTOS

Ao amigo e orientador Professor Edson Denis Leonel, meus mais sinceros agradecimentos pela amizade, pelo incentivo e entusiasmo constantes.

Ao Professor Makoto Yoshida, coordenador da pós-graduação, que sempre atendeu prontamente aos meus pedidos.

Ao Professor Alexander Loskutov pelas valiosas discussões.

Aos Professores Mário Roberto da Silva e Roberto Venegeroles, cujos comentários e sugestões contribuíram para melhoria deste trabalho.

Aos companheiros de laboratório obrigado pelos momentos de discussão e de descontração que tivemos juntos.

Ao Departamento de Estatística, Matemática Aplicada e Computação - DEMAC, por disponibilizar o laboratório e acesso computacional.

A Fundação de Amparo à Pesquisa do estado de São Paulo - FAPESP e à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES pelo auxílio financeiro.

Agradeço principalmente aos meus pais, Aládia e Benedito, que mesmo distantes, sempre me apoiaram e sem eles nada disso poderia ter sido feito.

Conteúdo

1	INTRODUÇÃO.	9
2	O Bilhar Elíptico-Ovóide Estático.	13
2.1	Resumo.	13
2.2	O Modelo e o mapa.	13
2.2.1	Resultados Numéricos.	15
2.2.2	Cálculo do Determinante da Matriz Jacobiana.	19
2.2.3	Expoentes de Lyapunov.	21
3	O Bilhar Ovóide Dependente do Tempo.	29
3.1	Resumo.	29
3.2	O bilhar Ovóide dependente do tempo e o mapa.	29
3.2.1	Aceleração de Fermi no Bilhar Ovóide com Geometria do tipo <i>Breathing</i>	35
3.2.2	Propriedades de Escala para o bilhar Ovóide com geometria do tipo <i>breathing</i> e <i>não breathing</i>	38
4	Dissipação: um mecanismo para suprimir aceleração de Fermi.	48
4.1	Resumo.	48
4.2	O Bilhar Ovóide Dependente do Tempo: choques inelásticos da partícula com a fronteira.	48
4.2.1	Propriedades de Escala: Regime de baixa dissipação.	51
4.2.2	Crises de Fronteira: Regime de alta dissipação.	55
5	CONCLUSÕES.	58
6	APÊNDICE - A - Mudança de Concavidade.	60
7	APÊNDICE - B - Crise de Fronteira no modelo Fermi-Ulam.	62

Capítulo 1

INTRODUÇÃO.

Os bilhares são exemplos de sistemas físicos cujo estudo de sua dinâmica consiste basicamente em considerar o movimento de uma partícula confinada em uma região plana limitada por uma fronteira com a qual a partícula sofre colisões [1]. Ao atingir a fronteira a partícula é refletida specularmente e viaja com velocidade constante até o próximo choque. Matematicamente, um bilhar é definido como uma região conectada $Q \subset R^D$, com fronteira $\partial Q \subset R^{D-1}$ a qual separa Q de suas componentes. Se o conjunto ∂Q é constante no tempo, o sistema não troca energia/velocidade com a partícula, neste caso dizemos que o sistema possui fronteira fixa [2-19]. Por outro lado, se $\partial Q = \partial Q(t)$ dizemos que o modelo apresenta fronteira dependente do tempo [20-47]. Bilhares com fronteiras dependente do tempo tem recebido grande atenção nas últimas décadas com o objetivo de tentar compreender um fenômeno introduzido por Enrico Fermi em 1949, que ficou conhecido como mecanismo de crescimento ilimitado de energia ou aceleração de Fermi [48].

Sabemos que a estrutura do espaço de fases está altamente relacionada com a geometria da fronteira. Dá-se o nome de espaço de fases ao conjunto de todos os estados acessíveis. Ao evoluir a partir de um estado inicial, o sistema passa por pontos do espaço de fases; ao conjunto assim percorrido denomina-se de órbita. Assim, o espaço de fases é também o conjunto de todas as órbitas possíveis. Dependendo da forma da fronteira a partícula pode gerar espaços de fases com diferentes estruturas que estão divididas em três classes, são elas: (i) integrável, (ii) ergódico e (iii) mista. Um exemplo típico do caso (i) é o bilhar circular [46], cujo integrabilidade vem da conservação do momento angular. Dois exemplos do caso (ii) são o bilhar de Sinai [2] e o bilhar de estádio de Bunimovich [3]. Para o caso (iii) existe um número representativo de sistemas que apresentam uma característica mista para o espaço de fases [49-53], cujos parâmetros de controle tem diferentes significados físicos. Para sistemas com espaço de fases do tipo misto observamos um conjunto ilhas do

tipo Kolmogorov-Arnold-Moser (KAM) geralmente envoltas por um mar de caos e curvas invariantes do tipo *spanning* separando diferentes regiões do espaço de fases [54-58].

Neste trabalho, estudamos um modelo de bilhar clássico nas seguintes versões: (i) estática; (ii) dependente do tempo e (iii) dependente do tempo com dissipação. Na primeira parte propusemos uma forma geométrica especial para a fronteira, a qual chamamos de bilhar elíptico-ovóide. Nosso principal objetivo é descrever e compreender algumas propriedades dinâmicas desse sistema. É importante dizer que a forma da fronteira é controlada por três parâmetros de controle relevantes. Variando estes parâmetros, podemos recuperar os resultados do bilhar circular, bilhar elíptico, bilhar ovóide. Obtemos resultados considerando a variação simultânea de todos os parâmetros de controle, tendo assim um bilhar com a forma elíptico-ovóide. Discutimos todos os detalhes necessários para a construção do mapeamento bi-dimensional que descreve a dinâmica do modelo. Inicialmente a forma da fronteira é dependente de três parâmetros de controle. Seu raio em coordenadas polares é dada por $R(\theta, p, e, \epsilon) = (1 - e^2)/[1 + e \cos(\theta)] + \epsilon \cos(p\theta)$, onde p é um número inteiro, e e ϵ são parâmetros que controlam a deformação do círculo [53, 54]. Estudamos a dinâmica de uma partícula clássica de massa m que está movendo-se livremente no interior de $R(\theta, p, e, \epsilon)$ sem sofrer influência de qualquer campo externo. Quando a partícula atinge a fronteira ela muda de direção sem sofrer nenhuma perda de energia. A estrutura do espaço de fases é do tipo mista, no sentido que, dependendo tanto da combinação dos parâmetros de controle quanto das condições iniciais, ilhas KAM normalmente rodeadas por um mar de caos, limitado por um conjunto de curvas invariantes do tipo *spanning*, podem ser observadas coexistindo. Encontramos um valor de parâmetro crítico onde as curvas invariante do tipo *spanning* são destruídas. Observamos que a destruição das curvas invariantes está diretamente relacionada a curvatura da fronteira, $\kappa(\theta)$. Sabemos que $\kappa(\theta)$ está dividida em três classes, sendo elas (i) neutra, (ii) dispersing e (iii) focusing. Geralmente são denotadas respectivamente por ∂Q^0 [$\kappa(\theta) = 0$], ∂Q^+ [$\kappa(\theta) > 0$] e ∂Q^- [$\kappa(\theta) < 0$]. Encontramos analiticamente a expressão que relaciona os parâmetros onde a curvatura da fronteira passa de focusing para neutra e então regiões de curvatura negativa ou dispersing. A destruição das curvas invariantes acontece justamente porque a fronteira possui regiões de curvatura negativa.

Após construirmos o mapeamento, estudamos numericamente os casos: (a) $e = \epsilon = 0$, onde recuperamos o bilhar circular onde apenas regiões regulares no espaço de fases são observadas; (b) consideramos também a situação onde $\epsilon = 0$ e $e \neq 0$, neste caso recuperamos os resultados para o bilhar elíptico. Por outro lado, (c) quando $e = 0$ $\epsilon \neq 0$, temos o bilhar puramente ovóide. Finalmente, (d) o caso onde tanto $e \neq 0$ quanto $\epsilon \neq 0$. Para os casos (c) e (d) mostramos que o sistema apresenta uma componente caótica caracterizado por expoente de Lyapunov positivo. Obtivemos também o comportamento

do expoente de Lyapunov em função do parâmetro ϵ .

Na segunda parte do nosso trabalho, introduzimos uma dependência temporal na fronteira. Discutimos todos os detalhes necessários para a construção do mapa. Quando se introduz este tipo de perturbação, naturalmente duas novas variáveis dinâmicas aparecem, sendo elas, velocidade da partícula e tempo. Obviamente, temos também dois novos parâmetros de controle. Dependendo da combinação de tais parâmetros, o sistema pode assumir duas possíveis configurações, são elas: (a) *breathing* e (b) *não breathing* [29, 47]. A perturbação temporal do tipo *breathing* corresponde ao caso onde o raio da fronteira se altera a medida que o tempo passa, entretanto a forma da curva é preservada. Por outro lado, o caso *não breathing* a forma da curva não é preservada, uma vez que existe uma perturbação tanto no círculo quanto no ovóide. Nosso principal objetivo nesta parte do trabalho é descrever o comportamento da velocidade média da partícula em função do número de colisões com a fronteira. Mostramos que quando a dependência temporal da fronteira é do tipo *breathing*, isto é, a forma geométrica da fronteira não se modifica, o fenômeno conhecido como aceleração de Fermi é observado. Entretanto a inclinação do crescimento da velocidade para o caso *breathing* é significativamente menor quando comparado ao caso *não breathing*. Nossos resultados servem para reforçar a conjectura Loskutov-Ryabov-Akinshin (LRA) [24] que diz: “*Dinâmica caótica em bilhares com fronteira fixa é condição suficiente para aceleração de Fermi quando uma perturbação na fronteira é introduzida*”. Descrevemos o comportamento da velocidade média usando formalismo de escala para diferentes casos.

A última parte do nosso trabalho é dedicada à versão dissipativa do modelo. Existem diferentes maneiras de se introduzir dissipação, particularmente, consideraremos apenas colisões inelásticas com a fronteira. Assim, assumiremos que a partícula experimenta uma perda fracional de energia após colidir com a fronteira em movimento. Introduziremos um coeficiente de restituição para a componente normal da velocidade $\gamma \in [0, 1]$ enquanto que para a componente tangencial consideramos $\beta \in [0, 1]$. No limite quando $\gamma = \beta = 0$, que corresponde ao caso completamente inelástico, uma única colisão com a fronteira é suficiente para encerrar toda a dinâmica da partícula. Por outro lado, quando $\gamma = \beta = 1$, o que corresponde a uma colisão completamente elástica, recuperam-se todos os resultados do caso conservativo. Como mostramos em [47] para o caso conservativo, a velocidade média da partícula, bem como a sua energia crescem indefinidamente. No entanto, as curvas de crescimento da velocidade para o caso *não breathing* crescem mais rápidas do que quando comparadas ao caso *breathing*. Mostramos assim que nossos resultados estão de acordo com a conjectura Loskutov-Ryabov-Akinshin (LRA) [24]. Para o caso dissipativo vamos tentar responder a uma questão muito importante em sistemas onde aceleração de Fermi esteve presente quando considerado o caso conservativo. Esta

questão é: *Dissipação é uma condição suficiente para suprimir o ganho ilimitado de energia em sistemas bi-dimensionais?* Foi discutido por Leonel [59] alguns resultados para o modelo unidimensional Fermi-Ulam considerando a versão simplificada. Sabemos que esse sistema, na sua formulação original, a partícula não apresenta ganho ilimitado de energia. No entanto, se introduzirmos uma fase aleatória na parede móvel, na média a partícula ganha mais energia do que perde. Isso significa que aceleração de Fermi pode ser produzida. Por outro lado, quando é introduzido um coeficiente de amortecimento, a velocidade média da partícula cresce de acordo com uma lei de potência para tempos curtos, passa por um crossover até chegar em um regime de saturação. Resultados similares foram observados para o modelo bouncer [37, 60, 61]. Pela primeira vez estudamos um sistema bidimensional descrito por quatro equações dinâmicas próximo da transição conservativo para dissipativo, e descrevemos o comportamento da velocidade média usando argumentos escala [62, 63, 64].

Observamos também que a introdução do coeficiente de restituição causa uma mudança drástica no modelo no sentido de que o mar de caos que pode ser observado no modelo conservativo é substituído por um atrator caótico. A segunda e talvez mais drástica mudança na dinâmica é a destruição abrupta do atrator caótico. Mostramos que tal destruição é causada por um evento de crise de fronteira [65, 66, 67].

Capítulo 2

O Bilhar Elíptico-Ovóide Estático.

2.1 Resumo.

Neste capítulo, descrevemos todos os detalhes necessários para a construção do mapa que descreve a dinâmica do modelo. Após obtermos o mapa, mostramos que o espaço de fases apresenta uma estrutura mista. Mostramos também que a mudança da curvatura da fronteira provoca uma drástica consequência na estrutura do espaço de fases, a destruição das curvas invariantes spanning.

2.2 O Modelo e o mapa.

O modelo consiste basicamente em considerar a dinâmica de uma partícula clássica de massa m confinada ao interior de uma região plana sofrendo colisões elásticas com a fronteira Ψ que a delimita. Ao colidir com a fronteira, a partícula sofre uma reflexão de modo que sua velocidade varia de direção e sentido mas preserva o módulo. A forma da fronteira em coordenadas polares para o bilhar elíptico-ovóide é dada por

$$R(\theta, p, e, \epsilon) = \left[\frac{1 - e^2}{1 + e \cos(\theta)} \right] + \epsilon \cos(p\theta) . \quad (2.1)$$

O parâmetro de controle $e \in [0, 1)$ controla a deformação do círculo, assim recuperando as formas circular e elíptica. O parâmetro $\epsilon \in [0, 1)$ também controla a deformação do círculo recuperando a forma circular ou elíptica quando $\epsilon = 0$ e a forma oval quando $\epsilon \neq 0$. p é um número inteiro e $\theta \in [0, 2\pi)$ é um ângulo medido no sentido horário com respeito ao eixo horizontal positivo. Para o caso onde $e = \epsilon = 0$, recuperamos a fronteira circular, se $e \neq 0$ e $\epsilon = 0$ temos a fronteira elíptica. Para o caso $e = 0$ e $\epsilon \neq 0$, obtemos a forma

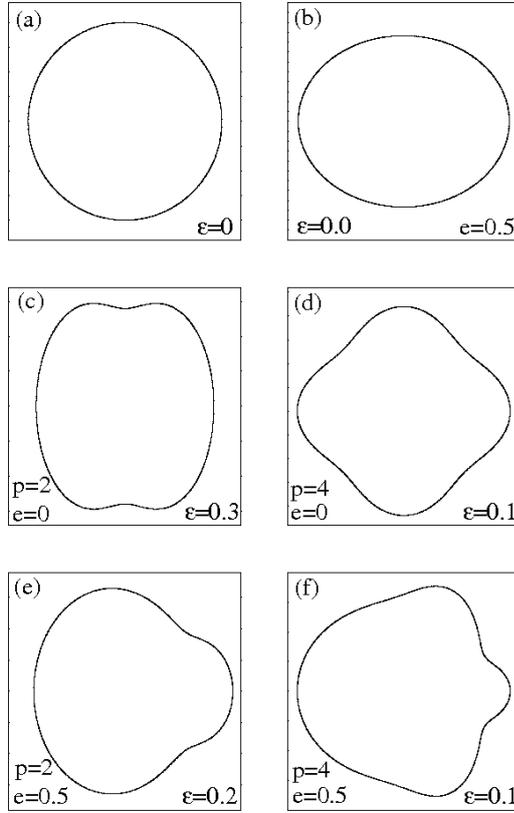


Figura 2.1: Ilustração da geometria da fronteira para diferentes valores de e , ϵ e p .

ovóide e finalmente quando $e \neq 0$ e $\epsilon \neq 0$ obtemos a fronteira elíptico-ovóide. Na Fig. 2.1 apresentamos diversas formas de fronteiras considerando diferentes valores para e , ϵ e p .

Assim como é comum na literatura, a dinâmica do modelo é descrita em termos de um mapa bidimensional não linear nas variáveis θ_n e α_n , que correspondem, respectivamente, a posição angular e ao ângulo que a trajetória faz com a reta tangente à fronteira no ponto θ_n . Conhecidos os valores de (θ_n, α_n) obtemos o novo par $(\theta_{n+1}, \alpha_{n+1})$. Portanto, temos que a dinâmica é dada por um mapa T tal que $(\theta_n, \alpha_n) = T(\theta_{n+1}, \alpha_{n+1})$, onde o índice n representa a n -ésima colisão com a fronteira. Através das coordenadas polares, podemos encontrar os valores das componentes cartesianas de $X(\theta_n)$ e $Y(\theta_n)$ pelas relações

$$X(\theta_n) = \left[\frac{1 - e^2}{1 + e \cos(\theta_n)} + \epsilon \cos(p\theta_n) \right] \cos(\theta_n), \quad (2.2)$$

$$Y(\theta_n) = \left[\frac{1 - e^2}{1 + e \cos(\theta_n)} + \epsilon \cos(p\theta_n) \right] \sin(\theta_n). \quad (2.3)$$

Conhecida a posição angular inicial, θ_n , o ângulo que a reta tangente à fronteira no

ponto de colisão, de coordenadas $X(\theta_n)$, $Y(\theta_n)$ faz com a horizontal é dado por

$$\phi_n = \arctan \left[\frac{Y'(\theta_n)}{X'(\theta_n)} \right], \quad (2.4)$$

onde as expressões para ambos $Y'(\theta_n)$ e $X'(\theta_n)$ são dadas por

$$\frac{dX(\theta_n)}{d\theta_n} = X'(\theta_n) = \frac{dR(\theta_n)}{d\theta_n} \cos(\theta_n) - R(\theta_n) \sin(\theta_n), \quad (2.5)$$

$$\frac{dY(\theta_n)}{d\theta_n} = Y'(\theta_n) = \frac{dR(\theta_n)}{d\theta_n} \sin(\theta_n) + R(\theta_n) \cos(\theta_n). \quad (2.6)$$

O termo $dR(\theta_n)/d\theta_n$ é dado por

$$\frac{dR(\theta_n)}{d\theta_n} = \frac{(1 - e^2)e \sin(\theta_n)}{[1 + e \cos(\theta_n)]^2} - \epsilon p \sin(p\theta_n). \quad (2.7)$$

Uma vez que o movimento da partícula está livre de influências de qualquer campo externo, seu movimento entre impactos com a fronteira Ψ será retilíneo de modo que a equação da trajetória é dada por

$$Y(\theta_{n+1}) - Y(\theta_n) = \tan(\alpha_n + \phi_n)[X(\theta_{n+1}) - X(\theta_n)], \quad (2.8)$$

onde a inclinação da trajetória em relação ao semi-eixo positivo de X é dada por $\tan(\alpha_n + \phi_n)$. $X(\theta_{n+1})$ e $Y(\theta_{n+1})$ são as coordenadas cartesianas do novo ponto de colisão parametrizado pelo ângulo polar θ_{n+1} que é obtido numericamente como solução da Eq. (2.8). Conhecido θ_{n+1} , podemos encontrar ϕ_{n+1} a partir da Eq. (2.4) e o ângulo que a trajetória faz com a tangente no ponto de colisão é dado por

$$\alpha_{n+1} = \phi_{n+1} - (\alpha_n + \phi_n). \quad (2.9)$$

Podemos ver na Fig. 2.2 a orientação dos ângulos para cada colisão. A partir dessas equações, o mapeamento que descreve a dinâmica do modelo pode ser escrito como

$$T : \begin{cases} F(\theta_{n+1}) = R(\theta_{n+1}) \sin(\theta_{n+1}) - Y(\theta_n) - \tan(\alpha_n + \phi_n)[R(\theta_{n+1}) \cos(\theta_{n+1}) - X(\theta_n)], \\ \alpha_{n+1} = \phi_{n+1} - (\alpha_n + \phi_n), \end{cases} \quad (2.10)$$

onde θ_{n+1} é obtido numericamente como solução de $F(\theta_{n+1}) = 0$. Os termos auxiliares utilizados nas equações acima são dados por $R(\theta_{n+1}) = (1 - e^2)/[1 + e \cos(\theta_{n+1})] + \epsilon \cos(p\theta_{n+1})$ e $\phi_{n+1} = \arctan[Y'(\theta_{n+1})/X'(\theta_{n+1})]$.

2.2.1 Resultados Numéricos.

Para ilustrar o comportamento do espaço de fases para algumas das possíveis combinações dos parâmetros de controle, apresentamos na Fig. 2.3 o espaço de fases gerado pela

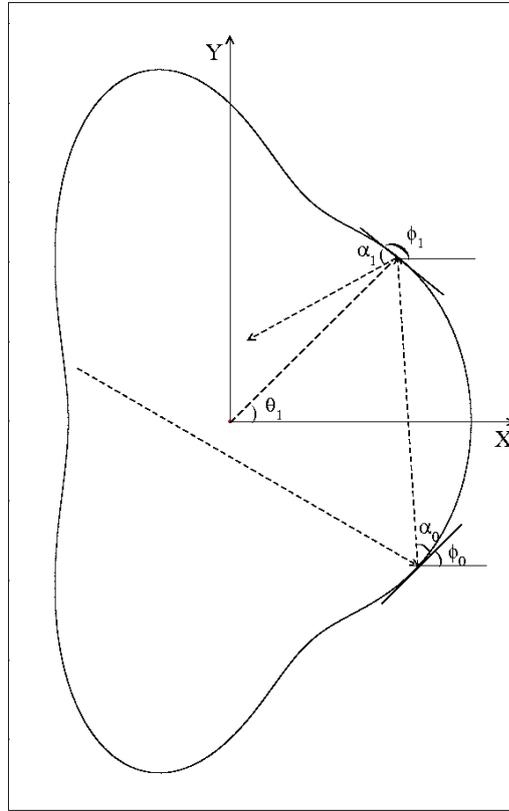


Figura 2.2: *Ilustração dos ângulos em cada colisão com a fronteira.*

iteração de Eq. (2.10) para: (a) $e = \epsilon = 0$ e (b) $e = 0.5$ e $\epsilon = 0$. Para o caso (a) podemos observar um comportamento já conhecido para o bilhar circular [19, 46] no espaço de fases que são linhas retas (comportamento quasi-periódico) e um conjunto finito de pontos. Por outro lado, em (b) vemos duas grandes ilhas limitadas por uma separatriz e um conjunto de curvas invariantes do tipo spanning, recuperando os resultados para o espaço de fases para o bilhar elíptico [20]. Na Fig. 2.3 (c,d) podemos observar dois diferentes tipos de comportamento no espaço de fases separados por uma separatriz, isto é, rotores e libradores (geralmente encontrados em livros textos como rotators e librators). Libradores são trajetórias que estão confinadas entre os dois focos da elipse e no espaço de fases estão confinados na região interior à separatriz. Por outro lado, rotores são trajetórias próximas à fronteira e percorrem “todos” os valores de θ . No espaço de fases estes tipos de órbitas aparecem fora da separatriz.

Vamos considerar agora o caso onde $e = 0$ e $\epsilon \neq 0$. A Fig. 2.4 mostra o espaço de fases para o bilhar ovóide estático, onde os parâmetros de controle utilizados foram: (a)

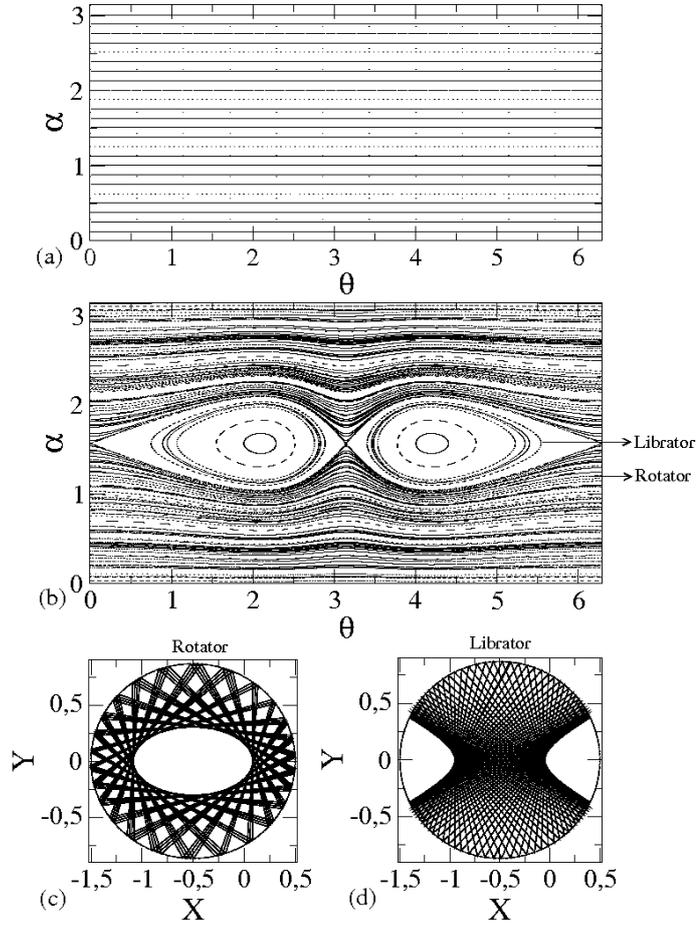


Figura 2.3: Espaço de fases para o bilhar Elíptico-ovóide. Os parâmetros de controle utilizados foram: (a) $e = \epsilon = 0$, (b) $e = 0.5$ e $\epsilon = 0$, (c) uma órbita rotator e (d) uma órbita libration.

$\epsilon = 0.1$ e $p = 2$; (b) $\epsilon = 0.05$ e $p = 3$. Para esses parâmetros de controle pode-se observar, simultaneamente, um conjunto de ilhas do tipo KAM envoltas por um mar de caos que, por sua vez, é limitado por duas curvas invariantes do tipo *spanning*. Se fizermos pequenos incrementos no valor do parâmetro ϵ de modo que seja ligeiramente superior a

$$\epsilon_c = \frac{1}{1 + p^2}, \quad p \geq 1. \quad (2.11)$$

todas as curvas invariantes *spanning* são destruídas. A explicação para tal fenômeno está relacionada a forma da fronteira. Como podemos observar na Fig. 2.1 à medida que o parâmetro de controle ϵ varia, a geometria da fronteira Ψ se altera. Assim uma região que era côncava, ao incrementarmos o valor de ϵ , que corresponde a aumentar a deformação da fronteira, ela passa a ter regiões convexas (regiões de curvatura negativa). Se considerarmos $\epsilon < \epsilon_c$ a fronteira é estritamente côncava, entretanto, se $\epsilon > \epsilon_c$ podemos observar

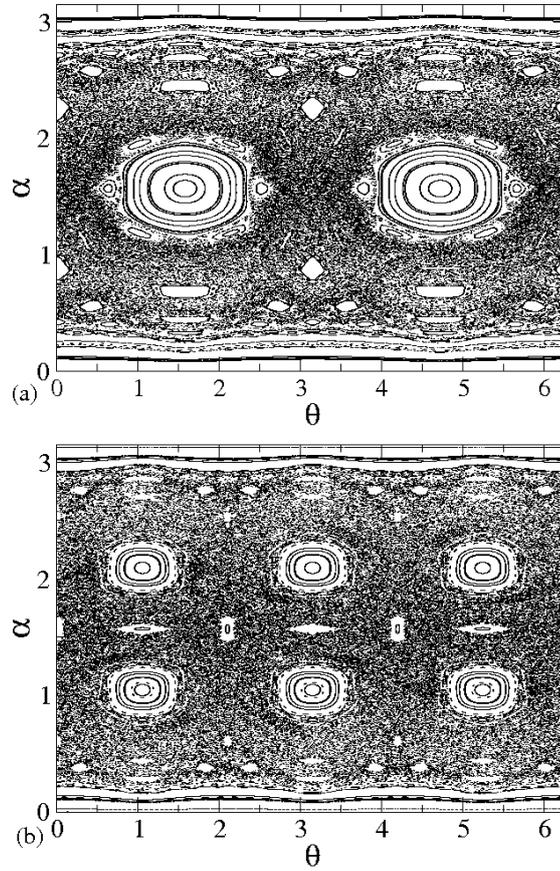


Figura 2.4: Espaço de fases para o bilhar ovóide estático. Os parâmetros de controle utilizados foram $e = 0$ e: (a) $\epsilon = 0.1$ e $p = 2$; (b) $\epsilon = 0.05$ e $p = 3$.

estruturas com curvatura negativa (para maiores detalhes veja Apêndice-A). Para ilustrar a ausência das curvas invariantes do tipo spanning no espaço de fases, apresentamos na Fig. 2.5 o espaço de fases para os seguintes parâmetros de controle: $e = 0$ e (a) $\epsilon = 0.21$ e $p = 2$; (b) $\epsilon = 0.11$ e $p = 3$. Como podemos observar para valores de ϵ ligeiramente maiores que ϵ_c o espaço de fases já não apresenta mais o conjunto de curvas invariantes spanning antes observadas para $\epsilon < \epsilon_c$.

Vamos agora considerar o caso do bilhar Elíptico-ovóide. Assumiremos que ambos $e \neq 0$ e $\epsilon \neq 0$. Na Fig. 2.6 (a) apresentamos a estrutura do espaço de fases para diferentes valores de ϵ e assumindo fixos os valores de e e p . Como podemos observar o sistema apresenta uma rica estrutura no espaço de fases, isto é, regiões de periodicidade, curvas invariantes e ilhas KAM, coexistindo com regiões de caos. Novamente se incrementarmos o valor do parâmetro ϵ de modo que $\epsilon > \epsilon_c$ a fronteira apresentará regiões de curvatura

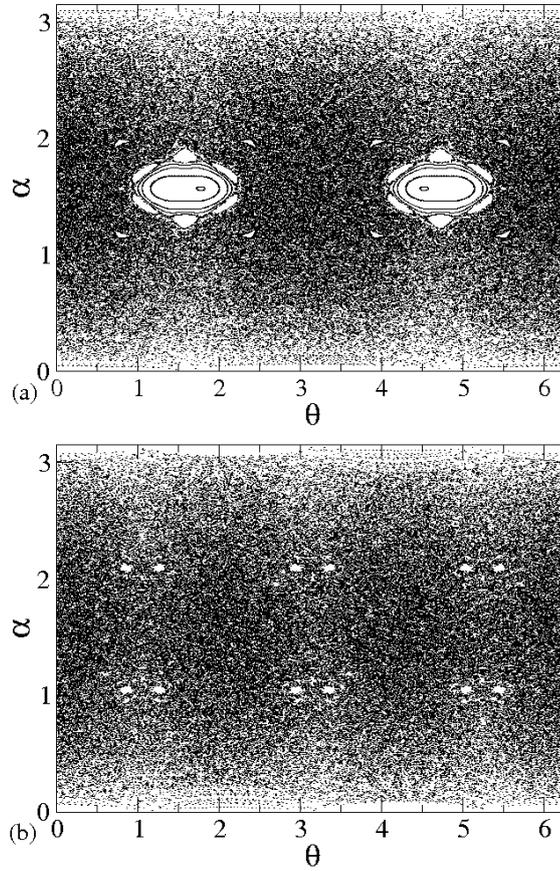


Figura 2.5: Espaço de fases para o bilhar ovóide. Os parâmetros de controle utilizados foram $e = 0$ e: (a) $\epsilon = 0.21$ e $p = 2$; (b) $\epsilon = 0.11$ e $p = 3$. Como podemos observar, em (a) e (b) as curvas invariantes do tipo *spanning* foram destruídas.

negativa. Neste caso, a mudança da concavidade da fronteira é dada por

$$\epsilon_c = \frac{1 - e}{(1 + e)(1 + p^2)}, \quad p > 1. \quad (2.12)$$

Como consequência da mudança de curvatura, as curvas invariantes são destuídas, como mostra Fig. 2.6 (b). Observe que para o caso $e = 0$ recuperamos o valor de ϵ_c para o bilhar ovóide.

2.2.2 Cálculo do Determinante da Matriz Jacobiana.

A partir do mapa T , Eq. (2.10), podemos determinar a matriz Jacobiana, J , para o mapeamento definido pelas equações de $(\theta_{n+1}, \alpha_{n+1})$. A matriz J é escrita na forma

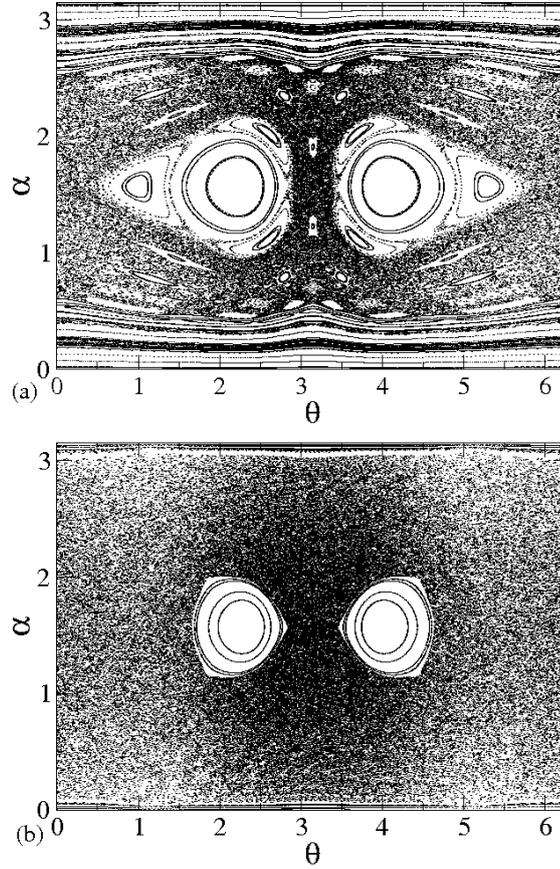


Figura 2.6: Espaço de fases para o bilhar Elíptico-ovóide. Os parâmetros de controle utilizados em (a) e (b) foram $p = 2$, $e = 0.6$: (a) $\epsilon = 0.01$; (b) $\epsilon = 0.06$. O valor crítico para ϵ para essa combinação de parâmetros é $\epsilon_c = 0.05$. Como podemos observar, em (b), após a mudança da curvatura, $\epsilon > 0.05$ as curvas invariantes do tipo spanning foram destruídas.

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial \theta_n} & \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial \alpha_n} \\ \frac{\partial \alpha_{n+1}}{\partial \theta_n} & \frac{\partial \alpha_{n+1}}{\partial \alpha_n} \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

Onde os elementos da matriz Jacobiana são dados por:

$$\frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial \theta_n} = \frac{[1 + \tan^2(\phi_n + \alpha_n)] \frac{\partial \phi_n}{\partial \theta_n} \Delta X + Y'(\theta_n) - \tan(\phi_n + \alpha_n) X'(\theta_n)}{\Upsilon}, \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial \alpha_n} = \frac{[R(\theta_{n+1}) \cos(\theta_{n+1}) - X(\theta_n)][1 + \tan^2(\phi_n + \alpha_n)]}{\Upsilon}, \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial \alpha_{n+1}}{\partial \theta_n} = \frac{\partial \phi_{n+1}}{\partial \theta_{n+1}} \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial \theta_n} - \frac{\partial \phi_n}{\partial \theta_n}, \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial \alpha_{n+1}}{\partial \alpha_n} = \frac{\partial \alpha_{n+1}}{\partial \theta_{n+1}} \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial \alpha_n} - 1, \quad (2.17)$$

com os termos auxiliares dados por:

$$\Delta X = R(\theta_{n+1}) \cos(\theta_{n+1}) - X(\theta_n), \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} \Upsilon &= \frac{\partial R(\theta_{n+1})}{\partial \theta_{n+1}} [\sin(\theta_{n+1}) - \tan(\phi_n + \alpha_n) \cos(\theta_{n+1})] + \\ &+ R(\theta_{n+1}) [\cos(\theta_{n+1}) + \tan(\phi_n + \alpha_n) \sin(\theta_{n+1})], \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \frac{1}{1 + \left[\frac{Y'(\theta)}{X'(\theta)} \right]^2} \left[\frac{Y''(\theta)}{X'(\theta)} - \frac{Y'(\theta)X''(\theta)}{[X'(\theta)]^2} \right], \quad (2.20)$$

sendo $X'(\theta)$, $Y'(\theta)$, $X''(\theta)$ e $Y''(\theta)$ escritos como

$$X'(\theta) = \frac{dR(\theta)}{d\theta} \cos(\theta) - R(\theta) \sin(\theta), \quad (2.21)$$

$$Y'(\theta) = \frac{dR(\theta)}{d\theta} \sin(\theta) + R(\theta) \cos(\theta), \quad (2.22)$$

$$X''(\theta) = \frac{d^2R(\theta)}{d\theta^2} \cos(\theta) - 2\frac{dR(\theta)}{d\theta} \sin(\theta) - R(\theta) \cos(\theta), \quad (2.23)$$

$$Y''(\theta) = \frac{d^2R(\theta)}{d\theta^2} \sin(\theta) + 2\frac{dR(\theta)}{d\theta} \cos(\theta) - R(\theta) \sin(\theta), \quad (2.24)$$

onde $dR(\theta)/d\theta$ e $d^2R(\theta)/d\theta^2$ são dados por

$$\begin{aligned} \frac{dR(\theta)}{d\theta} &= \frac{(1 - e^2)e \sin(\theta)}{[1 + e \cos(\theta)]^2} - \epsilon p \sin(p\theta), \\ \frac{d^2R(\theta)}{d\theta^2} &= \frac{2(1 - e^2)e^2 \sin^2(\theta)}{[1 + e \cos(\theta)]^3} + \frac{(1 - e^2)e \cos(\theta)}{[1 + e \cos(\theta)]^2} - \epsilon p^2 \cos(p\theta). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Uma vez obtidos todos os elementos da matriz Jacobiana e após um pouco de exaustiva álgebra obtemos que o determinante de J é

$$\det(J) = -\frac{Y'(\theta_n) - X'(\theta_n) \tan(\phi_n + \alpha_n)}{Y'(\theta_{n+1}) - X'(\theta_{n+1}) \tan(\phi_n + \alpha_n)}. \quad (2.26)$$

2.2.3 Expoentes de Lyapunov.

Uma das ferramentas mais utilizadas para caracterização de sistemas dinâmicos são os Expoentes de Lyapunov. Seu princípio básico consiste em verificar se a partir de duas condições iniciais próximas, as orbitas divergem exponencialmente para tempos longos. Se as órbitas apresentarem sensibilidade às condições iniciais, ou seja, se elas divergirem para tempos longos, então as órbitas são classificadas como sendo caóticas, ao passo que se elas permanecerem próximas ou divergirem linearmente, então não são sensíveis às condições iniciais. Se o sistema é caótico, ao menos um dos expoentes de Lyapunov é positivo, uma vez que em sistemas Hamiltonianos bidimensionais os expoentes aparecem aos pares com sinais contrários. Adicionalmente, em sistemas conservativos a soma dos Expoentes de

Lyapunov é igual a zero, enquanto que em sistemas dissipativos a soma dos Expoentes de Lyapunov é menor que zero.

Nesta seção descreveremos os procedimentos necessários para obtenção dos Expoentes de Lyapunov [68, 69]. O cálculo dos Expoentes de Lyapunov é obtido a partir da distância entre duas órbitas ao longo das iterações. Assim sendo, considere um mapa unidimensional dado por $W(x)$, tal que x_0 seja uma condição inicial. Podemos definir a distância entre duas trajetórias na n -ésima iteração com sendo

$$\frac{d}{\xi} = \frac{|W^{(n)}(x_0 + \xi) - W^{(n)}(x_0)|}{\xi}, \quad (2.27)$$

onde ξ é suficientemente pequeno e $W^{(n)}(x_0)$ é a iterada n -ésima de $W(x_0)$. Fazendo o limite $\xi \rightarrow 0$, temos

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \left| \frac{W^{(n)}(x_0 + \xi) - W^{(n)}(x_0)}{\xi} \right| = W'^{(n)}(x_0) = e^{\lambda n}, \quad (2.28)$$

onde $W'^{(n)}(x_0)$ é obtido a partir da regra da cadeia. Tomando o logaritmo de ambos os lados na Eq. (2.28), obtém-se que o expoente de Lyapunov é dado por

$$\lambda = \frac{1}{n} \ln |W'^{(n)}(x_0)|. \quad (2.29)$$

Assim, considerando o caso $n \rightarrow \infty$, a expressão para o cálculo dos expoentes é dada por

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |W'^{(n)}(x_i)|. \quad (2.30)$$

Tendo em vista o fato do modelo do bilhar Elíptico-ovóide ser descrito por uma mapeamento bidimensional, podemos generalizar os Expoentes de Lyapunov a partir da seguinte expressão

$$\lambda_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |\Lambda_j|, \quad j = 1, 2. \quad (2.31)$$

onde Λ_j são os autovalores da matriz $M = \Pi_i^n J_i(V_i, \phi_i)$ e J_i é a matriz Jacobiana para o modelo bilhar Elíptico-ovóide.

Uma forma de determinar os autovalores da matriz M consiste em escrever J como o produto de uma matriz ortogonal Θ por uma matriz triangular Γ , tal que $J = \Theta\Gamma$. Assim, temos $M = J_n J_{n-1} \dots J_2 J_1 = J_n J_{n-1} \dots J_2 \Theta_1 \Gamma_1$. Definindo $J^* = J_2 \Theta_1$ e aplicando o mesmo procedimento obtemos $M = J_n J_{n-1} \dots J_3 \Theta_2 \Gamma_2 \Gamma_1$ e assim sucessivamente. Portanto uma vez que a matriz M é escrita em termos de duas matrizes triangulares Γ_i cujos autovalores são Γ_{11}^i e Γ_{22}^i os Expoentes de Lyapunov são obtidos a partir de

$$\lambda_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \ln |\Gamma_{jj}^i|, \quad j = 1, 2. \quad (2.32)$$

A fim de conhecer os autovalores de Γ escolhemos a matriz ortogonal Θ como sendo a matriz de rotação. Logo

$$\Theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad (2.33)$$

e a matriz triangular superior tem a forma

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ 0 & \Gamma_{22} \end{pmatrix}. \quad (2.34)$$

Temos assim que os elementos de Θ podem ser escritos em termos dos coeficientes de J como $\Theta^{-1}J = \Gamma$ da qual obtemos

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} j_{11} & j_{12} \\ j_{21} & j_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{pmatrix}. \quad (2.35)$$

Fazendo o produto das matrizes acima, temos

$$\begin{pmatrix} j_{11} \cos(\theta) + j_{21} \sin(\theta) & j_{12} \cos(\theta) + j_{22} \sin(\theta) \\ -j_{11} \sin(\theta) + j_{21} \cos(\theta) & -j_{12} \sin(\theta) + j_{22} \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ 0 & T_{22} \end{pmatrix}. \quad (2.36)$$

Sendo uma igualdade de matrizes, reescrevermos como

$$-j_{11} \sin(\theta) + j_{21} \cos(\theta) = 0, \quad (2.37)$$

$$-j_{11} \sin(\theta) = -j_{21} \cos(\theta), \quad (2.38)$$

$$\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{j_{21}}{j_{11}}. \quad (2.39)$$

$$(2.40)$$

A expressão da razão trigonométrica $\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$ pode ser obtida a partir de fundamentos trigonométricos elementares. Assim temos

$$\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} = \frac{\frac{J_{21}}{\sqrt{J_{21}^2 + J_{11}^2}}}{\frac{J_{11}}{\sqrt{J_{21}^2 + J_{11}^2}}}. \quad (2.41)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \sin(\theta) &= \frac{J_{21}}{\sqrt{J_{21}^2 + J_{11}^2}}, \\ \cos(\theta) &= \frac{J_{11}}{\sqrt{J_{21}^2 + J_{11}^2}}. \end{aligned} \quad (2.42)$$

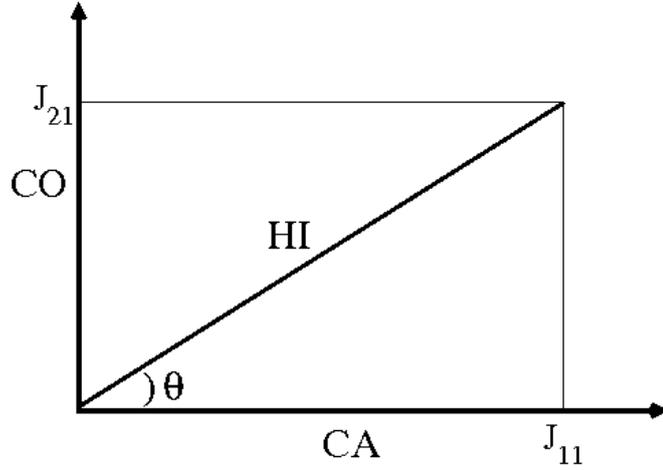


Figura 2.7: Esquema do triângulo retângulo.

Com estes resultados, o autovalor Γ_{11} é dado por

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{11} &= J_{11} \cos(\theta) + J_{21} \sin(\theta), \\
 \Gamma_{11} &= \frac{J_{11}^2}{\sqrt{J_{21}^2 + J_{11}^2}} + \frac{J_{21}^2}{\sqrt{J_{21}^2 + J_{11}^2}}, \\
 \Gamma_{11} &= \frac{J_{11}^2 + J_{21}^2}{\sqrt{J_{21}^2 + J_{11}^2}}, \tag{2.43}
 \end{aligned}$$

e a expressão de Γ_{22} é

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{22} &= \frac{J_{22}J_{11}}{\sqrt{J_{21}^2 + J_{11}^2}} - \frac{J_{12}J_{21}}{\sqrt{J_{21}^2 + J_{11}^2}}, \\
 \Gamma_{22} &= \frac{J_{22}J_{11} - J_{12}J_{21}}{\sqrt{J_{21}^2 + J_{11}^2}}. \tag{2.44}
 \end{aligned}$$

A partir destes resultados, os Expoentes de Lyapunov para uma órbita caótica para o bilhar Elíptico-ovóide podem ser encontrados numericamente.

A Fig. 2.8 mostra o comportamento do Expoente de Lyapunov em função do número de iterações. Cada curva corresponde a uma condição inicial diferente que foi iterada 10^8 vezes. Como podemos observar em Fig. 2.8 (a) uma da séries temporais sofre uma pequena queda para aproximadamente 4.5×10^6 colisões com a fronteira. Após isso, o expoente positivo de Lyapunov segue um regime de convergência marcada por um platô constante. O pequeno decaimento que acontece deve-se ao fato da partícula ter ficado aprisionada em um *sticky* [70] por aproximadamente 4.5×10^6 iterações. Os parâmetros de controle utilizados na construção da figura foram: (a) $\epsilon = 0.1$ e $p=2$, (b) $\epsilon = 0.05$ e $p=3$. As condições iniciais foram $\alpha_0 = 0.9$ e cinco valores distintos para θ_0 uniformemente distribuídos no intervalo $[0, 2\pi]$. Assim, para $\epsilon = 0.1$ e $p=2$ o expoente

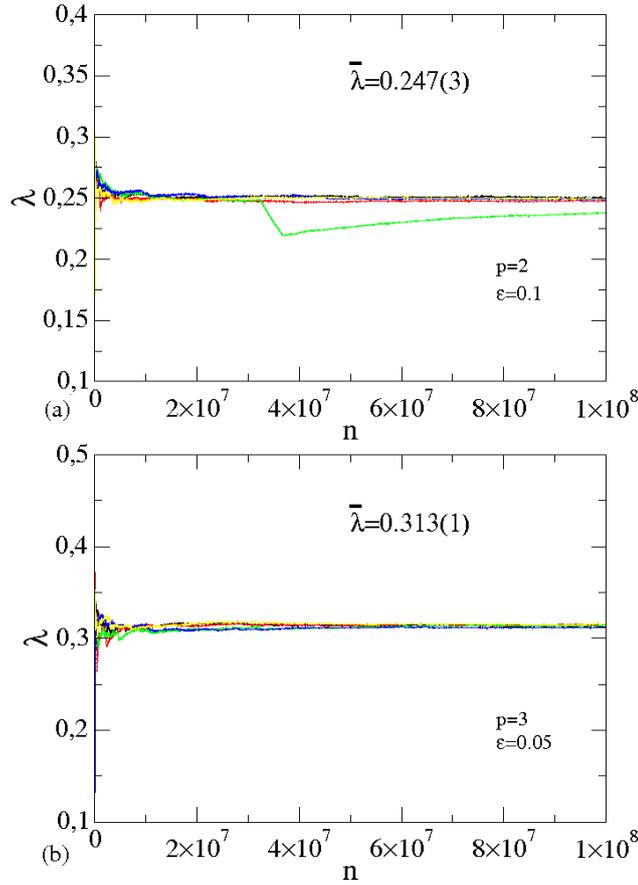


Figura 2.8: *Comportamento do Expoente de Lyapunov para o bilhar ovóide estático. Os parâmetros de controle utilizados foram: (a) $\epsilon = 0.1$ e $p=2$, (b) $\epsilon = 0.05$ e $p=3$.*

de Lyapunov médio obtido foi $\bar{\lambda} = 0.247 \pm 0.003$, enquanto que para $\epsilon = 0.05$ e $p=3$ obtivemos $\bar{\lambda} = 0.313 \pm 0.001$. Os erros ± 0.003 e ± 0.001 correspondem ao desvio padrão das 5 séries temporais.

Após encontrarmos o valor de ϵ_c , Eq. (2.12), onde a fronteira do bilhar apresenta mudança de concavidade, apresentamos o comportamento do Expoente de Lyapunov para valores de ϵ próximos à ϵ_c . Para a construção da Fig. 2.9 (a) consideramos valores de $\epsilon \in [0.06, 0.40]$ enquanto que para a Fig. 2.9 (b) consideramos $\epsilon \in [0.03, 0.18]$. As condições iniciais usadas na construção tanto da Fig. 2.9 (a) quanto (b) foram $\alpha_0 = 0.3$ e θ_0 uniformemente distribuídos no intervalo $[0, 2\pi]$. Cada ponto foi obtido a partir da média de 5 condições iniciais. Cada condição inicial foi iterada 10^6 vezes. As barras de erro representam o desvio padrão das 5 amostras. Observe que após a destruição das curvas invariantes não acontece nenhuma mudança brusca no comportamento do expoente de Lyapunov. A seta na Fig. 2.9 indica o valor do parâmetro crítico ϵ_c . Estudamos também

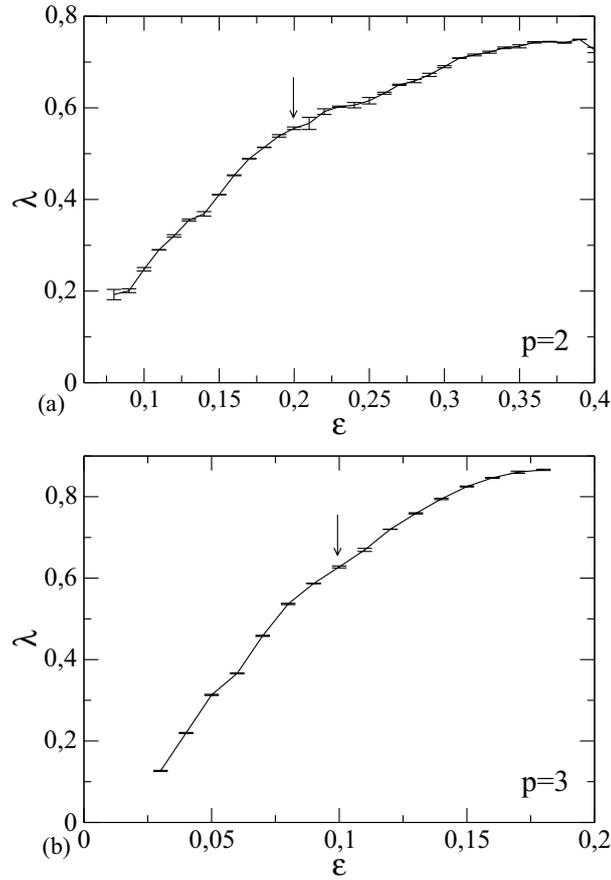


Figura 2.9: (a) Comportamento dos Expoentes de Lyapunov em função de ϵ para $e = 0$ e; (a) $p = 2$; (b) $p = 3$. A mudança de concavidade acontece, para $p = 2$, em $\epsilon_c = 0.2$, enquanto que para $p = 3$ acontece em $\epsilon_c = 0.1$. Os valores dos respectivos Expoentes de Lyapunov para esses valores críticos estão indicados nas figuras por uma seta.

o comportamento do expoente de Lyapunov para o bilhar Elíptico-ovóide em função do parâmetro de controle ϵ como é mostrado na Fig. 2.10. Apresentamos na Fig. 2.10 (a) o comportamento do Expoente de Lyapunov obtido em um mar de caos usando diferentes valores para os parâmetros de controle e e ϵ . É importante enfatizar que diferentes valores de e geram diferentes comportamentos para os Expoentes de Lyapunov. Entretanto, aplicando a transformação $\epsilon \rightarrow \epsilon e^{0.5}$, todas as curvas crescem “juntas” como mostrado na Fig. 2.10 (b). Como podemos observar, em Fig. 2.10 (a) para pequenos valores de ϵ , o valor dos Expoente de Lyapunov cresce, passa por um valor máximo e então sofrem um pequeno decréscimo. Para explicar esse comportamento, obtivemos o histograma de frequência para as regiões visitadas no espaço de fases. Estudamos tanto o histograma de frequência para valores da variável α quanto da variável θ . A Fig. 2.11 apresenta o

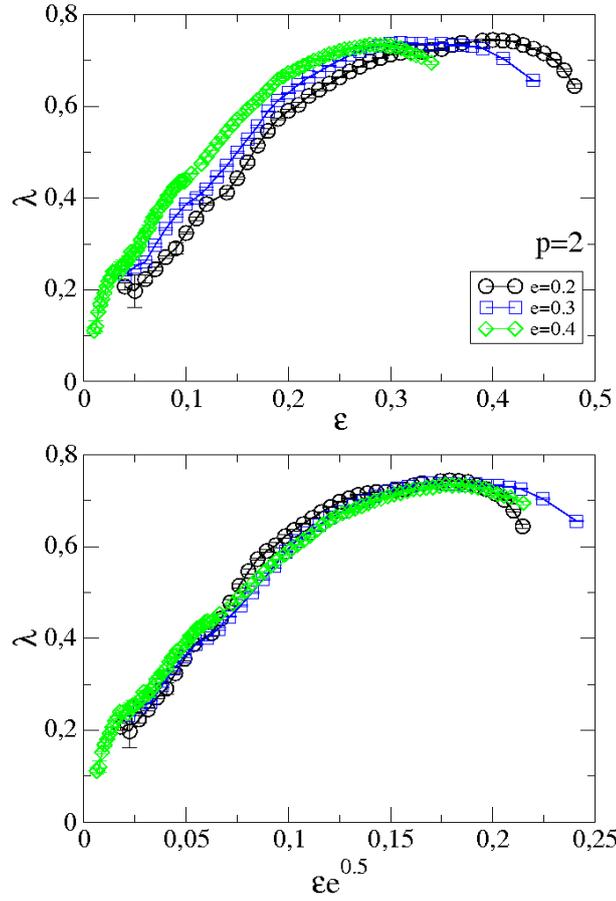


Figura 2.10: (a) Comportamento do Expoente de Lyapunov como função do parâmetro ϵ . Os parâmetros de controle utilizados foram: (a) $p = 2$ para os valores de e indicados na figura; (b) O colapso das curvas após a transformação $\epsilon \epsilon^{0.5}$.

histograma de frequência para os parâmetros de controle $p = 2$, $e = 0.2$, (a,b) $\epsilon = 0.1$ e (c,d) $\epsilon = 0.4$. Podemos observar que aumentando o valor do parâmetro ϵ , causa uma ligeira modificação no comportamento do histograma de frequência para a variável α . Entretanto, uma mudança considerável é observada para o histograma de frequência na variável θ . Basicamente existe um pequeno vale para a região em volta de $\alpha = \pi/2$ para $\epsilon = 0.1$ [ver fig Fig. 2.11 (a)] o qual apenas torna-se mais profundo para o caso de $\epsilon = 0.4$ [ver Fig. 2.11 (c)]. O comportamento para a frequência de θ é um tanto quanto mais sensível á variação de ϵ . Para $\epsilon = 0.1$ vemos uma corcova em torno de $\theta = \pi$ e dois pequenos vales em torno de $\theta = 1$ e $\theta = 5$ respectivamente. Para $\epsilon = 0.4$ entretanto, o comportamento muda drasticamente. A corcova em torno de $\theta = \pi$ é substituída por um platô constante em torno de $\theta \in [2.5, 4]$. Os dois pequenos vales são substituídos por dois vales profundos em torno de $\theta = \pi/2$ e $\theta = 3\pi/2$. Assim, podemos concluir que para

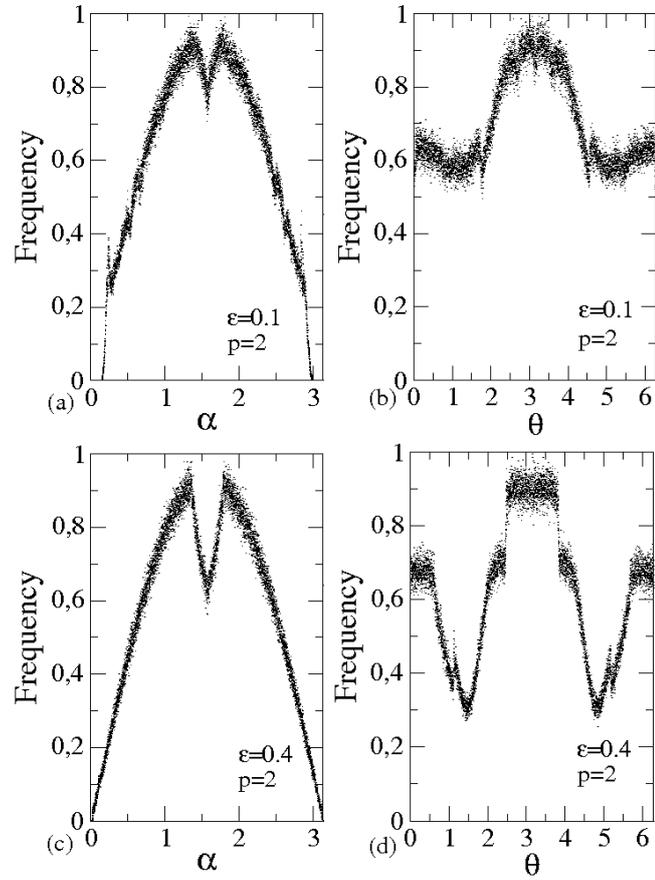


Figura 2.11: *Histograma de frequência em função dos ângulos α (a,c) e θ (b,d). Os parâmetros de controle utilizados foram $p = 2$, $e = 0.2$ e (a,b) $\epsilon = 0.1$; (c,d) $\epsilon = 0.4$.*

$\epsilon = 0.4$ existem regiões preferenciais no espaço de fases, regiões onde a partícula visita com muita frequência, o que não é observado para o parâmetro $\epsilon = 0.1$.

Os resultados a seguir foram obtidos para o caso $e = 0$.

Capítulo 3

O Bilhar Ovóide Dependente do Tempo.

3.1 Resumo.

Neste capítulo discutiremos algumas propriedades para o bilhar Ovóide dependente do tempo. Descrevemos todos os procedimentos necessários para construção do mapa que descreve a dinâmica do modelo. Mostramos que o modelo apresenta crescimento ilimitado de energia quando a geometria da fronteira assume as configurações breathing e não breathing. Finalmente, estudamos o comportamento da velocidade média para diferentes casos usando formalismo de escala.

3.2 O bilhar Ovóide dependente do tempo e o mapa.

Consideramos que uma maneira de introduzir dependência temporal na fronteira do bilhar Ovóide pode ser feita da seguinte forma:

$$R_f(\theta, p, \epsilon, \eta_1, \eta_2, t) = 1 + \eta_1 \cos(t) + \epsilon [1 + \eta_2 \cos(t)] \cos(p\theta) , \quad (3.1)$$

onde ϵ é a deformação da fronteira, η_1 e η_2 são as amplitudes de oscilações e p um número inteiro. Com a introdução da dependência temporal sugerem duas novas variáveis no sistema, velocidade e tempo e dois novos parâmetros de controle, η_1 e η_2 . Como podemos observar na Eq. (3.1) variando os parâmetros de controle, podemos recuperar uma grande família de bilhares, estáticos ou dependentes do tempo. Suponhamos primeiramente que $\eta_1 = \eta_2 = 0$ e variamos o valor do parâmetro ϵ . Se $\epsilon = 0$ recuperamos os resultados do

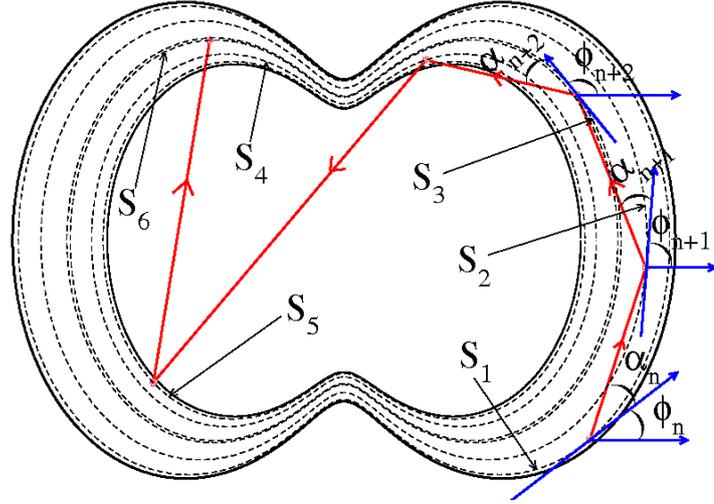


Figura 3.1: Ilustração de seis colisões com a fronteira dependente do tempo no bilhar ovóide. Os ângulos que descrevem a dinâmica do modelo estão indicados em três colisões.

bilhar circular estático; se $\epsilon \neq 0$ recuperamos o bilhar ovóide estático. Por outro lado se variarmos também η_1 e η_2 introduziremos dependência temporal do tipo breathing se $\eta_1 = \eta_2 = \eta$, e não breathing para $\eta_1 \neq \eta_2$. Assim, descreveremos o sistema usando um mapa $(\theta_{n+1}, \alpha_{n+1}, V_{n+1}, t_{n+1}) = T(\theta_n, \alpha_n, V_n, t_n)$ onde as variáveis denotam, respectivamente, posição angular da partícula; o ângulo que a trajetória da partícula faz com a reta tangente em θ imediatamente após a colisão; velocidade absoluta da partícula no instante da colisão e o tempo. A Figura 3.1 ilustra a geometria de seis colisões sucessivas da partícula com a fronteira. Como podemos observar, dada uma condição inicial $(\theta_0, \alpha_0, V_0, t_0)$ toda dinâmica do sistema é determinada.

Através das coordenadas polares, podemos encontrar as componentes cartesianas de $X(\theta_n, t_n)$ e $Y(\theta_n, t_n)$ pelas relações

$$\begin{aligned} X(\theta_n, t_n) &= R(\theta_n, t_n) \cos(\theta_n) , \\ Y(\theta_n, t_n) &= R(\theta_n, t_n) \sin(\theta_n) . \end{aligned} \quad (3.2)$$

Conhecida a posição angular inicial, θ_n , o ângulo que a reta tangente à fronteira no ponto de colisão, de coordenadas $X(\theta_n)$, $Y(\theta_n)$ faz com a horizontal é dado por

$$\phi_n = \arctan \left[\frac{Y'(\theta_n, t_n)}{X'(\theta_n, t_n)} \right] , \quad (3.3)$$

onde $Y'(\theta_n, t_n)$ e $X'(\theta_n, t_n)$ são

$$X'(\theta_n, t_n) = \frac{dR(\theta_n, t_n)}{d\theta_n} \cos(\theta_n) - R(\theta_n, t_n) \sin(\theta_n) , \quad (3.4)$$

$$Y'(\theta_n, t_n) = \frac{dR(\theta_n, t_n)}{d\theta_n} \sin(\theta_n) + R(\theta_n, t_n) \cos(\theta_n) . \quad (3.5)$$

O termo $dR(\theta_n, t_n)/d\theta_n$ é dado por

$$\frac{dR(\theta_n, t_n)}{d\theta_n} = -\epsilon p [1 + \eta_2 \cos(t)] \sin(p\theta_n) . \quad (3.6)$$

Conhecidos os ângulos ϕ_n e α_n a inclinação da trajetória com relação ao eixo positivo de X é dada por $\tan(\phi_n + \alpha_n)$. Com esta informação, o vetor velocidade da partícula é escrito como

$$\vec{V}_n = |\vec{V}_n| [\cos(\phi_n + \alpha_n) \hat{i} + \sin(\phi_n + \alpha_n) \hat{j}] , \quad (3.7)$$

onde \hat{i} e \hat{j} representam os vetores unitários com relação aos eixos X e Y respectivamente. Conhecido o vetor velocidade, podemos determinar a equação da trajetória da partícula a partir de suas componentes cartesianas para $t \geq t_n$, ou seja,

$$X_p(t) = X(\theta_n) + |\vec{V}_n| \cos(\phi_n + \alpha_n)(t - t_n) , \quad (3.8)$$

$$Y_p(t) = Y(\theta_n) + |\vec{V}_n| \sin(\phi_n + \alpha_n)(t - t_n) . \quad (3.9)$$

O índice p diz respeito a coordenada da partícula, enquanto o índice f (Eq. 3.1) corresponde a fronteira. A distância da partícula em relação a origem é dada por $R_p(t) = \sqrt{X_p^2(t) + Y_p^2(t)}$ e a posição angular da próxima colisão, isto é, θ_{n+1} é obtido numericamente da solução de

$$R_p(\theta_{n+1}, t_{n+1}) = R_f(\theta_{n+1}, t_{n+1}) . \quad (3.10)$$

Podemos também obter o tempo da próxima colisão a partir da equação

$$t_{n+1} = t_n + \frac{\sqrt{[\Delta X(\theta)]^2 + [\Delta Y(\theta)]^2}}{|\vec{V}_n|} , \quad (3.11)$$

onde $\Delta X(\theta) = X_p(\theta_{n+1}) - X_p(\theta_n)$ e $\Delta Y(\theta) = Y_p(\theta_{n+1}) - Y_p(\theta_n)$. Conhecido t_{n+1} , podemos encontrar a velocidade da fronteira no instante t_{n+1} a partir das derivadas de $Y(\theta, t)$ e $X(\theta, t)$. Assim,

$$\vec{V}_f(\theta_{n+1}, t_{n+1}) = \frac{dR(\theta_{n+1}, t_{n+1})}{dt_{n+1}} [\cos(\theta_{n+1}) \hat{i} + \sin(\theta_{n+1}) \hat{j}] , \quad (3.12)$$

onde $dR(\theta_{n+1}, t_{n+1})/dt_{n+1}$ é escrito como

$$\frac{dR(\theta_{n+1}, t_{n+1})}{dt_{n+1}} = -\eta_1 \sin(t_{n+1}) - \epsilon \eta_2 \sin(t_{n+1}) \cos(p\theta_{n+1}) , \quad (3.13)$$

Uma vez conhecido θ_{n+1} podemos finalmente encontrar ϕ_{n+1} a partir de Eq. (3.3) avaliado na colisão $n + 1$. Conhecido ϕ_{n+1} , os vetores unitários tangente, \vec{T}_1 , e o vetor normal, \vec{N}_1 , avaliados no ponto ϕ_{n+1} são escritos como

$$\vec{T}_{n+1} = \cos(\phi_{n+1})\hat{i} + \sin(\phi_{n+1})\hat{j}, \quad (3.14)$$

$$\vec{N}_{n+1} = -\sin(\phi_{n+1})\hat{i} + \cos(\phi_{n+1})\hat{j}. \quad (3.15)$$

A partir dessas expressões podemos encontrar as componentes normal e tangencial do vetor velocidade da partícula imediatamente antes da colisão no ponto θ_{n+1} . Sendo assim, temos que a componente tangencial do vetor velocidade é escrita como

$$\vec{V}_n \cdot \vec{T}_{n+1} = |V_n| [\cos(\phi_n + \alpha_n) \cos(\phi_{n+1}) + \sin(\phi_n + \alpha_n) \sin(\phi_{n+1})], \quad (3.16)$$

de modo análogo, a componente normal da velocidade é dada por

$$\vec{V}_n \cdot \vec{N}_{n+1} = |V_n| [-\cos(\phi_n + \alpha_n) \sin(\phi_{n+1}) + \sin(\phi_n + \alpha_n) \cos(\phi_{n+1})]. \quad (3.17)$$

No instante da colisão, a velocidade da partícula é determinada no referencial da parede móvel a partir da conservação da energia e do momento, assim temos

$$\vec{V}'_n = \vec{V}_n - \vec{V}_f(t_{n+1}), \quad (3.18)$$

onde \vec{V}_n corresponde a velocidade da partícula antes da colisão medida no referencial da parede móvel, $\vec{V}_f(t_{n+1})$ é a velocidade da fronteira. Após a colisão, a velocidade da partícula no referencial da fronteira móvel é

$$\vec{V}'_{n+1} = \vec{V}_{n+1} - \vec{V}_f(t_{n+1}). \quad (3.19)$$

No instante da colisão, de acordo com nossa construção, as seguintes condições devem ser satisfeitas:

$$\vec{V}'_{n+1} \cdot \vec{T}_{n+1} = \vec{V}'_n \cdot \vec{T}_{n+1}, \quad (3.20)$$

$$\vec{V}'_{n+1} \cdot \vec{N}_{n+1} = -\vec{V}'_n \cdot \vec{N}_{n+1}. \quad (3.21)$$

Da Eq. (3.20), temos que a componente tangencial da velocidade não sofre alteração após o choque, dessa forma, voltando para o referencial inercial temos

$$\vec{V}_{n+1} \cdot \vec{T}_{n+1} = |V_n| [\cos(\phi_n + \alpha_n) \cos(\phi_{n+1}) + \sin(\phi_n + \alpha_n) \sin(\phi_{n+1})]. \quad (3.22)$$

Por outro lado, a componente normal da velocidade não se conserva. Novamente a velocidade da partícula é obtida a partir da conservação da energia e do momento no plano de referência da parede em movimento (ver Fig. 3.2). Logo:

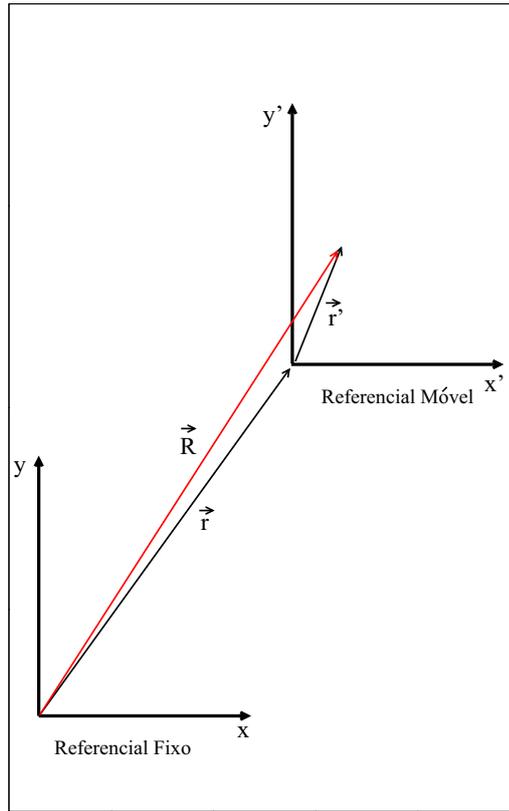


Figura 3.2: *Mudança de referenciais, onde temos \vec{R} = Posição da partícula no referencial fixo; \vec{r}' = Posição da partícula no referencial móvel; \vec{r} = vetor posição entre os dois referenciais.*

$$\begin{aligned}
 \vec{R} &= \vec{r} + \vec{r}' , \\
 \frac{d\vec{R}}{dt} &= \frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt} , \\
 \frac{d\vec{r}'}{dt} &= \frac{d\vec{R}}{dt} - \frac{d\vec{r}}{dt} , \\
 \vec{V}'_p &= \vec{V}_p - \vec{V}_f .
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

onde temos que \vec{R} corresponde à posição da partícula no referencial fixo; \vec{r}' à posição da partícula no referencial móvel; enquanto que \vec{r} refere-se ao vetor posição entre os dois referenciais. \vec{V}_p , \vec{V}'_p e \vec{V}_f correspondem respectivamente à velocidade da partícula no referencial fixo, à velocidade da partícula no referencial móvel e à velocidade da parede móvel.

Após a colisão, $\vec{V}'_{pc} = -\vec{V}'_p$. Assim:

$$\begin{aligned}\vec{V}'_{pc} &= -[\vec{V}_p - \vec{V}_f], \\ \vec{V}'_{pc} &= \vec{V}_f - \vec{V}_p,\end{aligned}\tag{3.24}$$

onde o índice pc significa pós-colisão. Voltando para o referencial fixo, temos

$$\begin{aligned}\vec{V}_{pc} &= \vec{V}'_{pc} + \vec{V}_f, \\ \vec{V}_{pc} &= \vec{V}_f - \vec{V}_p + \vec{V}_f, \\ \vec{V}_{pc} &= 2\vec{V}_f - \vec{V}_p.\end{aligned}\tag{3.25}$$

Assim temos que a componente normal da velocidade, no referencial de repouso é dada por:

$$\vec{V}_{n+1} \cdot \vec{N}_{n+1} = -\vec{V}_n \cdot \vec{N}_{n+1} + 2\vec{V}_f \cdot \vec{N}_{n+1}.\tag{3.26}$$

O que nos leva a

$$\begin{aligned}\vec{V}_{n+1} \cdot \vec{N}_{n+1} &= + |\vec{V}_n| [\cos(\phi_n + \alpha_n) \sin(\phi_{n+1})] - \\ &- |\vec{V}_n| [\sin(\phi_n + \alpha_n) \cos(\phi_{n+1})] + \\ &+ 2\vec{V}_f \cdot \vec{N}_{n+1},\end{aligned}\tag{3.27}$$

$$\vec{V}_f \cdot \vec{N}_{n+1} = \frac{dR(\theta_{n+1}, t_{n+1})}{dt_{n+1}} [\cos(\theta_{n+1}) \sin(\phi_{n+1}) + \sin(\theta_{n+1}) \cos(\phi_{n+1})],\tag{3.28}$$

uma vez que $dR(\theta_{n+1}, t_{n+1})/dt_{n+1}$ escrito como

$$\frac{dR(\theta_{n+1}, t_{n+1})}{dt_{n+1}} = -\eta_1 \sin(t_{n+1}) - \epsilon \eta_2 \sin(t_{n+1}) \cos(p\theta_{n+1}).\tag{3.29}$$

Assim, o módulo da velocidade após a colisão será dada por

$$\vec{V}_{n+1} = \sqrt{[\vec{V}_{n+1} \cdot \vec{T}_{n+1}]^2 + [\vec{V}_{n+1} \cdot \vec{N}_{n+1}]^2},\tag{3.30}$$

e o ângulo de saída da partícula, orientado em relação à tangente a fronteira no ponto θ_{n+1} é

$$\alpha_{n+1} = \arctan \left[\frac{\vec{V}_{n+1} \cdot \vec{N}_{n+1}}{\vec{V}_{n+1} \cdot \vec{T}_{n+1}} \right].\tag{3.31}$$

Tendo determinado as equações que descrevem a dinâmica do sistema, podemos finalmente estudar o comportamento de uma partícula no interior de um bilhar ovóide com fronteira dependente do tempo.

3.2.1 Aceleração de Fermi no Bilhar Ovóide com Geometria do tipo *Breathing*.

“Aceleração de Fermi é a nomenclatura usada para caracterizar o crescimento ilimitado de energia de uma partícula sofrendo colisões elásticas com uma parede de potencial infinito dependente do tempo”. Este fenômeno foi primeiramente proposto por Enrico Fermi [48] em 1949 como uma tentativa de explicar a aceleração de raios cósmicos. Fermi propôs que partículas carregadas poderiam ser aceleradas a partir de *colisões* com estruturas magnéticas oscilantes no espaço interestelar. Recentemente, com o aumento da velocidade dos computadores, o modelo tem recebido grande atenção e vem sendo estudado levando em consideração diferentes aproximações como, por exemplo, inclusão de campos externos, colisões inelásticas, introdução de coeficientes de amortecimento, efeitos quânticos e relativísticos.

Existem muitos resultados relativos à descrição de Aceleração Fermi em três modelos básicos, são eles: (i) modelo Fermi-Ulam [37, 38]; (ii) o modelo *bouncer* [39] e, (iii) o modelo Fermi-Ulam-*bouncer* híbrido [40, 62]. O caso (i) é constituído basicamente por uma partícula clássica de massa m que está confinada no interior de duas paredes rígidas, estando uma delas fixa e a outra movendo-se periodicamente no tempo. Uma das propriedades mais importantes da versão conservativa é a estrutura mista do espaço de fases. Vale a pena enfatizar que o fenômeno de aceleração de Fermi, isto é, o crescimento ilimitado de energia pela partícula, não é observado neste modelo uma vez que a amplitude do mar de caos é limitado por um conjunto de curvas *invariantes spanning*. No entanto, para o caso (ii), uma versão alternativa para este modelo foi proposta por Pustynnikov [41, 42] e ficou conhecida como o modelo *bouncer*. Esse modelo consiste de uma partícula clássica de massa m sujeita a um campo gravitacional constante, g , que por sua vez sofre colisões elásticas com uma plataforma oscilante. Ao contrário do modelo Fermi-Ulam, dependendo da combinação das condições iniciais e dos parâmetros de controle, a partícula pode ter ganho ilimitado de energia. Esta diferença foi explicada por Lichtenberg, Lieberman e Cohen [43]

Finalmente, o caso (iii) é constituído de uma versão híbrida de ambos os modelos Fermi-Ulam e *bouncer*. Neste sistema, uma partícula clássica de massa m está confinada entre duas paredes rígidas verticalmente dispostas, uma delas está fixa (em $y = 0$) e a outra move-se periodicamente no tempo. Adicionalmente, a partícula sofre a ação constante de um campo gravitacional, g . O espaço da fase apresenta uma estrutura mista no sentido que podemos observar um conjunto de curvas invariantes do tipo *spanning* para regiões de alta energia e, dependendo das condições iniciais e da combinação dos parâmetros de controle, propriedades que foram observadas individualmente para os modelos Fermi-Ulam

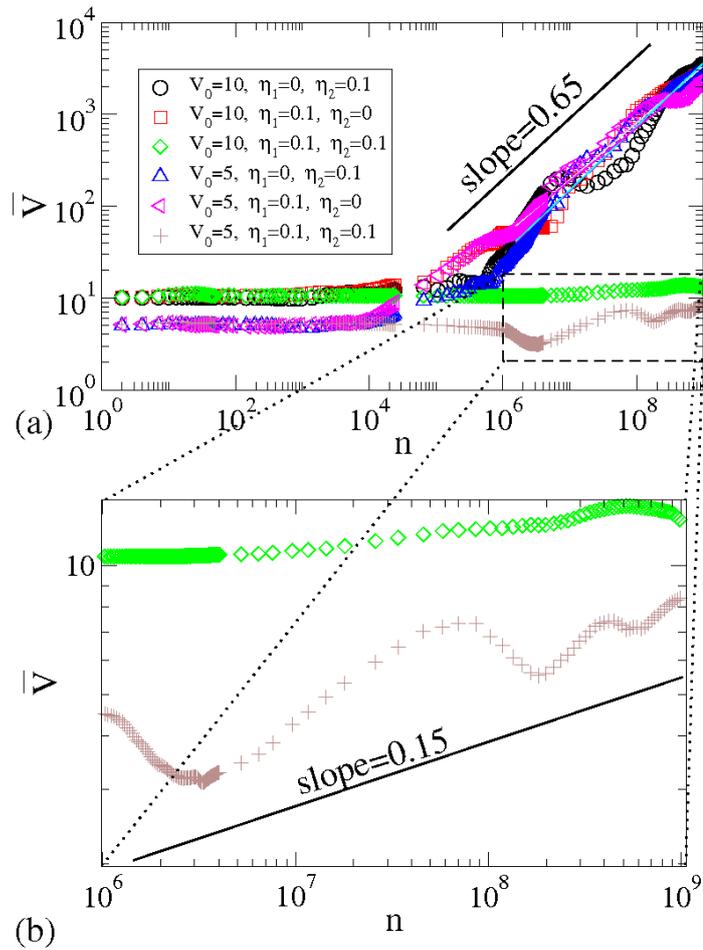


Figura 3.3: Comportamento de $\bar{V} \times n$. Os parâmetros de controle utilizados na construção da figura foram $p = 2$, $\epsilon = 0.4$ e duas diferentes velocidades iniciais $V_0 = 5$ e $V_0 = 10$. Os valores de η_1 e η_2 estão indicados na figura.

e modelo bouncer, podem agora ser observados coexistindo na versão híbrida.

O caso bidimensional é um pouco mais complicado e uma questão importante vem à tona: pode uma partícula clássica sofrendo colisões elásticas, no interior de um bilhar com fronteira dependente do tempo, ser acelerada indefinidamente? A resposta para essa pergunta não é tão simples quanto parece e depende basicamente da estrutura do espaço de fases para a versão estática do modelo. Neste contexto, a conjectura Loskutov-Ryabov-Akinshin (LRA) [24] diz que “Dinâmica caótica em bilhares com fronteira fixa é condição suficiente para aceleração de Fermi quando uma perturbação na fronteira é introduzida”.

Resultados que ajudam a validar tal conjectura incluem a dependência temporal no bilhar circular [28], o caso concêntrico do bilhar anular [44] e o caso elíptico [20]. Um tipo específico de dependência temporal foi recentemente estudado por Lenz, Diakonov e Schmelcher [45] no bilhar elíptico e apresenta um tipo controlável de aceleração de Fermi.

No modelo discutido em [45] a partícula ganha energia ao cruzar a região separada pela separatriz. Foi apresentado recentemente que para o bilhar ovóide [29], um tipo especial de dependência temporal do tipo breathing. Os autores sugeriram que este tipo especial de geometria não apresentaria crescimento ilimitado de energia por parte da partícula. Assim como mostraremos nesta seção, a dependência temporal do tipo breathing de fato leva à aceleração de Fermi, entretanto com expoente de crescimento consideravelmente menor quando comparado ao caso não breathing. Esta diferença abrupta nos expoentes pode ter levado a conclusão equivocada de que aceleração de Fermi não era observado para o caso breathing.

No modelo do bilhar ovóide breathing, a forma da fronteira em coordenadas polares é dada por

$$R_f(\theta, p, \epsilon, \eta, t) = [1 + \eta \cos(t)][1 + \epsilon \cos(p\theta)] . \quad (3.32)$$

A Figura 3.3 mostra o comportamento da velocidade média de uma partícula para uma órbita em função do número de colisões com a fronteira. Os parâmetros de controle utilizados foram: $p = 2$, $\epsilon = 0.4$ e duas velocidades iniciais diferentes $V_0 = 5$ e $V_0 = 10$. Os valores de η_1 e η_2 estão indicados na figura. Para obtenção dos resultados da Fig. 3.3 usamos em nossas simulações precisão de 10^{-26} na solução da Eq. 3.10 e evoluímos uma órbita 10^9 vezes. A velocidade média na Fig. 3.3 foi obtida calculando

$$\bar{V} = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n V_j , \quad (3.33)$$

que corresponde basicamente a média ao longo da órbita (também chamada de média de Birkhoff).

Podemos ver claramente que para o caso não breathing a velocidade média tem um crescimento muito rápido com expoente da ordem de 0.65. No entanto e ao contrário do que parece acontecer para o caso breathing com número de iterações pequeno, o sistema continua apresentando o crescimento de energia. Entretanto tal crescimento é um tanto quanto mais lento [ver Fig. 3.3 (b)] com expoente da ordem de 0.15. O que nos leva a concluir que tanto a geometria breathing quanto não breathing para o bilhar ovóide produzem aceleração de Fermi, confirmando, assim, a validade da conjectura LRA para o bilhar ovóide dependente do tempo.

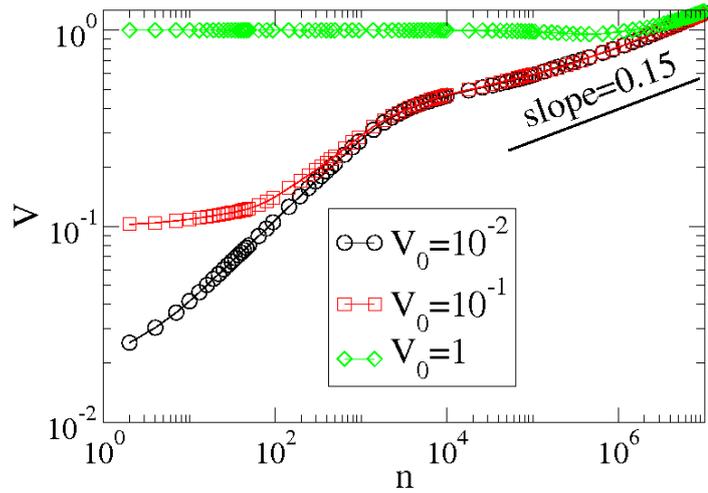


Figura 3.4: Comportamento de $\bar{V} \times n$. Os parâmetros de controle utilizados foram $p = 2$, $\epsilon = 0.2$, $\eta = 0.01$ e três diferentes valores de velocidade inicial, $V_0 = 10^{-2}$ (círculo), $V_0 = 10^{-1}$ (quadrado) e $V_0 = 1$ (losângulo).

3.2.2 Propriedades de Escala para o bilhar Ovóide com geometria do tipo *breathing* e *não breathing*.

Escala em η para o bilhar ovóide com geometria do tipo *breathing*.

Neste seção discutiremos alguns resultados numéricos e propriedades de escala para o caso *breathing* do bilhar ovóide, isto é, $\eta_1 = \eta_2 = \eta$. O raio da fronteira é descrito pela Eq. (3.32)

Investigaremos a evolução da velocidade média a qual é definida como

$$\bar{V}_i = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n V_{i,j}, \quad (3.34)$$

onde o índice i corresponde a uma amostra de um conjunto de M condições iniciais. Finalmente, a velocidade média é escrita como

$$\bar{V} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M V_i. \quad (3.35)$$

Iteramos a Eq. (3.35) usando um conjunto de $M = 500$ condições iniciais diferentes. Para cada condição inicial fixamos uma velocidade inicial e escolhemos aleatoriamente os valores iniciais para $\alpha_0 \in [0, \pi]$, $\theta_0 \in [0, 2\pi]$ e $t_0 \in [0, 2\pi]$. Na Fig. 3.4 mostramos o comportamento de $\bar{V} \times n$ para os parâmetros de controle $p = 2$, $\epsilon = 0.2$, $\eta = 0.01$ e três diferentes valores de velocidade inicial. Para velocidade inicial baixa, [da ordem de $V_0 = 10^{-2}$ - ver Fig. 3.4] podemos ver que a velocidade média cresce e passa por um crossover. A partir desse crossover a velocidade passa a crescer com expoente diferente

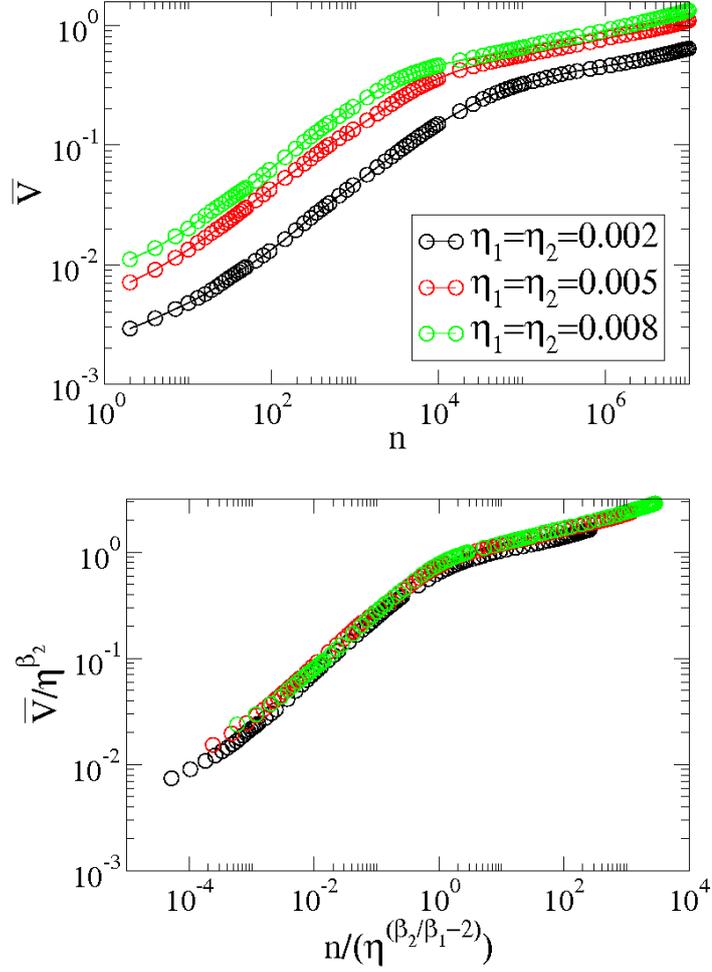


Figura 3.5: (a) Comportamento da $\bar{V} \times n$ para diferentes valores de η . Os parâmetros de controle utilizados foram $p = 2$, $\epsilon = 0.4$ e $M = 500$ diferentes condições iniciais para a mesma velocidade inicial $V_0 = 10^{-3}$. (b) Após uma mudança apropriada de escala as curvas foram sobrepostas em uma curva universal.

da região anterior a essa mudança. Para $V_0 = 10^{-1}$, a velocidade passa por duas regiões de crossover. No início a velocidade é quase constante ($n < 10$), então cresce até que o expoente de crescimento seja o mesmo da curva gerada a partir de $V_0 = 10^{-2}$, o que acontece por volta de $n = 10^3$, daí por diante acompanha seu crescimento. Finalmente, o caso de $V_0 = 1$ apresenta um grande platô para velocidade média até por volta de $n \simeq 10^5$. Após este período a velocidade sofre uma pequena queda, então cresce até encontrar as curvas de velocidade $V_0 = 10^{-2}$ e $V_0 = 10^{-1}$. A partir de aproximadamente $n \simeq 3 \times 10^7$ todas as curvas crescem com o mesmo expoente. Observe que o número de crossover marca a mudança de um regime constante para um regime de crescimento o qual depende de V_0 . Notamos também que quanto maior a velocidade, maior é o número de crossover.

Considerando esta dinâmica estudaremos o comportamento da velocidade média em

função do número de colisões com a fronteira assim como do parâmetro de controle η . Assumiremos fixo o valor da velocidade inicial $V_0 = 10^{-3}$, consideraremos um conjunto $M = 500$ condições iniciais e escolhemos aleatoriamente os valores iniciais para $\alpha_0 \in [0, \pi]$, $\theta_0 \in [0, 2\pi]$ e $t_0 \in [0, 2\pi]$. Na Fig. 3.5 (a) mostramos o comportamento de $\bar{V} \times n$ para os diferentes valores do parâmetros de controle η . Como podemos observar, todas as curvas começam a crescer com expoente alto, após passar por um crossover, o crescimento torna-se mais lento. O comportamento observado em Fig. 3.5 é típico de sistemas que podem ser descritos usando formalismo de escala. Para tanto supomos que:

1. Quando $n \ll n_x$ a velocidade média cresce de acordo com

$$\bar{V} \propto n^{\beta_1} , \quad (3.36)$$

onde β_1 é um expoente crítico.

2. A medida que o número de iterações aumenta, $n \gg n_x$, a velocidade média é descrita por

$$\bar{V} \propto n^{\beta_2} , \quad (3.37)$$

onde o expoente β_2 também é um expoente crítico.

3. O número de crossover que marca a mudança de um regime de crescimento para outro é descrito como

$$n_x \propto \eta^\gamma , \quad (3.38)$$

onde γ é um expoente dinâmico.

Os expoentes críticos podem ser obtidos ao considerarmos diferentes curvas geradas a partir de diferentes parâmetros de controle. Após algumas simulações, obtemos $\gamma = -1.70(4)$, $\bar{\beta}_1 = 0.49(3)$ e $\bar{\beta}_2 = 0.16(1)$, como podemos observar em Fig. 3.6.

Após considerar essas três suposições iniciais podemos descrever a velocidade média em termos de uma função de escala do tipo

$$\bar{V}(\eta, n) = l\bar{V}(l^a\eta, l^b n) , \quad (3.39)$$

onde l é um fator de escala, a e b são expoentes de escala. Um aspecto importante que deve ser observado é que os fatores de escala a e b devem estar relacionados aos expoentes característicos β_1 , β_2 e γ . Escolhendo $l = \eta^{-1/a}$, podemos reescrever a Eq. (3.39) como

$$\bar{V}(\eta, n) = \eta^{-1/a}\bar{V}_1(\eta^{-b/a}n) , \quad (3.40)$$

onde $\bar{V}_1(\eta^{-b/a}n) = \bar{V}(1, \eta^{-b/a}n)$ é assumido ser constante para $n \gg n_x$. Considerando as Eq. (3.40) e Eq. (3.37), obtemos $\beta_2 = -1/a = 0.16(1)$.

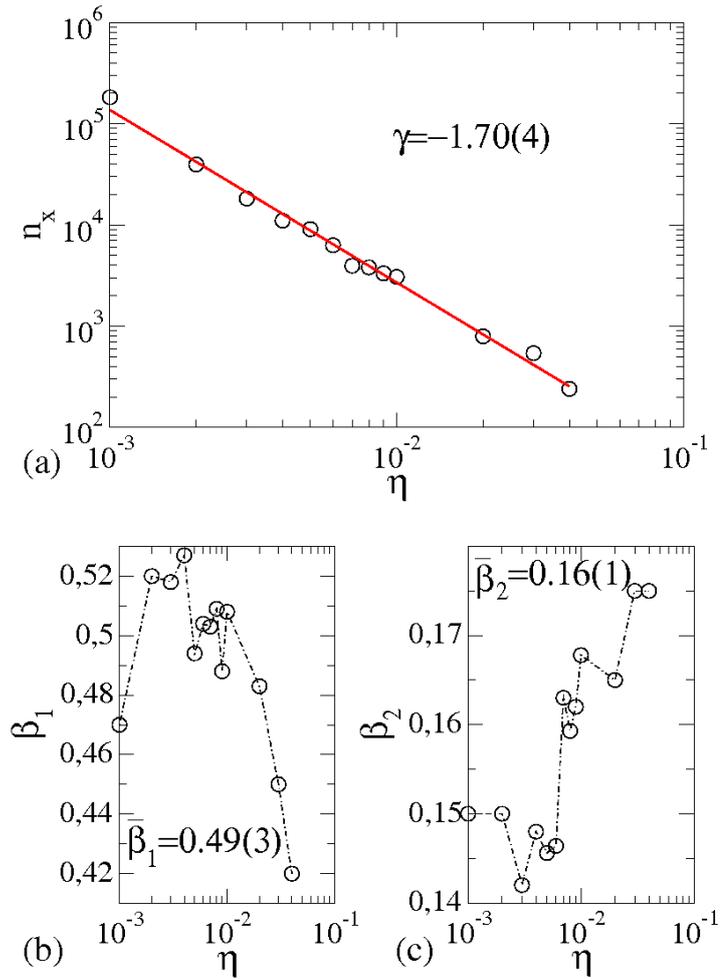


Figura 3.6: *Comportamento de $n_x \times \eta$. Através de um ajuste por lei de potência obtemos $\gamma = -1.70(4)$. (b) A partir de $\beta_1 \times \eta$ obtivemos $\bar{\beta}_1 = 0.49(3)$. (c) Enquanto que o expoente crítico $\bar{\beta}_2 = 0.16(1)$ é obtido através do gráfico $\beta_2 \times \eta$.*

Se escolhermos $l^n = 1$, temos $l = n^{-1/b}$ e a Eq. (3.39) é dada por

$$\bar{V}(\eta, n) = n^{-1/b} \bar{V}_2(n^{-a/b} \eta), \quad (3.41)$$

onde a função \bar{V}_2 é definida como $\bar{V}_2(n^{-a/b} \eta) = \bar{V}(n^{-a/b} \eta, 1)$ que também é assumida ser constante para $n \ll n_x$. Comparando Eq. (3.41) e Eq. (3.36) temos que $\beta_1 = -1/b = 0.49(3)$. A partir das duas expressões de l , temos que o expoente dinâmico γ é dado por

$$\gamma = \frac{\beta_2}{\beta_1} = 0.3265(4). \quad (3.42)$$

Entretanto, quando comparamos este resultado com aquele obtido na Fig. 3.6 (a) vemos claramente que são diferentes. O problema é que n não é uma boa variável. Assim, uma boa transformação é $n \rightarrow n\eta^2$. Após introduzirmos a transformação na variável n os

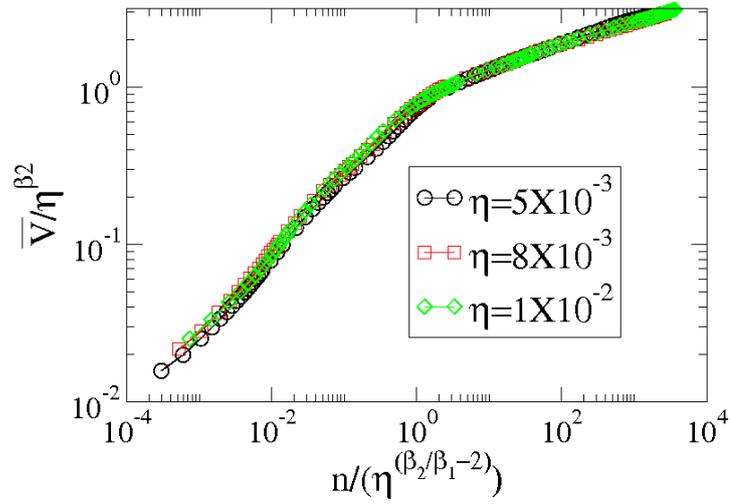


Figura 3.7: Colapso de três curvas para essa nova combinação de parâmetros de controle. Os parâmetros de controle utilizados foram $p = 3$, $\epsilon = 0.3$ e velocidade inicial $V_0 = 10^{-3}$. Os valores de η estão indicados na figura.

expoentes β_1 e β_2 permanecem os mesmos, entretanto o expoente dinâmico γ é dado por

$$\gamma = \frac{\beta_2}{\beta_1} - 2. \quad (3.43)$$

Calculando o valor do expoente γ considerando a Eq. (3.43) e os prévios valores de β_1 e β_2 obtemos $\gamma = -1.6735(4)$, que está em bom acordo com o resultado da Fig. 3.6 (a).

Consideramos também outra combinação de parâmetros de controle. Os resultados para o caso $p = 3$, $\epsilon = 0.3$ e velocidade inicial $V_0 = 10^{-3}$ nos leva aos seguintes expoentes críticos $\beta_1 = 0.48(2)$ e $\beta_2 = 0.15(1)$. Resolvendo Eq. (3.43), encontramos $\gamma = -1.687(8)$. A Figura 3.7 mostra o colapso de três curvas para essa nova combinação de parâmetros de controle. Estes resultados confirmam que as propriedades de escalas devem também ser observados para outras combinações de parâmetros.

Escala na velocidade para o bilhar ovóide.

Neste seção discutiremos alguns resultados numéricos e propriedades de escala para os casos não breathing e breathing do bilhar ovóide. Para este caso, o raio da fronteira em coordenadas polares é dado por

$$R_f(\theta, p, \epsilon, \eta_1, \eta_2, t) = 1 + \eta_1 \cos(t) + \epsilon[1 + \eta_2 \cos(t)] \cos(p\theta). \quad (3.44)$$

Concentraremos na caracterização do comportamento da velocidade média em função do número de colisões com a fronteira dependente do tempo para diferentes valores da velocidade inicial. Na Fig. 3.8 mostramos o comportamento de $\bar{V} \times n$ para os parâmetros de controle $p = 2$, $\epsilon = 0.2$, $\eta_1 = 0.1$ e $\eta_2 = 0.2$ e dezoito diferentes valores de velocidade

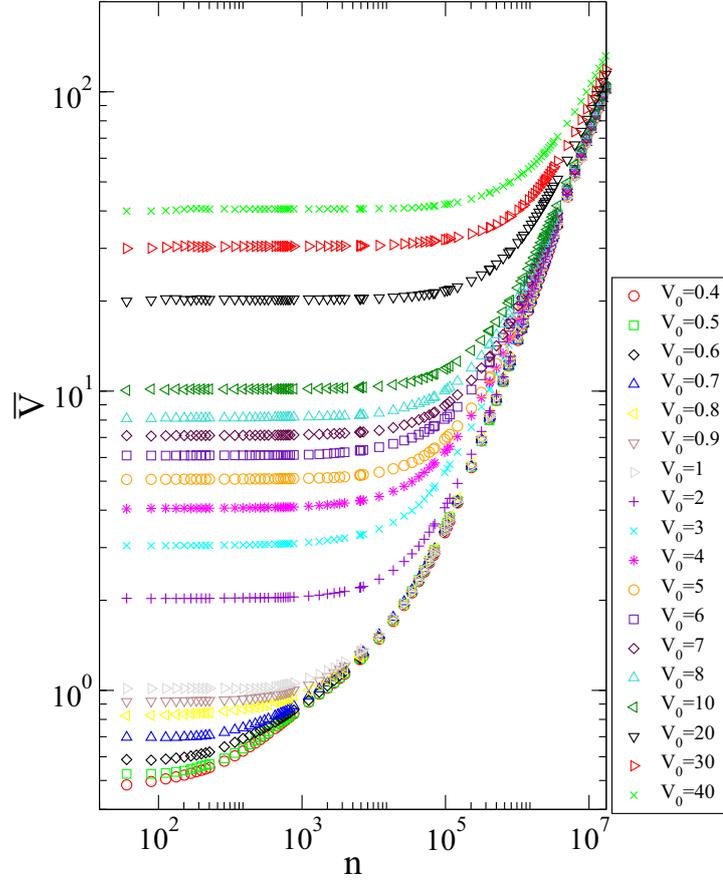


Figura 3.8: *Comportamento da velocidade média em função do número de colisões para diferentes valores de V_0 . Os parâmetros de controle utilizados foram $p = 2$, $\epsilon = 0.2$, $\eta_1 = 0.1$, $\eta_2 = 0.2$ e $M = 500$ diferentes condições iniciais para α , θ e t escolhidos aleatoriamente.*

inicial. Por outro lado, na Fig. 3.9 mostramos o comportamento de $\bar{V} \times n$ para o caso breathing onde os parâmetros de controle utilizados foram $p = 2$, $\epsilon = 0.4$, $\eta_1 = \eta_2 = 0.001$ e diferentes velocidades iniciais como pode ser observado na figura. Para cada V_0 escolhemos aleatoriamente os 500 valores iniciais para $\alpha_0 \in [0, \pi]$, $\theta_0 \in [0, 2\pi]$ e $t_0 \in [0, 2\pi]$.

Baseado nos comportamentos tanto da Fig. 3.8 quanto Fig. 3.9 podemos admitir que as curvas de velocidade podem ser descritas usando argumentos de escala. Assim, supomos novamente três hipóteses de escala.

1. Para $n \ll n_x$ a velocidade média se comporta de acordo com

$$\bar{V}_{sat} \propto V_0^\alpha, \quad (3.45)$$

2. Considerando $n \gg n_x$, a velocidade média é descrita por

$$\bar{V} \propto n^\beta, \quad (3.46)$$

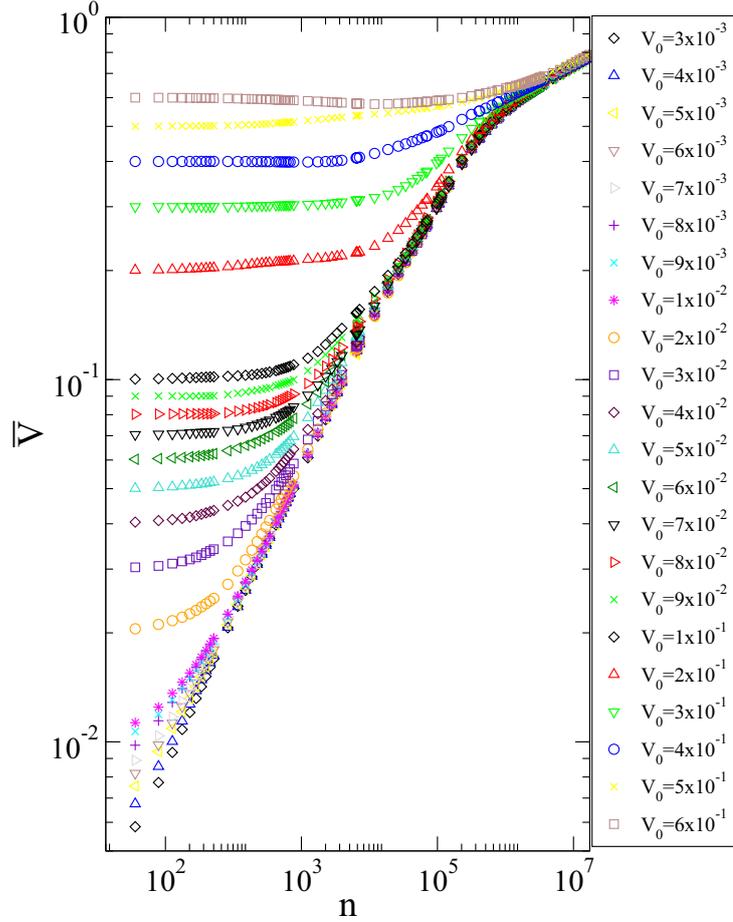


Figura 3.9: *Comportamento da velocidade média em função do número de colisões para diferentes valores de V_0 . Os parâmetros de controle utilizados foram $p = 2$, $\epsilon = 0.4$, $\eta_1 = 0.001$, $\eta_2 = 0.001$ e $M = 500$ diferentes condições iniciais para α , θ e t escolhidos aleatoriamente.*

onde os expoentes α e β são expoentes de escala;

3. O número de iterações de crossover é descrito como

$$n_x \propto V_0^z, \quad (3.47)$$

onde z é um expoente dinâmico com $z = z_{nb}$ para o caso não breathing e $z = z_1$ e $z = z_2$ para o caso breathing.

Considerando as três hipóteses iniciais, podemos formalmente descrever o comportamento da velocidade média em termos de uma função homogênea generalizada do tipo:

$$\bar{V}(V_0, n) = l\bar{V}(l^a V_0, l^b n), \quad (3.48)$$

sendo l um fator de escala. Assim podemos escolhê-lo como sendo $l^a V_0 = 1$. Logo temos $l = V_0^{-1/a}$ e Eq. (3.48) é reescrita como:

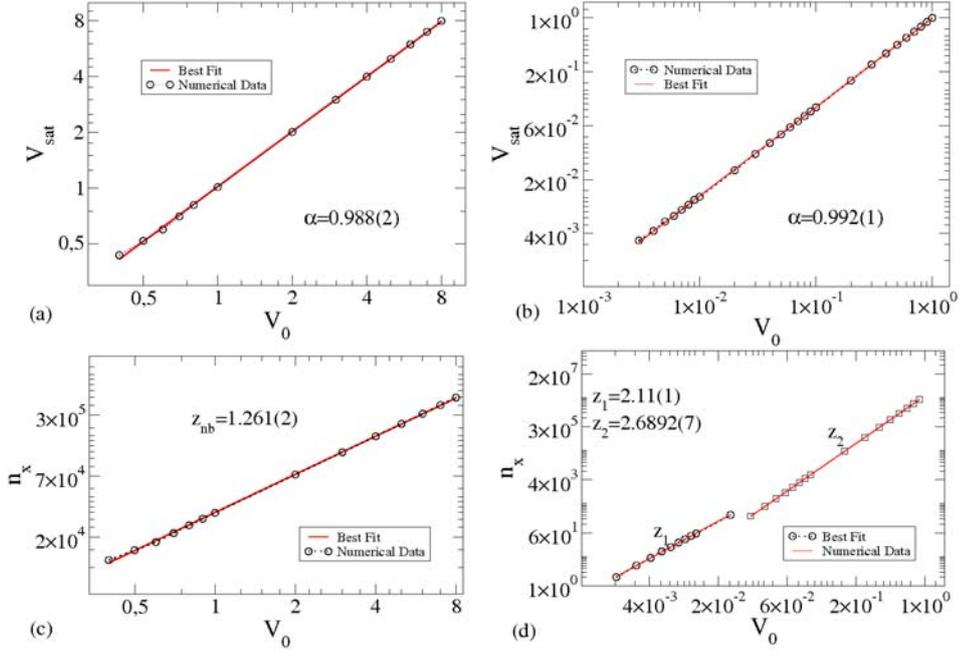


Figura 3.10: Gráfico de $V_{sat} \times V_0$ para o caso (a) não breathing; (b) breathing. Comportamento de n_x em função de V_0 para o caso (c) não breathing; (d) breathing .

$$\bar{V}(V_0, n) = V_0^{-1/a} \bar{V}_1(V_0^{-b/a} n) , \quad (3.49)$$

onde $\bar{V}_1(V_0^{-b/a} n) = \bar{V}(1, V_0^{-b/a} n)$ é assumido ser constante para $n \ll n_x$. Comparando as Eq. (3.49) e Eq. (3.45), obtemos $\alpha = -1/a$.

Por outro lado, se escolhermos $l^n = 1$, temos $l = n^{-1/b}$ e a Eq. (3.48) é reescrita como

$$\bar{V}(V_0, n) = n^{-1/b} \bar{V}_2(n^{-a/b} V_0) , \quad (3.50)$$

onde a função \bar{V}_2 é definida como $\bar{V}_2(n^{-a/b} V_0) = \bar{V}(n^{-a/b} V_0, 1)$ que assumimos ser constante para $n \gg n_x$. Comparando Eq. (3.50) e Eq. (3.46) temos que $\beta = -1/b$. Comparando as duas expressões de l , temos que o expoente dinâmico z é dado por

$$z = \frac{\alpha}{\beta} . \quad (3.51)$$

Observe que todos os expoentes de escalas são determinados se os expoentes críticos α e β forem obtidos numericamente. Para o caso do bilhar ovóide com dependência temporal do tipo não breathing, o expoente α é obtido através de um ajuste por lei de potência no gráfico de $V_{sat} \times V_0$ [ver 3.10 (a)], assim, o valor obtido foi $\alpha = 0.988(2) \simeq 1$. O expoente de crescimento β , é obtido através da média dos valores obtidos a partir de uma lei de potência para a curva da velocidade média para $V_0 \in [0.4, 40]$ na região onde $n \gg n_x$. Assim, o valor médio obtido foi $\beta = 0.786(9)$. O expoente dinâmico z_{nb} também é obtido por um ajuste em lei de potência para o gráfico do $n_x \times V_0$ [ver 3.10 (c)], o que nos leva

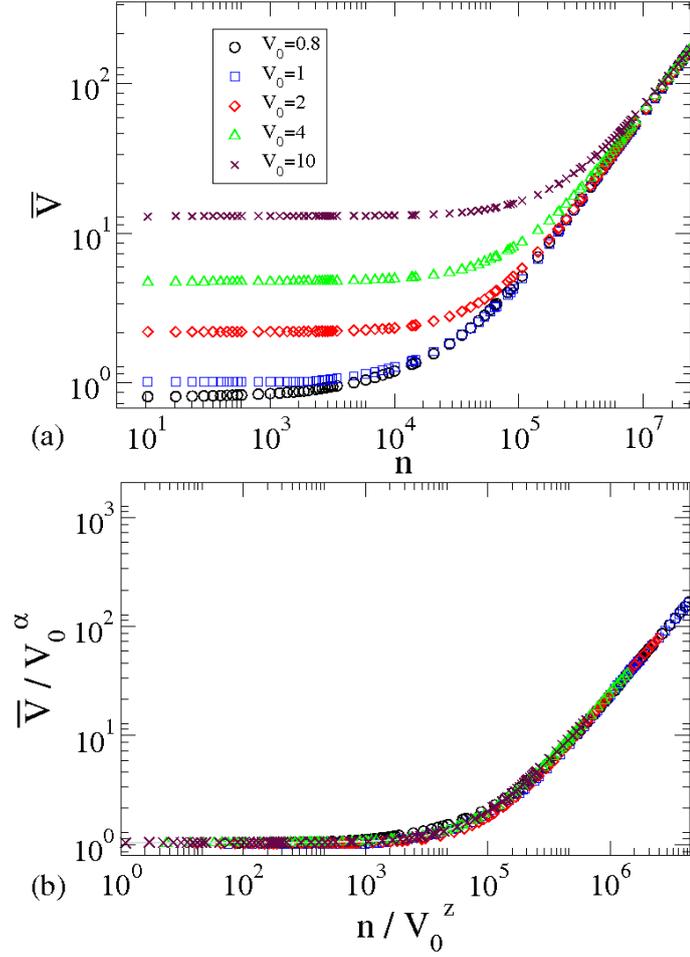


Figura 3.11: (a) Comportamento da velocidade média em função do número de colisões para diferentes valores de V_0 para o bilhar ovóide com geometria do tipo não breathing. (b) O colapso de todas as curvas em uma curva universal.

a $z_{nb} = 1.261(2)$. Outro modo de se obter o valor do expoente z é considerando a Eq. (3.51) e os prévios valores de α e β . Isso nos leva a $z = 1.25(1)$, que está claramente de acordo com o resultado da Fig. 3.10 (c). Por outro lado, para o caso breathing, obtemos o expoente α através de um ajuste por lei de potência no gráfico de $V_{sat} \times V_0$ [ver 3.10 (b)]. O valor obtido foi $\alpha = 0.992(1) \simeq 1$. O expoente de crescimento β , é obtido através da média dos valores encontrados a partir de uma lei de potência para a curva da velocidade média considerando valores após o platô constante e antes do segundo crossover (região onde todas as curvas crescem juntas). Para esse caso obtivemos dois valores para o expoente β . Os valores médios obtidos foram $\beta_1 = 0.468(3)$ e $\beta_2 = 0.371(4)$. Em seguida, obtivemos os valores do expoente dinâmico z por um ajuste em lei de potência a partir do gráfico de $n_x \times V_0$ [ver 3.10 (d)], o que nos leva a $z_1 = 2.11(1)$ e $z_2 = 2.6892(7)$. Outro modo de se obter o valor do expoente z é considerando a Eq. (3.51) e os prévios valores de α , β_1

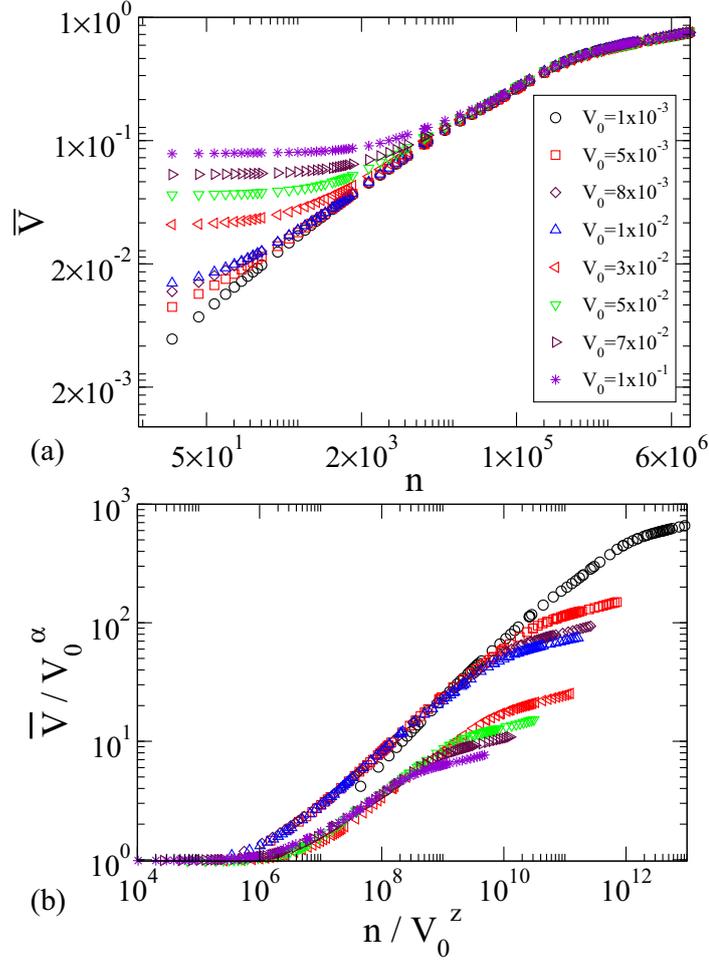


Figura 3.12: (a) Comportamento da velocidade média em função do número de colisões para diferentes valores de V_0 para o bilhar ovóide com geometria do tipo breathing. (b) O colapso das curvas em duas curvas universais.

e β_2 . Isso nos leva a $z_1 = 2.11(1)$ e $z_2 = 2.66(2)$. Estes resultados estão claramente de acordo com os resultados obtidos a partir da Fig. 3.10 (d).

Dados os valores dos expoentes de escala α , β e z podemos verificar nossas hipóteses de escala. Uma verificação final da validade de nossos argumentos de escala é mostrado na Fig. 3.11, onde cinco curvas diferentes da velocidade média foram colapsadas em uma curva universal. Para o caso breathing, como obtivemos dois expoentes diferentes para β e z é natural esperarmos encontrar duas regiões de colapso como pode ser observado em Fig. 3.12. Observamos também que nossas funções de escala são válidas apenas para regiões antes do segundo regime de crescimento. Para valores acima do segundo crossover os expoentes críticos são diferentes dos anteriores. Entretanto e por limite de tempo computacional, ao menos no momento, este caso não pode ser explorado. Esta região não apresenta bom colapso na Fig. 3.12 (b).

Capítulo 4

Dissipação: um mecanismo para suprimir aceleração de Fermi.

4.1 Resumo.

Neste capítulo discutimos alguns resultados numéricos para o bilhar ovóide com fronteira dependente do tempo considerando uma versão dissipativa. Descrevemos todos os procedimentos necessários para obtenção do mapa que fornece a dinâmica do modelo onde a partícula sofre efeitos de dissipação introduzido via coeficiente de amortecimento. Mostramos que a introdução de dissipação no sistemas causa uma drástica mudança no comportamento da partícula. Descrevemos o comportamento da velocidade média usando formalismo de escala para o caso *breathing* e caracterizamos um evento de crise de fronteira.

4.2 O Bilhar Ovóide Dependente do Tempo: choques inelásticos da partícula com a fronteira.

Neste capítulo, estudamos algumas propriedades dinâmicas de um bilhar ovóide dependente do tempo dissipativo. O modelo consiste em considerar a dinâmica de uma partícula clássica de massa m confinada em uma região fechada com a qual sofre colisões inelásticas. Quando a partícula atinge a fronteira ela pode perder energia/velocidade em ambas as componentes normal e tangencial. Descrevemos o sistema usando um mapa T em quatro dimensões tal que $(\theta_{n+1}, \alpha_{n+1}, V_{n+1}, t_{n+1}) = T(\theta_n, \alpha_n, V_n, t_n)$ onde as variáveis denotam, respectivamente, posição angular da partícula; o ângulo que a trajetória da

partícula faz com a tangente em θ imediatamente após a colisão; velocidade absoluta da partícula no instante da colisão e o tempo. Em coordenadas polares temos que a fronteira é dada por

$$R_f(\theta, p, \epsilon, \eta_1, \eta_2, t) = 1 + \eta_1 \cos(t) + \epsilon [1 + \eta_2 \cos(t)] \cos(p\theta) . \quad (4.1)$$

onde ϵ é a deformação da fronteira, p um número inteiro e η_1 e η_2 são os dois parâmetros relacionados à dependência temporal do sistema. Sabemos que dada uma condição inicial $(\theta_0, \alpha_0, V_0, t_0)$ podemos determinar toda dinâmica da partícula. Assim, as componentes cartesianas de $R(\theta_n, t_n)$ são dadas por

$$X(\theta_n) = [1 + \eta_1 \cos(t) + \epsilon [1 + \eta_2 \cos(t)] \cos(p\theta)] \cos(\theta_n) , \quad (4.2)$$

$$Y(\theta_n) = [1 + \eta_1 \cos(t) + \epsilon [1 + \eta_2 \cos(t)] \cos(p\theta)] \sin(\theta_n) . \quad (4.3)$$

O ângulo que a reta tangente à curva no ponto de coordenadas $X(\theta_n), Y(\theta_n)$ faz com a horizontal é dado por

$$\phi_n = \arctan \left[\frac{Y'(\theta_n, t_n)}{X'(\theta_n, t_n)} \right] , \quad (4.4)$$

onde $X'(\theta_n, t_n) = dX(\theta_n, t_n)/d\theta_n$ e $Y'(\theta_n, t_n) = dY(\theta_n, t_n)/d\theta_n$ são dados por

$$\begin{aligned} X'(\theta_n, t_n) &= [-\epsilon p [1 + \eta_2 \cos(t_n)] \sin(p\theta_n)] \cos(\theta_n) - \\ &- [1 + \eta_1 \cos(t) + \epsilon [1 + \eta_2 \cos(t)] \cos(p\theta_n)] \sin(\theta_n) , \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} Y'(\theta_n, t_n) &= [-\epsilon p [1 + \eta_2 \cos(t_n)] \sin(p\theta_n)] \sin(\theta_n) + \\ &+ [1 + \eta_1 \cos(t) + \epsilon [1 + \eta_2 \cos(t)] \cos(p\theta_n)] \cos(\theta_n) . \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$(4.7)$$

Uma vez conhecido os valores de ϕ_n e α_n a inclinação da reta tangente é dada por $\tan(\phi_n + \alpha_n)$. Com essa informação podemos escrever a expressão do vetor velocidade da partícula que é dada por

$$\vec{V}_n = |\vec{V}_n| [\cos(\phi_n + \alpha_n) \hat{i} + \sin(\phi_n + \alpha_n) \hat{j}] , \quad (4.8)$$

onde \hat{i} e \hat{j} são os vetores unitários referentes aos eixos X e Y respectivamente. A partir do vetor velocidade podemos determinar suas componentes cartesianas, ou seja,

$$X_p(t) = X(\theta_n) + |\vec{V}_n| \cos(\phi_n + \alpha_n)(t - t_n) , \quad (4.9)$$

$$Y_p(t) = Y(\theta_n) + |\vec{V}_n| \sin(\phi_n + \alpha_n)(t - t_n) . \quad (4.10)$$

onde o índice p representa partícula enquanto o índice f (ver Eq. 4.1) refere-se a fronteira. A distância da partícula em relação a origem é dada por

$$R_p(\theta_n, t_n) = \sqrt{X_p^2(t) + Y_p^2(t)} , \quad (4.11)$$

e o ângulo $\theta_p = \arctan[Y_p(t)/X_p(t)]$. Portanto, a posição angular da próxima colisão entre a partícula e a fronteira, isto é, θ_{n+1} é obtida numericamente via solução de

$$R_p(\theta_{n+1}, t_n) = R_f(\theta_{n+1}, t_n) . \quad (4.12)$$

O tempo da colisão $n + 1$ é obtido calculando a seguinte expressão

$$t_{n+1} = t_n + \frac{\sqrt{[X_p(\theta_{n+1}) - X_p(\theta_n)]^2 + [Y_p(\theta_{n+1}) - Y_p(\theta_n)]^2}}{|\vec{V}_n|} . \quad (4.13)$$

Para se obter a nova velocidade, devemos levar em consideração dois fatores: (i) o referencial da fronteira está se movendo; (ii) a partícula perde uma fração de sua velocidade a cada colisão em suas componentes tangencial e normal. Portanto, no instante da colisão as seguintes condições que devem ser obedecidas, de acordo com a nossa construção, são elas:

$$\vec{V}'_{n+1} \cdot \vec{T}_{n+1} = \beta \vec{V}'_n \cdot \vec{T}_{n+1} , \quad (4.14)$$

$$\vec{V}'_{n+1} \cdot \vec{N}_{n+1} = -\gamma \vec{V}'_n \cdot \vec{N}_{n+1} , \quad (4.15)$$

onde β e γ são coeficientes de amortecimento. Consideraremos $\gamma \in [0, 1]$ e $\beta \in [0, 1]$. O caso de colisão completamente inelastica acontece quando $\gamma = \beta = 0$ onde um único impacto é suficiente para encerrar toda dinâmica da partícula. Por outro lado, quando $\gamma = \beta = 1$, que corresponde a uma colisão completamente elástica, todos os resultados para o caso conservativo são recuperados. Ressaltando que as Eqs. (4.14) e (4.15) são escritas no referencial da parede em movimento. Para a nova posição angular, θ_{n+1} , os vetores unitários tangencial e normal são dados por

$$\vec{T}_{n+1} = \cos(\phi_{n+1})\hat{i} + \sin(\phi_{n+1})\hat{j} , \quad (4.16)$$

$$\vec{N}_{n+1} = -\sin(\phi_{n+1})\hat{i} + \cos(\phi_{n+1})\hat{j} . \quad (4.17)$$

Sendo assim, temos que as componentes normal e tangencial da velocidade no instante $n + 1$ são dados por

$$\vec{V}_{n+1} \cdot \vec{T}_{n+1} = \beta \vec{V}_n \cdot \vec{T}_{n+1} + (1 - \beta) \vec{V}_f(t_{n+1}) \cdot \vec{T}_{n+1} , \quad (4.18)$$

$$\vec{V}_{n+1} \cdot \vec{N}_{n+1} = -\gamma \vec{V}_n \cdot \vec{N}_{n+1} + (1 + \gamma) \vec{V}_f(t_{n+1}) \cdot \vec{N}_{n+1} , \quad (4.19)$$

onde $V_f(t_{n+1})$ corresponde à velocidade da fronteira a qual é escrita como

$$V_f(t_{n+1}) = [-\eta_1 \sin(t_{n+1}) - \eta_2 \epsilon \sin(t_{n+1}) \cos(p\theta_{n+1})][\cos(\theta_{n+1})\hat{i} + \sin(\theta_{n+1})\hat{j}] . \quad (4.20)$$

Portanto temos que

$$\vec{V}_{n+1} = \sqrt{(V_{n+1} \cdot \vec{T}_{n+1})^2 + (V_{n+1} \cdot \vec{N}_{n+1})^2} . \quad (4.21)$$

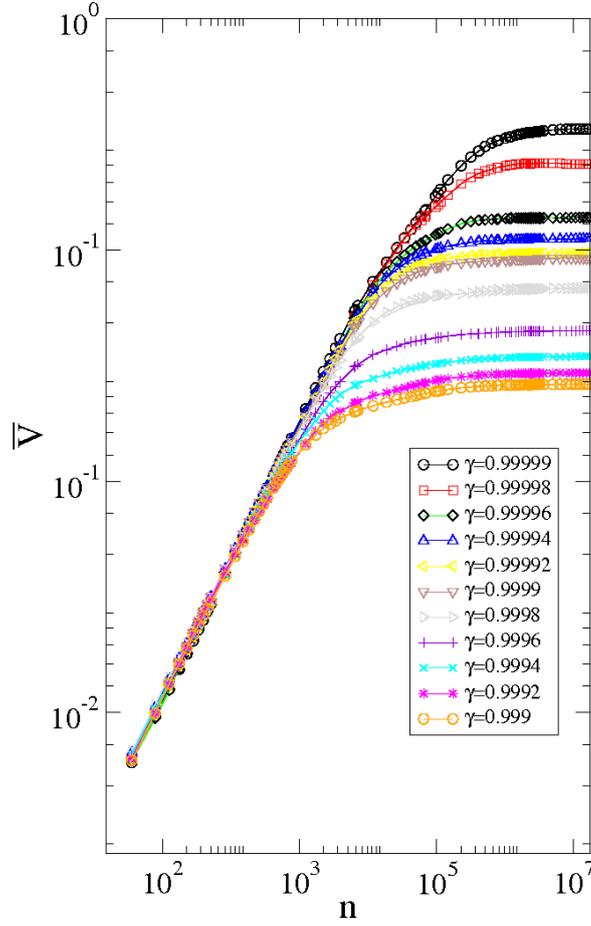


Figura 4.1: (a) Comportamento de $\bar{V} \times n$ para diferentes valores de γ como indicado na figura. Os parâmetros de controle usados na construção da figura foram $p = 2$, $\epsilon = 0.4$, $\eta_1 = \eta_2 = 0.001$ e $\beta = 1$.

e finalmente o ângulo α_{n+1} é dado por

$$\alpha_{n+1} = \arctan \left[\frac{\vec{V}_{n+1} \cdot \vec{N}_{n+1}}{\vec{V}_{n+1} \cdot \vec{T}_{n+1}} \right]. \quad (4.22)$$

Após obtermos as expressões que descrevem a dinâmica do sistema, podemos finalmente estudar o comportamento de uma partícula no interior de um bilhar ovóide com fronteira dependente do tempo sob efeito de dissipação introduzida via colisões inelásticas.

4.2.1 Propriedades de Escala: Regime de baixa dissipação.

Caracterizaremos o comportamento da velocidade média da partícula em termos do número de colisões com a fronteira para diferentes valores do parâmetro de controle γ . De fato, um ponto importante que deve ser levado em consideração é a presença de dissipação

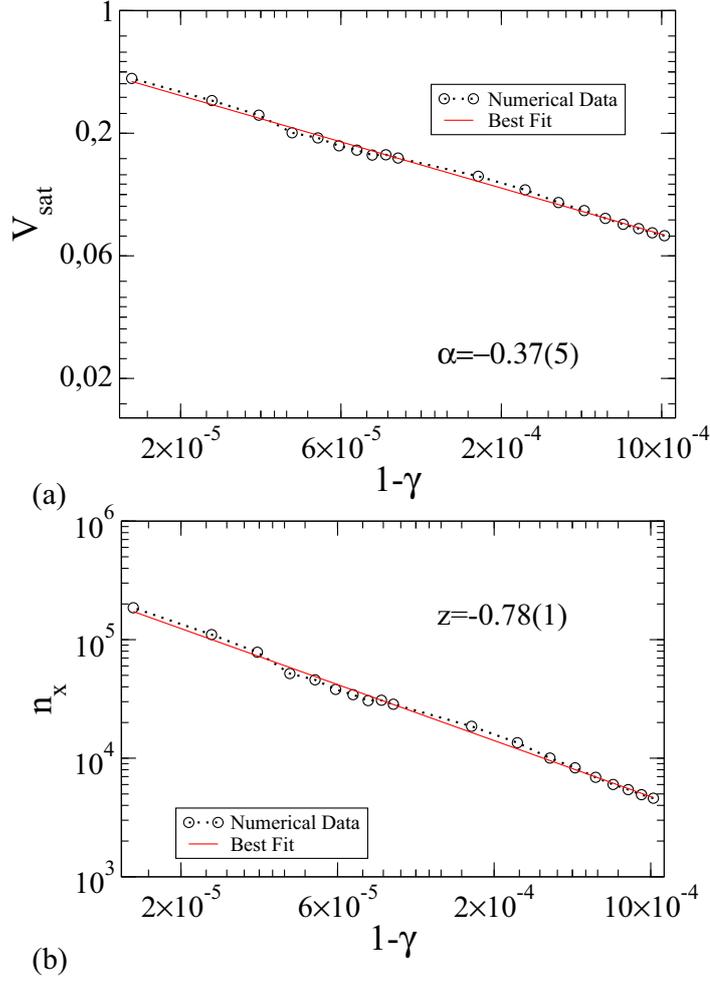


Figura 4.2: (a) Comportamento de $\bar{V}_{sat} \times (1 - \gamma)$. (b) Comportamento do número de crossover n_x em função de $(1 - \gamma)$. Um ajuste por lei de potência em (a) nos fornece $\alpha = -0.37(5)$ e em (b) $z = -0.78(1)$.

em sistemas que exibem aceleração de Fermi. Assim, pretendemos evidenciar, via resultados numéricos, que a presença de choques inelásticos da partícula com a fronteira foi condição suficiente para suprimir o fenômeno de aceleração de Fermi. Esse estudo é uma confirmação, em um sistema bidimensional, de uma conjectura proposta em um sistema estocástico unidimensional [59] e confirmado em um sistema determinístico unidimensional [60, 61]. Mostramos que a introdução de choques parcialmente inelásticos induz o sistema a exibir uma transição de fase a qual denotaremos como uma transição de crescimento ilimitado de energia para crescimento limitado de energia. Para caracterizarmos esta transição de fases, é interessante descrevermos as propriedades de \bar{V} em função de $(1 - \gamma)$ ao invés de γ . O procedimento adotado para o cálculo da velocidade média foi escolher a velocidade inicial como sendo $V_0 = 10^{-3}$ e escolhermos aleatoriamente $\alpha_0 \in [0, \pi]$, $\theta_0 \in [0, 2\pi]$, $t_0 \in [0, 2\pi]$. Os parâmetros de controle usados foram $\eta_1 = \eta_2 = 0.001$ e $\beta = 1$.

O comportamento de $\bar{V} \times n$ para diferentes valores de γ é mostrado na Fig. 4.1. Podemos observar na Fig. 4.1 dois tipos de comportamentos. Para tempos curtos, isto é, pequenos valores de n , a velocidade média cresce de acordo com uma lei de potência. Após um número de iterações típico crossover, n_x , a velocidade média se aproxima de um valor de saturação para n suficientemente grande. Como sabemos, sistemas que apresentam este tipo de comportamento podem ser descritos usando formalismo de escala. Assim, baseado no comportamento observado na Fig. 4.1 podemos propôr as seguintes hipóteses de escala:

1. Quando $n \ll n_x$ a velocidade média é

$$\bar{V} \propto n^\xi , \quad (4.23)$$

2. A medida que o número de iterações aumenta, $n \gg n_x$, a velocidade média se aproxima de um regime de saturação, que é descrito por

$$\bar{V}_{sat} \propto (1 - \gamma)^\alpha , \quad (4.24)$$

3. O número de iterações de crossover é escrito como

$$n_x \propto (1 - \gamma)^z , \quad (4.25)$$

onde os expoentes α , ξ e z são expoentes críticos.

Após considerarmos essas três hipóteses iniciais podemos descrever a velocidade média em termos de uma função homogênea generalizada do tipo

$$\bar{V}[n, (1 - \gamma)] = l\bar{V}[l^a n, l^b (1 - \gamma)] , \quad (4.26)$$

onde a e b são expoentes de escalas que devem, em princípio, estar relacionados aos expoentes críticos α , ξ e z . Aqui l é um fator de escala. Escolhendo $l^a n = 1$, podemos reescrever a Eq. (4.26) como

$$\bar{V}[n, (1 - \gamma)] = n^{-1/a} \bar{V}_1[(n)^{-b/a} (1 - \gamma)] , \quad (4.27)$$

onde a função $\bar{V}_1[(n)^{-b/a} (1 - \gamma)] = \bar{V}[1, (n)^{-b/a} (1 - \gamma)]$ é assumida ser constante para $n \ll n_x$. Comparando Eqs. (4.23) e (4.27), obtemos $\xi = -1/a = 0.48(3) \simeq 1/2$. O expoente ξ é obtido por um ajuste por lei de potência para as curvas da velocidade média onde consideramos $\gamma \in [0.999, 0.99999]$. Considerando $l^b (1 - \gamma) = 1$, temos $l = (1 - \gamma)^{-1/b}$ e a Eq. (4.26) é reescrita como

$$\bar{V}[n, (1 - \gamma)] = (1 - \gamma)^{-1/b} \bar{V}_2[(1 - \gamma)^{-a/b} n] , \quad (4.28)$$

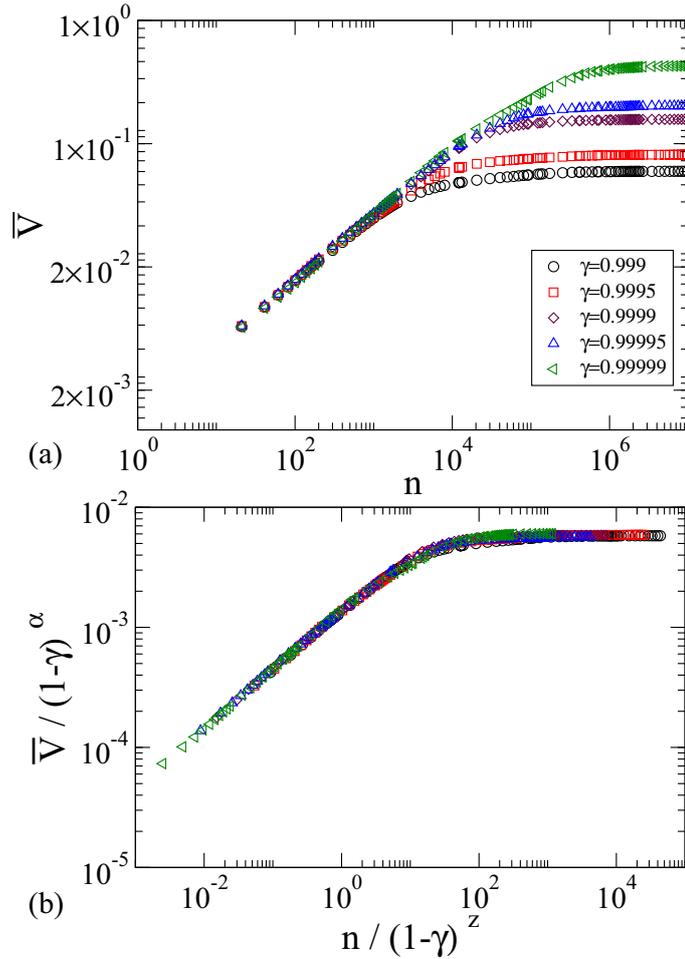


Figura 4.3: (a) Diferentes curvas de \bar{V} para 5 parâmetros de controle diferentes. (b) O colapso de todas as curvas em uma curva universal.

onde assumimos $\bar{V}_2[(1-\gamma)^{-a/b}n] = \bar{V}[(1-\gamma)^{-a/b}n, 1]$ ser constante para $n \gg n_x$. Comparando Eqs. (4.24) e (4.28), obtemos $-1/b = \alpha = -0.37(5)$ [ver Fig. 4.2 (a)]. Conhecendo as duas expressões para o fator de escala l , podemos finalmente obter a relação para o expoente z , o qual será dado por

$$z = \frac{\alpha}{\xi} = -0.77(1), \quad (4.29)$$

que está em bom acordo com o valor obtido numericamente, [ver Fig. 4.2 (b)]. Finalmente, para verificar a validade das nossas hipóteses de escala, uma vez que os expoentes α , ξ e z são conhecidos, podemos colapsar todas as curvas em uma curva universal, mostrado na Fig. 4.3. Além de mostrarmos que o sistema é invariante de escala mostramos também que a dissipação causa uma drástica mudança no comportamento de \bar{V} no sentido que o crescimento ilimitado de energia não pode mais ser observado uma vez que para tempos longos a \bar{V} apresenta um regime de saturação, Fig. 4.1. Este resultado pode ser comprovado analiticamente se observarmos as Eq. (4.24) e (4.25) e os valores dos expoentes α e z . Note que tanto α quanto z são negativos, o que nos leva a $\bar{V}_{sat} \propto 1/(1-\gamma)^{|\alpha|}$

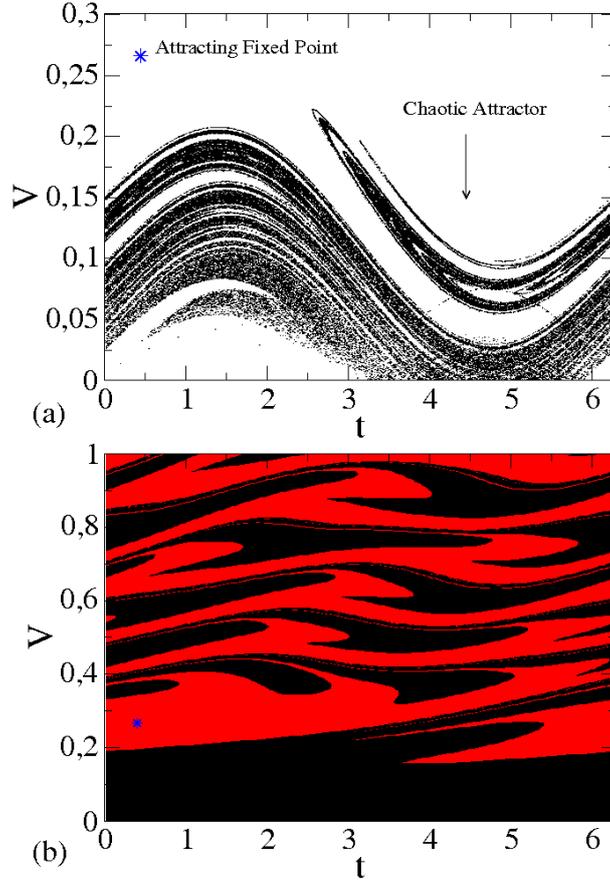


Figura 4.4: (a) Ponto Fixo atrativo indicado por * e o atrator caótico; (b) bacia de atração para o ponto fixo (vermelho) e para o atrator caótico (preto). Os parâmetros de controle utilizados foram $\epsilon = 0.2$, $p = 2$, $\beta = 0.25$, $\gamma = 0.8899$ e $\eta_1 = \eta_2 = 0.05$.

e $n_x \propto 1/(1 - \gamma)^{|z|}$. Observe que quanto $\gamma \rightarrow 1$, implica que $\bar{V}_{sat} \rightarrow \infty$ e $n_x \rightarrow \infty$ recuperando os resultados para o caso conservativo, ou seja, o fenômeno de aceleração de Fermi está presente no sistema. Por outro lado, quando γ é ligeiramente menor que 1, \bar{V} possui um valor de saturação \bar{V}_{sat} assim como um número de crossover n_x característico. Confirmando, assim, que ao introduzirmos dissipação via choques inelásticos no modelo por menor que ela possa ser esta é uma condição suficiente para suprimir aceleração de Fermi.

4.2.2 Crises de Fronteira: Regime de alta dissipação.

Vamos considerar nesta seção a intensidade de dissipação suficientemente alta. Consideramos como alta pois estudamos casos em que $\beta = 0.25$. Isso significa que a cada

colisão a partícula “perde” mais de 75% de sua velocidade. Neste regime de alta dissipação, caracterizaremos um evento de crise de fronteira [65, 66, 67]. Um evento de crise de fronteira acontece quando dois ramos da variedade estável, de um ponto fixo do tipo sela, que estabelecem os limites das fronteiras das bacias de atração, colidem com as bordas do seu atrator caótico. É sabido que para um ponto fixo do tipo sela existem pelo menos dois tipos de variedades: (a) estáveis e (b) instáveis. As variedades instáveis são formadas por uma família de trajetórias que se afastam-se do ponto de sela. Uma delas pode vir a formar o atrator caótico (ou visitar a região do antigo atrator caótico após o evento de crise), enquanto a outra evolui em direção ao ponto fixo atrativo. Essas variedades são obtidas a partir da iteração do mapa T com condições iniciais apropriadas. Ou seja, primeiramente devemos encontrar a expressão para o ponto fixo do tipo sela. Em seguida, calculamos seus respectivos auto-valores e auto-vetores. Iterando o mapa T e fazendo pequenos incrementos nas componentes dos auto-vetores podemos obter as variedades instáveis para o ponto de sela. Por outro lado, a construção das variedades estáveis, que estabelecem as fronteiras entre o ponto fixo e o atrator caótico, é um pouco mais complicada visto que precisamos obter a inversa T^{-1} . O procedimento para obtenção das variedades estáveis é o mesmo adotado para as variedades instáveis entretanto ao invés de iterarmos o mapa T devemos iterar sua inversa T^{-1} . Uma vez que, o mapa que descreve a dinâmica do modelo do bilhar ovóide dependente do tempo dissipativo é um tanto quanto complicado, pois exhibe várias não linearidades, não encontramos a inversa analiticamente [para maiores detalhes veja a caracterização de um evento de crise de fronteira para um modelo unidimensional, o modelo Fermi-Ulam no Apêndice - B].

Como podemos ver na Fig. 4.4 (a) existem pelo menos dois tipos de atratores: (i) um ponto fixo atrativo; (ii) um atrator aparentemente caótico. Enfatizamos que para caracterizarmos o atrator como caótico devemos determinar os expoentes de Lyapunov sendo que pelo menos um deles deve ser positivo. Salientamos que, devido as não linearidades do sistema, outros atratores podem também existir. Entretanto, caso estes atratores existam para os parâmetros de controle utilizados na Fig. 4.4 (a), suas bacias de atração são muito pequenas de modo que não foram detectadas em nossas simulações. É natural esperarmos encontrar duas diferentes bacias de atração, como é mostrado na Fig. 4.4 (b) (a estrela indica a posição do ponto fixo na bacia de atração). As fronteiras das bacias de atração, tanto para o atrator caótico quanto para o ponto fixo atrativo, são geradas a partir dos dois ramos da variedade estável do ponto de sela. Ao aumentarmos o valor do parâmetro γ , que é equivalente a reduzir a intensidade da dissipação, os dois ramos da variedade estável *colidem* com as bordas de seu atrator caótico, Fig. 4.5 (b). Essa colisão implica na súbita destruição do atrator caótico e também de sua bacia de atração. Este evento recebe o nome de crise de fronteira. Para o conjunto de parâmetros de controle usados na

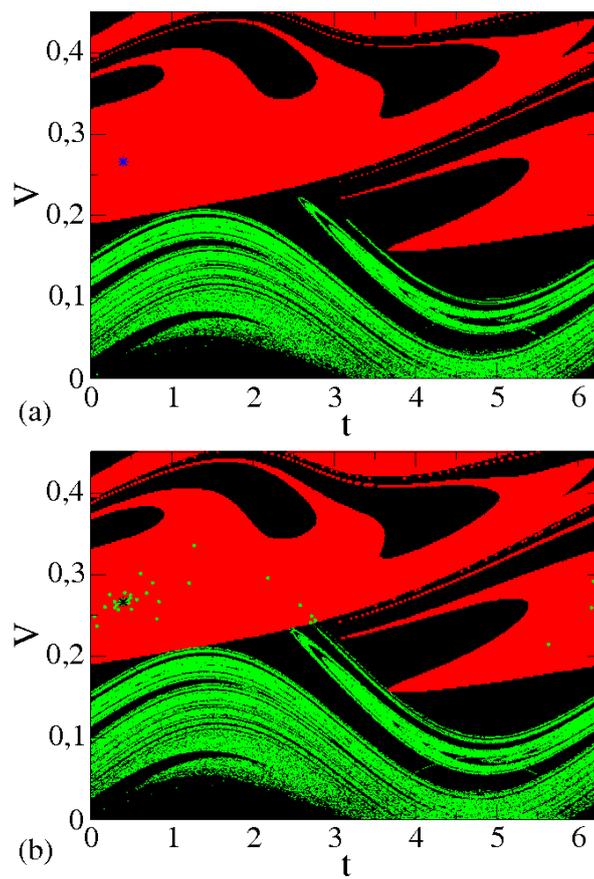


Figura 4.5: *Bacia de atração para o atrator caótico e o ponto fixo atrativo; (a) o atrator caótico (verde) para o parâmetro $\gamma = 0.8899$ (antes da crise de fronteira), (b) o atrator caótico (verde) para o parâmetros $\gamma = 0.8906$ (após a crise de fronteira). Os parâmetros de controle utilizados para construir a bacia de atração foram $\epsilon = 0.2$, $p = 2$, $\beta = 0.25$ e $\eta_1 = \eta_2 = 0.05$.*

Fig. 4.5 a crise de fronteira ocorre para $\gamma > 0.8899$.

Capítulo 5

CONCLUSÕES.

Neste trabalho estudamos um modelo de bilhar clássico nas versões estática, dependente temporal e dependente do tempo com dissipação. Para ambos os casos, obtivemos as expressões de um mapa que descreve a dinâmica do modelo. Para o caso estático, mostramos que a estrutura do espaço de fases é do tipo mista, no sentido que, dependendo tanto da combinação dos parâmetros de controle e das condições iniciais, ilhas KAM normalmente rodeadas por um mar de caos, podendo estar limitadas ou não por um conjunto de curvas invariantes do tipo spanning, podem ser observadas coexistindo. Encontramos uma relação de parâmetro de controle crítico onde as curvas invariante do tipo spanning são destruídas. Estudamos também o comportamento do expoente positivo de Lyapunov para órbitas caóticas.

Após introduzirmos dependência temporal na fronteira obtivemos o mapa que descreve a evolução do sistema. Este por sua vez é descrito em termos de quatro variáveis dinâmicas: o instante imediatamente após a colisão com a fronteira; o ângulo que a trajetória da partícula faz com a tangente no instante da colisão; a posição angular da partícula ao longo da fronteira e a velocidade da partícula. Descrevemos o comportamento da velocidade média da partícula em função do número de colisões com a fronteira. Mostramos que quando a dependência temporal da fronteira é do tipo breathing, isto é, a forma geométrica da fronteira não se modifica, o fenômeno conhecido como aceleração de Fermi é observado. Entretanto a inclinação do crescimento da velocidade para o caso breathing é significativamente menor quando comparado ao caso não breathing. Nossos resultados servem para reforçar a conjectura Loskutov-Ryabov-Akinshin [24] que diz: *“Dinâmica caótica em bilhares com fronteira fixa é condição suficiente para aceleração de Fermi quando uma perturbação na fronteira é introduzida”*. Também descrevemos o comportamento da velocidade média da partícula usando formalismo de escala cuja validade foi confirmada com o colapso de todas as curvas em uma curva universal.

Finalmente, introduzimos dissipação no modelo via coeficientes de amortecimento (choques inelásticos). Mostramos que a introdução de dissipação causa uma drástica mudança na dinâmica do sistema. Para regimes de alta dissipação, regimes onde a partícula perde mais de 75% de sua velocidade em cada colisão, caracterizamos um evento de crise de fronteira. Mostramos que tal fenômeno ocorre quando o atrator caótico colide com a borda de sua bacia de atração resultando na imediata destruição do atrator caótico e sua bacia de atração. Por outro lado, para regimes de baixa dissipação, o comportamento da velocidade da partícula sofre uma expressiva mudança quando comparado ao caso conservativo, isto é, o fenômeno de aceleração de Fermi não é mais observado. Tais resultados permitem confirmar, para sistemas bidimensionais, a conjectura de Leonel [59] proposta para sistemas unidimensionais. Descrevemos também o comportamento da velocidade média de órbitas caóticas usando propriedades de escala. Além disso, mostramos que existe uma relação entre os expoentes críticos α , ξ e z . Nossas hipóteses de escala foram confirmadas com o perfeito colapso de todas as curvas de \bar{V} em uma curva universal. Os resultados obtidos para o comportamento da velocidade média em função de n nos permite concluir baseado tanto em resultados numéricos quanto analíticos que quando introduzimos dissipação no modelo não observamos mais o crescimento ilimitado de energia, portanto confirmando assim os objetivos de nosso trabalho em mostrar que ao introduzirmos dissipação no sistema, via colisões inelásticas, em sistemas que apresentam aceleração de Fermi esta é uma condição suficiente para suprimir o crescimento ilimitado de energia.

Capítulo 6

APÊNDICE - A - Mudança de Concavidade.

Neste Apêndice apresentaremos os procedimentos necessários para obtenção da expressão do parâmetro de controle crítico ϵ_c . Quando aumentamos o valor do parâmetro de controle ϵ , a forma da fronteira muda (veja Figs. 2.1). A partir da análise da curvatura, podemos obter analiticamente a expressão do parâmetro crítico ϵ_c quando a curvatura da fronteira muda de positiva ($\kappa > 0$) para negativa ($\kappa < 0$). Em coordenadas polares a expressão para $\kappa(\theta)$ é dada por

$$\kappa(\theta) = \frac{X'(\theta)Y''(\theta) - X''(\theta)Y'(\theta)}{[X'^2(\theta) + Y'^2(\theta)]^{\frac{3}{2}}}. \quad (6.1)$$

Para o caso geral, as expressões para $X'(\theta)$, $Y'(\theta)$, $X''(\theta)$ e $Y''(\theta)$ são

$$\begin{aligned} X'(\theta) &= \frac{dR(\theta)}{d\theta} \cos(\theta) - R(\theta) \sin(\theta), \\ Y'(\theta) &= \frac{dR(\theta)}{d\theta} \sin(\theta) + R(\theta) \cos(\theta), \\ X''(\theta) &= \frac{d^2R(\theta)}{d\theta^2} \cos(\theta) - 2\frac{dR(\theta)}{d\theta} \sin(\theta) - R(\theta) \cos(\theta), \\ Y''(\theta) &= \frac{d^2R(\theta)}{d\theta^2} \sin(\theta) + 2\frac{dR(\theta)}{d\theta} \cos(\theta) - R(\theta) \sin(\theta), \end{aligned} \quad (6.2)$$

onde $dR(\theta)/d\theta$ e $d^2R(\theta)/d\theta^2$ são dados por

$$\begin{aligned} \frac{dR(\theta)}{d\theta} &= \frac{(1 - e^2)e \sin(\theta)}{[1 + e \cos(\theta)]^2} - \epsilon p \sin(p\theta), \\ \frac{d^2R(\theta)}{d\theta^2} &= \frac{2(1 - e^2)e^2 \sin^2(\theta)}{[1 + e \cos(\theta)]^3} + \frac{(1 - e^2)e \cos(\theta)}{[1 + e \cos(\theta)]^2} - \epsilon p^2 \cos(p\theta). \end{aligned} \quad (6.3)$$

Obtemos ϵ_c considerando o caso onde $\kappa' = 0$. A expressão para ϵ_c em função de e e p é

$$\epsilon_c = \frac{1 - e}{(1 + e)(1 + p^2)}, \quad p > 1. \quad (6.4)$$

Assim, quando $\epsilon < \epsilon_c$ a fronteira é estritamente convexa $\kappa > 0$, por outro lado, se $\epsilon > \epsilon_c$ a fronteira apresentará regiões de curvatura negativa $\kappa < 0$. Para o caso $e = 0$ recuperamos a expressão de ϵ_c obtido para o bilhar ovóide.

Capítulo 7

APÊNDICE - B - Crise de Fronteira no modelo Fermi-Ulam.

Consideraremos, uma versão dissipativa do Modelo Fermi-Ulam no qual uma partícula clássica de massa m está confinada entre duas paredes rígidas, estando uma delas fixa e a outra movendo-se periodicamente no tempo. Assumiremos que a partícula sofre colisões inelásticas com ambas paredes. Para a parede fixa, introduziremos um coeficiente $\alpha \in [0, 1]$, enquanto que para a parede móvel consideraremos $\beta \in [0, 1]$. No limite quando $\alpha = \beta = 1$ recupera-se todos os resultados do caso conservativo. Para $\alpha = 0$, o que corresponde a uma colisão completamente inelástica tem-se que uma única colisão é suficiente para terminar toda a dinâmica do sistema. Por outro lado, se $\beta = 0$, equivale a partícula sofrer uma colisão completamente inelástica com a parede móvel e esta re-lançar a partícula no sistema com velocidade igual a velocidade máxima da parede móvel. A dinâmica deste modelo é descrita através de um mapa bidimensional com três parâmetros de controle. Mostraremos que a introdução de dissipação destrói a estrutura do espaço de fase incluindo a ocorrência de eventos de crises [65, 66, 67].

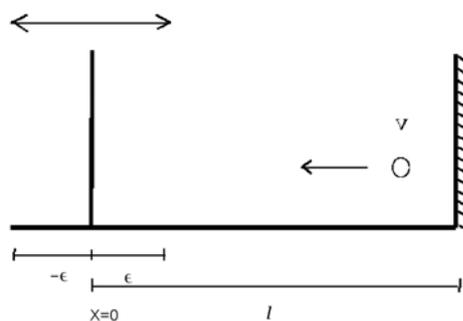


Figura 7.1: Ilustração do modelo Fermi-Ulam.

Começaremos descrevendo o modelo e os procedimentos necessários para a construção

do mapa. O modelo consiste basicamente de uma partícula confinada entre duas paredes rígidas. Uma delas está fixa em $x = l$ enquanto a outra move-se periodicamente de acordo com a equação $x_w(t) = \varepsilon \cos(\omega t)$ onde ε corresponde à amplitude de oscilação e ω é a frequência da parede móvel. O movimento da partícula não sofre influência de qualquer campo externo. Assumiremos que as colisões com ambas paredes são inelásticas. Os coeficientes de restituição, tanto da parede móvel (β) quanto da parede fixa (α) pertencem ao intervalo $(0,1)$.

A dinâmica do modelo é descrita em termos de um mapa bidimensional não linear nas variáveis velocidade (v) e tempo (t). Definindo as seguintes variáveis adimensionais, $\phi_n = \omega t_n$, $V_n = v_n/(\omega l)$ e $\epsilon = \varepsilon/l$. Temos que a dinâmica é dada por um mapa T tal que $T(V_n, \phi_n) = (V_{n+1}, \phi_{n+1})$. O mapa é escrito como sendo

$$T : \begin{cases} V_{n+1} = V_n^* - (1 + \beta)\epsilon \sin(\phi_{n+1}) \\ \phi_{n+1} = \phi_n + \Delta T_n \pmod{2\pi} \end{cases}, \quad (7.1)$$

onde as expressões correspondentes a ambos V_n^* e ΔT_n dependem de qual tipo de colisão que ocorre, isto é : (i) colisões sucessivas e ; (ii) colisões não sucessivas. Para o caso de colisões sucessivas as expressões para V_n^* e ΔT_n são dadas por $V_n^* = -\beta V_n$ e $\Delta T_n = \phi_c$. O valor de ϕ_c é obtido numericamente como solução da equação $G(\phi_c) = 0$ com $\phi_c \in (0, 2\pi]$. A função $G(\phi_c)$ é obtida a partir da condição de que a posição da partícula seja a mesma posição da parede em movimento no instante do choque. A equação $G(\phi_c)$ é escrita como sendo:

$$G(\phi_c) = \epsilon \cos(\phi_n + \phi_c) - \epsilon \cos(\phi_n) - V_n \phi_c. \quad (7.2)$$

Entretanto se a função $G(\phi_c)$ não tem raiz no intervalo $\phi_c \in (0, 2\pi]$, concluímos que a partícula deixa a zona de colisão sem sofrer uma colisão sucessiva.

Por outro lado, considerando o caso de colisões não sucessivas as expressões para V_n^* e ΔT_n são $V_n^* = \beta\alpha V_n$ e $\Delta T_n = \phi_d + \phi_e + \phi_c$, onde os termos auxiliares são:

$$\phi_d = \frac{1 - \epsilon \cos(\phi_n)}{V_n}, \quad \phi_e = \frac{1 - \epsilon}{\alpha V_n}. \quad (7.3)$$

A expressão de ϕ_d corresponde ao tempo de viagem gasto pela partícula até a parede fixa e após sofrer uma colisão com esta, a partícula é refletida com velocidade $-\alpha V_n$ para esquerda. Então, o termo ϕ_e denota o tempo gasto pela partícula até entrar novamente na zona de colisão, $x \in [-\varepsilon, \varepsilon]$. Finalmente, ϕ_c é obtido numericamente como solução da equação $F(\phi_c) = 0$ com $F(\phi_c)$ dado por

$$F(\phi_c) = \epsilon \cos(\phi_n + \phi_d + \phi_e + \phi_c) - \epsilon + \alpha V_n \phi_c. \quad (7.4)$$

A equação acima é obtida da condição de igualdade da posição da partícula e da parede móvel. A fase ϕ_c deve pertencer no intervalo $\phi_c \in [0, 2\pi]$.

Após uma análise cuidadosa do mapa T e levando em conta o caso (i), temos que o determinante da matriz Jacobiana é

$$\det(J) = \beta^2 \left[\frac{V_n + \epsilon \sin(\phi_n)}{V_{n+1} + \epsilon \sin(\phi_{n+1})} \right], \quad (7.5)$$

enquanto que para o caso (ii), temos

$$\det(J) = \alpha^2 \beta^2 \left[\frac{V_n + \epsilon \sin(\phi_n)}{V_{n+1} + \epsilon \sin(\phi_{n+1})} \right]. \quad (7.6)$$

Os resultados acima confirmam que apenas para o caso limite, $\alpha = \beta = 1$, o espaço de fases preserva área.

Para descrever a ocorrência de eventos de crise, devemos conhecer exatamente a localização dos pontos de sela. Assim, para obter a localização dos pontos fixos (sela, nó, etc), devemos resolver as equações $V_{n+1} = V_n$ e $\phi_{n+1} = \phi_n$. A solução dessas equações nos fornece que

$$V = \left[\frac{1 + \beta}{\beta\alpha - 1} \right] \epsilon \sin(\phi), \quad (7.7)$$

$$\phi = -\arccos \left[\frac{\epsilon - \gamma \sqrt{\epsilon^2 + \gamma^2 - 1}}{\epsilon^2 + \gamma^2} \right], \quad (7.8)$$

onde o termo auxiliar γ é definido como sendo

$$\gamma = \frac{2\epsilon\alpha m\pi}{\alpha + 1} \left[\frac{1 + \beta}{\beta\alpha - 1} \right], \quad m = 1, 2, 3... \quad (7.9)$$

Sabemos que para um ponto fixo do tipo sela existem dois tipos de variedades: (a) estáveis e (b) instáveis. As variedades instáveis são trajetórias que se afastam do ponto de sela, uma delas forma o atrator caótico, enquanto a outra espirala em direção ao ponto fixo atrativo. Essas variedades são obtidas a partir da iteração do mapa T com condições iniciais apropriadas. Por outro lado, a construção das variedades estáveis, que estabelecem as fronteiras entre o ponto fixo e o atrator caótico, é um pouco mais complicada visto que precisamos obter a inversa de T . Felizmente, o mapa que descreve a dinâmica do Modelo Fermi-Ulam é bastante simples de modo que, podemos obter a inversa de T , a qual chamaremos de T^{-1} . Portanto temos que $T^{-1}(V_{n+1}, \phi_{n+1}) = (V_n, \phi_n)$ e, conseqüentemente, a expressão para a velocidade é dada por

$$V_n = \frac{1}{\beta\alpha} [V_{n+1} + (1 + \beta)\epsilon \sin(\phi_{n+1})]. \quad (7.10)$$

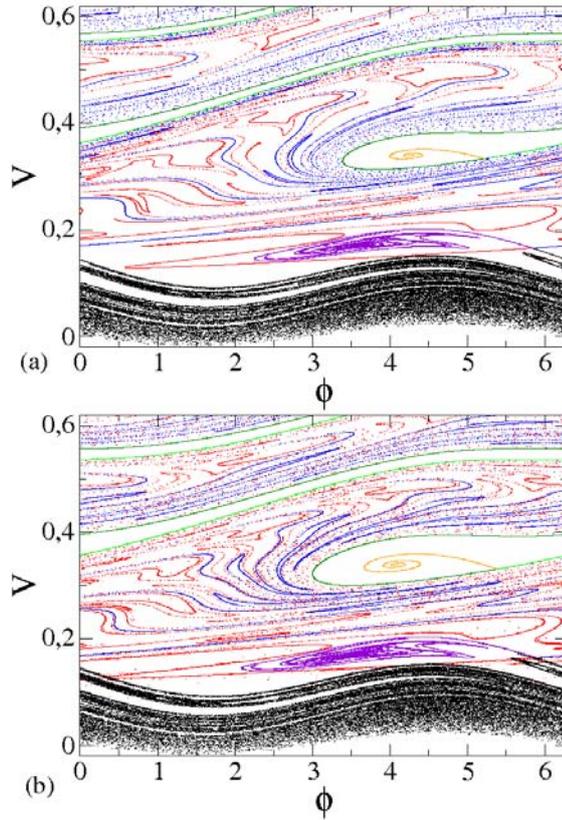


Figura 7.2: *Variedades Estáveis e Instáveis para um ponto de sela considerando $m = 1$ e $m = 2$. Os parâmetros de controle utilizados foram $\epsilon = 0.02$, $\beta = 1$ e: (a) $\alpha = 0.8947$ (imediatamente antes da crise); (b) $\alpha = 0.905$ (imediatamente após a crise).*

Por outro lado a fase ϕ_n é obtida a partir da condição $h(\phi_n) = 0$, onde $h(\phi_n)$ é escrita como sendo

$$\begin{aligned}
 h(\phi_n) &= [V_{n+1} + (1 + \beta)\epsilon \sin(\phi_{n+1})](\phi_n - \phi_{n+1}) + \beta(1 + \alpha) \\
 &- \beta\alpha\epsilon \cos(\phi_n) - \beta\epsilon \cos(\phi_{n+1}) .
 \end{aligned}
 \tag{7.11}$$

A solução da Eq. (7.11) foi obtida numericamente utilizando o método de Newton.

Podemos ver na Fig 7.2 o comportamento das variedades estáveis e instáveis para um ponto fixo do tipo sela dados pelas Eqs. (7.10) e (7.11). Vemos que os dois ramos das variedades instáveis evoluem de modo que uma delas gera o ponto fixo atrativo enquanto o outro gera o atrator caótico. Por outro lado, os dois ramos da variedade estável (obtidos a partir de T^{-1}) geram as fronteiras das bacias de atração tanto para o atrator caótico quanto para o ponto fixo atrativo. Se incrementarmos o valor do parâmetro α , que é equivalente a reduzir a força da dissipação, os dois ramos da variedade estável que estabelecem os limites das fronteiras das bacias colidem com as bordas do seu atrator caótico. Essa colisão implica na súbita destruição do atrator caótico e também de sua bacia de atração. Este evento recebe o nome de crise de fronteira.

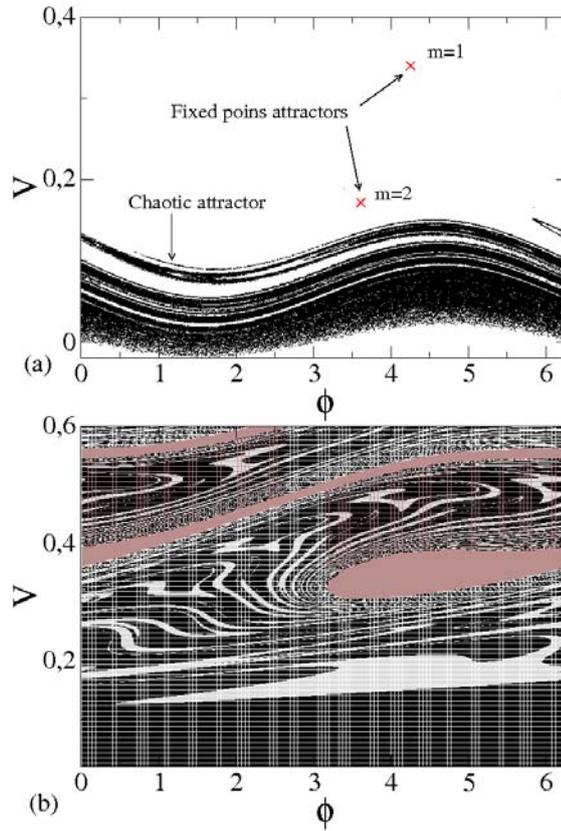


Figura 7.3: (a) Pontos fixos atrativos para $m = 1$ e $m = 2$ e um atrator caótico; (b) Suas correspondentes bacias de atração. A região em preto corresponde à bacia de atração do atrator caótico; a de cor cinza é a bacia de atração para o ponto fixo de $m = 2$; finalmente a região marrom corresponde à bacia de atração do ponto fixo $m = 1$

Antes do evento de crise existem dois tipos de atratores, isto é: (i) dois pontos fixos atrativos e, (ii) um atrator caótico, como podem ser vistos na Fig 7.3 (a). Assim, podemos esperar que devem haver três diferentes bacias de atração, como é mostrado na Fig 7.3 (b).

O procedimento utilizado para obter a bacia da atração para os pontos fixos e para o atrator caótico consiste em iterar o mapeamento dentro de uma grade de condições iniciais no plano $V \times \phi$ e observar seu comportamento assintótico. Assim, para V utilizamos o intervalo $V \in [-\epsilon, 0.6]$ e $\phi \in [0, 2\pi]$. Ambos intervalos de V e de ϕ foram divididos em 400 partes, conduzindo a um total de 16×10^4 condições iniciais diferentes. Para uma dada combinação de parâmetros de controle, cada condição inicial foi iterada até 1×10^5 vezes.

Como uma breve conclusão, estudamos o modelo dissipativo do acelerador de Fermi. Obtivemos o mapa que descreve sua dinâmica juntamente com sua inversa. Mostramos que o modelo preserva área do espaço de fase somente para o caso em que $\alpha = \beta = 1$.

Obtivemos um cruzamento homoclínico e caracterizamos um evento de crise. Finalmente, mostramos que a introdução de dissipação provoca uma drástica consequência para o modelo. Além do modelo não preservar área como no caso conservativo, observamos uma abrupta destruição do atrator caótico. Mostramos, ainda, que essa destruição é causada por a um evento de crise de fronteira.

Bibliografia

- [1] Birkhoff G. D. Dynamical Systems Amer. Math. Soc. Colloquium Publ. 9. Providence: American Mathematical Society. 1927.
- [2] Y. G. Sinai, "Dynamical systems with elastic reflections". Russ. Math. Surveys., vol. 25, pp.137-189, 1970.
- [3] L. A. Bunimovich, "On Ergodic Properties of Certain Billiards". Funct. Anal. Appl., vol. 8, pp. 254-255, 1974.
- [4] L. A. Bunimovich, "On the ergodic properties of nowhere dispersing billiards". Commun. Math. Phys., vol. 65, pp. 295-312, 1979.
- [5] Ya. G. Sinai, " Dynamical systems with elastic reflections. Ergodic properties of dispersive billiards". Russ. Math. Surv., vol. 25, pp. 141-192, 1970.
- [6] L. A. Bunimovich, Ya. G. Sinai, " Statistical properties of Lorentz gas with periodic configuration of scatterers". Commun. Math. Phys., vol.78, pp.479-497, 1981.
- [7] L. A. Bunimovich, "Conditions of stochasticity of two-dimensional billiards". Chaos, vol. 1, pp. 187-193, 1991.
- [8] M. Wojtkowski, "Principles for the design of billiards. with nonvanishing Lyapunov exponents". Comm. Math. Phys., vol. 105, pp. 391-414, 1986.
- [9] V. Donnay, "Using integrability to produce chaos: Billiards with positive Entropy". Commun. Math. Phys., vol. 141, pp. 225-257, 1991.
- [10] R. Markarian, "Ergodic properties of plane billiards with symmetric potentials". Nonlinearity, vol. 6, pp. 819-841, 1993.
- [11] M. Robnik, "Classical dynamics of a family of billiards with analytic boundaries". J. Phys. A, vol. 16, pp. 3971-3986, 1983.
- [12] M. Henon, J. Wisdom, "The Benettin- Strelcyn oval billiard revisited". Physica D, vol. 8, pp. 157-169, 1983.

- [13] H. Makino, T. Harayama, Y. Aizawa, “Effects of bifurcations on the energy level statistics for oval billiards”. *Phys. Rev. E*, vol. 59, pp. 4026-4034, 1999.
- [14] A. Bäcker, F. Steiner, P. Stifter, “Spectral statistics in the quantized cardioid billiard”. *Phys. Rev. E*, vol. 52, pp. 2463-2472, 1995.
- [15] H. R. Dullin, P. H. Richter, A. Wittek, “A two parameter study of the extent of chaos in a billiard system”. *Chaos*, vol. 6, pp. 43-58, 1996.
- [16] A. Bäcker, H. Dullin, “Symbolic Dynamics and Periodic Orbits. for the Cardioid Billiard”. *J. Physics A*, vol. 30, pp. 1991-2020, 1997.
- [17] V. Lopac, I. Mrkonjić, D. Radić, “Classical and quantum chaos in the generalized parabolic lemon-shaped billiard”. *Phys. Rev. E*, vol. 59, pp. 303-311, 1999.
- [18] H. Makino, T. Harayama, Y. Aizawa, “Effects of bifurcations on the energy level statistics for oval billiards”. *Phys. Rev. E*, vol. 59, pp. 4026-4035, 1999.
- [19] L. A. Toporowicza, M. B. Beims, “Correlation effects of two interacting particles in a circular billiard”. *Physica A*, vol. 37, pp. 5-9, 2006.
- [20] J. Koiller, R. Markarian, S. P. Carvalho, S. O. Kamphorst, “Static and Time-dependent perturbations of the classical elliptical billiard”. *Journal of Statistical Physics*, vol. 83, pp. 127-143, 1996. .
- [21] L. G. Akinshin, A. Loskutov, “Dynamical properties of some two-dimensional billiards with perturbed boundaries”. *Physical Ideas of Russia*, vol. 2, pp. 67-86, 1997.
- [22] L. G. Akinshin, K. A. Vasiliev, A. Loskutov, A. B. Ryabov, “Dynamics of billiards with perturbed boundaries and the problem of Fermi acceleration”. *Physical Ideas of Russia*, vol. 2, pp. 87-103, 1997.
- [23] A. Loskutov, A. B. Ryabov, L. G. Akinshin, “Mechanism of Fermi acceleration in dispersing billiards with perturbed boundaries”. *J. Exp. and Theor. Physics*, vol. 89, No 5, pp. 966-974, 1999.
- [24] A. Loskutov, A. B. Ryabov, L. G. Akinshin, “Properties of some chaotic billiards with time-dependent boundaries”. *J. Phys. A*, vol. 33, No 44, pp. 7973-7986, 2000.
- [25] A. Loskutov, A. Ryabov, “Chaotic time-dependent billiards”. *Int. J. of Comp. Anticipatory Syst.*, vol. 8, pp. 336-354, 2001.

- [26] A. Loskutov, L. G. Akinshin, A. N. Sobolevsky, “Dynamics of billiards with periodically time-dependent boundaries”. *Applied Nonlin. Dynamics*, vol. 9, No 4-5, pp. 50-63, 2001.
- [27] A. Loskutov, A. Ryabov, “Particle dynamics in time-dependent stadium-like billiards”. *J. Stat. Phys.*, vol. 108, No 5-6, pp. 995-1014, 2002.
- [28] S. O. Kamphorst, S. P. de Carvalho, “Bounded gain of energy on the breathing circle billiard”. *Nonlinearity*, vol. 12, pp. 1363-1371, 1999.
- [29] S. O. Kamphorst, E. D. Leonel, J. K. L. da Silva, “Presence and lack of Fermi acceleration in non integrable billiards”. *Journal of Physics. A, Mathematical and General*, vol. 40, pp. F887-F893, 2007.
- [30] S. Ulam, *Proc. 4th Berkeley Symposium on Math, Statistics and Probability* vol. 3 (Berkeley, CA: California University Press) pp. 315-320, 1961.
- [31] A. J. Lichtenberg, M.A. Lieberman, R. H. Cohen, “Fermi acceleration revisited”. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 1, pp. 291-305, 1980.
- [32] M. A. Lieberman, K. Y. Tsang, “Transient Chaos in Dissipatively Perturbed, Near-Integrable Hamiltonian Systems”. *Phys. Rev. Lett.*, vol. 55, pp. 908-911, 1985.
- [33] R. M. Everson, “Chaotic dynamics of a bouncing ball”. *Physica D*, vol. 19, pp. 355-383, 1986.
- [34] J. V. José, R. Cordery, “Study of a quantum fermi-acceleration model”. *Phys. Rev. Lett.*, vol. 56, No 4, pp. 290-193, 1986.
- [35] G. A. Luna-Acosta, “Regular and chaotic dynamics of the damped Fermi accelerator”. *Phys. Rev. A*, vol. 42, No 12, pp. 7155-7162, 1990.
- [36] S. T. Dembinski, A. J. Makowski, P. Peplowski, “Quantum bouncer with chaos”. *Phys. Rev. Lett.*, vol. 70, pp. 1093-1096, 1993.
- [37] E. D. Leonel, P. V. E. McClintock, J. K. L. da Silva, “Fermi-Ulam Accelerator Model under Scaling Analysis”. *Phys. Rev. Lett.*, vol. 93, pp. 014101(1-4), 2004.
- [38] D. G. Ladeira, J. K. L. da Silva, “Time-dependent properties of a simplified Fermi-Ulam accelerator model”. *Physical Review E*, vol. 73, pp. 026201(1-6), 2006.
- [39] E. D. Leonel, J. K. L. da Silva, S. O. Kamphorst, “On the dynamical properties of a Fermi accelerator model”. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, vol. 331, pp. 435-447, 2004.

- [40] E. D. Leonel, P. V. E. McClintock, “A hybrid Fermi-Ulam-bouncer model”. *J. Phys. A*, vol. 38, pp. 823-839, 2005.
- [41] A. D. Pustynnikov, “Construction of periodic-solutions in an infinite system of fermi-pasta-ulam ordinary differential-equations, stability, and KAM Theory”. *Theor. Math. Phys.*, vol. 50, pp. 449-450, 1995.
- [42] A. D. Pustynnikov, “ On Ulam Problem”. *Theor. Math. Phys.*, vol. 57, pp. 1035-1038, 1983.
- [43] A. J. Lichtenberg, M. A. Lieberman, R. H. Cohen, “Fermi acceleration revisited”. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, vol. 1, pp. 291-305, 1980.
- [44] R. E. de Carvalho, F. Caetano de Souza, E. D. Leonel, “Fermi acceleration on the annular billiard”. *J. Phys. A: Math. Gen.*, vol. 39, pp. 3561-3573, 2006.
- [45] F. Lenz, F. K. Diakonov, P. Schmelcher, “Tunable Fermi Acceleration in the Driven Elliptical Billiard”. *Phys. Rev. Lett.*, vol. 100, pp. 014103(1-4), 2008.
- [46] M. V. Berry, “Regularity and chaos in classical mechanics, illustrated by three deformations of a circular billiard”. *Eur. J. Phys.*, vol. 2, pp. 91-102, 1981.
- [47] E. D. Leonel, D. F. M. Oliveira, A. Loskutov, “Fermi acceleration and scaling properties of a time dependent oval billiard”. submitted to *Chaos*, 2009.
- [48] E. Fermi, “On the Origin of the Cosmic Radiation”. *Phys. Rev.*, vol. 75, No 8, pp. 1169-1174, 1949.
- [49] M. Robnik, M. V. Berry, “Classical billiards in magnetic fields”. *J. Phys. A: Math. Gen.*, vol. 18, pp. 1361-1378, 1985.
- [50] R. Markarian, S. O. Kamphorst, S. P. de Carvalho, “Chaotic properties of the elliptical stadium”. *Commun. Math. Phys.*, vol. 174, pp. 661-679, 1996.
- [51] V. Lopac, I. Mrkonjić, D. Radić, “Chaotic dynamics and orbit stability in the parabolic oval billiard”. *Phys. Rev. E*, vol. 66, pp. 036202(1-5), 2002.
- [52] V. Lopac, I. Mrkonjić, N. Pavin, D. Radić, “Chaotic dynamics of the elliptical stadium billiard in the full parameter space”. *Physica D*, vol. 217, pp. 88-101, 2006.
- [53] E. D. Leonel, “Propriedades Caóticas de Alguns Sistemas Hamiltonianos Dependentes do Tempo”. Tese (Doutorado em Física), Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2003.

- [54] D. F. M. Oliveira, E. D. Leonel, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulations. accepted for publication, 2009.
- [55] A. J. Lichtenberg, M.A. Lieberman, “Regular and Chaotic Dynamics”. (Appl. Math. Sci. 38, Springer Verlag, New York, 1992.
- [56] A. M. Ozorio de Almeida, “Hamiltonian Systems: Chaos and Quantization”(Cambridge: Cambridge Univ. Press), 1988.
- [57] R. Hilborn, “Chaos and Nonlinear Dynamics: An Introduction for Scientists and Engineers”. Oxford University Press, New York, 1994.
- [58] N. Fiedler-Ferrara, C. P. C. do Prado, “Caos - Uma Introdução”. Editora Edgard Blücher, São Paulo, 1994.
- [59] E. D. Leonel, “Breaking down the Fermi acceleration with inelastic collisions”. Journal of Physics A, Mathematical and General, vol. 40, pp. F1077-F1083, 2007.
- [60] E. D. Leonel, A. L. P. Livorati, “Describing Fermi acceleration with a scaling approach: bouncer model revisited”. Physica. A, vol. 387, pp. 1155-1160, 2008.
- [61] A. L. P. Livorati, D. G. Ladeira, E. D. Leonel, “Scaling investigation of Fermi acceleration on a dissipative bouncer model”. Physical Review. E, Statistical, Nonlinear and Soft Matter Physics, vol. 78, pp. 056205(1-12), 2008.
- [62] D. G. Ladeira, E. D. Leonel, “Dynamical Properties of a Dissipative Hybrid Fermi-Ulam-bouncer model”. Chaos (Woodbury), vol. 17, pp. 013119(1-8), 2007.
- [63] E. D. Leonel, D. F. M. Olivira, R. E. Carvalho, “Scaling properties of the regular dynamics for a dissipative bouncing ball model”. Physica A, vol. 386, pp. 73-78, 2007.
- [64] D. F. M. Oliveira, R. A. Bizão, E. D. Leonel, “Scaling Properties of a Hybrid Fermi-Ulam-Bouncer Model”. Mathematical Problems in Engineering, vol. 2009, pp. 1-14, 2009.
- [65] E. D. Leonel, P. V. E. McClintock, “A crisis in the dissipative Fermi accelerator model”. J. Phys. A, vol. 38, pp. L425-L430, 2005.
- [66] C. Grebogi, E. Ott, J. A. Yorke, “Chaotic Attractors in Crisis”. Phys. Rev. Lett., vol. 48, pp. 1507-1510, 1982.
- [67] C. Grebogi, E. Ott, J. A. Yorke, “Crises, sudden changes in chaotic attractors, and transient chaos,” Physica D, vol. 7, pp. 181-200, 1983.

- [68] D. F. M. Oliveira, E. D. Leonel, “ The Feigenbaum’s δ for a high dissipative bouncing ball model”. Brazilian Journal of Physics., vol. 38, pp. 62-64, 2008.
- [69] J. P. Eckmann, D. Ruelle, “Ergodic theory of chaos and strange attractors”. Rev. Mod. Phys., vol. 57, pp. 617-655, 1985.
- [70] G. M. Zaslavsky, “Hamiltonian Chaos and Fractional Dynamics”(Oxford), 2006.