

EDSON ITALO MAINARDI JÚNIOR

**PROJETO DE CONTROLADORES PARA SISTEMAS
CHAVEADOS COM APLICAÇÕES EM CONVERSORES
CC-CC**

Ilha Solteira - SP
2013



EDSON ITALO MAINARDI JÚNIOR

**PROJETO DE CONTROLADORES PARA SISTEMAS
CHAVEADOS COM APLICAÇÕES EM CONVERSORES
CC-CC**

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia do Câmpus de Ilha Solteira - UNESP como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica.
Especialidade: Automação.

Prof. Dr. Marcelo C. Minhoto Teixeira
Orientador
Prof. Dr. Rodrigo Cardim
Co-orientador

Ilha Solteira - SP
2013

FICHA CATALOGRÁFICA
Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

M224p Mainardi Júnior, Edson Italo.
Projeto de controladores para sistemas chaveados com aplicações em conversores cc-cc / Edson Italo Mainardi Júnior. -- Ilha Solteira: [s.n.], 2013
167 f. :il.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira. Área de Conhecimento: Automação, 2013

Orientador: Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira
Co-orientador: Rodrigo Cardim
Inclui bibliografia

1. Teoria de controle. 2. Sistemas chaveados. 3. Conversores Cc-Cc.
4. Desigualdades matriciais lineares. 5. Estrutura variável. 6. Controle adaptativo.

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

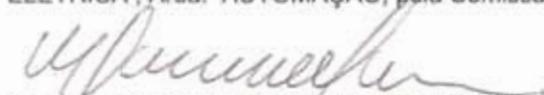
TÍTULO: Projeto de controladores para sistemas chaveados com aplicações em conversores CC-CC

AUTOR: EDSON ITALO MAINARDI JUNIOR

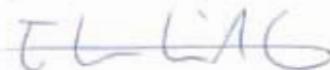
ORIENTADOR: Prof. Dr. MARCELO CARVALHO M TEIXEIRA

CO-ORIENTADOR: Prof. Dr. RODRIGO CARDIM

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de DOUTOR EM ENGENHARIA ELÉTRICA, Área: AUTOMAÇÃO, pela Comissão Examinadora:



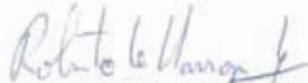
Prof. Dr. MARCELO CARVALHO M TEIXEIRA
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira



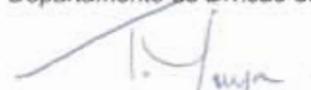
Prof. Dr. EDVALDO ASSUNÇÃO
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira



Prof. Dr. JOSE PAULO FERNANDES GARCIA
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira



Prof. Dr. ROBERTO KAWAKAMI HARROP GALVÃO
Departamento de Divisão de Engenharia Eletrônica / Insituto Tecnológico de Aeronáutica - ITA



Prof. Dr. TAKASHI YONEYAMA
Departamento de Sistemas e Controle da Divisão de Engenharia Eletrônica / Insituto Tecnológico de Aeronáutica - ITA

Data da realização: 27 de setembro de 2013.

*“O conhecimento torna a alma jovem e diminui a
amargura da velhice. Colhe, pois, a sabedoria.
Armazena suavidade para o amanhã.”*

Leonardo da Vinci

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, que me deu força e vontade para superar todos os obstáculos encontrados no caminho até chegar a este momento. A todos os familiares, amigos, professores e funcionários da FEIS-UNESP, que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho. Em especial, dedico meus agradecimentos:

- À minha esposa, Lícia, pelo apoio, incentivo e carinho sempre presente. Com ela tenho dividido os momentos difíceis e multiplicado os momentos de felicidade;
- Aos meus pais, Edson e Gislaine, e à minha família, pelo apoio, incentivo e carinho sempre presentes;
- Ao meu orientador, Prof. Marcelo C. M. Teixeira, pela amizade, pelos grandes ensinamentos, pelo incentivo e pela orientação, dada com muita sabedoria, determinação e humildade;
- Aos Profs. Edvaldo Assunção e Rodrigo Cardim, pelo apoio e pelos valiosos conselhos, sempre motivando e transmitindo confiança e serenidade;
- Aos professores José Paulo e Neusa, pela força e pelas sugestões;
- Aos amigos que trabalharam comigo no laboratório de controle, Manoel, Wallysonn, João, Marinez, Luiz, Emerson, Gisele e Fernando pela amizade e companheirismo;
- Aos meus amigos da antiga república, Luciano e Henrique pelo companheirismo e pela amizade;
- À Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira (FEIS-UNESP), local onde estudei durante a graduação e o doutorado.
- Finalmente, à FAPESP (Processo: 2012/12945-7 vinculado ao Projeto Temático processo: 2011/17610-0) e à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior do Estado de São Paulo - CAPES pela oportunidade e apoio financeiro.

Talvez eu não tenha lembrado de todos neste momento, mas pode ter a certeza que eu não os esqueci.

RESUMO

Neste trabalho são apresentados estudos teóricos que investigam os seguintes problemas: estabilidade e controle de sistemas chaveados lineares e afins contínuos no tempo. Primeiramente, um breve estudo sobre sistemas lineares chaveados é apresentado, e em decorrência desse estudo propõe-se o projeto de controle com acesso somente à saída da planta. Neste contexto, uma nova lei de chaveamento dependente apenas da saída do sistema linear chaveado, que assegura a estabilidade assintótica do sistema linear chaveado, é proposta. O mesmo método de projeto foi proposto para a classe de sistemas lineares chaveados incertos contínuos no tempo. Novas condições menos conservadoras foram obtidas a fim de relaxar um custo garantido e o conservadorismo do projeto. Índices de desempenho tais como, taxa de decaimento e minimização de um custo garantido são considerados a fim de tornar o procedimento de projeto mais geral. Simulações foram realizadas ilustrando o desempenho dos sistemas lineares chaveados controlados, demonstrando que o método proposto apresenta uma solução eficiente para este problema de controle. Posteriormente, apresenta-se uma extensão dos estudos teóricos para a classe de sistemas chaveados afins contínuos no tempo. Uma revisão de resultados precedentes disponíveis na literatura sobre estabilidade de sistemas chaveados afins com aplicações em eletrônica de potência, é apresentada. Em decorrência desse estudo são propostas novas técnicas de projeto de controle, tais como: controle chaveado com acesso apenas à saída da planta, controle utilizando estrutura variável e controle adaptativo. Um outro assunto abordado neste trabalho foi a proposta de novas condições suficientes, baseadas em LMIs, e o projeto de estratégias de controle a tempo fixo de chaveamento, que asseguram estabilidade uniforme *ultimate bounded* (CORLESS; LEITMANN, 1981) do sistema chaveado afim. Os métodos foram aplicados no controle de quatro conversores CC-CC: Buck, Boost, Buck-Boost e Sepic a fim de comparar e verificar a validade do projeto dos controladores. A técnica utilizada nestes estudos consiste de uma função de Lyapunov conveniente e a análise de estabilidade foi reduzida a problemas descritos por Desigualdades Matriciais Lineares, em inglês *Linear Matrix Inequalities* (LMIs) que, quando factíveis, são facilmente resolvidas por meio de ferramentas disponíveis na literatura de programação convexa. Os exemplos numéricos e simulações foram efetuados utilizando o software MATLAB.

Palavras-chave: Sistemas lineares chaveados. Realimentação da saída. Sistemas chaveados afins. Controle com estrutura variável. Controle adaptativo. Desigualdades matriciais lineares (LMIs). Função de Lyapunov quadrática. Conversores CC-CC.

ABSTRACT

This paper presents theoretical studies that investigate the following problems related to continuous - time plants: stability and control of switched linear and affine systems. First, a brief study about switched linear systems is presented, and based on this study a control design dependent only on the plant output is proposed. In this context, a new switching strategy, which ensures the asymptotic stability of the switched linear system, is proposed. The same design method was proposed for a class of uncertain switched linear systems. New less conservative conditions were proposed in order to reduce a guaranteed cost and the conservatism of the design condition. Performance indices such as decay rate and guaranteed cost are considered, allowing a more general design procedure. Simulations were performed illustrating the performance of the controlled switched linear systems, demonstrating that the proposed method provides an efficient solution for this control problem. Subsequently, an extension of the theoretical study for a class of continuous time switched affine systems is presented. Then, a review of previous results available in the literature about stability of the switched systems with applications to power electronics is offered. Following, new control design techniques, such as switched control with only access on output plant, variable structure control and adaptive control, are proposed. Another issue addressed in this work is the proposal of new sufficient conditions, based on LMIs, and the design of new switching strategies with fixed time, that ensure uniform *ultimate bounded* stability (CORLESS; LEITMANN, 1981) for a class of switched affine system. The proposed methods were applied to control four DC-DC converters, Buck, Boost, Buck-Boost and Sepic in order to compare and to validate the controller designs. The techniques used in this study are based on a convenient Lyapunov function candidate and the stability analysis was reduced to problems described by Linear Matrix Inequalities (LMIs), which, when feasible, are easily solved by tools available in the literature of convex programming. The numerical examples and simulations were performed using the software MATLAB.

Keywords: Switched linear systems. Switched affine systems. Output feedback. Variable structure control. Adaptive control. Linear matrix inequalities (LMIs). Lyapunov function. DC-DC converters.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1	Trajectoria do sinal $x_1(t)$ (Exemplo 01).	36
Figura 2	Trajectoria do sinal $x_2(t)$ (Exemplo 01).	36
Figura 3	Trajectoria do sinal $x_3(t)$ (Exemplo 01).	37
Figura 4	Retrato de fase (Exemplo 01).	37
Figura 5	Trajectoria do sinal $x_1(t)$ (Exemplo 01).	37
Figura 6	Trajectoria do sinal $x_2(t)$ (Exemplo 01).	37
Figura 7	Trajectoria do sinal $x_3(t)$ (Exemplo 01).	38
Figura 8	Retrato de fase (Exemplo 01).	38
Figura 9	Trajectoria do sinal $x_1(t)$ (Exemplo 01).	38
Figura 10	Trajectoria do sinal $x_2(t)$ (Exemplo 01).	38
Figura 11	Trajectoria do sinal $x_3(t)$ (Exemplo 01).	39
Figura 12	Retrato de fase (Exemplo 01).	39
Figura 13	Trajectoria do sinal $x_1(t)$ (Exemplo 02).	40
Figura 14	Trajectoria do sinal $x_2(t)$ (Exemplo 02).	40
Figura 15	Trajectoria do sinal $x_3(t)$ (Exemplo 02).	41
Figura 16	Retrato de fase (Exemplo 02).	41
Figura 17	Trajectoria do sinal $x_1(t)$ (Exemplo 02).	41
Figura 18	Trajectoria do sinal $x_2(t)$ (Exemplo 02).	41
Figura 19	Trajectoria do sinal $x_3(t)$ (Exemplo 02).	42
Figura 20	Retrato de fase (Exemplo 02).	42
Figura 21	Trajectoria do sinal $x_1(t)$ (Exemplo 02).	42
Figura 22	Trajectoria do sinal $x_2(t)$ (Exemplo 02).	42
Figura 23	Trajectoria do sinal $x_3(t)$ (Exemplo 02).	43

Figura 24	Retrato de fase (Exemplo 02).	43
Figura 25	Variáveis de estado do sistema linear chaveado incerto - Teorema 13. . .	57
Figura 26	Variáveis de estado sistema linear chaveado incerto - Teorema 16. . . .	57
Figura 27	Variáveis de estado do sistema linear chaveado incerto - Teorema 18. . .	57
Figura 28	Variáveis de estado do sistema linear chaveado incerto - Teorema 21. . .	57
Figura 29	Regiões de factibilidade obtidas com o Teorema 12 (o) e o Teorema 14 (\times).	59
Figura 30	Regiões de factibilidade obtidas com o Teorema 14 (\times) e o Teorema 17 (\diamond).	59
Figura 31	Regiões de factibilidade obtidas com o Teorema 17 (\diamond) e o Teorema 19 (\bullet).	60
Figura 32	Conversor CC-CC Buck.	72
Figura 33	Plano de fase do conversor Buck.	73
Figura 34	Plano de fase do conversor Buck com taxa de decaimento $\gamma = 2000$. . .	75
Figura 35	Plano de fase do conversor Buck com taxa de decaimento $\gamma = 2000$. . .	75
Figura 36	Conversor CC-CC Boost.	76
Figura 37	Plano de fase do conversor Boost.	77
Figura 38	Plano de fase do conversor Boost com taxa de decaimento $\gamma = 460$. . .	78
Figura 39	Plano de fase do conversor Boost com taxa de decaimento $\gamma = 40$. . .	78
Figura 40	Conversor CC-CC Buck-Boost.	79
Figura 41	Plano de fase do conversor Buck-Boost.	80
Figura 42	Plano de fase do conversor Buck-Boost com taxa de decaimento $\gamma = 220$. .	81
Figura 43	Plano de fase do conversor Buck-Boost com taxa de decaimento $\gamma = 40$. .	81
Figura 44	Conversor CC-CC SEPIC.	87
Figura 45	Corrente no indutor do conversor Sepic: $x_1(t) = i_{L1}(t)$	89
Figura 46	Corrente no indutor do conversor Sepic: $x_2(t) = i_{L2}(t)$	89
Figura 47	Tensão no capacitor de entrada do conversor Sepic: $x_3(t) = V_{C1}(t)$. . .	90

Figura 48	Tensão no capacitor de saída do conversor Sepic: $x_4(t) = V_{C2}(t)$	90
Figura 49	Corrente $x_1(t) = i_{L1}(t)$ no indutor do conversor Sepic operando com chaveamento não ideal.	101
Figura 50	Corrente $x_2(t) = i_{L2}(t)$ no indutor do conversor Sepic operando com chaveamento não ideal.	101
Figura 51	Tensão $x_3(t) = V_{C1}(t)$ no capacitor de entrada do conversor Sepic operando com chaveamento não ideal.	101
Figura 52	Tensão $x_4(t) = V_{C2}(t)$ no capacitor de saída do conversor Sepic operando com chaveamento não ideal.	101
Figura 53	Relação custo x constante de amostragem de tempo - Teorema 37.	102
Figura 54	Relação custo x constante de amostragem de tempo - Teorema 38.	102
Figura 55	Elementos do vetor $\xi(t) = x(t) - x_r$ para o conversor Sepic operando com chaveamento ideal - Teorema 23.	103
Figura 56	Elementos do vetor $\xi(kT) = x(kT) - x_r$ para o conversor Sepic operando com chaveamento não ideal - Teorema 37.	103
Figura 57	Elementos do vetor $\xi(t) = x(t) - x_r$ para o conversor Sepic operando com chaveamento ideal - Teorema 34.	103
Figura 58	Elementos do vetor $\xi(kT) = x(kT) - x_r$ para o conversor Sepic operando com chaveamento não ideal - Teorema 38.	103
Figura 59	Análise da aproximação descrita em (204) - Teorema 37 - chaveamento não ideal.	105
Figura 60	Amplificação para análise da aproximação descrita em (204) - Teorema 37 - chaveamento não ideal.	105
Figura 61	Análise da aproximação descrita em (217) - Teorema 38 - chaveamento não ideal.	105
Figura 62	Amplificação para análise da aproximação descrita em (217) - Teorema 38 - chaveamento não ideal.	105
Figura 63	Corrente $x_1(t) = i_{L1}(t)$ no indutor do conversor Sepic operando com chaveamento não ideal.	105

Figura 64	Corrente $x_2(t) = i_{L2}(t)$ no indutor do conversor Sepic operando com chaveamento não ideal.	105
Figura 65	Tensão $x_3(t) = V_{C1}(t)$ no capacitor de entrada do conversor Sepic operando com chaveamento não ideal.	106
Figura 66	Corrente $x_4(t) = V_{C2}(t)$ no capacitor de saída do conversor Sepic operando com chaveamento não ideal.	106
Figura 67	Plano de fase do conversor Buck utilizando os Teoremas 23 (DEAECTO et al., 2010) e 39 proposto.	116
Figura 68	Plano de fase do conversor Buck utilizando os Teoremas 23, 28, 39 e 40 para uma taxa de decaimento $\gamma = 2000$	117
Figura 69	Plano de fase do conversor Boost utilizando os Teoremas 23 (DEAECTO et al., 2010) e 39.	119
Figura 70	Plano de fase do conversor Boost utilizando os Teoremas 23, 28, 39 e 40 para uma taxa de decaimento $\gamma = 470$	120
Figura 71	Plano de fase do conversor Buck-Boost utilizando os Teoremas 23 (DEAECTO et al., 2010) e 39.	121
Figura 72	Plano de fase do conversor Buck-Boost utilizando os Teoremas 23, 28, 39 e 40 para uma taxa de decaimento $\gamma = 220$	122
Figura 73	Plano de fase do conversor Buck operando sob informações parciais.	130
Figura 74	Plano de fase do conversor Sepic operando sob informações parciais.	130
Figura 75	Tensão de saída $V_C(t)$ do conversor Buck sob variação de carga.	136
Figura 76	Corrente no indutor $i_L(t)$ do conversor Buck sob variação de carga.	136
Figura 77	Tensão de saída $V_{C2}(t)$ do conversor Sepic sob variação de carga.	138
Figura 78	Corrente no indutor $i_{L1}(t) - i_{L2}(t)$ do conversor Sepic sob variação de carga.	138
Figura 79	Forma de onda de um PWM.	143
Figura 80	Tensões de saída $V_C(t)$ do conversor Buck utilizando o Teorema 43.	144
Figura 81	Correntes no indutor $i_L(t)$ do conversor Buck utilizando o Teorema 43.	144
Figura 82	Razão cíclica do conversor Buck.	144

Figura 83	Tensões de saída $V_C(t)$ do conversor Boost utilizando o Teorema 43.	146
Figura 84	Correntes no indutor $i_L(t)$ do conversor Boost utilizando o Teorema 43.	146
Figura 85	Razão cíclica do conversor Boost.	146
Figura 86	Tensões de saída $V_C(t)$ do conversor Buck Boost utilizando o Teorema 43.	147
Figura 87	Correntes no indutor $i_L(t)$ do conversor Buck Boost utilizando o Teorema 43.	147
Figura 88	Razão cíclica do conversor Buck Boost.	147
Figura 89	Tensão de saída $V_C(t)$ do conversor Buck sob variação de carga utilizando controle adaptativo.	152
Figura 90	Corrente no indutor $i_L(t)$ do conversor Buck sob variação de carga utilizando controle adaptativo.	152
Figura 91	Tensão de saída $V_{C_2}(t)$ do conversor Sepic sob variação de carga utilizando controle adaptativo.	153
Figura 92	Corrente $i_{L_1}(t) - i_{L_2}(t)$ do conversor Sepic sob variação de carga utilizando controle adaptativo.	153

LISTA DE TABELAS

Tabela 1	Resultados do Exemplo 1.	39
Tabela 2	Resultados do Exemplo 2.	43
Tabela 3	Resultados para o Exemplo 5.	58
Tabela 4	Resultados para o conversor CC-CC Buck.	75
Tabela 5	Resultados para o conversor CC-CC Boost.	78
Tabela 6	Resultados para o conversor CC-CC Buck-Boost.	82
Tabela 7	Resultados para o converter CC-CC Sepic.	90
Tabela 8	Resultados para o converter CC-CC Sepic operando com chaveamento ideal (Teoremas 24 e 33) e não ideal (Teorema 36).	101
Tabela 9	Resultados para o converter CC-CC Sepic operando com chaveamento ideal e não ideal.	106
Tabela 10	Resultados para o conversor Buck.	117
Tabela 11	Resultados para o conversor Boost.	120
Tabela 12	Resultados para o conversor Buck-Boost.	123
Tabela 13	Modelos aumentados dos conversores.	124
Tabela 14	Modelos aumentados dos conversores Sepic e Zeta.	129

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	18
2	CONCEITOS FUNDAMENTAIS	23
2.1	Sistemas autônomos e não autônomos	23
2.2	Estabilidade segundo Lyapunov	23
2.3	Análise da estabilidade de sistemas chaveados	25
2.4	Princípio da invariância para sistemas chaveados	25
3	SISTEMAS LINEARES CHAVEADOS	27
3.1	Controle de sistemas lineares chaveados	27
3.2	Estabilidade quadrática de sistemas lineares chaveados	28
3.2.1	<i>Custo garantido</i>	29
3.2.2	<i>Taxa de decaimento</i>	30
3.3	Sistemas lineares chaveados com acesso à saída	31
3.3.1	<i>Controle de sistemas lineares chaveados com acesso à saída</i>	32
3.3.2	<i>Custo garantido</i>	33
3.3.3	<i>Taxa de decaimento</i>	34
3.3.4	<i>Exemplo 1</i>	36
3.3.5	<i>Exemplo 2</i>	39
3.4	Incertezas politópicas	43
3.4.1	<i>Projeto de uma estratégia robusta de chaveamento dependente apenas da saída da planta</i>	44

3.4.2	<i>Exemplo 3</i>	55
3.4.3	<i>Exemplo 4</i>	58
3.5	Conclusões parciais	60
4	SISTEMAS CHAVEADOS AFINS	61
4.1	Controle de sistemas chaveados afins	61
4.1.1	<i>Formulação do problema</i>	62
4.1.2	<i>Taxa de decaimento</i>	66
4.1.3	<i>Exemplo 5 (Conversores CC-CC Buck, Boost e Buck-Boost)</i>	71
4.1.3.1	Conversor Buck	72
4.1.3.2	Conversor Boost	75
4.1.3.3	Conversor Buck-Boost	79
4.2	Sistemas chaveados afins com acesso à saída	82
4.2.1	<i>Exemplo 6 (Conversor CC-CC Sepic)</i>	86
4.2.1.1	Conversor Sepic	87
4.3	Controle de sistemas chaveados afins com chaveamento não ideal	91
4.3.1	<i>Exemplo 7 (Conversor CC-CC Sepic com chaveamento não ideal)</i>	98
4.4	Conclusões Parciais	107
5	CONTROLE COM ESTRUTURA VARIÁVEL DE SISTEMAS CHAVEADOS AFINS	108
5.1	Formulação do problema	108
5.1.1	<i>Taxa de decaimento</i>	112
5.1.2	<i>Exemplo 8 (Conversores CC-CC Buck, Boost e Buck-Boost)</i>	115
5.1.2.1	Conversor Buck	115

5.1.2.2	Conversor Boost	118
5.1.2.3	Conversor Buck-Boost	120
5.2	Projeto de controle dependente de informações parciais do ponto de equilíbrio	124
5.2.1	<i>Exemplo 9 (Conversores CC-CC operando com informações parciais)</i>	129
5.3	Controle robusto de sistemas chaveados afins com incertezas politópicas	130
5.3.1	<i>Projeto de uma estratégia de chaveamento robusta dependente apenas de informações parciais do ponto de equilíbrio</i>	130
5.3.2	<i>Exemplo 10 (Projeto de controle robusto para os conversores Buck e Sepic)</i>	134
5.3.2.1	Projeto de controle robusto para o conversor Buck	134
5.3.2.2	Projeto de controle robusto para o conversor Sepic	136
5.4	Conclusões Parciais	138
6	CONTROLE ADAPTATIVO DE SISTEMAS CHAVEADOS AFINS	140
6.1	Controle de sistemas chaveados afins utilizando uma estratégia de chaveamento adaptativa	140
6.1.1	<i>Exemplo 11 (Conversores CC-CC Buck, Boost e Buck-Boost)</i>	143
6.1.1.1	Conversor Buck	143
6.1.1.2	Conversor Boost	145
6.1.1.3	Conversor Buck-Boost	146
6.2	Controle adaptativo de sistemas chaveados afins com incertezas politópicas	148
6.2.1	<i>Exemplo 12 (Projeto de controle robusto utilizando controle adaptativo para os conversores Buck e Sepic)</i>	151
6.2.1.1	Projeto de controle robusto para o conversor Buck	151
6.2.1.2	Projeto de controle robusto para o conversor Sepic	152
6.3	Conclusões Parciais	153

7	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS	155
7.0.1	<i>Sugestões para Pesquisas Futuras</i>	157
	REFERÊNCIAS	158
	Anexo A – Participação em Trabalhos	165
A.1	Artigos em Periódicos Internacionais	165
A.2	Capítulo de Livro	165
A.3	Artigos em Congressos Internacionais	165
A.4	Artigos em Congressos Nacionais	166

1 INTRODUÇÃO

Nas últimas décadas, têm-se observado um crescente interesse da comunidade científica no estudo da estabilidade de sistemas lineares chaveados (GEROMEL; COLANERI, 2006; ZHAI; LIN; ANTSAKLIS, 2003; LIN; ANTSAKLIS, 2009), pois sistemas de controle chaveados muitas vezes apresentam um desempenho global melhor do que os sistemas de controle sem chaveamento, além de suas inúmeras aplicações em sistemas práticos tais como: controle de sistemas mecânicos, controle de processos, sistemas de potência, controle de aeronaves, indústria automotiva, eletrônica de potência (YOSHIMURA et al., 2013; CARDIM et al., 2009; DEAECTO et al., 2010; BATLLE; FOSSAS; OLIVAR, 1996; MAZUMDER; NAYFEH; BOROJEVIC, 2002; HE; XU; CHENG, 2010; YOSHIMURA et al., 2011; CARDIM et al., 2011a; CARDIM et al., 2011b).

A princípio, a teoria de sistemas lineares chaveados pode ser dividida em dois grupos, sendo que o primeiro ocorre quando a regra de chaveamento $\sigma(t)$ é independente das variáveis de estado e o segundo para o caso de $\sigma(t)$ ser uma variável de controle dependente das variáveis de estado do sistema (GEROMEL; COLANERI, 2006). Desta forma, a ideia é projetar uma estratégia de chaveamento adequada que seleciona a cada instante de tempo, um subsistema dinâmico dentre um determinado número de subsistemas disponíveis e ainda assegure a estabilidade assintótica com a garantia de desempenho adequado (DECARLO et al., 2000; SUN; GE, 2005b). Em Lin e Antsaklis (2009), Liberzon (2003), Liberzon e Morse (1999) pode-se encontrar resultados importantes sobre sistemas lineares chaveados. Veja Hespanha (2004) para a síntese de controladores que estabilizam sistemas lineares chaveados em um contexto bastante geral.

O projeto de sistemas de controle para a classe de sistemas lineares, com acesso somente à saída da planta é de grande interesse em aplicações práticas e estudos teóricos. Em Wicks, Peleties e DeCarlo (1994), o problema de estabilidade para sistemas lineares chaveados foi estudado e mostrou-se a partir de uma candidata a função de Lyapunov quadrática, que a existência de uma combinação convexa Hurwitz (com todos autovalores com parte real negativa) das matrizes dos subsistemas implica na existência de uma estratégia de chaveamento dependente do vetor de estado que estabiliza o sistema linear chaveado. Neste contexto, Feron (1996) propôs uma condição necessária e suficiente para a estabilidade de sistemas lineares chaveados, além de estender os resultados para o projeto de controladores com realimentação dinâmica da saída. Em

Xie e Shi (2006), um controlador dinâmico baseado em um observador de estado foi proposto. O projeto consistiu da utilização do princípio da separação, tornando assim o projeto do controlador com realimentação ou observador de estado, realizado de forma independente. Mais recentemente, condições de estabilidade, uma estratégia de chaveamento e projeto de controle via realimentação dinâmica da saída foram propostas em Geromel, Colaneri e Bolzern (2008), para uma classe particular de desigualdades matriciais denominada Lyapunov-Metzler. Com base nesta teoria, Deaecto, Geromel e Daafouz (2011) apresentaram resultados importantes para o projeto de controle H_∞ via realimentação dinâmica da saída. Para a classe de sistemas lineares chaveados com incertezas politópicas, em Zhai, Lin e Antsaklis (2003) uma estratégia de chaveamento, baseada em funções de Lyapunov quadráticas e em LMIs, que estabiliza o sistema incerto foi projetada para os casos contínuo e discreto no tempo. Adicionalmente, no problema de controle via realimentação estática da saída, baseada em uma função chaveada quadrática de Lyapunov e em LMIs, foi proposta em Daafouz, Riedinger e Iung (2002) uma condição diferente que utiliza variáveis de folga no projeto do controlador. Mais recentemente, Ding e Yang (2009) apresentaram condições mais relaxadas, usando o Lema de Finsler e funções quadráticas de Lyapunov por partes. Outros resultados que investigam problemas sobre a estabilidade e estabilizabilidade de sistemas chaveados contínuos e discretos no tempo com incertezas politópicas podem ser encontrados em Sun (2004), Xie e Yu (2006), Lin e Antsaklis (2007), Otsuka e Soga (2009), Otsuka e Soga (2010) e Soga e Otsuka (2010). Uma breve revisão e resultados sobre controlabilidade, observabilidade, projeto de controladores e controle ótimo de sistemas chaveados pode ser encontrado em Sun e Ge (2005a).

No entanto, a maioria dos resultados propostos para o problema de estabilidade de sistemas chaveados, que utilizam funções de Lyapunov (LIBERZON; MORSE, 1999; YANG; COCQUEMPOT; JIANG, 2009), são definidos ao longo de um intervalo de tempo muito próximo do infinito (chaveamento ideal) (DU; LIN; LI, 2010), não podendo ser implementados em sistemas práticos. A estabilidade de sistemas com tempo finito de chaveamento é um conceito de estabilidade diferente, o qual admite que o estado não exceda um determinado número de chaveamento durante um intervalo de tempo fixo. Alguns resultados iniciais sobre estabilidade de sistemas com tempo finito de chaveamento (ou do inglês *short-time stability*) podem ser encontradas em Dorato (1961) e Weiss e Infante (1967). Resultados que investigam problemas sobre a estabilidade com tempo finito de chaveamento para sistemas lineares com incertezas politópicas, podem ser encontrados em Amato, Ariola e Dorato (2001). Em Amato, Ariola e Cosentino (2006), um projeto de controladores com realimentação dinâmica da saída, a tempo finito de chaveamento, foi proposto. Uma extensão dos resultados sobre estabilidade a tempo finito de chaveamento, para a classe de sistemas chaveados lineares, podem ser encontradas em Du, Lin

e Li (2010) e Lin, Du e Li (2011). Deste modo, estabilidade e projeto de controladores com tempo fixo de chaveamento para sistemas chaveados, têm sido muito pouco estudados. Motivados pela ampla aplicação desta teoria em sistemas práticos tais como, conversores CC-CC que são amplamente utilizados nas indústrias, este estudo se concentra em propor novas condições de estabilidade uniforme *ultimate bounded* (CORLESS; LEITMANN, 1981) e projeto de controladores com tempo fixo de chaveamento para esta classe de sistema.

A primeira contribuição desta tese, apresentada no Capítulo 3, foi a proposta de um novo método de projeto que propõe condições suficientes sobre a estabilidade de sistemas lineares chaveados contínuos no tempo, com acesso somente à saída da planta. A técnica utilizada para este estudo consiste na escolha de uma função de Lyapunov conveniente, como por exemplo a quadrática (FERON, 1996; ZHIJIAN; LONG; GUANGMING, 2005; SKAFIDAS et al., 1999). A análise de estabilidade foi reduzida a problemas descritos por LMIs (BOYD et al., 1994) que, quando factíveis, são facilmente resolvidas por meio de ferramentas disponíveis na literatura de programação convexa, por exemplo Gahinet et al. (1995). Desta forma, a solução encontrada para tais problemas descritos por LMIs, muitas vezes é equivalente a encontrar soluções para o problema original. Os resultados são ilustrados através de exemplos numéricos, os quais mostram que o procedimento de projeto proposto tem um bom desempenho, inclusive em situações nas quais as matrizes dos subsistemas lineares não são Hurwitz. Adicionalmente, neste capítulo estudos sobre o controle de sistemas lineares chaveados com acesso somente à saída da planta, também são abordados para a classe de sistemas com incertas politópicas que no decorrer das pesquisas geraram novos resultados. O objetivo é propor uma extensão direta dos resultados descritos na Seção 3.3, para uma classe de sistemas lineares chaveados incertos. Novas condições menos conservadoras são obtidas a fim de relaxar um custo garantido e o conservadorismo do projeto.

O Capítulo 4 apresenta um estudo, bem como uma breve revisão de resultados disponíveis na literatura, sobre a estabilidade e controle de sistemas chaveados afins. Entretanto, sistemas chaveados afins são mais difíceis de controlar do que os sistemas chaveados lineares, pois é possível que os modos (subsistemas) não compartilhem o mesmo ponto de equilíbrio do sistema global. Desta forma, o conceito de estabilidade deve ser estendido e assim, as ideias contidas em Bolzern e Spinelli (2004) e Xu, Zhai e He (2008) podem ser utilizadas. Baseado em funções quadráticas de Lyapunov, vários autores têm proposto controladores não lineares a fim de garantir a estabilidade de sistemas chaveados afins (SANDERS; VERGUESE, 1992; KAWASAKI; NOMURA; MASUHIRO, 1995; BOLZERN; SPINELLI, 2004). Em Bolzern e Spinelli (2004), o problema de estabilidade de sistemas de chaveados afins foi estudada utilizando uma função de Lyapunov quadrática, e demonstrou-se que, se existe uma combinação

convexa Hurwitz das matrizes do subsistema (uma matriz com todos autovalores com parte real negativa), então existe uma estratégia de chaveamento, que estabiliza o sistema chaveado afim. Assim, em Bolzern e Spinelli (2004) os autores demonstraram que essa condição é necessária e suficiente para N subsistemas. Ademais, em Deaecto et al. (2010), foram analisadas condições de estabilidade e uma estratégia de chaveamento dependente do vetor de estado para o controle de sistemas chaveados afins, com aplicações em conversores CC-CC Buck, Boost e Buck-Boost. Mais especificamente, o método do projeto de controle foi baseado em LMIs, bem como foram propostas alternativas a fim de reduzir as perdas devido à resistência série do indutor. Em seguida, a fim de comparar os índices de desempenho: tempo de estabelecimento da tensão e *overshoot* de corrente, para a classe de conversores CC-CC, duas estratégias de controle diferentes foram descritas em Yoshimura et al. (2011). Em Montagner et al. (2011), o projeto e validação experimental de um regulador linear quadrático a tempo discreto (DLQR), foram propostos utilizando uma série de funções chaveadas de Lyapunov.

Desta forma, a primeira contribuição relevante apresentada no Capítulo 4, foi a proposta de uma nova estratégia de controle para sistemas chaveados afins, considerando somente acesso à informações da saída estática da planta. A motivação para esta contribuição se deve principalmente ao fato de que o projeto de uma estratégia de controle estático, considerando apenas a saída da planta, permite uma implementação prática muito mais simples (TEIXEIRA, 1993; COVACIC et al., 2012) do que as disponíveis atualmente na literatura. A segunda, e mais importante contribuição deste capítulo, foi a proposta de novas condições suficientes, baseadas em LMIs, e o projeto de estratégias a tempo fixo de chaveamento, que asseguram estabilidade uniforme *ultimate bounded* (CORLESS; LEITMANN, 1981) do sistema chaveado afim. Os resultados são aplicados na regulação da tensão de saída de um conversor CC-CC de quarta ordem, Sepic e a validade da técnica é comprovada através de resultados de simulações numéricas.

No Capítulo 5, são descritos novos métodos de projeto de controle utilizando estrutura variável (ITKIS, 1976; UTKIN, 1978; DRAZENOVIC, 1969; BATLLE; FOSSAS; OLIVAR, 1996; MAZUMDER; NAYFEH; BOROJEVIC, 2002; CARDIM et al., 2009) para a classe de sistemas chaveados afins, levando em consideração índices de desempenho tais como taxa de decaimento e custo garantido. Adicionalmente, uma nova estratégia de chaveamento dependente apenas de informações parciais da planta é proposta. Finalizando este capítulo, um novo método de projeto de controle robusto utilizando estrutura variável com incertezas politópicas na planta foi proposto. Estes resultados oferecem um método de projeto de controle robusto para casos nos quais os métodos de controle descritos em Deaecto et al. (2010) não podem ser diretamente aplicados. Os resultados da teoria desenvolvida neste capítulo são aplicados

no controle de conversores CC-CC de segunda ordem Buck, Boost e Buck-Boost e de quarta ordem, Sepic.

No Capítulo 6, com base na metodologia desenvolvida anteriormente no Capítulo 5, é proposto um novo método de projeto de controle para sistemas chaveados afins utilizando a concepção de controle adaptativo (EL BEID; DOUBABI; CHAOUI, 2007; WENJIN; DONGHUA, 2008; JEONG; KIM; SON, 2009; NG; LEUNG; TAM, 1996). A motivação é devido ao fato de que a estrutura de controle adaptativo proposta pode ser considerada mais eficiente do que a proposta no Capítulo 4 que utiliza estrutura variável, pois oferece uma estratégia de controle chaveado com frequência constante, permitindo uma implementação prática deste controlador no projeto dos conversores CC-CC.

O Capítulo 7 é uma conclusão geral desta tese. Vale ressaltar que as condições apresentadas nesta tese garantem a estabilidade inclusive na presença de possíveis modos deslizantes (FILIPPOV, 1988; UTKIN, 1978). Contudo, devemos ressaltar alguns aspectos que facilitam a leitura deste trabalho. Para matrizes ou vetores reais ($'$) indica o seu transposto. O conjunto composto pelos primeiros N inteiros positivos, ou seja, $\{1, \dots, N\}$ é denotado por \mathbb{K}_N . O conjunto de todos vetores $\lambda = [\lambda_1 \dots \lambda_N]'$ tais que $\lambda_i \geq 0$, $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ e $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_N = 1$ é denotado por Λ . A combinação convexa de um conjunto de matrizes $\{A_1, \dots, A_N\}$ é denotado por $A_\lambda = \sum_{i=1}^N \lambda_i A_i$, sendo λ pertencente ao conjunto Λ . O traço de uma matriz P é denotado por $Tr(P)$, \mathbb{R}_+ indica o conjunto de todos os números reais positivos e $sgn(\beta)$ denota a função sinal de β , a qual é igual a 1, 0 ou -1 se $\beta > 0$, $\beta = 0$, ou $\beta < 0$, respectivamente.

2 CONCEITOS FUNDAMENTAIS

O objetivo deste capítulo é apresentar alguns conceitos fundamentais que são utilizados no decorrer da tese. Inicialmente, é apresentado o critério de Lyapunov para o estudo da estabilidade de sistemas dinâmicos. Em seguida, é descrito o Teorema da Invariância, que generaliza o estudo da estabilidade de sistemas dinâmicos. Por fim, é apresentado um teorema que generaliza o Teorema da Invariância para a classe de sistemas chaveados.

2.1 Sistemas autônomos e não autônomos

Considere um sistema não linear representado por um conjunto de equações diferenciais não lineares:

$$\dot{x}(t) = f(x, t), \quad (1)$$

sendo $x(t) \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estado e $f(x, t) \in \mathbb{R}^n$ uma função não linear.

Definição 2.1. (SLOTINE; LI, 1991) *O sistema (1) é dito ser autônomo se $f(x, t)$ não depende explicitamente do tempo, ou seja, o sistema pode ser reescrito na seguinte forma*

$$\dot{x} = f(x), \quad (2)$$

para todo $t \geq 0$. Caso contrário, o sistema (1) é dito não autônomo.

2.2 Estabilidade segundo Lyapunov

Esta seção tem como objetivo apresentar o critério de estabilidade segundo Lyapunov.

Definição 2.2. (SLOTINE; LI, 1991) *O vetor de estado x_r é um ponto de equilíbrio do sistema (1), se $x(t) = x_r$ para algum $t = t_o \geq 0$ então $x(t) = x_r$ para $t \geq t_o$.*

Definição 2.3. (Estabilidade Assintótica Global) *O ponto de equilíbrio $x = x_r$ do sistema autônomo (2) é globalmente assintoticamente estável se:*

- *ele for estável;*
- *para toda condição inicial $x(t_0) \in \mathbb{R}^n$ então $x(t) \rightarrow x_r$ para $t \rightarrow \infty$.*

De acordo com Lyapunov, uma possibilidade para se estudar a estabilidade de um sistema é através da análise do comportamento de uma função $V(x(t))$, conhecida como função de Lyapunov, que pode ser interpretada como a distância entre a trajetória $x(t)$ e o ponto de equilíbrio $x = x_r$ (SLOTINE; LI, 1991). O teorema a seguir apresenta o critério de estabilidade segundo Lyapunov.

Teorema 1. (*Estabilidade Global*) (SLOTINE; LI, 1991) *Se existir uma candidata a função de Lyapunov $V(x)$, com derivada de primeira ordem contínua, tal que*

- $V(x)$ é positiva definida;
- $\dot{V}(x)$ é negativa definida;
- $V(x) \rightarrow 0$ quando $\|x\| \rightarrow \infty$,

então o ponto de equilíbrio $x = 0$ do sistema autônomo (2) é globalmente assintoticamente estável.

Entretanto, em alguns casos a derivada primeira da função de Lyapunov $\dot{V}(x)$ pode ser negativa semi-definida e desta forma o Teorema 1 (SLOTINE; LI, 1991) não pode ser diretamente aplicado para o estudo da estabilidade global assintótica do ponto de equilíbrio $x = 0$. Assim, é descrito o teorema do conjunto invariante (SLOTINE; LI, 1991), o qual apresenta uma análise sobre a estabilidade assintótica do sistema para casos em que $\dot{V}(x) \leq 0$.

Teorema 2. (SLOTINE; LI, 1991) *Considere o sistema autônomo (2), sendo $f(x)$ uma função contínua e seja $V(x)$ uma candidata à função de Lyapunov, com derivada de primeira ordem contínua. Suponha que*

- $V(x) \rightarrow \infty$ quando $\|x\| \rightarrow \infty$;
- $\dot{V}(x) \leq 0$ em todo o espaço de estado.

Seja \mathbf{R} o conjunto de todos pontos nos quais $\dot{V}(x) = 0$, e \mathbf{M} o maior conjunto invariante em \mathbf{R} . Então, todas as soluções convergem globalmente assintoticamente para \mathbf{M} quando $t \rightarrow \infty$.

Neste contexto, uma extensão dos resultados apresentados no Teorema 2, é descrita a seguir para a classe de sistemas chaveados contínuos no tempo.

2.3 Análise da estabilidade de sistemas chaveados

Considere o sistema chaveado descrito na seguinte forma:

$$\dot{x}(t) = f_{\sigma(t)}(x), \quad (3)$$

sendo $x(t) \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estado e $\sigma(t)$ a estratégia de chaveamento constante por partes que seleciona a cada instante de tempo $t \geq 0$ um índice no conjunto \mathbb{K}_N tal que $\{f_p : p \in \mathbb{K}_N\}$, sendo $f_p(0) = 0, p \in \mathbb{K}_N$.

Teorema 3. (HESPANHA, 2001) *Suponha que exista um conjunto de funções positivas definidas $\{V_p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, p \in \mathbb{K}_N\}$, continuamente diferenciáveis e radialmente ilimitadas, tal que*

$$L_{f_p}V_p(z) \leq W(z), \quad p \in \mathbb{K}_N, \quad z \in \mathbb{R}^n, \quad (4)$$

sendo $L_{f_p}V_p$ a derivada de Lie, para alguma função negativa definida $W : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e

$$V_{p_2}(x(t)) \leq V_{p_1}(x(t)), \quad (5)$$

para cada instante de tempo t , no qual $\sigma(t)$ comuta de p_1 para p_2 . Então, $W(z) < 0$ e o sistema chaveado (3) é globalmente assintoticamente estável.

Novamente, em alguns casos $L_{f_p}V_p(z) \leq W(z) \leq 0$ e desta forma o Teorema 3 não pode ser diretamente aplicado para a análise de estabilidade do sistema chaveado (3). Entretanto, em Hespanha (2001) é apresentada uma solução para este problema de controle. Este importante resultado é descrito na próxima seção.

2.4 Princípio da invariância para sistemas chaveados

Considere o sistema chaveado:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_{\sigma}x(t), \\ y(t) &= C_{\sigma}x(t) \end{aligned} \quad (6)$$

sendo $x \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estado, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ a saída de controle e $\sigma(t)$ a estratégia de chaveamento.

Teorema 4. (HESPANHA, 2001) *Suponha que exista um conjunto de matrizes simétricas positivas definidas $\{P_p : p \in \mathbb{K}_N\}$, tais que*

$$A_p'P_p + P_pA_p \leq -C_p'C_p, \quad (\leq 0) \quad p \in \mathbb{K}_N, \quad (7)$$

para um conjunto apropriado de matrizes $C_p \in \mathbb{R}^{m \times n}$, e $z'P_{p2}z \leq z'P_{p1}z$ para cada ponto z no espaço de estado no qual $\sigma(t)$ comuta instantaneamente de p_1 para p_2 . Então, (6) é uniformemente estável. Ademais, $x(t)$ convergirá para o menor subespaço \mathcal{M} que é A_p -invariante para todo $p \in \mathbb{K}_N$ e contém o subespaço não observável de todos os pares (C_p, A_p) , $p \in \mathbb{K}_N$.

3 SISTEMAS LINEARES CHAVEADOS

Neste capítulo são apresentados resultados que serão fundamentais no decorrer desta tese, como por exemplo, o estudo da estabilidade e a definição de alguns critérios de desempenho para sistemas lineares chaveados. Este capítulo é dividido em quatro seções, sendo que a primeira dá início ao tratamento do tema, apresentando a classe de sistemas lineares chaveados contínuos no tempo a ser estudada (GEROMEL; COLANERI, 2006). Na segunda seção, são descritas condições que asseguram a estabilidade quadrática de sistemas lineares chaveados (OTSUKA; SOGA, 2010; FERON, 1996), além de apresentar condições e uma estratégia de chaveamento (DEAECTO et al., 2010) que garantem a estabilidade do sistema. A terceira seção é dedicada ao estudo de sistemas lineares chaveados com acesso somente à saída da planta. Adicionalmente, nesta seção é proposto um novo método de projeto que apresenta condições suficientes sobre a estabilidade de sistemas lineares chaveados, com acesso somente a saída da planta. A quarta e última seção, apresenta uma extensão direta dos resultados propostos na Seção 3.3, para uma classe de sistemas lineares chaveados incertos. A fim de reduzir o conservadorismo das condições de projeto, novas condições suficientes, baseadas em LMIs, são propostas. A teoria apresentada é ilustrada através de exemplos numéricos.

3.1 Controle de sistemas lineares chaveados

Considere o sistema linear chaveado definido em sua realização na forma de variáveis de estado (GEROMEL; COLANERI, 2006):

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma}x(t), \quad x(0) = x_0, \quad (8)$$

$$y(t) = Cx(t), \quad (9)$$

sendo que $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ é a saída de controle, $\sigma(t)$ é a lei de chaveamento, x_0 é a condição inicial e $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ é a matriz de saída do sistema, constante para todo $t \geq 0$. Supondo um conjunto conhecido de matrizes $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, para $i = \{1, \dots, N\}$, então a regra de chaveamento $\sigma(t)$, é tal que

$$A_{\sigma(t)} \in \{A_1, A_2, \dots, A_N\}, \quad (10)$$

sendo que $A_{\sigma(t)}$ comuta instantaneamente de A_i para A_j com $i \neq j$, quando ocorre a comutação de $\sigma(t) = i$ para $\sigma(t) = j$. Desta forma, a matriz $A_{\sigma(t)}$ é comutada entre os N vértices do politopo $\{A_1, \dots, A_N\}$. Para maiores detalhes sobre sistemas lineares chaveados veja Geromel e Colaneri (2006), Lin e Antsaklis (2009), Liberzon (2003), Liberzon e Morse (1999).

3.2 Estabilidade quadrática de sistemas lineares chaveados

A estabilidade quadrática para sistemas lineares chaveados é um conceito teórico importante e muito utilizado pelos autores da comunidade científica. Assim, devido à sua importância e utilidade no decorrer deste trabalho, é apresentado a seguir, uma condição necessária e suficiente para o controle de sistemas lineares chaveados.

Definição 3.1. (OTSUKA; SOGA, 2010) *O sistema linear chaveado (8) - (10) é dito ser quadraticamente estabilizável, se e somente se existir uma candidata à função de Lyapunov da forma $V(x) = x'Px$, um escalar positivo $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, e uma estratégia de chaveamento $\sigma(x, t)$ tal que*

$$\dot{V}(x(t)) < -\varepsilon x'x, \quad (11)$$

para toda trajetória de $x(t)$ do sistema linear chaveado (8) - (10).

Uma extensão deste resultado, o qual apresenta uma condição necessária e suficiente para estabilidade quadrática de sistemas lineares chaveados, é descrita no teorema que segue.

Teorema 5. (FERON, 1996) *Considere $N = 2$. O sistema linear chaveado (8) e (9) é quadraticamente estabilizável se e somente se existir $\lambda \in \Lambda$ tal que $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2$ é assintoticamente estável.*

Demonstração. Veja Feron (1996). □

Com base nestes conceitos, suponha que o vetor de estado $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é disponível para realimentação, para $t \geq 0$. Então, o problema de controle proposto é descrito abaixo.

Problema 1. Determinar uma função $u(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow \{1, 2, \dots, N\}$ tal que

$$\sigma(t) = u(x(t)), \quad (12)$$

torne o ponto de equilíbrio $x = 0$ de (8) e (9) globalmente assintoticamente estável.

Observe que não foi suposta a estabilidade assintótica de cada matriz do conjunto (10). O teorema descrito a seguir aborda este problema, e também generaliza o Teorema 5 (FERON,

1996). Seja $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz simétrica positiva definida e considere por definição a seguinte função de Lyapunov quadrática:

$$V(x(t)) = x(t)'Px(t). \quad (13)$$

Teorema 6. (DEAECTO et al., 2010) Considere o sistema linear chaveado (8) - (10). Se existirem $\lambda \in \Lambda$ e uma matriz simétrica positiva definida $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tal que

$$A'_\lambda P + PA_\lambda < 0, \quad (14)$$

então a estratégia de chaveamento

$$\sigma(x) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}_N} (x'PA_i x), \quad (15)$$

torna a origem $x = 0$ do sistema linear chaveado (8) - (10) um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável.

Demonstração. Veja Deaecto et al. (2010) para detalhes. \square

A seguir, é apresentado a generalização deste resultado introduzindo um custo garantido para o projeto de $\sigma(t)$.

3.2.1 Custo garantido

Com o objetivo de inserir um custo garantido associado ao sistema linear chaveado (8) e (9) é proposto o Teorema 7 que generaliza o Teorema 6. O custo garantido que será abordado é o seguinte:

$$J = \int_0^\infty y(t)'y(t) dt = \int_0^\infty x(t)'C'Cx(t) dt. \quad (16)$$

Teorema 7. Considere o sistema linear chaveado (8) e (9). Se existirem $\lambda \in \Lambda$ e uma matriz simétrica positiva definida $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tal que

$$A'_\lambda P + PA_\lambda + C'C < 0, \quad (17)$$

então a estratégia de chaveamento

$$\sigma(x) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}_N} x'(C'C + 2PA_i)x, \quad (18)$$

torna a origem $x = 0$ do sistema linear chaveado (8) e (9) um ponto de equilíbrio globalmente

assintoticamente estável e admite o limitante superior

$$J = \int_0^{\infty} y(t)'y(t) dt < x_0'Px_0. \quad (19)$$

Demonstração. Da candidata a função quadrática de Lyapunov $V(x) = x'Px$ e sua derivada no tempo, tendo em vista (8) - (10), (17) e (18), têm-se para $x \neq 0$:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &= x'(PA_{\sigma} + A'_{\sigma}P)x \\ &= x'(PA_{\sigma} + A'_{\sigma}P + C'C)x - x'C'Cx \\ &= \min_{i \in \mathbb{K}_N} x'(A'_iP + PA_i + C'C)x - y'y \\ &\leq x'(A'_{\lambda}P + PA_{\lambda} + C'C)x - y'y \\ &< -y'y \leq 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Visto que $\dot{V}(x) < 0$ para todo $x \neq 0$ e $\dot{V}(0) = 0$, então $x = 0$ é um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável. Agora, integrando (20) de zero ao infinito e sabendo que $V(x)$ tende a zero quando $t \rightarrow \infty$, obtêm-se (19). A prova do Teorema 7 está concluída. \square

Então, o Teorema 7 proposto nos fornece o seguinte problema de otimização:

$$\inf_{P>0} \left\{ Tr(P) : A'_{\lambda}P + PA_{\lambda} + C'C < 0, \quad \lambda \in \Lambda \right\}. \quad (21)$$

3.2.2 Taxa de decaimento

De modo a garantir a estabilidade exponencial do sistema linear chaveado (8) e (9) propõe-se a inserção da taxa de decaimento (BOYD et al., 1994) no projeto. Um resultado importante sobre o assunto é mostrado através do lema que segue.

Lema 3.1. (BOYD et al., 1994) *Seja $V(x)$ a candidata a função de Lyapunov, positiva definida e $\gamma \in \mathbb{R}$ um escalar positivo. Então, a condição:*

$$\dot{V}(x(t)) \leq -2\gamma V(x(t)), \quad (22)$$

se satisfeita, para todo $x \neq 0$, garante que:

$$V(x(t)) \leq V(0)e^{-2\gamma t}, \quad \forall t > 0 \quad (23)$$

e o sistema linear chaveado (8) e (9) possui taxa de decaimento maior ou igual a γ .

Demonstração. Veja Boyd et al. (1994) para detalhes. \square

Note que a inserção da taxa de decaimento no projeto pode ocasionar um conflito com o custo garantido (19). Assim, é proposto o Teorema 8, que garante um custo garantido e uma taxa de decaimento maior ou igual a γ no projeto.

Teorema 8. *Considere o sistema linear chaveado (8) - (10) e um escalar $\gamma > 0$. Se existirem $\lambda \in \Lambda$ e uma matriz simétrica $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tais que*

$$P > (2\gamma)^{-1}C'C, \quad (24)$$

$$A'_\lambda P + PA_\lambda + 2\gamma P < 0, \quad (25)$$

então a estratégia de chaveamento (15), torna a origem $x = 0$ do sistema linear chaveado (8) - (10) um ponto de equilíbrio globalmente exponencialmente estável com uma taxa de decaimento maior ou igual a γ e de (19), o custo garantido $J < x'_0 P x_0$ mantém-se.

Demonstração. Considere (8)- (10), (24), (25), a lei de chaveamento (15) e a candidata a função quadrática de Lyapunov $V(x) = x'Px$. Então, para $x \neq 0$:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &= \dot{x}'Px + x'P\dot{x} = 2x'PA_\sigma x \\ &= \min_{i \in \mathbb{K}_N} (2x'PA_i x) = \min_{i \in \mathbb{K}_N} x'(A'_i P + PA_i)x \\ &\leq x'(A'_\lambda P + PA_\lambda)x < -x'(2\gamma P)x \\ &= -2\gamma V(x) < -y'y \leq 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Então, do Lema 3.1 o sistema linear chaveado (8) e (9) é globalmente exponencialmente estável com taxa de decaimento maior ou igual a γ . Agora, integrando (26) de zero ao infinito e sabendo que $V(x)$ tende a zero quando $t \rightarrow \infty$, obtêm-se (19). A prova do Teorema 8 está concluída. \square

Então, o Teorema 8 proposto nos fornece o seguinte problema de otimização:

$$\inf_{P > (2\gamma)^{-1}C'C} \left\{ \text{Tr}(P) : A'_\lambda P + PA_\lambda + 2\gamma P < 0, \quad \lambda \in \Lambda \right\}. \quad (27)$$

3.3 Sistemas lineares chaveados com acesso à saída

O projeto de sistemas de controle para a classe de sistemas lineares, com acesso somente à saída da planta, é de grande interesse em aplicações práticas e estudos teóricos. Assim, a proposta desta seção é estender os resultados propostos até o momento para uma classe de plantas chaveadas que disponibiliza apenas o vetor de saída $y(t) \in \mathbb{R}^p$ para realimentação. Primeiramente, é descrito o problema de controle no contexto de sistemas lineares chaveados e

em seguida é apresentado o projeto de uma nova lei de chaveamento dependente apenas da saída do sistema linear chaveado, que assegura a estabilidade assintótica. Índices de desempenho tais como, taxa de decaimento e minimização de um custo garantido são considerados a fim de tornar o procedimento de projeto mais geral. Finalizando esta seção, é investigado o problema de controle robusto de sistemas lineares chaveados contínuos no tempo, utilizando somente uma estratégia de chaveamento dependendo da saída da planta. Novas condições suficientes para o projeto de uma estratégia de chaveamento, baseadas em LMIs, são propostas e variáveis de relaxação são também introduzidas a fim de reduzir o conservadorismo do projeto. Como já foi mencionado neste trabalho, a técnica utilizada para estes estudo consiste da escolha de uma função de Lyapunov conveniente, como por exemplo a quadrática (FERON, 1996; ZHIJIAN; LONG; GUANGMING, 2005; SKAFIDAS et al., 1999). A análise de estabilidade foi reduzida a problemas descritos por LMIs (BOYD et al., 1994) que, quando factíveis, são facilmente resolvidas por meio de ferramentas disponíveis na literatura de programação convexa. Ao final de cada seção exemplos numéricos ilustram a teoria desenvolvida.

3.3.1 Controle de sistemas lineares chaveados com acesso à saída

Suponha que o vetor de estado $x(t) \in \mathbb{R}^n$ não é totalmente disponível para realimentação, para $t \geq 0$ e considere o sistema linear chaveado definido na sua realização na forma de variáveis de estado:

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma}x(t), \quad x(0) = x_0, \quad (28)$$

$$y(t) = Cx(t), \quad (29)$$

sendo que $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ é a saída de controle, $\sigma(t)$ é a lei de chaveamento, x_0 é a condição inicial e $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ é a matriz de saída do sistema, constante para todo $t \geq 0$ e $A_{\sigma(t)}, \sigma(t) \in \mathbb{K}_N$ como definida em (10).

Então, o problema de controle proposto é o seguinte:

Problema 2. Determinar uma função $u(\cdot) : \mathbb{R}^p \rightarrow \{1, 2, \dots, N\}$ tal que a lei de chaveamento

$$\sigma(t) = u(y(t)), \quad (30)$$

torne o ponto de equilíbrio $x = 0$ de (28) e (29) globalmente assintoticamente estável.

Observe, novamente, que não é considerada a estabilidade assintótica de cada subsistema, isto é, não foi suposto que cada matriz do conjunto $\{A_1, A_2, \dots, A_N\}$ possua todos autovalores com parte real negativa. Baseado nos Teoremas 5 e 6 é proposto o Teorema 9 a seguir, que

aborda este problema.

Teorema 9. *Considere o sistema linear chaveado (28) e (29). Se existirem $\lambda \in \Lambda$, matrizes simétricas $Q_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Q_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $i \in \mathbb{K}_N$ e uma matriz simétrica positiva definida $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tais que*

$$A_i'P + PA_i < Q_0 + C'Q_iC, \quad (31)$$

$$Q_0 + C'Q_\lambda C < 0, \quad (32)$$

para todo $i \in \mathbb{K}_N$, então a estratégia de chaveamento

$$\sigma(x) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}_N} (y'Q_iy), \quad (33)$$

torna a origem $x = 0$ do sistema linear chaveado (28) e (29) um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável.

Demonstração. Considerando a candidata a função quadrática de Lyapunov $V(x) = x'Px$ e de (31) e (32), têm-se para $x \neq 0$:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &= \dot{x}'Px + x'P\dot{x} = x'(PA_\sigma + A'_\sigma P)x \\ &< x'(Q_0 + C'Q_\sigma C)x \\ &= x'Q_0x + \min_{i \in \mathbb{K}_N} \{x'(C'Q_iC)x\} \\ &= x'Q_0x + \min_{i \in \mathbb{K}_N} (y'Q_iy) \\ &\leq x'(Q_0 + C'Q_\lambda C)x < 0. \end{aligned} \quad (34)$$

A prova do Teorema 9 está concluída. □

A seguir, é apresentado a generalização deste resultado introduzindo um custo garantido para o projeto de $\sigma(t)$.

3.3.2 Custo garantido

Com o objetivo de inserir um custo garantido associado ao sistema linear chaveado (28) e (29) é proposto o Teorema 10 que generaliza o Teorema 9.

Teorema 10. *Considere o sistema linear chaveado (28) e (29). Se existirem $\lambda \in \Lambda$, matrizes simétricas $Q_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Q_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $i \in \mathbb{K}_N$ e uma matriz simétrica positiva definida $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$,*

tais que

$$A_i'P + PA_i + C'C < Q_0 + C'Q_iC, \quad (35)$$

$$Q_0 + C'Q_\lambda C < 0, \quad (36)$$

para todo $i \in \mathbb{K}_N$, então a estratégia de chaveamento (33) torna a origem $x = 0$ do sistema linear chaveado (28) e (29) um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável e admite o limitante superior (19).

Demonstração. Da candidata a função quadrática de Lyapunov $V(x) = x'Px$ e sua derivada no tempo, tendo em vista (35) e (36), têm-se para $x \neq 0$:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &= x'(PA_\sigma + A_\sigma'P)x \\ &= x'(PA_\sigma + A_\sigma'P + C'C)x - x'C'Cx \\ &< x'(Q_0 + C'Q_\sigma C)x - y'y \\ &= x'Q_0x + \min_{i \in \mathbb{K}_N} (y'Q_iy) - y'y \\ &\leq x'(Q_0 + C'Q_\lambda C)x - y'y \\ &< -y'y \leq 0. \end{aligned} \quad (37)$$

Visto que $\dot{V}(x) < 0$ para todo $x \neq 0$ e $\dot{V}(0) = 0$, então $x = 0$ é um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável. Agora, integrando (37) de zero ao infinito e sabendo que $V(x)$ tende a zero quando $t \rightarrow \infty$, obtêm-se (19). A prova do Teorema 10 está concluída. \square

Então, o Teorema 10 proposto nos fornece o seguinte problema de otimização:

$$\inf_{P>0} \left\{ Tr(P) : A_i'P + PA_i + C'C < Q_0 + C'Q_iC, \quad Q_0 + C'Q_\lambda C < 0, \quad \lambda \in \Lambda \quad e \quad \forall i \in \mathbb{K}_N \right\}. \quad (38)$$

3.3.3 Taxa de decaimento

De modo a garantir a estabilidade exponencial do sistema linear chaveado (28) e (29) propõe-se a inserção da taxa de decaimento (BOYD et al., 1994) no projeto. Assim, é proposto o Teorema 11, que garante um custo garantido e a taxa de decaimento maior ou igual a γ no projeto.

Teorema 11. *Considere o sistema linear chaveado (28) e (29) e um escalar $\gamma > 0$. Se existirem $\lambda \in \Lambda$, matrizes simétricas $Q_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Q_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$, $i \in \mathbb{K}_N$ e uma matriz simétrica $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$,*

tais que

$$P > (2\gamma)^{-1}C'C, \quad (39)$$

$$A_i'P + PA_i + 2\gamma P < Q_0 + C'Q_iC, \quad (40)$$

$$Q_0 + C'Q_\lambda C < 0, \quad (41)$$

para todo $i \in \mathbb{K}_N$, então a estratégia de chaveamento (33), torna a origem $x = 0$ do sistema linear chaveado (28) e (29) um ponto de equilíbrio globalmente exponencialmente estável com uma taxa de decaimento maior ou igual a γ e de (19), o custo garantido $J < x_0'Px_0$ mantém-se.

Demonstração. Note que as condições (39)–(41) e $V(x) = x'Px$ implicam que, $\dot{V}(x) \leq -2\gamma V(x)$. Da hipótese (39), $2\gamma P > C'C$. Então,

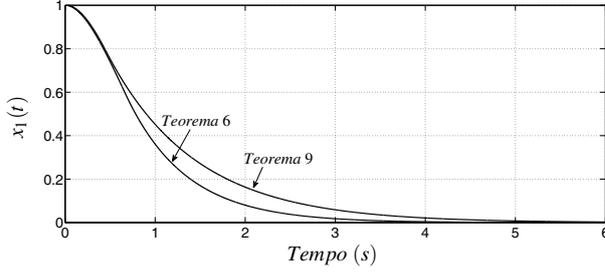
$$\dot{V}(x(t)) \leq -x'(2\gamma P)x < -x'C'Cx. \quad (42)$$

Logo, (42) prova que a origem do sistema linear chaveado (28) e (29) é globalmente exponencialmente estável com taxa de decaimento maior ou igual a γ e um custo garantido (19). A prova do Teorema 11 está concluída. \square

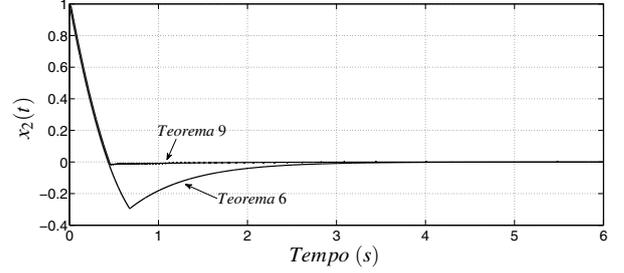
Então, o Teorema 11 proposto nos fornece o seguinte problema de otimização:

$$\inf_{P > (2\gamma)^{-1}C'C} \left\{ \text{Tr}(P) : A_i'P + PA_i + 2\gamma P < Q_0 + C'Q_iC, \right. \\ \left. Q_0 + C'Q_\lambda C < 0, \quad \lambda \in \Lambda \quad \text{e} \quad \forall i \in \mathbb{K}_N \right\}. \quad (43)$$

A seguir, dois exemplos são utilizados para ilustrar a eficiência do método de controle proposto nesse estudo, sendo que os resultados obtidos foram recentemente publicados em MAINARDI JÚNIOR et al. (2012a). No Exemplo 1 é mostrado que a lei de controle (33) proposta possibilitou a estabilização do sistema controlado e a minimização de um custo garantido quando as matrizes, dos subsistemas lineares, são Hurwitz. Já no Exemplo 2, os subsistemas são instáveis e verificou-se que o método de controle proposto também garante factibilidade, minimização de um custo garantido e um desempenho adequado. Os resultados foram obtidos utilizando o *software* MATLAB, por meio do *solver* LMILab.

Figura 1 - Trajetória do sinal $x_1(t)$ (Exemplo 01).

Fonte: elaboração do próprio autor

Figura 2 - Trajetória do sinal $x_2(t)$ (Exemplo 01).

Fonte: elaboração do próprio autor

3.3.4 Exemplo 1

Considere o sistema linear chaveado (28) e (29) com $i \in \{1, 2\}$. As matrizes da realização em variáveis de estado do sistema linear chaveado neste exemplo são as seguintes:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (44)$$

Note que A_1 e A_2 são Hurwitz. A matriz de saída do sistema linear chaveado é dada a seguir:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (45)$$

Para $\lambda_1 = \lambda_2 = 0,5$, a seguinte matriz foi fornecida como uma solução do Teorema 6:

$$P = \begin{bmatrix} 31,7620 & 4,7162 & -2,7951 \\ 4,7162 & 32,6004 & 11,6952 \\ -2,7951 & 11,6952 & 33,4373 \end{bmatrix}.$$

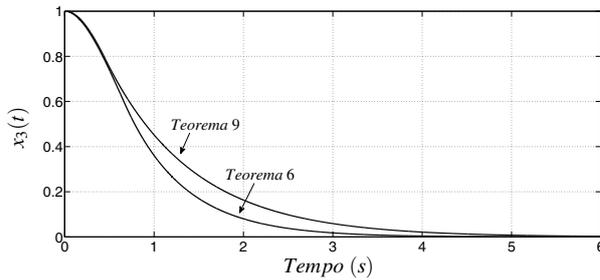
Agora, considerando os mesmos parâmetros definidos anteriormente, as seguintes matrizes foram fornecidas como uma solução do Teorema 9 proposto:

$$P = \begin{bmatrix} 57,0760 & 3,3141 & -15,4957 \\ 3,3141 & 32,8549 & 2,1824 \\ -15,4957 & 2,1824 & 42,0427 \end{bmatrix}, \quad Q_0 = 10^3 \times \begin{bmatrix} -0,0339 & 0,0077 & 0,0121 \\ 0,0077 & -0,0641 & 1,2822 \\ 0,0121 & 1,2822 & 2,1578 \end{bmatrix},$$

$$Q_1 = 10^3 \times \begin{bmatrix} 0,0186 & -1,2600 \\ -1,2600 & -2,1972 \end{bmatrix}, \quad Q_2 = 10^3 \times \begin{bmatrix} 0,0570 & -1,2785 \\ -1,2785 & -2,1979 \end{bmatrix}.$$

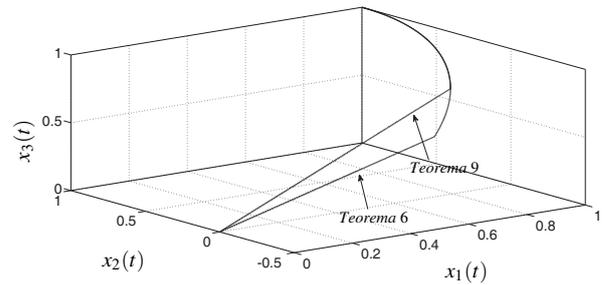
Resultados de simulação são ilustrados nas Figuras 1-4 para condição inicial $x_0 = [1 \ 1 \ 1]'$. Para

Figura 3 - Trajetória do sinal $x_3(t)$ (Exemplo 01).



Fonte: elaboração do próprio autor

Figura 4 - Retrato de fase (Exemplo 01).



Fonte: elaboração do próprio autor

o problema de otimização (21), Teorema 7, a seguinte matriz foi obtida como uma solução:

$$P = \begin{bmatrix} 0,0410 & -0,0818 & -0,0455 \\ -0,0818 & 0,4001 & 0,1818 \\ -0,0455 & 0,1818 & 0,5001 \end{bmatrix},$$

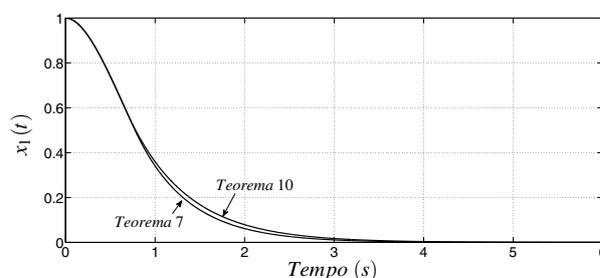
e de (19) o custo garantido $J < x_0' P x_0 = 1,05$. Do problema de otimização (38), Teorema 10, as matrizes obtidas como solução foram:

$$P = \begin{bmatrix} 0,7865 & -0,3922 & -0,2860 \\ -0,3922 & 0,6434 & 0,2855 \\ -0,2860 & 0,2855 & 0,5785 \end{bmatrix}, \quad Q_0 = 10^4 \times \begin{bmatrix} 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & -3,5013 & -9,9842 \\ 0,0000 & -9,9842 & 1,0215 \end{bmatrix},$$

$$Q_1 = 10^4 \times \begin{bmatrix} 3,5014 & 9,9842 \\ 9,9842 & -1,0215 \end{bmatrix}, \quad Q_2 = 10^4 \times \begin{bmatrix} 3,5013 & 9,9842 \\ 9,9842 & -1,0215 \end{bmatrix},$$

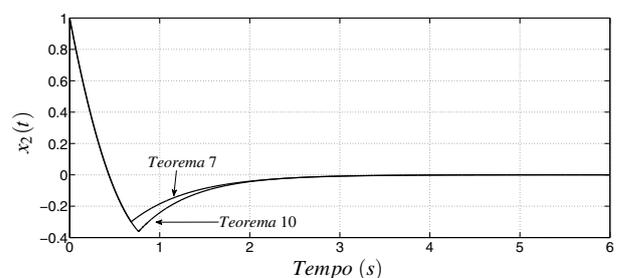
e de (19) o custo garantido $J < x_0' P x_0 = 1,22$. Os resultados de simulação, considerando agora um custo garantido no projeto, são ilustrados nas Figuras 5-8 para condição inicial $x_0 = [1 \ 1 \ 1]'$.

Figura 5 - Trajetória do sinal $x_1(t)$ (Exemplo 01).



Fonte: elaboração do próprio autor

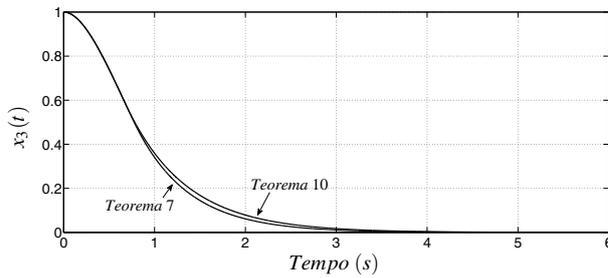
Figura 6 - Trajetória do sinal $x_2(t)$ (Exemplo 01).



Fonte: elaboração do próprio autor

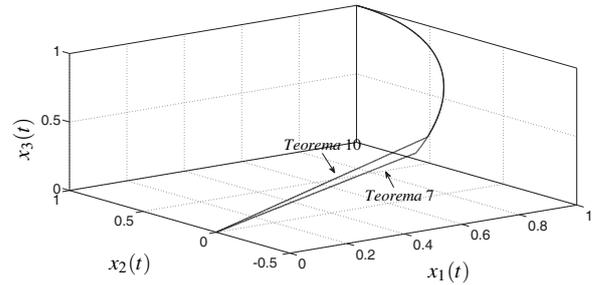
Agora, para os mesmos parâmetros de projeto e uma taxa de decaimento $\gamma = 0,7$, do pro-

Figura 7 - Trajetória do sinal $x_3(t)$ (Exemplo 01).



Fonte: elaboração do próprio autor

Figura 8 - Retrato de fase (Exemplo 01).



Fonte: elaboração do próprio autor

blema de otimização (27), Teorema 8, a seguinte matriz foi obtida como uma solução:

$$P = \begin{bmatrix} 0,2020 & -0,0503 & -0,0344 \\ -0,0503 & 0,7268 & 0,0085 \\ -0,0344 & 0,0085 & 0,7201 \end{bmatrix},$$

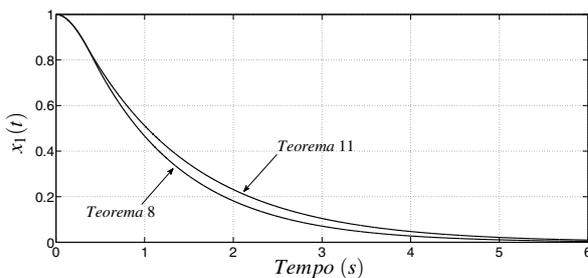
e de (19) o custo garantido $J < x_0' P x_0 = 1,49$. Entretanto, para o problema de otimização (43), Teorema 11, as matrizes solução obtidas foram:

$$P = \begin{bmatrix} 2,5542 & -0,3244 & -1,6104 \\ -0,3244 & 0,7722 & 0,1918 \\ -1,6104 & 0,1918 & 1,7394 \end{bmatrix}, \quad Q_0 = 10^5 \times \begin{bmatrix} 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 2,4582 & -0,2218 \\ 0,0000 & -0,2218 & 0,6176 \end{bmatrix},$$

$$Q_1 = 10^5 \times \begin{bmatrix} -2,4582 & 0,2218 \\ 0,2218 & -0,6176 \end{bmatrix}, \quad Q_2 = 10^5 \times \begin{bmatrix} -2,4582 & 0,2217 \\ 0,2217 & -0,6176 \end{bmatrix},$$

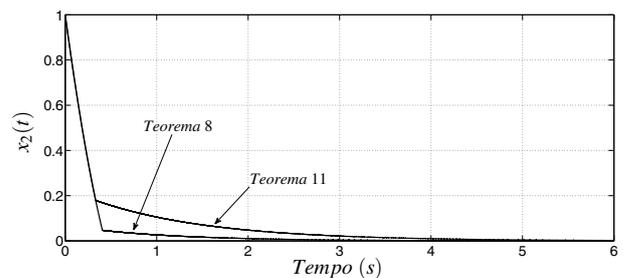
e de (19) o custo garantido $J < x_0' P x_0 = 1,58$. Resultados de simulação, considerando um custo garantido e uma taxa de decaimento no projeto, são ilustrados nas Figuras 9-12 para condição inicial $x_0 = [1 \ 1 \ 1]'$.

Figura 9 - Trajetória do sinal $x_1(t)$ (Exemplo 01).

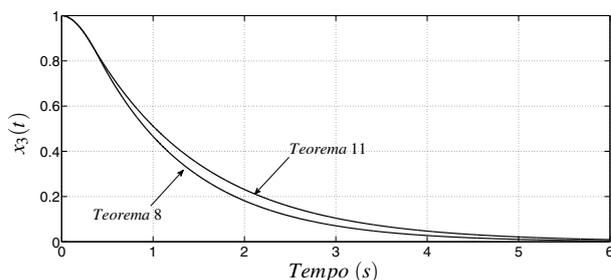


Fonte: elaboração do próprio autor

Figura 10 - Trajetória do sinal $x_2(t)$ (Exemplo 01).

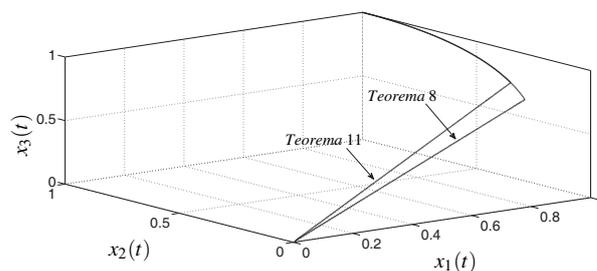


Fonte: elaboração do próprio autor

Figura 11 - Trajetória do sinal $x_3(t)$ (Exemplo 01).

Fonte: elaboração do próprio autor

Figura 12 - Retrato de fase (Exemplo 01).



Fonte: elaboração do próprio autor

A Tabela 1 apresenta os resultados obtidos para o exemplo proposto.

Tabela 1 - Resultados do Exemplo 1.

	$\gamma [s^{-1}]$	<i>Custo</i> (19)
Teorema 6	—	—
Teorema 7	—	1,05
Teorema 8	0,7	1,49
Teorema 9	—	—
Teorema 10	—	1,22
Teorema 11	0,7	1,58

Fonte: elaboração do próprio autor

Em vista dos resultados apresentados, observe que os Teoremas 7 e 8 apresentam um menor custo garantido quando comparados com os Teoremas 10 e 11 respectivamente, porém foi considerado nestes teoremas que o vetor de estado $x(t)$ é disponível para implementação na estratégia de controle. Nos Teoremas 9, 10 e 11 apenas a saída $y(t)$ foi suposta acessível para a estratégia de controle.

3.3.5 Exemplo 2

Considere o sistema linear chaveado (28) e (29) com as matrizes do sistema:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (46)$$

Note que os dois subsistemas são instáveis. A matriz de saída do sistema linear chaveado é dada a seguir:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (47)$$

Para $\lambda_1 = \lambda_2 = 0,5$, a seguinte matriz foi fornecida como solução do Teorema 6:

$$P = \begin{bmatrix} 53,8443 & -15,2294 & 4,9083 \\ -15,2294 & 36,8696 & 7,1620 \\ 4,9083 & 7,1620 & 30,6274 \end{bmatrix}.$$

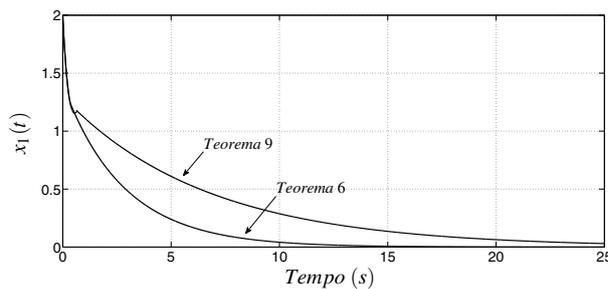
Agora, considerando os mesmos parâmetros definidos anteriormente as seguintes matrizes foram fornecidas como solução do Teorema 9 proposto:

$$P = \begin{bmatrix} 1,2839 & 1,0468 & -2,4760 \\ 1,0468 & 1,1653 & -1,6277 \\ -2,4760 & -1,6277 & 9,2004 \end{bmatrix}, \quad Q_0 = \begin{bmatrix} -301,7128 & -0,0891 & -253,8663 \\ -0,0891 & -0,0983 & 0,2700 \\ -253,8663 & 0,2700 & 171,0745 \end{bmatrix},$$

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 299,0702 & 263,1741 \\ 263,1741 & -186,5249 \end{bmatrix}, \quad Q_2 = \begin{bmatrix} 304,0742 & 245,3515 \\ 245,3515 & -158,3408 \end{bmatrix}.$$

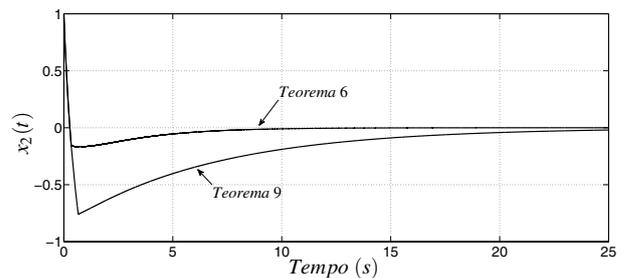
Resultados de simulação são ilustrados nas Figuras 13-16 para a condição inicial $x_0 = [2 \ 1 \ 0,5]'$.

Figura 13 - Trajetória do sinal $x_1(t)$ (Exemplo 02).



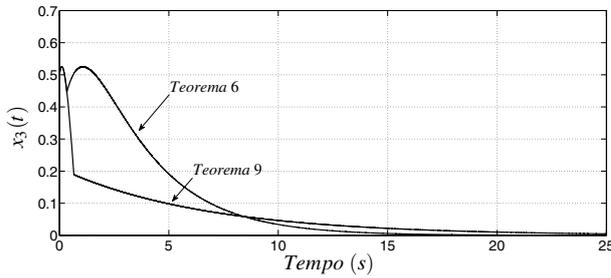
Fonte: elaboração do próprio autor

Figura 14 - Trajetória do sinal $x_2(t)$ (Exemplo 02).



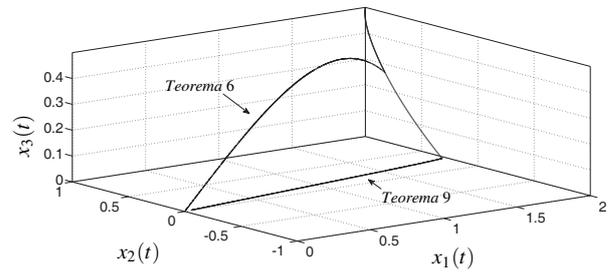
Fonte: elaboração do próprio autor

Figura 15 - Trajetória do sinal $x_3(t)$ (Exemplo 02).



Fonte: elaboração do próprio autor

Figura 16 - Retrato de fase (Exemplo 02).



Fonte: elaboração do próprio autor

Agora, considerando um custo garantido no projeto de controle, para o problema de otimização (21), Teorema 7, a seguinte matriz foi obtida como uma solução:

$$P = \begin{bmatrix} 1,7730 & -0,6364 & 0,1364 \\ -0,6364 & 0,3639 & 0,0909 \\ 0,1364 & 0,0909 & 0,5002 \end{bmatrix},$$

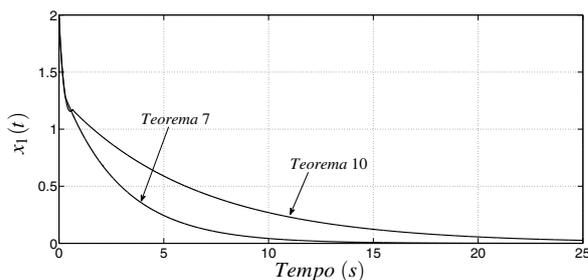
e de (19) o custo garantido $J < x_0' P x_0 = 5,39$. Posteriormente, para o problema de otimização (38), Teorema 10, as seguintes matrizes foram obtidas como solução:

$$P = \begin{bmatrix} 14,3244 & 10,3065 & -26,2473 \\ 10,3065 & 11,3424 & -17,7714 \\ -26,2473 & -17,7714 & 96,9277 \end{bmatrix}, \quad Q_0 = 10^4 \times \begin{bmatrix} 2,86 & 0,0000 & -0,0737 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0737 & 0,0000 & -0,2390 \end{bmatrix},$$

$$Q_1 = 10^4 \times \begin{bmatrix} -2,8651 & 0,0831 \\ 0,0831 & 0,2239 \end{bmatrix}, \quad Q_2 = 10^4 \times \begin{bmatrix} -2,8594 & 0,0642 \\ 0,0642 & 0,2541 \end{bmatrix},$$

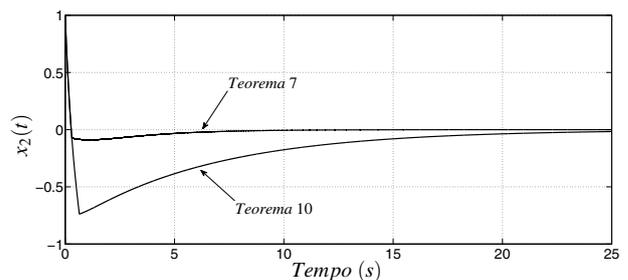
e de (19) o custo garantido $J < x_0' P x_0 = 63,8$. Resultados de simulação, considerando um custo garantido no projeto, são ilustrados nas Figuras 17-20 para condição inicial $x_0 = [2 \ 1 \ 0,5]'$.

Figura 17 - Trajetória do sinal $x_1(t)$ (Exemplo 02).

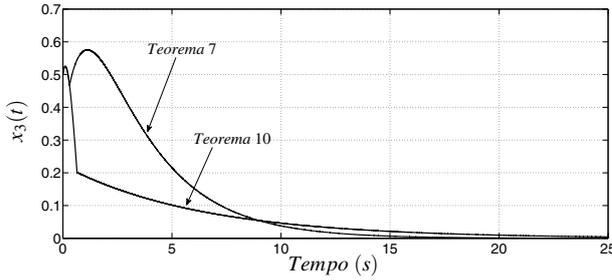


Fonte: elaboração do próprio autor

Figura 18 - Trajetória do sinal $x_2(t)$ (Exemplo 02).

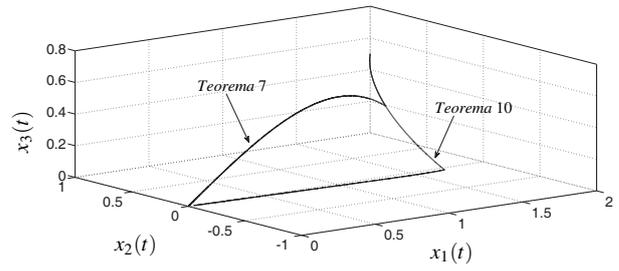


Fonte: elaboração do próprio autor

Figura 19 - Trajetória do sinal $x_3(t)$ (Exemplo 02).

Fonte: elaboração do próprio autor

Figura 20 - Retrato de fase (Exemplo 02).



Fonte: elaboração do próprio autor

Seguindo, considerando um custo garantido e uma taxa de decaimento $\gamma = 0,03$, do problema de otimização (27), Teorema 8, a seguinte matriz foi obtida como uma solução:

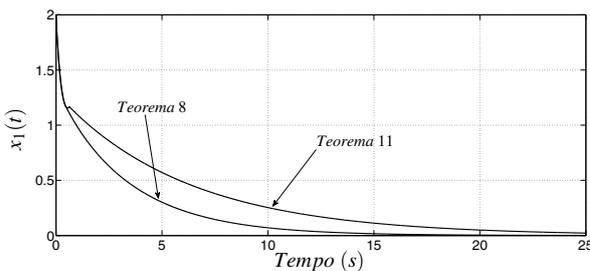
$$P = \begin{bmatrix} 16,6947 & -0,3059 & 0,0071 \\ -0,3059 & 3,4399 & -0,0793 \\ 0,0071 & -0,0793 & 16,6699 \end{bmatrix},$$

e de (19) o custo garantido $J < x_0' P x_0 = 73,09$. Entretanto, para o problema de otimização (43), Teorema 11, as matrizes obtidas como solução foram:

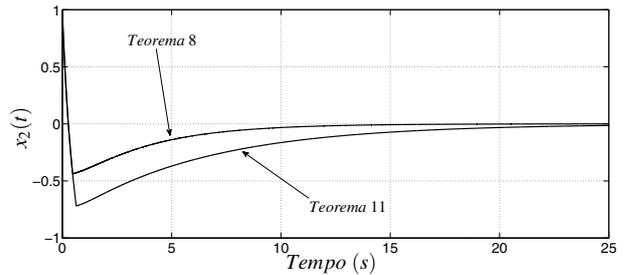
$$P = \begin{bmatrix} 60,5062 & 39,7884 & -112,0481 \\ 39,7884 & 45,2517 & -68,9278 \\ -112,0481 & -68,9278 & 420,5172 \end{bmatrix}, \quad Q_0 = 10^4 \times \begin{bmatrix} 1,2543 & 0,0000 & 0,9941 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,9941 & 0,0000 & 0,2865 \end{bmatrix},$$

$$Q_1 = 10^4 \times \begin{bmatrix} -1,2683 & -0,9486 \\ -0,9486 & -0,3624 \end{bmatrix}, \quad Q_2 = 10^4 \times \begin{bmatrix} -1,2402 & -1,0397 \\ -1,0397 & -0,2107 \end{bmatrix},$$

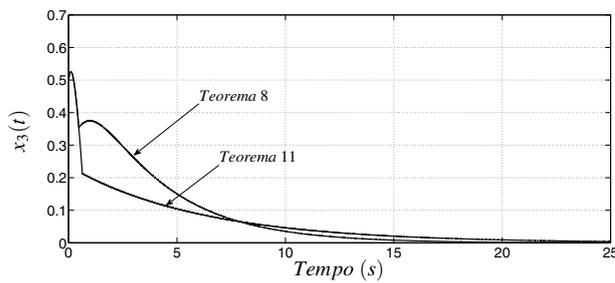
e de (19) o custo garantido $J < x_0' P x_0 = 258,5$. Resultados de simulação são ilustrados nas Figuras 21 - 24 para condição inicial $x_0 = [2 \ 1 \ 0,5]'$.

Figura 21 - Trajetória do sinal $x_1(t)$ (Exemplo 02).

Fonte: elaboração do próprio autor

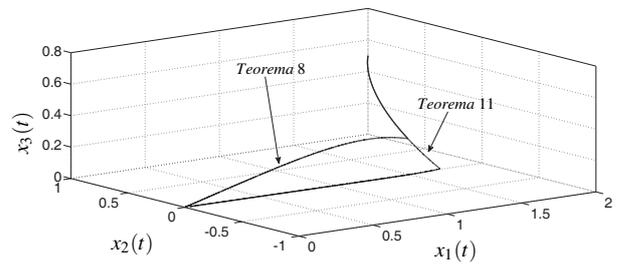
Figura 22 - Trajetória do sinal $x_2(t)$ (Exemplo 02).

Fonte: elaboração do próprio autor

Figura 23 - Trajetória do sinal $x_3(t)$ (Exemplo 02).

Fonte: elaboração do próprio autor

Figura 24 - Retrato de fase (Exemplo 02).



Fonte: elaboração do próprio autor

A Tabela 2 apresenta os resultados obtidos para o exemplo proposto.

Tabela 2 - Resultados do Exemplo 2.

	$\gamma [s^{-1}]$	Custo (19)
Teorema 6	—	—
Teorema 7	—	5,39
Teorema 8	0,03	73,09
Teorema 9	—	—
Teorema 10	—	63,8
Teorema 11	0,03	258,5

Fonte: elaboração do próprio autor

Novamente, observe que os Teoremas 7 e 8 apresentam um menor custo garantido quando comparados aos Teoremas 10 e 11, porém foi considerado que neles o vetor de estado $x(t)$ é disponível para implementação da estratégia de controle. Assim, as simulações indicam que a estratégia de controle estática (33), com acesso somente à saída da planta é eficaz para o controle de sistemas chaveados lineares.

3.4 Incertezas politópicas

Esta seção é dedicada a investigar o problema de controle robusto de sistemas lineares chaveados contínuos no tempo, utilizando somente uma estratégia de chaveamento dependendo da saída da planta. Desta forma, novas condições suficientes para o projeto de uma estratégia de chaveamento, baseadas em LMIs, são propostas. Variáveis de relaxação são também introduzidas a fim de reduzir o conservadorismo do projeto.

3.4.1 Projeto de uma estratégia robusta de chaveamento dependente apenas da saída da planta

Considere o sistema linear chaveado incerto contínuo no tempo definido pela seguinte realização no espaço de estados:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A(\alpha, \sigma)x(t), & x(0) = x_0 \\ y(t) = Cx(t), \end{cases} \quad (48)$$

sendo $x(t) \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estado, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ a saída com $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ uma matriz constante e x_0 a condição inicial. Na matriz $A(\alpha, \sigma)$ o vetor $\alpha = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_r]'$ representa as incertezas politópicas (ou falhas estruturais) da planta e $\sigma(t)$ é a estratégia de chaveamento. A matriz $A(\alpha, \sigma) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pode ser descrita pela combinação convexa dos seus vértices, como abaixo:

$$A(\alpha, \sigma) = \sum_{j=1}^r \alpha_j A_{\sigma_j}, \quad \sum_{j=1}^r \alpha_j = 1, \quad \alpha_j \geq 0, \quad \sigma(t) \in \mathbb{K}_N, \quad (49)$$

sendo α_j , $j \in \mathbb{K}_r$ constantes incertas e r o número de vértices das incertezas politópicas. Para maiores detalhes sobre incertezas politópicas, veja (BOYD et al., 1994; BERNUSSOU; PERES; GEROMEL, 1989). Agora, o problema de controle é o seguinte:

Problema 3. Considerando que $x(t) \in \mathbb{R}^n$ não está disponível mas $y(t) \in \mathbb{R}^p$ está disponível, determine uma estratégia de chaveamento $\sigma(t)$, para todo $t \geq 0$, que torne a origem $x = 0$ do sistema linear chaveado incerto (48) e (49) um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável.

Uma solução para este problema é proposta no próximo teorema.

Teorema 12. Considere o sistema linear chaveado incerto (48) e (49), e suponha que a saída $y(t) \in \mathbb{R}^p$ está disponível. Se existirem $\lambda \in \Lambda$, matrizes simétricas $Q_{0j} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Q_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$ e uma matriz simétrica positiva definida $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tais que

$$A'_{ij}P + PA_{ij} < Q_{0j} + C'Q_iC, \quad (50)$$

$$Q_{0j} + C'Q_\lambda C < 0, \quad (51)$$

para todo $i \in \mathbb{K}_N$ e $j \in \mathbb{K}_r$, então a estratégia de chaveamento (33), torna a origem $x = 0$ do sistema linear chaveado incerto (48) e (49) um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável.

Demonstração. Considerando a candidata a função quadrática de Lyapunov $V(x) = x'Px$, de

(33) e (48)–(51) tem-se para $x \neq 0$:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x(t)) &= x'(PA(\alpha, \sigma) + A'(\alpha, \sigma)P)x = \sum_{j=1}^r \alpha_j x'(PA_{\sigma_j} + A'_{\sigma_j}P)x \\
&< \sum_{j=1}^r \alpha_j x'(Q_{0j} + C'Q_{\sigma}C)x = \sum_{j=1}^r \alpha_j x'Q_{0j}x + \sum_{j=1}^r \alpha_j x'(C'Q_{\sigma}C)x \\
&= \sum_{j=1}^r \alpha_j x'Q_{0j}x + x'(C'Q_{\sigma}C)x = \sum_{j=1}^r \alpha_j x'Q_{0j}x + \min_{i \in \mathbb{K}_N} (y'Q_i y) \\
&\leq x' \left(\sum_{j=1}^r \alpha_j Q_{0j} + C'Q_{\lambda}C \right) x < 0.
\end{aligned} \tag{52}$$

A prova está concluída. \square

O próximo teorema proposto, também permite a minimização do limitante superior do custo quadrático definido em (19).

Teorema 13. *Considere o sistema linear chaveado incerto (48) e (49), e suponha que a saída $y(t) \in \mathbb{R}^p$ está disponível. Se existirem $\lambda \in \Lambda$, um escalar $\rho > 0$, matrizes simétricas $Q_{0j} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Q_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$ e uma matriz simétrica positiva definida $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tais que*

$$P - \rho I_n < 0, \tag{53}$$

$$A'_{ij}P + PA_{ij} + C'C < Q_{0j} + C'Q_iC, \tag{54}$$

$$Q_{0j} + C'Q_{\lambda}C < 0, \tag{55}$$

para todo $i \in \mathbb{K}_N$ e $j \in \mathbb{K}_r$, então a estratégia de chaveamento (33), torna a origem $x = 0$ do sistema linear chaveado incerto (48) e (49) um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável e o custo garantido

$$J = \int_0^{\infty} y'y \, dt < x'_0 P x_0 < \rho x'_0 x_0, \tag{56}$$

mantém-se, para $x(0) = x_0 \neq 0$.

Demonstração. Considere a candidata a função quadrática de Lyapunov $V(x) = x'Px$. Então, de (33), (48), (49), (54) e (55), tem-se para $x \neq 0$:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x(t)) &= x'(PA(\alpha, \sigma) + A'(\alpha, \sigma)P)x \\
&= \sum_{j=1}^r \alpha_j x'(PA_{\sigma_j} + A'_{\sigma_j}P + C'C)x - x'C'Cx \\
&< \sum_{j=1}^r \alpha_j x'(Q_{0j} + C'Q_{\sigma}C)x - y'y = \sum_{j=1}^r \alpha_j x'Q_{0j}x + \sum_{j=1}^r \alpha_j x'(C'Q_{\sigma}C)x - y'y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^r \alpha_j x' Q_{0j} x + x' (C' Q_{\sigma} C) x - y' y = \sum_{j=1}^r \alpha_j x' Q_{0j} x + \min_{i \in \mathbb{K}_N} (y' Q_i y) - y' y \\
&\leq x' \left(\sum_{j=1}^r \alpha_j Q_{0j} + C' Q_{\lambda} C \right) x - y' y < -y' y \leq 0.
\end{aligned} \tag{57}$$

Note que, de (57), $\dot{V}(x) < 0$ para $x \neq 0$. Agora, integrando (57) de zero ao infinito, considerando $x(0) = x_0 \neq 0$ e sabendo que $V(x(\infty)) = 0$, de (53) obtêm-se (56). A prova está concluída. \square

Então, o Teorema 13 proposto nos fornece o seguinte problema de otimização:

$$\inf_{P>0, \rho>0, Q_{0j}=Q'_{0j}, Q_i=Q'_i} \left\{ \rho : (53) - (55) \text{ mantém-se } \forall i \in \mathbb{K}_N \text{ e } j \in \mathbb{K}_r \right\}. \tag{58}$$

Observação 1. Note que removendo a LMI (53) e considerando $A_{ij} = A_i$ e $Q_{0j} = Q_0$ para todo $j \in \mathbb{K}_r$, então as condições dadas pelo Teorema 10 e Teorema 13 são equivalentes. Além do mais, observe que a prova do Teorema 13 segue da prova do Teorema 10.

Agora, a fim de relaxar a factibilidade das LMIs do Teorema 12 proposto, uma condição menos conservadora é proposta no Teorema 14, considerando que $\alpha = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_r]'$ definido em (49) é um vetor incerto mas constante.

Teorema 14. Considere o sistema linear chaveado incerto (48) e (49), e suponha que a saída $y(t) \in \mathbb{R}^p$ está disponível. Se existirem $\lambda \in \Lambda$, matrizes X_{1i} e $X_{2i} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes simétricas $Q_{0j} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Q_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$ e matrizes simétricas positivas definidas $P_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tais que

$$\begin{bmatrix} X_{1i} A_{ij} + A'_{ij} X'_{1i} & P_j - X_{1i} + A'_{ij} X'_{2i} \\ P_j - X'_{1i} + X_{2i} A_{ij} & -X_{2i} - X'_{2i} \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} Q_{0j} + C' Q_i C & 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & 0_{n \times n} \end{bmatrix}, \tag{59}$$

$$Q_{0j} + C' Q_{\lambda} C < 0, \tag{60}$$

para todo $i \in \mathbb{K}_N$ e $j \in \mathbb{K}_r$, então a estratégia de chaveamento (33) torna a origem $x = 0$ do sistema linear chaveado incerto (48) e (49) um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável.

Demonstração. Considere que (59) e (60) são factíveis. Assim, de (33) e (60), para $x \neq 0$ segue que:

$$0 > x' (Q_{0j} + C' Q_{\lambda} C) x \geq x' Q_{0j} x + \min_{i \in \mathbb{K}_N} (y' Q_i y) = x' (Q_{0j} + C' Q_{\sigma} C) x. \tag{61}$$

Observe que (61) pode ser reescrita como:

$$x'(\mathcal{Q}_{0j} + C'Q_{\sigma}C)x = x' \begin{bmatrix} I_n & A'(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{Q}_{0j} + C'Q_{\sigma}C & 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & 0_{n \times n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ A(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} x < 0. \quad (62)$$

Então, de (59) e (62) note que:

$$\begin{aligned} 0 &> x' \begin{bmatrix} I_n & A'(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{Q}_{0j} + C'Q_{\sigma}C & 0_n \\ 0_n & 0_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ A(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} x \\ &> x' \begin{bmatrix} I_n & A'(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{1\sigma}A_{\sigma j} + A'_{\sigma j}X'_{1\sigma} & P_j - X_{1\sigma} + A'_{\sigma j}X'_{2\sigma} \\ P_j - X'_{1\sigma} + X_{2\sigma}A_{\sigma j} & -X_{2\sigma} - X'_{2\sigma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ A(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} x. \end{aligned} \quad (63)$$

Agora, defina $P(\alpha) = (\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \dots + \alpha_r P_r)$. Então, de (49), multiplicando (63) por α_j e tomando o somatório de $j = 1$ até r , têm-se:

$$\begin{aligned} 0 &> x' \begin{bmatrix} I_n & A'(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^r \alpha_j (\mathcal{Q}_{0j} + C'Q_{\sigma}C) & 0_n \\ 0_n & 0_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ A(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} x \\ &> x' \begin{bmatrix} I_n & A'(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{1\sigma}A(\sigma, \alpha) + A'(\sigma, \alpha)X'_{1\sigma} \\ P(\alpha) - X'_{1\sigma} + X_{2\sigma}A(\sigma, \alpha) \\ P(\alpha) - X_{1\sigma} + A'(\sigma, \alpha)X'_{2\sigma} \\ -X_{2\sigma} - X'_{2\sigma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ A(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} x \\ &= x' \begin{bmatrix} I_n & A'(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & P(\alpha) \\ P(\alpha) & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_{1\sigma} \\ X_{2\sigma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A(\sigma, \alpha) & -I_n \end{bmatrix} \right. \\ &\quad \left. + \begin{bmatrix} A'(\sigma, \alpha) \\ -I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X'_{1\sigma} & X'_{2\sigma} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} I_n \\ A(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} x \\ &= x' \begin{bmatrix} I_n & A'(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & P(\alpha) \\ P(\alpha) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ A(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} x. \end{aligned} \quad (64)$$

Considerando a candidata a função de Lyapunov $V(x) = x'P(\alpha)x$, note que de (49), $V(x) > 0$ para $x \neq 0$ e de (48) e (64) têm-se que $\dot{V}(x) < 0$ para $x \neq 0$. A prova está concluída. \square

O teorema a seguir compara as condições dos Teoremas 12 e 14.

Teorema 15. *Se as condições dadas no Teorema 12 mantêm-se, então as condições dadas no Teorema 14 também mantêm-se.*

Demonstração. Suponha que as condições (50) e (51) do Teorema 12 mantêm-se. Então, de

(50) note que existe $P = P' > 0$ e uma pequena constante $\xi \in \mathbb{R}$, $\xi > 0$, tal que

$$A'_{ij}P + PA_{ij} - Q_{0j} - C'Q_iC + \frac{\xi}{2}A'_{ij}A_{ij} < 0. \quad (65)$$

Agora, usando o complemento de Schur (BOYD et al., 1994), então (65) é equivalente a

$$\begin{bmatrix} PA_{ij} + A'_{ij}P - Q_{0j} - C'Q_iC & \xi A'_{ij} \\ A_{ij}\xi & -2\xi I_n \end{bmatrix} < 0. \quad (66)$$

Observe que, para $P_j = P$, $X_{1i} = P$ e $X_{2i} = \xi I_n$, para todo $j \in \mathbb{K}_r$ e $i \in \mathbb{K}_N$, então a condição (59) é equivalente à condição (66). Assim, se (50) mantém-se então (59) mantém-se. Finalmente, note que (51) e (60) são condições equivalentes e a prova está concluída. \square

No teorema seguinte é proposta uma generalização do Teorema 14, introduzindo o custo garantido (19) no projeto.

Teorema 16. *Considere o sistema linear chaveado incerto (48) e (49), e suponha que a saída $y(t) \in \mathbb{R}^p$ está disponível. Se existirem $\lambda \in \Lambda$, um escalar $\rho > 0$, matrizes X_{1i} e $X_{2i} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes simétricas $Q_{0j} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Q_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$ e matrizes simétricas positivas definidas $P_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tais que*

$$P_j - \rho I_n < 0, \quad (67)$$

$$\begin{bmatrix} X_{1i}A_{ij} + A'_{ij}X'_{1i} + C'C & P_j - X_{1i} + A'_{ij}X'_{2i} \\ P_j - X'_{1i} + X_{2i}A_{ij} & -X_{2i} - X'_{2i} \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} Q_{0j} + C'Q_iC & 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & 0_{n \times n} \end{bmatrix}, \quad (68)$$

$$Q_{0j} + C'Q_\lambda C < 0, \quad (69)$$

para todo $i \in \mathbb{K}_N$ e $j \in \mathbb{K}_r$, então a estratégia de chaveamento (33) torna a origem $x = 0$ do sistema linear chaveado incerto (48) e (49) um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável e o custo garantido (56) mantém-se, para $x(0) = x_0 \neq 0$.

Demonstração. Considere que (67)–(69) são factíveis. Assim, de (33) e (69), para $x \neq 0$ têm-se que:

$$0 > x'(Q_{0j} + C'Q_\lambda C)x \geq x'Q_{0j}x + \min_{i \in \mathbb{K}_N} (y'Q_i y) = x'(Q_{0j} + C'Q_\sigma C)x. \quad (70)$$

Observe que (70) pode ser reescrita como:

$$x'(\mathcal{Q}_{0j} + C'Q_\sigma C)x = x' \begin{bmatrix} I_n & A'(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{Q}_{0j} + C'Q_\sigma C & 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & 0_{n \times n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ A(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} x < 0. \quad (71)$$

Então, de (68) e (71) note que:

$$\begin{aligned} 0 &> x' \begin{bmatrix} I_n & A'(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{Q}_{0j} + C'Q_\sigma C & 0_n \\ 0_n & 0_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ A(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} x \\ &> x' \begin{bmatrix} I_n & A'(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{1\sigma}A_{\sigma j} + A'_{\sigma j}X'_{1\sigma} + C'C & P_j - X_{1\sigma} + A'_{\sigma j}X'_{2\sigma} \\ P_j - X'_{1\sigma} + X_{2\sigma}A_{\sigma j} & -X_{2\sigma} - X'_{2\sigma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ A(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} x. \end{aligned} \quad (72)$$

Agora, multiplicando (72) por α_j e tomando a soma de $j = 1$ a $j = r$, então obtêm-se:

$$\begin{aligned} 0 &> x' \begin{bmatrix} I_n & A'(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^r \alpha_j (\mathcal{Q}_{0j} + C'Q_\sigma C) & 0_n \\ 0_n & 0_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ A(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} x \\ &> x' \begin{bmatrix} I_n & A'(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{1\sigma}A(\sigma, \alpha) + A'(\sigma, \alpha)X'_{1\sigma} + C'C & \\ P(\alpha) - X'_{1\sigma} + X_{2\sigma}A(\sigma, \alpha) & \\ P(\alpha) - X_{1\sigma} + A'(\sigma, \alpha)X'_{2\sigma} & \\ -X_{2\sigma} - X'_{2\sigma} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ A(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} x \\ &= x' \begin{bmatrix} I_n & A'(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} C'C & P(\alpha) \\ P(\alpha) & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_{1\sigma} \\ X_{2\sigma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A(\sigma, \alpha) & -I_n \end{bmatrix} \right. \\ &\quad \left. + \begin{bmatrix} A'(\sigma, \alpha) \\ -I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X'_{1\sigma} & X'_{2\sigma} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} I_n \\ A(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} x \\ &= x' \begin{bmatrix} I_n & A'(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C'C & P(\alpha) \\ P(\alpha) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ A(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} x \\ &= \dot{V}(x(t)) + y'y, \end{aligned} \quad (73)$$

sendo $P(\alpha) = (\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \dots + \alpha_r P_r)$, $V(x) = x'P(\alpha)x$ e $A(\sigma, \alpha)$ definidos em (49). Note que, de (49), $V(x) > 0$ para $x \neq 0$ e de (73), $\dot{V}(x) < 0$ para $x \neq 0$. Agora, integrando (73) de zero ao infinito, considerando que $x(0) = x_0 \neq 0$, sabendo que $V(x(\infty)) = 0$ e de (67) segue que:

$$J = \int_0^\infty y'y dt < x'_0 P(\alpha) x_0 \leq \max_{j \in \mathbb{K}_r} (x'_0 P_j x_0) < \rho x'_0 I_n x_0. \quad (74)$$

A prova está concluída. \square

Então, o Teorema 16 proposto nos fornece o seguinte problema de otimização:

$$\inf_{P>0, \rho>0, Q_{0j}=Q'_{0j}, Q_i=Q'_i, X_{1i}, X_{2i}} \left\{ \rho : (67)-(69) \text{ mantém-se } \forall i \in \mathbb{I}_N \text{ e } j \in \mathbb{I}_r \right\}. \quad (75)$$

Observação 2. Considerando as mesmas ideias da demonstração do Teorema 15, é possível concluir que se as condições do Teorema 13 mantém-se, então as condições do Teorema 16 também mantém-se.

Ademais, no próximo teorema são propostas condições menos conservadoras, considerando o conceito de sistemas chaveados e que $\alpha = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_r]'$ definido em (49) é um vetor incerto mas constante. Considere ainda $\{P_1, P_2, \dots, P_r\}$ um conjunto de matrizes simétricas positivas definidas e a função de Lyapunov quadrática $V(x) = x'P(\alpha)x$.

Teorema 17. Considere o sistema linear chaveado incerto (48) e (49), e suponha que a saída $y(t) \in \mathbb{R}^p$ está disponível. Se existirem $\lambda \in \Lambda$, matrizes simétricas $Q_{0j} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Q_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$ e matrizes simétricas positivas definidas $P_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tais que

$$\frac{1}{2}(A'_{ij}P_k + P_kA_{ij} + A'_{ik}P_j + P_jA_{ik}) < Q_{0j} + C'Q_iC, \quad k \leq j \quad (76)$$

$$Q_{0j} + C'Q_\lambda C < 0, \quad (77)$$

para todo $i \in \mathbb{I}_N$, $j \in \mathbb{I}_r$ e $k \in \mathbb{I}_r$, então a estratégia de chaveamento (33), torna a origem $x = 0$ do sistema linear chaveado incerto (48) e (49) um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável.

Demonstração. Considerando a candidata a função quadrática de Lyapunov:

$$V(x(t)) = \sum_{k=1}^r \alpha_k x'P_k x, \quad (78)$$

sendo $k = 1, 2, \dots, r$. De (33), (48) e (77) têm-se para $x \neq 0$:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x(t)) &= \sum_{k=1}^r \alpha_k (\dot{x}'P_k x + x'P_k \dot{x}) = \sum_{k=1}^r \alpha_k x'(P_k A(\alpha, \sigma) + A'(\alpha, \sigma)P_k)x \\ &= \sum_{k=1}^r \alpha_k \sum_{j=1}^r \alpha_j x'(P_k A_{\sigma j} + A'_{\sigma j}P_k)x \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^r \alpha_k \sum_{j=1}^r \alpha_j x'(P_k A_{\sigma j} + A'_{\sigma j}P_k + P_j A_{\sigma k} + A'_{\sigma k}P_j)x \quad k \leq j \\ &< \sum_{k=1}^r \alpha_k \sum_{j=1}^r \alpha_j x'(Q_{0j} + C'Q_\sigma C)x = \sum_{j=1}^r \alpha_j x'(Q_{0j} + C'Q_\sigma C)x \\ &= \sum_{j=1}^r \alpha_j x'Q_{0j}x + \sum_{j=1}^r \alpha_j x'(C'Q_\sigma C)x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^r \alpha_j x' Q_{0j} x + x' (C' Q_{\sigma} C) x = \sum_{j=1}^r \alpha_j x' Q_{0j} x + \min_{i \in \mathbb{K}_N} (y' Q_i y) \\
&\leq x' \left(\sum_{j=1}^r \alpha_j Q_{0j} + C' Q_{\lambda} C \right) x < 0.
\end{aligned} \tag{79}$$

A prova está concluída. \square

O próximo teorema proposto, também permite a minimização do limitante superior do custo quadrático definido em (19).

Teorema 18. *Considere o sistema linear chaveado incerto (48) e (49), e suponha que a saída $y(t) \in \mathbb{R}^p$ está disponível. Se existirem $\lambda \in \Lambda$, um escalar $\rho > 0$, matrizes simétricas $Q_{0j} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Q_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$ e matrizes simétricas positivas definidas $P_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tais que*

$$P_k - \rho I_n < 0, \quad k \leq j \tag{80}$$

$$\frac{1}{2} (A'_{ij} P_k + P_k A_{ij} + A'_{ik} P_j + P_j A_{ik}) + C' C < Q_{0j} + C' Q_i C, \quad k \leq j \tag{81}$$

$$Q_{0j} + C' Q_{\lambda} C < 0, \tag{82}$$

para todo $i \in \mathbb{K}_N$, $j \in \mathbb{K}_r$ e $k \in \mathbb{K}_r$, então a estratégia de chaveamento (33), torna a origem $x = 0$ do sistema linear chaveado incerto (48) e (49) um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável e o custo garantido (56) mantém-se, para $x(0) = x_0 \neq 0$.

Demonstração. Considere a candidata a função quadrática de Lyapunov (78). Então, de (33), (48), (49), (81) e (82), têm-se para $x \neq 0$:

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x(t)) &= \sum_{k=1}^r \alpha_k (x' P_k \dot{x} + \dot{x}' P_k x) = \sum_{k=1}^r \alpha_k x' (P_k A(\alpha, \sigma) + A'(\alpha, \sigma) P_k) x \\
&= \sum_{k=1}^r \alpha_k \sum_{j=1}^r \alpha_j x' (P_k A_{\sigma j} + A'_{\sigma j} P_k + C' C) x - x' C' C x \\
&= \sum_{k=1}^r \alpha_k \sum_{j=1}^r \alpha_j x' \left(\frac{1}{2} (P_k A_{\sigma j} + A'_{\sigma j} P_k + P_j A_{\sigma k} + A'_{\sigma k} P_j) + C' C \right) x - y' y \quad k \leq j \\
&< \sum_{k=1}^r \alpha_k \sum_{j=1}^r \alpha_j x' (Q_{0j} + C' Q_{\sigma} C) x - y' y = \sum_{j=1}^r \alpha_j x' (Q_{0j} + C' Q_{\sigma} C) x - y' y \\
&= \sum_{j=1}^r \alpha_j x' Q_{0j} x + \sum_{j=1}^r \alpha_j x' (C' Q_{\sigma} C) x - y' y \\
&= \sum_{j=1}^r \alpha_j x' Q_{0j} x + x' (C' Q_{\sigma} C) x - y' y = \sum_{j=1}^r \alpha_j x' Q_{0j} x + \min_{i \in \mathbb{K}_N} (y' Q_i y) - y' y \\
&\leq x' \left(\sum_{j=1}^r \alpha_j Q_{0j} + C' Q_{\lambda} C \right) x - y' y < -y' y \leq 0.
\end{aligned} \tag{83}$$

Note que, de (83), $\dot{V}(x) < 0$ para $x \neq 0$. Agora, integrando (83) de zero ao infinito, considerando $x(0) = x_0 \neq 0$ e sabendo que $V(x(\infty)) = 0$, de (80) obtêm-se (56). A prova está concluída. \square

Então, o Teorema 18 proposto nos fornece o seguinte problema de otimização:

$$\inf_{P_k > 0, \rho > 0, Q_{0j} = Q'_{0j}, Q_i = Q'_i} \left\{ \rho : \text{(80)–(82) mantêm-se } \forall i \in \mathbb{I}_{\mathbb{K}_N} \quad j \in \mathbb{I}_{\mathbb{K}_r} \quad \text{e } k \in \mathbb{I}_{\mathbb{K}_r} \right\}. \quad (84)$$

Observação 3. Note que, o Teorema 13 é um caso particular do Teorema 18, pois considerando $A_{ik} = A_{ij}$ e $P_k = P_j = P$ para todo $j \in \mathbb{I}_{\mathbb{K}_r}$ e $k \in \mathbb{I}_{\mathbb{K}_r}$, então as condições dadas pelo Teorema 13 e Teorema 18 são equivalentes. Portanto, se o Teorema 13 for factível, o Teorema 18 também será.

Agora, a fim de generalizar as condições apresentadas pelo Teorema 14, é proposto o Teorema 19 que propõe novas condições de estabilidade, baseada em uma função de Lyapunov quadrática $V(x) = x'P(\alpha)x$, com $P(\alpha) = (\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \dots + \alpha_r P_r)$. Estas novas condições diminuem o conservadorismo dos sistemas, de modo a obter maiores regiões de factibilidade, pois como mostrado no Teorema 14, a inserção de novas variáveis de folga nas LMIs tornam o sistema menos restritivo.

Teorema 19. Considere o sistema linear chaveado incerto (48) e (49), e suponha que a saída $y(t) \in \mathbb{R}^p$ está disponível. Se existirem $\lambda \in \Lambda$, matrizes X_{1ij} e $X_{2ij} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes simétricas $Q_{0j} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Q_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$ e matrizes simétricas positivas definidas $P_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tais que

$$\begin{bmatrix} X_{1ij}A_{ij} + A'_{ij}X'_{1ij} & P_j - X_{1ij} + A'_{ij}X'_{2ij} \\ P_j - X'_{1ij} + X_{2ij}A_{ij} & -X_{2ij} - X'_{2ij} \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} Q_{0j} + C'Q_iC & 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & 0_{n \times n} \end{bmatrix}, \quad (85)$$

$$Q_{0j} + C'Q_\lambda C < 0, \quad (86)$$

para todo $i \in \mathbb{I}_{\mathbb{K}_N}$ e $j \in \mathbb{I}_{\mathbb{K}_r}$, então a estratégia de chaveamento (33) torna a origem $x = 0$ do sistema linear chaveado incerto (48) e (49) um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável.

Demonstração. Considere que (85) e (86) são factíveis. Assim, de (33) e (86), para $x \neq 0$ segue que:

$$0 > x'(Q_{0j} + C'Q_\lambda C)x \geq x'Q_{0j}x + \min_{i \in \mathbb{I}_{\mathbb{K}_N}} (y'Q_i y) = x'(Q_{0j} + C'Q_\sigma C)x. \quad (87)$$

Observe que (87) pode ser reescrita como:

$$x'(Q_{0j} + C'Q_{\sigma}C)x = x' \begin{bmatrix} I_n & A'(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{0j} + C'Q_{\sigma}C & 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & 0_{n \times n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ A(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} x < 0. \quad (88)$$

Então, de (85) e (88) note que:

$$\begin{aligned} 0 &> x' \begin{bmatrix} I_n & A'(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{0j} + C'Q_{\sigma}C & 0_n \\ 0_n & 0_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ A(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} x \\ &> x' \begin{bmatrix} I_n & A'(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{1\sigma j}A_{\sigma j} + A'_{\sigma j}X'_{1\sigma j} & P_j - X_{1\sigma j} + A'_{\sigma j}X'_{2\sigma j} \\ P_j - X'_{1\sigma j} + X_{2\sigma j}A_{\sigma j} & -X_{2\sigma j} - X'_{2\sigma j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ A(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} x. \end{aligned} \quad (89)$$

Agora, defina $P(\alpha) = (\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \dots + \alpha_r P_r)$. Então, de (49), multiplicando (89) por α_j e tomando o somatório de $j = 1$ até r , têm-se:

$$\begin{aligned} 0 &> x' \begin{bmatrix} I_n & A'(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^r \alpha_j (Q_{0j} + C'Q_{\sigma}C) & 0_n \\ 0_n & 0_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ A(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} x \\ &> x' \begin{bmatrix} I_n & A'(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{1\sigma j}A(\sigma, \alpha) + A'(\sigma, \alpha)X'_{1\sigma j} \\ P(\alpha) - X'_{1\sigma j} + X_{2\sigma j}A(\sigma, \alpha) \\ P(\alpha) - X_{1\sigma j} + A'(\sigma, \alpha)X'_{2\sigma j} \\ -X_{2\sigma j} - X'_{2\sigma j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ A(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} x \\ &= x' \begin{bmatrix} I_n & A'(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & P(\alpha) \\ P(\alpha) & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_{1\sigma j} \\ X_{2\sigma j} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A(\sigma, \alpha) & -I_n \end{bmatrix} \right. \\ &\quad \left. + \begin{bmatrix} A'(\sigma, \alpha) \\ -I_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X'_{1\sigma j} & X'_{2\sigma j} \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} I_n \\ A(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} x \\ &= x' \begin{bmatrix} I_n & A'(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & P(\alpha) \\ P(\alpha) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ A(\sigma, \alpha) \end{bmatrix} x. \end{aligned} \quad (90)$$

Considerando a candidata a função de Lyapunov $V(x) = x'P(\alpha)x$, note que de (49), $V(x) > 0$ para $x \neq 0$ e de (48) e (90) têm-se que $\dot{V}(x) < 0$ para $x \neq 0$. A prova está concluída. \square

O teorema seguinte compara as condições dos Teoremas 14 e 19.

Teorema 20. *Se as condições dadas no Teorema 14 mantêm-se, então as condições dadas no Teorema 19 também mantêm-se.*

Demonstração. Observe que, para $X_{1ij} = X_{1i}$ e $X_{2ij} = X_{2i}$, para todo $j \in \mathbb{K}_r$ e $i \in \mathbb{K}_N$, então a condição (85) é equivalente a condição (59). Assim, se (59) mantêm-se então (85) mantêm-se.

Finalmente, note que (60) e (86) são condições equivalentes e a prova está concluída. \square

No teorema seguinte é proposto uma generalização do Teorema 19, introduzindo o custo garantido (19) no projeto.

Teorema 21. *Considere o sistema linear chaveado incerto (48) e (49), e suponha que a saída $y(t) \in \mathbb{R}^p$ está disponível. Se existirem $\lambda \in \Lambda$, um escalar $\rho > 0$, matrizes X_{1ij} e $X_{2ij} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, matrizes simétricas $Q_{0j} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $Q_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$ e matrizes simétricas positivas definidas $P_j \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tais que*

$$P_j - \rho I_n < 0, \quad (91)$$

$$\begin{bmatrix} X_{1ij}A_{ij} + A'_{ij}X'_{1ij} + C'C & P_j - X_{1ij} + A'_{ij}X'_{2ij} \\ P_j - X'_{1ij} + X_{2ij}A_{ij} & -X_{2ij} - X'_{2ij} \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} Q_{0j} + C'Q_iC & 0_{n \times n} \\ 0_{n \times n} & 0_{n \times n} \end{bmatrix}, \quad (92)$$

$$Q_{0j} + C'Q_iC < 0, \quad (93)$$

para todo $i \in \mathbb{K}_N$ e $j \in \mathbb{K}_r$, então a estratégia de chaveamento (33) torna a origem $x = 0$ do sistema linear chaveado incerto (48) e (49) um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável e o custo garantido (56) mantém-se, para $x(0) = x_0 \neq 0$.

Demonstração. Considerando as mesmas ideias da demonstração do Teorema 16, é possível concluir que $\dot{V}(x) < 0$ para $x \neq 0$ (veja a prova do Teorema 16 para detalhes). A prova está concluída. \square

Então, o Teorema 21 proposto nos fornece o seguinte problema de otimização:

$$\inf_{P>0, \rho>0, Q_{0j}=Q'_{0j}, Q_i=Q'_i, X_{1ij}, X_{2ij}} \left\{ \rho : (91)-(93) \text{ mantém-se } \forall i \in \mathbb{K}_N \text{ e } j \in \mathbb{K}_r \right\}. \quad (94)$$

A seguir dois exemplos serão utilizados para ilustrar a eficácia do método de controle proposto. O Exemplo 3 compara as condições propostas pelos Teoremas 13, 16, 18 e 21, demonstrando que as condições propostas pelo Teorema 21 asseguram um custo garantido menor ou igual aos obtidos pelos teorema anteriores, além de apresentar um desempenho adequado quando as matrizes dos subsistemas são instáveis. O Exemplo 4 demonstra que o Teorema 19 proposto, quando factível, assegura factibilidade em situações em que as condições propostas pelos Teoremas 12, 14 e 17 não são factíveis. Os resultados de simulação são apresentados a seguir. O *solver* utilizado neste projeto foi o LMILab, do *software* MATLAB, interfaceado pelo toolbox YALMIP (LOFBERG, 2004).

3.4.2 Exemplo 3

Considere o sistema linear chaveado incerto (48) e (49), com $i \in \{1, 2\}$ e matrizes dadas por:

$$A_1(a) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_2(b) = \begin{bmatrix} -1 & b & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (95)$$

tal que os parâmetros incertos a e b estão contidos nos seguintes intervalos:

$$-3 \leq a \leq -1, \quad -1,5 \leq b \leq -0,5. \quad (96)$$

Então, note que $a_{max} = -1$, $a_{min} = -3$, $b_{max} = -0,5$, $b_{min} = -1,5$ e o sistema (48), (49), (95) e (96) pode ser representado pelas seguintes matrizes:

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} -1 & -1,5 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_{22} = \begin{bmatrix} -1 & -0,5 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (97)$$

Neste exemplo, adote $\lambda_1 = \lambda_2 = 0,5$. Do problema de minimização (58), correspondente ao Teorema 13, uma solução obtida foi $\rho = 1,51 \times 10^3$ e as seguintes matrizes:

$$P = 10^3 \times \begin{bmatrix} 0,1923 & 0,1337 & -0,3451 \\ 0,1337 & 0,1649 & -0,2589 \\ -0,3451 & -0,2589 & 1,3609 \end{bmatrix},$$

$$Q_{01} = 10^4 \times \begin{bmatrix} -1,4950 & 0,0000 & -1,2899 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ -1,2899 & 0,0000 & 0,8045 \end{bmatrix}, \quad Q_{02} = 10^4 \times \begin{bmatrix} -1,4981 & 0,0003 & -1,2848 \\ 0,0003 & 0,0000 & -0,0005 \\ -1,2848 & 0,0005 & 0,7965 \end{bmatrix},$$

$$Q_1 = 10^4 \times \begin{bmatrix} 1,4655 & 1,4054 \\ 1,4054 & -0,9938 \end{bmatrix}, \quad Q_2 = 10^4 \times \begin{bmatrix} 1,5244 & 1,1745 \\ 1,1745 & -0,6161 \end{bmatrix}.$$

Então, para uma condição inicial $x(0) = x_0 = [2 \ 1 \ 1]'$, de (56) observe que o custo garantido $J < x_0'Px_0 < 9,09 \times 10^3$. Agora, considerando os mesmos parâmetros de projeto definidos anteriormente, do problema de minimização (75) relacionado ao Teorema 16, uma solução obtida foi $\rho = 71,28$ e:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 11,9712 & 5,4943 & -10,9932 \\ 5,4943 & 8,4575 & -14,3422 \\ -10,9932 & -14,3422 & 65,4463 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 8,6764 & 7,5709 & -14,2067 \\ 7,5709 & 8,4879 & -11,9801 \\ -14,2067 & -11,9801 & 65,0072 \end{bmatrix},$$

$$Q_{01} = 10^5 \times \begin{bmatrix} -0,0229 & 0,0000 & -1,7234 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ -1,7234 & 0,0000 & 0,1285 \end{bmatrix}, Q_{02} = 10^5 \times \begin{bmatrix} -0,0229 & 0,0000 & -1,7234 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ -1,7234 & 0,0000 & 0,1285 \end{bmatrix},$$

$$Q_1 = 10^5 \times \begin{bmatrix} 0,0228 & 1,7239 \\ 1,7239 & -0,1292 \end{bmatrix}, Q_2 = 10^5 \times \begin{bmatrix} 0,0230 & 1,7229 \\ 1,7229 & -0,1278 \end{bmatrix}.$$

Então, de (56) note que o custo garantido $J < x_0'Px_0 < 427,63$.

Seguindo, para o problema de problema de minimização (84) relacionado ao Teorema 18, uma solução obtida foi $\rho = 66,48$ e:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 12,4058 & 5,3614 & -10,6634 \\ 5,3614 & 8,9003 & -14,7286 \\ -10,6634 & -14,7286 & 60,0062 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 7,2054 & 6,2259 & -12,6873 \\ 6,2259 & 6,6960 & -9,6798 \\ -12,6873 & -9,6798 & 56,7430 \end{bmatrix},$$

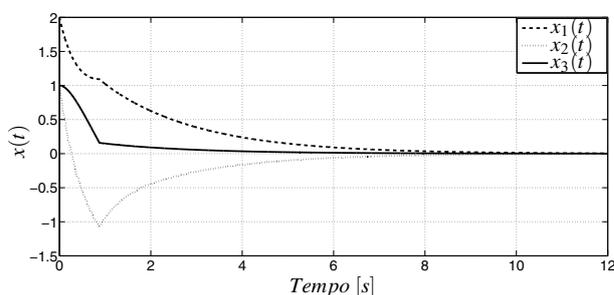
$$Q_{01} = 10^4 \times \begin{bmatrix} -9,9139 & 0,0000 & 6,4842 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 6,4842 & 0,0000 & -5,0390 \end{bmatrix}, Q_{02} = 10^4 \times \begin{bmatrix} -9,9140 & 0,0000 & 6,4843 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 6,4843 & 0,0000 & -5,0391 \end{bmatrix},$$

$$Q_1 = 10^4 \times \begin{bmatrix} 9,9132 & -6,4797 \\ -6,4797 & 5,0325 \end{bmatrix}, Q_2 = 10^4 \times \begin{bmatrix} 9,9147 & -6,4887 \\ -6,4887 & 5,0454 \end{bmatrix}.$$

Então, de (56) note que o custo garantido $J < x_0'Px_0 < 398,88$. Finalmente, para o problema de minimização (94) relacionado ao Teorema 21, uma solução obtida foi $\rho = 58$ e:

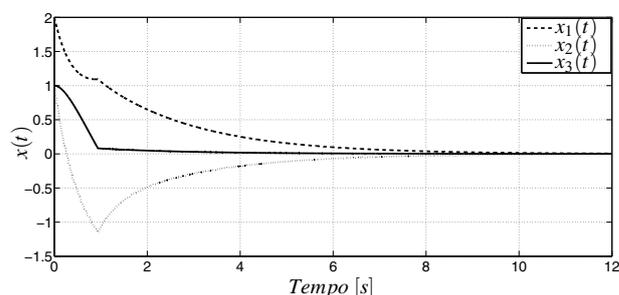
$$P_1 = \begin{bmatrix} 11,0438 & 3,6925 & -8,2321 \\ 3,6925 & 7,0025 & -12,1781 \\ -8,2321 & -12,1781 & 53,3105 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 6,8547 & 5,9044 & -11,8586 \\ 5,9044 & 6,2448 & -8,7636 \\ -11,8586 & -8,7636 & 53,2418 \end{bmatrix},$$

Figura 25 - Variáveis de estado do sistema linear chaveado incerto - Teorema 13.



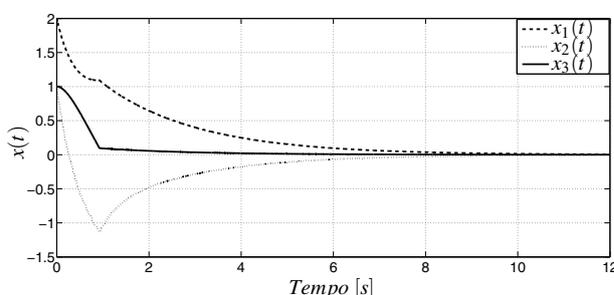
Fonte: elaboração do próprio autor

Figura 26 - Variáveis de estado sistema linear chaveado incerto - Teorema 16.



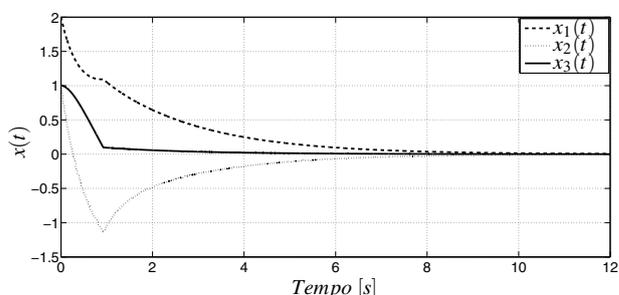
Fonte: elaboração do próprio autor

Figura 27 - Variáveis de estado do sistema linear chaveado incerto - Teorema 18.



Fonte: elaboração do próprio autor

Figura 28 - Variáveis de estado do sistema linear chaveado incerto - Teorema 21.



Fonte: elaboração do próprio autor

$$Q_{01} = 10^6 \times \begin{bmatrix} 2,9871 & 0,0000 & -0,1364 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ -0,1364 & 0,0000 & -0,2584 \end{bmatrix}, \quad Q_{02} = 10^6 \times \begin{bmatrix} 2,9871 & 0,0000 & -0,1364 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ -0,1364 & 0,0000 & -0,2584 \end{bmatrix},$$

$$Q_1 = 10^6 \times \begin{bmatrix} -2,9871 & 0,1364 \\ 0,1364 & 0,2584 \end{bmatrix}, \quad Q_2 = 10^6 \times \begin{bmatrix} -2,9871 & 0,1364 \\ 0,1364 & 0,2585 \end{bmatrix}.$$

Então, de (56) note que o custo garantido $J < x_0' P x_0 < 348$.

Resultados de simulação são ilustrados nas Figuras 25, 26, 27 e 28, para uma condição inicial $x_0 = [2 \ 1 \ 1]'$ e os parâmetros $a = -2$ e $b = -1$. A Tabela 3 apresenta os resultados obtidos.

Tabela 3 - Resultados para o Exemplo 5.

	ρ	Custo (56)
Teorema 13	$1,51 \times 10^3$	$9,09 \times 10^3$
Teorema 16	71,28	427,63
Teorema 18	66,48	398,88
Teorema 21	58	348

Fonte: elaboração do próprio autor

Como pode ser observado nas Figuras 26-28, as respostas dos sistemas controlados obtidas foram praticamente iguais, entretanto o custo garantido obtido pelo problema de minimização (94), Teorema 21, foi menor do que o obtido pelos problemas de minimizações (58), (75) e (84), que apresentam condições mais conservadoras.

3.4.3 Exemplo 4

Considere o sistema linear chaveado incerto (48) e (49) com as seguintes matrizes abaixo, modificadas do Exemplo 3, equação (95), a fim de incluir no modelo dois novos parâmetros incertos, h_1 e h_2 :

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} h_1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

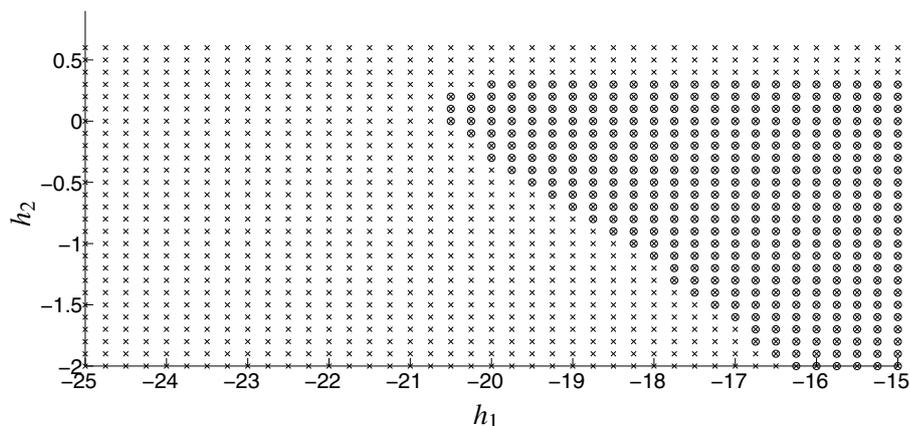
$$A_{21} = \begin{bmatrix} -1 & -1,5 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad A_{22} = \begin{bmatrix} -1 & -0,5 & 0 \\ -2 & h_2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad (98)$$

sendo h_1 e h_2 pertencentes aos conjuntos, $h_1 \in [-25, -15]$ e $h_2 \in [-2, 1]$. A matriz de saída do sistema linear chaveado incerto é definida por:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (99)$$

Neste exemplo, adote $\lambda_1 = \lambda_2 = 0,5$. Considerando somente factibilidade, a figura 29 mostrada abaixo, ilustra uma comparação entre as condições dos Teoremas 12 e 14 propostos.

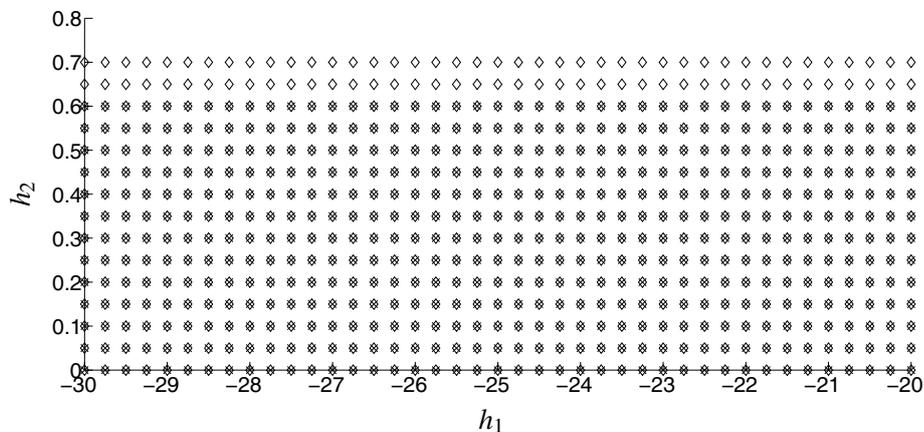
Figura 29 - Regiões de factibilidade obtidas com o Teorema 12 (o) e o Teorema 14 (×).



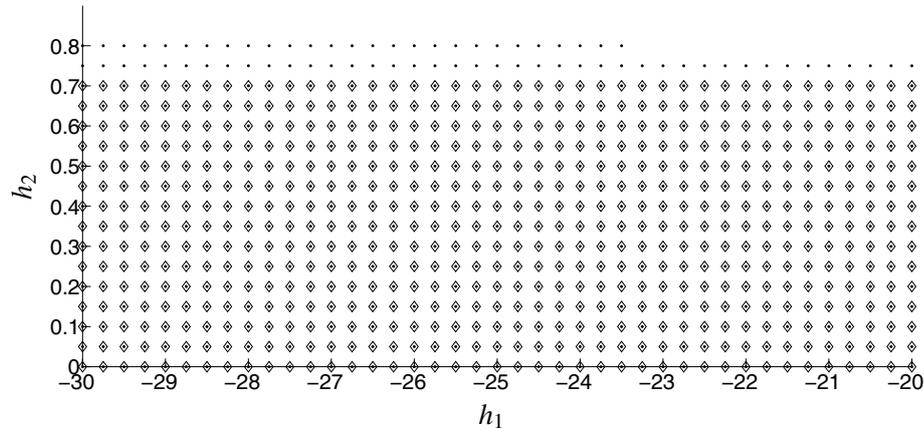
Fonte: elaboração do próprio autor

Agora, para os mesmos parâmetros de projeto definidos anteriormente, considere h_1 e h_2 pertencentes aos conjuntos, $h_1 \in [-30, -20]$ e $h_2 \in [0, 1]$. Então, as figuras 30 e 31 ilustram uma comparação entre as condições dos Teoremas 14, 17 e 19 propostos.

Figura 30 - Regiões de factibilidade obtidas com o Teorema 14 (×) e o Teorema 17 (◊).



Fonte: elaboração do próprio autor

Figura 31 - Regiões de factibilidade obtidas com o Teorema 17 (\diamond) e o Teorema 19 (\bullet).

Fonte: elaboração do próprio autor

Note das Figuras 29, 30 e 31 que a região de factibilidade obtida com o Teorema 19, é maior que as regiões de factibilidades obtidas com os Teoremas 12, 14 e 17. Este fato ilustra o resultado apresentado pelo Teorema 20.

3.5 Conclusões parciais

Neste capítulo foi proposto um novo método para o controle de sistemas lineares chaveados considerando o acesso somente à saída disponível da planta. O projeto foi baseado no critério de estabilidade de Lyapunov através de uma função quadrática e desigualdades matriciais lineares. Índices de desempenho foram inseridos tornando o procedimento de projeto mais geral. Primeiramente, foram apresentadas condições para a estabilidade de sistemas lineares chaveados, nas quais o vetor de estados $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é disponível, propostas em Feron (1996) e Deaecto et al. (2010). Com base nesta teoria, foi proposta uma nova lei de controle dependente da saída disponível da planta, $y(t) \in \mathbb{R}^p$. Finalmente, o mesmo método de projeto foi proposto para a classe de sistemas lineares chaveados incertos contínuos no tempo. Novas condições menos conservadoras foram obtidas a fim de relaxar um custo garantido e o conservadorismo do projeto. Toda a teoria desenvolvida neste capítulo foi ilustrada através de exemplos e os resultados de simulações demonstraram que, quando factíveis, os teoremas propostos apresentaram um desempenho adequado.

4 SISTEMAS CHAVEADOS AFINS

Neste capítulo é apresentada primeiramente uma revisão de resultados precedentes da literatura sobre estabilidade e controle de sistemas chaveados afins, com aplicação em conversores de potência CC-CC (DEAECTO et al., 2010). Com base na teoria descrita é proposto um teorema, o qual generaliza as condições de estabilidade propostas em Deaecto et al. (2010). Índices de desempenho, tais com uma taxa de decaimento e restrição na saída, também são inseridos no projeto dos controladores propostos em Deaecto et al. (2010) a fim de tornar o procedimento mais geral. Posteriormente, é proposto o projeto de controladores considerando somente acesso à saída disponível da planta, permitindo assim uma implementação prática mais simples (TEIXEIRA, 1993; COVACIC et al., 2012). Então, uma extensão dos resultados apresentados na Seção 3.3, é apresentada para uma classe de sistemas chaveados afins. Mais especificamente, são propostas novas condições suficientes, baseadas em LMIs que, quando factíveis, asseguram a estabilidade assintótica do sistema. No entanto, estes controladores operam a uma frequência de chaveamento muito próxima do infinito (no caso ideal), que não pode ser alcançado em sistemas práticos. Assim, a fim de se obter uma redução da frequência de chaveamento, ao final deste capítulo, novas condições suficientes, baseadas em LMIs, são propostas a fim de assegurar a estabilidade uniforme *ultimate bounded* (CORLESS; LEITMANN, 1981) do sistema chaveado afim. A motivação para a proposta deste novo método de projeto é devido este assegurar uma máxima frequência de chaveamento. Os resultados propostos neste capítulo são baseados em uma candidata a função quadrática de Lyapunov (BOYD et al., 1994) e LMIs que, quando factíveis, são facilmente solucionadas por ferramentas disponíveis na literatura de programação convexa (GAHINET et al., 1995). A teoria desenvolvida neste capítulo é aplicada no controle de quatro conversores CC-CC: Buck, Boost, Buck-Boost e Sepic.

4.1 Controle de sistemas chaveados afins

Nos últimos anos tem havido um crescente interesse de pesquisadores sobre a teoria e aplicações de sistemas de controle chaveados, em especial, na área de eletrônica de potência (YOSHIMURA et al., 2013; CARDIM et al., 2009; DEAECTO et al., 2010; YOSHIMURA et al., 2011; BATLLE; FOSSAS; OLIVAR, 1996; MAZUMDER; NAYFEH; BOROJEVIC, 2002; HE; XU; CHENG, 2010; CARDIM et al., 2011a). No entanto, a dinâmica dos conversores

CC-CC pode ser descrita por sistemas chaveados afins, que consideram em seu modelo todas as não linearidades do sistema.

De modo geral, um sistema chaveado afim pode ser representado pela seguinte realização no espaço de estados:

$$\dot{x} = \mathcal{H}_{\sigma(t)}x + \mathcal{G}_{\sigma(t)}w, \quad x(0) = x_0, \quad (100)$$

sendo que $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado, $w \in \mathbb{R}^n$ é a entrada suposta constante para todo $t \geq 0$ e $\sigma(t): t \geq 0 \rightarrow \mathbb{K}_N$ é a regra de chaveamento. Deste modo, o objetivo principal consiste em projetar uma estratégia de chaveamento que, para um dado ponto de equilíbrio, garanta a estabilidade assintótica com uma garantia de desempenho adequada (DECARLO et al., 2000; SUN; GE, 2005b; LIBERZON; MORSE, 1999). Entretanto, em sistemas chaveados afins, é possível que os subsistemas não compartilhem o mesmo ponto de equilíbrio. Assim, o conceito de estabilidade deve ser estendido e as ideias contidas em Bolzern e Spinelli (2004), Xu, Zhai e He (2008) devem ser utilizadas.

4.1.1 Formulação do problema

Considere o sistema chaveado afim definido pela seguinte realização no espaço de estados:

$$\dot{x} = A_{\sigma(t)}x + B_{\sigma(t)}w, \quad x(0) = x_0 \quad (101)$$

$$y = C_{\sigma(t)}x, \quad (102)$$

como apresentado em Deaecto et al. (2010), sendo que $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estado, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ é a saída de controle, $w \in \mathbb{R}^m$ é a entrada suposta constante para todo $t \geq 0$ e $\sigma(t): t \geq 0 \rightarrow \mathbb{K}_N$ é a regra de chaveamento. Para um conhecido conjunto de matrizes $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B_i \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e $C_i \in \mathbb{R}^p$, $i = 1, \dots, N$, tais que:

$$A_{\sigma(t)} \in \{A_1, A_2, \dots, A_N\}, \quad (103)$$

$$B_{\sigma(t)} \in \{B_1, B_2, \dots, B_N\}, \quad (104)$$

$$C_{\sigma(t)} \in \{C_1, C_2, \dots, C_N\}, \quad (105)$$

a regra de chaveamento $\sigma(t)$ seleciona a cada instante de tempo $t \geq 0$, um subsistema conhecido dentre os N subsistemas disponíveis.

Neste contexto, um importante teorema que será utilizado no decorrer deste capítulo é descrito abaixo, o qual apresenta condições necessárias e suficientes para a estabilidade quadrática de sistema chaveados afins contínuos no tempo.

Teorema 22. (BOLZERN; SPINELLI, 2004) *O sistema chaveado afim (101) e (102) é quadraticamente estabilizável se e somente se existir $\lambda \in \Lambda$ tal que A_λ é Hurwitz e $B_\lambda = 0$.*

Demonstração. Veja Bolzern e Spinelli (2004) para detalhes. \square

O problema de controle proposto é descrito a seguir.

Problema 4. Suponha que o vetor de estado $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é disponível para realimentação. Determine uma função $\sigma(x(t))$, para todo $t \geq 0$, tal que a estratégia de chaveamento $\sigma(t)$, torne um ponto de equilíbrio conhecido $x = x_r$ de (101) - (105) globalmente assintoticamente estável e também o sistema controlado satisfaça um índice de desempenho, por exemplo, um custo garantido.

O artigo Deaecto et al. (2010) propõe duas soluções para este problema, considerando uma função de Lyapunov quadrática e o seguinte custo garantido:

$$\int_0^\infty (y - C_\sigma x_r)'(y - C_\sigma x_r) dt = \int_0^\infty (x - x_r)' Q_\sigma (x - x_r) dt, \quad (106)$$

sendo $Q_\sigma = C_\sigma' C_\sigma \geq 0$ para todo $\sigma \in \mathbb{K}_N$.

Teorema 23. (DEAECTO et al., 2010) *Considere o sistema chaveado afim (101) - (105) com entrada $w(t) \in \mathbb{R}^m$ constante para todo $t \geq 0$ e seja o ponto de equilíbrio $x_r \in \mathbb{R}^n$ dado. Se existirem $\lambda \in \Lambda$ e uma matriz simétrica positiva definida $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tais que*

$$A_\lambda' P + P A_\lambda + Q_\lambda < 0, \quad (107)$$

$$A_\lambda x_r + B_\lambda w = 0, \quad (108)$$

então a estratégia de chaveamento

$$\sigma(t, x_r) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}_N} \xi' (Q_i \xi + 2P(A_i x + B_i w)), \quad (109)$$

sendo $Q_i = C_i' C_i$ e $\xi = x - x_r$, torna o ponto de equilíbrio $x_r \in \mathbb{R}^n$ globalmente assintoticamente estável e de (106) o custo garantido

$$J = \int_0^\infty (y - C_\sigma x_r)'(y - C_\sigma x_r) dt < (x_0 - x_r)' P (x_0 - x_r), \quad (110)$$

mantém-se.

Demonstração. Veja Deaecto et al. (2010). \square

Então, o Teorema 23 nos fornece o seguinte problema de otimização (DEAECTO et al., 2010):

$$\inf_{P>0} \{Tr(P) : A'_\lambda P + PA_\lambda + Q_\lambda < 0, \quad \lambda \in \Lambda\}. \quad (111)$$

O próximo teorema proposto em Deaecto et al. (2010) fornece uma outra estratégia de chaveamento, mais conservadora, porém de implementação prática mais fácil e simples do que a estratégia do Teorema 23.

Teorema 24. (DEAECTO et al., 2010) *Considere o sistema chaveado afim (101) - (105) com entrada $w(t) = w$ constante para todo $t \geq 0$ e seja o ponto de equilíbrio $x_r \in \mathbb{R}^n$ dado. Se existirem $\lambda \in \Lambda$ e uma matriz simétrica positiva definida $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tais que*

$$A'_i P + PA_i + Q_i < 0, \quad (112)$$

$$A_\lambda x_r + B_\lambda w = 0, \quad (113)$$

para todo $i \in \mathbb{K}_N$, então a estratégia de chaveamento

$$\sigma(t, x_r) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}_N} \xi' P (A_i x_r + B_i w), \quad (114)$$

sendo $\xi = x - x_r$, torna o ponto de equilíbrio $x_r \in \mathbb{R}^n$ globalmente assintoticamente estável e o custo garantido (110) mantém-se.

Demonstração. Veja Deaecto et al. (2010). □

O Teorema 24 nos fornece o seguinte problema de otimização (DEAECTO et al., 2010):

$$\inf_{P>0} \{Tr(P) : A'_i P + PA_i + Q_i < 0, \quad i \in \mathbb{K}_N\}. \quad (115)$$

Note que (112) é mais conservadora que (107) porque deve ser satisfeita para todo $i \in \mathbb{K}_N$. Entretanto, a estratégia de chaveamento (114), descrita no Teorema 24, é mais simples de implementar do que a estratégia (109), descrita no Teorema 23, devido ao fato de exigir apenas o produto de $\xi(t)$ por vetores constantes.

Observação 4. *É interessante notar que para solucionar as condições relacionadas aos Teoremas 23 e 24 é necessário determinar um vetor específico $\lambda \in \Lambda$, o qual está associado a um ponto de equilíbrio conhecido $x_r \in \mathbb{R}^n$. Então, para um dado ponto de equilíbrio $x_r \in \mathbb{R}^n$, o associado vetor $\lambda \in \Lambda$ é determinado. Este processo se estende nas próximas seções e é ilustrado nos exemplos.*

A seguir é proposto o Teorema 25 (MAINARDI JÚNIOR et al., 2012b), o qual propõe uma condição suficiente que generaliza os Teoremas 23 e 24 descritos anteriormente.

Teorema 25. (MAINARDI JÚNIOR et al., 2012b) *Considere o sistema chaveado afim (101) - (105) com entrada $w(t)$ constante para todo $t \geq 0$ e seja o ponto de equilíbrio $x_r \in \mathbb{R}^n$ dado. Se existirem $\lambda \in \Lambda$, matrizes simétricas N_i , $i \in \mathbb{K}_N$ e uma matriz simétrica positiva definida $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tais que*

$$A_i'P + PA_i + Q_i - N_i < 0, \quad (116)$$

$$A_\lambda x_r + B_\lambda w = 0, \quad (117)$$

$$N_\lambda = 0, \quad (118)$$

para todo $i \in \mathbb{K}_N$, sendo $Q_i = C_i' C_i$, então a estratégia de chaveamento

$$\sigma(t, x_r) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}_N} \xi' (N_i \xi + 2P(A_i x_r + B_i w)), \quad (119)$$

sendo $\xi = x - x_r$, torna o ponto de equilíbrio $x_r \in \mathbb{R}^n$ globalmente assintoticamente estável e de (110) o custo garantido $J < (x_0 - x_r)' P (x_0 - x_r)$ mantém-se.

Demonstração. Considerando a candidata a função quadrática de Lyapunov $V(\xi) = \xi' P \xi$ e de (101), (116), (117) e (118) note que para $\xi \neq 0$:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\xi(t)) &= \dot{x}' P \xi + \xi' P \dot{x} = 2\xi' P (A_\sigma x + B_\sigma w) \\ &= \xi' (A_\sigma' P + P A_\sigma) \xi + 2\xi' P (A_\sigma x_r + B_\sigma w) \\ &< \xi' (-Q_\sigma + N_\sigma) \xi + 2\xi' P (A_\sigma x_r + B_\sigma w) \\ &= \xi' (N_\sigma \xi + 2P(A_\sigma x_r + B_\sigma w)) - \xi' Q_\sigma \xi \\ &= \min_{i \in \mathbb{K}_N} \{ \xi' (N_i \xi + 2P(A_i x_r + B_i w)) \} - \xi' Q_\sigma \xi \\ &\leq \xi' (N_\lambda \xi + 2P(A_\lambda x_r + B_\lambda w)) - \xi' Q_\sigma \xi \\ &= -\xi' Q_\sigma \xi \leq 0. \end{aligned} \quad (120)$$

Visto que $\dot{V}(\xi) < 0$ para $\xi \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ e $\dot{V}(0) = 0$, então $x_r \in \mathbb{R}^n$ é um ponto de equilíbrio globalmente assintoticamente estável. Agora, integrando (120) de zero até o infinito e sabendo que $V(\xi(\infty)) = 0$, obtêm-se (110). A prova está concluída. \square

Então, o Teorema 25 nos fornece o seguinte problema de otimização:

$$\inf_{P>0} \{ Tr(P) : A_i'P + PA_i + Q_i - N_i < 0, \quad A_\lambda x_r + B_\lambda w = 0, \quad N_\lambda = 0, \quad i \in \mathbb{K}, \quad \lambda \in \Lambda \}. \quad (121)$$

A seguir, é proposto o Teorema 26 o qual demonstra que as condições propostas pelo Teorema 25 englobam as condições descritas pelos Teoremas 23 e 24.

Teorema 26. *As seguintes afirmações mantêm-se:*

- (i) *se as condições do Teorema 23 são factíveis, então as condições do Teorema 25 são também factíveis;*
- (ii) *se as condições do Teorema 24 são factíveis, então as condições do Teorema 25 são também factíveis.*

Demonstração. (i) Considere as matrizes simétricas N_i , $i \in \mathbb{K}_N$, como descrito abaixo:

$$N_i = (A'_i P + PA_i + Q_i) - (A'_\lambda P + PA_\lambda + Q_\lambda). \quad (122)$$

Então, multiplicando (122) por λ_i e tomando a soma de 1 até N segue que

$$\begin{aligned} N_\lambda &= \sum_{i=1}^N \lambda_i N_i = \sum_{i=1}^N \lambda_i (A'_i P + PA_i + Q_i) - \sum_{i=1}^N \lambda_i (A'_\lambda P + PA_\lambda + Q_\lambda) \\ &= (A'_\lambda P + PA_\lambda + Q_\lambda) - (A'_\lambda P + PA_\lambda + Q_\lambda) = 0. \end{aligned} \quad (123)$$

Agora, de (107), (116), (118) e (122) observe que

$$\begin{aligned} A'_i P + PA_i + Q_i - N_i &= A'_i P + PA_i + Q_i - \left((A'_i P + PA_i + Q_i) - (A'_\lambda P + PA_\lambda + Q_\lambda) \right) \\ &= A'_\lambda P + PA_\lambda + Q_\lambda < 0, \quad \forall i \in \mathbb{K}_N. \end{aligned} \quad (124)$$

(ii) Seguindo, considere que $N_i = 0$ em (116). Então têm-se que:

$$A'_i P + PA_i + Q_i - N_i = A'_i P + PA_i + Q_i < 0, \quad \forall i \in \mathbb{K}_N. \quad (125)$$

Assim, a prova do Teorema 26 está completa. \square

Agora, a fim de tornar o procedimento de projeto mais geral, uma taxa de decaimento é introduzida no projeto dos controladores.

4.1.2 Taxa de decaimento

Baseado no Lema 3.1 é proposto o Teorema 27 que permite a especificação de uma taxa de decaimento e um custo garantido nas mesmas condições de projeto apresentadas pelo Teorema 23, o qual considera somente o custo garantido.

Teorema 27. *Considere o sistema chaveado afim (101) - (105) com entrada $w(t) = w$ constante para todo $t \geq 0$ e seja o ponto de equilíbrio $x_r \in \mathbb{R}^n$ e $\gamma > 0$ dados. Se existirem $\lambda \in \Lambda$ e uma matriz simétrica positiva definida $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tais que*

$$P > (2\gamma)^{-1} Q_i, \quad (126)$$

$$A'_\lambda P + PA_\lambda + 2\gamma P < 0, \quad (127)$$

$$A_\lambda x_r + B_\lambda w = 0, \quad (128)$$

sendo $Q_i = C'_i C_i$, para todo $i \in \mathbb{I}_{K_N}$, então a estratégia de chaveamento

$$\sigma(t, x_r) = \arg \min_{i \in \mathbb{I}_{K_N}} \xi' P (A_i x + B_i w), \quad (129)$$

sendo $\xi = x - x_r$, torna o ponto de equilíbrio $x_r \in \mathbb{R}^n$ globalmente exponencialmente estável com taxa de decaimento maior ou igual a γ e o custo garantido (110) mantém-se.

Demonstração. Considere (101)–(105), (126)–(129) e a candidata a função quadrática de Lyapunov $V(\xi(t)) = \xi' P \xi$. Então, para $\xi \neq 0$:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\xi(t)) &= 2\xi' P (A_\sigma x + B_\sigma w) \\ &= \min_{i \in \mathbb{I}_{K_N}} \{2\xi' P (A_i x + B_i w)\} \\ &= \min_{i \in \mathbb{I}_{K_N}} \{\xi' (A'_i P + PA_i) \xi + 2\xi' P (A_i x_r + B_i w)\} \\ &\leq \xi' (A'_\lambda P + PA_\lambda) \xi + 2\xi' P (A_\lambda x_r + B_\lambda w) \\ &< -2\gamma \xi' P \xi = -2\gamma V(\xi) < -\xi' Q_\sigma \xi \leq 0. \end{aligned} \quad (130)$$

Então, do Lema 3.1 (BOYD et al., 1994), o sistema chaveado afim possui uma taxa de decaimento maior ou igual a γ . Agora, integrando (130) de zero até o infinito e tendo em conta que $V(\xi(\infty)) = 0$, obtêm-se (110). A prova está concluída. \square

O Teorema 27 nos fornece o seguinte problema de otimização:

$$\inf_P \{Tr(P) : (126) - (128) \text{ mantém-se para algum } P = P' > 0, \lambda \in \Lambda \text{ e } \forall i \in \mathbb{I}_{K_N}\}. \quad (131)$$

Ademais, note que a restrição (126) proposta torna o Teorema 27 conservativo. Assim, a fim de obter condições menos conservadoras, uma outra maneira de considerar as restrições para taxa e decaimento e custo garantido é proposta no Teorema 28.

Teorema 28. *Considere o sistema chaveado afim (101) - (105) com entrada $w(t) = w$ constante*

para todo $t \geq 0$ e seja o ponto de equilíbrio $x_r \in \mathbb{R}^n$ e $\gamma > 0$ dados. Se existirem $\lambda \in \Lambda$, matrizes simétricas $Z_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e uma matriz simétrica positiva definida $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tais que

$$Z_i > Q_i, \quad (132)$$

$$Z_i > 2\gamma P, \quad (133)$$

$$A'_\lambda P + PA_\lambda + Z_\lambda < 0, \quad (134)$$

$$A_\lambda x_r + B_\lambda w = 0, \quad (135)$$

sendo $Q_i = C'_i C_i$, para todo $i \in \mathbb{K}_N$, então a estratégia de chaveamento

$$\sigma(t, x_r) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}_N} \xi' (Z_i \xi + 2P(A_i x + B_i w)), \quad (136)$$

sendo $\xi = x - x_r$, torna o ponto de equilíbrio $x_r \in \mathbb{R}^n$ globalmente exponencialmente estável com taxa de decaimento maior ou igual a γ e o custo garantido (110) mantém-se.

Demonstração. Considere a candidata a função quadrática de Lyapunov $V(\xi) = \xi' P \xi$. De (101)–(105), (132), (134) e (135) têm-se que para $\xi \neq 0$:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\xi(t)) &= 2\xi' P(A_\sigma x + B_\sigma w) = 2\xi' P(A_\sigma x + B_\sigma w) + \xi' Z_\sigma \xi - \xi' Z_\sigma \xi \\ &= \min_{i \in \mathbb{K}_N} \{ \xi' (Z_i \xi + 2P(A_i x + B_i w)) \} - \xi' Z_\sigma \xi \\ &= \min_{i \in \mathbb{K}_N} \{ \xi' (A'_i P + PA_i + Z_i) \xi + 2\xi' P(A_i x_r + B_i w) \} - \xi' Z_\sigma \xi \\ &\leq \xi' (A'_\lambda P + PA_\lambda + Z_\lambda) \xi + 2\xi' P(A_\lambda x_r + B_\lambda w) - \xi' Z_\sigma \xi \\ &< -\xi' Z_\sigma \xi < -\xi' Q_\sigma \xi \leq 0. \end{aligned} \quad (137)$$

Agora, supondo que $\xi \neq 0$ então de (133) e (137), $\dot{V}(\xi) < -\xi' Z_\sigma \xi \leq -2\gamma \xi' P \xi$. Assim, do Lema 3.1, o sistema chaveado afim possui uma taxa de decaimento maior ou igual a γ . Finalmente, integrando (137) de zero até o infinito e tendo em conta que $V(\xi(\infty)) = 0$, obtêm-se (110). A prova está concluída. \square

O Teorema 28 nos fornece o seguinte problema de otimização:

$$\inf_P \{ Tr(P) : (132) - (135) \text{ mantém-se para algum } P = P' > 0, \\ Z_i = Z'_i, \quad \lambda \in \Lambda \text{ e } \forall i \in \mathbb{K}_N \}. \quad (138)$$

O próximo teorema compara as condições dos Teoremas 27 e 28 propostos anteriormente.

Teorema 29. *Se as condições do Teorema 27 mantêm-se, então as condições do Teorema 28 também mantêm-se.*

Demonstração. Considere que (126)–(128) são factíveis. Então, de (127) e das inequações de Rayleigh (EDWIN; STANISLAW, 2001), note que $W = A'_\lambda P + PA_\lambda + 2\gamma P \leq \lambda_{\max}(W)I_n < 0$, sendo que $\lambda_{\max}(W)$ denota o máximo autovalor de W . Assim, escolha uma constante $\beta > 0$ tal que $\beta + \lambda_{\max}(W) < 0$. Então, $W + \beta I_n \leq (\beta + \lambda_{\max}(W))I_n < 0$. Agora, defina $Z_i = 2\gamma P + \beta I_n$, $i \in \mathbb{K}_N$, e observe que as condições (132)–(135) do Teorema 28 mantêm-se se as condições (126)–(128) do Teorema 27 mantêm-se:

$$\begin{aligned} Z_i &= 2\gamma P + \beta I_n > 2\gamma P > Q_i, \\ Z_i &= 2\gamma P + \beta I_n > 2\gamma P, \\ A'_\lambda P + PA'_\lambda + Z_\lambda &= A'_\lambda P + PA'_\lambda + \sum_{i=1}^N \lambda_i (2\gamma P + \beta I_n) \\ &= A'_\lambda P + PA'_\lambda + 2\gamma P + \beta I_n = W + \beta I_n < 0, \end{aligned} \quad (139)$$

e (128) é igual a (135). A prova está concluída. \square

Observação 5. *Os resultados de simulações apresentados na Subseção 4.1.3, demonstram que existem casos nos quais as condições propostas pelo Teorema 28 são menos conservadoras do que as propostas pelo Teorema 27.*

Agora, novamente baseado no Lema 3.1 (BOYD et al., 1994), é descrito o Teorema 30 (YOSHIMURA et al., 2011) que também permite a especificação de um custo garantido e uma taxa de decaimento para as mesmas condições de projeto apresentadas no Teorema 24, o qual considera somente o custo garantido.

Teorema 30. *(YOSHIMURA et al., 2011) Considere o sistema chaveado afim (101) - (105) com entrada $w(t) = w$ constante para todo $t \geq 0$ e seja o ponto de equilíbrio $x_r \in \mathbb{R}^n$ e $\gamma > 0$ dados. Se existirem $\lambda \in \Lambda$ e uma matriz simétrica positiva definida $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tais que*

$$P > (2\gamma)^{-1} Q_i, \quad (140)$$

$$A'_i P + PA_i + 2\gamma P < 0, \quad (141)$$

$$A_\lambda x_r + B_\lambda w = 0, \quad (142)$$

sendo $Q_i = C'_i C_i$, para todo $i \in \mathbb{K}_N$, então a estratégia de chaveamento (114), torna o ponto de equilíbrio $x_r \in \mathbb{R}^n$ globalmente exponencialmente estável com taxa de decaimento maior ou igual a γ e o custo garantido (110) mantêm-se.

Demonstração. Veja Yoshimura et al. (2011) para detalhes. \square

O Teorema 30 nos fornece o seguinte problema de otimização:

$$\inf_P \{Tr(P) : (140) - (142) \text{ mantém-se para algum } P = P' > 0 \text{ e } \forall i \in \mathbb{K}_N\}. \quad (143)$$

Note que a restrição proposta (140) torna o Teorema 30 conservativo. Então, a fim de obter condições menos conservadoras é proposto o Teorema 31 o qual apresenta uma outra maneira de considerar as restrições para taxa de decaimento e custo garantido.

Teorema 31. *Considere o sistema chaveado afim (101) - (105) com entrada $w(t) = w$ constante para todo $t \geq 0$ e seja o ponto de equilíbrio $x_r \in \mathbb{R}^n$ e $\gamma > 0$ dados. Se existirem $\lambda \in \Lambda$, matrizes simétricas $Z_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e uma matriz simétrica positiva definida $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tais que*

$$Z_i > Q_i, \quad (144)$$

$$Z_i > 2\gamma P, \quad (145)$$

$$A_i'P + PA_i + Z_i < 0, \quad (146)$$

$$A_\lambda x_r + B_\lambda w = 0, \quad (147)$$

sendo $Q_i = C_i' C_i$, para todo $i \in \mathbb{K}_N$, então a estratégia de chaveamento (114) torna o ponto de equilíbrio $x_r \in \mathbb{R}^n$ globalmente exponencialmente estável com taxa de decaimento maior ou igual a γ e o custo garantido (110) mantém-se.

Demonstração. Considere a candidata a função quadrática de Lyapunov $V(\xi) = \xi' P \xi$. De (101)–(105), (144), (146) e (147) têm-se que para $\xi \neq 0$:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\xi(t)) &= 2\xi' P (A_\sigma x + B_\sigma w) = 2\xi' P (A_\sigma x_r + B_\sigma w) + \xi' (A_\sigma' P + P A_\sigma) \xi \\ &= \min_{i \in \mathbb{K}_N} \{2\xi' P (A_\sigma x_r + B_\sigma w)\} + \xi' (A_\sigma' P + P A_\sigma) \xi \\ &< \min_{i \in \mathbb{K}_N} \{2\xi' P (A_\sigma x_r + B_\sigma w)\} - \xi' Z_\sigma \xi \\ &\leq 2\xi' P (A_\lambda x_r + B_\lambda w) - \xi' Z_\sigma \xi \\ &= -\xi' Z_\sigma \xi < -\xi' Q_\sigma \xi \leq 0. \end{aligned} \quad (148)$$

Agora, supondo que $\xi \neq 0$ então de (145) e (148), $\dot{V}(\xi) < -\xi' Z_\sigma \xi \leq -2\gamma \xi' P \xi$. Assim, do Lema 3.1, o sistema chaveado afim possui uma taxa de decaimento maior ou igual a γ . Finalmente, integrando (148) de zero até o infinito e tendo em conta que $V(\xi(\infty)) = 0$, obtêm-se (110). A prova está concluída. \square

O Teorema 31 nos fornece o seguinte problema de otimização:

$$\inf_P \{Tr(P) : (144) - (147) \text{ mantém-se para algum } P = P' > 0, \\ Z_i = Z'_i, \quad \lambda \in \Lambda \text{ e } \forall i \in \mathbb{K}_N\}. \quad (149)$$

O próximo teorema compara as condições dos Teoremas 30 e 31 propostos anteriormente.

Teorema 32. *Se as condições do Teorema 30 mantém-se, então as condições do Teorema 31 também mantém-se.*

Demonstração. A prova segue de modo similar à demonstração do Teorema 29. \square

A próxima subseção é dedicada à aplicação dos resultados teóricos propostos neste capítulo, para o controle do modelo de três conversores CC-CC: Buck, Boost e Buck-Boost. Maiores detalhes sobre controle de conversores CC-CC são encontrados em Cardim et al. (2009), Deaecto et al. (2010), Yoshimura et al. (2011), Batlle, Fossas e Olivar (1996), Mazumder, Nayfeh e Borojevic (2002), He, Xu e Cheng (2010), Cardim et al. (2011a).

4.1.3 Exemplo 5 (Conversores CC-CC Buck, Boost e Buck-Boost)

Considere os conversores CC-CC: Buck, Boost e Buck-Boost, ilustrados nas Figuras 32, 36 e 40, respectivamente. Os conversores CC-CC operam no modo de condução contínua. Para todos os conversores, considere que $i_L(t)$ denota a corrente no indutor e $V_C(t)$ a tensão no capacitor, que são adotadas como variáveis de estado do sistema:

$$x(t) = [x_1(t) \quad x_2(t)]' = [i_L(t) \quad V_C(t)]'. \quad (150)$$

Defina o ponto de operação $x_r = [x_{1r} \quad x_{2r}]' = [i_{Lr} \quad V_{Cr}]'$. Para a análise dos conversores mencionados, nenhum limite é imposto sobre a frequência de chaveamento. Os conversores são modelados com uma resistência parasita em série com o indutor. Neste contexto, considere os seguintes parâmetros nominais de projeto propostos em Deaecto et al. (2010):

$$V_g = w = 100[V], \quad R = 50[\Omega], \quad r_L = 2[\Omega], \quad L = 500[\mu H], \quad C = 470[\mu F], \quad \text{e} \quad (151)$$

$$Q_i = Q = \begin{bmatrix} \rho_1 r_L & 0 \\ 0 & \rho_2 / R \end{bmatrix},$$

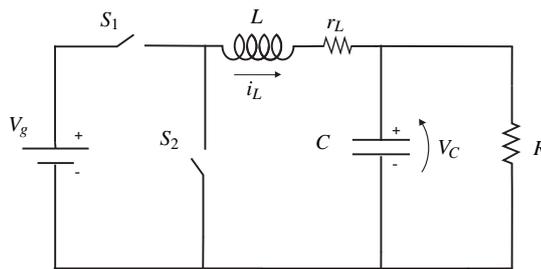
como sendo uma matriz índice de desempenho associada com o seguinte custo garantido:

$$\int_0^\infty (\rho_2 R^{-1} (V_C - V_{Cr})^2 + \rho_1 r_L (i_L - i_{Lr})^2) dt, \quad (152)$$

sendo que ρ_1 e $\rho_2 \in \mathbb{R}_+$ são parâmetros definidos pelo projetista. O custo (152) expressa a soma ponderada do sinal de erro de cada variável de estado correspondente ao valor que compõe o ponto de equilíbrio escolhido. Verificamos que o parâmetro $\rho > 0$ desempenha um papel fundamental no que diz respeito à duração do transitório da tensão e ao valor de pico da corrente. De fato, para $\rho \gg 1$ o valor de pico da corrente é reduzido, mas a tensão converge muito lentamente para o valor de equilíbrio. Por outro lado, para $\rho \ll 1$ esta convergência é rápida mas o pico da corrente geralmente se torna muito elevado (DEAECTO, 2010). Assim, adote $\rho_1 = 0$ e $\rho_2 = 1$. A seguir apresentamos os resultados de simulações desta teoria para os três conversores mencionados anteriormente, bem como os resultados numéricos obtidos. O solver utilizado foi o LMILab do software MATLAB.

4.1.3.1 Conversor Buck

Figura 32 - Conversor CC-CC Buck.



Fonte: elaboração do próprio autor

A Figura 32 ilustra a estrutura de um conversor Buck, o qual permite somente tensões de saída menores do que a tensão de entrada. O sistema chaveado em espaço de estados (101) é definido pelas seguintes matrizes (DEAECTO et al., 2010):

$$A_1 = \begin{bmatrix} -r_L/L & -1/L \\ 1/C & -1/RC \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -r_L/L & -1/L \\ 1/C & -1/RC \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (153)$$

De (108), o conjunto de todos os pontos de equilíbrio alcançáveis (DEAECTO et al., 2010) do conversor são calculados considerando que:

$$x_r = \left\{ [i_{Lr} \quad V_{Cr}]' : V_{Cr} = R i_{Lr}, \quad 0 \leq i_{Lr} \leq \frac{V_g}{(r_L + R)} \right\}. \quad (154)$$

Neste exemplo, foi adotado o seguinte valor de tensão de saída $V_{Cr} = 50[V]$. Então, de (154) o ponto de equilíbrio calculado é $x_r = [1 \ 50]$. Agora, de (108) e lembrando que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, obtêm-se que $\lambda_1 = 0,52$ e $\lambda_2 = 0,48$. Assim, dos problemas de minimizações (111) e (115), correspondentes aos Teoremas 23 e 24, respectivamente, obtemos $J < (x_0 - x_r)'P(x_0 - x_r) = 0,029$ e a seguinte matriz simétrica

$$P = 10^{-4} \times \begin{bmatrix} 0,0253 & 0,0476 \\ 0,0476 & 0,1142 \end{bmatrix},$$

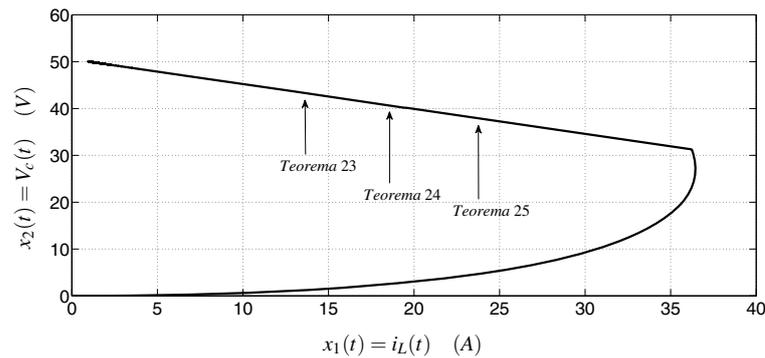
necessária para a implementação das estratégias de chaveamento (109) e (114). Mantendo os mesmos parâmetros de projeto, do problema de minimização (121), Teorema 25, as seguintes matrizes foram obtidas como uma solução,

$$P = 10^{-4} \times \begin{bmatrix} 0,0253 & 0,0476 \\ 0,0476 & 0,1142 \end{bmatrix},$$

$$N_1 = 10^{-6} \times \begin{bmatrix} -0,2134 & -0,0693 \\ -0,0693 & -0,0685 \end{bmatrix}, \quad N_2 = 10^{-6} \times \begin{bmatrix} 0,2312 & 0,0751 \\ 0,0751 & 0,0742 \end{bmatrix},$$

e de (110) o custo garantido obtido foi $J < (x_0 - x_r)'P(x_0 - x_r) = 0,029$. Os resultados são ilustrados na Figura 33 para uma condição inicial $x = [i_L \ V_c]' = [0 \ 0]'$.

Figura 33 - Plano de fase do conversor Buck.



Fonte: elaboração do próprio autor

Agora, a fim de comparar o desempenho do sistema para os resultados propostos pelos Teoremas 27, 28, 30 e 31, adote a máxima taxa de decaimento $\gamma = 2000s^{-1}$ e os mesmos parâmetros definidos anteriormente. Assim, do problema de minimização (131), Teorema 27, a

seguinte matriz foi obtida como uma solução,

$$P = 10^{-4} \times \begin{bmatrix} 0,6194 & 0,5752 \\ 0,5752 & 0,5841 \end{bmatrix},$$

e de (110) o custo garantido obtido foi $J < (x_0 - x_r)'P(x_0 - x_r) = 0,1519$. Do problema de minimização (138), Teorema 28, as matrizes obtidas como uma solução foram:

$$P = 10^{-4} \times \begin{bmatrix} 0,6126 & 0,5698 \\ 0,5698 & 0,5795 \end{bmatrix},$$

$$Z_1 = \begin{bmatrix} 0,2476 & 0,2296 \\ 0,2296 & 0,2329 \end{bmatrix}, \quad Z_2 = \begin{bmatrix} 0,2476 & 0,2295 \\ 0,2295 & 0,2328 \end{bmatrix},$$

e de (110) o custo garantido obtido foi $J < (x_0 - x_r)'P(x_0 - x_r) = 0,1506$. Os resultados são ilustrados na Figura 34 para uma condição inicial $x = [i_L \ V_c]' = [0 \ 0]'$.

Seguindo, do problema de minimização (143), Teorema 30, a matriz obtida como uma solução foi:

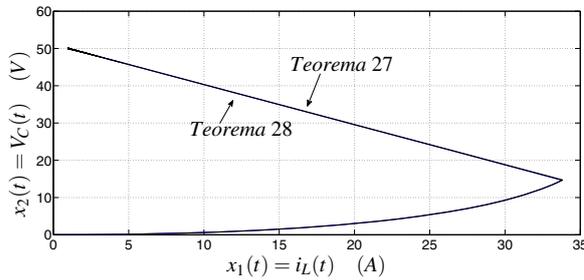
$$P = 1 \times 10^{-4} \begin{bmatrix} 0,6194 & 0,5752 \\ 0,5752 & 0,5841 \end{bmatrix},$$

e de (110) o custo garantido obtido foi $J < (x_0 - x_r)'P(x_0 - x_r) = 0,1518$. Finalmente, do problema de minimização (149), Teorema 31, as matrizes obtidas como uma solução foram:

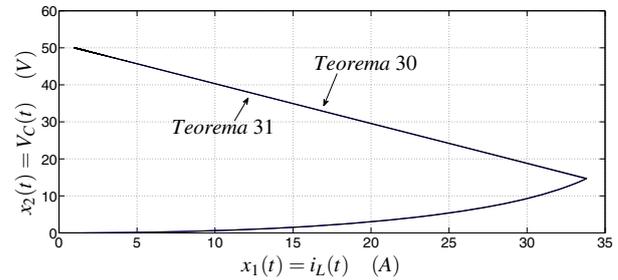
$$P = 1 \times 10^{-4} \begin{bmatrix} 0,6128 & 0,5700 \\ 0,5700 & 0,5797 \end{bmatrix},$$

$$Z_1 = \begin{bmatrix} 0,2477 & 0,2296 \\ 0,2296 & 0,2329 \end{bmatrix}, \quad Z_2 = \begin{bmatrix} 0,2477 & 0,2296 \\ 0,2296 & 0,2329 \end{bmatrix},$$

e de (110) o custo garantido obtido foi $J < (x_0 - x_r)'P(x_0 - x_r) = 0,1507$. Os resultados são ilustrados na Figura 35 para uma condição inicial $x = [i_L \ V_c]' = [0 \ 0]'$. A Tabela 4 apresenta os resultados obtidos.

Figura 34 - Plano de fase do conversor Buck com taxa de decaimento $\gamma = 2000$.

Fonte: elaboração do próprio autor

Figura 35 - Plano de fase do conversor Buck com taxa de decaimento $\gamma = 2000$.

Fonte: elaboração do próprio autor

Tabela 4 - Resultados para o conversor CC-CC Buck.

	<i>Pico de corrente</i> [A]	<i>Tempo de estabelecimento</i> [ms]	<i>Custo</i> (106)
Teorema 23	36,5	4,0	0,0290
Teorema 24	36,5	4,0	0,0290
Teorema 25	36,5	4,0	0,0290
Teorema 27	34,0	5,0	0,1519
Teorema 28	34,0	5,0	0,1506
Teorema 30	34,0	5,0	0,1518
Teorema 31	34,0	5,0	0,1507

Fonte: elaboração do próprio autor

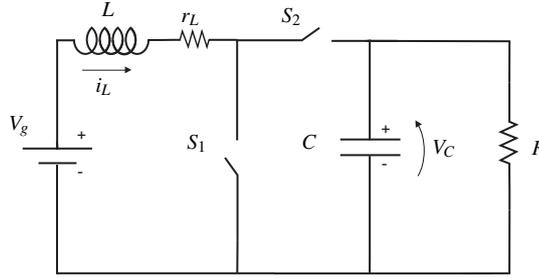
Observe que para este conversor os teoremas propostos apresentaram taxa de convergência e custo garantido muito próximos. Este fato é devido ao gradiente da superfície de chaveamento que, para este conversor em particular, não depende do ponto de equilíbrio (DEAECTO et al., 2010).

4.1.3.2 Conversor Boost

A Figura 36 ilustra a estrutura de um conversor Boost, o qual permite somente tensões de saída maiores do que a tensão de entrada. O sistema chaveado em espaço de estados (101) é definido pelas seguintes matrizes (DEAECTO et al., 2010):

$$A_1 = \begin{bmatrix} -r_L/L & 0 \\ 0 & -1/RC \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -r_L/L & -1/L \\ 1/C & -1/RC \end{bmatrix},$$

Figura 36 - Conversor CC-CC Boost.



Fonte: elaboração do próprio autor

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (155)$$

De (108), o conjunto de todos os pontos de equilíbrio alcançáveis (DEAECTO et al., 2010) do conversor boost são dados por:

$$x_r = \left\{ [i_{Lr} \quad V_{Cr}]' : V_{Cr}^2 + (r_L R) i_{Lr}^2 - (R V_g) i_{Lr} = 0, \quad \frac{V_g}{(r_L + R)} \leq i_{Lr} \leq \frac{V_g}{r_L} \right\}. \quad (156)$$

Neste exemplo, adote o seguinte valor de tensão de saída $V_{Cr} = 150[V]$. Então, de (156) o ponto de equilíbrio calculado é $x_r = [5 \quad 150]'$. Agora, de (108) e lembrando que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, obtêm-se que $\lambda_1 = 0,4$ e $\lambda_2 = 0,6$.

Utilizando os problemas de minimização (111) e (115), correspondentes aos Teoremas 23 e 24, obtemos como uma solução $J < 0,5901$, $J < 5,5929$ e as seguintes matrizes simétricas:

$$P = 10^{-4} \times \begin{bmatrix} 0,0237 & 0,0742 \\ 0,0742 & 0,2573 \end{bmatrix}, \quad P = 10^{-3} \times \begin{bmatrix} 0,1450 & 0,0088 \\ 0,0088 & 0,2478 \end{bmatrix},$$

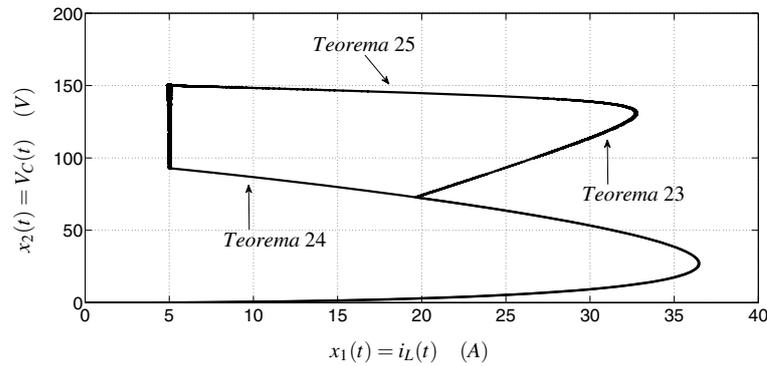
respectivamente. Agora, do problema de minimização (121), Teorema 25, obtêm-se as matrizes abaixo como uma solução, e de (110) o custo garantido $J < (x_0 - x_r)' P (x_0 - x_r) = 0,59$:

$$P = 10^{-4} \times \begin{bmatrix} 0,0237 & 0,0742 \\ 0,0742 & 0,2573 \end{bmatrix},$$

$$N_1 = \begin{bmatrix} -0,018 & -0,030 \\ -0,030 & 0,0178 \end{bmatrix}, \quad N_2 = \begin{bmatrix} 0,012 & 0,020 \\ 0,020 & -0,012 \end{bmatrix}.$$

Os resultados são ilustrados na Figura 37 para uma condição inicial $x = [i_L \quad V_c]' = [0 \quad 0]'$. A fim de comparar o desempenho do sistema para os resultados propostos pelos Teoremas 27 e 28, adote a máxima taxa de decaimento $\gamma = 460s^{-1}$ e os mesmos parâmetros definidos

Figura 37 - Plano de fase do conversor Boost.



Fonte: elaboração do próprio autor

anteriormente. Assim, do problema de minimização (131), Teorema 27, a seguinte matriz foi obtida como uma solução,

$$P = 10^{-4} \times \begin{bmatrix} 0,1448 & 0,1320 \\ 0,1320 & 0,3377 \end{bmatrix},$$

e de (110) o custo garantido obtido foi $J < (x_0 - x_r)'P(x_0 - x_r) = 0,78$. Do problema de minimização (138), Teorema 28, as matrizes obtidas como uma solução foram:

$$P = 10^{-4} \times \begin{bmatrix} 0,0571 & 0,0968 \\ 0,0968 & 0,2756 \end{bmatrix},$$

$$Z_1 = \begin{bmatrix} 0,0209 & 0,0108 \\ 0,0108 & 0,0256 \end{bmatrix}, \quad Z_2 = \begin{bmatrix} 0,0210 & 0,0108 \\ 0,0108 & 0,0256 \end{bmatrix},$$

e de (110) o custo garantido obtido foi $J < (x_0 - x_r)'P(x_0 - x_r) = 0,6347$. Os resultados são ilustrados na Figura 38 para uma condição inicial $x = [i_L \ V_C]' = [0 \ 0]'$.

Agora, a fim de comparar o desempenho do sistema para os resultados propostos pelos Teoremas 30 e 31, adote a máxima taxa de decaimento $\gamma = 40s^{-1}$ e os mesmos parâmetros definidos anteriormente. Então, do problema de minimização (143), Teorema 30, a matriz obtida como uma solução foi:

$$P = 10^{-3} \times \begin{bmatrix} 0,1433 & 0,0096 \\ 0,0096 & 0,2507 \end{bmatrix},$$

e de (110) o custo garantido obtido foi $J < (x_0 - x_r)'P(x_0 - x_r) = 5,6577$. Finalmente, do

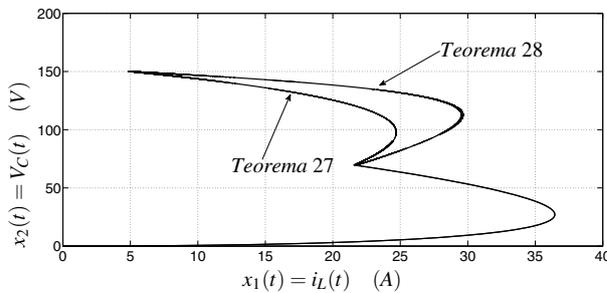
problema de minimização (149), Teorema 31, as matrizes obtidas como uma solução foram:

$$P = 10^{-3} \times \begin{bmatrix} 0,1464 & 0,0085 \\ 0,0085 & 0,2468 \end{bmatrix},$$

$$Z_1 = \begin{bmatrix} 0,7780 & 0,0227 \\ 0,0227 & 0,0207 \end{bmatrix}, \quad Z_2 = \begin{bmatrix} 0,7472 & -0,1288 \\ -0,1288 & 0,0426 \end{bmatrix},$$

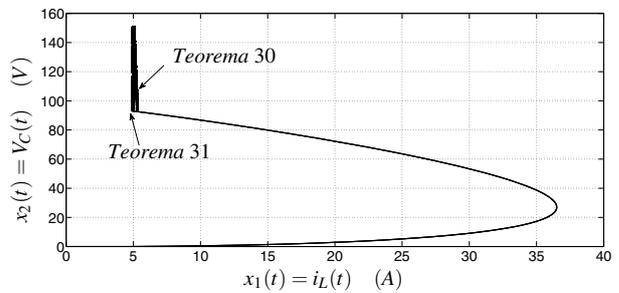
e de (110) o custo garantido obtido foi $J < (x_0 - x_r)'P(x_0 - x_r) = 5,5694$. Os resultados são ilustrados na Figura 39 para uma condição inicial $x = [i_L \ V_C]' = [0 \ 0]'$.

Figura 38 - Plano de fase do conversor Boost com taxa de decaimento $\gamma = 460$.



Fonte: elaboração do próprio autor

Figura 39 - Plano de fase do conversor Boost com taxa de decaimento $\gamma = 40$.



Fonte: elaboração do próprio autor

A Tabela 5 apresenta os resultados obtidos.

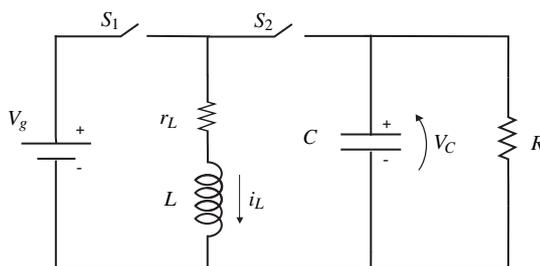
Tabela 5 - Resultados para o conversor CC-CC Boost.

	<i>Pico de corrente</i> [A]	<i>Tempo de estabelecimento</i> [ms]	<i>Custo</i> (106)
Teorema 23	36,5	7,0	0,5901
Teorema 24	36,5	50,0	5,5929
Teorema 25	36,5	7,0	0,5901
Teorema 27	36,5	10,0	0,7800
Teorema 28	36,5	8,0	0,6347
Teorema 30	36,5	60,0	5,6577
Teorema 31	36,5	60,0	5,5694

Fonte: elaboração do próprio autor

Para este conversor, note que os custos garantido obtidos com os Teoremas 28 e 31 foram menores do que os custos obtidos com os Teoremas 27 e 30, respectivamente. Este fato ilustra

Figura 40 - Conversor CC-CC Buck-Boost.



Fonte: elaboração do próprio autor

os resultados apresentados pelos Teoremas 29 e 32. Entretanto, o controlador projetado com o Teorema 31 apresentou uma partida mais suave (LEYVA et al., 2001) do conversor e um custo garantido menor.

4.1.3.3 Conversor Buck-Boost

A Figura 40 ilustra a estrutura de um conversor Buck-Boost, o qual permite tensões de saída maiores ou menores do que a tensão de entrada. O sistema chaveado em espaço de estados (101) é definido pelas seguintes matrizes (DEAECTO et al., 2010):

$$A_1 = \begin{bmatrix} -r_L/L & 0 \\ 0 & -1/RC \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -r_L/L & -1/L \\ 1/C & -1/RC \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (157)$$

De (108), o conjunto que define os pontos de equilíbrio alcançáveis (DEAECTO et al., 2010) para o conversor Buck-Boost é definido abaixo:

$$x_r = \{ [i_{Lr} \quad V_{Cr}]' : V_{Cr}^2 + (r_L R) i_{Lr}^2 - (R V_g) i_{Lr} + V_g V_{Cr} = 0, \quad 0 \leq V_{Cr} \leq R i_{Lr} \}. \quad (158)$$

Neste exemplo, foi adotado o seguinte valor de tensão de saída $V_{Cr} = 120[V]$. Então, de (158) o ponto de equilíbrio calculado é $x_r = [6 \quad 120]'$. Agora, lembrando que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, de (108) obtêm-se que $\lambda_1 = 0,6$ e $\lambda_2 = 0,4$.

Assim, dos problemas de minimização (111) e (115), correspondentes aos Teoremas 23 e 24, obtemos como uma solução $J < 0,7196$, $J < 3,5865$ e as seguintes matrizes simétricas:

$$P = 10^{-4} \times \begin{bmatrix} 0,0211 & 0,0989 \\ 0,0989 & 0,4898 \end{bmatrix}, \quad P = 10^{-3} \times \begin{bmatrix} 0,1450 & 0,0088 \\ 0,0088 & 0,2478 \end{bmatrix},$$

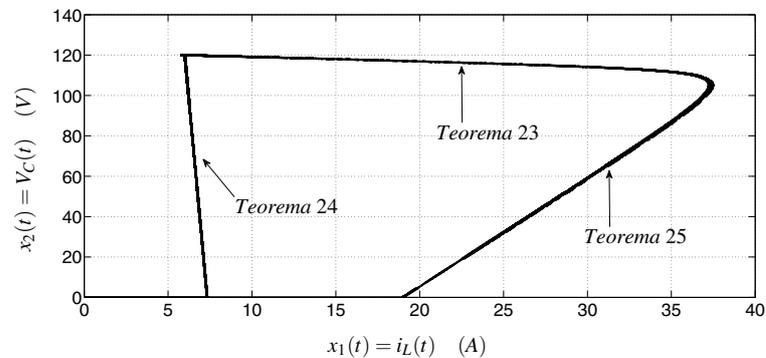
respectivamente. Agora, do problema de minimização (121), Teorema 25, obtêm-se as matrizes abaixo como uma solução, e de (110) o custo garantido $J < (x_0 - x_r)'P(x_0 - x_r) = 0,7196$:

$$P = 10^{-4} \times \begin{bmatrix} 0,0211 & 0,0990 \\ 0,0990 & 0,4898 \end{bmatrix},$$

$$N_1 = \begin{bmatrix} -0,0168 & -0,0400 \\ -0,0400 & 0,0158 \end{bmatrix}, \quad N_2 = \begin{bmatrix} 0,0253 & 0,0600 \\ 0,0600 & -0,0237 \end{bmatrix}.$$

Os resultados são ilustrados na Figura 41 para uma condição inicial $x = [i_L \ V_C]' = [0 \ 0]'$.

Figura 41 - Plano de fase do conversor Buck-Boost.



Fonte: elaboração do próprio autor

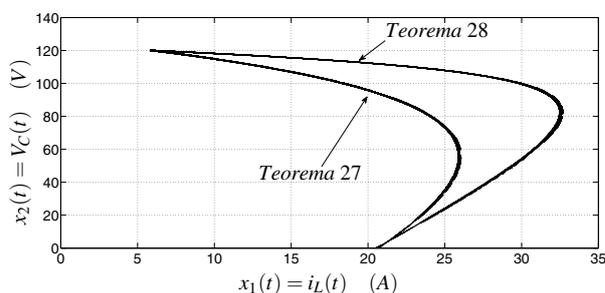
A fim de comparar o desempenho do sistema para os resultados propostos pelos Teoremas 27 e 28, adote a máxima taxa de decaimento $\gamma = 220s^{-1}$ e os mesmos parâmetros definidos anteriormente. Assim, do problema de minimização (131), Teorema 27, a seguinte matriz foi obtida como uma solução, e de (110) o custo garantido obtido foi $J < (x_0 - x_r)'P(x_0 - x_r) = 0,8724$:

$$P = 10^{-4} \times \begin{bmatrix} 0,1536 & 0,1447 \\ 0,1447 & 0,5910 \end{bmatrix},$$

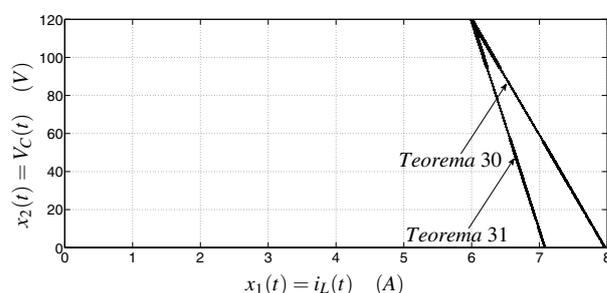
Do problema de minimização (138), Teorema 28, as matrizes obtidas como uma solução foram:

$$P = 10^{-4} \times \begin{bmatrix} 0,0447 & 0,1122 \\ 0,1122 & 0,5034 \end{bmatrix},$$

$$Z_1 = \begin{bmatrix} 0,0166 & 0,0061 \\ 0,0061 & 0,0222 \end{bmatrix}, \quad Z_2 = \begin{bmatrix} 0,0167 & 0,0061 \\ 0,0061 & 0,0222 \end{bmatrix},$$

Figura 42 - Plano de fase do conversor Buck-Boost com taxa de decaimento $\gamma = 220$.

Fonte: elaboração do próprio autor

Figura 43 - Plano de fase do conversor Buck-Boost com taxa de decaimento $\gamma = 40$.

Fonte: elaboração do próprio autor

e de (110) o custo garantido obtido foi $J < (x_0 - x_r)'P(x_0 - x_r) = 0,7412$. Os resultados são ilustrados na Figura 42 para uma condição inicial $x = [i_L \ V_C]' = [0 \ 0]'$.

Agora, a fim de comparar o desempenho do sistema para os resultados propostos pelos Teoremas 30 e 31, adote a máxima taxa de decaimento $\gamma = 40s^{-1}$ e os mesmos parâmetros definidos anteriormente. Então, do problema de minimização (143), Teorema 30, a matriz obtida como uma solução foi:

$$P = 10^{-3} \times \begin{bmatrix} 0,1433 & 0,0096 \\ 0,0096 & 0,2507 \end{bmatrix},$$

e de (110) o custo garantido obtido foi $J < (x_0 - x_r)'P(x_0 - x_r) = 3,6284$. Finalmente, do problema de minimização (149), Teorema 31, as matrizes obtidas como uma solução foram:

$$P = 10^{-3} \times \begin{bmatrix} 0,1464 & 0,0085 \\ 0,0085 & 0,2468 \end{bmatrix},$$

$$Z_1 = \begin{bmatrix} 0,7780 & 0,0227 \\ 0,0227 & 0,0207 \end{bmatrix}, \quad Z_2 = \begin{bmatrix} 0,7472 & -0,1288 \\ -0,1288 & 0,0426 \end{bmatrix},$$

e de (110) o custo garantido obtido foi $J < (x_0 - x_r)'P(x_0 - x_r) = 3,5714$. Os resultados são ilustrados na Figura 43 para uma condição inicial $x = [i_L \ V_C]' = [0 \ 0]'$. A Tabela 6 apresenta os resultados obtidos.

Dentre os resultados apresentados, note que para este conversor, os custos garantidos obtidos com os Teoremas 28 e 31 foram menores do que os custos obtidos com os Teoremas 27 e 30, respectivamente. Este fato ilustra os resultados apresentados pelos Teoremas 29 e 32. Além disso, observe que o controlador projetado com o Teorema 24 apresenta uma partida mais suave (LEYVA et al., 2001) do conversor.

Tabela 6 - Resultados para o conversor CC-CC Buck-Boost.

	<i>Pico de corrente</i> [A]	<i>Tempo de estabelecimento</i> [ms]	<i>Custo</i> (106)
Teorema 23	37,5	12,0	0,7196
Teorema 24	7,3	90,0	3,5865
Teorema 25	37,5	12,0	0,7196
Teorema 27	26,0	15,0	0,8724
Teorema 28	32,5	12,0	0,7412
Teorema 30	8,0	80,0	3,6284
Teorema 31	7,0	80,0	3,5714

Fonte: elaboração do próprio autor

As simulações ilustradas nesta seção demonstram que as estratégias de controle propostas são eficientes para o controle das três topologias de conversores CC-CC propostas neste estudo. Entretanto, um problema de grande interesse prático seria projetar uma estratégia de controle, para o sistema chaveado afim, com informações apenas da saída disponível da planta. A próxima seção, apresenta condições suficientes para a solução deste problema de controle proposto.

4.2 Sistemas chaveados afins com acesso à saída

Nesta seção, o principal objetivo é obter condições suficientes para o controle de sistemas chaveados afins, além de uma estratégia de chaveamento dependente apenas da saída disponível da planta. Desta forma, considere o sistema chaveado afim (101) - (105), sendo agora $C_i = C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $i \in \mathbb{K}_N$, definido como a matriz de saída do sistema constante para todo $t \geq 0$. O problema de controle é o seguinte:

Problema 5. Suponha que o vetor de estado $x(t) \in \mathbb{R}^n$ não está disponível, mas a saída $y(t) = Cx(t) \in \mathbb{R}^p$ está disponível para a realimentação. Determine uma função $u(\cdot) : \mathbb{R}^p \rightarrow \{1, 2, \dots, N\}$ tal que a estratégia de chaveamento (30) torne o ponto de equilíbrio conhecido $x_r \in \mathbb{R}^n$ do sistema chaveado afim (101) - (105) globalmente assintoticamente estável e também satisfaça um dado custo garantido.

Uma solução para este problema, baseada em uma função quadrática de Lyapunov e no índice de desempenho (106), é proposta a seguir.

Teorema 33. Considere o sistema chaveado afim (101) - (105) com entrada $w(t) = w$ constante para todo $t \geq 0$, seja o ponto de equilíbrio $x_r \in \mathbb{R}^n$ dado e suponha que a saída $y(t) = Cx(t) \in \mathbb{R}^p$ é disponível. Se existirem $\lambda \in \Lambda$, vetores $H_0 \in \mathbb{R}^n$, $H_i \in \mathbb{R}^p$ e uma matriz simétrica positiva

definida $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tais que

$$A_i'P + PA_i + Q_i < 0, \quad (159)$$

$$A_\lambda x_r + B_\lambda = 0, \quad (160)$$

$$P(A_i x_r + B_i w) = H_0 + C' H_i, \quad (161)$$

para todo $i \in \mathbb{K}_N$, então a estratégia de chaveamento

$$\sigma(t, y_r) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}_N} (\zeta' H_i) \quad (162)$$

sendo $Q_i = Q = C'C$, $\zeta = y - y_r$ e $y_r = Cx_r$, torna o ponto de equilíbrio $x_r \in \mathbb{R}^n$ de (101) e (105) globalmente assintoticamente estável e o custo garantido (106) mantém-se.

Demonstração. Considere a candidata a função quadrática de Lyapunov $V(\xi) = \xi' P \xi$, sendo $\xi = x - x_r$. Então, de (101), (102) e (161) têm-se para $\xi \neq 0$:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\xi(t)) &= \dot{x}' P \xi + \xi' P \dot{x} \\ &= 2\xi' P (A_\sigma x + B_\sigma w) \\ &= 2\xi' P (A_\sigma x_r + B_\sigma w) + \xi' (A_\sigma' P + P A_\sigma) \xi \\ &= 2\xi' (H_0 + C' H_\sigma) + \xi' (A_\sigma' P + P A_\sigma) \xi. \end{aligned} \quad (163)$$

Agora, multiplicando (161) por λ_i e tomando a soma de 1 até N segue que:

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i \left(P(A_i x_r + B_i w) - (H_0 + C' H_i) \right) = 0. \quad (164)$$

Assim, de (160) e (164) observe que:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \lambda_i \left(P(A_i x_r + B_i w) - (H_0 + C' H_i) \right) &= \sum_{i=1}^N \lambda_i \left(P(A_i x_r + B_i w) \right) - \sum_{i=1}^N \lambda_i (H_0 + C' H_i) \\ &= P(A_\lambda x_r + B_\lambda w) - (H_0 + C' H_\lambda) \\ &= -(H_0 + C' H_\lambda) = 0. \end{aligned} \quad (165)$$

Portanto, de (159), (162), (163) e (165),

$$\begin{aligned} \dot{V}(\xi(t)) &= 2\xi' (H_0 + C' H_\sigma) + \xi' (A_\sigma' P + P A_\sigma) \xi \\ &= 2\xi' H_0 + \min_{i \in \mathbb{K}_N} (2\xi' H_i) + \xi' (A_\sigma' P + P A_\sigma) \xi \\ &\leq 2\xi' (H_0 + C' H_\lambda) + \xi' (A_\sigma' P + P A_\sigma) \xi \\ &< -\xi' Q_\sigma \xi \leq 0. \end{aligned} \quad (166)$$

Visto que $\dot{V}(\xi) < 0$ para $\xi \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ e $\dot{V}(0) = 0$, então, o ponto de equilíbrio $\xi = x - x_r = 0$ é globalmente assintoticamente estável. Finalmente, integrando (166) de zero até o infinito e tendo em conta que $V(\xi(\infty)) = 0$, obtêm-se (110). A prova está concluída. \square

Observação 6. Note que de (162) a estratégia de chaveamento não depende do vetor de estado $x(t)$ e assim satisfaz o problema de controle proposto.

O Teorema 33 nos fornece o seguinte problema de otimização:

$$\inf_P \{ \text{Tr}(P) : (159) - (161) \text{ mantém-se para } P = P' > 0, \quad i \in \mathbb{K}_N \text{ e } \lambda \in \Lambda \}. \quad (167)$$

A fim de flexibilizar a factibilidade das LMIs do Teorema 33 proposto, uma nova condição menos conservativa é proposta no Teorema 34, a qual também permite a minimização de um limitante superior do custo quadrático definido em (110).

Teorema 34. Considere o sistema chaveado afim (101) - (105) com entrada $w(t) = w$ constante para todo $t \geq 0$, seja o ponto de equilíbrio $x_r \in \mathbb{R}^n$ dado e suponha que a saída $y(t) = Cx(t) \in \mathbb{R}^p$ é disponível. Se existirem $\lambda \in \Lambda$, matrizes simétricas $W_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $W_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$, vetores $H_0 \in \mathbb{R}^n$, $H_i \in \mathbb{R}^p$ e uma matriz simétrica positiva definida $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tais que

$$A_i'P + PA_i + Q_i < W_0 + C'W_iC, \quad (168)$$

$$A_\lambda x_r + B_\lambda = 0, \quad (169)$$

$$W_0 + C'W_\lambda C < 0, \quad (170)$$

$$P(A_i x_r + B_i w) = H_0 + C'H_i, \quad (171)$$

para todo $i \in \mathbb{K}_N$, então a estratégia de chaveamento

$$\sigma(t, y_r) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}_N} (2\zeta'H_i + \zeta'W_i\zeta) \quad (172)$$

sendo $Q_i = Q = C'C$, $\zeta = y - y_r$ e $y_r = Cx_r$, torna o ponto de equilíbrio $x_r \in \mathbb{R}^n$ de (101) - (105) globalmente assintoticamente estável e o custo garantido (106) mantém-se.

Demonstração. Considere (101), (102), (168), (171), (172) e a candidata a função quadrática de Lyapunov $V(\xi) = \xi'P\xi$, sendo $\xi = x - x_r$. Então, para $\xi \neq 0$:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\xi(t)) &= \dot{x}'P\xi + \xi'P\dot{x} \\ &= 2\xi'P(A_\sigma x + B_\sigma w) \\ &= 2\xi'P(A_\sigma x_r + B_\sigma w) + \xi'(A_\sigma'P + PA_\sigma + Q_\sigma)\xi - \xi'Q_\sigma\xi \\ &< 2\xi'P(A_\sigma x_r + B_\sigma w) + \xi'(W_0 + C'W_\sigma C)\xi - \xi'Q_\sigma\xi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2\xi'(H_0 + C'H_\sigma) + \xi'(W_0 + C'W_\sigma C)\xi - \xi'Q_\sigma\xi \\
&= 2\xi'H_0 + \xi'W_0\xi + \min_{i \in \mathbb{K}_N} \{2\zeta'H_i + \zeta'W_i\zeta\} - \xi'Q_\sigma\xi.
\end{aligned} \tag{173}$$

Note que, multiplicando (171) por λ_i e tomando a soma de 1 até N segue que $P(A_\lambda x_r + B_\lambda w) - (H_0 + C'H_\lambda) = 0$. Assim de (169), $H_0 + C'H_\lambda = 0$ para $\lambda \in \Lambda$ (veja a prova do Teorema 33 para detalhes). Desta forma, de (172), (170) e $\xi \neq 0$,

$$\dot{V}(\xi(t)) \leq 2\xi'(H_0 + C'H_\lambda) + \xi'(W_0 + C'W_\lambda C)\xi - \xi'Q_\sigma\xi < -\xi'Q_\sigma\xi \leq 0. \tag{174}$$

Visto que $\dot{V}(\xi) < 0$ para $\xi \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ e $\dot{V}(0) = 0$, então, o ponto de equilíbrio $\xi = x - x_r$ é globalmente assintoticamente estável. Finalmente, integrando (174) de zero até o infinito e tendo em conta que $V(\xi(\infty)) = 0$, obtêm-se (110). A prova está concluída. \square

Observação 7. Novamente, note que de (172) a estratégia de chaveamento não depende do vetor de estado $x(t)$ e assim satisfaz o problema de controle proposto.

O Teorema 34 nos fornece o seguinte problema de otimização:

$$\inf_P \{Tr(P) : (168) - (171) \text{ mantém-se para algum } P = P' > 0, \quad i \in \mathbb{K}_N \text{ e } \lambda \in \Lambda\}. \tag{175}$$

O teorema a seguir compara as condições dos Teoremas 33 e 34 propostos.

Teorema 35. Se as condições do Teorema 33 mantêm-se, então as condições do Teorema 34 também mantêm-se.

Demonstração. Suponha que as condições (159), (160) e (161) do Teorema 33 sejam factíveis. Então, de (159) note que existe $P = P' > 0$ e uma pequena constante $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta < 0$, tal que para todo $i \in \mathbb{K}_N$,

$$A_i'P + PA_i + Q_i - \beta I_n < 0. \tag{176}$$

Agora, de (176), para $W_0 = \beta I_n$ e $W_i = 0$, $i \in \mathbb{K}_N$, observe que as condições (168) e (170) do Teorema 34 mantêm-se se a condição (159) do Teorema 33 mantêm-se:

$$A_i'P + PA_i + Q_i - W_0 - C'W_iC = A_i'P + PA_i + Q_i - \beta I_n < 0, \tag{177}$$

$$W_0 + C'W_\lambda C = W_0 + C' \left(\sum_{i=1}^N \lambda_i W_i \right) C = W_0 = \beta I_n < 0. \tag{178}$$

Finalmente, note que (160), (161) e (169), (171) são condições equivalentes e a prova está concluída. \square

4.2.1 Exemplo 6 (Conversor CC-CC Sepic)

Esta subseção é dedicada a aplicar os resultados teóricos obtidos nos Teoremas 33 e 34 propostos, para o controle de um conversor CC-CC SEPIC (do inglês *SINGLE-ENDED PRIMARY INDUCTOR CONVERTER*), descrito na Figura 44. O objetivo principal é analisar a convergência das variáveis de estado durante a partida do conversor. O conversor opera em modo de condução contínua (MCC). Para este conversor, considere que $i_{L1}(t)$ e $i_{L2}(t)$ denotam as correntes nos indutores e $V_{C1}(t)$ e $V_{C2}(t)$ as tensões sobre os capacitores, que novamente são adotadas como variáveis de estado do sistema:

$$x(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t) \ x_4(t)]' = [i_{L1}(t) \ i_{L2}(t) \ V_{C1}(t) \ V_{C2}(t)]'. \quad (179)$$

Considere também o seguinte ponto de operação, definido a seguir:

$$x_r = \left[\begin{array}{cccc} x_{1r}(t) & x_{2r}(t) & x_{3r}(t) & x_{4r}(t) \end{array} \right]' = \left[\begin{array}{cccc} i_{L1r}(t) & i_{L2r}(t) & V_{C1r}(t) & V_{C2r}(t) \end{array} \right]'. \quad (180)$$

O conversor é modelado com as resistências parasitas em série com os indutores. O *solver* utilizado foi o LMILab do *software* MATLAB.

Observação 8. (COVACIC et al., 2012) Como o software, Matlab, não executa Equações Lineares Matriciais (do inglês LMEs), as equações (161) e (171) podem ser aproximada por m LMIs, dadas respectivamente por:

$$\left[\begin{array}{cc} \varepsilon^2 & (P(A_i x_r + B_i w) - H_0 - C' H_i)' l_k' \\ l_k (P(A_i x_r + B_i w) - H_0 - C' H_i) & I \end{array} \right] > 0, \quad (181)$$

com $\varepsilon \approx 0$, para todo $i \in \mathbb{K}_N$ e $k = \{1, \dots, m\}$, sendo

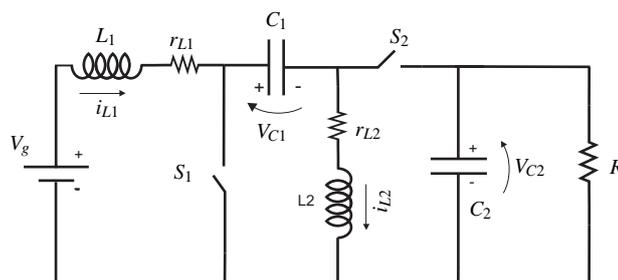
$$l_1 = \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \dots & 0 \end{array} \right], \quad l_2 = \left[\begin{array}{cccc} 0 & 1 & \dots & 0 \end{array} \right], \quad \dots \quad l_m = \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & \dots & 1 \end{array} \right]. \quad (182)$$

Para os exemplos propostos nesta subseção foi adotado $\varepsilon = 1 \times 10^{-5}$. Os parâmetros de projeto são os seguintes:

$$\begin{aligned} V_g &= 100[V], & R &= 50[\Omega], & r_{L1} &= 2[\Omega], & r_{L2} &= 3[\Omega], \\ L_1 &= 2,7[mH], & L_2 &= 1,6[\mu H], & C_1 &= 470[\mu F], & C_2 &= 800[\mu F]. \end{aligned} \quad (183)$$

Considere que $Q_i = Q = C' C$, $i \in \mathbb{K}_N$. Os projetos e resultados de simulações são apresentados a seguir.

Figura 44 - Conversor CC-CC SEPIC.



Fonte: elaboração do próprio autor

4.2.1.1 Conversor Sepic

A Figura 44 ilustra a estrutura de um conversor Sepic. O conversor Sepic foi desenvolvido pela empresa *AT&AT Bell laboratories* (MASSEY; SNYDER, 1977) nos anos 70 e ele é caracterizado por ser capaz de operar como um elevador ou abaixador de tensão. Sua vantagem é devido ao fato deste conversor não ser afetado pelo problema da inversão de polaridade do capacitor de saída V_{C2} (VUTHCHHAY; PINSOPON; BUNLAKSANANUSORN, 2009). Adicionalmente, as aplicações do conversor Sepic são em sistemas elétricos de distribuição e baterias recarregáveis, por exemplo, uma bateria de lítio. Então, da Figura 44, o conversor Sepic pode ser descrito por um sistema chaveado afim (101) - (105) com as seguintes matrizes:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -\frac{r_{L1}}{L_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{r_{L2}}{L_2} & -\frac{1}{L_2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_{L1}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{RC_{L2}} \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -\frac{r_{L1}}{L_1} & 0 & -\frac{1}{L_1} & -\frac{1}{L_1} \\ 0 & -\frac{r_{L2}}{L_2} & 0 & \frac{1}{L_2} \\ \frac{1}{C_{L1}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{C_{L2}} & -\frac{1}{C_{L2}} & 0 & -\frac{1}{RC_{L2}} \end{bmatrix},$$

$$C_1 = C_2 = C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \left[\frac{1}{L_1} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right]', \quad B_2 = \left[\frac{1}{L_1} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \right]'. \quad (184)$$

O conjunto de todos os pontos de equilíbrio atingíveis pelo conversor CC-CC Sepic é calculado como segue:

$$x_r = \left\{ [i_{L1r} \ i_{L2r} \ V_{C1r} \ V_{C2r}]' : i_{L1r} = \frac{(r_{L2} + R)V_{C2r}^2}{(RV_{C1r} - r_{L2}V_{C2r})R}, \quad i_{L2r} = -\frac{V_{C2r}}{R}, \right.$$

$$R^2V_{C1r}^2 - R(2V_{C2r}r_{L2} + V_gR)V_{C1r} + (r_{L1}R + r_{L1}r_{L2} + r_{L2}^2)V_{C2r}^2 + V_gRr_{L2}V_{C2r} = 0 \}. \quad (185)$$

Neste exemplo, a fim de comparar os resultados dos Teoremas 23, 24, 33 e 34, adote $V_{C2r} = 150[V]$. De (185), o ponto de equilíbrio calculado é $x_r = [5, 34 \quad -3, 00 \quad 98, 31 \quad 150]'$. Assim, de (108) e lembrando que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ obtêm-se $\lambda_1 = 0, 6403$ e $\lambda_2 = 0, 3597$. Então, do problema de minimização (111), correspondente ao Teorema 23 (DEAECTO et al., 2010), uma solução obtida foi $J = x_r'Px_r < 93, 21$ e a seguinte matriz:

$$P = \begin{bmatrix} 0,0019 & -0,0004 & 0,0001 & 0,0019 \\ -0,0004 & 0,0001 & -0,0000 & -0,0007 \\ 0,0001 & -0,0000 & 0,0000 & 0,0002 \\ 0,0019 & -0,0007 & 0,0002 & 0,0037 \end{bmatrix}.$$

Agora, do problema de minimização (115), correspondente ao Teorema 24 (DEAECTO et al., 2010), a solução obtida foi $J = x_r'Px_r < 525, 27$ e a seguinte matriz:

$$P = \begin{bmatrix} 0,0236 & -0,0134 & 0,0004 & 0,0021 \\ -0,0134 & 0,0151 & 0,0021 & -0,0007 \\ 0,0004 & 0,0021 & 0,0035 & -0,0000 \\ 0,0021 & -0,0007 & -0,0000 & 0,0217 \end{bmatrix}.$$

Considerando somente $y(t) \in \mathbb{R}^p$, disponível para realimentação, do problema de minimização (167), correspondente ao Teorema 33 proposto, uma solução obtida foi $J = x_r'Px_r < 4121$ e as seguintes matrizes:

$$P = \begin{bmatrix} 1,2817 & 0,3524 & 0,1581 & 0,1162 \\ 0,3524 & 0,1981 & 0,0789 & 0,0254 \\ 0,1581 & 0,0789 & 0,1228 & 0,0101 \\ 0,1162 & 0,0254 & 0,0101 & 0,1034 \end{bmatrix}, \quad H_0 = 10^3 \times \begin{bmatrix} -5,3643 \\ 0,0000 \\ -0,0000 \\ -1,1540 \end{bmatrix},$$

$$H_1 = 10^4 \times \begin{bmatrix} 2,6648 & 0,3129 \end{bmatrix}', \quad H_2 = 10^4 \times \begin{bmatrix} -3,2524 & -0,2362 \end{bmatrix}'.$$

Considerando os mesmos parâmetros anteriores, ou seja $\lambda_1 = 0, 6403$ e $\lambda_2 = 0, 3597$, do problema de minimização (175) relacionado ao Teorema 34, uma solução obtida foi $J = x_r'Px_r <$

341,15 e as seguintes matrizes:

$$P = \begin{bmatrix} 0,0642 & 0,0170 & 0,0071 & 0,0162 \\ 0,0170 & 0,0095 & 0,0037 & 0,0019 \\ 0,0071 & 0,0037 & 0,0038 & 0,0009 \\ 0,0162 & 0,0019 & 0,0009 & 0,0110 \end{bmatrix},$$

$$W_0 = 10^5 \times \begin{bmatrix} -1,5123 & 0,0000 & 0,0000 & 1,2215 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 1,2215 & 0,0000 & 0,0000 & -7,1102 \end{bmatrix},$$

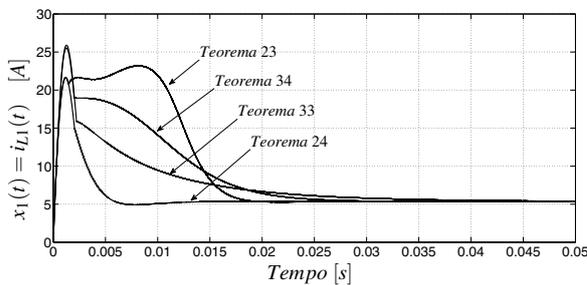
$$W_1 = 10^5 \times \begin{bmatrix} 1,5120 & -1,2216 \\ -1,2216 & 7,1102 \end{bmatrix}, \quad W_2 = 10^5 \times \begin{bmatrix} 1,5128 & -1,2214 \\ -1,2214 & 7,1102 \end{bmatrix},$$

$$H_0 = \begin{bmatrix} 10,4254 & 0,0000 & 0,0000 & -515,1174 \end{bmatrix}',$$

$$H_1 = 10^3 \times \begin{bmatrix} 1,0589 & 0,8973 \end{bmatrix}', \quad H_2 = 10^3 \times \begin{bmatrix} -1,9140 & -0,1653 \end{bmatrix}'.$$

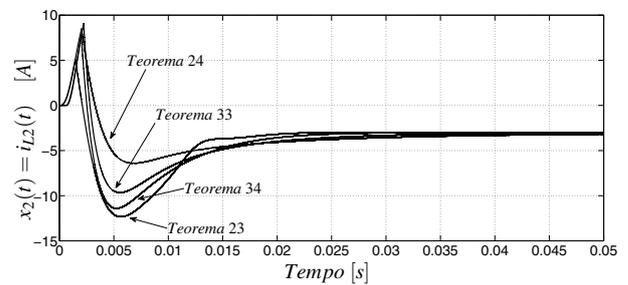
Os resultados de simulações para o conversor Sepic são ilustrados nas Figuras 45–48 para uma condição inicial $x(0) = [i_{L1} \quad i_{L2} \quad V_{CL1} \quad V_{CL2}]' = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]'$.

Figura 45 - Corrente no indutor do conversor Sepic: $x_1(t) = i_{L1}(t)$.



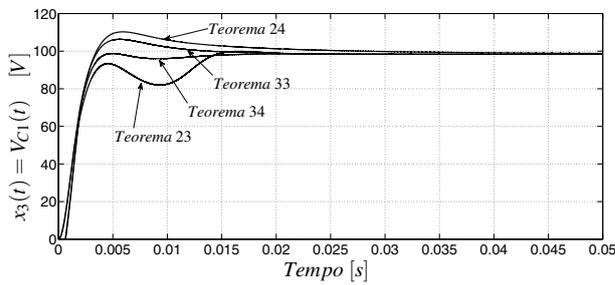
Fonte: elaboração do próprio autor

Figura 46 - Corrente no indutor do conversor Sepic: $x_2(t) = i_{L2}(t)$.



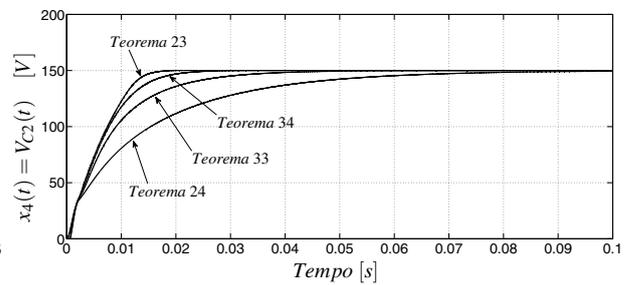
Fonte: elaboração do próprio autor

Figura 47 - Tensão no capacitor de entrada do conversor Sepic: $x_3(t) = V_{C1}(t)$.



Fonte: elaboração do próprio autor

Figura 48 - Tensão no capacitor de saída do conversor Sepic: $x_4(t) = V_{C2}(t)$.



Fonte: elaboração do próprio autor

A Tabela 7 apresenta os resultados obtidos, considerando os métodos de projeto de controladores descritos pelos Teoremas 23, 24, 33 e 34.

Tabela 7 - Resultados para o converter CC-CC Sepic.

Teoremas	Tempo de estabelecimento da tensão [ms]	Custo garantido (106)
Teorema 23	20,0	93,21
Teorema 24	90,0	525,27
Teorema 33	50,0	4121
Teorema 34	30,0	341,15

Fonte: elaboração do próprio autor

Dos resultados apresentados e considerando que somente a saída da planta $y(t) = Cx(t)$ é disponível, note que para este conversor o custo garantido obtido pelo problema de minimização (175), Teorema 34, foi menor que o obtido pelo problema de minimização (167), Teorema 33, que apresenta condições mais conservadoras. Entretanto, observe que o Teorema 23 apresentou o menor custo garantido, porém foi considerado que o vetor de estado $x(t)$ estava disponível para implementação da estratégia de controle.

Os controladores propostos nas Seções 3.1 e 3.2, asseguram que para um dado ponto de equilíbrio $x_r \in \mathbb{R}^n$, o sistema controlado é globalmente assintoticamente estável. Entretanto, note que estes controladores operam com uma frequência de chaveamento infinita (no caso de um chaveamento ideal), a qual não pode ser implementada em sistemas práticos. Este fenômeno de chaveamento não ideal é conhecido como *chattering*. No entanto, os componentes de alta frequência ocasionados pelo *chattering* são indesejáveis, pois esses podem excitar dinâmicas de alta frequência na planta que não foram modeladas, o que pode resultar em comportamentos inadequados ou na instabilidade do sistema.

Desta forma, vários métodos de redução da frequência de chaveamento são atualmente utilizados em eletrônica de potência para eliminar os efeitos do *chattering*, por exemplo, histerese por amplitude variável, sincronização com flip-flops (um sinal de relógio é definido e funciona na frequência de operação desejada pelo projetista), injeção de perturbação, dentre outros (veja Cardoso et al. (1992), Agostinelli et al. (2011), Cardim et al. (2011b) para maiores detalhes). Contudo, é importante destacar que a análise utilizando chaveamento ideal (frequência infinita) é um passo necessário no projeto dos controladores, visto que seu uso evita análises mais complexas relativas ao chaveamento não ideal. Além disso, a idealização de frequência infinita tem a enorme vantagem de prever com uma melhor precisão o comportamento real do controlador implementado.

Na seção seguinte, novos métodos de projeto de controladores são propostos, a fim de assegurar uma frequência de operação constante e finita para os conversores CC-CC.

4.3 Controle de sistemas chaveados afins com chaveamento não ideal

Considere o sistema chaveado afim (101)-(105) definido em sua realização no espaço de estados como apresentado em Deaecto et al. (2010). Então, o problema de controle proposto é descrito a seguir.

Problema 6. Seja $T > 0$ uma constante de amostragem de tempo dada. Determine uma estratégia de chaveamento $\sigma(t) = \sigma(x(kT))$, para $kT \leq t \leq (k+1)T$, $k = 0, 1, 2, \dots$, que torne um ponto de equilíbrio conhecido $x = x_r$ de (101) - (105) uniformemente *ultimate bounded* (CORLESS; LEITMANN, 1981).

Observação 9. Dizer que a estratégia de chaveamento $\sigma(t) = \sigma(x(kT))$, para $kT \leq t \leq (k+1)T$, $k = 0, 1, 2, \dots$ torna o sistema (101) e (102) uniformemente “ultimate bounded” é equivalente a dizer que as variáveis de estado do sistema não convergem necessariamente para a origem do sistema $x = 0$ e sim para uma região fechada e limitada em torno desta origem.

É bem conhecido da teoria de Controle por Estrutura Variável (CEV) com modos deslizantes, que se um ponto de equilíbrio de um sistema controlado é assintoticamente estável para uma estratégia de chaveamento ideal, então supondo uma frequência de chaveamento finita e suficientemente grande, o sistema controlado também converge para uma vizinhança do ponto de equilíbrio. Este resultado é conhecido como *ultimate boundedness* (CORLESS; LEITMANN, 1981). Uma razão para este fato é que, quando o sistema controlado por uma estratégia de chaveamento ideal, entra em uma superfície de deslizamento, a ordem do sistema é então reduzida e o subsistema resultante converge para um ponto de equilíbrio assintoticamente estável,

devido ao ponto de equilíbrio do sistema controlado ser suposto assintoticamente estável. Entretanto, para uma estratégia de chaveamento não ideal, o sistema controlado converge para uma vizinhança da superfície de deslizamento, e como o subsistema é BIBO (*Bounded Input, Bounded Output, BIBO*) estável, suas variáveis de estado serão limitadas e o chaveamento não ideal conduz a trajetória no espaço de estados para uma vizinhança do ponto de equilíbrio.

Uma solução que assegura estabilidade uniforme *ultimate bounded* (CORLESS; LEITMANN, 1981) para as condições de projeto apresentada pelo Teorema 24, que considera $x(t) \in \mathbb{R}^n$ disponível para realimentação e Teorema 33 que considera apenas $y(t) = Cx(t) \in \mathbb{R}^p$ disponível para realimentação, é proposta no Teorema 36 a seguir. Por simplicidade de exposição considere que $Q_i = Q = C'C \geq 0$ para todo $i \in \mathbb{K}_N$.

Teorema 36. *O ponto de equilíbrio $x_r \in \mathbb{R}^n$ do sistema chaveado afim (101)-(105) é uniformemente ultimate bounded para uma estratégia de chaveamento arbitrária $\sigma(t) = \sigma(kT)$, $kT \leq t < (k+1)T$ e $k = 0, 1, 2, \dots$, para toda constante de amostragem de tempo $T > 0$, se existir uma matriz simétrica positiva definida $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tal que*

$$A_i'P + PA_i < 0, \quad (186)$$

para todo $i \in \mathbb{K}_N$.

Demonstração. Considere a candidata a função quadrática de Lyapunov $V(\xi) = \xi'P\xi$, sendo $\xi = x - x_r$ e x_r o ponto de equilíbrio desejado do sistema (101)-(105). Agora, de (101)-(105) e (186), para $\xi(t) \neq 0$, segue que:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\xi(t)) &= \dot{\xi}(t)'P\xi(t) + \xi(t)'P\dot{x}(t) \\ &= 2\xi(t)'P(A_\sigma x(t) + B_\sigma w) \\ &= 2\xi(t)'P(A_\sigma x_r + B_\sigma w) + \xi(t)'(A_\sigma'P + PA_\sigma)\xi(t) \\ &\leq -\varepsilon_1 \|\xi(t)\|^2 + \varepsilon_2 \|\xi(t)\|, \end{aligned} \quad (187)$$

sendo que $-\varepsilon_1 < 0$ denota o máximo autovalor de $(A_i'P + PA_i)$, $i \in \mathbb{K}_N$ e $\varepsilon_2 > 0$ representa o valor máximo de $\|2P(A_i x_r + B_i w)\|$, $i \in \mathbb{K}_N$ sendo $\|\xi(t)\| = \sqrt{\xi(t)'\xi(t)}$. Logo, para $\xi(x(t)) \neq 0$ então, $\dot{V}(\xi(t)) < 0$ se $\|\xi(t)\| > \varepsilon_2/\varepsilon_1$ e assim de acordo com (CORLESS; LEITMANN, 1981) o sistema controlado é uniformemente *ultimate bounded*. A prova está completa. \square

Observação 10. *Observe que o Teorema 36 assegura que as estratégias de chaveamento provenientes dos Teoremas 24, 30, 31 e 33 tornam o sistema controlado uniformemente “ultimate bounded”, pois como $Q_i \geq 0$ e $P > 0$, então as condições destes teoremas satisfazem a equação (186), para todo $i \in \mathbb{K}_N$.*

Observação 11. Note que a estratégia de chaveamento não ideal $\sigma(t) = \sigma(kT)$, $kT \leq t < (k+1)T$ e $k = 0, 1, 2, \dots$ proposta pelo Teorema 36, conduz a trajetória do sistema controlado (101)-(105) no espaço de estados para uma vizinhança do ponto de equilíbrio. Então, da equação (106) observe que para $t \rightarrow \infty$, o custo garantido do sistema controlado pela estratégia de chaveamento não ideal $\sigma(t) = \sigma(kT)$, $kT \leq t < (k+1)T$ e $k = 0, 1, 2, \dots$ é infinito. Assim, para o caso de um chaveamento não ideal, o custo garantido do sistema controlado pode ser interpretado como o custo necessário para o sistema convergir para uma vizinhança (normalmente bastante próxima) do ponto de equilíbrio.

Agora, observe que a análise proposta pelo Teorema 36, não assegura diretamente a estabilidade para as estratégias de chaveamentos descritas pelos Teoremas 23, 27, 28 e 34, devido à condição (186) não ser necessariamente factível para todo $i \in \mathbb{K}_N$.

Uma solução, é apresentada no Teorema 37 a seguir, o qual propõe condições que asseguram estabilidade uniforme *ultimate bounded* (CORLESS; LEITMANN, 1981) para as mesmas condições impostas pelo Teorema 23, considerando especificamente a estratégia de chaveamento (109), com $\sigma(t) = \sigma(kT)$, $kT \leq t < (k+1)T$ e $k = 0, 1, 2, \dots$. Para a análise destes resultados, considere inicialmente o lema proposto a seguir.

Lema 4.1. Seja uma função diferenciável $\mathcal{W}(t)$, uma constante de amostragem de tempo $T > 0$, uma constante $t_1 > 0$ e suponha que $\mathcal{W}(t_1) < 0$. Então, $\mathcal{W}(t) < 0$ para todo $t \in [t_1, t_1 + T)$ se:

$$-\mathcal{W}(t_1) > T\dot{\mathcal{W}}(t), \quad t \in [t_1, t_1 + T). \quad (188)$$

Demonstração. De (188), note que, para $t \in [t_1, t_1 + T)$:

$$-\mathcal{W}(t_1) - T\dot{\mathcal{W}}(t) > 0. \quad (189)$$

Então de (188) e (189), observe que para todo $t \in [t_1, t_1 + T)$:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^t (-\mathcal{W}(t_1) - T\dot{\mathcal{W}}(t)) dt &= -(t - t_1)\mathcal{W}(t_1) - T(\mathcal{W}(t) - \mathcal{W}(t_1)) \\ &= (-t + t_1 + T)\mathcal{W}(t_1) - T\mathcal{W}(t) \geq 0. \end{aligned} \quad (190)$$

Assim, de (190) segue que:

$$\mathcal{W}(t) \leq \frac{(-t + t_1 + T)\mathcal{W}(t_1)}{T} < 0, \quad t \in [t_1, t_1 + T), \quad (191)$$

pois da hipótese $\mathcal{W}(t_1) < 0$, $T > 0$ e como $t \in [t_1, t_1 + T)$, então $(-t + t_1 + T) > 0$. Assim, a condição $\mathcal{W}(t) < 0$ para todo $t \in [t_1, t_1 + T)$ mantém-se e o lema está demonstrado. \square

Baseado no Lema 4.1 apresentado anteriormente, é proposto o Teorema 37 que assegura a estabilidade uniforme *ultimate bounded* (CORLESS; LEITMANN, 1981), para as mesmas condições de projeto apresentadas pelo Teorema 23.

Teorema 37. *Considere o sistema chaveado afim (101)-(105) com entrada $w(t) \in \mathbb{R}^n$ constante para todo $t \geq 0$. Suponha o vetor $x(t) \in \mathbb{R}^n$ disponível para realimentação, seja o ponto de equilíbrio $x_r \in \mathbb{R}^n$ e uma constante de tempo de amostragem T suficientemente pequena dados. Se existirem $\lambda \in \Lambda$ e uma matriz simétrica positiva definida $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tais que*

$$A'_\lambda P + PA_\lambda + Q_\lambda < 0, \quad (192)$$

$$A_\lambda x_r + B_\lambda w = 0, \quad (193)$$

$$T(2A'_i P A_i + P A_i A_i + A'_i A'_i P) + (A'_\lambda P + PA_\lambda + Q_\lambda) < 0, \quad (194)$$

para todo $i \in \mathbb{K}_N$, então a estratégia de chaveamento (109), considerando uma frequência de chaveamento finita, dada por:

$$\sigma(t, x_r) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}_N} \xi(kT)' (Q_i \xi(kT) + 2P(A_i x(kT) + B_i w)), \quad kT \leq t < (k+1)T, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (195)$$

sendo $Q_i = C'_i C_i$ e $\xi(kT) = x(kT) - x_r$, torna o ponto de equilíbrio $x_r \in \mathbb{R}^n$ uniformemente *ultimated bounded*.

Demonstração. Considere a candidata a função de Lyapunov $V(\xi(t)) = \xi(t)' P \xi(t)$. Então, de (101)-(105) e $\xi(t) = x(t) - x_r$ note que para $\xi(t) \neq 0$:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\xi(t)) &= 2\xi(t)' P (A_\sigma x(t) + B_\sigma w) \\ &= 2\xi(t)' P (A_\sigma \xi(t) + (A_\sigma x_r + B_\sigma w)). \end{aligned} \quad (196)$$

Agora, como $Q_\sigma \geq 0$, de (192), (193), (195) e (196) têm-se para $\xi(kT) \neq 0$:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\xi(kT)) &= 2\xi(kT)' P (A_\sigma \xi(kT) + A_\sigma x_r + B_\sigma w) \\ &= 2\xi(kT)' P (A_\sigma \xi(kT) + A_\sigma x_r + B_\sigma w) + \xi(kT)' Q_\sigma \xi(kT) - \xi(kT)' Q_\sigma \xi(kT) \\ &= \min_{i \in \mathbb{K}_N} \{2\xi(kT)' P (A_i \xi(kT) + A_i x_r + B_i w) + \xi(kT)' Q_i \xi(kT)\} - \xi(kT)' Q_\sigma \xi(kT) \\ &\leq 2\xi(kT)' P (A_\lambda \xi(kT) + A_\lambda x_r + B_\lambda w + \frac{Q_\lambda}{2} \xi(kT)) - \xi(kT)' Q_\sigma \xi(kT) \\ &= 2\xi(kT)' P (A_\lambda \xi(kT) + \frac{Q_\lambda}{2} \xi(kT)) - \xi(kT)' Q_\sigma \xi(kT) \\ &\leq 2\xi(kT)' P (A_\lambda \xi(kT) + \frac{Q_\lambda}{2} \xi(kT)) \\ &= \xi(kT)' (A'_\lambda P + PA_\lambda + Q_\lambda) \xi(kT) < 0. \end{aligned} \quad (197)$$

Seguindo, considere (196) e a estratégia de chaveamento dada em (195). De (101)-(105) e (196), a derivada segunda da candidata a função de Lyapunov $V(\xi(t)) = \xi(t)'P\xi(t)$, para $kT \leq t < (k+1)T$ é dada por:

$$\begin{aligned}\dot{V}(\xi(t)) &= 2\dot{\xi}(t)'P(A_{\sigma}\xi(t) + (A_{\sigma}x_r + B_{\sigma}w)) + 2\xi(t)'PA_{\sigma}\dot{\xi}(t) \\ &= 2(A_{\sigma}\xi(t) + (A_{\sigma}x_r + B_{\sigma}w))'P(A_{\sigma}\xi(t) + (A_{\sigma}x_r + B_{\sigma}w)) \\ &\quad + 2\xi(t)'PA_{\sigma}(A_{\sigma}\xi(t) + (A_{\sigma}x_r + B_{\sigma}w)) = \xi(t)'(2A_{\sigma}'PA_{\sigma} + 2PA_{\sigma}A_{\sigma})\xi(t) \\ &\quad + \xi(t)'(4A_{\sigma}'P(A_{\sigma}x_r + B_{\sigma}w) + 2PA_{\sigma}(A_{\sigma}x_r + B_{\sigma}w)) + 2(A_{\sigma}x_r + B_{\sigma}w)'P(A_{\sigma}x_r + B_{\sigma}w). \quad (198)\end{aligned}$$

Posteriormente, considere $\mathcal{W}(t) = \dot{V}(\xi(t))$ e $t_1 = kT$. Logo, como de (197) $\mathcal{W}(t_1) = \dot{V}(\xi(kT)) < 0$, têm-se pelo Lema 4.1 que se para $\xi(kT) \neq 0$:

$$-\mathcal{W}(t_1) = -\dot{V}(\xi(kT)) > T\dot{V}(\xi(t)), \quad t \in [kT, kT + T), \quad (199)$$

então, $\dot{V}(\xi(t)) < 0$ para todo $t \in [kT, kT + T)$. Agora, da estratégia de chaveamento definida em (195), note que $\sigma(t, x_r)$ é constante para o intervalo $kT \leq t < (k+1)T$. Neste contexto, de (101)-(105) e definindo $\xi = x - x_r$, sendo x_r o ponto de equilíbrio desejado, segue para $kT \leq t < (k+1)T$:

$$\dot{\xi}(t) = A_{\sigma(kT)}\xi(t) + (A_{\sigma(kT)}x_r + B_{\sigma(kT)}w). \quad (200)$$

Deste modo, de (200):

$$\begin{aligned}\xi(t) &= e^{A_{\sigma(kT)}(t-kT)}\xi(kT) + \int_{kT}^t (e^{A_{\sigma(kT)}(t-s)}(A_{\sigma(kT)}x_r + B_{\sigma(kT)}w))ds, \\ &\quad t \in [kT, kT + T). \quad (201)\end{aligned}$$

Agora, para uma constante de tempo de amostragem T suficientemente pequena, observe que para $kT \leq t < (k+1)T$:

$$\begin{aligned}e^{A_{\sigma(kT)}(t-kT)} &= I + A_{\sigma(kT)}(t-kT) + \frac{(A_{\sigma(kT)}(t-kT))^2}{2!} + \frac{(A_{\sigma(kT)}(t-kT))^3}{3!} + \dots \\ &\approx I + A_{\sigma(kT)}(t-kT). \quad (202)\end{aligned}$$

Então, de (201), (202), T suficientemente pequena e $\|\xi(kT)\|$ suficientemente grande:

$$\begin{aligned}\xi(t) &\approx (I + A_{\sigma(kT)}(t-kT))\xi(kT) + \int_{kT}^t (I + A_{\sigma(kT)}(t-s))(A_{\sigma(kT)}x_r + B_{\sigma(kT)}w)ds \\ &= (I + A_{\sigma(kT)}(t-kT))\xi(kT) + (I + A_{\sigma(kT)}t)(A_{\sigma(kT)}x_r + B_{\sigma(kT)}w)(t-kT) \\ &\quad - \frac{(t^2 - (kT)^2)}{2}A_{\sigma(kT)}(A_{\sigma(kT)}x_r + B_{\sigma(kT)}w) \approx (I + A_{\sigma(kT)}(t-kT))\xi(kT),\end{aligned}$$

$$kT \leq t < (k+1)T, \quad (203)$$

levando em conta que $t^2 - (kT)^2 = (t+kT)(t-kT)$. Seguindo, de (197), (198) e (199) observe que para $\|\xi(kT)\|$ suficientemente grande e T suficientemente pequeno, $-\dot{V}(\xi(kT)) - T\dot{V}(\xi(t)) > 0$, para $t \in [kT, kT+T)$ é satisfeita se:

$$-\xi(kT)'(A'_\lambda P + PA_\lambda + Q_\lambda)\xi(kT) - T\xi(t)'(2A'_\sigma PA_\sigma + PA_\sigma A_\sigma + A'_\sigma A'_\sigma P)\xi(t) > 0, \quad (204)$$

pois de (197), $A'_\lambda P + PA_\lambda + Q_\lambda < 0$. Logo, de (201)-(204), supondo T suficientemente pequena e $\|\xi(kT)\|$ suficientemente grande, obtêm-se para $t \in [kT, kT+T)$:

$$\begin{aligned} & -\xi(kT)'(A'_\lambda P + PA_\lambda + Q_\lambda)\xi(kT) - T\xi(t)'(2A'_\sigma PA_\sigma + PA_\sigma A_\sigma + A'_\sigma A'_\sigma P)\xi(t) \\ & \quad \approx -\xi(kT)'(A'_\lambda P + PA_\lambda + Q_\lambda)\xi(kT) \\ & \quad - T(I + A_{\sigma(kT)}(t-kT))\xi(kT)'(2A'_\sigma PA_\sigma + PA_\sigma A_\sigma + A'_\sigma A'_\sigma P)(I + A_{\sigma(kT)}(t-kT))\xi(kT) \\ & \quad \approx -\xi(kT)'(A'_\lambda P + PA_\lambda + Q_\lambda)\xi(kT) - T\xi(kT)'(2A'_\sigma PA_\sigma + PA_\sigma A_\sigma + A'_\sigma A'_\sigma P)\xi(kT) > 0, \end{aligned} \quad (205)$$

sendo que de (197), $A'_\lambda P + PA_\lambda + Q_\lambda < 0$. Assim, pelo Lema 4.1, $\dot{V}(\xi(t)) < 0$ para $t \in [kT, kT+T)$ e $\|\xi(kT)\|$ suficientemente grande. Então, $x_r \in \mathbb{R}^n$ é um ponto de equilíbrio uniformemente *ultimate bounded* (CORLESS; LEITMANN, 1981). A prova está concluída. \square

Observação 12. Veja a Observação 11 para maiores detalhes sobre o custo garantido do sistema (101)-(105) controlado pela estratégia de chaveamento não ideal (195) com $kT \leq t < (k+1)T$, $k = 0, 1, 2, \dots$

Baseado no Teorema 37 e no Lema 4.1, é proposto o Teorema 38, que fornece especificamente a estratégia de chaveamento (172), dependente apenas da saída disponível da planta, com $\sigma(t, y_r) = \sigma(kT, y_r)$, $kT \leq t < (k+1)T$, $k = 0, 1, 2, \dots$, o qual assegura estabilidade uniforme *ultimate bounded* (CORLESS; LEITMANN, 1981) para as mesmas condições de projeto apresentadas pelo Teorema 34.

Teorema 38. Considere o sistema chaveado afim (101)-(105) com entrada $w(t) \in \mathbb{R}^n$ constante para todo $t \geq 0$. Suponha a saída $y(t) = Cx(t) \in \mathbb{R}^p$ disponível, seja o ponto de equilíbrio $x_r \in \mathbb{R}^n$ e uma constante de amostragem de tempo T suficientemente pequena dados. Se existirem $\lambda \in \Lambda$, matrizes simétricas $W_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $W_i \in \mathbb{R}^{p \times p}$, vetores $H_0 \in \mathbb{R}^n$, $H_i \in \mathbb{R}^p$ e uma matriz simétrica positiva definida $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tais que

$$A'_i P + PA_i + Q_i < W_0 + C'W_i C, \quad (206)$$

$$A_\lambda x_r + B_\lambda = 0, \quad (207)$$

$$W_0 + C'W_\lambda C < 0, \quad (208)$$

$$P(A_i x_r + B_i w) = H_0 + C'H_i, \quad (209)$$

$$T(2A_i'PA_i + PA_iA_i + A_i'A_i'P) + (W_0 + C'W_\lambda C) < 0, \quad (210)$$

para todo $i \in \mathbb{K}_N$, então a estratégia de chaveamento (172), considerando uma frequência de chaveamento finita, dada por:

$$\sigma(t, y_r) = \arg \min_{i \in \mathbb{K}_N} (2\zeta(kT)'H_i + \zeta(kT)'W_i\zeta(kT)), \quad kT \leq t < (k+1)T, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (211)$$

sendo $Q_i = Q = C'C$ e $\zeta(kT) = y(kT) - y_r$, torna o ponto de equilíbrio $x_r \in \mathbb{R}^n$ de (101) - (105) uniformemente ultimate bounded.

Demonstração. Considere a candidata a função de Lyapunov $V(\xi(t)) = \xi(t)'P\xi(t)$. Então, de (101)-(105) note que para $\xi(t) \neq 0$:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\xi(t)) &= 2\xi(t)'P(A_\sigma x(t) + B_\sigma w) \\ &= 2\xi(t)'P(A_\sigma \xi(t) + A_\sigma x_r + B_\sigma w). \end{aligned} \quad (212)$$

Agora, como $Q_\sigma = Q \geq 0$, de (206), (209) e (212), têm-se para $\xi(kT) \neq 0$:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\xi(kT)) &= 2\xi(kT)'P(A_\sigma \xi(kT) + A_\sigma x_r + B_\sigma w) \\ &= 2\xi(kT)'P(A_\sigma x_r + B_\sigma w) + \xi(kT)'(A_\sigma'P + PA_\sigma + Q_\sigma)\xi(kT) - \xi(kT)'Q_\sigma\xi(kT) \\ &< 2\xi(kT)'P(A_\sigma x_r + B_\sigma w) + \xi(kT)'(W_0 + C'W_\sigma C)\xi(kT) - \xi(kT)'Q_\sigma\xi(kT) \\ &= 2\xi(kT)'P(H_0 + C'H_\sigma) + \xi(kT)'(W_0 + C'W_\sigma C)\xi(kT) - \xi(kT)'Q_\sigma\xi(kT) \\ &\leq 2\xi(kT)'P(H_0 + C'H_\sigma) + \xi(kT)'(W_0 + C'W_\sigma C)\xi(kT) \\ &= \min_{i \in \mathbb{K}_N} \{2\xi(kT)'P(H_0 + C'H_i) + \xi(kT)'(W_0 + C'W_i C)\xi(kT)\}. \end{aligned} \quad (213)$$

Note que, multiplicando (209) por λ_i e tomando a soma de 1 até N segue que $P(A_\lambda x_r + B_\lambda w) - (H_0 + C'H_\lambda) = 0$. Assim de (207), $H_0 + C'H_\lambda = 0$ para $\lambda \in \Lambda$ (veja a prova do Teorema 33 para detalhes). Desta forma, de (213), (208) e $\xi(kT) \neq 0$,

$$\begin{aligned} \dot{V}(\xi(kT)) &\leq 2\xi(kT)'(H_0 + C'H_\lambda) + \xi(kT)'(W_0 + C'W_\lambda C)\xi(kT) \\ &= \xi(kT)'(W_0 + C'W_\lambda C)\xi(kT) < 0. \end{aligned} \quad (214)$$

Seguindo, considere (212) e a estratégia de chaveamento dada em (211). De (101)-(105) e (212), tem-se a derivada segunda da candidata a função de Lyapunov $V(\xi(t)) = \xi(t)'P\xi(t)$

para $kT \leq t < (k+1)T$,

$$\begin{aligned} \dot{V}(\xi(t)) &= \xi(t)'(2A'_\sigma PA_\sigma + 2PA_\sigma A_\sigma)\xi(t) \\ &+ \xi(t)'(4A'_\sigma P(A_\sigma x_r + B_\sigma w) + 2PA_\sigma(A_\sigma x_r + B_\sigma w)) + 2(A_\sigma x_r + B_\sigma w)'P(A_\sigma x_r + B_\sigma w), \end{aligned} \quad (215)$$

(veja a prova do Teorema 37 para detalhes). Posteriormente, considere $\mathcal{W}(t) = \dot{V}(\xi(t))$ e $t_1 = kT$. Logo, como de (214) $\mathcal{W}(t_1) = \dot{V}(\xi(kT)) < 0$, têm-se pelo Lema 4.1 que se para $\xi(kT) \neq 0$:

$$-\mathcal{W}(t_1) = -\dot{V}(\xi(kT)) > T\dot{V}(\xi(t)), \quad t \in [kT, kT+T), \quad (216)$$

então, $\dot{V}(\xi(t)) < 0$ para todo $t \in [kT, kT+T)$. Agora, da estratégia de chaveamento definida em (211), note que $\sigma(t, y_r)$ é constante para o intervalo $kT \leq t < (k+1)T$. Seguindo, de (214), (215) e (216), observe que para $\|\xi(kT)\|$ suficientemente grande e T suficientemente pequeno, $-\dot{V}(\xi(kT)) - T\dot{V}(\xi(t)) > 0$, para $t \in [kT, kT+T)$ é satisfeita se:

$$-\xi(kT)'(W_0 + C'W_\lambda C)\xi(kT) - T\xi(t)'(2A'_\sigma PA_\sigma + PA_\sigma A_\sigma + A'_\sigma A'_\sigma P)\xi(t) > 0, \quad (217)$$

pois de (208), $W_0 + C'W_\lambda C < 0$.

Logo, de (201)-(203), supondo T suficientemente pequena e $\|\xi(kT)\|$ suficientemente grande, de (217) obtêm-se para $t \in [kT, kT+T)$:

$$\begin{aligned} &-\xi(kT)'(W_0 + C'W_\lambda C)\xi(kT) - T\xi(t)'(2A'_\sigma PA_\sigma + PA_\sigma A_\sigma + A'_\sigma A'_\sigma P)\xi(t) \\ &\quad \approx -\xi(kT)'(W_0 + C'W_\lambda C)\xi(kT) \\ &-\ T(I + A_{\sigma(kT)}(t - kT))\xi(kT)'(2A'_\sigma PA_\sigma + PA_\sigma A_\sigma + A'_\sigma A'_\sigma P)(I + A_{\sigma(kT)}(t - kT))\xi(kT) \\ &\approx -\xi(kT)'(W_0 + C'W_\lambda C)\xi(kT) - T\xi(kT)'(2A'_\sigma PA_\sigma + PA_\sigma A_\sigma + A'_\sigma A'_\sigma P)\xi(kT) > 0, \end{aligned} \quad (218)$$

sendo que de (208), $W_0 + C'W_\lambda C < 0$. Assim, pelo Lema 4.1, $\dot{V}(\xi(t)) < 0$ para $t \in [kT, kT+T)$ e $\|\xi(kT)\|$ suficientemente grande. Então, $x_r \in \mathbb{R}^n$ é um ponto de equilíbrio uniformemente *ultimate bounded* (CORLESS; LEITMANN, 1981). A prova está concluída. \square

Observação 13. *Veja a Observação 11 para maiores detalhes sobre o custo garantido do sistema (101)-(105) controlado pela estratégia de chaveamento não ideal (211) com $kT \leq t < (k+1)T$, $k = 0, 1, 2, \dots$*

4.3.1 Exemplo 7 (Conversor CC-CC Sepic com chaveamento não ideal)

Esta subseção é dedicada a aplicar os resultados teóricos obtidos nos Teoremas 36, 37 e 38 propostos, para o controle de um conversor CC-CC Sepic. O objetivo principal é analisar

a convergência dos estados durante a partida do conversor, operando com uma frequência fixa. Desta forma, um flip-flop (tipo D) é acoplado na saída do sinal de controle $\sigma(t)$. O flip-flop garante um sinal bem definido em sua saída, com um mínimo tempo de chaveamento, controlado pelo relógio, assegurando assim uma frequência de chaveamento finita tal que o sistema controlado converge para a vizinhança do ponto de equilíbrio desejado. A frequência do relógio adotada é de 200kHz. O conversor opera em modo de condução contínua (MCC). Para este conversor, considere novamente que $i_{L1}(t)$ e $i_{L2}(t)$ denotam as correntes nos indutores e $V_{C1}(t)$ e $V_{C2}(t)$ as tensões sobre os capacitores, que são adotadas como variáveis de estado do sistema (veja a Seção 4.2.1, Exemplo 6, para detalhes). O *solver* utilizado foi o LMILab do *software* MATLAB.

Observação 14. Como o software, Matlab, não executa LMEs, as equações (161), (171) e (209) podem ser aproximada por m LMIs (veja a Observação 8 para maiores detalhes).

Para o exemplo proposto nesta subseção foi adotado $\varepsilon = 1 \times 10^{-5}$. Os parâmetros de projeto são dados em (183), mas para comodidade do leitor estes são novamente descritos abaixo:

$$\begin{aligned} V_g = 100[V], \quad R = 50[\Omega], \quad r_{L1} = 2[\Omega], \quad r_{L2} = 3[\Omega], \\ L_1 = 2,7[mH], \quad L_2 = 1,6[mH], \quad C_1 = 470[\mu F], \quad C_2 = 800[\mu F]. \end{aligned} \quad (219)$$

Para simplificar a exposição, suponha que $Q_i = Q = C'C$. Os projetos e resultados de simulações são apresentados a seguir.

Considere a Figura 44, que ilustra a estrutura de um conversor Sepic. Então, da Figura 44, o conversor Sepic pode ser descrito por um sistema chaveado afim (101) - (105) com as seguintes matrizes dadas por (184):

$$A_1 = \begin{bmatrix} -\frac{r_{L1}}{L_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{r_{L2}}{L_2} & -\frac{1}{L_2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_{L1}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{RC_{L2}} \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -\frac{r_{L1}}{L_1} & 0 & -\frac{1}{L_1} & -\frac{1}{L_1} \\ 0 & -\frac{r_{L2}}{L_2} & 0 & \frac{1}{L_2} \\ \frac{1}{C_{L1}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{C_{L2}} & -\frac{1}{C_{L2}} & 0 & -\frac{1}{RC_{L2}} \end{bmatrix},$$

$$C_1 = C_2 = C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}', \quad B_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{L_1} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}'.$$

O conjunto de todos os pontos de equilíbrio atingíveis pelo conversor CC-CC Sepic é descrito por (185):

$$x_r = \left\{ [i_{L1r} \ i_{L2r} \ V_{C1r} \ V_{C2r}]' : i_{L1r} = \frac{(r_{L2} + R)V_{C2r}^2}{(RV_{C1r} - r_{L2}V_{C2r})R}, \quad i_{L2r} = -\frac{V_{C2r}}{R}, \right.$$

$$\left. R^2V_{C1r}^2 - R(2V_{C2r}r_{L2} + V_gR)V_{C1r} + (r_{L1}R + r_{L1}r_{L2} + r_{L2}^2)V_{C2r}^2 + V_gRr_{L2}V_{C2r} = 0 \right\}.$$

Neste exemplo, a fim de comparar os resultados dos Teoremas 36, 37 e 38, adote $V_{C2r} = 150[V]$. De (185), o ponto de equilíbrio calculado é $x_r = [5,34 \ -3,00 \ 98,31 \ 150]'$, e de (108), lembrando que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, obtêm-se $\lambda_1 = 0,6403$ e $\lambda_2 = 0,3597$.

Agora, defina uma constante de amostragem de tempo $T = 5\mu s$ e considere que o Teorema 24, $x(t) \in \mathbb{R}^n$ disponível para realimentação, mantêm-se. Então do Teorema 36 uma solução obtida foi $J = x_r' P x_r < 525,27$ e a seguinte matriz:

$$P = \begin{bmatrix} 0,0236 & -0,0134 & 0,0003 & 0,0021 \\ -0,0134 & 0,0151 & 0,0021 & -0,0007 \\ 0,0003 & 0,0021 & 0,0035 & -0,0000 \\ 0,0021 & -0,0007 & -0,0000 & 0,0217 \end{bmatrix}.$$

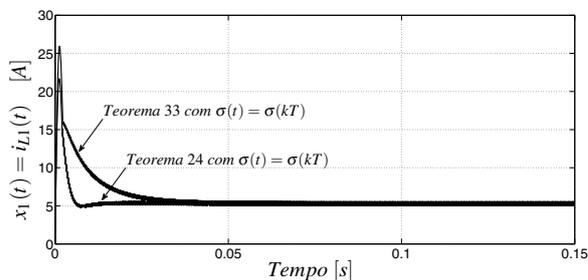
Seguindo, considere $T = 5\mu s$ e que o Teorema 33, $y(t) = Cx(t) \in \mathbb{R}^p$ disponível para realimentação, mantêm-se. Do Teorema 36, uma solução obtida foi $J = x_r' P x_r < 4120$ e as seguintes matrizes:

$$P = \begin{bmatrix} 1,2814 & 0,3523 & 0,1580 & 0,1161 \\ 0,3523 & 0,1980 & 0,0789 & 0,0253 \\ 0,1580 & 0,0789 & 0,1228 & 0,0101 \\ 0,1161 & 0,0253 & 0,0101 & 0,1034 \end{bmatrix}, \quad H_0 = 10^3 \times \begin{bmatrix} -5,3839 \\ -0,0000 \\ 0,0000 \\ 0,3372 \end{bmatrix},$$

$$H_1 = 10^4 \times \begin{bmatrix} 2,6663 & 0,1638 \end{bmatrix}', \quad H_2 = 10^4 \times \begin{bmatrix} -3,2496 & -0,3853 \end{bmatrix}'.$$

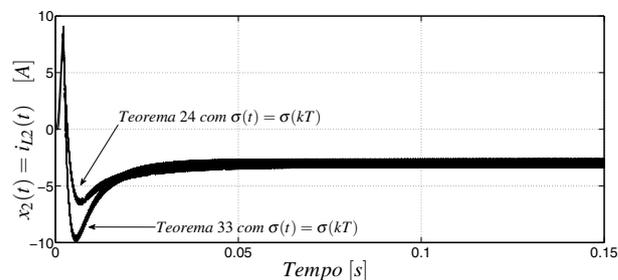
Os resultados de simulações são ilustrados nas Figuras 49–52 para uma condição inicial $x(0) = [i_{L1} \ i_{L2} \ V_{CL1} \ V_{CL2}]' = [0 \ 0 \ 0 \ 0]'$.

Figura 49 - Corrente $x_1(t) = i_{L1}(t)$ no indutor do conversor Sepic operando com chaveamento não ideal.



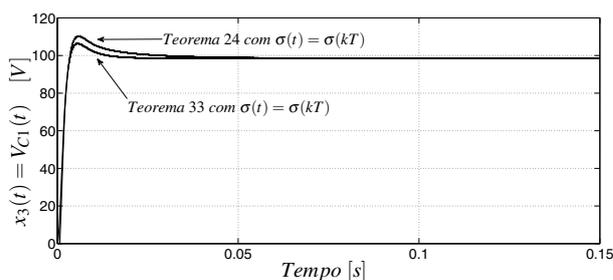
Fonte: elaboração do próprio autor

Figura 50 - Corrente $x_2(t) = i_{L2}(t)$ no indutor do conversor Sepic operando com chaveamento não ideal.



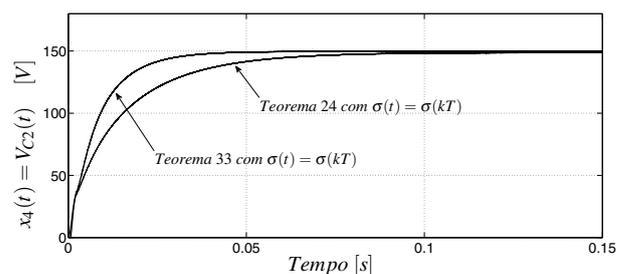
Fonte: elaboração do próprio autor

Figura 51 - Tensão $x_3(t) = V_{C1}(t)$ no capacitor de entrada do conversor Sepic operando com chaveamento não ideal.



Fonte: elaboração do próprio autor

Figura 52 - Tensão $x_4(t) = V_{C2}(t)$ no capacitor de saída do conversor Sepic operando com chaveamento não ideal.



Fonte: elaboração do próprio autor

A Tabela 8 apresenta os resultados obtidos, considerando os métodos de projeto de controladores descritos pelos Teoremas 24, 33, e 36.

Tabela 8 - Resultados para o converter CC-CC Sepic operando com chaveamento ideal (Teoremas 24 e 33) e não ideal (Teorema 36).

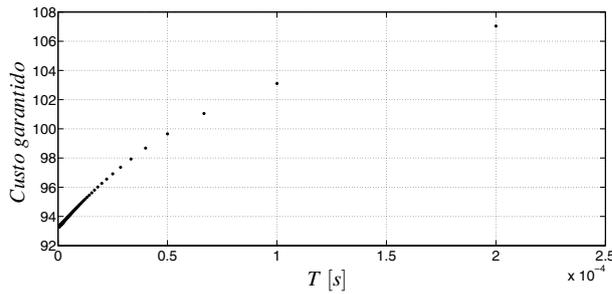
Teoremas	Chaveamento ideal		Chaveamento não ideal	
	T_e [ms]	Custo garantido (106)	T_e [ms]	Custo garantido (106)
Teorema 24	90	525,27	90	525,27
Teorema 33	50	4120	50	4120

Fonte: elaboração do próprio autor

Do resultado apresentado pela Tabela 8, note que para este conversor o custo obtido pelos teoremas propostos foram iguais. Este fato ilustra os resultados apresentados pelo Teorema 36.

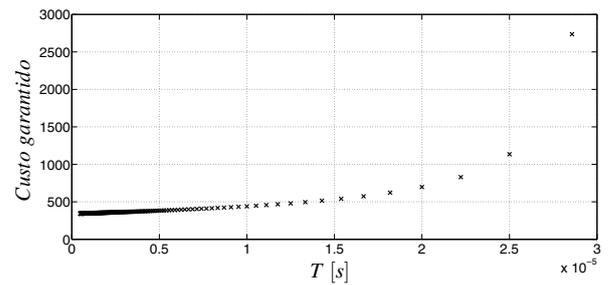
Agora, a fim de comparar os resultados dos Teoremas 37 e 38 propostos, considere os mesmos parâmetros de projeto anterior. No entanto, observe das inequações (194) e (210), que existe uma relação entre a constante de amostragem de tempo T e o custo garantido do sistema. Assim, dos Teoremas 37 e 38, para vários valores de T , obtêm-se as seguintes soluções ilustradas nas Figuras 53 e 54.

Figura 53 - Relação custo x constante de amostragem de tempo - Teorema 37.



Fonte: elaboração do próprio autor

Figura 54 - Relação custo x constante de amostragem de tempo - Teorema 38.



Fonte: elaboração do próprio autor

Então, para obter uma relação entre o custo e a constante de amostragem de tempo T , foi adotado $T = 5\mu s$. Assim, do Teorema 37, uma solução obtida foi $J = x_r' P x_r < 94,03$ e a matriz:

$$P = \begin{bmatrix} 0,0019 & -0,0004 & 0,0001 & 0,0019 \\ -0,0004 & 0,0002 & -0,0000 & -0,0007 \\ 0,0001 & -0,0000 & 0,0000 & 0,0002 \\ 0,0019 & -0,0007 & 0,0002 & 0,0037 \end{bmatrix}.$$

Seguindo, do Teorema 38, uma solução obtida foi $J = x_r' P x_r < 382,45$ e as seguintes matrizes:

$$P = \begin{bmatrix} 0,0768 & 0,0203 & 0,0088 & 0,0185 \\ 0,0203 & 0,0113 & 0,0046 & 0,0025 \\ 0,0088 & 0,0046 & 0,0048 & 0,0010 \\ 0,0185 & 0,0025 & 0,0010 & 0,0121 \end{bmatrix},$$

$$W_0 = 10^6 \times \begin{bmatrix} 0,2230 & -0,0000 & -0,0000 & 0,2335 \\ -0,0000 & -0,0000 & -0,0000 & -0,0000 \\ -0,0000 & -0,0000 & -0,0000 & -0,0000 \\ 0,2335 & -0,0000 & -0,0000 & -1,2172 \end{bmatrix},$$

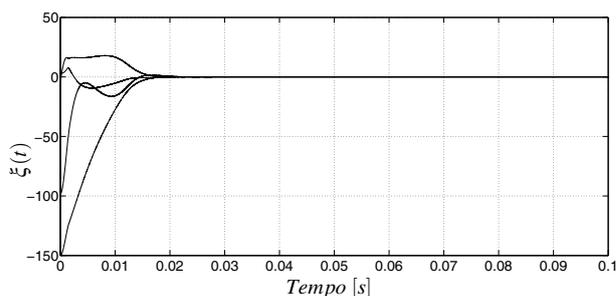
$$W_1 = 10^6 \times \begin{bmatrix} -0,2230 & -0,2335 \\ -0,2335 & 1,2172 \end{bmatrix}, \quad W_2 = 10^6 \times \begin{bmatrix} -0,2229 & -0,2334 \\ -0,2334 & 1,2172 \end{bmatrix},$$

$$H_0 = 10^3 \times \begin{bmatrix} -1,0139 & 0,0000 & -0,0000 & 0,5672 \end{bmatrix}',$$

$$H_1 = 10^3 \times \begin{bmatrix} 2,2965 & -0,1471 \end{bmatrix}', \quad H_2 = 10^3 \times \begin{bmatrix} -1,2692 & -1,3150 \end{bmatrix}'.$$

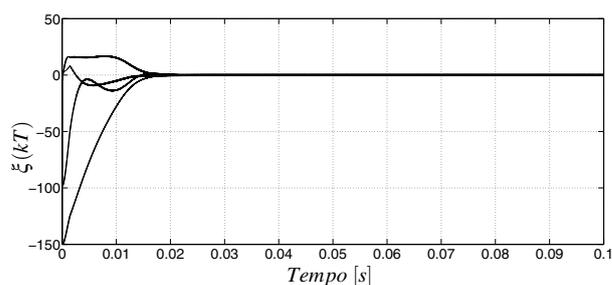
Entretanto, dos Teoremas 37 e 38, note que pela hipótese T é suficientemente pequeno, tal que a aproximação descrita em (203), $\xi(t) \approx \xi(kT)$, $t \in [kT, kT + T)$ possa ser adotada. As Figuras 55 - 58 evidenciam a qualidade desta aproximação.

Figura 55 - Elementos do vetor $\xi(t) = x(t) - x_r$ para o conversor Sepic operando com chaveamento ideal - Teorema 23.



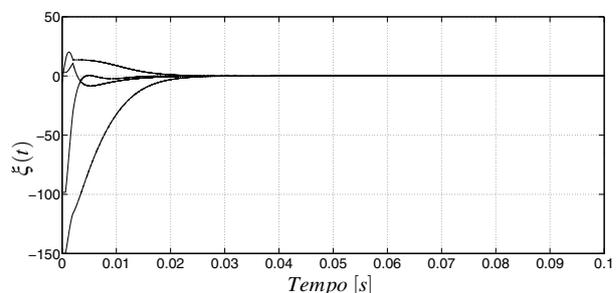
Fonte: elaboração do próprio autor

Figura 56 - Elementos do vetor $\xi(kT) = x(kT) - x_r$ para o conversor Sepic operando com chaveamento não ideal - Teorema 37.



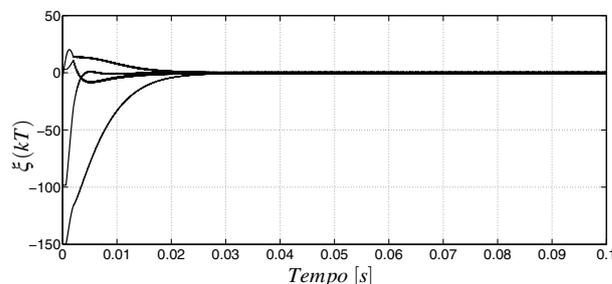
Fonte: elaboração do próprio autor

Figura 57 - Elementos do vetor $\xi(t) = x(t) - x_r$ para o conversor Sepic operando com chaveamento ideal - Teorema 34.



Fonte: elaboração do próprio autor

Figura 58 - Elementos do vetor $\xi(kT) = x(kT) - x_r$ para o conversor Sepic operando com chaveamento não ideal - Teorema 38.



Fonte: elaboração do próprio autor

Agora, de (184) e (219), para $T = 5\mu s$, $\sigma(t) \in \{1, 2\}$, $t \in [kT, kT + T)$ observe que a aproximação descrita em (202) utilizada para a análise do sistema controlado com chaveamento

não ideal foi satisfeita para $t = (k+1)T$:

$$e^{A_1 T} = \begin{bmatrix} 0,9963 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,9907 & -0,0031 & 0 \\ 0 & 0,0106 & 1,0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,9999 \end{bmatrix},$$

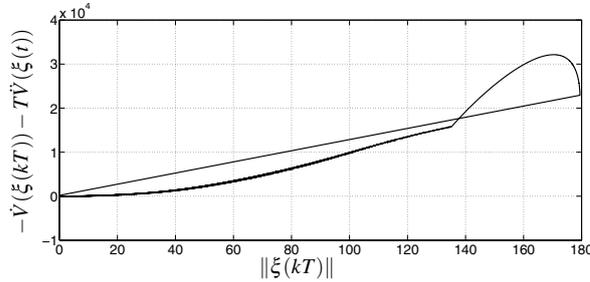
$$I + A_1 T = \begin{bmatrix} 0,9963 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,9906 & -0,0031 & 0 \\ 0 & 0,0106 & 1,0000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,9999 \end{bmatrix} \approx e^{A_1 T} \approx I,$$

$$e^{A_2 T} = \begin{bmatrix} 0,9963 & 0 & -0,0018 & -0,0018 \\ 0 & 0,9907 & 0 & 0,0031 \\ 0,0106 & 0 & 1,0000 & 0 \\ 0,0062 & -0,0062 & 0 & 0,9999 \end{bmatrix},$$

$$I + A_2 T = \begin{bmatrix} 0,9963 & 0 & -0,0019 & -0,0019 \\ 0 & 0,9906 & 0 & 0,0031 \\ 0,0106 & 0 & 1,0000 & 0 \\ 0,0063 & -0,0063 & 0 & 0,9999 \end{bmatrix} \approx e^{A_2 T} \approx I. \quad (220)$$

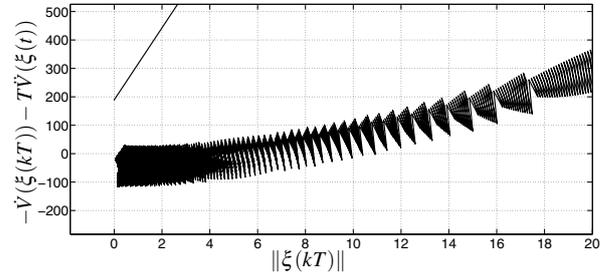
Assim, (220) justifica que pela hipótese T é suficientemente pequeno, tal que a aproximação (203) possa ser adotada. Ademais, de (202), (203), (204), (217), T suficientemente pequeno tal que $\xi(t) \approx \xi(kT)$, $t \in [kT, kT+T)$ e para uma condição inicial $x(0) = [i_{L1} \ i_{L2} \ V_{CL1} \ V_{CL2}]' = [0 \ 0 \ 0 \ 0]'$, obtêm-se as Figuras 59-62.

Figura 59 - Análise da aproximação descrita em (204) - Teorema 37 - chaveamento não ideal.



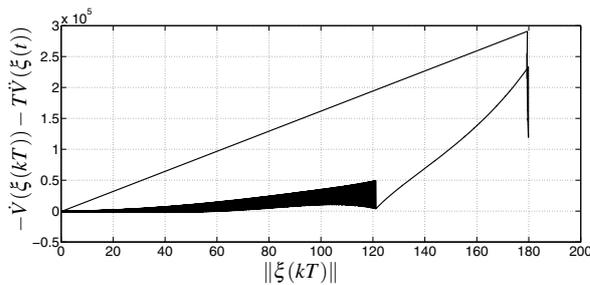
Fonte: elaboração do próprio autor

Figura 60 - Amplificação para análise da aproximação descrita em (204) - Teorema 37 - chaveamento não ideal.



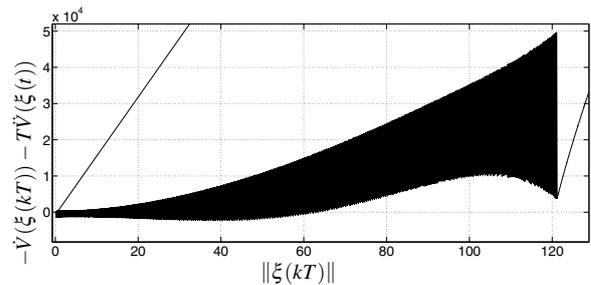
Fonte: elaboração do próprio autor

Figura 61 - Análise da aproximação descrita em (217) - Teorema 38 - chaveamento não ideal.



Fonte: elaboração do próprio autor

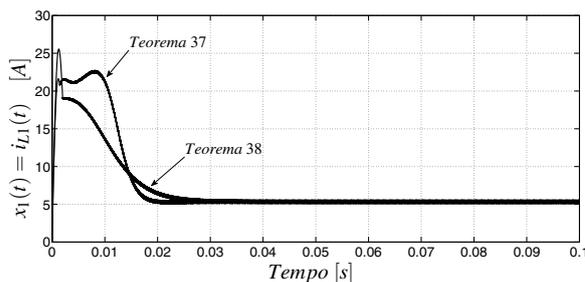
Figura 62 - Amplificação para análise da aproximação descrita em (217) - Teorema 38 - chaveamento não ideal.



Fonte: elaboração do próprio autor

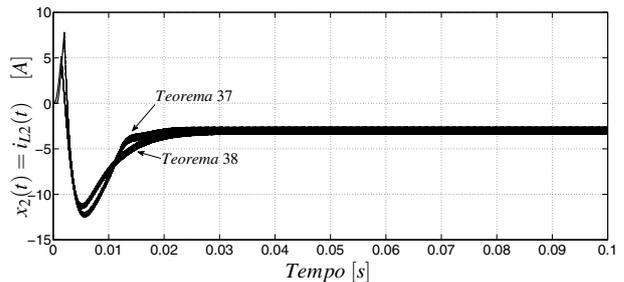
Das Figuras 59-62, note que para $\|\xi(kT)\|$ suficientemente grande temos que $-\dot{V}(\xi(kT)) - T\ddot{V}(t) > 0$, e então as aproximações descritas em (204) e (217) são satisfeitas para a análise do sistema controlado com chaveamento não ideal. Os resultados de simulações para o conversor Sepic, operando com chaveamento não ideal, são ilustrados nas Figuras 63–66 para uma condição inicial $x(0) = [i_{L1} \ i_{L2} \ V_{CL1} \ V_{CL2}]' = [0 \ 0 \ 0 \ 0]'$.

Figura 63 - Corrente $x_1(t) = i_{L1}(t)$ no indutor do conversor Sepic operando com chaveamento não ideal.



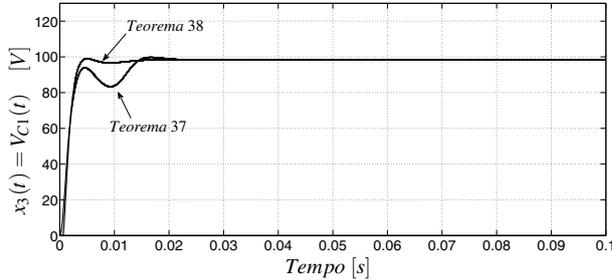
Fonte: elaboração do próprio autor

Figura 64 - Corrente $x_2(t) = i_{L2}(t)$ no indutor do conversor Sepic operando com chaveamento não ideal.



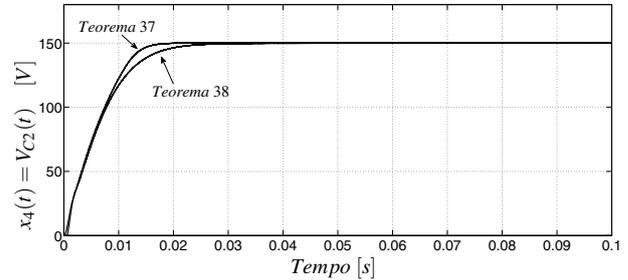
Fonte: elaboração do próprio autor

Figura 65 - Tensão $x_3(t) = V_{C1}(t)$ no capacitor de entrada do conversor Sepic operando com chaveamento não ideal.



Fonte: elaboração do próprio autor

Figura 66 - Corrente $x_4(t) = V_{C2}(t)$ no capacitor de saída do conversor Sepic operando com chaveamento não ideal.



Fonte: elaboração do próprio autor

Tabela 9 - Resultados para o converter CC-CC Sepic operando com chaveamento ideal e não ideal.

Teoremas	Chaveamento ideal		Chaveamento não ideal	
	T_e [ms]	Custo garantido (106)	T_e [ms]	Custo garantido (106)
Teorema 23	20	93,21	-	-
Teorema 34	30	341,15	-	-
Teorema 37	-	-	20	94,03
Teorema 38	-	-	30	382,45

Fonte: elaboração do próprio autor

Do resultado apresentado pela Tabela 9, note que para este conversor os custos obtidos pelo Teoremas 37 e 38 (chaveamento não ideal) foram maiores que os obtidos pelos Teoremas 23 e 34 (chaveamento ideal), porém foi considerada uma constante de tempo de amostragem T na implementação da estratégia de controle.

Como esperado pode-se observar através das simulações apresentadas nesta seção, que os requisitos de desempenho para o conversor CC-CC SEPIC considerando os casos: frequência de chaveamento limitada (chaveamento não ideal) e frequência de chaveamento não limitada (chaveamento ideal), são satisfeitos. No entanto, pode-se observar também que quando o conversor opera com uma frequência de chaveamento limitada, o método de projeto proposto leva a uma redução da dinâmica do conversor, que conseqüentemente faz com que o vetor de estado convirja para uma pequena vizinhança do ponto de equilíbrio. Assim, as simulações demonstram que as estratégias de chaveamento propostas são eficazes para o controle do conversor CC-CC proposto neste estudo.

4.4 Conclusões Parciais

Neste capítulo foi apresentado um estudo sobre estabilidade e projeto de controle para sistemas chaveados afins. Com base nesta teoria, foi proposto um novo teorema para o projeto de controle de sistemas chaveados afins, o qual propõe uma flexibilidade que generaliza os Teoremas 23 e 24 de Deaecto et al. (2010). Posteriormente, para os dois teoremas descritos em Deaecto et al. (2010) foram propostas modificações a fim de incluir uma taxa de decaimento e restrições na saída do projeto dos controladores, tornando assim o procedimento mais geral. Seguindo, na Subseção 4.2, foi proposto um novo método de projeto de controladores para sistemas chaveados afins utilizando apenas a saída disponível da planta. Novas condições menos conservadoras foram obtidas e um índice de desempenho, minimização de um custo garantido, foi inserido no projeto dos controladores tornando o procedimento mais geral. A fim de generalizar as condições obtidas neste capítulo, na Seção 4.3 foram propostos resultados sobre estabilidade uniforme *ultimate bounded* (CORLESS; LEITMANN, 1981) e projeto de controladores com frequência de chaveamento limitada, para sistemas chaveados afins. Mais especificamente, três novas condições suficientes para o projeto dos controladores com frequência limitada, foram obtidas. Neste capítulo, os projetos foram baseados no critério de estabilidade de Lyapunov através de uma função quadrática e desigualdades matriciais lineares (LMIs). A teoria desenvolvida foi aplicada em quatro modelos de conversores, a saber: Buck, Boost, Buck-Boost e Sepic. Finalmente, os resultados das simulações mostraram que, quando as condições propostas pelos teoremas foram factíveis, os conversores controlados apresentaram um desempenho adequado ilustrando a utilidade desta metodologia de projeto.

5 CONTROLE COM ESTRUTURA VARIÁVEL DE SISTEMAS CHAVEADOS AFINS

Nesta seção são estudados métodos de projeto de controle com estrutura variável (CORTEZ; GALLEGOS; MORA, 1989; ITKIS, 1976; UTKIN, 1978; DRAZENOVIC, 1969) para uma classe de sistemas chaveados (LIBERZON, 2003; LIN; ANTSAKLIS, 2009; DECARLO et al., 2000; SUN; GE, 2005b; LIBERZON; MORSE, 1999; MONTAGNER; LEITE; PERES, 2004; DAAFOUZ; RIEDINGER; CLAUDE, 2001) tendo como base os resultados importantes e promissores obtidos em Deaecto et al. (2010) para sistemas chaveados afins. Primeiramente é proposta uma nova estratégia de controle utilizando estrutura variável, com aplicação em conversores CC-CC utilizados na área da eletrônica de potência (TAN; LAI; TSE, 2008). Para a análise do método de projeto proposto, a modelagem dos conversores CC-CC, será efetuada através do método do modelo médio das variáveis (KISLOVSKI; REDL; SOKAL, 1991), considerando todas as não linearidades do sistema. É importante ressaltar que o método do modelo médio das variáveis, é mais apropriado e familiar para os engenheiros de eletrônica de potência do que o proposto em Deaecto et al. (2010), o qual é baseado na teoria de sistemas chaveados afins. Seguindo, é proposta uma nova estratégia de controle robusto utilizando estrutura variável, para a classe de sistemas chaveados afins com incertezas politópicas na planta. A vantagem deste método, utilizando o modelo por estrutura variável, é que este permite o projeto de uma estratégia de controle independente dos parâmetros incertos da planta, para casos em que o método proposto em Deaecto et al. (2010) não pode ser diretamente aplicado. A função de Lyapunov proposta garante a estabilidade do sistema inclusive na presença de modos deslizantes (FILIPPOV, 1988; UTKIN, 1978). A teoria desenvolvida neste capítulo é aplicada em quatro conversores CC-CC, a saber Buck, Boost, Buck-Boost e Sepic.

5.1 Formulação do problema

Considere o sistema chaveado afim definido pela seguinte realização em espaço de estados:

$$\dot{x}(t) = A(u)x(t) + B(u), \quad (221)$$

$$y(t) = C(u)x(t), \quad (222)$$

sendo $x(t) \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estado, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ a saída e $u(t) \in \mathbb{R}^M$ a entrada de controle. As matrizes $A(u)$, $B(u)$ e $C(u)$ são representadas como segue (RICHARD; CORMERAIS; BUISSON, 2006):

$$A(u) = A_o + \sum_{i=1}^M u_i A_i, \quad B(u) = B_o + \sum_{i=1}^M u_i B_i, \quad C(u) = C_o + \sum_{i=1}^M u_i C_i, \quad (223)$$

sendo $u_i \in [0, 1]$, para $i \in \mathbb{K}_M$. Note que (221) - (223) pode representar um sistema chaveado com M chaves, associando $u_i = 1$ e $u_i = 0$ com a chave i , $i \in \mathbb{K}_M$, fechada (ON) e aberta (OFF), respectivamente. Além disso, um sistema com M chaves pode também ser representado por (101) e (102) como um sistema chaveado com $N = 2^M$ subsistemas, correspondendo a todas as possíveis combinações das chaves: ON ($u_i = 1$) e OFF ($u_i = 0$). Então, o problema de projeto de controle é o seguinte:

Problema 7. Suponha que o vetor de estado $x(t) \in \mathbb{R}^n$ está disponível para realimentação. Determine as entradas de controle $u_i(t) \in [0, 1]$, $i \in \mathbb{K}_M$, para todo $t \geq 0$, que tornam um ponto de equilíbrio conhecido $x = x_r$ de (221) - (223) globalmente assintoticamente estável e ainda o sistema controlado satisfaça um certo índice de desempenho, por exemplo, um custo garantido.

Assim, para desenvolver o sistema de controle proposto, inicialmente a planta será representada por uma forma adequada. Suponha a existência de vetores constantes $x_r \in \mathbb{R}^n$ e $u_r \in \mathbb{R}^M$, tal que substituindo $x = x_r$ e $u = u_r$ em (221) e (222) obtemos

$$\dot{x}(t) = 0 = A(u_r)x_r + B(u_r), \quad (224)$$

$$y(t) = C(u_r)x_r. \quad (225)$$

Desta forma, $x = x_r$ é um ponto de equilíbrio de (221)–(223) e $u = u_r$ é a entrada de controle constante associada a este ponto, respectivamente. Da definição $\xi = x - x_r$, agora definindo $v_i = u_i - u_{ir}$ e subtraindo (224) de (221), note que:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= A_o x - A_o x_r + \sum_{i=1}^M (u_i A_i x - u_{ir} A_i x_r + u_i B_i - u_{ir} B_i) \\ &= A_o (x - x_r) + \sum_{i=1}^M ((u_i - u_{ir}) A_i x + u_{ir} A_i x - u_{ir} A_i x_r + (u_i - u_{ir}) B_i) \\ &= A_o (x - x_r) + \sum_{i=1}^M ((u_i - u_{ir}) A_i x + u_{ir} A_i (x - x_r) + (u_i - u_{ir}) B_i) \\ &= (A_o + \sum_{i=1}^M u_{ir} A_i) (x - x_r) + \sum_{i=1}^M (u_i - u_{ir}) (A_i x + B_i). \end{aligned}$$

Então, sem perda de generalidade, o sistema chaveado afim (221) - (223) pode ser representado

por:

$$\dot{\xi} = (A_o + \sum_{i=1}^M u_{ir} A_i) \xi + \sum_{i=1}^M (A_i x + B_i) v_i, \quad v_i = u_i - u_{ir}. \quad (226)$$

Adicionalmente, a fim de especificar um índice desempenho associado ao sistema chaveado afim (221) e (222), o seguinte custo garantido quadrático é proposto:

$$\int_0^\infty (y - C(u)x_r)' (y - C(u)x_r) dt = \int_0^\infty \xi' (C(u)' C(u)) \xi dt. \quad (227)$$

Uma solução para o Problema 7 é proposta a seguir no Teorema 39, o qual apresenta uma estratégia de controle para o sistema chaveado afim (226) utilizando estrutura variável, que fornece a entrada de controle $u_i(t) \in [0, 1]$, $i \in \mathbb{K}_M$, tal que o ponto de equilíbrio conhecido $\xi = 0$ (que é equivalente a $x = x_r$) do sistema (226) seja globalmente assintoticamente estável.

Teorema 39. *Considere o sistema chaveado afim (226) com entrada de controle $u_i \in [0, 1]$, $i \in \mathbb{K}_M$, e seja o ponto de equilíbrio $x_r \in \mathbb{R}^n$ e a respectiva entrada de controle $u_r \in \mathbb{R}^M$ dados. Se existirem matrizes simétricas $\{Z_o, Z_1, \dots, Z_M\}$ e uma matriz simétrica positiva definida $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tais que*

$$(A_o + \sum_{i=1}^M u_{ir} A_i)' P + P(A_o + \sum_{i=1}^M u_{ir} A_i) + Z_o + \sum_{i=1}^M u_{ir} Z_i < 0, \quad (228)$$

$$\begin{bmatrix} Z_o & C_o' \\ C_o & I_n \end{bmatrix} > 0, \quad (229)$$

$$\frac{1}{M} \begin{bmatrix} Z_o & C_o' \\ C_o & I_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z_i & C_i' \\ C_i & 0_n \end{bmatrix} > 0, \quad (230)$$

para todo $i \in \mathbb{K}_M$, então a estratégia de chaveamento

$$u_i(t) = \frac{1 - \operatorname{sgn}\left(\xi' (Z_i \xi + 2P(A_i x + B_i))\right)}{2}, \quad i \in \mathbb{K}_M \quad (231)$$

torna o ponto de equilíbrio $x_r \in \mathbb{R}^n$ globalmente assintoticamente estável e o custo garantido

$$\int_0^\infty \xi' (C(u)' C(u)) \xi dt < (x_0 - x_r)' P (x_0 - x_r) \quad (232)$$

mantém-se.

Demonstração. Considerando a candidata a função de Lyapunov $V(\xi) = \xi' P \xi$, e de (226) e (228), têm-se para $\xi \neq 0$:

$$\dot{V}(\xi(t)) = \xi' \left((A_o + \sum_{i=1}^M u_{ir} A_i)' P + P(A_o + \sum_{i=1}^M u_{ir} A_i) \right) \xi + 2 \sum_{i=1}^M \xi' P (A_i x + B_i) v_i$$

$$< 2 \sum_{i=1}^M \xi' P(A_i x + B_i) v_i - \xi' (Z_o + \sum_{i=1}^M u_{ir} Z_i) \xi. \quad (233)$$

Agora, recordando que $u_i \in [0, 1]$, $i \in \mathbf{IK}_M$, observe que $\sum_{i=1}^M \frac{u_i}{M} \in [0, 1]$. Então, $(1 - \sum_{i=1}^M \frac{u_i}{M}) \geq 0$ e de (229) e (230):

$$\left(1 - \sum_{i=1}^M \frac{u_i}{M}\right) \begin{bmatrix} Z_o & C_o' \\ C_o & I_n \end{bmatrix} + \sum_{i=1}^M u_i \left\{ \begin{bmatrix} Z_i & C_i' \\ C_i & 0_n \end{bmatrix} + \frac{1}{M} \begin{bmatrix} Z_o & C_o' \\ C_o & I_n \end{bmatrix} \right\} = \mathcal{F} > 0, \quad i \in \mathbf{IK}_M, \quad (234)$$

pois mesmo quando $u_i = 0$, $i \in \mathbf{IK}_M$, $\mathcal{F} > 0$ devido a (229). Assim, sem perda de generalidade, note que (234) pode ser representada por:

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} Z_o + \sum_{i=1}^M u_i Z_i & (C_o + \sum_{i=1}^M u_i C_i)' \\ (C_o + \sum_{i=1}^M u_i C_i) & I_n \end{bmatrix} > 0, \quad i \in \mathbf{IK}_M. \quad (235)$$

Agora, usando o complemento de Schur (BOYD et al., 1994) em (235) segue que:

$$(Z_o + \sum_{i=1}^M u_i Z_i) - (C_o + \sum_{i=1}^M u_i C_i)' (C_o + \sum_{i=1}^M u_i C_i) > 0, \quad i \in \mathbf{IK}_M. \quad (236)$$

Então, de (233) e (236) para $\xi \neq 0$, obtêm-se que:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\xi(t)) &< 2 \sum_{i=1}^M \xi' P(A_i x + B_i) v_i - \xi' (Z_o + \sum_{i=1}^M u_{ir} Z_i) \xi \\ &< 2 \sum_{i=1}^M \xi' P(A_i x + B_i) v_i - \xi' (Z_o + \sum_{i=1}^M u_{ir} Z_i) \xi \\ &\quad + \xi' (Z_o + \sum_{i=1}^M u_i Z_i - (C_o + \sum_{i=1}^M u_i C_i)' (C_o + \sum_{i=1}^M u_i C_i)) \xi. \end{aligned} \quad (237)$$

Seguindo, defina $G_i(\xi) = \xi' (Z_i \xi + 2P(A_i x + B_i))$, para $i \in \mathbf{IK}_M$. Assim, considerando que $u_{ir} \geq 0$, $i \in \mathbf{IK}_M$, note que da estratégia de chaveamento (231),

$$\begin{aligned} G_i(\xi) v_i &= G_i(\xi) (u_i - u_{ir}) \\ &= G_i(\xi) \left(\left(\frac{1 - \text{sgn}(G_i(\xi))}{2} \right) - u_{ir} \right) = \begin{cases} -G_i(\xi) u_{ir} \leq 0, & \text{se } G_i(\xi) \geq 0, \\ G_i(\xi) (1 - u_{ir}) \leq 0, & \text{se } G_i(\xi) < 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (238)$$

Então, $G_i(\xi) v_i \leq 0$ para todo $i \in \mathbf{IK}_M$. Finalmente, de (237), (238) e da definição (223),

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\xi(t)) &< 2 \sum_{i=1}^M \xi' P(A_i x + B_i) v_i - \xi'(Z_o + \sum_{i=1}^M u_{ir} Z_i) \xi \\
&+ \xi'(Z_o + \sum_{i=1}^M u_i Z_i - (C_o + \sum_{i=1}^M u_i C_i)'(C_o + \sum_{i=1}^M u_i C_i)) \xi = \sum_{i=1}^M \xi'(Z_i \xi + 2P(A_i x + B_i)) v_i \\
&- \xi'(C(u)'C(u)) \xi = \sum_{i=1}^M G_i(\xi) v_i - \xi'(C(u)'C(u)) \xi \leq -\xi'(C(u)'C(u)) \xi \leq 0. \quad (239)
\end{aligned}$$

Assim, $\dot{V}(\xi) < 0$ para $\xi \neq 0$. Agora, integrando (239) de zero até o infinito e tendo em conta que $\dot{V}(\xi(\infty)) = 0$, obtêm-se (232). A prova está concluída. \square

Do Teorema 39 proposto, para um dado $u_r \in \mathbb{R}^M$ segue o seguinte problema de otimização:

$$\inf_P \{Tr(P) : (228) - (230) \text{ mantém-se para algum } P = P' > 0, Z_o = Z_o', Z_i = Z_i', \text{ e } \forall i \in \mathbb{K}_M\}. \quad (240)$$

A próxima subsecção apresenta uma extensão dos resultados propostos anteriormente, considerando o custo garantido (232) e também a taxa de decaimento no projeto de controle como um índice de desempenho.

5.1.1 Taxa de decaimento

A fim de estabelecer uma estabilidade exponencial adequada e também o custo garantido (232) para o sistema chaveado afim (226), é proposto o Teorema 40.

Teorema 40. *Considere o sistema chaveado afim (226) com entrada de controle $u_i \in [0, 1]$, $i \in \mathbb{K}_M$ e seja o ponto de equilíbrio $x_r \in \mathbb{R}^n$, $\gamma > 0$ e a respectiva entrada de controle $u_r \in \mathbb{R}^M$ dados. Se existirem matrizes simétricas $\{Z_o, Z_1, \dots, Z_M\}$, $\{K_o, K_1, \dots, K_M\}$ e uma matriz simétrica positiva definida $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tais que*

$$Z_o - K_o > 0, \quad (241)$$

$$\frac{1}{M}(Z_o - K_o) + (Z_i - K_i) > 0, \quad (242)$$

$$K_o > 2\gamma P, \quad (243)$$

$$\frac{1}{M}K_o + K_i > 2\gamma P, \quad (244)$$

$$(A_o + \sum_{i=1}^M u_{ir} A_i)' P + P(A_o + \sum_{i=1}^M u_{ir} A_i) + Z_o + \sum_{i=1}^M u_{ir} Z_i < 0, \quad (245)$$

$$\begin{bmatrix} K_o & C_o' \\ C_o & I_n \end{bmatrix} > 0, \quad (246)$$

$$\frac{1}{M} \begin{bmatrix} K_o & C'_o \\ C_o & I_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_i & C'_i \\ C_i & 0_n \end{bmatrix} > 0, \quad (247)$$

para todo $i \in \mathbb{K}_M$, então a estratégia de chaveamento (231) torna o ponto de equilíbrio $x_r \in \mathbb{R}^n$ globalmente exponencialmente estável com uma taxa de decaimento maior ou igual a γ , e o custo garantido (232) mantém-se.

Demonstração. Considere a candidata a função quadrática de Lyapunov $V(\xi) = \xi' P \xi$. De (226) e (245) têm-se para $\xi \neq 0$:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\xi(t)) &= \xi' \left((A_o + \sum_{i=1}^M u_{ir} A_i)' P + P (A_o + \sum_{i=1}^M u_{ir} A_i) \right) \xi + 2 \sum_{i=1}^M \xi' P (A_i x + B_i) v_i \\ &< 2 \sum_{i=1}^M \xi' P (A_i x + B_i) v_i - \xi' (Z_o + \sum_{i=1}^M u_{ir} Z_i) \xi. \end{aligned} \quad (248)$$

Agora, recordando que $u_i \in [0, 1]$, $i \in \mathbb{K}_M$, observe que $\sum_{i=1}^M \frac{u_i}{M} \in [0, 1]$. Então, $(1 - \sum_{i=1}^M \frac{u_i}{M}) \geq 0$ e de (241) e (242):

$$(1 - \sum_{i=1}^M \frac{u_i}{M})(Z_o - K_o) + \sum_{i=1}^M u_i \left\{ (Z_i - K_i) + \frac{1}{M}(Z_o - K_o) \right\} > 0, \quad i \in \mathbb{K}_M, \quad (249)$$

mesmo quando $u_i = 0$, $i \in \mathbb{K}_M$, devido a (241). Assim, sem perda de generalidade, note que (249) pode ser representada por:

$$(Z_o - K_o) + \sum_{i=1}^M u_i (Z_i - K_i) > 0, \quad (250)$$

para $u_i \in [0, 1]$ e $i \in \mathbb{K}_M$. Adicionalmente, de (248), (250) e $\xi \neq 0$:

$$\dot{V}(\xi(t)) < 2 \sum_{i=1}^M \xi' P (A_i x + B_i) v_i - \xi' (Z_o + \sum_{i=1}^M u_{ir} Z_i) \xi + \xi' (Z_o - K_o + \sum_{i=1}^M u_i (Z_i - K_i)) \xi. \quad (251)$$

Então, de (251) e considerando que $v_i = u_i - u_{ir}$,

$$\dot{V}(\xi(t)) < \sum_{i=1}^M \xi' (Z_i \xi + 2P(A_i x + B_i)) v_i - \xi' (K_o + \sum_{i=1}^M u_i K_i) \xi. \quad (252)$$

Agora, note que (246) e (247) pode ser representada por (veja a demonstração do Teorema 39 para maiores detalhes):

$$\begin{bmatrix} K_o + \sum_{i=1}^M u_i K_i & (C_o + \sum_{i=1}^M u_i C_i)' \\ (C_o + \sum_{i=1}^M u_i C_i) & I_n \end{bmatrix} > 0, \quad i \in \mathbb{K}_M. \quad (253)$$

Então, aplicando o complemento de Schur (BOYD et al., 1994) em (253) segue que:

$$(K_o + \sum_{i=1}^M u_i K_i) - (C_o + \sum_{i=1}^M u_i C_i)' (C_o + \sum_{i=1}^M u_i C_i) > 0, \quad i \in \mathbb{K}_M. \quad (254)$$

Assim, de (252) e (254) segue que para $\xi \neq 0$,

$$\begin{aligned} \dot{V}(\xi(t)) &< \sum_{i=1}^M \xi'(Z_i \xi + 2P(A_i x + B_i)) v_i - \xi'(K_o + \sum_{i=1}^M u_i K_i) \xi < \sum_{i=1}^M \xi'(Z_i \xi + 2P(A_i x + B_i)) v_i \\ &- \xi'(K_o + \sum_{i=1}^M u_i K_i) \xi + \xi'(K_o + \sum_{i=1}^M u_i K_i - (C_o + \sum_{i=1}^M u_i C_i)' (C_o + \sum_{i=1}^M u_i C_i)) \xi \\ &= \sum_{i=1}^M \xi'(Z_i \xi + 2P(A_i x + B_i)) v_i - \xi'((C_o + \sum_{i=1}^M u_i C_i)' (C_o + \sum_{i=1}^M u_i C_i)) \xi. \end{aligned} \quad (255)$$

Note que, da estratégia de chaveamento (231), $\xi'(Z_i \xi + 2P(A_i x + B_i)) v_i \leq 0$ para todo $i \in \mathbb{K}_M$ (veja a prova do Teorema 39 para detalhes). Seguindo, de (255) e da definição (223),

$$\begin{aligned} \dot{V}(\xi(t)) &< \sum_{i=1}^M \xi'(Z_i \xi + 2P(A_i x + B_i)) v_i - \xi'((C_o + \sum_{i=1}^M u_i C_i)' (C_o + \sum_{i=1}^M u_i C_i)) \xi \\ &\leq -\xi'(C(u)' C(u)) \xi \leq 0. \end{aligned} \quad (256)$$

Agora, defina $K(u) = K_o + \sum_{i=1}^M u_i K_i$. Seguindo as mesmas ideias da análise realizada em (249) e (250), note que (243) e (244) implicam que $K(u) = K_o + \sum_{i=1}^M u_i K_i > 2\gamma P$. Então, de (243), (244) e (252), $\dot{V}(\xi) \leq -\xi' K(u) \xi \leq -2\gamma \xi' P \xi$. Assim, do Lema 3.1 o sistema chaveado afim possui uma taxa de decaimento maior ou igual a γ . Finalmente, integrando (256) de zero até o infinito e tendo em conta que $V(\xi(\infty)) = 0$, o custo garantido (232) mantém-se. A prova está completa. \square

Do Teorema 40 proposto, para um dado $u_r \in \mathbb{R}^M$ segue o seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} \inf_P \{Tr(P) : \quad &(241) - (242) \text{ mantém-se para algum } P = P' > 0, \\ &Z_o = Z'_o, \quad Z_i = Z'_i, \quad K_o = K'_o, \quad K_i = K'_i, \quad \text{e } \forall i \in \mathbb{K}_M\}. \end{aligned} \quad (257)$$

A próxima subseção é dedicada a aplicação dos resultados teóricos propostos neste capítulo, para o controle do modelo de três conversores CC-CC: Buck, Boost e Buck-Boost já exemplificados no Exemplo 7, Capítulo 4.

5.1.2 Exemplo 8 (Conversores CC-CC Buck, Boost e Buck-Boost)

Considere os conversores CC-CC: Buck, Boost e Buck-Boost, ilustrados nas Figuras 32, 36 e 40, respectivamente. Os sistemas descritos nesta seção, possuem apenas um sinal de entrada de controle $u(t) = u_1(t)$ com $u(t) \in [0, 1]$. A entrada de controle $u_1(t)$ controla as chaves S_1 e S_2 , o qual operam complementarmente. Assim, $u_1(t) = 0$ representa uma chave aberta (OFF) e $u_1(t) = 1$ uma chave fechada (ON). Novamente, para a análise dos conversores mencionados, nenhum limite é imposto sobre a frequência de chaveamento. Considere os mesmos parâmetros nominais de projeto (DEAECTO et al., 2010) definidos anteriormente: $V_g = 100[V]$, $R = 50[\Omega]$, $r_L = 2[\Omega]$, $L = 500[\mu H]$, $C = 470[\mu F]$, e

$$Q_i = (C_o + \sum_{i=1}^M u_i C_i)' (C_o + \sum_{i=1}^M u_i C_i) = C(u)' C(u) = \text{diag}\{\rho_1 r_{L1}, \dots, \rho_q r_{Lq}, \rho_n / R\},$$

como sendo uma matriz que especifica o índice de desempenho associada com o custo garantido (152), com $\rho_1 = 0$ e $\rho_2 = 1$. A seguir apresentamos os resultados de simulações desta teoria para os três conversores mencionados anteriormente, bem como os resultados numéricos obtidos. O *solver* utilizado foi o LMILab do *software* MATLAB.

5.1.2.1 Conversor Buck

Considere o conversor Buck ilustrado na Figura 32. O modelo instantâneo do conversor Buck é dado por:

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_L(t) \\ \dot{V}_C(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{r_L}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L(t) \\ V_C(t) \end{bmatrix} + u_1 \begin{bmatrix} \frac{V_g}{L} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (258)$$

Então, o sistema chaveado em espaço de estados (221)–(223) é definido pelas seguintes matrizes:

$$A_o = \begin{bmatrix} -\frac{r_L}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_o = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} \frac{V_g}{L} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

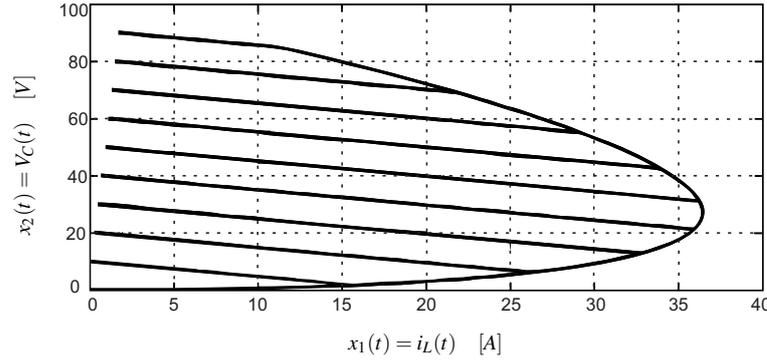
O conjunto de todos os pontos de equilíbrio alcançáveis (DEAECTO et al., 2010) e a razão cíclica de trabalho do conversor são calculados considerando que:

$$x_r = \left\{ [i_{Lr} \quad V_{Cr}]' : V_{Cr} = R i_{Lr}, \quad 0 \leq i_{Lr} \leq \frac{V_g}{(r_L + R)} \right\}, \quad u_{1r} = \frac{r_L i_{Lr} + V_{Cr}}{V_g}. \quad (259)$$

Neste exemplo, adote o seguintes valores de tensão de saída $V_{Cr} = \{10, 20, \dots, 90\}$. Então,

de (259), dos problemas de minimizações (111) e (240), correspondente as Teoremas 23 e 39, obtemos o conjunto de todas as matrizes simétricas soluções do problema proposto, necessárias para as implementações das estratégias de chaveamento (109) e (231). Os resultados são ilustrados na Figura 67 para uma condição inicial $x = [i_L \ V_c]' = [0 \ 0]'$.

Figura 67 - Plano de fase do conversor Buck utilizando os Teoremas 23 (DEAECTO et al., 2010) e 39 proposto.



Fonte: elaboração do próprio autor

Como pode ser visto pela Figura 67, a resposta e o custo obtido aplicando os Teoremas 23 (DEAECTO et al., 2010) e 39 proposto foram os mesmos. Para este conversor, em todos os casos o tempo de estabelecimento da tensão (T_e) apresentado foi menor que $2[ms]$, com pico máximo de corrente igual a $36[A]$. Este efeito é devido ao fato de que, para este conversor em particular, o gradiente da superfície de chaveamento não depende do ponto de equilíbrio (DEAECTO et al., 2010).

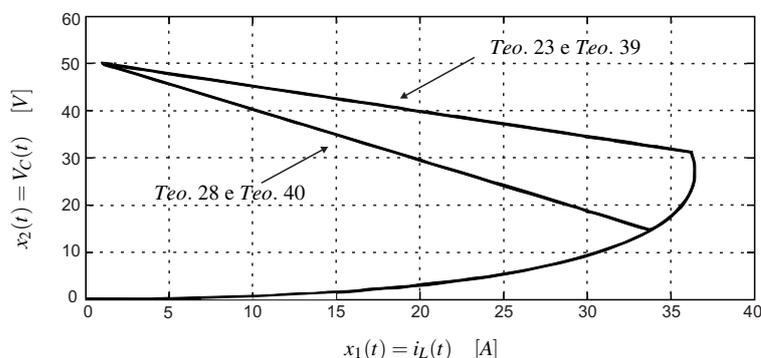
Agora, a fim de comparar os resultados dos Teoremas 23, 28, 39 e 40, adote $V_{Cr} = 50[V]$ e uma máxima taxa de decaimento $\gamma = 2000s^{-1}$. Logo, de (259), o ponto de equilíbrio é $x_r = [1 \ 50]'$ e a razão cíclica de trabalho $u_{1r} = 0,52$. Então, do problema de minimização (240), Teorema 39, as matrizes obtidas como uma solução foram:

$$P = 10^{-4} \times \begin{bmatrix} 0,0253 & 0,0476 \\ 0,0476 & 0,1142 \end{bmatrix},$$

$$Z_o = \begin{bmatrix} 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0200 \end{bmatrix}, \quad Z_1 = 10^{-6} \times \begin{bmatrix} -0,4377 & -0,1482 \\ -0,1482 & -0,1272 \end{bmatrix},$$

e de (110) o custo garantido obtido foi $J < (x_0 - x_r)'P(x_0 - x_r) = 0,029$. Agora, do problema

Figura 68 - Plano de fase do conversor Buck utilizando os Teoremas 23, 28, 39 e 40 para uma taxa de decaimento $\gamma = 2000$.



Fonte: elaboração do próprio autor

de minimização (257), Teorema 40, as matrizes obtidas como uma solução foram:

$$P = 10^{-4} \times \begin{bmatrix} 0,6128 & 0,5700 \\ 0,5700 & 0,5797 \end{bmatrix},$$

$$Z_o = \begin{bmatrix} 0,2477 & 0,2297 \\ 0,2297 & 0,2329 \end{bmatrix}, \quad Z_1 = 10^{-4} \times \begin{bmatrix} -0,3444 & -0,2298 \\ -0,2298 & -0,1546 \end{bmatrix},$$

$$K_o = \begin{bmatrix} 0,2477 & 0,2296 \\ 0,2296 & 0,2329 \end{bmatrix}, \quad K_1 = 10^{-4} \times \begin{bmatrix} -0,3057 & -0,2024 \\ -0,2024 & -0,1346 \end{bmatrix},$$

e de (110) o custo garantido obtido foi $J < (x_0 - x_r)'P(x_0 - x_r) = 0,1507$. Os resultados das simulações são ilustrados na Figura 68 para uma condição inicial $x_0 = [i_L \ V_C]' = [0 \ 0]$. Observe que, os Teoremas 28 e 40 apresentaram um menor pico de corrente, porém com um custo maior. A Tabela 10 apresenta os resultados obtidos.

Tabela 10 - Resultados para o conversor Buck.

	Pico de corrente [A]	$\gamma [s^{-1}]$	$T_e [ms]$	Custo (232)	Custo (106)
Teorema 23	36,5	—	2	—	0,0290
Teorema 28	34	2000	4	—	0,1507
Teorema 39	36,5	—	2	0,0290	—
Teorema 40	34	2000	4	0,1507	—

Fonte: elaboração do próprio autor

Tendo em vista os resultados apresentados, para este conversor os Teoremas 28 e 40 são os mais adequados para se utilizar, pois eles proporcionam uma partida mais suave do conversor, além de uma baixa corrente de pico (LEYVA et al., 2001).

5.1.2.2 Conversor Boost

Considere o conversor Boost ilustrado na Figura 36. O modelo instantâneo do conversor Boost é dado por:

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_L(t) \\ \dot{V}_C(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{r_L}{L} & -\frac{(1-u_1)}{L} \\ \frac{(1-u_1)}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L(t) \\ V_C(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{V_g}{L} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (260)$$

Então, o sistema chaveado afim (221)–(223) é definido pelas seguintes matrizes:

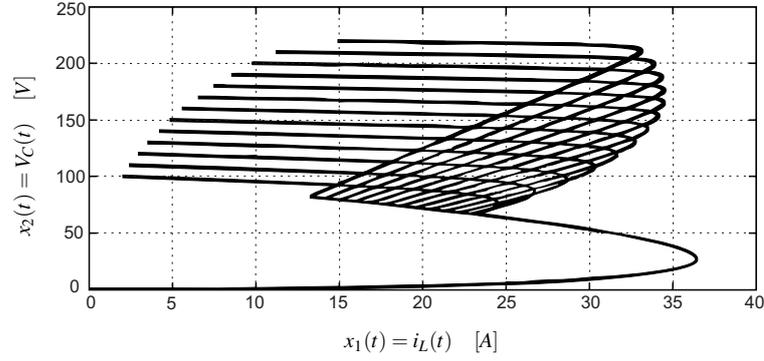
$$A_o = \begin{bmatrix} -\frac{r_L}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix}, \quad B_o = \begin{bmatrix} \frac{V_g}{L} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

O conjunto de todos os pontos de equilíbrio alcançáveis (DEAECTO et al., 2010) e a razão cíclica de trabalho do conversor Boost são dados por:

$$x_r = \left\{ \begin{aligned} & [i_{Lr} \quad V_{Cr}]' : V_{Cr}^2 + (r_L R) i_{Lr}^2 - (R V_g) i_{Lr} = 0, \\ & \frac{V_g}{(r_L + R)} \leq i_{Lr} \leq \frac{V_g}{r_L} \end{aligned} \right\}, \quad u_{1r} = \frac{V_{Cr} - V_g + r_L i_{Lr}}{V_{Cr}}. \quad (261)$$

Neste exemplo, adote o seguintes valores de tensão de saída $V_{Cr} = \{100, 110, \dots, 220\}$. Então, de (261), dos problemas de minimizações (111) e (240), correspondente as Teoremas 23 e 39, respectivamente, obtemos o conjunto de todas as matrizes simétricas soluções do problema proposto, necessárias para as implementações das estratégias de chaveamento (109) e (231). O plano de fase para o conversor Boost é ilustrado na Figura 69 para uma condição inicial $x = [i_L \quad V_c]' = [0 \quad 0]'$.

Figura 69 - Plano de fase do conversor Boost utilizando os Teoremas 23 (DEAECTO et al., 2010) e 39.



Fonte: elaboração do próprio autor

Para este conversor, note que os Teoremas 23 (DEAECTO et al., 2010) e 39 proposto apresentaram a mesma resposta e custo. Assim, para todos os casos o tempo de estabelecimento (T_e) da tensão de saída foi menor que $20[ms]$ e o máximo pico de corrente foi igual a $36,5[A]$.

Agora, a fim de comparar os resultados dos Teoremas 23, 28, 39 e 40, adote $V_{Cr} = 150[V]$ e uma máxima taxa de decaimento $\gamma = 470s^{-1}$. Então, de (261), o ponto de equilíbrio é $x_r = [5 \ 150]'$ e a razão cíclica de trabalho $u_{1r} = 0,4$. Assim, do problema de minimização (240), Teorema 39, as matrizes obtidas como uma solução foram:

$$P = 10^{-4} \times \begin{bmatrix} 0,0237 & 0,0742 \\ 0,0742 & 0,2573 \end{bmatrix},$$

$$Z_o = \begin{bmatrix} 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0200 \end{bmatrix}, \quad Z_1 = 10^{-5} \times \begin{bmatrix} 0,4371 & 0,1071 \\ 0,1071 & 0,0698 \end{bmatrix},$$

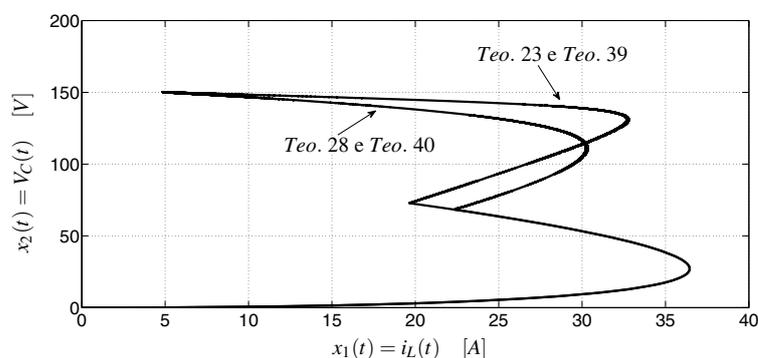
e de (110) o custo garantido obtido foi $J < (x_0 - x_r)'P(x_0 - x_r) = 0,5901$. Agora, do problema de minimização (257), Teorema 40, as matrizes obtidas como uma solução foram:

$$P = 10^{-4} \times \begin{bmatrix} 0,0648 & 0,1051 \\ 0,1051 & 0,2855 \end{bmatrix},$$

$$Z_o = \begin{bmatrix} 0,0250 & 0,0138 \\ 0,0138 & 0,0277 \end{bmatrix}, \quad Z_1 = 10^{-4} \times \begin{bmatrix} 0,1842 & 0,0777 \\ 0,0777 & 0,0271 \end{bmatrix},$$

$$K_o = \begin{bmatrix} 0,0249 & 0,0138 \\ 0,0138 & 0,0277 \end{bmatrix}, \quad K_1 = 10^{-5} \times \begin{bmatrix} 0,9116 & 0,5008 \\ 0,5008 & 0,1672 \end{bmatrix},$$

Figura 70 - Plano de fase do conversor Boost utilizando os Teoremas 23, 28, 39 e 40 para uma taxa de decaimento $\gamma = 470$.



Fonte: elaboração do próprio autor

Tabela 11 - Resultados para o conversor Boost.

	Pico de corrente [A]	γ [s^{-1}]	T_e [ms]	Custo (232)	Custo (106)
Teorema 23	36,5	—	7	—	0,5901
Teorema 28	36,5	470	8	—	0,6582
Teorema 39	36,5	—	7	0,5901	—
Teorema 40	36,5	470	8	0,6582	—

Fonte: elaboração do próprio autor

e de (110) o custo garantido obtido foi $J < (x_0 - x_r)'P(x_0 - x_r) = 0,6582$. Os resultados de simulação são ilustrados na Figura 70 para uma condição inicial $x_0 = [i_L \ V_C]' = [0 \ 0]$. Note que, apesar das mudanças nas equações da planta do sistema, as leis de controle não afetam significativamente o pico de corrente ($x_1 = i_L$). Este fato é devido à estrutura do conversor que apresenta um transistor em paralelo e, portanto, oferece dois caminhos para a corrente. Desta forma, durante o transiente não há nenhuma maneira de interferir na resposta do conversor. A Tabela 11 apresenta os resultados obtidos. Para este conversor, os Teoremas 28 e 40 apresentaram os melhores resultados, pois o controlador projetado por eles exibiram uma partida mais suave do conversor (LEYVA et al., 2001).

5.1.2.3 Conversor Buck-Boost

Considere o conversor Buck-Boost ilustrado na Figura 40. O modelo instantâneo do conversor Buck-Boost é dado por:

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_L(t) \\ \dot{V}_C(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{r_L}{L} & -\frac{(1-u_1)}{L} \\ \frac{(1-u_1)}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L(t) \\ V_C(t) \end{bmatrix} + u_1 \begin{bmatrix} \frac{V_g}{L} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (262)$$

Então, o sistema chaveado afim em espaço de estados (221)–(223) é definido pelas seguintes matrizes:

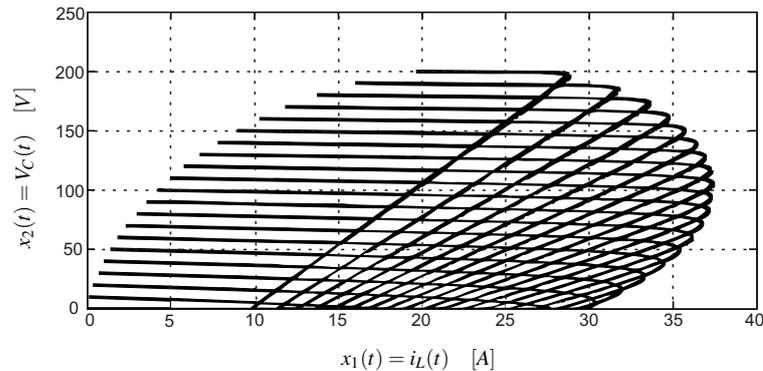
$$A_o = \begin{bmatrix} -\frac{r_L}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix}, \quad B_o = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} \frac{V_g}{L} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

O conjunto que define todos os pontos de equilíbrio alcançáveis (DEAECTO et al., 2010) e a razão cíclica de trabalho do conversor Buck-Boost são dados por:

$$x_r = \{[i_{Lr} \quad V_{Cr}]' : V_{Cr}^2 + (r_L R)i_{Lr}^2 - (RV_g)i_{Lr} + V_g V_{Cr} = 0, \\ 0 \leq V_{Cr} \leq Ri_{Lr}\}, \quad u_{1r} = \frac{V_{Cr} + r_L i_{Lr}}{V_C + V_g}. \quad (263)$$

Neste exemplo, adote os seguintes valores de tensão de saída $V_{Cr} = \{10, 20, \dots, 200\}$. Então, de (263), dos problemas de minimizações (111) e (240), correspondente as Teoremas 23 e 39, obtemos o conjunto de todas as matrizes simétricas soluções do problema proposto, necessárias para as implementações das estratégias de chaveamento (109) e (231). O plano de fase para o conversor Buck-Boost é ilustrado na Figura 71 para uma condição inicial $x = [i_L \quad V_c]' = [0 \quad 0]'$.

Figura 71 - Plano de fase do conversor Buck-Boost utilizando os Teoremas 23 (DEAECTO et al., 2010) e 39.



Fonte: elaboração do próprio autor

Como pode ser visto pela Figura 71, o custo e a resposta dinâmica do sistema aplicando os Teoremas 23 (DEAECTO et al., 2010) e 39 proposto, foram praticamente os mesmos. Assim, para todos os casos o tempo de estabelecimento (T_e) da tensão de saída foi menor que $50[ms]$ e o máximo pico de corrente foi igual a $37,5[A]$.

Agora, a fim de comparar os resultados dos Teoremas 23, 28, 39 e 40, adote $V_{Cr} = 120[V]$ e uma máxima taxa de decaimento $\gamma = 220s^{-1}$. Então, de (263), o ponto de equilíbrio é $x_r = [6 \quad 120]'$ e a razão cíclica de trabalho $u_{1r} = 0,6$. Assim, do problema de minimização (240),

Teorema 39, as matrizes obtidas como uma solução foram:

$$P = 10^{-4} \times \begin{bmatrix} 0,0211 & 0,0990 \\ 0,0990 & 0,4898 \end{bmatrix},$$

$$Z_o = \begin{bmatrix} 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0200 \end{bmatrix}, \quad Z_1 = 10^{-5} \times \begin{bmatrix} -0,7607 & -0,1409 \\ -0,1409 & -0,0364 \end{bmatrix},$$

e de (110) o custo garantido obtido foi $J < (x_0 - x_r)'P(x_0 - x_r) = 0,7196$. Agora, do problema de minimização (257), Teorema 40, as matrizes obtidas como uma solução foram:

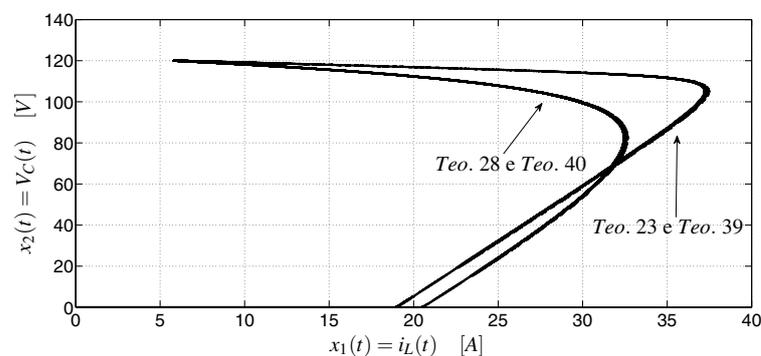
$$P = 10^{-4} \times \begin{bmatrix} 0,0448 & 0,1123 \\ 0,1123 & 0,5034 \end{bmatrix},$$

$$Z_o = \begin{bmatrix} 0,0167 & 0,0061 \\ 0,0061 & 0,0222 \end{bmatrix}, \quad Z_1 = 10^{-4} \times \begin{bmatrix} 0,1671 & 0,0559 \\ 0,0559 & 0,0105 \end{bmatrix},$$

$$K_o = \begin{bmatrix} 0,0167 & 0,0061 \\ 0,0061 & 0,0222 \end{bmatrix}, \quad K_1 = 10^{-4} \times \begin{bmatrix} 0,3605 & 0,0924 \\ 0,0924 & 0,0218 \end{bmatrix},$$

e de (110) o custo garantido obtido foi $J < (x_0 - x_r)'P(x_0 - x_r) = 0,7413$. Os resultados das simulações são ilustrados na Figura 72 para uma condição inicial $x_0 = [i_L \ V_C]' = [0 \ 0]$.

Figura 72 - Plano de fase do conversor Buck-Boost utilizando os Teoremas 23, 28, 39 e 40 para uma taxa de decaimento $\gamma = 220$.



Fonte: elaboração do próprio autor

Para este conversor, observe que com a inclusão da taxa de decaimento $\gamma = 220s^{-1}$, os Teoremas 28 e 40 apresentaram uma diminuição nos picos de correntes, porém com um custo mais elevado. A Tabela 12 apresenta os resultados obtidos.

Tabela 12 - Resultados para o conversor Buck-Boost.

	<i>Pico de corrente</i> [A]	γ [s^{-1}]	T_e [ms]	<i>Custo</i> (232)	<i>Custo</i> (106)
Teorema 23	37,5	–	12	–	0,7196
Teorema 28	32,5	220	12	–	0,7413
Teorema 39	37,5	–	12	0,7196	–
Teorema 40	32,5	220	12	0,7413	–

Fonte: elaboração do próprio autor

Dos resultados apresentados, note que os controladores projetados com os Teoremas 28 e 40 são os mais adequados para se utilizar neste conversor, pois eles exibem uma menor corrente de pico, além de um custo muito próximo aos apresentados pelos Teoremas 23 (DEAECTO et al., 2010) e 39 ocasionando uma partida mais suave do conversor (LEYVA et al., 2001).

Contudo, os resultados e simulações ilustrados nesta seção demonstraram que as estratégias de chaveamento propostas são eficientes para o controle dos três conversores CC-CC. Como pode ser observado, as estratégias de chaveamento (109) e (231) implicam na mesma resposta dinâmica dos sistemas, porém há de se destacar que a estratégia de chaveamento utilizando estrutura variável (231) é mais vantajosa devido ter uma aplicação prática mais simples do que as apresentadas em Deaecto et al. (2010), que se baseiam na função mínimo. Além disso, o método proposto através do modelo médio da variáveis (KISLOVSKI; REDL; SOKAL, 1991) é mais usual e conhecido pelos engenheiros de eletrônica de potência tornando o procedimento de projeto mais geral.

Seguindo, um problema presente no projeto de conversores CC-CC é que nas aplicações reais, nem todas as variáveis do ponto de equilíbrio $x_r \in \mathbb{R}^n$ estão disponíveis para medição. Por exemplo, a tensão de saída desejada V_{Cr} do conversor Buck é uma constante definida pelo projetista, entretanto a corrente de referência no indutor i_{Lr} não é disponível pois pode variar ao longo do tempo para pequenas perturbações na carga R do conversor. Assim, um problema prático importante é o projeto de uma estratégia de chaveamento dependente somente de informações parciais do ponto de equilíbrio da planta (SPIAZZI et al., 1995; DEAECTO et al., 2010). A próxima seção é dedicada ao estudo deste problema de controle e apresenta uma possível solução.

5.2 Projeto de controle dependente de informações parciais do ponto de equilíbrio

Uma solução para o problema de controle proposto é projetar uma estratégia de chaveamento independente da corrente de equilíbrio i_{Lr} , veja Spiazzi et al. (1995) e Deaecto et al. (2010). A ideia principal para a solução deste problema é introduzir um filtro passa-baixas com função de transferência $F(s) = 1/(\tau s + 1)$, sendo $\tau > 0$, a fim de estimar o valor do estado de equilíbrio da corrente no indutor $i_L(t)$. Então, considere os conversores Buck, Boost e Buck-Boost e seja $\hat{i}_L(t)$ a corrente no indutor a ser estimada. Escolhendo $\tau = RC$, o novo vetor de estado para os conversores Buck, Boost e Buck-Boost é dado por $x' = [i_L \quad V_C \quad \hat{i}_L]$. Então, o sistema chaveado afim aumentado (221)–(223) é agora definido pela Tabela 13 e as seguintes matrizes:

$$A_{0e} = \begin{bmatrix} -\frac{r_L}{L} & -\frac{1}{L} & 0 \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} & 0 \\ \frac{1}{RC} & 0 & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix}, \quad A_{1e} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L} & 0 \\ -\frac{1}{C} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{2e} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_{1e} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}', \quad B_{2e} = \begin{bmatrix} \frac{V_g}{L} & 0 & 0 \end{bmatrix}', \quad (264)$$

$C(u)'C(u) = \text{diag}\{0, 1/R, 0\}$ e o novo ponto de operação é definido por $x'_r = [i_{Lr} \quad V_{Cr} \quad \hat{i}_{Lr}]$, sendo $i_{Lr} = \hat{i}_{Lr}$, pois $F(0) = 1$.

Tabela 13 - Modelos aumentados dos conversores.

<i>Conversor</i>	A_o	A_1	B_o	B_1
<i>Buck</i>	A_{0e}	A_{2e}	B_{1e}	B_{2e}
<i>Boost</i>	A_{0e}	A_{1e}	B_{2e}	B_{2e}
<i>Buck – Boost</i>	A_{0e}	A_{1e}	B_{1e}	B_{2e}

Fonte: elaboração do próprio autor

Então, para os conversores CC-CC: Buck, Boost e Buck-Boost é proposto no Teorema 41 uma solução para este problema de controle, utilizando controle por estrutura variável.

Teorema 41. *Considere o sistema chaveado afim (226) com as matrizes dadas pela Tabela 13 e (264), entrada de controle $u_i \in [0, 1]$, $i \in \mathbb{K}_M$ e seja o ponto de equilíbrio $x_r \in \mathbb{R}^n$ e a respectiva entrada de controle u_{ir} , $i \in \mathbb{K}_M$ dados. Se existirem matrizes simétricas $\{Z_o, Z_1, \dots, Z_M\}$ e uma*

matriz simétrica positiva definida $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tais que

$$(A_o + \sum_{i=1}^M u_{ir} A_i)' P + P(A_o + \sum_{i=1}^M u_{ir} A_i) + Z_o < 0, \quad (265)$$

$$\frac{1}{M} (Z_o + (A_o + \sum_{i=1}^M u_{ir} A_i)' P + P(A_o + \sum_{i=1}^M u_{ir} A_i)) + Z_i < 0, \quad (266)$$

$$\begin{bmatrix} Z_o & C_o' \\ C_o & I_n \end{bmatrix} > 0, \quad (267)$$

$$\frac{1}{M} \begin{bmatrix} Z_o & C_o' \\ C_o & I_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z_i & C_i' \\ C_i & 0_n \end{bmatrix} > 0, \quad (268)$$

$$JP[A_i \ B_i] = 0, \quad (269)$$

para todo $i \in \mathbb{K}_M$, sendo $J = [1 \ 0 \ 1]$, então a estratégia de chaveamento

$$u_i(t) = \frac{1 - \text{sgn}(\xi' P(A_i x + B_i))}{2}, \quad i \in \mathbb{K}_M, \quad (270)$$

sendo $\xi = x - x_r$, torna o ponto de equilíbrio $x_r \in \mathbb{R}^n$ globalmente assintoticamente estável e o custo garantido (232) mantém-se.

Demonstração. Considere a candidata a função quadrática de Lyapunov $V(\xi) = \xi' P \xi$. Então, de (226) segue que para $\xi \neq 0$:

$$\dot{V}(\xi) = \xi' \left((A_o + \sum_{i=1}^M u_{ir} A_i)' P + P(A_o + \sum_{i=1}^M u_{ir} A_i) \right) \xi + 2 \sum_{i=1}^M \xi' P(A_i x + B_i) v_i. \quad (271)$$

Agora, recordando que $u_i \in [0, 1]$, $i \in \mathbb{K}_M$, observe que $\sum_{i=1}^M \frac{u_i}{M} \in [0, 1]$. Então, $(1 - \sum_{i=1}^M \frac{u_i}{M}) \geq 0$ e de (265) e (266):

$$\begin{aligned} & - \left(\left(1 - \sum_{i=1}^M \frac{u_i}{M} \right) \left((A_o + \sum_{i=1}^M u_{ir} A_i)' P + P(A_o + \sum_{i=1}^M u_{ir} A_i) + Z_o \right) \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^M u_i \left(\frac{1}{M} \left((A_o + \sum_{i=1}^M u_{ir} A_i)' P + P(A_o + \sum_{i=1}^M u_{ir} A_i) + Z_o \right) + Z_i \right) \right) > 0, \quad i \in \mathbb{K}_M, \quad (272) \end{aligned}$$

Assim, sem perda de generalidade, note que (272) pode ser representada por:

$$- \left((A_o + \sum_{i=1}^M u_{ir} A_i)' P + P(A_o + \sum_{i=1}^M u_{ir} A_i) + Z_o + \sum_{i=1}^M u_i Z_i \right) > 0, \quad (273)$$

para $u_i \in [0, 1]$ e $i \in \mathbb{K}_M$. Então, de (271), (273) e $\xi \neq 0$,

$$\begin{aligned} \dot{V}(\xi(t)) &= \xi' \left((A_o + \sum_{i=1}^M u_{ir} A_i)' P + P(A_o + \sum_{i=1}^M u_{ir} A_i) \right) \xi + 2 \sum_{i=1}^M \xi' P(A_i x + B_i) v_i \\ &< \xi' \left((A_o + \sum_{i=1}^M u_{ir} A_i)' P + P(A_o + \sum_{i=1}^M u_{ir} A_i) \right) \xi + 2 \sum_{i=1}^M \xi' P(A_i x + B_i) v_i \\ &\quad - \xi' \left((A_o + \sum_{i=1}^M u_{ir} A_i)' P + P(A_o + \sum_{i=1}^M u_{ir} A_i) + Z_o + \sum_{i=1}^M u_i Z_i \right) \xi \\ &= 2 \sum_{i=1}^M \xi' P(A_i x + B_i) v_i - \xi' \left(Z_o + \sum_{i=1}^M u_i Z_i \right) \xi. \end{aligned} \quad (274)$$

Seguindo, note que (267) e (268) pode ser representada por (veja a demonstração do Teorema 39 para maiores detalhes):

$$\begin{bmatrix} Z_o + \sum_{i=1}^M u_i Z_i & (C_o + \sum_{i=1}^M u_i C_i)' \\ (C_o + \sum_{i=1}^M u_i C_i) & I_n \end{bmatrix} > 0, \quad i \in \mathbb{K}_M. \quad (275)$$

Então, aplicando o complemento de Schur (BOYD et al., 1994) em (275) segue que:

$$\left(Z_o + \sum_{i=1}^M u_i Z_i \right) - (C_o + \sum_{i=1}^M u_i C_i)' (C_o + \sum_{i=1}^M u_i C_i) > 0, \quad i \in \mathbb{K}_M. \quad (276)$$

Agora, de (274), (276) e $\xi \neq 0$,

$$\begin{aligned} \dot{V}(\xi(t)) &= 2 \sum_{i=1}^M \xi' P(A_i x + B_i) v_i - \xi' \left(Z_o + \sum_{i=1}^M u_i Z_i \right) \xi \\ &\quad + \left(Z_o + \sum_{i=1}^M u_i Z_i \right) - \xi' \left((C_o + \sum_{i=1}^M u_i C_i)' (C_o + \sum_{i=1}^M u_i C_i) \right) \xi \\ &= 2 \sum_{i=1}^M \xi' P(A_i x + B_i) v_i - \xi' \left((C_o + \sum_{i=1}^M u_i C_i)' (C_o + \sum_{i=1}^M u_i C_i) \right) \xi. \end{aligned} \quad (277)$$

Seguindo, defina $H_i(\xi) = \xi' P(A_i x + B_i)$, para $i \in \mathbb{K}_M$. Assim, considerando que $u_{ir} \geq 0$, $i \in \mathbb{K}_M$, note que da estratégia de chaveamento (270),

$$\begin{aligned} H_i(\xi) v_i &= H_i(\xi) (u_i - u_{ir}) \\ &= H_i(\xi) \left(\left(\frac{1 - \text{sgn}(H_i(\xi))}{2} \right) - u_{ir} \right) = \begin{cases} -H_i(\xi) u_{ir} \leq 0, & \text{se } H_i(\xi) \geq 0, \\ H_i(\xi) (1 - u_{ir}) \leq 0, & \text{se } H_i(\xi) < 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (278)$$

Então, $H_i(\xi)v_i \leq 0$ para todo $i \in \mathbb{K}_M$. Adicionalmente, de (277), (278), definição (223) e $\xi \neq 0$:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\xi(t)) &< 2 \sum_{i=1}^M \xi' P(A_i x + B_i) v_i - \xi' \left((C_o + \sum_{i=1}^M u_i C_i)' (C_o + \sum_{i=1}^M u_i C_i) \right) \xi \\ &\leq -\xi' (C(u)' C(u)) \xi \leq 0. \end{aligned} \quad (279)$$

Agora, integrando (279) de zero até o infinito e tendo em conta que $\dot{V}(\xi(\infty)) = 0$, (232) mantém-se. Ademais, definindo $P(A_i x + B_i) = [f_i(x) \quad g_i(x) \quad h_i(x)]'$ e multiplicando (269) a direita por $[x' \quad 1]'$ têm-se,

$$JP \begin{bmatrix} A_i & B_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} f_i(x) & g_i(x) & h_i(x) \end{bmatrix}' = f_i(x) + h_i(x) = 0. \quad (280)$$

Consequentemente, de (280), para todo $i \in \mathbb{K}_M$:

$$\begin{aligned} \xi' P(A_i x + B_i) &= \xi' \begin{bmatrix} f_i(x) & g_i(x) & h_i(x) \end{bmatrix}' \\ &= (x_1 - x_{1r})f_i(x) + (x_2 - x_{2r})g_i(x) + (x_3 - x_{1r})h_i(x) \\ &= (x_1 - x_3)f_i(x) + (x_2 - x_{2r})g_i(x). \end{aligned} \quad (281)$$

Note que (281) não depende da variável de estado x_{1r} , componente do ponto de equilíbrio, e este fato satisfaz o método de projeto de controle proposto, com a estratégia de chaveamento dada pela função (270). Assim, o Teorema 41 assegura que para qualquer condição inicial $x_2 \rightarrow x_{2r}$ quando $t \rightarrow \infty$. A prova está concluída. \square

Do Teorema 41 proposto, para um dado $u_r \in \mathbb{R}^M$ segue o seguinte problema de otimização:

$$\inf_P \{ Tr(P) : (265) - (269) \text{ mantém-se para algum } P = P' > 0, \quad Z_o = Z_o', \quad Z_i = Z_i', \quad \text{e} \\ \forall i \in \mathbb{K}_M \}. \quad (282)$$

Entretanto, note que o mesmo problema ocorre para os conversores de quarta ordem Sepic e Zeta. Porém, para estes conversores observe que é necessária a adição de dois filtros passa-baixas com funções de transferências $F_1(s) = 1/(\tau_1 s + 1)$ e $F_2(s) = 1/(\tau_2 s + 1)$, a fim de estimar os valores do estado de equilíbrio das correntes nos indutores i_{L1r} e i_{L2r} , respectivamente. Então, seja $\hat{i}_{L1}(t)$ e $\hat{i}_{L2}(t)$ as correntes estimadas nos indutores e escolhendo $\tau_1 = \tau_2 = RC_2$ o novo vetor de estado para os conversores CC-CC Sepic e Zeta é dado por $x' = [i_{L1} \quad i_{L2} \quad V_{C1} \quad V_{C2} \quad \hat{i}_{L1} \quad \hat{i}_{L2}]$. Assim, o sistema chaveado afim aumentado (221)–(223) é agora definido pela Tabela 14 e as

seguintes matrizes:

$$A_{oe} = \begin{bmatrix} -\frac{rL_1}{L_1} & 0 & -\frac{1}{L_1} & -\frac{1}{L_1} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{rL_2}{L_2} & 0 & \frac{1}{L_2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{C_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{C_2} & -\frac{1}{C_2} & 0 & -\frac{1}{RC_2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{RC_2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{RC_2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{RC_2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{RC_2} \end{bmatrix}, \quad B_{oe} = \begin{bmatrix} \frac{V_g}{L_1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$A_{1e} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{L_1} & \frac{1}{L_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{L_2} & -\frac{1}{L_2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{C_1} & \frac{1}{C_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{C_2} & \frac{1}{C_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_{1e} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$A_{2e} = \begin{bmatrix} -\frac{rL_1}{L_1} & 0 & \frac{1}{L_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{rL_2}{L_2} & 0 & -\frac{1}{L_2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{C_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{C_2} & 0 & -\frac{1}{RC_2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{RC_2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{RC_2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{RC_2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{RC_2} \end{bmatrix}, \quad B_{2e} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$A_{3e} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{L_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{L_2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{C_1} & \frac{1}{C_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_{3e} = \begin{bmatrix} \frac{V_g}{L_1} \\ \frac{V_g}{L_2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (283)$$

$C(u)'C(u) = \text{diag}\{0, 0, 0, 1/R, 0, 0\}$ e o novo ponto de equilíbrio $x'_r = [i_{L1r} \ i_{L2r} \ V_{C1r} \ V_{C2r} \ \hat{i}_{L1r} \ \hat{i}_{L2r}]$, sendo $i_{L1r} = \hat{i}_{L1r}$ e $i_{L2r} = \hat{i}_{L2r}$, pois $F_1(0) = F_2(0) = 1$.

Tabela 14 - Modelos aumentados dos conversores Sepic e Zeta.

<i>Conversor</i>	A_o	A_1	B_o	B_1
<i>Sepic</i>	A_{oe}	A_{1e}	B_{oe}	B_{1e}
<i>Zeta</i>	A_{2e}	A_{3e}	B_{2e}	B_{3e}

Fonte: elaboração do próprio autor

Contudo, substituindo a restrição linear (269), proposta no Teorema 41, por:

$$J_1 P [A_i \ B_i] = 0, \quad (284)$$

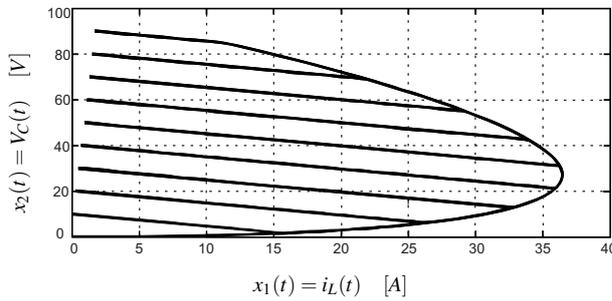
$$J_2 P [A_i \ B_i] = 0, \quad (285)$$

$i \in \mathbb{K}_M$, sendo $J_1 = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0]$ e $J_2 = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]$, pode-se concluir novamente que a estratégia de chaveamento (270) não depende das variáveis de equilíbrio x_{1r} e x_{2r} . Assim, o Teorema 41 assegura que para qualquer condição inicial $x_3 \rightarrow x_{3r}$, $x_4 \rightarrow x_{4r}$ quando $t \rightarrow \infty$.

5.2.1 Exemplo 9 (Conversores CC-CC operando com informações parciais)

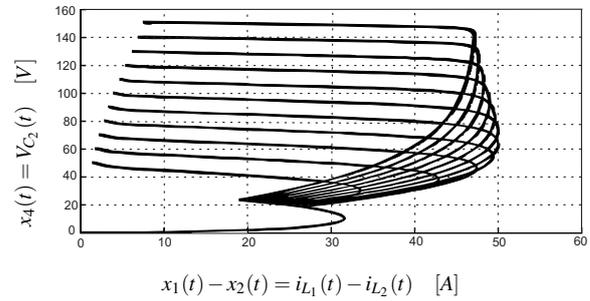
Neste exemplo, o método proposto na Seção 5.2 é aplicado no controle de dois conversores CC-CC, Buck e Sepic ilustrado nas Figuras 32 e 44, respectivamente. O *solver* utilizado neste exemplo foi o LMIsol (DE OLIVEIRA; FARIAS; GEROMEL, 1997). Então, considerando os mesmos parâmetros de projeto definidos anteriormente para o conversor Buck, equação (151) com $V_{Cr} = \{10, 20, \dots, 90\}$ e conversor Sepic, equação (183) com $V_{C2r} = \{50, 60, \dots, 150\}$ respectivamente, obtêm-se do problema de minimização (282), correspondente ao Teorema 41, o conjunto de matrizes simétricas positivas definidas, necessárias para a implementação da estratégia de chaveamento (270). As Figuras 73 e 74 ilustram os planos de fase do conversor de segunda ordem, Buck e de quarta ordem, Sepic, partindo da origem e operando sob informações parciais do ponto de equilíbrio.

Figura 73 - Plano de fase do conversor Buck operando sob informações parciais.



Fonte: elaboração do próprio autor

Figura 74 - Plano de fase do conversor Sepic operando sob informações parciais.



Fonte: elaboração do próprio autor

Observe que mesmo com informações parciais do ponto de equilíbrio, a estratégia de chaveamento proposta (270), conduz as variáveis de estado para o ponto de equilíbrio desejado com um tempo de estabelecimento igual ao obtido quando todas as informações do ponto de equilíbrio eram fornecidas, destacando a qualidade dos resultados obtidos.

5.3 Controle robusto de sistemas chaveados afins com incertezas politópicas

Esta seção investiga o problema de controle robusto de sistemas chaveados afins contínuos no tempo, utilizando uma estratégia de chaveamento dependendo apenas de informações parciais do ponto de equilíbrio. Desta forma, uma nova condição suficiente para o projeto de uma estratégia de chaveamento robusta, baseada em LMIs, é proposta.

5.3.1 Projeto de uma estratégia de chaveamento robusta dependente apenas de informações parciais do ponto de equilíbrio

Em termos de robustez, é conhecido que em aplicações práticas os sistemas podem estar sujeitos a ocorrência de falhas estruturais (ou incertezas politópicas) em sua estrutura em um certo instante de tempo $t \geq 0$. Assim, considere o sistema chaveado afim incerto definido pela seguinte realização em espaço de estados:

$$\dot{x}(t) = A(\alpha, u)x(t) + B(u), \quad (286)$$

$$y(t) = C(u)x(t), \quad (287)$$

sendo $x(t) \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estado, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ a saída e $u(t) \in \mathbb{R}^M$ a entrada de controle. Para a matriz $A(\alpha, u)$ é definido que o vetor $\alpha = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_r]'$ representa as incertezas politópicas da planta. Então, a matriz $A(\alpha, u) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pode ser representada pela combinação convexa dos

seus vértices, como abaixo:

$$A(\alpha, u) = \sum_{j=1}^r \alpha_j A_{o_j} + \sum_{i=1}^M u_i A_i, \quad \sum_{j=1}^r \alpha_j = 1, \quad \alpha_j \geq 0, \quad u(t) \in \mathbb{K}_M, \quad (288)$$

sendo r é o número de vértices das incertezas politópicas e as matrizes $B(u)$ e $C(u)$ definidas em (223). Para maiores detalhes sobre incertezas politópicas, veja Boyd et al. (1994) e Bernussou, Peres e Geromel (1989). Agora, o problema de controle é o seguinte:

Problema 8. Suponha que o vetor de estado $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é disponível para realimentação. Projetar uma estratégia de chaveamento dependente de informações parciais do ponto de equilíbrio, para todo $t \geq 0$, que torne o conjunto de pontos de equilíbrio $x_{r\alpha} \in \mathbb{R}^n$ do sistema chaveado afim incerto (223) e (286)–(288), com as matrizes dadas pelas Tabelas 13 e 14, equações (264) e (283), globalmente assintoticamente estável e ainda o sistema controlado satisfaça o índice de desempenho dado em (232).

Neste contexto, considerando que existem vetores constantes $x_{r\alpha} = [x_{r\alpha_1} \dots x_{r\alpha_n}]'$, $u_{r\alpha} = [u_{r\alpha_1} \dots u_{r\alpha_M}]'$ correspondentes ao ponto de equilíbrio do sistema chaveado afim com incertezas politópicas (223) e (286)–(288), este sistema definindo $\xi = x - x_{r\alpha}$ pode ser descrito por:

$$\dot{\xi} = \sum_{j=1}^r \alpha_j \left\{ (A_{o_j} + \sum_{i=1}^M u_{r\alpha_i} A_i) \xi + \sum_{i=1}^M (A_i x + B_i) v_{\alpha_i} \right\}, \quad v_{\alpha_i} = u_i - u_{r\alpha_i}. \quad (289)$$

Suponha ainda que:

$$u_{r\alpha_i} = \sum_{j=1}^r \alpha_j u_{rij}, \quad i \in \mathbb{K}_M. \quad (290)$$

Então, (289) pode ser descrita como:

$$\dot{\xi} = \sum_{j=1}^r \alpha_j \left\{ (A_{o_j} + \sum_{i=1}^M u_{rij} A_i) \xi + \sum_{i=1}^M (A_i x + B_i) v_{ij} \right\}, \quad v_{ij} = u_i - u_{rij}. \quad (291)$$

Para os conversores CC-CC Buck, Boost e Buck-Boost, uma solução que satisfaz o problema de controle proposto é descrita no Teorema 42 a seguir. Novamente, note que será necessário introduzir um filtro passa-baixas com função de transferência $F(s) = 1/(\tau s + 1)$, a fim de estimar o valor da corrente no indutor em regime permanente. Então, definindo $\hat{i}_L(t)$ como a corrente estimada do indutor, segue o teorema abaixo.

Teorema 42. Considere o sistema chaveado afim incerto (291) com as matrizes dadas pela Tabela 13 e (264), entrada de controle $u_i \in [0, 1]$ e suponha que os vértices da entrada de controle u_{rij} , $i \in \mathbb{K}_M$ e $j \in \mathbb{K}_r$ são dados. Se existirem matrizes simétricas $\{Z_o, Z_1, \dots, Z_M\}$ e

uma matriz simétrica positiva definida $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$, tais que

$$(A_{o_j} + \sum_{i=1}^M u_{rij} A_i)' P + P(A_{o_j} + \sum_{i=1}^M u_{rij} A_i) + Z_o < 0, \quad (292)$$

$$\frac{1}{M} \left(Z_o + (A_{o_j} + \sum_{i=1}^M u_{rij} A_i)' P + P(A_{o_j} + \sum_{i=1}^M u_{rij} A_i) \right) + Z_i < 0, \quad (293)$$

$$\begin{bmatrix} Z_o & C_o' \\ C_o & I_n \end{bmatrix} > 0, \quad (294)$$

$$\frac{1}{M} \begin{bmatrix} Z_o & C_o' \\ C_o & I_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z_i & C_i' \\ C_i & 0_n \end{bmatrix} > 0, \quad (295)$$

$$JP[A_i \ B_i] = 0, \quad (296)$$

para todo $i \in \mathbb{I}_M$ e $j \in \mathbb{I}_r$, sendo $J = [1 \ 0 \ 1]$, então a estratégia de chaveamento (270) torna o ponto de equilíbrio $x_{r\alpha} \in \mathbb{R}^n$ para os conversores CC-CC Buck, Boost e Buck-Boost, globalmente assintoticamente estável e o custo garantido (232) mantém-se.

Demonstração. Considere a candidata a função quadrática de Lyapunov $V(\xi) = \xi' P \xi$. Então, de (288), (289) e $\xi \neq 0$,

$$\dot{V}(\xi) = \sum_{j=1}^r \alpha_j \left\{ \xi' \left((A_{o_j} + \sum_{i=1}^M u_{rij} A_i)' P + P(A_{o_j} + \sum_{i=1}^M u_{rij} A_i) \right) \xi + 2 \sum_{i=1}^M \xi' P(A_i x + B_i) v_{ij} \right\}. \quad (297)$$

Recordando que $u_i \in [0, 1]$, $i \in \mathbb{I}_M$, observe que $\sum_{i=1}^M \frac{u_i}{M} \in [0, 1]$. Então, $(1 - \sum_{i=1}^M \frac{u_i}{M}) \geq 0$ e note que de (292) e (293) segue que:

$$\begin{aligned} & - \left(\left(1 - \sum_{i=1}^M \frac{u_i}{M} \right) \left((A_{o_j} + \sum_{i=1}^M u_{rij} A_i)' P + P(A_{o_j} + \sum_{i=1}^M u_{rij} A_i) + Z_o \right) \right. \\ & \quad \left. + \sum_{i=1}^M u_i \left(\frac{1}{M} \left((A_{o_j} + \sum_{i=1}^M u_{rij} A_i)' P + P(A_{o_j} + \sum_{i=1}^M u_{rij} A_i) + Z_o \right) + Z_i \right) \right) > 0 \quad (298) \end{aligned}$$

para $i \in \mathbb{I}_M$ e $j \in \mathbb{I}_r$. Assim, sem perda de generalidade, note que (298) pode ser representada por:

$$- \left((A_{o_j} + \sum_{i=1}^M u_{rij} A_i)' P + P(A_{o_j} + \sum_{i=1}^M u_{rij} A_i) + Z_o + \sum_{i=1}^M u_i Z_i \right) > 0, \quad (299)$$

para todo $j \in \mathbb{I}_r$ e $u_i \in [0, 1]$, $i \in \mathbb{I}_M$. Assim, de (297), (299), $\xi \neq 0$ e considerando as mesmas

análises apresentadas na prova do Teorema 41, têm-se que:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\xi(t)) &= \sum_{j=1}^r \alpha_j \left\{ \xi' \left((A_{oj} + \sum_{i=1}^M u_{rij} A_i)' P + P (A_{oj} + \sum_{i=1}^M u_{rij} A_i) \right) \xi + 2 \sum_{i=1}^M \xi' P (A_i x + B_i) v_{ij} \right\} \\ &< \sum_{j=1}^r \alpha_j \left\{ 2 \sum_{i=1}^M \xi' P (A_i x + B_i) v_{ij} - \xi' \left(Z_o + \sum_{i=1}^M u_i Z_i \right) \xi \right\}. \end{aligned} \quad (300)$$

Seguindo, note que (294) e (295) pode ser representada por (veja a demonstração do Teorema 39 para maiores detalhes):

$$\begin{bmatrix} Z_o + \sum_{i=1}^M u_i Z_i & (C_o + \sum_{i=1}^M u_i C_i)' \\ (C_o + \sum_{i=1}^M u_i C_i) & I_n \end{bmatrix} > 0, \quad i \in \mathbb{K}_M. \quad (301)$$

Então, aplicando o complemento de Schur (BOYD et al., 1994) em (301) segue que:

$$(Z_o + \sum_{i=1}^M u_i Z_i) - (C_o + \sum_{i=1}^M u_i C_i)' (C_o + \sum_{i=1}^M u_i C_i) > 0, \quad i \in \mathbb{K}_M. \quad (302)$$

Agora, de (300), (302) e $\xi \neq 0$,

$$\begin{aligned} \dot{V}(\xi(t)) &< \sum_{j=1}^r \alpha_j \left\{ 2 \sum_{i=1}^M \xi' P (A_i x + B_i) v_{ij} - \xi' \left(Z_o + \sum_{i=1}^M u_i Z_i \right) \xi \right. \\ &\quad \left. + (Z_o + \sum_{i=1}^M u_i Z_i) - \xi' \left((C_o + \sum_{i=1}^M u_i C_i)' (C_o + \sum_{i=1}^M u_i C_i) \right) \xi \right\} \\ &= \sum_{j=1}^r \alpha_j \left\{ 2 \sum_{i=1}^M \xi' P (A_i x + B_i) v_{ij} - \xi' \left((C_o + \sum_{i=1}^M u_i C_i)' (C_o + \sum_{i=1}^M u_i C_i) \right) \xi \right\}. \end{aligned} \quad (303)$$

Note que, da estratégia de chaveamento (270), $\xi' P (A_i x + B_i) v_{ij} \leq 0$ para todo $i \in \mathbb{K}_M$ e $j \in \mathbb{K}_r$ (veja prova do Teorema 41 para detalhes). Então, de (303) e lembrando que $v_{ij} = u_i - u_{rij}$,

$$\dot{V}(\xi) < \sum_{j=1}^r \alpha_j \left\{ - \xi' \left((C_o + \sum_{i=1}^M u_i C_i)' (C_o + \sum_{i=1}^M u_i C_i) \right) \xi \right\} = - \xi' (C(u)' C(u)) \xi \leq 0. \quad (304)$$

Agora, integrando (304) de zero até o infinito e tendo em conta que $V(\xi(\infty)) = 0$, (232) mantém-se. Adicionalmente, da restrição linear (296), o Teorema 42 assegura que para qualquer condição inicial $x_2 \rightarrow x_{2r}$ quando $t \rightarrow \infty$ e (270) não depende do estado de equilíbrio x_{1r} (veja a prova do Teorema 41 para detalhes). A prova está concluída. \square

Do Teorema 42 proposto, para um dado $u_r \in \mathbb{R}^M$ segue o seguinte problema de otimização:

$$\inf_P \{Tr(P) : (292) - (296) \text{ mantém-se para algum } P = P' > 0, Z_o = Z'_o, Z_i = Z'_i, \\ i \in \mathbb{K}_M \text{ e } j \in \mathbb{K}_r\}. \quad (305)$$

Novamente, para os conversores de quarta ordem Sepic e Zeta, note que é necessário a adição de dois filtros passa-baixas com funções de transferência $F_1(s) = 1/(\tau_1 s + 1)$ e $F_2(s) = 1/(\tau_2 s + 1)$, respectivamente, a fim de estimar os valores do estado de equilíbrio das correntes nos indutores i_{L_1r} e i_{L_2r} . Assim, substituindo a restrição linear (296) por (284) e (285), e considerando agora as matrizes dada pela Tabela 14, equação (283), então o Teorema 42 assegura que para qualquer condição inicial $x_3 \rightarrow x_{3r}$, $x_4 \rightarrow x_{4r}$ quando $t \rightarrow \infty$ e a estratégia de chaveamento (270) não depende das componentes do ponto de equilíbrio x_{1r} e x_{2r} .

Ademais, observe que o método de projeto proposto utilizando um controle por estrutura variável permite projetar uma estratégia de chaveamento, por exemplo a estratégia (270), que não depende dos parâmetros incertos da planta e ainda, considerando que as restrições (296), (284) e (285) sejam factíveis, obtemos que esta estratégia de chaveamento é dependente somente de informações parciais da planta, sendo esta a principal contribuição deste capítulo. Na próxima subseção, este procedimento de controle robusto considerando somente informações parciais da planta é aplicado no controle de dois conversores CC-CC: Buck e Sepic, a fim de ilustrar o método de controle proposto.

5.3.2 Exemplo 10 (Projeto de controle robusto para os conversores Buck e Sepic)

5.3.2.1 Projeto de controle robusto para o conversor Buck

Considere a Figura 32, a qual ilustra a estrutura do conversor Buck. Neste exemplo suponha que a carga R é um parâmetro incerto e que todos os outros parâmetros são bem conhecidos. Então, como somente a matriz A_{oe} do conversor Buck depende linearmente do parâmetro incerto $1/R$, pode-se definir um politopo de $r = 2^1$ vértices que contém todos os valores da matriz de incerteza. Assim, considere que o parâmetro incerto $1/R$ está contido dentro do seguinte intervalo $[1/R_{min}, 1/R_{max}]$. Então, de (264) e da Tabela 13, as matrizes aumentadas para o conversor que definem os vértices do politopo para o sistema incerto (286)–(49) são dadas por:

$$A_{o1} = \begin{bmatrix} -\frac{rL}{L} & -\frac{1}{L} & 0 \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{R_{max}C} & 0 \\ \frac{1}{R_{max}C} & 0 & -\frac{1}{R_{max}C} \end{bmatrix}, \quad A_{o2} = \begin{bmatrix} -\frac{rL_1}{L} & -\frac{1}{L} & 0 \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{R_{min}C} & 0 \\ \frac{1}{R_{min}C} & 0 & -\frac{1}{R_{min}C} \end{bmatrix},$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} \frac{V_g}{L} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_o = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (306)$$

Note que o sistema pode então ser representado como descrito em (288), com $M = 1$, $r = 2$, $\alpha_1 = (R^{-1} - R_{min}^{-1})/(R_{max}^{-1} - R_{min}^{-1})$ e $\alpha_2 = 1 - \alpha_1 = (R_{max}^{-1} - R^{-1})/(R_{max}^{-1} - R_{min}^{-1})$. Observe que $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ e $\alpha_1, \alpha_2 \geq 0$. Para justificar este fato, observe que $R^{-1} = \alpha_1 R_{max}^{-1} + \alpha_2 R_{min}^{-1}$.

O conjunto que define todos os pontos de equilíbrio alcançáveis e a razão cíclica de trabalho do conversor Buck é apresentado abaixo:

$$x_{r\alpha} = \left\{ \left[\begin{array}{cc} i_{Lr} & V_{Cr} \end{array} \right]' : V_{Cr} = R i_{Lr}, \quad 0 \leq i_{Lr} \leq \frac{V_g}{r_L + R} \right\},$$

$$u_{r\alpha 1} = \frac{r_L i_{Lr} + V_{Cr}}{V_g} = \frac{V_{Cr}(r_L + R)}{R V_g}. \quad (307)$$

Agora, note que de (307), como $R^{-1} = \alpha_1 R_{max}^{-1} + \alpha_2 R_{min}^{-1}$ e $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ então:

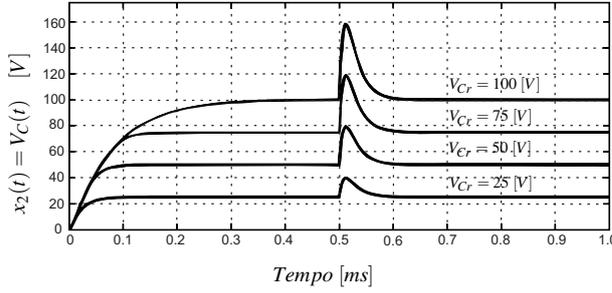
$$u_{r\alpha 1} = \left(\frac{V_{Cr} r_L}{V_g} \right) \frac{1}{R} + \frac{V_{Cr}}{V_g} = \alpha_1 u_{r11} + \alpha_2 u_{r12}, \quad (308)$$

sendo que,

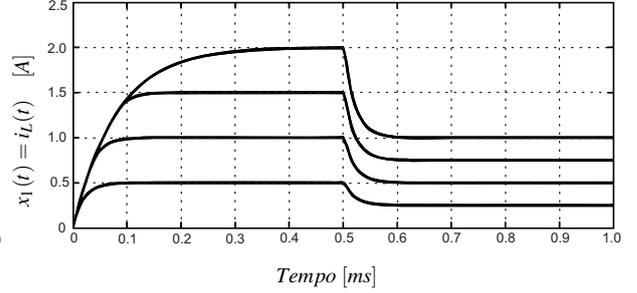
$$u_{r11} = \frac{V_{Cr}(r_L + R_{max})}{V_g R_{max}} \quad \text{e} \quad u_{r12} = \frac{V_{Cr}(r_L + R_{min})}{V_g R_{min}}. \quad (309)$$

Para este exemplo, considere os seguintes parâmetros de projeto: $V_g = 100[V]$, $R = 50[\Omega]$, $R_{max} = 150[\Omega]$, $R_{min} = 20[\Omega]$, $r_L = 1[\mu\Omega]$, $L = 4,2[mH]$, $C = 83,3[\eta F]$ com valor nominal de carga $R = 50[\Omega]$ e os seguinte conjunto de valores de tensão de saída $V_{Cr} = \{25, 50, \dots, 100\}$. Então, de (307), (308), (309) e do problema de minimização (305), correspondente ao Teorema 42 com $J = [1 \ 0 \ 1]$, obtêm-se o conjunto de todas as matrizes soluções necessárias para a implementação da estratégia de chaveamento (270). Considerando o conversor partindo da origem, a Figura 75 ilustra o sinal da tensão de saída $V_C(t)$ e a Figura 76 retrata a corrente $i_L(t)$ fornecida a carga, obtida quando o conversor está operando no ponto de equilíbrio nominal e sofre abruptamente um degrau de carga de 50% (ou seja, a resistência de carga muda de 50Ω para 100Ω em $t = 0,5 \text{ ms}$). Em todos os casos, o tempo de estabelecimento da tensão $V_C(t)$ para a regulação de carga foi menor que $0,15[ms]$ com pico máximo de tensão igual a $160[V]$.

Observação 15. Note que a estratégia de chaveamento (270) não depende da corrente no ponto de equilíbrio $x_{1r} = i_{Lr}$, pois (296) mantêm-se com $J = [1 \ 0 \ 1]$ (veja a prova do Teorema 41 para maiores detalhes) e além disso as matrizes A_1 e B_1 descritas em (306), não contém parâmetros incertos. Agora, observe que na estratégia de chaveamento (109) proposta em Deaecto et al.

Figura 75 - Tensão de saída $V_C(t)$ do conversor Buck sob variação de carga.

Fonte: elaboração do próprio autor

Figura 76 - Corrente no indutor $i_L(t)$ do conversor Buck sob variação de carga.

Fonte: elaboração do próprio autor

(2010), mesmo quando $Q_i = 0$ para todo $i \in \mathbb{K}_N$, as matrizes A_i ($i = 1, 2$) para o conversor Buck, equação (153), dependem da carga incerta R e não pode ser diretamente implementada. Este fato ilustra a importância do método de controle proposto.

5.3.2.2 Projeto de controle robusto para o conversor Sepic

A Figura 44 ilustra a estrutura do conversor Sepic. Neste exemplo assumamos que a carga R é um parâmetro incerto e está contida no seguinte intervalo $[1/R_{min}, 1/R_{max}]$. Então, de (283) e da Tabela 14, as matrizes aumentadas para o conversor que definem os vértices do politopo para o sistema incerto (286)–(288) são dadas por:

$$A_{o1} = \begin{bmatrix} \frac{-rL_1}{L_1} & 0 & \frac{-1}{L_1} & \frac{-1}{L_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-rL_2}{L_2} & 0 & \frac{1}{L_2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{C_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{C_2} & \frac{-1}{C_2} & 0 & \frac{-1}{R_{min}C_2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{R_{min}C_2} & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{R_{min}C_2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_{min}C_2} & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{R_{min}C_2} \end{bmatrix},$$

$$A_{o2} = \begin{bmatrix} \frac{-rL_1}{L_1} & 0 & \frac{-1}{L_1} & \frac{-1}{L_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-rL_2}{L_2} & 0 & \frac{1}{L_2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{C_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{C_2} & \frac{-1}{C_2} & 0 & \frac{-1}{R_{max}C_2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{R_{max}C_2} & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{R_{max}C_2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_{max}C_2} & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{R_{max}C_2} \end{bmatrix},$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{L_1} & \frac{1}{L_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{L_2} & \frac{-1}{L_2} & 0 & 0 \\ \frac{-1}{C_1} & \frac{1}{C_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{C_2} & \frac{1}{C_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_o = \begin{bmatrix} \frac{V_g}{L_1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (310)$$

O conjunto que define todos os pontos de equilíbrio alcançáveis e a razão cíclica do conversor Sepic são dados por:

$$x_{r\alpha} = \left\{ [i_{L1r} \ i_{L2r} \ V_{C1r} \ V_{C2r}]' : \quad i_{L1r} = \frac{(r_{L2} + R)V_{C2r}^2}{(RV_{C1r} - r_{L2}V_{C2r})R}, \quad i_{L2r} = -\frac{V_{C2r}}{R}, \right.$$

$$\left. R^2V_{C1r}^2 - R(2V_{C2r}r_{L2} + V_gR)V_{C1r} + (r_{L1}R + r_{L1}r_{L2} + r_{L2}^2)V_{C2r}^2 + V_gRr_{L2}V_{C2r} = 0 \right\},$$

$$u_{r\alpha 1} = \frac{V_{C2r} - r_{L2}i_{L2r}}{V_{C2r} + V_g} = \frac{(r_{L2} + R)V_{C2r}}{(V_g + V_{C2r})R}. \quad (311)$$

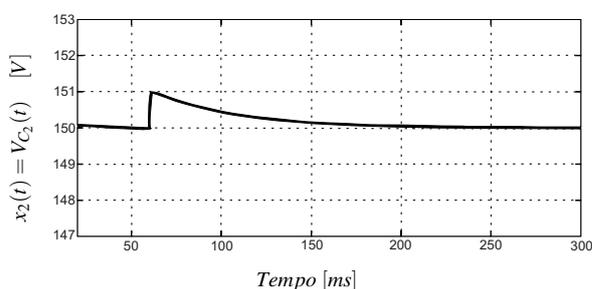
Analogamente à análise realizada nas equações (307), (308) e (309), de (311) note que $u_{r\alpha 1} = \alpha_1 u_{r11} + \alpha_2 u_{r12}$ sendo:

$$u_{r11} = \frac{(r_{L2} + R_{max})V_{C2r}}{(V_g + V_{C2r})R_{max}} \quad \text{e} \quad u_{r12} = \frac{(r_{L2} + R_{min})V_{C2r}}{(V_g + V_{C2r})R_{min}}. \quad (312)$$

Os parâmetros de projeto são os seguinte: $V_g = 100[V]$, $R = 50[\Omega]$, $r_{L1} = 2[\Omega]$, $r_{L2} = 3[\Omega]$, $L_1 = 500[\mu H]$, $L_2 = 600[\mu H]$, $C_1 = 470[\mu F]$, $C_2 = 800[\mu F]$, $R_{max} = 150[\Omega]$, $R_{min} = 20[\Omega]$ e o valor nominal de carga é $R = 50[\Omega]$. Adote o seguinte valor de tensão de saída $V_{C2r} = 150[V]$. Então, de (311) e (312), o problema de minimização (305), correspondente ao Teorema 42 com $J_1 = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0]$ e $J_2 = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]$, nos fornece a seguinte matriz solução,

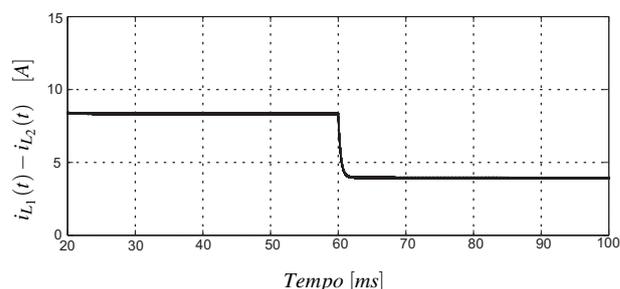
$$P = 10^{-4} \times \begin{bmatrix} 0,0490 & -0,0055 & 0,0299 & 0,1948 & -0,0274 & 0,0101 \\ -0,0055 & 0,0401 & 0,0424 & -0,1392 & 0,0314 & -0,0345 \\ 0,0299 & 0,0424 & 0,1901 & 0,0274 & 0,0251 & -0,0755 \\ 0,1948 & -0,1392 & 0,0274 & 1,8783 & -0,2886 & 0,1957 \\ -0,0274 & 0,0314 & 0,0251 & -0,2886 & 0,6998 & -0,2469 \\ 0,0101 & -0,0345 & -0,0755 & 0,1957 & -0,2469 & 0,7110 \end{bmatrix},$$

Figura 77 - Tensão de saída $V_{C_2}(t)$ do conversor Sepic sob variação de carga.



Fonte: elaboração do próprio autor

Figura 78 - Corrente no indutor $i_{L_1}(t) - i_{L_2}(t)$ do conversor Sepic sob variação de carga.



Fonte: elaboração do próprio autor

necessária para a implementação da estratégia de chaveamento (270). Considerando o conversor Sepic partindo da origem, a Figura 77 ilustra o sinal da tensão de saída V_{C_2} e a Figura 78 retrata a corrente fornecida a carga $i_{L_1} - i_{L_2}$, obtida quando o conversor está operando no ponto de equilíbrio nominal e sofre abruptamente um degrau de carga de 50% (ou seja, a resistência de carga muda de 50Ω para 100Ω em $t = 60\text{ ms}$). O tempo de estabelecimento da tensão obtido para a regulação de carga foi menor que 140[ms] com pico máximo de tensão igual a 151[V] . Assim, os resultados ilustram a qualidade do projeto de controle proposto.

Observação 16. *No exemplo acima proposto note que também não é possível implementar diretamente a estratégia de controle (109) proposta em Deaecto et al. (2010), mesmo quando $Q_i = 0$ para todo $i \in \mathbb{K}_N$, pois as matrizes A_i $i = (1, 2)$, definidas em (184) dependem da carga incerta R .*

5.4 Conclusões Parciais

Neste capítulo foi apresentado um estudo sobre estabilidade e projeto de sistemas de controle para sistemas chaveados afins utilizando controle por estrutura variável. Inicialmente, a teoria desenvolvida foi aplicada nos conversores CC-CC Buck, Boost e Buck-Boost a fim de comparar os teoremas propostos utilizando controle por estrutura variável, com os propostos em Deaecto et al. (2010) que se baseiam na função mínimo. Posteriormente, uma nova estratégia de chaveamento dependente apenas de informações parciais da planta foi proposta, e os resultados demonstram que o novo método é eficaz para o controle de conversores CC-CC de segunda ordem Buck, Boost e Buck-Boost e quarta ordem tais como Sepic e Zeta. Finalizando este capítulo, foi proposto um método de projeto de controle robusto para sistemas chaveados afins com incertezas politópicas, que considera apenas informações parciais da planta, oferecendo assim uma lei de chaveamento robusta para casos em que os procedimentos de controle disponíveis não podem ser diretamente aplicados. Esta teoria foi aplicada para o controle dos conversores

CC-CC Buck e Sepic. Os projetos propostos neste capítulo foram baseados no critério de estabilidade de Lyapunov através de uma função quadrática e desigualdades matriciais lineares. Os resultados das simulações mostraram que quando as condições propostas pelos teoremas foram factíveis, os conversores controlados apresentaram uma performance adequada ilustrando a utilidade desta metodologia de projeto.

6 CONTROLE ADAPTATIVO DE SISTEMAS CHAVEADOS AFINS

A técnica de controle de sistemas chaveados afins utilizando estrutura variável desenvolvida no Capítulo 5, assegura que para um dado ponto de equilíbrio $x_r \in \mathbb{R}^n$ o sistema controlado é globalmente assintoticamente estável. No entanto, novamente os controladores projetados operam a uma frequência de chaveamento muito próxima do infinito (no caso ideal), que não pode ser alcançada em sistemas práticos. Assim, a fim de se obter uma redução da frequência de chaveamento, neste capítulo, uma outra estratégia de chaveamento utilizando controle adaptativo (EL BEID; DOUBABI; CHAOUI, 2007; WENJIN; DONGHUA, 2008; JEONG; KIM; SON, 2009; NG; LEUNG; TAM, 1996) é proposta para a classe de sistemas chaveados afins, tendo como base os resultados e modelos obtidos no Capítulo 5. A motivação para a proposta deste novo método de projeto é devido este permitir projetar uma estratégia de chaveamento adaptativa, a qual proporciona a entrada de controle $u(t) \in \mathbb{R}^M$ que é equivalente à razão cíclica do sistema controlado. Conforme desejado, o valor da entrada de controle equivalente é mantida entre 0 e 1. Assim, uma frequência de chaveamento constante pode ser conseguida através de uma comparação do valor da entrada de controle com uma onda em forma de dente de serra (esta modulação é também conhecida como modulação PWM (ERICKSON, 2001)). Para a análise do método de projeto proposto, a modelagem dos conversores CC-CC será efetuada através do método do modelo médio das variáveis (KISLOVSKI; REDL; SOKAL, 1991), considerando todas as não linearidades do sistema. A teoria desenvolvida neste capítulo é aplicada novamente nos quatro conversores CC-CC, a saber Buck, Boost, Buck-Boost e Sepic.

6.1 Controle de sistemas chaveados afins utilizando uma estratégia de chaveamento adaptativa

Considere novamente o sistema chaveado afim (221) e (222):

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(u)x(t) + B(u), \\ y(t) &= C(u)x(t),\end{aligned}$$

sendo $x(t) \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estado, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ a saída, $u(t) \in \mathbb{R}^M$ a entrada de controle e as matrizes $A(u)$, $B(u)$ e $C(u)$ definidas em (223). Então, o problema de projeto de controle é o seguinte:

Problema 9. Suponha que o vetor de estado $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é disponível para realimentação. Determinar as entradas de controle $u_i(t) \in [0, 1]$, $i \in \mathbb{K}_M$, para todo $t \geq 0$, que tornam um ponto de equilíbrio conhecido $x = x_r$ de (221) e (222) da equação (226) globalmente estável.

Uma solução para o problema de controle 9 é proposto a seguir no Teorema 43, o qual propõe uma estratégia de chaveamento adaptativa para o controle do sistema chaveado afim (226).

Teorema 43. Considere o sistema chaveado afim (226) com entrada de controle $u_i \in [0, 1]$, $i \in \mathbb{K}_M$ e seja o ponto de equilíbrio $x_r \in \mathbb{R}^n$ dado. Se existirem uma entrada de controle constante $u_{ir} \in \mathbb{R}^M$ e uma matriz simétrica positiva definida $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tais que

$$(A_o + \sum_{i=1}^M u_{ir} A_i)' P + P (A_o + \sum_{i=1}^M u_{ir} A_i) < 0, \quad (313)$$

$$(A_o + \sum_{i=1}^M u_{ir} A_i) x_r + (B_o + \sum_{i=1}^M u_{ir} B_i) = 0, \quad (314)$$

e supondo que os vetores $(A_i x_r + B_i)$, $i \in \mathbb{K}_M$, são linearmente independentes, então a estratégia de chaveamento

$$\dot{v}_i(t) = \dot{u}_i(t) = \begin{cases} -\xi' P (A_i x + B_i) \Gamma, & \text{se } \begin{cases} u_i(t) \in (0, 1); \\ u_i(t) = 1 \text{ e } \xi' P (A_i x + B_i) > 0; \\ u_i(t) = 0 \text{ e } \xi' P (A_i x + B_i) < 0; \end{cases} \\ 0, & \text{se } \begin{cases} u_i(t) = 1 \text{ e } \xi' P (A_i x + B_i) \leq 0; \\ u_i(t) = 0 \text{ e } \xi' P (A_i x + B_i) \geq 0; \end{cases} \end{cases} \quad (315)$$

sendo $\xi = x - x_r$ e $\Gamma > 0 \in \mathbb{R}$ uma constante positiva que denota os ganhos da entrada de controle adaptativa, tornam o ponto de equilíbrio $(x, u) = (x_r, u_r)$ globalmente estável.

Demonstração. Considere a candidata a função de Lyapunov:

$$V(\xi, v_i) = \xi' P \xi + \Gamma^{-1} \sum_{i=1}^M v_i^2, \quad (316)$$

sendo $v_i = u_i - u_{ir}$. Então, de (226), têm-se que para $\xi \neq 0$:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\xi, v_i) &= \xi' \left((A_o + \sum_{i=1}^M u_{ir} A_i)' P + P (A_o + \sum_{i=1}^M u_{ir} A_i) \right) \xi + 2 \sum_{i=1}^M \xi' P (A_i x + B_i) v_i + 2 \sum_{i=1}^M \Gamma^{-1} v_i \dot{v}_i \\ &= \xi' \left((A_o + \sum_{i=1}^M u_{ir} A_i)' P + P (A_o + \sum_{i=1}^M u_{ir} A_i) \right) \xi + 2 \sum_{i=1}^M v_i (\dot{v}_i \Gamma^{-1} + \xi' P (A_i x + B_i)). \end{aligned} \quad (317)$$

Seguindo, defina $\mathcal{M}_i(\xi) = \xi'P(A_ix + B_i)$, para todo $i \in \mathbb{K}_M$. Assim, lembrando que $v_i = (u_i - u_{ir})$, $u_{ir} \geq 0$, $i \in \mathbb{K}_M$, note que da estratégia de chaveamento (315) (TEIXEIRA, 1989),

$$\begin{aligned} & \left(\dot{v}_i \Gamma^{-1} + \mathcal{M}_i(\xi) \right) v_i \\ &= \left(\dot{u}_i \Gamma^{-1} + \mathcal{M}_i(\xi) \right) (u_i - u_{ir}) = \begin{cases} -\mathcal{M}_i(\xi) u_{ir} \leq 0, & \text{se } u_i = 0 \text{ e } \mathcal{M}_i(\xi) \geq 0, \\ \mathcal{M}_i(\xi)(1 - u_{ir}) \leq 0, & \text{se } u_i = 1 \text{ e } \mathcal{M}_i(\xi) \leq 0, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \end{aligned} \quad (318)$$

Contudo, $\left(\dot{v}_i \Gamma^{-1} + \mathcal{M}_i(\xi) \right) v_i \leq 0$ para todo $i \in \mathbb{K}_M$. Além disso, de (313), (317) e (318) segue que para $\xi \neq 0$:

$$\dot{V}(\xi, v_i) \leq \xi' \left((A_o + \sum_{i=1}^M u_{ir} A_i)' P + P(A_o + \sum_{i=1}^M u_{ir} A_i) \right) \xi < 0. \quad (319)$$

Assim, $V(\xi, v_i) \leq V(0)$ pois $\dot{V}(\xi, v_i) \leq 0$ e $\dot{V}(\xi, v_i) < 0$ para $\xi \neq 0$. Portanto, o ponto de equilíbrio $x_r \in \mathbb{R}^n$ é estável. Além disso, note que o sistema controlado (226) e (315) pode ser descrito por $[\dot{\xi}' \ \dot{v}_i']' = f(\xi, v_i)$. Desta forma, observe que o sistema é autônomo, e a análise de estabilidade não requer o uso do Lema de Barbalat. Então, de (313) e (319) segue que $\dot{V}(\xi, v_i) = 0$ para $\xi = 0$ e $\dot{\xi} = 0$. Assim, de (226) têm-se que para $\xi(t) = 0$ e $\dot{\xi}(t) = 0$:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \left((A_o + \sum_{i=1}^M u_{ir} A_i) \xi + \sum_{i=1}^M (A_i x + B_i) v_i \right) = \sum_{i=1}^M (A_i x + B_i) v_i = \sum_{i=1}^M (A_i(x - x_r) + A_i x_r + B_i) v_i \\ &= \sum_{i=1}^M (A_i \xi + A_i x_r + B_i) v_i = \sum_{i=1}^M (A_i x_r + B_i) v_i = 0. \end{aligned} \quad (320)$$

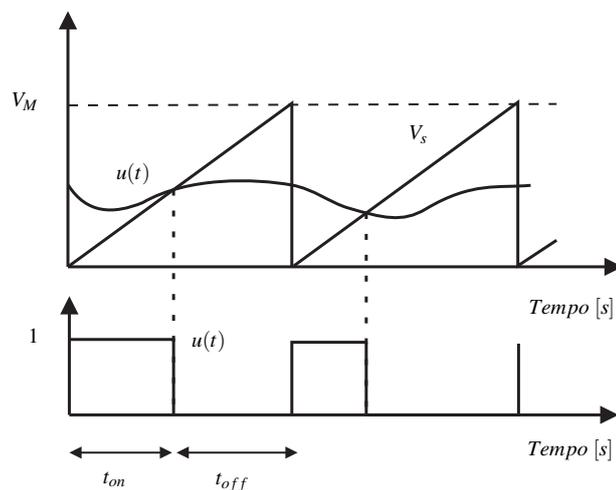
Então, de (320) e considerando que os vetores $(A_i x_r + B_i)$, $i \in \mathbb{K}_M$, são linearmente independentes, observe que $v_i(t) = u_i - u_{ir} = 0$, para $i \in \mathbb{K}_M$. Seguindo, utilizando o teorema do conjunto invariante (SLOTINE; LI, 1991) conclui-se que o ponto de equilíbrio $(x, u) = (x_r, u_r)$ é globalmente estável. Adicionalmente, note que a estratégia de chaveamento (315) assegura que a entrada de controle $u_i(t) \in [0, 1]$ é limitada para todo $i \in \mathbb{K}_M$. A prova está concluída. \square

A próxima subseção é dedicada a aplicar os resultados teóricos propostos neste capítulo para o controle do modelo de três conversores CC-CC: Buck, Boost e Buck-Boost já exemplificados no Exemplo 7, Capítulo 5.

6.1.1 Exemplo 11 (Conversores CC-CC Buck, Boost e Buck-Boost)

Considere os conversores CC-CC: Buck, Boost e Buck-Boost, ilustrados nas Figuras 32, 36 e 40, respectivamente. Os sistemas descritos neste seção, possuem apenas um sinal de entrada de controle $u(t) = u_1(t)$ com $u(t) \in [0, 1]$. A entrada de controle $u_1(t)$ controla as chaves S_1 e S_2 , o qual operam complementarmente. Assim, $u_1(t) = 0$ representa uma chave aberta (OFF) e $u_1(t) = 1$ uma chave fechada (ON). Para a análise teórica dos conversores assumamos que a frequência de chaveamento é limitada por uma frequência fixa (PWM, veja a Figura 79). A frequência de chaveamento constante é dada por $1/T_s$, sendo T_s o período de chaveamento, o qual é igual a soma de $t_{on} + t_{off}$. A relação $t_{on}/(t_{on} + t_{off})$ denota a razão cíclica dos conversores que é equivalente à entrada de controle $u_{ir} \in \mathbb{R}^M$.

Figura 79 - Forma de onda de um PWM.



Fonte: elaboração do próprio autor

Para as simulações, considere os mesmos parâmetros nominais de projeto (DEAECTO et al., 2010) definidos anteriormente: $V_g = 100[V]$, $R = 50[\Omega]$, $r_L = 2[\Omega]$, $L = 500[\mu H]$, $C = 470[\mu F]$ e $f_s = 100[kHz]$ sendo f_s a máxima frequência de chaveamento. A seguir apresentamos os resultados de simulações desta teoria para os três conversores mencionados anteriormente, bem como os resultados numéricos obtidos. O *solver* utilizado foi o LMILab do *software* MATLAB.

6.1.1.1 Conversor Buck

Considere o conversor Buck ilustrado na Figura 32 e seu modelo instantâneo dado pela equação (258). Então, o sistema chaveado em espaço de estados (221)–(223) é definido pelas

seguintes matrizes:

$$A_o = \begin{bmatrix} -\frac{r_L}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_o = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} \frac{V_g}{L} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

O conjunto de todos os pontos de equilíbrio alcançáveis (DEAECTO et al., 2010) e a razão cíclica de trabalho do conversor são dados por (259):

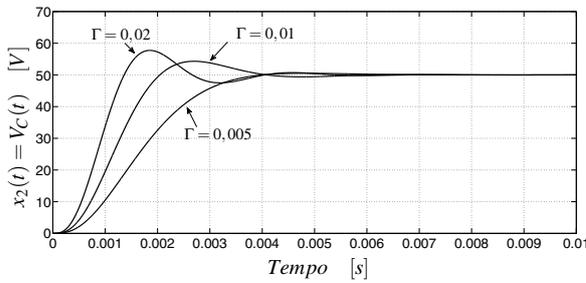
$$x_r = \left\{ \left[[i_{Lr} \quad V_{Cr}]' : V_{Cr} = Ri_{Lr}, \quad 0 \leq i_{Lr} \leq \frac{V_g}{(r_L + R)} \right] \right\}, \quad u_{1r} = \frac{r_L i_{Lr} + V_{Cr}}{V_g}.$$

Para analisar esta condição, suponha o seguinte valor de tensão de saída $V_{Cr} = 50[V]$. De (259) o ponto de equilíbrio é $x_r = [1 \ 50]'$ e a razão cíclica de trabalho $u_{1r} = 0,52$. Então, do Teorema 43, segue que:

$$P = \begin{bmatrix} 0,0070 & 0,0079 \\ 0,0079 & 0,0244 \end{bmatrix}.$$

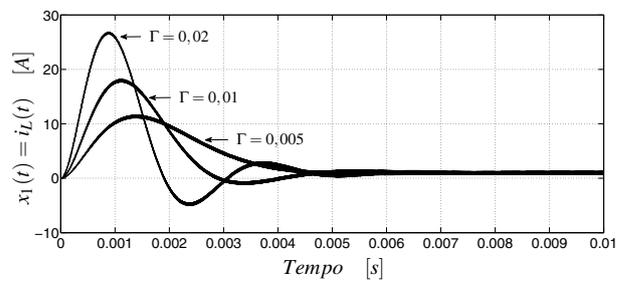
Os resultados são ilustrados nas Figuras 80, 81 e 82 para uma condição inicial $x = [i_L \ V_C]'$ = $[0 \ 0]'$ e vários valores do ganho adaptativo $\Gamma \in \mathbb{R}_+$.

Figura 80 - Tensões de saída $V_C(t)$ do conversor Buck utilizando o Teorema 43.



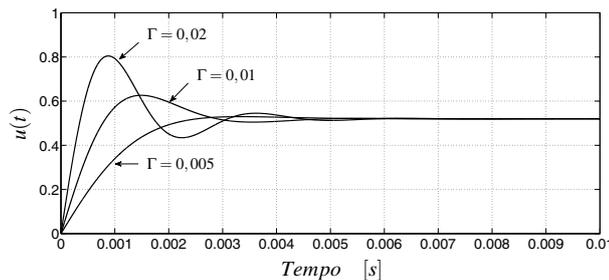
Fonte: elaboração do próprio autor

Figura 81 - Correntes no indutor $i_L(t)$ do conversor Buck utilizando o Teorema 43.



Fonte: elaboração do próprio autor

Figura 82 - Razão cíclica do conversor Buck.



Fonte: elaboração do próprio autor

Observe que em todos os casos, o tempo de estabelecimento da tensão do capacitor de saída apresentado foi menor que $6[ms]$, com pico máximo de corrente igual a $27[A]$. Tendo em vista os resultados apresentados, para este conversor, o ganho adaptativo $\Gamma = 0,005$ é o mais adequado devido exibir uma partida mais suave do conversor (LEYVA et al., 2001), além de uma corrente de pico menor, $i_L(t) = 11,5[A]$.

6.1.1.2 Conversor Boost

Considere o conversor Boost ilustrado na Figura 36 e seu modelo instantâneo dado pela equação (260). Então, o sistema chaveado em espaço de estados (221)–(223) é definido pelas seguintes matrizes:

$$A_o = \begin{bmatrix} -\frac{r_L}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix}, \quad B_o = \begin{bmatrix} \frac{V_g}{L} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

O conjunto de todos os pontos de equilíbrio alcançáveis (DEAECTO et al., 2010) e a razão cíclica de trabalho do conversor Boost são dados por (156):

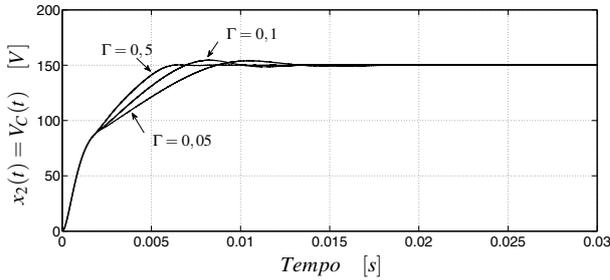
$$x_r = \left\{ [i_{Lr} \quad V_{Cr}]' : V_{Cr}^2 + (r_L R) i_{Lr}^2 - (R V_g) i_{Lr} = 0, \right. \\ \left. \frac{V_g}{(r_L + R)} \leq i_{Lr} \leq \frac{V_g}{r_L} \right\}, \quad u_{1r} = \frac{V_{Cr} - V_g + r_L i_{Lr}}{V_{Cr}}.$$

Para analisar esta condição, suponha o seguinte valor de tensão de saída $V_{Cr} = 150[V]$. De (156) o ponto de equilíbrio é $x_r = [5 \ 150]'$ e a razão cíclica de trabalho $u_{1r} = 0,4$. Então, do Teorema 43, segue que:

$$P = \begin{bmatrix} 0,0002 & 0,0004 \\ 0,0004 & 0,0015 \end{bmatrix}.$$

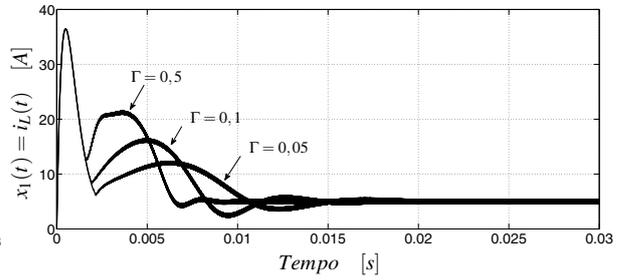
Os resultados são ilustrados nas Figuras 83, 84 e 85 para uma condição inicial $x = [i_L \quad V_C]' = [0 \ 0]'$ e vários valores do ganho adaptativo $\Gamma \in \mathbb{R}_+$. Para este conversor, note que em todos os casos o tempo de estabelecimento da tensão do capacitor de saída apresentado foi menor que $15[ms]$, com pico máximo de corrente igual a $36,5[A]$. Portanto, neste exemplo o ganho adaptativo $\Gamma = 0,05$ apresenta o melhor resultado, pois o controlador projetado com ele exibe uma partida mais suave do conversor (LEYVA et al., 2001).

Figura 83 - Tensões de saída $V_C(t)$ do conversor Boost utilizando o Teorema 43.



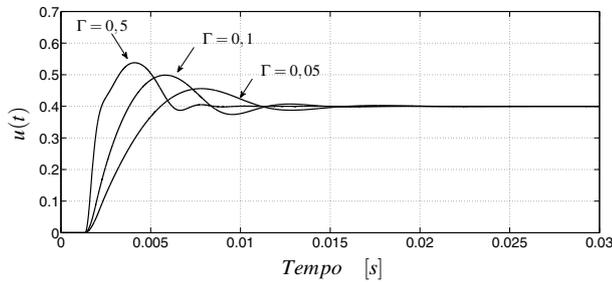
Fonte: elaboração do próprio autor

Figura 84 - Correntes no indutor $i_L(t)$ do conversor Boost utilizando o Teorema 43.



Fonte: elaboração do próprio autor

Figura 85 - Razão cíclica do conversor Boost.



Fonte: elaboração do próprio autor

6.1.1.3 Conversor Buck-Boost

Considere o conversor Buck-Boost ilustrado na Figura 40, seu modelo instantâneo dado pela equação (262) e as seguintes matrizes que definem o sistema chaveado em espaço de estados (221)–(223):

$$A_o = \begin{bmatrix} -\frac{r_L}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix}, \quad B_o = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} \frac{V_g}{L} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

O conjunto que define todos os pontos de equilíbrio alcançáveis (DEAECTO et al., 2010) e a razão cíclica de trabalho do conversor Buck-Boost são dados por (158):

$$x_r = \{[i_{Lr} \quad V_{Cr}]' : V_{Cr}^2 + (r_L R)i_{Lr}^2 - (R V_g)i_{Lr} + V_g V_{Cr} = 0, \quad 0 \leq V_{Cr} \leq R i_{Lr}\}, \quad u_{1r} = \frac{V_{Cr} + r_L i_{Lr}}{V_C + V_g}.$$

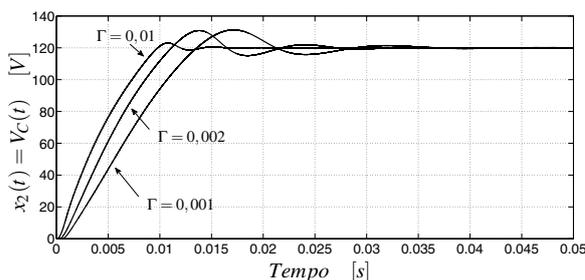
Neste exemplo, adote os seguinte valor de tensão de saída $V_{Cr} = 120[V]$. Então, de (158), o ponto de equilíbrio é $x_r = [6 \ 120]'$ e a razão cíclica de trabalho $u_{1r} = 0,6$. Assim, do Teorema

43, a matriz simétrica positiva definida $P > 0$, obtida como uma solução foi:

$$P = \begin{bmatrix} 0,0023 & 0,0057 \\ 0,0057 & 0,0309 \end{bmatrix}.$$

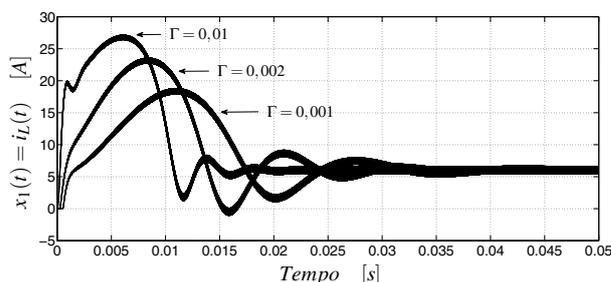
Os resultados são ilustrados nas Figuras 86, 87 e 88 para uma condição inicial $x = [i_L \ V_C]'$ = $[0 \ 0]'$ e vários valores de ganhos adaptativos $\Gamma \in \mathbb{R}_+$.

Figura 86 - Tensões de saída $V_C(t)$ do conversor Buck Boost utilizando o Teorema 43.



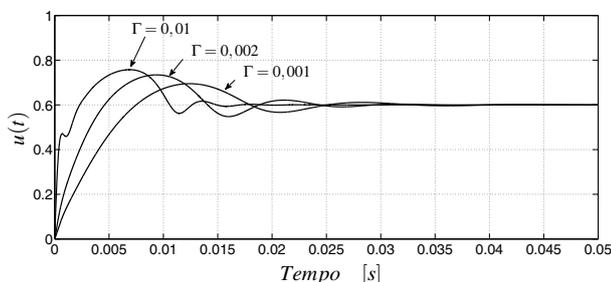
Fonte: elaboração do próprio autor

Figura 87 - Correntes no indutor $i_L(t)$ do conversor Buck Boost utilizando o Teorema 43.



Fonte: elaboração do próprio autor

Figura 88 - Razão cíclica do conversor Buck Boost.



Fonte: elaboração do próprio autor

Para este conversor, note que em todos os casos o tempo de estabelecimento da tensão do capacitor de saída apresentado foi menor que $40[ms]$, com pico máximo de corrente igual a $27[A]$. Portanto, neste exemplo o ganho adaptativo $\Gamma = 0,001$ apresenta o melhor resultado, pois o controlador projetado com ele proporciona uma partida mais suave do conversor (LEYVA et al., 2001).

Em resumo, os resultados e simulações ilustrados nesta seção demonstraram que a estratégia de chaveamento proposta é eficiente para o controle dos três conversores CC-CC. Como pode ser observado, a estratégia de chaveamento utilizando controle adaptativo (315) é mais vantajosa do que a estratégia de controle por estrutura variável (231), proposta no Capítulo 5, devido ela proporcionar a entrada de controle $u(t) \in \mathbb{R}^M$ que é equivalente à razão cíclica do

sistema controlado. Desta forma, através de uma comparação da entrada de controle $u(t) \in \mathbb{R}^M$ com uma onda dente de serra, é conseguida uma frequência de chaveamento constante para o sistema controlado, ocasionando diminuição dos esforços dos componentes eletrônicos do sistema. Adicionalmente, note que a resposta dinâmica dos conversores CC-CC é preservada.

No entanto, um problema conhecido no projeto de conversores CC-CC é que o ponto de equilíbrio $x_r \in \mathbb{R}^n$ depende dos parâmetros da planta que podem variar ao longo do tempo. Por exemplo, a tensão de saída $V_C(t)$ dos conversores é uma constante definida pelo projetista, porém a corrente do indutor i_{L_r} não é, e além disso ela depende da resistência de carga R do sistema, que pode ser incerta e variante no tempo. Assim, lembrando que a solução da desigualdade (313), relacionada ao Teorema 43, requer a determinação de um valor específico de $u_r \in \mathbb{R}^M$ que está associado ao ponto de equilíbrio $x_r \in \mathbb{R}^n$, então a estratégia de controle adaptativa (315) proposta não garante estabilidade global para um ponto de equilíbrio diferente do que foi projetado. Uma solução para o problema proposto, é projetar uma estratégia de controle dependente apenas de informações parciais do ponto de equilíbrio, como proposto no Capítulo 5, Seção 5.2. A próxima seção é dedicada à solução deste problema de controle.

6.2 Controle adaptativo de sistemas chaveados afins com incertezas politópicas

Considere o sistema chaveado afim incerto definido pela seguinte realização em espaço de estados (286)- (287):

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A(\alpha, u)x(t) + B(u), \\ y(t) &= C(u)x(t),\end{aligned}$$

sendo $x(t) \in \mathbb{R}^n$ o vetor de estado, $y(t) \in \mathbb{R}^p$ a saída e $u(t) \in \mathbb{R}^M$ a entrada de controle. Para a matriz $A(\alpha, u)$, é definido que o vetor $\alpha = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_r]'$ representa as incertezas politópicas da planta. Então, a matriz $A(\alpha, u) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ pode ser representada pela combinação convexa dos seus vértices, como em (291). Agora, o problema de controle é o seguinte:

Problema 10. Suponha que o vetor de estado $x(t) \in \mathbb{R}^n$ é disponível para realimentação. Projete uma estratégia de chaveamento adaptativa dependente de informações parciais do ponto de equilíbrio, para todo $t \geq 0$, que torne o conjunto de pontos de equilíbrio $x_{r\alpha} \in \mathbb{R}^n$ do sistema chaveado afim incerto (223) e (286) - (291), com as matrizes dadas pelas Tabelas 13 e 14, equações (264) e (283), Capítulo 5, globalmente estável.

Neste contexto, considere que existam vetores constantes $x_{r\alpha} = [x_{r\alpha_1} \ \dots \ x_{r\alpha_n}]'$, $u_{r\alpha} = [u_{r\alpha_1} \ \dots \ u_{r\alpha_M}]'$, tais que o sistema chaveado afim (289) possa ser descrito como na forma dada

em (291). Então, para os conversores CC-CC Buck, Boost e Buck-Boost, uma solução que satisfaz o problema de controle proposto é descrita no Teorema 44 a seguir. Novamente, note que será necessário introduzir um filtro passa-baixas com função de transferência $F(s) = 1/(\tau s + 1)$, a fim de estimar o valor da corrente no indutor em regime permanente. Então, definindo $\hat{i}_L(t)$ como a corrente estimada do indutor, segue o teorema abaixo.

Teorema 44. *Considere o sistema chaveado afim incerto (291) com as matrizes dadas pela Tabela 13, (264) e suponha que os vértices das entradas de controle constante $u_{rij} \in \mathbb{R}^M$, $i \in \mathbb{K}_M$ e $j \in \mathbb{K}_r$ são dados. Se existir uma matriz simétrica positiva definida $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que*

$$(A_{oj} + \sum_{i=1}^M u_{rij} A_i)' P + P(A_{oj} + \sum_{i=1}^M u_{rij} A_i) < 0, \quad (321)$$

$$(A_{oj} + \sum_{i=1}^M u_{rij} A_i) x_r + (B_o + \sum_{i=1}^M u_{rij} B_i) = 0, \quad (322)$$

$$JP[A_i \ B_i] = 0, \quad (323)$$

e supondo que os vetores $(A_i x_{r\alpha} + B_i)$ sejam linearmente independentes para todo $i \in \mathbb{K}_M$ e α admissível sendo $J = [1 \ 0 \ 1]$, então a estratégia de chaveamento (315) torna o ponto de equilíbrio $(x, u) = (x_{r\alpha}, u_{r\alpha i})$ para os conversores CC-CC Buck, Boost e Buck-Boost globalmente assintoticamente estável.

Demonstração. Considere a candidata a função de Lyapunov:

$$V(\xi, v_{ij}) = \xi' P \xi + \Gamma^{-1} \sum_{j=1}^r \alpha_j \sum_{i=1}^M v_{ij}^2, \quad (324)$$

sendo $v_{ij} = u_i - u_{rij}$, $i \in \mathbb{K}_M$ e $j \in \mathbb{K}_r$. Então, de (291), têm-se que para $\xi \neq 0$:

$$\begin{aligned} \dot{V}(\xi, v_{ij}) &= \sum_{j=1}^r \alpha_j \left\{ \xi' \left((A_{oj} + \sum_{i=1}^M u_{rij} A_i)' P + P(A_{oj} + \sum_{i=1}^M u_{rij} A_i) \right) \xi + 2 \sum_{i=1}^M \xi' P (A_i x + B_i) v_{ij} \right. \\ &\quad \left. + 2 \sum_{i=1}^M \Gamma^{-1} v_{ij} \dot{v}_{ij} \right\} = \sum_{j=1}^r \alpha_j \left\{ \xi' \left((A_{oj} + \sum_{i=1}^M u_{rij} A_i)' P + P(A_{oj} + \sum_{i=1}^M u_{rij} A_i) \right) \xi \right. \\ &\quad \left. + 2 \sum_{i=1}^M v_{ij} \left(\dot{v}_{ij} \Gamma^{-1} + \xi' P (A_i x + B_i) \right) \right\}. \quad (325) \end{aligned}$$

Seguindo, defina $\mathcal{M}_i(\xi) = \xi' P (A_i x + B_i)$, para todo $i \in \mathbb{K}_M$. Note que, de (325) e da estratégia de chaveamento adaptativa (315), $\left(\dot{v}_{ij} \Gamma^{-1} + \mathcal{M}_i(\xi) \right) v_{ij} = \left(\dot{u}_i \Gamma^{-1} + \mathcal{M}_i(\xi) \right) v_{ij} \leq 0$ para todo $i \in \mathbb{K}_M$ e $j \in \mathbb{K}_r$, pois $\dot{u}_{rij} = 0$ (veja prova do Teorema 43 para detalhes). Então, de (325) e

(321) segue que para $\xi \neq 0$:

$$\dot{V}(\xi, v_{ij}) \leq \sum_{j=1}^r \alpha_j \left\{ \xi' \left((A_{oj} + \sum_{i=1}^M u_{rij} A_i)' P + P (A_{oj} + \sum_{i=1}^M u_{rij} A_i) \right) \xi \right\} < 0. \quad (326)$$

Assim, $V(\xi, v_{ij}) \leq V(0)$ pois $\dot{V}(\xi, v_{ij}) \leq 0$ e $\dot{V}(\xi, v_{ij}) < 0$ para $\xi \neq 0$. Portanto, o ponto de equilíbrio $x_{r\alpha} \in \mathbb{R}^n$ é estável. Adicionalmente, o sistema chaveado incerto controlado (291) e (315) pode ser descrito por $[\dot{\xi}' \quad \dot{v}_{ij}'] = f(\xi, v_{ij})$. Então, observe que o sistema é autônomo, e a análise de estabilidade não requer o uso do Lema de Barbalat. Assim, de (321) e (326) segue que $\dot{V}(\xi, v_{ij}) = 0$ para $\xi = 0$ e $\dot{\xi} = 0$. Então, de (291) têm-se que para $\xi = 0$ e $\dot{\xi} = 0$:

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \sum_{j=1}^r \alpha_j \left\{ \left((A_{oj} + \sum_{i=1}^M u_{rij} A_i) \xi + \sum_{i=1}^M (A_i x + B_i) v_{ij} \right) \right\} \\ &= \sum_{j=1}^r \alpha_j \sum_{i=1}^M (A_i x + B_i) v_{ij} = \sum_{j=1}^r \alpha_j \sum_{i=1}^M (A_i (x - x_{r\alpha}) + A_i x_{r\alpha} + B_i) v_{ij} \\ &= \sum_{j=1}^r \alpha_j \sum_{i=1}^M (A_i \xi + A_i x_{r\alpha} + B_i) v_{ij} = \sum_{j=1}^r \alpha_j \sum_{i=1}^M (A_i x_{r\alpha} + B_i) v_{ij} = 0. \end{aligned} \quad (327)$$

Logo, de (327) e considerando que os vetores $(A_i x_{r\alpha} + B_i)$, $i \in \mathbb{K}_M$, são linearmente independentes, observe que $v_{ij} = u_i - u_{rij} = 0$, para todo $i \in \mathbb{K}_M$ e $j \in \mathbb{K}_r$. Seguindo, utilizando o teorema do conjunto invariante (SLOTINE; LI, 1991) conclui-se que o ponto de equilíbrio $(x, u) = (x_{r\alpha}, u_{r\alpha})$ é globalmente estável. Ademais, definindo $P(A_i x + B_i) = [f_i(x) \quad g_i(x) \quad h_i(x)]'$ e multiplicando (323) a direita por $[x' \quad 1]'$, sendo $J = [1 \quad 0 \quad 1]$ têm-se,

$$JP \begin{bmatrix} A_i & B_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} f_i(x) & g_i(x) & h_i(x) \end{bmatrix}' = f_i(x) + h_i(x) = 0. \quad (328)$$

Consequentemente, de (328), para todo $i \in \mathbb{K}_M$:

$$\begin{aligned} \xi' P(A_i x + B_i) &= \xi' \begin{bmatrix} f_i(x) & g_i(x) & h_i(x) \end{bmatrix}' \\ &= (x_1 - x_{1r}) f_i(x) + (x_2 - x_{2r}) g_i(x) + (x_3 - x_{1r}) h_i(x) \\ &= (x_1 - x_3) f_i(x) + (x_2 - x_{2r}) g_i(x). \end{aligned} \quad (329)$$

Note que (329) não depende da variável de estado x_{1r} , componente do ponto de equilíbrio, e este fato satisfaz o método de projeto de controle proposto, com a estratégia de chaveamento dada pela função (315). Assim, o Teorema 44 assegura que para qualquer condição inicial $x_2 \rightarrow x_{2r}$ quando $t \rightarrow \infty$. Adicionalmente, note que a estratégia de chaveamento adaptativa (315) assegura que a entrada de controle $u_i(t) \in [0, 1]$ é limitada para todo $i \in \mathbb{K}_M$. A prova está concluída. \square

Novamente, para os conversores de quarta ordem Sepic e Zeta, note que é necessária a adição de dois filtros passa-baixas com funções de transferência $F_1(s) = 1/(\tau_1 s + 1)$ e $F_2(s) = 1/(\tau_2 s + 1)$, respectivamente, a fim de estimar os valores do estado de equilíbrio das correntes nos indutores i_{L_1r} e i_{L_2r} . Assim, substituindo a restrição linear (323) por (284) e (285), e considerando agora as matrizes dada pela Tabela 14, equação (283), então o Teorema 44 assegura que para qualquer condição inicial $x_3 \rightarrow x_{3r}$, $x_4 \rightarrow x_{4r}$ quando $t \rightarrow \infty$ e a estratégia de chaveamento adaptativa (315) não depende das componentes do ponto de equilíbrio x_{1r} e x_{2r} . Na próxima subseção, este procedimento de controle robusto considerando somente informações parciais da planta é aplicado novamente no controle de dois conversores CC-CC: Buck e Sepic, a fim de ilustrar o método de controle projetado.

6.2.1 Exemplo 12 (Projeto de controle robusto utilizando controle adaptativo para os conversores Buck e Sepic)

6.2.1.1 Projeto de controle robusto para o conversor Buck

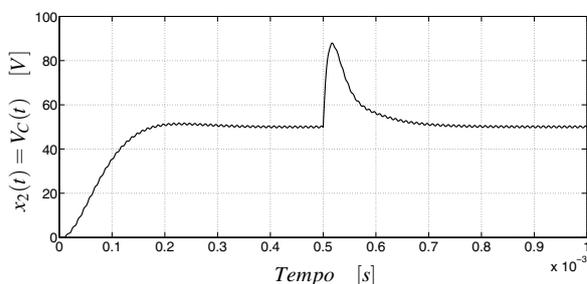
Considere a Figura 32, a qual ilustra a estrutura do conversor Buck. Neste exemplo assumamos que a carga R é um parâmetro incerto que está contido dentro do seguinte intervalo $[R_{min}, R_{max}]$ e que todos os outros parâmetros são bem conhecidos. As matrizes aumentadas para o conversor Buck, que definem os vértices do politopo para o sistema incerto (286)–(49), são dadas por (306). O conjunto que define todos os pontos de equilíbrio alcançáveis e a razão cíclica de trabalho do conversor Buck é dada por (307).

Para este exemplo, considere os mesmos parâmetros de projeto definidos no Exemplo 11, Capítulo 5: $V_g = 100[V]$, $R_{min} = 50[\Omega]$, $R_{max} = 150[\Omega]$, $r_L = 1[\mu\Omega]$, $L = 4,2[mH]$, $C = 83,3[\eta F]$, valor nominal de carga $R = 50[\Omega]$, $f_s = 100[KHz]$ e tensão de saída desejada $V_{Cr} = 50[V]$. Então, do Teorema 44, com $J = [1 \ 0 \ 1]$ obtêm-se a seguinte matriz solução necessária para a implementação da estratégia de chaveamento (315):

$$P = \begin{bmatrix} 0,0383 & 0,0001 & -0,0383 \\ 0,0001 & 0,0000 & -0,0001 \\ -0,0383 & -0,0001 & 0,0410 \end{bmatrix}.$$

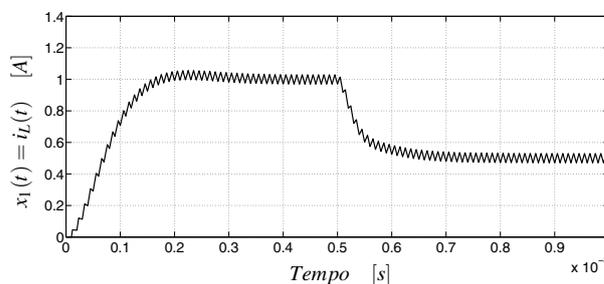
Considerando o ganho adaptativo $\Gamma = 200$ e o conversor partindo da origem, a Figura 89 ilustra o sinal da tensão de saída $V_C(t)$ e a Figura 90 retrata a corrente $i_L(t)$ fornecida a carga, obtida quando o conversor está operando no ponto de equilíbrio nominal e sofre abruptamente um degrau de carga de 50% (ou seja, a resistência de carga muda de 50Ω para 100Ω em $t = 0,5 \text{ ms}$).

Figura 89 - Tensão de saída $V_C(t)$ do conversor Buck sob variação de carga utilizando controle adaptativo.



Fonte: elaboração do próprio autor

Figura 90 - Corrente no indutor $i_L(t)$ do conversor Buck sob variação de carga utilizando controle adaptativo.



Fonte: elaboração do próprio autor

Observe que o tempo de estabelecimento da tensão obtido para a regulação de carga foi menor que $0,3[ms]$ com pico máximo de tensão igual a $90[V]$.

6.2.1.2 Projeto de controle robusto para o conversor Sepic

Considere a Figura 44, a qual ilustra a estrutura do conversor Sepic. Neste exemplo assumamos que a carga R é um parâmetro incerto que está contido dentro do seguinte intervalo $[R_{min}, R_{max}]$. As matrizes aumentadas para o conversor Sepic, que definem os vértices do politopo para o sistema incerto (286)–(49), são dadas por (310). O conjunto que define todos os pontos de equilíbrio alcançáveis e a razão cíclica de trabalho do conversor Sepic é dada por (311).

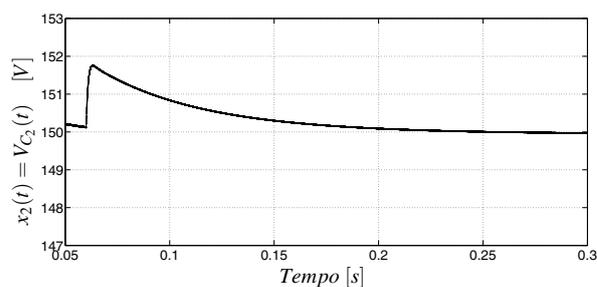
Para este exemplo, considere os mesmos parâmetros de projeto definidos no Exemplo 11, Capítulo 5: $V_g = 100[V]$, $R = 50[\Omega]$, $r_{L1} = 2[\Omega]$, $r_{L2} = 3[\Omega]$, $L_1 = 500[\mu H]$, $L_2 = 600[\mu H]$, $C_1 = 470[\mu F]$, $C_2 = 800[\mu F]$, $R_{max} = 150[\Omega]$, $R_{min} = 20[\Omega]$, valor nominal de carga $R = 50[\Omega]$, $f_s = 100[KHz]$ e tensão de saída desejada $V_{C2r} = 150[V]$. De (311) e do Teorema 44, com $J_1 = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0]$ e $J_2 = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]$ obtêm-se a seguinte matriz solução necessária para a implementação da estratégia de chaveamento (315):

$$P = \begin{bmatrix} 15,6205 & 3,6951 & 9,6300 & 13,8533 & -4,9569 & 0,6223 \\ 3,6951 & 14,3551 & 14,8149 & -14,1407 & 9,1012 & -9,1742 \\ 9,6300 & 14,8149 & 55,4691 & -8,6172 & 9,2297 & -22,9552 \\ 13,8533 & -14,1407 & -8,6172 & 99,7224 & -45,9550 & 27,9965 \\ -4,9569 & 9,1012 & 9,2297 & -45,9550 & 331,2748 & -33,1661 \\ 0,6223 & -9,1742 & -22,9552 & 27,9965 & -33,1661 & 656,4350 \end{bmatrix}.$$

Considerando $\Gamma = 0,001$ e o conversor Sepic partindo da origem, a Figura 91 ilustra o sinal da

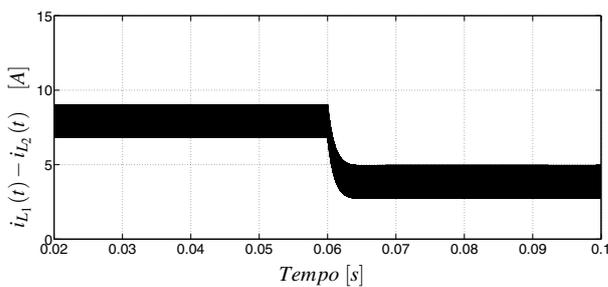
tensão de saída $V_{C_2}(t)$ e a Figura 92 retrata a corrente fornecida a carga $i_{L_1}(t) - i_{L_2}(t)$, obtida quando o conversor está operando no ponto de equilíbrio nominal e sofre abruptamente um degrau de carga de 50% (ou seja, a resistência de carga muda de 50Ω para 100Ω em $t = 60\text{ ms}$).

Figura 91 - Tensão de saída $V_{C_2}(t)$ do conversor Se-pic sob variação de carga utilizando controle adaptativo.



Fonte: elaboração do próprio autor

Figura 92 - Corrente $i_{L_1}(t) - i_{L_2}(t)$ do conversor Se-pic sob variação de carga utilizando controle adaptativo.



Fonte: elaboração do próprio autor

O tempo de estabelecimento da tensão obtido para a regulação de carga foi menor que 180[ms] com pico máximo de tensão igual a $151,8\text{[V]}$.

As simulações demonstram que o projeto de controle adaptativo proposto neste capítulo, baseado em LMIs, satisfaz os requisitos básicos de controle de regulação de carga para a classe de conversores CC-CC, ou seja, mantém a regulação da tensão de saída no valor desejado, rejeita perturbações na planta ocasionadas por incertezas e minimiza o overshoot da tensão de saída do conversor, além de proporcionar uma frequência de chaveamento constante que é um requisito necessário para implementação prática dos sistemas de potência. Assim, as estratégias de controle propostas neste estudo, merecem um apelo prático devido satisfazer os requisitos básicos do projeto de controle de conversores CC-CC.

6.3 Conclusões Parciais

Neste capítulo foi apresentado um estudo sobre estabilidade e projeto de controle para sistemas chaveados afins utilizando controle adaptativo. Inicialmente, a teoria desenvolvida foi aplicada nos três conversores básicos CC-CC: Buck, Boost e Buck-Boost, a fim de comparar os teoremas propostos com os descritos no Capítulo 5, que utiliza controle por estrutura variável. Assim, verificou-se que o controle adaptativo proposto é mais eficiente do que o controle por estrutura variável, devido proporcionar uma estratégia de controle com frequência constante, permitindo a implementação prática deste controlador para o projeto dos conversores CC-CC. Finalizando este capítulo, um método de projeto de controle robusto para sistemas chaveados

afins com incertezas politópicas que considera apenas informações parciais da planta, foi proposto utilizando as mesmas ideias contidas na Seção 5.3 do Capítulo 5. Esta teoria foi aplicada para o controle dos conversores CC-CC Buck e Sepic e foi verificado que o projeto de controle adaptativo proposto, baseado em LMIs, satisfaz os requisitos básicos de controle de regulação de carga da eletrônica de potência. Os projetos propostos neste capítulo foram baseados no critério de estabilidade de Lyapunov e desigualdades matriciais lineares, e os resultados das simulações mostraram que quando as condições propostas pelos teoremas foram factíveis, os conversores controlados apresentaram uma performance adequada.

7 CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS FUTURAS

Neste trabalho foram estudados vários sistemas que abordaram diferentes métodos de controle, incluindo o controle de sistemas chaveados lineares, sistemas chaveados afins, sistemas chaveados afins com estrutura variável e sistemas chaveados afins com controle adaptativo.

Inicialmente fez-se um breve estudo sobre condições para a estabilidade de sistemas lineares chaveados propostos em Geromel e Colaneri (2006). Mais especificamente, foram descritas condições propostas em Otsuka e Soga (2010) e Feron (1996) que asseguram a estabilidade quadrática de sistemas lineares chaveados. Em seguida, uma estratégia de chaveamento que utiliza o vetor de estado $x(t) \in \mathbb{R}^n$ para realimentação, proposta em Deaecto et al. (2010), foi apresentada. Com base nestas condições, foi proposta uma extensão do problema para uma classe de plantas chaveadas que disponibilizam apenas o vetor de saída $y(t) \in \mathbb{R}^p$ para realimentação. Assim, um novo método de projeto que apresenta condições suficientes para a estabilidade de sistemas lineares chaveados a tempo contínuo, com acesso somente a saída da planta foi proposto. Foi mostrado que o método permite o projeto de uma lei de chaveamento dependente apenas da saída disponível do sistema linear chaveado, que assegura a estabilidade assintótica do sistema sem exigir que cada subsistema isolado seja estável ou mesmo estabilizável. Índices de desempenho foram inseridos tornando o procedimento de projeto mais geral e os exemplos propostos ilustraram a eficácia do método. Finalizando o Capítulo 2, ainda para a classe de sistemas lineares chaveados, foram propostas condições para o controle de sistemas incertos contínuos no tempo. Novas condições menos conservadoras foram obtidas a fim de relaxar um custo garantido e o conservadorismo do projeto. Toda a teoria desenvolvida neste capítulo foi ilustrada através de exemplos e os resultados de simulações demonstraram que, quando factíveis, os teoremas propostos apresentaram adequado desempenho.

Um outro assunto abordado neste trabalho e que traz uma contribuição relevante, encontra-se no Capítulo 3. Neste capítulo foi apresentado inicialmente uma breve introdução sobre sistemas chaveados afins invariantes no tempo (DEAECTO et al., 2010). Posteriormente, para os dois teoremas descritos em Deaecto et al. (2010) foram propostas modificações a fim de incluir uma taxa de decaimento e restrições na saída do projeto dos controladores, tornando assim o procedimento mais geral. Adicionalmente, o mesmo método de projeto foi proposto para um sistema de controle que utiliza apenas o vetor de saída $y(t) \in \mathbb{R}^p$ para realimentação. A ideia principal neste projeto consistiu em encontrar condições suficientes tal que assegurem

a estabilidade global do sistema chaveado afim. Novas condições menos conservadoras foram obtidas e um índice de desempenho, minimização de um custo garantido, foi inserido no projeto dos controladores afim de novamente tornar o procedimento mais geral. Ao final deste capítulo, a fim de generalizar as condições propostas, resultados sobre estabilidade uniforme *ultimate bounded* (CORLESS; LEITMANN, 1981) e projeto de controladores com frequência de chaveamento limitada, para sistemas chaveados afins, foram propostas. Como exemplo foi apresentada uma aplicação da teoria no controle de quatro conversores CC-CC, a saber: Buck, Boost, Buck-Boost e Sepic. Os resultados obtidos com os novos métodos de projeto apresentaram-se satisfatórios, motivando o estudo em pesquisas futuras.

O Capítulo 4 também apresentou uma contribuição neste assunto, sendo estudado um novo método para projetar a estratégia de controle para sistemas chaveados afins. Neste capítulo foi proposto um novo método de controle com estrutura variável. A teoria deste projeto foi baseada nas condições para a estabilidade de sistemas chaveados, propostas em Geromel e Colaneri (2006), Deaecto et al. (2010), no critério de estabilidade de Lyapunov através de uma função quadrática e desigualdades matriciais lineares. Como exemplo foram propostas aplicações no controle de conversores CC-CC de eletrônica de potência. Posteriormente, uma nova estratégia de chaveamento dependente apenas de informações parciais da planta foi proposta, e os resultados demonstram que o método proposto é eficaz para o controle de conversores CC-CC. Ao final deste capítulo, foi proposto um método de projeto de controle robusto para sistemas chaveados afins com incertezas politópicas, que considera apenas informações parciais da planta, oferecendo assim uma lei de chaveamento robusta para casos em que os procedimentos de controle disponíveis não podem ser diretamente aplicados. Pelo conhecimento dos autores, este exemplo foi a primeira aplicação utilizando LMIs no projeto de controle por estrutura variável de sistemas chaveados afins com incertezas politópicas invariantes no tempo.

Finalmente, um outro assunto abordado neste trabalho e que trouxe uma contribuição relevante, encontra-se no Capítulo 5, no qual é proposto um novo método de controle para sistemas chaveados afins utilizando controle adaptativo. Verificou-se que o controle adaptativo proposto apresentou características mais satisfatórias do que o controle por estrutura variável proposto no Capítulo 4, devido proporcionar uma estratégia de controle que limita a frequência de chaveamento do sistema, permitindo assim a implementação prática deste controlador para o projeto dos conversores CC-CC. Projeto de controle robusto para sistemas chaveados afins com incertezas politópicas considerando apenas informações parciais da planta, foi proposto utilizando as mesmas ideias contidas na Seção 5.3 do Capítulo 4. Esta teoria foi aplicada para o controle dos conversores CC-CC Buck e Sepic e foi verificado que o projeto de controle adaptativo proposto, baseado em LMIs, satisfaz os requisitos básicos de controle de regulação de tensão da

eletrônica de potência.

É importante ressaltar que parte dos estudos abordados nesta tese geraram publicações em congressos nacionais e um capítulo de livro internacional. Estas publicações estão descritas no Anexo A que apresenta também uma relação dos trabalhos desenvolvidos pelo autor e pelo grupo de pesquisa em controle da UNESP de Ilha Solteira, que contaram com a participação do autor, como co-autor nestes trabalhos.

7.0.1 Sugestões para Pesquisas Futuras

Em resumo, alguns trabalhos futuros relacionados aos resultados obtidos nesta tese são:

- Análise teórica e projeto de controle de sistemas lineares chaveados com incertezas politópicas, utilizando uma estratégia de chaveamento dependente apenas da saída da planta juntamente com uma lei de controle que utiliza a realimentação da saída;
- Obtenção de condições menos conservadoras para o controle de sistemas lineares chaveados com incertezas politópicas, utilizando somente uma estratégia de chaveamento dependente da saída da planta;
- Análise teórica e projeto de uma estratégia de chaveamento utilizando Estrutura Variável (EV) para uma classe de sistemas chaveados afins, considerando imperfeições no chaveamento, como por exemplo, atraso na comutação;
- Análise teórica e projeto de uma estratégia de chaveamento utilizando controle adaptativo, para uma classe de sistemas chaveados afins, considerando imperfeições no chaveamento, como por exemplo, atraso na comutação;
- Obtenção de condições menos conservadoras para o controle adaptativo de sistemas chaveados afins com incertezas politópicas.
- Validação experimental dos resultados para o controle de conversores CC-CC;
- Análise em tempo discreto para os diferentes sistemas estudados neste trabalho.

REFERÊNCIAS

- AGOSTINELLI, M.; PRIEWASSER, R.; MARSILI, S.; HUEMER, M. Constant switching frequency techniques for sliding mode control in DC-DC converters. In: INTERNATIONAL WORKSHOP ON NONLINEAR DYNAMICS AND SYNCHRONIZATION, 3., 2011, Klagenfurt. *Proceedings...* Klagenfurt: IEEE, 2011. p. 1–5.
- AMATO, F.; ARIOLA, M.; COSENTINO, C. Finite-time stabilization via dynamic output feedback. *Automatica*, Amsterdam, v. 42, n. 2, p. 337–342, february 2006.
- AMATO, F.; ARIOLA, M.; DORATO, P. Finite-time control of linear systems subject to parametric uncertainties and disturbances. *Automatica*, Amsterdam, v. 37, n. 9, p. 1459–1463, september 2001.
- BATLLE, C.; FOSSAS, E.; OLIVAR, G. Stabilization of periodic orbits in variable structure systems. application to DC-DC power converters. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, Singapore, v. 6, n. 12B, p. 2635–2643, december 1996.
- BERNUSSOU, J.; PERES, P. L. D.; GEROMEL, J. C. A linear programming oriented procedure for quadratic stabilization of uncertain systems. *Systems & Control Letters*, Amsterdam, v. 13, n. 1, p. 65–72, july 1989.
- BOLZERN, P.; SPINELLI, W. Quadratic stabilization of a switched affine system about a nonequilibrium point. In: PROCEEDINGS OF THE AMERICAN CONTROL CONFERENCE, 2004, Boston. *Proceedings...* Massachusetts, 2004. v. 5, p. 3890–3895.
- BOYD, S.; GHAOUI, L.; FERON, E.; BALAKRISHNAN, V. *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. 2nd. ed. Philadelphia: SIAM Society for Industrial and Applied Mathematics, 1994. 193 p. (SIAM Studies in Applied Mathematics, v. 15).
- CARDIM, R.; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; COVACIC, M. R. Variable-structure control design of switched systems with an application to a DC-DC power converter. *IEEE Transaction on Industrial Electronics*, New York, v. 56, n. 9, p. 3505–3513, september 2009.
- CARDIM, R.; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; COVACIC, M. R.; FARIA, F. A.; SEIXAS, F. J. M.; MAINARDI JÚNIOR, E. I. Design and implementation of a DC-DC converter based on variable structure control of switched systems. In: 18TH IFAC WORLD CONGRESS, 2011, Milano. *Proceedings...* Italy: IFAC, 2011. v. 18, p. 11048–11054.
- CARDIM, R.; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; COVACIC, M. R.; SEIXAS, F. J. M. de; FARIA, F. A.; MAINARDI JÚNIOR, E. I. Implementation of a DC-DC converter with variable structure control of switched systems. In: IEEE INTERNATIONAL ELECTRIC MACHINES DRIVES CONFERENCE, 2011, Niagara Falls. *Proceedings...* Niagara Falls: IEEE, 2011. p. 872–877.

- CARDOSO, B. J.; MOREIRA, A. F.; MENEZES, B. R.; CORTIZO, P. C. Analysis of switching frequency reduction methods applied to sliding mode controlled DC-DC converters. In: 7TH ANNUAL CONFERENCE ON APPLIED POWER ELECTRONICS CONFERENCE AND EXPOSITION, 1992, Boston. *Proceedings...* Boston: IEEE, 1992. p. 403–410.
- CORLESS, M.; LEITMANN, G. Continuous state feedback guaranteeing uniform ultimate boundedness for uncertain dynamic systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, New York, v. 26, n. 5, p. 1139–1144, october 1981.
- CORTEZ, R. S.; GALLEGOS, J. A.; MORA, E. G. Sliding controller design for a nonlinear fermentation system. *Biotechnology and Bioengineering*, Wiley Subscription Services, Singapore, v. 33, n. 4, p. 377–385, 1989. ISSN 1097-0290.
- COVACIC, M. R.; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; GAINO, R. Lmi-based algorithm for strictly positive real systems with static output feedback. *Systems & Control Letters*, Amsterdam, v. 61, n. 4, p. 521–527, april 2012.
- DAAFOUZ, J.; RIEDINGER, P.; CLAUDE, I. Static output feedback control for switched systems. In: PROCEEDINGS OF THE 40TH IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, 2001, Flórida. *Proceedings...* Orlando, 2001. v. 3, p. 2093–2094.
- DAAFOUZ, J.; RIEDINGER, P.; IUNG, C. Stability analysis and control synthesis for switched systems: A switched Lyapunov function approach. *IEEE Transactions on Automatic Control*, New York, v. 47, n. 11, p. 1883–1887, november 2002.
- DE OLIVEIRA, M. C.; FARIAS, D. P.; GEROMEL, J. C. *LMISol, User's guide*. Campinas, 1997.
- DEAECTO, G. *Projeto de Controladores Dinâmicos com Comutação*. 2010. 161 f. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) — Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2010. Disponível em: <<http://www.bibliotecadigital.unicamp.br/document/?code=000773932>>. Acesso em: 25 jul. 2013.
- DEAECTO, G. S.; GEROMEL, J. C.; DAAFOUZ, J. Dynamic output feedback H_∞ control of switched linear systems. *Automatica*, Amsterdam, v. 47, n. 8, p. 1713–1720, august 2011.
- DEAECTO, G. S.; GEROMEL, J. C.; GARCIA, F. S.; POMILIO, J. A. Switched affine systems control design with application to DC-DC converters. *IET Control Theory & Applications*, United Kingdom, v. 4, n. 7, p. 1201–1210, july 2010.
- DECARLO, R. A.; BRANICKY, M. S.; PETTERSSON, S.; LENNARTSON, B. Perspectives and results on the stability and stabilizability of hybrid systems. *Proceedings of IEEE*, New York, v. 88, n. 7, p. 1069–1082, july 2000.
- DING, D.; YANG, G. H. Static output feedback control for discrete-time piecewise linear systems: An LMI approach. *Acta Automatica Sinica*, United Kingdom, v. 35, n. 4, p. 337–344, april 2009.
- DORATO, P. *Short time stability in linear time-varying systems*. New York: Polytechnic Institute of Brooklyn, Microwave Research Institute, 1961. (Microwave Research).

- DRAZENOVIC, B. The invariance conditions in variable structure systems. *Automatica*, Amsterdam, v. 5, n. 3, p. 287 – 295, 1969.
- DU, H. B.; LIN, X. Z.; LI, S. H. Finite-time boundedness and stabilization of switched linear systems. *Kybernetika*, Czech Republic, v. 46, n. 5, p. 870–889, 2010.
- EDWIN, K. P. C.; STANISLAW, H. Z. *An introduction to Optimization*. 2. ed. Singapore: Wiley, 2001. (A Wiley-Interscience publication, v. 60).
- EL BEID, S.; DOUBABI, S.; CHAOUI, M. Adaptive control of PWM DC-to-DC converters operating in continuous conduction mode. In: MEDITERRANEAN CONFERENCE ON CONTROL AUTOMATION, 2007, Athens. *Proceedings...* Athens: IEEE, 2007. p. 1–5.
- ERICKSON, R. W. *DC-DC Power Converters*. New York: John Wiley & Sons, Inc., 2001. (Wiley Encyclopedia of Electrical and Electronics Engineering).
- FERON, E. *Quadratic stabilizability of switched systems via state and output feedback*. Cambridge: Center for Intelligent Control Systems, 1996. (CICS, v. 468).
- FILIPPOV, A. F. *Differential Equations with Discontinuous Righthand Sides*. London: Springer, 1988. (Mathematics and its Applications, v. 18).
- GAHINET, P.; NEMIROVSKI, A.; LAUB, A. J.; CHILALI, M. *LMI Control Toolbox: For use with Matlab*. Natick: The Math Works, Inc., 1995.
- GEROMEL, J. C.; COLANERI, P. Stability and stabilization of continuous-time switched linear systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, Philadelphia, v. 45, n. 5, p. 1915–1930, december 2006.
- GEROMEL, J. C.; COLANERI, P.; BOLZERN, P. Dynamic output feedback control of switched linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, New York, v. 53, n. 3, p. 720–733, april 2008.
- HE, Y.; XU, W.; CHENG, Y. A novel scheme for sliding-mode control of DC-DC converters with a constant frequency based on the averaging model. *Journal of Power Electronics*, Seoul, v. 10, n. 1, p. 1–8, january 2010.
- HESPANHA, J. P. Extending LaSalle’s invariance principle to switched linear systems. In: PROCEEDINGS OF THE 40TH IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, 2001, Orlando. *Proceedings...* Flórida: IEEE, 2001. v. 3, p. 2496–2501.
- HESPANHA, J. P. Uniform stability of switched linear systems: extensions of Lasalle’s invariance principle. *IEEE Transactions on Automatic Control*, New York, v. 49, n. 4, p. 470–482, april 2004.
- ITKIS, U. *Control systems of variable structure*. New York: John Wiley & Sons, 1976. (A Halsted Press book).
- JEONG, G.-J.; KIM, I.-H.; SON, Y.-I. Application of simple adaptive control to a DC/DC boost converter with load variation. In: ICCAS-SICE, 2009, Fukuoka. *Proceedings...* Fukuoka: IEEE, 2009. p. 1747–1751.

- KAWASAKI, N.; NOMURA, H.; MASUHIRO, M. A new control law of bilinear DC-DC converters developed by direct application of Lyapunov. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, New York, v. 10, n. 3, p. 318–325, may 1995.
- KISLOVSKI, A. S.; REDL, R.; SOKAL, N. O. *Dynamic analysis of switching-mode DC-DC converters*. New York: Van Nostrand Reinhold, 1991. (Electrical Engineering).
- LEYVA, R.; MARTÍNES-SALAMERO, L.; VALDERRAMA-BLAVI, H.; MAIXÉ, J.; GIRAL, R.; GUINJOAN, F. Linear state-feedback control of a boost converter for a large-signal stability. *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, New York, v. 2, n. 48, p. 418–424, april 2001.
- LIBERZON, D. *Switching in Systems and Control*. London: Springer, 2003. (Systems & Control: Foundations & Applications).
- LIBERZON, D.; MORSE, A. S. Basic problems in stability and design of switched systems. *IEEE Control Systems*, New York, v. 19, n. 5, p. 59–70, october 1999.
- LIN, H.; ANTSAKLIS, P. J. Switching stabilizability for continuous-time uncertain switched linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, New York, v. 52, n. 4, p. 633–646, april 2007.
- LIN, H.; ANTSAKLIS, P. J. Stability and stabilizability of switched linear systems: A survey of recent results. *IEEE Transaction on Automatic Control*, New York, v. 54, n. 2, p. 308–322, february 2009.
- LIN, X.; DU, H.; LI, S. Finite-time boundedness and L2-gain analysis for switched delay systems with norm-bounded disturbance. *Applied Mathematics and Computation*, Philadelphia, v. 217, n. 12, p. 5982–5993, february 2011.
- LOFBERG, J. YALMIP : a toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In: IEEE INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON COMPUTER AIDED CONTROL SYSTEMS DESIGN, 2004, Taipei. *Proceedings...* Taipei: IEEE, 2004. p. 284–289.
- MAINARDI JÚNIOR, E. I.; TEIXEIRA, M. C. M.; MOREIRA, M. R.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E.; YOSHIMURA, V. L. Controle via realimentação da saída para sistemas lineares chaveados. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA - CBA, 19., 2012a, Campina Grande. *Anais...* Campina Grande: Sociedade Brasileira de Automática - SBA, 2012a. p. 7.
- MAINARDI JÚNIOR, E. I.; TEIXEIRA, M. C. M.; MOREIRA, M. R.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E.; YOSHIMURA, V. L. *On control design of switched affine systems with application to DC-DC converters*. Ginalber Luiz de Oliveira Serra, InTech. Croatia: Frontiers in Advanced Control Systems, 2012b. 101–116 p.
- MASSEY, R. P.; SNYDER, E. C. High voltage single-ended DC-DC converter. In: IEEE POWER ELECTRONIC SPECIALISTS CONFERENCE, 1977, California. *Proceedings...* California: IEEE, 1977. p. 156–159.
- MAZUMDER, S. K.; NAYFEH, A. H.; BOROJEVIC, D. Robust control of parallel DC-DC buck converters by combining integral-variable-structure and multiple-sliding-surface control

- schemes. *IEEE Transactions on Power Electronics*, New York, v. 17, n. 3, p. 428–437, may 2002.
- MONTAGNER, V. F.; LEITE, V. J. S.; PERES, P. L. D. Design of a switched control with pole location constraints for a UPS system. *IEEE International Symposium Industrial Electronics*, New York, v. 1, p. 441–446, may 2004.
- MONTAGNER, V. F.; MACCARI, L. A.; DUPONT, F. H.; PINHEIRO, H.; OLIVEIRA, R. C. L. F. A DLQR applied to boost converters with switched loads: Design and analysis. In: XI BRAZILIAN POWER ELECTRONICS CONFERENCE, 2011, Natal. *Proceedings...* Natal: IEEE, 2011. p. 68–73.
- NG, T. C. T.; LEUNG, F. H. F.; TAM, P. K. S. A simple adaptive control strategy for regulated switching DC-DC converter based on grid-point concept. In: 27TH ANNUAL IEEE POWER ELECTRONICS SPECIALISTS CONFERENCE, 1996, Baveno. *Proceedings...* Baveno: IEEE, 1996. v. 2, p. 1494–1498.
- OTSUKA, N.; SOGA, T. Necessary and sufficient conditions on quadratic stabilizability for polytopic uncertain continuous-time switched linear systems. In: *Control and Automation*. Berlin: Springer, 2009, (Communications in Computer and Information Science, v. 65). p. 1–7.
- OTSUKA, N.; SOGA, T. Quadratic stabilizability for polytopic uncertain continuous-time switched linear systems composed of two subsystems. *International Journal of Control and Automation*, Sandy Bay, v. 3, n. 1, p. 35–42, march 2010.
- RICHARD, P. Y.; CORMERAIS, H.; BUISSON, J. A generic design methodology for sliding mode control of switched systems. *Nonlinear Analysis – Theory Methods & Applications*, United Kingdom, v. 65, n. 9, p. 1751–1772, november 2006.
- SANDERS, S. R.; VERGUESE, G. C. Lyapunov-based control for switched power converters. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, New York, v. 7, n. 1, p. 17–24, january 1992.
- SKAFIDAS, E.; EVANS, R. J.; SAVKIN, A. V.; PETERSEN, I. R. Stability results for switched controller systems. *Automatica*, Amsterdam, v. 35, n. 4, p. 553–564, april 1999.
- SLOTINE, J. J.; LI, W. P. *Applied Nonlinear Control*. New Jersey: Prentice-Hall, 1991.
- SOGA, T.; OTSUKA, N. Quadratic stabilizability for polytopic uncertain continuous-time switched linear systems by output feedback. In: AMERICAN CONTROL CONFERENCE (ACC), 2010, Baltimore. *Proceedings...* Baltimore: IEEE, 2010. p. 3920–3925.
- SPIAZZI, G.; MATTAVELLI, P.; ROSSETO, L.; MALESANI, L. Application of sliding mode control to switch-mode power supplies. *Journal of Circuits Systems and Computers*, Taipei, v. 5, n. 3, p. 337–354, september 1995.
- SUN, Z. A robust stabilizing law for switched linear systems. *International Journal of Control*, Essex, v. 77, n. 4, p. 389–398, march 2004.
- SUN, Z.; GE, S. S. Analysis and synthesis of switched linear control systems. *Automatica*, Amsterdam, v. 41, n. 2, p. 181–195, february 2005.

- SUN, Z.; GE, S. S. *Switched Linear Systems: Control and Design*. London: Springer, 2005. (Communications and Control Engineering).
- TAN, S. C.; LAI, Y. M.; TSE, C. K. General design issues of sliding-mode controllers in DC-DC converters. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, New York, v. 55, n. 3, p. 1160–1174, march 2008.
- TEIXEIRA, M. C. M. *Sistemas reais positivos e aplicações ao controle com incertezas*. 1989. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) — Pontifícia Universidade Católica, Rio de Janeiro, 1989. Disponível em: <http://www.maxwell.lambda.ele.puc-rio.br/Busca_etds.php?strSecao=resultado&nrSeq=8113@1>. Acesso em: 20 jul. 2013.
- TEIXEIRA, M. C. M. Output control with dynamical compensators and strictly positive real systems. *International Journal of Control*, London, v. 57, n. 5, p. 1101–1105, june 1993.
- UTKIN, V. L. *Sliding Modes and Their Application in Variable Structure Systems*. New York: Mir Publisher, 1978.
- VUTHCHHAY, E.; PINSOPON, U.; BUNLAKSANANUSORN, C. Modeling of a sepic converter operating in continuous conduction mode. In: 6TH INTERNATIONAL CONFERENCE ON ELECTRICAL ENGINEERING/ELECTRONICS, COMPUTER, TELECOMMUNICATIONS AND INFORMATION TECHNOLOGY, 2009, Chonburi. *Proceedings...* Pattaya: IEEE, 2009. v. 01, p. 136–139.
- WEISS, L.; INFANTE, E. Finite time stability under perturbing forces and on product spaces. *IEEE Transactions on Automatic Control*, New York, v. 12, n. 1, p. 54–59, February 1967.
- WENJIN, H.; DONGHUA, Z. Adaptive control of DC-DC converters based on input equivalent disturbance. In: 27TH CHINESE CONTROL CONFERENCE, 2008, Kunming. *Proceedings...* Kunming: IEEE, 2008. p. 38–42.
- WICKS, M. A.; PELETIES, P.; DECARLO, R. A. Construction of piecewise Lyapunov functions for stabilizing switched systems. In: PROCEEDINGS OF THE 33RD IEEE CONFERENCE ON DECISION AND CONTROL, 1994. *Proceedings...* Flórida: IEEE, 1994. v. 4, p. 3492–3497.
- XIE, D.; SHI, H. Observer-based switched control design for continuous-time switched systems. In: IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON SYSTEMS, MAN AND CYBERNETICS, 2006, Taipei. *Proceedings...* Taipei, 2006. v. 6, p. 4503–4507.
- XIE, D.; YU, M. Stability analysis of switched linear systems with polytopic uncertainties. In: IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON SYSTEMS, MAN AND CYBERNETICS, 2006, Taipei. *Proceedings...* Taipei: IEEE, 2006. v. 5, p. 3749–3753.
- XU, X.; ZHAI, G.; HE, S. On practical asymptotic stabilizability of switched affine systems. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, United Kingdom, v. 2, n. 1, p. 196–208, march 2008.
- YANG, H.; COCQUEMPOT, V.; JIANG, B. On stabilization of switched nonlinear systems with unstable modes. *Systems & Control Letters*, Amsterdam, v. 58, n. 10-11, p. 703–708, july 2009.

YOSHIMURA, V. L.; ASSUNÇÃO, E.; DA SILVA, E. R. P.; TEIXEIRA, M. C. M.; MAINARDI JÚNIOR, E. I. Observer-Based Control Design for Switched Affine Systems and Applications to DC - DC Converters. *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, Campinas, v. 24, n. 4, p. 535–543, may 2013.

YOSHIMURA, V. L.; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M.; MAINARDI JÚNIOR, E. I. A comparison of performance indexes in DC-DC converters under different stabilizing state-dependent switching laws. In: XI BRAZILIAN POWER ELECTRONICS CONFERENCE, 2011, Natal. *Proceedings...* Natal: IEEE, 2011. p. 1069–1075.

ZHAI, G.; LIN, H.; ANTSAKLIS, P. Quadratic stabilizability of switched linear systems with polytopic uncertainties. *International Journal of Control*, Essex, v. 76, n. 7, p. 747–753, november 2003.

ZHIJIAN, J.; LONG, W.; GUANGMING, X. Quadratic stabilization of switched systems. *International Journal of Systems Science*, United Kingdom, v. 36, n. 7, p. 395–404, april 2005.

ANEXO A – PARTICIPAÇÃO EM TRABALHOS

Neste anexo é apresentado uma relação dos trabalhos desenvolvidos até o momento pelo autor e também pelo grupo de pesquisa em controle da UNESP de Ilha Solteira, que contaram com a participação do autor, como co-autor nestes trabalhos.

A.1 Artigos em Periódicos Internacionais

YOSHIMURA, V. L.; ASSUNÇÃO, E.; DA SILVA, E. R. P.; TEIXEIRA, M. C. M.; MAINARDI JÚNIOR, E. I. Observer-Based Control Design for Switched Affine Systems and Applications to DC-DC Converters. *Journal of Control, Automation and Electrical Systems*, Campinas, v.24, n. 4, p.535-543, 2013.

MOREIRA, M. R.; MAINARDI JÚNIOR, E. I.; ESTEVES, T. T.; CARDIM, R.; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; FARIA, F. Stability and disturbance rejection with state-derivative feedback, *Mathematical Problems in Engineering*, p.1-12, 2010.

A.2 Capítulo de Livro

MAINARDI JÚNIOR, E. I.; TEIXEIRA, M. C. M.; MOREIRA, M. R.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E.; YOSHIMURA, V. L. On control design of switched affine systems with application to DC-DC converters. *Ginalber Luiz de Oliveira Serra, Intech. Croatia: Frontiers in Advanced Control Systems*, p. 110-116, 2012.

A.3 Artigos em Congressos Internacionais

YOSHIMURA, V. L.; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M.; MAINARDI JÚNIOR, E. I. A comparison of performance indexes in DC-DC converters under different stabilizing state-dependent switching laws. In: XI BRAZILIAN POWER ELECTRONICS CONFERENCE, 2011, Natal. *Proceedings...* Natal: IEEE, 2011. p. 1069–1075.

CARDIM, R.; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; COVACIC, M. R.; SEIXAS, F. J. M. de; FARIA, F. A.; MAINARDI JÚNIOR, E. I. Implementation of a DC-DC converter with variable structure control of switched systems. In: IEEE INTERNATIONAL ELECTRIC MACHINES

DRIVES CONFERENCE, 2011, Niagara Falls. *Proceedings...* Niagara Falls: IEEE, 2011. p. 872–877.

CARDIM, R.; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; COVACIC, M. R.; FARIA, F. A.; SEIXAS, F. J. M.; MAINARDI JÚNIOR, E. I. Design and implementation of a DC-DC converter based on variable structure control of switched systems. In: 18TH IFAC WORLD CONGRESS, 2011, Milano. *Proceedings...* Italy: IFAC, 2011. v. 18, p. 11048–11054.

A.4 Artigos em Congressos Nacionais

MAINARDI JÚNIOR, E. I.; TEIXEIRA, M. C. M.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E.; DE OLIVEIRA, D. R.; YOSHIMURA, V. L. Controle de Sistemas Lineares Chaveados utilizando Realimentação Estática da Saída e Funções de Lyapunov Metzler. In: XI Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente, 2013, Fortaleza. *Anais...* Fortaleza: 2013.

YOSHIMURA, V. L.; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M.; DA SILVA, E. R. P.; MAINARDI JÚNIOR, E. I. Relaxação da Taxa de Convergência e Redução de Normas aplicadas à Estimção de Estado em Sistemas Chaveados Afins. In: XI Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente, 2013, Fortaleza. *Anais...* Fortaleza: 2013.

MAINARDI JÚNIOR, E. I.; TEIXEIRA, M. C. M.; MOREIRA, M. R.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E.; YOSHIMURA, V. L. Controle via realimentação da saída para sistemas lineares chaveados. In: XIX CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA - CBA, 19., 2012, Campina Grande. *Anais...* Campina Grande: Sociedade Brasileira de Automática, 2012. p. 7.

MOREIRA, M. R.; MAINARDI JÚNIOR, E. I.; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; CARDIM, R. Controle Robusto de Sistemas Descritores Não Lineares com Realimentação Derivativa. In: XIX CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA - CBA, 2012, Campina Grande. *Anais...* Campina Grande: Sociedade Brasileira de Automática, 2012.

YOSHIMURA, V. L.; ASSUNÇÃO, E.; DA SILVA, E. R. P.; TEIXEIRA, M. C. M.; MAINARDI JÚNIOR, E. I. Observação de Estados em Sistemas Chaveados Afins e Projeto de Observadores em Conversores CC-CC. In: XIX CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA - CBA, 2012, Campina Grande. *Anais...* Campina Grande: Sociedade Brasileira de Automática, 2012.

SILVA, J. H.; MAINARDI JÚNIOR, E. I.; SOUZA, W.; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E.; CARDIM, R.; MOREIRA, M. R. Controle H-infinito com chaveamento do ganho da realimentação do vetor de estado para sistemas lineares incertos. In: XIX CONGRESSO BRA-

SILEIRO DE AUTOMÁTICA - CBA, 2012, Campina Grande. *Anais...* Campina Grande: Sociedade Brasileira de Automática, 2012.

ESTEVES, T. T.; MAINARDI JÚNIOR, E. I.; MOREIRA, M. R.; CARDIM, R.; ALVES, M. P.; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E. Análise da Estabilidade de Sistemas Fuzzy Takagi-Sugeno utilizando Funções de Lyapunov Fuzzy. In: X Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente, 2011, São João del-Rei. *Anais...* São João del-Rei: 2011, p.885-890.

MOREIRA, M. R.; MAINARDI JÚNIOR, E. I.; ESTEVES, T. T.; TEIXEIRA, M. C. M.; ASSUNÇÃO, E. Controle Robusto de Sistemas Não Lineares com Realimentação Derivativa. In: X Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente, 2011, São João del-Rei. *Anais...* São João del-Rei: 2011, p.915-920.

YOSHIMURA, V. L.; ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M.; MAINARDI JÚNIOR, E. I. Stability of Switched Linear and Affine Systems via Geometrical Conditions: Applications to Non-Strict Hurwitz Combination Systems and the Buck Converter. In: X Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente, 2011, São João del-Rei. *Anais...* São João del-Rei: 2011, p.344-349.

MOREIRA, M. R.; MAINARDI JÚNIOR, E. I.; ESTEVES, T. T.; TEIXEIRA, M. C. M.; CARDIM, R.; ASSUNÇÃO, E. Estabilidade e Rejeição de Distúrbios com Realimentação da Derivada do Vetor de Estado. In: XVIII Congresso Brasileiro de Automática, 2010, Bonito-MS. *Anais...* Bonito-MS: 2010, p.5230-5233.