



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"

FACULDADE DE ENGENHARIA - CAMPUS DE ILHA SOLTEIRA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

THALLES DENNER FERREIRA CABRAL

DINÂMICA E CONTROLE DE UM SISTEMA MAGLEV SIMPLIFICADO

Ilha Solteira - SP

2015

THALLES DENNER FERREIRA CABRAL

**DINÂMICA E CONTROLE DE UM SISTEMA MAGLEV
SIMPLIFICADO**

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia
do Campus de Ilha Solteira - UNESP como parte
dos requisitos para obtenção do título de Mestre em
Engenharia Mecânica.
Área de Conhecimento: Mecânica dos Sólidos

Orientador: Prof. Dr. Fábio Roberto Chavarette

Ilha Solteira - SP

2015

FICHA CATALOGRÁFICA

Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

C117d Cabral, Thalles Denner Ferreira.
Dinâmica e controle de um sistema maglev simplificado / Thalles Denner
Ferreira Cabral. -- Ilha Solteira: [s.n.], 2015
70 f. : il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de
Engenharia de Ilha Solteira. Área de conhecimento: Mecânica dos Sólidos, 2015

Orientador: Fábio Roberto Chavarette
Inclui bibliografia

1. Análise de estabilidade. 2. Controle LQR. 3. Controle SDRE. 4. Maglev. 5.
Modelagem matemática.

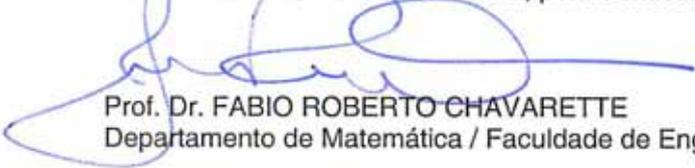
CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

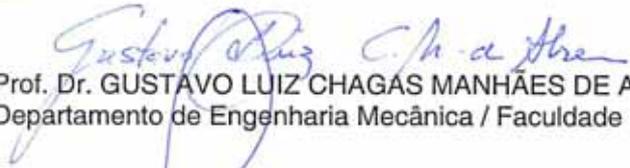
TÍTULO: Dinâmica e controle de um sistema MAGLEV simplificado

AUTOR: THALLES DENNER FERREIRA CABRAL

ORIENTADOR: Prof. Dr. FABIO ROBERTO CHAVARETTE

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Mecânica ,
Área: MECÂNICA DOS SÓLIDOS, pela Comissão Examinadora:


Prof. Dr. FABIO ROBERTO CHAVARETTE
Departamento de Matemática / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira


Prof. Dr. GUSTAVO LUIZ CHAGAS MANHÃES DE ABREU
Departamento de Engenharia Mecânica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira


Prof. Dr. NELSON JOSÉ PERUZZI
Departamento de Ciências Exatas / Faculdade de Ciências Agrárias e Veterinárias de Jaboticabal

Data da realização: 09 de março de 2015.

DEDICO

Aos meus pais e amigos.

AGRADECIMENTOS

Ao programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da *UNESP - Universidade Estadual Paulista - Campus de Ilha Solteira*, pela oportunidade de cursar este mestrado e pelo auxílio financeiro em participação de congressos científicos.

Ao meu orientador pela paciência e disposição em ajudar na minha jornada durante o mestrado.

A todos os docentes do Departamento de Engenharia Mecânica da *UNESP - Campus de Ilha Solteira*, que de forma direta e/ou indireta contribuirão para o desenvolvimento desta dissertação.

Aos funcionários da biblioteca e seção de Pós-Graduação da *UNESP - Campus de Ilha Solteira*, pela qualidade do atendimento.

Ao *CNPq* pela bolsa de estudos concedida durante o período do mestrado.

Por fim, mas não menos importante, meus sinceros agradecimentos aos colegas e amigos que fizeram parte dessa jornada.

"Algo é só impossível até que alguém
duvide e acabe provando o contrário."

Albert Einstein (1879 - 1955)

RESUMO

Diversos protótipos de sistemas *Maglev* (transporte de levitação magnética) em todo o mundo, principalmente na Alemanha e Japão, têm demonstrado que este modo de transporte pode lucrativamente competir com o transporte aéreo. No entanto, um sistema *Maglev* tal como o *Transrapid* da Alemanha é inerentemente instável. Esta instabilidade deve-se ao sistema de suspensão eletromagnética, a qual usa força atrativa para levantar o trem. Com isto, algum sistema de controle da levitação deve ser implementado para tornar a operação segura. A partir de um modelo simplificado para o sistema experimental *Transrapid* é possível investigar a instabilidade e conseqüentemente propor algum projeto de controle. Neste trabalho, é proposto dois projetos de controladores ótimos. As seguintes técnicas são utilizadas para projetar os controladores: Regulador linear Quadrático (*LQR*) e Equação de Riccati Dependente do Estado (*SDRE*). O primeiro projeto é um controlador linear, já o outro é não-linear. As simulações computacionais mostram que o controlador *SDRE* permite o sistema *Maglev* operar com perturbações muito maiores no entreferro do que o controlador *LQR* permite.

Palavras-chave - Análise de estabilidade. Controle *LQR*. Controle *SDRE*. *Maglev*. Modelagem matemática.

ABSTRACT

Several experimental *Maglev* (magnetic levitation transport) systems all around the world, mainly in Germany and Japan have demonstrated that this mode of transportation can profitably compete with air travel. However, a system such as the German *Maglev* train (called *Transrapid*) is inherently unstable. This instability is because the electromagnetic suspension system uses attractive force to levitate the train. Herewith, some levitation control system must be implemented to make safe operation. From a simplified model for the *Transrapid* experimental system is possible to investigate the instability and to propose some control design. In this work, we propose two control designs for the system. The following techniques are used to design the controllers: Linear Quadratic Regulator (*LQR*) and State-Dependent Riccati Equation (*SDRE*). The first project is a linear controller, while the other is non-linear. Simulations shows that the *SDRE* controller allows the *Maglev* system to operate with much larger disturbances in the air gap than the *LQR* controller does.

Keywords - *LQR* control. *Maglev*. Mathematical modeling. *SDRE* control. Stability analysis.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Longos ciclos de crescimento econômico e taxas de crescimento dos sistemas de transporte nos EUA	16
Figura 2 – Sistema de levitação eletromagnética (<i>EML</i>) do <i>Transrapid</i>	17
Figura 3 – Sistema de levitação eletrodinâmica (<i>EDL</i>) do <i>JR-MagLev</i>	18
Figura 4 – Sistema de levitação supercondutora (<i>SML</i>) do <i>MagLev-Cobra</i>	19
Figura 5 – Arranjo de <i>Halbach</i> e densidade de campo (<i>Tesla</i>)	20
Figura 6 – Sistema de levitação do <i>Inductrack</i>	20
Figura 7 – Deslocamento virtual e real de uma partícula restrita a superfície móvel . . .	24
Figura 8 – Evolução de uma hipersfera de raio $\epsilon_0(x_0)$ em torno de um ponto inicial x_0	34
Figura 9 – Esquema geral do controlador <i>LQR</i>	38
Figura 10 – Esquema geral do controlador <i>SDRE</i>	41
Figura 11 – Modelo simplificado para o <i>Maglev Transrapid</i>	42
Figura 12 – Retrato de fases do sistema (58)	48
Figura 13 – Dois maiores expoentes de Lyapunov (sem variação de parâmetros)	49
Figura 14 – Dois maiores expoentes de Lyapunov, considerando a variação de u_M	49
Figura 15 – Dois maiores expoentes de Lyapunov, considerando a variação de L_0	50
Figura 16 – Dois maiores expoentes de Lyapunov, considerando a variação de R	50
Figura 17 – Evolução temporal das variáveis de estado (x_1, x_2, x_3)	51
Figura 18 – Comparativos entre o sistema não-linear (58) e linear (59)	52
Figura 19 – Resposta do sistema controlado para a condição inicial $x(0) = (140, 0, 0.009)$	57
Figura 20 – Resposta do sistema controlado para a condição inicial $x(0) = (140, 0, 0.0102)$	58
Figura 21 – Resposta do sistema controlado para a condição inicial $x(0) = (140, 0, 0.011)$	59
Figura 22 – Resposta do sistema controlado para a condição inicial $x(0) = (140, 0, 0.013)$	60
Figura 23 – Resposta do sistema controlado para a condição inicial $x(0) = (140, 0, 0.015)$	61
Figura 24 – Classificação dos pontos de equilíbrio (sistema linear bidimensional)	67
Figura 25 – Classificação dos pontos de equilíbrio (sistema linear tridimensional)	68
Figura 26 – Representação esquemática do conceito de equivalência topológica	69

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Alguns projetos de trens com levitação magnética	16
Tabela 2 – Comportamento dinâmico de sistemas, em função do sinal dos <i>expoentes de Lyapunov</i>	35
Tabela 3 – Parâmetros do modelo <i>Maglev</i>	47
Tabela 4 – Comparativo entre algumas técnicas de controle utilizada em sistemas <i>Maglev</i>	55
Tabela 5 – Características do regime transiente	62

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

<i>AFNNC</i>	-	Controle Adaptativo Neuro-Fuzzy
<i>EDL</i>	-	Levitação Eletrodinâmica
<i>EML</i>	-	Levitação Eletromagnética
<i>GA</i>	-	Algoritmos Genéticos
<i>LQR</i>	-	Regulador linear Quadrático
<i>Maglev</i>	-	Levitação Magnética
<i>PID</i>	-	Proporcional Integral Derivativo
<i>PSO</i>	-	Otimização via Exame de Partículas
<i>RBF</i>	-	Função de Base Radial
<i>SDC</i>	-	Coefficiente Dependente do Estado
<i>SDRE</i>	-	Equação de Riccati Dependente do Estado
<i>SMC</i>	-	Controle por Modos Deslizantes
<i>SML</i>	-	Levitação Supercondutora
<i>TOS</i>	-	Termos de Ordem Superior

LISTA DE SÍMBOLOS

ξ_M	- Coordenada arbitrária
t	- Tempo
$\delta\vec{r}_i$	- Deslocamento virtual
\vec{r}_i	- Vetor posição
$d\vec{r}_i$	- Deslocamento real
\vec{f}_i	- Força de vínculo
\vec{p}_i	- Momento linear
m_i	- Massa
\vec{F}_i	- Força resultante
$\vec{F}_i^{(a)}$	- Força aplicada
\vec{v}_i	- Velocidade
q_k	- Coordenada generalizada
δq_k	- Deslocamento virtual independente
Q_k	- Força generalizada
T	- Energia cinética
V	- Energia potencial
L	- Lagrangiana
U	- Potencial generalizado
Q'_k	- Força generalizada que não provém de potencial generalizado
F	- Função de dissipação de Rayleigh
k_{ix}	- Constante positiva na direção x
\vec{x}	- Vetor de estados
\vec{x}^*	- Ponto de equilíbrio
\mathcal{A}	- Matriz dinâmica
λ	- Autovalor
\vec{z}_0	- Autovetor
\mathcal{I}	- Matriz identidade
Δ	- Determinante
\mathcal{J}	- Matriz jacobiana
$\epsilon_k(t)$	- Eixos principais de um objeto hiper elipsoidal
$\delta V(t)$	- Elemento de hiper volume
α_n	- Expoentes de Lyapunov
J	- Funcional de custo (também chamado de índice de desempenho)
\mathcal{B}	- Matriz de entrada
\mathcal{C}	- Matriz de saída
\vec{u}	- Lei de controle

\vec{y}	-	Vetor de saída
\mathcal{K}	-	Matriz de ganhos
\mathcal{Q}	-	Importância relativa do estado $\vec{x}(t)$ (matriz positiva definida)
\mathcal{R}	-	Importância relativa do consumo de energia $\vec{u}(t)$ (Matriz positiva definida)
\mathcal{P}	-	Matriz hermitiana positiva definida
\mathcal{T}	-	Matriz não singular
\mathcal{H}	-	Hamiltoniano
Λ	-	Multiplicador de Lagrange
g	-	Aceleração da gravidade [m/s^2]
s_M	-	Distância vertical entre o eletroímã e o trilho [m]
S_0	-	Distância vertical entre o trilho e a posição de equilíbrio do veículo [m]
$L(s_M)$	-	Indutância da bobina [h]
R	-	Resistência da bobina [Ω]
i_M	-	Corrente elétrica da bobina [A]
u_M	-	Tensão elétrica bobina [v]
μ_0	-	Constante de indutância
A	-	Área do polo do eletroímã
N	-	Número de enrolamentos da bobina
c	-	Constante da bobina
δs	-	Pertubação da posição de equilíbrio do veículo <i>Maglev</i>
δi	-	Pertubação da corrente elétrica da bobina
I_0	-	Corrente da bobina, quando o veículo está na posição de equilíbrio S_0
U_0	-	Tensão da bobina, quando o veículo está na posição de equilíbrio S_0
L_0	-	Indutância da bobina, quando o veículo está na posição de equilíbrio S_0
E^e	-	Subespaço estável
E^i	-	Subespaço instável
E^c	-	Subespaço central
u_{max}	-	Tensão elétrica máxima fornecida pelo conversor buck

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	15
1.1	Transporte e as Ondas de Kondratieff	15
1.2	Principais Métodos de Levitação Magnética de Trens	16
1.2.1	Trem com Levitação Eletromagnética (EML)	17
1.2.2	Trem com Levitação Eletrodinâmica (EDL)	18
1.2.3	Trem com Levitação Supercondutora (SML)	19
1.2.4	Trem com Levitação por Indução (Inductrack)	20
1.3	Objetivos do Trabalho	21
1.4	Organização do Trabalho	21
2	REFERENCIAL TEÓRICO	22
2.1	Formulação Lagrangiana da Mecânica Clássica	22
2.1.1	Vínculos	22
2.1.2	Princípio de d'Alembert	23
2.1.3	Coordenadas Generalizadas	25
2.1.4	Equações de Lagrange	26
2.2	Tópicos em Sistemas Dinâmicos	30
2.2.1	Ponto de Equilíbrio e Estabilidade no Sentido de Lyapunov	30
2.2.2	Estabilidade do Ponto de Equilíbrio (Sistemas Lineares)	31
2.2.3	Linearização em Torno do Ponto de Equilíbrio (Sistemas Não Lineares)	33
2.2.4	Teorema de Hartman-Grobman (Sistemas Não Lineares)	34
2.2.5	Caos Determinístico	34
2.3	Controle Ótimo via Regulador Quadrático Linear (LQR)	36
2.4	Controle Ótimo via Equação de Riccati Dependente do Estado (SDRE)	38
3	MODELAGEM MATEMÁTICA E ANÁLISE DO MODELO	42
3.1	Modelo Simplificado para o Maglev Transrapid	42
3.1.1	Modelo Matemático Não-Linear	43
3.1.2	Modelo Matemático Linear	44
3.1.3	Redução de Ordem do Sistema (Espaço de Estados)	45
3.2	Análise de Estabilidade do Ponto de Equilíbrio	46
3.2.1	Linearização em Torno do Ponto de Equilíbrio	46
3.2.2	Classificação do Ponto de Equilíbrio	47
3.3	Expoentes de Lyapunov	49
3.4	Considerações Finais em Relação ao Modelo Simplificado	51
3.5	Comparativos entre o Modelo Não-Linear e Linear	51

4	PROJETOS DE CONTROLE	54
4.1	Técnicas de Controle Utilizadas em Sistemas de Levitação Magnética . .	54
4.2	Sistema Maglev com Controlador LQR	56
4.3	Sistema Maglev com Controlador SDRE	56
4.4	Resultados e Discussões	56
5	CONCLUSÕES	63
	REFERÊNCIAS	64
	APÊNDICE A – ESTABILIDADE DE UM SISTEMA LINEAR BIDIMENSIONAL	67
	APÊNDICE B – ESTABILIDADE DE UM SISTEMA LINEAR TRIDIMENSIONAL	68
	APÊNDICE C – TEOREMA DE HARTMAN-GROBMAN	69

1 INTRODUÇÃO

Um dos sistemas de engenharia que atraem a atenção de diversos pesquisadores é a tecnologia de trens com levitação magnética, chamado de *Maglev* (*transporte de levitação magnética*). O interesse em tais sistemas deve-se ao fato de que estes demonstram ser uma importante alternativa aos meios de transporte de massa convencionais, isto porque a tecnologia empregada nos trens *Maglev* é tal que o transporte seja rápido, confortável, seguro, e adicionalmente contribua para o descongestionamento do tráfego rodoviário e/ou urbano, o que conseqüentemente leva à redução de impactos ambientais tais como a emissão de poluentes devido à combustão de combustíveis fósseis. Portanto, os trens *Maglev* são tecnologias ambientalmente corretas (ZHAO; THORNTON, 1992).

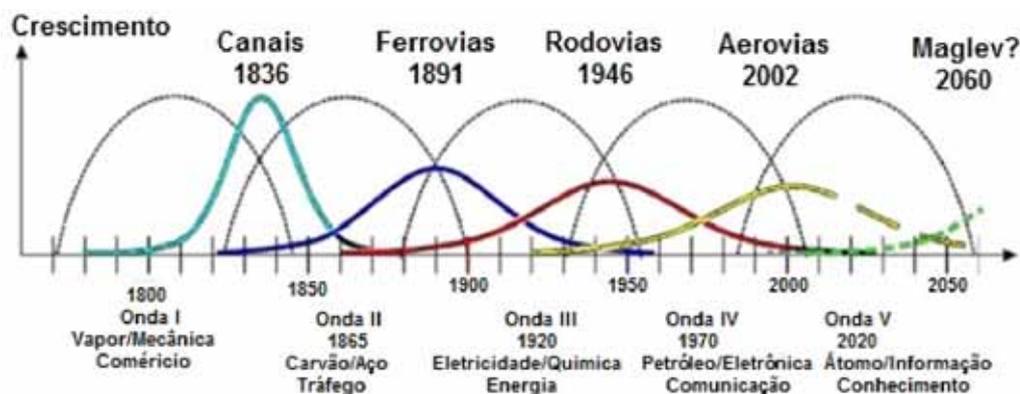
Do ponto de vista técnico, os trens *Maglev* possuem diversas vantagens em relação aos trens convencionais roda-trilho. Segundo Lee, Kim e Lee (2006), algumas destas vantagens (não necessariamente presente em todos os modelos de trens *Maglev*) são: 1) eliminação de rodas, portanto, os níveis de ruídos, vibrações e desgaste da via, são drasticamente reduzidos, conseqüentemente, os custos de manutenção são diminuídos; 2) o peso da carga é distribuído, portanto, os custos de construção das vias são reduzidos; 3) devido a forma construtiva dos trens *Maglev*, o mesmo não descarrilha; 4) não há escorregamento e/ou deslizamento do sistema em operação, pois não há contato entre o veículo e a via; 5) podem vencer inclinações maiores e raios menores; 6) acelera e desacelera rapidamente; 7) peças tais como, engrenagens, acoplamentos, eixos, rolamentos e etc, são eliminadas; 8) a operação de trens *Maglev* é menos suscetível às condições meteorológicas.

1.1 Transporte e as Ondas de Kondratieff

Tendo em mente o atual sistema econômico e os efeitos da globalização, o fator tempo no transporte de pessoas, bens e informações é determinante. Logo novas tecnologias são desenvolvidas, onde o mais importante não é a menor distância, mas o menor tempo. Assim, a infraestrutura de transporte está em constante evolução e os investimentos nesta podem ser observados por meio da análise da teoria dos ciclos econômicos do economista russo Nikolai Kondratieff (1892-1938). Através de registros históricos, o mesmo defende que os ciclos acontecem devido a grandes investimentos de infraestrutura na fase de expansão, enquanto na fase de depreciação desses investimentos ocorre a retração da economia (DAVID, 2009).

No Congresso Internacional de Levitação Magnética de 2006 realizado em Dresden, Michael Raschbichler (2006) citado por David (2009), dispendo de dados estatísticos e econômicos dos Estados Unidos, organizou o gráfico da Figura 1, no qual sobrepõe diferentes fases de desenvolvimento tecnológico do setor de transportes com os Ciclos Econômicos de Kondratieff.

Figura 1 – Longos ciclos de crescimento econômico e taxas de crescimento dos sistemas de transporte nos EUA



Fonte: Raschbichler (2006) citado por David (2009).

A partir da sobreposição das ondas de desenvolvimento econômico de longo prazo com as curvas de desenvolvimento dos sistemas de transportes, verifica-se na Figura 1 as correlações entre estes sistemas e o desenvolvimento econômico. Finalmente, tendo em mente as pesquisas e conseqüentemente o desenvolvimento da tecnologia de trens de levitação magnética, nota-se uma indagação quanto ao *Maglev* o qual poderá ser a próxima onda da expansão e substituir o notável crescimento do transporte aéreo (ao menos em distâncias até 1.000 km).

1.2 Principais Métodos de Levitação Magnética de Trens

No mundo há vários projetos relacionados com a tecnologia de trens com levitação magnética. A Tabela 1 mostra alguns dos principais projetos.

Tabela 1 – Alguns projetos de trens com levitação magnética

País	Nome	Tipo	Velocidade
Alemanha	<i>Transrapide</i>	<i>EML</i>	Alta
Japão	<i>JR-MagLev</i>	<i>EDL</i>	Alta
Estados Unidos	GA	<i>EDL</i>	Baixa
Estados Unidos	MagLev2000	<i>EDL</i>	Baixa
Estados Unidos	MagnePlane	<i>EDL</i>	Baixa
Estados Unidos	MagneMotion M3	<i>EML</i>	Baixa
Japão	HSST-Linimo	<i>EML</i>	Baixa
Coreia	KIMM & KRRI	<i>EML</i>	Baixa
China	SMT	<i>EDL</i>	Baixa
Brasil	<i>MagLev-Cobra</i>	<i>SML</i>	Baixa

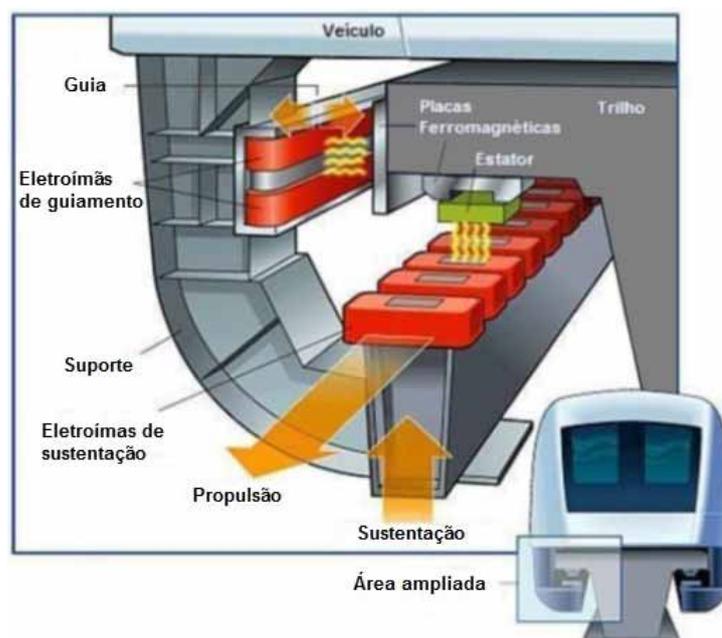
Fonte: (MOTTA, 2011).

Nas subseções que seguem são abordados os métodos de levitação eletromagnética (*EML*), levitação eletrodinâmica (*EDL*), levitação supercondutora (*SML*), e levitação por indução (*Inductrack*), cujo sistema é recente e foi desenvolvido por um grupo de pesquisadores dos Estados Unidos.

1.2.1 Trem com Levitação Eletromagnética (EML)

Esse tipo de levitação ocorre através de eletroímãs que estão posicionados de forma estratégica em um suporte, de modo que os eletroímãs exercem uma força de atração nas placas ferromagnéticas instaladas na aba de uma viga do tipo "T". Tal configuração permite ao trem obter a sustentação e estabilidade lateral (DAVID, 2009). A Figura 2 mostra um esquema deste tipo de levitação.

Figura 2 – Sistema de levitação eletromagnética (EML) do *Transrapid*



Fonte: Adaptado de (LEE et al., 2013).

Um sistema com esse tipo de levitação é o trem *Maglev Transrapid* projetado pelos alemães, e implementado na China desde 2004. Tal sistema interliga o Aeroporto Internacional de Pudong à Estação de Metrô de Long Yang, em Shanghai, por meio de duas vias de 30km. Para completar esse percurso o trem leva em torno de 8 minutos, atingindo uma velocidade de 430km/h. O veículo é capaz de vencer inclinações de aproximadamente 10%, partindo do repouso até a velocidade de 300km/h em 5km (MOTTA, 2011).

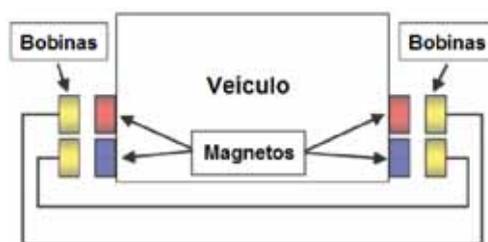
A propulsão e frenagem são efetuadas por motores síncronos instalados no trilho, sendo estes alimentados por uma corrente alternada de frequência variável. Assim, a velocidade do trem é determinada pela frequência dessa corrente, enquanto que a aceleração e desaceleração são devido ao sentido do campo girante produzido pelo motor. Caso o sentido do campo seja contrário ao do movimento do trem, a desaceleração ocorre e o motor trabalha como um gerador, e neste caso é possível devolver a energia gerada ao sistema elétrico do trem (MOTTA, 2011).

Nesse trem, a distância entre os eletroímãs e o trilho é mantida em torno de 10mm, sendo esta controlada eletronicamente e, por ser um sistema instável, o controle da levitação deve ser eficiente de modo à garantir a operação com segurança (MOTTA, 2011).

1.2.2 Trem com Levitação Eletrodinâmica (EDL)

Esse tipo de levitação ocorre através da repulsão entre campos eletromagnéticos, produzido por eletroímãs (ou ímãs permanentes) instalados no trem e bobinas supercondutoras (as quais necessitam de uma refrigeração especial) localizadas no trilho. Contudo, é necessário o movimento do campo magnético em torno de um material condutor. Então, com o trem (no qual está contido o material magnético) em movimento, há a variação do campo magnético nas bobinas supercondutoras que estão no trilho, induzindo assim uma tensão nas mesmas (conforme a *Lei de Faraday*). Estando estas bobinas em um circuito elétrico fechado, há correntes proporcionais à tensão induzida. Estas correntes geram outro campo magnético (conforme *Lei de Ampère*) o qual se opõe à variação do campo criado pelo material magnético (conforme *Lei de Lenz*). Assim, a levitação é conseguida através da interação entre os campos do trem e o induzido. Quanto à estabilidade lateral, esta é conseguida através de uma interconexão engenhosa de bobinas alojadas lateralmente no trem (DAVID, 2009; MOTTA, 2011). A Figura 3 mostra um esquema deste tipo de levitação.

Figura 3 – Sistema de levitação eletrodinâmica (EDL) do *JR-MagLev*



Fonte: (MOTTA, 2011).

Um sistema com esse tipo de levitação é o trem *Maglev JR-MagLev* projetado pelos japoneses. Existe uma linha experimental de 18km que foi inaugurada em abril de 1997, e de acordo com o *Railway Technical Research Institute (RTRI)* o trem bateu o recorde de velocidade terrestre chegando a 581km/h em dezembro de 2003 (DAVID, 2009).

A propulsão e frenagem é efetuada pelo mesmo princípio apresentado na subseção 1.2.1. Outro fator importante é que para ocorrer a levitação o trem necessita estar em movimento, pois em baixas velocidades não há força de levitação suficiente, portanto, é indispensável a presença de rodas, porém, a partir de uma certa velocidade (em torno de 120km/h) as rodas são retraídas de modo que a levitação propriamente dita inicie (MOTTA, 2011).

Esse sistema em relação ao *Transrapid* é de construção mais onerosa e com elevado consumo de energia, sendo sua principal desvantagem o sistema criogênico utilizado nas bobinas supercondutoras, as quais geralmente são refrigeradas com hélio, o que torna o custo de funcionamento muito elevado. Contudo, o sistema de levitação eletrodinâmica (EDL) possui um potencial superior ao sistema de levitação eletromagnética (EML), isto graças aos super ímãs de terras raras que quando organizados em arranjos, como os de *Halbach*, são capazes de aumentar em 40% a intensidade do campo magnético em uma superfície (DAVID, 2009).

1.2.3 Trem com Levitação Supercondutora (SML)

Esse tipo de levitação ocorre através de um princípio físico descoberto em 1933 pelos físicos alemães Meissner e Ochsenfeld, enfim, baseia-se na exclusão do campo magnético no interior de materiais supercondutores (diamagnetismo). Nos supercondutores do tipo I o campo magnético é completamente expulso do interior. Já nos supercondutores do tipo II esta exclusão é parcial, pois, nem todas as linhas de campo magnético são expulsas do interior do material, deste modo, por um defeito nas chamadas rede de vórtices algumas linhas são aprisionadas, o que diminui a força de repulsão (levitação), mas conduz à estabilidade (no nível atômico), dispensando sistemas de controle sofisticados ou rodas (MOTTA, 2011).

A levitação supercondutora é energeticamente mais eficiente do que a levitação eletromagnética do *Transrapid* (que consome $1,7kW/t$), pois não há consumo de energia para garantir a levitação e estabilidade do sistema. No entanto, esta tecnologia é recente e portanto ainda não há um projeto em escala real implementado. Contudo, no Brasil há um modelo em escala real denominado *MagLev-Cobra* sendo construído pelo *Laboratório de Aplicações de Supercondutores (LASUP)*, situado na *Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ)*. Outro aspecto favorável quanto a eficiência energética é que a energia para vencer a ação da gravidade provém de ímãs permanentes instalados ao longo da via, assim a energia necessária para o funcionamento do sistema de levitação consiste majoritariamente nas perdas térmicas do criostato (DAVID, 2009). O componente fundamental desse sistema é a "base de levitação" do trem, no qual é montado os módulos de passageiros e instalado os criostatos. Dentro dos criostatos estão os supercondutores, os quais são refrigerados com nitrogênio líquido ($-196,15^{\circ}C$), que pode ser considerado um rejeito industrial com baixo preço de comercialização. Na parte central encontram-se as bobinas (alimentadas com energia elétrica) que permitem a movimentação do trem através da interação com um motor linear síncrono instalado na via (SOTELO et al., 2013). A Figura 4 mostra algumas vistas do *MagLev-Cobra*.

Figura 4 – Sistema de levitação supercondutora (SML) do *MagLev-Cobra*



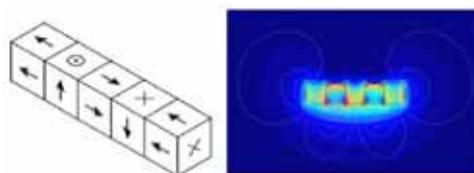
Fonte: Adaptado de (SOTELO et al., 2013).

A teoria que explica o fenômeno da supercondutividade está baseada nos chamados *Pares de Cooper* (elétrons girando com spin contrários). Um exemplo onde formam-se estes *Pares de Cooper* são os nanotubos de carbono, os quais reforçam a expectativa de alcançar a supercondutividade na temperatura ambiente. Numa aplicação prática isto seria um atributo adicional, pois a tecnologia desenvolvida atualmente já é competitiva para transportes de curta distância em área urbana e na conexão de aeroportos com o centro das cidades (DAVID, 2009).

1.2.4 Trem com Levitação por Indução (Inductrack)

O *Inductrack* tal como o *JR-MagLev* utiliza suspensão eletrodinâmica. Entretanto, em vez de usar bobinas supercondutoras, utiliza-se ímãs permanentes agrupados em arranjo de *Halbach*, no qual barras de ímãs são colocadas num padrão especial, a fim de que a orientação magnética de cada barra esteja a um certo ângulo com a orientação magnética da barra adjacente. Com isto, o campo em um dos lados é minimizado e do outro possui uma forma senoidal (KO et al., 2009). A Figura 5 mostra um esquema do arranjo de *Halbach* e sua densidade de campo.

Figura 5 – Arranjo de *Halbach* e densidade de campo (*Tesla*)



Fonte: Adaptado de (KO et al., 2009).

O *Inductrack* depende basicamente de dois componentes principais: um ou mais arranjos de ímãs permanentes capazes de produzir um campo oscilante e, uma pista formada por um arranjo de circuitos indutivos que irão interagir com o campo magnético e gerar as forças de levitação (POST; RYUTOV, 2000). A Figura 6 mostra um esquema deste tipo de levitação.

Figura 6 – Sistema de levitação do *Inductrack*



Fonte: Adaptado de (SANTOS, 2011).

Nesse sistema, a força de levitação aumenta com a diminuição da distância entre o trilho e o trem, o que proporciona uma certa estabilidade. Por ser um sistema de forças repulsivas ativado por indução, ele é estável, portanto, a utilização de circuitos de controle para alcançar a estabilidade é desnecessária. Já a estabilidade lateral é conseguida através da instalação de arranjos de *Halbach* menores nos lados do trilho. Outro aspecto acerca do *Inductrack* é que a levitação magnética só ocorre de fato após o trem atingir uma certa velocidade, o que torna inevitável a utilização de rodas para o movimento inicial (POST; RYUTOV, 2000).

Alguns dos motivos que tornam o *Inductrack* atraente é a sua simplicidade construtiva e econômica, se comparado, por exemplo, com o *JR-MagLev* e/ou *Transrapid*. Contudo, devido o desenvolvimento ainda recente dessa tecnologia, existem apenas modelos experimentais em laboratório.

1.3 Objetivos do Trabalho

Os objetivos deste trabalho são:

1. Realizar a modelagem matemática do sistema de levitação eletromagnética (*EML*) do *Maglev Transrapid*.
2. Estudar o comportamento dinâmico do modelo.
3. Controlar o sistema.

1.4 Organização do Trabalho

Esta dissertação está estruturada em 5 capítulos. Em detalhes, tem-se:

- **Introdução:** Apresenta uma motivação para o estudo de sistemas com levitação magnética, os principais métodos de levitação magnética de trens, objetivos e estrutura da dissertação.
- **Referencial Teórico:** Apresenta uma revisão sobre a formulação lagrangiana da mecânica clássica, alguns tópicos relacionados com a teoria de sistemas dinâmicos e as seguintes técnicas de controle: Regulador linear Quadrático (*LQR*) e Equação de Riccati Dependente do Estado (*SDRE*). As teorias abordadas neste capítulo são a base teórica para o estudo do comportamento dinâmico e projeto de controle do sistema de levitação eletromagnética (*EML*) do *Maglev Transrapid*. No entanto, a leitura do mesmo não é necessária para o entendimento do trabalho, deste que o leitor esteja familiarizado com os tópicos tratados no capítulo.
- **Modelagem Matemática e Análise do Modelo:** Apresenta um modelo simplificado para o sistema de levitação eletromagnética (*EML*) do *Maglev Transrapid*. Adicionalmente, é apresentado a versão linear do modelo simplificado, pois o mesmo será útil para o projeto do controlador linear (*LQR*). As equações de movimento do modelo abordado são obtidas pela formulação lagrangiana da mecânica clássica. Por fim, algumas simulações computacionais são realizadas, com o objetivo de estudar o comportamento dinâmico do sistema.
- **Projetos de Controle:** Apresenta uma revisão sobre as estratégias de controle que têm sido utilizadas em sistemas de levitação magnética (*Maglev*). Em seguida são propostos dois projetos de controle para o sistema de levitação eletromagnética (*EML*) do *Maglev Transrapid*. O primeiro é um controlador linear e o segundo é não-linear. Por fim, é apresentada algumas simulações computacionais comparando o desempenho dos controladores projetados.
- **Conclusões:** Apresenta a conclusão do trabalho.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

O estudo teórico de um sistema dinâmico pode ser dividido didaticamente em duas etapas: a construção de um modelo adequado (o qual, depende da finalidade e precisão requerida) e a análise desse modelo. Seguindo esta sistemática, este capítulo aborda inicialmente a formulação lagrangiana da mecânica clássica, a qual lida com funções escalares em vez de forças e acelerações vetoriais (abordagem newtoniana), o que facilita a modelagem de sistemas mecânicos. Em seguida são abordados alguns tópicos da teoria de sistemas dinâmicos, os quais são a base teórica para a análise do modelo. Por fim, são apresentadas as técnicas de controle *LQR* e *SDRE*, as quais são utilizadas para projetar os controladores do sistema *Maglev*.

2.1 Formulação Lagrangiana da Mecânica Clássica

Geralmente, os sistemas mecânicos estão sujeitos a vínculos e nestes casos a formulação newtoniana da dinâmica revela-se antieconômica e inconveniente, pois exige o uso de variáveis redundantes (devido as coordenadas não serem todas independentes entre si) e as forças de vínculos aparecerem explicitamente. Já com o formalismo desenvolvido por Lagrange é possível escrever as equações de movimento da maioria dos sistemas físicos relevantes a partir de uma função escalar expressa em termos de coordenadas independentes arbitrárias e sem envolver as forças de vínculo (LEMOS, 2007). Há duas maneiras de chegar às equações de Lagrange:

1. Utilizar diretamente a segunda lei de Newton em conjunto com o conceito de deslocamento virtual introduzido pelo físico francês Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783).
2. Utilizar o princípio variacional de Hamilton. Este, reduz as leis da mecânica a um enunciado segundo o qual, de todos os movimentos imagináveis, o movimento real é aquele para o qual uma certa quantidade denominada *ação* é mínima (geralmente estacionária).

Neste trabalho é mostrada apenas a primeira maneira de dedução. Porém antes disso, é necessário algumas discussões acerca de vínculos, princípio de d'Alembert e coordenadas generalizadas para obter as equações de Lagrange.

2.1.1 Vínculos

Vínculos são limitações às posições e/ou velocidades das partículas de um sistema mecânico, ou seja, são restrições de natureza cinemática (geométrica) ao movimento, portanto, antecedem a dinâmica e precisam ser levados em conta na formulação das equações de movimento do sistema. Logo, se houver alguma restrição com origem nas equações de movimento, esta será de natureza dinâmica e portanto não é vínculo (LEMOS, 2007).

Considerando ξ_1, \dots, ξ_M coordenadas arbitrárias que descrevem a posição das partículas de um sistema mecânico num dado instante, ou seja, define a configuração do sistema no referido instante, tem-se que os vínculos do sistema podem ser classificados em duas categorias:

- **Vínculos Holônomos:** Os quais podem ser expressos por uma relação funcional exclusivamente entre as coordenadas que descrevem as posições das partículas do sistema mecânico, podendo ainda envolver o tempo de modo explícito (LEMOS, 2007). Então, tem-se:

$$f(\xi_1, \dots, \xi_M, t) = 0 \quad (1)$$

- **Vínculos não Holônomos:** Os quais dependem das velocidades e posições, logo envolvem equações diferenciais, ou seja, derivadas das posições em relação ao tempo (LEMOS, 2007). Então, são vínculos expressos por uma equação da forma:

$$f(\xi_1, \dots, \xi_M, \dot{\xi}_1, \dots, \dot{\xi}_M, t) = 0 \quad (2)$$

Vínculos diferenciais do tipo (2) raramente podem ser reduzidos por uma integração ao tipo (1), porém em alguns casos especiais isto é possível.

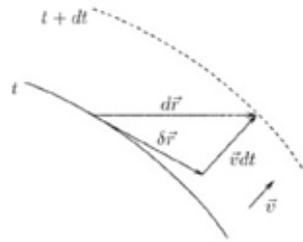
2.1.2 Princípio de d'Alembert

O princípio de d'Alembert é uma equação que resulta da condição de que os vínculos de um sistema mecânico são ideais. Contudo, antes de prosseguir é necessário introduzir os conceitos de deslocamentos virtuais e trabalho virtual. Então, tem-se que:

- **Deslocamentos Virtuais:** São deslocamentos infinitesimais realizados a tempo fixo e que não violam os vínculos (isto é, as partículas que compõem o sistema mecânico assumem apenas posições permitidas pelos vínculos). É importante salientar que a palavra virtual neste contexto não significa necessariamente que os deslocamentos são do tipo que ocorrem em consequência do movimento do sistema e da passagem do tempo. Mais precisamente, dado um sistema de N partículas tem-se que os deslocamentos virtuais $\delta\vec{r}_i, i = 1, \dots, N$, são deslocamentos infinitesimais das posições $\vec{r}_i, \dots, \vec{r}_N$ realizados instantaneamente e com a propriedade de serem compatíveis com os vínculos (GOLDSTEIN, 1980; LEMOS, 2007). Para exemplificar, a Figura 7 mostra o deslocamento virtual $\delta\vec{r}$ (tangente a superfície) e real $d\vec{r}$ (o qual, não é tangente a superfície) de uma partícula restrita a uma superfície móvel.
- **Trabalho Virtual:** Por definição é o trabalho realizado por uma força durante um deslocamento virtual $\delta\vec{r}$. Recorrendo novamente a Figura 7 e supondo que a superfície na qual o movimento da partícula está restrita seja idealmente lisa, tem-se que a força de contato entre a partícula e a superfície possui apenas uma componente perpendicular à

superfície de contato, não havendo assim a componente tangencial devido a falta de atrito. Sendo assim, o trabalho realizado pela força de vínculo por ocasião de um deslocamento virtual da partícula é nulo, uma vez que a força é perpendicular e o deslocamento virtual é tangente a superfície, diferentemente do trabalho realizado durante um deslocamento real, que não necessariamente é nulo. É importante salientar que apesar de ter sido utilizado um exemplo específico, na maioria dos sistemas físicos de interesse, o trabalho virtual total das forças de vínculo se anula (GOLDSTEIN, 1980; LEMOS, 2007).

Figura 7 – Deslocamento virtual e real de uma partícula restrita a superfície móvel



Fonte: (LEMOS, 2007).

A partir dos conceitos de deslocamentos virtuais e trabalho virtual, pode-se definir vínculos ideais como restrições cujas forças de vínculos \vec{f}_i não realizam trabalho durante deslocamentos virtuais $\delta\vec{r}_i$ (LEMOS, 2007). Então, matematicamente tem-se que:

$$\sum_{i=1}^N \vec{f}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0 \quad (3)$$

De agora em diante, sem perda significativa de generalidade, considera-se apenas sistemas mecânicos sujeitos a vínculos ideais. Então, pela segunda lei de Newton para o caso em que a massa é constante, tem-se:

$$\dot{\vec{p}}_i = m_i \ddot{\vec{r}}_i = m_i \dot{\vec{v}}_i = \vec{F}_i$$

em que, a força resultante \vec{F}_i pode ser convenientemente decomposta em duas parcelas: forças aplicadas $\vec{F}_i^{(a)}$ e forças de vínculos \vec{f}_i . Assim, a segunda lei de Newton torna-se:

$$m_i \dot{\vec{v}}_i = \vec{F}_i^{(a)} + \vec{f}_i$$

Multiplicando a equação acima pelo deslocamento virtual $\delta\vec{r}_i$ e utilizando a definição de vínculo ideal (3), obtém-se finalmente o princípio de d'Alembert:

$$\sum_{i=1}^N (m_i \dot{\vec{v}}_i - \vec{F}_i^{(a)}) \cdot \delta\vec{r}_i = 0 \quad (4)$$

A vantagem de utilizar o princípio de d'Alembert sob a formulação newtoniana é que as forças de vínculo não aparecem. Entretanto, em aplicações concretas é preciso levar em conta que os deslocamentos virtuais $\delta\vec{r}_i$ não são independentes para sistemas sujeitos a vínculos, pois as coordenadas não são independentes entre si. Contudo, a equação de d'Alembert é um passo intermediário para a formulação lagrangiana da mecânica clássica (LEMOS, 2007).

2.1.3 Coordenadas Generalizadas

Para que o princípio de d'Alembert assuma a forma das equações de Lagrange, deve-se primeiramente expressá-lo em termos de deslocamentos virtuais independentes, o que leva a necessidade de introduzir um certo número n de variáveis independentes, denotadas genericamente por q_1, \dots, q_n e chamadas de coordenadas generalizadas (GOLDSTEIN, 1980; LEMOS, 2007).

A introdução de coordenadas generalizadas é possível sempre que os vínculos do sistema mecânico for holônomo (LEMOS, 2007), ou seja, da forma (1). Os requisitos que definem este tipo de coordenada são:

1. Independentes entre si;
2. O vetor posição de cada partícula é determinado univocamente em cada instante pelos valores dos q 's, ou seja, caracterizam a configuração do sistema;
3. Os vínculos, supostos da forma (1), são identicamente satisfeitos se expressos em termos dos q 's (não havendo ainda restrições aos possíveis valores dos q 's).

Então, seja um sistema mecânico constituído por N partículas submetidas aos p vínculos holônomos:

$$\begin{aligned} f_1(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) &= 0 \\ &\vdots \\ f_p(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t) &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

das $3N$ coordenadas $(x_1, y_1, z_1), \dots, (x_N, y_N, z_N)$ apenas $n = 3N - p$ são independentes, assim n representa o número de *graus de liberdade* do sistema mecânico e seu valor é igual ao número de coordenadas independentes necessárias para descrever o movimento do sistema. Logo, é possível introduzir n coordenadas generalizadas q_1, \dots, q_n tais que seus valores especificam a posição \vec{r}_i de cada partícula num dado instante e tais que todas as equações (5) de vínculos sejam identicamente satisfeitas, ao substituir (6) em (5) (GOLDSTEIN, 1980; LEMOS, 2007).

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, \dots, q_n, t), i = 1, \dots, N \quad (6)$$

Uma vez introduzidas as coordenadas generalizadas via (6), os deslocamentos virtuais $\delta\vec{r}_i$ podem ser expressos em termos dos deslocamentos virtuais independentes δq_k mediante:

$$\delta\vec{r}_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k \quad (7)$$

Ou seja, através da equação (7) tem-se o quanto \vec{r}_i varia quando as coordenadas generalizadas são variadas em quantidades infinitesimais δq_k , sendo o tempo mantido fixo.

2.1.4 Equações de Lagrange

Uma vez entendido os conceitos abordados nas três subseções anteriores, pode-se então prosseguir com a dedução das equações de Lagrange da seguinte forma:

Substituindo a equação (7) no princípio de d'Alembert (4) e passando as forças aplicadas para o lado direito da equação, tem-se:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^n m_i \dot{\vec{v}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k = \sum_{i=1}^N \sum_{k=1}^n \vec{F}_i^{(a)} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \delta q_k \quad (8)$$

O trabalho virtual das forças aplicadas $\vec{F}_i^{(a)}$ visto na equação (8) é geralmente chamado de *força generalizada* e por definição, torna-se:

$$Q_k = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(a)} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \quad (9)$$

Apesar do nome dado a equação (9), a quantidade Q_k não tem necessariamente dimensão de força, pois um dado δq_k não têm necessariamente dimensão de comprimento, no entanto, ao substituir (9) em (8) tem-se que o produto $Q_k \cdot \delta q_k$ tem sempre dimensão de energia (trabalho).

A outra quantidade (lado esquerdo) envolvida na equação (8), possui a seguinte identidade útil para os próximos desenvolvimentos:

$$\sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{v}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{d}{dt} \left(m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) - m_i \vec{v}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) \right\} \quad (10)$$

Para simplificar a equação acima e escrevê-la diretamente em termos das coordenadas generalizadas, seguem três resultados importantes:

Resultado 1 - Pela equação (6), tem-se que cada vetor posição é função das coordenadas generalizadas e do tempo. Então, derivando (pela regra da cadeia) em relação ao tempo tem-se:

$$\dot{\vec{r}}_i = \vec{v}_i = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \quad (11)$$

em que, ao calcular a derivada parcial da i-ésima velocidade em relação a k-ésima velocidade generalizada, obtém-se:

$$\frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \quad (12)$$

Resultado 2 - Do último termo da equação (10), tem-se que a derivada em relação ao tempo de qualquer função que dependa dos q 's e do tempo é calculada novamente pela regra da cadeia.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) = \sum_{l=1}^n \frac{\partial}{\partial q_l} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) \dot{q}_l + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) = \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\sum_{l=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right)$$

onde, é suposto que as funções em (6) são diferenciáveis um número necessário de vezes e particularmente são contínuas (sendo a ordem de diferenciação irrelevante). Os q 's e \dot{q} 's são tratados como grandezas independentes, de modo que as derivadas parciais em relação aos q 's tratam os \dot{q} 's como constantes e vice-versa. Por fim, comparando o termo dentro do último parenteses na equação acima com o lado direito da equação (11), nota-se que a única diferença é a letra adotada para o índice de soma, logo este termo é igual a \vec{v}_i , portanto, resulta na seguinte igualdade:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) = \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_k} \quad (13)$$

Pode-se rescrever a equação (10) substituindo os resultados obtidos em (12) e (13). Logo:

$$\sum_{i=1}^N m_i \dot{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{d}{dt} \left(m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_k} \right) - m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_k} \right\} \quad (14)$$

Resultado 3 - Utilizando a regra elementar $2f(x) \cdot \partial f(x) / \partial x = \partial / \partial x \cdot [f^2(x)]$, pode-se escrever as seguintes igualdades para a equação (14):

$$m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial \dot{q}_k} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left[\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right] \quad \text{de forma análoga,} \quad m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_k} = \frac{\partial}{\partial q_k} \left[\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right] \quad (15)$$

sendo os termos dentro dos colchetes a energia cinética do sistema, as quais geralmente são denotadas por T . Finalmente, substituindo os resultados obtidos em (15) na equação (14), chega-se a:

$$\sum_{i=1}^N m_i \dot{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) \right\} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} \quad (16)$$

sendo,

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i v_i^2 \quad (17)$$

Note que a energia cinética T dada pela equação (17) e as componentes Q_k da força generalizada dada pela equação (9) de certa forma estão expressas exclusivamente em termos dos q 's e \dot{q} 's por meio das equações (6) e (11).

Substituindo (9) e (16) em (8) e agrupando a força generalizada ao lado esquerdo da equação, resulta:

$$\sum_{k=1}^n \left\{ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} - Q_k \right\} \delta q_k = 0$$

Como os δq 's são independentes e arbitrários, a equação acima só pode ser satisfeita se o coeficiente de cada δq_k for zero. Portanto:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k \quad \text{sendo,} \quad k = 1, \dots, n \quad (18)$$

As vezes às n equações (18) são chamadas de equações de Lagrange, no entanto, esta designação será reservada para as situações abaixo, em que as forças aplicadas $\vec{F}_i^{(a)}$ derivam de um potencial.

Forças Conservativas

A forma mais tradicional das equações de Lagrange ocorre em situações das quais as forças aplicadas $\vec{F}_i^{(a)}$ são conservativas, ou seja, podem ser expressas como o gradiente de uma função escalar $V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t)$ chamada de energia potencial (LEMOS, 2007). Neste caso:

$$\vec{F}_i^{(a)} = -\vec{\nabla}_i V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x_i} \hat{i} + \frac{\partial V}{\partial y_i} \hat{j} + \frac{\partial V}{\partial z_i} \hat{k}\right)$$

Desse modo as forças generalizada podem ser escritas da seguinte maneira:

$$Q_k = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(a)} \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} = -\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial V}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial z_i} \frac{\partial z_i}{\partial q_k}\right) = -\frac{\partial V}{\partial q_k} \quad (19)$$

Note que com o emprego das equações (6) na função escalar $V(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, t)$, o potencial V torna-se função exclusivamente das coordenadas generalizadas q 's, portanto, V é independente das velocidades generalizadas.

Substituindo (19) em (18), obtém-se:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = -\frac{\partial V}{\partial q_k}$$

Visto que V independe das velocidades generalizadas, então $\partial V / \partial \dot{q}_k = 0$, logo a equação acima pode ser rescrita e rearranjada da seguinte forma:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k} (T - V) \right] - \frac{\partial}{\partial q_k} (T - V) = 0$$

onde, por definição a quantidade entre parenteses é definida como $L = T - V$ e chamada de *lagrangiana*. Logo, as equações de movimento do sistema podem ser escritas da seguinte forma:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0 \quad \text{sendo,} \quad k = 1, \dots, n \quad (20)$$

As equações (20) constituem um sistema de n equações diferenciais ordinárias de segunda ordem e são válidas sob certas condições, as quais são:

1. Os vínculos devem ser ideais para que o princípio de d'Alembert e conseqüentemente as equações (20) sejam válidas. Logo, isto faz com que as equações (20) em geral não sejam válidas em situações que há forças de atrito de deslizamento, devido à $f_i \neq 0$. Entretanto, todas as forças fundamentais da natureza conduzem a equações de movimento que podem ser postas na forma lagrangiana (LEMOS, 2007).

2. Os vínculos devem ser holônomos, pois assim sempre é possível introduzir coordenadas generalizadas independentes (LEMOS, 2007).

É importante salientar que como as equações de Lagrange foram deduzidas a partir da segunda lei de Newton (que são válidas em referenciais inerciais), então, a energia cinética T e potencial V devem ser ambas expressas num mesmo referencial inercial. (LEMOS, 2007).

Potenciais Generalizados

Um potencial generalizado é uma função $U(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t)$ tal que as forças generalizadas podem ser escritas na seguinte forma:

$$Q_k = -\frac{\partial U}{\partial q_k} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k} \right) \quad (21)$$

Então, ao substituir a equação (21) em (18) resultará novamente nas equações (20), porém com a lagrangiana definida por $L = T - U$. Um caso importante de força que admite potencial generalizado é a força experimentada por uma carga elétrica em movimento num campo eletromagnético externo, chamada de força de Lorentz. A classe de forças abrangida pela equação (21) é mais ampla do que o conjunto das forças conservativas (o qual é um caso particular de U , quando este independe das velocidades generalizadas e do tempo) (GOLDSTEIN, 1980; LEMOS, 2007).

Por outro lado, se as forças generalizadas são da forma:

$$Q_k = -\frac{\partial U}{\partial q_k} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial U}{\partial \dot{q}_k} \right) + Q'_k \quad (22)$$

sendo Q'_k a parte das forças generalizadas que não provém de nenhum potencial generalizado. Então, substituindo (22) em (18) resulta:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q'_k \quad \text{sendo,} \quad k = 1, \dots, n \quad (23)$$

Um caso importante é aquele em que os Q'_k representam forças de atrito viscoso proporcionais às velocidades das partículas, por exemplo, objetos em movimento no ar a baixas velocidades. Contudo, forças dissipativas não cabem no formalismo lagrangiano, no entanto, utilizando a chamada função de dissipação de Rayleigh é possível formular as equações de modo há incluir forças dissipativas (GOLDSTEIN, 1980; LEMOS, 2007). Neste caso, as equações (23) tornam-se:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} - \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_k} = 0 \quad \text{sendo,} \quad k = 1, \dots, n$$

sendo a lagrangiana novamente dada por $L = T - U$ e a função de dissipação de Rayleigh F definida por:

$$F = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (k_{ix} v_{ix}^2 + k_{iy} v_{iy}^2 + k_{iz} v_{iz}^2)$$

2.2 Tópicos em Sistemas Dinâmicos

Existem basicamente três técnicas para investigar o comportamento de um sistema dinâmico, sendo elas: analítica, numérica e qualitativa. A técnica qualitativa é particularmente útil na análise de sistemas não lineares, portanto, tal abordagem é utilizada neste trabalho. Esta técnica usa a descrição das variáveis de estado e seus valores são representados no espaço de estados (também chamado de espaço de fases). A partir de cálculos analíticos relativamente simples tem-se uma ideia qualitativa acerca da evolução do sistema. Assim, basicamente determinam-se as soluções assintóticas (possíveis comportamentos do sistema quando $t \rightarrow \infty$) e a estabilidade dessas soluções (BOYCE; DIPRIMA, 2010; MONTEIRO, 2011).

Nas subseções que seguem são apresentados alguns conceitos e técnicas para análise e caracterização do comportamento dinâmico de um sistema físico.

2.2.1 Ponto de Equilíbrio e Estabilidade no Sentido de Lyapunov

Com o intuito de exemplificar o critério de Lyapunov para o estudo de estabilidade de uma solução, considere o retrato de fases de um sistema dinâmico autônomo do tipo $d\vec{x}/dt = \vec{f}(\vec{x})$; este é influenciado pela localização e pela estabilidade dos pontos de equilíbrio \vec{x}^* . Esses pontos representam as soluções estacionárias, isto é, os valores de \vec{x} tais que quando $\vec{x} = \vec{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$, o sistema para de se mover no espaço de estados. Assim, $d\vec{x}/dt = 0$ em $\vec{x} = \vec{x}^*$, logo $\vec{f}(\vec{x}) = 0$. Portanto, quando se escolhe uma condição inicial que coincide com um ponto de equilíbrio, isto é, $\vec{x}(0) = \vec{x}^*$, então o sistema aí permanece indefinidamente, ou seja, $\vec{x}(t) = \vec{x}^*$ para todo t , pois $d\vec{x}/dt = 0$ (SAVI, 2006; MONTEIRO, 2011).

O ponto de equilíbrio \vec{x}^* é *marginalmente estável* se, e somente se, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta(\epsilon) > 0$ tal que para $\|\vec{x}(0) - \vec{x}^*\| < \delta(\epsilon)$, então $\|\vec{x}(t) - \vec{x}^*\| < \epsilon$, para todo $t > 0$. Assim, há uma vizinhança de raio δ em torno do ponto de equilíbrio tal que, para uma condição inicial pertencente a essa vizinhança, a trajetória correspondente a essa condição inicial nunca se afasta mais do que uma distância ϵ . Entretanto, se existe $\vec{x}(0)$ tal que, independe de quão próximo $\vec{x}(0)$ esteja de \vec{x}^* , a trajetória correspondente deixa a vizinhança de raio ϵ num tempo t finito, então o ponto é *instável*. O ponto de equilíbrio \vec{x}^* é *assintoticamente estável* se, e somente se, existe $\delta > 0$ tal que para $\|\vec{x}(0) - \vec{x}^*\| < \delta$, então $\|\vec{x}(t) - \vec{x}^*\| \rightarrow 0$, para $t \rightarrow \infty$. Nesse caso, conforme o tempo passa, a trajetória que parte de $\vec{x}(0)$ se aproxima cada vez mais do ponto de equilíbrio, ou seja, $\lim_{t \rightarrow \infty} \vec{x}(t) = \vec{x}^*$ (MONTEIRO, 2011, p.73).

Note que esta classificação de estabilidade está baseada na evolução temporal da distância entre a trajetória $\vec{x}(t)$ e o ponto de equilíbrio \vec{x}^* , portanto, é necessário estabelecer uma métrica (por exemplo, a métrica euclidiana) para medir distância no espaço. As noções de estabilidade e estabilidade assintótica para ponto de equilíbrio \vec{x}^* de sistemas não autônomos são basicamente as mesmas de um sistema autônomo. A diferença é que como $\vec{x} = \vec{x}(t, t_0)$, então $\delta = \delta(\epsilon, t_0)$, sendo t_0 o instante inicial. Ressalta-se que qualquer ponto \vec{x} que não seja ponto de equilíbrio, é chamado de *ponto ordinário* ou *ponto regular* (MONTEIRO, 2011).

2.2.2 Estabilidade do Ponto de Equilíbrio (Sistemas Lineares)

Com o intuito de esclarecer os conceitos desta subseção, considere um sistema genérico modelado por uma equação diferencial linear de segunda ordem. Esta pode ser reduzida a um sistema de duas equações diferenciais lineares de primeira ordem, cuja forma geral é:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= ax_1(t) + bx_2(t) + \alpha \\ \dot{x}_2 &= cx_1(t) + dx_2(t) + \beta \end{aligned}$$

sendo os coeficientes a, b, c, d , e as entradas α e β constantes (esta última hipótese permite reescrever as equações acima numa versão homogênea).

Por conveniência realiza-se uma troca de variáveis para que o ponto de equilíbrio $P = (x_1^*, x_2^*)$ esteja na origem do novo sistema de coordenadas. Então através da seguinte mudança $x(t) \equiv x_1(t) - x_1^*$ e $y(t) \equiv x_2(t) - x_2^*$, pode-se escrever o sistema acima com as novas coordenadas da seguinte forma:

$$\begin{cases} \dot{x} = ax(t) + by(t) \\ \dot{y} = cx(t) + dy(t) \end{cases} \quad (24)$$

sendo $P = (x^*, y^*) = (0, 0)$ o ponto de equilíbrio.

O sistema (24) pode ser expresso na forma matricial $\dot{\vec{z}}(t) = \mathcal{A}\vec{z}(t)$, sendo:

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \vec{z}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

O sistema (24) corresponde a uma equação diferencial linear de segunda ordem, então, pelo *princípio da superposição*, dadas duas soluções linearmente independentes $\vec{z}_1(t)$ e $\vec{z}_2(t)$, pode-se construir a solução geral $\vec{z}(t)$ através da combinação linear entre elas, ou seja, $\vec{z}(t) = k_1\vec{z}_1(t) + k_2\vec{z}_2(t)$, sendo k_1 e k_2 constantes (BOYCE; DIPRIMA, 2010; MONTEIRO, 2011).

Dada uma matriz \mathcal{A} , um número λ (real ou complexo) é chamado de autovalor de \mathcal{A} se há um vetor-coluna não nulo \vec{z}_0 tal que:

$$\mathcal{A}\vec{z}_0 = \lambda\vec{z}_0 \quad (25)$$

Neste caso, \vec{z}_0 é um autovetor correspondente ao autovalor λ e conseqüentemente $k\vec{z}_0$ também é, para qualquer constante $k \neq 0$.

Da Álgebra Linear, sabe-se que o polinômio característico para um sistema linear de ordem n é obtido através da seguinte expressão:

$$\det(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I}) = 0 \quad (26)$$

onde \mathcal{I} é a matriz identidade.

Portanto, a solução geral de um sistema linear de ordem n é expressa em termos dos autovalores e autovetores da matriz \mathcal{A} (BOYCE; DIPRIMA, 2010; MONTEIRO, 2011). Logo, através do uso da expressão (26), tem-se para o sistema (24) o seguinte resultado:

$$\det \begin{bmatrix} (a - \lambda) & b \\ c & (d - \lambda) \end{bmatrix} = 0$$

$$(a - \lambda)(d - \lambda) - bc = 0 \quad \implies \quad \lambda^2 - T\lambda + \Delta = 0 \quad (27)$$

sendo $T = a + d$ o traço (soma dos elementos da diagonal principal da matriz \mathcal{A}) e $\Delta = ad - bc$ o determinante da matriz \mathcal{A} (VILLATE, 2007; MONTEIRO, 2011).

Como o polinômio característico (27) é do segundo grau, então suas raízes podem ser calculadas através da *fórmula de Bhaskara*:

$$\lambda_{1,2} = \frac{T \pm \sqrt{T^2 - 4\Delta}}{2}$$

Assumindo que a solução do sistema (24) é da forma $x(t) = x_0 e^{\lambda t}$ e $y(t) = y_0 e^{\lambda t}$ e sabendo que o par (x_{0j}, y_{0j}) correspondente a cada λ_j ($j = 1, 2$) pode ser encontrado através da expressão (25), então, a solução geral do sistema (24) pode ser obtida. Assim, para o caso em que $\lambda_1 \neq \lambda_2$ tem-se:

$$\vec{z}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} x_{01} \\ y_{01} \end{bmatrix} e^{\lambda_1 t} + k_2 \begin{bmatrix} x_{02} \\ y_{02} \end{bmatrix} e^{\lambda_2 t}$$

sendo as constantes k_1 e k_2 determinadas pela condição inicial do problema.

Ressalta-se que as diferentes combinações possíveis dos dois autovalores λ_j ($j = 1, 2$), os quais, podem ser reais com mesmo sinal, reais com sinais contrários, complexos conjugados, imaginários puros e etc, definem a estabilidade do ponto de equilíbrio $P = (x^*, y^*) = (0, 0)$ e a forma das trajetórias vizinhas a este ponto, no espaço de estados (FIEDLER-FERRARA; PRADO, 1994; MONTEIRO, 2011).

Portanto, o ponto de equilíbrio $P = (x^*, y^*) = (0, 0)$ do sistema linear (24) é:

- **Assintoticamente Estável:** Se $\vec{z}(t) \rightarrow P = (x^*, y^*) = (0, 0)$, quando $t \rightarrow \infty$.
- **Estável:** Se $x(t)$ e $y(t)$ permanecem limitados, quando $t \rightarrow \infty$.
- **Instável:** Se $\vec{z}(t) \rightarrow \infty$, quando $t \rightarrow \infty$, ou seja, as trajetórias deixam a vizinhança do ponto de equilíbrio $P = (x^*, y^*) = (0, 0)$.

Os Apêndices A e B mostram um resumo da classificação dos pontos de equilíbrio de um sistema linear bidimensional e tridimensional, respectivamente.

2.2.3 Linearização em Torno do Ponto de Equilíbrio (Sistemas Não Lineares)

Um procedimento bastante instrutivo para avaliar a dinâmica de um sistema não-linear, em particular para avaliar a estabilidade de uma dada solução, é a linearização do sistema dinâmico em torno do ponto de equilíbrio (SAVI, 2006; VILLATE, 2007; MONTEIRO, 2011). Então, seja o seguinte sistema de equações diferenciais não lineares de primeira ordem:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases} \quad (28)$$

As funções $f(x, y)$ e $g(x, y)$ não são simples combinações lineares das variáveis x e y , portanto, em geral não existem técnicas analíticas para integrar o sistema (28). Entretanto, caso $f(x, y)$ e $g(x, y)$ sejam funções de pelo menos classe C^1 , então estas poderão ser aproximadas por uma série de Taylor em torno do ponto de equilíbrio $P = (x^*, y^*)$ da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \dot{x} = f(x, y) &= f(x^*, y^*) + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_P (x - x^*) + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_P (y - y^*) + TOS \\ \dot{y} = g(x, y) &= g(x^*, y^*) + \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_P (x - x^*) + \left. \frac{\partial g}{\partial y} \right|_P (y - y^*) + TOS \end{aligned}$$

Como $P = (x^*, y^*)$ é ponto de equilíbrio do sistema, então, $f(x^*, y^*) = g(x^*, y^*) = 0$, portanto, o primeiro termo de cada série desaparecerá. Por conveniência escolhe-se um novo sistema de coordenadas para que o ponto de equilíbrio P seja trasladado para a origem, então, definindo $X(t) = x(t) - x^*$ e $Y(t) = y(t) - y^*$ e desprezando os termos de ordem superior (TOS), obtém-se o seguinte sistema linear:

$$\dot{X} = \left(\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_P \right) X + \left(\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_P \right) Y \quad \text{e} \quad \dot{Y} = \left(\left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_P \right) X + \left(\left. \frac{\partial g}{\partial y} \right|_P \right) Y$$

Note que $\dot{X} = \dot{x}$ e $\dot{Y} = \dot{y}$, uma vez que, x^* e y^* são constantes. Então, substituindo os resultados acima em (28), obtém-se em notação matricial o seguinte sistema linear:

$$\frac{d\vec{Z}(t)}{dt} = \mathcal{J}\vec{Z}(t) \quad \text{sendo,} \quad \vec{Z} \equiv \begin{bmatrix} X(t) \\ Y(t) \end{bmatrix}, \quad \mathcal{J} \equiv \begin{bmatrix} \partial f/\partial x & \partial f/\partial y \\ \partial g/\partial x & \partial g/\partial y \end{bmatrix}_{P_i} \equiv \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad (29)$$

onde, \vec{Z} é o vetor coluna das variáveis de estado $X(t)$ e $Y(t)$, as quais descrevem o comportamento das soluções na vizinhança de P_i . \mathcal{J} é a matriz jacobiana, e seus valores a, b, c, d são obtidos a partir das derivadas parciais das funções $f(x, y)$ e $g(x, y)$ calculadas no ponto de equilíbrio P_i , em torno do qual essas funções foram expandidas.

Ressalta-se que este processo de linearização oferece uma aproximação válida apenas na vizinhança dos pontos de equilíbrio e que a partir dos autovalores e autovetores da matriz \mathcal{J} é possível estudar a estabilidade do sistema (28) na vizinhança do ponto de equilíbrio P_i respectivo, da mesma forma como é feito para sistemas lineares (VILLATE, 2007; MONTEIRO, 2011).

2.2.4 Teorema de Hartman-Grobman (Sistemas Não Lineares)

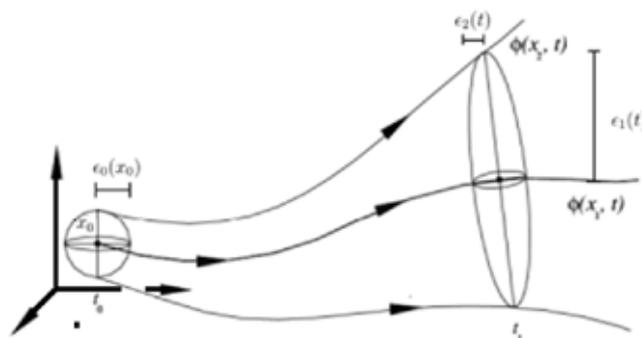
Pelo *Teorema de Hartman-Grobman* (provado por D.M. Grobman e P. Hartman de forma independente, por volta de 1960), a estabilidade do ponto de equilíbrio hiperbólico (veja Apêndice C) é preservada quando se lineariza um sistema não-linear em torno deste ponto, portanto, o retrato de fases na vizinhança do ponto de equilíbrio hiperbólico de um sistema não-linear de dimensão n é topologicamente orbitalmente equivalente ao retrato de fases da sua versão linearizada. Porém, se o ponto de equilíbrio não for hiperbólico, ou seja, se há algum autovalor com parte real nula, então a linearização não permite prever sua estabilidade. Caso isto ocorra, deve-se considerar termos de ordem superior (*TOS*) que foram desprezados na expansão em série das funções $f(x, y)$ e $g(x, y)$, ou então, utilizar outros métodos tais como: a *teoria da variedade central* (que é uma extensão do Teorema de Hartman-Grobman para o caso de pontos de equilíbrio não hiperbólicos), ou ainda, o *método direto de Lyapunov* (no qual trabalha-se diretamente com as equações originais, de modo que a estabilidade é determinada a partir de considerações sobre a energia do sistema) (SAVI, 2006; MONTEIRO, 2011).

2.2.5 Caos Determinístico

Caos determinístico está relacionado com a existência de comportamentos irregulares ou aperiódicos e dependência sensível às condições iniciais, de modo que dois processos originados por condições iniciais ligeiramente diferentes divergem exponencialmente com o tempo. Assim, quando existe caos em um sistema determinístico, o comportamento deste torna-se imprevisível, de modo que não se pode prever o comportamento futuro do sistema, pelo menos para um tempo arbitrariamente longo (FIEDLER-FERRARA; PRADO, 1994).

Para medir a taxa de divergência das trajetórias e conseqüentemente quantificar a dependência sensível às condições iniciais utilizam-se os *expoentes de Lyapunov*. Seja um sistema de n equações diferenciais ordinárias, com intuito de ilustrar o processo de caracterização deste sistema, imagine uma hipersfera de condições iniciais centrada num ponto $\vec{x}(t_0)$, então, conforme o tempo passa o volume dessa hipersfera é deformado pelo fluxo num objeto hiperelipsoidal com eixos principais $\epsilon_k(t)$, $k = 1, 2, \dots, n$ (veja a Figura 8).

Figura 8 – Evolução de uma hipersfera de raio $\epsilon_0(x_0)$ em torno de um ponto inicial x_0



Fonte: Adaptado de (SAVI, 2006).

Os expoentes de Lyapunov medem o crescimento exponencial dos eixos principais $\epsilon_k(t)$ e são definidos por:

$$\varkappa_j = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{\epsilon_0(x_0) \rightarrow 0} \frac{1}{t} \ln \frac{\epsilon_j(t)}{\epsilon_0(x_0)}, \quad j = 1, \dots, n \quad (30)$$

Em geral os \varkappa_j dependem do estado inicial x_0 , mas em muitos casos eles são constantes ao longo de uma significativa região do espaço de estados (FIEDLER-FERRARA; PRADO, 1994).

A partir da equação (30), tem-se:

$$\epsilon_j(t) \sim \epsilon_0(x_0) e^{\varkappa_j t} \quad (31)$$

Num instante t o elemento de hiper volume (Figura 8) no espaço de estados é escrito como:

$$\delta V(t) = \prod_{j=1}^n \epsilon_j(t)$$

Substituindo (31) na expressão acima, tem-se:

$$\delta V(t) = \delta V(0) e^{(\sum_{j=1}^n \varkappa_j t)}$$

A partir da expressão acima, tem-se duas situações em que o hiper volume no espaço de estados não diverge:

1. Quando $\sum_{j=1}^n \varkappa_j = 0$, situação em que $\delta V(t) = \delta V(0)$. Neste caso, não há redução do hiper volume no espaço de estados, logo o sistema é conservativo (*Teorema de Liouville*);
2. Quando $\sum_{j=1}^n \varkappa_j < 0$, situação em que $\delta V(t) < \delta V(0)$. Neste caso, há redução do hiper volume no espaço de estados, logo o sistema é dissipativo.

A Tabela 2 mostra resumidamente o comportamento dinâmico de sistemas em função do sinal dos expoentes de Lyapunov.

Tabela 2 – Comportamento dinâmico de sistemas, em função do sinal dos expoentes de Lyapunov

Comportamento no conjunto limite	Expoentes de Lyapunov
Ponto de equilíbrio	$0 > \varkappa_1 \geq \dots \geq \varkappa_n$
Periódico	$\varkappa_1 = 0$ e $0 > \varkappa_2 \geq \dots \geq \varkappa_n$
Bi - periódico	$\varkappa_1 = \varkappa_2 = 0$ e $0 > \varkappa_3 \geq \dots \geq \varkappa_n$
k - periódico	$\varkappa_1 = \varkappa_2 = \dots = \varkappa_k = 0$ e $0 > \varkappa_{k+1} \geq \dots \geq \varkappa_n$
Caótico	Pelo menos um $\varkappa_j > 0$; $\sum_j \varkappa_j < 0$

Fonte: (TAVERA, 2010).

Os expoentes de Lyapunov são utilizados para análise e/ou identificar sistemas caóticos, de modo que se um sistema possui algum expoente de Lyapunov positivo, então o mesmo é caracterizado como um sistema caótico (TAVERA, 2010).

2.3 Controle Ótimo via Regulador Quadrático Linear (LQR)

O projeto de um controlador geralmente consiste em determinar uma lei de controle que faça o sistema atender certas especificações de desempenho (DORF; BISHOP, 2001). No caso dos sistemas de controle ótimo, a lei de controle é encontrada através da minimização de um funcional de custo (ou índice de desempenho) $J = f(\vec{x}, \vec{u}, t)$.

A lei de controle deve ser tal que garanta a estabilidade do sistema e, minimize os esforços dos sistemas responsáveis por manter esta estabilidade. Em atendimento a estes dois requisitos pode ser utilizado o Regulador Quadrático Linear (LQR).

Então, seja o seguinte sistema dinâmico contínuo e controlável, de ordem n :

$$\begin{aligned}\dot{\vec{x}} &= \mathcal{A}\vec{x} + \mathcal{B}\vec{u} \\ \vec{y} &= \mathcal{C}\vec{x}\end{aligned}\quad (32)$$

onde, $\mathcal{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz dinâmica; $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ é a matriz de entrada; $\mathcal{C} \in \mathbb{R}^{s \times n}$ é a matriz de saída; $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados; $\vec{u} \in \mathbb{R}^m$ é a lei de controle; $\vec{y} \in \mathbb{R}^s$ é o vetor de saída.

A lei de controle linear \vec{u} é calculada da seguinte maneira:

$$\vec{u} = -\mathcal{K}\vec{x}\quad (33)$$

onde a matriz de ganhos $\mathcal{K} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, será obtida a partir da minimização de um funcional de custo quadrático do tipo: $J = \int_0^\infty L(\vec{x}, \vec{u})dt$.

Segundo Ogata (2003), uma forma típica para o funcional de custo quadrático é:

$$J = \int_0^\infty (\vec{x}^T \mathcal{Q}\vec{x} + \vec{u}^T \mathcal{R}\vec{u})dt\quad (34)$$

onde, \mathcal{Q} e \mathcal{R} são matrizes positivas definidas, as quais determinam a importância relativa do estado $\vec{x}(t)$ e o consumo de energia $\vec{u}(t)$, respectivamente. Geralmente, \mathcal{Q} e \mathcal{R} são definidas através de um processo iterativo até que o desempenho do sistema atinja os requisitos de projeto.

Uma abordagem para minimizar o funcional de custo (34) é através do *segundo método de Lyapunov* (OGATA, 2003). A vantagem da aplicação deste método é que a estabilidade fica garantida a priori, sempre que o sistema for controlável, ou seja, garante-se encontrar uma matriz de ganhos \mathcal{K} de modo que a matriz $(\mathcal{A} - \mathcal{B}\mathcal{K})$ seja estável ($Re(\lambda_j) < 0$).

A solução do problema de otimização inicia-se pela substituição da lei de controle (33) no sistema em espaço de estados (32);

$$\dot{\vec{x}} = \mathcal{A}\vec{x} - \mathcal{B}\mathcal{K}\vec{x} = (\mathcal{A} - \mathcal{B}\mathcal{K})\vec{x}\quad (35)$$

e no funcional de custo (34),

$$J = \int_0^\infty (\vec{x}^T \mathcal{Q}\vec{x} + \vec{x}^T \mathcal{K}^T \mathcal{R} \mathcal{K} \vec{x})dt \quad \Rightarrow \quad J = \int_0^\infty \vec{x}^T (\mathcal{Q} + \mathcal{K}^T \mathcal{R} \mathcal{K}) \vec{x} dt$$

Para mostrar que uma função de Lyapunov pode ser utilizada para resolver o problema de otimização, suponha que:

$$\dot{\vec{x}}^T (\mathcal{Q} + \mathcal{K}^T \mathcal{R} \mathcal{K}) \vec{x} = -\frac{d}{dt} (\vec{x}^T \mathcal{P} \vec{x}) \quad \Rightarrow \quad \vec{x}^T (\mathcal{Q} + \mathcal{K}^T \mathcal{R} \mathcal{K}) \vec{x} = -\dot{\vec{x}}^T \mathcal{P} \vec{x} - \vec{x}^T \mathcal{P} \dot{\vec{x}}$$

onde, \mathcal{P} é uma matriz hermitiana positiva definida ou real simétrica.

Substituindo (35) na expressão acima, obtemos:

$$\begin{aligned} \vec{x}^T (\mathcal{Q} + \mathcal{K}^T \mathcal{R} \mathcal{K}) \vec{x} &= -(\mathcal{A} - \mathcal{B} \mathcal{K})^T \vec{x}^T \mathcal{P} \vec{x} - \vec{x}^T \mathcal{P} (\mathcal{A} - \mathcal{B} \mathcal{K}) \vec{x} \\ &= -\vec{x}^T [(\mathcal{A} - \mathcal{B} \mathcal{K})^T \mathcal{P} + \mathcal{P} (\mathcal{A} - \mathcal{B} \mathcal{K})] \vec{x} \end{aligned}$$

Pelo *segundo método de Lyapunov* sabe-se que, para uma dada matriz positiva definida $(\mathcal{Q} + \mathcal{K}^T \mathcal{R} \mathcal{K})$, existe uma matriz \mathcal{P} positiva definida, se a matriz $(\mathcal{A} - \mathcal{B} \mathcal{K})$ for estável, tal que:

$$(\mathcal{A} - \mathcal{B} \mathcal{K})^T \mathcal{P} + \mathcal{P} (\mathcal{A} - \mathcal{B} \mathcal{K}) = -(\mathcal{Q} + \mathcal{K}^T \mathcal{R} \mathcal{K}) \quad (36)$$

A equação (36) é conhecida como *Equação Algébrica de Riccati*.

O funcional de custo pode ser calculado como:

$$J = \int_0^{\infty} \vec{x}^T (\mathcal{Q} + \mathcal{K}^T \mathcal{R} \mathcal{K}) \vec{x} dt = -\vec{x}^T \mathcal{P} \vec{x} \Big|_0^{\infty} = -\vec{x}^T(\infty) \mathcal{P} \vec{x}(\infty) + \vec{x}^T(0) \mathcal{P} \vec{x}(0)$$

Como é suposto que a matriz $(\mathcal{A} - \mathcal{B} \mathcal{K})$ seja estável, então tem-se que $\vec{x}(\infty) \rightarrow 0$. Portanto: $J = \vec{x}^T(0) \mathcal{P} \vec{x}(0)$. Consequentemente, o índice de desempenho J pode ser obtido em termos da condição inicial $\vec{x}(0)$ e de \mathcal{P} (DORF; BISHOP, 2001; OGATA, 2003).

Para obter a solução do problema de controle ótimo quadrático, procede-se de acordo com o seguinte: como é suposto que \mathcal{R} seja uma matriz real simétrica (hermitiana) positiva definida, pode-se escrever:

$$\mathcal{R} = \mathcal{T}^T \mathcal{T} \quad (37)$$

onde, \mathcal{T} é uma matriz não singular.

Substituindo (37) em (36), obtém-se: $(\mathcal{A} - \mathcal{B} \mathcal{K})^T \mathcal{P} + \mathcal{P} (\mathcal{A} - \mathcal{B} \mathcal{K}) = -(\mathcal{Q} + \mathcal{K}^T \mathcal{T}^T \mathcal{T} \mathcal{K})$, que pode ser rescrito da seguinte maneira:

$$\mathcal{A}^T \mathcal{P} + \mathcal{P} \mathcal{A} + [\mathcal{T} \mathcal{K} - (\mathcal{T}^T)^{-1} \mathcal{B}^T \mathcal{P}]^T [\mathcal{T} \mathcal{K} - (\mathcal{T}^T)^{-1} \mathcal{B}^T \mathcal{P}] - \mathcal{P} \mathcal{B} \mathcal{R}^{-1} \mathcal{B}^T \mathcal{P} + \mathcal{Q} = 0$$

A minimização do funcional de custo J com relação a matriz de ganhos \mathcal{K} , requer a minimização de:

$$\vec{x}^T [\mathcal{T} \mathcal{K} - (\mathcal{T}^T)^{-1} \mathcal{B}^T \mathcal{P}]^T [\mathcal{T} \mathcal{K} - (\mathcal{T}^T)^{-1} \mathcal{B}^T \mathcal{P}] \vec{x}$$

Uma prova desta afirmação pode ser encontrada em Ogata (2003). Como a expressão acima é quadrática e portanto negativa, o mínimo ocorre quando a mesma for nula, ou seja:

$$\mathcal{T} \mathcal{K} - (\mathcal{T}^T)^{-1} \mathcal{B}^T \mathcal{P} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{T} \mathcal{K} = (\mathcal{T}^T)^{-1} \mathcal{B}^T \mathcal{P}$$

ou simplesmente:

$$\mathcal{K} = \mathcal{T}^{-1}(\mathcal{T}^T)^{-1}\mathcal{B}^T\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{K} = \mathcal{R}^{-1}\mathcal{B}^T\mathcal{P} \quad (38)$$

A equação (38) fornece a matriz de ganhos \mathcal{K} , então substituindo-a em (33), obtém-se a lei de controle $\vec{u}(t)$ para o problema do sistema de controle ótimo quadrático, quando o índice de desempenho é dado por (34). Logo:

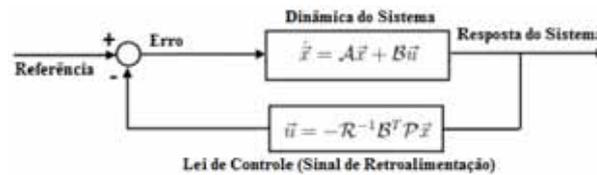
$$\vec{u} = -\mathcal{R}^{-1}\mathcal{B}^T\mathcal{P}\vec{x} \quad (39)$$

A matriz \mathcal{P} deve satisfazer a equação (36), ou sua versão reduzida, conhecida como *Equação Algébrica de Riccati da Matriz Reduzida*, dada por:

$$A^T\mathcal{P} + \mathcal{P}A - \mathcal{P}B\mathcal{R}^{-1}\mathcal{B}^T\mathcal{P} + Q = 0$$

A Figura (9) mostra um esquema geral para o projeto do controlador *LQR* em malha fechada.

Figura 9 – Esquema geral do controlador *LQR*.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

2.4 Controle Ótimo via Equação de Riccati Dependente do Estado (SDRE)

Cloutier, dentro do espírito do regulador *LQR*, aplicou a equação de Riccati a sistemas não lineares desenvolvendo a metodologia da Equação de Riccati Dependente do Estado (*SDRE*). Segundo Erdem e Alleyne (2004), até a publicação do trabalho de Cloutier, D’Souza e Mracek (1996), não se dispunha de um bom método de projeto que permitisse estabelecer um compromisso entre o erro de estado e o esforço de controle para sistemas não lineares, como o método *LQR* para sistemas lineares.

Um problema de controle ótimo para um sistema com os coeficientes das matrizes sendo dependentes do estado e, horizonte infinito, pode ser formulado como segue.

Minimizar o funcional de custo,

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} (\vec{x}^T Q(x)\vec{x} + \vec{u}^T \mathcal{R}(x)\vec{u}) dt \quad (40)$$

em relação ao estado $\vec{x}(t)$ e controle $\vec{u}(t)$, sujeitos a seguinte restrição diferencial não-linear:

$$\dot{\vec{x}} = f(x) + g(x)u \quad (41)$$

Em relação ao funcional de custo (40), $\mathcal{Q}(x)$ e $\mathcal{R}(x)$ são matrizes positivas definidas, as quais determinam a importância relativa do estado $\vec{x}(t)$ e o consumo de energia $\vec{u}(t)$, respectivamente. Geralmente, $\mathcal{Q}(x)$ e $\mathcal{R}(x)$ são definidas através de um processo iterativo até que o desempenho do sistema atinja os requisitos de projeto (MRACEK; CLOUTIER, 1998).

A abordagem via Equação de Riccati Dependente do Estado (SDRE) para resolver o problema de controle subótimo (40) e (41) possui as seguintes etapas:

1 - Usar parametrização direta para trazer a dinâmica não-linear (41) para uma estrutura pseudo-linear na forma de coeficientes dependentes do estado (SDC) da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}\dot{\vec{x}} &= \mathcal{A}(x)\vec{x} + \mathcal{B}(x)\vec{u} \\ \vec{y} &= \mathcal{C}(x)\vec{x}\end{aligned}\quad (42)$$

onde, $f(x) = \mathcal{A}(x)\vec{x}$ e $g(x) = \mathcal{B}(x)\vec{u}$; $\mathcal{A}(x) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz dinâmica; $\mathcal{B}(x) \in \mathbb{R}^{n \times m}$ é a matriz de entrada; $\mathcal{C}(x) \in \mathbb{R}^{s \times n}$ é a matriz de saída; $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados; $\vec{u} \in \mathbb{R}^m$ é a lei de controle; $\vec{y} \in \mathbb{R}^s$ é o vetor de saída.

Em geral, $\mathcal{A}(x)$ é única somente se x for escalar, ou seja, no caso multivariável há infinitas maneiras de trazer a dinâmica não-linear (41) para a forma SDC (42). Isto é verdadeiro desde que existam pelo menos duas parametrizações $\forall 0 \leq \alpha \leq 1$ satisfazendo $\alpha\mathcal{A}_1(x)x + (1 - \alpha)\mathcal{A}_2(x)x = \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(x) = f(x)$ (CLOUTIER; D'SOUZA; MRACEK, 1996).

O par $\{\mathcal{A}(x), \mathcal{B}(x)\}$ é uma parametrização controlável do sistema não-linear na região Ω se $\{\mathcal{A}(x), \mathcal{B}(x)\}$ é ponto a ponto controlável no contexto linear $\forall x \in \Omega$. Portanto, a escolha de $\mathcal{A}(x)$ deve ser tal que a matriz de controlabilidade dependente do estado $[\mathcal{B}(x) \quad \mathcal{A}(x)\mathcal{B}(x) \quad \dots \quad \mathcal{A}^{n-1}(x)\mathcal{B}(x)]$ tenha posto completo (MRACEK; CLOUTIER, 1998).

2 - Resolver a Equação de Riccati Dependente do Estado (SDRE), dada por (48).

As condições necessárias para otimalidade podem ser obtidas usando o cálculo variacional (CLOUTIER; D'SOUZA; MRACEK, 1996). O hamiltoniano para o problema de controle ótimo (40) e (42) é dado por:

$$\mathcal{H}(\vec{x}, \vec{u}, \Lambda) = \frac{1}{2}(\vec{x}^T \mathcal{Q}(x)\vec{x} + \vec{u}^T \mathcal{R}(x)\vec{u}) + \Lambda^T (\mathcal{A}(x)\vec{x} + \mathcal{B}(x)\vec{u})$$

onde, $\Lambda \in \mathbb{R}^n$ é o *multiplicador de Lagrange*. As condições necessárias para o controle ótimo são $\dot{\vec{x}} = \partial\mathcal{H}/\partial\Lambda$, $\partial\mathcal{H}/\partial\vec{u} = 0$ e $-\partial\mathcal{H}/\partial\vec{x}$. Do hamiltoniano obtém-se:

$$\dot{\Lambda} = -\mathcal{Q}(x)\vec{x} - \frac{1}{2}\vec{x}^T \frac{\partial\mathcal{Q}(x)}{\partial x}\vec{x} - \frac{1}{2}\vec{u}^T \frac{\partial\mathcal{R}(x)}{\partial x}\vec{u} - \left[\frac{\partial(\mathcal{A}(x)\vec{x})}{\partial x} \right]^T \Lambda - \left[\frac{\partial(\mathcal{B}(x)\vec{u})}{\partial x} \right]^T \Lambda \quad (43)$$

$$\dot{\vec{x}} = \mathcal{A}(x)\vec{x} + \mathcal{B}(x)\vec{u} \quad (44)$$

$$0 = \mathcal{R}(x)\vec{u} + \mathcal{B}^T(x)\Lambda \quad (45)$$

Denotando \mathcal{A}_i a i -linha de $\mathcal{A}(x)$ e \mathcal{B}_i a i -linha de $\mathcal{B}(x)$. Como pode ser visto em (BANKS; LEWIS; TRAN, 2007), os termos de derivada parcial, na forma matricial são:

$$\frac{\partial(\mathcal{A}(x)\vec{x})}{\partial x} = \mathcal{A}(x) + \frac{\partial(\mathcal{A}(x))}{\partial x}\vec{x} = \mathcal{A}(x) + \begin{bmatrix} \frac{\partial\mathcal{A}_1}{\partial x_1}\vec{x} & \dots & \frac{\partial\mathcal{A}_1}{\partial x_n}\vec{x} \\ \dots & \ddots & \dots \\ \frac{\partial\mathcal{A}_n}{\partial x_1}\vec{x} & \dots & \frac{\partial\mathcal{A}_n}{\partial x_n}\vec{x} \end{bmatrix}$$

e,

$$\frac{\partial(\mathcal{B}(x)\vec{u})}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial\mathcal{B}_1}{\partial x_1}\vec{u} & \dots & \frac{\partial\mathcal{B}_1}{\partial x_n}\vec{u} \\ \dots & \ddots & \dots \\ \frac{\partial\mathcal{B}_n}{\partial x_1}\vec{u} & \dots & \frac{\partial\mathcal{B}_n}{\partial x_n}\vec{u} \end{bmatrix}$$

Assumindo o co-estado na forma $\Lambda = \mathcal{P}(x)\vec{x}$ (note a dependência do estado) e substituindo-o na equação (45) obtém-se o controle feedback.

$$\vec{u} = -\mathcal{R}^{-1}(x)\mathcal{B}^T(x)\mathcal{P}(x)\vec{x} \quad (46)$$

Substituindo (46) em (44), obtém-se:

$$\dot{\vec{x}} = \mathcal{A}(x)\vec{x} - \mathcal{B}(x)\mathcal{R}^{-1}(x)\mathcal{B}^T(x)\mathcal{P}(x)\vec{x}$$

Para encontrar o valor da função $\mathcal{P}(x)$ diferencia-se $\Lambda = \mathcal{P}(x)\vec{x}$ no tempo ao longo da trajetória,

$$\begin{aligned} \dot{\Lambda} &= \dot{\mathcal{P}}(x)\vec{x} + \mathcal{P}(x)\dot{\vec{x}} \\ &= \dot{\mathcal{P}}(x)\vec{x} + \mathcal{P}(x)\mathcal{A}(x)\vec{x} - \mathcal{P}(x)\mathcal{B}(x)\mathcal{R}^{-1}(x)\mathcal{B}^T(x)\mathcal{P}(x)\vec{x} \end{aligned} \quad (47)$$

onde é usada a notação $\dot{\mathcal{P}}(x) = \sum_{i=1}^n P_{x_i}(x)\dot{x}_i(t)$.

Substituindo a equação (47) na primeira condição necessária do controle ótimo (43);

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{P}}(x)\vec{x} + \mathcal{P}(x)\mathcal{A}(x)\vec{x} - \mathcal{P}(x)\mathcal{B}(x)\mathcal{R}^{-1}(x)\mathcal{B}^T(x)\mathcal{P}(x)\vec{x} &= -\mathcal{Q}(x)\vec{x} - \\ \frac{1}{2}\vec{x}^T \frac{\partial\mathcal{Q}(x)}{\partial x} \vec{x} - \frac{1}{2}\vec{u}^T \frac{\partial\mathcal{R}(x)}{\partial x} \vec{u} - \left[\mathcal{A}(x) + \frac{\partial(\mathcal{A}(x))}{\partial x}\vec{x} \right]^T \mathcal{P}(x)\vec{x} - \left[\frac{\partial(\mathcal{B}(x)\vec{u})}{\partial x} \right]^T \mathcal{P}(x)\vec{x} \end{aligned}$$

e rearranjando os termos, obtemos:

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{P}}(x)\vec{x} + \frac{1}{2}\vec{x}^T \frac{\partial\mathcal{Q}(x)}{\partial x} \vec{x} + \frac{1}{2}\vec{u}^T \frac{\partial\mathcal{R}(x)}{\partial x} \vec{u} + \vec{x}^T \left[\frac{\partial(\mathcal{A}(x))}{\partial x} \right]^T \mathcal{P}(x)\vec{x} + \left[\frac{\partial(\mathcal{B}(x)\vec{u})}{\partial x} \right]^T \mathcal{P}(x)\vec{x} \\ + [\mathcal{P}(x)\mathcal{A}(x) + \mathcal{A}^T(x)\mathcal{P}(x) - \mathcal{P}(x)\mathcal{B}(x)\mathcal{R}^{-1}(x)\mathcal{B}^T(x)\mathcal{P}(x) + \mathcal{Q}(x)]\vec{x} = 0 \end{aligned}$$

Assumindo que $\mathcal{P}(x)$ é solução da equação de Riccati dependente do estado (SDRE), dada por:

$$\mathcal{P}(x)\mathcal{A}(x) + \mathcal{A}^T(x)\mathcal{P}(x) - \mathcal{P}(x)\mathcal{B}(x)\mathcal{R}^{-1}(x)\mathcal{B}^T(x)\mathcal{P}(x) + \mathcal{Q}(x) = 0 \quad (48)$$

então, a seguinte condição necessária de otimalidade deve ser satisfeita,

$$\dot{P}(x)\vec{x} + \frac{1}{2}\vec{x}^T \frac{\partial Q(x)}{\partial x} \vec{x} + \frac{1}{2}\vec{u}^T \frac{\partial R(x)}{\partial x} \vec{u} + \vec{x}^T \left[\frac{\partial(A(x))}{\partial x} \right]^T P(x)\vec{x} + \left[\frac{\partial(B(x)\vec{u})}{\partial x} \right]^T P(x)\vec{x} = 0$$

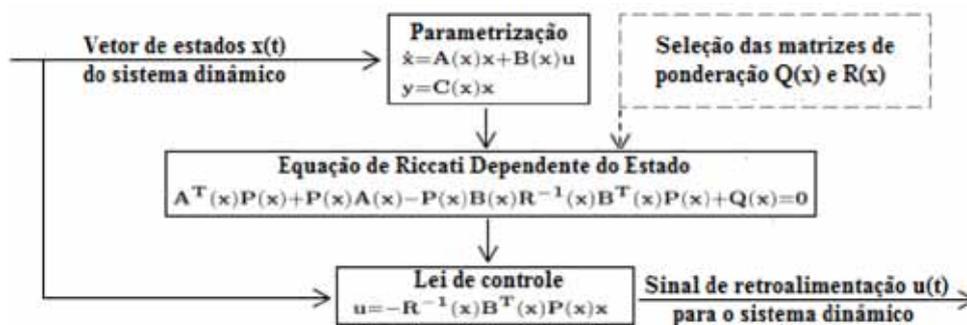
3 - *Projetar o controlador em malha fechada, utilizando a lei de controle $\vec{u}(t)$, dada por (46).*

Definindo $K(x) = R^{-1}(x)B^T(x)P(x)$, pode-se rescrever (46) como $\vec{u} = -K(x)\vec{x}$.

Segundo Mracek e Cloutier (1998), um fator importante do método *SDRE* é que ele não cancela os benefícios que podem provir das não linearidades do sistema. O regulador não-linear *SDRE* produz uma solução em malha fechada que é localmente e assintoticamente estável. Outros detalhes sobre o método *SDRE* podem ser encontrados em (CLOUTIER; D'SOUZA; MRACEK, 1996).

O regulador não-linear *SDRE* tem a mesma estrutura do regulador quadrático linear *LQR*, exceto que todas as matrizes são dependentes do estado. Portanto, tanto a solução da equação de Riccati como a lei de controle são dependentes do estado. Caso não seja possível obter a solução analítica da equação de Riccati dependente do estado (48), torna-se necessário resolvê-la numericamente a todo instante com uma frequência relativamente alta (CARVALHO, 2005). A Figura (10) mostra um esquema geral para o projeto do controlador *SDRE* em malha fechada.

Figura 10 – Esquema geral do controlador *SDRE*.



Fonte: Elaboração do próprio autor.

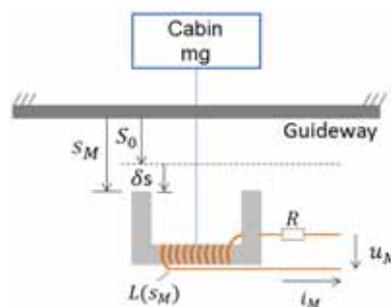
3 MODELAGEM MATEMÁTICA E ANÁLISE DO MODELO

Inicialmente, um modelo simplificado para o sistema de levitação eletromagnética (*EML*) do trem *Maglev Transrapid* é apresentado. As equações de movimento do modelo simplificado são obtidas a partir da formulação lagrangiana da mecânica clássica. Em seguida, um estudo do comportamento dinâmico é realizado. A base teórica para a modelagem matemática e análise do modelo pode ser encontrada no capítulo 2.

3.1 Modelo Simplificado para o Maglev Transrapid

A Figura 11 mostra um modelo simplificado para o sistema de levitação eletromagnética (*EML*) do trem *Maglev Transrapid* visto na subseção 1.2.1. O modelo consiste num sistema de massa única sobre um trilho rígido, em que a suspensão primária é representada pela interação magnética do veículo com o trilho. Os sistemas de suspensão são dominantes em determinar a dinâmica básica e comportamento vibratório do veículo *Maglev*. Um modelo de dois graus de liberdade considerando os efeitos de acoplamento entre a suspensão primária e secundária foi estudado por Cai e Chen (1992). Note que o modelo apresentado neste trabalho não possui uma suspensão secundária, contudo, este pode ser utilizado para simular a dinâmica vertical do veículo (ZHAO; THORNTON, 1992; CAI; CHEN, 1992; SHU; MEISINGER, 2011).

Figura 11 – Modelo simplificado para o *Maglev Transrapid*



Fonte: (SHU; MEISINGER, 2011).

onde mg é o peso do veículo (incluindo os eletroímãs), s_M é a distância vertical entre o eletroímã e o trilho, S_0 é a distância vertical entre o trilho e a posição de equilíbrio do veículo, $L(s_M)$, R , i_M e u_M são a indutância, resistência, corrente e tensão da bobina, respectivamente.

A indutância $L(s_M)$ é uma função não-linear da posição do veículo (s_M). Segundo Ahmad e Javaid (2010) varias aproximações tem sido utilizadas para determinar a indutância de sistemas de levitação magnética. Tal como em (SHU; MEISINGER, 2011; SALIM; KARSLI, 2013; SUEBSOMRAN, 2014), neste trabalho o fluxo de dispersão e o efeito de correntes parasitas são

desprezados, de modo que a indutância varia com o inverso da posição do veículo da seguinte maneira:

$$L(s_M) = \frac{c}{s_M} \quad \text{sendo,} \quad c = \frac{\mu_0 N^2 A}{2} \quad (49)$$

onde, μ_0 é a constante de indutância, A é a área do polo e N é o número de enrolamentos da bobina.

3.1.1 Modelo Matemático Não-Linear

A partir da formulação lagrangiana da mecânica clássica (vide seção 2.1), as equações de movimento do modelo mostrado na Figura 11 podem ser obtidas através da equação (23) da seguinte maneira:

Inicialmente, define-se a coordenada generalizada como $q_1 = s_M$ e as velocidades generalizadas como $\dot{q}_1 = \dot{s}_M$ e $\dot{q}_2 = i_M$. Assim, a energia cinética T e a energia potencial U do sistema *Maglev* são respectivamente:

$$T = \frac{1}{2}m\dot{s}_M^2 + \frac{1}{2}L(s_M)i_M^2 \quad \text{e} \quad U = -mgs_M$$

A lagrangiana do sistema é dada pela diferença entre as duas equações acima, ou seja, $L = T - U$. Logo:

$$L = \frac{1}{2}m\dot{s}_M^2 + \frac{1}{2}L(s_M)i_M^2 + mgs_M \quad (50)$$

Da equação (23), tem-se que Q'_k denota a parte das forças generalizadas que não provém de nenhum potencial generalizado. Para o sistema estudado tem-se o seguinte: $Q'_1 = 0$ e $Q'_2 = u_M - i_MR$.

Usando (49), pode-se rescrever a lagrangiana do sistema (50) de uma maneira mais conveniente.

$$L = \frac{1}{2}m\dot{s}_M^2 + \frac{1}{2}\frac{c}{s_M}i_M^2 + mgs_M \quad (51)$$

1ª Equação - Calculando cada termo da equação (23) para $k = 1$, obtém-se:

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = -\frac{1}{2}\frac{c}{s_M^2}i_M^2 + mg$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = m\dot{s}_M \quad \implies \quad \frac{d}{dt}(m\dot{s}_M) = m\ddot{s}_M$$

Substituindo $Q'_1 = 0$ e os devidos termos calculados acima em (23), obtém-se:

$$m\ddot{s}_M + \frac{1}{2}\frac{c}{s_M^2}i_M^2 - mg = 0 \quad (52)$$

2ª Equação - Calculando cada termo da equação (23) para $k = 2$, obtém-se:

$$\frac{\partial L}{\partial q_2} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = c \frac{i_M}{s_M} \quad \Longrightarrow \quad \frac{d}{dt} \left(c \frac{i_M}{s_M} \right) = c \left(\frac{\dot{i}_M s_M - i_M \dot{s}_M}{s_M^2} \right)$$

Substituindo $Q'_2 = u_M - i_M R$ e os devidos termos calculados acima em (23), obtém-se:

$$c \left(\frac{\dot{i}_M s_M - i_M \dot{s}_M}{s_M^2} \right) = u_M - i_M R \quad (53)$$

Finalmente, após alguns rearranjos dos termos das equações (52) e (53), obtemos as equações de movimento não-linear do modelo mostrado na Figura 11.

$$\begin{aligned} m\ddot{s}_M &= -\frac{c}{2s_M^2} i_M^2 + mg \\ \dot{i}_M &= \frac{i_M}{s_M} \dot{s}_M - \frac{R i_M}{c} s_M + \frac{u_M}{c} s_M \end{aligned} \quad (54)$$

As não linearidades do sistema vêm da indutância não-linear devido a geometria do eletroímã e da lei do inverso do quadrado do magnetismo (ZHAO; THORNTON, 1992).

3.1.2 Modelo Matemático Linear

Para pequenos desvios do estado estacionário como mostrado na Figura 11, pode-se escrever:

$$s_M = S_0 + \delta s, \quad i_M = I_0 + \delta i, \quad u_M = U_0 + \delta u, \quad \dot{S}_0 = 0, \quad \dot{I}_0 = 0, \quad U_0 = I_0 R \quad (55)$$

1ª Equação

A força eletromagnética do sistema de levitação magnética (útil para os próximos cálculos) pode ser encontrada usando o conceito de co-energia (SALIM; KARSLI, 2013). Para calculá-la, é suposto uma relação linear entre o fluxo e a corrente, de modo que a força eletromagnética pode ser escrita como segue:

$$f(s_M, i) = -\frac{1}{2} i^2 \frac{dL(s_M)}{ds_M} \quad \Rightarrow \quad f(s_M, i) = \frac{c}{2} \left(\frac{i}{s_M} \right)^2 \quad (56)$$

O sistema tem um estado de equilíbrio no qual a força eletromagnética contrabalança exatamente a força devido a gravidade, ou seja, $mg = f(S_0, I_0)$. Assim, substituindo (55) em (54) e usando (56), tem-se:

$$m\delta\ddot{s} = -\frac{c}{2} \left(\frac{I_0 + \delta i}{S_0 + \delta s} \right)^2 + \frac{c}{2} \left(\frac{I_0}{S_0} \right)^2$$

2ª Equação

Substituindo (55) em (54), tem-se:

$$\delta\dot{i} = \frac{I_0 + \delta i}{S_0 + \delta s} \delta\dot{s} - \frac{R(I_0 + \delta i)(S_0 + \delta s)}{c} + \frac{(U_0 + \delta u)(S_0 + \delta s)}{c}$$

Finalmente, após desprezar os termos de ordem superior e fazer alguns rearranjos, obtemos as equações de movimento linear do modelo mostrado na Figura 11.

$$\begin{aligned}\delta\ddot{s} &= -\frac{cI_0\delta i}{mS_0^2} + \frac{cI_0^2\delta s}{mS_0^3} \\ \delta\dot{i} &= \frac{I_0}{S_0}\delta\dot{s} - \frac{RS_0}{c}\delta i + \frac{S_0}{c}\delta u\end{aligned}\quad (57)$$

Note que este método para linearizar a dinâmica do sistema é uma forma alternativa ao procedimento descrito na subseção 2.2.3. Para a aplicação do método acima, assumi-se pequenas variações em torno da condição nominal de operação, a qual não necessita ser uma condição estacionária. Contudo, no caso do sistema abordado neste trabalho, a condição nominal de operação é uma condição estacionária.

3.1.3 Redução de Ordem do Sistema (Espaço de Estados)

Uma equação diferencial ordinária de ordem n pode ser reescrita como um sistema de n equações diferenciais de primeira ordem. Então, definindo $x_1 \equiv i_M$, $x_2 \equiv \dot{s}_M$ e $x_3 \equiv s_M$, tem-se:

O sistema não-linear (54) pode ser escrito em espaço de estados como segue:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \frac{x_3(u_M - Rx_1)}{c} + \frac{x_1x_2}{x_3} \\ \dot{x}_2 &= -\frac{cx_1^2}{2mx_3^2} + g \\ \dot{x}_3 &= x_2\end{aligned}\quad (58)$$

Analogamente, o sistema linear (57) pode ser escrito em espaço de estados como segue:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \frac{S_0(\delta u - Rx_1)}{c} + \frac{I_0}{S_0}x_2 \\ \dot{x}_2 &= \frac{cI_0}{mS_0^2} \left(\frac{I_0}{S_0}x_3 - x_1 \right) \\ \dot{x}_3 &= x_2\end{aligned}\quad (59)$$

As variáveis de estado x_1 , x_2 e x_3 representam, a corrente da bobina, velocidade vertical do veículo, e a distância vertical entre o trilho e o eletroímã do veículo (entreferro), respectivamente. Rearranjando (49), podemos calcular a constante c como segue: $c = L(s_M)s_M$, contudo, quando o veículo está no estado de equilíbrio, tem-se $s_M = S_0$ e $L_0 = L(S_0)$, portanto, $c = L_0S_0$.

3.2 Análise de Estabilidade do Ponto de Equilíbrio

Pela definição de ponto de equilíbrio (o qual representa a solução estacionária) vista na subseção 2.2.1, tem-se:

$$\left. \frac{dx_1}{dt} \right|_{(x_1=x_1^*)} = \left. \frac{dx_2}{dt} \right|_{(x_2=x_2^*)} = \left. \frac{dx_3}{dt} \right|_{(x_3=x_3^*)} = 0$$

Quando a força eletromagnética for igual a força gravitacional (peso) do sistema, o mesmo estará num estado de equilíbrio, portanto, a velocidade \dot{s}_M e aceleração \ddot{s}_M (ambas verticais) do *Maglev* serão nulas, ou seja $x_2^* = \dot{x}_2^* = 0$ (ZHAO; THORNTON, 1992). Utilizando este fato e a definição de ponto de equilíbrio, tem-se:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1^* &= \frac{x_3^*(u_M - Rx_1^*)}{c} + \frac{x_1^*x_2^*}{x_3^*} = 0 \\ \dot{x}_2^* &= -\frac{cx_1^{*2}}{2mx_3^{*2}} + g = 0 \\ \dot{x}_3^* &= x_2^* = 0 \end{aligned} \quad (60)$$

Logo:

$$\begin{aligned} \frac{x_3^*(u_M - Rx_1^*)}{c} = 0 &\implies x_3^*u_M - Rx_1^*x_3^* = 0 \implies x_1^* = \frac{u_M}{R} \\ x_2^* &= 0 \\ -\frac{cx_1^{*2}}{2mx_3^{*2}} + g = 0 &\implies x_3^{*2} = \frac{cx_1^{*2}}{2mg} \implies x_3^* = \pm \sqrt{\frac{c}{2mg}} \frac{u_M}{R} \end{aligned}$$

Note que a solução $x_1^* = \frac{u_M}{R}$, $x_2^* = 0$, $x_3^* = -\sqrt{\frac{c}{2mg}} \frac{u_M}{R}$ fisicamente não é admissível, uma vez que $x_3 = s_M > 0$. Portanto, o ponto de equilíbrio possui as seguintes coordenadas no espaço de estados:

$$P = \left(x_1^* = \frac{u_M}{R}, \quad x_2^* = 0, \quad x_3^* = \sqrt{\frac{c}{2mg}} \frac{u_M}{R} \right) \quad (61)$$

3.2.1 Linearização em Torno do Ponto de Equilíbrio

Como visto na subseção 2.2.3, um procedimento para avaliar a dinâmica de um sistema não-linear é realizar a linearização em torno do seu ponto de equilíbrio. Assim, a partir do sistema não-linear (58), tem-se que, as funções $\dot{x}_1 = f(x_1, x_2, x_3)$, $\dot{x}_2 = g(x_1, x_2, x_3)$ e $\dot{x}_3 = h(x_1, x_2, x_3)$ em torno de $P = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$ dado por (61), podem ser aproximadas por equações da reta. Para isto, expandem-se essas funções em série de Taylor. Então, usando (29), obtém-se:

$$\mathcal{J} = \begin{bmatrix} \partial f / \partial x_1 & \partial f / \partial x_2 & \partial f / \partial x_3 \\ \partial g / \partial x_1 & \partial g / \partial x_2 & \partial g / \partial x_3 \\ \partial h / \partial x_1 & \partial h / \partial x_2 & \partial h / \partial x_3 \end{bmatrix}_P \implies \mathcal{J} = \begin{bmatrix} \frac{-Rx_3^*}{c} + \frac{x_2^*}{x_3^*} & \frac{x_1^*}{x_3^*} & \frac{u_M - Rx_1^*}{c} - \frac{x_1^*x_2^*}{x_3^{*2}} \\ \frac{-cx_1^*}{mx_3^{*2}} & 0 & \frac{cx_1^{*2}}{mx_3^{*3}} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_P \quad (62)$$

Lembrando que $c = L_0 S_0$ e substituindo os valores do ponto de equilíbrio dado por (61) em (62), obtém-se a matriz jacobiana correspondente ao sistema (58):

$$\mathcal{J} = \begin{bmatrix} \frac{-u_M}{L_0 S_0} \sqrt{\frac{L_0 S_0}{2mg}} & \sqrt{\frac{2mg}{L_0 S_0}} & 0 \\ \frac{-2Rg}{u_M} & 0 & \frac{L_0 S_0 R}{m u_M} \left(\frac{2mg}{L_0 S_0}\right)^{3/2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}_P \quad (63)$$

3.2.2 Classificação do Ponto de Equilíbrio

Como visto na subseção 2.2.2, o ponto de equilíbrio de um sistema linear pode ser classificado em função dos sinais de seus autovalores. Assim, analisa-se a estabilidade do ponto de equilíbrio do sistema (58) a partir do cálculo dos autovalores da matriz jacobiana (63), a qual é uma versão linearizada do sistema original.

O cálculo dos autovalores é feito através da equação (26), onde $\mathcal{A} = \mathcal{J}$, logo:

$$\det \left(\begin{bmatrix} \frac{-u_M}{L_0 S_0} \sqrt{\frac{L_0 S_0}{2mg}} & \sqrt{\frac{2mg}{L_0 S_0}} & 0 \\ \frac{-2Rg}{u_M} & 0 & \frac{L_0 S_0 R}{m u_M} \left(\frac{2mg}{L_0 S_0}\right)^{3/2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) = 0$$

que resulta no seguinte polinômio característico:

$$a_0 \lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3 \quad (64)$$

sendo, os coeficientes a_j dados por:

$$\begin{aligned} a_0 &= -1 \\ a_1 &= -\frac{u_M}{L_0 S_0} \sqrt{\frac{L_0 S_0}{2mg}} \\ a_2 &= \left[\frac{L_0 S_0 R}{m u_M} \left(\frac{2mg}{L_0 S_0}\right)^{3/2} - \frac{2Rg}{u_M} \sqrt{\frac{2mg}{L_0 S_0}} \right] \\ a_3 &= \frac{1}{m} \left[\sqrt{\frac{L_0 S_0}{2mg}} \left(\frac{2mg}{L_0 S_0}\right)^{3/2} \right] \end{aligned}$$

Os autovalores da matriz jacobiana (63) são obtidos a partir do cálculo das raízes do polinômio característico (64). Para tal, os seguintes parâmetros são utilizados.

Tabela 3 – Parâmetros do modelo *Maglev*

$m[kg]$	$g[m/s^2]$	$S_0[m]$	$L_0[h]^1$	$R[\Omega]$	$u_M[v]^2$	$I_0[A]^3$	$\delta u[v]^4$
10000	9.8	0.01	0.1	1	140	u_M/R	$u_M - RI_0$

Fonte: (ZHAO; THORNTON, 1992).

¹0.1 é o valor da indutância da bobina quando o veículo está na posição de equilíbrio (S_0). ²140 é o valor da tensão quando o veículo está na posição de equilíbrio (S_0). ³Parâmetro do modelo linear (59), veja a seção 3.5. ⁴Parâmetro do modelo linear (59), veja a seção 3.5.

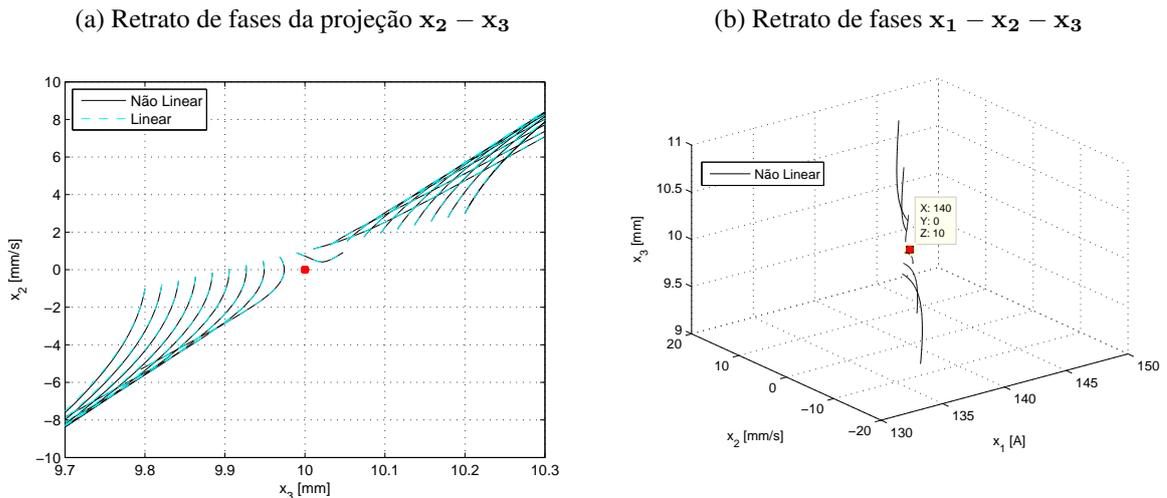
Os autovalores obtidos, são:

$$\lambda_1 = -17.0036 - 22.9629i, \lambda_2 = -17.0036 + 22.9629i, \lambda_3 = 24.0072$$

Portanto, a partir dos autovalores calculado acima, tem-se que o ponto de equilíbrio $P = (140, 0, 0.01)$ calculado a partir de (61) com o uso dos parâmetros da Tabela 3 é um *nó sela*, o qual é instável no sentido de Lyapunov (veja o Apêndice B).

As Figuras 12a e 12b mostram o retrato de fases na projeção $x_2 - x_3$ e tridimensional, respectivamente. Os parâmetros de simulação são os valores apresentados na Tabela 3 e as equações de movimento foram integradas numericamente com o *MATLAB*® a partir de várias condições iniciais na vizinhança do ponto de equilíbrio do sistema.

Figura 12 – Retrato de fases do sistema (58)



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Pelo *Teorema das Variedades Hiperbólicas* há n_e autovalores com parte real negativa (subespaço estável E^e), n_i autovalores com parte real positiva (subespaço instável E^i) e n_c autovalores com parte real nula (subespaço central E^c), então $n = n_e + n_i + n_c$, sendo n a dimensão do sistema. Como, não há nenhum autovalor com parte real nula, ou seja, $Re(\lambda) \neq 0$, então $n_c = 0$, assim o ponto de equilíbrio é hiperbólico, e o *Teorema de Hartman-Grobman* é válido, ou seja, a estabilidade do ponto de equilíbrio hiperbólico é preservada quando se lineariza o sistema em torno deste ponto (MONTEIRO, 2011). Veja a Figura 12a.

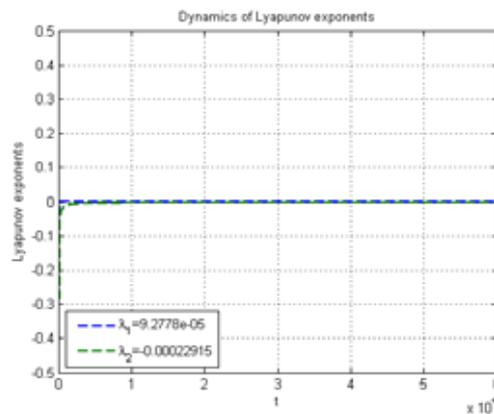
Por fim, a partir dos autovalores calculados tem-se o seguinte: $\lambda_{1,2} = -17.0036 \pm 22.9629i$, cujos autovetores localizam-se no plano $x_1 \times x_2$, que é portanto, o subespaço estável E^e ; e $\lambda_3 = 24.0072$, cujo autovetor coincide com x_3 , que constitui o subespaço instável E^i . Conseqüentemente, existe uma variedade bidimensional (uma solução do sistema não-linear

original) que é tangente a E^e no ponto de equilíbrio P e se aproxima desse ponto para $t \rightarrow \infty$; assim como existe uma variedade unidimensional que é tangente a E^i no ponto de equilíbrio P e se afasta desse ponto para $t \rightarrow \infty$. A variedade estável divide o espaço de estados em duas partes: trajetórias na parte superior próximo a $x_3 \rightarrow \infty$ ao longo de trajetórias instáveis, correspondendo ao caso em que o veículo cai do trilho; e trajetórias na parte inferior próximo ao plano $x_3 = 0$ ao longo de trajetórias instáveis, correspondendo ao caso em que o veículo colide com o trilho (ZHAO; THORNTON, 1992).

3.3 Expoentes de Lyapunov

Com o intuito de identificar se o modelo simplificado apresenta comportamentos caóticos, calculou-se os *expoentes de Lyapunov* pelo *método de Wolf* (1985), os quais são mostrados nas Figuras 13, 14, 15 e 16.

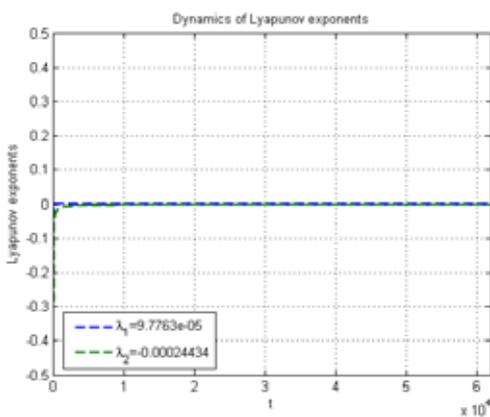
Figura 13 – Dois maiores expoentes de Lyapunov (sem variação de parâmetros)



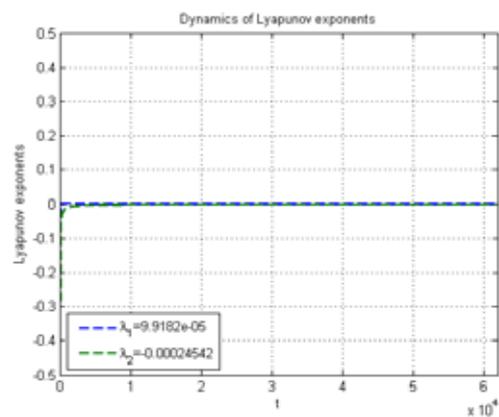
Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 14 – Dois maiores expoentes de Lyapunov, considerando a variação de u_M

(a) $u_M = 135v$

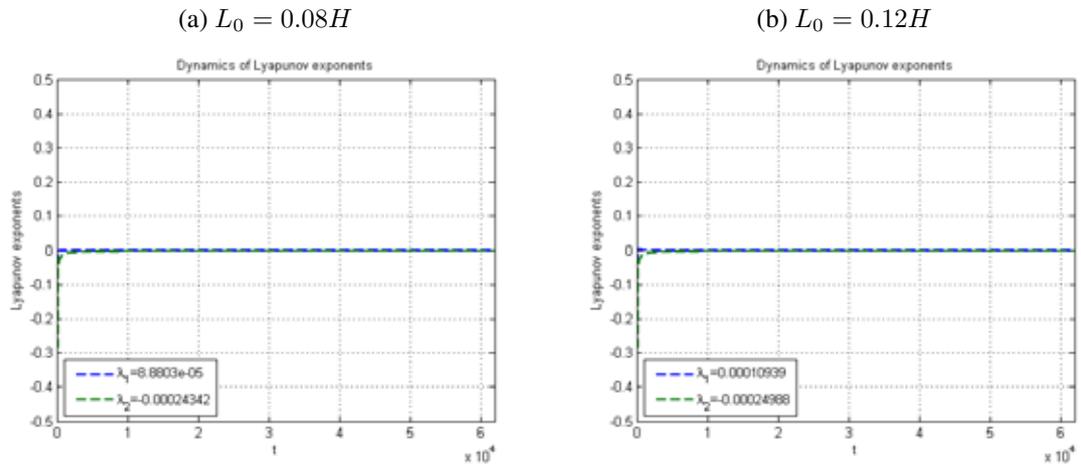


(b) $u_M = 145v$



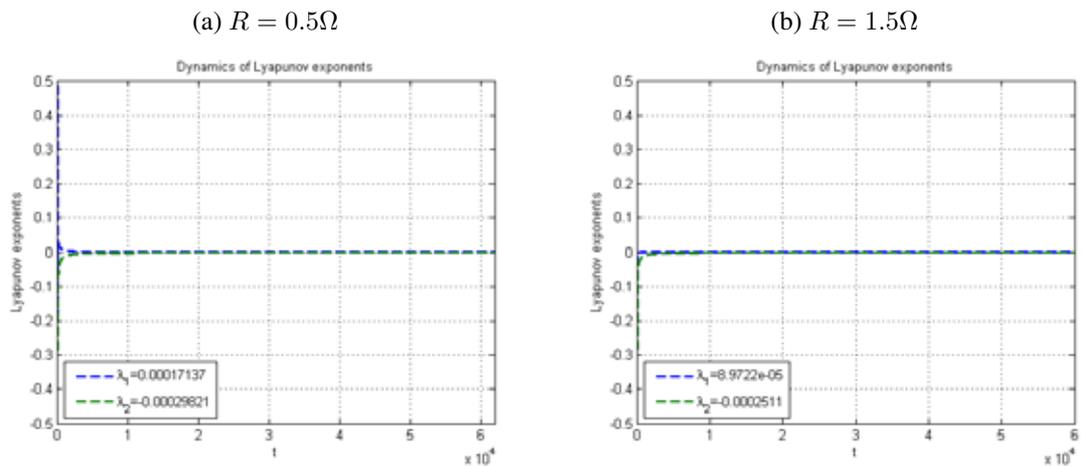
Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 15 – Dois maiores expoentes de Lyapunov, considerando a variação de L_0



Fonte: Elaboração do próprio autor.

Figura 16 – Dois maiores expoentes de Lyapunov, considerando a variação de R



Fonte: Elaboração do próprio autor.

A Figura 13 mostra os dois maiores expoentes de Lyapunov, considerando os parâmetros da Tabela 3 sem variação. As Figuras 14, 15 e 16 mostram os dois maiores expoentes de Lyapunov, considerando a variação dos parâmetros u_M , L_0 e R , respectivamente. O terceiro expoente de Lyapunov não foi mostrado por conveniência, contudo, o mesmo para todos os casos calculados estão na seguinte faixa de valores -30 ± 20 . Note que em todos os casos calculados o maior expoente de Lyapunov encontrado λ_1 é da ordem de 10^{-5} , isto pode estar associado a erros numéricos, uma vez que as equações de movimento foram integradas numericamente, logo λ_1 possivelmente é negativo e no máximo igual a zero, portanto, o modelo abordado neste trabalho não apresenta resposta caótica. Se algum dos λ_j fosse positivo significaria que o modelo apresentaria uma resposta caótica.

3.4 Considerações Finais em Relação ao Modelo Simplificado

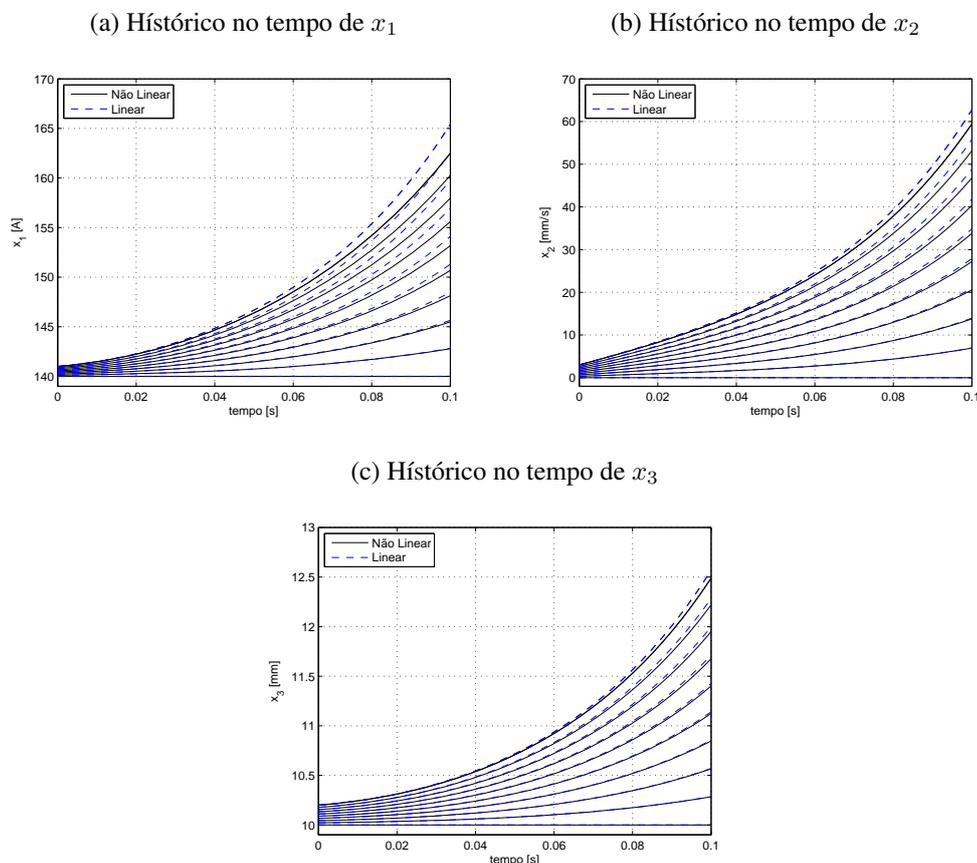
A instabilidade do sistema de levitação magnética foi investigada a partir de um modelo simplificado de 1 grau de liberdade. Tal modelo, no entanto, não é devidamente adequado para simular alguns tipos de respostas dinâmicas que podem ocorrer no sistema *Maglev* real. Entretanto, para problemas diferentes, o modelo do sistema *Maglev* também é diferente, assim para o escopo (objetivos) deste trabalho o modelo apresentado pode ser utilizado.

Salienta-se que diferentes respostas dinâmicas para um modelo que considere os efeitos de acoplamento entre as suspensões primária e secundária podem ser observadas. Segundo Cai e Chen (1992) podem ocorrer oscilações periódicas, vibrações randômicas, instabilidade dinâmica, movimento caótico, ressonância e etc.

3.5 Comparativos entre o Modelo Não-Linear e Linear

As Figuras 17a, 17b e 17c mostram a evolução temporal das variáveis de estado x_1 , x_2 e x_3 , respectivamente, para o sistema não-linear (58) e linear (59). O sistema foi integrado para várias condições iniciais, considerando que o veículo seja deslocado da posição de equilíbrio no sentido em que se afasta do trilho.

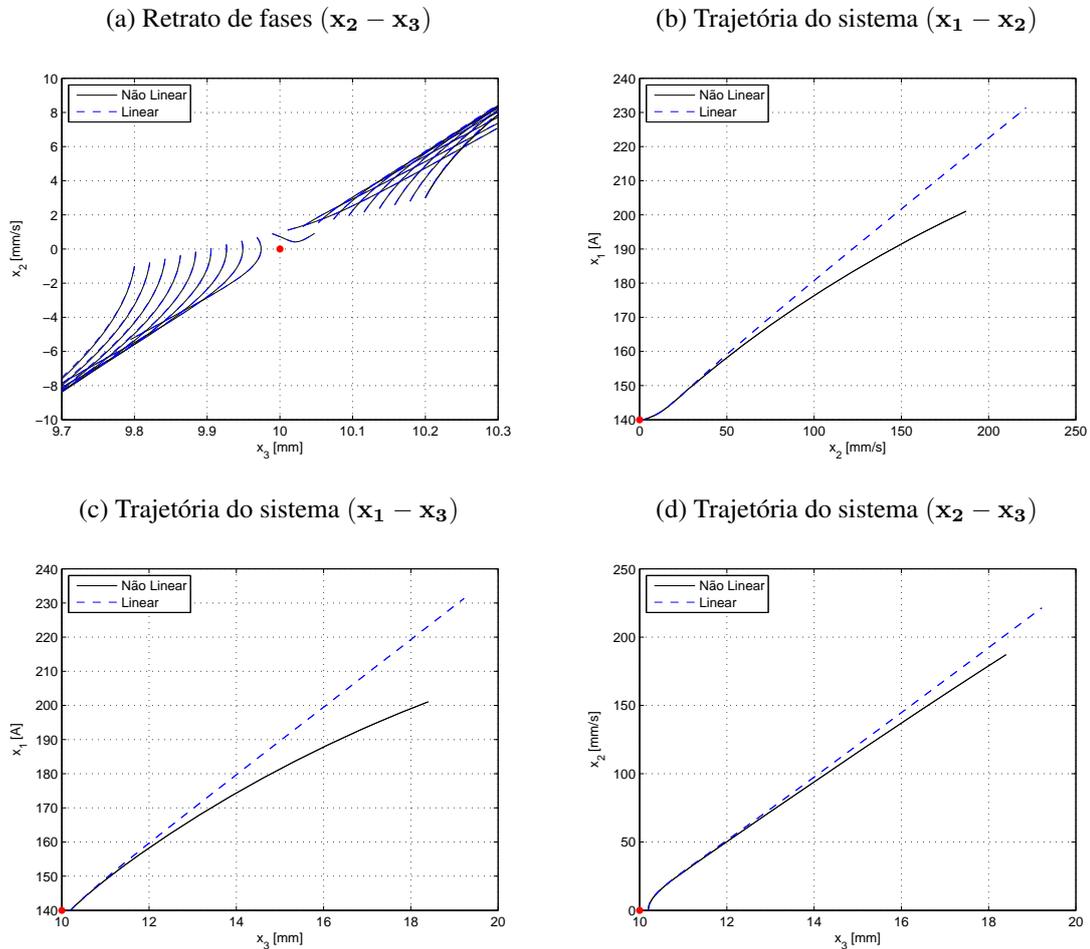
Figura 17 – Evolução temporal das variáveis de estado (x_1 , x_2 , x_3)



Fonte: Elaboração do próprio autor.

A Figura 18a mostra o retrato de fases na projeção $x_2 - x_3$, para várias condições iniciais na vizinhança do ponto de equilíbrio do sistema. As Figuras 18b, 18c e 18d mostram uma trajetória do sistema no espaço de estados, sendo a condição inicial $x(0) = (140, 0, 0.0102)$.

Figura 18 – Comparativos entre o sistema não-linear (58) e linear (59)



Fonte: Elaboração do próprio autor.

A Figura 18a mostra o retrato de fases do sistema linear (59) e não-linear (58). Pode ser visto que próximo ao ponto de equilíbrio o modelo linear oferece uma boa aproximação ao modelo não-linear. Entretanto, em regiões longe do ponto de equilíbrio, o modelo linear não oferece uma boa aproximação. Isto pode ser visto nas Figuras 18b, 18c e 18d, sendo que quanto maior a distância entre a condição inicial e o ponto de equilíbrio pior é a aproximação dada pelo modelo linear. Portanto, controladores lineares tendem a saturar no começo de grandes deslocamentos iniciais do ponto de equilíbrio do sistema (ZHAO; THORNTON, 1992).

Observação 1: Os parâmetros de simulação são os valores apresentados na Tabela 3 e as equações de movimento foram integradas numericamente com o *MATLAB*®. Ressalta-se que as coordenadas do sistema linear são X_1, X_2 e X_3 , como $X_i(t) = x_i(t) - x_i^*$, então $x_i(t) = X_i(t) + x_i^*$. Isto é válido tanto para o sistema linear (59) quanto para o sistema linearizado via series de Taylor (63). Deste modo, é possível compará-los ao sistema não-linear num mesmo

sistema de coordenadas, como feito nas Figuras 12a, 17 e 18.

Observação 2: Como visto na subseção (3.1.2), a condição nominal de operação do sistema linear (57) é uma condição estacionária, portanto, a corrente da bobina I_0 quando o veículo está na posição de equilíbrio S_0 é igual ao valor da coordenada x_1^* do ponto de equilíbrio P dado por (61), ou seja, $I_0 = x_1^* = u_M/R$.

Observação 3: Tanto o sistema linear (59) quanto a versão linearizada via series de Taylor (63) do sistema não-linear, são topologicamente orbitalmente equivalentes na vizinhança do ponto de equilíbrio $P = (140, 0, 0.01)$ do sistema não-linear. Isto pode ser visto nos retratos de fases apresentados nas Figuras 12a e 18a.

4 PROJETOS DE CONTROLE

Este capítulo inicia apresentando algumas estratégias de controle que têm sido utilizadas para controlar sistemas de levitação magnética. Em seguida, as técnicas de controle abordadas no capítulo 2 são implementadas no sistema *Maglev* estudado. O objetivo do controle é estabilizar a levitação do sistema sob o trilho, mantendo uma distância constante entre o veículo e o trilho. O modelo não-linear (58) é utilizado no projeto do controlador *SDRE*, enquanto o modelo linear (59) é útil para o projeto do controlador *LQR*. O parâmetro de controle é a tensão de entrada da bobina. Por fim, são apresentadas algumas simulações computacionais comparando o desempenho dos controladores projetados.

4.1 Técnicas de Controle Utilizadas em Sistemas de Levitação Magnética

Na literatura é possível encontrar uma grande gama de estratégias para controlar sistemas em geral. Nas discussões que seguem, são apresentadas algumas técnicas de controle que têm sido utilizadas para controlar sistemas de levitação magnética.

No grupo das técnicas de controle clássico, o *PID* (Proporcional Integral Derivativo), tem sido utilizado largamente por vários engenheiros, isto deve-se a simplicidade de implementação do mesmo. Esta técnica requer que o modelo matemático do sistema físico seja linear. O *PID* une as ações proporcional, integral e derivativa, fazendo com que o sinal do erro seja minimizado pela ação proporcional, zerado pela ação integral e obtido com uma velocidade antecipativa pela ação derivativa. Um projeto de controlador *PID* com os ganhos determinados via *LQR* (Regulador Quadrático Linear) foi proposto por Kumar e Jerome (2013) e Das et al. (2013).

A técnica de controle *SMC* (Controle por Modos Deslizantes) surgiu no final da década de 1970, na antiga União Soviética, sendo desenvolvida por Utkin (1978) e posteriormente modificada e adaptada por Slotine (1984). Esta técnica pode ser aplicada a sistemas não lineares no sentido global. Questões relacionadas ao desempenho, estabilidade, robustez e incertezas de modelagem podem ser implementadas diretamente no projeto do controlador *SMC*. Cho, Kato e Spilman (1993) apresenta uma comparação experimental entre um controlador *PID* e *SMC* de um sistema *Maglev*. Bandal e Vernekar (2010) apresenta uma versão discreta do controlador *SMC* de um sistema *Maglev*, com base em uma estratégia de realimentação de saída multivariável.

Variações paramétricas e incertezas dos modelos de um sistema físico são algumas das problemáticas enfrentadas na fase de concepção de um controlador. Nesse sentido, controladores projetados via técnicas de controle robusto são uma importante alternativa, pois geralmente estão aptos a superarem pequenas diferenças entre o sistema real e o modelo nominal utilizado no projeto do controlador. Milani, Zarabadipour e Shahnazi (2012) propôs um controlador robusto com ganho adaptativo para um sistema *Maglev*. No projeto do controlador, efeitos tais

como tempo de atraso, incertezas paramétricas e perturbações externas, foram considerados. Com relação ao ganho adaptativo, este foi obtido pelo método de *Lyapunov-Krasovskii*. Um comparativo entre as técnicas de controle H_∞ , *SMC*, *PID* e realimentação linearizante, pode ser encontrado no trabalho de Shen (2002).

Sistemas *Maglev* são altamente não lineares, portanto, técnicas de controle inteligente têm recebido grande atenção nas últimas décadas. Estratégias de controle baseadas em redes neurais, lógica fuzzy, algoritmos genéticos e etc. são algumas das abordagens utilizadas para alcançar um alto desempenho do sistema de controle. No trabalho de Wai e Lee (2008), um controlador *SMC* inicialmente é introduzido, em seguida, uma estratégia de controle via *AFNNC* (neuro-fuzzy adaptativo) é implementada para imitar o controlador *SMC*. Um fator positivo dessa aplicação foi a atenuação dos fenômenos de trepidação que ocorriam no controlador *SMC*. Salim e Karsli (2013), apresenta um projeto de controle via lógica fuzzy para controlar um sistema *Maglev*. Saberi, Altafi e Alizadeh (2012) apresenta um projeto de controle via redes neurais *RBF*. O projeto do controlador possui basicamente dois estágios: no primeiro estágio (treinamento), os resultados de um controlador *LQR* são utilizados para modelar o sistema; no segundo estágio (teste), o modelo obtido é usado para projetar o controlador baseado na rede neural *RBF*.

Técnicas de otimização modernas, tais como o método do enxame de partículas (*PSO*) e algoritmos genéticos (*GA*) também têm sido empregadas para projetar controladores de sistemas *Maglev*. Em Kusagawa et al. (2004), o método de otimização via *GA* foi utilizado para projetar o controlador de um sistema *Maglev*. Um controlador de realimentação de estados completo usando *PSO* foi proposto por Wang, Shen e Zhou (2014) para controlar um sistema *Maglev*.

A Tabela 4 mostra um comparativo entre algumas técnicas utilizadas em sistemas *Maglev*.

Tabela 4 – Comparativo entre algumas técnicas de controle utilizada em sistemas *Maglev*

Técnica	Vantagens	Desvantagens
PID Control	Simple de projetar e implementar	Difícil implementação em modelos não lineares
State Feedback Control	Melhor resposta dinâmica Estabiliza o sistema	Exige instalação de sensores caros, Aplica-se apenas a modelos lineares
Sliding Mode Control	Adequado para aplicação em diversos problemas não lineares	Robustez não está acima da meta, Exige controlador digital
Feedback Linearizing Control	Apropriado para modelos não lineares Oferece ampla gama de estabilidade	Planta original deve ser não-linear Custo, devido a necessidade de placa DSP
Robust Control	Projetado para manter a robustez do sistema	Ordem da função de transferência do sistema torna-se muito alta
Gain Scheduling and Adaptive Control	Adequado para ambientes em que os parâmetros estão variando e dinâmicas não modeladas	Difícil implementação para sistemas <i>Maglev</i>
Intelligent Control	Adaptação rápida e melhores respostas dinâmicas	Complexidade é aumentada para a sua implementação

Fonte: Adaptado de (PATI; SINGH; NEGI, 2014).

Como visto, são diversas as estratégias de controle utilizadas em sistemas *Maglev*. Nas subseções que seguem, as técnicas de controle abordadas no capítulo 2 são implementadas no sistema de levitação eletromagnética (*EML*).

4.2 Sistema Maglev com Controlador LQR

Aplicando a teoria vista na seção 2.3, podemos projetar o controlador *LQR* (na forma padrão), o que resulta no seguinte:

$$\dot{\vec{x}} = \begin{bmatrix} -\frac{RS_0}{c} & \frac{I_0}{S_0} & 0 \\ -\frac{cI_0}{mS_0^2} & 0 & \frac{cI_0^2}{mS_0^3} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{S_0}{c} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \vec{u} \quad (65)$$

onde, $\vec{u} = \delta u$.

A saída do sistema e os coeficientes escolhidos para as matrizes \mathcal{Q} e \mathcal{R} são:

$$\vec{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \mathcal{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3.1 \times 10^{12} \end{bmatrix} \quad \mathcal{R} = [1] \quad (66)$$

As matrizes de ponderação \mathcal{Q} e \mathcal{R} foram obtidas através de um processo iterativo.

4.3 Sistema Maglev com Controlador SDRE

Aplicando a teoria vista na seção 2.4, podemos projetar o controlador *SDRE* (na forma padrão), o que resulta no seguinte:

$$\dot{\vec{x}} = \begin{bmatrix} -\frac{x_2}{x_3} & \frac{2x_1}{x_3} & -\frac{Rx_1}{c} \\ -\frac{cx_1}{mx_3^2} & 0 & \frac{cx_1^2}{2mx_3^3} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ g \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{x_3}{c} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \vec{u} \quad (67)$$

onde, $\vec{u} = u_M$.

Assumindo que $\mathcal{C}(x)$, $\mathcal{Q}(x)$ e $\mathcal{R}(x)$ são matrizes constantes, temos:

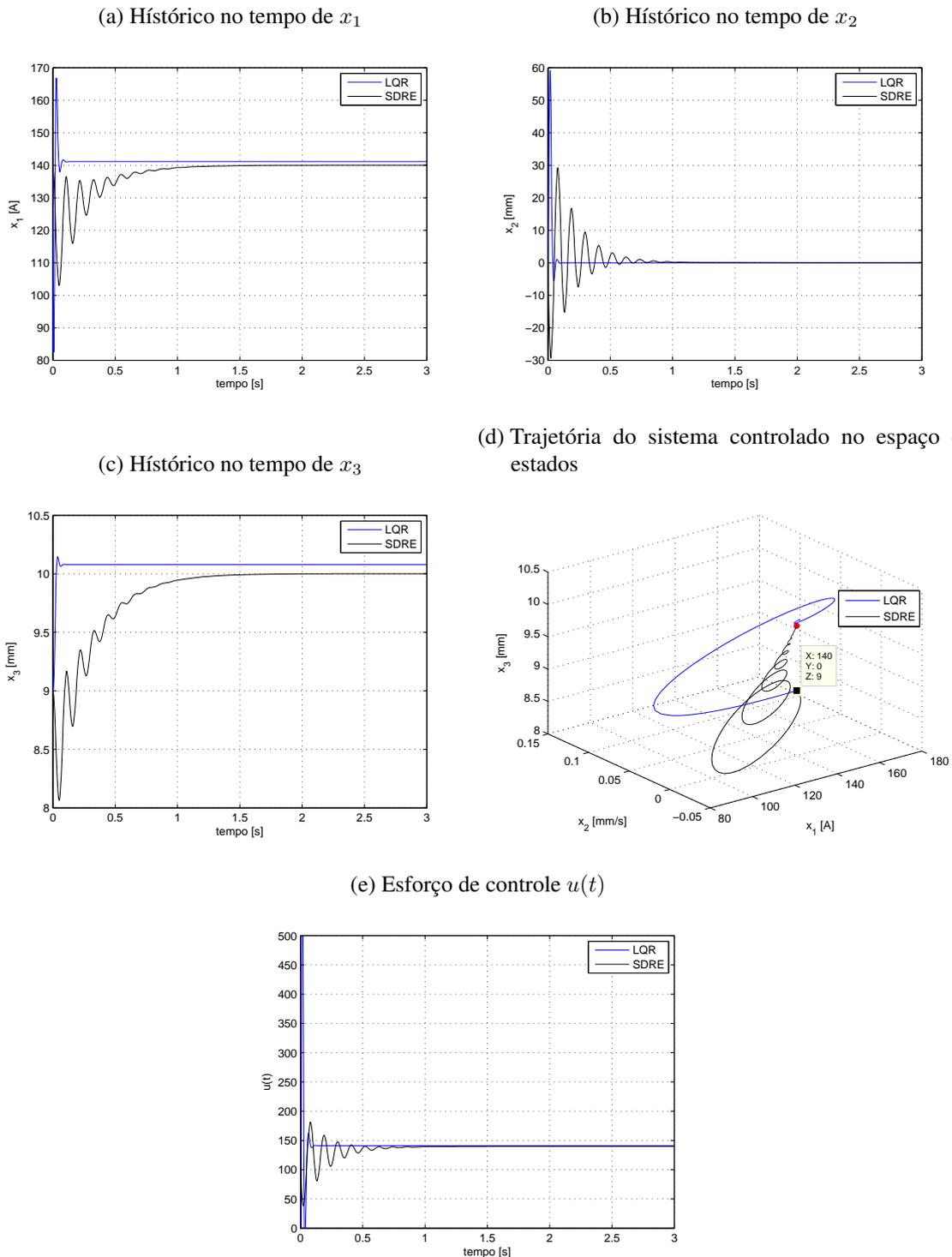
$$\vec{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad \mathcal{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0085 \times 10^8 \end{bmatrix} \quad \mathcal{R} = [1 \times 10^{-1}] \quad (68)$$

As matrizes de ponderação $\mathcal{Q}(x)$ e $\mathcal{R}(x)$ foram obtidas através de um processo iterativo. Ressalta-se que as matrizes dependentes do estado $\mathcal{C}(x)$, $\mathcal{Q}(x)$ e $\mathcal{R}(x)$ podem ser assumidas constantes (sem dependência do estado). Note que neste trabalho é assumido que tais matrizes são contantes.

4.4 Resultados e Discussões

As respostas do sistema controlado (65) e (67), considerando cinco condições iniciais diferentes são mostradas nas Figuras 19, 20, 21, 22 e 23.

Figura 19 – Resposta do sistema controlado para a condição inicial $x(0) = (140, 0, 0.009)$

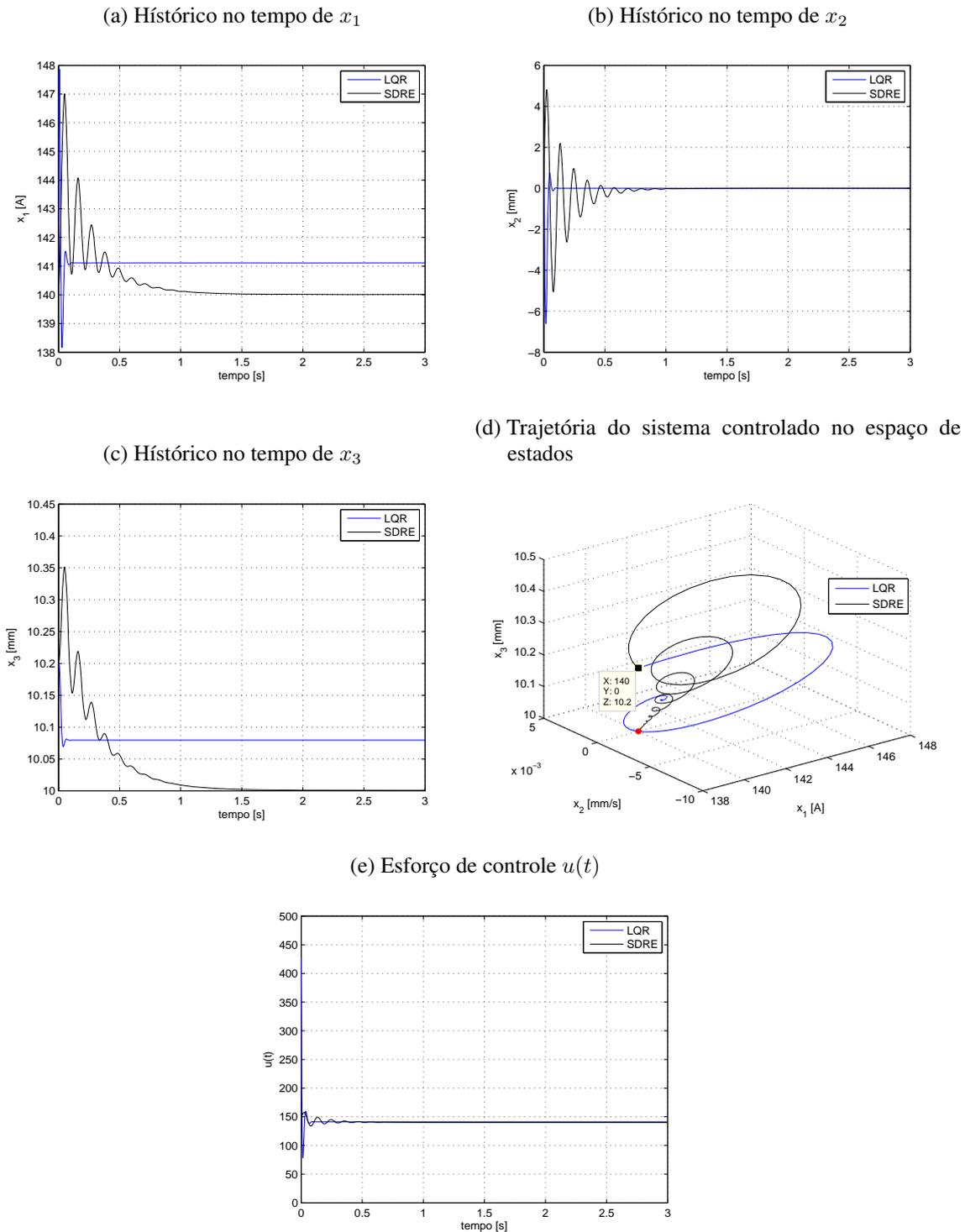


Fonte: Elaboração do próprio autor.

A Figura 19 mostra o histórico no tempo das variáveis de estado e esforço de controle, considerando a seguinte condição inicial $x(0) = (140, 0, 0.009)$. Note que o controlador *LQR* converge mais rápido do que o *SDRE*, no entanto, o esforço de controle do controlador *LQR* além de ser superior ao do *SDRE*, extrapola os limites definidos em (69) para a variável de controle. Em relação ao overshoot da variável de estado x_3 (entreferro), o controlador *LQR* foi melhor,

porém, em regime permanente o controlador *SDRE* foi capaz de levar o sistema exatamente para o ponto de equilíbrio $x_3 = S_0 = 10mm$, o que não ocorreu no caso do sistema com o controlador *LQR*.

Figura 20 – Resposta do sistema controlado para a condição inicial $x(0) = (140, 0, 0.0102)$

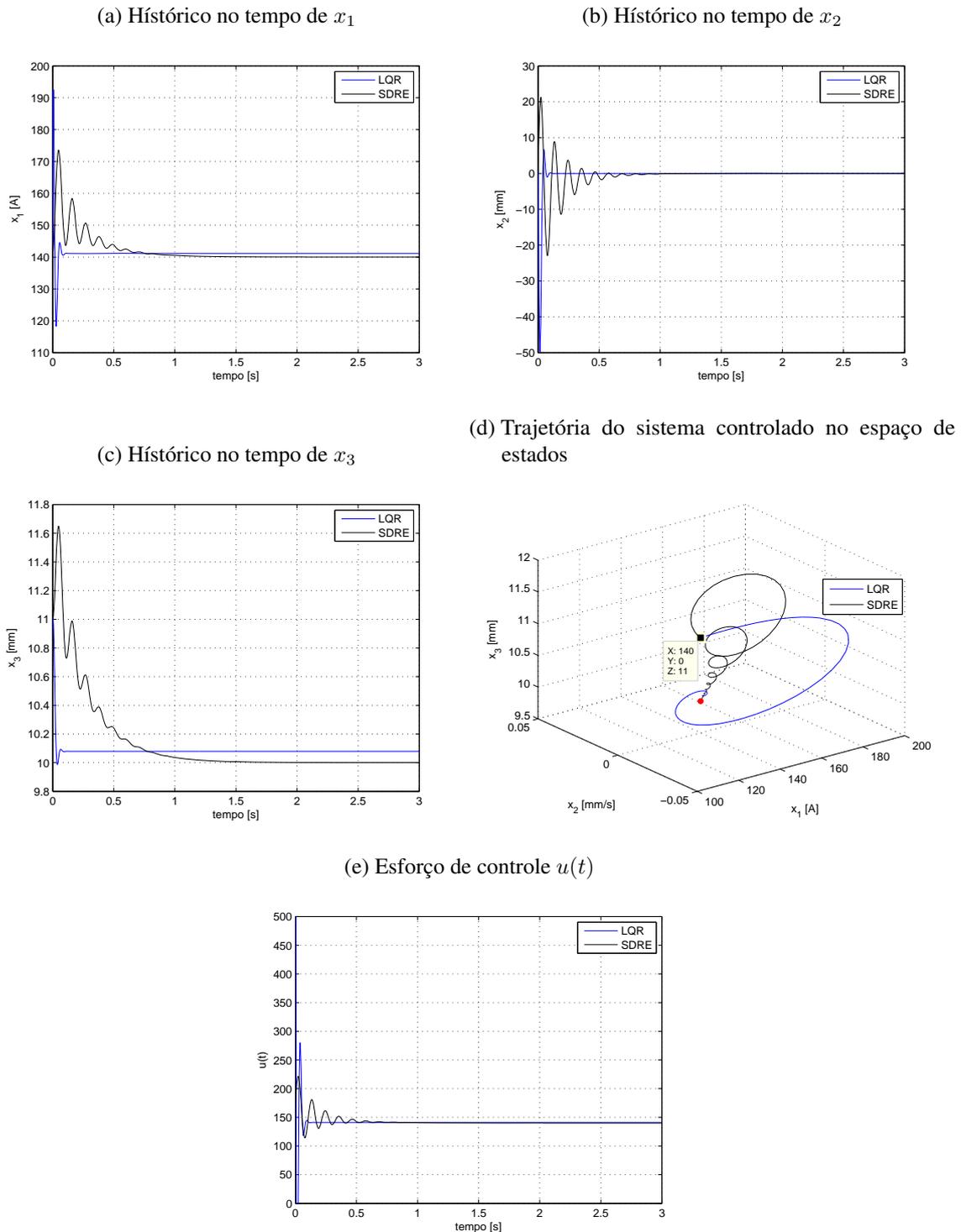


Fonte: Elaboração do próprio autor.

A Figura 20 mostra o histórico no tempo das variáveis de estado e esforço de controle, considerando a seguinte condição inicial $x(0) = (140, 0, 0.0102)$. Um comparativo entre os

controladores *LQR* e *SDRE*, mostra uma situação semelhante ao caso anterior. Contudo, o sinal de controle do *LQR*, diferentemente do caso anterior, não extrapolou o domínio de interesse (69).

Figura 21 – Resposta do sistema controlado para a condição inicial $x(0) = (140, 0, 0.011)$

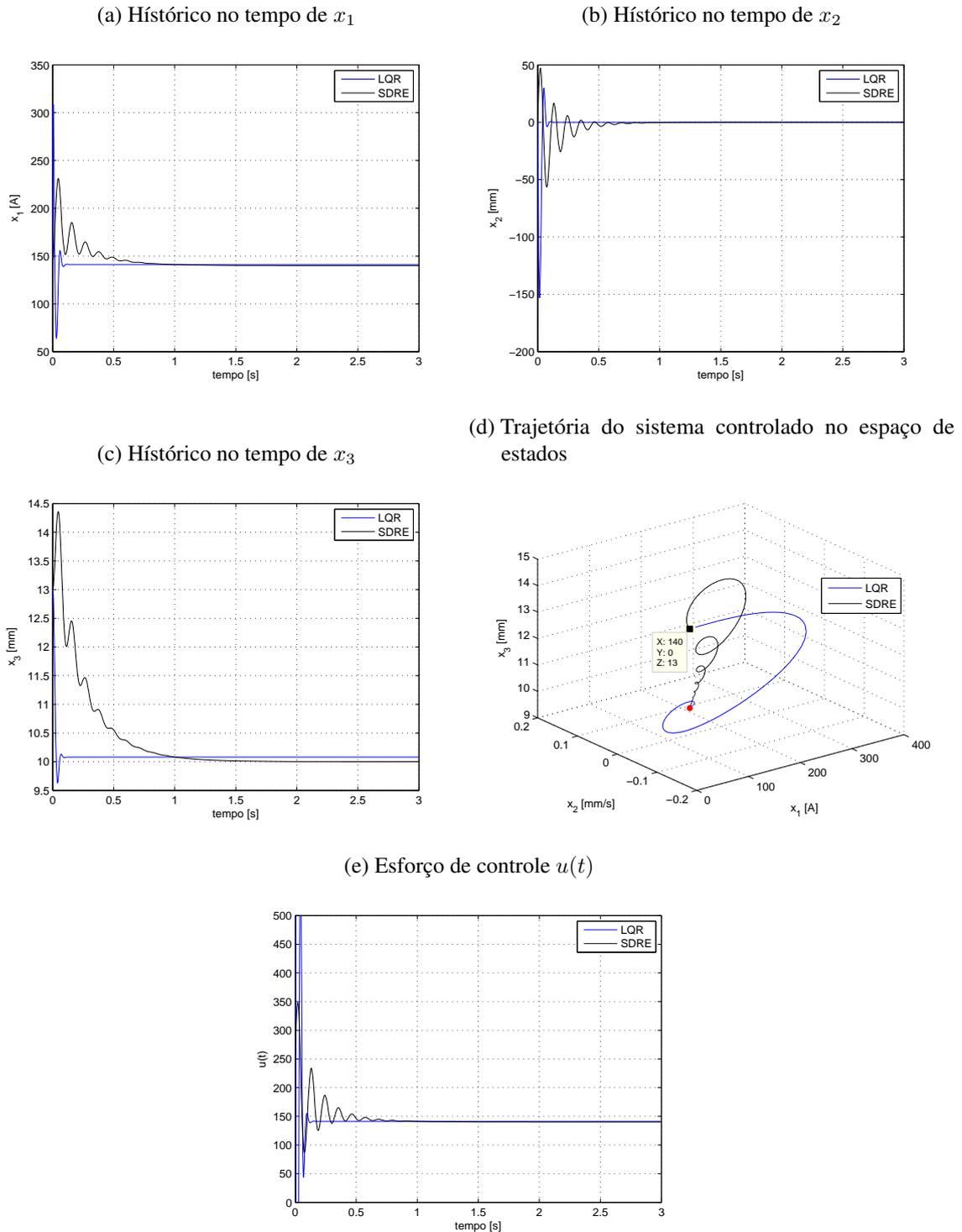


Fonte: Elaboração do próprio autor.

A Figura 21 mostra o histórico no tempo das variáveis de estado e esforço de controle, considerando a seguinte condição inicial $x(0) = (140, 0, 0.011)$. Um comparativo entre os controladores *LQR* e *SDRE*, mostra uma situação semelhante aos casos anteriores. Contudo, o

signal de controle do *LQR*, diferentemente do caso anterior, extrapolou o domínio de interesse (69).

Figura 22 – Resposta do sistema controlado para a condição inicial $x(0) = (140, 0, 0.013)$

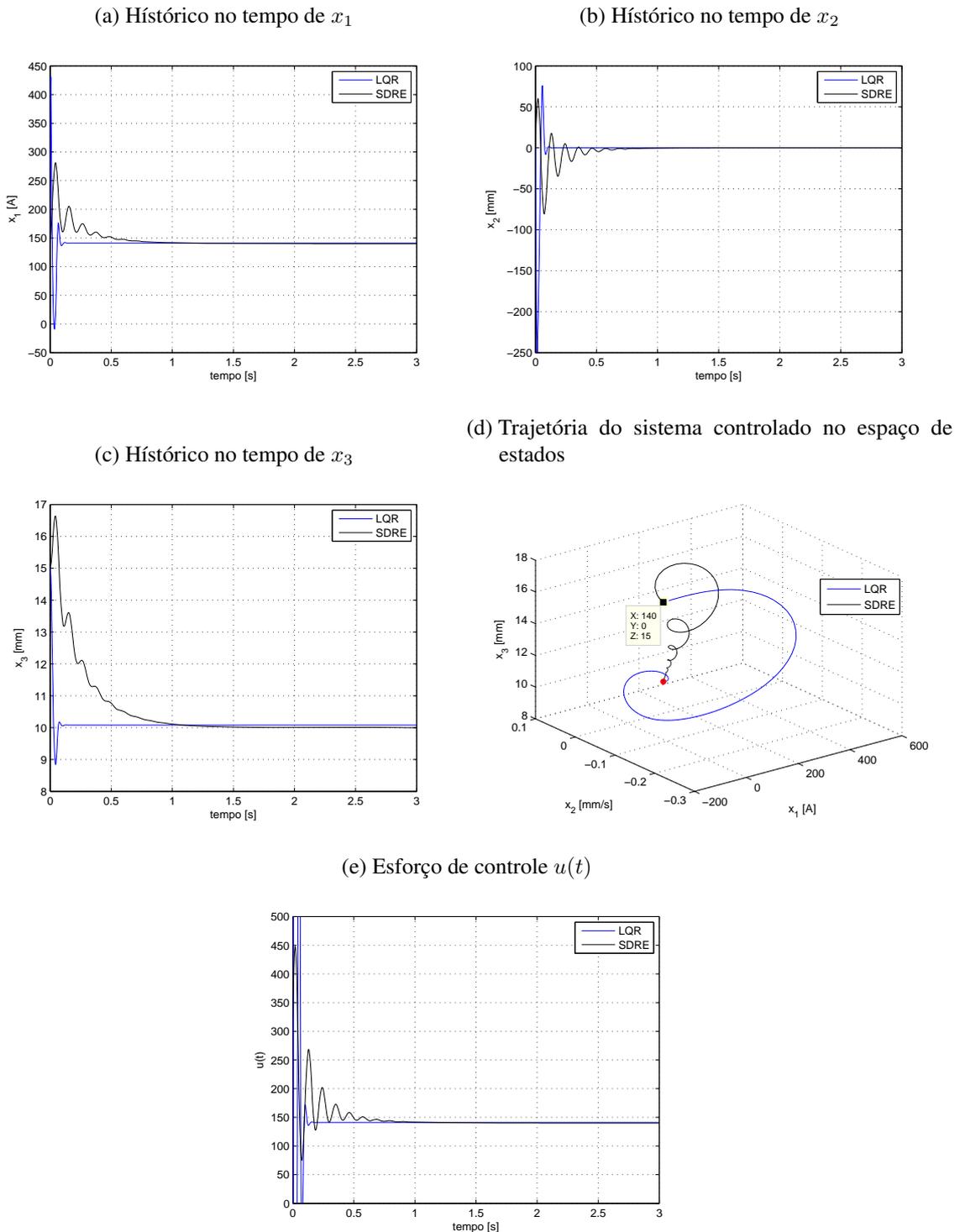


Fonte: Elaboração do próprio autor.

A Figura 22 mostra o histórico no tempo das variáveis de estado e esforço de controle, considerando a seguinte condição inicial $x(0) = (140, 0, 0.013)$. Um comparativo entre os controladores *LQR* e *SDRE*, mostra uma situação semelhante aos casos anteriores. No entanto, o

signal de controle e as variáveis de estado x_1 e x_2 para o caso do sistema controlado pelo *LQR*, extrapolam o domínio de interesse (69).

Figura 23 – Resposta do sistema controlado para a condição inicial $x(0) = (140, 0, 0.015)$



Fonte: Elaboração do próprio autor.

A Figura 23 mostra o histórico no tempo das variáveis de estado e esforço de controle, considerando a seguinte condição inicial $x(0) = (140, 0, 0.015)$. Um comparativo entre os controladores *LQR* e *SDRE*, mostra uma situação semelhante ao caso anterior.

Com o intuito de comparar o desempenho dos controladores projetados, assuma que u é produzido por um conversor buck capaz de fornecer qualquer tensão $0 \leq u \leq 450V$, e que a fonte de alimentação fornece 140 volts na posição de equilíbrio do veículo. Com relação as variáveis de estado e controle, considere o seguinte domínio de interesse:

$$\{(x_1, x_2, x_3, u) \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x_1 \leq 300A, -100 \leq x_2 \leq 100mm/s, 8 \leq x_3 \leq 18mm, 0 \leq u \leq 450V\} \quad (69)$$

A Tabela 5 mostra algumas características do regime transiente.

Tabela 5 – Características do regime transiente

$x(0)$	Controlador	$x_{1max}[A]$	$x_{2max}[mm/s]$	$x_{3max}[mm]$	$u_{max}[V]$	$te[s]$
(140, 0, 0.009)	<i>LQR</i>	166.80	59.17	10.15	-2139.80*	0.1
-	<i>SDRE</i>	140.01	-29.32	10.00	181.45	1.5
(140, 0, 0.0102)	<i>LQR</i>	147.87	-6.60	10.20	427.96	0.1
-	<i>SDRE</i>	147.01	-5.05	10.35	157.62	1.5
(140, 0, 0.011)	<i>LQR</i>	192.54	-49.70	11.00	2139.80*	0.1
-	<i>SDRE</i>	173.55	-22.91	11.65	221.56	1.5
(140, 0, 0.013)	<i>LQR</i>	308.76*	-152.98*	13.00	6419.38*	0.1
-	<i>SDRE</i>	231.29	-56.47	14.36	348.39	1.5
(140, 0, 0.015)	<i>LQR</i>	431.17*	-249.79*	15.00	10699.00*	0.1
-	<i>SDRE</i>	281.16	-80.73	16.64	448.39	1.5

Fonte: Elaboração do próprio autor.

Na Tabela 5 os valores com sobrescrito (*) estão fora do domínio de interesse (69).

Salienta-se que os projetos de controle (65) e (67) estão na forma padrão. Portanto, não foi considerado restrições sobre as variáveis de estado $\vec{x}(t)$ e sinal de controle $\vec{u}(t)$. Obviamente, restrições tais como a saturação do sinal de controle podem ser implementadas, assim, os resultados apresentados acima poderiam ser diferentes.

As simulações mostram que todos os controladores projetados são capazes de estabilizar a levitação do sistema *Maglev*, contudo, para deslocamentos da posição de equilíbrio $\delta s > 0.2mm$ o sinal de controle do *LQR* atinge valores elevados, de modo que a tensão necessária para trazer o veículo de volta ao ponto de equilíbrio é maior do que a tensão máxima fornecida pelo conversor, ou seja, $u_{max} > 450V$. Isto está relacionado com a natureza linear do controlador *LQR*, de modo que para o projeto do mesmo é necessário utilizar o modelo linear (59), o qual não oferece uma boa aproximação ao modelo não-linear (58) em regiões longe do ponto de equilíbrio (como visto na seção 3.5). Por outro lado, o controlador *SDRE* pode trazer o sistema de volta ao equilíbrio para deslocamentos iniciais $\delta s \leq 5mm$ da posição de equilíbrio. Além disso, sob as mesmas condições, o esforço de controle do controlador *SDRE* é menor do que no *LQR*. Com relação ao tempo de estabilização (te), o controlador *LQR* em todas as condições simuladas, converge mais rapidamente do que o controlador *SDRE*. Para o sistema controlado com o controlador *SDRE*, os valores das variáveis de estado e controle não ultrapassam os limites definidos pelo domínio de interesse (69), o que não ocorre para a maioria das condições simuladas no caso do sistema controlado pelo controlador *LQR*.

5 CONCLUSÕES

Um trem com levitação eletromagnética (*EML*), tal como o *Maglev Transrapid* foi simplificado por um sistema de massa única sobre um trilho rígido. O sistema estudado tem um estado de equilíbrio no qual a força eletromagnética provida dos eletroímãs contrabalança exatamente a força gravitacional (peso) do veículo, e assim o mesmo tem velocidade e aceleração vertical nula, entretanto, o ponto de equilíbrio é um nó sela, o qual é instável no sentido de Lyapunov. Assim, a partir da análise de estabilidade do modelo, foi possível concluir que os eletroímãs do veículo devem ser ativamente controlados para tornar a operação segura.

Através do cálculo dos expoentes de Lyapunov foi verificado que o modelo abordado não possui um comportamento caótico, entretanto, na literatura é possível encontrar modelos que considere os efeitos de acoplamento entre as suspensões primária e secundária (existentes no sistema *Maglev* real), os quais podem apresentar diferentes respostas dinâmicas. No entanto, é sabido que a construção de um modelo depende da finalidade e precisão requerida, então, para o escopo (objetivos) deste trabalho o modelo apresentado pode ser utilizado para simular a dinâmica vertical do veículo.

Com relação ao sistema de controle foi proposto dois projetos de controladores, com o objetivo de estabilizar a levitação do sistema sob o trilho. Para o projeto dos controladores foi utilizado as seguintes técnicas: Regulador linear Quadrático (*LQR*) e Equação de Riccati Dependente do Estado (*SDRE*). O primeiro projeto é um controlador linear e o segundo é não-linear. Para o projeto do controlador *LQR* foi necessário linearizar o modelo não-linear em torno de uma condição nominal de operação, a qual para o sistema abordado é uma condição estacionária. Um comparativo entre os sistemas de controle mostrou que o controlador não-linear *SDRE* supera o controlador linear *LQR* por um fator de 25 vezes com relação ao deslocamento máximo recuperável (considerando o domínio de interesse para as variáveis de estado e controle), ou seja, o controlador *SDRE* permite o sistema *Maglev* operar com perturbações muito maiores no entreferro do que o controlador *LQR* permite.

Finaliza-se este capítulo enfatizando que a forma padrão de ambos os projetos de controle ótimo pode ser modificada de modo a incluir restrições sobre as variáveis de estado e controle. Para isto é desejável algum algoritmo que calcule novos valores para a entrada do sistema quando alguma entrada ou saída prevista pelo controlador viola as restrições do sistema, visando sempre a minimização do funcional custo, pois para um algoritmo que simplesmente adote o valor máximo e/ou mínimo possível para a entrada pode não ser o melhor em tal situação. Contudo, para o sistema controlado pelo controlador *SDRE*, os valores das variáveis de estado e controle não ultrapassarão os limites definidos pelo domínio de interesse.

REFERÊNCIAS

- AHMAD, I.; JAVAID, M. A. Nonlinear model and controller design for magnetic levitation system. *World Scientific and Engineering Academy and Society*, p. 324–328, Feb. 2010.
- BANDAL, V. S.; VERNEKAR, P. N. Design of a discrete-time sliding mode controller for a magnetic levitation system using multirate output feedback. *American Control Conference*, p. 4289–4294, July 2010.
- BANKS, H. T.; LEWIS, B. M.; TRAN, H. T. Nonlinear feedback controllers and compensators - a state-dependent Riccati approach. *Computational Optimization and Applications*, v. 37, p. 177–218, June 2007.
- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. 9. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2010. 606 p.
- CAI, Y.; CHEN, S. S. *Dynamics and controls in maglev systems*. Dissertação (Mestrado) — University of Chicago, 1992.
- CARVALHO, L. K. *Sobre a estabilização global de sistemas não lineares via equação de Riccati dependente do estado*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, 2005.
- CHO, D.; KATO, Y.; SPILMAN, D. Sliding mode and classical control of magnetic levitation system. *IEEE Control Systems*, v. 13, n. 1, p. 42–48, Aug. 1993.
- CLOUTIER, J. R.; D'SOUZA, C. N.; MRACEK, C. P. Nonlinear regulation and nonlinear H_∞ control via the state-dependent Riccati equation technique. *International Conference on Nonlinear Problems in Aviation and Aerospace*, p. 117–142, May 1996.
- DAS, S. et al. LQR based improved discrete PID controller design via optimum selection of weighting matrices using fractional order integral performance index. *Applied Mathematical Modelling*, v. 37, p. 4253–4268, Mar. 2013.
- DAVID, E. *O Futuro das estradas de ferro no Brasil*. [S.l.]: Portifolium, 2009. 261 p. ISBN 9788590923701.
- DORF, R. C.; BISHOP, R. H. *Sistemas de controle moderno*. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001.
- DUMORTIER, F.; LLIBRE, J.; ARTÉS, J. C. *Qualitative theory of planar differential systems*. Berlin: Springer, 2006.
- ERDEM, E. B.; ALLEYNE, A. G. Design of a class of nonlinear controller via state dependent Riccati equations. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, v. 12, p. 133–137, Jan. 2004.
- FIEDLER-FERRARA, N.; PRADO, C. P. C. do. *Caos uma introdução*. São Paulo: Edgard Blucher, 1994. 402 p.
- GOLDSTEIN, H. *Classical mechanics*. 2. ed. San Francisco: Addison-Wesley Pub. Co., 1980.

KO, W. et al. Dynamics and controls of a maglev vehicle. *IEEE International Symposium on Industrial Electronics*, p. 2190–2195, July 2009.

KUMAR, V.; JEROME, J. LQR based optimal tuning of PID controller for trajectory tracking of magnetic levitation system. *International Conference on Design and Manufacturing*, v. 64, p. 254–264, 2013.

KUSAGAWA, S. et al. Multipurpose design optimization of EMS-type magnetically levitated vehicle based on genetic algorithm. *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*, v. 14, n. 2, p. 1922–1925, June 2004.

LEE, C.-Y. et al. Development of superconducting-hybrid magnetic levitation system for high-speed EMS maglev. *IEEE International Conference on Electrical Machines and Systems*, p. 1922–1927, October 2013.

LEE, H.-W.; KIM, K.-C.; LEE, J. Review of maglev train technologies. *IEEE Transactions on Magnetics*, v. 42, n. 7, p. 1917–1925, July 2006.

LEMOS, N. A. *Mecânica analítica*. 2. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2007. 386 p.

MILANI, R. H.; ZARABADIPOUR, H.; SHAHNAZI, R. An adaptive robust controller for time delay maglev transportation systems. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, n. 12, p. 4792–4801, Dec. 2012.

MONTEIRO, L. H. A. *Sistemas dinâmicos*. 3. ed. São Paulo: Livraria da Física, 2011. 670 p.

MOTTA, E. S. *Otimização de trilho magnético de um sistema de levitação supercondutora para veículo Maglev*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, 2011.

MRACEK, C. P.; CLOUTIER, J. R. Control designs for the nonlinear benchmark problem via the state-dependent Riccati equation method. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, v. 8, p. 401–433, Apr. 1998.

OGATA, K. *Engenharia de controle moderno*. 4. ed. Rio de Janeiro: PEARSON, 2003.

PATI, A.; SINGH, S.; NEGI, R. A review report on control strategies for magnetic levitation (maglev) train. *Students Conference on Engineering and Systems*, 2014.

PINTO, R. D. *Comportamento complexo na experiência da torneira gotejante*. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo - USP, 1999.

POST, R. F.; RYUTOV, D. D. The inductrack: a simpler approach to magnetic levitation. *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*, v. 10, p. 901–904, Mar. 2000.

SABERI, M.; ALTAFI, H.; ALIZADEH, S. M. Control of the magnetic suspension system with a three-degree-of-freedom using RBF neural network controller. *International Journal of Computer and Electrical Engineering*, v. 4, n. 2, p. 121–126, 2012.

SALIM, T. T.; KARSLI, V. M. Control of single axis magnetic levitation system using fuzzy logic control. *International Journal of Advanced Computer Science and Applications*, v. 4, n. 11, p. 83–88, 2013.

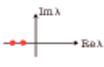
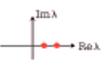
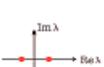
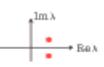
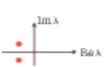
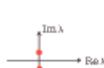
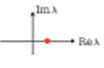
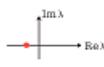
SANTOS, A. M. M. *Controlo por computador de um sistema de levitação magnética*. Dissertação (Mestrado) — Instituto Superior de Engenharia do Porto - ISEP, 2011.

- SAVI, M. A. *Dinâmica não-linear e caos*. Rio de Janeiro: E-Papers, 2006. 304 p.
- SHEN, J.-C. H_∞ control and sliding mode control of magnetic levitation system. *Asian Journal of Control*, v. 4, n. 3, p. 333–340, Sept. 2002.
- SHU, G.; MEISINGER, R. State estimation and simulation of the magnetic levitation system of a high-speed maglev train. *2011 International Conference on Electronic & Mechanical Engineering and Information Technology*, p. 944–947, Aug. 2011.
- SOTELO, G. G. et al. Tests with one module of the brazilian maglev-cobra vehicle. *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*, v. 23, n. 3, June 2013.
- SUEBSOMRAN, A. Optimal control of electromagnetic suspension EMS system. *The Open Automation and Control System Journal*, v. 6, p. 1–8, 2014.
- TAVERA, M. J. M. *Navegação e fusão sensorial para robô de combate a incêndio*. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, 2010.
- VILLATE, J. E. *Introdução aos sistemas dinâmicos*. Porto: Universidade do Porto, 2007. 221 p.
- WAI, R.-J.; LEE, J.-D. Adaptive fuzzy-neural-network control for maglev transportation system. *IEEE Transactions on Neural Networks*, v. 19, n. 1, p. 54–70, Jan. 2008.
- WANG, H.; SHEN, G.; ZHOU, J. Control strategy of maglev vehicles based on particle swarm algorithm. *Journal of Modern Transportation*, v. 22, n. 1, p. 30–36, Mar. 2014.
- ZHAO, F.; THORNTON, R. Automatic design of a maglev controller in state space. p. 2562–2567, 1992.

APÊNDICE A – Estabilidade de um Sistema Linear Bidimensional

A Figura 24 resume a classificação dos pontos de equilíbrio de um sistema linear bidimensional.

Figura 24 – Classificação dos pontos de equilíbrio (sistema linear bidimensional)

Autovalores	Sinal da parte real	Representação no plano complexo	Ponto de equilíbrio	Estabilidade	Topologia
$\lambda_1 \neq \lambda_2$ $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \neq 0$ $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$	$\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$ $\lambda_1, \lambda_2 < 0$		nó (hiperbólico)	assintoticamente estável	
	$\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$ $\lambda_1, \lambda_2 > 0$		nó (hiperbólico)	instável	
	$\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$		sela (hiperbólico)	instável	
(Complexos Conjugados) $\lambda_1 = \lambda_2^*$ $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$	$Re(\lambda) > 0$		foco (hiperbólico)	instável	
	$Re(\lambda) < 0$		foco (hiperbólico)	assintoticamente estável	
	$Re(\lambda) = 0$		centro (elíptico) caso degenerado	estável (não assintoticamente)	
$\lambda_1 = \lambda_2$ $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$	$Re(\lambda) > 0$		nó impróprio caso degenerado	instável	
	$Re(\lambda) < 0$		nó impróprio caso degenerado	assintoticamente estável	

Fonte: Adaptado de (FIEDLER-FERRARA; PRADO, 1994).

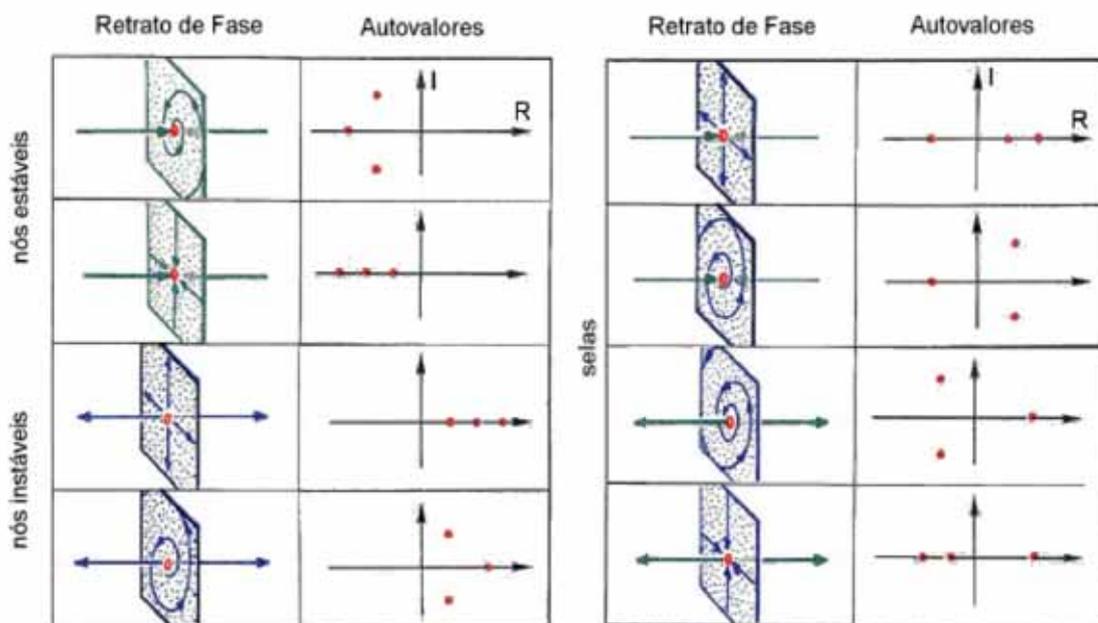
Um ponto de equilíbrio isolado cujos autovalores têm parte real não nula, ou seja, $Re(\lambda_j) \neq 0$ é chamado de *ponto hiperbólico*, no entanto, se a parte real de algum dos autovalores for nula, ou seja, $Re(\lambda_j) = 0$ então ele é chamado de *ponto não-hiperbólico* (SAVI, 2006).

A matriz \mathcal{A} vista na subseção 2.2.2 pode apresentar dois autovalores que são reais e iguais em duas circunstâncias, as quais são: quando $T^2 = 4\Delta$, em que o ponto de equilíbrio é chamado de *nó impróprio*, e quando $a = d \neq 0$ e $b = c = 0$, em que o ponto de equilíbrio é chamado de *estrela*. Já, se algum dos autovalores da matriz \mathcal{A} for nulo, então, o determinante será nulo e o que se tem são *pontos de equilíbrios não isolados*. Estes três casos são chamados de *casos degenerados*. Alterando o valor de algum coeficiente da matriz \mathcal{A} , pode-se mudar a estabilidade do ponto de equilíbrio e consequentemente, a topologia do retrato de fases (MONTEIRO, 2011).

APÊNDICE B – Estabilidade de um Sistema Linear Tridimensional

Sabe-se que na análise de estabilidade do ponto de equilíbrio de um sistema linear e/ou linearizado, o número de casos diferentes gerados pelas inúmeras combinações possíveis dos autovalores aumenta de acordo com a dimensão do sistema. Então, por conveniência este apêndice mostra os pontos de equilíbrio hiperbólicos existentes em três dimensões e sua classificação de acordo com os autovalores da matriz de um sistema linear tridimensional.

Figura 25 – Classificação dos pontos de equilíbrio (sistema linear tridimensional)



Fonte: (PINTO, 1999).

Além dos pontos de equilíbrio, podem existir outras configurações ou órbitas do sistema dinâmico que são atraídas ou repelidas, de modo que tem-se um conjunto limite α se as órbitas são assintoticamente repelidas, e conjunto limite β se as órbitas são assintoticamente atraídas (PINTO, 1999).

APÊNDICE C – Teorema de Hartman-Grobman

Antes de ser enunciado o *Teorema de Hartman-Grobman*, considere a seguinte definição.

Definição 1. *Sejam os seguintes sistemas autônomos:*

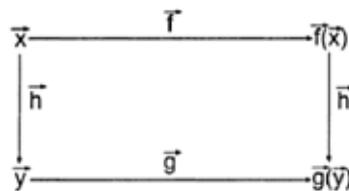
$$\dot{x} = f(x) \quad (70)$$

$$\dot{x} = Ax \quad (71)$$

os quais, são ditos topologicamente equivalentes em uma vizinhança da origem ou possuem a mesma estrutura qualitativa próxima a origem se existe um homeomorfismo H de um aberto U contendo a origem em um aberto V contendo a origem, cuja as trajetórias do sistema (70) de U são enviadas nas trajetórias do sistema (71) de V e tem orientações preservadas. Se o homeomorfismo H preserva a parametrização pelo tempo, então os sistemas acima são chamados topologicamente conjugados na vizinhança da origem.

A Figura 26 ilustra o conceito de equivalência topológica. Repare que se \vec{x} e \vec{y} se relacionam pelo homeomorfismo \vec{h} , de modo que $\vec{y} = \vec{h}(\vec{x})$, então $\vec{g}(\vec{y}) = \vec{h}(\vec{f}(\vec{x}))$. Assim, obtém-se o mesmo retrato de fases calculando \vec{y} a partir de $\vec{y} = \vec{h}(\vec{x})$ e então determinando $\vec{g}(\vec{y})$, ou calculando $\vec{f}(\vec{x})$ a partir de \vec{x} e depois $\vec{h}(\vec{f}(\vec{x})) = \vec{g}(\vec{y})$.

Figura 26 – Representação esquemática do conceito de equivalência topológica



Fonte: Adaptado de (MONTEIRO, 2011).

Teorema 1 (Teorema de Hartman-Grobman). *Seja E um aberto do \mathbb{R}^n contendo a origem, $f \in C^1(E)$, ϕ_t o fluxo do sistema não-linear (70). Suponha $f(0) = 0$ e que a matriz $A = Df(0)$ não possua autovalores com parte real nula. Então, existe um homeomorfismo H de um aberto U contendo a origem em um aberto V contendo a origem tal que para cada $x_0 \in U$, existe um aberto $I_0 \subset \mathbb{R}$ contendo 0 tal que para todo $t \in I_0$*

$$H_0 \phi_t(x_0) = e^{At} H(x_0)$$

isto é, as trajetórias de (70) próximas a origem são levadas em (71) próximas a origem e o tempo é preservado.

Uma prova do *Teorema de Hartman-Grobman* pode ser encontrada em Dumortier, Llibre e Artés (2006).