

Silvio Roberto Castelhão

**Derivadas Dini e Aplicações à
Otimização Subdiferenciável**



**Derivadas Dini e Aplicações à
Otimização Subdiferenciável**

**Derivadas Dini e Aplicações à
Otimização Subdiferenciável**

Silvio Roberto Castelão

**Dissertação de Mestrado
Pós-Graduação em Matemática Aplicada e
Computacional
MAC-021**

Silvio Roberto Castelão

sob orientação do Prof. Dr. Geraldo Nunes Silva

San José do Rio Preto - S.P. - Fevereiro de 1997



Derivadas Dini e Aplicações à Otimização Subdiferenciável

Dissertação apresentada ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" - UNESP- como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Ciências Matemáticas, Área de Concentração: Matemática Aplicada e Computacional.

Silvio Roberto Castelão

sob orientação do Prof. Dr. Geraldo Nunes Silva

São José do Rio Preto - S.P. - Fevereiro de 1997



768/98

6



AGRADECIMENTOS

A Direção do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da UNESP,
Campus de São José do Rio Preto, pelo apoio dado aos estudos e pesquisas
em desenvolvimento nesta Instituição.

Ao Prof. Dr. Geraldo Nunes Silva, pela orientação.

Aos amigos pós-graduandos e funcionários do DCCE.

A todos os professores do DCCE,

especialmente ao CNPq, pelo apoio financeiro.

A todos, que de alguma forma contribuíram para esta realização.

A Deus, por tudo.

Aos meus pais,
José e Aparecida
dedico.

AGRADECIMENTOS

À Direção do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da UNESP, Campus de São José do Rio Preto, pelo apoio dado aos estudos e pesquisas em desenvolvimento nesta Instituição.

Ao Prof. Dr. Geraldo Nunes Silva, pela orientação.

Aos amigos pós-graduandos e funcionários do DCCE.

A todos os professores do DCCE.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro.

A todos, que de alguma forma contribuíram para esta realização.

A Deus, por tudo.



RESUMO

Neste trabalho, expomos resultados básicos a respeito das derivadas de Dini de funções de uma e de várias variáveis. As derivadas de Dini foram usadas como ferramenta na definição de algumas classes de funções convexas generalizadas não diferenciáveis e de funções quase-diferenciáveis superiores generalizadas. Estudamos condições de otimalidade para problemas de programação não linear, expressas em termos de ferramentas previamente introduzidas. Além disso, introduzimos a noção de invexidade Dini, generalizamos alguns resultados conhecidos sobre funções invexas e provamos que a pseudo-invexidade Dini é uma condição suficiente de otimalidade para pontos inf-estacionários.



In this work we make an exposition of basic results on Dini Derivatives of functions of both single variable and several variables. Dini derivatives were used as tools in the definitions of generalized convex functions and generalized upper quasi-differentiable functions. We study optimality conditions for nonlinear programming problems, expressed in terms of previously introduced tools. Moreover, we introduce a notion of Dini-invexity for functions, generalize some known results on invex functions and prove that Dini pseudo-invexity for functions is a sufficient optimality condition for inf-stationary points.

3	Derivadas direcionais generalizadas	27
3.1	Derivadas de Dini de funções de várias variáveis	28
3.1.1	Derivadas de Dini direcionais	28
3.1.2	As derivadas de Dini-Hadamard	29
3.2	Derivadas de Dini de max-funções	37
4	Convexidade e quase-diferenciabilidade generalizada	39
4.1	Definições e resultados básicos	39
4.2	Invexidade	43
4.3	Invexidade-Dini	44
4.4	Quase-diferenciabilidade superior generalizada	49
4.5	Quase-diferenciabilidade superior generalizada regular	53
5	Condições de otimalidade	55
5.1	Problema (P1)	56
5.2	Problema (P2)	62
	Bibliografia	66

Índice

1	Introdução	8
2	Derivadas de Dini de funções de uma variável	10
2.1	O cálculo subdiferencial de Dini	10
2.2	Monotocidade e derivadas de Dini	20
2.3	Continuidade-Lipschitz	23
2.4	Condições de otimalidade de primeira e segunda ordem	24
3	Derivadas direcionais generalizadas	27
3.1	Derivadas de Dini de funções de várias variáveis	28
3.1.1	Derivadas de Dini direcionais	28
3.1.2	As derivadas de Dini-Hadamard	29
3.2	Derivadas de Dini de max-funções	37
4	Convexidade e quase-diferenciabilidade generalizada	39
4.1	Definições e resultados básicos	39
4.2	Invexidade	43
4.3	Invexidade-Dini	44
4.4	Quase-diferenciabilidade superior generalizada	49
4.5	Quase-diferenciabilidade superior generalizada regular	53
5	Condições de otimalidade	55
5.1	Problema (P1)	56
5.2	Problema (P2)	62
	Bibliografia	66



Capítulo 1

Introdução

No estudo de problemas de otimização, principalmente a respeito de condições de otimalidade, uma teoria bem desenvolvida e quase completa esta descrita em termos de otimização diferenciável e convexa. Contudo, a diferenciabilidade das funções não é uma ferramenta suficiente para lidarmos com problemas em várias aplicações modernas da otimização. Nas últimas décadas muitos esforços tem sido feito para estender resultados para o caso não diferenciável. Resultados importantes foram obtidos usando a noção de gradiente generalizado introduzido por Clarke. Vários pesquisadores usaram esta noção, e uma teoria extensa foi desenvolvida sob a hipótese de continuidade Lipschitz, para detalhes ver [3, 27, 31].

Neste trabalho, estudaremos o caso em que as derivadas de Dini são usadas para obtermos condições de otimalidade para funções não necessariamente diferenciáveis.

Historicamente, o estudo das derivadas de Dini teve raízes no final do século XIX com Scheefer [32] e Dini [10].

No capítulo 2, estudamos as derivadas de Dini de funções de uma variável, discutimos algumas propriedades básicas [26] e generalizações de alguns teoremas clássicos da análise para funções não diferenciáveis [2, 9, 14, 16, 27, 28, 33, 26]. Estes resultados permitem caracterizar monotocidade e continuidade em termos das derivadas de Dini. Além disso, condições de otimalidade de primeira e segunda ordem são apresentadas.



No capítulo 3, recordamos as definições de diferenciabilidade de Fréchet (usual) e a derivada direcional de Clarke [3]. Algumas propriedades básicas das derivadas de Dini direcional e das derivadas de Dini-Hadamard de funções de várias variáveis são apresentadas e condições de otimalidade são obtidas através do subdiferencial Dini de Penot [27]. Além disso, discutimos regras de cálculo para max-funções [14].

No capítulo 4, introduzimos as noções de invexidade, pseudo-invexidade e quase-invexidade (ver Hanson [17] no caso diferenciável e Reiland [30] no caso não diferenciável) em termos das derivadas de Dini direcional e desenvolvemos condições de otimalidade para a classe de funções pseudo-invexas Dini superior, com ferramentas previamente introduzidas. Discutimos alguns resultados (de Weir e Jeyakumar [36]) de funções pré-invexas introduzidas por Ben-Israel e Mond [1] (e Hanson e Mond [18]) e mostramos que a pré-invexidade implica em invexidade Dini.

Além disso, estudamos a classe das funções quase-diferenciáveis superiores generalizadas introduzida por Komlosi [21], desenvolvemos condições de otimalidade para funções quase-diferenciáveis superiores generalizadas e mostramos que a pseudo-invexidade Dini superior é uma condição suficiente de otimalidade para pontos inf-estacionários.

No capítulo 5, condições de otimalidade para os problemas

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } f(x) \\ &\text{sujeito a } x \in C, C \subset \mathbb{R}^n, \end{aligned} \tag{P1}$$

ou

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } f(x) \\ &\text{sujeito a } C = \{x \in \mathbb{R}^n : g_j(x) \leq 0, j = 1, 2, \dots, m\}. \end{aligned} \tag{P2}$$

são estudadas para a classe de funções quase-diferenciáveis superiores generalizadas regulares.

Ressaltamos que os Teoremas 4.3.1, 4.3.2, 4.3.3, 4.3.6, 4.4.2, 5.1.1, e 5.1.4 são contribuições originais do autor desta dissertação.

Capítulo 2

Derivadas de Dini de funções de uma variável

2.1 O cálculo subdiferencial de Dini

Sejam $f(t)$ uma função de valores reais definida sobre o intervalo aberto (a, b) e $t_0 \in (a, b)$. Definimos as quatro derivadas de Dini de $f(t)$ em t_0 como sendo:

$$D^+ f(t_0) = \limsup_{t \rightarrow t_0^+} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}, \quad D_+ f(t_0) = \liminf_{t \rightarrow t_0^+} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0},$$

$$D^- f(t_0) = \limsup_{t \rightarrow t_0^-} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}, \quad D_- f(t_0) = \liminf_{t \rightarrow t_0^-} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}.$$

Onde $D^+ f(t_0)$ é a derivada de Dini superior direita, $D_+ f(t_0)$ é a derivada de Dini inferior direita, $D^- f(t_0)$ é a derivada de Dini superior esquerda e $D_- f(t_0)$ é a derivada de Dini inferior esquerda de $f(t)$ em t_0 .

Permitimos que as derivadas de Dini alcancem os valores $+\infty$ e $-\infty$ nas definições acima, deste modo as derivadas de Dini sempre existem e admitem muitas regras de cálculo. As próximas regras de cálculo resultam de operações com $\limsup$ e $\liminf$ e da definição de derivadas de Dini. Para uma coleção maior de tais regras encaminhamos o leitor ao livro de McShane [26].

As duas desigualdades abaixo são válidas:

$$D_+ f(t_0) \leq D^+ f(t_0) \quad \text{e} \quad D_- f(t_0) \leq D^- f(t_0).$$



Prova: Seja

$$h = D^+ f(t_0) = \limsup_{t \rightarrow t_0+} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}.$$

Assim existe uma sequência t_n , $t_n \neq t_0$, $t_n \rightarrow t_0+$, tal que

$$\frac{f(t_n) - f(t_0)}{t_n - t_0} \rightarrow h.$$

Logo é impossível se ter a desigualdade

$$h < \liminf_{t \rightarrow t_0+} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0},$$

pois neste caso não poderia existir nenhuma sequência $t_n \rightarrow t_0+$ com

$$\frac{f(t_n) - f(t_0)}{t_n - t_0} \rightarrow h.$$

Portanto $D_+ f(t_0) \leq D^+ f(t_0)$.

A outra desigualdade pode ser provada de maneira semelhante. □

Para $f(t)$ arbitrária as seguintes regras podem ser facilmente verificadas:

$$D^+[-f](t) = -D_+ f(t), \quad D_+[-f](t) = -D^+ f(t), \quad (2.1)$$

$$D^-[-f](t) = -D_- f(t), \quad D_-[-f](t) = -D^- f(t). \quad (2.2)$$

Sejam $f(t)$ e $g(t)$ funções arbitrárias definidas sobre uma vizinhança de $t_0 \in \mathbb{R}$. Assim qualquer uma das desigualdades abaixo que não envolvem expressões indeterminadas (isto é, somas da forma $\infty + (-\infty)$) são verdadeiras:

$$D^+[f + g](t_0) \leq D^+ f(t_0) + D^+ g(t_0) \quad (2.3)$$

$$D_+[f + g](t_0) \geq D_+ f(t_0) + D_+ g(t_0) \quad (2.4)$$

$$D^+[f + g](t_0) \geq D^+ f(t_0) + D_+ g(t_0) \quad (2.5)$$

$$D_+[f + g](t_0) \leq D_+ f(t_0) + D^+ g(t_0) \quad (2.6)$$

$$D^+[f - g](t_0) \leq D^+ f(t_0) - D_+ g(t_0) \quad (2.7)$$

$$D^+[f - g](t_0) \geq D^+ f(t_0) - D^+ g(t_0) \quad (2.8)$$

$$D_+[f - g](t_0) \geq D_+ f(t_0) - D^+ g(t_0) \quad (2.9)$$

$$D_+[f - g](t_0) \leq D_+ f(t_0) - D_+ g(t_0) \quad (2.10)$$

Prova: Provemos primeiro (2.3). Seja

$$L = \limsup_{t \rightarrow t_0+} \frac{[f + g](t) - [f + g](t_0)}{t - t_0}.$$

Isto implica que existe uma sequência t_n , $t_n \neq t_0$, $t_n \rightarrow t_0+$, tal que

$$\frac{[f + g](t_n) - [f + g](t_0)}{t_n - t_0} = \frac{f(t_n) - f(t_0)}{t_n - t_0} + \frac{g(t_n) - g(t_0)}{t_n - t_0} \rightarrow L.$$

Seja $t_{n'}$ uma subsequência de t_n , logo $t_{n'} \rightarrow t_0+$. Suponhamos que

$$\frac{f(t_{n'}) - f(t_0)}{t_{n'} - t_0} \rightarrow L_1 \quad \text{e} \quad \frac{g(t_{n'}) - g(t_0)}{t_{n'} - t_0} \rightarrow L_2.$$

Pela unicidade do limite $L_1 + L_2 = L$. Como

$$\limsup_{t \rightarrow t_0+} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \geq L_1 \quad \text{e} \quad \limsup_{t \rightarrow t_0+} \frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0} \geq L_2$$

segue o resultado desejado.

(2.4) segue de (2.3) se nós trocarmos $f(t_0)$ e $g(t_0)$ por $-f(t_0)$ e $-g(t_0)$, respectivamente e usarmos (2.1). (2.7) segue de (2.3) e (2.9) segue de (2.4) se nós trocarmos $g(t_0)$ por $-g(t_0)$ e usarmos (2.1). Para obter (2.5) basta trocar $f(t_0)$ por $f(t_0) + g(t_0)$ em (2.7). A partir de (2.5) obtemos (2.6) trocando $f(t_0)$ por $-f(t_0)$ e $g(t_0)$ por $-g(t_0)$. Se trocarmos $g(t_0)$ por $-g(t_0)$ em (2.5) e (2.6) obtemos (2.8) e (2.10) respectivamente. $\square$

A próxima afirmação provém da ligação entre as derivadas de Dini e a derivada de funções de uma variável: $f(t)$ é diferenciável em t_0 se e somente se as quatro derivadas de Dini de $f(t)$ em t_0 são iguais e finitas. Assim

$$f'(t_0) = D^+ f(t_0) = D_+ f(t_0) = D^- f(t_0) = D_- f(t_0).$$

Em particular se $g'(t_0)$ existe, então

$$D^+[f + g](t_0) = D^+ f(t_0) + g'(t_0); \quad (2.11)$$

$$D_+[f + g](t_0) = D_+ f(t_0) + g'(t_0). \quad (2.12)$$

Os resultados anteriores valem se trocarmos $D_+f(t)$ e $D^+f(t)$ por $D_-f(t)$ e $D^-f(t)$, respectivamente.

Teorema 2.1.1 ([14], Teorema 1.1) *Seja $f(t)$ definida sobre uma vizinhança de t_0 . Se cada uma das quatro derivadas de Dini é finita em t_0 , então o quociente de diferenças*

$$\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

é limitado em uma vizinhança de t_0 e consequentemente $f(t)$ é contínua em t_0 .

Prova: Se a função $f(t)$ não é contínua em t_0 , então existe $\epsilon > 0$ e uma sequência $t_n \rightarrow t_0$ tal que $|f(t_n) - f(t_0)| > \epsilon$. Segue que

$$\left| \frac{f(t_n) - f(t_0)}{t_n - t_0} \right| \rightarrow +\infty$$

para $t_n \rightarrow t_0$ e isto implica que pelo menos uma das quatro derivadas de Dini não é finita em t_0 . $\square$

Uma função $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se *monótona não-decrescente* quando para $x, y \in (a, b)$, $x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$. Se $x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$, f diz-se *monótona não-crescente*. Se vale a implicação mais estrita $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$ dizemos que a função f é *estritamente crescente*. Finalmente, se $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$, dizemos que f é uma *função estritamente decrescente*.

Lema 2.1.1 *Seja $f(t)$ definida sobre o intervalo aberto (a, b) . Se $D_+f(t_0) > 0$ e $D_-f(t_0) > 0$, onde $t_0 \in (a, b)$, então $f(t)$ é estritamente crescente localmente em t_0 . Se $D^+f(t_0) < 0$ e $D^-f(t_0) < 0$ então $f(t)$ é estritamente decrescente localmente em t_0 .*

Prova: Suponhamos que $D_+f(t_0) > 0$ e $D_-f(t_0) > 0$. Então existem $t_1, t_2 \in (a, b)$, $t_1 < t_0 < t_2$ tal que

$$\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} > 0$$

para todo $t \in (t_1, t_2)$, $t \neq t_0$. Portanto

$$f(t) < f(t_0) \quad \text{sempre que} \quad t \in (t_1, t_0)$$

e

$$f(t) > f(t_0) \quad \text{sempre que} \quad t \in (t_0, t_2).$$

Logo $f(t)$ é estritamente crescente localmente em t_0 .

A segunda parte do teorema pode ser provada de maneira semelhante. $\square$

Lema 2.1.2 *Seja $f(t)$ estritamente crescente (decrecente) localmente em todo ponto do intervalo fechado $[a, b]$. Então $f(t)$ é estritamente crescente (decrecente) sobre $[a, b]$.*

Prova: Seja $f(t)$ estritamente crescente localmente em cada ponto de $[a, b]$. Suponhamos por contradição que existe $t_1, t_2 \in [a, b]$, tal que $t_1 < t_2$ e $f(t_1) \geq f(t_2)$. Sejam

$$T = \{t : t_1 < t < t_2 \text{ e } f(t_1) < f(t)\}$$

e

$$t_0 = \sup T.$$

Como $f(t)$ é estritamente crescente localmente em t_1 e t_2 , tem-se $T \neq \emptyset$ e $t_1 < t_0 < t_2$.

Como $f(t)$ é estritamente crescente localmente em t_0 , existe $\delta > 0$, tal que

$$t_0 - \delta < t' < t_0 \Rightarrow f(t') < f(t_0) \quad (2.13)$$

e

$$t_0 < t'' < t_0 + \delta \Rightarrow f(t_0) < f(t''). \quad (2.14)$$

Pela definição de t_0 , $t_0 < t''$ conclui-se que t'' não pertence a T , consequentemente $f(t'') \leq f(t_1)$. Levando em conta (2.14) para qualquer $t_0 < t < t_0 + \delta$ temos $f(t_0) < f(t) \leq f(t_1)$. Logo $f(t_0) < f(t_1)$.

Por outro lado, existe $t' \in (t_0 - \delta, t_0)$ tal que $t' \in T$. Levando em conta (2.13) e a definição de T , temos $f(t_1) < f(t') < f(t_0)$, o que contradiz a desigualdade $f(t_1) \geq f(t_0)$ acima. Esta contradição completa a prova.

Para funções estritamente decrescente a prova é feita de maneira semelhante. $\square$

Teorema 2.1.2 *Sejam $f(t)$ definida sobre o intervalo fechado $[a, b]$ e $f(a) = f(b)$. Então existem t_1 e $t_2 \in [a, b]$ tais que*

$$D_+f(t_1) \leq 0 \quad \text{ou} \quad D_-f(t_1) \leq 0;$$

e

$$D^+f(t_2) \geq 0 \quad \text{ou} \quad D^-f(t_2) \geq 0.$$

Prova: Suponhamos por contradição que não existe t_1 com a propriedade exigida. Então $D_+f(t) > 0$ e $D_-f(t) > 0$ para todo $t \in [a, b]$. Pelo Lema 2.1.1 segue que $f(t)$ é estritamente crescente localmente em cada ponto de $[a, b]$ e pelo Lema 2.1.2 ela é estritamente crescente sobre $[a, b]$, o que contradiz a hipótese $f(a) = f(b)$.

A segunda parte do teorema pode ser provada de maneira semelhante. □

Teorema 2.1.3 (*Teorema de Rolle generalizado*) *Sejam $f(t)$ definida sobre o intervalo fechado $[a, b]$ e $f(a) = f(b)$.*

i) *$f(t)$ possui um valor mínimo m sobre $[a, b]$.*

Se $m < f(a) = f(b)$ então existe $t_1 \in (a, b)$ tal que

$$D^-f(t_1) \leq 0 \leq D_+f(t_1), \tag{2.15}$$

enquanto que se $m = f(a) = f(b)$ então temos

$$D^-f(b) \leq 0 \leq D_+f(a). \tag{2.16}$$

ii) *$f(t)$ possui um valor máximo M sobre $[a, b]$.*

Se $M > f(a) = f(b)$ então existe $t_2 \in (a, b)$ tal que

$$D^+f(t_2) \leq 0 \leq D_-f(t_2), \tag{2.17}$$

enquanto que se $M = f(a) = f(b)$ então temos

$$D^+f(a) \leq 0 \leq D_-f(b). \tag{2.18}$$

Prova: Por hipótese existe $t_1 \in [a, b]$ tal que $f(t_1) = m$. Se $m < f(a)$ então $t_1 \in (a, b)$. Neste caso $f(t) \geq f(t_1)$ para todo $t \in [a, b]$ e (2.15) é facilmente verificada. Se $m = f(a)$ temos que $f(t) \geq f(a) = f(b)$ para todo $t \in [a, b]$ de onde (2.16) segue imediatamente.

A prova de ii) pode ser feita de maneira semelhante. □

Teorema 2.1.4 *Seja $f(t)$ uma função contínua definida no intervalo fechado $[a, b]$. Suponha que $f(a) = f(b)$. Então existem valores intermediários $t_1, t_2, t_3, t_4 \in (a, b)$ tais que*

$$D_+ f(t_1) \geq 0, \quad D^+ f(t_2) \leq 0, \quad D_- f(t_3) \geq 0, \quad D^- f(t_4) \leq 0. \quad (2.19)$$

Prova: Como o conjunto de valores de uma função contínua sobre um intervalo fechado é um intervalo fechado então existem m e $M \in \mathbb{R}$ tais que

$$\{f(t) : t \in [a, b]\} = [m, M].$$

Caso i) $m = M$.

Neste caso $f(t)$ é constante sobre $[a, b]$ assim todas as derivadas de Dini são iguais a 0 para todo $t \in (a, b)$.

Caso ii) $M > f(a)$.

Neste caso existe $d \in (a, b)$ tal que $f(d) = M$. Seja $f(a) < y < M$. Como $f(t)$ é contínua existe um último ponto $d_1 \in [a, d]$ e um primeiro ponto $d_2 \in [d, b]$ onde a função $f(t)$ atinge o valor y ($y = f(d_1) = f(d_2)$). Fazendo $t_1 = d_1$, $t_2 = d$, $t_3 = d$ e $t_4 = d_2$ não é difícil mostrar que as desigualdades (2.19) são satisfeitas com esta escolha.

Caso iii) $m < f(a)$.

A prova pode ser feita de maneira semelhante a ii). □

Teorema 2.1.5 (Teorema do valor médio generalizado) Seja a função $f(t)$ definida sobre o intervalo fechado $[a, b]$. Fazendo

$$\alpha = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \text{e} \quad h(t) = f(t) - f(a) - \alpha(t - a), \quad \text{temos :} \quad (2.20)$$

i) Se $f(t)$ é semicontínua inferior sobre $[a, b]$ e

$$m = \inf\{h(t) : a \leq t \leq b\} < 0,$$

então existe $t_1 \in (a, b)$ tal que

$$D^- f(t_1) \leq \alpha \leq D_+ f(t_1),$$

enquanto que se $m = 0$ então temos

$$D^- f(b) \leq \alpha \leq D_+ f(a);$$

ii) Se $f(t)$ é semicontínua superior sobre $[a, b]$ e

$$M = \sup\{h(t) : a \leq t \leq b\} > 0,$$

então existe $t_2 \in (a, b)$ tal que

$$D^+ f(t_2) \leq \alpha \leq D_- f(t_2),$$

enquanto que se $M = 0$ então temos

$$D^+ f(a) \leq \alpha \leq D_- f(b).$$

Prova: Pelo teorema de Weiestrass generalizado uma função semicontínua inferior (superior) possui um mínimo (máximo) sobre um intervalo fechado, portanto a função $h(t)$ satisfaz as condições do Teorema 2.1.3. Levando em conta que

$$D^+ h(t) = D^+ f(t) - \alpha, \quad D^- h(t) = D^- f(t) - \alpha,$$

$$D_+ h(t) = D_+ f(t) - \alpha, \quad D_- h(t) = D_- f(t) - \alpha$$

a demonstração segue imediatamente por meio do Teorema 2.1.3. □

Observação: Se $f(t)$ é diferenciável então o teorema acima dá o teorema de Lagrange e coincide com o resultado de Goodner ([16], Teorema 2) no caso de funções contínuas com derivadas de Dini finitas.

Para ajudar os desenvolvimentos posteriores reformularemos o teorema acima para funções semicontínuas inferiores.

Corolário 2.1.1 *Seja $f(t)$ semicontínua inferior sobre o intervalo fechado $[a, b]$. Então existem $t_1 \in [a, b)$ e $t_2 \in (a, b]$ tais que*

$$D_+ f(t_1) \geq \alpha \quad \text{e} \quad D^- f(t_2) \leq \alpha.$$

Deve ser mencionado que em comparação com o clássico teorema do valor médio (para funções diferenciáveis) no caso de funções semicontínuas não é possível estender o teorema do valor médio para imaginar t_1 e t_2 como valores intermediários de $[a, b]$. O próximo exemplo demonstra este fato.

Exemplo 2.1.1 *Considere a função semicontínua inferior:*

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } 0 < t < 1; \\ -2 & \text{se } t = 0; \\ -1 & \text{se } t = 1. \end{cases}$$

É fácil ver que para $\alpha = 1$ temos $D_+ f(t) = 0$ para todo $t \in (0, 1)$ e $D_+ f(0) = +\infty$. Assim o único ponto que satisfaz $D_+ f(t) \geq \alpha$ é $t = 0$.

Giorgi e Komlosi [14] colocaram uma propriedade adicional sobre a função auxiliar $h(t)$ para que t_1 seja um valor intermediário, eles impõem que a função $f(t)$ seja semicontínua inferior e $h(t)$ possui um máximo sobre $[a, b]$.

Teorema 2.1.6 *Seja a função $f(t)$ definida sobre o intervalo fechado $[a, b]$.*

i) Se $f(t)$ é semicontínua inferior e $h(t)$ possui um máximo sobre $[a, b]$ então existem valores intermediários $t_1, t_2 \in (a, b)$ tais que

$$D_+f(t_1) \geq \alpha \quad e \quad D^-f(t_1) \leq \alpha.$$

ii) Se $f(t)$ é semicontínua superior e $h(t)$ possui um mínimo sobre $[a, b]$ então existem valores intermediários $t_1, t_2 \in (a, b)$ tais que

$$D^+f(t_2) \leq \alpha \quad e \quad D_-f(t_2) \geq \alpha.$$

Prova: *i)* Primeiro provemos que $h(t)$ não pode ser estritamente crescente nem estritamente decrescente sobre (a, b) .

Suponhamos por contradição que $h(t)$ é estritamente decrescente sobre (a, b) . Além disso $h(t)$ também é semicontínua inferior sobre $[a, b]$ e $h(t) > h(a) = h(b)$ para todo $t \in (a, b)$. De acordo com este fato segue que $h(t)$ não possui um valor máximo sobre $[a, b]$. Esta contradição mostra que $h(t)$ não pode ser estritamente decrescente sobre (a, b) .

Portanto, se $h(t)$ é não-crescente ou não-decrescente sobre (a, b) então existe um ponto $t_0 \in (a, b)$ e uma vizinhança desse ponto onde $h(t)$ é constante. Neste caso $D_+h(t_0) = D^-h(t_0) = 0$ e além disso a afirmação do teorema acima vale para $t_1 = t_0$ e $t_2 = t_0$.

Finalmente, suponhamos que $h(t)$ não é monótona sobre (a, b) . Então existem $s_1, s_2 \in (a, b)$, $s_1 < s_2$ e $p_1, p_2 \in (a, b)$, $p_1 < p_2$ tais que

$$h(s_1) < h(s_2) \quad e \quad h(p_1) > h(p_2).$$

Pelo Corolário 2.1.1 existem $t_1 \in [s_1, s_2]$ e $t_2 \in [p_1, p_2]$ tais que

$$D_+h(t_1) = D_+f(t_1) - \alpha \geq \frac{h(s_2) - h(s_1)}{s_2 - s_1} > 0$$

e

$$D^-h(t_2) = D^-f(t_2) - \alpha \leq \frac{h(p_2) - h(p_1)}{p_2 - p_1} < 0,$$

assim a afirmação do teorema é satisfeita com t_1 e t_2 .

A prova de ii) pode ser feita de maneira semelhante. $\square$

O próximo teorema é uma consequência imediata do teorema acima, contudo ele pode também ser deduzido a partir do teorema 2.1.4 aplicado para a função $h(t)$.

Teorema 2.1.7 *Seja a função $f(t)$ definida e contínua sobre o intervalo fechado $[a, b]$. Então existem $t_1, t_2, t_3, t_4 \in (a, b)$ tais que*

$$D_+f(t_1) \geq \alpha, \quad D^+f(t_2) \leq \alpha, \quad D_-f(t_3) \geq \alpha, \quad D^-f(t_4) \leq \alpha \quad (2.21)$$

onde a quantidade α esta definida em 2.20

2.2 Monotocidade e derivadas de Dini

O cálculo diferencial é uma ferramenta eficiente para descrever o crescimento ou decrescimento de funções diferenciáveis. Para funções não diferenciáveis caracterizações semelhantes são obtidas usando as derivadas de Dini.

É óbvio que se $f(t)$ é não-crescente sobre (a, b) então para todo $t \in (a, b)$

$$D^+f(t) \leq 0 \quad e \quad D^-f(t) \leq 0,$$

e se $f(t)$ é não-decrescente sobre (a, b) então para todo $t \in (a, b)$

$$D_+f(t) \geq 0 \quad e \quad D_-f(t) \geq 0.$$

Agora provaremos condições suficientes de monotocidade (estrita) para classes especiais de funções. O próximo teorema é uma consequência imediata dos Lemas 2.1.1 e 2.1.2.

Teorema 2.2.1 *Seja $f(t)$ definida sobre (a, b) .*

i) *Se $D_+f(t) > 0$ e $D_-f(t) > 0$ para todo $t \in (a, b)$ então $f(t)$ é estritamente crescente sobre (a, b) .*

ii) *Se $D^+f(t) < 0$ e $D^-f(t) < 0$ para todo $t \in (a, b)$ então $f(t)$ é estritamente decrescente sobre (a, b) .*

O próximo exemplo mostra que a condição $D_+f(t) > 0$ sozinha não garante a monotocidade estrita.

Exemplo 2.2.1 Considere a seguinte função:

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{se } t \in [0, 1); \\ t - 1 & \text{se } t \in [1, 2]. \end{cases}$$

Temos que $D_+f(t) > 0$ sobre $(0, 2)$, contudo, $f(t)$ não é estritamente crescente sobre $(0, 2)$.

O próximo teorema mostra que para funções semicontínuas a não-negatividade (não-positividade) de certas derivadas de Dini garantem a monotocidade.

Teorema 2.2.2 ([14], Teorema 1.13) *Seja $f(t)$ definida sobre $[a, b]$.*

i) Seja $f(t)$ semicontínua inferior sobre $[a, b]$.

Se $D^-f(t) \geq 0$ ($D^-f(t) > 0$) para todo $t \in (a, b]$ então $f(t)$ é não-decrescente (estritamente crescente) sobre $(a, b]$.

Se $D_+f(t) \leq 0$ ($D_+f(t) < 0$) para todo $t \in [a, b)$ então $f(t)$ é não-crescente (estritamente decrescente) sobre $[a, b)$.

ii) Seja $f(t)$ semicontínua superior sobre $[a, b]$.

Se $D^+f(t) \geq 0$ ($D^+f(t) > 0$) para todo $t \in [a, b)$ então $f(t)$ é não-decrescente (estritamente crescente) sobre $[a, b)$.

Se $D_-f(t) \leq 0$ ($D_-f(t) < 0$) para todo $t \in (a, b]$ então $f(t)$ é não-crescente (estritamente decrescente) sobre $(a, b]$.

Prova: Suponhamos que $f(t)$ é semicontínua inferior e a condição $D^-f(t) \geq 0$ ($D^-f(t) > 0$) é válida para todo $t \in (a, b]$. Suponhamos por contradição que $f(t)$ é estritamente decrescente (não-crescente). Então existem $s_1, s_2 \in (a, b]$ tal que $s_1 < s_2$ e $f(s_1) > f(s_2)$ ($f(s_1) \geq f(s_2)$). Pelo Corolário 2.1.1 existe $t_1 \in (s_1, s_2]$ tal que

$$D^-f(t_1) \leq \frac{f(s_2) - f(s_1)}{s_2 - s_1} < 0 \quad (\leq 0).$$

Esta contradição prova a primeira afirmação de *i*). As outras afirmações podem ser provadas de maneira semelhante. $\square$

O próximo teorema mostra que para funções contínuas a não-negatividade (não-positividade) de qualquer uma das derivadas de Dini garante a monotocidade.

Teorema 2.2.3 *Seja $f(t)$ definida e contínua sobre o intervalo aberto (a, b) . Se para todo $t \in (a, b)$ qualquer uma das próximas condições vale, então $f(t)$ é uma função não-decrescente (estritamente crescente) sobre (a, b) :*

$$D^+f(t) \geq 0 \quad (D^+f(t) > 0), \quad (2.22)$$

$$D_+f(t) \geq 0 \quad (D_+f(t) > 0), \quad (2.23)$$

$$D^-f(t) \geq 0 \quad (D^-f(t) > 0), \quad (2.24)$$

$$D_-f(t) \geq 0 \quad (D_-f(t) > 0). \quad (2.25)$$

Prova: A demonstração é uma consequência imediata do Teorema 2.2.2. $\square$

Aplicando o teorema anterior para a função $g(t) = -f(t)$ e levando em conta as identidades (2.1) e (2.2) podemos caracterizar funções não-crescentes e estritamente decrescentes via derivadas de Dini.

A outra parte pode ser provada de maneira semelhante. $\square$

2.3 Continuidade-Lipschitz

Seja X um subconjunto de $\mathbb{R}$. Uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se Lipschitz quando existe uma constante $k > 0$ (chamada constante de Lipschitz da função f) tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

sejam quais forem $x, y \in X$.

É óbvio que funções Lipschitz contínuas possuem derivadas de Dini finitas e limitadas. Agora provaremos a recíproca.

Lema 2.3.1 *Seja $f(t)$ definida e contínua sobre (a, b) .*

- i) *Se qualquer uma das derivadas de Dini $D^+f(t), D_+f(t), D^-f(t), D_-f(t)$ é limitada superiormente com limite superior K então para todo $t_1, t_2 \in (a, b)$*

$$f(t_2) - f(t_1) \leq K(t_2 - t_1).$$

- ii) *Se qualquer uma das derivadas de Dini $D^+f(t), D_+f(t), D^-f(t), D_-f(t)$ é limitada inferiormente com limite inferior k então para todo $t_1, t_2 \in (a, b)$*

$$f(t_2) - f(t_1) \geq k(t_2 - t_1).$$

Prova: Suponhamos que $D^+f(t) \leq K$ para todo $t \in (a, b)$. Considere a função auxiliar $g(t) = f(t) - Kt$. Como $D^+g(t) = D^+f(t) - K \leq 0$ para todo $t \in (a, b)$ logo pelo teorema 2.2.3 temos que $g(t)$ é não-crescente, isto é, $a < t_1 < t_2 < b$ implica que

$$f(t_1) - Kt_1 = g(t_1) \geq g(t_2) = f(t_2) - Kt_2,$$

o que é justamente a tese de i).

A outra parte pode ser provada de maneira semelhante. □

Teorema 2.3.1 *Seja $f(t)$ definida e contínua sobre (a, b) . Se alguma das suas derivadas de Dini é limitada sobre (a, b) então $f(t)$ é Lipschitz contínua sobre (a, b) .*

Prova: Suponhamos que

$$|D^+ f(t)| \leq K \text{ para todo } t \in (a, b). \quad (2.26)$$

Pelo resultado anterior (2.26) implica que

$$-K(t_2 - t_1) \leq f(t_2) - f(t_1) \leq K(t_2 - t_1)$$

para todo $t_1, t_2 \in (a, b)$ o que significa que $f(t)$ é Lipschitz contínua sobre (a, b) com constante Lipschitz K . $\square$

2.4 Condições de otimalidade de primeira e segunda ordem

As próximas condições necessárias de otimalidade de primeira ordem em termos de derivadas de Dini são consequências imediatas das definições.

Teorema 2.4.1 *Sejam $f(t)$ definida sobre (a, b) e $t_0 \in (a, b)$.*

i) *Se $f(t)$ possui um mínimo local em t_0 então*

$$D_+ f(t_0) \geq 0 \quad e \quad D^- f(t_0) \leq 0.$$

ii) *Se $f(t)$ possui um máximo local em t_0 então*

$$D_- f(t_0) \geq 0 \quad e \quad D^+ f(t_0) \leq 0.$$

Agora apresentaremos uma generalização das clássicas condições de otimalidade suficientes de segunda ordem. Este resultado dado por Giorgi e Komlosi ([14], Teorema 1.18) é uma versão modificada de um trabalho elaborado por Castagnoli [2] e baseado na idéia de derivadas de Dini de segunda ordem.

Derivadas de Dini de segunda ordem são definidas de uma maneira muito natural e usual, elas são as derivadas de Dini das funções derivadas de Dini.

O símbolo $D_+D_+f(t_0)$, por exemplo, denota a derivada de Dini inferior direita da função $D_+f(t)$ em t_0 .

Teorema 2.4.2 *Sejam $f(t)$ definida sobre (a, b) e $t_0 \in (a, b)$.*

i) Seja $f(t)$ semicontínua superior sobre (a, b) . Então $f(t)$ possui um mínimo local estrito em t_0 se as seguintes condições são válidas:

$$(mi) \quad D_+f(t_0) \geq 0 \quad e \quad D_+D_+f(t_0) > 0,$$

$$(mii) \quad D^-f(t_0) \leq 0 \quad e \quad D_-D^-f(t_0) > 0.$$

ii) Seja $f(t)$ semicontínua inferior sobre (a, b) . Então $f(t)$ possui um máximo local estrito em t_0 se as seguintes condições são válidas:

$$(Mi) \quad D_-f(t_0) \geq 0 \quad e \quad D^+D_-f(t_0) < 0,$$

$$(Mii) \quad D^+f(t_0) \leq 0 \quad e \quad D^-D^+f(t_0) < 0.$$

Prova: A condição $D_+D_+f(t_0) > 0$ garante a existência de $t'' \in (t_0, b)$ tal que para cada $t_0 < t < t''$ temos

$$0 \leq D_+f(t_0) < D_+f(t) \leq D^+f(t).$$

Como $f(t)$ é semicontínua superior, pelo Teorema 2.2.2 segue que $f(t)$ é estritamente crescente sobre (t_0, t'') .

Igualmente a condição $D_-D^-f(t_0) > 0$ garante a existencia de $t' \in (a, t_0)$ tal que para cada $t' < t < t_0$ temos

$$D_-f(t) \leq D^-f(t) < D^-f(t_0) \leq 0.$$

Pelo Teorema 2.2.2 segue que $f(t)$ é estritamente decrescente sobre (t', t_0) . Como $0 \leq D_+ f(t_0) < +\infty$ e $-\infty < D^- f(t_0) \leq 0$ por esta razão as condições

$$f(t_0) = \inf\{f(t) : t \in (t_0, t'')\} \quad e \quad f(t_0) = \inf\{f(t) : t \in (t', t_0)\}$$

são válidas, o que significa que $f(t)$ possui um mínimo local estrito em t_0 (e que $f(t)$ é contínua em t_0).

A prova de ii) pode ser feita de maneira semelhante. □

Teorema 2.4.3 *Sejam $f(t)$ definida sobre (a, b) e $t_0 \in (a, b)$.*

i) Seja $f(t)$ semicontínua superior sobre (a, b) . Então $f(t)$ possui um mínimo local estrito em t_0 se as seguintes condições são válidas:

$$(si) \quad D^+ f(t_0) \geq 0 \quad e \quad D_+ D^+ f(t_0) > 0,$$

$$(sii) \quad D_- f(t_0) \leq 0 \quad e \quad D_- D_- f(t_0) > 0.$$

ii) Seja $f(t)$ semicontínua inferior sobre (a, b) . Então $f(t)$ possui um máximo local estrito em t_0 se as seguintes condições são válidas:

$$(Si) \quad D^- f(t_0) \geq 0 \quad e \quad D^+ D^- f(t_0) < 0,$$

$$(Sii) \quad D_+ f(t_0) \leq 0 \quad e \quad D^- D_+ f(t_0) < 0.$$

Observação: Misturando as condições acima obtemos mais condições suficientes de otimalidade de segunda ordem. Por exemplo para funções semicontínuas superior qualquer um dos seguintes pares

$$\{(mi), (mii)\}, \{(si), (mii)\}, \{(mi), (sii)\}, \{(si), (sii)\}$$

é suficiente para t_0 ser um ponto de mínimo local estrito de $f(t)$. Se perdermos a condição de semicontinuidade imposta sobre $f(t)$ nos Teoremas anteriores então as condições não são suficientes para garantir a otimalidade local estrita.

Capítulo 3

Derivadas direcionais generalizadas

O objetivo deste capítulo é estudar as derivadas de Dini direcionais de funções de várias variáveis. Começaremos este capítulo recordando as definições de diferenciabilidade de Fréchet, a condição Lipschitz e a derivada direcional de Clarke [3].

Diferenciabilidade segundo Fréchet: Seja f uma função de $\mathbb{R}^n$ em $[-\infty, +\infty]$ e seja x um ponto onde f é finita. Concordando com a definição usual, f é diferenciável em x se e somente se existe um vetor g (necessariamente único) com a propriedade que

$$f(z) = f(x) + \langle g, z - x \rangle + \theta(\|z - x\|),$$

(onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto interno no espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$) em outras palavras

$$\lim_{z \rightarrow x} \frac{f(z) - f(x) - \langle g, z - x \rangle}{\|z - x\|} = 0.$$

Assim g , se existir, é chamado o gradiente de f em x e é denotado por $\nabla f(x)$.

Suponhamos que f é diferenciável em x . Então pela definição, para qualquer $y \neq 0$,

$$0 = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{f(x + \lambda y) - f(x) - \langle \nabla f(x), \lambda y \rangle}{\lambda \|y\|} = \frac{f'(x; y) - \langle \nabla f(x), y \rangle}{\|y\|}.$$

Portanto $f'(x; y)$ existe e é uma função linear na variável y :

$$f'(x; y) = \langle \nabla f(x), y \rangle, \quad \forall y.$$

Seja f uma função diferenciável em x_0 . Dizemos que f é estacionária em x_0 se $\nabla f(x_0) = 0$. Neste caso, x_0 é chamado de ponto estacionário.

A condição Lipschitz: Seja X um subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz a condição de Lipschitz (sobre X) se para algum escalar k não-negativo, temos

$$|f(x) - f(y)| \leq k\|x - y\|, \quad \forall x, y \in X.$$

Dizemos que f é Lipschitz perto de x se para algum $\epsilon > 0$, f satisfaz a condição Lipschitz sobre o conjunto $x + \epsilon B$, onde B denota a bola unitária aberta do $\mathbb{R}^n$.

A derivada direcional generalizada de Clarke: Sejam f Lipschitz perto de um ponto x dado e v qualquer outro vetor em $\mathbb{R}^n$. A derivada direcional generalizada de f em x na direção v , denotada por $f^\circ(x; v)$, é definida como sendo:

$$f^\circ(x; v) = \limsup_{\substack{y \rightarrow x \\ t \rightarrow 0^+}} \frac{f(y + tv) - f(y)}{t}.$$

3.1 Derivadas de Dini de funções de várias variáveis

Sejam a função $f(t)$ definida sobre o conjunto aberto $S \subset \mathbb{R}^n$, onde $n > 1$ e $a \in S$. Existem algumas maneiras para estender a noção de derivadas de Dini para o caso de várias variáveis.

3.1.1 Derivadas de Dini direcionais

Uma possível extensão é usar o conceito original de derivadas de Dini direcionais, o que significa que esta noção é aplicada para funções de uma variável da seguinte forma $s(t) = f(a + td)$, $t \in \mathbb{R}$; $a, d \in \mathbb{R}^n$; $a + td \in S$.

Esta forma nos induz para a idéia de derivadas de Dini direcionais como segue:

$$D^+ f(a; d) = \limsup_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(a + td) - f(a)}{t}, \quad D_+ f(a; d) = \liminf_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(a + td) - f(a)}{t},$$

$$D^- f(a; d) = \limsup_{t \rightarrow 0^-} \frac{f(a + td) - f(a)}{t}, \quad D_- f(a; d) = \liminf_{t \rightarrow 0^-} \frac{f(a + td) - f(a)}{t}.$$

As derivadas $D^+f(a; d)$ e $D_+f(a; d)$ são usualmente chamadas de derivada de Dini direcional superior e derivada de Dini direcional inferior de $f(t)$ em a .

Para cada $d \in \mathbb{R}^n$ temos:

$$D^-f(a; d) = -D_+f(a; -d) \quad \text{e} \quad D_-f(a; d) = -D^+f(a; -d). \quad (3.1)$$

Prova: Fazendo $s = -t$, como quando $t \rightarrow 0^+$ temos que $s \rightarrow 0^-$. Logo

$$\begin{aligned} -D_+f(a; -d) &= -\liminf_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(a - td) - f(a)}{t} = \\ &= \limsup_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(a - td) - f(a)}{-t} \stackrel{s=-t}{=} \limsup_{s \rightarrow 0^-} \frac{f(a + sd) - f(a)}{s} = D^-f(a; d). \end{aligned}$$

A outra igualdade pode ser provada de maneira semelhante. $\square$

3.1.2 As derivadas de Dini-Hadamard

Uma outra extensão das derivadas de Dini é o conceito das derivadas de Dini-Hadamard. Definimos as derivadas de Dini-Hadamard direcionais superior e inferior de $f(t)$ em a ao longo da direção d por

$$\begin{aligned} d^+f(a; d) &= \limsup_{\substack{t \rightarrow 0^+ \\ u \rightarrow d}} \frac{f(a + tu) - f(a)}{t}; \\ d_+f(a; d) &= \liminf_{\substack{t \rightarrow 0^+ \\ u \rightarrow d}} \frac{f(a + tu) - f(a)}{t}. \end{aligned}$$

As próximas afirmações são consequências imediatas das definições

$$d^+[-f](a; d) = -d_+f(a; d), \quad d_+[-f](a; d) = -d^+f(a; d); \quad (3.2)$$

$$d_+f(a; d) \leq D_+f(a; d) \leq D^+f(a; d) \leq d^+f(a; d). \quad (3.3)$$

O exemplo a seguir mostra que a derivada de Dini direcional e a derivada de Dini-Hadamard podem ser diferentes.

Exemplo 3.1.1 *Seja*

$$f(t_1, t_2) = \begin{cases} t_1 + t_2 & \text{se } t_2 \neq 0; \\ 0 & \text{se } t_2 = 0. \end{cases}$$

Seja $a = (0, 0)$ e $d = (1, 0)$.

$$D^+ f(a; d) = \limsup_{t \rightarrow 0^+} \frac{f((0, 0) + t(1, 0)) - f(0, 0)}{t} = 0;$$

$$\begin{aligned} d^+ f(a; d) &= \limsup_{\substack{t \rightarrow 0^+ \\ (u_1, u_2) \rightarrow (1, 0)}} \frac{f((0, 0) + t(u_1, u_2)) - f(0, 0)}{t} = \\ &= \limsup_{\substack{t \rightarrow 0^+ \\ (u_1, u_2) \rightarrow (1, 0)}} \frac{t(u_1 + u_2) - 0}{t} = 1. \end{aligned}$$

Teorema 3.1.1 $d_+ f(a; d)$ ($d^+ f(a; d)$) é uma função semicontínua inferior (superior) de direção $d \in \mathbb{R}^n$.

Prova: Primeiro mostremos que $d_+ f(a; d)$ é semicontínua inferior em d , o que é equivalente a seguinte propriedade: para todo $c \in \mathbb{R}$ o conjunto

$$M = \{d : c < d_+ f(a; d)\}$$

é aberto. Por definição

$$d_+ f(a; d) = \lim_{\substack{\alpha \rightarrow 0^+ \\ \tau \rightarrow 0^+}} s_d(\alpha, \tau),$$

onde

$$s_d(\alpha, \tau) = \inf_{\substack{\|u-d\| < \alpha \\ 0 < t < \tau}} \frac{f(a + tu) - f(a)}{t}.$$

Como $s_d(\alpha, \tau)$ é não-decrescente tem-se

$$s_d(\alpha, \tau) \leq d_+ f(a; d)$$

para quaisquer α e τ positivos.

Suponhamos que $M \neq \emptyset$ e $d \in M$ arbitrário. Levando em conta as propriedades da função $s_d(\alpha, \tau)$ temos que existem números positivos α_0, τ_0 tal que

$$c < s_d(\alpha_0, \tau_0).$$

Seja G uma bola aberta em volta de d com raio α_0 . Agora mostremos que $G \subset M$, o que provará que M é um conjunto aberto.

Seja $z \in G$ escolhido arbitrariamente e considere uma vizinhança N de z , com raio β , contida em G . Pela inclusão $N \subset G$ segue que

$$c < s_d(\alpha_0, \tau_0) \leq s_z(\beta, \tau_0) \leq d_+ f(a; z),$$

o que prova que $z \in M$.

A semicontinuidade superior de $d^+ f(a; d)$ pode ser provada de maneira semelhante. $\square$

Vale a pena mencionar que a condição

$$D_+ f(a; d) = D^+ f(a; d)$$

é equivalente para a existência do limite

$$f'(a; d) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(a + td) - f(a)}{t},$$

que é, conhecida como a derivada direcional de $f(x)$ em a .

Similarmente a condição

$$d_+ f(a; d) = d^+ f(a; d)$$

é equivalente para a existência do limite

$$df(a; d) = \lim_{\substack{u \rightarrow d \\ t \rightarrow 0^+}} \frac{f(a + tu) - f(a)}{t},$$

que é chamada derivada direcional uniforme de $f(x)$ em a .

Se a derivada direcional (uniforme) existe para todo $d \in \mathbb{R}^n$ então a função $f(x)$ é chamada diferenciável direcionalmente (uniformemente) em a .

A função $f(x)$ é chamada Gâteaux diferenciável (uniformemente) em a se a derivada direcional (uniforme) $f'(a; d)$ ($df(a; d)$) existe para toda direção $d \in \mathbb{R}^n$ e é linear em d .

O próximo exemplo mostra que a diferenciabilidade de Gâteaux não implica a diferenciabilidade de Fréchet.

Exemplo 3.1.2 Consideremos a seguinte função tipo-Peano:

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y = 0 \text{ ou } |y| \geq x^2; \\ 1 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Seja $a = (0, 0)$. É fácil ver que $f'(a, d) = 0$ para todo $d \in \mathbb{R}^n$ e assim $f(x, y)$ é Gâteaux diferenciável na origem. Mas $f(x, y)$ não é contínua em $(0, 0)$, portanto ela não é Fréchet diferenciável na origem.

O próximo teorema mostra que a diferenciabilidade de Gâteaux uniforme é equivalente a diferenciabilidade de Fréchet.

Teorema 3.1.2 ([14], Teorema 2.2) Se existe $g \in \mathbb{R}^n$ tal que a condição

$$d_+ f(a; d) = d^+ f(a; d) = \langle g, d \rangle \quad (3.4)$$

vale para todo $d \in \mathbb{R}^n$, então $f(x)$ é Fréchet diferenciável em a .

Prova: A demonstração segue do fato de a diferenciabilidade Fréchet

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - \langle g, x - a \rangle}{\|x - a\|} = 0$$

ser equivalente a seguinte condição (a qual é equivalente a (3.4)): Para todo $d \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0^+ \\ u \rightarrow d}} \frac{f(a + tu) - f(a)}{t} = \langle g, d \rangle.$$

□

O próximo teorema mostra que se f é Lipschitz em volta de a então a derivada de Dini direcional superior (inferior) de f em a coincide com a derivada de Dini-Hadamard superior (inferior) de f em a .

Teorema 3.1.3 ([14], Teorema 2.3) Seja $f(x)$ localmente Lipschitz em volta de a então para todo $d \in \mathbb{R}^n$

$$d^+ f(a; d) = D^+ f(a; d) \quad \text{e} \quad d_+ f(a; d) = D_+ f(a; d).$$

Prova: Seja $f(x)$ Lipschitz sobre G , uma vizinhança de a , com constante Lipschitz L . Seja $d \in \mathbb{R}^n$ arbitrário. Então existe $\delta > 0$ e $\tau > 0$ tal que para cada $u \in \mathbb{R}^n$ e $t \in \mathbb{R}$ satisfazendo as condições $\|u - d\| < \delta$ e $0 < t < \tau$ temos $a + tu, a + td \in G$; consequentemente

$$|f(a + tu) - f(a + td)| \leq L|t| \|u - d\|,$$

o que dá a seguinte relação:

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0^+ \\ u \rightarrow d}} \frac{f(a + td) - f(a + tu)}{t} = 0.$$

Aplicando este fato e propriedade de operações com $\limsup$ obtemos o resultado desejado:

$$\begin{aligned} d^+ f(a; d) &= \limsup_{\substack{t \rightarrow 0^+ \\ u \rightarrow d}} \frac{f(a + tu) - f(a)}{t} = \\ &= \limsup_{\substack{t \rightarrow 0^+ \\ u \rightarrow d}} \frac{f(a + td) - f(a)}{t} + \limsup_{\substack{t \rightarrow 0^+ \\ u \rightarrow d}} \frac{f(a + tu) - f(a + td)}{t} = D^+ f(a; d). \end{aligned}$$

A outra parte pode ser provada de maneira semelhante. □

Disto segue que para funções localmente Lipschitz a diferenciabilidade direcional uniforme coincide com a diferenciabilidade direcional. Consequentemente se a função localmente Lipschitz $f(x)$ é em adição Gâteaux diferenciável, então $f(x)$ é Fréchet diferenciável. É óbvio que se $f(x)$ é Fréchet diferenciável em a , então as derivadas de Dini em a são todas finitas para toda direção $d \in \mathbb{R}^n$. A recíproca desta afirmação não é verdadeira mas temos a seguir um resultado muito interessante de Slobodnik [34].

Teorema 3.1.4 *Seja $M \subset \mathbb{R}^n$. Se as derivadas de Dini $D^+ f(x; d)$, $D_+ f(x; d)$ são finitas para qualquer $x \in M$ e para qualquer direção $d \in \mathbb{R}^n$ então $f(x)$ é Fréchet diferenciável em quase toda parte sobre M .*

A falta do gradiente no caso não diferenciável usualmente induz para a introdução de algumas classes de subdiferenciais. Penot [27] introduziu os seguintes conjuntos

$$P_+ f(a) = \{g \in \mathbb{R}^n : \langle g, d \rangle \leq d_+ f(a; d)\},$$

$$P^+ f(a) = \{g \in \mathbb{R}^n : \langle g, d \rangle \geq d^+ f(a; d)\},$$

os quais são chamados de subdiferencial de Dini e superdiferencial de Dini de $f(x)$ em a , respectivamente. Não é difícil mostrar que estes conjuntos podem ser descritos como:

$$P_+f(a) = \left\{ g \in \mathbb{R}^n : \liminf_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - \langle g, x - a \rangle}{\|x - a\|} \geq 0 \right\},$$

$$P^+f(a) = \left\{ g \in \mathbb{R}^n : \limsup_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a) - \langle g, x - a \rangle}{\|x - a\|} \leq 0 \right\}.$$

Disto segue que

$$P_+f(a) \cap P^+f(a) \neq \emptyset$$

se e somente se $f(x)$ é Fréchet diferenciável em a e

$$P_+f(a) \cap P^+f(a) = \{\nabla f(a)\},$$

onde $\nabla f(a)$ denota o gradiente de $f(x)$ em a .

Os dois teoremas abaixo descrevem algumas propriedades elementares, mas muito importantes de subdiferenciais de Dini.

Teorema 3.1.5 ([14], Teorema 2.5)

a) Se $f(x)$ atinge um mínimo local em a então as seguintes condições valem:

$$0 \in P_+f(a), \quad (3.5)$$

$$d_+f(a; d) \geq 0 \quad \text{para todo } d \in \mathbb{R}^n. \quad (3.6)$$

b) Se $0 \in P_+f(a)$ então para qualquer $r > 0$ a função $f(x) + r\|x - a\|$ atinge um mínimo local estrito em a .

c) Se qualquer uma das seguintes condições vale então $f(x)$ atinge um mínimo local estrito em a :

$$0 \in \text{int}P_+f(a), \quad (3.7)$$

$$d_+f(a; d) > 0 \quad \text{para todo } d \in \mathbb{R}^n, d \neq 0. \quad (3.8)$$

Prova: Suponhamos que $f(x)$ atinge um mínimo local em a . Então é óbvio que a condição (3.6) é satisfeita. Visto que as condições (3.5) e (3.6) são equivalentes, o item a) está provado.

Para provar b) suponhamos por absurdo que $f(x) + r\|x - a\|$ não possui um mínimo local estrito em a . Então existe uma sequência $x_n \rightarrow a$, $x_n \neq a$ tal que $f(x_n) + r\|x_n - a\| \leq f(a)$. Fixemos $t_n = \|x_n - a\|$, $u_n = t_n^{-1}(x_n - a)$. Assim $\|u_n\| = 1$ e podemos supor que u_n converge para algum d , $\|d\| = 1$. Portanto

$$\begin{aligned} d_+ f(a; d) &\leq \liminf t_n^{-1} (f(a + t_n u_n) - f(a)) = \\ &= \liminf t_n^{-1} (f(x_n) - f(a)) \leq -r < 0, \end{aligned}$$

em contradição com a hipótese que $0 \in P_+ f(a)$.

A demonstração de c) pode ser feita adotando o mesmo raciocínio aplicado para provar a parte b) levando em conta que as condições (3.7) e (3.8) são de fato equivalentes, pela semicontinuidade inferior de $d_+ f(a; d)$. $\square$

Teorema 3.1.6 [11] *Seja $f(x)$ uma função semicontínua inferior definida sobre $\mathbb{R}^n$. Então $P_+ f(x) \neq \emptyset$ sobre um subconjunto denso do domínio de f .*

Prova: Sejam $a \in \text{dom} f$, $r > 0$ e façamos $g(x) = (r - \|x - a\|^2)^{-1}$. Se r é pequeno o bastante de modo que $f(x)$ é limitada inferiormente sobre uma vizinhança de a com raio r então $f(x) + g(x)$ atinge seu valor mínimo sobre esta vizinhança em algum ponto u (porque $g(x) \rightarrow \infty$ quando $\|x - a\| \rightarrow r$). Visto que $g(x)$ é continuamente diferenciável sobre seu domínio, segue que $d_+ f(u; d) + \langle g'(u), d \rangle \geq 0$ para todo $d \in \mathbb{R}^n$, o que significa que $-g'(u) \in P_+ f(u)$. $\square$

Sejam $f : S \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ e S um subconjunto de $\mathbb{R}^n$. O conjunto

$$\{(x, \mu) \mid x \in S, \mu \in \mathbb{R}, \mu \geq f(x)\}$$

é chamado o epígrafo de f e é denotado por $\text{epi } f$.

As derivadas de Dini-Hadamard são também chamadas de derivadas contingente já que existe um parentesco bem conhecido entre as derivadas de Dini-Hadamard inferior e o chamado cone contingente e entre as derivadas de Dini-Hadamard superior e o chamado cone de deslocamentos interiores. Para detalhes ver [12].

Sejam $E \subset \mathbb{R}^m$ e $e \in \text{cl}E$. O cone contingente $K(E, e)$ de E em $e \in \text{cl}E$ é dado por

$$K(E, e) = \{v \in \mathbb{R}^m : \exists (v_i) \text{ e } (t_i) \text{ tal que } v_i \rightarrow v, t_i \rightarrow 0^+, e + t_i v_i \in E\}.$$

Se $f(x)$ é uma função definida sobre $\mathbb{R}^n$ e $E = \text{epi} f$, $e = (a, f(a))$ então

$$(d, \alpha) \in K(E, e) \Leftrightarrow \alpha \geq d_+ f(a; d).$$

Portanto o epígrafo da derivada de Dini-Hadamard inferior $d_+ f(a; d)$ coincide com o cone contingente $E = \text{epi} f$ em $e = (a, f(a))$. Além disso a relação a seguir é verdadeira:

$$P_+ f(a) = \{g \in \mathbb{R}^n : (g, -1) \in K^*(E, e)\},$$

onde $K^*(E, e)$ denota o cone polar de $K(E, e)$.

O cone de deslocamentos interiores $IK(E, e)$ de E em $e \in \text{cl}E$ é dado por

$$IK(E, e) = \{v \in \mathbb{R}^m : \forall (v_i) \text{ e } (t_i) \text{ tal que } v_i \rightarrow v, t_i \rightarrow 0^+, e + t_i v_i \in E\}.$$

Se $E = \text{epi} f$ e $e = (a, f(a))$ então

$$(d, \alpha) \in IK(E, e) \Leftrightarrow \alpha > d^+ f(a; d).$$

Portanto o epígrafo estrito da derivada de Dini-Hadamard superior coincide com o cone de deslocamentos interiores de $E = \text{epi} f$ no ponto $e = (a, f(a))$. Além disso a relação a seguir é verdadeira:

$$P^+ f(a) = \{g \in \mathbb{R}^n : (-g, 1) \in IK^*(E, e)\}.$$

O cone contingente $K(E, e)$ permite estender as condições de otimalidade (3.6) e (3.8) para um mínimo local relativo. A demonstração do teorema a seguir pode ser feita adotando o mesmo raciocínio aplicado para provar o Teorema 3.1.5 com pequenas modificações.

Teorema 3.1.7 *Sejam $f(x)$ definida sobre o conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $E \subset \Omega$, E não necessariamente aberto.*

a) *Se $a \in E$ é um ponto de mínimo local de $f(x)$ sobre E então*

$$d_+ f(a; d) \geq 0, \quad \forall d \in K(E, a).$$

b) *Se $a \in E$ e*

$$d_+ f(a; d) > 0, \quad \forall d \in K(E, a), d \neq 0,$$

então a é um ponto de mínimo local estrito de $f(x)$ sobre E .

Dado um ponto $x \in \mathbb{R}^n$, dizemos que h é *contínua direcionalmente* em x se para qualquer $d \in \mathbb{R}^n$ a função $s(t) := h(x + td) : t \in [0, \delta)$, para algum $\delta > 0$, é contínua a direita em zero.

3.2 Derivadas de Dini de max-funções

Lema 3.2.1 *Sejam as funções $h_j(x)$, $j = 1, \dots, k$ contínuas direcionalmente em $a \in \mathbb{R}^n$. Seja*

$$h(x) = \max\{h_j(x) : j = 1, 2, \dots, k\}.$$

Definimos

$$I(x) = \{j : h(x) = h_j(x)\}.$$

Então

$$D^+ h(a; d) = \max\{D^+ h_j(a; d) : j \in I(a)\}$$

e

$$D_+ h(a; d) = \max\{D_+ h_j(a; d) : j \in I(a)\}.$$

Prova: Seja $j \in I(a)$ arbitrário. Então para $t > 0$ pequeno, temos

$$h_j(a + td) - h_j(a) \leq h(a + td) - h(a).$$

Disto segue que

$$\max\{D^+ h_j(a; d) : j \in I(a)\} \leq D^+ h(a; d) \quad (3.9)$$

e

$$\max\{D_+ h_j(a; d) : j \in I(a)\} \leq D_+ h(a; d). \quad (3.10)$$

Por outro lado, para todo $j \in I(a)$ e $i \notin I(a)$ temos a seguinte desigualdade

$$h_i(a) < h(a) = h_j(a).$$

Como h_i e h_j são contínuas direcionalmente em a , existe $T > 0$ tal que para todo $0 < t < T$ e para todo $j \in I(a)$ e $i \notin I(a)$

$$h_i(a + td) < h_j(a + td).$$

Isto significa que para todo $0 < t < T$ temos que $I(a + td) \subset I(a)$. Sem perda de generalidade podemos supor que existe um índice p tal que $p \in I(a + td)$ para todo $0 \leq t < T$. Disto segue que $h(a + td)$ coincide com $h_p(a + td)$ para todo $0 \leq t < T$ consequentemente $D^+ h(a; d) = D^+ h_p(a; d)$ e $D_+ h(a; d) = D_+ h_p(a; d)$ o que prova que as desigualdades (3.9) e (3.10) são sempre satisfeitas com o sinal de igualdade. $\square$

verdadeira:

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)a) \leq \max\{f(x), f(a)\} \quad \text{para cada } \lambda \in (0, 1)$$

A partir da definição acima, uma função f é quase-convexa se para cada $x, a \in S$ a seguinte implicação é verdadeira:

$$f(x) \leq f(a) \Rightarrow f(\lambda x + (1 - \lambda)a) \leq f(a) \quad \forall \lambda \in (0, 1)$$

Definição 4.1.2 Seja $f : S \rightarrow \mathbb{R}$, onde S é um conjunto convexo não vazio $S \subset \mathbb{R}^n$. Uma função f é chamada genericamente quase-convexa se para cada $x, a \in S$ com $f(x) \neq f(a)$ a seguinte desigualdade é verdadeira:

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)a) < \max\{f(x), f(a)\} \quad \text{para cada } \lambda \in (0, 1)$$

Capítulo 4

Convexidade e quase-diferenciabilidade generalizada

Neste capítulo estamos interessados principalmente no estudo de invexidade e quase-diferenciabilidade generalizada via derivadas de Dini direcionais. Começaremos recordando algumas definições e resultados básicos de convexidade generalizada, que posteriormente serão necessários para o desenvolvimento de condições de otimalidade.

4.1 Definições e resultados básicos

Definição: 4.1.1 *Seja $f : S \rightarrow \mathbb{R}$, onde S é um conjunto convexo não vazio $S \subset \mathbb{R}^n$. Uma função f é chamada quase-convexa se para cada $x, a \in S$ a seguinte desigualdade é verdadeira:*

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)a) \leq \max\{f(x), f(a)\} \quad \text{para cada } \lambda \in (0, 1).$$

A partir da definição acima, uma função f é quase-convexa se para cada $x, a \in S$ a seguinte implicação é verdadeira:

$$f(x) \leq f(a) \Rightarrow f(\lambda x + (1 - \lambda)a) \leq f(a) \quad \forall \lambda \in (0, 1).$$

Definição: 4.1.2 *Seja $f : S \rightarrow \mathbb{R}$, onde S é um conjunto convexo não vazio $S \subset \mathbb{R}^n$. Uma função f é chamada semi-estritamente quase-convexa se para cada $x, a \in S$ com $f(x) \neq f(a)$ a seguinte desigualdade é verdadeira:*

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)a) < \max\{f(x), f(a)\} \quad \text{para cada } \lambda \in (0, 1).$$

A partir da definição acima, uma função f é semi-estritamente quase-convexa se para cada $x, a \in S$ a seguinte implicação é verdadeira:

$$f(x) < f(a) \Rightarrow f(\lambda x + (1 - \lambda)a) < f(a) \quad \forall \lambda \in (0, 1).$$

O próximo exemplo de Karamardian [19] mostra que a quase-convexidade semi-estrita nem sempre implica em quase-convexidade.

Exemplo 4.1.1 Considere a seguinte função

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0 \\ 0 & \text{se } x \neq 0. \end{cases}$$

É fácil de verificar que f é semi-estritamente quase-convexa. Contudo f não é quase-convexa, visto que para $x = 1$ e $a = -1$ temos que $f(x) = f(a) = 0$ mas

$$f\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}a\right) = f(0) = 1 > f(a).$$

Se f é semicontínua inferior então como mostraremos no próximo lema, quase-convexidade semi-estrita implica em quase-convexidade.

Lema 4.1.1 Sejam S um conjunto convexo não vazio $S \subset \mathbb{R}^n$ e $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ semi-estritamente quase-convexa e semicontínua inferior. Então f é quase-convexa.

Prova: Sejam $x, a \in S$. Se $f(x) \neq f(a)$ então pela quase-convexidade semi-estrita de f devemos ter

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)a) < \max\{f(x), f(a)\} \quad \text{para cada } \lambda \in (0, 1).$$

Agora suponhamos que $f(x) = f(a)$. Para mostrar que f é quase-convexa precisamos mostrar que

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)a) \leq f(x) \quad \text{para cada } \lambda \in (0, 1).$$

Suponhamos por contradição que

$$f(\mu x + (1 - \mu)a) > f(x) \quad \text{para cada } \mu \in (0, 1).$$

Denote $\mu x + (1 - \mu)a$ por z . Como f é semicontínua inferior existe um $\lambda \in (0, 1)$ tal que

$$f(z) > f(\lambda x + (1 - \lambda)z) > f(x) = f(a) \quad (4.1)$$

Note que z pode ser representado como uma combinação convexa de $\lambda x + (1 - \lambda)z$ e a . Visto que $f(\lambda x + (1 - \lambda)z) > f(a)$ logo pela quase-convexidade semi-estrita de f temos

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)z) > f(a) \Rightarrow f(z) < f(\lambda x + (1 - \lambda)z)$$

contradizendo (4.1). Esta contradição completa a prova. $\square$

Modificando a caracterização de funções quase-convexas diferenciáveis Mangasarian [24] introduziu o conceito de funções pseudo-convexas da seguinte maneira: Uma função diferenciável $f(x)$ é *pseudo-convexa* sobre o conjunto convexo $S \subset \mathbb{R}^n$ se a seguinte implicação é verdadeira:

$$x, a \in S, f(x) < f(a) \Rightarrow \langle \nabla f(a), x - a \rangle < 0. \quad (4.2)$$

Existem duas possibilidades para generalizar esta noção para funções não diferenciáveis por meio das derivadas de Dini. Diewert [9] definiu função *pseudo-convexa Dini inferior* trocando a implicação (4.2) com a implicação abaixo:

$$\text{PCX(LDini): } x, a \in S, f(x) < f(a) \Rightarrow D_+ f(a; x - a) < 0,$$

enquanto *pseudo-convexidade Dini superior* é definida em [6, 7, 20, 21] pela seguinte implicação:

$$\text{PCX(UDini): } x, a \in S, f(x) < f(a) \Rightarrow D^+ f(a; x - a) < 0.$$

Dizemos que $f(x)$ é *semicontínua inferior direcionalmente* sobre o conjunto convexo S se a função $s(t) = f(a + t(b - a))$, $t \in [0, 1]$ é semicontínua inferior para todo $a, b \in S$.

O próximo teorema mostra que se f é semicontínua inferior direcionalmente então pseudo-convexidade implica em quase-convexidade e em quase-convexidade semi-estrita. Mas antes precisamos do seguinte lema:

Lema 4.1.2 ([15], Lema 3.2) *Sejam $f(x)$ definida sobre $[a, b] \subset \mathbb{R}^n$ e a função $s(t) = f(a + t(b - a))$ semicontínua inferior sobre $[0, 1]$. Se existe $d = a + r(b - a)$, $0 < r < 1$ tal que*

$$f(d) > M := \max\{f(a), f(b)\}$$

então existem $u, v \in [a, b]$ para os quais temos

$$f(u) \leq f(v) \quad e \quad D_+ f(v, u - v) > 0.$$

Se não existe segmento de linha $(w, y) \subset [a, b]$ tal que $f(x)$ é constante sobre (w, y) com constante de valor $K > M$ então a desigualdade acima vale da seguinte forma

$$f(u) < f(v) \quad e \quad D_+ f(v, u - v) > 0.$$

Teorema 4.1.1 ([8], Corolários 15 e 16) *Seja f semicontínua inferior direcionalmente sobre o conjunto convexo $S \subset \mathbb{R}^n$. Se f é pseudo convexa Dini superior sobre S então f é quase-convexa e semi-estritamente quase-convexa sobre S .*

Prova: Pelo Lema 4.1.1 toda função semi-estritamente quase-convexa e semicontínua inferior direcionalmente é quase-convexa. Logo é suficiente provar que pseudo-convexidade implica em quase-convexidade semi-estrita.

Suponhamos por contradição que f é pseudo-convexa Dini superior mas não é semi-estritamente quase-convexa sobre S . Disto segue que existem $a, y \in S$ e $d \in (a, y)$ tal que $f(a) < f(y)$ e $f(d) \geq f(y)$. Mas

$$f(a) < f(y) \Rightarrow D^+ f(y; a - y) < 0$$

pela pseudo-convexidade Dini superior de f . Esta última desigualdade e a semicontinuidade inferior de f garante a existencia de um ponto $b \in (d, y)$ tal que

$$f(a) < f(b) < f(y) \leq f(d),$$

o que significa que f satisfaz a hipótese do Lema 4.1.2 sobre o segmento de linha $[a, b]$. Como f é pseudo-convexa Dini superior, f não pode ser constante sobre qualquer segmento

de linha contido em $[a, b]$ com constante superior a $f(b)$. Logo pelo Lema 4.1.2 existe $u, v \in [a, b]$ tal que

$$f(u) < f(v) \quad \text{e} \quad D_+ f(v, u - v) > 0,$$

o que contradiz a hipótese de pseudo-convexidade superior Dini. Esta contradição completa a prova. $\square$

4.2 Invexidade

A poucos anos atrás, Hanson [17] considerou funções diferenciáveis do $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$ para as quais existe uma função vetorial $\eta(x, u) \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$f(x) - f(u) \geq [\eta(x, u)]^t \nabla f(u). \quad (4.3)$$

Claramente, funções convexas diferenciáveis satisfazem (4.3) visto que neste caso podemos tomar $\eta(x, u) = x - u$. Os resultados iniciais de Hanson inspiraram uma grande quantidade de trabalhos posteriores. Por exemplo, Craven [4] chamou funções satisfazendo (4.3) de *invexas*, Ben-Israel e Mond [1] (também Craven e Glover [5]) mostraram que a classe de funções invexas é equivalente a classe de funções em que pontos estacionários são mínimos globais.

Teorema 4.2.1 ([1], Teorema 1) *Uma função f é invexa se e somente se todo ponto estacionário de f é um mínimo global.*

Prova: Claramente, se f é invexa, então $\nabla f(u) = 0$ implica $f(x) \geq f(u)$. Suponhamos agora que

$$\nabla f(u) = 0 \Rightarrow f(x) \geq f(u).$$

Se $\nabla f(u) = 0$ tome $\eta(x, u) = 0$. Se $\nabla f(u) \neq 0$ tome

$$\eta(x, u) = \frac{[f(x) - f(u)]}{[\nabla f(u)]^t \nabla f(u)} \nabla f(u). \quad (4.4)$$

$\square$

Corolário 4.2.1 *Se f não possui pontos estacionários então f é invexa.*

Prova: Segue imediatamente da última parte do teorema acima. $\square$

Hanson [17] notou que as condições,

$$[\eta(x, u)]^t \nabla f(u) \geq 0 \Rightarrow f(x) - f(u) \geq 0 \quad (4.4)$$

e

$$f(x) - f(u) \leq 0 \Rightarrow [\eta(x, u)]^t \nabla f(u) \leq 0. \quad (4.5)$$

são extensões simples de (4.3).

Craven chamou as funções satisfazendo (4.4) e (4.5) de *pseudo-invexas* e *quase-invexas*, respectivamente.

É claro que tomando $\eta(x, u) = (x - u)$ que funções convexas, pseudo-convexas, quase-convexas são respectivamente, invexas, pseudo-invexas e quase-invexas. Também é óbvio a partir das definições que funções invexas são pseudo-invexas e quase-invexas. Segue facilmente do teorema 4.2.1 que funções pseudo-convexas e pseudo-invexas são invexas. Assim não existe distinção entre funções pseudo-invexas e funções invexas.

4.3 Invexidade-Dini

Seja a função $f(x)$ definida sobre o conjunto aberto $S \subset \mathbb{R}^n$. Sejam $u \in S$, $u + t\eta(x, u) \in S$ e $t > 0$.

Definição: 4.3.1 *Uma função $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada invexa Dini superior em u se existe uma função vetorial, $\eta : S \times S \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que a desigualdade*

$$f(x) - f(u) \geq D^+ f(u, \eta(x, u)) \quad (4.6)$$

é válida para cada x pertencente ao domínio da f .

Uma função $f(x)$ é chamada invexa Dini superior sobre $S \subset \mathbb{R}^n$ se ela for invexa Dini superior em cada ponto de S .

Definição: 4.3.2 Uma função $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada pseudo-invexa Dini superior em u se existe uma função vetorial, $\eta : S \times S \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que a condição

$$D^+ f(u, \eta(x, u)) \geq 0 \Rightarrow f(x) - f(u) \geq 0 \quad (4.7)$$

é válida para cada x pertencente ao domínio da f .

Uma função $f(x)$ é chamada pseudo-invexa Dini superior sobre $S \subset \mathbb{R}^n$ se ela for pseudo-invexa Dini superior em cada ponto de S .

Notemos que a condição (4.7) é equivalente a seguinte condição

$$f(x) - f(u) < 0 \Rightarrow D^+ f(u, \eta(x, u)) < 0.$$

Se a função $f(x)$ satisfaz esta implicação com $S = V(u)$, onde $V(u)$ é uma vizinhança de u , então $f(x)$ é localmente pseudo-invexa em u .

Definição: 4.3.3 Uma função $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada quase-invexa Dini superior em u se existe uma função vetorial, $\eta : S \times S \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que a condição

$$f(x) - f(u) \leq 0 \Rightarrow D^+ f(u, \eta(x, u)) \leq 0 \quad (4.8)$$

é válida para cada x pertencente ao domínio da f .

Uma função $f(x)$ é chamada quase-invexa Dini superior sobre $S \subset \mathbb{R}^n$ se ela for quase-invexa Dini superior em cada ponto de S .

Se trocarmos $D^+ f(u, \eta(x, u))$ por $D_+ f(u, \eta(x, u))$ nas definições 4.3.1, 4.3.2 e 4.3.3 teremos invexidade Dini inferior, pseudo-invexidade Dini inferior e quase-invexidade Dini inferior, respectivamente.

Teorema 4.3.1 *Se f é invexa Dini superior em u então f é pseudo-invexa Dini superior em u .*

Prova: Como f é invexa Dini superior em u , temos que existe uma função vetorial $\eta(x, u)$, tal que a condição

$$f(x) - f(u) \geq D^+ f(u, \eta(x, u))$$

é válida para cada x pertencente ao domínio da f . Logo se $D^+ f(u, \eta(x, u)) \geq 0$ temos que $f(x) - f(u) \geq 0$ para cada x pertencente ao domínio da f . Portanto f é pseudo-invexa Dini superior em u . $\square$

Teorema 4.3.2 *Se f é invexa Dini superior em u então f é quase-invexa Dini superior em u .*

Prova: Como f é invexa Dini superior em u , temos que existe uma função vetorial $\eta(x, u)$, tal que a condição

$$f(x) - f(u) \geq D^+ f(u, \eta(x, u))$$

é válida para cada x pertencente ao domínio da f . Logo se $f(x) - f(u) \leq 0$ temos que $D^+ f(u, \eta(x, u)) \leq 0$ para cada x pertencente ao domínio da f . Portanto f é quase-invexa Dini superior em u . $\square$

Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto então qualquer que seja $d \in \mathbb{R}^n$ é uma direcção factível sujeito a S em u .

Definição: 4.3.4 *Dizemos que um ponto $u \in S$ é um ponto inf-estacionário de $f(x)$ sobre S se a condição $D_+ f(u; d) \geq 0$ é satisfeita em u para toda direcção d factível.*

Teorema 4.3.3 *Sejam a função $f(x)$ pseudo-invexa Dini superior sobre o conjunto convexo aberto $S \subset \mathbb{R}^n$ e $u \in S$ um ponto inf-estacionário de $f(x)$ sobre S . Então $f(x)$ possui um mínimo global sobre S .*

Prova: Suponhamos por contradição que existe um ponto $z \in S$ tal que $f(z) < f(u)$. Pela definição de pseudo-invexidade Dini segue que $D_+ f(u; \eta(z, u)) < 0$. Como $D_+ f(u; d) \geq 0$ para toda direcção factível e como $\eta(z, u)$ é factível, portanto o ponto u deixa de ser um ponto inf-estacionário de $f(x)$. Esta contradição completa a prova. $\square$

Ben-Israel e Mond [1] (também Hanson e Mond [18]) consideraram uma classe de funções chamada *pré-invexa*, para as quais existe uma função vetorial $\eta : S \times S \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que para cada $x, u \in S$, $u + \lambda\eta(x, u) \in S$ e tem-se

$$f(u + \lambda\eta(x, u)) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(u), \quad 0 \leq \lambda \leq 1. \quad (4.9)$$

Eles observaram que funções diferenciáveis satisfazendo (4.9) também satisfazem (4.3).

O próximo exemplo de Weir e Mond [35] (também de Weir e Jeyakumar [36]) é um exemplo simples de uma função que não é convexa mas é pré-invexa.

Exemplo 4.3.1 *Seja*

$$f(x) = -|x|,$$

f é pré-invexa com η dado por

$$\eta(x, y) = \begin{cases} x - y & \text{se } y \leq 0 \quad \text{e} \quad x \leq 0; \\ x - y & \text{se } y \geq 0 \quad \text{e} \quad x \geq 0; \\ y - x & \text{se } y > 0 \quad \text{e} \quad x < 0; \\ y - x & \text{se } y < 0 \quad \text{e} \quad x > 0. \end{cases}$$

O dois teoremas a seguir de Weir e Jeyakumar [36] nos diz que: como para funções convexas, todo mínimo local de uma função pré-invexa é um mínimo global e combinações lineares não-negativas de funções pré-invexas são pré-invexas.

Teorema 4.3.4 [36] *Seja $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ pré-invexa, $S \subset \mathbb{R}^n$. Então qualquer mínimo local de f é um mínimo global.*

Prova: Seja $p \in S$ um mínimo local de f , suponhamos que $f(x) < f(p)$ para algum $x \in S$. Como f é pré-invexa existe uma função vetorial $\eta : S \times S \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

$$\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(p) \geq f(p + \lambda\eta(x, p)), \quad 0 \leq \lambda \leq 1.$$

Assim

$$f(p + \lambda\eta(x, p)) - f(p) \leq \lambda[f(x) - f(p)] < 0$$

para $\lambda > 0$, arbitrário pequeno, contradizendo a otimalidade local de p . $\square$

Teorema 4.3.5 [36] *Seja $f_i : S \rightarrow \mathbb{R}$ pré-invexa (com o mesmo η) $i = 1, 2, \dots, k$. Então $\sum_{i=1}^k y_i f_i(x)$ é pré-invexa (com o mesmo η), onde $y_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, k$.*

Prova:

$$\begin{aligned} & \lambda \sum_{i=1}^k y_i f_i(x) + (1 - \lambda) \sum_{i=1}^k y_i f_i(y) = \\ &= \sum_{i=1}^k y_i \{ \lambda f_i(x) + (1 - \lambda) f_i(y) \} \geq \sum_{i=1}^k y_i f_i(y + \lambda\eta(x, y)). \end{aligned}$$

$\square$

Agora damos uma condição suficiente para a invexidade Dini.

Teorema 4.3.6 *Se f é pré-invexa em u então f é invexa Dini superior em u .*

Prova: Se f é pré-invexa em u então existe uma função vetorial, $\eta(x, u)$, tal que a condição,

$$f(u + t\eta(x, u)) - f(u) \leq t[f(x) - f(u)], \quad 0 \leq t \leq 1$$

é válida para cada x pertencente ao domínio da f . Supondo $t > 0$ e dividindo por t obtemos

$$\frac{f(u + t\eta(x, u)) - f(u)}{t} \leq f(x) - f(u)$$

tomando o $\limsup$ quando $t \rightarrow 0^+$ temos

$$\limsup_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(u + t\eta(x, u)) - f(u)}{t} \leq f(x) - f(u).$$

Logo f é invexa Dini superior em u . $\square$

Como vimos anteriormente no Exemplo 4.3.1 a função $f(x) = -|x|$ é pré-invexa, assim pelo resultado anterior f é invexa Dini, mas se definirmos invexidade com a derivada direcional de Clarke a função anterior deixa de ser invexa, conforme um resultado de Phuong, Sach e Yen ([29], Exemplo 4.1).

4.4 Quase-diferenciabilidade superior generalizada

Recentemente Komlosi [22] introduziu o conceito de quase-diferenciabilidade generalizada da seguinte maneira.

Definição: 4.4.1 Uma função $f(x)$ é chamada quase-diferenciável superior generalizada em u se a derivada de Dini direcional superior direita $D^+ f(u; d)$ é finita para cada $d \in \mathbb{R}^n$ e quase-convexa em d .

Recordamos que uma função $\varphi(d)$, $d \in \mathbb{R}^n$ é quase-convexa se e somente se $S_c = \{d \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(d) \leq c\}$ é convexo para cada $c \in \mathbb{R}$.

Uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é chamada positivamente homogênea se para todo $x \in \mathbb{R}^n$ temos

$$f(\lambda x) = \lambda f(x), \quad 0 \leq \lambda < \infty.$$

A envoltória semicontínua inferior de f é a função cujo epígrafo é o fecho em $\mathbb{R}^{n+1}$ do epígrafo de f .

O fecho de uma função convexa f é a envoltória semicontínua inferior de f se f não atinge o valor $-\infty$ em seu domínio, e é a função constante $-\infty$ se f é uma função convexa impropria tal que $f(x) = -\infty$ para algum x . Denotamos o fecho de f por $\text{cl}f$.

A propriedade mais importante de uma função quase-diferenciável superior generalizada é que sua $D^+ f(u; d)$ é uma função quase-convexa positivamente homogênea na variável d , assim o próximo resultado de Crouzeix produz uma ferramenta eficiente para analisarmos posteriormente propriedades de funções quase-diferenciáveis superiores generalizadas.

Lema 4.4.1 ([7], Proposição 12 e Corolário 13) Seja $\varphi(d)$ uma função quase-convexa positivamente homogênea de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Suponha que $\text{dom } \varphi \neq \emptyset$. Se uma das duas próximas condições é verdadeira:

$$(C1) \quad \varphi(d) \geq 0 \quad \text{para todo } d \in \mathbb{R}^n,$$

$$(C2) \quad \varphi(d) < 0 \quad \text{para todo } d \in \text{dom } \varphi$$

então $\varphi(d)$ é convexa.

Direções de descida: o vetor $d \in \mathbb{R}^n$ é chamado uma *direção de descida* da função $f(x)$ em u se existe $T > 0$ tal que para qualquer $0 < t < T$ temos $f(u + td) < f(u)$. As direções de descida de $f(x)$ em u formam um cone, o qual denotamos por $D_f(u)$.

Direções de descida fraca: o vetor $d \in \mathbb{R}^n$ é chamado uma *direção de descida fraca* da função $f(x)$ em u se para cada $T > 0$ existe $0 < t < T$ tal que $f(u + td) < f(u)$. As direções de descida fraca de $f(x)$ em u formam um cone, o qual denotamos por $WD_f(u)$.

A próxima inclusão é uma consequência imediata das definições:

$$D_f(u) \subset WD_f(u).$$

Introduzimos os seguintes cones

$$D_+(u) := \{d \in \mathbb{R}^n \mid D_+f(u; d) < 0\},$$

$$D^+(u) := \{d \in \mathbb{R}^n \mid D^+f(u; d) < 0\}.$$

O cone $D^+(u)$ ($D_+(u)$) é chamado o *cone de direções de descida Dini (fraca)* de $f(x)$ em u . O termo descida é justificado pelas seguintes inclusões:

$$D^+(u) \subset D_f(u) \subset WD_f(u) \quad \text{e} \quad D^+(u) \subset D_+(u) \subset WD_f(u). \quad (4.10)$$

Já que $D^+f(u; d)$ é quase-convexa, assim $D^+(u)$ é um cone convexo.

Separemos a parte negativa e não-negativa de $D^+f(u; d)$, definimos então as funções $\partial_-(d)$ e $\partial_+(d)$ a partir de $D^+f(u; d)$:

$$\partial_-(d) := \begin{cases} D^+f(u; d) & \text{se } d \in D^+(u); \\ +\infty & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

$$\partial_+(d) := \begin{cases} 0 & \text{se } d \in D^+(u); \\ D^+f(u; d) & \text{caso contrário.} \end{cases}$$



Não é difícil ver que os conjuntos de nível $\partial_-(d) \leq c$ e $\partial_+(d) \leq c$, $c \in \mathbb{R}$ são convexos, consequentemente $\partial_-(d)$ e $\partial_+(d)$ são funções quase-convexas e além disso elas também são positivamente homogêneas. De acordo com o Lema 4.4.1 $\partial_-(d)$ e $\partial_+(d)$ são funções convexas. Visto que $\text{dom } \partial_+ = \mathbb{R}^n$, portanto $\partial_+(d)$ é uma função positivamente homogênea contínua e assim, por um teorema bem conhecido da análise convexa ([31], Teorema 13.2) ela é a função suporte de um conjunto convexo fechado não vazio, o qual denotamos por $\partial_+ f(u)$, assim temos

$$\partial_+(d) = \sup\{\langle v, d \rangle \mid v \in \partial_+ f(u)\}. \quad (4.11)$$

Levando em conta que $0 \leq \partial_+(d) < +\infty$ para cada $d \in \mathbb{R}^n$ segue que $\partial_+ f(u)$ é compacto, $0 \in \partial_+ f(u)$ e a operação $\sup$ em (4.11) pode ser trocada com a operação $\max$ de acordo com o teorema de Weierstrass.

Infelizmente a função $\partial_-(d)$ não é em geral semicontínua inferior, assim não podemos aplicar para ela o teorema da representação citado acima. Podemos contornar esta desvantagem de $\partial_-(d)$ se trabalharmos com o fecho da função $\text{cl } \partial_-(d)$. A função $\text{cl } \partial_-(d)$ é uma função convexa positivamente homogênea semicontínua inferior e assim ela é a função suporte de um conjunto convexo fechado não vazio denotado por $\partial_- f(u)$, o que significa que

$$\text{cl } \partial_-(d) = \sup\{\langle w, d \rangle \mid w \in \partial_- f(u)\}. \quad (4.12)$$

Vale a pena mencionar que no caso de $D^+(u) = \emptyset$ temos $\partial_- f(u) = \mathbb{R}^n$.

Definição: 4.4.2 O conjunto convexo fechado $\partial_- f(u)$ é chamado de quase-subdiferencial de $f(x)$ em u .

Teorema 4.4.1 ([21], Teorema 2) Seja a função $f(x)$ quase-diferenciável superior generalizada em $u \in \mathbb{R}^n$. O ponto u é um ponto inf-estacionário local de $f(x)$ se e somente se temos que $0 \in \partial_- f(u)$.

Prova: Condição necessária: Suponhamos que $u \in \mathbb{R}^n$ seja um ponto inf-estacionário local de $f(x)$. Disto segue que $D^+(u) = \emptyset$ e por esta razão $\partial_- f(u) = \mathbb{R}^n$.

Condição suficiente: Suponhamos que $0 \in \partial_- f(u)$. Então para todo $d \in \mathbb{R}^n$ temos a seguinte desigualdade

$$\text{cl}\partial_-(d) = \sup\{\langle w, d \rangle \mid w \in \partial_- f(u)\} \geq 0. \quad (4.13)$$

Suponhamos por contradição que o ponto u não é um ponto inf-estacionário local de $f(x)$, assim o cone convexo $D^+(u)$ não é vazio e então o seu interior relativo também não é vazio. Seja $d_0 \in \text{ri}D^+(u)$ arbitrário ($\text{ri}D^+(u)$ denota o interior relativo de $D^+(u)$). Como o $\text{cl}\partial_-(d)$ coincide com $\partial_-(d)$ sobre $\text{ri dom } \partial_-(d) = \text{ri}D^+(u)$ (cf. ([31], Teorema 7.4)) portanto temos

$$\text{cl}\partial_-(d_0) = \partial_-(d_0) = D^+f(u; d_0) < 0,$$

o que contradiz (4.13) logo u é um ponto inf-estacionário local de $f(x)$. $\square$

O próximo teorema é uma versão modificada do que pode ser encontrado em ([21], Teorema 3).

Teorema 4.4.2 *Seja a função $f(x)$ quase-diferenciável superior generalizada em $u \in \mathbb{R}^n$. Então as seguintes afirmações são verdadeiras.*

i) $0 \in \partial_- f(u)$ é uma condição necessária para u ser ponto de mínimo local de $f(x)$.

ii) Se em adição $f(x)$ é localmente pseudo-invexa Dini superior em u então $0 \in \partial_- f(u)$ é uma condição suficiente para u ser ponto de mínimo local de $f(x)$.

Prova: Seja $u \in \mathbb{R}^n$ um ponto de mínimo local de $f(x)$. Então u é um ponto inf-estacionário local de $f(x)$ e pelo teorema 4.4.1 temos a inclusão $0 \in \partial_- f(u)$, assim i) esta provado.

A partir da inclusão $0 \in \partial_- f(u)$ pelo teorema 4.4.1 segue que u é um ponto inf-estacionário de $f(x)$ e como por hipótese $f(x)$ é localmente pseudo-invexa Dini superior em u , pelo teorema 4.3.3 segue o resultado desejado. $\square$

4.5 Quase-diferenciabilidade superior generalizada regular

Definição: 4.5.1 Uma função $f(x)$ quase-diferenciável superior generalizada em $u \in \mathbb{R}^n$ é chamada regular se ela possui as seguintes propriedades:

Ri) $D^+f(u; d)$ é semicontínua inferior em d ,

Rii) o cone convexo $D^+(u)$ é aberto.

Teorema 4.5.1 ([15], Teorema 4.7) Seja a função $f(x)$ contínua e quase-conveza em volta de $u \in \mathbb{R}^n$. Se $D^+f(u; d)$ é uma função semicontínua inferior finita na variável d então $f(x)$ é quase-diferenciável superior generalizada regular em u .

Aplicando um resultado de Rockafellar ([31], Teorema 7.5) e levando em conta a continuidade de $\partial_+(d)$ temos

$$cl\partial_-(d) := \begin{cases} D^+f(u; d) & \text{se } d \in clD^+(u); \\ +\infty & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (4.14)$$

$$\partial_+(d) := \begin{cases} 0 & \text{se } d \in clD^+(u); \\ D^+f(u; d) & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (4.15)$$

Combinando estes fatos com (4.11) e (4.12) obtemos

$$D^+f(u; d) = \begin{cases} \sup\{\langle d, g \rangle : g \in \partial_-f(u)\} & \text{se } d \in clD^+(u), \\ \max\{\langle d, v \rangle : v \in \partial_+f(u)\} & \text{se } d \notin clD^+(u), \end{cases} \quad (4.16)$$

$$\sup\{\langle d, g \rangle : g \in \partial_-f(u)\} = +\infty, \quad \text{se } d \notin clD^+(u), \quad (4.17)$$

$$\max\{\langle d, v \rangle : v \in \partial_+f(u)\} = 0, \quad \text{se } d \in clD^+(u). \quad (4.18)$$

Aplicando o Lema 3.2.1 para funções quase-diferenciáveis superiores generalizadas obtemos o seguinte resultado.

Teorema 4.5.2 ([6], **Proposição 11** e [22], **Teorema 3.13**) *Seja a função $h_j(x)$, $j = 1, 2, \dots, k$ contínuas direcionalmente e quase-diferenciáveis superiores generalizadas (regular) em $u \in \mathbb{R}^n$. Então a max-função*

$$h(x) = \max\{h_j(x) : j = 1, \dots, k\}$$

é quase-diferenciável superior generalizada (regular) em u e

$$\partial_- h(u) = \text{conv} \cup \{\partial_- h_i(u) : i \in I(u)\},$$

$$\partial_+ h(u) = \text{conv} \cup \{\partial_+ h_i(u) : i \in I(u)\}$$

(conv M denota a envoltória convexa do conjunto M).

Agora estudaremos condições necessárias de otimalidade para os seguintes problemas:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } f(x) \\ &\text{sujeito a } x \in C, \quad C \subset \mathbb{R}^n. \end{aligned} \quad (P1)$$

ou

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } f(x) \\ &\text{sujeito a } C = \{x \in \mathbb{R}^n : g_i(x) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m\}. \end{aligned} \quad (P2)$$

Um dos propósitos principais da teoria de otimização é caracterizar a solução ótima local dos problemas (P1) e (P2).

Os resultados obtidos para estes problemas dependem essencialmente das propriedades impostas sobre as funções envolvidas, portanto, existe uma grande variedade de resultados obtidos para estes problemas dependendo das condições impostas sobre as funções envolvidas.

Derivada direcional, uma certa classe de derivadas generalizadas e a derivada de Clarke são algumas propriedades "características" tal como linearidade, convexidade, etc.

Para funções direcionalmente diferenciáveis a derivada direcional é linear em função da direção. Para funções convexas ou quase-diferenciáveis a derivada direcional e para funções Lipschitz localmente a derivada de Clarke é convexa em função da direção ([1, 31]).

Capítulo 5

Condições de otimalidade

5.1 Problema (P1)

Agora estudaremos condições necessárias de otimalidade para os seguintes problemas:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } f(x) \\ &\text{sujeito a } x \in C, \quad C \subset \mathbb{R}^n, \end{aligned} \quad (P1)$$

ou

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } f(x) \\ &\text{sujeito a } C = \{x \in \mathbb{R}^n : g_j(x) \leq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m\}. \end{aligned} \quad (P2)$$

Um dos propósitos principais da teoria de otimização é caracterizar a solução ótima local dos problemas (P1) e (P2).

Os resultados obtidos para estes problemas dependem crucialmente das propriedades impostas sobre as funções envolvidas, contudo, existe uma idéia comum na grande maioria das diferentes aproximações, isto é, a aproximação das funções do problema por uma derivada apropriada em um dado ponto.

Derivada significa, neste contexto, uma certa classe de derivada direcional generalizada e apropriada significa que a derivada possui algumas propriedades “satisfatórias” tal como linearidade, convexidade, continuidade, etc.

Para funções diferenciáveis a derivada direcional é linear em função da direção. Para funções convexas ou quase-diferenciáveis a derivada direcional e para funções Lipschitz localmente a derivada direcional de Clarke é convexa em função da direção [3, 31].

Estes exemplos, com muitos outros, mostra que a maioria do desenvolvimento de classes de problemas de otimização são aqueles que admitem uma certa classe de derivadas direcionais generalizadas convexas. A razão disto parece ser muito simples: os resultados da análise convexa garantem uma enorme quantidade de propriedades para estas classes.

Recentemente alguns autores fizeram tentativas para estender a estrutura de convexidade trocando a suposição de convexidade pela condição de quase-convexidade e a derivada direcional pela derivada Dini direcional superior direita $D^+ f(a; d)$ [6, 7, 9, 21, 22].

5.1 Problema (P1)

Estudaremos primeiro o problema (P1). Seja a uma solução factível deste problema, assim $a \in C$.

Direções factíveis: o vetor $d \in \mathbb{R}^n$ é chamado uma *direção factível* sujeito a C em a se existe $T > 0$ tal que para qualquer $0 < t < T$ temos $a + td \in C$. As direções factíveis de C em a formam um cone denotado por $C(a)$.

Por meio das direções de descida fraca podemos formular a seguinte condição de otimalidade.

Condição de otimalidade necessária básica: se $a \in C$ é uma solução ótima local do problema (P1) então a próxima condição deve ser verdadeira:

$$WD_f(a) \cap C(a) = \emptyset. \quad (5.1)$$

Apesar desta condição parecer ser bastante simples uma descrição conveniente dos cones $WD_f(a)$ e $C(a)$, contudo, não é em geral uma tarefa fácil, para obtermos condições de otimalidade mais úteis, uma maneira simples é aproximarmos o cone $WD_f(a)$ por uma aproximação da função objetivo $f(x)$ em a com alguma classe de derivada generalizada.

Estudaremos o caso em que as derivadas de Dini direcionais são usadas para aproximarmos a função objetivo.

Pelas inclusões (4.10) o cone $D^+(a)$ é uma aproximação interna para $D_f(a)$ e $WD_f(a)$ enquanto que $D^+(a)$ e $D_+(a)$ produzem aproximações internas para $WD_f(a)$.

Por isso as próximas condições são necessárias para $a \in C$ ser uma solução ótima local para o problema (P1):

$$D_+(a) \cap C(a) = \emptyset, \quad (5.2)$$

$$D^+(a) \cap C(a) = \emptyset. \quad (5.3)$$

Vale a pena mencionar que se a função objetivo $f(x)$ é pseudo-invexa Dini inferior (localmente) em a sujeito a C então a condição (5.2) é suficiente para a ser uma solução ótima (local) do problema (P1). O mesmo é verdadeiro para a condição (5.3) se $f(x)$ é pseudo-invexa Dini superior (localmente) em a sujeito a C .

O próximo teorema que resume as afirmações anteriores é uma versão modificada do que pode ser encontrado em ([9], Teorema 20, Teorema 21).

Teorema 5.1.1

- i) A condição (5.2) é necessária para $a \in C$ ser uma solução ótima local do problema (P1).
- ii) A condição (5.2) é suficiente para $a \in C$ ser uma solução ótima (local) do problema (P1) se $f(x)$ é pseudo-invexa Dini inferior (localmente) em a sujeito ao conjunto convexo aberto C .
- iii) A condição (5.3) é suficiente para $a \in C$ ser uma solução ótima (local) do problema (P1) se $f(x)$ é pseudo-invexa Dini superior (localmente) em a sujeito ao conjunto convexo aberto C .

Estudaremos a seguir a forma geométrica da condição de otimalidade (5.3) para o problema (P1) em que a função objetivo $f(x)$ é quase-diferenciável superior generalizada. Para isto introduziremos alguns conceitos geométricos. Por simplicidade, suponhamos que o conjunto factível C é localmente convexo em $a \in C$, o que significa que existe uma vizinhança G de a tal que o conjunto $C \cap G$ é convexo. Neste caso $C(a)$, o conjunto das direções factíveis em a é um cone convexo. Sejam introduzidas as seguintes noções:

Cone tangente: o cone convexo fechado

$$T_C(a) = \text{cl } C(a)$$

é chamado o *cone tangente* a C em a .

Cone normal: isto é o cone polar do cone tangente $T_C(a)$, que é

$$N_C(a) = T_C(a)^* = \{z : \langle z, d \rangle \leq 0, \text{ para todo } d \in T_C(a)\}.$$

Separabilidade estrita: Os conjuntos $C_1, C_2 \subset \mathbb{R}^n$ são chamados *estritamente separáveis* se existe um hiperplano e um número positivo $\beta > 0$ tal que os conjuntos $C_1 + \beta B$ e $C_2 + \beta B$ pertencem a sub-espacos diferentes determinados pelo hiperplano dado. Aqui B denota a bola unitaria do $\mathbb{R}^n$.

Proposição 5.1.1 ([31], Teoremas 11.1 e 11.4) *Os conjuntos não vazios M_1 e M_2 são estritamente separáveis se e somente se existe um vetor $d \in \mathbb{R}^n$ tal que as seguintes desigualdades valem:*

$$\inf\{\langle u, d \rangle : u \in M_1\} > \sup\{\langle z, d \rangle : z \in M_2\}. \quad (5.4)$$

Os conjuntos convexos não vazios C_1 e C_2 são estritamente separáveis se e somente se a desigualdade

$$0 < \inf\{\|u - z\| : u \in C_1, z \in C_2\}, \quad (5.5)$$

é satisfeita, a qual é equivalente a

$$0 \notin \text{cl}(C_1 - C_2). \quad (5.6)$$

Em virtude da condição (Rii) da definição 4.5.1, a condição (5.3)

$$D^+(a) \cap C(a) = \emptyset$$

é equivalente para funções quase-diferenciáveis superiores generalizadas regulares a condição

$$D^+(a) \cap T_C(a) = \emptyset. \quad (5.7)$$

Teorema 5.1.2 ([22], Teorema 2.3) *Seja a função $f(x)$ quase-diferenciável superior generalizada regular em $a \in C$. Então as seguintes condições são equivalentes:*

$$QCi) \quad D^+(a) \cap T_C(a) \neq \emptyset,$$

$$QCii) \quad -\partial_- f(a) \text{ e } N_C(a) \text{ são estritamente separáveis,}$$

$$QCiii) \quad 0 < m = \inf \{ \|z + g\| : z \in N_C(a), g \in \partial_- f(a) \},$$

$$QCiv) \quad 0 \notin \text{cl}[N_C(a) + \partial_- f(a)].$$

Prova: A equivalência das condições (QCii), (QCiii) e (QCiv) segue imediatamente da Proposição 5.1.1. Para provar a implicação (QCi) $\Rightarrow$ (QCiii) provemos que para qualquer

$$d \in D^+(a) \cap T_C(a) \cap S \tag{5.8}$$

temos

$$m \geq -D_+ f(a; d) > 0. \tag{5.9}$$

Suponhamos que $d, \|d\| = 1$, satisfaz a inclusão (5.8) e $z \in N_C(a), g \in \partial_- f(a)$ arbitrários. Então por um lado temos que $\langle z, d \rangle \leq 0$ e por outro lado, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz e (4.16) temos que

$$\| -g - z \| \geq \langle -g - z, d \rangle = -\langle g, d \rangle - \langle z, d \rangle \geq -\langle g, d \rangle \geq -D^+(a; d),$$

o que prova (5.9).

Agora provemos a implicação contrária (QCiii) $\Rightarrow$ (QCi). Suponhamos que $m > 0$. Seja w o elemento de menor norma do conjunto convexo fechado $\text{cl}[N_C(a) + \partial_- f(a)]$. É óbvio que $\|w\| = m$. Introduzimos o vetor normalizado s como sendo:

$$s = -\frac{w}{\|w\|}. \tag{5.10}$$

Mostremos que

$$s \in D^+(a) \cap T_C(a) \cap S. \tag{5.11}$$

Segue a partir da propriedade de menor norma de w que as seguintes desigualdades valem para qualquer $z \in N_C(a)$ e $g \in \partial_- f(a)$ (cf. ([25], Teoremas 4.2.7 e 4.2.9))

$$\langle g + z - w, w \rangle \geq 0 \quad \text{e} \quad \langle g + z, w \rangle \geq \langle w, w \rangle.$$

Disto temos que $\langle g + z, s \rangle \leq -m$, ou equivalentemente que

$$\langle g, s \rangle \leq -m - \langle z, s \rangle. \quad (5.12)$$

Como $N_C(a)$ é um cone, (5.12) deve ser satisfeita para tz ao invés de z , assim para qualquer $t > 0$ temos que

$$\langle g, s \rangle \leq [-\langle z, s \rangle]t - m, \quad t > 0.$$

Disto segue imediatamente que

$$\langle z, s \rangle \leq 0 \quad \text{para qualquer} \quad z \in N_C(a) \quad (5.13)$$

e

$$\langle g, s \rangle \leq -m < 0 \quad \text{para qualquer} \quad g \in \partial_- f(a) \quad (5.14)$$

De (5.13) temos que $s \in N_C(a)^* = T_C(a)$ enquanto que de (4.16), (4.17) e (5.14) temos

$$D^+(a; s) \leq -m < 0, \quad (5.15)$$

o que prova que $s \in D^+(a)$, consequentemente o vetor s satisfaz a inclusão (5.11). A prova esta completa. $\square$

O próximo teorema expõe a existência de direção de máxima descida Dini normalizada.

Teorema 5.1.3 ([22], Teorema 2.5) *Seja a condição*

$$0 \notin \text{cl}[N_C(a) + \partial_- f(a)]$$

satisfeita. Seja w o elemento de menor norma do conjunto convexo fechado $\text{cl}[N_C(a) + \partial_- f(a)]$. Seja s o vetor definido por

$$s = -\frac{w}{\|w\|}.$$

Então

$$s \in D^+(a) \cap T_C(a) \cap S \quad (5.16)$$

e se

$$p \in D^+(a) \cap T_C(a) \cap S, p \neq s,$$

então

$$D^+f(a; p) > D^+f(a; s) = -m. \quad (5.17)$$

Prova: A afirmação (5.16) segue da prova do Teorema 5.1.2. Seja p um vetor arbitrário satisfazendo a hipótese. Como $D^+f(a; p) < 0$ por (4.16) para cada $g \in \partial_-f(a)$ temos que $\langle g, p \rangle \leq D^+f(a; p)$, conseqüentemente, sabemos que $\langle z, p \rangle \leq 0$ para qualquer $z \in N_C(a)$ daí segue que

$$\langle g + z, p \rangle \leq D^+f(a; p) \quad (5.18)$$

para qualquer $g \in \partial_-f(a)$ e $z \in N_C(a)$. Como w é um ponto de acumulação do conjunto $N_C(a) + \partial_-f(a)$ segue de (5.18) que

$$\langle w, p \rangle = -m \langle s, p \rangle \leq D^+f(a; p). \quad (5.19)$$

Da desigualdade de Cauchy-Schwarz temos que $\langle s, p \rangle > -1$ e desta desigualdade junto com (5.19) temos que

$$D^+f(a; p) > -m. \quad (5.20)$$

Comparando (5.14) e (5.9) temos que $D^+f(a; s) = -m$. Combinando esta equação com (5.20) obtemos (5.17). A prova esta completa. $\square$

Na condição suficiente do próximo teorema, o qual é uma versão modificada de ([21], Corolário 2), a hipótese de f ser pseudo-convexa Dini superior foi trocada com a hipótese de pseudo-invexidade Dini superior.

Teorema 5.1.4 *Seja $f(x)$ uma função quase-diferenciável superior generalizada regular em $a \in C$. Se a é uma solução ótima local do problema (P1) então a seguinte condição é válida:*

$$0 \in cl[N_C(a) + \partial_-f(a)] \quad (5.21)$$

Se em adição $f(x)$ é pseudo-invexa Dini superior (localmente) em a sujeito a C então a condição (5.21) é suficiente para a ser uma solução ótima (local) de (P1).

Prova: A necessidade de (5.21) segue dos Teoremas acima e da condição (5.7). Provemos a condição suficiente para f pseudo-invexa Dini superior.

Suponhamos por contradição que existe $z \in C$ tal que $f(z) < f(a)$. Pela definição de pseudo-invexidade Dini superior temos que $D^+f(a; d) < 0$, onde $d = \eta(x, a) \in C(a)$. Como $d \in D^+(a)$ e não é difícil ver que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sup\{\langle v, d \rangle : v \in \partial_- f(a) + N_C(a)\} = \sup\{\langle w, d \rangle : w \in \partial_- f(a)\} = \\ &= \text{cl } \partial_-(d) = D^+f(a; d) < 0. \end{aligned}$$

Esta contradição completa a prova. □

5.2 Problema (P2)

O critério de otimalidade (5.1) é adequado para obtermos criterios de otimalidade para o problema (P2).

Uma maneira para obtermos estes criterios é a seguinte: É óbvio que se K é uma aproximação interna de $C(a)$, isto é se $K \subset C(a)$, então as condições

$$K \cap WD_f(a) = \emptyset, \quad K \cap D_+(a) = \emptyset \quad \text{e} \quad K \cap D^+(a) = \emptyset$$

são todas condições necessarias locais de otimalidade para o problema (P1).

Agora construiremos uma aproximação interna de $C(a)$ para o problema (P2) usando as derivadas de Dini direcionais das funções restrições.

Recordamos que a restrição $g_j(x) \leq 0$ é chamada *ativa* em a se $g_j(a) = 0$. O conjunto de índices $\{1, 2, \dots, m\}$ é denotado por I e $I(a) \subset I$ denota o conjunto de índices das restrições ativas em a . Consideremos o seguinte cone:

$$K = \{d \in \mathbb{R}^n : D^+g_j(a; d) < +\infty, j \in I; D^+g_j(a; d) < 0, j \in I(a)\}.$$

Teorema 5.2.1 ([9], Corolário 23) *O cone K é uma aproximação interna de $C(a)$, consequentemente*

$$K \cap WD_f(a) = \emptyset$$

é uma condição necessária para a minimização do problema (P2).

Prova: Seja $d \in K$ arbitrário. Para $j \in I(a)$ a condição $D^+g_j(a; d) < 0$ e para $j \in I$, $j \notin I(a)$, a condição $D^+g_j(a; d) < +\infty$ implicam que existe $T_j > 0$, $j \in I$ tal que para todo $0 < t < T_j$ temos $g_j(a + td) < 0$. Isto significa que $d \in C(a)$. $\square$

As vezes é melhor transformar o problema de minimização (P2) em um problema de minimização sem restrições. Uma maneira para fazer isto é a seguinte.

Associamos a (P2) o seguinte problema:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } h(x) \quad x \in \mathbb{R}^n \\ &h(x) = \max\{f(x) - f(a), g_1(x), \dots, g_m(x)\}. \end{aligned} \tag{P3}$$

O parentesco entre (P2) e (P3) esta descrito no próximo lema dado por komlosi ([15], Lema 5.6) o qual é uma variante do que pode ser encontrado em ([6], Proposição 8).

Lema 5.2.1

- i) *Se $a \in \mathbb{R}^n$ é uma solução ótima de (P2) então a também é uma solução ótima de (P3).*
- ii) *Suponhamos que $f(x)$ é semicontínua superior direcionalmente e as funções restrições $g_j(x)$ são todas quase-convexas e semi-estritamente quase-convexas sobre C . Além disso suponhamos que existe $z \in C$ tal que $g_j(z) < 0$ para todo j . Se a é uma solução ótima de (P3) então a é uma solução ótima de (P2).*

Prova: i) Seja $a \in C$ uma solução ótima de (P2). Então $h(a) = 0$. Suponhamos que a não é ótimo para (P3). Então existe $u \in \mathbb{R}^n$ tal que $h(u) < h(a) = 0$. Disto segue que $f(u) < f(a)$ e $u \in C$, o que contradiz a otimalidade de a . Esta contradição prova que a também é ótimo para (P3).

ii) Seja $a \in C$ uma solução ótima de (P3). Suponhamos que a não é ótimo para (P2). Então existe $u \in \mathbb{R}^n$ tal que $f(u) < f(a)$ e $g_j(u) \leq 0$ para todo j . Restringimos as funções do problema para o seguimento de linha $[z, u]$. Como as funções restrições são quase-convexas e semi-estritamente quase-convexas, logo $g_j(x) < 0$ para todo $x \in (z, u)$ e para todo j . Como $f(x)$ é semicontínua superior em u , existe $b \in (z, u)$ tal que $f(b) < f(a)$. Como $g_j(b) < 0$ para cada j temos que $h(b) < 0 \leq h(a)$, o que contudo, contradiz a otimalidade de a . Esta contradição prova ii). $\square$

Combinando o Lema 5.2.1 e os Teoremas 4.1.1, 4.4.2 e 4.5.2 temos a seguinte condição de otimalidade para o problema (P2).

Teorema 5.2.2 ([6], Proposição 12) *Sejam as funções $f(x)$, $g_j(x)$, $j = 1, 2, \dots, m$ quase-diferenciáveis generalizadas em a e contínuas direcionalmente em alguma vizinhança de a .*

i) *Se a é uma solução ótima do problema (P2) então temos*

$$0 \in \text{conv}[\{\cup \partial_- g_j(a) : j \in I(a)\} \cup \partial_- f(a)]. \quad (5.22)$$

ii) *Se as funções restrições são PCX(UDini) sobre C e Slater regular e f é PCX(UDini) em a sujeito a C então a condição (5.22) é suficiente para a ser uma solução para (P2).*

Através do Teorema 4.5.2 é possível expressar o cone normal $N_C(a)$ em termos de quase-subdiferenciais das funções restrições.

Teorema 5.2.3 ([22], Teorema 3.14) *Sejam as funções restrições em (P2) contínuas direcionalmente e a condição de regularidade Slater satisfeita. Sejam ainda as restrições ativas quase-diferenciáveis superiores generalizadas e PCX(UDini) em a . Então a igualdade a seguir é válida:*

$$N_C(a) = \text{cl cone conv}\{\cup \partial_- g_j(a) : j \in I(a)\}.$$

Combinando este resultado com o Teorema 5.1.4 obtemos a seguinte condição de otimalidade tipo Kuhn-Tucker.

Teorema 5.2.4 ([22], Teorema 4.2) *Sejam as funções restrições e a função objetivo de (P2) quase-diferenciáveis superiores generalizadas e quase-diferenciável superior generalizada regular em $a \in C$, respectivamente. Sejam as funções restrições contínuas direcionalmente em a e Slater regular sobre C . Sejam ainda as restrições ativas $PCX(UDini)$ em a . Então*

$$0 \in cl[\partial_- f(a) + \text{cone conv } \{\cup \partial_- g_j(a) : j \in I(a)\}] \quad (5.23)$$

é uma condição necessária para a ser uma solução ótima local do problema (P2).

Se em adição $f(x)$ é $PCX(UDini)$ (localmente) em a sujeito a C então a condição (5.23) é suficiente para a ser uma solução ótima (local) de (P2).

[4] Castagnoli, E., *Estensioni di alcuni classici teoremi dell'analisi al 2837 di funzioni non derivabili*, Int. Mat. Fin. Univ. di Parma, serie II, 11, 1983.

[5] Clarke, F.H., *Optimization and Nonsmooth Analysis*, John Wiley, New York, 1983.

[6] Crouzeix, B.D., *Lower functions and constrained local minima*, Bull. Austral. Math. Soc. 24 (1981), 357-366.

[7] Crouzeix, B.D., e Glover, B.M., *Lower functions and duality*, J. Austral. Math. Soc. Ser. A, 39 (1985), 1-22.

[8] Crouzeix, J.P., *Some differentiability properties of quasiconvex functions on $\mathbb{R}^n$* , in Optimization and Optimal Control, A. Auslender, W. Oettli, J. Stoer (eds.), Proceedings of a conference held at Oberwolfach, March 16/22/1984, Springer Verlag, Berlin, 1984, 9-20.

[9] Crouzeix, J.P., *Continuity and differentiability properties of quasiconvex functions on $\mathbb{R}^n$* , in: S. Schaible, W.T. Ziemba (eds.), Generalized convexity in optimization and economics, Academic Press, New York, 1981, 109-130.

[10] Demingov, V.F., e Vasiliev, L.V., *Nondifferentiable Optimization*, Optimization Software, Inc., New York, 1983.

[11] Diewert, W.E., *Alternative characterizations of all kind of quasiconvexity in the non-differentiable case with applications to nonsmooth programming*, in: S. Schaible, W.T. Ziemba (eds.), Generalized Convexity in Optimization and Economics, Academic Press, New York, 1981.

Bibliografia

- [1] Ben-Israel, A., e Mond, B., *What is invexity ?*, J. Austral. Math. Soc. Ser. B, 28 (1986), 1-9.
- [2] Castagnoli, E., *Estensioni di alcuni classici teoremi dell'analisi al caso di funzioni non derivabili*, Ist. Mat. Fin. Univ. di Parma, serie II, 11, 1983.
- [3] Clarke, F.H., *Optimization and Nonsmooth Analysis*, John Wiley, New York, 1983.
- [4] Craven, B.D., *Invex functions and constrained local minima*, Bull. Austral. Math. Soc. 24 (1981), 357-366.
- [5] Craven, B.D., e Glover, B.M., *Invex functions and duality*, J. Austral. Math. Soc. Ser. A, 39 (1985), 1-20.
- [6] Crouzeix, J.P., *Some differentiability properties of quasiconvex functions on $\mathbb{R}^n$* , in Optimization and Optimal Control, A. Auslender, W. Oettli, J. Stoer (eds.). Proceedings of a conference held at Oberwolfach, March 16/22/1980, Springer Verlag, Berlin, 1981, 9-20.
- [7] Crouzeix, J.P., *Continuity and differentiability properties of quasiconvex functions on $\mathbb{R}^n$* . In: S. Schaible, W.T. Ziemba (eds.): Generalized concavity in optimization and economics. Academic Press, New York, 1981, 109-130.
- [8] Demyanov, V.F., e Vasiliev, L.V., *Nondifferentiable Optimization*, Optimization Software, Inc., New York, 1985.
- [9] Diewert, W.E., *Alternative characterizations of six kind of quasiconcavity in the non-differentiable case with applications to nonsmooth programming*. In: S. Schaible, W.T. Ziemba (eds.): Generalized Concavity in Optimization and Economics. Academic Press, New York, 1981.



- [10] Dini, U., *Grundlagen fur eine Theorie der Funktionen einer veranderlichen reellen Grosse* B.E. Teubner, 1982. New Italian edition: *Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali*, Pitagora, 1990.
- [11] Ekeland, I., e Lebourg, G., *Generic Fréchet differentiability and perturbed optimization problems*, Trans. Amer. Math. Soc. 224, 1976, 193-215.
- [12] Elster, K.H., e Thierfelder, J., *Abstract cone approximation and generalized differentiability in nonsmooth optimization*, Optimization 19, 1988, 315-341.
- [13] Flett, T., *Differential Analysis*, Cambridge Univ. Press, 1970.
- [14] Giorgi, G., e Komlosi, S., *Dini Derivatives in Optimization - Part I*, Rivista di Matematica per le Scienze Economiche e Sociali, 15, 1993 n.1, 3-30.
- [15] Giorgi, G., e Komlosi, S., *Dini Derivatives in Optimization - Part II*, Rivista di Matematica per le Scienze Economiche e Sociali, 15, 1993 n.2, 3-24.
- [16] Goodner, D.B., *Mean value theorems for functions with finite derivatives*, Amer. Math. Monthly 67, 1960, 852-855.
- [17] Hanson, M.A., *On sufficiency of the Kuhn-Tucker conditions*, J. Math. Anal. Appl. 80 (1981), 545-550.
- [18] Hanson, M.A., e Mond, B., *Convex Transformable Programming Problems and Invertibility*, J. Inf. Opt. Sci. 8 (1987), 201-207.
- [19] Karamardian, S., *Strictly quasiconvex (concave) functions and duality in mathematical programming*, J. Math. Anal. Appl. 20, 1967, 344-358.
- [20] Komlosi, S., *Some properties of nondifferentiable pseudoconvex functions*, Math. Programming 26, 1983, 232-237.
- [21] Komlosi, S., *On a possible generalization of Pshenichnyi's quasidifferentiability*, Optimization 21, 1990, 3-11.
- [22] Komlosi, S., *Quasiconvex first order approximations and Kuhn-Tucker type optimality conditions*, E.J.O.R. 65, 1993, 327-335.
- [23] Mangasarian, O.L., *Nonlinear Programming*, Classics in Applied Math., SIAM, 1995.

- [24] Mangasarian, O.L., *Pseudoconvex functions*, SIAM Journal on Control 3, 1965, 281-290.
- [25] Martos, B., *Nonlinear Programming: Theory and Methods*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1975.
- [26] McShane, E.J., *Integration*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1944.
- [27] Penot, J.P., *Calcul sous-différentiel et optimization*, J. Funct. Analysis 27, 1978, 248-276.
- [28] Penot, J.P., *On the mean value theorems*, Optimization 19, 1988, 147-156.
- [29] Phuong, T.D., Sach, P.H., e Yen, N.D., *Strit Lower Semicontinuity of the Sets and Inverity of a Locally Lipschitz Function*, Journal of Optimization Theory and Applications 87, 3, 1995, 579-594.
- [30] Reiland, T.W., *Nonsmooth invexity*, Bull. Austral. Math. Soc. 42, 1990, 437-446.
- [31] Rockafellar, R.T., *Convex Analysis*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1970.
- [32] Scheefer, L., *Zur Theorie der stetigen Funcktionen einer reelen veranderlichen*, Acta Mathematica 5, 1884, 183-194.
- [33] Sheffler, H.P., *Mean value properties of nondifferentiable functions and their application in nonsmooth analysis*, Optimization 20, 1989, 743-759.
- [34] Slobodnik, S.G., *The continuity and differential properties of functions*, Dis. D. Phil. Moscou, 1996.
- [35] Weir, T., e Mond, B., *Pre-invex Functions in Multiple Objective Optimization*, J. Math. Analysis and Aplications 136 (1988), 29-38.
- [36] Weir, T., e Jeyakumar, V., *A Class of Nonconvex Functions and Mathematical Programming*, Bull. Austral. Math. Soc. 38 (1988), 177-189.

