

RESSALVA

Atendendo solicitação do autor,
o texto completo desta tese será
disponibilizado somente a partir
de 20/02/2026



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Câmpus de São José do Rio Preto

Rodrigo Barbosa Moreira

Um Princípio do Máximo Assintótico e uma Condição de Qualificação
Associada para Controle Ótimo com Restrições Mistas

São José do Rio Preto

2024

Rodrigo Barbosa Moreira

**Um Princípio do Máximo Assintótico e uma Condição de Qualificação
Associada para Controle Ótimo com Restrições Mistas**

Tese apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CAPES

Orientador: Prof. Dr. Valeriano Antunes de Oliveira

São José do Rio Preto

2024

M838p

Moreira, Rodrigo Barbosa

Um princípio do máximo assintótico e uma condição de qualificação associada para controle ótimo com restrições mistas / Rodrigo Barbosa Moreira. -- São José do Rio Preto, 2024

106 p. : il.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto

Orientador: Valeriano Antunes de Oliveira

1. Condições de qualificação. 2. Dinâmica e custo não suaves. 3. Método de Lagrangiano aumentado. 4. Princípio do Máximo Fraco Assintótico. 5. Restrições mistas. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

Rodrigo Barbosa Moreira

**Um Princípio do Máximo Assintótico e uma Condição de Qualificação
Associada para Controle Ótimo com Restrições Mistas**

Tese apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CAPES

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Valeriano Antunes de Oliveira
UNESP - São José do Rio Preto
Orientador

Prof. Dr. Geraldo Nunes Silva
UNESP - São José do Rio Preto

Prof. Dr. Roberto Andreani
UNICAMP - Campinas

Prof^a. Dr^a. María Soledad Aronna
FGV - Rio de Janeiro

Prof. Dr. Eduardo Fontoura Costa
USP - São Carlos

São José do Rio Preto
20 de fevereiro de 2024

Dedico este trabalho
àqueles que não tiveram
as mesmas oportunidades que eu tive.

AGRADECIMENTOS

Desejo iniciar meus agradecimentos expressando profunda gratidão a todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a concretização desta tese. Saibam que cada um de vocês tiveram um papel muito importante para que esse sonho se tornasse realidade.

Agradeço à minha família, em especial à minha namorada e companheira de todas as horas, Mônica. Agradeço por todo o carinho, incentivo, paciência e companheirismo dedicados a mim, tanto nos momentos felizes quanto nos desafios enfrentados. À minha mãe, Diulina, ao meu pai, Raimundo, à minha irmã, Rafaela, aos meus primos, aos meus tios e aos meus avós, Maria e Pascoal, agradeço por estarem sempre ao meu lado, oferecendo apoio incondicional. Sem o respaldo inabalável de todos vocês, minha jornada acadêmica seria simplesmente impossível.

Dedico meus agradecimentos à todos os meus amigos, com uma gratidão especial às minhas amigas Karina e Ana Clara. Agradeço pelo carinho constante, pelas conversas significativas e por tolerarem conviver comigo, suportando meus diversos momentos de introspecção e reflexão matemática.

Gostaria de expressar minha gratidão a todos os colegas e amigos que fizeram parte da minha jornada, desde o período escolar até o doutorado. Agradeço pela compreensão, solidariedade e pela convivência enriquecedora ao longo dessas etapas, que foram fundamentais para o meu crescimento acadêmico e pessoal. Um agradecimento especial aos meus amigos Anderson, Alex, Beatriz, Manoela, Sidnéia, Léia, Marcelo, Mariane, Julio, Wilian, Heber, Mariana, Wallas, Edineia, Jéssica, Danilo, Javier, Eduardo, Ítalo, João, Rodrigo e Maycon. Peço desculpas se indevidamente deixei de mencionar alguém.

Agradeço a todos os professores que tive ao longo de toda a minha trajetória acadêmica. Saibam que todos vocês tiveram um papel substancial no meu desenvolvimento profissional e pessoal. Em particular, desejo expressar minha gratidão à minha primeira professora, minha mãe Diulina. Mainha, quero que saiba que você foi a primeira pessoa a me inspirar na busca pelo conhecimento. Seu exemplo tem sido, é, e continuará sendo um dos guias fundamentais da minha vida. Agradeço por tudo!

Desejo expressar meu profundo agradecimento ao meu orientador Valeriano por dedicar seu tempo e conhecimento. Agradeço pelos valiosos conselhos que, sem dúvida, carregarei ao longo de toda a minha vida. Minha gratidão se estende ao apoio e ensinamentos cruciais fornecidos, os quais foram fundamentais para a elaboração deste trabalho, sempre com notável paciência e habilidade.

Estendo meus sinceros agradecimentos a todos os membros da banca por aceitarem o convite e reservarem uma parte valiosa de seus tempos à leitura deste trabalho. Quero destacar especialmente o Prof. Roberto Andreani, cuja sugestão de investigação do tema

foi o ponto de partida para a pesquisa que resultou nesta tese. Também gostaria de agradecer ao Prof. Geraldo por sua constante disposição em nos ajudar sempre que necessário. Além disso, agradeço ao Prof. Sílvia por ser uma presença confiável em quem sempre podemos contar.

Agradeço à Universidade Estadual Paulista (Unesp), com especial reconhecimento ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas (IBILCE) e ao Departamento de Matemática. Agradeço pela completa infraestrutura proporcionada e por ter sido meu lar durante todo o período do doutorado.

Por fim, desejo expressar minha profunda gratidão a Deus pela saúde, força e proteção concedidas, não só a mim, mas a todas as pessoas preciosas em minha vida. Agradeço por me presentear com momentos incríveis e felizes, e por me proporcionar sabedoria para superar desafios e aprender com cada experiência, pois compreendo que a vida é uma jornada constante de aprendizado.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

“Ninguém ignora tudo. Ninguém sabe tudo. Todos nós sabemos alguma coisa. Todos nós ignoramos alguma coisa. Por isso aprendemos sempre.”

(Freire, 1989, p. 16), [41].

RESUMO

As tradicionais condições necessárias de otimalidade fornecidas pelo Princípio do Máximo de Pontryagin podem não ser válidas em alguns problemas de controle ótimo com restrições mistas, mesmo em aplicações simples. Para lidar com isso, neste trabalho propomos um novo conjunto de condições necessárias de otimalidade de primeira ordem, do tipo sequencial, para problemas de controle ótimo que podem envolver funções de custo não suaves, campos vetoriais não suaves e restrições mistas de estado e de controle na forma de igualdades e desigualdades. Denominamos tal conjunto de Princípio do Máximo Fraco Assintótico. Como uma segunda contribuição, apresentamos uma variante adequada do método de Lagrangiano aumentado clássico capaz de gerar sequências que satisfazem essas condições e discutimos suas propriedades de convergência em relação à otimalidade e factibilidade. Para demonstrar a viabilidade prática do algoritmo proposto, fornecemos alguns resultados numéricos. Como terceira e última contribuição, estudamos situações mínimas sobre as quais o princípio do máximo fraco assintótico implica no princípio do máximo fraco clássico e derivamos uma nova condição de qualificação.

Palavras-chave: Condições de qualificação. Dinâmica e custo não suaves. Método de Lagrangiano aumentado. Princípio do Máximo Fraco Assintótico. Restrições mistas.

ABSTRACT

The traditional necessary optimality conditions provided by Pontryagin's Maximum Principle may not hold in some optimal control problems with mixed constraints, even in simple applications. To address this, we propose a new set of first-order necessary optimality conditions, of sequential type, for optimal control problems that may involve non-smooth cost functions, non-smooth vector fields, and state and control mixed constraints in the form of equalities and inequalities. We call such a set of necessary optimality conditions as the Asymptotic Weak Maximum Principle. As a second contribution, we present a suitable variant of the classical augmented Lagrangian method capable of generating sequences that satisfy these conditions and discuss its convergence properties concerning optimality and feasibility. To demonstrate the practical viability of the proposed algorithm, we provide some numerical results. As a third and final contribution, we study minimal situations under which the asymptotic weak maximum principle implies the classical weak maximum principle, and we derive a new constraint qualification.

Keywords: Constraint qualifications. Non-smooth dynamics and cost. Augmented Lagrangian method. Asymptotic Weak Maximum Principle. Mixed constraints.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Resultados numéricos para $(u_1^0(t), u_2^0(t)) \equiv (1, 1)$, $q_L = (-50, -50)$, $q_R = (50, 50)$, $(\tilde{q}_1^0(t), \tilde{q}_2^0(t)) \equiv (10, 10)$. O método executou 36 iterações.	55
Figura 2 – Resultados apresentados por Maurer e Osmolovskii em [59, Figura 3] para o Caso I.	56
Figura 3 – Resultados numéricos para o Caso I tomando $u^0(t) \equiv 0$, $r_R = (50, 50)$ e $(\tilde{r}_1^0(t), \tilde{r}_2^0(t)) \equiv (10, 10)$, após 33 iterações.	56
Figura 4 – Resultados apresentados por Maurer e Osmolovskii em [59, Figura 4] para o Caso II.	57
Figura 5 – Resultados numéricos para o Caso II tomando $u^0(t) \equiv 0$, $r_R = (50, 50)$ e $(\tilde{r}_1^0(t), \tilde{r}_2^0(t)) \equiv (10, 10)$, ao final de 31 iterações.	57
Figura 6 – Resultados exibidos por Maurer e Osmolovskii em [59, Figura 5] para o Caso III.	57
Figura 7 – Resultados numéricos para o Caso III tomando $u^0(t) \equiv 0$, $r_R = (50, 50)$ e $(\tilde{r}_1^0(t), \tilde{r}_2^0(t)) \equiv (10, 10)$, após 31 iterações.	57
Figura 8 – Resultados numéricos para $u^0(t) \equiv 1$, $r_R = 50$, $\tilde{r}^0(t) \equiv 10$ e 20 iterações.	59
Figura 9 – Resultados numéricos para $u^0(t) \equiv 0$, $r_R = 50$, $\tilde{r}^0(t) \equiv 10$, $\lambda_0 = 1$ e 14 iterações.	60

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AGP	Approximate Gradient Projection
AKKT	Approximate (ou Asymptotic) Karush-Kuhn-Tucker
AMP	Approximate Maximum Principle
AWMP	Asymptotic Weak Maximum Principle
CCP	Cone Continuity Property
CQ	Constraint Qualification
EDO	Equações Diferenciais Ordinárias
DAE	Differential Algebraic Equations
KKT	Karush-Kuhn-Tucker
MP	Maximum Principle
q.t.p.	quase todo ponto
PVI	Problema de Valor inicial
SQH	Sequential Quadratic Hamiltonian
SQH-PE	Sequential Quadratic Hamiltonian - Penalty Estimates
WBCQ	Weak Basic Constraint Qualification
WMP	Weak Maximum Principle

LISTA DE SÍMBOLOS

B	Bola unitária fechada centrada na origem nos espaços euclidianos (independentemente da dimensão)
$\bar{x}(t) + \delta B$	Bola fechada de centro $\bar{x}(t)$ e raio δ
$ \cdot $	Norma euclidiana
$x \cdot y$	Produto interno usual entre $x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}^n$
$\text{co } C$	Envoltório convexo do conjunto C
$\text{proj}_C(x)$	Projeção de x sobre o conjunto C
A^T	Transposta da matriz A
$\mathbf{a}_{n \times 1}$	vetor da forma $[a \ a \ \dots \ a]_{1 \times n}^T$, com $a \in \mathbb{R}$
$\mathcal{N}_C^P(x)$	Cone normal proximal ao conjunto C em x
$\mathcal{N}_C(x)$	Cone normal limite ao conjunto C em x
$\text{epi } f$	Epígrafo da f
$\text{dom } f$	domínio (efetivo) da f
$\nabla f(x)$	Vetor gradiente de f
$\partial f(x)$	Subdiferencial limite de f em x
$\text{Gr } F$	Gráfico de uma multifunção F
L_l^p	Tradicionais espaços $L^p([S, T]; \mathbb{R}^l)$, com $l \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p \leq \infty$
$\ \cdot\ _{L_l^p}$	Norma em L_l^p
$W_l^{1,1}$	Espaço das funções absolutamente contínuas $x : [S, T] \rightarrow \mathbb{R}^l$, com $l \in \mathbb{N}$
$\mathcal{U}_m$	Espaço das funções mensuráveis $u : [S, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$
$x^k \xrightarrow{C} x$	$x^k \rightarrow x$ e $x^k \in C$ para todo k
$u^k \xrightarrow{\text{med}} \bar{u}$	u^k converge na medida de Lebesgue para $\bar{u}$

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
2	PRELIMINARES	19
2.1	NOTAÇÕES, DEFINIÇÕES E RESULTADOS BÁSICOS	19
2.2	HIPÓTESES FUNDAMENTAIS	24
2.2.1	Hipóteses Básicas	24
2.2.2	Hipóteses Adicionais	26
3	UMA CONDIÇÃO DE OTIMALIDADE SEQUENCIAL . . .	28
3.1	SEQUÊNCIAS E PROCESSOS AWMP	28
3.2	O PRINCÍPIO DO MÁXIMO FRACO ASSINTÓTICO	29
3.3	PRINCÍPIO DO MÁXIMO FRACO ASSINTÓTICO $\times$ PRINCÍPIO DO MÁXIMO FRACO CLÁSSICO	34
4	UM MÉTODO DE LAGRANGIANO AUMENTADO PARA CONTROLE ÓTIMO	42
4.1	O MÉTODO	43
4.2	UM ESTUDO DA OTIMALIDADE E DA FACTIBILIDADE	46
4.3	APLICAÇÕES	51
4.3.1	Estratégia 1	51
4.3.2	Estratégia 2	58
5	UMA NOVA CONDIÇÃO DE QUALIFICAÇÃO	61
5.1	CONDIÇÃO DE QUALIFICAÇÃO AWMP-REGULARIDADE	61
5.2	CONDIÇÃO DE REGULARIDADE MAIS FRACA	68
5.3	CRITÉRIOS SUFICIENTES PARA A REGULARIDADE AWMP . . .	71
6	UMA FORMA ALTERNATIVA PARA O ESTUDO DA RE- GULARIDADE AWMP	76
6.1	UMA VERSÃO ALTERNATIVA DAS CONDIÇÕES AWMP	77
6.2	REGULARIDADE AWMP	84
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS	89
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	91
A	DEMONSTRAÇÕES SUPRIMIDAS NO TEXTO	97
B	TEOREMAS, RESULTADOS E DEFINIÇÕES AUXILIARES	103

1 INTRODUÇÃO

Quando estudamos problemas de otimização, as condições necessárias de otimalidade são inegavelmente importantes. Em um problema clássico de programação não linear com restrições de igualdades e desigualdades, onde as funções são suaves, é conhecido que as soluções ótimas, sob algumas hipóteses, satisfazem regras de multiplicadores de Lagrange. Por exemplo, as condições de *Karush-Kuhn-Tucker* (KKT) [46, 51]. No contexto da teoria de controle ótimo, as condições necessárias de otimalidade para problemas com restrições mistas de controle e de estado mais conhecidas são dadas por formas fortes e fracas do Princípio do Máximo, do inglês *Maximum Principle* (MP), [6, 7, 24, 28, 33, 34, 35, 36, 37, 52, 61, 73].

Como, a depender do problema de otimização estudado, nem sempre podemos encontrar soluções exatas (analíticas), mesmo que elas existam, a verificação de condições como KKT ou Princípio do Máximo (forte ou fraco) pode ser uma tarefa muito difícil ou mesmo impossível. Felizmente, em muitos casos, isso não é necessário, já que uma solução numérica aproximada (obtida por métodos numéricos) pode fornecer informações suficientes para os propósitos pretendidos. Numericamente, o que necessitamos são de condições de otimalidade que possam ser verificadas em cada iteração do método e que forneçam alguma garantia de que, a partir da k -ésima iteração, a solução u^k obtida seja satisfatória, levando à parada do algoritmo. As ferramentas teóricas que validam essa abordagem são fornecidas pelas condições de otimalidade sequenciais.

Em linhas gerais, uma condição de otimalidade sequencial associada à proposição matemática $\mathcal{P}$ é satisfeita em u se existe uma sequência $\{u^k\}$ convergindo (em alguma topologia) para u tal que $\mathcal{P}(u^k)$ é verificada. A proposição deve ser formulada de modo que, sempre que u é uma solução do problema, exista uma sequência u^k convergindo (em alguma topologia) para u que satisfaça $\mathcal{P}$. Tipicamente, a validade de $\mathcal{P}$ está vinculada a uma sequência de variáveis de tolerância ao erro $\{\varepsilon^k\}$ que converge (em alguma topologia) para 0. Assim, se soubermos que um algoritmo gera uma sequência que satisfaz $\mathcal{P}$, é seguro encerrar sua execução quando o parâmetro ε^k associado for suficientemente pequeno.

Em [3], Andreani, Haeser e Martínez introduzem condições de otimalidade sequenciais para problemas de programação não linear em espaços de dimensão finita chamadas de *Approximate* (ou *Asymptotic*) *Karush-Kuhn-Tucker* (AKKT) *conditions*. Essas condições podem ser consideradas como versões inexatas das clássicas condições KKT. Com base no trabalho de Andreani, Haeser e Martínez, Börgens et al. em [13] estenderam o conceito das condições AKKT para problemas postos em espaços de dimensão infinita, mais especificamente em espaços de Banach (reais). Seus resultados são os mais gerais dentre uma série de trabalhos relacionados, incluindo [14, 45, 75]. Dados os espaços de

Banach (reais) $\mathcal{B}$ e $\tilde{\mathcal{B}}$, a versão do problema de otimização não linear estudada em [13] é dada por:

$$\text{minimizar } J(u) \quad \text{sobre } u \in C \text{ satisfazendo } \mathcal{G}(u) \in K, \quad (1.1)$$

em que $C \subset \mathcal{B}$ e $K \subset \tilde{\mathcal{B}}$ são conjuntos não vazios, fechados e convexos, e as funções $J : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$ e $\mathcal{G} : \mathcal{B} \rightarrow \tilde{\mathcal{B}}$ são continuamente diferenciáveis no sentido de Fréchet.

Diferentemente da programação não linear, condições de otimalidade sequenciais para problemas de controle ótimo permanece uma área pouco explorada. Tendo em mente esta constatação e motivados pelas análises das condições AKKT (dimensão finita e infinita), o presente trabalho tem como objetivo investigar condições necessárias de otimalidade de primeira ordem, do tipo sequencial, para problemas de controle ótimo que podem envolver funções de custo não suaves, campos vetoriais não suaves e restrições mistas tanto nas variáveis de controle quanto nas variáveis de estado, na forma de igualdades e desigualdades. O problema em questão, denotado por (P) , tem a seguinte apresentação:

$$\text{minimizar } \ell(x(S), x(T))$$

sobre funções absolutamente contínuas $x : [S, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ e funções mensuráveis

$u : [S, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ satisfazendo

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \quad \text{q.t.p. em } [S, T], \quad (1.2)$$

$$0 = b(t, x(t), u(t)) \quad \text{q.t.p. em } [S, T], \quad (1.3)$$

$$0 \geq g(t, x(t), u(t)) \quad \text{q.t.p. em } [S, T], \quad (1.4)$$

$$u(t) \in U(t) \quad \text{q.t.p. em } [S, T], \quad (1.5)$$

$$(x(S), x(T)) \in C, \quad (1.6)$$

em que o intervalo $[S, T]$, as funções $\ell : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f : [S, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $b : [S, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m_b}$ e $g : [S, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m_g}$, a multifunção¹ não vazia $U : [S, T] \rightsquigarrow \mathbb{R}^m$ e o conjunto $C \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ são dados.

Como apontado por de Pinho e Rosenblueth em [30], é bem conhecido que o Princípio do Máximo de Pontryagin [68] geralmente não se aplica a (P) . Contudo, se algumas hipóteses de regularidade são impostas sobre as restrições mistas, como evidenciado em [6, 7, 28, 33, 73], tal aplicação passa a ser possível. Essas hipóteses são conhecidas como *Constraint Qualifications* (CQ) que, em Português, são referidas como condições de qualificação, ou também como qualificações de restrição. A CQ mais comum na literatura envolve uma condição de posto completo da matriz Jacobiana das restrições mistas em relação à variável de controle “ u ”, como exemplo podemos citar o estudo de de Pinho e Ilchmann feito em [28]. Mas além disso, existem condições de qualificação do tipo posto constante [6], Mangasarian-Fromovitz [7, 24, 30, 33], *Weak Basic Constraint Qualification*

¹ Dizemos que uma aplicação $F : [S, T] \rightsquigarrow \mathbb{R}^m$ é uma *multifunção* se para cada $t \in [S, T]$, $F(t)$ é subconjunto de $\mathbb{R}^m$.

(WBCQ) [52], algumas das quais requerem hipóteses de interioridade e convexidade [73], entre outras.

Adotando uma abordagem semelhante a feita na investigação das condições AKKT, podemos explorar condições sequenciais de otimalidade necessárias no contexto da teoria de controle ótimo como aproximações das condições dadas pelo princípio do máximo fraco² clássico [6, 7, 28, 33, 73]. A formalização dessas condições para problemas na forma de (P) é o primeiro objetivo do presente trabalho. Chamamos tais condições de Princípio do Máximo Fraco Assintótico ou condições *Asymptotic Weak Maximum Principle* (AWMP) em referência às formas aproximadas das condições dadas pelo princípio do máximo fraco clássico, por exemplo, em [6, 27, 30]. Uma das vantagens da utilização das condições AWMP reside no fato de podermos evitar a utilização de qualquer tipo de condições de qualificação como as que foram mencionadas anteriormente, que na prática podem ser extremamente difíceis de serem verificadas. Além disso, a característica sequencial das condições AWMP torna sua aderência aos métodos numéricos essencialmente natural. Por exemplo, elas podem ser usadas para justificar critérios de parada para alguns algoritmos. Vale ressaltar que o conceito de *Approximate Maximum Principle* (AMP) proposto por Mordukhovich e Shvartsman, como visto em [62, 63, 64], é diferente do conceito de AWMP. Apesar da nomenclatura semelhante e de ambas serem formulações relaxadas das condições do princípio do máximo clássico, as análises AMP seguem uma formulação discreta do problema de controle ótimo, enquanto os estudos das condições AWMP são derivados a partir da formulação contínua (Problema (P)). Ressaltamos também que o conceito de condições AWMP é diferente de “subotimalidade”, do inglês *suboptimality*, apresentado em [39, Teorema 7.1], [43, Teorema 2, p. 63] e [44, Corolário 1]. Apesar das condições de subotimalidade poderem ser aplicadas mesmo nos casos onde não garantimos a existência de soluções ótimas, tais noções ainda não estão estabelecidas (até onde sabemos) para problemas na forma de (P) (problemas com restrições mistas de estado e de controle). Mesmo para problemas mais simples como os encontrados em [39, Seção 7], [43, Seção 2, p. 63], e [44, Seção 4], a subotimalidade, apesar de estar relacionada à noção de solução aproximada, não requer nenhum tipo de convergência das sequências de processos $\{(x^k, u^k)\}$ que satisfazem, de forma relaxada, as condições do princípio do máximo, como ocorre nas condições AWMP.

Dada a generalidade do Problema (1.1), Börgens et al. em [13] conseguem resolver alguns problemas de controle ótimo. No entanto, para que as condições AKKT sejam aplicadas, é necessária suavidade nas funções objetivo e de restrições. Em nossas análises, não impomos nenhuma hipótese de diferenciabilidade no campo vetorial f que descreve a dinâmica e nem mesmo na função objetivo ℓ . Derivamos as condições de otimalidade em termos de subdiferenciais limites. Portanto, mesmo que consigamos escrever (P) na forma

² O termo “princípio do máximo fraco” vem do inglês *Weak Maximum Principle* (WMP).

de (1.1), as funções objetivo e de restrição resultantes não serão necessariamente suaves. Todavia, escrever (P) no formato do Problema (1.1) não é uma tarefa fácil e nem mesmo sabemos se é sempre possível. As estratégias de reescritas encontradas na literatura são para versões simplificadas de (P) , por exemplo, para a versão que denotamos por $(\hat{P})$, em que $\ell(x(S), x(T)) = \ell(x(T))$ e $C = \{x_S\} \times \mathbb{R}^n$ para um vetor $x_S \in \mathbb{R}^n$ dado, e sobre algumas hipóteses adicionais, como por exemplo, $f \in C^2$ (f duas vezes continuamente diferenciável). Um maior detalhamento pode ser consultado em [16, Capítulo 1]. Assim, para problemas no formato de (P) , nossa abordagem é mais geral do que a apresentada por [13], no sentido de que pode ser aplicada a uma classe mais ampla de problemas. Outra característica interessante da análise desenvolvida neste trabalho é que o espaço das funções de restrições não precisa necessariamente ser de Hilbert, por exemplo, L^2 , como usado por Kanzow, Steck e Wachsmuth em [45], ou mesmo estar densamente imerso em algum espaço de Hilbert arbitrário, como feito por Börgens, Kanzow e Steck em [14]. Além disso, conseguimos evitar todas as hipóteses de reflexividade dos espaços, como aquelas necessárias em [13, 14, 45].

Como comentamos anteriormente, as condições de otimalidade sequenciais são ferramentas teóricas que podem ser usadas para justificar a parada de métodos numéricos. Neste trabalho, trazemos um algoritmo no qual as condições AWMP funcionam com tal finalidade. Antes de entrar nos detalhes desta investigação, vamos primeiro comentar a respeito da diferença entre abordagens numéricas diretas e indiretas em controle ótimo. Em [77], Zhu, Trélat e Cerf enfatizam que métodos indiretos resolvem o problema numericamente com base no princípio do máximo, enquanto métodos diretos envolvem a discretização das variáveis de estado e controle para resolver o problema de otimização não linear resultante. Por meio dessa classificação, as condições AWMP são naturalmente mais adequadas aos métodos indiretos, pois possuem a mesma essência, isto é, são baseadas no princípio do máximo. Para problemas de controle ótimo sem restrições mistas na forma de igualdades e desigualdades, os métodos de aproximações sucessivas, como os apresentado por Krylov e Chernous'ko [49, 50], os métodos de Hamiltoniano aumentado, como os de Bonnans [12] e Sakawa e Shindo [72], e o método *Sequential Quadratic Hamiltonian* (SQH) (combinação dos dois últimos) proposto por Breitenbach e Borzì em [17], especificamente sua versão para problemas de controle ótimo com EDOs, veja [16, Algoritmo 2.3], são exemplos de métodos indiretos. Pesquisamos na literatura por métodos indiretos capazes de resolver problemas no formato de (P) (ou mesmo na forma mais simples, $(\hat{P})$) e gerar sequências no formato AWMP, mas não obtivemos sucesso. Dois dos principais estudos que se alinham com $(\hat{P})$ são apresentados por Sakawa em [71] e Borzì em [16, Seção 2.3]. No primeiro, Sakawa, usando uma condição de qualificação do tipo posto completo, resolve uma versão mais simples de $(\hat{P})$, que é suave e possui apenas restrições mistas de estado e de controle na forma de desigualdades. No segundo, Borzì

usa o método SQH-PE³ para problemas semelhantes a $(\hat{P})$. No entanto, as sequências produzidas por ambos os métodos não atendem aos requisitos estabelecidos pelo princípio do máximo fraco assintótico. O método SQH-PE, em particular, não possui um mecanismo para uma escolha adaptativa do parâmetro de penalização e dos multiplicadores de Lagrange associados às restrições mistas, essencial para as investigações das condições AWMP. Nesse cenário, chegamos ao segundo objetivo deste trabalho, que é apresentar um método numérico capaz de resolver problemas de controle ótimo na forma de $(\hat{P})$ e gerar sequências cujas condições AWMP funcionam como critério geral de parada. Para isso, utilizando como fontes de inspiração as abordagens existentes para problemas de programação não linear, como [5, 14, 45], e a ideia de penalização do método SQH-PE, propomos uma variante adequada do método de Lagrangiano aumentado.

O método de Lagrangiano aumentado para problemas de programação não linear está entre os mais conhecidos e notáveis. Exemplos no caso de dimensão finita incluem [10, 66], e no caso de dimensão infinita [14, 45]. No entanto, pouco se discute sobre sua aplicação no contexto de problemas de controle ótimo. Algumas obras que seguem uma linha semelhante, como as realizadas por Aguiar, Camponogara e Foss em [1, 2], tratam de problemas diferentes de (P) ou $(\hat{P})$. O foco está em problemas na forma de Equações Diferenciais Algébricas, do inglês *Differential Algebraic Equations* (DAE), e apenas no caso em que existem somente restrições mistas de estado e de controle na forma de igualdades. Nesse sentido, a contribuição deste trabalho é apresentar uma variante adequada do método de Lagrangiano aumentado para problemas de controle ótimo que podem ter funções de custo não suaves, campos vetoriais não suaves e restrições mistas de estado e de controle na forma de igualdades e desigualdades, capaz de gerar sequências no formato AWMP. As análises teóricas apresentadas por [10, 14, 45, 66] serviram como fontes de inspiração para o desenvolvimento do nosso estudo.

O terceiro e último objetivo deste trabalho é apresentar uma nova condição de qualificação fundamentada nas situações mínimas sob as quais as condições AWMP implicam na validade do princípio do máximo fraco clássico. Novamente inspirados no contexto da programação não linear, mais especificamente nas condições *Cone Continuity Property* (CCP) [3], *Asymptotically Mordukhovich-regularity* (AM-regularidade) [60] e *AKKT-regularidade* (ou *AKKT-regularity*) [13], propomos uma nova condição de regularidade, denominada AWMP-regularidade (ou *AWMP-regularity*), que assegura a implicação desejada, ou seja, a validade do princípio do máximo fraco clássico para (P) a partir das condições AWMP, funcionando, assim, como uma condição de qualificação. A AWMP-regularidade foi formulada a partir de duas estratégias. A primeira segue imediatamente da caracterização de condições AWMP exibida no Capítulo 3, mais especificamente pelas Definições 3.1 e 3.2, e é satisfeita apenas quando as sequências de multiplicadores

³ PE é uma abreviatura para *Penalty Estimates*.

$\{\lambda_k\} \subset [0, +\infty)$ e $\{p^k\} \subset W_n^{1,1}$ são limitada e uniformemente limitada, respectivamente, e vale a implicação “se $\lambda_k \rightarrow \lambda$ e $p^k \rightarrow p$ uniformemente para algum $(\lambda, p) \in [0, +\infty) \times W_n^{1,1}$, então $(\lambda, p) \neq (0, 0)$ ”. Já na segunda estratégia, apresentamos um estudo que incorpora os conceitos de continuidade completa e semicontinuidade sequencial fraca, vide as Definições 2.5 e 2.6. A ideia básica consiste em reformular as condições AWMP apresentadas no Capítulo 3 de uma forma mais restrita na qual a hipótese necessária à primeira estratégia seja dispensável. Em ambas as estratégias adotadas, caracterizamos o cenário sob o qual a AWMP-regularidade é a condição mais fraca que precisamos impor para que as condições AWMP impliquem no princípio do máximo fraco clássico. Por exemplo, uma hipótese que usamos foi exigir que a função de custo ℓ e a função que descreve a dinâmica f fossem continuamente diferenciáveis. Também estabelecemos alguns critérios suficientes para a validade da AWMP-regularidade.

As condições de otimalidade sequenciais fornecidas pelo princípio do máximo fraco assintótico destacam-se dos trabalhos presentes na literatura, pois podem ser obtidas, por exemplo, através de uma versão adequada do método de Lagrangiano aumentado. Em outras palavras, são condições de otimalidade com um grande potencial prático, já que existem ferramentas para gerá-las. Além disso, a regularidade AWMP estabelece condições mínimas sob as quais as condições sequenciais implicam nas condições de otimalidade clássicas estabelecidas pelo princípio do máximo. Portanto, o princípio do máximo fraco assintótico fornece ferramentas teóricas que podem ser aplicadas de forma prática para a escolha de candidatos à soluções de problemas de controle ótimo e a regularidade AWMP, quando satisfeita, filtra esse conjunto de candidatos com a mesma precisão do princípio do máximo.

O presente trabalho está estruturado da seguinte forma. Começamos introduzindo as principais definições, notações e resultados clássicos utilizados ao longo do texto no Capítulo 2. No Capítulo 3, estabelecemos as condições AWMP como condições necessárias de otimalidade para o Problema (P) e ilustramos sua relação com as condições do princípio do máximo fraco clássico. O Capítulo 4 é dedicado à apresentação de uma variante adequada do método de Lagrangiano aumentado para problemas de controle ótimo capaz de gerar sequências cujas condições AWMP funcionam como critério geral de parada. Ainda no Capítulo 4 fornecemos exemplos numéricos que demonstram a viabilidade prática do algoritmo proposto. No Capítulo 5 fazemos um estudo da regularidade AWMP e propomos uma nova condição de qualificação para problemas na forma de (P) , enquanto no Capítulo 6 exibimos uma forma alternativa para o estudo da regularidade AWMP desenvolvida no Capítulo 5 que envolve hipóteses de continuidade completa e semicontinuidade sequencial fraca. Por fim, algumas considerações finais e projeções para trabalhos futuros são feitas no Capítulo 7.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, apresentamos as condições AWMP. Elas são condições necessárias de otimalidade sequenciais para certos problemas de controle ótimo que envolvem restrições mistas nas variáveis de estado e de controle na forma de igualdades e desigualdades. Para organizar os conceitos, primeiro definimos o que são sequências AWMP e depois o que são processos AWMP. Demonstramos que todo minimizador local fraco de um problema de controle ótimo da forma (P) é necessariamente um processo AWMP, o que significa que as condições satisfeitas pelos processos AWMP podem ser consideradas como genuínas condições necessárias de otimalidade. Nenhuma condição de qualificação foi imposta. Em um segundo momento, propomos um método do tipo Lagrangiano aumentado para problemas de controle ótimo que, sob certas hipóteses, gera sequências cujas condições AWMP funcionam como critério geral de parada. Além disso, aplicamos o algoritmo proposto para resolver numericamente alguns problemas de controle ótimo mais simples encontrados na literatura, demonstrando a viabilidade prática do algoritmo e destacando seu potencial. Nossa terceira e última contribuição foi derivar uma nova condição de regularidade, a qual denominamos AWMP-regularidade. Essa condição, por sua vez, atua como uma condição de qualificação, isto é, garante a validade do princípio do máximo. Mostramos também que, sob certas hipóteses, AWMP-regularidade é a condição mínima sob a qual as condições AWMP implicam no princípio do máximo e estabelecemos alguns critérios suficientes para a AWMP-regularidade.

Como as condições de otimalidade tradicionais têm que ser verificadas na solução ótima do problema estudado, que a depender de sua complexidade, pode tornar a obtenção de tal solução uma tarefa árdua ou mesmo impraticável, as condições de otimalidade sequenciais, tais como as fornecidas pelo princípio do máximo fraco assintótico, se destacam como poderosas ferramentas, visto que existem caminhos práticos para a sua obtenção, por exemplo, através de uma versão adequada do método de Lagrangiano aumentado. Adicionalmente, a regularidade AWMP estabelece condições mínimas sob as quais essas condições sequenciais implicam nas condições de otimalidade clássicas estabelecidas pelo princípio do máximo. Em resumo, o princípio do máximo fraco assintótico define critérios práticos para a seleção de candidatos a soluções em problemas de controle ótimo e a regularidade AWMP, quando atendida, assegura que esses critérios possuem precisão equivalente às condições do princípio do máximo.

Embora as condições AWMP representem um conjunto de condições necessárias de otimalidade que podem ser obtidas de maneira prática, a abordagem escolhida no presente trabalho, que consiste em utilizar uma versão adequada do método de Lagrangiano aumentado, introduz uma dificuldade inerente à natureza desse método. Dado que os métodos do tipo Lagrangiano aumentado são, em essência, métodos de penalização, a verificação da factibilidade dos pontos de acumulação das sequências por eles gerados

se torna uma tarefa não trivial. Acreditamos que uma possível superação desse desafio poderia envolver a exploração de outros métodos.

Dada a natureza de (P) , tivemos que trabalhar com espaços de dimensão infinita, tais como L_l^p , $W_l^{1,1}$ e $\mathcal{U}_m$. Desta forma, além da dificuldade destacada no parágrafo anterior, tivemos problemas com a extração de subsequências convergente, visto que ferramentas comumente usada em espaços de dimensão finita, por exemplo, o Teorema de Bolzano-Weierstrass (Teorema B.1), não se aplicam a tais espaços de dimensão infinita.

Em linhas gerais, uma das maiores contribuições deste trabalho foi trazer o conceito de condições de otimalidade sequenciais para o contexto de controle ótimo. Esperamos que os resultados obtidos sirvam como um ponto de partida para futuras pesquisas nesta área, estimulando o desenvolvimento contínuo do conhecimento e práticas no campo da teoria de controle ótimo e condições de otimalidade.

Como investigações futuras pretendemos:

- Estabelecer as relações entre a AWMP-regularidade e as condições de qualificação para problemas de controle ótimo existentes na literatura, por exemplo, as CQs do tipo posto completo [28], posto constante [6], Mangasarian-Fromovitz [24, 30], WBCQ [52], entre outras.
- Propor novas condições de otimalidade sequenciais de segunda ordem para problemas de controle ótimo, algo semelhante às condições AKKT2 [4] da programação não linear.
- Implementar o método de Lagrangiano aumentado para problemas de controle ótimo mais complexos (problemas na forma de (P) , número maior de restrições, restrições não lineares, etc.).
- Investigar se outros métodos numéricos satisfazem as condições AWMP. A ideia inicial consiste em estudar versões para controle ótimo de métodos para problemas de programação não linear que satisfazem as condições AKKT, tais como os métodos de programação quadrática sequencial [69], alguns métodos de pontos interiores [21] e métodos de restauração inexata [54].
- Aplicar nossa teoria a problemas reais, por exemplo, em modelos de espalhamento de doenças como a Covid 19 e a dengue, tratamento do câncer, extração avançada de petróleo, dentre outros.
- Estudar outras condições de otimalidade sequenciais para problemas de controle ótimo na forma de (P) . Um primeiro caminho que julgamos viável é, assim como fizemos com as condições AWMP, recorrer à programação não linear, mais especificamente às condições AGP (*Approximate Gradient Projection*) [55].

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] M. A. Aguiar, E. Camponogara e B. Foss. “An augmented Lagrangian for optimal control of DAE Systems: Algorithm and Properties”. Em: *IEEE Transactions on Automatic Control* 66.1 (2021), pp. 261–266. DOI: 10.1109/TAC.2020.2976042.
- [2] M. A. Aguiar, E. Camponogara e B. Foss. “An augmented Lagrangian method for optimal control of continuous time DAE systems”. Em: *2016 IEEE Conference on Control Applications (CCA)*. 2016, pp. 1185–1190. DOI: 10.1109/CCA.2016.7587967.
- [3] R. Andreani, G. Haeser e J. M. Martínez. “On sequential optimality conditions for smooth constrained optimization”. Em: *Optimization* 60.5 (2011), pp. 627–641. DOI: 10.1080/02331930903578700.
- [4] R. Andreani, G. Haeser, A. Ramos e P. J. S. Silva. “A second-order sequential optimality condition associated to the convergence of optimization algorithms”. Em: 37.4 (2017), pp. 1902–1929. DOI: 10.1093/imanum/drw064.
- [5] R. Andreani, J. M. Martínez, A. Ramos e P. J. S. Silva. “A cone-continuity constraint qualification and algorithmic consequences”. Em: *SIAM J. Optim.* 26 (2016), pp. 96–110. DOI: 10.1137/15M1008488.
- [6] R. Andreani, V. A. de Oliveira, J. T. Pereira e G. N. Silva. “A weak maximum principle for optimal control problems with mixed constraints under a constant rank condition”. Em: *IMA Journal of Mathematical Control and Information* 37.3 (2020), pp. 1021–1047. DOI: 10.1093/imamci/dnz036.
- [7] A. V. Arutyunov. *Optimality Conditions: Abnormal and Degenerate Problems*. Vol. 526. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000.
- [8] J. -P. Aubin e H. Frankowska. *Set-Valued Analysis*. Modern Birkhäuser Classics, reprint of the 1990 edition. Boston: Birkhäuser Boston, 1979.
- [9] J. A. Becerril, K. L. Cortez e M. d. R. de Pinho. “A minimum principle for affine-convex control problems with nonregular mixed constraints”. Em: *Institute of Electrical and Electronics Engineers. Transactions on Automatic Control* 68.8 (2023), pp. 5081–5088. DOI: 10.1109/tac.2022.3218586.
- [10] D. Bertsekas. *Nonlinear Programming*. Belmont: Athena Scientific, 1995.
- [11] V. I. Bogachev. *Measure Theory*. Vol. 1. Berlin: Springer, 2007.
- [12] J. F. Bonnans. “On an algorithm for optimal control using Pontryagin’s maximum principle”. Em: *SIAM Journal on Control and Optimization* 24.3 (1986), pp. 579–588. DOI: 10.1137/0324034.

- [13] E. Börgens, C. Kanzow, P. Mehlitz e G. Wachsmuth. “New constraint qualifications for optimization problems in Banach spaces based on asymptotic KKT Conditions”. Em: *SIAM J. Optim.* 4 (2020), pp. 2956–2982. DOI: 10.1137/19M1306804.
- [14] E. Börgens, C. Kanzow e D. Steck. “Local and global analysis of multiplier methods for constrained optimization in Banach spaces”. Em: *SIAM Journal on Control and Optimization* 57.6 (2019), pp. 3694–3722. DOI: 10.1137/19M1240186.
- [15] A. Borzì. *Modelling with Ordinary Differential Equations: A comprehensive approach*. 1^a ed. New York: CRC Press, 2020.
- [16] A. Borzì. *The Sequential Quadratic Hamiltonian method: Solving optimal control problems*. 1^a ed. New York: CRC Press, 2023.
- [17] T. Breitenbach e A. Borzì. “A Sequential Quadratic Hamiltonian method for solving parabolic optimal control problems with discontinuous cost functionals”. Em: *Journal of Dynamical and Control Systems* 25 (2019), pp. 403–435. DOI: 10.1007/s10883-018-9419-6.
- [18] H. Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Universitext. New York: Springer, 2010.
- [19] C. Büskens. “Optimierungsmethoden und Sensitivitätsanalyse für optimale Steuerprozesse mit Steuer- und Zustands-Beschränkungen”. Dissertação de mestrado. Alemanha: Institut für Numerische Mathematik, Universität Münster, 1998.
- [20] C. Büskens e H. Maurer. “SQP-methods for solving optimal control problems with control and state constraints: adjoint variables, sensitivity analysis and real-time control”. Em: vol. 120. 1-2. 2000, pp. 85–108. DOI: 10.1016/S0377-0427(00)00305-8.
- [21] L. Chen e D. Goldfarb. “Interior-point l_2 -penalty methods for nonlinear programming with strong global convergence properties”. Em: *Mathematical Programming. A Publication of the Mathematical Programming Society* 108.1 (2006), pp. 1–36. DOI: 10.1007/s10107-005-0701-5.
- [22] F. Clarke. *Functional Analysis, Calculus of Variations and Optimal Control*. London: Springer-Verlag, 2013.
- [23] F. Clarke. *Optimization and Nonsmooth Analysis*. New York: Wiley, 1983.
- [24] F. Clarke e M. d. R. de Pinho. “Optimal control problems with mixed constraints”. Em: *SIAM Journal on Control and Optimization* 48.7 (2010), pp. 4500–4524. DOI: 10.1137/090757642.
- [25] F. Clarke, Y. S. Ledyaev, R. J. Stern e P. R. Wolenski. *Nonsmooth Analysis and Control Theory*. New York: Springer, 1998.

- [26] D. W. Cunningham. *Real analysis: with proof strategies*. 1^a ed. Boca Raton: CRC Press, 2021.
- [27] M. d. R. de Pinho. “Mixed constrained control problems”. Em: *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 278.2 (2003), pp. 293–307. DOI: 10.1016/S0022-247X(02)00351-7.
- [28] M. d. R. de Pinho e A. Ilchmann. “Weak maximum principle for optimal control problems with mixed constraints”. Em: *Nonlinear Analysis* 48 (2002), pp. 1179–1196. DOI: 10.1016/S0362-546X(01)00094-3.
- [29] M. d. R. de Pinho, P. Loewen e G. N. Silva. “A weak maximum principle for optimal control problems with nonsmooth mixed constraints”. Em: *Set-Valued and Variational Analysis* 17.2 (2009), pp. 203–221. DOI: 10.1007/s11228-009-0108-1.
- [30] M. d. R. de Pinho e J. F. Rosenblueth. “Necessary conditions for constrained problems under Mangasarian–Fromowitz conditions”. Em: *SIAM Journal on Control and Optimization* 47.1 (2008), pp. 535–552. DOI: 10.1137/060663623.
- [31] M. d. R. de Pinho e R. B. Vinter. “An Euler-Lagrange inclusion for optimal control problems”. Em: *IEEE Transactions on Automatic Control* 40.7 (1995), pp. 1191–1198. DOI: 10.1109/9.400492.
- [32] F. Deutsch. *Best Approximation in Inner Product Spaces*. 1^a ed. New York: Springer-Verlag, 2001.
- [33] A. V. Dmitruk. “Maximum principle for the general optimal control problem with phase and regular mixed constraints”. Em: *Computational Mathematics and Modeling* 4 (1993), pp. 364–377. DOI: 10.1007/BF01128760.
- [34] A. V. Dmitruk. “On the development of Pontryagin’s maximum principle in the works of A. Ya. Dubovitskii and A. A. Milyutin”. Em: *Control and Cybernetics* 38.4A (2009), pp. 923–957.
- [35] A. V. Dmitruk e N. P. Osmolovskii. “Local minimum principle for an optimal control problem with a nonregular mixed constraint”. Em: *SIAM Journal on Control and Optimization* 60.4 (2022), pp. 1919–1941. DOI: 10.1137/21M1411469.
- [36] A. V. Dmitruk e N. P. Osmolovskii. “Local minimum principle for optimal control problems with mixed constraints: the nonregular case”. Em: *Applied Mathematics and Optimization* 88.1 (2023), Artigo N^o 16, pp. 1–42. DOI: 10.1007/s00245-023-09993-1.
- [37] A. J. Dubovitskii e A. A. Miljutin. “Necessary conditions for a weak extremum in optimal control problems with mixed constraints of inequality type”. Em: *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* 8 (1968), pp. 725–779.
- [38] N. Dunford e J. T. Schwartz. *Linear Operators. Part I: General Theory*. London: Wiley-Interscience (Wiley Classics Library), 1988.

- [39] I. Ekeland. “On the variational principle”. Em: *J. Math. Anal. Appl.* 47.2 (1974), pp. 324–353. DOI: 10.1016/0022-247X(74)90025-0.
- [40] Z. Foroozandeh, M. Shamsi e M. d. R. de Pinho. “A mixed-binary non-linear programming approach for the numerical solution of a family of singular optimal control problems”. Em: *International Journal of Control* 92.7 (2019), pp. 1551–1566. DOI: 10.1080/00207179.2017.1399216.
- [41] P. Freire. *A Importância do Ato de Ler: em três artigos que se completam*. São Paulo: Cortez, 1989.
- [42] R. A. Gordon. *The integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock*. Vol. 4. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 1994. DOI: 10.1090/gsm/004.
- [43] A. Hamel. “Suboptimality theorems in optimal control”. Em: *Variational calculus, optimal control and applications (Trassenheide, 1996)*. Vol. 124. Internat. Ser. Numer. Math. Birkhäuser, Basel, 1998, pp. 61–68.
- [44] A. H. Hamel. “A suboptimality condition for generalized control systems”. Em: *2001 European Control Conference (ECC)* (2001), pp. 250–252. DOI: 10.23919/ECC.2001.7075914.
- [45] C. Kanzow, D. Steck e D. Wachsmuth. “An augmented Lagrangian method for optimization problems in Banach spaces”. Em: *SIAM Journal on Control and Optimization* 56.1 (2018), pp. 272–291. DOI: 10.1137/16M1107103.
- [46] W. Karush. “Minima of Functions of Several Variables with Inequalities as Side Constraints”. Dissertação de Mestrado. Chicago: University of Chicago, 1939.
- [47] N. Katzourakis e E. Varvaruca. *An Illustrative Introduction to Modern Analysis*. 1ª ed. New York: Chapman e Hall/CRC, 2017.
- [48] S. G. Krantz. *Foundations of Analysis*. New York: CRC Press, 2015.
- [49] I. A. Krylov e F. L. Chernous’ko. “An algorithm for the method of successive approximations in optimal control problems”. Em: *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics* 12.1 (1972), pp. 15–38. DOI: 10.1016/0041-5553(72)90063-8.
- [50] I. A. Krylov e F. L. Chernous’ko. “On a method of successive approximations for the solution of problems of optimal control”. Em: *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics* 2.6 (1963), pp. 1371–1382. DOI: 10.1016/0041-5553(63)90353-7.
- [51] H. W. Kuhn e A. W. Tucker. “Nonlinear Programming”. Em: *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 1950*. Berkeley e Los Angeles: University of California Press, 1951, pp. 481–492.

- [52] A. Li e J. J. Ye. “Necessary optimality conditions for optimal control problems with nonsmooth mixed state and control constraints”. Em: *Set-Valued and Variational Analysis. Theory and Applications* 24.3 (2016), pp. 449–470. DOI: 10.1007/s11228-015-0358-z.
- [53] E. L. Lima. *Curso de Análise*. 1^a ed. Vol. 2. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.
- [54] J. M. Martínez e E. A. Pilotta. “Inexact-restoration algorithm for constrained optimization”. Em: *Journal of Optimization Theory and Applications* 104.1 (2000), pp. 135–163. DOI: 10.1023/A:1004632923654.
- [55] J. M. Martínez e B. F. Svaiter. “A practical optimality condition without constraint qualifications for nonlinear programming”. Em: *Journal of Optimization Theory and Applications* 118.1 (2003), pp. 117–133. DOI: 10.1023/A:1024791525441.
- [56] MATLAB. *Version 9.12.0.2039608 (R2022a) Update 5*. Natick, Massachusetts: The MathWorks Inc., 2022.
- [57] H. Maurer, C. Büskens, J.-H. R. Kim e C. Y. Kaya. “Optimization methods for the verification of second order sufficient conditions for bang-bang controls”. Em: 26.3 (2005), pp. 129–156. DOI: 10.1002/oca.756.
- [58] H. Maurer e M. d. R. de Pinho. “Optimal control of epidemiological SEIR models with L^1 -objectives and control-state constraints”. Em: *Pacific Journal of Optimization. An International Journal* 12.2 (2016), pp. 415–436.
- [59] H. Maurer e N. Osmolovskii. “Second-order conditions for optimal control problems with mixed control-state constraints and control appearing linearly”. Em: *52nd IEEE Conference on Decision and Control*. 2013, pp. 514–519. DOI: 10.1109/CDC.2013.6759933.
- [60] P. Mehrlitz. “Asymptotic stationarity and regularity for nonsmooth optimization problems”. Em: *Journal of Nonsmooth Analysis and Optimization* 1 (2020), Artigo Nº 6575, pp. 1–30. DOI: 10.46298/jnsao-2020-6575.
- [61] A. A. Miljutin. *Maximum Principle in a General Optimal Control Problem*. Moscow: Fizmatlit, 2001 (em russo).
- [62] B. S. Mordukhovich. “An approximate maximum principle for finite-difference control systems”. Em: *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics* 28.1 (1988), pp. 106–114. DOI: 10.1016/0041-5553(88)90229-7.
- [63] B. S. Mordukhovich e I. Shvartsman. “The approximate maximum principle in constrained optimal control”. Em: *SIAM Journal on Control and Optimization* 43.3 (2004), pp. 1037–1062. DOI: 10.1137/S0363012903433012.

- [64] B. S. Mordukhovich e I. A. Shvartsman. “Approximate maximum principle for discrete approximations of optimal control systems with nonsmooth objectives and endpoint constraints”. Em: *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations* 19.3 (2013), pp. 811–827. DOI: 10.1051/cocv/2012034.
- [65] D. Motreanu, V. V. Motreanu e N. Papageorgiou. *Topological and Variational Methods with Applications to Nonlinear Boundary Value Problems*. 1^a ed. New York: Springer, 2014.
- [66] J. Nocedal e S. J. Wright. *Numerical Optimization*. 2^a ed. New York: Springer, 2006.
- [67] J. T. Pereira. “Generalização das condições de otimalidade para problemas de controle ótimo com restrições mistas”. Tese de doutorado. Campinas: Universidade Estadual de Campinas, 2020.
- [68] L. S. Pontryagin, V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze e E. F. Mischenko. *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. New York: Wiley-Interscience, 1962.
- [69] Liqun Qi e Zengxin Wei. “On the constant positive linear dependence condition and its application to SQP methods”. Em: *SIAM Journal on Optimization* 10.4 (2000), pp. 963–981. DOI: 10.1137/S1052623497326629.
- [70] H. L. Royden e P. M. Fitzpatrick. *Real Analysis*. 4^a ed. Hoboken: Prentice Hall, 2010.
- [71] Y. Sakawa. “On local convergence of an algorithm for optimal control”. Em: *Numerical Functional Analysis and Optimization* 3.3 (1981), pp. 301–319. DOI: 10.1080/01630568108816092.
- [72] Y. Sakawa e Y. Shindo. “On global convergence of an algorithm for optimal control”. Em: *IEEE Transactions on Automatic Control* 25.6 (1980), pp. 1149–1153. DOI: 10.1109/TAC.1980.1102517.
- [73] A. B. Schwarzkopf. “Optimal controls with equality state constraints”. Em: *Journal of Optimization Theory and Applications* 19 (1976), pp. 455–468. DOI: 10.1007/BF00941487.
- [74] A. Seierstad e K. Sydsaeter. *Optimal Control Theory with Economic Applications*. USA: Elsevier North-Holland, Inc., 1986.
- [75] D. Steck. “Lagrange multiplier methods for constrained optimization and variational problems in Banach spaces”. Ph.D. thesis. Würzburg: Institute of Mathematics, Universität Würzburg, 2018.
- [76] R. Vinter. *Optimal Control*. Boston: Birkhäuser, 2000.
- [77] J. Zhu, E. Trélat e M. Cerf. “Geometric optimal control and applications to aerospace”. Em: *Pacific Journal of Mathematics for Industry* 9.8 (2017), pp. 1–41. DOI: 10.1186/s40736-017-0033-4.