



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA "JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Uma conexão entre a Álgebra Linear e a Teoria dos Conjuntos

Tharine Antunes Lopes

Rio Claro
2018



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA "JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Câmpus de Rio Claro

Uma conexão entre a Álgebra Linear e a Teoria dos Conjuntos

Tharine Antunes Lopes

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre

Orientador
Prof. Dr. João Peres Vieira

Rio Claro
2018

512.523 Lopes, Tharine Antunes

L864c Uma conexão entre a Álgebra Linear e a Teoria dos Conjuntos/
Tharine Antunes Lopes- Rio Claro: [s.n.], 2018.
88 f.:fig.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas.

Orientador: João Peres Vieira

1. Espaços Vetoriais. 2. Conjuntos. 3. Funções. 4. Bijeções. I.
Título

TERMO DE APROVAÇÃO

Tharine Antunes Lopes

UMA CONEXÃO ENTRE A ÁLGEBRA LINEAR E A TEORIA DOS
CONJUNTOS

Dissertação APROVADA como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática Universitária do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, pela seguinte banca examinadora:

Prof. Dr. João Peres Vieira
Orientador

Profa. Dra. Marta Cilene Gadotti
Departamento de Matemática - UNESP

Profa. Dra. Letícia Sanches Silva
Departamento de Matemática - UFSCar

Rio Claro, 17 de setembro de 2018

*A Deus e à Nossa Senhora, ao meu avô Randolpho Antunes (in memoriam), a minha
irmã Talita e meu namorado Luiz, dedico.*

Agradecimentos

A Deus por sempre ter me iluminado e protegido.

À minha irmã, por todo amparo que me deu nos estudos para que eu pudesse participar de todas as aulas deste mestrado e pelo carinho e amor que sempre me proporcionou.

Ao meu namorado, Luiz, pela compreensão, dedicação com que me auxiliou quando necessário, pelo companheirismo, segurança e amor de sempre. Obrigada por mostrar o tamanho do meu potencial, por me incentivar, me ouvir e sempre me aconselhar.

À minha família, pelo encorajamento e apoio.

Ao meu orientador, Prof. Dr. João Peres Vieira, pelo incentivo, paciência e confiança em mim depositada.

Aos meus colegas de curso pelo companheirismo, pelas conversas e por deixarem esta etapa mais prazerosa.

Aos professores do Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática do IGCE-UNESP- Rio Claro-SP, pelos ensinamentos e conselhos ao longo de todo o curso. Em especial, Profa. Dra. Elíris Cristina Rizziolli e Profa. Dra. Marta Cilene Gadotti.

Resumo

Este trabalho estabelece uma conexão entre duas disciplinas da Matemática: Álgebra Linear e Teoria dos Conjuntos. O objetivo principal é responder a seguinte pergunta: **É possível dar a um mesmo conjunto mais do que uma estrutura de Espaço Vetorial?** Para isto mostraremos que: "Se conhecermos uma estrutura de espaço vetorial num conjunto V então podemos dar a V tantas outras estruturas de espaço vetorial quantas forem as classes de equivalência de bijeções de V em V , segundo a relação $\sim$ do Teorema 3.10 ". Também construiremos vários exemplos inusitados de espaços vetoriais que não são comumente discutidos num curso de Álgebra Linear, como aplicação do Teorema 3.7 (Teorema da Estrutura), página 38, que é o principal resultado deste trabalho.

Palavras-chave: Espaços Vetoriais, Conjuntos, Funções, Bijeções.

Abstract

This work establishes a connection between two disciplines of Mathematics: Linear Algebra and Sets Theory. The main objective is to answer the following question: **Is it possible to give to the same set more than a vector space structure?** For this we will show that: "If we know a vector space structure in a set V then we can give V as many other vector space structures as the equivalence classes of bijections from V into V , according to the relation $\sim$ of the Theorem 3.10, from the page 38 ". We will also construct several unusual examples of vector spaces that are not commonly discussed in a Linear Algebra course, as an application of the Theorem 3.7 (Structure Theorem), page 38 , which is the main result of this work.

Keywords: Vector Spaces, Sets, Functions, Bijections.

Lista de Figuras

2.1	Projeção Estereográfica.	13
2.2	Inversa da Projeção Estereográfica	14
2.3	$S^1 - \{N\} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\} - \{(0, 1)\}$	18
2.4	$T - \{N\} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 = 1\} - \{(0, 1)\}$	19
2.5	Função $f : S^1 - \{N\} \rightarrow T - \{N\}$	19
2.6	Função $g : T - \{N\} \rightarrow S^1 - \{N\}$	20
2.7	Função $f : X_2 \rightarrow X_3$	27
2.8	Função $g : X_3 \rightarrow X_2$	28

Sumário

1	Introdução	8
2	Conjuntos e Funções	10
2.1	Conjuntos	10
2.2	Funções	11
2.2.1	Bijeções	11
2.3	Exemplos de Bijeções	12
3	Espaços Vetoriais	34
3.1	Estrutura de um Espaço Vetorial	34
3.2	Exemplos de Espaços Vetoriais	35
3.3	Transformações Lineares e Isomorfismos	38
3.4	Resultado Principal	38
4	Construção da conexão	42
4.1	O espaço vetorial $S^n - \{N\}$	42
4.2	O espaço vetorial $\mathbb{R}_+^*$	47
4.3	O espaço vetorial $[-1, 0[\cup]1, \infty[$	48
4.4	O espaço vetorial $T - \{(0, 1)\}$	49
4.5	O espaço vetorial $]0, 2\pi[$	56
4.6	O espaço vetorial $]a, b[$	58
4.7	O espaço vetorial: cilindro $\mathcal{C}$ reunido com um ponto $p \notin \mathcal{C}$	60
4.8	O espaço vetorial: hiperbolóide $\mathcal{H}$ reunido com um ponto $q \notin \mathcal{H}$	63
4.9	O conjunto $\mathbb{R}^2$ com uma nova estrutura de Espaço Vetorial	67
4.10	O conjunto $S^2 - \{N\}$ com uma nova estrutura de Espaço Vetorial	70
5	Comentários Finais	86
	Referências	88

1 Introdução

A teoria dos conjuntos é um dos pilares da Matemática por sua importância e por ser aplicada naturalmente em todas as subáreas da Matemática, como Análise, Álgebra e Topologia.

“Segundo Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845 – 1918): “Um conjunto é qualquer coleção de objetos definidos, distinguíveis, de nossa intuição ou de nosso intelecto, para serem concebidos como um todo. Os objetos são chamados os elementos (membros) do conjunto” [Gilmar Peres Novaes, Introdução à Teoria dos Conjuntos, SBM, 2018]”

Um espaço vetorial é um conjunto, munido de duas operações, satisfazendo certas propriedades. Assim, são espaços vetoriais bem conhecidos: o conjunto das n -uplas de números reais, o conjunto das matrizes $n \times n$ de números complexos, o conjunto das funções reais, entre outros; todos munidos com as operações usuais. Porém não é esperado, por exemplo, que um hiperbolóide reunido com um ponto não pertencente a ele, tenha uma estrutura de espaço vetorial.

Este trabalho, além de exibir exemplos interessantes de espaços vetoriais, ainda mostra uma infinidade de possibilidades de um mesmo conjunto ser espaço vetorial com operações não usuais, ou seja, neste trabalho é quantificado as possíveis construções de espaço vetorial, fixado um dado conjunto.

Vale destacar que embora tenhamos realizado um estudo sobre todos os conceitos e resultados pertinentes ao tema, a “beleza” deste trabalho está na construção dos exemplos inéditos de espaços vetoriais. Portanto, a maior parte do texto é inédito, trazendo uma contribuição relevante à área da Álgebra Linear.

Assim, estabelecemos uma conexão entre a Álgebra Linear e a Teoria dos Conjuntos. Este trabalho será desenvolvido da seguinte forma:

- a) no Capítulo 2, exibiremos vários exemplos de bijeções que serão úteis para a construção de exemplos no Capítulo 4, como por exemplo, a Projeção Estereográfica.
- b) no Capítulo 3, responderemos a pergunta : **É possível dar a um mesmo conjunto mais do que uma estrutura de Espaço Vetorial?**
- c) no Capítulo 4 construiremos vários exemplos inéditos de Espaços Vetoriais.

Para o desenvolvimento deste trabalho usamos as referências [1], [2], [3], [4] e [5] e nos comentários finais a referência [6].

2 Conjuntos e Funções

Neste capítulo daremos definições, teoremas e exemplos de bijeções que serão importantes para o desenvolvimento dos capítulos posteriores. Para maiores detalhes veja as referências [3] e [4].

2.1 Conjuntos

Se S é um conjunto e x é um objeto do conjunto S , dizemos que x é um **membro de S** ou que x é um **elemento de S** ou ainda que x **pertence** a S ou simplesmente que x **está em S** . Se S possui apenas um número finito de membros, $x_1, \dots, x_n$, frequentemente descrevemos S exibindo seus elementos dentro de chaves:

$$S = \{x_1, \dots, x_n\}.$$

Por exemplo, o conjunto S dos inteiros positivos de 1 a 5 é:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Se S e T são conjuntos, dizemos que S é um **subconjunto** de T , ou que S está **contido** em T , se cada membro de S é um membro de T . Cada conjunto S é um subconjunto de si mesmo. Se S é um subconjunto de T mas S e T não são idênticos, denominamos S um **subconjunto próprio** de T . Em outras palavras, S é um subconjunto próprio de T se S está contido em T mas T não está contido em S .

Se S e T são conjuntos, a **reunião** de S com T é o conjunto $S \cup T$, constituído de todos os objetos x que são membros de S ou de T . A **interseção** de S com T é o conjunto $S \cap T$, formado por todos os x que são membros de S e de T . Para dois conjuntos arbitrários, S e T , a interseção $S \cap T$ é um subconjunto da reunião $S \cup T$. Assim, quando dizemos que x está em S ou em T , não excluimos a possibilidade de x estar em ambos S e T .

Para que a interseção de S e T seja sempre um conjunto, é necessário introduzir o **conjunto vazio**, isto é, o conjunto sem elementos, o qual denotaremos por $\emptyset$. Então o conjunto $S \cap T = \emptyset$ se, e somente se, S e T não têm elementos em comum.

2.2 Funções

Uma **função** consiste do seguinte:

- (I) um conjunto X , denominado o domínio da função;
- (II) um conjunto Y , denominado o contradomínio da função;
- (III) uma regra f , que associa a cada elemento $x \in X$ um único elemento $f(x) \in Y$.

Denotaremos por

$$\begin{aligned} f : X &\rightarrow Y \\ x &\mapsto f(x). \end{aligned}$$

Existem outras palavras que são comumente usadas no lugar da palavra "função". Algumas delas são "transformação", "operador" e "aplicação".

Se f é uma função de X em Y , a **imagem** de f é o conjunto dos $f(x)$, para todo x em X . Em outras palavras, a imagem de f consiste dos elementos y em Y tais que $y = f(x)$, para algum x em X . Se a imagem de f é todo o conjunto Y , dizemos que f é uma **função sobrejetora** de X em Y ou simplesmente que f é **sobrejetora**. A imagem de f é frequentemente indicada por $f(X)$.

Seja f uma função de X em Y , f será chamada de **função injetora** se tem a propriedade de que se $x_1 \neq x_2$, então $f(x_1) \neq f(x_2)$, ou equivalentemente, se $f(x_1) = f(x_2)$, então $x_1 = x_2$.

Suponhamos que X , Y e Z sejam conjuntos, que f seja uma função de X em Y e que h seja uma função de Y em Z . Existe, associada a f e h , uma função $h \circ f$ de X em Z , conhecida como a **composta** de h e f . Tal função é definida por

$$(h \circ f)(x) = h(f(x)).$$

2.2.1 Bijeções

Seja f uma função de X em Y , f é **bijetora** se, e somente se, é injetora e sobrejetora. Ou seja, f é bijetora se, e somente se, para qualquer $y \in Y$ existe um único $x \in X$, tal que $f(x) = y$. Por exemplo, a função identidade sobre X , $f(x) = x$. Denotaremos a função identidade sobre um conjunto qualquer Z por Id_Z .

Seja f uma função de X em Y . Dizemos que f é **inversível** se existe uma função g de Y em X tal que

- (i) $g \circ f$ é a função identidade sobre X ;
- (ii) $f \circ g$ é a função identidade sobre Y .

Neste caso denotaremos g por f^{-1} .

Teorema 2.1. *Sejam f uma função de X em Y e g uma função de Y em X . Se $f \circ g = Id_Y$ então f é sobrejetora e g é injetora.*

Demonstração. Primeiramente, vamos mostrar que a função f é sobrejetora. De fato, dado $y \in Y$, tome $g(y) \in X$. Então $f(g(y)) = (f \circ g)(y) = Id_Y(y) = y$. Agora, provemos que a função g é injetora. De fato, se $g(x_1) = g(x_2)$ então $f(g(x_1)) = f(g(x_2))$. Logo, $(f \circ g)(x_1) = (f \circ g)(x_2)$ e daí $Id_X(x_1) = Id_X(x_2)$ e portanto $x_1 = x_2$. $\square$

Observação 2.2. De forma análoga, se $g \circ f = Id_X$ então f é injetora e g é sobrejetora.

Teorema 2.3. Uma função f é inversível se, e somente se, f é bijetora.

Demonstração. Da definição de f ser inversível segue pelo Teorema 2.1 e Observação 2.2 que f é bijetora. Também se $f : X \rightarrow Y$ for bijetora então para cada $y \in Y$ existe um único $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Defina $g : Y \rightarrow X$ por $g(y) = x$. Então $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = x = Id_X(x)$ para todo $x \in X$ e $(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(x) = y = Id_Y(y)$ para todo $y \in Y$. Logo f é inversível. $\square$

Teorema 2.4. Se $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$ são funções bijetoras então $g \circ f : X \rightarrow Z$ é uma função bijetora.

Demonstração. Como f e g são bijetoras existem f^{-1} e g^{-1} funções inversas de f e g , respectivamente. Mostremos que $f^{-1} \circ g^{-1}$ é a inversa de $g \circ f$. De fato, temos $(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} = g \circ Id_Y \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = Id_Z$ e $(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f = f^{-1} \circ Id_Y \circ f = f^{-1} \circ f = Id_X$. Logo, $g \circ f$ é sobrejetora e injetora e portanto $g \circ f$ é bijetora. $\square$

2.3 Exemplos de Bijeções

Nesta seção abordaremos vários exemplos de bijeções que serão utilizados no Capítulo 4. Dentre eles, a projeção estereográfica (que é muito utilizada em cartografia e cartas náuticas das regiões polares) e várias bijeções entre figuras geométricas, como por exemplo, entre o cilindro e o hiperbolóide de uma folha.

Todas as figuras, nos exemplos a seguir, foram feitas pela autora do trabalho. Para isto, foi utilizado o software *GeoGebra Classic 5.0*.

Exemplo 2.5. Neste exemplo, construiremos a Projeção Estereográfica.

Sejam $S^n = \{X = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}; x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$ a esfera unitária n -dimensional e $N = (0, \dots, 0, 1) \in S^n$ o seu pólo norte. A projeção estereográfica definida a seguir, estabelece uma bijeção entre a esfera menos o seu pólo norte e o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Vamos construir

$$\begin{aligned} f : S^n - \{N\} &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ X &\mapsto f(X) = Y \end{aligned}$$

com $X = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$ e $Y = (y_1, \dots, y_n, 0)$, conforme figura a seguir:

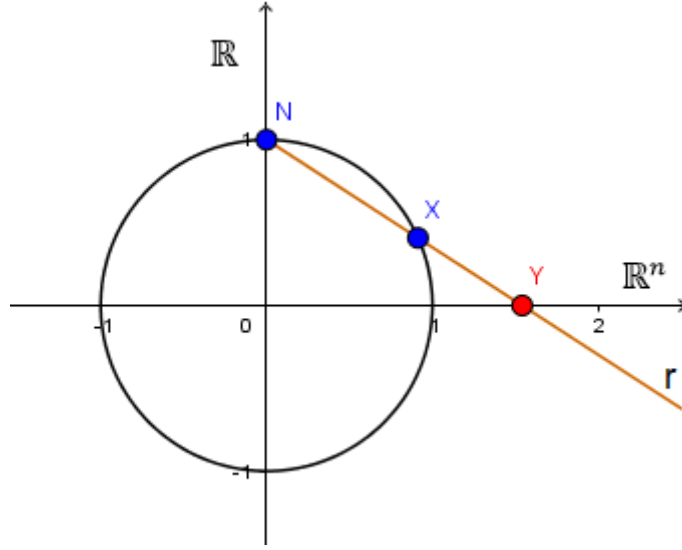


Figura 2.1: Projeção Estereográfica.

Na figura 2.1 dado um ponto $X \in S^n - \{N\}$, queremos encontrar $Y \in \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Para isto traçamos uma semirreta partindo do pólo norte N e passando pelo ponto X . Esta semirreta intercepta $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ no ponto Y . Para encontrar o ponto Y vamos escrever a equação vetorial da reta r e fazer a $(n+1)$ -coordenada do ponto da reta r igual a 0 para determinarmos a função f .

Encontremos então a equação da reta r :

$$\begin{aligned} r : Y &= N + \lambda(X - N); \lambda \in \mathbb{R} \\ &= (0, \dots, 0, 1) + \lambda((x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) - (0, \dots, 0, 1)) \\ &= (0, \dots, 0, 1) + \lambda(x_1, \dots, x_n, x_{n+1} - 1) \\ &= (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n, 1 + \lambda(x_{n+1} - 1)). \end{aligned}$$

Como Y deve ser um ponto de $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, temos que $1 + \lambda(x_{n+1} - 1) = 0$, ou equivalentemente, $\lambda = -1/(x_{n+1} - 1)$, desde que $x_{n+1} \neq 1$.

Logo,

$$\begin{aligned} Y &= (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n, 0) \\ &= \left(\frac{-x_1}{x_{n+1} - 1}, \dots, \frac{-x_n}{x_{n+1} - 1}, 0 \right). \end{aligned}$$

Consideremos agora, a função g , inversa da função f ,

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^n &\rightarrow S^n - \{N\} \\ Y_1 &\rightarrow g(Y_1) = Y \end{aligned}$$

com $Y_1 = (x_1, \dots, x_n, 0)$ e $Y = (y_1, \dots, y_n, y_{n+1})$, conforme figura a seguir:

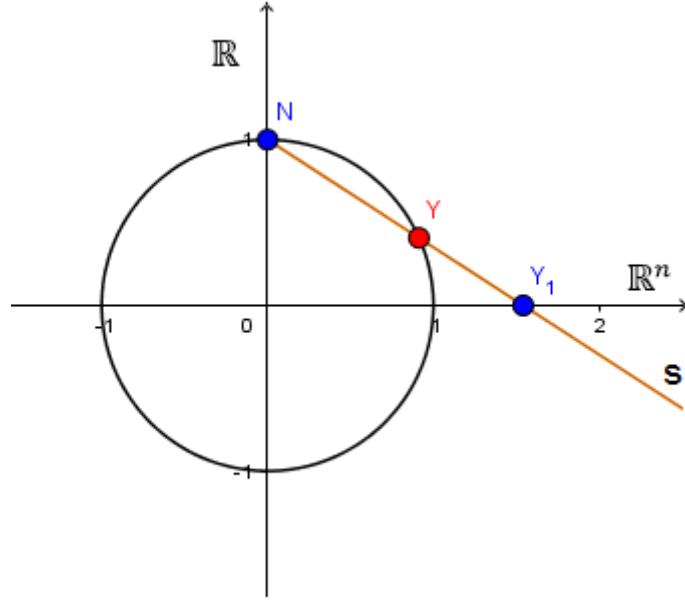


Figura 2.2: Inversa da Projeção Estereográfica

De forma análoga, dado um ponto $Y_1 \in \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, queremos encontrar $Y \in S^n - \{N\}$. Para isto traçamos uma semirreta partindo do pólo norte N e passando pelo ponto Y_1 . Esta semirreta intercepta $S^n - \{N\}$ no ponto Y . Para encontrar o ponto $Y \in S^n - \{N\}$ vamos escrever a equação vetorial da reta s , fazer a $(n+1)$ -coordenada do ponto da reta s diferente de 1 e impor que sua norma é igual a 1, para determinarmos a função g .

Encontremos então a equação da reta s :

$$\begin{aligned} s : Y &= N + \lambda(Y_1 - N); \lambda \in \mathbb{R} \\ &= (0, 0, 0, \dots, 0, 1) + \lambda((x_1, \dots, x_n, 0) - (0, 0, 0, \dots, 0, 1)) \\ &= (0, 0, 0, \dots, 0, 1) + \lambda(x_1, \dots, x_n, -1) \\ &= (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n, 1 - \lambda). \end{aligned}$$

Observemos que como N não está na imagem de g , segue que

$$1 - \lambda \neq 1 \text{ e portanto } \lambda \neq 0.$$

Além disso, como $Y \in S^n - \{N\}$,

$$\begin{aligned} \lambda^2 y_1^2 + \dots + \lambda^2 y_n^2 + (1 - \lambda)^2 &= 1 \\ \lambda^2 y_1^2 + \dots + \lambda^2 y_n^2 + 1 - 2\lambda + \lambda^2 &= 1 \\ \lambda^2(y_1^2 + \dots + y_n^2 + 1) - 2\lambda &= 0 \\ \lambda[\lambda(y_1^2 + \dots + y_n^2 + 1) - 2] &= 0 \end{aligned}$$

então $\lambda(y_1^2 + \dots + y_n^2 + 1) - 2 = 0$, pois temos que $\lambda \neq 0$. Portanto

$$\lambda = \frac{2}{y_1^2 + \dots + y_n^2 + 1}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} Y &= \left(\frac{2y_1}{y_1^2 + \dots + y_n^2 + 1}, \dots, \frac{2y_n}{y_1^2 + \dots + y_n^2 + 1}, 1 - \left(\frac{2}{y_1^2 + \dots + y_n^2 + 1} \right) \right) \\ &= \left(\frac{2y_1}{y_1^2 + \dots + y_n^2 + 1}, \dots, \frac{2y_n}{y_1^2 + \dots + y_n^2 + 1}, \frac{y_1^2 + \dots + y_n^2 - 1}{y_1^2 + \dots + y_n^2 + 1} \right). \end{aligned}$$

Definimos assim as funções f e g , respectivamente, por:

$$f(x) = \left(\frac{-x_1}{x_{n+1} - 1}, \dots, \frac{-x_n}{x_{n+1} - 1} \right), \forall x = (x_1, \dots, x_{n+1}) \in S^n - \{N\} \text{ e}$$

$$\begin{aligned} g(y) &= \left(\frac{2y_1}{y_1^2 + \dots + y_n^2 + 1}, \dots, \frac{2y_n}{y_1^2 + \dots + y_n^2 + 1}, \frac{y_1^2 + \dots + y_n^2 - 1}{y_1^2 + \dots + y_n^2 + 1} \right), \\ &\forall y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Verifiquemos agora que a função f é sobrejetora e injetora.

Com efeito,

1. Pelo Teorema 2.1, para ver que f é sobrejetora, basta mostrar que $f \circ g = Id_{\mathbb{R}^n}$.

De fato,

$$\begin{aligned} (f \circ g)(y) &= f \left(\frac{2y_1}{y_1^2 + \dots + y_n^2 + 1}, \dots, \frac{2y_n}{y_1^2 + \dots + y_n^2 + 1}, \frac{y_1^2 + \dots + y_n^2 - 1}{y_1^2 + \dots + y_n^2 + 1} \right) \\ &= \left(\frac{-\frac{2y_1}{y_1^2 + \dots + y_n^2 + 1}}{\frac{y_1^2 + \dots + y_n^2 - 1}{y_1^2 + \dots + y_n^2 + 1} - 1}, \dots, \frac{-\frac{2y_n}{y_1^2 + \dots + y_n^2 + 1}}{\frac{y_1^2 + \dots + y_n^2 - 1}{y_1^2 + \dots + y_n^2 + 1} - 1} \right) \\ &= \left(\frac{-\frac{2y_1}{y_1^2 + \dots + y_n^2 + 1}}{\frac{y_1^2 + \dots + y_n^2 + 1}{2}}, \dots, \frac{-\frac{2y_n}{y_1^2 + \dots + y_n^2 + 1}}{\frac{y_1^2 + \dots + y_n^2 + 1}{2}} \right) \\ &= (y_1, \dots, y_n) = y = Id_{\mathbb{R}^n}(y). \end{aligned}$$

Portanto, f é sobrejetora.

2. Pelo Teorema 2.1, para ver que f é injetora, basta mostrar que $g \circ f = Id_{S^n - \{N\}}$.

De fato,

$$\begin{aligned}
(g \circ f)(x) &= g\left(\frac{-x_1}{x_{n+1}-1}, \dots, \frac{-x_n}{x_{n+1}-1}\right) \\
&= \left(\frac{\frac{2x_1}{x_{n+1}-1}}{\left(\left(-\frac{x_1}{x_{n+1}-1}\right)^2 + \dots + \left(-\frac{x_n}{x_{n+1}-1}\right)^2 + 1\right)}, \dots, \right. \\
&\quad \left. \frac{\frac{2x_n}{x_{n+1}-1}}{\left(\left(-\frac{x_1}{x_{n+1}-1}\right)^2 + \dots + \left(-\frac{x_n}{x_{n+1}-1}\right)^2 + 1\right)} \right) \\
&= \left(\frac{\left(-\frac{x_1}{x_{n+1}-1}\right)^2 + \dots + \left(-\frac{x_n}{x_{n+1}-1}\right)^2 - 1}{\left(\left(-\frac{x_1}{x_{n+1}-1}\right)^2 + \dots + \left(-\frac{x_n}{x_{n+1}-1}\right)^2 + 1\right)} \right) \\
&= \left(\frac{\frac{2x_1}{x_{n+1}-1}}{\frac{-2}{(x_{n+1}-1)}}, \dots, \frac{\frac{2x_n}{x_{n+1}-1}}{\frac{-2}{(x_{n+1}-1)}}, \frac{\frac{x_1^2}{(x_{n+1}-1)^2} + \dots + \frac{x_n^2}{(x_{n+1}-1)^2} - 1}{\frac{-2}{(x_{n+1}-1)}} \right) \\
&= \left(\frac{\frac{-2x_1}{x_{n+1}-1}}{\frac{-2}{(x_{n+1}-1)}}, \dots, \frac{\frac{-2x_n}{x_{n+1}-1}}{\frac{-2}{(x_{n+1}-1)}}, \frac{\frac{-2x_{n+1}}{(x_{n+1}-1)}}{\frac{-2}{(x_{n+1}-1)}} \right) \\
&= (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = x = Id_{S^n - \{N\}}(x).
\end{aligned}$$

Portanto, f é injetora.

Sendo f uma função sobrejetora e injetora, então f é uma função bijetora com inversa g .

Exemplo 2.6. Neste exemplo, exibiremos uma bijeção entre o conjunto $V =]0, \infty[$ e o conjunto $\mathbb{R}$. Note que a função

$$\begin{aligned}
f : V &\rightarrow \mathbb{R} \\
x &\mapsto \ln x
\end{aligned}$$

estabelece uma bijeção entre V e o espaço euclidiano $\mathbb{R}$, cuja inversa é dada por

$$\begin{aligned}
g : \mathbb{R} &\rightarrow V \\
y &\mapsto e^y.
\end{aligned}$$

Verifiquemos agora que a função f é sobrejetora e injetora.

Com efeito,

1. Pelo Teorema 2.1, para ver que f é sobrejetora, basta mostrar que $f \circ g = Id_{\mathbb{R}}$.

De fato,

$$\begin{aligned}(f \circ g)(y) &= f(g(y)) \\ &= f(e^y) \\ &= \ln(e^y) \\ &= y \\ &= Id_{\mathbb{R}}(y).\end{aligned}$$

Portanto, f é sobrejetora.

2. Pelo Teorema 2.1, para ver que f é injetora, basta mostrar que $g \circ f = Id_V$. De fato,

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= g(\ln x) \\ &= e^{\ln x} \\ &= x \\ &= Id_V(x).\end{aligned}$$

Logo, f é injetora.

Portanto, f é uma função sobrejetora e injetora, isto é f é uma função bijetora com inversa g .

Exemplo 2.7. Neste exemplo, exibiremos uma bijeção entre $M = [-1, 0[\cup]1, \infty[$ e $N =]0, \infty[$. Seja $f : M \rightarrow N$ definida por $f(x) = x^2$, para todo $x \in M$. Evidentemente, f é uma bijeção de M sobre N e sua inversa $g : N \rightarrow M$ é dada por

$$g(y) = \begin{cases} \sqrt{y}, & \text{se } y \in]1, \infty[, \\ -\sqrt{y}, & \text{se } y \in]0, 1]. \end{cases}$$

De fato,

1. Pelo Teorema 2.1, para ver que f é sobrejetora, basta mostrar que $f \circ g = Id_N$.

De fato,

$$\begin{aligned}(f \circ g)(y) &= f(g(y)) \\ &= \begin{cases} f(\sqrt{y}), & \text{se } y \in]1, \infty[, \\ f(-\sqrt{y}), & \text{se } y \in]0, 1] \end{cases} \\ &= \begin{cases} (\sqrt{y})^2, & \text{se } y \in]1, \infty[, \\ (-\sqrt{y})^2, & \text{se } y \in]0, 1] \end{cases} \\ &= y \\ &= Id_N(y), \quad y \in]0, \infty[.\end{aligned}$$

Portanto, f é sobrejetora.

2. Pelo Teorema 2.1, para ver que f é injetora, basta mostrar que $g \circ f = Id_M$. De fato,

$$\begin{aligned}
 (g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\
 &= g(x^2) \\
 &= \begin{cases} \sqrt{x^2}, & \text{se } x \in]1, \infty[, \\ -\sqrt{x^2}, & \text{se } x \in [-1, 0[\end{cases} \\
 &= \begin{cases} x, & \text{se } x \in]1, \infty[, \\ -|x|, & \text{se } x \in [-1, 0[\end{cases} \\
 &= \begin{cases} x, & \text{se } x \in]1, \infty[, \\ -(-x), & \text{se } x \in [-1, 0[\end{cases} \\
 &= \begin{cases} x, & \text{se } x \in]1, \infty[, \\ x, & \text{se } x \in [-1, 0[\end{cases} \\
 &= x, \quad x \in [-1, 0[\cup]1, \infty[\\
 &= Id_M(x), x \in M.
 \end{aligned}$$

Portanto, f é injetora.

Logo, como f é uma função sobrejetora e injetora, então f é uma função bijetora com inversa g .

Exemplo 2.8. Neste exemplo, construiremos uma bijeção entre a circunferência menos o pólo norte e o quadrado menos o pólo norte. Para isto consideremos as figuras a seguir, onde o pólo norte é dado por $N = (0, 1)$.

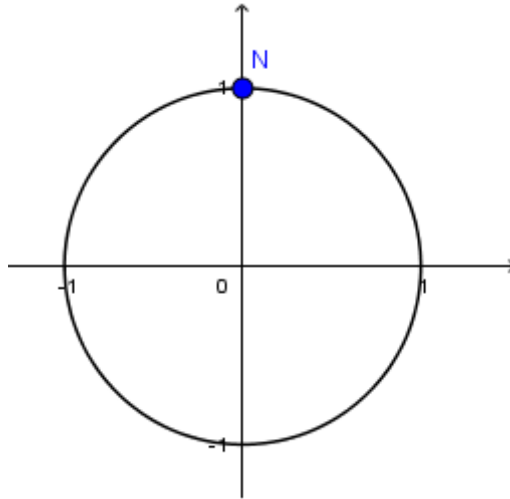


Figura 2.3: $S^1 - \{N\} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\} - \{(0, 1)\}$

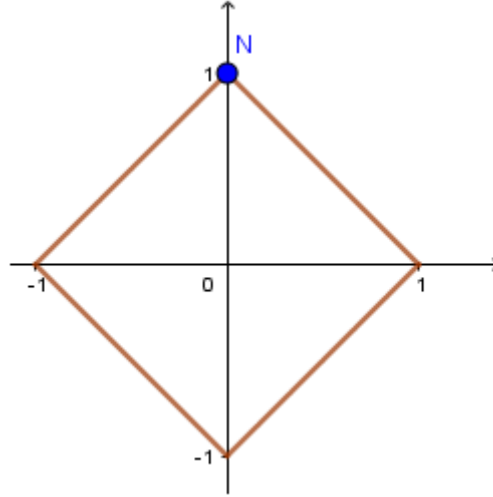


Figura 2.4: $T - \{N\} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1| + |x_2| = 1\} - \{(0, 1)\}$

Definamos a função

$$\begin{aligned} f : S^1 - \{N\} &\rightarrow T - \{N\} \\ X_1 &\mapsto X \end{aligned}$$

onde X é obtido da seguinte forma: dado um ponto $X_1 = (x_1, x_2) \in S^1 - \{N\}$, traçamos uma semirreta partindo da origem e passando pelo ponto X_1 . Esta semirreta intercepta o quadrado menos seu pólo norte no ponto X . Para determinar o ponto X devemos encontrar a equação vetorial da reta r e impor que o ponto da reta esteja em $T - \{N\}$, para determinarmos a função f , conforme a figura a seguir.

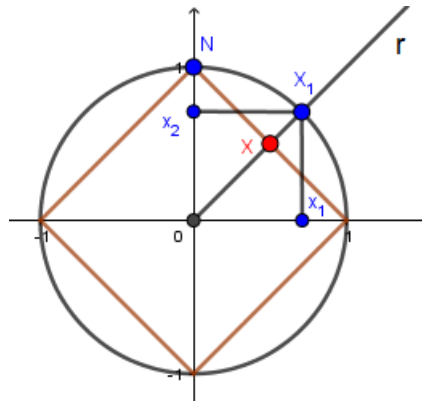


Figura 2.5: Função $f : S^1 - \{N\} \rightarrow T - \{N\}$

Consideremos a equação da semirreta r :

$$\begin{aligned} r : X &= (0, 0) + \lambda(x_1, x_2); \lambda > 0 \\ &= (\lambda x_1, \lambda x_2); \lambda > 0 \end{aligned}$$

e definamos

$$\begin{aligned} f : S^1 - \{N\} &\rightarrow T - \{N\} \\ X_1 &\mapsto X \end{aligned}$$

Como $X \in T - \{N\}$ e $\lambda > 0$, temos que

$$\begin{aligned} |\lambda x_1| + |\lambda x_2| &= 1 \\ |\lambda| |x_1| + |\lambda| |x_2| &= 1 \\ |\lambda| (|x_1| + |x_2|) &= 1 \\ \lambda (|x_1| + |x_2|) &= 1 \\ \lambda &= \frac{1}{|x_1| + |x_2|} > 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} f : S^1 - \{N\} &\rightarrow T - \{N\} \\ X_1 = (x_1, x_2) &\mapsto X = (\lambda x_1, \lambda x_2) = \left(\frac{x_1}{|x_1| + |x_2|}, \frac{x_2}{|x_1| + |x_2|} \right). \end{aligned}$$

Definamos agora, a função g , inversa da função f ,

$$\begin{aligned} g : T - \{N\} &\rightarrow S^1 - \{N\} \\ Y &\mapsto Y_1 \end{aligned}$$

De forma análoga, dado um ponto $Y = (y_1, y_2) \in T - \{N\}$, traçamos uma semirreta partindo da origem e passando pelo ponto Y . Esta semirreta intercepta a circunferência menos seu pólo norte no ponto Y_1 . Para determinar o ponto Y_1 devemos encontrar a equação vetorial da semirreta s e impor que o ponto da semirreta esteja em $S^1 - \{N\}$, para determinar a função g , conforme a figura a seguir.

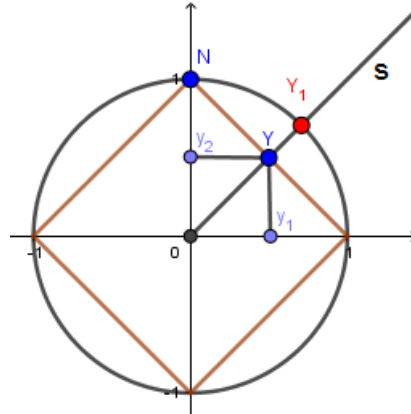


Figura 2.6: Função $g : T - \{N\} \rightarrow S^1 - \{N\}$

Consideremos a equação da semirreta s :

$$\begin{aligned} s : Y_1 &= (0, 0) + \lambda(y_1, y_2) \\ &= (\lambda y_1, \lambda y_2); \lambda > 0. \end{aligned}$$

Como $Y_1 \in S^1 - \{N\}$, então

$$\begin{aligned}
(\lambda y_1)^2 + (\lambda y_2)^2 &= 1 \\
\lambda^2 y_1^2 + \lambda^2 y_2^2 &= 1 \\
\lambda^2 (y_1^2 + y_2^2) &= 1 \\
\lambda^2 &= \frac{1}{y_1^2 + y_2^2}
\end{aligned}$$

e como $\lambda > 0$, $\lambda = \frac{1}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}}$.

Logo,

$$\begin{aligned}
g : T - \{N\} &\rightarrow S^1 - \{N\} \\
Y = (y_1, y_2) &\mapsto Y_1 = \left(\frac{y_1}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}}, \frac{y_2}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} \right).
\end{aligned}$$

Definimos assim as funções f e g :

$$\begin{aligned}
f(x_1, x_2) &= \left(\frac{x_1}{|x_1| + |x_2|}, \frac{x_2}{|x_1| + |x_2|} \right), (x_1, x_2) \in S^1 - \{N\} \text{ e} \\
g(y_1, y_2) &= \left(\frac{y_1}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}}, \frac{y_2}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} \right), (y_1, y_2) \in T - \{N\}.
\end{aligned}$$

Verifiquemos agora que a função f é sobrejetora e injetora.

Com efeito,

1. Pelo Teorema 2.1, para ver que f é sobrejetora, basta mostrar que $f \circ g = Id_{T - \{N\}}$.

De fato, para quaisquer $(y_1, y_2) \in T - \{N\}$,

$$\begin{aligned}
(f \circ g)(y_1, y_2) &= f(g(y_1, y_2)) \\
&= f \left(\frac{y_1}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}}, \frac{y_2}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} \right) \\
&= \left(\frac{\frac{y_1}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}}}{\left| \frac{y_1}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} \right| + \left| \frac{y_2}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} \right|}, \frac{\frac{y_2}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}}}{\left| \frac{y_1}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} \right| + \left| \frac{y_2}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} \right|} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{\frac{y_1}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}}}{\frac{|y_1| + |y_2|}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}}}, \frac{\frac{y_2}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}}}{\frac{|y_1| + |y_2|}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}}} \right) \\
&= \left(\frac{\frac{y_1}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}}}{1}, \frac{\frac{y_2}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}}}{1} \right) \\
&= \left(\frac{y_1}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} \cdot \frac{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}}{1}, \frac{y_2}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} \cdot \frac{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}}{1} \right) \\
&= (y_1, y_2) \\
&= Id_{T-\{N\}}(y_1, y_2).
\end{aligned}$$

Portanto, f é sobrejetora.

2. Pelo Teorema 2.1, para ver que f é injetora, basta mostrar que $g \circ f = Id_{S^1 - \{N\}}$.

De fato, para quaisquer $(x_1, x_2) \in S^1 - \{N\}$,

$$\begin{aligned}
(g \circ f)(x_1, x_2) &= g(f(x_1, x_2)) \\
&= g\left(\frac{x_1}{|x_1| + |x_2|}, \frac{x_2}{|x_1| + |x_2|}\right) \\
&= \left(\frac{\frac{x_1}{|x_1| + |x_2|}}{\sqrt{\left(\frac{x_1}{|x_1| + |x_2|}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{|x_1| + |x_2|}\right)^2}}, \frac{\frac{x_2}{|x_1| + |x_2|}}{\sqrt{\left(\frac{x_1}{|x_1| + |x_2|}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{|x_1| + |x_2|}\right)^2}} \right) \\
&= \left(\frac{\frac{x_1}{|x_1| + |x_2|}}{\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{(|x_1| + |x_2|)^2}}}, \frac{\frac{x_2}{|x_1| + |x_2|}}{\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2}{(|x_1| + |x_2|)^2}}} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{\frac{x_1}{|x_1| + |x_2|}}{\frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{|x_1| + |x_2|}}, \frac{\frac{x_2}{|x_1| + |x_2|}}{\frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{|x_1| + |x_2|}} \right) \\
&= \left(\frac{x_1}{|x_1| + |x_2|} \cdot \frac{|x_1| + |x_2|}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \frac{x_2}{|x_1| + |x_2|} \cdot \frac{|x_1| + |x_2|}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \right) \\
&= \left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \right) \\
&= (x_1, x_2) \\
&= Id_{S^1 - \{N\}}(x_1, x_2),
\end{aligned}$$

desde que em $S^1 - \{N\}$ temos $x_1^2 + x_2^2 = 1$. Portanto, f é injetora.

Sendo f uma função sobrejetora e injetora, então f é uma função bijetora com inversa g .

Exemplo 2.9. Neste exemplo, vamos definir uma bijeção entre o intervalo aberto $]0, 2\pi[$ e o círculo unitário do plano euclidiano menos o ponto $(1, 0)$, a saber,

$$S^1 - \{(1, 0)\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\} - \{(1, 0)\}.$$

Para isto definamos a função $f :]0, 2\pi[\rightarrow S^1 - \{(1, 0)\}$ por $f(t) = (\cos t, \sin t)$, para todo $t \in]0, 2\pi[$.

Observando que todo $p \in S^1 - \{(1, 0)\}$ se escreve como $p = (\cos t, \sin t)$, para um único $t \in]0, 2\pi[$, defina $g : S^1 - \{(1, 0)\} \rightarrow]0, 2\pi[$, como $g(p) = t$.

Verifiquemos agora que a função f é sobrejetora e injetora.

Com efeito,

1. Pelo Teorema 2.1, para ver que f é sobrejetora, basta mostrar que $f \circ g = Id_{S^1 - \{(1, 0)\}}$. De fato, para qualquer $p = (\cos t, \sin t) \in S^1 - \{(1, 0)\}$ temos

$$\begin{aligned}
(f \circ g)(p) &= f(g(p)) \\
&= f(t) \\
&= (\cos t, \sin t) \\
&= p \\
&= Id_{S^1 - \{(1, 0)\}}(p).
\end{aligned}$$

Portanto, f é sobrejetora.

2. Pelo Teorema 2.1, para ver que f é injetora, basta mostrar que $g \circ f = Id_{]0,2\pi[}$. De fato,

$$\begin{aligned}(g \circ f)(t) &= g(f(t)) \\ &= g(\cos t, \sin t) \\ &= t \\ &= Id_{]0,2\pi[}(t).\end{aligned}$$

Portanto, f é injetora.

Sendo f uma função sobrejetora e injetora, então f é uma função bijetora com inversa g .

Exemplo 2.10. Neste exemplo, vamos definir uma bijeção entre o intervalo aberto $]a, b[$ com $a < b$ e a reta $\mathbb{R}$. Para isto, inicialmente, definamos uma bijeção entre o intervalo aberto $]a, b[$ e o intervalo aberto $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. De fato, considere as duas funções a seguir

$$f :]a, b[\rightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

$$x \mapsto \frac{\pi}{b-a}(x-a) - \frac{\pi}{2}$$

e $g :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow]a, b[$, definida por

$$g(y) = a + \frac{b-a}{\pi} \cdot \left(y + \frac{\pi}{2}\right).$$

Verifiquemos agora que a função f é sobrejetora e injetora. De fato,

1. Pelo Teorema 2.1, para ver que f é sobrejetora, basta mostrar que $f \circ g = Id_{]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[}$.

$$\begin{aligned}(f \circ g)(y) &= f(g(y)) \\ &= f\left(a + \frac{b-a}{\pi} \cdot \left(y + \frac{\pi}{2}\right)\right) \\ &= \frac{\pi}{b-a} \left(\left(a + \frac{b-a}{\pi} \cdot \left(y + \frac{\pi}{2}\right)\right) - a \right) - \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{\pi}{b-a} \left(\frac{b-a}{\pi} \cdot \left(y + \frac{\pi}{2}\right) \right) - \frac{\pi}{2} \\ &= y + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \\ &= y \\ &= Id_{]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[}(y).\end{aligned}$$

Portanto, f é sobrejetora.

2. Pelo Teorema 2.1, para ver que f é injetora, basta mostrar que $g \circ f = Id_{]a,b[}$.

$$\begin{aligned}
 (g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\
 &= g\left(\frac{\pi}{b-a}(x-a) - \frac{\pi}{2}\right) \\
 &= a + \frac{b-a}{\pi} \left(\frac{\pi}{b-a}(x-a) - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) \\
 &= a + \frac{b-a}{\pi} \cdot \frac{\pi}{b-a}(x-a) \\
 &= a + x - a \\
 &= x \\
 &= Id_{]a,b[}(x).
 \end{aligned}$$

Portanto, f é injetora.

Sendo f uma função sobrejetora e injetora, então f é uma função bijetora com inversa g . Agora, consideremos $h :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(x) = \operatorname{tg}(x)$ com inversa $l : \mathbb{R} \rightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ dada por $l(y) = \operatorname{arctg}(y)$. Então

$$\begin{aligned}
 h \circ f :]a,b[&\rightarrow \mathbb{R} \\
 x &\rightarrow \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{b-a}(x-a) - \frac{\pi}{2}\right)
 \end{aligned}$$

é inversível com inversa $g \circ l : \mathbb{R} \rightarrow]a,b[$ definida por

$$g \circ l(y) = g(\operatorname{arctg}(y)) = a + \frac{b-a}{\pi} \left(\operatorname{arctg}(y) + \frac{\pi}{2}\right).$$

Logo, pelo Teorema 2.3 a função $h \circ f$ é bijetora.

Exemplo 2.11. Neste exemplo, vamos exibir uma bijeção entre o plano $\mathbb{R}^2$ e o cilindro $\mathcal{C}$ reunido com um ponto $p \notin \mathcal{C}$, que denotaremos por

$$X_2 = \mathcal{C} \cup \{p\} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = 1\} \cup \{p\}.$$

Definamos a função

$$\begin{aligned}
 f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow X_2 \\
 x = (x_1, x_2) &\mapsto f(x) = \begin{cases} \left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \frac{1}{2} \ln(x_1^2 + x_2^2) \right), & \text{se } x \neq (0, 0) \\ p, & \text{se } x = (0, 0) \end{cases}
 \end{aligned}$$

Consideremos agora, a função g , inversa da função f .

$$g : X_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$y = (y_1, y_2, y_3) \mapsto g(y) = \begin{cases} (y_1 e^{y_3}, y_2 e^{y_3}), & \text{se } y \in \mathcal{C} \\ (0, 0), & \text{se } y = \{p\} \end{cases}$$

Verifiquemos agora que a função f é sobrejetora e injetora.

Com efeito,

1. Pelo Teorema 2.1, para ver que f é sobrejetora, basta mostrar que $f \circ g = Id_{X_2}$.

De fato, se $y \in \mathcal{C}$, então $(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(y_1 e^{y_3}, y_2 e^{y_3}) =$

$$= \left(\frac{y_1 e^{y_3}}{\sqrt{(y_1 e^{y_3})^2 + (y_2 e^{y_3})^2}}, \frac{y_2 e^{y_3}}{\sqrt{(y_1 e^{y_3})^2 + (y_2 e^{y_3})^2}}, \frac{1}{2} \ln((y_1 e^{y_3})^2 + (y_2 e^{y_3})^2) \right)$$

$$= \left(\frac{y_1 e^{y_3}}{e^{y_3}}, \frac{y_2 e^{y_3}}{e^{y_3}}, \frac{1}{2} \ln(e^{y_3})^2 \right)$$

$$= \left(\frac{y_1 e^{y_3}}{e^{y_3}}, \frac{y_2 e^{y_3}}{e^{y_3}}, \ln(e^{y_3}) \right)$$

$$= (y_1, y_2, y_3)$$

$$= y$$

e se $y = p$ então $(f \circ g)(y) = (f \circ g)(p) = f(0, 0) = p$.

Portanto, $f \circ g = Id_{X_2}$ e f é sobrejetora.

2. Pelo Teorema 2.1, para ver que f é injetora, basta mostrar que $g \circ f = Id_{\mathbb{R}^2}$.

De fato, se $x \neq (0, 0)$, então

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= g \left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \frac{1}{2} \ln(x_1^2 + x_2^2) \right) \\ &= \left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} e^{\frac{1}{2} \ln(x_1^2 + x_2^2)}, \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} e^{\frac{1}{2} \ln(x_1^2 + x_2^2)} \right) \\ &= \left(\frac{x_1 \sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \frac{x_2 \sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \right) \\ &= (x_1, x_2) \\ &= x, \text{ se } x \neq (0, 0) \end{aligned}$$

e se $x = (0, 0)$ então $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(0, 0) = g(f(0, 0)) = g(p) = (0, 0)$.

Portanto, $g \circ f = Id_{\mathbb{R}^2}$ e f é injetora.

Sendo f uma função sobrejetora e injetora, então f é uma função bijetora com inversa g .

Exemplo 2.12. Neste exemplo vamos mostrar que existe uma bijeção entre o cilindro $\mathcal{C}$ reunido com um ponto $p \notin \mathcal{C}$, que denotaremos por

$$X_2 = \mathcal{C} \cup \{p\} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = 1\} \cup \{p\}$$

e o hiperbolóide $\mathcal{H}$ reunido com um ponto $q \notin \mathcal{H}$, que denotaremos por

$$X_3 = \mathcal{H} \cup \{q\} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 1\} \cup \{q\}.$$

Vamos definir agora a função

$$\begin{aligned} f : X_2 &\rightarrow X_3 \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

onde $f(x)$ é obtida da seguinte forma: $f(p) = q$ e dado um ponto $X = (x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{C}$, traçamos uma semirreta r partindo do ponto $A = (0, 0, x_3)$ e passando pelo ponto X . Esta semirreta intercepta o hiperbolóide $\mathcal{H}$ no ponto Y . Para determinar o ponto Y devemos encontrar a equação vetorial da reta r e impor que o ponto da reta r esteja em $\mathcal{H}$, para determinarmos a função f , conforme a figura a seguir.

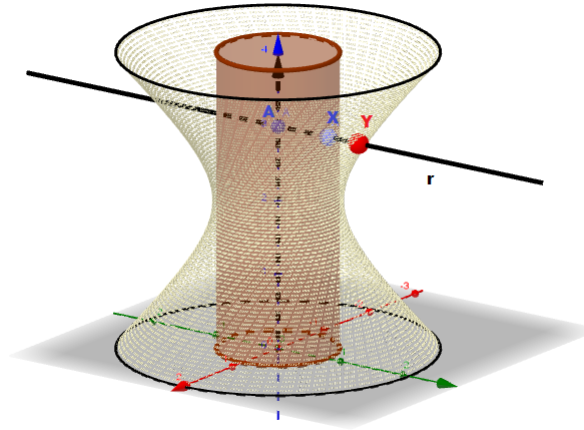


Figura 2.7: Função $f : X_2 \rightarrow X_3$

Consideremos a equação da semirreta r :

$$r : X = (\lambda x_1, \lambda x_2, x_3), \lambda > 0.$$

Pela equação do hiperbolóide temos:

$$\begin{aligned} (\lambda x_1)^2 + (\lambda x_2)^2 - (x_3)^2 &= 1 \\ \lambda^2(x_1^2 + x_2^2) - x_3^2 &= 1. \end{aligned}$$

Como $X = (x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{C}$, $x_1^2 + x_2^2 = 1 + x_3^2$. Assim,

$$\begin{aligned} \lambda^2 - x_3^2 &= 1 \\ \lambda &= \sqrt{1 + x_3^2}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} f : X_2 &\rightarrow X_3 \\ X = (x_1, x_2, x_3) &\rightarrow Y = \begin{cases} (x_1\sqrt{1+x_3^2}, x_2\sqrt{1+x_3^2}, x_3), & \text{se } (x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{C} \\ q, & \text{se } x = p \end{cases} \end{aligned}$$

Definamos agora, a função g , inversa da função f ,

$$\begin{aligned} g : X_3 &\rightarrow X_2 \\ Y &\mapsto X. \end{aligned}$$

De forma análoga, dado um ponto $Y \in \mathcal{H}$, traçamos uma semirreta s partindo do ponto $A = (0, 0, x_3)$ e passando pelo ponto Y . Esta semirreta intercepta o cilindro $\mathcal{C}$ no ponto X . Para determinar o ponto X devemos encontrar a equação vetorial da reta s e impor que o ponto da reta s esteja em $\mathcal{C}$, para determinar a função g , conforme a figura a seguir.

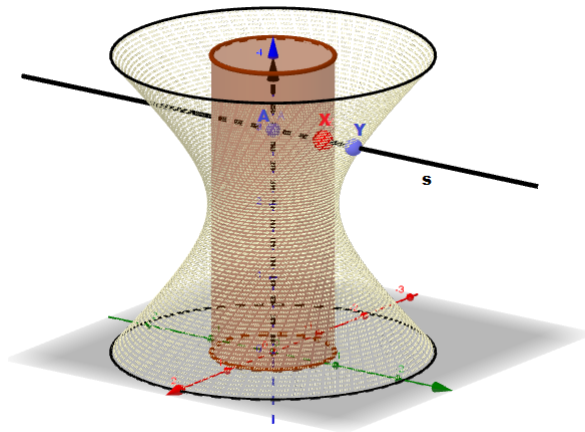


Figura 2.8: Função $g : X_3 \rightarrow X_2$

Consideremos a equação da semirreta s :

$$s : Y = (\lambda y_1, \lambda y_2, y_3), \lambda > 0.$$

Pela equação do cilindro temos:

$$\begin{aligned} (\lambda y_1)^2 + (\lambda y_2)^2 &= 1 \\ \lambda^2(y_1^2 + y_2^2) &= 1. \end{aligned}$$

Como a equação do hiperbolóide é dada por $y_1^2 + y_2^2 = 1 + y_3^2$, temos que

$$\begin{aligned} \lambda^2(y_1^2 + y_2^2) &= 1 \\ \lambda^2(1 + y_3^2) &= 1 \\ \lambda^2 &= (1 + y_3^2)^{-1} \\ \lambda &= (1 + y_3^2)^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Logo,

$$g : X_3 \rightarrow X_2$$

$$Y = (y_1, y_2, y_3) \mapsto X = \begin{cases} \left(y_1(1 + y_3^2)^{-\frac{1}{2}}, y_2(1 + y_3^2)^{-\frac{1}{2}}, y_3 \right), & \text{se } (y_1, y_2, y_3) \in \mathcal{H} \\ p, & \text{se } y = q. \end{cases}$$

Definimos assim as funções f e g :

$$f(x) = \begin{cases} \left(x_1 \sqrt{1 + x_3^2}, x_2 \sqrt{1 + x_3^2}, x_3 \right), & \text{se } (x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{C} \\ q, & \text{se } x = p \end{cases} \quad e$$

$$g(y) = \begin{cases} \left(y_1(1 + y_3^2)^{-\frac{1}{2}}, y_2(1 + y_3^2)^{-\frac{1}{2}}, y_3 \right), & \text{se } (y_1, y_2, y_3) \in \mathcal{H} \\ p, & \text{se } y = q. \end{cases}$$

Verifiquemos agora que a função f é sobrejetora e injetora.

Com efeito,

1. Pelo Teorema 2.1, para ver que f é sobrejetora, basta mostrar que $f \circ g = Id_{X_3}$.

$$\begin{aligned}
(f \circ g)(y) &= f(g(y)) \\
&= \begin{cases} f\left(y_1(1+y_3^2)^{-\frac{1}{2}}, y_2(1+y_3^2)^{-\frac{1}{2}}, y_3\right), & \text{se } (y_1, y_2, y_3) \in \mathcal{H} \\ f(p), & \text{se } y = q. \end{cases} \\
&= \begin{cases} \left(\left(y_1(1+y_3^2)^{-\frac{1}{2}}\right)\sqrt{1+y_3^2}, \left(y_2(1+y_3^2)^{-\frac{1}{2}}\right)\sqrt{1+y_3^2}, y_3\right), & \text{se } (y_1, y_2, y_3) \in \mathcal{H} \\ q, & \text{se } y = q \end{cases} \\
&= \begin{cases} \left(\frac{y_1}{\sqrt{1+y_3^2}} \cdot \sqrt{1+y_3^2}, \frac{y_2}{\sqrt{1+y_3^2}} \cdot \sqrt{1+y_3^2}, y_3\right), & \text{se } (y_1, y_2, y_3) \in \mathcal{H} \\ q, & \text{se } y = q \end{cases} \\
&= \begin{cases} (y_1, y_2, y_3), & \text{se } (y_1, y_2, y_3) \in \mathcal{H} \\ q, & \text{se } y = q \end{cases} \\
&= y \\
&= Id_{X_3}(y).
\end{aligned}$$

Portanto, f é sobrejetora.

2. Pelo Teorema 2.1, para ver que f é injetora, basta mostrar que $g \circ f = Id_{X_2}$.

$$\begin{aligned}
(g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\
&= \begin{cases} g\left(x_1\sqrt{1+x_3^2}, x_2\sqrt{1+x_3^2}, x_3\right), & \text{se } (x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{C} \\ g(q), & \text{se } x = p \end{cases} \\
&= \begin{cases} \left((x_1\sqrt{1+x_3^2})(1+x_3^2)^{-\frac{1}{2}}, (x_2\sqrt{1+x_3^2})(1+x_3^2)^{-\frac{1}{2}}, x_3\right), & \text{se } (x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{C} \\ p, & \text{se } x = p \end{cases} \\
&= \begin{cases} \left(\frac{x_1\sqrt{1+x_3^2}}{\sqrt{1+x_3^2}}, \frac{x_2\sqrt{1+x_3^2}}{\sqrt{1+x_3^2}}, x_3\right), & \text{se } (x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{C} \\ p, & \text{se } x = p \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{cases} (x_1, x_2, x_3), & \text{se } (x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{C} \\ p, & \text{se } x = p \end{cases} \\
&= x \\
&= Id_{X_2}(x).
\end{aligned}$$

Portanto, f é injetora.

Sendo f uma função sobrejetora e injetora, então f é uma função bijetora com inversa g .

Exemplo 2.13. Dadas as funções

$$\begin{aligned}
h: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\
x &\mapsto h(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \geq 0 \\ x, & \text{se } x < 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
l: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\
x &\mapsto l(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{se } x \geq 0 \\ x, & \text{se } x < 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

definamos as funções

$$\begin{aligned}
f: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\
(x, y) &\mapsto f(x, y) = (h(x), y)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
g: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\
(x, y) &\mapsto g(x, y) = (l(x), y)
\end{aligned}$$

Verifiquemos que a função f é bijetora com inversa g .

Com efeito,

1. Pelo Teorema 2.1, para ver que f é sobrejetora, basta mostrar que $f \circ g = Id_{\mathbb{R}^2}$.

$$\begin{aligned}
(f \circ g)(x, y) &= f(g(x, y)) \\
&= f(l(x), y) \\
&= \begin{cases} f(\sqrt{x}, y), & \text{se } x \geq 0 \\ f(x, y), & \text{se } x < 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} (h(\sqrt{x}), y), & \text{se } x \geq 0 \\ (h(x), y), & \text{se } x < 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{cases} ((\sqrt{x})^2, y), & \text{se } x \geq 0 \\ (x, y), & \text{se } x < 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} (\sqrt{x^2}, y), & \text{se } x \geq 0 \\ (x, y), & \text{se } x < 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} (|x|, y), & \text{se } x \geq 0 \\ (x, y), & \text{se } x < 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} (x, y), & \text{se } x \geq 0 \\ (x, y), & \text{se } x < 0 \end{cases} \\
&= (x, y) \\
&= Id_{\mathbb{R}^2}(x, y)
\end{aligned}$$

Portanto, f é sobrejetora.

2. Pelo Teorema 2.1, para ver que f é injetora, basta mostrar que $g \circ f = Id_{\mathbb{R}^2}$.

$$\begin{aligned}
(g \circ f)(x, y) &= g(f(x, y)) \\
&= g(h(x), y) \\
&= \begin{cases} g(x^2, y), & \text{se } x \geq 0 \\ g(x, y), & \text{se } x < 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} (l(x^2), y), & \text{se } x \geq 0 \\ (l(x), y), & \text{se } x < 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} (\sqrt{x^2}, y), & \text{se } x \geq 0 \\ (x, y), & \text{se } x < 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} (|x|, y), & \text{se } x \geq 0 \\ (x, y), & \text{se } x < 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} (x, y), & \text{se } x \geq 0 \\ (x, y), & \text{se } x < 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$= (x, y)$$

$$= Id_{\mathbb{R}^2}(x, y)$$

Portanto, f é injetora.

Assim, f é uma função bijetora com inversa g .

3 Espaços Vetoriais

Neste capítulo apresentaremos algumas definições, daremos alguns exemplos de Espaços Vetoriais e responderemos a pergunta: "É possível dar a um mesmo conjunto mais do que uma estrutura de Espaço Vetorial?". Para maiores detalhes veja as referências [1] e [2].

3.1 Estrutura de um Espaço Vetorial

Definição 3.1. *Um **espaço vetorial** (ou espaço linear) consiste do seguinte:*

1. *um corpo F de escalares;*
2. *um conjunto V de objetos, denominados vetores;*
3. *uma regra (ou operação), dita **adição de vetores**, que associa a cada par de vetores x, y em V um vetor $x + y$ em V , denominado a soma de x e y , de maneira tal que*
 - (A1) *a adição é comutativa, $x + y = y + x$;*
 - (A2) *a adição é associativa, $x + (y + z) = (x + y) + z$;*
 - (A3) *existe um único vetor 0 em V , denominado o vetor nulo, tal que $x + 0 = x$ para todo x em V ;*
 - (A4) *para cada vetor x em V existe um único vetor $-x$ em V tal que $x + (-x) = 0$;*
4. *uma regra (ou operação), dita **multiplicação escalar**, que associa a cada escalar c em F e a cada vetor x em V um vetor $c \cdot x$ em V , denominado o produto de c por x de maneira tal que*
 - (M1) *$1 \cdot x = x$, para todo x em V ;*
 - (M2) *$(c_1 c_2) \cdot x = c_1 \cdot (c_2 \cdot x)$;*
 - (M3) *$c \cdot (x + y) = c \cdot x + c \cdot y$;*
 - (M4) *$(c_1 + c_2) \cdot x = c_1 \cdot x + c_2 \cdot x$.*

É importante observar, como afirma a definição, que um espaço vetorial é um objeto composto de um corpo, um conjunto de "vetores" e duas operações com certas propriedades especiais. O mesmo conjunto de vetores pode ser parte de diversos espaços vetoriais. Quando não há possibilidade de confusão, podemos simplesmente nos referir ao espaço vetorial por V ou, quando for desejável especificar o corpo, dizer que V é um **espaço vetorial sobre o corpo F** . O nome "vetor" é aplicado aos elementos do conjunto V mais por conveniência.

3.2 Exemplos de Espaços Vetoriais

Nesta seção abordaremos alguns exemplos de espaços vetoriais que serão utilizados na construção dos espaços vetoriais do capítulo 4.

Exemplo 3.2. *O espaço das n -uplas, $\mathbb{R}^n$. Seja $\mathbb{R}$ o corpo dos reais e seja $\mathbb{R}^n$ o conjunto de todas as n -uplas $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de escalares x_i em $\mathbb{R}$. Se $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ com y_i em $\mathbb{R}$, a soma de x e y é definida por*

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n).$$

O produto de um escalar c por um vetor x é definido por

$$cx = (cx_1, cx_2, \dots, cx_n).$$

O fato de que esta adição de vetores e multiplicação escalar satisfazem as condições de (A1) até (A4) e (M1) até (M4) é fácil de verificar, usando as propriedades semelhantes da adição e multiplicação de elementos de $\mathbb{R}$.

Portanto, $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$.

Exemplo 3.3. *Seja $V = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} =]0, \infty[$. Definamos a adição em V como sendo a multiplicação de números reais positivos, isto é,*

$$x \oplus y = xy, \quad \forall x, y \in V$$

e a multiplicação de um número real por um elemento de V dada por:

$$\alpha \odot x = x^\alpha, \quad \forall x \in V \quad \text{e} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Com isso o conjunto V se torna um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. De fato, esta adição de vetores e multiplicação por escalar satisfazem as condições de (A1) até (A4) e (M1) até (M4):

$$\begin{aligned} \text{(A1) Comutativa: } x \oplus y &= xy \\ &= yx \\ &= y \oplus x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A2}) \text{ Associativa: } x \oplus (y \oplus z) &= x \oplus (yz) \\
&= x(yz) \\
&= (xy)z \\
&= (xy) \oplus z \\
&= (x \oplus y) \oplus z.
\end{aligned}$$

(A3) Elemento neutro: 1 é o elemento neutro de V , pois

$$\begin{aligned}
x \oplus 1 &= x1 \\
&= x, \text{ para todo } x \in V.
\end{aligned}$$

(A4) Elemento oposto: x^{-1} é o elemento oposto de x , pois

$$\begin{aligned}
x \oplus x^{-1} &= xx^{-1} \\
&= 1, \text{ para todo } x \in V.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{M1}) \quad 1 \odot x &= x^1 \\
&= x, \text{ para todo } x \text{ em } V.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{M2}) \quad (c_1 c_2) \odot x &= x^{(c_1 c_2)} \\
&= (x^{c_1})^{c_2} \\
&= (x^{c_2})^{c_1} \\
&= c_1 \odot (x^{c_2}) \\
&= c_1 \odot (c_2 \odot x).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{M3}) \quad \alpha \odot (x \oplus y) &= \alpha \odot (xy) \\
&= (xy)^\alpha \\
&= x^\alpha y^\alpha \\
&= x^\alpha \oplus y^\alpha \\
&= (\alpha \odot x) \oplus (\alpha \odot y).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{M4}) \quad (c_1 + c_2) \odot x &= x^{(c_1 + c_2)} \\
&= x^{c_1} x^{c_2} \\
&= (x^{c_1}) \oplus (x^{c_2}) \\
&= (c_1 \odot x) \oplus (c_2 \odot x).
\end{aligned}$$

Exemplo 3.4. Seja $V = \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$. Definamos a adição em V ,

$$x \oplus y = \arctg(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y), \quad \forall x, y \in V$$

e a multiplicação de um número real por um elemento de V dada por:

$$\alpha \odot x = \arctg(\alpha \cdot \operatorname{tg} x), \quad \forall x \in V \text{ e } \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

Com isso o conjunto V se torna um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. De fato, esta adição de vetores e multiplicação por escalar satisfazem as condições de (A1) até (A4) e (M1) até (M4):

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A1}) \text{ Comutativa: } x \oplus y &= \arctg(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y) \\
&= \arctg(\operatorname{tg} y + \operatorname{tg} x) \\
&= y \oplus x.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A2}) \text{ Associativa: } x \oplus (y \oplus z) &= x \oplus (\arctg(\operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z)) \\
&= \arctg(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} \circ \arctg(\operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z)) \\
&= \arctg(\operatorname{tg} x + (\operatorname{tg} y + \operatorname{tg} z)) \\
&= \arctg((\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y) + \operatorname{tg} z) \\
&= \arctg(\operatorname{tg} \circ \arctg(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y) + \operatorname{tg} z) \\
&= (\arctg(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y)) \oplus z \\
&= (x \oplus y) \oplus z.
\end{aligned}$$

(A3) Elemento neutro: 0 é o elemento neutro de V , pois

$$\begin{aligned}
x \oplus 0 &= \arctg(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 0) \\
&= \arctg(\operatorname{tg} x) \\
&= x, \text{ para todo } x \in V.
\end{aligned}$$

(A4) Elemento oposto: $-x$ é o elemento oposto de x , pois

$$\begin{aligned}
x \oplus (-x) &= \arctg(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}(-x)) \\
&= \arctg(\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} x) \\
&= \arctg 0 \\
&= 0, \text{ para todo } x \in V.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{M1}) \quad 1 \odot x &= \arctg(1 \cdot \operatorname{tg} x) \\
&= \arctg(\operatorname{tg} x) \\
&= x, \text{ para todo } x \text{ em } V.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{M2}) \quad (c_1 c_2) \odot x &= \arctg((c_1 c_2) \cdot \operatorname{tg} x) \\
&= \arctg(c_1 \cdot (c_2 \cdot \operatorname{tg} x)) \\
&= \arctg(c_1 \cdot \operatorname{tg} \circ \arctg(c_2 \cdot \operatorname{tg} x)) \\
&= c_1 \odot (\arctg(c_2 \cdot \operatorname{tg} x)) \\
&= c_1 \odot (c_2 \odot x).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{M3}) \quad \alpha \odot (x \oplus y) &= \alpha \odot (\arctg(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y)) \\
&= \arctg(\alpha \cdot \operatorname{tg} \circ \arctg(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y)) \\
&= \arctg(\alpha \cdot (\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y)) \\
&= \arctg(\alpha \cdot \operatorname{tg} x + \alpha \cdot \operatorname{tg} y) \\
&= \arctg(\operatorname{tg} \circ \arctg(\alpha \cdot \operatorname{tg} x) + \operatorname{tg} \circ \arctg(\alpha \cdot \operatorname{tg} y)) \\
&= (\arctg(\alpha \cdot \operatorname{tg} x)) \oplus (\arctg(\alpha \cdot \operatorname{tg} y)) \\
&= (\alpha \odot x) \oplus (\alpha \odot y).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\text{M4}) \quad (c_1 + c_2) \odot x &= \arctg((c_1 + c_2) \cdot \operatorname{tg} x) \\
&= \arctg(c_1 \cdot \operatorname{tg} x + c_2 \cdot \operatorname{tg} x) \\
&= \arctg(\operatorname{tg} \circ \arctg(c_1 \cdot \operatorname{tg} x) + \operatorname{tg} \circ \arctg(c_2 \cdot \operatorname{tg} x)) \\
&= \arctg(c_1 \cdot \operatorname{tg} x) \oplus \arctg(c_2 \cdot \operatorname{tg} x) \\
&= (c_1 \odot x) \oplus (c_2 \odot x).
\end{aligned}$$

O elemento neutro de $V =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ é $y = 0$ e o elemento oposto de $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ é $-x$.

3.3 Transformações Lineares e Isomorfismos

Iniciamos esta seção com definições de aplicações especiais entre espaços vetoriais, a saber,

Definição 3.5. *Sejam V e W espaços vetoriais sobre o corpo F . Uma **transformação linear** de V em W é uma função T de V em W , tal que*

$$T(cx + y) = cT(x) + T(y)$$

para todos x e y em V e todos os escalares c em F .

Definição 3.6. *Se V e W são espaços vetoriais sobre o corpo F , uma transformação linear bijetora (injetora e sobrejetora) T de V em W é denominada um **isomorfismo** de V em W . Se existir um isomorfismo de V em W , diremos que V é **isomorfo** a W .*

3.4 Resultado Principal

Esta seção tem como principal objetivo responder a seguinte pergunta: **É possível dar a um mesmo conjunto mais do que uma estrutura de Espaço Vetorial?** Para isso provaremos o seguinte resultado:

Teorema 3.7 (Teorema da Estrutura). *Sejam V um conjunto não-vazio arbitrário e $(W, +, \cdot)$ um espaço vetorial sobre o corpo F . Se existe uma função bijetora $f : V \rightarrow W$, então podemos definir operações $\oplus$ e $\odot$ em V de modo que $(V, \oplus, \odot)$ seja também um espaço vetorial sobre o corpo F .*

Demonstração. Consideremos a função inversa $g = f^{-1}$ e definamos para quaisquer $v_1, v_2 \in V$,

$$v_1 \oplus v_2 = g(f(v_1) + f(v_2))$$

e para qualquer $\alpha \in F$ e $v \in V$ definamos

$$\alpha \odot v = g(\alpha \cdot f(v)).$$

Mostremos que $(V, \oplus, \odot)$ é um espaço vetorial sobre F . De fato, para quaisquer x, y e z em V e c, c_1 e c_2 em F temos:

1. $x \oplus y = g(f(x) + f(y)) = g(f(y) + f(x)) = y \oplus x$, pois a adição “+” é comutativa em W .
2. $x \oplus (y \oplus z) = x \oplus g(f(y) + f(z)) = g(f(x) + (f \circ g(f(y) + f(z)))) = g(f(x) + (f(y) + f(z))) = g((f(x) + f(y)) + f(z)) = g(f \circ g(f(x) + f(y)) + f(z)) = g(f(g(f(x) + f(y))) + f(z)) = g(f(x) + f(y)) \oplus z = (x \oplus y) \oplus z$, pois a adição “+” é associativa em W .
3. Como existe um único vetor 0 em W tal que $w + 0 = w$ para todo $w \in W$, então $g(0)$ é unicamente determinado (pois g é bijetora) e $x \oplus g(0) = g(f(x) + f(g(0))) = g(f(x) + (f \circ g)(0)) = g(f(x) + 0) = g(f(x)) = (g \circ f)(x) = x$, para todo $x \in W$.
4. Como para cada vetor w em W existe um único vetor $-w$ em W tal que $w + (-w) = 0$ então para cada vetor x em V , $-f(x)$ é unicamente determinado em W tal que $f(x) + (-f(x)) = 0$ e portanto $g(-f(x))$ é unicamente determinado em V (pois g é bijetora) e temos que $x \oplus g(-f(x)) = g(f(x) + f(g(-f(x)))) = g(f(x) + (f \circ g)(-f(x))) = g(f(x) + (-f(x))) = g(0)$.
5. $1 \odot x = g(1 \cdot f(x)) = g(f(x)) = (g \circ f)(x) = x$.
6. $(c_1 c_2) \odot x = g((c_1 c_2) \cdot f(x)) = g(c_1 \cdot (c_2 \cdot f(x))) = g(c_1 \cdot (f \circ g)(c_2 \cdot f(x))) = g(c_1 \cdot f(g(c_2 \cdot f(x)))) = c_1 \odot g(c_2 \cdot f(x)) = (c_1 \odot (c_2 \odot x))$.
7. $c \odot (x \oplus y) = c \odot g(f(x) + f(y)) = g(c \cdot f(g(f(x) + f(y)))) = g(c \cdot (f \circ g)(f(x) + f(y))) = g(c \cdot (f(x) + f(y))) = g(c \cdot f(x) + c \cdot f(y)) = g((f \circ g)(c \cdot f(x)) + (f \circ g)(c \cdot f(y))) = g(f(g(c \cdot f(x))) + f(g(c \cdot f(y)))) = g(c \cdot f(x)) \oplus g(c \cdot f(y)) = c \odot x \oplus c \odot y$.
8. $(c_1 + c_2) \odot x = g((c_1 + c_2) \cdot f(x)) = g(c_1 \cdot f(x) + c_2 \cdot f(x)) = g((f \circ g)(c_1 \cdot f(x)) + (f \circ g)(c_2 \cdot f(x))) = g(f(g(c_1 \cdot f(x))) + f(g(c_2 \cdot f(x)))) = g(c_1 \cdot f(x)) \oplus g(c_2 \cdot f(x)) = c_1 \odot x \oplus c_2 \odot x$.

□

Observação 3.8. Da mesma forma, se $(V, +, \cdot)$ é um espaço vetorial e f é uma bijeção de V em W podemos dar uma estrutura de espaço vetorial para W definindo a adição $\oplus$ e a multiplicação por escalar $\odot$ da seguinte forma:

Sendo $g = f^{-1}$ a função inversa de f , definimos

$$w_1 \oplus w_2 = f(g(w_1) + g(w_2))$$

e

$$\alpha \odot w_1 = f(\alpha \cdot g(w_1))$$

Teorema 3.9. Se $(V, +, \cdot)$ é um espaço vetorial sobre o corpo F e $f : (V, +, \cdot) \rightarrow (W, \oplus, \odot)$ é um isomorfismo, então as operações $\oplus$ e $\odot$, definidas na demonstração do Teorema 3.7, coincidem com as operações $+$ e $\cdot$, respectivamente.

Demonstração. Com efeito, denotando por f^{-1} a função inversa de f , temos para quaisquer $v_1, v_2 \in V$,

$$\begin{aligned} v_1 \oplus v_2 &= f^{-1}(f(v_1) + f(v_2)) \\ &= f^{-1}(f(v_1 + v_2)) \\ &= (f^{-1} \circ f)(v_1 + v_2) \\ &= id_V(v_1 + v_2) \\ &= v_1 + v_2 \end{aligned}$$

e para qualquer $\alpha \in F$ e $v \in V$

$$\begin{aligned} \alpha \odot v &= f^{-1}(\alpha \cdot f(v)) \\ &= f^{-1}(f(\alpha \cdot v)) \\ &= (f^{-1} \circ f)(\alpha \cdot v) \\ &= id_V(\alpha \cdot v) \\ &= \alpha \cdot v \end{aligned}$$

□

Seja $(V, +, \cdot)$ um espaço vetorial sobre K e denotemos por $\text{Bij}(V)$ o conjunto de todas as bijeções de V em V . Neste conjunto, definamos a seguinte relação $\sim$: Dadas duas funções $f, g \in \text{Bij}(V)$ dizemos que $f \sim g$ se, e somente se, para quaisquer $v_1, v_2, v \in V$ e $\alpha \in K$, $f^{-1}(f(v_1) + f(v_2)) = g^{-1}(g(v_1) + g(v_2))$ e $f^{-1}(\alpha \cdot f(v)) = g^{-1}(\alpha \cdot g(v))$.

Então temos o seguinte

Teorema 3.10. *A relação $\sim$ é uma relação de equivalência definida no conjunto $\text{Bij}(V)$*

Demonstração. Com efeito, para quaisquer $f, g, h \in \text{Bij}(V)$, temos:

1. $f \sim f$ pois para quaisquer $v_1, v_2, v \in V$ e $\alpha \in K$, $f^{-1}(f(v_1) + f(v_2)) = f^{-1}(f(v_1) + f(v_2))$ e $f^{-1}(\alpha \cdot f(v)) = f^{-1}(\alpha \cdot f(v))$.
2. Se $f \sim g$ então para quaisquer $v_1, v_2, v \in V$ e $\alpha \in K$, $f^{-1}(f(v_1) + f(v_2)) = g^{-1}(g(v_1) + g(v_2))$ e $f^{-1}(\alpha \cdot f(v)) = g^{-1}(\alpha \cdot g(v))$. Logo, para quaisquer $v_1, v_2, v \in V$ e $\alpha \in K$, $g^{-1}(g(v_1) + g(v_2)) = f^{-1}(f(v_1) + f(v_2))$ e $g^{-1}(\alpha \cdot g(v)) = f^{-1}(\alpha \cdot f(v))$. Portanto $g \sim f$.
3. Se $f \sim g$ e $g \sim h$ então para quaisquer $v_1, v_2, v \in V$ e $\alpha \in K$, $f^{-1}(f(v_1) + f(v_2)) = g^{-1}(g(v_1) + g(v_2)) = h^{-1}(h(v_1) + h(v_2))$ e $f^{-1}(\alpha \cdot f(v)) = g^{-1}(\alpha \cdot g(v)) = h^{-1}(\alpha \cdot h(v))$. Logo, para quaisquer $v_1, v_2, v \in V$ e $\alpha \in K$, $f^{-1}(f(v_1) + f(v_2)) = h^{-1}(h(v_1) + h(v_2))$ e $f^{-1}(\alpha \cdot f(v)) = h^{-1}(\alpha \cdot h(v))$ e portanto $f \sim h$.

□

Assim, podemos formar o conjunto $\frac{\text{Bij}(V)}{\sim}$ de todas as classes de equivalência de bijeções $f : V \rightarrow V$, denotada por $[f]$, isto é,

$$\frac{\text{Bij}(V)}{\sim} = \{[f]; f \in \text{Bij}(V)\},$$

onde $[f] = \{g \in \text{Bij}(V); f \sim g\}$.

Como uma consequência direta dos Teorema 3.7 e Teorema 3.10 temos o

Corolário 3.11. *Se conhecermos uma estrutura de espaço vetorial num conjunto V então podemos dar ao conjunto V tantas outras estruturas de espaço vetorial quantas forem as classes de equivalências de bijeções de V em V , segundo a relação $\sim$ do Teorema 3.10.*

O Teorema Principal e seu corolário nos permitirá construir no Capítulo 4, vários exemplos inusitados de Espaços Vetoriais que não são comumente discutidos num curso de Álgebra Linear, bem como, apresentar mais do que uma estrutura de Espaço Vetorial para um mesmo conjunto.

4 Construção da conexão

Neste capítulo daremos vários exemplos de Espaços Vetoriais que não são comumente discutidos num curso de Álgebra Linear. Para isso utilizaremos os exemplos apresentados nas seções 2.3 e 3.2 e aplicaremos o Teorema 3.7, a Observação 3.8 e o Corolário 3.11. Gostaríamos de destacar a originalidade deste Capítulo, já que na literatura desconhecemos tais exemplos de Espaços Vetoriais.

4.1 O espaço vetorial $S^n - \{N\}$

Sejam $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$ a esfera unitária n -dimensional, com $n \geq 1$ e $N = (0, \dots, 0, 1) \in S^n$ o seu pólo norte. Vimos que a projeção estereográfica definida por

$$\begin{aligned} f : S^n - \{N\} &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto f(x) = \left(\frac{-x_1}{x_{n+1} - 1}, \dots, \frac{-x_n}{x_{n+1} - 1} \right) \end{aligned}$$

com $x = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$ é bijetora com inversa

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^n &\rightarrow S^n - \{N\} \\ y &\mapsto g(y) = \left(\frac{2y_1}{y_1^2 + \dots + y_n^2 + 1}, \dots, \frac{2y_n}{y_1^2 + \dots + y_n^2 + 1}, \frac{y_1^2 + \dots + y_n^2 - 1}{y_1^2 + \dots + y_n^2 + 1} \right) \end{aligned}$$

com $y = (y_1, \dots, y_n)$.

Como $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ é espaço vetorial com as operações usuais de adição e multiplicação, e f é uma bijeção de $S^n - \{N\}$ em $\mathbb{R}^n$, podemos então, de acordo com o Teorema 3.7 (Teorema da Estrutura), dar a $S^n - \{N\}$ uma estrutura de espaço vetorial, definindo em $S^n - \{N\}$ as operações $\oplus$ e $\odot$ da seguinte forma: para quaisquer $u = (u_1, \dots, u_n, u_{n+1}), v = (v_1, \dots, v_n, v_{n+1}) \in S^n - \{N\}$ e $c \in \mathbb{R}$, definimos

$$\begin{aligned}
u \oplus v &= g(f(u) + f(v)) \\
&= g \left[\left(-\frac{u_1}{u_{n+1}-1}, \dots, -\frac{u_n}{u_{n+1}-1} \right) + \left(-\frac{v_1}{v_{n+1}-1}, \dots, -\frac{v_n}{v_{n+1}-1} \right) \right] \\
&= g \left(-\frac{u_1}{u_{n+1}-1} - \frac{v_1}{v_{n+1}-1}, \dots, -\frac{u_n}{u_{n+1}-1} - \frac{v_n}{v_{n+1}-1} \right) \\
&= g \left(-\frac{u_1(v_{n+1}-1) + v_1(u_{n+1}-1)}{(u_{n+1}-1)(v_{n+1}-1)}, \dots, -\frac{u_n(v_{n+1}-1) + v_n(u_{n+1}-1)}{(u_{n+1}-1)(v_{n+1}-1)} \right) \\
&= \left(\left(-2 \frac{u_1(v_{n+1}-1) + v_1(u_{n+1}-1)}{(u_{n+1}-1)(v_{n+1}-1)} \right) \left[\left(\frac{u_1(v_{n+1}-1) + v_1(u_{n+1}-1)}{(u_{n+1}-1)(v_{n+1}-1)} \right)^2 + \dots + \right. \right. \\
&\quad \left. \left(\frac{u_n(v_{n+1}-1) + v_n(u_{n+1}-1)}{(u_{n+1}-1)(v_{n+1}-1)} \right)^2 + 1 \right]^{-1}, \dots, \left(-2 \frac{u_n(v_{n+1}-1) + v_n(u_{n+1}-1)}{(u_{n+1}-1)(v_{n+1}-1)} \right) \right. \\
&\quad \left. \left[\left(\frac{u_1(v_{n+1}-1) + v_1(u_{n+1}-1)}{(u_{n+1}-1)(v_{n+1}-1)} \right)^2 + \dots + \left(\frac{u_n(v_{n+1}-1) + v_n(u_{n+1}-1)}{(u_{n+1}-1)(v_{n+1}-1)} \right)^2 + 1 \right]^{-1}, \right. \\
&\quad \left. \frac{\left(\frac{u_1(v_{n+1}-1) + v_1(u_{n+1}-1)}{(u_{n+1}-1)(v_{n+1}-1)} \right)^2 + \dots + \left(\frac{u_n(v_{n+1}-1) + v_n(u_{n+1}-1)}{(u_{n+1}-1)(v_{n+1}-1)} \right)^2 - 1}{\left(\frac{u_1(v_{n+1}-1) + v_1(u_{n+1}-1)}{(u_{n+1}-1)(v_{n+1}-1)} \right)^2 + \dots + \left(\frac{u_n(v_{n+1}-1) + v_n(u_{n+1}-1)}{(u_{n+1}-1)(v_{n+1}-1)} \right)^2 + 1} \right) \\
&= ((-2(u_1(v_{n+1}-1) + v_1(u_{n+1}-1))(u_{n+1}-1)(v_{n+1}-1))[(u_1(v_{n+1}-1) + \\
&\quad v_1(u_{n+1}-1))^2 + \dots + (u_n(v_{n+1}-1) + v_n(u_{n+1}-1))^2 + ((u_{n+1}-1)(v_{n+1}-1))^2])^{-1} \\
&\quad , \dots, ((-2(u_n(v_{n+1}-1) + v_n(u_{n+1}-1))(u_{n+1}-1)(v_{n+1}-1))[(u_1(v_{n+1}-1) + \\
&\quad v_1(u_{n+1}-1))^2 + \dots + (u_n(v_{n+1}-1) + v_n(u_{n+1}-1))^2 + ((u_{n+1}-1)(v_{n+1}-1))^2])^{-1}, \\
&\quad ((u_1(v_{n+1}-1) + v_1(u_{n+1}-1))^2 + \dots + (u_n(v_{n+1}-1) + v_n(u_{n+1}-1))^2 - \\
&\quad ((u_{n+1}-1)(v_{n+1}-1))^2) [(u_1(v_{n+1}-1) + v_1(u_{n+1}-1))^2 + \dots + \\
&\quad (u_n(v_{n+1}-1) + v_n(u_{n+1}-1))^2 + ((u_{n+1}-1)(v_{n+1}-1))^2]^{-1})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= ((-2(u_1(v_{n+1}-1) + v_1(u_{n+1}-1))(u_{n+1}-1)(v_{n+1}-1))[(u_1^2 + \dots + u_n^2) \\
&\quad (v_{n+1}-1)^2 + 2(u_1v_1 + \dots + u_nv_n)(u_{n+1}-1)(v_{n+1}-1) + (v_1^2 + \dots + v_n^2) \\
&\quad (u_{n+1}-1)^2 + ((u_{n+1}-1)(v_{n+1}-1))^2]^{-1}, \dots, (-2(u_n(v_{n+1}-1) + v_n(u_{n+1}-1)) \\
&\quad (u_{n+1}-1)(v_{n+1}-1))[(u_1^2 + \dots + u_n^2)(v_{n+1}-1)^2 + 2(u_1v_1 + \dots + u_nv_n) \\
&\quad (u_{n+1}-1)(v_{n+1}-1) + (v_1^2 + \dots + v_n^2)(u_{n+1}-1)^2 + ((u_{n+1}-1)(v_{n+1}-1))^2]^{-1}, \\
&\quad ((u_1(v_{n+1}-1) + v_1(u_{n+1}-1))^2 + \dots + (u_n(v_{n+1}-1) + v_n(u_{n+1}-1))^2 \\
&\quad - ((u_{n+1}-1)(v_{n+1}-1))^2][(u_1(v_{n+1}-1) + v_1(u_{n+1}-1))^2 + \dots + (u_n(v_{n+1}-1) \\
&\quad + v_n(u_{n+1}-1))^2 + ((u_{n+1}-1)(v_{n+1}-1))^2]) \\
&= ((-2(u_1(v_{n+1}-1) + v_1(u_{n+1}-1))(u_{n+1}-1)(v_{n+1}-1))[(1-u_{n+1}^2)(v_{n+1}-1)^2 \\
&\quad + 2(u_1v_1 + \dots + u_nv_n)(u_{n+1}-1)(v_{n+1}-1) + (1-v_{n+1}^2)(u_{n+1}-1)^2 + \\
&\quad ((u_{n+1}-1)(v_{n+1}-1))^2]^{-1}, \dots, (-2(u_n(v_{n+1}-1) + v_n(u_{n+1}-1))(u_{n+1}-1) \\
&\quad (v_{n+1}-1))[(u_1^2 + \dots + u_n^2)(v_{n+1}-1)^2 + 2(u_1v_1 + \dots + u_nv_n)(u_{n+1}-1)(v_{n+1}-1) \\
&\quad + (v_1^2 + \dots + v_n^2)(u_{n+1}-1)^2 + ((u_{n+1}-1)(v_{n+1}-1))^2]^{-1}, ((u_1(v_{n+1}-1) \\
&\quad + v_1(u_{n+1}-1))^2 + \dots + (u_n(v_{n+1}-1) + v_n(u_{n+1}-1))^2 - ((u_{n+1}-1)(v_{n+1}-1))^2) \\
&\quad [(u_1(v_{n+1}-1) + v_1(u_{n+1}-1))^2 + \dots + (u_n(v_{n+1}-1) + v_n(u_{n+1}-1))^2 + \\
&\quad ((u_{n+1}-1)(v_{n+1}-1))^2]^{-1}) \\
&= ((-2(u_1(v_{n+1}-1) + v_1(u_{n+1}-1)))[(1+u_{n+1})(1-v_{n+1}) + 2(u_1v_1 + \dots + u_nv_n) + \\
&\quad (1+v_{n+1})(1-u_{n+1}) + ((u_{n+1}-1)(v_{n+1}-1))]^{-1}, \dots, (-2(u_n(v_{n+1}-1) \\
&\quad + v_n(u_{n+1}-1)))[(1+u_{n+1})(1-v_{n+1}) + 2(u_1v_1 + \dots + u_nv_n) + (1+v_{n+1}) \\
&\quad (1-u_{n+1}) + ((u_{n+1}-1)(v_{n+1}-1))]^{-1}, ((u_1(v_{n+1}-1) + v_1(u_{n+1}-1))^2 + \dots + \\
&\quad (u_n(v_{n+1}-1) + v_n(u_{n+1}-1))^2 - ((u_{n+1}-1)(v_{n+1}-1))^2][(u_1(v_{n+1}-1) \\
&\quad + v_1(u_{n+1}-1))^2 + \dots + (u_n(v_{n+1}-1) + v_n(u_{n+1}-1))^2 + ((u_{n+1}-1) \\
&\quad (v_{n+1}-1))^2]^{-1}) \\
&= ((-2(u_1(v_{n+1}-1) + v_1(u_{n+1}-1)))[(1+u_{n+1})(1-v_{n+1}) + 2(u_1v_1 + \dots + u_nv_n) + \\
&\quad 2(1-u_{n+1})]^{-1}, \dots, (-2(u_n(v_{n+1}-1) + v_n(u_{n+1}-1)))[(1+u_{n+1})(1-v_{n+1}) + \\
&\quad 2(u_1v_1 + \dots + u_nv_n) + 2(1-u_{n+1})]^{-1}, ((u_1(v_{n+1}-1) + v_1(u_{n+1}-1))^2 + \dots + \\
&\quad (u_n(v_{n+1}-1) + v_n(u_{n+1}-1))^2 - ((u_{n+1}-1)(v_{n+1}-1))^2][(u_1(v_{n+1}-1) + v_1 \\
&\quad (u_{n+1}-1))^2 + \dots + (u_n(v_{n+1}-1) + v_n(u_{n+1}-1))^2 + ((u_{n+1}-1)(v_{n+1}-1))^2]^{-1})
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
c \odot u &= g(cf(u)) \\
&= g \left[c \left(-\frac{u_1}{u_{n+1}-1}, \dots, -\frac{u_n}{u_{n+1}-1} \right) \right] \\
&= g \left(-\frac{cu_1}{u_{n+1}-1}, \dots, -\frac{cu_n}{u_{n+1}-1} \right) \\
&= \left(\frac{-\frac{2cu_1}{u_{n+1}-1}}{\left(\frac{cu_1}{u_{n+1}-1} \right)^2 + \dots + \left(\frac{cu_n}{u_{n+1}-1} \right)^2 + 1}, \dots, \right. \\
&\quad \left. \frac{-\frac{2cu_n}{u_{n+1}-1}}{\left(\frac{cu_1}{u_{n+1}-1} \right)^2 + \dots + \left(\frac{cu_n}{u_{n+1}-1} \right)^2 + 1} \right) \\
&= \left(\frac{-2cu_1}{(u_{n+1}-1)c^2(u_1^2 + \dots + u_n^2) + (u_{n+1}-1)^2}, \dots, \right. \\
&\quad \left. \frac{-2cu_n}{(u_{n+1}-1)c^2(u_1^2 + \dots + u_n^2) + (u_{n+1}-1)^2} \right) \\
&= \left(\frac{-2cu_1(u_{n+1}-1)}{c^2(1-u_{n+1}^2) + (u_{n+1}-1)^2}, \dots, \frac{-2cu_n(u_{n+1}-1)}{c^2(1-u_{n+1}^2) + (u_{n+1}-1)^2} \right) \\
&= \left(\frac{-2cu_1(u_{n+1}-1)}{-c^2(u_{n+1}-1)(u_{n+1}+1) + (u_{n+1}-1)^2}, \dots, \right. \\
&\quad \left. \frac{-2cu_n(u_{n+1}-1)}{-c^2(u_{n+1}-1)(u_{n+1}+1) + (u_{n+1}-1)^2} \right)
\end{aligned}$$

$$= \left(\frac{-2cu_1}{-c^2(u_{n+1}+1) + (u_{n+1}-1)}, \dots, \frac{-2cu_n}{-c^2(u_{n+1}+1) + (u_{n+1}-1)}, \frac{c^2(1-u_{n+1}^2) - (u_{n+1}-1)^2}{c^2(1-u_{n+1}^2) + (u_{n+1}-1)^2} \right).$$

O elemento neutro de $S^n - \{N\}$ é $g(0) = (0, \dots, 0, -1)$ e o elemento oposto de

$$u = (u_1, \dots, u_n, u_{n+1}) \in S^n - \{N\}$$

é

$$\begin{aligned} \ominus u &= g(-f(u)) \\ &= g\left(\frac{u_1}{u_{n+1}-1}, \dots, \frac{u_n}{u_{n+1}-1}\right) \\ &= \left(\frac{\frac{2u_1}{u_{n+1}-1}}{\left(\left(\frac{u_1}{u_{n+1}-1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{u_n}{u_{n+1}-1}\right)^2 + 1\right)}, \dots, \right. \\ &\quad \left. \frac{\frac{2u_n}{u_{n+1}-1}}{\left(\left(\frac{u_1}{u_{n+1}-1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{u_n}{u_{n+1}-1}\right)^2 + 1\right)}, \right. \\ &\quad \left. \frac{\left(\frac{u_1}{u_{n+1}-1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{u_n}{u_{n+1}-1}\right)^2 - 1}{\left(\frac{u_1}{u_{n+1}-1}\right)^2 + \dots + \left(\frac{u_n}{u_{n+1}-1}\right)^2 + 1} \right) \\ &= \left(\frac{\frac{2u_1}{u_{n+1}-1}}{\frac{u_1^2 + \dots + u_n^2}{(u_{n+1}-1)^2} + 1}, \dots, \frac{\frac{2u_n}{u_{n+1}-1}}{\frac{u_1^2 + \dots + u_n^2}{(u_{n+1}-1)^2} + 1}, \frac{\frac{u_1^2 + \dots + u_n^2}{(u_{n+1}-1)^2} - 1}{\frac{u_1^2 + \dots + u_n^2}{(u_{n+1}-1)^2} + 1} \right) \\ &= \left(\frac{\frac{2u_1}{u_{n+1}-1}}{\frac{u_1^2 + \dots + u_n^2 + (u_{n+1}-1)^2}{(u_{n+1}-1)^2}}, \dots, \frac{\frac{2u_n}{u_{n+1}-1}}{\frac{u_1^2 + \dots + u_n^2 + (u_{n+1}-1)^2}{(u_{n+1}-1)^2}}, \right. \\ &\quad \left. \frac{\frac{(u_{n+1}-1)^2}{u_1^2 + \dots + u_n^2 + (u_{n+1}-1)^2}}{\frac{(u_{n+1}-1)^2}{u_1^2 + \dots + u_n^2 + (u_{n+1}-1)^2}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{2u_1}{(u_{n+1}-1)} \frac{(u_{n+1}-1)^2}{(u_1^2 + \dots + u_n^2 + (u_{n+1}-1)^2)}, \dots, \right. \\
&\quad \left. \frac{2u_n}{(u_{n+1}-1)} \frac{(u_{n+1}-1)^2}{(u_1^2 + \dots + u_n^2 + (u_{n+1}-1)^2)}, \right. \\
&\quad \left. \frac{(u_{n+1}-1)}{u_1^2 + \dots + u_n^2 - (u_{n+1}-1)^2} \frac{(u_{n+1}-1)^2}{(u_{n+1}-1)^2} \right) \\
&= \left(\frac{2u_1(u_{n+1}-1)}{(u_1^2 + \dots + u_n^2 + (u_{n+1}-1)^2)}, \dots, \frac{2u_n(u_{n+1}-1)}{(u_1^2 + \dots + u_n^2 + (u_{n+1}-1)^2)}, \right. \\
&\quad \left. \frac{u_1^2 + \dots + u_n^2 - (u_{n+1}-1)^2}{u_1^2 + \dots + u_n^2 + (u_{n+1}-1)^2} \right) \\
&= \left(\frac{2u_1(u_{n+1}-1)}{u_1^2 + \dots + u_n^2 + u_{n+1}^2 - 2u_{n+1} + 1}, \dots, \frac{2u_n(u_{n+1}-1)}{u_1^2 + \dots + u_n^2 + u_{n+1}^2 - 2u_{n+1} + 1}, \right. \\
&\quad \left. \frac{u_1^2 + \dots + u_n^2 - u_{n+1}^2 + 2u_{n+1} - 1}{u_1^2 + \dots + u_n^2 + u_{n+1}^2 - 2u_{n+1} + 1} \right) \\
&= \left(\frac{2u_1(u_{n+1}-1)}{1 - 2u_{n+1} + 1}, \dots, \frac{2u_n(u_{n+1}-1)}{1 - 2u_{n+1} + 1}, \frac{1 - u_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 + 2u_{n+1} - 1}{1 - 2u_{n+1} + 1} \right) \\
&= \left(\frac{2u_1(u_{n+1}-1)}{-2(u_{n+1}-1)}, \dots, \frac{2u_n(u_{n+1}-1)}{-2(u_{n+1}-1)}, \frac{u_{n+1}(2 - 2u_{n+1})}{(2 - 2u_{n+1})} \right) \\
&= (-u_1, \dots, -u_n, u_{n+1}).
\end{aligned}$$

4.2 O espaço vetorial $\mathbb{R}_+^*$

Seja $V =]0, \infty[$. A função

$$\begin{aligned}
f : V &\rightarrow \mathbb{R} \\
x &\mapsto \ln x
\end{aligned}$$

estabelece uma bijeção entre o conjunto V e o espaço euclidiano $\mathbb{R}$, cuja inversa é dada por

$$\begin{aligned}
g : \mathbb{R} &\rightarrow V \\
y &\mapsto e^y.
\end{aligned}$$

Como $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ é espaço vetorial com as operações usuais de adição e multiplicação, e f é uma bijeção de V em $\mathbb{R}$, podemos então, de acordo com o Teorema 3.7 (Teorema da Estrutura), dar a V uma estrutura de espaço vetorial, definindo em V as operações $\oplus$ e $\odot$ da seguinte forma: para quaisquer $u, v \in V$ e $c \in \mathbb{R}$, definimos

$$\begin{aligned}
u \oplus v &= g(f(u) + f(v)) \\
&= g(\ln u + \ln v) \\
&= g(\ln(u \cdot v)) \\
&= e^{\ln(u \cdot v)} \\
&= u \cdot v
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
c \odot u &= g(c \cdot f(u)) \\
&= g(c \cdot \ln u) \\
&= g(\ln u^c) \\
&= e^{\ln u^c} \\
&= u^c \\
&= e^{c \ln u}.
\end{aligned}$$

O elemento neutro de V é $g(0) = e^0 = 1$ e o elemento oposto de $u \in V$ é

$$\begin{aligned}
g(-f(u)) &= g(-\ln u) \\
&= e^{-\ln u} \\
&= (e^{\ln u})^{-1} \\
&= u^{-1}.
\end{aligned}$$

4.3 O espaço vetorial $[-1, 0[\cup]1, \infty[$

Seja $M = [-1, 0[\cup]1, \infty[$, $N =]0, \infty[$ e $f : M \rightarrow N$ definida por $f(x) = x^2$, para todo $x \in M$. Temos que, f é uma bijeção de M sobre N , cuja inversa $g : N \rightarrow M$ é dada por

$$g(y) = \begin{cases} \sqrt{y}, & \text{se } y \in]1, \infty[, \\ -\sqrt{y}, & \text{se } y \in]0, 1]. \end{cases}$$

Como $(N, \oplus, \odot)$ é espaço vetorial real (vide **Seção 4.2**) e f é uma bijeção de M em N , podemos então, de acordo com o Teorema 3.7 (Teorema da Estrutura), dar a $M = [-1, 0[\cup]1, \infty[$ uma estrutura de espaço vetorial real, definindo em M as operações $\uplus$ e $\bullet$ da seguinte forma: para quaisquer $u, v \in M$ e $c \in \mathbb{R}$, definimos

$$\begin{aligned}
u \uplus v &= g(f(u) \oplus f(v)) \\
&= g(u^2 \oplus v^2) \\
&= g(u^2 \cdot v^2) \\
&= \begin{cases} \sqrt{u^2 \cdot v^2}, & \text{se } u^2 \cdot v^2 \in]1, \infty[, \\ -\sqrt{u^2 \cdot v^2}, & \text{se } u^2 \cdot v^2 \in]0, 1] \end{cases} \\
&= \begin{cases} |u \cdot v|, & \text{se } u^2 \cdot v^2 \in]1, \infty[, \\ -|u \cdot v|, & \text{se } u^2 \cdot v^2 \in]0, 1] \end{cases}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
c \bullet u &= g(c \odot f(u)) \\
&= g(c \odot u^2) \\
&= g((u^2)^c) \\
&= g(e^{c \ln(u^2)}) \\
&= \begin{cases} \sqrt{e^{c \ln(u^2)}}, & \text{se } e^{c \ln(u^2)} \in]1, \infty[, \\ -\sqrt{e^{c \ln(u^2)}}, & \text{se } e^{c \ln(u^2)} \in]0, 1]. \end{cases}
\end{aligned}$$

O elemento neutro de M é $g(1) = -1$ e o elemento oposto de $u \in M$ é

$$\begin{aligned}
g(f(u)^{-1}) &= g((u^2)^{-1}) \\
&= \begin{cases} \sqrt{(u^2)^{-1}}, & \text{se } (u^2)^{-1} \in]1, \infty[, \\ -\sqrt{(u^2)^{-1}}, & \text{se } (u^2)^{-1} \in]0, 1]. \end{cases}
\end{aligned}$$

De fato,

$$\begin{aligned}
u \uplus (-1) &= \begin{cases} |u|, & \text{se } u^2 \in]1, \infty[, \\ -|u|, & \text{se } u^2 \in]0, 1] \end{cases} \\
&= u, \text{ se } u \in M
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
u \uplus g(f(u)^{-1}) &= \begin{cases} u \uplus \sqrt{(u^2)^{-1}}, & \text{se } (u^2)^{-1} \in]1, \infty[, \\ u \uplus (-\sqrt{(u^2)^{-1}}), & \text{se } (u^2)^{-1} \in]0, 1] \end{cases} \\
&= \begin{cases} -|u \cdot \sqrt{(u^2)^{-1}}|, & \text{se } (u^2)^{-1} \in]1, \infty[, \\ -|u \cdot (-\sqrt{(u^2)^{-1}})|, & \text{se } (u^2)^{-1} \in]0, 1] \end{cases} \\
&= -1, \text{ se } u \in M.
\end{aligned}$$

4.4 O espaço vetorial $T - \{(0, 1)\}$

Seja $S^1 - \{(0, 1)\} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 1\} - \{(0, 1)\}$ a circunferência menos seu pólo norte e $T - \{(0, 1)\} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : |x_1| + |x_2| = 1\} - \{(0, 1)\}$ o quadrado menos seu pólo norte. Vimos que a função

$$\begin{aligned}
f : S^1 - \{(0, 1)\} &\rightarrow T - \{(0, 1)\} \\
(x_1, x_2) &\mapsto \left(\frac{x_1}{|x_1| + |x_2|}, \frac{x_2}{|x_1| + |x_2|} \right)
\end{aligned}$$

é bijetora e sua inversa é dada por

$$\begin{aligned} g : T - \{(0, 1)\} &\rightarrow S^1 - \{(0, 1)\} \\ (y_1, y_2) &\mapsto \left(\frac{y_1}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}}, \frac{y_2}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} \right). \end{aligned}$$

Como, pela **Seção 4.1**, $S^1 - \{(0, 1)\}$ é espaço vetorial com as operações

$$u \oplus v = \left(\frac{-2(u_1(v_2 - 1) + v_1(u_2 - 1))}{(1 + u_2)(1 - v_2) + 2u_1v_1 + 2(1 - u_2)}, \frac{(u_1(v_2 - 1) + v_1(u_2 - 1))^2 - ((u_2 - 1)(v_2 - 1))^2}{(u_1(v_2 - 1) + v_1(u_2 - 1))^2 + ((u_2 - 1)(v_2 - 1))^2} \right)$$

e

$$c \odot u = \left(\frac{-2cu_1}{-c^2(u_2 + 1) + (u_2 - 1)}, \frac{c^2(1 - u_2^2) - (u_2 - 1)^2}{c^2(1 - u_2^2) + (u_2 - 1)^2} \right)$$

e f é uma bijeção de $S^1 - \{(0, 1)\}$ em $T - \{(0, 1)\}$, podemos então, de acordo com o Teorema 3.7 (Teorema da Estrutura), dar a $T - \{(0, 1)\}$ uma estrutura de espaço vetorial, definindo em $T - \{(0, 1)\}$ as operações $\uplus$ e $\bullet$ da seguinte forma: para quaisquer $x, y \in T - \{(0, 1)\}$ e $c \in \mathbb{R}$, definimos

$$\begin{aligned} x \uplus y &= f(g(x) \oplus g(y)) = f(g(x_1, x_2) \oplus g(y_1, y_2)) = \\ &= f \left(\left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \right) \oplus \left(\frac{y_1}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}}, \frac{y_2}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} \right) \right) \\ &= f \left(\frac{-2 \left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \left(\frac{y_2}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} - 1 \right) + \frac{y_1}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} \left(\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} - 1 \right) \right)}{\left(1 + \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \right) \left(1 - \frac{y_2}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} \right) + 2 \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \frac{y_1}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} + 2 \left(1 - \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \right)} \right. \\ &\quad \left[\left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \left(\frac{y_2}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} - 1 \right) + \frac{y_1}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} \left(\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} - 1 \right) \right)^2 - \left(\left(\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} - 1 \right) \left(\frac{y_2}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} - 1 \right) \right)^2 \right] \\ &\quad \left. \left[\left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \left(\frac{y_2}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} - 1 \right) + \frac{y_1}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} \left(\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} - 1 \right) \right)^2 + \left(\left(\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} - 1 \right) \left(\frac{y_2}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} - 1 \right) \right)^2 \right]^{-1} \right) \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{\begin{aligned} & -2 \left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} \left(\frac{y_2}{\sqrt{y_1^2+y_2^2}} - 1 \right) + \frac{y_1}{\sqrt{y_1^2+y_2^2}} \left(\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} - 1 \right) \right) \\ & \frac{\left(1 + \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} \right) \left(1 - \frac{y_2}{\sqrt{y_1^2+y_2^2}} \right) + 2 \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} \frac{y_1}{\sqrt{y_1^2+y_2^2}} + 2 \left(1 - \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} \right)} \end{aligned}}{\begin{aligned} & -2 \left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} \left(\frac{y_2}{\sqrt{y_1^2+y_2^2}} - 1 \right) + \frac{y_1}{\sqrt{y_1^2+y_2^2}} \left(\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} - 1 \right) \right) \\ & \frac{\left(1 + \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} \right) \left(1 - \frac{y_2}{\sqrt{y_1^2+y_2^2}} \right) + 2 \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} \frac{y_1}{\sqrt{y_1^2+y_2^2}} + 2 \left(1 - \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} \right)} \end{aligned}} + |u_2| \right) \cdot \frac{u_2}{\begin{aligned} & -2 \left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} \left(\frac{y_2}{\sqrt{y_1^2+y_2^2}} - 1 \right) + \frac{y_1}{\sqrt{y_1^2+y_2^2}} \left(\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} - 1 \right) \right) \\ & \frac{\left(1 + \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} \right) \left(1 - \frac{y_2}{\sqrt{y_1^2+y_2^2}} \right) + 2 \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} \frac{y_1}{\sqrt{y_1^2+y_2^2}} + 2 \left(1 - \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} \right)} \end{aligned}} + |u_2| \right)} ,$$

onde

$$u_2 = \left[\left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} \left(\frac{y_2}{\sqrt{y_1^2+y_2^2}} - 1 \right) + \frac{y_1}{\sqrt{y_1^2+y_2^2}} \left(\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} - 1 \right) \right)^2 - \left(\left(\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} - 1 \right) \left(\frac{y_2}{\sqrt{y_1^2+y_2^2}} - 1 \right) \right)^2 \right] \left[\left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} \left(\frac{y_2}{\sqrt{y_1^2+y_2^2}} - 1 \right) + \frac{y_1}{\sqrt{y_1^2+y_2^2}} \left(\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} - 1 \right) \right)^2 + \left(\left(\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} - 1 \right) \left(\frac{y_2}{\sqrt{y_1^2+y_2^2}} - 1 \right) \right)^2 \right]^{-1}$$

e

$$c \bullet u = f(c \odot g(u)) = f(c \odot g(u_1, u_2)) = f \left(c \odot \left(\frac{u_1}{\sqrt{u_1^2+u_2^2}}, \frac{u_2}{\sqrt{u_1^2+u_2^2}} \right) \right)$$

$$= f \left(\frac{\begin{aligned} & -2c \frac{u_1}{\sqrt{u_1^2+u_2^2}} \\ & -c^2 \left(\frac{u_2}{\sqrt{u_1^2+u_2^2}} + 1 \right) + \left(\frac{u_2}{\sqrt{u_1^2+u_2^2}} - 1 \right) \end{aligned}}{\begin{aligned} & c^2 \left(1 - \left(\frac{u_2}{\sqrt{u_1^2+u_2^2}} \right)^2 \right) - \left(\frac{u_2}{\sqrt{u_1^2+u_2^2}} - 1 \right)^2 \\ & c^2 \left(1 - \left(\frac{u_2}{\sqrt{u_1^2+u_2^2}} \right)^2 \right) + \left(\frac{u_2}{\sqrt{u_1^2+u_2^2}} - 1 \right)^2 \end{aligned}} \right)$$

$$= \left(\begin{array}{c} \frac{-2c \frac{u_1}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}}}{\frac{-c^2 \left(\frac{u_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}} + 1 \right) + \left(\frac{u_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}} - 1 \right)}}, \\ \left| \frac{-2c \frac{u_1}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}}}{\frac{-c^2 \left(\frac{u_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}} + 1 \right) + \left(\frac{u_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}} - 1 \right)}}, \right| + |x_2| \\ \\ \frac{x_2}{\left| \frac{-2c \frac{u_1}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}}}{\frac{-c^2 \left(\frac{u_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}} + 1 \right) + \left(\frac{u_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}} - 1 \right)}}, \right| + |x_2|} \end{array} \right)$$

onde

$$x_2 = \frac{c^2 \left(1 - \left(\frac{u_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}} \right)^2 \right) - \left(\frac{u_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}} - 1 \right)^2}{c^2 \left(1 - \left(\frac{u_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}} \right)^2 \right) + \left(\frac{u_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}} - 1 \right)^2}.$$

O elemento neutro de $T - \{(0, 1)\}$ é $f(0, -1) = (0, -1)$ e o elemento oposto de

$$u = (u_1, u_2) \in T - \{(0, 1)\}$$

é

$$\begin{aligned} f(\ominus g(u)) &= f(g(-u_1, u_2)) \\ &= f\left(\frac{-u_1}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}}, \frac{u_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}}\right) \\ &= \left(\frac{\frac{-u_1}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}}}{\left| \frac{-u_1}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}} \right| + \left| \frac{u_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}} \right|}, \frac{\frac{u_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}}}{\left| \frac{-u_1}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}} \right| + \left| \frac{u_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}} \right|} \right) \\ &= \left(\frac{\frac{-u_1}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}}}{\frac{|u_1| + |u_2|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}}}, \frac{\frac{u_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}}}{\frac{|u_1| + |u_2|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{-u_1}{|u_1| + |u_2|}, \frac{u_2}{|u_1| + |u_2|} \right) \\
&= (-u_1, u_2).
\end{aligned}$$

De fato, para qualquer $x = (x_1, x_2) \in T - \{(0, 1)\}$ temos

$$\begin{aligned}
(x_1, x_2) \uplus (0, -1) &= \left(\frac{\frac{\frac{4x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}}{2 \left[\left(1 + \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}\right) + \left(1 - \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}\right) \right]}}{\left| \frac{\frac{4x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}}{2 \left[\left(1 + \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}\right) + \left(1 - \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}\right) \right]} \right| + |u_2|}}, \frac{u_2}{\left| \frac{\frac{4x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}}{2 \left[\left(1 + \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}\right) + \left(1 - \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}\right) \right]} \right| + |u_2|}} \right) \\
&= \left(\frac{\frac{\frac{4x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}}{4}}{\left| \frac{\frac{4x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}}{4} \right| + |u_2|}, \frac{u_2}{\left| \frac{\frac{4x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}}{4} \right| + |u_2|} \right) \\
&= \left(\frac{\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}}{\left| \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \right| + |u_2|}, \frac{u_2}{\left| \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \right| + |u_2|} \right)
\end{aligned}$$

onde

$$u_2 = \frac{\left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} (-2) \right)^2 - \left(\left(\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} - 1 \right) (-2) \right)^2}{\left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} (-2) \right)^2 + \left(\left(\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} - 1 \right) (-2) \right)^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\frac{4x_1^2}{x_1^2 + x_2^2} - 4 \left(\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} - 1 \right)^2}{\frac{4x_1^2}{x_1^2 + x_2^2} + 4 \left(\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} - 1 \right)^2} \\
&= \frac{\frac{4x_1^2}{x_1^2 + x_2^2} - 4 \left(\frac{x_2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \right)^2}{\frac{4x_1^2}{x_1^2 + x_2^2} + 4 \left(\frac{x_2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \right)^2} \\
&= \frac{x_1^2 - \left(x_2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right)^2}{x_1^2 + \left(x_2 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \right)^2} \\
&= \frac{x_2 \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - x_2 \right)}{x_1^2 - x_2 \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - x_2 \right)} \\
&= \frac{x_2 \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - x_2 \right) \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} + x_2 \right)}{x_1^2 \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} + x_2 \right) - x_2 \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - x_2 \right) \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} + x_2 \right)} \\
&= \frac{x_2 x_1^2}{x_1^2 \left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2} + x_2 - x_2 \right)} \\
&= \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
(x_1, x_2) \uplus (0, -1) &= \left(\frac{\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}}{\left| \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \right| + \left| \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \right|}, \frac{u_2}{\left| \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \right| + \left| \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \right|} \right) \\
&= \left(\frac{\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}}{\frac{|x_1| + |x_2|}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}}, \frac{\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}}{\frac{|x_1| + |x_2|}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}} \right) \\
&= \left(\frac{\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}}{1}, \frac{\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}}{1} \right) = (x_1, x_2)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
& (x_1, x_2) \uplus (-x_1, x_2) = \\
& = \left(\frac{-2 \left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \left(\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} - 1 \right) - \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \left(\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} - 1 \right) \right)}{\left(1 + \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \right) \left(1 - \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \right) - 2 \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} + 2 \left(1 - \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \right)} \right. \\
& \quad \left. \frac{-2 \left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \left(\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} - 1 \right) - \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \left(\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} - 1 \right) \right)}{\left(1 + \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \right) \left(1 - \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \right) - 2 \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} + 2 \left(1 - \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \right)} \right) + |u_2| \\
& \quad \left. \frac{u_2}{\left| \frac{-2 \left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \left(\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} - 1 \right) - \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \left(\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} - 1 \right) \right)}{\left(1 + \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \right) \left(1 - \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \right) - 2 \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} + 2 \left(1 - \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \right)} \right| + |u_2|} \right) \\
& = \left(0, \frac{u_2}{|u_2|} \right)
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
u_2 &= \left[\left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \left(\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} - 1 \right) - \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \left(\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} - 1 \right) \right)^2 - \left(\left(\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} - 1 \right) \left(\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} - 1 \right) \right)^2 \right] \left[\left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \left(\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} - 1 \right) - \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \left(\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} - 1 \right) \right)^2 + \left(\left(\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} - 1 \right) \left(\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} - 1 \right) \right)^2 \right]^{-1} \\
&= \frac{- \left(\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} - 1 \right)^2}{\left(\frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} - 1 \right)^2} \\
&= -1.
\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
(x_1, x_2) \uplus (-x_1, x_2) &= \left(0, \frac{-1}{|-1|} \right) \\
&= (0, -1).
\end{aligned}$$

4.5 O espaço vetorial $]0, 2\pi[$

Seja f a função do intervalo aberto $]0, 2\pi[$ para o círculo unitário do plano euclidiano menos o ponto $(0, 1)$,

$$\begin{aligned} f :]0, 2\pi[&\rightarrow S^1 - \{(0, 1)\} \\ t &\mapsto f(t) = (-\sin t, \cos t), \forall t \in]0, 2\pi[. \end{aligned}$$

Observando que todo $p \in S^1 - \{(0, 1)\}$ se escreve como $p = (-\sin t, \cos t)$, para um único $t \in]0, 2\pi[$, temos então a função inversa de f , a saber, $g : S^1 - \{(0, 1)\} \rightarrow]0, 2\pi[$, definida por $g(p) = t$.

Como $(S^1 - \{(0, 1)\}, \oplus, \odot)$ é espaço vetorial com as operações $\oplus$ e $\odot$, definidas na **Seção 4.1** e f é uma bijeção de $]0, 2\pi[$ em $S^1 - \{(0, 1)\}$, podemos então, de acordo com o Teorema 3.7 (Teorema da Estrutura), dar a $]0, 2\pi[$ uma estrutura de espaço vetorial, definindo em $]0, 2\pi[$ as operações $\uplus$ e $\bullet$ da seguinte forma: para quaisquer $u, v \in]0, 2\pi[$ e $c \in \mathbb{R}$, definimos

$$\begin{aligned} u \uplus v &= g(f(u) \oplus f(v)) \\ &= g((-\sin u, \cos u) \oplus (-\sin v, \cos v)) \\ &= g\left(\frac{-2(-\sin u(\cos v - 1) - \sin v(\cos u - 1))}{(1 + \cos u)(1 - \cos v) + 2\sin u \sin v + 2(1 - \cos u)}, \frac{(-\sin u(\cos v - 1) - \sin v(\cos u - 1))^2 - ((\cos u - 1)(\cos v - 1))^2}{(-\sin u(\cos v - 1) - \sin v(\cos u - 1))^2 + ((\cos u - 1)(\cos v - 1))^2}\right) \\ &= g\left(\frac{2(\sin u(\cos v - 1) + \sin v(\cos u - 1))}{(1 + \cos u)(1 - \cos v) + 2\sin u \sin v + 2(1 - \cos u)}, \frac{(\sin u(\cos v - 1) + \sin v(\cos u - 1))^2 - ((\cos u - 1)(\cos v - 1))^2}{(\sin u(\cos v - 1) + \sin v(\cos u - 1))^2 + ((\cos u - 1)(\cos v - 1))^2}\right) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} c \bullet u &= g(c \odot f(u)) \\ &= g(c \odot (-\sin u, \cos u)) \\ &= g\left(\frac{2c \sin u}{-c^2(\cos u + 1) + (\cos u - 1)}, \frac{c^2(1 - \cos^2 u) - (\cos u - 1)^2}{c^2(1 - \cos^2 u) + (\cos u - 1)^2}\right) \end{aligned}$$

onde $g(-\sin t, \cos t) = t$, para todo $t \in]0, 2\pi[$.

O elemento neutro de $]0, 2\pi[$ é $g(0, -1) = \pi$ e o elemento oposto de

$$u \in]0, 2\pi[$$

é

$$\begin{aligned} g(\sin u, \cos u) &= g(-\sin(2\pi - u), \cos(2\pi - u)) \\ &= 2\pi - u. \end{aligned}$$

De fato,

$$\begin{aligned}
u \uplus \pi &= g \left(\frac{2(\sin u(\cos \pi - 1) + \sin \pi(\cos u - 1))}{(1 + \cos u)(1 - \cos \pi) + 2 \sin u \sin \pi + 2(1 - \cos u)}, \right. \\
&\quad \left. \frac{(\sin u(\cos \pi - 1) + \sin \pi(\cos u - 1))^2 - ((\cos u - 1)(\cos \pi - 1))^2}{(\sin u(\cos \pi - 1) + \sin \pi(\cos u - 1))^2 + ((\cos u - 1)(\cos \pi - 1))^2} \right) \\
&= g \left(\frac{-4 \sin u}{2(1 + \cos u) + 2(1 - \cos u)}, \frac{(-2 \sin u)^2 - 4(\cos u - 1)^2}{(-2 \sin u)^2 + 4(\cos u - 1)^2} \right) \\
&= g \left(\frac{-4 \sin u}{4}, \frac{4 \sin^2 u - 4(\cos u - 1)^2}{4 \sin^2 u + 4(\cos u - 1)^2} \right) \\
&= g \left(-\sin u, \frac{4 \sin^2 u - 4(\cos^2 u - 2 \cos u + 1)}{4 \sin^2 u + 4(\cos^2 u - 2 \cos u + 1)} \right) \\
&= g \left(-\sin u, \frac{\sin^2 u - \cos^2 u + 2 \cos u - 1}{\sin^2 u + \cos^2 u - 2 \cos u + 1} \right) \\
&= g \left(-\sin u, \frac{1 - 2 \cos^2 u + 2 \cos u - 1}{1 - 2 \cos u + 1} \right) \\
&= g \left(-\sin u, \frac{-2 \cos^2 u + 2 \cos u}{2 - 2 \cos u} \right) \\
&= g \left(-\sin u, \frac{2 \cos u(1 - \cos u)}{2(1 - \cos u)} \right) \\
&= g(-\sin u, \cos u) \\
&= u
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
u \uplus (2\pi - u) &= g \left(\frac{2(\sin u(\cos(2\pi - u) - 1) + \sin(2\pi - u)(\cos u - 1))}{(1 + \cos u)(1 - \cos(2\pi - u)) + 2 \sin u \sin(2\pi - u) + 2(1 - \cos u)}, \right. \\
&\quad \left. \frac{(\sin u(\cos(2\pi - u) - 1) + \sin(2\pi - u)(\cos u - 1))^2 - ((\cos u - 1)(\cos(2\pi - u) - 1))^2}{(\sin u(\cos(2\pi - u) - 1) + \sin(2\pi - u)(\cos u - 1))^2 + ((\cos u - 1)(\cos(2\pi - u) - 1))^2} \right) \\
&= g \left(\frac{2(\sin u(\cos u - 1) - \sin u(\cos u - 1))}{(1 + \cos u)(1 - \cos u) - 2 \sin^2 u + 2(1 - \cos u)}, \right. \\
&\quad \left. \frac{(\sin u(\cos u - 1) - \sin u(\cos u - 1))^2 - ((\cos u - 1)(\cos u - 1))^2}{(\sin u(\cos u - 1) - \sin u(\cos u - 1))^2 + ((\cos u - 1)(\cos u - 1))^2} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= g\left(0, \frac{-(\cos u - 1)^4}{(\cos u - 1)^4}\right) \\
&= g(0, -1) \\
&= \pi.
\end{aligned}$$

4.6 O espaço vetorial $]a, b[$

Considere a seguinte função bijetora

$$f :]a, b[\rightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

$$x \mapsto \frac{\pi}{b-a}(x-a) - \frac{\pi}{2}$$

com inversa $g : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\rightarrow]a, b[$, definida por $g(y) = a + \frac{b-a}{\pi} \cdot \left(y + \frac{\pi}{2}\right)$.

Como $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\oplus, \odot$) é espaço vetorial com as operações $x \oplus y = \arctg(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y)$ e $\alpha \odot x = \arctg(\alpha \cdot \operatorname{tg} x)$ definidas no **Exemplo 3.4** e f é uma bijeção de $]a, b[$ em $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, podemos então, de acordo com o Teorema 3.7 (Teorema da Estrutura), dar a $]a, b[$ uma estrutura de espaço vetorial, definindo em $]a, b[$ as operações $\uplus$ e $\bullet$ da seguinte forma: para quaisquer $u, v \in]a, b[$ e $c \in \mathbb{R}$, definimos

$$\begin{aligned}
u \uplus v &= g(f(u) \oplus f(v)) \\
&= g\left(\left(\frac{\pi}{b-a}(u-a) - \frac{\pi}{2}\right) \oplus \left(\frac{\pi}{b-a}(v-a) - \frac{\pi}{2}\right)\right) \\
&= g\left(\arctg\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{b-a}(u-a) - \frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{b-a}(v-a) - \frac{\pi}{2}\right)\right)\right) \\
&= a + \frac{b-a}{\pi} \cdot \left(\arctg\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{b-a}(u-a) - \frac{\pi}{2}\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{b-a}(v-a) - \frac{\pi}{2}\right)\right) + \frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
c \bullet u &= g(c \odot f(u)) \\
&= g\left(c \odot \left(\frac{\pi}{b-a}(u-a) - \frac{\pi}{2}\right)\right) \\
&= g\left(\arctg\left(c \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{b-a}(u-a) - \frac{\pi}{2}\right)\right)\right) \\
&= a + \frac{b-a}{\pi} \cdot \left(\arctg\left(c \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{b-a}(u-a) - \frac{\pi}{2}\right)\right) + \frac{\pi}{2}\right).
\end{aligned}$$

O elemento neutro de $]a, b[$ é $g(0) = \frac{a+b}{2}$ e o elemento oposto de $u \in]a, b[$ é

$$\begin{aligned} g(-f(u)) &= g\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{b-a}(u-a)\right) \\ &= a + \frac{b-a}{\pi} \cdot \left(\pi - \frac{\pi}{b-a}(u-a)\right) \\ &= a + b - u. \end{aligned}$$

Com efeito, temos

$$\begin{aligned} u \uplus \frac{a+b}{2} &= a + \frac{b-a}{\pi} \cdot \left(\arctg \left(\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{b-a}(u-a) - \frac{\pi}{2} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{b-a} \left(\frac{a+b}{2} - a \right) - \frac{\pi}{2} \right) \right) + \frac{\pi}{2} \right) \\ &= a + \frac{b-a}{\pi} \cdot \left(\arctg \left(\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{b-a}(u-a) - \frac{\pi}{2} \right) + \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{b-a} \left(\frac{b-a}{2} \right) - \frac{\pi}{2} \right) \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\pi}{2} \right) \\ &= a + \frac{b-a}{\pi} \cdot \left(\arctg \left(\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{b-a}(u-a) - \frac{\pi}{2} \right) + \operatorname{tg} 0 \right) + \frac{\pi}{2} \right) \\ &= a + \frac{b-a}{\pi} \cdot \left(\arctg \left(\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{b-a}(u-a) - \frac{\pi}{2} \right) \right) + \frac{\pi}{2} \right) \\ &= a + \frac{b-a}{\pi} \cdot \left(\frac{\pi}{b-a}(u-a) - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) \\ &= a + \frac{b-a}{\pi} \cdot \left(\frac{\pi}{b-a}(u-a) \right) \\ &= a + (u-a) \\ &= u \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} u \uplus (a+b-u) &= a + \frac{b-a}{\pi} \cdot \left(\arctg \left(\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{b-a}(u-a) - \frac{\pi}{2} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{b-a}(a+b-u-a) - \frac{\pi}{2} \right) \right) + \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= a + \frac{b-a}{\pi} \cdot \left(\operatorname{arctg} \left(\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{b-a}(u-a) - \frac{\pi}{2} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{b-a}(b-u) - \frac{\pi}{2} \right) \right) + \frac{\pi}{2} \right) \\
&= a + \frac{b-a}{\pi} \cdot \left(\operatorname{arctg} \left(\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{b-a}(u-a) - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{b-a}(b-u) - \frac{\pi}{2} \right) \right) \cdot \right. \\
&\quad \left. \left(1 - \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{b-a}(u-a) - \frac{\pi}{2} \right) \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{b-a}(b-u) - \frac{\pi}{2} \right) \right) + \frac{\pi}{2} \right) \\
&= a + \frac{b-a}{\pi} \cdot \left(\operatorname{arctg} \left(\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{b-a}(b-a) - \pi \right) \right) \cdot \right. \\
&\quad \left. \left(1 - \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{b-a}(u-a) - \frac{\pi}{2} \right) \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{b-a}(b-u) - \frac{\pi}{2} \right) \right) + \frac{\pi}{2} \right) \\
&= a + \frac{b-a}{\pi} \cdot \left(\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 0) \cdot \left(1 - \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{b-a}(u-a) - \frac{\pi}{2} \right) \cdot \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{b-a}(b-u) - \frac{\pi}{2} \right) \right) + \frac{\pi}{2} \right) \\
&= a + \frac{b-a}{\pi} \cdot \left(0 + \frac{\pi}{2} \right) \\
&= \frac{a+b}{2}.
\end{aligned}$$

4.7 O espaço vetorial: cilindro $\mathcal{C}$ reunido com um ponto $p \notin \mathcal{C}$

Considere a bijeção entre o plano $\mathbb{R}^2$ e o cilindro $\mathcal{C}$ reunido com um ponto $p \notin \mathcal{C}$, denotado por X_2 , definida pela função

$$\begin{aligned}
f: \mathbb{R}^2 &\rightarrow X_2 \\
x = (x_1, x_2) &\mapsto f(x) = \begin{cases} \left(\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, \frac{1}{2} \ln(x_1^2 + x_2^2) \right), & \text{se } x \neq (0, 0) \\ p, & \text{se } x = (0, 0) \end{cases}
\end{aligned}$$

cujas inversa é dada por

$$\begin{aligned}
g: X_2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\
y = (y_1, y_2, y_3) &\mapsto g(y) = \begin{cases} (y_1 e^{y_3}, y_2 e^{y_3}), & \text{se } y \in \mathcal{C} \\ (0, 0), & \text{se } y = p. \end{cases}
\end{aligned}$$

Como $\mathbb{R}^2$ é espaço vetorial com as operações usuais de adição e multiplicação, e f é uma bijeção de $\mathbb{R}^2$ em X_2 (veja **Exemplo 2.11**), podemos então, de acordo com

o Teorema 3.7 (Teorema da Estrutura), dar a X_2 uma estrutura de espaço vetorial, definindo em X_2 as operações $\oplus$ e $\odot$ da seguinte forma: para quaisquer $u, v \in X_2$ e $c \in \mathbb{R}$, definimos:

$$\begin{aligned} p \oplus p &= f(g(p) + g(p)) \\ &= f((0, 0) + (0, 0)) \\ &= f(0, 0) \\ &= p. \end{aligned}$$

Se um dos elementos pertence a $\mathcal{C}$, digamos u , como $u_1^2 + u_2^2 = 1$ segue que $(u_1 e^{u_3})^2 + (u_2 e^{u_3})^2 = e^{2u_3}(u_1^2 + u_2^2) = e^{2u_3}$. Logo,

$$\begin{aligned} u \oplus p &= f(g(u) + g(p)) \\ &= f(g(u_1, u_2, u_3) + g(p)) \\ &= f((u_1 e^{u_3}, u_2 e^{u_3}) + (0, 0)) \\ &= f(u_1 e^{u_3}, u_2 e^{u_3}) \\ &= \left(\frac{u_1 e^{u_3}}{\sqrt{(u_1 e^{u_3})^2 + (u_2 e^{u_3})^2}}, \frac{u_2 e^{u_3}}{\sqrt{(u_1 e^{u_3})^2 + (u_2 e^{u_3})^2}}, \frac{1}{2} \ln((u_1 e^{u_3})^2 + (u_2 e^{u_3})^2) \right) \\ &= \left(\frac{u_1 e^{u_3}}{e^{u_3}}, \frac{u_2 e^{u_3}}{e^{u_3}}, \frac{1}{2} \ln(e^{2u_3}) \right) \\ &= (u_1, u_2, u_3) \\ &= u. \end{aligned}$$

Supondo $u, v \in \mathcal{C}$,

$$\begin{aligned} u \oplus v &= f(g(u) + g(v)) \\ &= f(g(u_1, u_2, u_3) + g(v_1, v_2, v_3)) \\ &= f((u_1 e^{u_3}, u_2 e^{u_3}) + (v_1 e^{v_3}, v_2 e^{v_3})) \\ &= f(u_1 e^{u_3} + v_1 e^{v_3}, u_2 e^{u_3} + v_2 e^{v_3}) \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} \left(\frac{u_1 e^{u_3} + v_1 e^{v_3}}{\sqrt{(u_1 e^{u_3} + v_1 e^{v_3})^2 + (u_2 e^{u_3} + v_2 e^{v_3})^2}}, \right. \\ \quad \left. \frac{u_2 e^{u_3} + v_2 e^{v_3}}{\sqrt{(u_1 e^{u_3} + v_1 e^{v_3})^2 + (u_2 e^{u_3} + v_2 e^{v_3})^2}}, \right. \\ \quad \left. \frac{1}{2} \ln((u_1 e^{u_3} + v_1 e^{v_3})^2 + (u_2 e^{u_3} + v_2 e^{v_3})^2) \right), & \text{se} \\ \quad (u_1 e^{u_3} + v_1 e^{v_3}, u_2 e^{u_3} + v_2 e^{v_3}) \neq (0, 0) \\ p, & \text{se} \\ \quad (u_1 e^{u_3} + v_1 e^{v_3}, u_2 e^{u_3} + v_2 e^{v_3}) = (0, 0). \end{cases}$$

Como em X_2 temos $u_1^2 + u_2^2 = 1$ e $v_1^2 + v_2^2 = 1$, então $(u_1 e^{u_3} + v_1 e^{v_3})^2 + (u_2 e^{u_3} + v_2 e^{v_3})^2 = e^{2u_3} + 2e^{u_3+v_3}(u_1 v_1 + u_2 v_2) + e^{2v_3}$. Assim temos

$$u \oplus v = \begin{cases} \left(\frac{u_1 e^{u_3} + v_1 e^{v_3}}{\sqrt{e^{2u_3} + 2e^{u_3+v_3}(u_1 v_1 + u_2 v_2) + e^{2v_3}}}, \right. \\ \quad \left. \frac{u_2 e^{u_3} + v_2 e^{v_3}}{\sqrt{e^{2u_3} + 2e^{u_3+v_3}(u_1 v_1 + u_2 v_2) + e^{2v_3}}}, \right. \\ \quad \left. \frac{1}{2} \ln(e^{2u_3} + 2e^{u_3+v_3}(u_1 v_1 + u_2 v_2) + e^{2v_3}) \right), & \text{se} \\ \quad (u_1 e^{u_3} + v_1 e^{v_3}, u_2 e^{u_3} + v_2 e^{v_3}) \neq (0, 0) \\ p, & \text{se} \\ \quad (u_1 e^{u_3} + v_1 e^{v_3}, u_2 e^{u_3} + v_2 e^{v_3}) = (0, 0) \end{cases}$$

e

$$\begin{aligned} c \odot p &= f(c \cdot g(p)) \\ &= f(c \cdot (0, 0)) \\ &= f(0, 0) \\ &= p. \end{aligned}$$

Supondo $u \in \mathcal{C}$:

$$\begin{aligned} 0 \odot u &= f(0 \cdot g(u)) \\ &= f(0 \cdot (u_1 e^{u_3}, u_2 e^{u_3})) \\ &= f(0, 0) \\ &= p. \end{aligned}$$

Se $c \neq 0$,

$$\begin{aligned} c \odot u &= f(c \cdot g(u)) \\ &= f(c \cdot g(u_1, u_2, u_3)) \\ &= f(c \cdot (u_1 e^{u_3}, u_2 e^{u_3})) \\ &= f(cu_1 e^{u_3}, cu_2 e^{u_3}) \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{cu_1e^{u_3}}{\sqrt{(cu_1e^{u_3})^2 + (cu_2e^{u_3})^2}}, \frac{cu_2e^{u_3}}{\sqrt{(cu_1e^{u_3})^2 + (cu_2e^{u_3})^2}}, \frac{1}{2} \ln((cu_1e^{u_3})^2 + (cu_2e^{u_3})^2) \right).$$

Como em X_2 temos $u_1^2 + u_2^2 = 1$, então $(cu_1e^{u_3})^2 + (cu_2e^{u_3})^2 = c^2e^{2u_3}$. Assim temos que se $c \neq 0$ então

$$c \odot u = \left(\frac{cu_1e^{u_3}}{\sqrt{c^2e^{2u_3}}}, \frac{cu_2e^{u_3}}{\sqrt{c^2e^{2u_3}}}, \frac{1}{2} \ln(c^2e^{2u_3}) \right) = \left(\frac{cu_1e^{u_3}}{|c|e^{u_3}}, \frac{cu_2e^{u_3}}{|c|e^{u_3}}, \ln(|c|e^{u_3}) \right).$$

O elemento neutro de X_2 é $f(0, 0) = p$ e o elemento oposto de $u \in X_2$ é:

a) $f(-g(p)) = f(0, 0) = p$ se $u = p$ e

b)

$$\begin{aligned} f(-g(u)) &= f(-g(u_1, u_2, u_3)) \\ &= f(-u_1e^{u_3}, -u_2e^{u_3}) \\ &= \left(\frac{-u_1e^{u_3}}{\sqrt{(-u_1e^{u_3})^2 + (-u_2e^{u_3})^2}}, \frac{-u_2e^{u_3}}{\sqrt{(-u_1e^{u_3})^2 + (-u_2e^{u_3})^2}}, \frac{1}{2} \ln((-u_1e^{u_3})^2 + (-u_2e^{u_3})^2) \right) \\ &= \left(\frac{-u_1e^{u_3}}{e^{u_3}}, \frac{-u_2e^{u_3}}{e^{u_3}}, \frac{1}{2} \ln(e^{2u_3}) \right) \\ &= (-u_1, -u_2, u_3) \text{ se } u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathcal{C}, \end{aligned}$$

pois $(u_1, u_2, u_3) \oplus (-u_1, -u_2, u_3) = p$ desde que $(u_1e^{u_3} - u_1e^{u_3}, u_2e^{u_3} - u_2e^{u_3}) = (0, 0)$.

4.8 O espaço vetorial: hiperbolóide $\mathcal{H}$ reunido com um ponto $q \notin \mathcal{H}$

Considere a bijeção entre o cilindro $\mathcal{C}$ reunido com um ponto $p \notin \mathcal{C}$, denotado por X_2 e o hiperbolóide $\mathcal{H}$ reunido com um ponto $q \notin \mathcal{H}$, denotado por X_3 , dada pela função

$$\begin{aligned} f: X_2 &\rightarrow X_3 \\ x = (x_1, x_2, x_3) &\mapsto f(x) = \begin{cases} (x_1\sqrt{1+x_3^2}, x_2\sqrt{1+x_3^2}, x_3), & \text{se } (x_1, x_2, x_3) \in \mathcal{C} \\ q, & \text{se } x = p \end{cases} \end{aligned}$$

com inversa definida por

$$g : X_3 \rightarrow X_2$$

$$y = (y_1, y_2, y_3) \rightarrow g(y) = \begin{cases} \left(y_1(1 + y_3^2)^{-\frac{1}{2}}, y_2(1 + y_3^2)^{-\frac{1}{2}}, y_3 \right), & \text{se} \\ & (y_1, y_2, y_3) \in \mathcal{H} \\ p, & \text{se } y = q. \end{cases}$$

Temos que $X_2 = \mathcal{C} \cup \{p\} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 = 1\} \cup \{p\}$ é espaço vetorial com as operações $\oplus$ e $\odot$ definidas no **Exemplo 4.7** e f é uma bijeção de X_2 em X_3 , conforme **Exemplo 2.12**. Podemos então, de acordo com a **Observação 3.8** da página 39, dar a X_3 uma estrutura de espaço vetorial, definindo em $X_3 = \mathcal{H} \cup \{q\}$ as operações $\uplus$ e $\bullet$ da seguinte forma: para quaisquer $u, v \in X_3$ e $c \in \mathbb{R}$, definimos:

$$\begin{aligned} q \uplus q &= f(g(q) \oplus g(q)) \\ &= f(p \oplus p) \\ &= f(p) \\ &= q. \end{aligned}$$

Se um deles pertence a $\mathcal{H}$, digamos u , como $u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 = 1$ segue que $u_1^2(1 + u_3^2)^{-1} + u_2^2(1 + u_3^2)^{-1} = (u_1^2 + u_2^2)(1 + u_3^2)^{-1} = (1 + u_3^2)(1 + u_3^2)^{-1} = 1$. Logo, $(u_1(1 + u_3^2)^{-\frac{1}{2}}, u_2(1 + u_3^2)^{-\frac{1}{2}}, u_3) \in \mathcal{C}$ e portanto

$$\begin{aligned} u \uplus q &= f(g(u) \oplus g(q)) \\ &= f(g(u_1, u_2, u_3) \oplus g(q)) \\ &= f\left((u_1(1 + u_3^2)^{-\frac{1}{2}}, u_2(1 + u_3^2)^{-\frac{1}{2}}, u_3) \oplus p\right) \\ &= f\left(u_1(1 + u_3^2)^{-\frac{1}{2}}, u_2(1 + u_3^2)^{-\frac{1}{2}}, u_3\right) \\ &= \left(\frac{u_1}{\sqrt{1 + u_3^2}} \sqrt{1 + u_3^2}, \frac{u_2}{\sqrt{1 + u_3^2}} \sqrt{1 + u_3^2}, u_3\right) \\ &= (u_1, u_2, u_3) \\ &= u. \end{aligned}$$

Supondo $u, v \in \mathcal{H}$,

$$\begin{aligned}
u \uplus v &= f(g(u) \oplus g(v)) \\
&= f(g(u_1, u_2, u_3) \oplus g(v_1, v_2, v_3)) \\
&= f\left(\left(u_1(1+u_3^2)^{-\frac{1}{2}}, u_2(1+u_3^2)^{-\frac{1}{2}}, u_3\right) \oplus \left(v_1(1+v_3^2)^{-\frac{1}{2}}, v_2(1+v_3^2)^{-\frac{1}{2}}, v_3\right)\right) \\
&= \begin{cases} f\left(\left[\left(u_1(1+u_3^2)^{-\frac{1}{2}}\right)e^{u_3} + \left(v_1(1+v_3^2)^{-\frac{1}{2}}\right)e^{v_3}\right] \left[\sqrt{\left(\left(u_1(1+u_3^2)^{-\frac{1}{2}}\right)e^{u_3} + \sqrt{\left(v_1(1+v_3^2)^{-\frac{1}{2}}\right)e^{v_3}}^2 + \left(\left(u_2(1+u_3^2)^{-\frac{1}{2}}\right)e^{u_3} + \left(v_2(1+v_3^2)^{-\frac{1}{2}}\right)e^{v_3}\right)^2}\right]^{-1}, \right. \\ \left. \left[\left(u_2(1+u_3^2)^{-\frac{1}{2}}\right)e^{u_3} + \left(v_2(1+v_3^2)^{-\frac{1}{2}}\right)e^{v_3}\right] \left[\sqrt{\left(\left(u_1(1+u_3^2)^{-\frac{1}{2}}\right)e^{u_3} + \sqrt{\left(v_1(1+v_3^2)^{-\frac{1}{2}}\right)e^{v_3}}^2 + \left(\left(u_2(1+u_3^2)^{-\frac{1}{2}}\right)e^{u_3} + \left(v_2(1+v_3^2)^{-\frac{1}{2}}\right)e^{v_3}\right)^2}\right]^{-1}, \right. \\ \left. \frac{1}{2} \ln((u_1(1+u_3^2)^{-\frac{1}{2}}e^{u_3} + v_1(1+v_3^2)^{-\frac{1}{2}}e^{v_3})^2 + (u_2(1+u_3^2)^{-\frac{1}{2}}e^{u_3} + v_2(1+v_3^2)^{-\frac{1}{2}}e^{v_3})^2), \text{ se } \left(\left(u_1(1+u_3^2)^{-\frac{1}{2}}\right)e^{u_3} + \left(v_1(1+v_3^2)^{-\frac{1}{2}}\right)e^{v_3}, \right. \right. \\ \left. \left. \left(u_2(1+u_3^2)^{-\frac{1}{2}}\right)e^{u_3} + \left(v_2(1+v_3^2)^{-\frac{1}{2}}\right)e^{v_3}\right) \neq (0, 0) \right. \\ \left. f(p), \text{ se } \left(\left(u_1(1+u_3^2)^{-\frac{1}{2}}\right)e^{u_3} + \left(v_1(1+v_3^2)^{-\frac{1}{2}}\right)e^{v_3}, \left(u_2(1+u_3^2)^{-\frac{1}{2}}\right)e^{u_3} + \left(v_2(1+v_3^2)^{-\frac{1}{2}}\right)e^{v_3}\right) = (0, 0) \right. \\ \left. \left. \left(u_2(1+u_3^2)^{-\frac{1}{2}}\right)e^{u_3} + \left(v_2(1+v_3^2)^{-\frac{1}{2}}\right)e^{v_3}\right) = (0, 0) \right. \end{cases} \\
&= \begin{cases} f\left(\frac{\left(u_1(1+u_3^2)^{-\frac{1}{2}}\right)e^{u_3} + \left(v_1(1+v_3^2)^{-\frac{1}{2}}\right)e^{v_3}}{\sqrt{e^{2u_3} + 2e^{u_3+v_3}(1+u_3^2)^{-\frac{1}{2}}(1+v_3^2)^{-\frac{1}{2}}(u_1v_1 + u_2v_2) + e^{2v_3}}}} \right. \\ \left. \frac{\left(u_2(1+u_3^2)^{-\frac{1}{2}}\right)e^{u_3} + \left(v_2(1+v_3^2)^{-\frac{1}{2}}\right)e^{v_3}}{\sqrt{e^{2u_3} + 2e^{u_3+v_3}(1+u_3^2)^{-\frac{1}{2}}(1+v_3^2)^{-\frac{1}{2}}(u_1v_1 + u_2v_2) + e^{2v_3}}}} \right. \\ \left. \frac{1}{2} \ln(e^{2u_3} + 2e^{u_3+v_3}(1+u_3^2)^{-\frac{1}{2}}(1+v_3^2)^{-\frac{1}{2}}(u_1v_1 + u_2v_2) + e^{2v_3})\right), \text{ se } \\ \left. \left((u_1(1+u_3^2)^{-\frac{1}{2}}e^{u_3} + (v_1(1+v_3^2)^{-\frac{1}{2}}e^{v_3}, \right. \right. \\ \left. \left. (u_2(1+u_3^2)^{-\frac{1}{2}}e^{u_3} + (v_2(1+v_3^2)^{-\frac{1}{2}}e^{v_3}) \neq (0, 0) \right. \right. \\ \left. q, \text{ se } ((u_1(1+u_3^2)^{-\frac{1}{2}}e^{u_3} + (v_1(1+v_3^2)^{-\frac{1}{2}}e^{v_3}, \right. \\ \left. (u_2(1+u_3^2)^{-\frac{1}{2}}e^{u_3} + (v_2(1+v_3^2)^{-\frac{1}{2}}e^{v_3}) = (0, 0) \right. \end{cases}
\end{aligned}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\left(u_1(1+u_3^2)^{-\frac{1}{2}}\right)e^{u_3} + \left(v_1(1+v_3^2)^{-\frac{1}{2}}\right)e^{v_3}}{\sqrt{e^{2u_3} + 2e^{u_3+v_3}(1+u_3^2)^{-\frac{1}{2}}(1+v_3^2)^{-\frac{1}{2}}(u_1v_1 + u_2v_2) + e^{2v_3}}} \right. \\ \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2} \ln(e^{2u_3} + 2e^{u_3+v_3}(1+u_3^2)^{-\frac{1}{2}}(1+v_3^2)^{-\frac{1}{2}}(u_1v_1 + u_2v_2) + e^{2v_3})\right)^2}, \\ \left. \frac{\left(u_2(1+u_3^2)^{-\frac{1}{2}}\right)e^{u_3} + \left(v_2(1+v_3^2)^{-\frac{1}{2}}\right)e^{v_3}}{\sqrt{e^{2u_3} + 2e^{u_3+v_3}(1+u_3^2)^{-\frac{1}{2}}(1+v_3^2)^{-\frac{1}{2}}(u_1v_1 + u_2v_2) + e^{2v_3}}} \right. \\ \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2} \ln(e^{2u_3} + 2e^{u_3+v_3}(1+u_3^2)^{-\frac{1}{2}}(1+v_3^2)^{-\frac{1}{2}}(u_1v_1 + u_2v_2) + e^{2v_3})\right)^2}, \\ \left. \frac{1}{2} \ln(e^{2u_3} + 2e^{u_3+v_3}(1+u_3^2)^{-\frac{1}{2}}(1+v_3^2)^{-\frac{1}{2}}(u_1v_1 + u_2v_2) + e^{2v_3}) \right), \text{ se} \\ ((u_1(1+u_3^2)^{-\frac{1}{2}})e^{u_3} + (v_1(1+v_3^2)^{-\frac{1}{2}})e^{v_3}, \\ (u_2(1+u_3^2)^{-\frac{1}{2}})e^{u_3} + (v_2(1+v_3^2)^{-\frac{1}{2}})e^{v_3}) \neq (0,0) \\ q, \text{ se } (u_1(1+u_3^2)^{-\frac{1}{2}})e^{u_3} + (v_1(1+v_3^2)^{-\frac{1}{2}})e^{v_3}, \\ (u_2(1+u_3^2)^{-\frac{1}{2}})e^{u_3} + (v_2(1+v_3^2)^{-\frac{1}{2}})e^{v_3}) = (0,0) \end{array} \right.$$

e

$$\begin{aligned} c \bullet q &= f(c \odot g(q)) \\ &= f(c \odot p) \\ &= f(p) \\ &= q. \end{aligned}$$

Supondo $u \in \mathcal{H}$:

$$\begin{aligned} 0 \bullet u &= f(0 \odot g(u)) \\ &= f\left(0 \odot \left(u_1(1+u_3^2)^{-\frac{1}{2}}, u_2(1+u_3^2)^{-\frac{1}{2}}, u_3\right)\right) \\ &= f(p) \\ &= q. \end{aligned}$$

Se $c \neq 0$,

$$\begin{aligned} c \bullet u &= f(c \odot g(u)) \\ &= f(c \odot g(u_1, u_2, u_3)) \\ &= f\left(c \odot \left(u_1(1+u_3^2)^{-\frac{1}{2}}, u_2(1+u_3^2)^{-\frac{1}{2}}, u_3\right)\right) \\ &= f\left(\frac{cu_1(1+u_3^2)^{-\frac{1}{2}}e^{u_3}}{|c|e^{u_3}}, \frac{cu_2(1+u_3^2)^{-\frac{1}{2}}e^{u_3}}{|c|e^{u_3}}, \ln(|c|e^{u_3})\right) \\ &= \left(\left(\frac{cu_1(1+u_3^2)^{-\frac{1}{2}}e^{u_3}}{|c|e^{u_3}}\right) \sqrt{1 + (\ln(|c|e^{u_3}))^2}, \right. \\ &\quad \left.\left(\frac{cu_2(1+u_3^2)^{-\frac{1}{2}}e^{u_3}}{|c|e^{u_3}}\right) \sqrt{1 + (\ln(|c|e^{u_3}))^2}, \ln(|c|e^{u_3})\right). \end{aligned}$$

O elemento neutro de X_3 é $f(p) = q$ e o elemento oposto de $u \in X_3$ é:

a) $f(-g(q)) = f(-p) = f(p) = q$ se $u = q$ e

b)

$$\begin{aligned} f(-g(u)) &= f(-g(u_1, u_2, u_3)) \\ &= f\left(-\left(u_1(1+u_3^2)^{-\frac{1}{2}}, u_2(1+u_3^2)^{-\frac{1}{2}}, u_3\right)\right) \\ &= f\left(-u_1(1+u_3^2)^{-\frac{1}{2}}, -u_2(1+u_3^2)^{-\frac{1}{2}}, u_3\right) \\ &= \left(-u_1(1+u_3^2)^{-\frac{1}{2}}\sqrt{1+u_3^2}, -u_2(1+u_3^2)^{-\frac{1}{2}}\sqrt{1+u_3^2}, u_3\right) \\ &= (-u_1, -u_2, u_3) \text{ se } u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathcal{H}, \end{aligned}$$

pois $(u_1, u_2, u_3) \oplus (-u_1, -u_2, u_3) = q$ desde que

$$((u_1(1+u_3^2)^{-\frac{1}{2}})e^{u_3} + (-u_1(1+u_3^2)^{-\frac{1}{2}})e^{u_3}, (u_2(1+u_3^2)^{-\frac{1}{2}})e^{u_3} + (-u_2(1+u_3^2)^{-\frac{1}{2}})e^{u_3}) = (0, 0).$$

4.9 O conjunto $\mathbb{R}^2$ com uma nova estrutura de Espaço Vetorial

Sejam $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ as funções dadas por $f(x, y) = (h(x), y)$ e $g(x, y) = (l(x), y)$, onde

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto h(x) = \begin{cases} x^2, & \text{se } x \geq 0 \\ x, & \text{se } x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} l : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto l(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & \text{se } x \geq 0 \\ x, & \text{se } x < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Temos que $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ é espaço vetorial com as operações $+$ e $\cdot$ usuais, a saber,

$$(x, y) + (z, w) = (x + z, y + w)$$

$$c \cdot (x, y) = (cx, cy)$$

e pelo Exemplo 2.13 vimos que f é uma bijeção de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$. Podemos, então, de acordo com o Teorema 3.7 (Teorema da Estrutura), dar a $\mathbb{R}^2$ uma outra estrutura de espaço vetorial, definindo em $\mathbb{R}^2$ as operações $\oplus$ e $\odot$ da seguinte forma: para quaisquer $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e $c \in \mathbb{R}$, definimos:

$$\begin{aligned}
(x, y) \oplus (z, w) &= g(f(x, y) + f(z, w)) \\
&= g((h(x), y) + (h(z), w)) \\
&= g(h(x) + h(z), y + w) \\
&= \begin{cases} g(x^2 + z^2, y + w), & \text{se } x \geq 0, z \geq 0 \\ g(x^2 + z, y + w), & \text{se } x \geq 0, z < 0 \\ g(x + z^2, y + w), & \text{se } x < 0, z \geq 0 \\ g(x + z, y + w), & \text{se } x < 0, z < 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} (l(x^2 + z^2), y + w), & \text{se } x \geq 0, z \geq 0 \\ (l(x^2 + z), y + w), & \text{se } x \geq 0, z < 0 \\ (l(x + z^2), y + w), & \text{se } x < 0, z \geq 0 \\ (l(x + z), y + w), & \text{se } x < 0, z < 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} (\sqrt{x^2 + z^2}, y + w), & \text{se } x \geq 0, z \geq 0 \\ (\sqrt{x^2 + z}, y + w), & \text{se } x \geq 0, z < 0, z \geq -x^2 \\ (x^2 + z, y + w), & \text{se } x \geq 0, z < 0, z < -x^2 \\ (x + z^2, y + w), & \text{se } x < 0, z \geq 0, z < \sqrt{-x} \\ (\sqrt{x + z^2}, y + w), & \text{se } x < 0, z \geq 0, z \geq \sqrt{-x} \\ (x + z, y + w), & \text{se } x < 0, z < 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
c \odot (x, y) &= g(c \cdot f(x, y)) \\
&= g(c \cdot (h(x), y)) \\
&= g(ch(x), cy) \\
&= \begin{cases} g(cx^2, cy), & \text{se } x \geq 0 \\ g(cx, cy), & \text{se } x < 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} (l(cx^2), cy), & \text{se } x \geq 0 \\ (l(cx), cy), & \text{se } x < 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$= \begin{cases} (\sqrt{cx^2}, cy), & \text{se } x \geq 0, c \geq 0 \\ (cx^2, cy), & \text{se } x \geq 0, c < 0 \\ (\sqrt{cx}, cy), & \text{se } x < 0, c < 0 \\ (cx, cy), & \text{se } x < 0, c \geq 0. \end{cases}$$

O elemento neutro de $\mathbb{R}^2$ é $g(0,0) = (l(0),0) = (0,0)$ e o elemento oposto de $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ é:

$$\begin{aligned} g(-f(u,v)) &= g(-(h(u),v)) \\ &= g(-h(u),-v) \\ &= \begin{cases} g(-u^2,-v), & \text{se } u \geq 0 \\ g(-u,-v), & \text{se } u < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} (l(-u^2),-v), & \text{se } u \geq 0 \\ (l(-u),-v), & \text{se } u < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} (-u^2,-v), & \text{se } u \geq 0 \\ (\sqrt{-u},-v), & \text{se } u < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Verifiquemos que $(0,0)$ é o elemento neutro de $\mathbb{R}^2$. De fato,

$$\begin{aligned} (u,v) \oplus (0,0) &= \begin{cases} (\sqrt{u^2},v) & \text{se } u \geq 0 \\ (u,v), & \text{se } u < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} (|u|,v) & \text{se } u \geq 0 \\ (u,v), & \text{se } u < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} (u,v) & \text{se } u \geq 0 \\ (u,v), & \text{se } u < 0 \end{cases} \\ &= (u,v) \end{aligned}$$

Ainda, $g(-f(u,v))$ é o elemento oposto de $\mathbb{R}^2$. De fato,

$$\begin{aligned} (u,v) \oplus g(-f(u,v)) &= \begin{cases} (u,v) \oplus (-u^2,-v), & \text{se } u \geq 0 \\ (u,v) \oplus (\sqrt{-u},-v), & \text{se } u < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} (\sqrt{u^2 - u^2}, v - v), & \text{se } u > 0 \\ (0, v - v), & \text{se } u = 0 \\ (\sqrt{u + (\sqrt{-u})^2}, v - v), & \text{se } u < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{cases} (\sqrt{0}, 0), & \text{se } u > 0 \\ (0, 0), & \text{se } u = 0 \\ (\sqrt{u + \sqrt{u^2}}, 0), & \text{se } u < 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} (0, 0), & \text{se } u > 0 \\ (0, 0), & \text{se } u = 0 \\ (\sqrt{u + |u|}, 0), & \text{se } u < 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} (0, 0), & \text{se } u > 0 \\ (0, 0), & \text{se } u = 0 \\ (\sqrt{u - u}, 0), & \text{se } u < 0 \end{cases} \\
&= \begin{cases} (0, 0), & \text{se } u > 0 \\ (0, 0), & \text{se } u = 0 \\ (0, 0), & \text{se } u < 0 \end{cases} \\
&= (0, 0).
\end{aligned}$$

4.10 O conjunto $S^2 - \{N\}$ com uma nova estrutura de Espaço Vetorial

Sejam $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ a esfera unitária bidimensional e $N = (0, 0, 1) \in S^2$ o seu pólo norte. Vimos que a projeção estereográfica definida por

$$\begin{aligned}
f : S^2 - \{N\} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\
x &\mapsto f(x) = \left(\frac{-x_1}{x_3 - 1}, \frac{-x_2}{x_3 - 1} \right)
\end{aligned}$$

com $x = (x_1, x_2, x_3) \in S^2 - \{N\}$ é bijetora com inversa

$$\begin{aligned}
g : \mathbb{R}^2 &\rightarrow S^2 - \{N\} \\
y &\mapsto g(y) = \left(\frac{2y_1}{y_1^2 + y_2^2 + 1}, \frac{2y_2}{y_1^2 + y_2^2 + 1}, \frac{y_1^2 + y_2^2 - 1}{y_1^2 + y_2^2 + 1} \right)
\end{aligned}$$

com $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$.

Como pelo Exemplo 4.9, $(\mathbb{R}^2, \oplus, \odot)$ é espaço vetorial com as operações

$$(x, y) \oplus (z, w) = \begin{cases} (\sqrt{x^2 + z^2}, y + w), & \text{se } x \geq 0, z \geq 0 \\ (\sqrt{x^2 + z}, y + w), & \text{se } x \geq 0, z < 0, z \geq -x^2 \\ (x^2 + z, y + w), & \text{se } x \geq 0, z < 0, z < -x^2 \\ (x + z^2, y + w), & \text{se } x < 0, z \geq 0, z < \sqrt{-x} \\ (\sqrt{x + z^2}, y + w), & \text{se } x < 0, z \geq 0, z \geq \sqrt{-x} \\ (x + z, y + w), & \text{se } x < 0, z < 0 \end{cases}$$

e

$$c \odot (x, y) = \begin{cases} (\sqrt{cx^2}, cy), & \text{se } x \geq 0, c \geq 0 \\ (cx^2, cy), & \text{se } x \geq 0, c < 0 \\ (\sqrt{cx}, cy), & \text{se } x < 0, c < 0 \\ (cx, cy), & \text{se } x < 0, c \geq 0. \end{cases},$$

e, pelo **Exemplo 2.5**, f é uma bijeção de $S^2 - \{N\}$ em $\mathbb{R}^2$, podemos então, de acordo com o Teorema 3.7 (Teorema da Estrutura), dar a $S^2 - \{N\}$ uma estrutura de espaço vetorial, definindo em $S^2 - \{N\}$ as operações $\uplus$ e $\bullet$ da seguinte forma: para quaisquer $u = (u_1, u_2, u_3), v = (v_1, v_2, v_3) \in S^2 - \{N\}$ e $c \in \mathbb{R}$, definimos

$$u \uplus v = g(f(u) \oplus f(v))$$

$$= g \left(\left(\frac{-u_1}{u_3 - 1}, \frac{-u_2}{u_3 - 1} \right) \oplus \left(\frac{-v_1}{v_3 - 1}, \frac{-v_2}{v_3 - 1} \right) \right)$$

$$= \begin{cases} g \left(\sqrt{\left(\frac{-u_1}{u_3 - 1} \right)^2 + \left(\frac{-v_1}{v_3 - 1} \right)^2}, \left(\frac{-u_2}{u_3 - 1} \right) + \left(\frac{-v_2}{v_3 - 1} \right) \right), \\ \quad \text{se } \frac{-u_1}{u_3 - 1} \geq 0, \left(\frac{-v_1}{v_3 - 1} \right) \geq 0 \\ g \left(\sqrt{\left(\frac{-u_1}{u_3 - 1} \right)^2 + \left(\frac{-v_1}{v_3 - 1} \right)}, \left(\frac{-u_2}{u_3 - 1} \right) + \left(\frac{-v_2}{v_3 - 1} \right) \right), \\ \quad \text{se } \left(\frac{-u_1}{u_3 - 1} \right) \geq 0, \left(\frac{-v_1}{v_3 - 1} \right) < 0, \left(\frac{-v_1}{v_3 - 1} \right) \geq - \left(\frac{-u_1}{u_3 - 1} \right)^2 \\ g \left(\left(\frac{-u_1}{u_3 - 1} \right)^2 + \left(\frac{-v_1}{v_3 - 1} \right), \left(\frac{-u_2}{u_3 - 1} \right) + \left(\frac{-v_2}{v_3 - 1} \right) \right), \\ \quad \text{se } \left(\frac{-u_1}{u_3 - 1} \right) \geq 0, \left(\frac{-v_1}{v_3 - 1} \right) < 0, \left(\frac{-v_1}{v_3 - 1} \right) < - \left(\frac{-u_1}{u_3 - 1} \right)^2 \\ g \left(\left(\frac{-u_1}{u_3 - 1} \right) + \left(\frac{-v_1}{v_3 - 1} \right)^2, \left(\frac{-u_2}{u_3 - 1} \right) + \left(\frac{-v_2}{v_3 - 1} \right) \right), \\ \quad \text{se } \left(\frac{-u_1}{u_3 - 1} \right) < 0, \left(\frac{-v_1}{v_3 - 1} \right) \geq 0, \left(\frac{-v_1}{v_3 - 1} \right) < \sqrt{- \left(\frac{-u_1}{u_3 - 1} \right)} \\ g \left(\sqrt{\left(\frac{-u_1}{u_3 - 1} \right) + \left(\frac{-v_1}{v_3 - 1} \right)^2}, \left(\frac{-u_2}{u_3 - 1} \right) + \left(\frac{-v_2}{v_3 - 1} \right) \right), \\ \quad \text{se } \left(\frac{-u_1}{u_3 - 1} \right) < 0, \left(\frac{-v_1}{v_3 - 1} \right) \geq 0, \left(\frac{-v_1}{v_3 - 1} \right) \geq \sqrt{- \left(\frac{-u_1}{u_3 - 1} \right)} \\ g \left(\left(\frac{-u_1}{u_3 - 1} \right) + \left(\frac{-v_1}{v_3 - 1} \right), \left(\frac{-u_2}{u_3 - 1} \right) + \left(\frac{-v_2}{v_3 - 1} \right) \right), \\ \quad \text{se } \left(\frac{-u_1}{u_3 - 1} \right) < 0, \left(\frac{-v_1}{v_3 - 1} \right) < 0 \end{cases}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} g \left(\sqrt{\frac{u_1^2}{(u_3-1)^2} + \frac{v_1^2}{(v_3-1)^2}}, \left(\frac{-u_2}{u_3-1} \right) + \left(\frac{-v_2}{v_3-1} \right) \right), \\ \quad \text{se } \frac{u_1}{u_3-1} \leq 0, \left(\frac{v_1}{v_3-1} \right) \leq 0 \\ g \left(\sqrt{\frac{u_1^2}{(u_3-1)^2} - \frac{v_1}{v_3-1}}, \left(\frac{-u_2}{u_3-1} \right) + \left(\frac{-v_2}{v_3-1} \right) \right), \\ \quad \text{se } \frac{u_1}{u_3-1} \leq 0, \frac{v_1}{v_3-1} > 0, \frac{v_1}{v_3-1} \leq \frac{u_1^2}{(u_3-1)^2} \\ g \left(\frac{u_1^2}{(u_3-1)^2} - \frac{v_1}{v_3-1}, \left(\frac{-u_2}{u_3-1} \right) + \left(\frac{-v_2}{v_3-1} \right) \right), \\ \quad \text{se } \frac{u_1}{u_3-1} \leq 0, \frac{v_1}{v_3-1} > 0, \frac{v_1}{v_3-1} > \frac{u_1^2}{(u_3-1)^2} \\ g \left(\left(\frac{-u_1}{u_3-1} \right) + \frac{v_1^2}{(v_3-1)^2}, \left(\frac{-u_2}{u_3-1} \right) + \left(\frac{-v_2}{v_3-1} \right) \right), \\ \quad \text{se } \frac{u_1}{u_3-1} > 0, \frac{v_1}{v_3-1} \leq 0, \left(\frac{-v_1}{v_3-1} \right) < \sqrt{\frac{u_1}{u_3-1}} \\ g \left(\sqrt{\left(\frac{-u_1}{u_3-1} \right) + \frac{v_1^2}{(v_3-1)^2}}, \left(\frac{-u_2}{u_3-1} \right) + \left(\frac{-v_2}{v_3-1} \right) \right), \\ \quad \text{se } \left(\frac{u_1}{u_3-1} \right) > 0, \left(\frac{v_1}{v_3-1} \right) \leq 0, \left(\frac{-v_1}{v_3-1} \right) \geq \sqrt{\frac{u_1}{u_3-1}} \\ g \left(\left(\frac{-u_1}{u_3-1} \right) + \left(\frac{-v_1}{v_3-1} \right), \left(\frac{-u_2}{u_3-1} \right) + \left(\frac{-v_2}{v_3-1} \right) \right), \\ \quad \text{se } \left(\frac{u_1}{u_3-1} \right) > 0, \left(\frac{v_1}{v_3-1} \right) > 0 \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned}
& \left(\begin{aligned} & 2\sqrt{\frac{u_1^2}{(u_3-1)^2} + \frac{v_1^2}{(v_3-1)^2}} \\ & \frac{\frac{u_1^2}{(u_3-1)^2} + \frac{v_1^2}{(v_3-1)^2} + \left(\frac{u_2}{u_3-1} + \frac{v_2}{v_3-1}\right)^2 + 1} \\ & -2\left(\frac{u_2}{u_3-1} + \frac{v_2}{v_3-1}\right) \\ & \frac{\frac{u_1^2}{(u_3-1)^2} + \frac{v_1^2}{(v_3-1)^2} + \left(\frac{u_2}{u_3-1} + \frac{v_2}{v_3-1}\right)^2 + 1} \\ & \frac{\frac{u_1^2}{(u_3-1)^2} + \frac{v_1^2}{(v_3-1)^2} + \left(\frac{u_2}{u_3-1} + \frac{v_2}{v_3-1}\right)^2 - 1}{\frac{u_1^2}{(u_3-1)^2} + \frac{v_1^2}{(v_3-1)^2} + \left(\frac{u_2}{u_3-1} + \frac{v_2}{v_3-1}\right)^2 + 1} \end{aligned} \right), \\
& \quad \text{se } \frac{u_1}{u_3-1} \leq 0, \frac{v_1}{v_3-1} \leq 0 \\
= & \left(\begin{aligned} & 2\sqrt{\frac{u_1^2}{(u_3-1)^2} - \frac{v_1}{v_3-1}} \\ & \frac{\frac{u_1^2}{(u_3-1)^2} - \frac{v_1}{v_3-1} + \left(\frac{u_2}{u_3-1} + \frac{v_2}{v_3-1}\right)^2 + 1} \\ & -2\left(\frac{u_2}{u_3-1} + \frac{v_2}{v_3-1}\right) \\ & \frac{\frac{u_1^2}{(u_3-1)^2} - \frac{v_1}{v_3-1} + \left(\frac{u_2}{u_3-1} + \frac{v_2}{v_3-1}\right)^2 + 1} \\ & \frac{\frac{u_1^2}{(u_3-1)^2} - \frac{v_1}{v_3-1} + \left(\frac{u_2}{u_3-1} + \frac{v_2}{v_3-1}\right)^2 - 1}{\frac{u_1^2}{(u_3-1)^2} - \frac{v_1}{v_3-1} + \left(\frac{u_2}{u_3-1} + \frac{v_2}{v_3-1}\right)^2 + 1} \end{aligned} \right), \\
& \quad \text{se } \frac{u_1}{u_3-1} \leq 0, \frac{v_1}{v_3-1} > 0, \frac{v_1}{v_3-1} \leq \frac{u_1^2}{(u_3-1)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{2 \left(\frac{u_1^2}{(u_3-1)^2} - \frac{v_1}{v_3-1} \right)}{\left(\frac{u_1^2}{(u_3-1)^2} - \frac{v_1}{v_3-1} \right)^2 + \left(\frac{u_2}{u_3-1} + \frac{v_2}{v_3-1} \right)^2 + 1}, \right. \\ &\quad \left. \frac{-2 \left(\frac{u_2}{u_3-1} + \frac{v_2}{v_3-1} \right)}{\left(\frac{u_1^2}{(u_3-1)^2} - \frac{v_1}{v_3-1} \right)^2 + \left(\frac{u_2}{u_3-1} + \frac{v_2}{v_3-1} \right)^2 + 1}, \right. \\ &\quad \left. \frac{\left(\frac{u_1^2}{(u_3-1)^2} - \frac{v_1}{v_3-1} \right)^2 + \left(\frac{u_2}{u_3-1} + \frac{v_2}{v_3-1} \right)^2 - 1}{\left(\frac{u_1^2}{(u_3-1)^2} - \frac{v_1}{v_3-1} \right)^2 + \left(\frac{u_2}{u_3-1} + \frac{v_2}{v_3-1} \right)^2 + 1} \right), \\ &\quad \text{se } \frac{u_1}{u_3-1} \leq 0, \frac{v_1}{v_3-1} > 0, \frac{v_1}{v_3-1} > \frac{u_1^2}{(u_3-1)^2} \\ &\left(\frac{2 \left(\frac{-u_1}{u_3-1} + \frac{v_1^2}{(v_3-1)^2} \right)}{\left(\frac{-u_1}{u_3-1} + \frac{v_1^2}{(v_3-1)^2} \right)^2 + \left(\frac{u_2}{u_3-1} + \frac{v_2}{v_3-1} \right)^2 + 1}, \right. \\ &\quad \left. \frac{-2 \left(\frac{u_2}{u_3-1} + \frac{v_2}{v_3-1} \right)}{\left(\frac{-u_1}{u_3-1} + \frac{v_1^2}{(v_3-1)^2} \right)^2 + \left(\frac{u_2}{u_3-1} + \frac{v_2}{v_3-1} \right)^2 + 1}, \right. \\ &\quad \left. \frac{\left(\frac{-u_1}{u_3-1} + \frac{v_1^2}{(v_3-1)^2} \right)^2 + \left(\frac{u_2}{u_3-1} + \frac{v_2}{v_3-1} \right)^2 - 1}{\left(\frac{-u_1}{u_3-1} + \frac{v_1^2}{(v_3-1)^2} \right)^2 + \left(\frac{u_2}{u_3-1} + \frac{v_2}{v_3-1} \right)^2 + 1} \right), \\ &\quad \text{se } \frac{u_1}{u_3-1} > 0, \frac{v_1}{v_3-1} \leq 0, \frac{-v_1}{v_3-1} < \sqrt{\frac{u_1}{u_3-1}} \\ &\left(\frac{2 \sqrt{\left(\frac{-u_1}{u_3-1} \right) + \frac{v_1^2}{(v_3-1)^2}}}{\frac{-u_1}{u_3-1} + \frac{v_1^2}{(v_3-1)^2} + \left(\frac{u_2}{u_3-1} + \frac{v_2}{v_3-1} \right)^2 + 1}, \right. \\ &\quad \left. \frac{-2 \left(\frac{u_2}{u_3-1} + \frac{v_2}{v_3-1} \right)}{\frac{-u_1}{u_3-1} + \frac{v_1^2}{(v_3-1)^2} + \left(\frac{u_2}{u_3-1} + \frac{v_2}{v_3-1} \right)^2 + 1}, \right. \\ &\quad \left. \frac{\frac{-u_1}{u_3-1} + \frac{v_1^2}{(v_3-1)^2} + \left(\frac{u_2}{u_3-1} + \frac{v_2}{v_3-1} \right)^2 - 1}{\frac{-u_1}{u_3-1} + \frac{v_1^2}{(v_3-1)^2} + \left(\frac{u_2}{u_3-1} + \frac{v_2}{v_3-1} \right)^2 + 1} \right) \end{aligned} \right\}
\end{aligned}$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \frac{\frac{-u_1}{u_3-1} + \frac{v_1^2}{(v_3-1)^2} + \left(\frac{u_2}{u_3-1} + \frac{v_2}{v_3-1}\right)^2 - 1}{\frac{-u_1}{u_3-1} + \frac{v_1^2}{(v_3-1)^2} + \left(\frac{u_2}{u_3-1} + \frac{v_2}{v_3-1}\right)^2 + 1}, \\ \quad \text{se } \frac{u_1}{u_3-1} > 0, \frac{v_1}{v_3-1} \leq 0, \frac{-v_1}{v_3-1} \geq \sqrt{\frac{u_1}{u_3-1}} \\ \left(\frac{-2\left(\frac{u_1}{u_3-1} + \frac{v_1}{v_3-1}\right)}{\left(\frac{u_1}{u_3-1} + \frac{v_1}{v_3-1}\right)^2 + \left(\frac{u_2}{u_3-1} + \frac{v_2}{v_3-1}\right)^2 + 1}, \right. \\ \left. \frac{-2\left(\frac{u_2}{u_3-1} + \frac{v_2}{v_3-1}\right)}{\left(\frac{u_1}{u_3-1} + \frac{v_1}{v_3-1}\right)^2 + \left(\frac{u_2}{u_3-1} + \frac{v_2}{v_3-1}\right)^2 + 1}, \right. \\ \left. \frac{\left(\frac{u_1}{u_3-1} + \frac{v_1}{v_3-1}\right)^2 + \left(\frac{u_2}{u_3-1} + \frac{v_2}{v_3-1}\right)^2 - 1}{\left(\frac{u_1}{u_3-1} + \frac{v_1}{v_3-1}\right)^2 + \left(\frac{u_2}{u_3-1} + \frac{v_2}{v_3-1}\right)^2 + 1} \right), \\ \quad \text{se } \left(\frac{u_1}{u_3-1}\right) > 0, \left(\frac{v_1}{v_3-1}\right) > 0 \end{array} \right.$$

e

$$g\left(c \odot \left(\frac{-u_1}{u_3-1}, \frac{-u_2}{u_3-1}\right)\right) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} g\left(\sqrt{c\left(\frac{-u_1}{u_3-1}\right)^2}, c\left(\frac{-u_2}{u_3-1}\right)\right), \quad \text{se } \left(\frac{-u_1}{u_3-1}\right) \geq 0, c \geq 0 \\ g\left(c\left(\frac{-u_1}{u_3-1}\right)^2, c\left(\frac{-u_2}{u_3-1}\right)\right), \quad \text{se } \left(\frac{-u_1}{u_3-1}\right) \geq 0, c < 0 \\ g\left(\sqrt{c\left(\frac{-u_1}{u_3-1}\right)}, c\left(\frac{-u_2}{u_3-1}\right)\right), \quad \text{se } \left(\frac{-u_1}{u_3-1}\right) < 0, c < 0 \\ g\left(c\left(\frac{-u_1}{u_3-1}\right), c\left(\frac{-u_2}{u_3-1}\right)\right), \quad \text{se } \left(\frac{-u_1}{u_3-1}\right) < 0, c \geq 0. \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{2\sqrt{c\left(\frac{u_1}{u_3-1}\right)^2}}{c\left(\frac{u_1}{u_3-1}\right)^2 + c^2\left(\frac{u_2}{u_3-1}\right)^2 + 1}, \frac{-2c\left(\frac{u_2}{u_3-1}\right)}{c\left(\frac{u_1}{u_3-1}\right)^2 + c^2\left(\frac{u_2}{u_3-1}\right)^2 + 1}, \right. \\
& \quad \left. \frac{c\left(\frac{u_1}{u_3-1}\right)^2 + c^2\left(\frac{u_2}{u_3-1}\right)^2 - 1}{c\left(\frac{u_1}{u_3-1}\right)^2 + c^2\left(\frac{u_2}{u_3-1}\right)^2 + 1} \right), \text{ se } \frac{u_1}{u_3-1} \leq 0, c \geq 0 \\
& \left(\frac{2c\left(\frac{u_1}{u_3-1}\right)^2}{c^2\left(\frac{u_1}{u_3-1}\right)^4 + c^2\left(\frac{u_2}{u_3-1}\right)^2 + 1}, \frac{-2c\left(\frac{u_2}{u_3-1}\right)}{c^2\left(\frac{u_1}{u_3-1}\right)^4 + c^2\left(\frac{u_2}{u_3-1}\right)^2 + 1}, \right. \\
& \quad \left. \frac{c^2\left(\frac{u_1}{u_3-1}\right)^4 + c^2\left(\frac{u_2}{u_3-1}\right)^2 - 1}{c^2\left(\frac{u_1}{u_3-1}\right)^4 + c^2\left(\frac{u_2}{u_3-1}\right)^2 + 1} \right), \text{ se } \frac{u_1}{u_3-1} \leq 0, c < 0 \\
& \left(\frac{2\sqrt{-c\left(\frac{u_1}{u_3-1}\right)}}{-c\left(\frac{u_1}{u_3-1}\right) + c^2\left(\frac{u_2}{u_3-1}\right)^2 + 1}, \frac{-2c\left(\frac{u_2}{u_3-1}\right)}{-c\left(\frac{u_1}{u_3-1}\right) + c^2\left(\frac{u_2}{u_3-1}\right)^2 + 1}, \right. \\
& \quad \left. \frac{-c\left(\frac{u_1}{u_3-1}\right) + c^2\left(\frac{u_2}{u_3-1}\right)^2 - 1}{-c\left(\frac{u_1}{u_3-1}\right) + c^2\left(\frac{u_2}{u_3-1}\right)^2 + 1} \right), \text{ se } \frac{u_1}{u_3-1} > 0, c < 0 \\
& \left(\frac{-2c\left(\frac{u_1}{u_3-1}\right)}{c^2\left(\frac{u_1}{u_3-1}\right)^2 + c^2\left(\frac{u_2}{u_3-1}\right)^2 + 1}, \frac{-2c\left(\frac{u_2}{u_3-1}\right)}{c^2\left(\frac{u_1}{u_3-1}\right)^2 + c^2\left(\frac{u_2}{u_3-1}\right)^2 + 1}, \right. \\
& \quad \left. \frac{c^2\left(\frac{u_1}{u_3-1}\right)^2 + c^2\left(\frac{u_2}{u_3-1}\right)^2 - 1}{c^2\left(\frac{u_1}{u_3-1}\right)^2 + c^2\left(\frac{u_2}{u_3-1}\right)^2 + 1} \right), \text{ se } \frac{u_1}{u_3-1} > 0, c \geq 0.
\end{aligned}$$

O elemento neutro de $S^2 - \{N\}$ é $g(0, 0) = (0, 0, -1)$ e o elemento oposto de

$$u = (u_1, u_2, u_3) \in S^2 - \{N\}$$

é

$$\begin{aligned} g(\ominus f(u)) &= g\left(\ominus\left(\frac{-u_1}{u_3-1}, \frac{-u_2}{u_3-1}\right)\right) \\ &= \begin{cases} g\left(-\left(\frac{u_1}{u_3-1}\right)^2, \frac{u_2}{u_3-1}\right), & \text{se } \frac{u_1}{u_3-1} \leq 0 \\ g\left(\sqrt{\frac{u_1}{u_3-1}}, \frac{u_2}{u_3-1}\right), & \text{se } \frac{u_1}{u_3-1} > 0. \end{cases} \\ &= \begin{cases} \left(\frac{-2\left(\frac{u_1}{u_3-1}\right)^2}{\left(\frac{u_1}{u_3-1}\right)^4 + \left(\frac{u_2}{u_3-1}\right)^2 + 1}, \frac{\frac{2u_2}{u_3-1}}{\left(\frac{u_1}{u_3-1}\right)^4 + \left(\frac{u_2}{u_3-1}\right)^2 + 1}, \frac{\left(\frac{u_1}{u_3-1}\right)^4 + \left(\frac{u_2}{u_3-1}\right)^2 - 1}{\left(\frac{u_1}{u_3-1}\right)^4 + \left(\frac{u_2}{u_3-1}\right)^2 + 1}\right), & \text{se } \frac{u_1}{u_3-1} \leq 0. \\ \left(\frac{2\sqrt{\frac{u_1}{u_3-1}}}{\frac{u_1}{u_3-1} + \left(\frac{u_2}{u_3-1}\right)^2 + 1}, \frac{\frac{2u_2}{u_3-1}}{\frac{u_1}{u_3-1} + \left(\frac{u_2}{u_3-1}\right)^2 + 1}, \frac{\frac{u_1}{u_3-1} + \left(\frac{u_2}{u_3-1}\right)^2 - 1}{\frac{u_1}{u_3-1} + \left(\frac{u_2}{u_3-1}\right)^2 + 1}\right), & \text{se } \frac{u_1}{u_3-1} > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} \left(\frac{\frac{-2u_1^2}{(u_3-1)^2}}{\frac{u_1^4}{(u_3-1)^4} + \frac{u_2^2}{(u_3-1)^2} + 1}, \frac{\frac{2u_2}{u_3-1}}{\frac{u_1^4}{(u_3-1)^4} + \frac{u_2^2}{(u_3-1)^2} + 1}, \right. \\ \left. \frac{\frac{u_1^4}{(u_3-1)^4} + \frac{u_2^2}{(u_3-1)^2} - 1}{\frac{u_1^4}{(u_3-1)^4} + \frac{u_2^2}{(u_3-1)^2} + 1} \right) \text{ se } \frac{u_1}{u_3-1} \leq 0. \\ \\ \left(\frac{2\sqrt{\frac{u_1}{u_3-1}}}{\frac{u_1}{u_3-1} + \frac{u_2^2}{(u_3-1)^2} + 1}, \frac{\frac{2u_2}{u_3-1}}{\frac{u_1}{u_3-1} + \frac{u_2^2}{(u_3-1)^2} + 1}, \right. \\ \left. \frac{\frac{u_1}{u_3-1} + \frac{u_2^2}{(u_3-1)^2} - 1}{\frac{u_1}{u_3-1} + \frac{u_2^2}{(u_3-1)^2} + 1} \right), \text{ se } \frac{u_1}{u_3-1} > 0. \end{cases}$$

De fato, para qualquer $u = (u_1, u_2, u_3) \in S^2 - \{N\}$ temos

$$(u_1, u_2, u_3) \uplus (0, 0, -1) =$$

$$= \begin{cases} \left(\frac{2\sqrt{\left(\frac{u_1}{u_3-1}\right)^2}}{\left(\frac{u_1}{u_3-1}\right)^2 + \left(\frac{u_2}{u_3-1}\right)^2 + 1}, \frac{-2\left(\frac{u_2}{u_3-1}\right)}{\left(\frac{u_1}{u_3-1}\right)^2 + \left(\frac{u_2}{u_3-1}\right)^2 + 1}, \right. \\ \left. \frac{\left(\frac{u_1}{u_3-1}\right)^2 + \left(\frac{u_2}{u_3-1}\right)^2 - 1}{\left(\frac{u_1}{u_3-1}\right)^2 + \left(\frac{u_2}{u_3-1}\right)^2 + 1} \right), \text{ se } \frac{u_1}{u_3-1} \leq 0 \\ \\ \left(\frac{-2\left(\frac{u_1}{u_3-1}\right)}{\left(\frac{u_1}{u_3-1}\right)^2 + \left(\frac{u_2}{u_3-1}\right)^2 + 1}, \frac{-2\left(\frac{u_2}{u_3-1}\right)}{\left(\frac{u_1}{u_3-1}\right)^2 + \left(\frac{u_2}{u_3-1}\right)^2 + 1}, \right. \\ \left. \frac{\left(\frac{u_1}{u_3-1}\right)^2 + \left(\frac{u_2}{u_3-1}\right)^2 - 1}{\left(\frac{u_1}{u_3-1}\right)^2 + \left(\frac{u_2}{u_3-1}\right)^2 + 1} \right), \text{ se } \frac{u_1}{u_3-1} > 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{cases} \left(\frac{2 \left| \frac{u_1}{u_3 - 1} \right|}{\frac{u_1^2 + u_2^2}{(u_3 - 1)^2} + 1}, \frac{-2 \left(\frac{u_2}{u_3 - 1} \right)}{\frac{u_1^2 + u_2^2}{(u_3 - 1)^2} + 1}, \frac{\frac{u_1^2 + u_2^2}{(u_3 - 1)^2} - 1}{\frac{u_1^2 + u_2^2}{(u_3 - 1)^2} + 1} \right), \text{ se } \frac{u_1}{u_3 - 1} \leq 0 \\ \\ \left(\frac{-2 \left(\frac{u_1}{u_3 - 1} \right)}{\frac{u_1^2 + u_2^2}{(u_3 - 1)^2} + 1}, \frac{-2 \left(\frac{u_2}{u_3 - 1} \right)}{\frac{u_1^2 + u_2^2}{(u_3 - 1)^2} + 1}, \frac{\frac{u_1^2 + u_2^2}{(u_3 - 1)^2} - 1}{\frac{u_1^2 + u_2^2}{(u_3 - 1)^2} + 1} \right), \text{ se } \frac{u_1}{u_3 - 1} > 0. \end{cases} \\
&= \begin{cases} \left(\frac{-2 \left(\frac{u_1}{u_3 - 1} \right)}{\frac{1 - u_3^2}{(u_3 - 1)^2} + 1}, \frac{-2 \left(\frac{u_2}{u_3 - 1} \right)}{\frac{1 - u_3^2}{(u_3 - 1)^2} + 1}, \frac{\frac{1 - u_3^2}{(u_3 - 1)^2} - 1}{\frac{1 - u_3^2}{(u_3 - 1)^2} + 1} \right), \text{ se } \frac{u_1}{u_3 - 1} \leq 0 \\ \\ \left(\frac{-2 \left(\frac{u_1}{u_3 - 1} \right)}{\frac{1 - u_3^2}{(u_3 - 1)^2} + 1}, \frac{-2 \left(\frac{u_2}{u_3 - 1} \right)}{\frac{1 - u_3^2}{(u_3 - 1)^2} + 1}, \frac{\frac{1 - u_3^2}{(u_3 - 1)^2} - 1}{\frac{1 - u_3^2}{(u_3 - 1)^2} + 1} \right), \text{ se } \frac{u_1}{u_3 - 1} > 0. \end{cases} \\
&= \left(\frac{\frac{-2u_1}{u_3 - 1}}{\frac{1 - u_3^2}{(u_3 - 1)^2} + 1}, \frac{\frac{-2u_2}{u_3 - 1}}{\frac{1 - u_3^2}{(u_3 - 1)^2} + 1}, \frac{\frac{1 - u_3^2}{(u_3 - 1)^2} - 1}{\frac{1 - u_3^2}{(u_3 - 1)^2} + 1} \right) \\
&= \left(\frac{\frac{-2u_1}{u_3 - 1}}{\frac{(1 - u_3)(1 + u_3)}{(1 - u_3)^2} + 1}, \frac{\frac{-2u_2}{u_3 - 1}}{\frac{(1 - u_3)(1 + u_3)}{(1 - u_3)^2} + 1}, \frac{\frac{(1 - u_3)(1 + u_3)}{(1 - u_3)^2} - 1}{\frac{(1 - u_3)(1 + u_3)}{(1 - u_3)^2} + 1} \right) \\
&= \left(\frac{\frac{-2u_1}{u_3 - 1}}{\frac{1 + u_3}{1 - u_3} + 1}, \frac{\frac{-2u_2}{u_3 - 1}}{\frac{1 + u_3}{1 - u_3} + 1}, \frac{\frac{1 + u_3}{1 - u_3} - 1}{\frac{1 + u_3}{1 - u_3} + 1} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left(\frac{\frac{2u_1}{1-u_3}}{\frac{1+u_3+1-u_3}{1-u_3}}, \frac{\frac{2u_2}{1-u_3}}{\frac{1+u_3+1-u_3}{1-u_3}}, \frac{\frac{1+u_3-1+u_3}{1-u_3}}{\frac{1+u_3+1-u_3}{1-u_3}} \right) \\
 &= \left(\frac{\frac{2u_1}{1-u_3}}{\frac{1-u_3}{2}}, \frac{\frac{2u_2}{1-u_3}}{\frac{1-u_3}{2}}, \frac{\frac{2u_3}{1-u_3}}{\frac{1-u_3}{2}} \right) \\
 &= (u_1, u_2, u_3)
 \end{aligned}$$

e

$$(u_1, u_2, u_3) \uplus g(\ominus f(u_1, u_2, u_3)) =$$

$$= \left\{ \begin{aligned} &(u_1, u_2, u_3) \uplus \left(\frac{\frac{-2u_1^2}{(u_3-1)^2}}{\frac{u_1^4}{(u_3-1)^4} + \frac{u_2^2}{(u_3-1)^2} + 1}, \frac{\frac{2u_2}{u_3-1}}{\frac{u_1^4}{(u_3-1)^4} + \frac{u_2^2}{(u_3-1)^2} + 1}, \right. \\ &\left. \frac{\frac{u_1^4}{(u_3-1)^4} + \frac{u_2^2}{(u_3-1)^2} - 1}{\frac{u_1^4}{(u_3-1)^4} + \frac{u_2^2}{(u_3-1)^2} + 1} \right), \text{ se } \frac{u_1}{u_3-1} \leq 0. \\ &(u_1, u_2, u_3) \uplus \left(\frac{2\sqrt{\frac{u_1}{u_3-1}}}{\frac{u_1}{u_3-1} + \frac{u_2^2}{(u_3-1)^2} + 1}, \frac{\frac{2u_2}{u_3-1}}{\frac{u_1}{u_3-1} + \frac{u_2^2}{(u_3-1)^2} + 1}, \right. \\ &\left. \frac{\frac{u_1}{u_3-1} + \frac{u_2^2}{(u_3-1)^2} - 1}{\frac{u_1}{u_3-1} + \frac{u_2^2}{(u_3-1)^2} + 1} \right), \text{ se } \frac{u_1}{u_3-1} > 0. \end{aligned} \right.$$

Note que se $\frac{u_1}{u_3 - 1} \leq 0$,

$$\begin{aligned}
& \frac{\frac{-2u_1^2}{(u_3 - 1)^2}}{\frac{\frac{u_1^4}{(u_3 - 1)^4} + \frac{u_2^2}{(u_3 - 1)^2} + 1}} = \frac{\frac{-2u_1^2}{(u_3 - 1)^2}}{\frac{\frac{u_1^4}{(u_3 - 1)^4} + \frac{u_2^2}{(u_3 - 1)^2} + 1}} \\
& \frac{\frac{u_1^4}{(u_3 - 1)^4} + \frac{u_2^2}{(u_3 - 1)^2} - 1}{\frac{u_1^4}{(u_3 - 1)^4} + \frac{u_2^2}{(u_3 - 1)^2} + 1} = \frac{\frac{u_1^4}{(u_3 - 1)^4} + \frac{u_2^2}{(u_3 - 1)^2} - 1 - \frac{u_1^4}{(u_3 - 1)^4} - \frac{u_2^2}{(u_3 - 1)^2} - 1}{\frac{u_1^4}{(u_3 - 1)^4} + \frac{u_2^2}{(u_3 - 1)^2} + 1} \\
& = \frac{\frac{-2u_1^2}{(u_3 - 1)^2}}{-2} \\
& = \frac{-2u_1^2}{-2(u_3 - 1)^2} \\
& = \frac{u_1^2}{(u_3 - 1)^2} \geq 0
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
& \frac{\frac{2u_2}{u_3 - 1}}{\frac{\frac{u_1^4}{(u_3 - 1)^4} + \frac{u_2^2}{(u_3 - 1)^2} + 1}} = \frac{\frac{2u_2}{u_3 - 1}}{\frac{u_1^4}{(u_3 - 1)^4} + \frac{u_2^2}{(u_3 - 1)^2} + 1} \\
& = \frac{-u_2}{u_3 - 1}.
\end{aligned}$$

Ainda, se $\frac{u_1}{u_3 - 1} > 0$,

$$\begin{aligned}
& \frac{\frac{2\sqrt{\frac{u_1}{u_3-1}}}{\frac{u_1}{u_3-1} + \frac{u_2^2}{(u_3-1)^2} + 1}}{\frac{\frac{u_1}{u_3-1} + \frac{u_2^2}{(u_3-1)^2} - 1}{\frac{u_1}{u_3-1} + \frac{u_2^2}{(u_3-1)^2} + 1}} - 1 = \frac{\frac{2\sqrt{\frac{u_1}{u_3-1}}}{\frac{u_1}{u_3-1} + \frac{u_2^2}{(u_3-1)^2} + 1}}{\frac{\frac{u_1}{u_3-1} + \frac{u_2^2}{(u_3-1)^2} - 1 - \frac{u_1}{u_3-1} - \frac{u_2^2}{(u_3-1)^2} - 1}} \\
& = \frac{2\sqrt{\frac{u_1}{u_3-1}}}{-2} \\
& = -\sqrt{\frac{u_1}{u_3-1}} < 0
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
& \frac{\frac{\frac{2u_2}{u_3-1}}{\frac{u_1}{u_3-1} + \frac{u_2^2}{(u_3-1)^2} + 1}}{\frac{\frac{u_1}{u_3-1} + \frac{u_2^2}{(u_3-1)^2} - 1}{\frac{u_1}{u_3-1} + \frac{u_2^2}{(u_3-1)^2} + 1}} - 1 = \frac{\frac{2u_2}{u_3-1}}{\frac{\frac{u_1}{u_3-1} + \frac{u_2^2}{(u_3-1)^2} - 1 - \frac{u_1}{u_3-1} - \frac{u_2^2}{(u_3-1)^2} - 1}} \\
& = \frac{\frac{2u_2}{u_3-1}}{-2} \\
& = \frac{2u_2}{-2(u_3-1)} \\
& = -\frac{u_2}{u_3-1}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$(u_1, u_2, u_3) \uplus g(\ominus f(u_1, u_2, u_3)) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} (u_1, u_2, u_3) \uplus \left(\frac{\frac{-2u_1^2}{(u_3-1)^2}}{\frac{u_1^4}{(u_3-1)^4} + \frac{u_2^2}{(u_3-1)^2} + 1}, \frac{\frac{2u_2}{u_3-1}}{\frac{u_1^4}{(u_3-1)^4} + \frac{u_2^2}{(u_3-1)^2} + 1}, \right. \\ \left. \frac{\frac{u_1^4}{(u_3-1)^4} + \frac{u_2^2}{(u_3-1)^2} - 1}{\frac{u_1^4}{(u_3-1)^4} + \frac{u_2^2}{(u_3-1)^2} + 1} \right), \text{ se } \frac{u_1}{u_3-1} \leq 0. \\ \\ (u_1, u_2, u_3) \uplus \left(\frac{2\sqrt{\frac{u_1}{u_3-1}}}{\frac{u_1}{u_3-1} + \frac{u_2^2}{(u_3-1)^2} + 1}, \frac{\frac{2u_2}{u_3-1}}{\frac{u_1}{u_3-1} + \frac{u_2^2}{(u_3-1)^2} + 1}, \right. \\ \left. \frac{\frac{u_1}{u_3-1} + \frac{u_2^2}{(u_3-1)^2} - 1}{\frac{u_1}{u_3-1} + \frac{u_2^2}{(u_3-1)^2} + 1} \right), \text{ se } \frac{u_1}{u_3-1} > 0. \end{array} \right.$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{2\sqrt{\frac{u_1^2}{(u_3-1)^2} + \frac{u_1^4}{(u_3-1)^4}}}{\frac{u_1^2}{(u_3-1)^2} + \frac{u_1^4}{(u_3-1)^4} + \left(\frac{u_2}{u_3-1} - \frac{u_2}{u_3-1}\right)^2 + 1}, \right. \\ \left. \frac{-2\left(\frac{u_2}{u_3-1} - \frac{u_2}{u_3-1}\right)}{\frac{u_1^2}{(u_3-1)^2} + \frac{u_1^4}{(u_3-1)^4} + \left(\frac{u_2}{u_3-1} - \frac{u_2}{u_3-1}\right)^2 + 1}, \right. \\ \left. \frac{\frac{u_1^2}{(u_3-1)^2} + \frac{u_1^4}{(u_3-1)^4} + \left(\frac{u_2}{u_3-1} - \frac{u_2}{u_3-1}\right)^2 - 1}{\frac{u_1^2}{(u_3-1)^2} + \frac{u_1^4}{(u_3-1)^4} + \left(\frac{u_2}{u_3-1} - \frac{u_2}{u_3-1}\right)^2 + 1} \right), \text{ se } \frac{u_1}{u_3-1} = 0 \\ \\ \left(\frac{2\sqrt{\frac{u_1^2}{(u_3-1)^2} - \frac{u_1^2}{(u_3-1)^2}}}{\frac{u_1^2}{(u_3-1)^2} - \frac{u_1^2}{(u_3-1)^2} + \left(\frac{u_2}{u_3-1} - \frac{u_2}{u_3-1}\right)^2 + 1}, \right. \\ \left. \frac{-2\left(\frac{u_2}{u_3-1} - \frac{u_2}{u_3-1}\right)}{\frac{u_1^2}{(u_3-1)^2} - \frac{u_1^2}{(u_3-1)^2} + \left(\frac{u_2}{u_3-1} - \frac{u_2}{u_3-1}\right)^2 + 1}, \right. \\ \left. \frac{\frac{u_1^2}{(u_3-1)^2} - \frac{u_1^2}{(u_3-1)^2} + \left(\frac{u_2}{u_3-1} - \frac{u_2}{u_3-1}\right)^2 - 1}{\frac{u_1^2}{(u_3-1)^2} - \frac{u_1^2}{(u_3-1)^2} + \left(\frac{u_2}{u_3-1} - \frac{u_2}{u_3-1}\right)^2 + 1} \right), \text{ se } \frac{u_1}{u_3-1} < 0 \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{2\sqrt{\frac{-u_1}{u_3-1} + \frac{u_1}{u_3-1}}}{\frac{-u_1}{u_3-1} + \frac{u_1}{u_3-1} + \left(\frac{u_2}{u_3-1} - \frac{u_2}{u_3-1}\right)^2 + 1}, \right. \\ \\ \left. \frac{-2\left(\frac{u_2}{u_3-1} - \frac{u_2}{u_3-1}\right)}{\frac{-u_1}{u_3-1} + \frac{u_1}{u_3-1} + \left(\frac{u_2}{u_3-1} - \frac{u_2}{u_3-1}\right)^2 + 1}, \right. \\ \\ \left. \frac{\frac{-u_1}{u_3-1} + \frac{u_1}{u_3-1} + \left(\frac{u_2}{u_3-1} - \frac{u_2}{u_3-1}\right)^2 - 1}{\frac{-u_1}{u_3-1} + \frac{u_1}{u_3-1} + \left(\frac{u_2}{u_3-1} - \frac{u_2}{u_3-1}\right)^2 + 1} \right), \text{ se } \frac{u_1}{u_3-1} > 0 \\ \\ \left\{ \begin{array}{l} (0, 0, -1), \text{ se } \frac{u_1}{u_3-1} = 0 \\ (0, 0, -1), \text{ se } \frac{u_1}{u_3-1} < 0 \\ (0, 0, -1), \text{ se } \frac{u_1}{u_3-1} > 0 \end{array} \right. \\ \\ = (0, 0, -1).
\end{array} \right.
\end{aligned}$$

5 Comentários Finais

O resultado principal demonstrado neste trabalho permitiu dar a determinados conjuntos uma estrutura de espaço vetorial. Além disso, como consequência, observou-se que um mesmo conjunto pode ter várias possibilidades de estrutura de espaço vetorial.

Então é natural perguntarmos quantos produtos internos podemos definir num mesmo espaço vetorial. Para ajudar a reflexão sobre isso, podemos consultar o livro [[6], 6.1.4, p.163], onde é provado o seguinte resultado:

Sejam V e W espaços vetoriais sobre o mesmo corpo e seja $\langle \cdot \rangle$ um produto interno em V . Se $T : V \rightarrow W$ for uma transformação linear injetora, então podemos definir um produto interno em W da seguinte forma

$$\langle u, v \rangle_T = \langle T(u), T(v) \rangle, \forall u, v \in V.$$

Este resultado nos permite definirmos produtos internos em certos espaços, como por exemplo, o $\mathbb{C}$ - espaço vetorial

$$V = \mathcal{C}([0, 1]; \mathbb{C}) = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ é contínua} \},$$

com adição e multiplicação por escalar definidas, respectivamente, por $(f \oplus g)(t) = f(t) + g(t), \forall t \in [0, 1]$ e $(\alpha \odot f)(t) = \alpha \cdot f(t), \forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall t \in [0, 1]$, munido do produto interno $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t) \cdot \overline{g(t)} dt$.

Se

$$\begin{aligned} T : V &\rightarrow V \\ f &\mapsto T(f) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}, \end{aligned}$$

onde $T(f)(t) = t \cdot f(t), \forall t \in [0, 1]$ e $\forall f \in V$, note que T é um operador linear, pois $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ e $\forall f, g \in V$ temos

$$T(\alpha \odot f \oplus g) = \alpha \odot T(f) \oplus T(g).$$

De fato, $T(\alpha \odot f \oplus g)(t) = t \cdot (\alpha \odot f \oplus g)(t) = t \cdot ((\alpha \odot f)(t) + g(t)) = t \cdot (\alpha \cdot f(t) + g(t)) = t \cdot (\alpha \cdot f(t)) + t \cdot g(t) = \alpha \cdot (t \cdot f(t)) + t \cdot g(t) = \alpha \cdot T(f)(t) + T(g)(t) = (\alpha \odot T(f))(t) + T(g)(t) = (\alpha \odot T(f) \oplus T(g))(t), \forall t \in [0, 1]$.

Além disso, se $f \in V$ é tal que $T(f) = 0$, ou seja, $0 = T(f)(t) = t \cdot f(t), \forall t \in [0, 1]$, segue que $f(t) = 0, \forall t \in]0, 1]$ e como f é contínua, devemos ter $f(0) = 0$. Portanto, $f = 0$ e T é um operador linear injetor.

Assim, pelo resultado acima

$$\langle f, g \rangle_T = \langle T(f), T(g) \rangle = \int_0^1 t^2 f(t) \cdot \overline{g(t)} dt, \forall f, g \in V$$

define um outro produto interno sobre V .

Referências

- [1] HOFFMAN, K.; KUNZE, R. *Álgebra Linear*. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo e Polígono, 1970.
- [2] CALLIOLI, C. A.; DOMINGUES, H. H.; COSTA, R. C. F. *Álgebra Linear e Aplicações*. 6. ed. São Paulo: Editora Atual, 1990.
- [3] WALL, C. T. C. *A Geometric Introduction to Topology*. United States of America: Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1972.
- [4] LIPSCHUTZ, S. *Teoria dos Conjuntos*. São Paulo: McGraw-Hill, 1972.
- [5] LIMA, E. L. *Espaços Métricos*. 5. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2013.
- [6] COELHO, F. U.; LOURENÇO, M. L. *Um curso de Álgebra Linear*. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2001.