

INSTITUTO DE FÍSICA TEÓRICA.



Tese de Doutorado.

**Pólos no gauge do cone de luz
e o método de covariantização.**

apresentada por:

Ricardo M. Bentín.

Orientador:

Prof. Alfredo T. Suzuki.

בְּרֵאשִׁית בְּרָא אֱלֹהִים אֶת הַשָּׁמַיִם וְאֶת הָאָרֶץ:

Para mi mejor amigo:

*J*esús de Nazaret.

Agradecimentos ...

... A Ga*B*rieLA,mi adorada esposa;
... und Ri*c*ardO *B*runO,mein kleiner und teurer Sohn.
... A los *BENTIN* y a los *ZACARIAS*.
... A turma do JORN AL CL UB DE C ORD AS do IFT
... Aos LEitE.
... Aos professores A.T.Suzuki e N.J.Berkovits.
... A FAPESP pelo apoio financeiro.

Resumo

Uma forma alternativa no tratamento dos pólos do gauge do cone de luz do tipo $(q.n)^{-1}$ é estudada, e esta é comparada com as prescrições usuais de Mandelstam e Leibbrandt.

Aparentemente no caso de se trabalhar nesta classe de gauges não covariantes, as principais prescrições causais não são prescrições, mas sim identidades das coordenadas do cone de luz.

PALAVRAS-CHAVES : Gauge não covariantes, gauges axiais, gauge do cone de luz.
Prescrição de Mandelstam, prescrição de Leibbrandt.
Covariantização do gauge do cone de luz.
Integração em dimensão negativa.
Singularidades não físicas.

Área de conhecimento: 1.05.03.00-5

Abstract

An alternative form of treatment for the light-cone gauge poles of type $(q.n)^{-1}$ is studied, and it is compared with the usual prescriptions of Mandelstam and Leibbrandt.

It seems that in the case of working in this class of noncovariant gauges, the causal prescriptions are not prescriptions, but identities of the light-cone coordinates.

KEY WORDS : Non-covariant gauges, axial gauges, light-cone gauge.
Mandelstam prescription, Leibbrandt prescription.
Covariantization on the light-cone gauge.
Negative dimension integration.
Non-physical singularities.

Índice

1	Introdução.	1
1.1	Gauges do tipo axial.	2
1.1.1	Gauges homogêneos, $B^a \equiv 0$	4
1.1.2	Gauges não homogêneos, $B^a \neq 0$	4
1.2	Desacoplamento dos campos de fantasmas nos gauges do tipo axial.	6
1.2.1	Introdução.	6
1.2.2	Preliminares.	6
1.2.3	Determinante de Faddeev-Popov.	7
1.2.4	Desacoplamento do campo de fantasmas.	8
1.2.5	Sem fantasmas B.	9
1.3	O gauge do cone de luz.	11
2	Prescrições e a covariantização.	14
2.1	Pólos espúrios.	14
2.2	Prescrições.	16
2.2.1	Prescrição de Mandelstam.	17
2.2.2	Prescrição de Leibbrandt.	17
2.2.3	Prescrição causal.	17
2.3	Covariantização.	18
2.3.1	Rotação de Wick e a covariantização.	19
2.3.2	Contagem de potências e a covariantização.	20
2.4	Integrais	21
2.4.1	Integral A.	22

2.4.2	Integral B.	25
2.5	Conclusões.	28
3	Quantização canônica.	29
3.1	Outra forma de classificação dos gauges.	29
3.1.1	Gauges de classe I.	30
3.1.2	Gauges de classe II.	30
3.1.3	Gauges de classe III.	31
3.2	Considerações prévias.	31
3.3	Quantização a tempos iguais.	33
3.4	O problema de Cauchy.	33
3.5	Quantização a qualquer tempo.	35
3.6	Cálculo do propagador.	37
3.7	Conclusões.	38
4	Covariantização e a $\mathcal{N}DIM$.	40
4.1	Introdução.	40
4.2	Integração em dimensão negativa.	41
4.2.1	O método.	41
4.3	Primeira tentativa: Gauge do cone de luz e $\mathcal{N}DIM$	43
4.4	Segunda tentativa: Gauge do cone de luz e $\mathcal{N}DIM$	46
4.5	Relação entre a covariantização e o método de integração em dimensão negativa.	48
4.6	Conclusões.	50
5	Conclusões.	52

Apêndices.

A	Coordenadas do cone de luz.	55
B	Gauge planar no cone de luz.	57
B.1	Introdução.	57
B.2	A proposta.	58
B.3	Conclusões.	61
C	Relações matemáticas usadas.	63
C.1	Parametrização de Schwinger.	63
C.2	Distribuição de Dirac.	64
C.3	Integração sob os momentos.	65
C.4	Mudança de variáveis.	66
C.5	Função Gamma, Beta e Hipergeométrica.	66
	Referências Bibliográficas.	68

Capítulo 1

Introdução.

A liberdade de gauge, encontrada primeiramente no eletromagnetismo clássico, permite-nos ter uma certa simetria na teoria a ser estudada, mas sendo que a física é independente desta simetria, dever-se-á escolher algum certo gauge em particular, e este processo denomina-se *fixação de gauge*.

A fixação de gauge é um ponto transcendental nas teorias físicas. Ele é usado desde o eletromagnetismo clássico, até teorias mais novas como teorias quânticas de campos, supersimetria e teorias de cordas. O estudo destas teorias, denominadas teorias de gauge, neste sentido vem a ser parte importante para a compreensão dos fenômenos físicos.

Em particular, nas teorias quânticas de campos, a fixação de gauge aparece seja nas teorias abelianas ou nas não abelianas. O número de formas de fixação de gauge não é pequeno, tendo-se na verdade um grande número de possibilidades.

Neste trabalho usaremos partículas pontuais e como teoria destas, aquela que no mínimo tenha um campo bosônico de spin +1 com certa liberdade de gauge que denotaremos por A_μ^a , onde $\mu = 1, 2, 3, 4$ é o índice do espaço-tempo em quatro dimensões e a é o índice do grupo no caso de se trabalhar com alguma teoria não abeliana. Logo o tensor eletromagnético é definido da forma usual $F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - igf_{bc}^a[A_\mu^b, A_\nu^c]$, onde f_{bc}^a representa as constantes de estrutura do grupo (no caso abeliano se tem $f_{bc}^a = 0$).

Sendo assim, a Lagrangeana a ser usada é da forma

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(A_\mu^a, \varphi^i) + \mathcal{L}_{fix}(A_\mu^a),$$

onde φ^i representam outros campos possíveis na teoria, e o termo \mathcal{L}_{fix} vem do fato que a teoria apresenta uma liberdade de gauge. Usando este fato, uma tentativa de classificar estas teorias seria a seguinte:

- Teorias de gauges covariantes.
- Teorias de gauges não covariantes.

Quer dizer é tomado o termo de fixação de gauge, e observa-se se este tem invariância de Lorentz ou não, este é um ponto importante, pois a invariância sob o grupo de Poincaré tem demonstrado ser uma chave na formulação de teorias modernas que tentam explicar fenômenos como a unificação das quatro interações fundamentais da natureza ou na tentativa de conciliar a mecânica quântica com a teoria da relatividade.

Uma forma geral de ter quebrada a invariância de Lorentz é a seguinte: escolhe-se um vetor arbitrário e com a ajuda deste escreve-se o termo de fixação de gauge incluindo este, por exemplo:

$$\mathcal{L}_{fix} = \partial_\mu A^\mu - (n_\mu \partial^\mu)(n_\nu A^\nu)$$

sendo $n_\mu = (1, 0, 0, 0)$, que não é nada mais do que o gauge de radiação ou mas comumente conhecido como o gauge de Coulomb. Outra forma de classificar os gauges será vista no capítulo 4, onde usaremos um método desenvolvido pelo professor A. Burnel.

Neste capítulo introdutório falaremos brevemente na sequência sobre os gauges do tipo axial, e logo nos centraremos no gauge do cone de luz, que é o cenário central sobre o qual basearemos nosso trabalho.

1.1 Gauges do tipo axial.

Dentro do conjunto de gauges não covariantes, podemos ver que um subconjunto destes é representado por aqueles onde o termo de fixação é da forma:

$$F[A_\mu] = n_\mu A^\mu = B(x), \quad (1.1)$$

onde o vetor n_μ é arbitrário, mas que também fixa uma certa direção no espaço-tempo. Dependendo da direção deste nas regiões do espaço-tempo, teremos os seguintes tipos de gauges:

- Gauge axial $n^2 < 0$.
- Gauge temporal $n^2 > 0$.
- Gauge do cone de luz $n^2 = 0$.

Onde estamos assumindo uma métrica com assinatura $(+, -, -, -)$.

Os gauges do tipo axial apresentam certas vantagens com respeito aos outros gauges, sendo uma das principais o desacoplamento dos campos de fantasmas nas teorias de campos não abelianas; isto faz com que as contas sejam reduzidas de forma considerável. Mas uma das principais dificuldades no uso destes gauges é que eles apresentam pólos do tipo $(q.n)^{-1}$, e este fato desenvolve uma série de outros problemas: a rotação de Wick não é permitida, a contagem simples de potências não é válida em geral, a parte *divergente* (pelo menos a um “loop”) é não local no momento externo, etc. Todos estes problemas podem ser evitados com o uso de alguma **prescrição** que preserve a causalidade.

Entre os problemas que o uso de alguma prescrição causal **não** pode aliviar tem-se:

- o aumento do número de termos a serem calculados, pois o propagador se vê incrementado,
- os termos não locais em geral.

Por termos não locais queremos dizer aqueles sendo definidos assim:

$$f = f(p^2, p.n), \quad (1.2)$$

quer dizer, tem uma dependência explícita entre o vetor n_μ e o momento externo p_μ , quebrando desta forma a invariância de Lorentz.

Voltemos à nossa definição na equação (1.1) da família de gauges do tipo axial. Dependendo de $B(x)$ se anular ou não, teremos os casos [1]:

- Homogêneo ($B^a \equiv 0$), também denominado axial em geral.
- Não homogêneo ($B^a \neq 0$), também denominado planar.

Na sequência descreveremos estes dois casos com mais detalhes.

1.1.1 Gauges homogêneos, $B^a \equiv 0$.

Dentro destes encontra-se o gauge do cone de luz com o qual trabalharemos mais adiante. O resumo dos gauges não-covariantes axiais e homogêneos é mostrado na tabela (1.1).

1.1.2 Gauges não homogêneos, $B^a \neq 0$.

Também conhecido como gauge planar. Em teoria quântica de campos, o termo de fixação de gauge é

$$n^\mu A_\mu^a \equiv n \cdot A^a = \Phi^a$$

onde n_μ é um vetor arbitrário, constante e externo, A_μ^a são os campos de gauge (neste caso usaremos um campo não-abeliano em geral) e Φ^a são um conjunto de campos escalares que vem da representação adjunta da álgebra de Lie $SU(N)$ [1]. Logo o termo da Lagrangeana de fixação de gauge é escolhido como sendo:

$$\mathcal{L}_{fix} = \frac{1}{2n^2} \partial_\mu \Phi^a \partial^\mu \Phi^a + \lambda^a (\Phi^a - n \cdot A^a). \quad (1.3)$$

onde λ^a são os multiplicadores de Lagrange. É fácil ver que esta última equação na verdade é equivalente a:

$$\mathcal{L}_{fix} = \frac{1}{2n^2} \partial_\mu (n \cdot A^a) \partial^\mu (n \cdot A^a). \quad (1.4)$$

Dependendo do tipo do vetor externo n_μ que seja tomado em consideração teremos os casos seguintes a serem definidos:

- $n^2 < 0$: gauge planar tipo espaço,
- $n^2 > 0$: gauge planar tipo tempo.

Mas o gauge planar tipo luz não é definido, pois neste caso se tem a singularidade em $n^2 = 0$.

Este problema foi contornado com uma proposta baseada na simetria discreta que existe entre os vetores duais do cone de luz n_μ e m_μ , como foi feito em [2] e como é descrito no apêndice B.

(1) Gauge axial:

$$F^a \equiv n^\mu A_\mu^a = B^a, \quad n^2 = n_0^2 - \mathbf{n}^2 < 0,$$

$$\mathcal{L}_{fix} = -\frac{1}{2\alpha} (n^\mu A_\mu^a)^2, \quad \alpha \rightarrow 0$$

(2) Gauge do cone de luz:

$$F^a \equiv n^\mu A_\mu^a = 0, \quad n^2 = 0$$

$$\mathcal{L}_{fix} = -\frac{1}{2\alpha} (n^\mu A_\mu^a)^2, \quad \alpha \rightarrow 0$$

(3) Gauge temporal:

$$F^a \equiv n^\mu A_\mu^a = A_0^a, \quad n^2 > 0, \quad n_\mu = (1, 0, 0, 0)$$

$$\mathcal{L}_{fix} = -\frac{1}{2\alpha} (n^\mu A_\mu^a)^2, \quad \alpha \rightarrow 0$$

Tabela 1.1: Gauge axiais homogêneos.

1.2 Desacoplamento dos campos de fantasmas nos gauges do tipo axial.

1.2.1 Introdução.

Esta seção está baseada no artigo de Frenkel [3] e no livro do Ryder [4]. Na verdade o que aqui mostraremos é como um gauge axial geral desacopla, mas falaremos em particular do gauge do cone de luz. Para entender como no gauge do cone de luz, os fantasmas são desacoplados, precisaremos entender como estes são gerados, e para isso partiremos de:

$$\int [dA_\mu] f(A_\mu) e^{i \int d^D x \mathcal{L}} \quad (1.5)$$

Na realidade, A_μ , quer dizer, A_μ^a , onde a representa o índice do grupo de gauge. Aqui uma observação, $f(A_\mu)$, é um funcional invariante de gauge. É assumido que $[dA_\mu] = [dA_\mu^\omega]$

O ansatz a usar para $[dA_\mu]$ é : $[dA_\mu] = \prod_{\mu,a,x} dA_\mu^a(x)$

A integral de caminho (1.5), considera todas as possíveis configurações de $A_\mu(x)$, o que quer dizer que se tem uma contagem múltipla das configurações físicas equivalentes (equivalentes no sentido de uma transformação de gauge). Então vamos dividir o espaço de configurações $\{A_\mu(x)\}$ em uma equivalência de classes $\{A_\mu^\omega(x)\}$ chamadas órbitas do grupo de gauge. Uma órbita do grupo possui todas as configurações do campo que são o resultado de aplicar todas as transformações ω do grupo de gauge \mathcal{G} a partir de uma configuração inicial do campo $A_\mu(x)$. A transformação de gauge:

$$A_\mu^{t a} \equiv (A^\omega)_\mu^a = A_\mu^a + f^{abc} A_\mu^b \omega^c + \partial_\mu \omega^a \quad (1.6)$$

1.2.2 Preliminares.

Permitamos que $[d\omega]$ denote uma medida invariante sobre o grupo de gauge \mathcal{G} , i.e. $[d\omega] = [d\omega\omega']$, onde o ansatz é:

$$[d\omega] = \prod_x d\omega(x)$$

Também seja introduzido o funcional $\Delta[A_\mu(x)]$ através de:

$$1 = \Delta[A_\mu(x)] \cdot \int [d\omega] \delta[F[A_\mu^\omega(x)]] \quad (1.7)$$

Onde $\delta[f(x)]$ representa $\prod_x \delta[f(x)]$. Também, para $F[A_\mu^\omega]$ é assumido:

$$F[A_\mu^\omega] = 0$$

Que tem exatamente uma solução, ω_0 , para qualquer A_μ . Esta última expressão é o vínculo, que define hipersuperfícies e também o “gauge”.

Observação: $\Delta[A_\mu(x)]$ é invariante de gauge:

$$\Delta^{-1}[A_\mu^\omega] = \int [d\omega'] \delta[F[A_\mu^{\omega\omega'}]] = \int [d\omega\omega'] \delta[F[A_\mu^{\omega\omega'}]] \int [d\omega''] \delta[F[A_\mu^{\omega''}]] = \Delta^{-1}[A_\mu]$$

inserindo (1.7) em (1.5), se obtém:

$$\int [d\omega] \int [dA_\mu] f(A_\mu) \Delta[A_\mu(x)] \delta[F[A_\mu^\omega(x)]] e^{iS[A_\mu^\omega]}$$

Observação: A expressão dentro de $f[d\omega]$ é invariante de gauge; i.e. não depende de ω .

$$\underbrace{\left(\int [d\omega] \right)}_{\text{vol.infinito}} \int [dA_\mu] f(A_\mu) \Delta[A_\mu(x)] \delta[F[A_\mu^\omega(x)]] e^{iS[A_\mu^\omega]} \quad (1.8)$$

1.2.3 Determinante de Faddeev-Popov.

A partir da equação (1.7):

$$\Delta^{-1}[A_\mu] = \int [dF] \left(\det \frac{\delta F[A_\mu^\omega]}{\delta \omega} \right)^{-1} \delta F$$

i.e.

$$\Delta[A_\mu] = \det \frac{\delta F[A_\mu^\omega]}{\delta \omega} \Big|_{F[A_\mu^\omega]=0} = \det M$$

$\Delta[A_\mu]$ é usualmente denominado como o determinante de Faddeev-Popov. Se considerarmos o gauge $F[A_\mu^\omega] - C(x) = 0$, então nossa expressão integral (1.8) ficaria assim:

$$\int [d\omega] \int [dA_\mu] \det M \cdot f(A_\mu) \delta[F[A_\mu^\omega(x)] - C(x)] e^{iS[A_\mu^\omega]} \quad (1.9)$$

A expressão para o gerador funcional $Z[J=0]$ será:

$$Z[J = 0] = N \int [d\omega] \int [dA_\mu] \det M \cdot f(A_\mu) \delta[F[A_\mu^\omega(x)] - C(x)] e^{iS[A_\mu^\omega]}$$

Usando a identidade das matrizes com os números de Grassman:

$$\det M = \int [d\bar{c}][dc] \cdot e^{i\bar{c}Mc} \quad (1.10)$$

Escrevermos $Z[J = 0]$ como sendo:

$$Z[J = 0] = N \int [d\omega] \int [dA_\mu] [d\bar{c}][dc] \cdot f(A_\mu) \delta[F[A_\mu^\omega(x)] - C(x)] e^{i(S[A_\mu^\omega] - \bar{c}Ac)}$$

Onde agora os campos c e \bar{c} são os denominados *campos de fantasmas*, que devido a seu caráter estatístico somente aparecerão como linhas internas nos gráficos de Feynman.

1.2.4 Desacoplamento do campo de fantasmas.

Agora já estamos em condições de poder desacoplar os fantasmas para um gauge axial.

Existem duas formas de mostrar isto:

Sem fantasmas A.

Partamos da definição para um gauge tipo axial:

$$\begin{aligned} n^\mu A_\mu^a &= 0 \\ n^\mu n_\mu &= \text{const.} \end{aligned}$$

O termo de fixação de gauge é:

$$F^a = n^\mu A_\mu^a$$

Então, sob a transformação de gauge (1.6) tem-se:

$$\delta F^a \equiv n^\mu f^{abc} A_\mu^b \omega^c + n^\mu \partial_\mu \omega^a = n^\mu \partial_\mu \omega^a$$

Isto implica que:

$$\frac{\delta F^a}{\delta \omega^b} = \delta^{ab} n^\mu \partial_\mu$$

Observe-se que esta última expressão é a matriz M , que **não contém** \mathbf{A}_μ^a . Isto significa que também $\det M$ não contém \mathbf{A}_μ^a , o que quer dizer que podemos colocar $\det M$ fora da integral de $[dA_\mu]$ na expressão (1.9). Sendo assim, a expressão para $Z[J = 0]$ ficará:

$$Z[J = 0] = N \int [d\omega] \det M. \int [dA_\mu] f(A_\mu) \delta[F[A_\mu^\omega(x)] - C(x)] e^{iS[A_\mu^\omega]}$$

O termo $f[d\omega] \det M$ pode ser absorvido na constante, ou se preferir, pode-se fazer uma redefinição, chegando a:

$$Z[J = 0] = N \int [dA_\mu] f(A_\mu) \delta[F[A_\mu^\omega(x)] - C(x)] e^{iS[A_\mu^\omega]}$$

Como se vê, esta última equação é livre da possibilidade de apresentar fantasmas, que era o que queríamos mostrar.

1.2.5 Sem fantasmas B.

Partindo da definição do $\det M$ e usando a propriedade do produto dos determinantes:

$$\begin{aligned} \det M &= \det(n^\mu D_\mu) \\ &= \det(n \cdot \partial) \cdot \det(1 - gG f^a A^{a\mu} n_\mu) \end{aligned}$$

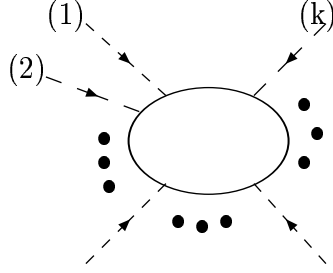
Onde se está usando a representação adjunta e além disso tem-se que:

$$\begin{aligned} D_\mu &= \partial_\mu - g f^a n_\mu \partial^\nu A_\nu^a \\ (\partial \cdot n)G(x - y) &= \delta^D(x - y) \end{aligned}$$

Então, trabalhando com o segundo determinante, aplicar-lhe-emos uma conhecida propriedade dos determinantes, logo, expandiremos o logaritmo em uma somatória sobre k ($k = 1 \cdot \cdot \cdot \infty$):

$$\begin{aligned} \det(1 - gG f^a A_\mu^a n_\mu) &= e^{\text{Tr}[\ln(1 - gG f^a A_\mu^a n_\mu)]} \\ &= e^{-\text{Tr}[\sum_k^{\infty} \frac{g^k}{k} G(x_0 - x_1) f^{a_1} A_{\mu_1}^{a_1} n_{\mu_1} \cdots G(x_{k-1} - x_k) f^{a_k} A_{\mu_k}^{a_k} n_{\mu_k}]} \end{aligned}$$

Aqui observa-se que o que se tem é uma série de gráficos de funções de k -pontos, em outras palavras, cada termo da somatória é um gráfico de Feynman


 Figura 1.1: Função de fantasmas de k -pontos.

que pode ser representado como na figura (1.1).

Isto implica que cada processo gerará integrais de Feynman, as quais por sua vez podem ser calculadas (usando a parametrização de Feynman) dentro do contexto da regularização dimensional. Sendo assim, a integral correspondente ao gráfico da figura (1.1) será:

$$I_{\mu_1 \dots \mu_k}^{a_1 \dots a_k} = g^k \prod_{i=1}^k n_{\mu_i} \text{Tr} \left[\prod_{i=1}^k f^{a_i} \right] (k-1)! \int_0^1 dx_1 \cdot \int_0^{x_{k-1}} dx_{k-2} \int \frac{d^D q}{(n \cdot q + \dots - n \cdot p_2 x_{k-1})^k}$$

Fazendo mudança de variáveis obtém-se:

$$I_{\mu_1 \dots \mu_k}^{a_1 \dots a_k} = g^k \prod_{i=1}^k n_{\mu_i} \text{Tr} \left[\prod_{i=1}^k f^{a_i} \right] I$$

Sendo I (e usando a invariância de Lorentz):

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{d^D q}{(n \cdot q)^k} \\ &= c(n, k) \frac{1}{n^k} \int \frac{d^D q}{q^k} \end{aligned}$$

Integral que no contexto da regularização dimensional é nula. Sendo assim é fácil observar que $\det(1 - gG f^a A_\mu^a n_\mu) = 1$, é dizer $\det M$ novamente não depende do campo de gauge, isso equivale a dizer que novamente os fantasmas desacoplam.

1.3 O gauge do cone de luz.

O interesse deste trabalho é o estudo da covariantização, que é uma forma que dispensa o uso de prescrições no tratamento dos pólos denominados espúrios do gauge do cone de luz. Logo é conveniente dar uma explicação mais detalhada no que respeita a este gauge.

O uso do gauge do cone de luz é de uma importância particular na teoria quântica de campos.

Tudo teve seu início quando Dirac [5] em 1949 estudava a relação possível entre a formulação Hamiltoniana e a Relatividade. Como consequência desta combinação aparecem *dez quantidades* ($P_\mu, M_{\mu\nu}$) *fundamentais* para cada sistema dinâmico, quantidades estas que são independentes da transformação de coordenadas. Sete destas quantidades (P_0, P_i e M_{ij}) tem uma interpretação física simples (energia total, momento total e momento angular total, respectivamente). Foi nesse contexto que ele propôs o denominado “light front frame”, que na verdade foi o início do gauge do cone de luz. Na realidade, Dirac não propôs somente a dinâmica do cone de luz; esta foi apenas uma das propostas entre uma série de possíveis formas dinâmicas que poderiam ser construídas. Resumidamente, podemos mencionar (considere o sistema de coordenadas u^μ):

- A forma instantânea (condição : $u_0 = 0$): Aqui $P_1, P_2, P_3, M_{23}, M_{31}$ e M_{12} são calculadas facilmente, as restantes P_0, M_{10}, M_{20} e M_{30} são mais complicadas e são associadas às Hamiltonianas.
- A forma pontual (condição : $u^\mu u_\mu = k^2; u_0 > 0$): Aqui as quantidades $M_{\mu\nu}$ são relativamente simples e as outras (os P_μ) serão associadas às Hamiltonianas.
- A forma frontal (condição : $u_0 - u_3 = 0$): Usando a notação do cone de luz, as quantidades $P_1, P_2, P_-, M_{12}, M_{+-}, M_{1-}$ e M_{2-} são simples, as restantes P_+, M_{1+} e M_{2+} serão as Hamiltonianas (podemos dizer que aqui nasceu o gauge do cone de luz).

Cada uma destas formas vêm do fato que Dirac buscava escrever as quantidades dinâmicas que têm participação ativa num certo processo, isto é, aquelas quantidades que realmente podem ser consideradas como quantidades dinâmicas fundamentais.

Voltando à definição dada na equação (1.1), no caso do gauge do cone de luz, temos

$$F^a \equiv n^\mu A_\mu^a = 0, \quad n^2 = 0$$

o que quer dizer que o termo de fixação de gauge da Lagrangeana é:

$$\mathcal{L}_{fix} = -\frac{1}{2\alpha}(n^\mu A_\mu^a)^2, \quad \alpha \rightarrow 0.$$

Esta forma de fixação do gauge leva às seguintes considerações:

- é possível calcular o propagador do campo A_μ^a da forma usual, quer dizer, invertendo o termo seguinte (já no espaço dos momentos):

$$(2\pi)^4 \left(q^2 g_{\mu\nu} - q^\mu q^\nu + \frac{1}{\alpha} n^\mu n^\nu \right)$$

e desta forma o propagador ficará sendo

$$G_{\mu\nu}(q) = -\frac{i}{(2\pi)^4 q^2} \left[g^{\mu\nu} - \frac{(q^\mu n^\nu + q^\nu n^\mu)}{q \cdot n} \right]. \quad (1.11)$$

Este modo de trabalho é conhecido como o formalismo de quatro componentes, dado que se trabalha com as quatro componentes do vetor A_μ^a .

- outra possibilidade consiste em trabalhar somente com as componentes físicas do campo vetorial já desde a densidade de Lagrangeana, isto quer dizer que as componentes não dinâmicas são eliminadas através de

$$\begin{aligned} A_a^+ &= 0, \\ \partial^+ A_a^- &= \partial^i A_a^i + \frac{1}{\partial^+} [A^i \partial^+ A^i]_a, \end{aligned}$$

que representam a condição de gauge e a equação de movimento respectivamente; observe-se que agora estamos usando as coordenadas do cone de luz. Sendo assim, duas componentes do campo vetorial A_μ^a são dispensadas, o que dá o nome a este procedimento de formalismo de duas componentes. Neste formalismo, o propagador do campo A_μ^a tem uma expressão simples e similar ao caso de se trabalhar com um gauge covariante (e.g. de Landau ou de Feynman):

$$G_{ij}^{ab}(q) = -\frac{i\delta_{ab}\delta^{ij}}{(2\pi)^4 q^2}$$

mas neste caso somente nas direções transversais. Onde agora se encontra a dificuldade é no vértice de três campos vetoriais e no vértice de quatro campos vetoriais:

$$\Gamma_{abc}^{ijk} = gf^{abc} \left\{ \delta^{ij} \left[(q-p)^k - (q-p)^+ \frac{r^k}{r^+} \right] + \text{duas permutações cíclicas} \right\} \quad (1.12)$$

$$\Gamma_{abcd}^{ijkl} = ig^2 \left\{ f^{abe} f^{cde} \left[\delta^{ik} \delta^{jl} - \delta^{il} \delta^{jk} + \delta^{ij} \delta^{kl} \frac{(p-q)^+(r-s)^+}{(p+q)^+(r+s)^+} \right] + \text{duas permutações simétricas} \right\} \quad (1.13)$$

Neste trabalho escolheremos trabalhar com o formalismo de quatro-componentes. Aqui já se pode observar um dos principais problemas de trabalhar no gauge do cone de luz; para isto observe as expressões das equações (1.11), (1.12) e (1.13), onde se vê facilmente como aparecem fatores do tipo:

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{q}^+}$$

o que nos mostra como a escolha feita de trabalhar no gauge do cone de luz (seja no formalismo de duas-componentes ou no formalismo de quatro-componentes) implica na aparição de um novo tipo de pólo no tratamento desta teoria de campos. Este fato deu origem a um amplo número de trabalhos para, primeiramente, o estudo deste pólo, e logo para seu tratamento. Dado que este tipo de pólo não foi muito bem-vindo na teoria, o nome que lhe foi dado foi o de “pólo espúrio”.

O centro de nosso trabalho gira ao redor do tratamento dado a este pólo. Desta forma, uma descrição mas ampla será dada no próximo capítulo.

Capítulo 2

Prescrições e a covariantização.

O que será feito neste capítulo é dar uma breve descrição das diferentes prescrições que existem para o tratamento dos pólos $(q^+)^{-1}$ do cone de luz. Na primeira seção descreveremos brevemente o problema dos pólos espúrios; a seguir, na segunda seção mostraremos as principais prescrições que são usadas. Na terceira seção será apresentada a covariantização, que é o tema sobre o qual este trabalho está baseado. Com tudo isto feito, agora será possível fazer o cálculo de algumas integrais, seja usando alguma prescrição, seja usando a covariantização, sendo tudo colocado na quarta seção. Finalmente na última seção serão anotadas algumas conclusões.

2.1 Pólos espúrios.

A aparição de pólos tipo $(\mathbf{q}\cdot\mathbf{n})^{-1}$ dentro do contexto do gauge do cone de luz pode até passar despercebido num curso introdutório de teoria quântica de campos.

Na verdade o problema não é assim simples ou pequeno, como a princípio possa parecer. Pois sempre que se tente calcular uma amplitude de espalhamento, isto envolverá o cálculo de uma ou mais integrais, a um ou mais “loops”, que no fundo são integrais sobre quadrimomentos; estes deverão ser estendidos de (1,3) dimensões para (1,D-1) dimensões (isto é, pode-se utilizar a regularização dimensional [6]). Logo, para o tratamento dos pólos, deverá ser feita uma rotação de Wick, e é aqui onde a dificuldade com os pólos do tipo $(q\cdot n)^{-1}$ tem seu início, pois eles **não permitem a rotação de Wick**.

Para entender um pouco melhor isto, lembremos como é o comportamento dos pólos covariantes $(q^2)^{-1}$

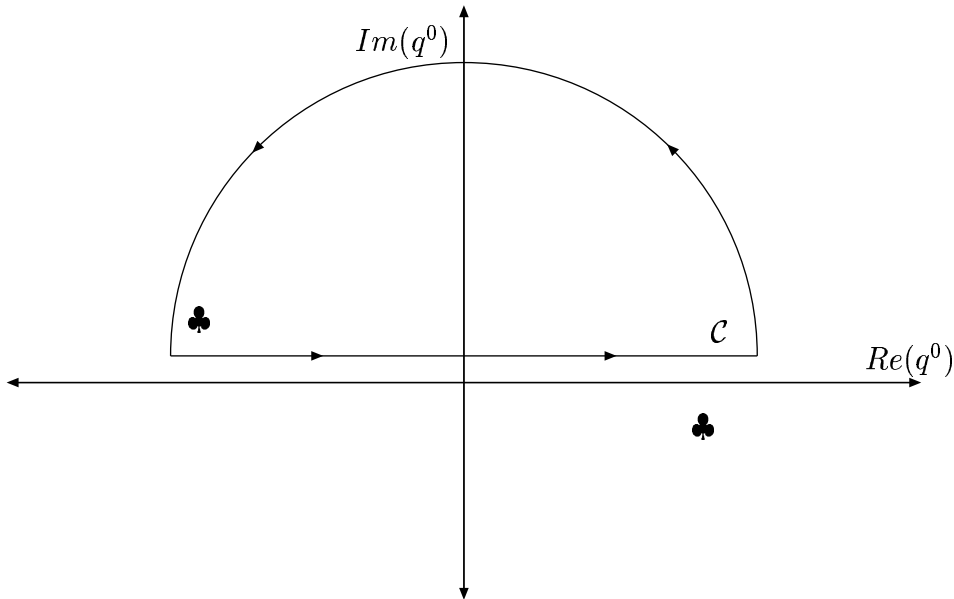


Figura 2.1: Gráfico mostrando a localização para os pólos do tipo $(q^2)^{-1}$ no plano complexo q^0 . Os pólos são representados com um ♣.

Agora para o caso dos pólos $(q.n)^{-1}$ observe-se que na figura (2.2) como não é possível fazer uma rotação de Wick. ¹ Na figura (2.2) também são colocados os pólos covariantes $(q^2)^{-1}$ para poder contrastar com o caso dos chamados pólos “não físicos” $(q.n)^{-1}$. Para o tratamento dos pólos $(q.n)^{-1}$, comumente chamados de pólos “espúrios”, foram desenvolvidas várias prescrições, entre as quais citaremos as de Mandelstam [7], Leibbrandt [8] e a desenvolvida pelos professores A.T.Suzuki e B.M.Pimentel [9].

Além de não poder ser feita a rotação de Wick, também se tem como um outro problema o fato de que a muito usada (em teoria quântica de campos) contagem simples de potências para ver o grau de divergência de algum diagrama na teoria [4] não é válida [10].

Um outro problema consiste na aparição dos termos chamados de não locais

¹Tal rotação implicaria cruzar com uma singularidade.

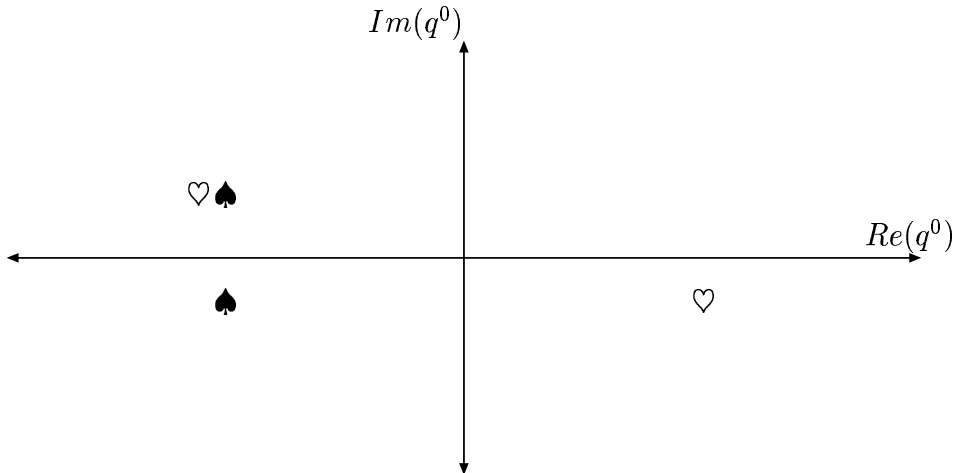


Figura 2.2: Gráfico no plano complexo q^0 . Pólos do tipo $(q^2)^{-1}$ são representados com ♡. Pólos do tipo $(q.n)^{-1}$ são representados com ♠.

(definidos no capítulo anterior na equação (1.2)).

Para o tratamento destes pólos do cone de luz, foram tentadas várias prescrições (em outras palavras: receitas); algumas bem sucedidas, outras não tão bem assim, e isso será o tema da seguinte seção.

2.2 Prescrições.

Um dos preços a pagar pelo uso do gauge no cone de luz é a aparição das singularidades “espúrias”, provenientes dos pólos do tipo $(q.n)^{-1}$. Neste gauge, a conhecida prescrição usual do “Valor Principal” não conduz a resultados físicos satisfatórios. Logo se tentaram uma série de novas prescrições; na verdade há muitas prescrições, mas na continuação descreveremos brevemente três delas: a de Mandelstam, a de Leibbrandt e a de Pimentel-Suzuki.

Somente uma afirmação final para encerrar esta breve introdução às prescrições do cone de luz: as duas primeiras prescrições que descreveremos a seguir tem um ponto em comum, elas fazem uso dos dois vetores que caracterizam este gauge (n_μ e m_μ), por isto também são chamadas de prescrições de dois vetores [1].

2.2.1 Prescrição de Mandelstam.

Esta foi a primeira a ser proposta e surgiu nos estudos de superssimetria [7] onde S. Mandelstam demonstra a finitude da teoria de Yang-Mills superssimétrica em quatro dimensões no gauge do cone de luz. O que ele fez foi uma demonstração baseada em contagem simples de potências. Só que como já era bem conhecido na época, os pólos do cone de luz do tipo $(q^+)^{-1}$ não permitem tais tipos de contagens, logo, e para contornar este problema, ele define uma prescrição do tipo:

$$\frac{1}{q^+} = \frac{1}{q \cdot n} \rightarrow \frac{1}{q^+ + i\epsilon q^-} \quad (2.1)$$

desta forma a contagem simples de potências é permitida e a finitude da teoria Yang-Mills superssimétrica em quatro dimensões no gauge do cone de luz chega a ser demonstrada.

2.2.2 Prescrição de Leibbrandt.

Um ano após Mandelstam ter proposto sua prescrição, G. Leibbrandt fez o mesmo, mas neste caso já dentro do contexto do cálculo das integrais do cone de luz. Leibbrandt tem contribuído no estudo dos processos no gauge do cone de luz (na verdade sua contribuição inclui os gauges não covariantes em geral, um dos quais é o gauge do cone de luz) durante décadas, foi ele que deu a seguinte prescrição para os pólos espúrios:

$$\frac{1}{q^+} = \frac{1}{q \cdot n} \rightarrow \frac{q^-}{q^+ q^- - \epsilon} \quad (2.2)$$

2.2.3 Prescrição causal.

Esta última prescrição parte dos trabalhos de Giambaggi, Bollini e Dominguez, referentes a distribuições causais [11]; em outras palavras, tenta incorporar a causalidade de maneira que os problemas dos pólos $(q \cdot n)^{-1}$ desapareçam. A prescrição que foi proposta para os pólos $(q \cdot n)^{-1}$, é:

$$\frac{1}{q \cdot n} = \frac{1}{q^+} \rightarrow \frac{\Theta(q^0)}{q^+ + i\epsilon} + \frac{\Theta(-q^0)}{q^+ - i\epsilon}$$

Usando a identidade:

$$\frac{1}{q^+ \pm \epsilon} = PV\left(\frac{1}{q^+}\right) \pm \frac{\pi}{i} \delta(q^+)$$

Sendo assim, a prescrição pode-se escrever como:

$$\frac{1}{q.n} = \frac{1}{q^+} \rightarrow \overbrace{\left[\Theta(q^0) + \Theta(-q^0)\right]}^1 PV\left(\frac{1}{q^+}\right) + \frac{\pi}{i} \overbrace{\left[\Theta(q^0) - \Theta(-q^0)\right]}^{\text{Sign}(q^0)} \delta(q^+)$$

Mas da definição da função $\Theta(x)$, finalmente se obtém a expressão que é usada com maior frequência na literatura.

$$\frac{1}{q.n} = \frac{1}{q^+} \rightarrow PV\left(\frac{1}{q^+}\right) - i\pi \text{Sign}(q^0) \delta(q^+) \quad (2.3)$$

Observe-se que nesta nova prescrição o que se faz é *corrigir* a muito usada prescrição do valor principal, correção que vem do fato de que se trabalhou dentro do cone de luz. Somente para completar esta seção, colocaremos a expressão que permite calcular pólos do tipo $(q.n)^{-2}$, que são encontrados nos cálculos de um gauge axial homogêneo. Na verdade a expressão é geral para pólos do tipo $(q.n)^{-n}$

$$\frac{1}{(q.n)^n} = \frac{1}{(q^+)^n} \rightarrow PV\left(\frac{1}{(q^+)^n}\right) - i\pi \text{Sign}(q^0) (-1)^{n-1} \delta^{n-1}(q^+)$$

2.3 Covariantização.

Aqui faremos uma descrição breve a uma técnica alternativa para o tratamento dos pólos do gauge do cone de luz; cabe assinalar que esta não é mais uma prescrição, pois neste método denominado de “covariantização”, se faz uso de uma identidade das coordenadas do cone de luz.

Esta técnica foi proposta pelo professor A. Suzuki [12]. A idéia é simples: nas coordenadas do cone de luz, o quadrimomento ao quadrado vem dado pela identidade:

$$q^2 = 2q^+q^- - \hat{q}^2, \quad (2.4)$$

Sempre que $q^- \neq 0$, será possível escrever q^+ como

$$q^+ = \frac{q^2 + \hat{q}^2}{2q^-}.$$

Aqui podemos ressaltar que esta última expressão é uma relação de dispersão, que nos garante que campos de gauge reais para os quais $q^2 = 0$ (fótons reais ou gluons reais por exemplo) são transversos. Isto implica que no gauge do cone de luz o problema com os pólos do tipo $(q^+)^{-1}$ tomam a forma

$$\frac{1}{q^+} = \frac{2q^-}{q^2 + \hat{q}^2}. \quad (2.5)$$

O que é realmente importante aqui é que a condição $q^- \neq 0$ nos garante a estrutura causal desta técnica desde que esta elimina os problemas com os modos $q^- = 0$. A eliminação destes modos nos devolve os resultados conhecidos que são visto manifestamente nas prescrições que preservam causalidade [1, 7, 8] para o gauge do cone de luz.

Observa-se que diferentemente das prescrições de Mandestam e de Leibbrandt, a covariantização não pode ser generalizada para os outros tipos de gauges axiais. Este fato é fácil de ver, desde que se lembre que a covariantização é definida a partir de uma identidade que vem do uso das coordenadas no cone de luz como foi feito na expressão (2.4).

A seguir mostraremos como a covariantização resolve alguns dos problemas que surgiram no uso do gauge do cone de luz, da mesma forma como quando alguma prescrição causal é usada.

2.3.1 Rotação de Wick e a covariantização.

Uma das vantagens obtidas quando alguma prescrição é feita consiste no fato de poder fazer novamente a rotação de Wick. É de se esperar que no caso da covariantização também esta seja válida. Isto é o que demonstraremos a seguir.

A forma de demonstrar isto não é difícil: para començar retomemos a definição do método de covariantização do gauge do cone de luz que foi dada na equação (2.5)

$$\frac{1}{q^+} = \frac{2q^-}{q^2 + \hat{q}^2}.$$

Daqui vemos que o denominador pode ser escrito como $(q^0)^2 - (q^3)^2$, o que quer dizer que fazendo a continuação analítica para o plano complexo teremos os pólos situados em:

$$q^0 = \pm |q^3| \mp i\epsilon$$

como é mostrado na figura (2.3) a seguir

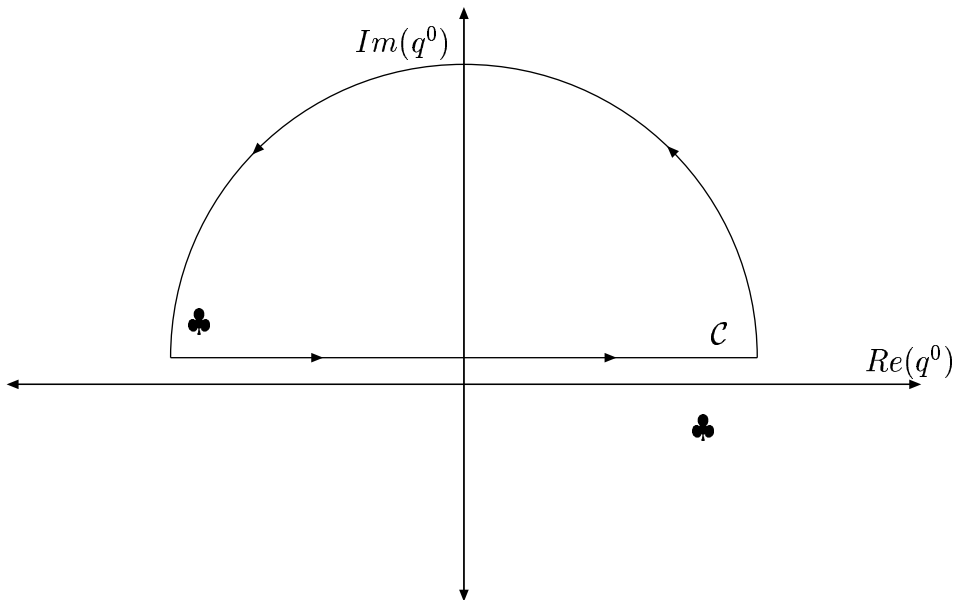


Figura 2.3: Gráfico mostrando a localização para os pólos do tipo $(q^2 - \hat{q}^2)^{-1}$ no plano complexo q^0 . Os pólos são representados com um ♣.

Agora é fácil de se ver como a rotação de Wick é possível de ser levada a cabo.

Uma vez feita a demonstração de que a covariantização permite fazer a rotação de Wick, agora tentaremos demonstrar outra propriedade importante que é perdida com os pólos do tipo $(q.n)^{-1}$: a contagem simples de potências.

2.3.2 Contagem de potências e a covariantização.

A forma como surgiu a primeira bem sucedida prescrição, proposta pelo professor S. Mandelstam, foi na tentativa de demonstrar como o modelo su-

perssimétrico $N = 4$ é finito ² na região ultravioleta para um gauge especial do cone de luz, aqui a palavra “especial” refere-se à modificação que S. Mandelstam fez e não é mais do que a sua prescrição.

Esta modificação teve que ser feita dado que naquela época, a contagem de potências no cone de luz não era permitida, justamente devido a os termos do tipo $(q^+)^{-1}$. Para o caso não modificado se tem divergências ultravioletas para as regiões [10]

$$q^+ \rightarrow \text{finito}, \quad (2.6.a)$$

$$q^-, q^2 \rightarrow \infty, \quad (2.6.b)$$

$$q^+ q^- - q^2 \rightarrow \text{finito}. \quad (2.6.c)$$

o problema é que no caso (2.6.a) para o valor $q^+ = 0$, que é finito, se tem divergência ultravioleta e também a prescrição do Valor Principal, como já foi visto na seção anterior, não permite fazer a continuação analítica para valores imaginários de q_0 , desta forma não é possível sair das regiões de divergência descritas nas equações (2.6.a), (A.3) e (2.6.c).

Mas se usarmos a covariantização obteremos,

$$\frac{1}{q^+} \rightarrow \frac{2q^-}{q^2 + \hat{q}^2}, \quad (2.7.a)$$

$$\frac{1}{q^-} \rightarrow \frac{2q^+}{q^2 + \hat{q}^2}, \quad (2.7.b)$$

$$q^+ q^- - q^2 \rightarrow q^+ q^- + \hat{q}^2 \quad (2.7.c)$$

com isto o problema de ir para valores imaginários de q_0 desaparece, quer dizer as equações (2.7.a), (2.7.b) e (2.7.c) nos dizem que as regiões de divergência para $q^+ = 0$ podem ser contornadas mediante a continuação analítica, permitindo desta forma a contagem de potências. Observe-se que a covariantização nos mostra uma certa simetria entre os pólos $q^+ = 0$ e $q^- = 0$.

2.4 Integrais

Como foi falado no início deste capítulo, a maior parte das integrais calculadas no gauge do cone de luz são realizadas usando a prescrição de Leibbrandt, e nesta tese o objetivo é mostrar uma forma alternativa e que dispensa

²este modelo foi proposto inicialmente por Gliozzi et al. [14] e que possui uma simetria interna $SU(4)$ [15]

o uso da receita dada; logo é necessário, para ter uma maior transparência, mostrar como as contas são realizadas em cada caso.

Para isto, o que nós fizemos foi pegar duas integrais típicas do cone de luz:

$$A = \int d^{2\omega} q \cdot \frac{1}{(q-p)^2 q^+}, \quad (2.8.a)$$

$$B = \int d^{2\omega} q \cdot \frac{1}{q^2 (q-p)^2 q^+}. \quad (2.8.b)$$

Para estas integrais, o procedimento usual a seguir no cálculo (e também em qualquer integral que vive num espaço de infinitos momentos) é o seguinte:

1. faz-se a parametrização dos denominadores,
2. inverte-se a ordem dos integrandos,
3. integra-se sobre os momentos,
4. integra-se sobre os parâmetros.

Em nosso cálculo usaremos a parametrização exponencial (ver apêndice D). Com a diferença que como estamos trabalhando com integrais do cone de luz, algum tratamento dos pólos tem que ser feito. A escolha será usar a conhecida prescrição de Leibbrandt como primeiro caso, e a seguir usaremos a técnica da covariantização como segundo caso.

Agora já estamos prontos para fazer o cálculo, sendo assim começaremos com a integral A .

2.4.1 Integral A.

Nossa integral é dada pela equação (2.8.a):

$$A = \int d^{2\omega} q \cdot \frac{1}{(q-p)^2 q^+},$$

Usando a prescrição de Leibbrandt.

Aplicando a prescrição da equação (2.2) na integral A , esta tomará a forma seguinte:

$$A_L = \int d^{2\omega} q \cdot \frac{q^-}{(q-p)^2 (q^+ q^- - \epsilon)}$$

seguindo os passos mencionados acima, teremos:

1. parametrização:

$$\begin{aligned} A_L &= - \int d^{2\omega} q \cdot q^- \int_0^\infty d\alpha d\beta \cdot e^{i(\alpha(q-p)^2 + \beta q^+ q^-)}, \\ &= - \int d^{2\omega} q \cdot q^- \int_0^\infty d\alpha d\beta \cdot e^{i\alpha p^2} \cdot e^{i(2\alpha q^+ q^- - \alpha \hat{q}^2 - 2\alpha q^+ p^- - 2\alpha q^- p^+ + 2\alpha \hat{q} \cdot \hat{p} + \beta q^+ q^-)}, \end{aligned}$$

onde foram escolhidas as coordenadas do cone de luz.

2. inverter ordem de integração:

$$\begin{aligned} A_L &= - \int_0^\infty d\alpha d\beta \cdot e^{i\alpha p^2} \cdot \int d^{2\omega} q \cdot q^- e^{i(2\alpha q^+ q^- - \alpha \hat{q}^2 - 2\alpha q^+ p^- - 2\alpha q^- p^+ + 2\alpha \hat{q} \cdot \hat{p} + \beta q^+ q^-)}, \\ &= - \int_0^\infty d\alpha d\beta \cdot e^{i\alpha p^2} \cdot \\ &\quad \int d\hat{q} \cdot e^{-i(\alpha \hat{q}^2 - 2\alpha \hat{q} \cdot \hat{p})} \int_{-\infty}^\infty dq^- \cdot q^- e^{-2i\alpha q^- p^+} \int_{-\infty}^\infty dq^+ \cdot e^{i(2\alpha q^- - 2\alpha p^- + \beta q^-)q^+} \end{aligned}$$

e agora já tudo está pronto para poder fazer a integração sobre os momentos, só alguns comentários no que respeita a esta integração: a integral sobre q^+ é na verdade a representação integral da distribuição de Dirac, ver apêndice C.2, logo quando seja feita a integração sobre q^- , esta será bem simples dado que se tem um $\delta(x)$, desta forma só restaria fazer a integral sobre \hat{q} , que tem por fundo um espaço euclidiano de $2(\omega - 1)$ dimensões, e pode ser integrado facilmente como é mostrado no apêndice C.3. A seguir mostramos o resultado:

3. após integrar momentos:

$$A_L = -i^\omega \pi^\omega p^- \int_0^\infty d\alpha d\beta \cdot \frac{\alpha^{2-\omega}}{(\alpha + \frac{\beta}{2})^2} e^{2i \frac{\alpha\beta}{2\alpha+\beta} p^+ p^-},$$

4. após integrar parâmetros:³

$$A_L = i(-\pi)^\omega p^- (2p^+ p^-)^{\omega-1} \frac{\Gamma(2-\omega)\Gamma(\omega-1)}{\Gamma(\omega)}. \quad (2.9)$$

Usando a covariantização.

Agora aplicaremos a covariantização ao pólo do cone de luz na integral A , sendo assim o que resulta é:

$$A_{cov} = \int d^{2\omega} q \cdot \frac{2q^-}{(q-p)^2(q^2 + \hat{q}^2)}$$

1. parametrização:

$$\begin{aligned} A_{cov} &= -2 \int d^{2\omega} q \cdot q^- \int_0^\infty d\alpha d\beta \cdot e^{i(\alpha(q-p)^2 + 2\beta q^+ q^-)} \\ &= -2 \int d^{2\omega} q \cdot q^- \int_0^\infty d\alpha d\beta \cdot e^{i\alpha p^2} \cdot e^{i(2\alpha q^+ q^- - \alpha \hat{q}^2 - 2\alpha q^+ p^- - 2\alpha q^- p^+ + 2\alpha \hat{q} \cdot \hat{p} + 2\beta q^+ q^-)}, \end{aligned}$$

onde foi usada a relação: $q^2 + \hat{q}^2 = 2q^+ q^-$. Observe-se que desta forma, a integral A_{cov} ficará realmente muito parecida com a integral A_L .

2. inverter ordem de integração:

$$\begin{aligned} A_{cov} &= -2 \int_0^\infty d\alpha d\beta \cdot e^{i\alpha p^2} \cdot \int d^{2\omega} q \cdot q^- e^{i(2\alpha q^+ q^- - \alpha \hat{q}^2 - 2\alpha q^+ p^- - 2\alpha q^- p^+ + 2\alpha \hat{q} \cdot \hat{p} + 2\beta q^+ q^-)}, \\ &= -2 \int_0^\infty d\alpha d\beta \cdot e^{i\alpha p^2} \cdot \\ &\quad \int d\hat{q} \cdot e^{-i(\alpha \hat{q}^2 - 2\alpha \hat{q} \cdot \hat{p})} \int_{-\infty}^\infty dq^- \cdot q^- e^{-2i\alpha q^- p^+} \int_{-\infty}^\infty dq^+ \cdot e^{i(2\alpha q^- - 2\alpha p^- + 2\beta q^-) q^+} \end{aligned}$$

segundo o mesmo procedimento que foi dado no caso do cálculo da integral A_L , obteremos

³observe-se que aqui fizemos uma mudança sob a variável β : $\beta \rightarrow 2\beta$, este fato aparentemente ingênuo será comentado nas conclusões finais no capítulo 5.

3. após integrar momentos:

$$A_{cov} = -2i^\omega \pi^\omega p^- \int_0^\infty d\alpha d\beta \cdot \frac{\alpha^{2-\omega}}{(\alpha + \beta)^2} e^{2i \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta} p^+ p^-},$$

4. após integrar parâmetros:

$$A_{cov} = i(-\pi)^\omega p^- (2p^+ p^-)^{\omega-1} \frac{\Gamma(2-\omega)\Gamma(\omega-1)}{\Gamma(\omega)}. \quad (2.10)$$

Observe-se como as integrais A_L e A_{cov} tem os mesmos resultados, tal como se vê nas equações (2.9) e (2.10).

2.4.2 Integral B.

Agora temos a segunda integral que é:

$$B = \int d^{2\omega} q \cdot \frac{1}{q^2(q-p)^2 q^+},$$

Usando a prescrição de Leibbrandt.

Novamente aplicando a prescrição da equação (2.2) só que neste caso para a integral B , esta tomará a forma seguinte:

$$B_L = \int d^{2\omega} q \cdot \frac{q^-}{q^2(q-p)^2(q^+q^- - \epsilon)}$$

1. parametrização:

$$\begin{aligned} B_L &= i \int d^{2\omega} q \cdot q^- \int_0^\infty d\alpha d\beta d\gamma \cdot e^{i(\alpha(q-p)^2 + \beta q^+ q^- + \gamma q^2)}, \\ &= i \int d^{2\omega} q \cdot q^- \cdot \\ &\quad \int_0^\infty d\alpha d\beta \cdot e^{i\alpha p^2} \cdot e^{ii[2(\alpha+\gamma)q^+q^- - (\alpha+\gamma)\hat{q}^2 - 2\alpha q^+ p^- - 2\alpha q^- p^+ + 2\alpha \hat{q} \cdot \hat{p} + \beta q^+ q^-]}, \end{aligned}$$

agora se tem 3 parâmetros pois temos 3 denominadores.

2. inverter ordem de integração:

$$\begin{aligned}
B_L &= i \int_0^\infty d\alpha d\beta d\gamma \cdot e^{i\alpha p^2} \cdot \\
&\quad \int d^{2\omega} q \cdot q^- e^{i[2(\alpha+\gamma)q^+q^- - (\alpha+\gamma)\hat{q}^2 - 2\alpha q^+p^- - 2\alpha q^-p^+ + 2\alpha\hat{q}\cdot\hat{p} + \beta q^+q^-]}, \\
&= i \int_0^\infty d\alpha d\beta d\gamma \cdot e^{i\alpha p^2} \cdot \\
&\quad \int d\hat{q} \cdot e^{-i[(\alpha+\gamma)\hat{q}^2 - 2\alpha\hat{q}\cdot\hat{p}]} \int_{-\infty}^\infty dq^- \cdot q^- e^{-2i\alpha q^-p^+} \cdot \\
&\quad \int_{-\infty}^\infty dq^+ \cdot e^{i[2(\alpha+\gamma)q^- - 2\alpha p^- + \beta q^-]q^+}
\end{aligned}$$

3. após integrar momentos:

$$\begin{aligned}
B_L &= i^{\omega+1} \pi^\omega \int_0^\infty d\alpha d\beta d\gamma \cdot \frac{\alpha}{(\alpha + \gamma/2)(\alpha + \beta + \gamma/2)^2} \\
&\quad \cdot e^{i\alpha p^2 + i(\alpha + \gamma/2)\hat{p}^2 - 2i\frac{\alpha^2}{\alpha + \beta + \gamma/2}p^+p^-},
\end{aligned}$$

4. após integrar parâmetros:

$$B_L = i(-\pi)^\omega p^- (p^2)^{\omega-2} \sum_{n=0}^\infty \frac{\Gamma(3 - \omega + n)\Gamma(\omega - 1 + n)}{\Gamma(\omega + n)\Gamma(n + 2)} (1 - \eta^{n+1}) \quad (2.11)$$

onde se foi definido

$$\eta \equiv -\frac{\hat{p}^2}{p^2}.$$

Usando a covariantização.

Usando o método de covariantização na integral B , o que se tem é:

$$B_{cov} = \int d^{2\omega} q \cdot \frac{2q^-}{q^2(q-p)^2(q^2 - \hat{q}^2)}$$

seguindo os passo já conhecidos teremos:

1. parametrização:

$$\begin{aligned}
B_{cov} &= 2i \int d^{2\omega} q \cdot q^- \int_0^\infty d\alpha d\beta d\gamma \cdot e^{i(\alpha(q-p)^2 + 2\beta q^+ q^- + \gamma q^2)}, \\
&= 2i \int d^{2\omega} q \cdot q^- \cdot \\
&\quad \int_0^\infty d\alpha d\beta d\gamma \cdot e^{i\alpha p^2} \cdot e^{i[2(\alpha+\gamma)q^+ q^- - (\alpha+\gamma)\hat{q}^2 - 2\alpha q^+ p^- - 2\alpha q^- p^+ + 2\alpha\hat{q}\cdot\hat{p} + 2\beta q^+ q^-]},
\end{aligned}$$

2. inverter ordem de integração:

$$\begin{aligned}
B_{cov} &= 2i \int_0^\infty d\alpha d\beta d\gamma \cdot e^{i\alpha p^2} \cdot \\
&\quad \int d^{2\omega} q \cdot q^- e^{i[2(\alpha+\gamma)q^+ q^- - (\alpha+\gamma)\hat{q}^2 - 2\alpha q^+ p^- - 2\alpha q^- p^+ + 2\alpha\hat{q}\cdot\hat{p} + 2\beta q^+ q^-]}, \\
&= 2i \int_0^\infty d\alpha d\beta d\gamma \cdot e^{i\alpha p^2} \cdot \\
&\quad \int d\hat{q} \cdot e^{-i[(\alpha+\gamma)\hat{q}^2 - 2\alpha\hat{q}\cdot\hat{p}]} \int_{-\infty}^\infty dq^- \cdot q^- e^{-2i\alpha q^- p^+} \cdot \\
&\quad \int_{-\infty}^\infty dq^+ \cdot e^{i[2(\alpha+\gamma)q^- - 2\alpha p^- + 2\beta q^-]q^+}
\end{aligned}$$

3. após integrar momentos:

$$\begin{aligned}
B_{cov} &= 2i^{\omega+1} \pi^\omega \int_0^\infty d\alpha d\beta d\gamma \cdot \frac{\alpha}{(\alpha+\gamma)(\alpha+\beta+\gamma)^2} \\
&\quad \cdot e^{i\alpha p^2 + i(\alpha+\gamma)\hat{p}^2 - 2i\frac{\alpha^2}{\alpha+\beta+\gamma} p^+ p^-},
\end{aligned}$$

4. após integrar parâmetros:

$$B_{cov} = i(-\pi)^\omega p^- (p^2)^{\omega-2} \sum_{n=0}^\infty \frac{\Gamma(3-\omega+n)\Gamma(\omega-1+n)}{\Gamma(\omega+n)\Gamma(n+2)} (1-\eta^{n+1}) \quad (2.12)$$

onde novamente

$$\eta \equiv -\frac{\hat{p}^2}{p^2}.$$

Observe-se como novamente as equações (2.11) e (2.12) nos dizem que as integrais B_L e B_{cov} tem os mesmos resultados para quaisquer valores de ω .

2.5 Conclusões.

Neste capítulo mostrou-se como o uso do gauge do cone de luz em teoria quântica de campos nos leva a lidar com um novo tipo de pólos, denominados pólos “não físicos” ou também pólos “espúrios”. Este fato faz com que o tratamento da teoria no cone de luz seja feito cuidadosamente, chegando na necessidade de se ter que usar alguma prescrição mas com a condição de que esta preserve a causalidade.

Alternativamente foi apresentado o que foi denominado como o método de covariantização para os pólos típicos do gauge do cone de luz, ou em forma curta: o método de covariantização, que *não é uma prescrição*, pois basicamente é usada uma identidade das coordenadas do cone de luz. Como foi descrito, este método também apresenta as vantagens de preservar a causalidade, permitir levar a cabo a rotação de Wick e restaurar a contagem simples de potências, fatos que somente podiam ser conseguidos mediante o uso de alguma prescrição causal.

Mas o mais importante foi fazer o cálculo explícito de algumas integrais típicas do gauge do cone de luz, tanto fazendo uso da mais usada (na literatura) prescrição (aquela proposta por Leibbrandt) quanto com o método da covariantização, onde como foi visto, os resultados concordam. Isto nos leva a pensar se realmente existe a possibilidade de poder dispensar o uso das prescrições, pelo menos no caso de se trabalhar dentro do gauge do cone de luz. Uma coisa que foi feita com a prescrição de Mandelstam-Leibbrandt foi ter uma demonstração canônica para estas, pelo menos no caso de se trabalhar com o formalismo de quatro-componentes, logo o caminho natural a seguir seria tentar fazer o mesmo com o método de covariantização, e é justamente isso o tema do nosso próximo capítulo.

Capítulo 3

Quantização canônica.

Vimos no capítulo anterior como o método denominado de covariantização chega nos mesmos resultados que aqueles onde uma prescrição causal é usada. Logo é de se esperar que da mesma forma que a prescrição de Leibbrandt provêm da quantização canônica da teoria, a covariantização apresente o mesmo comportamento.

Na verdade isto não é mais do que a demonstração formal de que a técnica da covariantização é tão válida quanto as outras prescrições, com a vantagem de que esta técnica não é uma prescrição, mas sim a forma natural como os pólos do cone de luz devem ser tratados.

3.1 Outra forma de classificação dos gauges.

No primeiro capítulo foi visto de forma introdutória como os gauges podem ser classificados em covariantes ou não covariantes, mas também existe uma outra forma de poder classificar estes, e isto vai ser o tema desta seção.

Seguindo as idéias de Burnel [16], todos os gauges conhecidos (dentro da teoria quântica de campos que possuam um bóson vetorial do tipo A_μ) podem ser classificados pelo número de graus de liberdade do propagador vetorial bosônico (neste caso é necessário o uso do formalismo de quatro componentes, pois neste formalismo podem ser contados os graus de liberdade do propagador bosônico vetorial).

Seguindo esta idéia, tem-se três classes distintas de gauge,

- gauges de classe I,

- gauges de classe II e
- gauges de classe III

classes que são descritas a seguir.

3.1.1 Gauges de classe I.

Nesta classe de gauges, o propagador do bóson vetorial contém somente um grau de liberdade. Considerando o vetor bosônico como sendo da forma A_μ onde $\mu = 0, 1, 2, 3$, temos como exemplos desta classe de gauges

- o gauge de Coulomb, onde $\partial_k A_k = 0$, ($k = 1, 2, 3$)
- o gauge axial puro, onde $A_3 = 0$

Isto dado que o momento conjugado canônico é

$$\pi^k = F^{k0} = D^k A_0 - \partial_0 A^k$$

onde D representa a derivada covariante e os índices de simetria interna foram omitidos.

A condição para que a fixação de gauge a qualquer tempo seja válida é:

$$\partial_k D^k A_0 - \partial_k \pi^k = 0$$

que não é mais do que

$$\pi^3 - \partial^3 A_0 = 0$$

De forma resumida, podemos dizer que estes gauges da classe I apresentam uma condição de fixação de gauge onde somente se tem os campos A_k e seus momentos canônicos conjugados π_k .

3.1.2 Gauges de classe II.

Nesta classe de gauges o que se tem além das condições necessárias para pertencer à classe I é que a condição de fixação de gauge incluía também A_0 . Sendo assim, teremos como exemplo deste tipo de gauge o gauge temporal, onde $A_0 = 0$.

A forma mais geral do termo de fixação de gauge da densidade da Lagrangeana vem dado por:

$$\mathcal{L}_{fix} = -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2 - C_{\mu\nu}\partial^\mu SA^\nu + \frac{1}{2}aS^2 + a'SC^\mu\partial_\mu S' + \frac{a'}{2}(\partial^\mu S')^2$$

onde onde $C_{\mu\nu}$ e C_μ são tensores fixos arbitrários de postos 2 e 1 respectivamente, a e a' são os parâmetros de gauge e neste caso também temos dois multiplicadores de Lagrange S e S' .

3.1.3 Gauges de classe III.

Aqui o que se tem é que a condição de fixação de gauge também envolve termos do tipo $\partial_0 A_0$; nesta classe de gauges temos dois graus de liberdade não físicos. Em forma similar àquela feita nos gauges da classe II, teremos que a forma mais geral do termo de fixação de gauge nesta classe é

$$\mathcal{L}_{fix} = -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2 + S(n.A) + aSS' + \frac{a}{2}(\partial^\mu S')^2$$

onde agora temos somente um parâmetro de gauge a mas neste caso também temos dois multiplicadores de Lagrange S e S' . Os gauges representativos desta classe incluem todos os gauges covariantes (também conhecidos como gauges relativísticos), mas também pertencem a esta classe um certo grupo de gauges não covariantes, nos quais se tem aqueles que apresentam o termo de fixação de gauge da forma:

$$\mathcal{L}_{fix} = (m.\partial)(n.A)$$

que nos leva, logo após feita a quantização [17], a obter a prescrição de Mandelstam-Leibbrandt

$$\frac{1}{q.n} \rightarrow \frac{q.m}{q.nq.m + i\epsilon}$$

3.2 Considerações prévias.

As demonstrações têm que ser feitas sobre as formas ou teorias mais gerais possíveis, e como exemplo, no caso de se ter um propagador bosônico com

liberdade de gauge, a teoria não abeliana de Yang-Mills sem interação (que dizer livre) é um bom candidato para basear uma possível demonstração. Mas em nosso caso temos uma situação particular, pois o caso do gauge do cone de luz, é o caso de um gauge do tipo axial, e como foi demonstrado por J. Frenkel [3] (ver capítulo 1), os fantasmas desacoplam neste tipo de gauge. Seja a teoria:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2 + bm\partial n \cdot A + \frac{1}{2}\alpha b^2, \quad (3.1)$$

onde b é um campo auxiliar [?, ?], α é um parâmetro n_μ e m_μ são os vetores do cone de luz (sendo um o conjugado do outro), e

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu.$$

Usando as equações de Euler-Lagrange, obteremos as equações de movimento:

$$\begin{aligned} \partial^\mu F_{\mu\nu} - m \cdot \partial n_\nu b &= 0, \\ m \cdot \partial n \cdot A &= \alpha b. \end{aligned} \quad (3.2)$$

O momento canônico é definido da forma usual:

$$\pi^0 = bn_0 m_0, \quad (3.3.a)$$

$$\pi^k = F^{k0} + bm_0 n^k. \quad (3.3.b)$$

Com estas considerações prévias, agora podemos já ir para a primeira fase da quantização da teoria, quer dizer levar a cabo a quantização a tempos iguais, para logo com isto resolver o problema de Cauchy, isto nos vai servir para encontrar as regras de comutação a qualquer tempo, que é de onde calcularemos o propagador da teoria.

Para finalizar esta seção faremos somente um comentário para a densidade de Lagrangeana da equação (3.1), pois ela é a base dos resultados que serão mostrados nas seguintes, seções. Esta densidade de Lagrangeana foi proposta pelo Burnel no ano de 1989 [17], Lagrangeana que pertence a classe III segundo a classificação também dada por ele no ano de 1982 [16], naquela época não se tinha ainda o método de covariantização (1993) nem a prescrição causal (1990), mas já se conheciam as prescrições de Mandelstam e Leibbrandt. Mesmo nesse contexto e como veremos neste capítulo, a densidade de Lagrangeana (3.1) nos levará a uma estrutura causal da teoria.

3.3 Quantização a tempos iguais.

Iniciaremos esta seção lembrando que estamos trabalhando por simplicidade com uma teoria abeliana. Também esclareceremos que o procedimento que estamos seguindo é muito similar aquele feito pelo A. Burnel [17], onde o que ele fez foi relacionar o formalismo de quantização canônica com a prescrição de Mandelstam-Leibbrandt para o cone de luz.

A seguir daremos as regras de comutação a tempos iguais, o que quer dizer que faremos uso das expressões dos momentos canônicos encontradas nas equações (3.3.a) e (3.3.b), isto somente seguindo o formalismo de quantização canônica, então encontraremos que:

$$[A_\mu(x), \pi^\nu(y)]_{x_0=y_0} = i\delta_\mu^\nu \prod_{i=1}^3 \delta(x^i - y^i), \quad (3.4.a)$$

$$[A_\mu(x), A_\nu(y)]_{x_0=y_0} = 0, \quad (3.4.b)$$

$$[\pi^\mu(x), \pi^\nu(y)]_{x_0=y_0} = 0, \quad (3.4.c)$$

com isto se tem feito o primeiro passo para a quantização da teoria, pois para ter ela feita completamente neste formalismo canônico, teremos que ter as regras de comutação não somente a tempos iguais, mas para qualquer tempo em geral, e isto é o tema das próximas seções.

3.4 O problema de Cauchy.

Um dos primeiros passos em uma teoria de campos livre consiste em resolver o problema de Cauchy, em nosso caso reescreveremos as equações de movimento dadas em (3.2) da seguinte forma

$$(m.\partial)(n.\partial)b = 0, \quad (3.5.a)$$

$$(m.\partial)(n.\partial)(\partial.A) = [a\Box - n^2(m.\partial)^2]b, \quad (3.5.b)$$

$$\Box A_\mu = \partial_\mu(\partial.A) + (m.\partial)n_\mu S. \quad (3.5.c)$$

Desta forma, nosso problema agora consiste em resolver as equações (3.5.a), (3.5.b), e (3.5.c). Observe-se que o operador $(m.\partial)(n.\partial)$, não é muito diferente do operador de d'Alembert \Box . No espaço dos momentos, o que acontece é que agora teremos que trabalhar com $(n_0q_0)^2 - (\vec{n}.\vec{q})^2$ no lugar de $q_0^2 - |\vec{q}|^2$.

Para resolver o problema de Cauchy, será preciso fazer uso de certas funções, que denotaremos por $D_n(x)$ e $D_{F,n}$, e que satisfaçam as seguintes equações para o operador de nosso problema $(m.\partial)(n.\partial)$; estas equações são,

$$(m.\partial)(n.\partial D_n) = 0,$$

para $D_n(x)$ e

$$(m.\partial)(n.\partial D_{n,F}) = \delta^4(x),$$

para $D_{F,n}$. Uma solução para as condições acima descritas será a seguinte:

$$D_n(x) = \frac{-in_0^2}{(2\pi)^4} \int d^4q \theta(q_0) \delta(q.mq.n) \cdot (e^{-iq.x} - e^{iq.x}), \quad (3.6)$$

para $D_n(x)$ e

$$D_{F,n}(x) = \frac{-1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4q \cdot e^{-iq.x}}{k.mk.n} \quad (3.7)$$

para $D_{F,n}$. Observe-se a estrutura do denominador da função dada na equação (3.7), ela lembra a covariantização ou a prescrição de Leibbrandt, quer dizer tem uma estrutura causal, logo esta será chamada de Função de Green causal. Lembrando que a forma usual para estas funções no caso de se ter o operador d'Alembert \square corresponderia às conhecidas funções D e D_F :

$$D(x) = \frac{-i}{(2\pi)^4} \int d^4q \theta(q_0) \delta(q^2) \cdot (e^{-iq.x} - e^{iq.x}),$$

para $D_n(x)$ e

$$D_F(x) = \frac{-1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4q \cdot e^{-iq.x}}{q^2},$$

para $D_F(x)$. Com a ajuda destas funções se encontra a solução para o problema de Cauchy das equações (3.5.a), (3.5.b) e (3.5.c). O que se obtém é:

$$S(x) = \int d^3y [\partial_0^y D_n(x-y) S(y) - D_n(x-y) \partial_0^y S(y)], \quad (3.8.a)$$

$$\begin{aligned} (\partial.A)(x) &= \int d^3y [\partial_0^y D_n(x-y) (\partial.A)(y) - D_n(x-y) \partial_0^y (\partial.A)(y)] \\ &+ \int d^4z D_{F,n}(x-z) K S(z) \\ &- \int d^3y d^4z [\partial_0^y D_n(x-y) D_{F,n}(y-z) - D_n(x-y) \partial_0^y D_{F,n}(y-z)] K S(z), \end{aligned} \quad (3.8.b)$$

$$\begin{aligned}
A_\mu(x) &= \int d^3y [\partial_0^y D(x-y)A_\mu(y) - D(x-y)\partial_0^y A_\mu(y)] \\
&\quad + \int d^4z D_F(x-z)V_\mu(z) \\
&\quad - \int d^3y d^4z [\partial_0^y D(x-y)D_F(y-z) - D(x-y)D_F(y-z)]V_\mu(z),
\end{aligned} \tag{3.8.c}$$

onde

$$V_\mu = \partial_\mu(\partial \cdot A) + n_\mu(m \cdot \partial S),$$

e

$$K = a\Box - n^2(m \cdot \partial)^2$$

é um operador. Uma vez obtida a solução do problema de Cauchy, o seguinte passo consistirá em obter as regras de comutação a qualquer tempo.

3.5 Quantização a qualquer tempo.

Fazendo uso das equações (3.8.a), (3.8.b) e (3.8.c), o cálculo das regras de comutação para qualquer tempo pode ser feito. O que mostraremos na seqüência será um exemplo de como são calculadas as regras de comutação a partir das soluções do problema de Cauchy; o procedimento para calcular todas as regras de comutação da teoria é o mesmo, só que neste caso muito mais complicado de se calcular. Então começaremos usando a equação (3.8.a) e as regras de comutação a tempos iguais entre A_μ e S e também, entre A_μ e $\partial_0 S$, desta forma o que se obtém é

$$[A_\mu(x), S(x')] = \frac{-i}{n_0^2} \partial_\mu D_n(x-x'),$$

onde $D_n(x)$ foi definido na seção anterior.

Seguindo o mesmo procedimento, se encontra para A_μ ,

$$\begin{aligned}
[A_\mu(x), A_\nu(x')] &= -ig_{\mu\nu} D(x-x') + \frac{i(n_\mu \partial_\nu) + n_\nu \partial_\mu}{n_0^2} m \cdot \partial F'_D(x-x') \\
&\quad + ia \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{n_0^2} E_n(x-x') - i \frac{n^2}{n_0^2} (m \cdot \partial)^2 \partial_\mu \partial_\nu F'_E(x-x'),
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} E_n(x - x') &= \int d^4 z D_{F,n}(x' - z) D_n(x - z), \\ F'_D(x) &= F_D(x) + (\Delta^{-1} D)(x), \\ F'_E(x) &= F_E(x) + \frac{1}{n_0^2} (\Delta^{-2} D)(x), \end{aligned}$$

e aqui $F_D(x)$, $F_E(x)$ e Δ^{-1} representam

$$\begin{aligned} F_D(x) &= \int d^4 z D_F(x' - z) D_n(x - z), \\ F_E(x) &= \int d^4 z D_F(x' - z) E_n(x - z) \\ \Delta^{-1}(q) &= \frac{-n_0^2}{(n_0 q_0)^2 - (\vec{n} \cdot \vec{q})^2} \end{aligned}$$

onde Δ^{-1} foi definido no espaço dos momentos.

Para poder levar nosso trabalho para o espaço do momentos, como se faz usualmente, usaremos a transformada de Fourier para o campo $A_\mu(x)$

$$A_\mu(x) = \frac{1}{(2\pi)^{2/3}} \int d^4 q \theta(q_0) [a_\mu(q) e^{-iq \cdot x} + b_\mu(q) e^{iq \cdot x}], \quad (3.9)$$

onde os modos de Fourier a_μ e b_μ tem as seguintes regras de comutação (a qualquer tempo)

$$\begin{aligned} \theta(q_0) [a_\mu(q), b_\nu(q')] &= \delta^4(q - q') \left[-g_{\mu\nu} \delta(q^2) \right. \\ &\quad - \alpha q_\mu q_\nu \delta(q \cdot n \ q \cdot m) \\ &\quad + n^2 (q \cdot m)^2 q_\mu q_\nu \left(\frac{q \cdot n \ q \cdot m}{q^2} - \frac{q^2}{q \cdot n \ q \cdot m} \right) \\ &\quad \left. + (n_\mu q_\nu + n_\nu q_\mu) q \cdot m \left(\frac{\delta(q \cdot n \ q \cdot m)}{q^2} + \frac{\delta(q^2)}{q \cdot n \ q \cdot m} \right) \right] \end{aligned} \quad (3.10.a)$$

onde como já é sabido também se tem

$$[a_\mu(q), a_\nu(q')] = 0,$$

e

$$[b_\mu(q), b_\nu(q')] = 0.$$

As regras de comutação das equações (3.10.a) definem as regras de comutação para os campos A_μ a qualquer tempo. Com base nisto será possível calcular o propagador, cálculo que será mostrado na seguinte seção.

3.6 Cálculo do propagador.

Agora que finalmente conseguimos obter uma expressão para os modos de Fourier do campo A_μ para qualquer tempo (tudo isto no espaço dos momentos), nosso seguinte passo será o cálculo da função de dois pontos para o campo do bóson vetorial, o que não é nada mais do que o propagador deste. Lembrando que a expressão que nos define a função de dois pontos para este caso tem a seguinte forma:

$$\tilde{G}_{\mu\nu}(x) = \langle 0|T[A_\mu(x)A_\nu(0)]|0 \rangle, \quad (3.11)$$

onde T é o operador do produto cronológico. Desta forma, usando as equações (3.9) e (3.10.a), e fazendo cuidadosas manipulações no contexto da teoria de distribuições teremos o seguinte resultado

$$(\square g^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu - n^\mu n^\nu \frac{(m \cdot \partial)^2}{\alpha}) \tilde{G}_{\nu\rho} = i\delta_\rho^\mu \delta^4(x),$$

onde neste caso $\alpha \neq 0$, o propagador é encontrado invertendo esta última equação. Observe-se que

$$G_{\mu\nu}(q) = \frac{-i}{q^2} \left[g_{\mu\nu} - \frac{n_\mu q_\nu + n_\nu q_\mu}{q \cdot n \ q \cdot m} q \cdot m - \frac{\alpha q^2 - n^2 (q \cdot m)^2}{q \cdot n \ q \cdot m} q_{\mu\nu} \right]$$

onde se usou a identidade que define o método de covariantização

$$2q^+ q^- = q^2 + \hat{q}^2.$$

Desta forma, no limite $\alpha \rightarrow 0$ e lembrando que para o gauge do cone de luz se tem a seguinte identidade para os vetores duais do cone de luz $n^2 = m^2 = 0$, teremos que o propagador é

$$G_{\mu\nu}(q) = \frac{-i}{q^2} \left[g_{\mu\nu} - \frac{n_\mu q_\nu + n_\nu q_\mu}{q \cdot n \ q \cdot m} q \cdot m \right] \quad (3.12)$$

e que tem a estrutura embutida do **método de covariantização**. Sendo assim, este propagador preserva a causalidade desde que o modo $q^- = q \cdot m$ não seja cancelado, este fato já foi discutido no capítulo anterior onde se constatou a importância de levá-lo em conta. O mesmo sucede no que é apresentado no apêndice B, onde se tem uma proposta para definir o gauge planar no cone de luz [2], onde a estrutura dos pólos do gauge do cone de luz é mudada para ser do tipo

$$\frac{1}{q \cdot n \ q \cdot m},$$

o que nos leva a pensar um pouco sobre as implicações desta, pois no propagador da equação (3.12) é comum e ingenuamente escrito como sendo

$$G_{\mu\nu}(q) = \frac{-i}{q^2} \left[g_{\mu\nu} - \frac{n_\mu q_\nu + n_\nu q_\mu}{q \cdot n} \right]$$

que como já se viu, apresenta inúmeras patologias devido a que agora se tem o pólo do tipo $(q \cdot n)^{-1}$.

3.7 Conclusões.

Neste capítulo se mostrou como o método de covariantização dos pólos do gauge do cone de luz pode ser obtido a partir de considerações do formalismo de quantização canônica para uma densidade de Lagrangeana que pertence a um gauge linear de classe III, como foi definido pelo professor A. Burnel [16]. Tudo isto nos levou a refletir sobre a importância da estrutura dos pólos no gauge do cone de luz, onde os pólos livres de patologias são na verdade do tipo $(q \cdot n \ q \cdot m)^{-1}$ no lugar de $(q \cdot n)^{-1}$. Aqui também se observa a importância no que concerne ao uso do esquecido vetor dual do cone de luz m_μ . A nossa suspeita (ainda não trabalhada) se encontra no fato que para a demonstração se usou o seguinte termo de fixação de gauge:

$$\mathcal{L}_{fix} = b(m \cdot \partial)(n \cdot A) + \frac{1}{2} \alpha b^2,$$

que não apresenta a simetria entre n_μ e m_μ encontrada em [2] para o planar, logo um termo de fixação mais simétrico poderia ser o seguinte

$$\mathcal{L}_{fix} = (n \cdot A)(m \cdot A),$$

só que para implementar esta simetria a partir do campo auxiliar b , nos levaria às possibilidades seguintes

- primeira proposta

$$\mathcal{L}_{fix} = b[(n.A)(m.A)]^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}b^2,$$

- segunda proposta

$$\mathcal{L}_{fix} = b(n.A) - \frac{(n.A)^2}{2(m.An.A)}b^2,$$

- terceira proposta

$$\mathcal{L}_{fix} = b(m.A) - \frac{(m.A)^2}{2(m.An.A)}b^2,$$

a primeira possibilidade é praticamente inviável dado que se tem uma raiz quadrada, as segunda e terceira possibilidades também nos levam ao termo de fixação desejado, apresentam uma estrutura $m.An.A$ que a faz atrativa, mas eles não tem a simetria entre n_μ e m_μ nelas. Logo estas propostas não deram os resultados desejados. O que foi que elas tem em comum?. Uma das coisas comuns a elas é o fato de usar *um* campo auxiliar b , então que tal tentar agora usando dois campos auxiliares que não propagam b_1 e b_2 (não tem similitude nenhuma com os famosos bananas em pijamas), sendo assim teríamos

$$\mathcal{L}_{fix} = b_1(n.A) + b_2(m.A) - b_1b_2,$$

e isto nos preserva todo o desejado. Logo a densidade de Lagrangeana que nos propomos será

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(F_{\mu\nu})^2 + b_1(n.A) + b_2(m.A) - b_1b_2 \quad (3.13)$$

que é mais complicada, leva a um propagador também mais complicado, mas tem as propriedades que nos parecem atrativas de serem estudadas.

Capítulo 4

Covariantização e a $\mathcal{N}DI\mathcal{M}$.

4.1 Introdução.

Como foi visto no capítulo primeiro, para um campo vetorial de gauge no gauge do cone de luz os fantasmas desacoplam dos campos físicos e é por esta razão que o número de vértices que se tem na teoria é reduzido de forma realmente considerável (e conseqüentemente o número de diagramas de Feynman a ser usados), mas o preço a pagar é o aparecimento de certas desvantagens, sendo uma delas o fato de se ter um propagador do bóson vetorial bastante complicado (isto no caso de se trabalhar com o formalismo de quatro componentes). Além de se ter uma estrutura mais complexa, também se observa a aparição dos pólos do tipo $(q.n)^{-1}$ dentro da estrutura do propagador do bóson, onde n^μ é um vetor tipo luz, vetor que define este gauge. Um fato bem conhecido e admitido pelas pessoas que trabalham com este tipo de gauge é que o uso da Prescrição do Valor Principal de Cauchy, para o tratamento deste tipo de pólos é cheio de patologias, como foi visto no capítulo 2.

Também no capítulo 2 se descreve a forma como estas dificuldades levaram a ter que se fazer uso de certas prescrições, começando em meados dos anos 80 com o trabalho de Mandelstam[7] e logo com a proposta do Leibbrandt[8], que em forma independente sugeriram o uso de prescrições no tratamento das chamadas singularidades “espúrias” provenientes do propagador do cone de luz. Um pouco depois foi mostrado que estas duas prescrições são na verdade equivalentes [1]. Também foi feita a extensão que generaliza estas prescrições para o caso de se trabalhar com um gauge não covariante do tipo

axial geral [1].

Mas também foi estudado separadamente [1] a origem do problema que é o fato de não poder fazer uso da Prescrição do Valor Principal de Cauchy, chegando ao resultado de que esta última viola a causalidade, e conseqüentemente, quando esta é cuidadosamente restaurada e levada em conta, não é necessário fazer o uso de prescrição alguma.

Como vimos no segundo capítulo, existem várias possíveis prescrições a serem usadas. Mas no mesmo capítulo também vimos que a covariantização é uma técnica que dispensa o uso das prescrições; quer dizer é uma forma de calcular as integrais do cone de luz *livre de prescrições*. A pergunta lógica é se existem mais destas formas de cálculo. Foi justamente neste contexto, quer dizer, estudando uma outra forma livre de prescrições que a idéia da covariantização ressurgiu. Esta outra forma de cálculo é a técnica da integração em dimensão negativa, e é dela e da sua relação com a covariantização que vamos tratar neste capítulo.

4.2 Integração em dimensão negativa.

Como já foi visto, no cálculo dos processos físicos, aparecem integrais sobre os quadrimomentos que devem de ser calculadas. Existem vários métodos para o cálculo delas. Recentemente foi introduzido um método sumamente interessante [18] denominado como *método de integração em dimensão negativa* (\mathcal{NDIM}). Este método já foi amplamente testado [19], para o caso de se trabalhar em gauges covariantes. Somente para comprovar o uso no caso das integrais discutidas nesta tese, vamos mostrar o cálculo de uma delas usando esta técnica.

4.2.1 O método.

Para implementar o método de integração negativa, deve-se partir da teoria das funções complexas e do princípio da continuação analítica, sendo assim, considere a integral gaussiana:

$$\int d^{2\omega} q \cdot e^{-\lambda q^2} = \left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^\omega \quad (4.1)$$

Exapandamos a exponencial em séries de Taylor, e invertamos a ordem da somatória com a integração:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\lambda)^n}{n!} \int d^{2\omega} q \cdot (q^2)^n = \left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^\omega$$

E daqui se conclui que:

$$\int d^{2\omega} q \cdot (q^2)^n = (-1)^n \pi^\omega \Gamma(1+n) \delta_{\omega, -n}$$

Como o índice da soma n é *necessariamente* positivo, implica que ω , isto é **a dimensão deverá ser negativa**. Ademais, sendo o lado direito de (4.1) uma função analítica de ω , então a integral para $\omega < 0$ também deverá ser função analítica de ω . Como segundo passo, e trabalhando semelhantemente, se chega a calcular:

$$\begin{aligned} \int d^{2\omega} q \cdot e^{-\alpha q^2 - \beta(q-p)^2} &= \sum_{j,k=0}^{\infty} (-1)^{j+k} \frac{\alpha^j \beta^k}{j! k!} \int d^{2\omega} q \cdot [(q^2)^j [q-p]^2]^k \\ &= \left(\frac{\pi}{\alpha + \beta}\right)^\omega e^{-\frac{\alpha\beta p^2}{\alpha + \beta}} \\ &= \pi^\omega \sum_{n_1, n_2, n_3=0}^{\infty} \alpha^{n_1+n_2} \beta^{n_1+n_3} \frac{(-n_2 - n_3)!}{n_1! n_2! n_3!} [-(p)^2]^{n_1} \end{aligned}$$

Para chegar no último passo, o que usamos foi a expansão multinomial para o denominador $(\alpha + \beta)^{-n_1 - \omega}$, isto implica que se deve de cumprir que $n_1 + n_2 + n_3 + \omega = 0$. Agora podemos reconhecer a integral da somatória como sendo:

$$\begin{aligned} \int d^{2\omega} q \cdot [(q^2)^j [q-p]^2]^k &= \pi^\omega (-1)^{j+k} \Gamma(1+j) \Gamma(1+k) \\ &\cdot \sum_{n_1, n_2, n_3=0}^{\infty} [-(p)^2]^{n_1} \frac{\Gamma(1 - n_1 - \omega)}{n_1! n_2! n_3!} \cdot \delta_{n_1+n_2, j} \cdot \delta_{n_1+n_3, k} \cdot \delta_{n_2+n_3, -(n_1+\omega)} \end{aligned}$$

Daqui se obtém o *sistema de equações lineares*:

$$\begin{cases} n_1 + n_2 = j \\ n_1 + n_3 = k \\ n_1 + n_2 + n_3 + \omega = 0 \end{cases}$$

que tem uma única solução $n_1 = \rho$, $n_2 = j - \rho$, $n_3 = k - \rho$, com $\rho = j + k + \omega$. Então:

$$\int d^{2\omega} q \cdot [(q)^2]^j [q - p]^2]^k = \frac{\pi^\omega [(p)^2]^\rho}{(1 + j| - \rho) \cdot (1 + k| - \rho) \cdot (1 - \rho - \omega|2\rho + \omega)}$$

Onde o símbolo de Pochhammer se define como:

$$(a|k) \equiv (a)_k = \frac{\Gamma(a + k)}{\Gamma(a)}$$

Até agora trabalhamos para dimensão negativa ($\omega < 0$), para voltar ao caso de interesse físico $\omega \rightarrow 2$, primeiro devemos fazer a continuação analítica para valores positivos de ω . Para isto vamos usar uma propriedade do símbolo de Pochhammer:

$$(a| - k) = \frac{(-1)^k}{(1 - a|k)}$$

Finalmente chegaremos a

$$\int d^{2\omega} q \cdot [(q)^2]^j [q - p]^2]^k = \pi^\omega (p^2)^\rho (\rho + \omega| - 2\rho - \omega) \cdot (-j|\rho) \cdot (-k|\rho)$$

Com este resultado obtido, agora é fácil calcular a integral:

$$\int d^{2\omega} q \cdot \frac{1}{q^2 (q - p)^2}$$

Para isso bastará tomar $j = -1$ e $k = -1$, sendo assim se obtém:

$$\int d^{2\omega} q \cdot \frac{1}{q^2 (q - p)^2} = \pi^\omega (p^2)^{\omega-2} \frac{\Gamma(2 - \omega) \Gamma^2(\omega - 1)}{\Gamma(2\omega - 2)}$$

Resultado amplamente conhecido da teoria quântica de campos.

4.3 Primeira tentativa: Gauge do cone de luz e $\mathcal{N}DI\mathcal{M}$.

Para aplicar o método descrito na seção anterior ao nosso caso, vamos primeiro definir o tipo da integral a ser calculada como sendo:

$$I = \int d^{2\omega} q \cdot \frac{1}{(q - a)^2 (q - b)^2} \frac{1}{q \cdot n}$$

Seguindo a idéia descrita acima, o que devemos fazer é obter uma expressão para a integral do tipo:

$$I_{ijk} = \int d^{2\omega} q \cdot (q-a)^{2i} (q-b)^{2j} q \cdot n^k$$

e então fazer $i, j, k \rightarrow -1$. Assim a integral gaussiana a ser expandida e calculada tem a forma:

$$\begin{aligned} \int d^{2\omega} q \cdot e^{-\alpha(q-a)^2 - \beta(q-b)^2 - \gamma(q \cdot n)} &= \sum_{i,j,k=0}^{\infty} (-1)^{i+j+k} \frac{\alpha^i \beta^j \gamma^k}{i!j!k!} \int d^{2\omega} q \cdot (q-a)^{2i} (q-b)^{2j} (q \cdot n)^k \\ &= \left(\frac{\pi}{\alpha + \beta} \right)^\omega e^{-\frac{1}{\alpha+\beta} [\alpha\beta(a-b)^2 - \alpha\gamma(a \cdot n) - \beta\gamma(b \cdot n) + \frac{1}{4}\gamma^2 n^2]} \\ &= \pi^\omega \sum_{n_i=0}^{\infty} (-1)^{n_1+n_2+n_3} \alpha^{n_1+n_2+n_4} \beta^{n_1+n_3+n_5} \gamma^{n_2+n_3} \\ &\quad \cdot \frac{(-n_1 - n_2 - n_3 - \omega)!}{n_1!n_2!n_3!n_4!n_5!} (a-b)^{n_1} (a \cdot n)^{n_2} (b \cdot n)^{n_3} \end{aligned}$$

Na expressão anterior também se usou a expansão multinomial, com a condição $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + \omega = 0$. Então se reconhece que:

$$\begin{aligned} \int d^{2\omega} q \cdot (q-a)^{2i} (q-b)^{2j} q \cdot n^k &= \pi^\omega (-1)^{i+j+k} \Gamma(1+i) \Gamma(1+j) \Gamma(1+k) \\ &\quad \cdot \sum_{n_i=0}^{\infty} (-1)^{n_1+n_2+n_3} \frac{(-n_1-n_2-n_3-\omega)!}{n_1!n_2!n_3!n_4!n_5!} (a-b)^{n_1} (a \cdot n)^{n_2} (b \cdot n)^{n_3} \\ &\quad \cdot \delta_{n_1+n_2+n_4, i} \cdot \delta_{n_1+n_3+n_5, j} \cdot \delta_{n_2+n_3, k} \cdot \delta_{n_4+n_5, -(n_1+n_2+n_3+\omega)} \end{aligned}$$

O sistema de equações lineares será:

$$\begin{cases} n_1 + n_2 + n_4 = i \\ n_1 + n_3 + n_5 = j \\ n_2 + n_3 = k \\ n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + \omega = 0 \end{cases}$$

Analisando um pouco, vê-se que se tem 5 índices (n_i) e somente 4 equações. Então são possíveis $C_4^5 = 5$ soluções, destas 5, uma é trivial e as outras 4 fornecem 2 respostas. Seja:

$$\sigma = i + j + k + \omega$$

Então, uma das respostas nos dá duas soluções, que depois deverão de ser somadas. Elas são :

- A primeira é:

$$I_1 = \pi^\omega (-j|\sigma)(-i|i+j+\omega)(\sigma+\omega|-2\sigma-\omega+k)[(a-b)^2]^{\sigma-k}(b.n)^k \cdot {}_2F_1(-k, \omega+j; 1+j-\sigma; \eta)$$

Tomando o limite $i, j, k \rightarrow -1$:

$$I_1 = \pi^\omega \frac{[(a-b)^2]^{\omega-2}}{(b.n)} \frac{\Gamma(\omega-2)\Gamma(\omega-1)\Gamma(2-\omega)}{\Gamma(2\omega-3)} {}_2F_1(1, \omega-1; 3-\omega; \eta)$$

- A outra será:

$$I_2 = \pi^\omega (-j|i+j+\omega)(-i|i+k-\sigma)(-k|j+k-\sigma)[(a-b)^2]^{\sigma-k}(a.n)^{\sigma-j}(b.n)^{-\sigma+j+k} \cdot {}_2F_1(\omega+i, \sigma+\omega; 1+\sigma-j; \eta)$$

Tomando o limite $i, j, k \rightarrow -1$:

$$I_2 = \pi^\omega \frac{[(a-b)^2]^{\omega-2}(a.n)^{\omega-2}}{(b.n)^{\omega-1}} \Gamma(\omega-1)\Gamma^2(2-\omega) {}_2F_1(\omega-1, 2\omega-3; \omega-1; \eta)$$

Sendo:

$$\eta = \frac{a.n}{b.n}$$

Usando a propriedade das funções hipergeométricas:

$$\begin{aligned} {}_2F_1(a, b; c; z) &= (1-z)^{-a} \frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)\Gamma(c-a)} {}_2F_1(a, c-b; a-b+1; \frac{1}{1-z}) \\ &\quad + (1-z)^{-b} \frac{\Gamma(c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)} {}_2F_1(b, c-a; b-a+1; \frac{1}{1-z}) \end{aligned}$$

Se chega a:

$$I = I_1 + I_2 = \pi^\omega \frac{[(a-b)^2]^{\omega-2}}{(a.n)} \Gamma(2-\omega) B(\omega-1, \omega-1) {}_2F_1(1, \omega-1; 2\omega-2; \lambda)$$

Sendo agora:

$$\lambda = \frac{(a-b).n}{a.n}$$

Resultado que concorda com aquele calculado para $F2_{PV}$ na referência [20], porém fisicamente inaceitável.

4.4 Segunda tentativa: Gauge do cone de luz e \mathcal{NDIM} .

Na seção anterior, o que se obteve foi mais ou menos o que era de se esperar: o método de integração em dimensão negativa nos leva a um resultado já conhecido, somente que neste caso a tentativa foi levar este método ao caso de se trabalhar no gauge do cone de luz. O resultado conhecido, é na verdade o mesmo que se obteve na prescrição do valor principal de Cauchy. Como bem sabemos, não é o correto neste caso, pois o que se sabe é que este resultado nos mostra que a causalidade é violada.

A pergunta a ser respondida nesta seção é a seguinte: será que se tem alguma forma de implementar o bem sucedido método \mathcal{NDIM} para desta forma poder chegar ao resultado correto?

Como ponto de partida, tomemos novamente uma das mais simples integrais do cone de luz a um loop,

$$T = \int \frac{d^{2\omega} q}{(q-p)^2} \frac{(q \cdot m)}{(q \cdot n)}. \quad (4.2)$$

Sendo que nosso objetivo é o de restaurar a causalidade, para desta forma preservar os muito bem conhecidos resultados anteriores. O que está por trás da integral da equação (4.2) é a idéia seguinte: as prescrições de Mandelstam, de Leibbrandt e o método da covariantização tem um fato em comum: eles fazem uso de mais um grau de liberdade no sentido de que incorporam nelas o uso do vetor dual do cone de luz m_μ , sendo as prescrições acima descritas, e somente no gauge do cone de luz, chamadas de *prescrições de dois vetores* [1]. Logo, nesta tentativa o que se quer é testar se o método de \mathcal{NDIM} leva aos resultados corretos. Introduzindo mais um grau de liberdade, de modo que a integral (4.2) apresenta o fator do tipo $q \cdot m$ no numerador do integrando, temos agora o procedimento usual do método \mathcal{NDIM} aplicado para a integral em estudo (4.2). Antes de continuar, daremos aqui um esclarecimento: observe-se que a estrutura da integral T é importante, pois trabalhamos no gauge do cone de luz com a condição de que os fatores do vetor dual m_μ aparecendo *sempre* no *numerador* do integrando.

Com isso, voltemos para aplicar o método de \mathcal{NDIM} para a integral (4.2). Isto nos levará a:

$$\mathcal{B} = \int d^{2\omega} q \exp \left[-\alpha(q-p)^2 - \beta(q \cdot n) - \gamma(q \cdot m) \right]$$

$$\begin{aligned}
&= e^{-\beta(p \cdot n) - \gamma(p \cdot m)} \int d^{2\omega} q e^{-\alpha q^2 - \beta(q \cdot n) - \gamma(q \cdot m)} \\
&= \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^\omega \exp \left\{ -\beta(p \cdot n) - \gamma(p \cdot m) + \frac{\beta\gamma(n \cdot m)}{2\alpha} \right\} \\
&= \sum_{i,j,l=0}^{\infty} (-1)^{i+j+l} \frac{\alpha^i \beta^j \gamma^l}{i!j!l!} \mathcal{T}.
\end{aligned} \tag{4.3}$$

onde \mathcal{T} é a integral em dimensão negativa.

$$\mathcal{T} = \int d^{2\omega} q [(q-p)^2]^i (q \cdot n)^j (q \cdot m)^l. \tag{4.4}$$

A partir da equação descrita acima, é fácil obter o resultado

$$\mathcal{T} = (-\pi)^\omega \left(\frac{-2 p \cdot n p \cdot m}{n \cdot m} \right)^{i+\omega} (p \cdot n)^j (p \cdot m)^l \frac{(1-i-\omega|2i+\omega)}{(1+j|i+\omega)(1+l|i+\omega)}.$$

Agora vem o ponto crucial em nossa análise. Como foi mencionado anteriormente, a peculiaridade do gauge do cone de luz é que o expoente de $(q \cdot m)$ tem que ser não negativo, quer dizer $l \geq 0$ *sempre*. Isto significa que o símbolo de Pochhammer que contém o expoente l , seja $(1+l|i+\omega)$ nunca deverá ser continuado em forma analítica para valores *negativos* de l .

Tendo esta restrição em mente, procederemos da forma usual, obtendo desta forma a seguinte expressão,

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}^{AC} &= \pi^\omega \left(\frac{2 p \cdot n p \cdot m}{n \cdot m} \right)^{i+\omega} \\
&\quad (p \cdot n)^j (p \cdot m)^l \frac{(-j|-i-\omega)}{(i+\omega|-2i-\omega)(1+l|i+\omega)}.
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Para comparar com algum resultado conhecido, em particular tomemos como sendo $i = j = -1$ e $l = 0$, desta forma o que se obtém a partir de (4.5) é

$$\mathcal{T}^{AC} = i(-\pi)^\omega p^- (2p^+ p^-)^{\omega-1} \frac{\Gamma(2-\omega)\Gamma(\omega-1)}{\Gamma(\omega)}. \tag{4.6}$$

Este resultado concorda com aquele calculado no capítulo 2 (comparar com (2.9) e (2.10)), quer dizer que este resultado é o mesmo que no caso onde alguma prescrição que preserve a causalidade tivesse sido escolhida. Este

resultado é alentador, dado o fato que não foi feito na nossas contas o uso de prescrição alguma para o tratamento das denominadas singularidades “não físicas” que são uma das características do gauge do cone de luz. A única consideração que foi feita consiste em considerar uma violação dupla da covariância onde os dois vetores externos n_μ e m_μ foram tratados no mesmo pé de igualdade.

O que parece que acontece é que para ter a causalidade preservada no gauge do cone de luz é necessário ter os dois vetores incluídos na teoria. Uma tentativa de construir uma teoria de gauge assim foi descrita em [2] onde os autores conseguem definir pela primeira vez o gauge planar para o cone de luz.

Agora observe também que a integral calculada acima (como foi mostrado no capítulo 2), resulta do uso da covariantização no gauge do cone de luz; método que implicitamente faz uso de dois vetores do cone de luz. Surge assim a pergunta: o método \mathcal{NDIM} com a causalidade restaurada estará relacionado com o método da covariantização do gauge do cone de luz?. Esta pergunta será respondida na seção que se segue.

4.5 Relação entre a covariantização e o método de integração em dimensão negativa.

O método de integração em dimensão negativa aplicado no gauge do cone de luz não fez uso de qualquer tipo de prescrição, sendo assim podemos classificar este como sendo um método livre de prescrição. Mas a covariantização descrita no capítulo anterior também pode ser classificada como sendo um método livre de prescrição, só que neste caso e em contraste com o método \mathcal{NDIM} , a covariantização só se aplica ao gauge do cone de luz.

Desta forma, a pergunta natural que surge é se existe alguma relação entre a covariantização do pólos do gauge do cone de luz e o método \mathcal{NDIM} para as integrais do gauge do cone de luz. Para tentar responder esta pergunta, consideremos por definição e também simplicidade, sem perder generalidade, a forma mais geral de uma integral a um “loop” do gauge do cone de luz.

$$F(p) = \int d^{2\omega} q \cdot \frac{f(q, p, n)}{g(q, p)(q^+)^{\gamma}}, \quad \gamma > 0, \quad (4.7)$$

onde $f(q, p, n)$ e $g(q, p)$ são funções reais bem comportadas. Também seja $\gamma = \alpha + \beta$, com α e β sendo números não negativos. Isto significa que teremos dois conjuntos de possíveis escolhas para α e β :

- na primeira consiste em se ter $\alpha \geq 0$ e $\beta > 0$.
- na segunda teremos $\alpha > 0$ e $\beta \geq 0$.

Observe-se que não é possível se ter o caso $\alpha = 0$ e $\beta = 0$, pois desta forma nossa integral não seria mais do tipo do gauge do cone de luz.

Logo teremos que a equação (4.7) tomará a seguinte forma:

$$F(p) = \int d^{2\omega} q \cdot \frac{f(q, p, n)}{g(q, p)(q^+)^{\alpha}(q^+)^{\beta}}.$$

Em nossa análise podemos eleger quaisquer dos casos. Vale dizer é indiferente qual caso tomemos, pois na verdade podemos fazer o intercâmbio $\alpha \leftrightarrow \beta$ na integral (4.7) e a dedução e a conclusão não mudariam. Sendo desta forma, tomemos $\alpha > 0$ e $\beta \geq 0$ como definição a seguir.

Agora observe-se que o uso do método de covariantização significa que para o pólo que vem de β , teríamos,

$$\frac{1}{(q^+)^{\beta}} = \frac{2^{\beta}(q^-)^{\beta}}{(q^2 + \hat{q}^2)^{\beta}},$$

desde que temos escolhido o caso onde α é estritamente positivo, $\alpha > 0$, encontramos que o pólo que vem de α como sendo o pólo característico do gauge do cone de luz, e desta forma

$$F(p) = \int d^{2\omega} q \cdot \frac{f(q, p, n)2^{\beta}(q^-)^{\beta}}{g(q, p)(q^2 + \hat{q}^2)^{\beta}(q^+)^{\alpha}} = \int d^{2\omega} q \cdot \frac{F(q, p, n)(q^-)^{\beta}}{G(q, p)(q^+)^{\alpha}}, \quad (4.8)$$

onde temos feito as seguintes definições: $F(q, p, n) = 2^{\beta} f(q, p, n)$ e $G(q, p) = g(q, p)(q^2 + \hat{q}^2)^{\beta}$. Como agora se tem que $\beta \geq 0$ e $\alpha > 0$, podemos ver que esta condição é a *condição de causalidade* para definir o método \mathcal{NDIM} no cone de luz, neste caso as integrais onde se usa \mathcal{NDIM} tomam valores de dimensão negativa. Para ilustrar todo isto que foi feito, consideremos o seguinte caso:

$$f(q, p, n) = 2^{\beta}(q^2 - \hat{q}^2)^{-\beta}$$

e

$$g(q, p) = (q - p)^2,$$

logo a equação (4.8) tomará a forma:

$$F(p) = \int d^{2\omega} q \cdot \frac{(q^-)^\beta}{(q - p)^2 (q^+)^\alpha} \quad (4.9)$$

que não é mais do que a integral de partida T_{ijk} (ver a expressão (4.2)) para o método de integração em dimensão negativa no gauge do cone de luz. Aqui temos que lembrar que depois de ter feito a continuação analítica, escolhem-se os valores de $\alpha = -1$ e $\beta = 0$ e isto é colocado dentro da equação (4.5). Por outro lado, se usássemos a identidade da técnica de covariantização, a integral da equação (4.8) na qual se chegaria seria,

$$F(p) = \int d^{2\omega} q \cdot \frac{1}{(q - p)^2 (q^+)^{\alpha+\beta}},$$

mas $\alpha + \beta = 1$ e com estes valores a integral acima nos leva a (agora usando a covariantização) [12]

$$F(p) = i(-\pi)^\omega p^- (2p^+ p^-)^{\omega-1} \frac{\Gamma(2-\omega)\Gamma(\omega-1)}{\Gamma(\omega)}. \quad (4.10)$$

Se manipulamos o resultado obtido na equação (4.5) (calculada usando o método de integração em dimensão negativa, neste caso com a causalidade restaurada) e fazemos a comparação com a equação acima (4.10), encontraremos que elas são na verdade a mesma solução.

4.6 Conclusões.

Neste capítulo temos visto como o método de integração em dimensão negativa pode ser levado no contexto das integrais do cone de luz, só que, como foi mostrado, para obter os resultados certos é preciso restaurar a causalidade. Nesse sentido podemos dizer que o método \mathcal{NDIM} não fez uso de prescrição nenhuma, mas o que na verdade é necessário para ter a causalidade de volta é abandonar a noção de que somente um vetor (neste caso n_μ) tipo luz seja suficiente, mas sim considerar dois vetores (n_μ e m_μ) tipo luz. Isto é o que

as prescrição que preservam a causalidade tem em comum. Mas não somente estes tipos de prescrições tem esta propriedade, a covariantização também faz uso deste fato, sendo que também este método dispensa o uso de prescrições. Surge desta forma a pergunta, se estas duas técnicas encontram-se relacionadas, pergunta que tem como resposta afirmativa, como se descreveu na seção anterior. Tudo isto nos leva a pensar na importância que se tem, pelo menos no gauge do cone de luz, quando os dois vetores são usados, existindo talvez algum tipo de simetria discreta entre eles. Este fato já era mais ou menos conhecido, desde o início dos trabalhos neste gauge, pois tanto fazia trabalhar com um termo de fixação de gauge do tipo:

$$\mathcal{L}_{fix} = \frac{1}{2\alpha}(n.A)^2,$$

que é se encontra na literatura, ou também usar como termo de fixação de gauge (agora usando o vetor m_μ)

$$\mathcal{L}_{fix} = \frac{1}{2\alpha}(m.A)^2.$$

Uma luz para achar a resposta a esta possível simetria pode-se encontrar no trabalho apresentado no apêndice B.

Capítulo 5

Conclusões.

Neste trabalho foi considerado uma alternativa para o uso das prescrições tradicionais no gauge do cone de luz, este método alternativo denomina-se de covariantização dos pólos do gauge do cone de luz e tem sua base na identidade das coordenadas do cone de luz:

$$2q^+q^- = q^2 + \hat{q}^2,$$

logo, a diferença das prescrições tradicionais, seu uso limita-se somente ao caso do gauge do cone de luz. Mas o que é ganho com esta restrição é o fato que este procedimento *não é mais uma prescrição*, mas sim uma identidade própria das coordenadas do cone de luz.

Então neste sentido, pode-se pensar que é possível dispensar o uso das prescrições usuais para o tratamento dos pólos

$$\frac{1}{q \cdot n} \equiv \frac{1}{q^+},$$

sempre que se trabalhe no gauge do cone de luz.

Os resultados obtidos no capítulo 2 nas equações (2.9), (2.10), (2.11) e (2.12); nos mostram como o método da covariantização nos dá as mesmas respostas que se usássemos alguma prescrição causal. Mas ainda se tem algo a mais, para ver isto, tomemos a seguinte integral em forma geral a um “loop” do gauge do cone de luz:

$$I(p) = \int q \cdot d^{2\omega} \frac{f(q, p)}{f_1(q, p) \cdots f_n(q, p)} \frac{1}{q^+}. \quad (5.1)$$

Como ilustração, usemos a prescrição de Leibbrandt, logo a integral (5.1) será

$$I_L(p) = \int q \cdot d^{2\omega} \frac{f(q, p)}{f_1(q, p) \cdots f_n(q, p)} \frac{q^-}{q^+ q^- + i\epsilon},$$

e após parametrização

$$I_L(p) = (-i)^{n+1} \int q \cdot d^{2\omega} \int_0^\infty d\alpha_1 \cdots d\alpha_n d\beta \cdot q^- \cdot e^{i[\sum_1^n \alpha_i f_i(q, p) + \beta q^+ q^-]}. \quad (5.2)$$

Agora no lugar de usar a prescrição de Leibbrandt na equação (5.1) usemos a covariantização, logo

$$I_{cov}(p) = \int q \cdot d^{2\omega} \frac{f(q, p)}{f_1(q, p) \cdots f_n(q, p)} \frac{2q^-}{q^2 + \hat{q}^2},$$

que parametrizando dá

$$I_{cov}(p) = (-i)^{n+1} \int q \cdot d^{2\omega} \int_0^\infty d\alpha_1 \cdots d\alpha_n d\beta \cdot 2q^- \cdot e^{i[\sum_1^n \alpha_i f_i(q, p) + \beta 2q^+ q^-]}, \quad (5.3)$$

onde no termo que multiplica ao parâmetro β foi usada novamente a identidade do cone de luz $q^2 + \hat{q}^2 \equiv 2q^+ q^-$, desta forma a similaridade entre as equações (5.2) e (5.3) é mais evidente. Na verdade se fizermos a seguinte mudança de variável

$$\begin{aligned} \beta &\rightarrow 2\beta, \\ d\beta &\rightarrow 2d\beta, \end{aligned}$$

na equação (5.2), esta coincidirá com a equação (5.3), o que nos diz que a covariantização esta relacionada com as prescrições de Mandelstam e Leibbrandt. Isto nos sugere que estas prescrições na realidade podem ser chamadas de agora em diante como o *método de tratamento dos pólos do cone de luz de Mandelstam e Leibbrandt*.

Esta relação explica todas as propriedades verificadas neste trabalho como foram: a rotação de Wick é permitida, a contagem de potências é válida, é possível obter-se a partir da quantização canônica. Mas a covariantização e o método \mathcal{NDIM} nos mostrou como existe uma simetria entre os dois vetores

do cone de luz n_μ e m_μ , fato que foi usado para a obtenção do gauge planar do cone de luz, e a possibilidade de ter uma outra estrutura no termo de fixação de gauge para o gauge do cone de luz:

$$\mathcal{L}_{fix} = \frac{1}{2\alpha}(n.A)(m.A).$$

O uso de um termo de Lagrangeana de fixação de gauge deste tipo incrementa em forma considerável o número de cálculos, mas simplicidade não é a palavra chave nos cálculos do gauge do cone de luz. O que foi lamentável consistiu no fato de ter pensado que trabalhar com um termo mais simétrico poderia levar ao cancelamento dos termos não locais, mas isto não chegou à acontecer. Em resumo, as prescrições ajudaram durante anos nos trabalhos do cone de luz, mas elas escondiam por trás coisas que foram estudadas neste trabalho.

Apêndice A

Coordenadas do cone de luz.

Usamos a métrica $(+, -, -, -)$, com x^0 sendo a componente temporal de um quadrivetor geral x^μ . As componentes do cone de luz deste último são:

$$x^\mu = (x^+, x^-, x^i), \quad i = 1, 2$$

Onde:

$$\begin{aligned} x^\pm &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x^0 \pm x^3) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x_0 \mp x_3) = x_\mp \\ x^i &\equiv (\hat{x})^i = (x^1, x^2) \end{aligned}$$

Definamos agora os vetores tipo luz n_μ e m_μ em coordenadas cartesianas:

$$\begin{aligned} n_\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 0, 1) \\ m_\mu &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 0, -1) \end{aligned}$$

Eles satisfazem : $n^2 = m^2 = 0$ e $n^\mu m_\mu = 1$. Observe-se que:

$$\begin{aligned} x^+ &= x^\mu n_\mu \\ x^- &= x^\mu m_\mu \end{aligned}$$

O produto escalar agora toma a forma seguinte:

$$x^\mu y_\mu = x^+ y^- + x^- y^+ - \hat{x} \hat{y} \tag{A.1}$$

Isto quer dizer que a métrica, nas coordenadas do cone de luz, tem a forma seguinte:

$$g^{\mu\nu} = \begin{matrix} & + & - & 1 & 2 \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & + \\ & - \\ & 1 \\ & 2 \end{matrix} \quad (\text{A.2})$$

Em particular:

$$x^2 = 2x^+x^- - \hat{x}^2. \quad (\text{A.3})$$

O elemento de volume é:

$$d^4x = d^2\hat{x}dx^-dx^+$$

Para implementar a regularização dimensional é necessário fazer a generalização a D-dimensões:

$$d^{2\omega}x = d^{2(\omega-1)}\hat{x}dx^-dx^+, \quad (\text{A.4})$$

onde a relação entre a dimensão D do espaço-tempo e ω vem dada pela expressão:

$$D = 2\omega$$

Apêndice B

Gauge planar no cone de luz.

B.1 Introdução.

Os campos de gauge, independentemente de serem do tipo Abelianos ou não Abelianos, são por definição campos que apresentam uma classe de invariância: a invariância de gauge. Os campos que se encontram conectados através desta invariância deverão necessariamente ser levados em conta uma vez só no processo de quantização, se não fosse assim, um bom número de eventos patológicos acontecerão. A forma padrão e pragmática de encarar este problema consiste em introduzir um termo de quebra do gauge na densidade Lagrangeana o que resulta no que é conhecido como a escolha da fixação do gauge. Esta escolha pode ser feita dependendo do gosto ou conveniência que se tenha preferência, mas na prática se observa que algumas escolhas sejam mais convenientes do que outras dado as simplificações ou dificuldades técnicas que possam existir entre uma escolha ou outra.

Neste sentido, os gauges não covariantes do tipo algébricos possuem problemas abertos que representam um desafio, não somente no que concerne a sua utilidade, mas também no que é relativo às inerentes dificuldades técnicas associadas a eles. Colocando um exemplo, um problema aberto dentro do contexto do gauge axial não-homogêneo, também conhecido como gauge *planar* [21, 22], tem que ver com o fato que “*não é possível*” definir-lo para o caso do cone de luz [1]. Vejamos brevemente a razão pela qual a afirmação acima colocada foi dada. O caso axial não-homogêneo é definido pela condição’:

$$n^\mu A_\mu^a \equiv n \cdot A^a = \Phi^a$$

onde n_μ é um vetor externo, constante e arbitrário, A_μ^a representam os campos de gauge (por definição trabalharemos com campos de gauge não-Abelianos) e Φ^a são um conjunto de campos escalares que pertencem à representação adjunta da álgebra de Lie $SU(N)$ [1]. Sendo assim, o termo de fixação de gauge da densidade de Lagrangeana é escolhido a ser:

$$\mathcal{L}_{fix} = \frac{1}{2n^2} \partial_\mu \Phi^a \partial^\mu \Phi^a + \lambda^a (\Phi^a - n \cdot A^a). \quad (\text{B.1})$$

onde λ^a são os multiplicadores de Lagrange. É fácil de se ver que esta última equação na verdade é igual a:

$$\mathcal{L}_{fix} = \frac{1}{2n^2} \partial_\mu (n \cdot A^a) \partial^\mu (n \cdot A^a). \quad (\text{B.2})$$

Agora, dependendo do tipo do vetor externo n_μ podem chegar a serem definidos os seguintes casos:

- $n^2 < 0$: gauge planar tipo espaço,
- $n^2 > 0$: gauge planar tipo tempo.

Porém, o caso do gauge planar no cone de luz não é definido, pois neste caso encontramos com uma singularidade quando $n^2 = 0$.

Na próxima seção será apresentada uma forma de lidar com esta inconveniência.

B.2 A proposta.

Nós começaremos esta seção revisando alguns conceitos importantes relacionados com uma base de vetores nulos que pertencem a um espaço-tempo quadridimensional. A condição de ser “tipo luz” $n^2 = 0$ não necessariamente define de forma unívoca o vetor externo n_μ que é usado na implementação da condição de gauge. O motivo disso é facilmente percebido se consideramos o caso particular onde $n_\mu = (n_0, 0, 0, n_3)$. Neste caso a condição $n^2 = 0$ nos dá como soluções seja $n_0 = +n_3$, ou $n_0 = -n_3$ com $n_0 > 0$. Isto tem a seguinte implicação: as componentes n_0 e n_3 do vetor tipo luz não são linearmente independentes; apresentando agora duas possibilidades que são:

$n_\mu = (n_0, 0, 0, +n_3)$ e $m_\mu = (n_0, 0, 0, -n_3)$, sempre que $n_0 > 0$. Esta propriedade peculiar do vetor do cone de luz, que chegou a ser demonstrada por Leibbrandt [23], onde ele mostra que se tem uma relação com o formalismo de tetradas de Newman-Penrose [24], formalismo que é usado no contexto da gravitação e cosmologia. Resumidamente, o que Leibbrandt fez no seu artigo foi demonstrar que o sub-espaço vetorial de duas-dimensões (n_0, n_3) *não pode* ser expandido somente pelo vetor n_μ , pois este vetor possui componentes linearmente dependentes.

Isto nos leva a, dado nosso propósito e sem perder generalidade, a introduzir dois vetores tipo luz, denotados por n_μ e m_μ , de forma que:

$$\begin{aligned} n^2 = m^2 &= 0, \\ n \cdot m &= 2. \end{aligned}$$

Observe-se que aqui estamos escolhendo como fator de normalização o número 2 por conveniência futura.

Com tudo isto acima descrito, agora podemos colocar nossa proposta, esta consiste em considerar o seguinte termo de fixação de gauge da densidade de Lagrangeana, termo que apresenta os dois vetores tipo luz que geram a superfície do cone de luz

$$\mathcal{L}_{fix} = \frac{1}{4n \cdot m} \partial_\mu \Phi^{2a} \Sigma \partial^\mu \Phi^{2a} + \lambda^{2a} (\Phi^{2a} - \mathcal{N} \cdot A^{2a}). \quad (\text{B.3})$$

onde

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$\mathcal{N}_\mu = \begin{pmatrix} 1 \otimes n_\mu & 0 \\ 0 & 1 \otimes m_\mu \end{pmatrix}$$

O que também fizemos foi estender a dimensão N da álgebra de Lie para ser agora $2N$ ou também tendo a possibilidade de levar isto para o caso de se ter uma álgebra sobre o campo complexo. Desta forma é possível partir o campo Φ^{2a} ($2a = 1 \dots 2N$) como sendo:

$$\Phi^{2a} = \begin{pmatrix} \phi^a \\ \varphi^b \end{pmatrix}$$

onde $a = 1 \cdots N$ and $b = N + 1 \cdots 2N$ são índices do espaço da álgebra de Lie. Logo, não fica difícil mostrar que o termo de fixação de gauge descrito na equação (B.3) tomará a forma seguinte

$$\mathcal{L}_{fix} = \frac{1}{2n \cdot m} \partial_\mu (n \cdot A^a) \partial^\mu (m \cdot A^a), \quad (\text{B.4})$$

que não é mais do que similarmente repetir o mesmo procedimento quando se partiu da equação (B.1) para chegar a (B.2) (onde foi feito o seguinte ansatz: $A^a = A^b$). Esta última equação é na verdade livre das singularidades do caso do cone de luz, pois agora temos $n \cdot m$ no denominador e esta quantidade é diferente de zero. Desta forma é possível definir (B.3) como sendo o termo de fixação de gauge da densidade de Lagrangeana; só que agora representando o caso tipo luz do gauge planar.

Observe-se que agora existe uma classe de simetria discreta em (B.4) quando o intercâmbio $n \leftrightarrow m$ é feito. Realizando este tipo de intercâmbio na equação (B.3) obteremos que o resultado é uma “quebra” da matriz \mathcal{N} , o que nos mostraria que aparentemente (B.3) não seria invariante sobre este tipo de simetria discreta, mas se nós usamos este termo quebrado de fixação de gauge da Lagrangeana, e logo procedemos na eliminação dos campos auxiliares Φ^a da mesma forma que foi feita para ir de (B.3) a (B.4), então se observará que nossa resposta coincide plenamente com (B.4).

Com este novo termo de fixação de gauge agora é possível encontrar o propagador do bóson para o caso tipo luz do gauge planar.

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\mu\nu}(q) &= -\frac{i}{2(2\pi)^4 q^2} \left[2g_{\mu\nu} - q^- \frac{(q_\mu n_\nu + q_\nu n_\mu)}{q^+ q^-} - q^+ \frac{(q_\mu m_\nu + q_\nu m_\mu)}{q^+ q^-} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^+ q^-} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(q^-)^2}{q^+ q^-} n_\mu n_\nu + \frac{(q^+)^2}{q^+ q^-} m_\mu m_\nu - q^+ q^- \frac{(n_\mu m_\nu + m_\mu n_\nu)}{q^+ q^-} \right] \quad (\text{B.5}) \\ &\equiv -\frac{i}{2(2\pi)^4 q^2} \left[G_{\mu\nu}^{\text{COV}}(q) + G_{\mu\nu}^{\text{PLANAR}}(q, n, m) \right], \end{aligned}$$

Observe-se como agora este propagador do vetor bosônico é muito mais complexo que aquele que usualmente é encontrado quando somente se utiliza um vetor do cone de luz externo n_μ para fixar a escolha de gauge (violação da invariância de Lorentz a um-grau). Por outro lado, fica claro que a partir desse novo tipo de propagador que as coordenadas do cone de luz q^+ e q^-

formam o termo bilinear q^+q^- que não pode ser separado sem perder importantíssima informação física no processo [12, 20]. Na verdade, quebrar esta forma bilinear nos denominadores significaria a violação da causalidade da teoria. Vejamos, se tentássemos simplificar a expressão do propagador acima descrita de forma que este seria

$$G_{\mu\nu}^{\text{PLANAR}}(q, n, m) = -\frac{(q_\mu n_\nu + q_\nu n_\mu)}{q^+} - \frac{(q_\mu m_\nu + q_\nu m_\mu)}{q^-} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^+ q^-} \\ + \frac{q^-}{q^+} n_\mu n_\nu + \frac{q^+}{q^-} m_\mu m_\nu - n_\mu m_\nu - m_\mu n_\nu,$$

esta simplificação nos levaria a uma mistura dos modos não desejada das frequências positiva com as frequências negativas para os campos quânticos, que não é mais do que a violação da causalidade.

Também é fácil ver que o novo propagador encontrado em (B.5) apresenta uma estrutura de pólos diferente da usual no gauge do cone de luz $(q^+)^{-1}$, que como se estudou no capítulo 2 deste trabalho, apresenta uma série de problemas que são levados em conta mediante o uso de alguma prescrição causal ou como também foi visto no capítulo 2, mediante o uso do método de covariantização. Mas agora esta nova estrutura de pólos $(q^+q^-)^{-1}$, é livre das patologias usuais (problemas com a rotação de Wick, contagem de potências, etc.).

B.3 Conclusões.

Neste apêndice consideramos uma escolha de um gauge algébrico não covariante mas no caso não homogêneo — conhecido como o gauge planar — e introduzimos um termo de fixação de gauge na densidade da Lagrangeana com uma violação da covariância de Lorentz de segundo grau, baseados no fato de que não é possível tentar gerar com uma base de vetores nulos o espaço-tempo em quatro dimensões sem o uso necessário dos dois vetores duais do cone de luz n_μ e m_μ . Levando isto em consideração, foi possível chegar a definir o gauge planar para o caso do tipo luz, porém, o preço a pagar neste caso consiste em que o novo propagador do bóson vetorial resulta quase infinitamente complicado para o cálculo dos processos físicos, dada sua complexidade. Mas como se viu, a nova estrutura de pólos faz com que mire com otimismo a este tipo de gauge do cone de luz que apresentam essa

violação da covariância de segundo grau. Logo surge uma nova pergunta: é possível implementar estas idéias mas agora no contexto do gauge do cone de luz homogêneo?. A resposta é afirmativa; para isto bastaria considerar agora o seguinte termo de fixação de gauge

$$\mathcal{L}_{fix} = \frac{1}{2\alpha}(A.n)(A.m)$$

e com isto chegaríamos a um propagador da forma dada na expressão (B.5), que apresenta a nova estrutura de pólos $(q^+q^-)^{-1}$.

Apêndice C

Relações matemáticas usadas.

Neste apêndice colocaremos as relações matemáticas que foram usadas nos diversos cálculos efetuados nesta tese.

C.1 Parametrização de Schwinger.

Também conhecida como representação de Schwinger ou simplesmente parametrização exponencial.

Esta forma de parametrizar os denominadores é uma alternativa àquela proposta pelo Feynman (conhecida como parametrização de Feynman) que é muito usada na literatura.

Uma possível vantagem de usar a parametrização exponencial reside no fato que ela pode levar a ter integrais gaussianas ou também pode ser feita uma expansão em séries de Taylor sobre o exponencial.

A parametrização de Schwinger consiste no seguinte, dada a identidade

$$\frac{1}{A} = -i \int_0^{\infty} d\alpha \cdot e^{i\alpha A},$$

é possível generalizar isto para o caso de se ter n denominadores

$$\frac{1}{A_1 A_2 \cdots A_n} = (-i)^n \int_0^{\infty} d\alpha_1 d\alpha_2 \cdots d\alpha_n e^{i \sum_1^n \alpha_j A_j} \quad (\text{C.1})$$

Para o caso de se trabalhar com um gauge covariante, onde se tem quadrados dos momentos no denominador, a parametrização exponencial da equação (C.1) toma a forma seguinte

$$\frac{1}{(q - a_1)^2(q - a_2)^2 \cdots (q - a_n)^2} = i^n \int_0^\infty d\alpha_1 d\alpha_2 \cdots d\alpha_n e^{i[-\alpha_i q^2 + 2\alpha_i a_i \cdot q]}, e^{-i\alpha_i a_i^2}$$

Sendo:

$$\begin{aligned} -\alpha_i q^2 + 2\alpha_i a_i \cdot q &= \sum_{i=1}^n [-\alpha_i q^2 + 2\alpha_i a_i \cdot q] \\ \alpha_i a_i^2 &= \sum_{i=1}^n \alpha_i a_i^2 \end{aligned}$$

já para o caso de interesse que o caso de se trabalhar com o gauge do cone de luz, a forma a ser usada é a seguinte:

$$\frac{1}{(q - a_1)^2(q - a_2)^2 \cdots (q - a_n)^2} \frac{1}{[[q^+]]} = (-i)^n \int_0^\infty d\alpha_1 d\alpha_2 \cdots d\alpha_n d\beta e^{i[\alpha_i q^2 - 2\alpha_i a_i \cdot q]}, e^{i\alpha_i a_i^2} \cdot e^{i\beta [[q^+]]}$$

onde $[[q^+]]$ nos diz que foi tratado via alguma prescrição que preserve a causalidade ou via a covariantização.

C.2 Distribuição de Dirac.

Nesta seção não pretendemos dar um completo estudo da chamada função δ de Dirac (o termo apropriado deve ser: distribuição δ de Dirac).

As propriedades que nos interessam são ($x \in R$):

1. definição:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & (x \neq 0) \\ \infty & (x = 0) \end{cases}$$

2. integração:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x) f(x) = f(0)$$

3. representação exponencial:

$$2\pi\delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dk \cdot e^{ikx}$$

4. propriedade interessante:

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x) \quad (a \neq 0)$$

Para saber um pouco mais sobre a distribuição $\delta(x)$ de Dirac, tem-se um resumo interessante no livro do Butkov [25].

C.3 Integração sob os momentos.

A parametrização é uma ajuda no cálculo das integrais de Feynman, mas o objetivo é mesmo fazer a integração sobre os momentos. Esta seção, que foi tomada de parte de um artigo do Capper [26], tenta mostrar como a integração sobre os momentos pode ser feita. Na verdade, somente colocaremos uma identidade que foi usada no capítulo 2 desta tese:

$$\int \frac{d^{2\omega}q}{f(q^+)} \cdot e^{i(\alpha q^2 + 2\rho \cdot q)} = \frac{i^{\omega+1}}{f(-\rho^+/\alpha)} \left(\frac{-\pi}{\alpha}\right)^\omega \cdot e^{-i\rho^2/\alpha} = I$$

Esta identidade é encontrada, para o caso covariante, no livro de Bogoliubov e Shirkov [27], que é um dos bons livros textos de teorias de campos quânticos.

Observe-se que a forma da equação acima mostrada, nos diz que se esta trabalhando com a parametrização de Schwinger, descrita neste apêndice.

Observe-se também que para o nosso caso, só foi necessário calcular a integração sobre a parte transversal \hat{q} , isto quer dizer que a forma que foi usada por nós foi a seguinte:

$$\int d^{2(\omega-1)}\hat{q} \cdot e^{i(\alpha\hat{q}^2 + 2\hat{\rho} \cdot \hat{q})} = i^\omega \left(\frac{-\pi}{\alpha}\right)^{\omega-1} \cdot e^{-i\hat{\rho}^2/\alpha} = I_{transversal} \quad (C.2)$$

onde foram tomados os limites:

$$f(q^+) \rightarrow 1$$

e

$$\omega \rightarrow \omega - 1$$

lembrado que a dimensão do espaço é $D = 2\omega$.

C.4 Mudança de variáveis.

Sejam dois espaços vetoriais $\mathcal{M}(\alpha_N)$ e $\mathcal{N}(x_N)$, então se a transformação de $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ é dada mediante a expressão seguinte, também esta implicará:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_1 = x_1(1 - \sum_{k=2}^N x_k) \\ \alpha_k = x_1 x_k, \quad k = 2 \cdots N \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{J(\alpha_1 \cdots \alpha_N)}{J(x_1 \cdots x_N)} = x^{N-1}, \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 \in [0, \infty[\\ x_k \in [0, 1], \quad k = 2 \cdots n \end{array} \right.$$

Esta mudança de variáveis é muito usada e conveniente de fazer quanto se leva a cabo o cálculo da integral sobre os parâmetros introduzidos segundo a representação de Schwinger, tal como foi feito no cálculo das integrais das equações (2.8.a) e (2.8.b), seja usando a prescrição de Leibbrandt ou seja usando a covariantização.

Na verdade, esta mudança de variáveis é usada em forma geral no cômputo das integrais de Feynman.

C.5 Função Gamma, Beta e Hipergeométrica.

Nesta seção colocaremos algumas das funções especiais que foram usadas neste trabalho, em particular no caso onde foram confrontadas a prescrição de Leibbrandt e a covariantização, no capítulo 2.

As funções foram tomadas das tabelas de integrais do Gradshteyn [28]

- Função Gamma:

$$\int_0^{\infty} dx \cdot x^{\nu-1} \cdot e^{-\mu x} = \frac{1}{\mu^{\nu}} \cdot \Gamma(\nu)$$

- Função Beta:

$$\int_0^1 dx \cdot x^{\mu-1} \cdot (1-x)^{\nu-1} = B(\mu, \nu)$$

- Função Hipergeométrica:

$$\int_0^1 dt \cdot t^{\beta-1} \cdot (1-t)^{\gamma-\beta-1} \cdot (1-tz)^{-\alpha} = B(\beta, \gamma-\beta) {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; z)$$

Referências Bibliográficas

- [1] A. Bassetto, G. Nardelli and R. Soldati, Yang-Mills Theories in Algebraic Non-Covariant Gauges, World Scientific (1991),
G.Leibbrandt, *An introduction to noncovariant gauges*,
Rev.Mod.Phys.**59** (1987) 1067-1120,
- [2] A.T.Suzuki and R. Bentin, *Obtaining a light-like planar gauge*, Modern Phys. Lett A, **17** (2002) 205.
- [3] J.Frenkel, *Class of ghost-free non-Abelian gauge theories*, Phys.Rev.**D13** (1976) 2325-2334
- [4] Stefan Pokorski, *Gauge Field Theories* Cambridge Monograph on Mathematical Physics, Cambridge University Press (1987),
Lewis Ryder, *Quantum Field Theory* Cambridge University Press (1985),
C.Itzykson, J.B.Zuber *Quantum Field Theory*, McGraw-Hill Inc (1980),
- [5] Paul Adrian Maurice Dirac, *Forms of Relativistic Dynamics*, Rev.Mod.Phys.**21** (1949) 392
- [6] C.G.Bollini, J.J Giambiagi *Dimensional Renormalization: The Number of Dimensions as a Regularizing Parameter*. Il Nuovo Cimento **12B**, (1972) 20-25
- [7] S.Mandelstam, *Light-cone superspace and the ultraviolet finiteness of the $N = 4$ model* Nucl. Phys.**B213**, (1983) 149-168
- [8] G.Leibbrandt, *Light-cone gauge in Yang-Mills theory* Phys.Rev.**D29**,(1984) 1699-1708

- [9] A.T.Suzuki, B.M.Pimentel, *Light-Cone gauge and the (causal) principal-value prescription*, *Phy.Rev* **D42**, (1990) 2115
- [10] J. M. Cornwall, *Spontaneous symmetry breaking without scalar mesons*, *Phys. Rev.* **D10**, (1974) 500,
- [11] C.G.Bollini, J.J.Giambiggi and A.González Domínguez *On the Reduction Formula of Feinberg and Pais*, *Jour.Math.Phys.* **6**(1965) 165-166,
- [12] A.T.Suzuki, *Modern Phys. Lett A*, **8** (1993) 2365,
B.M.Pimentel, and A.T.Suzuki, *Phys. Rev.* **D42** (1990) 2115,
B.M.Pimentel, and A.T.Suzuki, *Modern Phys. Lett. A* **6** (1991) 2649,
B.M.Pimentel, A.T.Suzuki, and J.L.Tomazelli, *Il Nuovo Cim.*, **111B** (1996) 751,
- [13] A.T.Suzuki, *Modern Phys. Lett A*, *Evaluating one-loop light-cone integrals by “covariantizing” the gauge-dependent pole* **8** (1993) 2365,
- [14] F. Gliozzi, J. Scherck, D. Olive *Supersymmetry, supergravity theories and the dual spinor model*, *Nucl. Phys. B* 122 (1977) 253.
- [15] L. Brink, J. H. Schwarz, J. Scherk, *Supersymmetric Yang-Mills Theories*, *Nucl. Phys. B* 121 (1977) 77.
- [16] A. Burnel, *Choice of a gauge in the light of Dirac quantization*, *Phys. Rev.* **D26** (1982) 442,
- [17] A. Burnel, *Canonical formalism and the Leibbrandt-Mandelstam prescription for non-covariant gauges*, *Phys. Rev.* **D40** (1989) 1221,
- [18] I.G.Halliday, M.Riccota, *Topics in Field Theory*, *Phys.Lett.***B193** (1987) 241,
A.T.Suzuki, M.Riccota, *Topics in Theoretical Physics-Festschrift for P.L.Ferreira*,
I.G.Halliday, M.Riccota, A.T.Suzuki, *XVII Brazilian Meeting on Particles and Fields*,
- [19] A.T.Suzuki, A.G.M.Schmidt *An easy way to solve two-loop vertex integrals* , hep-th/9712108,
A.T.Suzuki, A.G.M.Schmidt *Negative Dimensional Integration for Massive Four Point Functions; 1, the Standard Solutions* hep-th/9707187,

- [20] A. Suzuki, A. Schmidt, R. Bentin, *Probing negative dimensional integration: light-cone gauge and two-loop off-shell integrals two-loop covariant vertex and one-loop light-cone integrals*, Nucl. Phys. **B537** (1999) 549.
- [21] Y. L. Dokshitzer, D. I. D'yakonov and S. I. Troyan, Phys. Rep. **58** (1980) p. 269.
- [22] W. Kummer, Acta Phys. Austriaca Suppl. **XV** (1976) p. 423.
- [23] G. Leibbrandt, Can. J. Phys. **64**, (1986) p. 606,
G. Leibbrandt, Phys. Rev. **D30**, (1984) p. 2167.
- [24] E. T. Newman and R. Penrose, J. Math. Phys. **3** (1962) p. 566,
E. T. Newman and R. Penrose, J. Math. Phys. **4** (1963) p. 998,
- [25] E. Butkov, *Mathematical Physics*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc. (1968),
- [26] D.M.Capper, J.J.Dulwich and M.J.Litvak, *On the evaluation of integrals in the light-cone gauge*, Nucl.Phys.**B241** (1984) 463-476,
- [27] N.N.Bogoliubov and D.V.Shirkov, *Quantum Fields*, Benjamim/Cummings (1983),
- [28] I.S.GradshTEyn and I.M.Ryshik, *Table of Integrals Series and Products*, Academic Press (1965).