



Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

## "Controle Robusto de Sistemas Não-Lineares Sujeitos a Falhas Estruturais"

## Candidato: Emerson Ravazzi Pires da Silva Orientador - Prof. Dr. Edvaldo Assunção - DEE/FEIS

Departamento de Engenharia Elétrica – DEE Ilha Solteira - SP

Ilha Solteira, 20 de Fevereiro de 2009.



**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA "JÚLIO DE MESQUITA FILHO"** Campus de Ilha Solteira

#### PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

### "Controle Robusto de Sistemas Não-Lineares Sujeitos a Falhas Estruturais "

#### EMERSON RAVAZZI PIRES DA SILVA

Orientador: Prof. Dr. Edvaldo Assunção

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia - UNESP – Campus de Ilha Solteira, para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica. Área de Conhecimento: Automação.

Ilha Solteira – SP Fevereiro/2009

#### FICHA CATALOGRÁFICA

Elaborada pela Seção Técnica de Aquisição e Tratamento da Informação Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação da UNESP - Ilha Solteira.

Г

S586c	Silva, Emerson Ravazzi Pires da. Controle robusto de sistemas não-lineares sujeitos a falhas estruturais / Emerson Ra- vazzi Pires da Silva Ilha Solteira : [s.n.], 2009. 80 f. : il., ( algumas color.)
	Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira. Área de conhecimento: Automação, 2009
	Orientador: Edvaldo Assunção Bibliografia: p. 74-76
	<ol> <li>Controladores robustos. 2. Modelos <i>fuzzy</i> Takagi-Sugeno. 3. Falhas estruturais.</li> <li>Desigualdades matriciais lineares. 5. Sistemas de tempo contínuo.</li> </ol>



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA CAMPUS DE ILHA SOLTEIRA FACULDADE DE ENGENHARIA DE ILHA SOLTEIRA

#### CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO: Controle Robusto de Sistemas Não-Lineares Sujeitos a Falhas Estruturais

AUTOR: EMERSON RAVAZZI PIRES DA SILVA ORIENTADOR: Prof. Dr. EDVALDO ASSUNÇÃO

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de MESTRE em ENGENHARIA ELÉTRICA pela Comissão Examinadora:

Prof. Dr. EDVALDO ASSUNÇÃO Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

ulla 11

Prof. Dr. MARCELO CARVALHO M TEIXEIRA Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

Indelo redo Prof. Dr. ALFREDO DEL SOLE LORDELO

Centro de Engenharia, Modelagem e Ciências Sociais Aplicadas / Universidade Federal do ABC

Data da realização: 20 de fevereiro de 2009.

A minha família, em especial aos meus pais, minha irmã e minha namorada; pelo incentivo, apoio, amor e compreensão, em todos os momentos desta e de outras caminhadas, dedico.

## Agradecimentos

Dedico este trabalho primeiramente a Deus, pois sem Ele, nada seria possível e não estaríamos aqui reunidos, desfrutando, juntos, destes momentos que nos são tão importantes.

Ao meu orientador professor Dr. Edvaldo Assunção, fico grato principalmente pela oportunidade oferecida, incentivo e confiança depositada em mim.

Ao professor Dr. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira, pelas sugestões e ajudas cedidas.

As professoras Dr<sup>a</sup>. Neuza A. Pereira da Silva e Dr<sup>a</sup>. Lizete Maria C. Fernandes Garcia pelo acompanhamento nas bancas examinatórias deste trabalho.

Aos colegas do Laboratório de Pesquisa em Controle (LPC), Flávio Andrade Faria, Rodrigo Cardim, Renato de Aguiar Teixeira Mendes, Gisele de Carvalho Apolinário e Fernando Barros Rodrigues, pelas críticas e sugestões.

Aos demais colegas que de forma direta ou indireta também me ajudaram, em especial João Paulo Crivellaro de Menezes, Carlos Roberto Antunes Filho, Walney Andrade Martins, Weslei Batista Perin e Wesley Pontes.

Aos amigos de república, José Carlos (Marquito), Luís Renato (Tinoco), Marcus (Deca) e Otávio (Pão d'Alho).

A Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pela base financeira.

"A mente que se abre a uma nova idéia jamais voltará ao seu tamanho original." Albert Einstein (1879 – 1955), físico alemão.

## Resumo

Uma técnica de projeto de controladores robustos para sistemas não-lineares contínuos no tempo é proposta neste trabalho. É suposto que a planta não-linear está sujeita a falhas estruturais, que podem ser consideradas como incertezas politópicas. Os sistemas não-lineares são representados por modelos fuzzy propostos por Takagi-Sugeno e uma formulação para o tratamento das incertezas politópicas é apresentado para o projeto dos controladores. Este trabalho aborda projetos de controle usando a realimentação dos estados e a realimentação da derivada dos estados. O projeto do controlador é realizado através de condições baseadas em Desigualdades Matriciais Lineares (em inglês, Linear Matrix Inequalities (LMI)), que podem ser resolvidas facilmente utilizando técnicas de programação convexa. Essa metodologia permite a inclusão de restrições de desempenho no projeto, tais como: taxa de decaimento e restrição na entrada. Ao final, exemplos numéricos e suas simulações ilustram a eficiência da técnica proposta.

## Abstract

A technique of robust controllers design for nonlinear continuous-time systems is proposed in this work. It is supposed that the nonlinear plant is subject to structural failures, which can be considered as polytope uncertainties. The nonlinear systems are represented through fuzzy models proposed by Takagi-Sugeno and a formulation for the treatment of polytope uncertain is presented for the controllers design. This work focuses control designs using state feedback and state-derivative feedback. The controllers design is made through conditions based in Linear Matrix Inequalities (LMIs), which can be easily solved using convex programming techniques. This methodology allows the inclusion of performance restrictions on design, such as: decay rate and input constraint. Finally, numeric examples and their simulations show the efficiency of the proposed method.

# Lista de Figuras

2.1 – Configuração básica de sistemas fuzzy TS p.15
4.1 – Sistema massa-mola-amortecedor p.32
4.2 – Simulação do sistema realimentado sem falhas: Controlador projetado com objetivo de: estabilidade p.37
4.3 – Simulação do sistema realimentado com falhas: Controlador projetado com objetivo de: estabilidade p.37
4.4 – Simulação do sistema realimentado, comparação do sistema sem falha e com falha estrutural: Controlador projetado com objetivo de: estabilidade p.38
4.5 – Simulação do sistema realimentado, com falha estrutural no amortecedor após um tempo de uso: Controlador projetado com objetivo de: estabilidade p.39
4.6 – Simulação do sistema realimentado sem falhas: Controlador projetado com objetivo de: estabilidade e taxa de decaimento p.41
4.7 – Simulação do sistema realimentado com falhas: Controlador projetado com objetivo de: estabilidade e taxa de decaimento p.41
4.8 – Simulação do sistema realimentado, comparação do sistema sem falha e com falha estrutural: Controlador projetado com objetivo de: estabilidade e taxa de decaimento p.42
4.9 – Simulação do sistema realimentado, com falha estrutural no amortecedor após um tempo de uso: Controlador projetado com objetivo de: estabilidade e taxa de decaimento p.43
4.10 – Simulação do sistema realimentado sem falhas: Controlador projetado com objetivo de: estabilidade, taxa de decaimento e restrição na entrada p.45
4.11 – Simulação do sistema realimentado com falhas: Controlador projetado com objetivo de: estabilidade, taxa de decaimento e restrição na entrada p.45

4.12 Sinulação do sistema realmentado, comparação do sistema sem fama e com fama
estrutural: Controlador projetado com objetivo de: estabilidade, taxa de decaimento e restri-
ção na entrada p.46
4.13 – Simulação do sistema realimentado, com falha estrutural no amortecedor após um
tempo de uso: Controlador projetado com objetivo de: estabilidade, taxa de decaimento e
restrição na entrada p.47
5.1 – Sistema de suspensão ativa de um carro p.58
5.2 – Simulação do sistema com realimentação derivativa sem falhas: Controlador proje-
tado com objetivo de: estabilidade p.65
5.3 – Simulação do sistema com realimentação derivativa com falhas: Controlador projetado
com objetivo de: estabilidade p.66
5.4. Simulação do sistema com reglimentação derivativa, com falha estrutural no amorto
5.4 – Simulação do sistema com realimentação derivativa, com fama estiduurar no amorte-
ander an ég um tanna de user. Centrele des musiste de sem elsistime des estabilide de
cedor após um tempo de uso: Controlador projetado com objetivo de: estabilidade p.67
cedor após um tempo de uso: Controlador projetado com objetivo de: estabilidade p.67 5.5 – Simulação do sistema com realimentação derivativa sem falhas: Controlador projetado
cedor após um tempo de uso: Controlador projetado com objetivo de: estabilidade p.67 5.5 – Simulação do sistema com realimentação derivativa sem falhas: Controlador projetado com objetivo de: estabilidade e taxa de decaimento p.69
cedor após um tempo de uso: Controlador projetado com objetivo de: estabilidade p.67 5.5 – Simulação do sistema com realimentação derivativa sem falhas: Controlador projetado com objetivo de: estabilidade e taxa de decaimento p.69
<ul> <li>cedor após um tempo de uso: Controlador projetado com objetivo de: estabilidade p.67</li> <li>5.5 – Simulação do sistema com realimentação derivativa sem falhas: Controlador projetado com objetivo de: estabilidade e taxa de decaimento p.69</li> <li>5.6 – Simulação do sistema com realimentação derivativa com falhas: Controlador projetado</li> </ul>
<ul> <li>cedor após um tempo de uso: Controlador projetado com objetivo de: estabilidade p.67</li> <li>5.5 – Simulação do sistema com realimentação derivativa sem falhas: Controlador projetado com objetivo de: estabilidade e taxa de decaimento p.69</li> <li>5.6 – Simulação do sistema com realimentação derivativa com falhas: Controlador projetado com objetivo de: estabilidade e taxa de decaimento</li></ul>
<ul> <li>cedor após um tempo de uso: Controlador projetado com objetivo de: estabilidade p.67</li> <li>5.5 – Simulação do sistema com realimentação derivativa sem falhas: Controlador projetado com objetivo de: estabilidade e taxa de decaimento p.69</li> <li>5.6 – Simulação do sistema com realimentação derivativa com falhas: Controlador projetado com objetivo de: estabilidade e taxa de decaimento</li></ul>
<ul> <li>cedor após um tempo de uso: Controlador projetado com objetivo de: estabilidade p.67</li> <li>5.5 – Simulação do sistema com realimentação derivativa sem falhas: Controlador projetado com objetivo de: estabilidade e taxa de decaimento p.69</li> <li>5.6 – Simulação do sistema com realimentação derivativa com falhas: Controlador projetado com objetivo de: estabilidade e taxa de decaimento p.69</li> <li>5.7 – Simulação do sistema com realimentação derivativa, com falha estrutural no amorte-</li> </ul>
cedor após um tempo de uso: Controlador projetado com objetivo de: estabilidade p.67 5.5 – Simulação do sistema com realimentação derivativa sem falhas: Controlador projetado com objetivo de: estabilidade e taxa de decaimento p.69 5.6 – Simulação do sistema com realimentação derivativa com falhas: Controlador projetado com objetivo de: estabilidade e taxa de decaimento p.69 5.7 – Simulação do sistema com realimentação derivativa, com falha estrutural no amorte- cedor após um tempo de uso: Controlador projetado com objetivo de: estabilidade e taxa de
cedor após um tempo de uso: Controlador projetado com objetivo de: estabilidade p.67 5.5 – Simulação do sistema com realimentação derivativa sem falhas: Controlador projetado com objetivo de: estabilidade e taxa de decaimento p.69 5.6 – Simulação do sistema com realimentação derivativa com falhas: Controlador projetado com objetivo de: estabilidade e taxa de decaimento p.69 5.7 – Simulação do sistema com realimentação derivativa, com falha estrutural no amorte- cedor após um tempo de uso: Controlador projetado com objetivo de: estabilidade e taxa de decaimento
cedor após um tempo de uso: Controlador projetado com objetivo de: estabilidade p.67 5.5 – Simulação do sistema com realimentação derivativa sem falhas: Controlador projetado com objetivo de: estabilidade e taxa de decaimento

# Sumário

1 – Introdução p	5.11
2 – Sistemas Fuzzy Takagi-Sugeno p	p.15
2.1 – Introdução p	<b>b</b> .15
2.2 – Representação dos Sistemas Fuzzy Takagi-Sugeno p	<b>5</b> .16
2.3 – Modelos Locais Fuzzy: Forma Generalizada dos Sistemas Fuzzy Takagi-Sugeno p	5.18
3 – Sistemas Incertos e Não-Lineares p	<b>5.20</b>
3.1 – Sistemas com Incertezas Politópicas p	<b>5.20</b>
3.2 – Sistemas com Incertezas Politópicas e Não-Linearidades p	<b>5</b> .21
4 – Projeto do Controlador: Realimentação dos Estados p	p.23
4.1 – Projeto do Controlador com Ganho K Único: Condição de Estabilidade p	o.23
4.2 – Projeto do Controlador com Ganho K Único: Condição de Estabilidade e Taxa de	
Decaimento p	o.29
4.3 – Condição de Estabilidade com Restrição na Entrada p	<b>5.3</b> 1
4.4 – Aplicação do Método p	<b>p.</b> 32
4.4.1 – Exemplo 1: Condição de Estabilidade p	<b>p.</b> 32
4.4.2 – Exemplo 2: Condição de Estabilidade e Taxa de Decaimento p	o.39
4.4.3 – Exemplo 3: Condição de Estabilidade, Taxa de Decaimento e Restrição na	
Entrada p	<b>5</b> .43
5 – Projeto do Controlador: Realimentação da Derivada dos Estados p	<b>5.48</b>
5.1 – Projeto do Controlador com Ganho K Único: Condição de Estabilidade p	<b>5.48</b>
5.2 – Projeto do Controlador com Ganho K Único: Condição de Estabilidade e Taxa de	
Decaimento p	p.53
5.3 – Aplicação do Método p	<b>5</b> .58
5.3.1 – Exemplo 1: Condição de Estabilidade p	o.58
5.3.2 – Exemplo 2: Condição de Estabilidade e Taxa de Decaimento p	9.67

#### 6 – Conclusões e Perspectivas Futuras

p.72

Referências	p.74
Apêndice 1	p.77

## 1- Introdução

Podemos ressaltar que nos últimos anos, mais precisamente na última década, houve um crescente interesse em pesquisas e aplicações de sistemas fuzzy. A análise de estabilidade e o projeto de controladores é um dos conceitos mais importantes nos sistemas fuzzy e normalmente é feito usando Desigualdades Matriciais Lineares (em inglês, Linear Matrix Inequalities (LMI)) (TANAKA; SUGENO, 1992, TANAKA; OHTAKE; WANG, 2007, TANIGUCHI; TANAKA; WANG, 2000, TEIXEIRA; ASSUNÇÃO; AVELLAR, 2001, TEIXEIRA; ASSUNÇÃO; PIETROBOM, 2001, TEIXEIRA; ASSUNÇÃO; AVELLAR, 2003, TEIXEIRA et al., 2005, 2006). Porém esses trabalhos consideram somente o projeto de controladores para sistemas não-lineares determinísticos, que podem não representar sistemas de controle reais. É comum a existência de modelos mais complexos que possuem em sua estrutura não só o elemento não-linear, mas também elementos de parâmetros não fixos, pertencentes a um intervalo de valores numéricos conhecidos (SILVA, 2005, SOUZA, 2006). Este fato pode acontecer por alguns motivos, entre eles, os mais comuns podem ser pelo fato de que os parâmetros do sistema são obtidos experimentalmente, e por sua vez cada valor medido possui uma porcentagem de erro. Outro fato que pode ocorrer nos sistemas é que os mesmos podem sofrer abalos externos presentes no ambiente ao qual eles estão expostos, chamados de falhas estruturais. Então é fato que a dificuldade existe, sendo que sistemas com esta característica são denominados sistemas incertos e podem ser modelados usando combinação convexa (BOYD et al., 1994).

Acompanhando esta tendência, a pesquisa voltada para esta área está crescendo cada dia que passa, com o propósito de encontrar soluções inovadoras que garantam a estabilização robusta de sistemas que possuem em seus modelos as não-linearidades e também parâmetros incertos. Com isso, vários trabalhos têm sido publicados para este tipo de problema (TEIXEIRA; ŻAK, 1999, NGUANG; SHI; DING, 2007, CAO et al., 2000, ARRIFANO; OLIVEIRA; COSSI, 2006). Por exemplo, em (NGUANG; SHI; DING, 2007), é desenvolvido um sistema robusto limitado por norma para a detecção de falhas utilizando modelos fuzzy Takagi-Sugeno (TS) com incertezas. Condições suficientes baseadas em LMIs são propostas para a existência de um filtro robusto para a detecção das falhas. Recentemente em (ARRIFANO; OLIVEIRA; COSSI, 2006), é proposto um projeto de controladores fuzzy

chaveado baseado em funções de Lyapunov para estabilizar uma classe de sistemas nãolineares incertos. O projeto proposto utiliza ganhos de realimentação de estado obtidos da solução de um problema de otimização com desempenho de custo garantido formulado em termos de LMIs.

Os projetos dos controladores propostos nesta pesquisa baseiam-se na realimentação dos estados e na realimentação da derivada dos estados (ou realimentação derivativa). Ainda concentram-se nos modelos fuzzy TS que têm sido bem sucedidos para a maioria das técnicas de controladores robustos e o controle de sistemas não-lineares. Como salientado em (TAKAGI; SUGENO, 1985) ou Takagi-Sugeno-Kang (TSK) (SUGENO; KANG, 1988) o conceito dos modelos fuzzy TS, consiste da descrição aproximada de um sistema não-linear como a combinação de um certo número de modelos locais lineares invariantes no tempo, que descrevem aproximadamente o comportamento deste sistema em diferentes pontos do seu espaço de estados. Desta forma, pode-se interpretar a técnica tradicional de linearização em apenas um ponto de operação como um caso particular dos modelos fuzzy TS, consistindo apenas de um modelo local. Esta classe de modelos de projeto permite que o engenheiro utilize o seu conhecimento sobre o sistema que vai ser controlado, na definição do número dos modelos locais e dos pontos ou regiões nas quais estes modelos locais serão definidos (CARDIM, 2006, SOUZA, 2006).

É possível também projetar reguladores fuzzy usando a Compensação Distribuída Paralela (CDP), este conceito de projeto implica na construção de um controlador para cada regra do modelo fuzzy (TANAKA; SUGENO, 1992, WANG; TANAKA; GRIFFIN, 1996). O modelo global do sistema é obtido através da combinação fuzzy destes modelos lineares locais. A idéia é que para cada modelo linear local seja projetado um controle de realimentação linear. O regulador global resultante, que é não-linear em geral, é uma combinação fuzzy de cada regulador linear individual (SILVA, 2005).

Quando se trata de sistemas que possuem na sua estrutura elementos não-lineares e incertezas politópicas, é preciso fazer a distinção de ambas às complicações, para que sejam tratadas de forma diferente, a fim de se obter um resultado satisfatório e seguro, pois se não houver esta manipulação os resultados alcançados serão de uma forma em geral considerados conservadores (ARRIFANO; OLIVEIRA; COSSI, 2006).

Nesse trabalho, a análise de estabilidade e o projeto de controladores são reduzidos a problemas descritos por LMIs, que por sua vez possibilita a adição de restrições de desempenho no projeto da planta, tais como: taxa de decaimento e restrição na entrada.

Numericamente, LMIs podem ser resolvidas eficientemente por meio de algumas ferramentas poderosas disponíveis na literatura de programação matemática (BOYD et al., 1994). Desta forma, a solução encontrada para as LMIs é equivalente à análise de estabilidade do sistema não-linear incerto. Para o projeto dos controladores e a simulação do sistema controlado, é utilizado o software MATLAB (GAHINET et al., 1995).

O propósito desse trabalho é estudar e analisar questões sobre estabilidade quadrática e propor um novo método para o projeto de controladores fuzzy que apresenta em sua estrutura parâmetros com incertezas do tipo politópicas. Formulações adequadas de LMIs são apresentadas para o projeto de controladores de sistemas não-lineares incertos, utilizando ganhos de realimentação de estado e ganhos de realimentação derivativa. A princípio são apresentadas condições suficientes para o projeto dos controladores fuzzy utilizando o método direto de Lyapunov. Para checar a viabilidade dos métodos propostos, exemplos numéricos são apresentados, resolvidos e simulados.

As seções seguintes deste trabalho se apresentam da seguinte forma:

- Capítulo 2: Proporciona conceitos importantes sobre Sistemas Fuzzy Takagi-Sugeno, que serão utilizados no decorrer do trabalho. Conceitos fundamentais para o projeto dos controladores e obtenção dos modelos locais em função das não-linearidades do sistema.
- Capítulo 3: Apresenta considerações sobre Sistemas Incertos e Não-Lineares, necessários para a obtenção dos modelos locais relacionados às falhas dos sistemas (que são consideradas como incertezas politópicas). Modelos que são de extrema importância nos projetos dos controladores e suas respectivas simulações.
- Capítulo 4: Projeto do controlador usando a realimentação dos estados em sistemas não-lineares com suposta falha estrutural na planta. Apresenta condições suficientes para que os sistemas realimentados sejam assintoticamente estáveis. O método desenvolvido permite a inclusão de restrições de desempenho no projeto do controlador. No caso as restrições de taxa de decaimento e restrição na entrada foram adicionadas ao projeto. Exemplos numéricos mostram a eficiência da metodologia proposta através de simulações em microcomputadores. A obtenção do controlador é

realizada através da solução numérica de um conjunto de LMIs com o *solver* "LMILAB" (GAHINET et al., 1995) e a simulação do sistema não-linear em malha fechada, sujeito a falhas, é realizada com o pacote ODE45 (**Ordinary Differential Equation**), ambos do software MATLAB.

- Capítulo 5: Projeto do controlador usando a realimentação da derivada dos estados em sistemas não-lineares com suposta falha estrutural na planta. Encontra condições suficientes para que os sistemas não-lineares com falha sob realimentação derivativa sejam assintoticamente estáveis. O método desenvolvido permite a inclusão de restrições de desempenho no projeto do controlador. No caso, a restrição de taxa de decaimento foi adicionada no projeto. Através de simulações em microcomputadores, exemplos numéricos mostram a eficiência da metodologia proposta. A obtenção do controlador é realizada através da solução de um conjunto de LMIs com o *solver* "LMILAB" e a simulação do sistema não-linear com falha em malha fechada é realizada com o pacote ODE45.
- Capítulo 6: Conclusões do trabalho e Perspectivas Futuras.
- Apêndice 1: Contêm informações adicionais do Capítulo 2, que são de extrema importância para deixar completo o texto e enriquecer o conhecimento do leitor.

## 2- Sistema Fuzzy Takagi-Sugeno

#### 2.1- Introdução

Nos sistemas fuzzy TS (TAKAGI; SUGENO, 1985), as entradas (premissas) e saídas (conseqüentes) são variáveis reais, tornando essas estruturas adequadas para a engenharia. Estes sistemas são descritos por regras SE-ENTÃO e usam a seguinte forma:

SE x é A (premissa), ENTÃO y = cx (conseqüente).

Logo, verifica-se que a parte conseqüente "ENTÃO" usa uma simples fórmula matemática. Esta descrição torna mais fácil combinar as regras. Assim, no sistema fuzzy TS é obtido um peso médio dos valores nas partes "ENTÃO" das regras.

A figura abaixo mostra a configuração básica de um sistema fuzzy TS.



Figura 2.1: Configuração básica de sistemas fuzzy TS.

#### 2.2- Representação dos Sistemas Fuzzy Takagi-Sugeno

Como dito anteriormente, um sistema fuzzy TS (TAKAGI; SUGENO, 1985), é descrito por regras fuzzy SE-ENTÃO, que representam localmente relações lineares entre a entrada e a saída de um sistema. Considere uma planta não-linear, descrita pelo modelo fuzzy TS. Os seguintes modelos lineares locais descrevem a planta a ser controlada:

$$\dot{x}(t) = A_{\alpha_i} x(t) + B_{\alpha_i} u(t),$$
  
$$y(t) = C_{\alpha_i} x(t),$$

sendo i = 1, 2, ..., r (r é a quantidade de modelos locais), o vetor de estado  $x(t) \in \Re^n$ , o vetor de entrada  $u(t) \in \Re^m$ e o vetor de saída  $y(t) \in \Re^q$ . Sendo que  $A_{\alpha_i} \in \Re^{n \times n}$  é a matriz característica do sistema,  $B_{\alpha_i} \in \Re^{n \times m}$  é a matriz de entrada e  $C_{\alpha_i} \in \Re^{q \times n}$  é a matriz de saída, e possuem elementos constantes. A informação acima é então fundida com as regras SE-ENTÃO disponíveis, sendo que a *i*-ésima regra tem a forma:

Regra 
$$i : \text{SE } z_1(t) \notin \mathcal{M}_1^i \text{ E ... E } z_p(t) \notin \mathcal{M}_p^i,$$
  
ENTÃO 
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_{\alpha_i} x(t) + B_{\alpha_i} u(t), \\ y(t) = C_{\alpha_i} x(t), \end{cases}$$
(2.1)

sendo que  $\mathcal{M}_{j}^{i}$ , j = 1, 2, ..., p é o j-ésimo conjunto fuzzy da regra i e  $z_{1}(t), ..., z_{p}(t)$  são as variáveis premissas. Seja  $\mu_{j}^{i}(z_{j}(t))$  a função de pertinência do conjunto fuzzy  $\mathcal{M}_{j}^{i}$ , dada por:

$$w^{i}(z(t)) = \prod_{j=1}^{p} \mu_{j}^{i}(z_{j}(t)), \quad z(t) = [z_{1}(t) \quad z_{2}(t) \quad \dots \quad z_{p}(t)].$$

Como  $\mu_{j}^{i}(z_{j}(t)) \ge 0, i = 1, 2, ..., r$ , segue que

$$w^i(z(t)) \ge 0$$
 e  $\sum_{i=1}^r w^i(z(t)) \ge 0.$ 

Uma escolha conveniente para a obtenção de um modelo fuzzy TS para sistemas nãolineares é adotar z(t) = x(t), sendo x(t) o vetor de estado do sistema não-linear. Defina,

$$\alpha(z(t)) = \begin{bmatrix} \alpha_1(z(t)) & \alpha_2(z(t)) & \dots & \alpha_r(z(t)) \end{bmatrix}^T.$$

Desta forma, dado um par (x(t), u(t)), o sistema fuzzy resultante é tido como a média ponderada dos modelos locais, e é dado por:

$$\dot{x}(t) = \frac{\sum_{i=1}^{r} w^{i}(z(t)) \left(A_{\alpha_{i}} x(t) + B_{\alpha_{i}} u(t)\right)}{\sum_{i=1}^{r} w^{i}(z(t))},$$

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_{i}(z(t)) \left(A_{\alpha_{i}} x(t) + B_{\alpha_{i}} u(t)\right),$$

$$\dot{x}(t) = \left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_{i}(z(t)) A_{\alpha_{i}}\right) x(t) + \left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_{i}(z(t)) B_{\alpha_{i}}\right) u(t),$$

$$\dot{x}(t) = A_{\alpha}(\alpha) x(t) + B_{\alpha}(\alpha) u(t),$$
(2.2)

sendo,

$$\alpha_{i}(z(t)) = \frac{w^{i}(z(t))}{\sum_{i=1}^{r} w^{i}(z(t))}, \text{ para } i = 1, 2, \dots, r.$$
(2.3)

O sistema não forçado (u(t) = 0) é definido como segue:

$$\dot{x}(t) = \frac{\sum_{i=1}^{r} w^{i}(z(t)) A_{\alpha_{i}} x(t)}{\sum_{i=1}^{r} w^{i}(z(t))},$$
  
$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_{i}(z(t)) A_{\alpha_{i}} x(t),$$
  
$$\dot{x}(t) = A_{\alpha}(\alpha) x(t),$$
  
(2.4)

A saída para ambos os casos, ou seja, para sistemas forçado e não forçado, é dada por:

$$y(t) = \frac{\sum_{i=1}^{r} w^{i}(z(t)) C_{\alpha_{i}} x(t)}{\sum_{i=1}^{r} w^{i}(z(t))},$$
  

$$y(t) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_{i}(z(t)) C_{\alpha_{i}} x(t),$$
  

$$y(t) = C_{\alpha}(\alpha) x(t),$$
  
(2.5)

sendo que, para  $i = 1, 2, \ldots, r$ ,

$$\alpha_i(z(t)) \ge 0$$
 e  $\sum_{i=1}^r \alpha_i(z(t)) = 1.$  (2.6)

**Observação 2.1.** Vale ressaltar que no decorrer do trabalho e dos exemplos, as equações de pertinência (ou alfas de pertinência) não são calculadas. Isto se dá por se tratar de projetos de controladores fuzzy com K único. As equações de pertinência são utilizadas em projetos de controladores fuzzy usando a idéia de Compensação Distribuída Paralela (CDP). Este conceito de projeto implica na construção de um controlador para cada regra do modelo fuzzy, e as mesmas "chaveiam" proporcionalmente os controladores lineares obtidos, sendo que o controlador global resultante, que é não-linear em geral, é uma combinação fuzzy de cada controlador linear individual. A obtenção das equações de pertinência pode ser vista em (CARDIM, 2006, SOUZA, 2006, SILVA, 2005), ou de maneira simples e exemplificada no Apêndice 1 deste trabalho.

#### 2.3- Modelos Locais Fuzzy: Forma Generalizada dos Sistemas Fuzzy Takagi-Sugeno

Utilizando-se o método proposto por Taniguchi (TANIGUCHI et al., 2001), é possível construir modelos exatos de certas classes de sistemas não-lineares empregando modelos fuzzy TS. Os modelos locais neste método de construção são obtidos em função da região de operação, onde a principal característica é determinar o valor máximo e o valor mínimo de

cada função não-linear do sistema. Conseqüentemente, o número de modelos locais com a forma generalizada do sistema fuzzy TS, está diretamente ligado ao número de funções não-lineares do sistema, ou seja, são necessários  $2^s$  modelos locais, onde *s* representa a quantidade de não-linearidades existentes. Este método de construção permite modelar uma ampla variedade de sistemas que estejam em um intervalo de operação. Entretanto, apenas os valores máximos e mínimos de cada função não-linear são considerados, e não as particularidades do comportamento das funções.

No método proposto para determinar os modelos locais, a seguinte classe de sistemas não-lineares foi considerada:

$$\dot{x}_{i}(t) = \sum_{j=1}^{n} \tilde{f}_{ij}(x(t)) x_{j}(t) + \sum_{k=1}^{m} g_{ik}(x(t)) u_{k}(t),$$

sendo i = 1, 2, ..., r, na qual r é o número de regras,  $n \in m$  indicam, respectivamente, o número de es-tados e entradas,  $\tilde{f}_{ii}(x(t)) \in g_{ik}(x(t))$  são as funções de x(t), e

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & \dots & x_n(t) \end{bmatrix}^T$$
.

Considere as seguintes variáveis para a obtenção da forma generalizada deste método:

$$a_{ij1} = \max_{x(t)} \left\{ \tilde{f}_{ij}(x(t)) \right\},\$$

$$a_{ij2} = \min_{x(t)} \left\{ \tilde{f}_{ij}(x(t)) \right\},\$$

$$b_{ik1} = \max_{x(t)} \left\{ g_{ik}(x(t)) \right\},\$$

$$b_{ik2} = \min_{x(t)} \left\{ g_{ik}(x(t)) \right\}.$$

O método proposto por (TANIGUCHI et al., 2001) valoriza os modelos fuzzy TS, mostrando que é possível modelar exatamente uma ampla classe de sistemas não-lineares, com um número finito de modelos locais. Mas é fato que o método aumenta o número de modelos locais necessários, à medida que o número de não-linearidades cresce, podendo dificultar a obtenção de resultados em projetos de sistemas de controle.

No próximo capítulo é apresentada a formulação de sistemas não-lineares com incertezas do tipo politópicas, fundamental para o desenvolvimento do projeto do controlador.

## **3-** Sistemas Incertos e Não-Lineares

#### 3.1- Sistemas com Incertezas Politópicas

Podemos ressaltar que todos os tipos de sistemas e equipamentos estão sujeitos a apresentarem algum tipo de interrupção permanente não desejada em seu funcionamento. Isto pode acontecer devido, por exemplo, ao desgaste natural de algum componente, quebra por fatores externos, quebra por manuseio incorreto, entre outras. Então denominamos estes eventos como sendo falhas estruturais, e as mesmas podem ser descritas por incertezas do tipo politópicas.

Considere o seguinte sistema linear e invariante no tempo com incertezas do tipo politópicas na planta, com ou sem falhas estruturais, descrito na forma de variáveis de estado, dado por:

$$\dot{x}(t) = A(\beta)x(t) + B(\beta)u(t),$$
  

$$y(t) = C(\beta)x(t),$$
(3.1)

sendo  $A(\beta) \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ ,  $B(\beta) \in \mathfrak{R}^{n \times m}$ ,  $C(\beta) \in \mathfrak{R}^{q \times n}$ , matrizes que representam a dinâmica da planta do sistema incerto,  $x(t) \in \mathfrak{R}^n$  é o vetor de estados,  $y(t) \in \mathfrak{R}^q$  é o vetor de saída e  $u(t) \in \mathfrak{R}^m$  é a entrada de controle.

As matrizes  $A(\beta)$ ,  $B(\beta) \in C(\beta)$ , são representadas pela combinação convexa de vértices, descritas abaixo (BOYD et al., 1994):

$$A(\beta) = \sum_{j=1}^{p} \beta_j A_{\beta_j}, \quad B(\beta) = \sum_{j=1}^{p} \beta_j B_{\beta_j}, \quad C(\beta) = \sum_{j=1}^{p} \beta_j C_{\beta_j}, \quad (3.2)$$

sendo j = 1, 2, ..., p, na qual  $\beta = \begin{bmatrix} \beta_1 & ... & \beta_p \end{bmatrix}^T$ , em que p é dado pela relação  $p = 2^{\eta}$ ,  $\eta$  é o número de parâmetros incertos das matrizes  $A(\beta)$ ,  $B(\beta) \in C(\beta)$  na planta e  $A_{\beta_j}$ ,  $B_{\beta_j} \in C_{\beta_j}$  representam os vértices do politopo.

Então, se tratando de uma combinação convexa, temos que:

$$\sum_{j=1}^{p} \boldsymbol{\beta}_{j} = 1, \qquad \boldsymbol{\beta}_{j} \ge 0.$$
(3.3)

#### 3.2- Sistemas com Incertezas Politópicas e Não-Linearidades

Como descrito anteriormente, todo sistema pode estar sujeito a apresentar incertezas politópicas (falhas estruturais) em sua estrutura devido a vários fatores. Porém pode-se encontrar sistemas mais complexos, que apresentam além das incertezas politópicas, também elementos não-lineares em sua estrutura. Elementos não-lineares podem ocorrer em decorrência de dispositivos limitados na planta, tais como, sensores, atuadores, molas, transístores, entre outras causas.

Considere o seguinte sistema não-linear, invariante no tempo com incertezas do tipo politópicas na planta, com ou sem falhas, descrito na forma de variáveis de estado, dado por:

$$\dot{x}(t) = A(\alpha, \beta) x(t) + B(\alpha, \beta) u(t),$$
  

$$y(t) = C(\alpha, \beta) x(t),$$
(3.4)

sendo  $A(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $C(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^{q \times n}$ , matrizes que representam a dinâmica da planta do sistema não-linear com incertezas politópicas, sendo que  $\alpha$  representa as não-linearidades, e  $\beta$  representa as incertezas politópicas (falhas) da planta,  $x(t) \in \mathbb{R}^{n}$  é o vetor de estados,  $y(t) \in \mathbb{R}^{q}$  é o vetor de saída e  $u(t) \in \mathbb{R}^{m}$  é a entrada de controle. Vamos supor que as matrizes  $A(\alpha,\beta)$ ,  $B(\alpha,\beta) \in C(\alpha,\beta)$  podem ser representadas pela combinação convexa de vértices descrita abaixo (BOYD et al., 1994). Como em (3.5) vale ressaltar que esta combinação é uma exigência para o projeto dos controladores. Se isso não for possível o método não é aplicável.

$$A(\alpha,\beta) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i A_{\alpha_i} + \sum_{j=1}^{p} \beta_j A_{\beta_j},$$
  

$$B(\alpha,\beta) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i B_{\alpha_i} + \sum_{j=1}^{p} \beta_j B_{\beta_j},$$
  

$$C(\alpha,\beta) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i C_{\alpha_i} + \sum_{j=1}^{p} \beta_j C_{\beta_j},$$
  
(3.5)

sendo i = 1, 2, ..., r, na qual  $\alpha = [\alpha_1 \ ... \ \alpha_r]^T$ , em que r é dado pela relação  $r = 2^s$ , s é o número de parâmetros não-lineares das matrizes  $A(\alpha, ..), B(\alpha, ..) \in C(\alpha, ..)$  na planta e  $A_{\alpha_i}, B_{\alpha_i} \in C_{\alpha_i}$  representam os vértices do politopo; e ainda para j = 1, 2, ..., p, na qual  $\beta = [\beta_1 \ ... \ \beta_p]^T$ , em que p é dado pela relação  $p = 2^\eta$ ,  $\eta$  é o número de parâmetros incertos das matrizes  $A(..,\beta), B(..,\beta) \in C(..,\beta)$  na planta e  $A_{\beta_j}, B_{\beta_j} \in C_{\beta_j}$  representam os vértices do politopo.

Então, se tratando de uma combinação convexa, temos que:

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_{i} = 1, \qquad \alpha_{i} \ge 0,$$

$$\sum_{j=1}^{p} \beta_{j} = 1, \qquad \beta_{j} \ge 0.$$
(3.6)

Para o projeto do controlador, realiza-se a separação das matrizes não-lineares incertas, em matrizes não-lineares (modelos representados por modelos fuzzy TS) e matrizes incertas (falhas, modelos representados pela combinação convexa de politopos), sendo que os modelos obtidos são aplicados nas LMIs responsáveis pelos projetos dos controladores. Isto é visto no decorrer dos próximos capítulos.

## 4- Projeto do Controlador por Realimentação dos Estados

# 4.1- Projeto do Controlador com Ganho K Único: Condição de Estabilidade

Considere um sistema contínuo no tempo, controlável, não-linear e com incertezas do tipo politópicas descrito na seguinte forma:

$$\dot{x}(t) = A(\alpha,\beta)x(t) + B(\alpha,\beta)u(t), \qquad (4.1)$$

sendo  $A(\alpha, \beta) \in \Re^{n \times n}$  e  $B(\alpha, \beta) \in \Re^{n \times m}$  matrizes que contém as não-linearidades dependentes de  $\alpha$  e as incertezas politópicas dependentes de  $\beta$ ,  $u(t) \in \Re^m$  é a entrada de controle do sistema e  $x(t) \in \Re^n$  é o vetor de estados. É importante ressaltar que  $\alpha$  é um parâmetro conhecido (modelos fuzzy TS), enquanto  $\beta$  é desconhecido (modelo de incertezas politópicas, com ou sem falhas estruturais).

O próximo passo será denominado como "<u>Etapa de Separação</u>". É uma condição necessária para que os sistemas sejam controlados pelos controladores obtidos com o uso dos métodos propostos.

#### Etapa de Separação

Considere a matriz  $A(\alpha, \beta)$  com não-linearidades  $\alpha$  e incertezas politópicas  $\beta$ , por exemplo, para n = 3, descrita abaixo:

$$A(\alpha,\beta) = \begin{bmatrix} a_{11}(\alpha) & a_{12}(\alpha) & a_{13}(\beta) \\ a_{21}(\beta) & a_{22}(\beta) & a_{23}(\alpha) \\ a_{31}(\alpha,\beta) & a_{32}(\beta) & a_{33}(\alpha) \end{bmatrix}.$$
 (4.2)

Realizando a separação das não-linearidades e das incertezas politópicas, e fazendo com que existam agora duas matrizes, sendo a matriz  $A_{\alpha}$  composta pelos elementos não-lineares de  $A(\alpha,\beta)$  e a matriz  $A_{\beta}$  composta pelos elementos incertos da matriz  $A(\alpha,\beta)$ , obtém-se:

$$A(\alpha,\beta) = \begin{bmatrix} a_{11}(\alpha) & a_{12}(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & a_{23}(\alpha) \\ a_{\alpha31}(\alpha) & 0 & a_{33}(\alpha) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & a_{13}(\beta) \\ a_{21}(\beta) & a_{22}(\beta) & 0 \\ a_{\beta31}(\beta) & a_{32}(\beta) & 0 \\ \hline A_{\beta} \end{bmatrix} . (4.3)$$

sendo  $a_{31}(\alpha,\beta) = a_{\alpha 31}(\alpha) + a_{\beta 31}(\beta)$ .

Da mesma forma, considere a matriz  $B(\alpha, \beta)$  com não-linearidades  $\alpha$  e incertezas politópicas  $\beta$ , por exemplo, para n = 3 e m = 1, descrita abaixo:

$$B(\alpha,\beta) = \begin{bmatrix} b_{11}(\alpha) \\ b_{21}(\beta) \\ b_{31}(\alpha,\beta) \end{bmatrix}.$$
(4.4)

De maneira similar à anterior, é realizado a separação das não-linearidades e das incertezas politópicas, fazendo com que exista agora duas matrizes, sendo a matriz  $B_{\alpha}$  responsável pelos elementos não-lineares de  $B(\alpha, \beta)$  e a matriz  $B_{\beta}$  responsável pelos elementos incertos da matriz  $B(\alpha, \beta)$ , como mostrado a seguir:

$$B(\alpha,\beta) = \begin{bmatrix} b_{11}(\alpha) \\ 0 \\ b_{\alpha 31}(\alpha) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_{21}(\beta) \\ b_{\beta 31}(\beta) \end{bmatrix}.$$

$$(4.5)$$

sendo  $b_{31}(\alpha,\beta) = b_{\alpha 31}(\alpha) + b_{\beta 31}(\beta)$ .

Então, concluindo a etapa de separação, chega-se à conclusão de que as matrizes podem ficar na seguinte forma:

$$A(\alpha,\beta) = A_{\alpha} + A_{\beta}$$
 e  $B(\alpha,\beta) = B_{\alpha} + B_{\beta}$ .

**Observação 4.1.** Se em um dado sistema houver algum elemento do tipo  $d_{ij}(\alpha, \beta)$ , ou seja, o elemento  $d_{ij}$  possuir uma combinação não-linear ( $\alpha$ ) com incerteza politópica ( $\beta$ ), o mesmo deverá ser separado em  $d_{ij}(\alpha, \beta) = d_{ij}(\alpha) + d_{ij}(\beta)$ . Se isto não for possível, o método proposto neste trabalho não será aplicável.

**Observação 4.2.** No momento em que houver a separação da matriz  $A(\alpha, \beta)$  ou da matriz  $B(\alpha, \beta)$ , os elementos  $a_{ij}$  ou  $b_{ij}$  constantes podem ser alocados em qualquer matriz, ou divididos para que se evitem matrizes nulas (evitar a não-controlabilidade na parcela), ou seja, eles poderão fazer parte das matrizes que possuírem as não-linearidades ( $A_{\alpha}$  ou  $B_{\alpha}$ ), ou das matrizes que possuírem as incertezas politópicas ( $A_{\beta}$  ou  $B_{\beta}$ ), ou ainda fazer parte de ambas as matrizes, não diferindo o resultado final.

O sistema (4.1) pode ser representado por modelos fuzzy TS da seguinte maneira (TAKAGI; SUGENO, 1985):

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \sum_{j=1}^{p} \beta_j \Big( A\Big(\alpha_i, \beta_j\Big) x(t) + B\Big(\alpha_i, \beta_j\Big) u(t) \Big), \tag{4.6}$$

ou ainda realizando a separação,

$$\dot{x}(t) = \left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i A_{\alpha_i} + \sum_{j=1}^{p} \beta_j A_{\beta_j}\right) x(t) + \left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i B_{\alpha_i} + \sum_{j=1}^{p} \beta_j B_{\beta_j}\right) u(t), \quad (4.7)$$

sendo que:

$$A_{\alpha} = \sum_{i=1}^{r} \alpha_{i} A_{\alpha_{i}} \in B_{\alpha} = \sum_{i=1}^{r} \alpha_{i} B_{\alpha_{i}},$$
  

$$\alpha_{i} \geq 0, \quad i = 1, 2, ..., r,$$
  

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_{i} = 1, \quad \alpha = \begin{bmatrix} \alpha_{1} & \alpha_{2} & \dots & \alpha_{r} \end{bmatrix}^{T}.$$
  
Modelo Fuzzy TS  
com  $\alpha_{i}$  conhecido, (4.8)

$$A_{\beta} = \sum_{j=1}^{p} \beta_{j} A_{\beta_{j}} e B_{\beta} = \sum_{j=1}^{p} \beta_{j} B_{\beta_{j}},$$
  

$$\beta_{j} \ge 0, \quad j = 1, 2, ..., p,$$
  

$$\sum_{j=1}^{p} \beta_{j} = 1, \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_{1} & \beta_{2} & \dots & \beta_{p} \end{bmatrix}^{T}.$$
  
Modelo de incertezas  
com  $\beta_{j}$  desconhecido, (4.9)

O projeto do controlador fuzzy para o sistema (4.7) usando a realimentação dos estados,

$$u(t) = -Kx(t), \qquad (4.10)$$

é formulado substituindo-se (4.10) em (4.7). Assim o sistema em malha fechada é dado por:

$$\dot{x}(t) = A(\alpha,\beta)x(t) + B(\alpha,\beta)(-Kx(t)), \qquad (4.11)$$

dessa forma podemos reescrever a equação como,

$$\dot{x}(t) = \underbrace{\left[A(\alpha,\beta) - B(\alpha,\beta)K\right]}_{A_n} x(t).$$
(4.12)

Por facilidade de notação em algumas equações, o termo  $(A(\alpha,\beta)-B(\alpha,\beta)K)$ será representado por  $A_n$ .

A análise de estabilidade quadrática do sistema (4.12) pode ser realizada, verificando-se as condições de existência de uma matriz simétrica  $P \in \Re^{n \times n}$ , satisfazendo as condições de Lyapunov (BOYD et al., 1994):

$$\begin{array}{c}
A_n^T P + P A_n < 0, \\
P > 0.
\end{array}$$
(4.13)

Dessa forma, o problema da análise de estabilidade do sistema (4.12) pode ser reduzido ao estudo de factibilidade das LMIs (4.13). LMIs, quando factíveis, podem ser facilmente resolvidas em microcomputadores, usando por exemplo, o *software* MATLAB.

Usando esse resultado, o próximo teorema descreve condições suficientes para a estabilidade quadrática e assintótica do sistema (4.12).

#### Teorema 4.1.

Se existe uma matriz simétrica  $X \in \Re^{n \times n}$  e uma matriz  $M \in \Re^{m \times n}$  satisfazendo as LMIs,

$$XA_{\alpha_{i}}^{T} + XA_{\beta_{j}}^{T} - M^{T}B_{\alpha_{i}}^{T} - M^{T}B_{\beta_{j}}^{T} + A_{\alpha_{i}}X + A_{\beta_{j}}X - B_{\alpha_{i}}M - B_{\beta_{j}}M < 0, \quad (4.14)$$

$$X > 0, \tag{4.15}$$

sendo, i = 1, 2, ..., r (modelos fuzzy TS) e j = 1, 2, ..., p (modelos de incertezas politópicas), ou seja, para cada valor de i, deve-se explorar todos os valores de j, então o ponto de equilíbrio x = 0 do sistema (4.12) é globalmente assintoticamente estável. Um controlador que garante a estabilidade do sistema (4.12) pode ser dado por:

$$K = MX^{-1}. (4.16)$$

**Prova:** Supondo que (4.14) e (4.15) são factíveis e substituindo  $X = P^{-1}$  e  $M = KP^{-1}$  em (4.14), tem-se que:

$$P^{-1}A_{\alpha_{i}}^{T} + P^{-1}A_{\beta_{j}}^{T} - P^{-1}K^{T}B_{\alpha_{i}}^{T} - P^{-1}K^{T}B_{\beta_{j}}^{T} + A_{\alpha_{i}}P^{-1} + A_{\beta_{j}}P^{-1} - B_{\alpha_{i}}KP^{-1} - B_{\beta_{j}}KP^{-1} < 0,$$

$$(4.17)$$

sendo, i = 1, 2, ..., r e j = 1, 2, ..., p. De (4.17) e utilizando as relações (4.8) e (4.9), segue que,

$$P^{-1}\left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_{i} A_{\alpha_{i}}^{T} + \sum_{j=1}^{p} \beta_{j} A_{\beta_{j}}^{T}\right) - P^{-1} K^{T}\left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_{i} B_{\alpha_{i}}^{T} + \sum_{j=1}^{p} \beta_{j} B_{\beta_{j}}^{T}\right) + \left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_{i} A_{\alpha_{i}} + \sum_{j=1}^{p} \beta_{j} A_{\beta_{j}}\right) P^{-1} - \left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_{i} B_{\alpha_{i}} + \sum_{j=1}^{p} \beta_{j} B_{\beta_{j}}\right) KP^{-1} < 0.$$
(4.18)

Sabemos que:

$$A(\alpha,\beta) = \left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i A_{\alpha_i} + \sum_{j=1}^{p} \beta_j A_{\beta_j}\right), \qquad (4.19)$$

$$B(\alpha,\beta) = \left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i B_{\alpha_i} + \sum_{j=1}^{p} \beta_j B_{\beta_j}\right), \qquad (4.20)$$

então de (4.18), chega-se em:

$$P^{-1}\left[A(\alpha,\beta)\right]^{T} - P^{-1}K^{T}\left[B(\alpha,\beta)\right]^{T} + A(\alpha,\beta)P^{-1} - B(\alpha,\beta)KP^{-1} < 0.$$
(4.21)

Multiplicando (4.21) pela esquerda e pela direita por P, tem-se que:

$$\left[A(\alpha,\beta)\right]^{T}P-K^{T}\left[B(\alpha,\beta)\right]^{T}P+PA(\alpha,\beta)-PB(\alpha,\beta)K<0.$$

Ou ainda,

$$\left[A(\alpha,\beta)-B(\alpha,\beta)K\right]^{T}P+P\left[A(\alpha,\beta)-B(\alpha,\beta)K\right]<0.$$
(4.22)

Agora, quando (4.15) é factível, tem-se que  $X = P^{-1} > 0 \Leftrightarrow P > 0$ . Considerando esse fato, conclui-se que (4.22) é equivalente às condições de Lyapunov (4.13) para o sistema (4.12). Portanto, quando (4.14) e (4.15) são factíveis, o ponto de equilíbrio x = 0 do sistema (4.12) é globalmente assintoticamente estável. E um controlador K desejado pode ser obtido com (4.16).

Considerar apenas a estabilidade do sistema pode não ser suficiente para que o projetista alcance seu objetivo. Em alguns casos, índices de desempenho devem ser levados em consideração para que se atinja a meta de projeto. Um índice de desempenho muito importante, é a restrição de taxa de decaimento, que é responsável pela velocidade de resposta do sistema (atua no transitório do sistema).

# 4.2- Projeto do Controlador com Ganho K Único: Condição de Estabilidade e Taxa de Decaimento

Considere uma candidata a função de Lyapunov do tipo  $V(x(t)) = x(t)^T P x(t) > 0$ , com  $\dot{V}(x(t)) < 0$  para todo  $x(t) \neq 0$ . A taxa de decaimento  $\gamma$ ,  $\gamma > 0$  é obtida se a condição

$$\dot{V}(x(t)) \le -2\gamma V(x(t)), \qquad (4.23)$$

for satisfeita para toda a trajetória x(t) do sistema (BOYD et al., 1994). O próximo teorema encontra condições suficientes para o projeto do controlador *K* (único) para que o sistema (4.12) tenha taxa de decaimento maior ou igual a  $\gamma$ .

#### Teorema 4.2.

Se existe uma matriz simétrica  $X \in \Re^{n \times n}$  e uma matriz  $M \in \Re^{m \times n}$  satisfazendo:

$$XA_{\alpha_{i}}^{T} + XA_{\beta_{j}}^{T} - M^{T}B_{\alpha_{i}}^{T} - M^{T}B_{\beta_{j}}^{T} + A_{\alpha_{i}}X + A_{\beta_{j}}X - B_{\alpha_{i}}M - B_{\beta_{j}}M + 2\gamma X < 0,$$

$$X > 0,$$
(4.25)

sendo, i = 1, 2, ..., r (modelos fuzzy TS) e j = 1, 2, ..., p (modelos de incertezas politópicas), para cada valor de i, deve-se explorar todos os valores de j, então o ponto de equilíbrio x = 0 do sistema (4.12) é globalmente assintoticamente estável com taxa de decaimento superior a  $\gamma$ . Um controlador que resolve o problema pode ser dado por:

$$K = MX^{-1}. (4.26)$$

**Prova:** Supondo que (4.24) e (4.25) são factíveis e, substituindo  $X = P^{-1}$  e  $M = KP^{-1}$  em (4.24), tem-se que:

$$P^{-1}A_{\alpha_{i}}^{T} + P^{-1}A_{\beta_{j}}^{T} - P^{-1}K^{T}B_{\alpha_{i}}^{T} - P^{-1}K^{T}B_{\beta_{j}}^{T} + A_{\alpha_{i}}P^{-1} + A_{\beta_{j}}P^{-1} - B_{\alpha_{i}}KP^{-1} - B_{\beta_{j}}KP^{-1} < -2\gamma P^{-1},$$
(4.27)

sendo, i = 1, 2, ..., r e j = 1, 2, ..., p. De (4.27) e utilizando as relações (4.8) e (4.9), segue que,

$$P^{-1}\left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_{i} A_{\alpha_{i}}^{T} + \sum_{j=1}^{p} \beta_{j} A_{\beta_{j}}^{T}\right) - P^{-1} K^{T}\left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_{i} B_{\alpha_{i}}^{T} + \sum_{j=1}^{p} \beta_{j} B_{\beta_{j}}^{T}\right) + \left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_{i} A_{\alpha_{i}} + \sum_{j=1}^{p} \beta_{j} A_{\beta_{j}}\right) P^{-1} - \left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_{i} B_{\alpha_{i}} + \sum_{j=1}^{p} \beta_{j} B_{\beta_{j}}\right) KP^{-1} < -2\gamma P^{-1}.$$

$$(4.28)$$

Substituindo (4.19) e (4.20) em (4.28) chega-se em

$$P^{-1}[A(\alpha,\beta)]^{T} - P^{-1}K^{T}[B(\alpha,\beta)]^{T} + A(\alpha,\beta)P^{-1} - B(\alpha,\beta)KP^{-1} < -2\gamma P^{-1}$$
(4.29)

Multiplicando (4.29) pela esquerda e pela direita por P, tem-se que:

$$\left[A(\alpha,\beta)\right]^{T}P-K^{T}\left[B(\alpha,\beta)\right]^{T}P+PA(\alpha,\beta)-PB(\alpha,\beta)K<-2\gamma P.$$

Ou ainda,

$$\left[A(\alpha,\beta) - B(\alpha,\beta)K\right]^T P + P\left[A(\alpha,\beta) - B(\alpha,\beta)K\right] < -2\gamma P. \quad (4.30)$$

Quando (4.25) é factível, a LMI (4.30) é equivalente à condição (4.23). Portanto, o ponto de equilíbrio x = 0 do sistema (4.12) é globalmente assintoticamente estável com taxa de decaimento maior que  $\gamma$ . E um controlador *K* desejado pode ser obtido com (4.26).

## 4.3- Condição de Estabilidade com Restrição na Entrada

Admita que a condição inicial x(0) é conhecida. A restrição  $||u(t)||_2 \le \mu$  é imposta para todo o tempo  $t \ge 0$ , sendo que  $||u(t)||_2 = \sqrt{u(t)^T u(t)}$  se as LMIs,

$$\begin{bmatrix} 1 & x(0)^T \\ x(0) & X \end{bmatrix} \ge 0, \tag{4.31}$$

$$\begin{bmatrix} X & M^T \\ M & \mu^2 I \end{bmatrix} \ge 0, \tag{4.32}$$

se mantém (veja (BOYD et al., 1994) e (TANAKA; IKEDA; WANG, 1998)), sendo  $X = P^{-1}$ e M = KX.

Portanto, o projeto do controlador K, considerando estabilidade assintótica do sistema (4.12) com restrição na entrada, pode ser realizado adicionando as LMI (4.31) e (4.32) ao Teorema 4.1. E o projeto do controlador K, considerando estabilidade com taxa de decaimento, é feito adicionando (4.31) e (4.32) ao Teorema 4.2.

A eficiência da metodologia proposta pode ser verificada na solução dos exemplos.

### 4.4- Aplicação do Método

### 4.4.1- Exemplo 1: Condição de Estabilidade

Considere o sistema massa-mola-amortecedor da Figura (4.1) (OGATA, 2000).



Figura 4.1: Sistema massa-mola-amortecedor.

A dinâmica do sistema pode ser descrita como:

$$\begin{cases} \ddot{z}(t) = -\frac{k_m}{m} z(t) - \frac{c}{m} \dot{z}(t) + \frac{1}{m} u(t), \\ y(t) = z(t). \end{cases}$$

$$(4.33)$$

Sendo:

- $z(t) \rightarrow$  Deslocamento da massa (carrinho);
- $u(t) \rightarrow \text{Sinal de controle;}$
- $c \rightarrow \text{Coeficiente de amortecimento};$
- $k_m \rightarrow$  Mola do sistema;
- $m \rightarrow Massa$  (carrinho).

Considerando as variáveis de estado do sistema como:  $x_1(t) = z(t)$ ;  $x_2(t) = \dot{z}(t)$ e a saída do sistema  $y(t) = x_1(t)$ , as equações de estado ficam descritas como:

$$\begin{cases} \dot{x}_{1}(t) = x_{2}(t), \\ \dot{x}_{2}(t) = -\frac{k_{m}}{m}x_{1}(t) - \frac{c}{m}x_{2}(t) + \frac{1}{m}u(t). \end{cases}$$
(4.34)

Vamos supor que a mola do sistema seja não-linear, então  $k_m$  implica em uma força nãolinear da mola e será representado por (EDWARDS; PENNEY, 2003):  $k_m = k_x (1 + d^2 x_1(t)^2)$ , sendo  $k_x$  o coeficiente de elasticidade da mola, *d* a constante de dureza da mola, e  $x_1(t)$  o deslocamento da massa *m*.

O problema consiste em atenuar as oscilações da massa *m*, deslocada  $x_1(t)$  do ponto de equilíbrio através da entrada de controle u(t). Considerando que o coeficiente de amortecimento *c* é incerto, esteja sujeito a falhas e pertença ao intervalo  $0 \le c \le 4$  (Ns/m), ou seja, o amortecedor pode quebrar-se depois de algum tempo de uso, (c = 0), também que m = 2kg,  $k_x = 20$ N/m, d=1 e que a variável de estado  $x_1(t)$  é limitada no intervalo  $-2 \le x_1(t) \le 2$ . O sistema não-linear incerto (4.34) será transformado na forma generalizada do sistema fuzzy Takagi-Sugeno (TANIGUCHI et al., 2001).

Reescrevendo (4.34) na forma matricial tem-se:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{1}(t) \\ \dot{x}_{2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_{x}\left(1+d^{2}x_{1}(t)^{2}\right)}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1}(t) \\ x_{2}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u(t). \quad (4.35)$$

Considere,

$$\tilde{f}_{21}(x(t)) = -\frac{k_x(1+d^2x_1(t)^2)}{m},$$

a função que contém a não-linearidade do sistema e,
$$\tilde{\mathrm{I}}_{22}(\beta) = -\frac{c}{m},$$

a função que contém a incerteza politópica (falhas) do sistema.

Desta forma, podemos reescrever (4.35) como sendo,

$$\dot{x}(t) = A(\alpha, \beta) x(t) + B(\alpha, \beta) u(t), \qquad (4.36)$$

sendo,

$$A(\alpha,\beta) = \begin{bmatrix} 0 & 1\\ \tilde{f}_{21}(x(t)) & \tilde{I}_{22}(\beta) \end{bmatrix}, \qquad (4.37)$$

e,

$$B(\alpha,\beta) = \begin{bmatrix} 0\\ 1\\ m \end{bmatrix}.$$
(4.38)

Agora, o propósito é separar o elemento não-linear do elemento incerto (falhas) nas matrizes, fazendo com que  $A(\alpha,\beta)$  se transforme em  $A(\alpha)$ , composta pelo elemento nãolinear,  $A(\beta)$  composta pelo elemento incerto, e no caso de existir elementos lineares, a intenção é dividir para ambas as matrizes com  $A(\alpha,\beta) = A(\alpha) + A(\beta)$ . A mesma regra é válida para a matriz  $B(\alpha,\beta)$ , mas neste caso não existem elementos não-lineares nem incertezas na matriz. Então o propósito é fazer com que  $B(\alpha,\beta) = B(\alpha) = B(\beta)$ , ou seja, divide-se o elemento linear em ambas as matrizes, impedindo que haja matrizes nulas, evitando assim a não controlabilidade na parcela de maneira que  $B(\alpha,\beta) = B(\alpha) + B(\beta)$ .

Portanto, as matrizes serão:

$$A(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ \tilde{f}_{21}(x(t)) & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad A(\beta) = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ 0 & \tilde{I}_{22}(\beta) \end{bmatrix},$$

$$B(\alpha) = \begin{bmatrix} 0\\ 1\\ 2m \end{bmatrix} \quad e \quad B(\beta) = \begin{bmatrix} 0\\ 1\\ \frac{1}{2m} \end{bmatrix}.$$

Para conseguir a forma generalizada, de acordo com (TANIGUCHI et al., 2001), é essencial determinar o valor máximo e mínimo da função  $\tilde{f}_{21}(x(t))$  para o sistema descrito anteriormente. Então foram obtidos os seguintes valores:

$$a_{211} = \max_{x_1(t)} \left\{ \tilde{f}_{21}(x(t)) \right\} = -10,$$
  
$$a_{212} = \min_{x_1(t)} \left\{ \tilde{f}_{21}(x(t)) \right\} = -50.$$

Portanto, são obtidos os seguintes modelos locais:

$$A_{1}(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & 0,5 \\ -10 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{2}(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & 0,5 \\ -50 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_{i}(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,25 \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2.$$

No Apêndice 1 encontra-se mais detalhes sobre a obtenção dos modelos locais.

De uma maneira geral, segundo este método, se o sistema apresenta s funções nãolineares, são necessários  $2^s$  modelos locais para a sua representação exata através de modelos fuzzy TS, neste caso, 2 modelos locais.

Agora o parâmetro incerto (falhas) c da planta é definido no intervalo dado por:

$$0 \le c \le 4. \tag{4.39}$$

Relembrando que,

$$\tilde{I}_{22}(\beta) = -\frac{c}{m}, \qquad m = 2kg$$

Substituindo na matriz  $A(\beta)$  as possíveis combinações para o parâmetro  $\tilde{I}_{22}(\beta)$ , os vértices do politopo encontrado foram:

$$A_{1}(\beta) = \begin{bmatrix} 0 & 0,5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{2}(\beta) = \begin{bmatrix} 0 & 0,5 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad B_{j}(\beta) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0,25 \end{bmatrix}, \quad j = 1,2.$$

O número de vértices do politopo é dado pela relação  $r = 2^{\eta}$ , sendo  $\eta$  é o número de parâmetros incertos da planta. Neste caso  $\eta = 1$  e r = 2.

Usando o software MATLAB (*lmiedit*), e o solver "LMILAB" (GAHINET et al.,1995), pode-se calcular através das LMIs as matrizes  $X \in M$  para projetar o controlador para o sistema (4.33). Para este exemplo, considerou o seguinte caso:

**Estabilidade**  $\rightarrow$  Utilizando as LMIs (4.14) e (4.15) do Teorema 4.1, para o projeto do controlador considerando apenas a estabilidade do sistema (4.35), os seguintes resultados foram obtidos:

$$P = X^{-1} = \begin{bmatrix} 1,1124 & 0,0974 \\ 0,0974 & 0,0212 \end{bmatrix},$$
$$M = \begin{bmatrix} 37,9797 & 796,3886 \end{bmatrix}.$$

Logo o controlador obtido foi:

$$K = MX^{-1} = [119, 8287 \quad 20, 5877].$$

A resposta do sistema realimentado para a condição inicial x(0) = 1m e  $\dot{x}(0) = 0m/s$ com o amortecedor *c* funcionando pode ser vista na Figura (4.2) e com o amortecedor quebrado c = 0 (falhas) pode ser vista na Figura (4.3). A planta foi considerada não-linear na simulação (usou-se ODE45 do MATLAB).

Observando as Figuras (4.2 e 4.3), nota-se que o comportamento do sistema controlado quase não muda, mesmo que o amortecedor c se quebre. Em ambos os casos o sistema possui um tempo de estabelecimento em torno de 1,0 segundo. Logo o controlador foi capaz de estabilizar o sistema mesmo após a ocorrência de falha no amortecedor.



Figura 4.2: Simulação do sistema realimentado, c = 4 Ns/m (sem falhas) e controlador projetado com objetivo de estabilidade.



Figura 4.3: Simulação do sistema realimentado, c = 0 (com falhas) e controlador projetado com objetivo de estabilidade.

Com o propósito de comparação, a próxima Figura mostra o desempenho do sistema controlado, sem e com a suposta falha estrutural.



Figura 4.4: Simulação do sistema realimentado, comparação do sistema sem falha e com falha estrutural e controlador projetado com objetivo de estabilidade.

Podemos destacar que normalmente a falha ocorre durante o uso do equipamento. Na Figura (4.5) é exibido o comportamento dinâmico do sistema, supondo que ocorra uma falha no sistema de amortecimento após t = 0,5s. Observe pela figura que a falha ocorrida em t = 0,5s quase não afetou o tempo de período transitório do sistema.



Figura 4.5: Simulação do sistema realimentado, com falha estrutural no amortecedor após t = 0,5s de uso e controlador projetado com objetivo de estabilidade.

Percebemos nas Figuras (4.2 e 4.3), que o tempo de estabelecimento do sistema controlado fica em torno de 1,0 segundo. Agora considere que o sistema deve possuir um transitório menor, ou seja, deseja-se diminuir o tempo de duração do período transitório do sistema. Isso pode ser feito adicionando a restrição de taxa de decaimento no projeto do controlador. Resolvendo o Teorema 4.2 com  $\gamma = 5$ , pode-se obter uma resposta com menor tempo de período transitório, isto é mostrado a seguir.

### 4.4.2- Exemplo 2: Condição de Estabilidade e Taxa de Decaimento

**Estabilidade** + **Taxa de Decaimento**  $\rightarrow$  Considerando os mesmos parâmetros anteriores e usando as LMIs (4.24) e (4.25) do Teorema 4.2, teremos os seguintes resultados:

$$P = X^{-1} = \begin{bmatrix} 7,1953 & 0,3738\\ 0,3738 & 0,0315 \end{bmatrix},$$
$$M = \begin{bmatrix} 0,0535 \times 10^3 & 1,3286 \times 10^3 \end{bmatrix}.$$

Logo o controlador obtido foi:

$$K = MX^{-1} = \begin{bmatrix} 881, 6409 & 61, 9029 \end{bmatrix}.$$

Utilizando a mesma condição inicial x(0) = 1m e  $\dot{x}(0) = 0m/s$ , a resposta do sistema realimentado com taxa de decaimento  $\gamma = 5$  e com o amortecedor *c* funcionando pode ser vista na Figura (4.6) e com o amortecedor quebrado c = 0 (falhas) pode ser vista na Figura (4.7). A planta foi considerada não-linear na simulação (usou-se ODE45 do MATLAB).



Figura 4.6: Simulação do sistema realimentado, c = 4 Ns/m (sem falhas) e controlador projetado com objetivo de estabilidade e taxa de decaimento.



Figura 4.7: Simulação do sistema realimentado, c = 0 (com falhas) e controlador projetado com objetivo de estabilidade e taxa de decaimento.

Com o propósito de comparação, a próxima Figura mostra a desempenho do sistema controlado com taxa de decaimento, sem e com suposta falha estrutural.



Figura 4.8: Simulação do sistema realimentado, comparação do sistema sem falha e com falha estrutural e controlador projetado com objetivo de estabilidade e taxa de decaimento.

Destacando que normalmente a falha ocorre durante o uso do equipamento. Na Figura (4.9) é exibido o comportamento dinâmico do sistema, supondo que ocorra uma falha no sistema de amortecimento após t = 0,1s. Observe pela figura que a falha ocorrida em t = 0,1s quase não afetou o tempo de duração do transitório do sistema.



Figura 4.9: Simulação do sistema realimentado, com falha estrutural no amortecedor após t = 0,1s de uso e controlador projetado com objetivo de estabilidade e taxa de decaimento.

Note que nas Figuras (4.6 e 4.7) o tempo de duração do período transitório do sistema controlado, com a adição da restrição de taxa de decaimento, estão próximos, mesmo com o amortecedor c quebrado, em aproximadamente 0,3 segundos, ou seja, uma resposta três vezes mais rápida do que as apresentadas nas Figuras (4.2 e 4.3). Pode-se diminuir ainda mais o tempo de duração do período transitório do sistema de acordo com as características do projeto, aumentando a taxa de decaimento  $\gamma$ . Conseqüentemente, será obtido um novo controlador K cujos valores do ganho K tendem a ficar maiores e talvez não implementáveis.

### 4.4.3- Exemplo 3: Condição de Estabilidade, Taxa de Decaimento e Restrição na Entrada

Estabilidade + Taxa de Decaimento + Restrição na Entrada  $\rightarrow$  Analisando a figura (4.9), pode-se perceber que o objetivo foi alcançado, ou seja, o sistema ficou estável e houve ainda uma diminuição no período transitório, diminuindo o tempo de estabilização do sistema. Mas podemos perceber que houve oscilações de grande amplitude no sinal de controle u(t) no período transitório do sistema.

Para facilitar a implementação do controlador projetado, objetiva-se que o sinal de controle u(t) não seja tão elevado como mostrado nas Figuras (4.6 – 4.9). E ainda garantir estabilidade e taxa de decaimento adequada.

Considerando os mesmos parâmetros anteriores e usando as LMIs (4.24) e (4.25) do Teorema 4.2 e adicionando as LMIs (4.31) e (4.32), nas quais  $(|u(t)|)_{max} = 180$  N, com o objetivo de diminuir o esforço no sinal de controle, obtivemos os seguintes resultados:

$$P = X^{-1} = \begin{bmatrix} 0,5092 \times 10^{-5} & 0,0384 \times 10^{-5} \\ 0,0384 \times 10^{-5} & 0,0053 \times 10^{-5} \end{bmatrix},$$
$$M = \begin{bmatrix} -0,2532 \times 10^8 & 7,9586 \times 10^8 \end{bmatrix}.$$

Logo o controlador obtido foi:

$$K = MX^{-1} = \begin{bmatrix} 176, 4698 & 32, 1777 \end{bmatrix}.$$

Realizando a simulação com a mesma condição inicial x(0) = 1m e  $\dot{x}(0) = 0$ m/s, a resposta do sistema realimentado com taxa de decaimento  $\gamma = 5$ , restrição na entrada de maneira que |u(t)| < 180N e com o amortecedor c funcionando pode ser vista na Figura (4.10) e com o amortecedor quebrado c = 0 (falhas) pode ser vista na Figura (4.11). A planta foi considerada não-linear na simulação (usou-se ODE45 do MATLAB).



Figura 4.10: Simulação do sistema realimentado, c = 4 Ns/m (sem falhas) e controlador projetado com o objetivo de estabilidade, taxa de decaimento e restrição na entrada.



Figura 4.11: Simulação do sistema realimentado, c = 0 (com falhas) e controlador projetado com o objetivo de estabilidade, taxa de decaimento e restrição na entrada.

Com o propósito de comparação, a Figura (4.12) mostra o desempenho do sistema controlado com taxa de decaimento e restrição na entrada, sem e com suposta falha estrutural.



Figura 4.12: Simulação do sistema realimentado, comparação do sistema sem falha e com falha estrutural e controlador projetado com objetivo de estabilidade, taxa de decaimento e restrição na entrada.

Ressaltando novamente que a falha normalmente ocorre durante o uso do equipamento. Na Figura (4.13) é exibido o comportamento dinâmico do sistema, supondo que ocorra uma falha no sistema de amortecimento após t = 0,3s. Observe na figura que a falha ocorrida em t = 0,3s quase não afetou o tempo de estabelecimento do sistema.



Figura 4.13: Simulação do sistema realimentado, com falha estrutural no amortecedor após t = 0,3s de uso e controlador projetado com objetivo de estabilidade, taxa de decaimento e restrição na entrada.

Podemos verificar que em ambas as Figuras (4.10 e 4.11), o tempo de estabilização do sistema fica bem próximo, mesmo se há quebra no amortecedor (falhas).

Note que nas Figuras (4.10 e 4.11) o esforço no sinal de controle u(t) diminuiu em aproximadamente 5 vezes, porém o tempo de transitório ficou em torno de 0,6 segundos, o dobro em relação ao projeto das Figuras (4.6 e 4.7). Mas o tempo de transitório do sistema das Figuras (4.10 e 4.11) em relação ao das Figuras (4.2 e 4.3), ficou aproximadamente 2 vezes mais rápido e com o esforço no sinal de controle bem próximo. Tentando diminuir ainda mais o tempo de transitório, aumentou-se a taxa de decaimento  $\gamma$  do sistema, porém não foi possível obter soluções consideravelmente melhores para as LMIs. Conseqüentemente tentouse diminuir ainda mais o esforço no sinal de controle, no entanto não foi possível alcançar uma solução factível para as LMIs.

#### 5- Projeto do Controlador por Realimentação da Derivada dos Estados

# 5.1- Projeto do Controlador com Ganho K Único: Condição de Estabilidade

Considere um sistema contínuo no tempo, controlável, não-linear e com incertezas do tipo politópicas, descrito na seguinte forma:

$$\dot{x}(t) = A(\alpha, \beta) x(t) + B(\alpha, \beta) u(t), \qquad (5.1)$$

sendo  $A(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  uma matriz que contém as não-linearidades dependentes de  $\alpha$  e as incertezas politópicas dependentes de  $\beta$ ,  $B(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^{n \times m}$  uma matriz que contém as nãolinearidades dependentes de  $\alpha$  e as incertezas politópicas dependentes de  $\beta$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  é a entrada de controle do sistema e  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  é o vetor de estados. É importante ressaltar que  $\alpha$  é um parâmetro conhecido (modelos fuzzy TS), enquanto  $\beta$  é desconhecido (modelo de incertezas politópicas, com ou sem falhas estruturais).

Considerando a "<u>Etapa de Separação</u>" proposta no início do Capítulo 4, o sistema (5.1) pode ser representado por modelos fuzzy TS da seguinte maneira (TAKAGI; SUGENO, 1985):

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \sum_{j=1}^{p} \beta_j \left( A(\alpha_i, \beta_j) x(t) + B(\alpha_i, \beta_j) u(t) \right),$$
(5.2)

ou ainda realizando a separação,

$$\dot{x}(t) = \left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i A_{\alpha_i} + \sum_{j=1}^{p} \beta_j A_{\beta_j}\right) x(t) + \left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i B_{\alpha_i} + \sum_{j=1}^{p} \beta_j B_{\beta_j}\right) u(t).$$
(5.3)

sendo  $x(t) \in \mathfrak{R}^n$  o vetor de estados,  $u(t) \in \mathfrak{R}^m$  a entrada de controle do sistema, e as matrizes  $A_{\alpha_i} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ ,  $B_{\alpha_i} \in \mathfrak{R}^{n \times m}$ ,  $A_{\beta_j} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  e  $B_{\beta_j} \in \mathfrak{R}^{n \times m}$  contém os parâmetros dos modelos locais. As variáveis  $\alpha_i$  e  $\beta_j$  satisfazem a relação:

$$A_{\alpha} = \sum_{i=1}^{r} \alpha_{i} A_{\alpha_{i}} \in B_{\alpha} = \sum_{i=1}^{r} \alpha_{i} B_{\alpha_{i}},$$

$$\alpha_{i} \geq 0, \quad i = 1, 2, ..., r,$$

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_{i} = 1, \quad \alpha = \begin{bmatrix} \alpha_{1} & \alpha_{2} & \dots & \alpha_{r} \end{bmatrix}^{T}.$$
Modelo Fuzzy TS  
com  $\alpha_{i}$  conhecido, (5.4)
$$A_{\beta} = \sum_{j=1}^{p} \beta_{j} A_{\beta_{j}} \in B_{\beta} = \sum_{j=1}^{p} \beta_{j} B_{\beta_{j}},$$

$$\beta_{j} \geq 0, \quad j = 1, 2, ..., p,$$

$$\sum_{j=1}^{p} \beta_{j} = 1, \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_{1} & \beta_{2} & \dots & \beta_{p} \end{bmatrix}^{T}.$$
Modelo de incertezas  
com  $\beta_{j}$  desconhecido. (5.5)

O projeto de controladores fuzzy para o sistema (5.3), usando a realimentação da derivada dos estados,

$$u(t) = -K\dot{x}(t), \qquad (5.6)$$

é formulado substituindo (5.6) em (5.3), de maneira que o sistema em malha fechada, possa ser representado da seguinte forma:

$$\dot{x}(t) = A(\alpha, \beta) x(t) + B(\alpha, \beta) (-K\dot{x}(t)) \Leftrightarrow$$
  

$$\dot{x}(t) = A(\alpha, \beta) x(t) - B(\alpha, \beta) K\dot{x}(t) \Leftrightarrow$$
  

$$(I + B(\alpha, \beta) K) \dot{x}(t) = A(\alpha, \beta) x(t),$$
(5.7)

e, conseqüentemente,

$$\dot{x}(t) = \underbrace{\left(I + B(\alpha, \beta) K\right)^{-1} A(\alpha, \beta)}_{A_d} x(t).$$
(5.8)

Vale notar que o projeto de controladores para sistemas usando realimentação da derivada dos estados, deve levar em consideração que a matriz  $(I + B(\alpha, \beta)K)$  seja invertível ou não singular (ASSUNÇÃO et al., 2007).

Por facilidade de notação em algumas equações, o termo  $(I + B(\alpha, \beta)K)^{-1} A(\alpha, \beta)$  será representado por  $A_d$ .

A análise de estabilidade quadrática do sistema (5.8) pode ser realizada, verificando as condições de existência de uma matriz simétrica  $P \in \Re^{n \times n}$ , satisfazendo as condições de Lyapunov (BOYD et al., 1994):

$$\begin{array}{c}
A_d^T P + P A_d < 0, \\
P > 0.
\end{array}$$
(5.9)

Dessa forma, o problema da análise de estabilidade do sistema (5.8) pode ser reduzido ao estudo de factibilidade das LMIs (5.9), que quando factíveis, podem ser facilmente resolvidas em microcomputadores, usando por exemplo, o software MATLAB.

Usando esse resultado, o próximo teorema encontra condições suficientes para a estabilidade quadrática e assintótica do sistema (5.8) usando a realimentação derivativa.

#### Teorema 5.1.

Se existe uma matriz simétrica  $X \in \Re^{n \times n}$  e uma matriz  $M \in \Re^{m \times n}$  satisfazendo as LMIs,

$$XA_{\alpha_{i}}^{T} + A_{\alpha_{i}}X + XA_{\beta_{j}}^{T} + A_{\beta_{j}}X + B_{\alpha_{l}}MA_{\alpha_{i}}^{T} + A_{\alpha_{i}}M^{T}B_{\alpha_{l}}^{T} + B_{\alpha_{l}}MA_{\beta_{j}}^{T} + A_{\beta_{j}}M^{T}B_{\alpha_{l}}^{T} + B_{\beta_{j}}MA_{\alpha_{i}}^{T} + A_{\alpha_{i}}M^{T}B_{\beta_{j}}^{T} + B_{\beta_{k}}MA_{\beta_{j}}^{T} + A_{\beta_{j}}M^{T}B_{\beta_{k}}^{T} < 0,$$

$$X > 0,$$
(5.11)

sendo, i, l = 1, 2, ..., r (modelos fuzzy TS) e j, k = 1, 2, ..., p (modelos de incertezas politópicas), então o ponto de equilíbrio x = 0 do sistema (5.8) é globalmente assintoticamente estável. Um controlador que garante a estabilidade do sistema (5.8) pode ser dado por:

$$K = MX^{-1}. (5.12)$$

**Prova:** Supondo que (5.10) e (5.11) são factíveis, e multiplicando ambos os lados de (5.10) por  $(\alpha_i \times \alpha_i \times \beta_j \times \beta_k)$  segue de (5.4) e (5.5) que,

$$\begin{split} X\sum_{i=1}^{r} \alpha_{i}A_{\alpha_{i}}^{T} + \sum_{i=1}^{r} \alpha_{i}A_{\alpha_{i}}X + X\sum_{j=1}^{p} \beta_{j}A_{\beta_{j}}^{T} + \sum_{j=1}^{p} \beta_{j}A_{\beta_{j}}X \\ &+ \sum_{l=1}^{r} \alpha_{l}B_{\alpha_{l}}M\sum_{i=1}^{r} \alpha_{i}A_{\alpha_{i}}^{T} + \sum_{i=1}^{r} \alpha_{i}A_{\alpha_{i}}M^{T}\sum_{l=1}^{r} \alpha_{l}B_{\alpha_{l}}^{T} \\ &+ \sum_{l=1}^{r} \alpha_{l}B_{\alpha_{l}}M\sum_{j=1}^{p} \beta_{j}A_{\beta_{j}}^{T} + \sum_{j=1}^{p} \beta_{j}A_{\beta_{j}}M^{T}\sum_{l=1}^{r} \alpha_{l}B_{\alpha_{l}}^{T} \\ &+ \sum_{j=1}^{p} \beta_{j}B_{\beta_{j}}M\sum_{i=1}^{r} \alpha_{i}A_{\alpha_{i}}^{T} + \sum_{j=1}^{p} \beta_{j}B_{\beta_{j}}^{T} \\ &+ \sum_{j=1}^{p} \beta_{j}B_{\beta_{j}}M\sum_{i=1}^{r} \alpha_{i}A_{\alpha_{i}}^{T} + \sum_{j=1}^{p} \beta_{j}B_{\beta_{j}}^{T} \\ &+ \sum_{k=1}^{p} \beta_{k}B_{\beta_{k}}M\sum_{j=1}^{p} \beta_{j}A_{\beta_{j}}^{T} + \sum_{j=1}^{p} \beta_{j}A_{\beta_{j}}M^{T}\sum_{k=1}^{p} \beta_{k}B_{\beta_{k}}^{T} < 0, \end{split}$$

sendo que os índices  $l \in k$  denotam as parcelas provenientes das multiplicações cruzadas dos termos compostos por  $i \in j$ .

Agrupando os termos, temos que:

$$X\left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_{i} A_{\alpha_{i}}^{T} + \sum_{j=1}^{p} \beta_{j} A_{\beta_{j}}^{T}\right) + \left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_{i} A_{\alpha_{i}} + \sum_{j=1}^{p} \beta_{j} A_{\beta_{j}}\right) X$$
$$+ \left(\sum_{l=1}^{r} \alpha_{l} B_{\alpha_{l}} + \sum_{j=1}^{p} \beta_{j} B_{\beta_{j}}\right) M\left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_{i} A_{\alpha_{i}}^{T} + \sum_{j=1}^{p} \beta_{j} A_{\beta_{j}}^{T}\right)$$
$$+ \left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_{i} A_{\alpha_{i}} + \sum_{j=1}^{p} \beta_{j} A_{\beta_{j}}\right) M^{T}\left(\sum_{l=1}^{r} \alpha_{l} B_{\alpha_{l}}^{T} + \sum_{j=1}^{p} \beta_{j} B_{\beta_{j}}^{T}\right) < 0,$$
(5.13)

Sabemos que:

$$A(\alpha,\beta) = \left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i A_{\alpha_i} + \sum_{j=1}^{p} \beta_j A_{\beta_j}\right), \qquad (5.14)$$

e

$$B(\alpha,\beta) = \left(\sum_{i=1}^{r} \alpha_i B_{\alpha_i} + \sum_{j=1}^{p} \beta_j B_{\beta_j}\right), \qquad (5.15)$$

então de (5.13), chega-se em:

$$X \left[ A(\alpha, \beta) \right]^{T} + A(\alpha, \beta) X + B(\alpha, \beta) M \left[ A(\alpha, \beta) \right]^{T} + A(\alpha, \beta) M^{T} \left[ B(\alpha, \beta) \right]^{T} < 0.$$
(5.16)

Substituindo M = KX em (5.16) obtém-se,

$$X \left[ A(\alpha, \beta) \right]^{T} + A(\alpha, \beta) X + B(\alpha, \beta) KX \left[ A(\alpha, \beta) \right]^{T} + A(\alpha, \beta) XK^{T} \left[ B(\alpha, \beta) \right]^{T} < 0,$$

ou ainda,

$$(I + B(\alpha, \beta)K)X[A(\alpha, \beta)]^{T} + A(\alpha, \beta)X(I + K^{T}[B(\alpha, \beta)]^{T}) < 0.$$
(5.17)

Agora usando a propriedade:

**Propriedade 5.1:** Para toda matriz M não simétrica  $(M \neq M^T)$ , se  $M + M^T < 0$ , então M é invertível (FARIA, 2005).

Portanto, conclui-se em (5.17) que  $(I + B(\alpha, \beta)K)X[A(\alpha, \beta)]^{T}$ é invertível, logo  $(I + B(\alpha, \beta)K)$  também é invertível. Considerando esse fato, multiplique (5.17) à esquerda por  $(I + B(\alpha, \beta)K)^{-1}$  e à direita por  $(I + K^{T}[B(\alpha, \beta)]^{T})^{-1}$  e obtenha:

$$X \left[ A(\alpha,\beta) \right]^{T} \left( I + K^{T} \left[ B(\alpha,\beta) \right]^{T} \right)^{-1} + \left( I + B(\alpha,\beta) K \right)^{-1} A(\alpha,\beta) X < 0.$$
(5.18)

Agora substituindo  $A_d = (I + B(\alpha, \beta)K)^{-1} A(\alpha, \beta)$  em (5.18) e multiplicando a direita e a esquerda por  $P = X^{-1}$  chega-se na LMI:

$$A_d^T P + P A_d < 0,$$

que é equivalente as condições de Lyapunov (5.9) para o sistema (5.8), considerando  $A_d = (I + B(\alpha, \beta)K)^{-1}A(\alpha, \beta)$ . Portanto, quando (5.10) e (5.11) são factíveis, segue de (5.18) que existe uma matriz simétrica  $P = X^{-1} > 0$ , satisfazendo as condições de Lyapunov (5.9) para o sistema (5.7). E, o ponto de equilíbrio x = 0 do sistema (5.7) é globalmente assintoticamente estável. Portanto um controlador *K* desejado pode ser obtido com (5.12).

A estabilidade do sistema (5.8) nem sempre é suficiente, pois existem projetos que possuem restrições de desempenho. A modelagem em LMI permite que algumas dessas restrições sejam adicionadas de maneira simples ao projeto do controlador. Como visto no capítulo anterior, um índice de desempenho muito importante, é a restrição de taxa de decaimento, que é responsável pela rapidez de resposta do sistema. Nesta seção, é estudado o caso em que o projeto possui restrição de taxa de decaimento.

# 5.2- Projeto do Controlador com Ganho K Único: Condição de Estabilidade e Taxa de Decaimento

Considere uma candidata a função de Lyapunov do tipo  $V(x(t)) = x(t)^T P x(t) > 0$ , com  $\dot{V}(x(t)) < 0$  para todo  $x(t) \neq 0$ . A taxa de decaimento  $\gamma$ ,  $\gamma > 0$  é obtida se a condição

$$\dot{V}(x(t)) \le -2\gamma V(x(t)), \qquad (5.19)$$

for satisfeita para toda a trajetória x(t) do sistema (BOYD et al., 1994). O próximo teorema encontra condições suficientes para o projeto do controlador *K* (único) para que o sistema (5.8) tenha taxa de decaimento maior ou igual a  $\gamma$ .

A Propriedade 5.2 descrita a seguir é fundamental para a demonstração deste teorema.

Propriedade 5.2: Uma matriz simétrica  $M = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ M_2^T & M_3 \end{bmatrix}$  é definida positiva se e somente: 1.  $M_1 > 0$  e  $M_3 - M_2^T (M_1)^{-1} M_2 > 0$ . ou 2.  $M_3 > 0$  e  $M_1 - M_2 (M_3)^{-1} M_2^T > 0$ .

Esse resultado é conhecido na literatura como complemento de Schur (BOYD et al., 1994).

#### Teorema 5.2.

Se existe uma matriz simétrica  $X \in \Re^{n \times n}$  e uma matriz  $M \in \Re^{m \times n}$  satisfazendo as LMIs,

$$\begin{bmatrix} XA_{\alpha_{i}}^{T} + A_{\alpha_{i}}X + XA_{\beta_{j}}^{T} + A_{\beta_{j}}X + B_{\alpha_{i}}MA_{\alpha_{i}}^{T} \\ + A_{\alpha_{i}}M^{T}B_{\alpha_{i}}^{T} + B_{\alpha_{i}}MA_{\beta_{j}}^{T} + A_{\beta_{j}}M^{T}B_{\alpha_{i}}^{T} \\ + B_{\beta_{j}}MA_{\alpha_{i}}^{T} + A_{\alpha_{i}}M^{T}B_{\beta_{j}}^{T} \\ + B_{\beta_{k}}MA_{\beta_{j}}^{T} + A_{\beta_{j}}M^{T}B_{\beta_{k}}^{T} \\ \end{bmatrix} \begin{pmatrix} < 0, \\ + B_{\beta_{k}}MA_{\beta_{j}}^{T} + A_{\beta_{j}}M^{T}B_{\beta_{k}}^{T} \\ - \frac{X}{2\gamma} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} < 0, \\ (5.20) \\ X + M^{T}B_{\alpha_{i}}^{T} + M^{T}B_{\beta_{j}}^{T} \\ X > 0, \end{pmatrix}$$
(5.21)

sendo, i, l = 1, 2, ..., r (modelos fuzzy TS) e j, k = 1, 2, ..., p (modelos de incertezas politópicas), então o ponto de equilíbrio x = 0 do sistema (5.8) é globalmente assintoticamente estável com taxa de decaimento superior a  $\gamma$ . Então um controlador que garante a estabilidade do sistema (5.8) pode ser dado por:

$$K = MX^{-1}.$$
 (5.22)

**Prova:** Supondo que as LMIs (5.20) e (5.21) sejam factíveis, e considerando a Propriedade 5.2, item 1, temos que,

$$XA_{\alpha_{i}}^{T} + A_{\alpha_{i}}X + XA_{\beta_{j}}^{T} + A_{\beta_{j}}X + B_{\alpha_{l}}MA_{\alpha_{i}}^{T} + A_{\alpha_{i}}M^{T}B_{\alpha_{l}}^{T} + B_{\alpha_{l}}MA_{\beta_{j}}^{T} + A_{\beta_{j}}M^{T}B_{\alpha_{l}}^{T} + B_{\beta_{j}}MA_{\alpha_{i}}^{T} + A_{\alpha_{i}}M^{T}B_{\beta_{j}}^{T} + B_{\beta_{k}}MA_{\beta_{j}}^{T} + A_{\beta_{j}}M^{T}B_{\beta_{k}}^{T} < 0.$$
<sup>(5.23)</sup>

Agora, multiplicando ambos os lados de (5.23) por  $(\alpha_i \times \alpha_l \times \beta_j \times \beta_k)$  segue de (5.4) e (5.5) que,

$$\begin{split} X\sum_{i=1}^{r} \alpha_{i}A_{\alpha_{i}}^{T} + \sum_{i=1}^{r} \alpha_{i}A_{\alpha_{i}}X + X\sum_{j=1}^{p} \beta_{j}A_{\beta_{j}}^{T} + \sum_{j=1}^{p} \beta_{j}A_{\beta_{j}}X \\ &+ \sum_{l=1}^{r} \alpha_{l}B_{\alpha_{l}}M\sum_{i=1}^{r} \alpha_{i}A_{\alpha_{i}}^{T} + \sum_{i=1}^{r} \alpha_{i}A_{\alpha_{i}}M^{T}\sum_{l=1}^{r} \alpha_{l}B_{\alpha_{l}}^{T} \\ &+ \sum_{l=1}^{r} \alpha_{l}B_{\alpha_{l}}M\sum_{j=1}^{p} \beta_{j}A_{\beta_{j}}^{T} + \sum_{j=1}^{p} \beta_{j}A_{\beta_{j}}M^{T}\sum_{l=1}^{r} \alpha_{l}B_{\alpha_{l}}^{T} \\ &+ \sum_{j=1}^{p} \beta_{j}B_{\beta_{j}}M\sum_{i=1}^{r} \alpha_{i}A_{\alpha_{i}}^{T} + \sum_{j=1}^{p} \beta_{j}B_{\beta_{j}}^{T} \\ &+ \sum_{j=1}^{p} \beta_{j}B_{\beta_{j}}M\sum_{i=1}^{r} \alpha_{i}A_{\alpha_{i}}^{T} + \sum_{j=1}^{p} \beta_{j}B_{\beta_{j}}^{T} \\ &+ \sum_{k=1}^{p} \beta_{k}B_{\beta_{k}}M\sum_{j=1}^{p} \beta_{j}A_{\beta_{j}}^{T} + \sum_{j=1}^{p} \beta_{j}A_{\beta_{j}}M^{T}\sum_{k=1}^{p} \beta_{k}B_{\beta_{k}}^{T} < 0, \end{split}$$

e de (5.14) e (5.15) e substituindo M pela expressão M = KX chega-se em,

$$X \left[ A(\alpha, \beta) \right]^{T} + A(\alpha, \beta) X + B(\alpha, \beta) M \left[ A(\alpha, \beta) \right]^{T} + A(\alpha, \beta) M^{T} \left[ B(\alpha, \beta) \right]^{T} = \left( I + B(\alpha, \beta) K \right) X \left[ A(\alpha, \beta) \right]^{T} + A(\alpha, \beta) X \left( I + K^{T} \left[ B(\alpha, \beta) \right]^{T} \right) < 0,$$
(5.24)

agora usando a Propriedade 5.1 em (5.24) conclui-se que as matrizes  $(I + B(\alpha, \beta)K)$  e  $A(\alpha, \beta)$  são invertíveis.

Da Propriedade 5.2, item 2, e de (5.20) segue que,

$$\begin{split} XA_{\alpha_{i}}^{T} + A_{\alpha_{i}}X + XA_{\beta_{j}}^{T} + A_{\beta_{j}}X + B_{\alpha_{l}}MA_{\alpha_{i}}^{T} + A_{\alpha_{i}}M^{T}B_{\alpha_{l}}^{T} + B_{\alpha_{l}}MA_{\beta_{j}}^{T} \\ + A_{\beta_{j}}M^{T}B_{\alpha_{l}}^{T} + B_{\beta_{j}}MA_{\alpha_{i}}^{T} + A_{\alpha_{i}}M^{T}B_{\beta_{j}}^{T} + B_{\beta_{k}}MA_{\beta_{j}}^{T} + A_{\beta_{j}}M^{T}B_{\beta_{k}}^{T} \\ + \left(X + B_{\alpha_{i}}M + B_{\beta_{j}}M\right) \left[2\gamma X^{-1}\right] \left(X + B_{\alpha_{i}}M + B_{\beta_{j}}M\right)^{T}. \end{split}$$

Repetindo as mesmas operações anteriores obtém-se:

$$\begin{split} X\sum_{i=1}^{r} \alpha_{i}A_{\alpha_{i}}^{T} + \sum_{i=1}^{r} \alpha_{i}A_{\alpha_{i}}X + X\sum_{j=1}^{p} \beta_{j}A_{\beta_{j}}^{T} + \sum_{j=1}^{p} \beta_{j}A_{\beta_{j}}X \\ &+ \sum_{l=1}^{r} \alpha_{l}B_{\alpha_{l}}M\sum_{j=1}^{r} \alpha_{l}A_{\beta_{j}}^{T} + \sum_{j=1}^{p} \beta_{j}A_{\beta_{j}}M^{T}\sum_{i=1}^{r} \alpha_{i}A_{\alpha_{i}}M^{T}\sum_{l=1}^{r} \alpha_{l}B_{\alpha_{i}}^{T} \\ &+ \sum_{j=1}^{r} \alpha_{l}B_{\alpha_{i}}M\sum_{j=1}^{p} \beta_{j}A_{\beta_{j}}^{T} + \sum_{j=1}^{p} \beta_{j}A_{\beta_{j}}M^{T}\sum_{l=1}^{r} \alpha_{l}A_{\alpha_{i}}^{T} + \sum_{j=1}^{p} \beta_{j}B_{\beta_{j}}M \\ &+ \sum_{j=1}^{p} \beta_{j}B_{\beta_{j}}M\sum_{i=1}^{r} \alpha_{i}A_{\alpha_{i}}^{T} + \sum_{i=1}^{p} \beta_{j}B_{\beta_{j}}B_{\beta_{j}}^{T} \\ &+ \sum_{i=1}^{p} \beta_{i}B_{\beta_{i}}M\sum_{j=1}^{p} \beta_{j}A_{\beta_{j}}^{T} + \sum_{j=1}^{p} \beta_{j}A_{\beta_{j}}M^{T}\sum_{k=1}^{p} \beta_{k}B_{\beta_{k}}^{T} \\ &+ \left(X + \sum_{i=1}^{r} \alpha_{i}B_{\alpha_{i}}M + \sum_{j=1}^{p} \beta_{j}B_{\beta_{j}}M\right)^{T} = \\ &X\left[A(\alpha,\beta)\right]^{T} + A(\alpha,\beta)X + B(\alpha,\beta)M\left[A(\alpha,\beta)\right]^{T} \\ &+ A(\alpha,\beta)M^{T}\left[B(\alpha,\beta)\right]^{T} + (X + B(\alpha,\beta)M)\left[2\gamma X^{-1}\right]\left(X + B(\alpha,\beta)M\right)^{T} = \\ \end{split}$$

$$(I + B(\alpha, \beta)K)X[A(\alpha, \beta)]^{T} + A(\alpha, \beta)X(I + K^{T}[B(\alpha, \beta)]^{T}) + (I + B(\alpha, \beta)K)[2\gamma X](I + B(\alpha, \beta)K)^{T} < 0.$$
(5.25)

Agora, multiplicando (5.25) a esquerda por  $(I + B(\alpha, \beta)K)^{-1}$  e a direita por  $(I + K^T [B(\alpha, \beta)]^T)^{-1}$  chega-se em:

$$X \left[ A(\alpha, \beta) \right]^{T} \left( I + K^{T} \left[ B(\alpha, \beta) \right]^{T} \right)^{-1} + \left( I + B(\alpha, \beta) K \right)^{-1} A(\alpha, \beta) X + 2\gamma X < 0.$$
(5.26)

Agora substituindo  $A_d = (I + B(\alpha, \beta)K)^{-1} A(\alpha, \beta)$  em (5.26) e multiplicando a direita e a esquerda por  $P = X^{-1}$  chega-se na LMI:

$$A_d^T P + P A_d < -2\gamma P. (5.27)$$

Quando (5.21) é factível, a LMI (5.27) é equivalente a condição (5.19). Portanto, o ponto de equilíbrio x = 0 do sistema (5.8) é globalmente assintoticamente estável com taxa de decaimento maior que  $\gamma$ . E um controlador *K* desejado pode ser obtido com (5.22).

A eficiência da metodologia proposta pode ser verificada na solução dos exemplos abordados a seguir.

#### 5.3 - Aplicação do Método

#### 5.3.1- Exemplo 1: Condição de Estabilidade

Considere o sistema de suspensão ativa dado em (REITHMEIER; LEITMANN, 2003). Modificando as entradas de controle obtém-se o sistema da Figura (5.1).



Figura 5.1: Sistema de suspensão ativa de um carro.

A dinâmica do sistema pode ser descrita como:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{1}(t) \\ \dot{x}_{2}(t) \\ \dot{x}_{3}(t) \\ \dot{x}_{4}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-k_{m}-k_{2}}{M_{c}} & \frac{k_{2}}{M_{c}} & \frac{-b_{1}-b_{2}}{M_{c}} & \frac{b_{2}}{M_{c}} \\ \frac{k_{2}}{M_{s}} & \frac{-k_{2}}{M_{s}} & \frac{b_{2}}{M_{s}} & \frac{-b_{2}}{M_{s}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1}(t) \\ x_{2}(t) \\ x_{3}(t) \\ x_{4}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{M_{c}} & \frac{-1}{M_{c}} \\ 0 & \frac{1}{m_{s}} \end{bmatrix} u(t),$$

$$(5.28)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix}.$$

O vetor de estados é definido por  $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \dot{x}_1(t) & \dot{x}_2(t) \end{bmatrix}^T$ , sendo que  $x_3(t) = \dot{x}_1(t)$  e  $x_4(t) = \dot{x}_2(t)$ .

O sistema consiste em um carro de massa  $M_c$ , um assento e uma pessoa, cuja massa total é  $m_s$ . As vibrações causadas por irregularidades na estrada podem ser atenuadas pelo sistema de suspensão do carro (mola não-linear  $k_m$  e amortecedor  $b_1$ ). Mesmo assim, o motorista ainda pode sentir um pouco de vibrações. Uma maneira de melhorar o conforto do motorista é instalar um sistema de suspensão ativa no seu assento, composto por uma mola linear  $k_2$  e um amortecedor  $b_2$ , de maneira a diminuir as vibrações entre o motorista ( $m_s$ ) e o chassi do carro ( $M_c$ ), modificando as entradas de controle  $u_1(t)$  e  $u_2(t)$ .

Considerando  $M_c = 1500$ kg (massa do carro),  $m_s = 90$ kg (massa do banco (20kg) + peso do motorista (70kg)) e ainda supondo que o coeficiente de amortecimento  $b_1$  é incerto, ou seja, esteja sujeito a falhas e pertence ao intervalo  $0 \le b_1 \le 2 \times 10^3$  (Ns/m) (ou seja, o amortecedor pode quebrar depois de algum tempo de uso,  $b_1 = 0$ ) e  $b_2 = 500$ Ns/m. O coeficiente não-linear da mola do carro é dado por:  $k_m = k_x (1 + d^2 x_1 (t)^2)$ , na qual  $k_x = 4 \times 10^4$  N/m e d = 1, o coeficiente de elasticidade da mola linear do assento é  $k_2 = 5 \times 10^3$  N/m e que a variável de estado  $x_1(t)$  é limitada no intervalo  $-2 \le x_1(t) \le 2$ . O sistema não-linear incerto (5.28) será transformado na forma generalizada do sistema fuzzy Takagi-Sugeno (TS) (TANIGUCHI et al., 2001).

Considere,

$$\tilde{f}_{31}(x(t)) = \frac{-k_m - k_2}{M_c},$$

a função que contém a não-linearidade do sistema, e,

$$\tilde{\mathrm{I}}_{33}(\beta) = \frac{-b_1 - b_2}{M_c},$$

a função que contém a incerteza politópica (falhas) do sistema.

Desta forma, podemos reescrever (5.28) como sendo,

$$\dot{x}(t) = A(\alpha, \beta) x(t) + B(\alpha, \beta) u(t), \qquad (5.29)$$

sendo,

$$A(\alpha,\beta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \tilde{f}_{31}(x(t)) & \frac{k_2}{M_c} & \tilde{I}_{33}(\beta) & \frac{b_2}{M_c} \\ \frac{k_2}{m_s} & \frac{-k_2}{m_s} & \frac{b_2}{m_s} & \frac{-b_2}{m_s} \end{bmatrix},$$
(5.30)

e

$$B(\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{M_c} & \frac{-1}{M_c} \\ 0 & \frac{1}{m_s} \end{bmatrix}.$$
 (5.31)

Agora, o propósito é separar o elemento não-linear do elemento incerto (falhas) nas matrizes, fazendo com que  $A(\alpha,\beta)$  se transforme em  $A(\alpha)$  composta pelo elemento nãolinear e  $A(\beta)$  composta pelo elemento incerto. No caso de existir elementos lineares, a intenção é dividir as matrizes de maneira que  $A(\alpha,\beta) = A(\alpha) + A(\beta)$ . A mesma regra é válida para a matriz  $B(\alpha,\beta)$ , mas neste caso não existem elementos não-lineares nem incertezas na matriz. Então, o propósito é fazer com que  $B(\alpha,\beta) = B(\alpha) = B(\beta)$ , ou seja, divide-se o elemento linear para ambas as matrizes, impedindo que haja matrizes nulas. Evitase assim a não controlabilidade do par  $(A(\alpha,\beta),B(\alpha,\beta))$ .

Deste modo, as matrizes serão:

$$A(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0,5 \\ \tilde{f}_{31}(x(t)) & \frac{k_2}{2M_c} & 0 & \frac{b_2}{2M_c} \\ \frac{k_2}{2m_s} & \frac{-k_2}{2m_s} & \frac{b_2}{2m_s} & \frac{-b_2}{2m_s} \end{bmatrix}$$

e

$$A(\beta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.5 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0.5 \\ 0 & \frac{k_2}{2M_c} & \tilde{I}_{33}(\beta) & \frac{b_2}{2M_c} \\ \frac{k_2}{2m_s} & \frac{-k_2}{2m_s} & \frac{b_2}{2m_s} & \frac{-b_2}{2m_s} \end{bmatrix},$$

e ainda,

$$B(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{2M_c} & \frac{-1}{2M_c} \\ 0 & \frac{1}{2m_s} \end{bmatrix}$$

e,

$$B(\beta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{2M_c} & \frac{-1}{2M_c} \\ 0 & \frac{1}{2m_s} \end{bmatrix}.$$

De acordo com (TANIGUCHI et al., 2001), para conseguir a forma generalizada, é essencial determinar o valor máximo e mínimo da função  $\tilde{f}_{31}(x(t))$  do sistema descrito em (5.30). Então foram obtidos os seguintes valores:

$$a_{311} = \max_{x_1(t)} \left\{ \tilde{f}_{31}(x(t)) \right\} = -30,$$
  
$$a_{312} = \min_{x_1(t)} \left\{ \tilde{f}_{31}(x(t)) \right\} = -136,6667.$$

Portanto são obtidos os seguintes modelos locais:

$$A_{1}(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5 \\ -30 & 1,6667 & 0 & 0,1667 \\ 27,7778 & -27,7778 & 2,7778 & -2,7778 \end{bmatrix},$$
$$A_{2}(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5 \\ -136,6667 & 1,6667 & 0 & 0,1667 \\ 27,7778 & -27,7778 & 2,7778 & -2,7778 \end{bmatrix},$$
$$B_{i}(\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 3,333 \times 10^{-4} & -3,3333 \times 10^{-4} \\ 0 & 5,5556 \times 10^{-3} \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2.$$

No Apêndice 1 encontra-se mais detalhes sobre a obtenção dos modelos locais.

De um modo geral, segundo este método, se o sistema apresenta s (s = 1) funções nãolineares ( $\tilde{f}_{31}(x(t))$ ), são necessários  $2^s$  ( $2^s = 2$ ) modelos locais para a sua representação exata através de modelos fuzzy TS.

Agora o parâmetro incerto (falhas)  $b_1$  da planta é definido no intervalo dado por:

$$0 \le b_1 \le 2 \times 10^3 (\text{Ns/m}).$$
 (5.32)

Relembrando que,

$$\tilde{I}_{33}(\beta) = \frac{-b_1 - b_2}{M_c}, \qquad M_c = 1500 \text{kg}, \qquad b_2 = 500 \text{Ns/m}.$$

Substituindo na matriz  $A(\beta)$  as possíveis combinações para o parâmetro  $\tilde{I}_{33}(\beta)$ , os vértices do politopo encontrado foram:

$$A_{1}(\beta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,5 \\ 0 & 1,6667 & -0,3333 & 0,1667 \\ 27,7778 & -27,7778 & 2,7778 & -2,7778 \end{bmatrix},$$
  
$$A_{2}(\beta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 1,6667 & -1,6667 & 0,1667 \\ 27,7778 & -27,7778 & 2,7778 & -2,7778 \end{bmatrix},$$
  
$$B_{j}(\beta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 3,333 \times 10^{-4} & -3,3333 \times 10^{-4} \\ 0 & 5,5556 \times 10^{-3} \end{bmatrix}, \quad j = 1,2.$$

O número de vértices do politopo é dado pela relação  $r = 2^{\eta}$ , sendo  $\eta$  é o número de parâmetros incertos da planta. Neste caso  $\eta = 1$  e r = 2.

Usando o software MATLAB (*lmiedit*), e o solver "LMILAB" (GAHINET et al.,1995), pode-se calcular através das LMIs as matrizes  $X \in M$  para projetar o controlador para o sistema (5.28). Para este exemplo, considerou-se o seguinte caso:

**Estabilidade**  $\rightarrow$  Utilizando as LMIs (5.10) e (5.11) do Teorema 5.1, para o projeto do controlador considerando apenas a estabilidade do sistema (5.28), os seguintes resultados foram encontrados:

$$P = X^{-1} = \begin{bmatrix} 27,2083 & 1,6885 \times 10^{-2} & 2,3487 & 3,1590 \times 10^{-2} \\ 1,6885 \times 10^{-2} & 2,5860 \times 10^{-2} & 2,7568 \times 10^{-3} & 1,0122 \times 10^{-2} \\ 2,3487 & 2,7568 \times 10^{-3} & 2,7545 \times 10^{-1} & 5,8455 \times 10^{-3} \\ 3,1590 \times 10^{-2} & 1,0122 \times 10^{-2} & 5,8455 \times 10^{-3} & 2,5854 \times 10^{-2} \end{bmatrix},$$
$$M = \begin{bmatrix} 5,2031 \times 10^3 & 6,3435 \times 10^3 & -1,4681 \times 10^4 & -2,6263 \times 10^3 \\ -7,5525 & -2,7083 \times 10^4 & 72,6930 & 2,8710 \times 10^5 \end{bmatrix}.$$

Logo, o controlador obtido foi:

$$K = MX^{-1} = \begin{bmatrix} 1,0711 \times 10^5 & 1,8484 \times 10^2 & 8,1787 \times 10^3 & 74,8651 \\ 8,5778 \times 10^3 & 2,2060 \times 10^3 & 1,6059 \times 10^3 & 7,1489 \times 10^3 \end{bmatrix}$$

A resposta do sistema realimentado para a condição inicial  $x(0) = \begin{bmatrix} 0, 1 & 0, 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ com o amortecedor  $b_1$  funcionando pode ser vista na Figura (5.2) e com o amortecedor quebrado  $b_1 = 0$  (falhas) pode ser vista na Figura (5.3). A planta foi considerada não-linear na simulação (usou-se ODE45 do MATLAB).

Observando as Figuras (5.2 e 5.3), nota-se que o comportamento do sistema controlado quase não muda, mesmo se o amortecedor  $b_1$  quebra. Logo o controlador projetado foi capaz de estabilizar o sistema mesmo após a ocorrência de falha no amortecedor do carro.



Figura 5.2: Simulação do sistema realimentado,  $b_1 = 2 \times 10^3$  Ns/m (sem falhas) e controlador projetado com objetivo de estabilidade.



Figura 5.3: Simulação do sistema realimentado,  $b_1 = 0$  (com falhas) e controlador projetado com objetivo de estabilidade.

Agora supondo que o carro encontra-se em movimento e em perfeitas condições, mas em uma trepidação há ocorrência de falha no amortecedor  $b_1$ . Na Figura (5.4), é exibido o comportamento dinâmico do sistema, supondo que ocorra uma falha no sistema de amortecimento após t = 14s. Observe pela figura que a falha está somente relacionada à variável de estado  $x_1(t)$ , conseqüentemente  $x_2(t)$  foi mostrada para uma analise do sistema de suspensão ativa do assento após a falha. Note pela figura que a falha ocorrida em t = 14s quase não afetou o tempo de estabelecimento do sistema.



Figura 5.4: Simulação do sistema realimentado, com falha estrutural no amortecedor após t = 14s de uso e controlador projetado com objetivo de estabilidade.

Nas Figuras (5.2 e 5.3), percebemos que o tempo de estabelecimento do sistema controlado fica relativamente alto, em torno de 20 segundos. Agora considere que o sistema deve possuir um período transitório menor. Isso pode ser feito adicionando a restrição de taxa de decaimento no projeto do controlador. Utilizando o Teorema 5.2 com  $\gamma = 4,5$ , pode-se obter uma resposta com menor tempo de duração do período transitório, isto é mostrado a seguir.

## **5.3.2- Exemplo 2: Condição de Estabilidade e Taxa de Decaimento**

**Estabilidade + Taxa de Decaimento**  $\rightarrow$  Considerando os mesmos parâmetros anteriores e usando as LMIs (5.20) e (5.21) do Teorema 5.2, teremos os seguintes resultados:

$$P = X^{-1} = \begin{bmatrix} 2,0847 \times 10^3 & 26,7182 & -10,0787 & -4,4907 \\ 26,7182 & 7,0018 \times 10^{-1} & 6,4945 \times 10^{-1} & -1,1819 \times 10^{-2} \\ -10,0787 & 6,4945 \times 10^{-1} & 3,8726 & 1,9581 \times 10^{-1} \\ -4,4907 & -1,1819 \times 10^{-2} & 1,9581 \times 10^{-1} & 1,8849 \times 10^{-2} \end{bmatrix},$$

$$M = \begin{bmatrix} -2,0846 \times 10^2 & 5,4402 \times 10^3 & 1,5523 \times 10^3 & -7,1149 \times 10^4 \\ -5,1325 \times 10^2 & 1,6679 \times 10^4 & 4,2299 \times 10^3 & -1,4904 \times 10^5 \end{bmatrix}.$$

Logo o controlador obtido foi:

$$K = MX^{-1} = \begin{bmatrix} 1,4626 \times 10^4 & 88,4267 & -2,2864 \times 10^3 & -1,6532 \times 10^2 \\ 2,3613 \times 10^3 & 2,4742 \times 10^3 & 3,1999 \times 10^3 & 1,2643 \times 10^2 \end{bmatrix}$$

Utilizando a mesma condição inicial  $x(0) = \begin{bmatrix} 0,1 & 0,3 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$ , a resposta do sistema realimentado com taxa de decaimento  $\gamma = 4,5$  e com o amortecedor  $b_1$  funcionando pode ser vista na Figura (5.5) e com o amortecedor quebrado  $b_1 = 0$  (falhas) pode ser vista na Figura (5.6). A planta foi considerada não-linear na simulação (usou-se ODE45 do MATLAB).



Figura 5.5: Simulação do sistema realimentado,  $b_1 = 2 \times 10^3$  Ns/m (sem falhas) e controlador projetado com objetivo de estabilidade e taxa de decaimento.



Figura 5.6: Simulação do sistema realimentado,  $b_1 = 0$  (com falhas) e controlador projetado com objetivo de estabilidade e taxa de decaimento.
Da mesma forma anterior, na Figura (5.7) é exibido o comportamento dinâmico do sistema, supondo que ocorra uma falha no sistema de amortecimento  $b_1$  após t = 1,5s. Do mesmo modo, a falha está somente relacionada à variável de estado  $x_1(t)$ , logo  $x_2(t)$  foi mostrada para uma analise do sistema de suspensão ativa do assento após a falha. Note pela figura, que a falha ocorrida em t = 1,5s quase não afetou o tempo de duração do período transitório do sistema.



Figura 5.7: Simulação do sistema realimentado, com falha estrutural no amortecedor após t = 1,5s de uso e controlador projetado com objetivo de estabilidade e taxa de decaimento.

Observe na Figura (5.8), que os autovalores dos modelos locais do sistema em malha fechada atendem a especificação da restrição de taxa de decaimento imposta ao sistema  $(\gamma = 4, 5)$ . Foi considerado o sistema com e sem falhas estruturais, utilizou-se as possíveis combinações dos modelos locais obtidos.



Figura 5.8: Localização dos autovalores em malha fechada dos modelos locais, com e sem falhas, para restrição de taxa de decaimento  $\gamma = 4, 5$ .

Note que nas Figuras (5.5 e 5.6), o tempo de duração do período transitório do sistema controlado com a adição da restrição de taxa de decaimento estão próximos. Mesmo com o amortecedor  $b_1$  quebrado, o tempo de transitório é de aproximadamente 2 segundos, ou seja, uma resposta dez vezes mais rápida do que nas Figuras (5.2 e 5.3). Tentando diminuir ainda mais o tempo de duração do período transitório, aumentou-se a taxa de decaimento  $\gamma$  do sistema, porém não foi possível obter soluções factíveis para as LMIs.

## 6- Conclusões e Perspectivas Futuras

Desenvolveu-se neste trabalho uma nova metodologia para o projeto de controladores fuzzy com modelos Takagi e Sugeno, para a estabilização de um certo grupo de sistemas nãolineares que apresentam falhas, traduzidas como incertezas paramétricas (incertezas do tipo politópicas).

Foram propostas LMIs para o tratamento adequado das não-linearidades e das incertezas politópicas, onde o conjunto factível dessas LMIs proporciona o projeto de controladores fuzzy único do tipo u(t) = -Kx(t) que estabiliza o sistema. Além disso, neste trabalho foi abordado LMIs para o projeto de controladores fuzzy único utilizando a realimentação derivativa. Neste caso, as não-linearidades e as falhas também são tratadas de forma distintas a fim de se obter resultados satisfatórios e seguros. O controlador que estabiliza os sistemas é do tipo  $u(t) = -K\dot{x}(t)$ .

Analisando os resultados obtidos através dos teoremas do Capítulo 4, podemos verificar a estabilização do sistema nas Figuras (4.2 e 4.3) onde o sistema não-linear com incerteza politópica possui tempo de duração do transitório em torno de 1,0 segundo.

Como apenas a estabilização nem sempre é suficiente, então é proposto um outro projeto para o controlador incluindo a restrição de taxa de decaimento, que por conseqüência, melhora a rapidez de resposta do sistema. Isso pode ser verificado nas Figuras (4.6 e 4.7). Fazendo um comparativo entre as simulações (sem a taxa de decaimento, e com a taxa de decaimento no projeto), podemos verificar que houve uma redução de aproximadamente 0,7 segundos no tempo de período transitório do sistema controlado. Esta diminuição de apenas 0,7 segundos no projeto, equivale a um sistema três vezes mais rápido que o anterior.

Então, concluiu-se que houve um aumento na magnitude do sinal de controle u(t) nas Figuras (4.6 e 4.7). Com o objetivo de diminuir este esforço, adicionou-se uma restrição na entrada do sinal de controle, projetando-se um novo controlador. Conseguimos atenuar a magnitude do sinal de controle, como visto nas Figuras (4.10 e 4.11). É fato notável que o tempo de estabilização do sistema dobrou em relação ao apresentado nas Figuras (4.6 e 4.7), porém o sistema ficou quase duas vezes mais rápido que o original, como apresentado nas Figuras (4.2 e 4.3). Agora analisando os resultados obtidos pelos teoremas do capítulo 5, podemos verificar nas Figuras (5.2 e 5.3) que o sistema não-linear com uma suposta falha estrutural tem seu tempo de duração do transitório relativamente alto, ficando em torno de 20 segundos. Tentando diminuir este tempo, foi adicionado no projeto de controle com realimentação derivativa, uma restrição de taxa de decaimento. Então, analisando as Figuras (5.5 e 5.6), constata-se que o transitório do sistema teve uma redução de aproximadamente 18 segundos, terminando o transitório em 2 segundos, ou seja, uma resposta dez vezes mais rápida do que a obtida anteriormente.

Foi possível através das LMIs e utilizando os modelos Takagi-Sugeno (TS), projetar de maneira relativamente simples os controladores para as soluções dos problemas.

Para o projeto dos controladores utilizou-se o *solver* padrão "LMILAB", e o pacote "LMIEDIT" para a representação de LMIs. Suas respectivas simulações foram feitas através do software MATLAB (GAHINET et al., 1995), sendo que o modelo de planta utilizado foi o não-linear. Estes métodos de projetos são equacionados na forma de LMI, assim podendo ser facilmente resolvidos utilizando-se algoritmos de convergência polinomial (BOYD et al., 1994).

Perspectivas futuras:

- Projetar reguladores fuzzy usando a idéia de Compensação Distribuída Paralela (CDP). Este conceito de projeto implica na construção de um compensador para cada regra do modelo fuzzy (TEIXEIRA; ASSUNÇÃO; AVELLAR, 2003, TANAKA; SUGENO, 1992, WANG; TANAKA; GRIFFIN, 1996);
- Adição de um novo parâmetro de desempenho no projeto, tal como restrição na saída da planta, que é de fácil inclusão nos projetos baseados em LMIs (BOYD et al., 1994);
- Desenvolvimento de métodos para a minimização do ganho do controlador, que facilitam a implementação prática do equipamento;
- Desenvolvimento do estudo para o caso discreto;
- Desenvolvimento de condições mais relaxadas para Modelos Fuzzy Takagi-Sugeno.

# Referências

ARRIFANO, N. S. D; OLIVEIRA, V. A; COSSI, L. V. Synthesis of an LMI-based fuzzy control system with guaranteed cost performance: A piecewise lyapunov aproach. *Revista Brasileira de Controle & Automação (SBA)*, Campinas, v. 17, n. 2, p. 213–225, Abril-Junho 2006.

ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M.; FARIA, F. A.; da SILVA, N. A. P.; CARDIM, R. Robust state-derivative feedback LMI-based designs for multivariable linear systems. *International Journal of Control*, London, v. 80, n. 8, p. 1260–1270, 2007.

BOYD, S.; EL GHAOUI, L.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. *Linear Matrix Inequalities in Systems and Control Theory*. 2nd. ed. USA: SIAMStudies in AppliedMathematics, 1994. ISBN 0-89871-334-X. Disponível em:<http://www.stanford.edu/boyd/lmibook/lmibook.pdf>. Acesso em: 15 Jul. 2008.

CAO, S. G.; REES, N. W.; FENG, G. H∞ control of uncertain fuzzy continuous-time systems, *Fuzzy Sets and Systems*, Amsterdam, v.115, n.2, p. 171–190, 2000.

CARDIM, R. Relatório sobre o projeto controle de sistemas não-lineares utilizando as saídas da planta e com modelos fuzzy takagi-sugeno. São Paulo: Ilha Solteira, 2006. 33p. (projeto Fapesp 04/08520-4).

da SILVA, N. A. P. *Projeto de controladores automáticos com atualização das condições iniciais.* 2005. 200f. Tese (Doutorado)- Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista Julio Mesquita Filho, Ilha Solteira, 2005.

EDWARDS, C. H.; PENNEY, D. E. *Elementary differential equations with boundary value problems*. 5th. ed. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 2003. 768 p. ISBN 0131457748.

FARIA, F. A. *Alocação de pólos com realimentação da derivada dos estados usando LMIs*. 2005. 52f. Dissertação (Mestrado)- Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista Julio Mesquita Filho, Ilha Solteira, 2005. Disponível em: <a href="http://www.dee.feis.unesp.br/pos/teses/arquivos/152-dissertação\_flavio\_andrade\_faria.pdf">http://www.dee.feis.unesp.br/pos/teses/arquivos/152-dissertação\_flavio\_andrade\_faria.pdf</a>>. Acesso em: 22 Out.2008.

GAHINET, P.; NEMIROVSKI, A.; LAUB, A. J.; CHILALI, M. *LMI control toolbox*: for use with matlab. [s.l.], 1995. Disponível em: <a href="http://www.mathworks.com/">http://www.mathworks.com/</a>. Acesso em: 18 Jun. 2008.

NGUANG, S. K.; SHI, P.; DING, S. Fault detection for uncertain fuzzy systems: an LMI approach. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, New York, v. 15, n. 6, p. 1251–1262, Dec 2007.

OGATA, K. Engenharia de controle moderno. 3rd. ed. Rio de janeiro: LTC, 2000.

REITHMEIER, E.; LEITMANN, G. Robust vibration control of dynamical systems based on the derivative of the state. *Archive of Applied Mechanics*, Heidelberg, v. 72, n. 11–12, p. 856–864, 2003.

SOUZA, R. B. M. Projeto de reguladores fuzzy takagi-sugeno utilizando as condições iniciais da planta. 2006. 109f. Dissertação (Mestrado)- Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista Julio de Mesquita Filho, Ilha Solteira, 2006.

SUGENO, M.; KANG, G. T. Structure identification of fuzzy model. *Fuzzy Sets and Systems*, Amsterdam, v. 28, n 1, p. 15–33, 1988.

TAKAGI, T.; SUGENO, M. Fuzzy Identification of systems and its applications to modeling and control. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics,* New York, v. 15, n.1, p.116–132, 1985.

TANAKA, K.; IKEDA, T.; WANG, H. O. Fuzzy regulators and fuzzy observers: relaxed stability conditions and LMI-based designs. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, New York, v. 6, n. 2, p. 250–265, May 1998.

TANAKA, K.; OHTAKE, H.; WANG, H. O. A Descriptor system approach to fuzzy control system design via fuzzy lyapunov functions. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, New York, v. 15, n. 3, p. 333–341, June 2007.

TANAKA, K.; SUGENO, M. Stability analysis and design of fuzzy control systems. *Fuzzy* Sets and Systems, Amsterdam, v. 45, n. 2, p. 135–156, 1992.

TANAKA, K.; WANG, H. O. *Fuzzy control systems design and analysis*: a linear matrix inequality approach. USA: John Wiley and Sons, 2001. 305 p. ISBN 0-471-32324-1.

TANIGUCHI, T.; TANAKA, K.; OHATAKE, H.; WANG, H. O. Model construction, rule reduction, and robust compensation for generalized form of Takagi-Sugeno fuzzy systems. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, New York, v. 9, n. 4, p. 525–537, 2001.

TANIGUCHI, T.; TANAKA, K.; WANG, H. O. Fuzzy descriptor systems and nonlinear model following control. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, New York, v. 8, n. 4, p. 442–452, August 2000.

TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNCAO, E.; AVELLAR, R. G. On Relaxed LMI-Based Design for fuzzy controllers. In: 2001 IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON FUZZY SYSTEMS, 2001, Melbourne. *Proceedings*... New York, 2001. p. 704-707.

TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; AVELLAR, R. G. On relaxed LMI-based designs for fuzzy regulators and fuzzy observers. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, New York, v. 11, n. 5, p. 613–623, 2003.

TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; PIETROBOM, H. C. On Relaxed LMI-based design for fuzzy regulators and fuzzy observers. In: EUROPEAN CONTROL CONFERENCE, 6, 2001, Porto. *Proceedings...* Porto, 2001. p.120-125.

TEIXEIRA, M. C. M.; CATHARINO, M. F. R.; ASSUNCAO, E.; MACHADO, E. R. D. A Comparative study between two relaxed LMI-based fuzzy control designs. In: THE 2005 IEEE INTERNATIONAL COFERENCE ON FUZZY SYSTEMS, 2005, Reno. *Proceedings* ... New York, 2005. p. 969-972.

TEIXEIRA, M. C. M.; da SILVA, N. A. P.; ASSUNÇÃO, E.; MACHADO, E. R. M. D. Design of fuzzy regulators with optimal initial conditions compensation. In: 2006 IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON FUZZY SYSTEMS, 2006, Vancouver. *Proceedings...* New York, 2006. p. 286-293.

TEIXEIRA, M. C. M.; ZAK, S. H. Stabilizing controller design for uncertain nonlinear systems using fuzzy models. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, New York, v. 7, n. 2, p. 133–142, 1999.

WANG, H. O.; TANAKA, K.; GRIFFIN, M. F. An Approach to fuzzy control of nonlinear systems: stability and design issues. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, New York, v. 4, n. 1, p. 14–23, February 1996.

## Apêndice 1

Este apêndice contém informações sobre a obtenção das equações de pertinência, que não foram expostas no texto principal, devido a não utilidade das mesmas no caso de se projetar controladores fuzzy único. Porém são de extrema importância no projeto de controladores fuzzy usando a idéia de Compensação Distribuída Paralela (CDP). Este conceito de projeto implica na construção de um controlador para cada regra do modelo fuzzy (TANAKA; SUGENO, 1992, WANG; TANAKA, GRIFFIN, 1996).

**Exemplo**: Considere o seguinte sistema não-linear (TANAKA; WANG, 2001).

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{1}(t) \\ \dot{x}_{2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x_{1}(t) + x_{1}(t) x_{2}^{3}(t) \\ -x_{2}(t) + (3 + x_{2}(t)) x_{1}^{3}(t) \end{bmatrix}.$$
 (0.1)

Por simplicidade, é assumido que  $-1 < x_1(t) < 1$  e  $-1 < x_2(t) < 1$ . Vale ressaltar que podem ser assumidos quaisquer valores para  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$  para construção dos modelos fuzzy.

Então, a equação (0.1) pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{1}(t) \\ \dot{x}_{2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & x_{1}(t) x_{2}^{2}(t) \\ (3 + x_{2}(t)) x_{1}^{2}(t) & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1}(t) \\ x_{2}(t) \end{bmatrix}, \quad (0.2)$$

sendo que  $x_1(t)x_2(t) = (3+x_2(t))x_1(t)$  são termos não-lineares do sistema. Para os termos não-lineares, defina  $z_1(t) \equiv x_1(t)x_2(t) = z_2(t) \equiv (3+x_2(t))x_1(t)$ . Então, temos,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & z_1(t) \\ z_2(t) & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}.$$
 (0.3)

O próximo passo é calcular os valores máximos e mínimos de  $z_1(t)$  e  $z_2(t)$ , sendo que  $-1 < x_1(t) < 1$  e  $-1 < x_2(t) < 1$ . Neste caso, os seguintes valores foram obtidos,

$$\max_{x_{1}(t),x_{2}(t)} z_{1}(t) = 1, \qquad \min_{x_{1}(t),x_{2}(t)} z_{1}(t) = -1,$$
$$\max_{x_{1}(t),x_{2}(t)} z_{2}(t) = 4, \qquad \min_{x_{1}(t),x_{2}(t)} z_{2}(t) = 0.$$

Dos máximos e mínimos valores,  $z_1(t)$  e  $z_2(t)$  podem ser representados por:

$$z_{1}(t) = x_{1}(t) x_{2}^{2}(t) = M_{1}(z_{1}(t)) \times 1 + M_{2}(z_{1}(t)) \times (-1),$$
  

$$z_{2}(t) = (3 + x_{2}(t)) x_{1}^{2}(t) = N_{1}(z_{2}(t)) \times 4 + N_{2}(z_{2}(t)) \times 0,$$

sendo que,

$$0 \le M_1(z_1(t)), \ M_2(z_1(t)) \le 1, \qquad \text{e} \qquad M_1(z_1(t)) + M_2(z_1(t)) = 1,$$
$$0 \le N_1(z_2(t)), \ N_2(z_2(t)) \le 1, \qquad \text{e} \qquad N_1(z_2(t)) + N_2(z_2(t)) = 1.$$

Desta forma, obtemos as seguintes funções:

$$M_{1}(z_{1}(t)) = \frac{z_{1}(t)+1}{2}, \qquad M_{2}(z_{1}(t)) = \frac{1-z_{1}(t)}{2}, \\N_{1}(z_{2}(t)) = \frac{z_{2}(t)}{4}, \qquad N_{2}(z_{2}(t)) = \frac{4-z_{2}(t)}{4}.$$

Respectivamente, as funções acima serão denominadas "Positiva", "Negativa", "Grande" e "Pequena". Então o sistema (0.1) é representado pelos seguintes modelos da regra fuzzy.

Regra 1

SE 
$$z_1(t)$$
 é "Positiva" e  $z_2(t)$  é "Grande",  
ENTÃO  $\dot{x}(t) = A_1 x(t)$ .

#### Regra 2

SE  $z_1(t)$  é "Positiva" e  $z_2(t)$  é "Pequena", ENTÃO  $\dot{x}(t) = A_2 x(t)$ .

### Regra 3

SE 
$$z_1(t)$$
 é "Negativa" e  $z_2(t)$  é "Grande",  
ENTÃO  $\dot{x}(t) = A_3 x(t)$ .

### Regra 4

SE 
$$z_1(t)$$
 é "Negativa" e  $z_2(t)$  é "Pequena",  
ENTÃO  $\dot{x}(t) = A_4 x(t)$ .

Portanto, chega-se aos modelos locais,

$$A_{1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}, \qquad A_{2} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \\ A_{3} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}, \qquad A_{4} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Agora, podemos escrever:

$$z_{1}(t) = (N_{1}(z_{2}(t)) + N_{2}(z_{2}(t))) \times (M_{1}(z_{1}(t)) \times 1 + M_{2}(z_{1}(t)) \times (-1)),$$
  
=  $N_{1}(z_{2}(t)) \times M_{1}(z_{1}(t)) \times 1 + N_{1}(z_{2}(t)) \times M_{2}(z_{1}(t)) \times (-1) +$   
+  $N_{2}(z_{2}(t)) \times M_{1}(z_{1}(t)) \times 1 + N_{2}(z_{2}(t)) \times M_{2}(z_{1}(t)) \times (-1).$ 

e

$$z_{2}(t) = (M_{1}(z_{1}(t)) + M_{2}(z_{1}(t))) \times (N_{1}(z_{2}(t)) \times 4 + N_{2}(z_{2}(t)) \times 0),$$
  
$$= M_{1}(z_{1}(t)) \times N_{1}(z_{2}(t)) \times 4 + M_{1}(z_{1}(t)) \times N_{2}(z_{2}(t)) \times 0 + M_{2}(z_{1}(t)) \times N_{1}(z_{2}(t)) \times 4 + M_{2}(z_{1}(t)) \times N_{2}(z_{2}(t)) \times 0.$$

Agora defina,

$$\alpha_{1}(z(t)) = M_{1}(z_{1}(t)) \times N_{1}(z_{2}(t)),$$
  

$$\alpha_{2}(z(t)) = M_{1}(z_{1}(t)) \times N_{2}(z_{2}(t)),$$
  

$$\alpha_{3}(z(t)) = M_{2}(z_{1}(t)) \times N_{1}(z_{2}(t)),$$
  

$$\alpha_{4}(z(t)) = M_{2}(z_{1}(t)) \times N_{2}(z_{2}(t)),$$

como sendo as funções de pertinência do sistema.

Note que,

$$\alpha_1(z(t)) + \alpha_2(z(t)) + \alpha_3(z(t)) + \alpha_4(z(t)) = 1.$$

Assim, tem-se

$$z_1(t) = \alpha_1(z(t)) \times 1 + \alpha_3(z(t)) \times (-1) + \alpha_2(z(t)) \times 1 + \alpha_4(z(t)) \times (-1),$$
(0.4)

e

$$z_2(t) = \alpha_1(z(t)) \times 4 + \alpha_2(z(t)) \times 0 + \alpha_3(z(t)) \times 4 + \alpha_4(z(t)) \times 0. \quad (0.5)$$

Finalmente, substituindo (0.4) e (0.5) em (0.3), pode-se obter uma representação exata do sistema (0.2) com modelos fuzzy TS.

$$\dot{x}(t) = \left(\sum_{i=1}^{4} \alpha_i(z(t))A_i\right) x(t).$$
(0.6)