



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
Câmpus de São José do Rio Preto

Rodrigo Barbosa Moreira

Um Princípio do Máximo Assintótico e uma Condição de Qualificação
Associada para Controle Ótimo com Restrições Mistas

São José do Rio Preto

2024

Rodrigo Barbosa Moreira

**Um Princípio do Máximo Assintótico e uma Condição de Qualificação
Associada para Controle Ótimo com Restrições Mistas**

Tese apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CAPES

Orientador: Prof. Dr. Valeriano Antunes de Oliveira

São José do Rio Preto

2024

M838p

Moreira, Rodrigo Barbosa

Um princípio do máximo assintótico e uma condição de qualificação associada para controle ótimo com restrições mistas / Rodrigo Barbosa

Moreira. -- São José do Rio Preto, 2024

106 p. : il.

Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto

Orientador: Valeriano Antunes de Oliveira

1. Condições de qualificação. 2. Dinâmica e custo não suaves. 3. Método de Lagrangiano aumentado. 4. Princípio do Máximo Fraco Assintótico. 5. Restrições mistas. I. Título.

Sistema de geração automática de fichas catalográficas da Unesp. Biblioteca do Instituto de Biociências Letras e Ciências Exatas, São José do Rio Preto. Dados fornecidos pelo autor(a).

Essa ficha não pode ser modificada.

Rodrigo Barbosa Moreira

**Um Princípio do Máximo Assintótico e uma Condição de Qualificação
Associada para Controle Ótimo com Restrições Mistas**

Tese apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Matemática, junto ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Câmpus de São José do Rio Preto.

Financiadora: CAPES

Comissão Examinadora

Prof. Dr. Valeriano Antunes de Oliveira
UNESP - São José do Rio Preto
Orientador

Prof. Dr. Geraldo Nunes Silva
UNESP - São José do Rio Preto

Prof. Dr. Roberto Andreani
UNICAMP - Campinas

Prof^a. Dr^a. María Soledad Aronna
FGV - Rio de Janeiro

Prof. Dr. Eduardo Fontoura Costa
USP - São Carlos

São José do Rio Preto
20 de fevereiro de 2024

Dedico este trabalho
àqueles que não tiveram
as mesmas oportunidades que eu tive.

AGRADECIMENTOS

Desejo iniciar meus agradecimentos expressando profunda gratidão a todos que, direta ou indiretamente, contribuíram para a concretização desta tese. Saibam que cada um de vocês tiveram um papel muito importante para que esse sonho se tornasse realidade.

Agradeço à minha família, em especial à minha namorada e companheira de todas as horas, Mônica. Agradeço por todo o carinho, incentivo, paciência e companheirismo dedicados a mim, tanto nos momentos felizes quanto nos desafios enfrentados. À minha mãe, Diulina, ao meu pai, Raimundo, à minha irmã, Rafaela, aos meus primos, aos meus tios e aos meus avós, Maria e Pascoal, agradeço por estarem sempre ao meu lado, oferecendo apoio incondicional. Sem o respaldo inabalável de todos vocês, minha jornada acadêmica seria simplesmente impossível.

Dedico meus agradecimentos à todos os meus amigos, com uma gratidão especial às minhas amigas Karina e Ana Clara. Agradeço pelo carinho constante, pelas conversas significativas e por tolerarem conviver comigo, suportando meus diversos momentos de introspecção e reflexão matemática.

Gostaria de expressar minha gratidão a todos os colegas e amigos que fizeram parte da minha jornada, desde o período escolar até o doutorado. Agradeço pela compreensão, solidariedade e pela convivência enriquecedora ao longo dessas etapas, que foram fundamentais para o meu crescimento acadêmico e pessoal. Um agradecimento especial aos meus amigos Anderson, Alex, Beatriz, Manoela, Sidnéia, Léia, Marcelo, Mariane, Julio, Wilian, Heber, Mariana, Wallas, Edineia, Jéssica, Danilo, Javier, Eduardo, Ítalo, João, Rodrigo e Maycon. Peço desculpas se indevidamente deixei de mencionar alguém.

Agradeço a todos os professores que tive ao longo de toda a minha trajetória acadêmica. Saibam que todos vocês tiveram um papel substancial no meu desenvolvimento profissional e pessoal. Em particular, desejo expressar minha gratidão à minha primeira professora, minha mãe Diulina. Mainha, quero que saiba que você foi a primeira pessoa a me inspirar na busca pelo conhecimento. Seu exemplo tem sido, é, e continuará sendo um dos guias fundamentais da minha vida. Agradeço por tudo!

Desejo expressar meu profundo agradecimento ao meu orientador Valeriano por dedicar seu tempo e conhecimento. Agradeço pelos valiosos conselhos que, sem dúvida, carregarei ao longo de toda a minha vida. Minha gratidão se estende ao apoio e ensinamentos cruciais fornecidos, os quais foram fundamentais para a elaboração deste trabalho, sempre com notável paciência e habilidade.

Estendo meus sinceros agradecimentos a todos os membros da banca por aceitarem o convite e reservarem uma parte valiosa de seus tempos à leitura deste trabalho. Quero destacar especialmente o Prof. Roberto Andreani, cuja sugestão de investigação do tema

foi o ponto de partida para a pesquisa que resultou nesta tese. Também gostaria de agradecer ao Prof. Geraldo por sua constante disposição em nos ajudar sempre que necessário. Além disso, agradeço ao Prof. Sílvio por ser uma presença confiável em quem sempre podemos contar.

Agradeço à Universidade Estadual Paulista (Unesp), com especial reconhecimento ao Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas (Ibilce) e ao Departamento de Matemática. Agradeço pela completa infraestrutura proporcionada e por ter sido meu lar durante todo o período do doutorado.

Por fim, desejo expressar minha profunda gratidão a Deus pela saúde, força e proteção concedidas, não só a mim, mas a todas as pessoas preciosas em minha vida. Agradeço por me presentear com momentos incríveis e felizes, e por me proporcionar sabedoria para superar desafios e aprender com cada experiência, pois compreendo que a vida é uma jornada constante de aprendizado.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

“Ninguém ignora tudo. Ninguém sabe tudo. Todos nós sabemos alguma coisa. Todos nós ignoramos alguma coisa. Por isso aprendemos sempre.”

(Freire, 1989, p. 16), [41].

RESUMO

As tradicionais condições necessárias de otimalidade fornecidas pelo Princípio do Máximo de Pontryagin podem não ser válidas em alguns problemas de controle ótimo com restrições mistas, mesmo em aplicações simples. Para lidar com isso, neste trabalho propomos um novo conjunto de condições necessárias de otimalidade de primeira ordem, do tipo sequencial, para problemas de controle ótimo que podem envolver funções de custo não suaves, campos vetoriais não suaves e restrições mistas de estado e de controle na forma de igualdades e desigualdades. Denominamos tal conjunto de Princípio do Máximo Fraco Assintótico. Como uma segunda contribuição, apresentamos uma variante adequada do método de Lagrangiano aumentado clássico capaz de gerar sequências que satisfazem essas condições e discutimos suas propriedades de convergência em relação à otimalidade e factibilidade. Para demonstrar a viabilidade prática do algoritmo proposto, fornecemos alguns resultados numéricos. Como terceira e última contribuição, estudamos situações mínimas sobre as quais o princípio do máximo fraco assintótico implica no princípio do máximo fraco clássico e derivamos uma nova condição de qualificação.

Palavras-chave: Condições de qualificação. Dinâmica e custo não suaves. Método de Lagrangiano aumentado. Princípio do Máximo Fraco Assintótico. Restrições mistas.

ABSTRACT

The traditional necessary optimality conditions provided by Pontryagin's Maximum Principle may not hold in some optimal control problems with mixed constraints, even in simple applications. To address this, we propose a new set of first-order necessary optimality conditions, of sequential type, for optimal control problems that may involve non-smooth cost functions, non-smooth vector fields, and state and control mixed constraints in the form of equalities and inequalities. We call such a set of necessary optimality conditions as the Asymptotic Weak Maximum Principle. As a second contribution, we present a suitable variant of the classical augmented Lagrangian method capable of generating sequences that satisfy these conditions and discuss its convergence properties concerning optimality and feasibility. To demonstrate the practical viability of the proposed algorithm, we provide some numerical results. As a third and final contribution, we study minimal situations under which the asymptotic weak maximum principle implies the classical weak maximum principle, and we derive a new constraint qualification.

Keywords: Constraint qualifications. Non-smooth dynamics and cost. Augmented Lagrangian method. Asymptotic Weak Maximum Principle. Mixed constraints.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Resultados numéricos para $(u_1^0(t), u_2^0(t)) \equiv (1, 1)$, $q_L = (-50, -50)$, $q_R = (50, 50)$, $(\tilde{q}_1^0(t), \tilde{q}_2^0(t)) \equiv (10, 10)$. O método executou 36 iterações.	55
Figura 2 – Resultados apresentados por Maurer e Osmolovskii em [59, Figura 3] para o Caso I.	56
Figura 3 – Resultados numéricos para o Caso I tomando $u^0(t) \equiv 0$, $r_R = (50, 50)$ e $(\tilde{r}_1^0(t), \tilde{r}_2^0(t)) \equiv (10, 10)$, após 33 iterações.	56
Figura 4 – Resultados apresentados por Maurer e Osmolovskii em [59, Figura 4] para o Caso II.	57
Figura 5 – Resultados numéricos para o Caso II tomando $u^0(t) \equiv 0$, $r_R = (50, 50)$ e $(\tilde{r}_1^0(t), \tilde{r}_2^0(t)) \equiv (10, 10)$, ao final de 31 iterações.	57
Figura 6 – Resultados exibidos por Maurer e Osmolovskii em [59, Figura 5] para o Caso III.	57
Figura 7 – Resultados numéricos para o Caso III tomando $u^0(t) \equiv 0$, $r_R = (50, 50)$ e $(\tilde{r}_1^0(t), \tilde{r}_2^0(t)) \equiv (10, 10)$, após 31 iterações.	57
Figura 8 – Resultados numéricos para $u^0(t) \equiv 1$, $r_R = 50$, $\tilde{r}^0(t) \equiv 10$ e 20 iterações.	59
Figura 9 – Resultados numéricos para $u^0(t) \equiv 0$, $r_R = 50$, $\tilde{r}^0(t) \equiv 10$, $\lambda_0 = 1$ e 14 iterações.	60

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AGP	Approximate Gradient Projection
AKKT	Approximate (ou Asymptotic) Karush-Kuhn-Tucker
AMP	Approximate Maximum Principle
AWMP	Asymptotic Weak Maximum Principle
CCP	Cone Continuity Property
CQ	Constraint Qualification
EDO	Equações Diferenciais Ordinárias
DAE	Differential Algebraic Equations
KKT	Karush-Kuhn-Tucker
MP	Maximum Principle
q.t.p.	quase todo ponto
PVI	Problema de Valor inicial
SQH	Sequential Quadratic Hamiltonian
SQH-PE	Sequential Quadratic Hamiltonian - Penalty Estimates
WBCQ	Weak Basic Constraint Qualification
WMP	Weak Maximum Principle

LISTA DE SÍMBOLOS

B	Bola unitária fechada centrada na origem nos espaços euclidianos (independentemente da dimensão)
$\bar{x}(t) + \delta B$	Bola fechada de centro $\bar{x}(t)$ e raio δ
$ \cdot $	Norma euclidiana
$x \cdot y$	Produto interno usual entre $x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}^n$
$\text{co } C$	Envoltório convexo do conjunto C
$\text{proj}_C(x)$	Projeção de x sobre o conjunto C
A^T	Transposta da matriz A
$\mathbf{a}_{n \times 1}$	vetor da forma $[a \ a \ \dots \ a]_{1 \times n}^T$, com $a \in \mathbb{R}$
$\mathcal{N}_C^P(x)$	Cone normal proximal ao conjunto C em x
$\mathcal{N}_C(x)$	Cone normal limite ao conjunto C em x
$\text{epi } f$	Epígrafo da f
$\text{dom } f$	domínio (efetivo) da f
$\nabla f(x)$	Vetor gradiente de f
$\partial f(x)$	Subdiferencial limite de f em x
$\text{Gr } F$	Gráfico de uma multifunção F
L_l^p	Tradicionais espaços $L^p([S, T]; \mathbb{R}^l)$, com $l \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p \leq \infty$
$\ \cdot\ _{L_l^p}$	Norma em L_l^p
$W_l^{1,1}$	Espaço das funções absolutamente contínuas $x : [S, T] \rightarrow \mathbb{R}^l$, com $l \in \mathbb{N}$
$\mathcal{U}_m$	Espaço das funções mensuráveis $u : [S, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$
$x^k \xrightarrow{C} x$	$x^k \rightarrow x$ e $x^k \in C$ para todo k
$u^k \xrightarrow{\text{med}} \bar{u}$	u^k converge na medida de Lebesgue para $\bar{u}$

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
2	PRELIMINARES	19
2.1	NOTAÇÕES, DEFINIÇÕES E RESULTADOS BÁSICOS	19
2.2	HIPÓTESES FUNDAMENTAIS	24
2.2.1	Hipóteses Básicas	24
2.2.2	Hipóteses Adicionais	26
3	UMA CONDIÇÃO DE OTIMALIDADE SEQUENCIAL . . .	28
3.1	SEQUÊNCIAS E PROCESSOS AWMP	28
3.2	O PRINCÍPIO DO MÁXIMO FRACO ASSINTÓTICO	29
3.3	PRINCÍPIO DO MÁXIMO FRACO ASSINTÓTICO $\times$ PRINCÍPIO DO MÁXIMO FRACO CLÁSSICO	34
4	UM MÉTODO DE LAGRANGIANO AUMENTADO PARA CONTROLE ÓTIMO	42
4.1	O MÉTODO	43
4.2	UM ESTUDO DA OTIMALIDADE E DA FACTIBILIDADE	46
4.3	APLICAÇÕES	51
4.3.1	Estratégia 1	51
4.3.2	Estratégia 2	58
5	UMA NOVA CONDIÇÃO DE QUALIFICAÇÃO	61
5.1	CONDIÇÃO DE QUALIFICAÇÃO AWMP-REGULARIDADE	61
5.2	CONDIÇÃO DE REGULARIDADE MAIS FRACA	68
5.3	CRITÉRIOS SUFICIENTES PARA A REGULARIDADE AWMP . . .	71
6	UMA FORMA ALTERNATIVA PARA O ESTUDO DA RE- GULARIDADE AWMP	76
6.1	UMA VERSÃO ALTERNATIVA DAS CONDIÇÕES AWMP	77
6.2	REGULARIDADE AWMP	84
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS	89
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	91
A	DEMONSTRAÇÕES SUPRIMIDAS NO TEXTO	97
B	TEOREMAS, RESULTADOS E DEFINIÇÕES AUXILIARES	103

1 INTRODUÇÃO

Quando estudamos problemas de otimização, as condições necessárias de otimalidade são inegavelmente importantes. Em um problema clássico de programação não linear com restrições de igualdades e desigualdades, onde as funções são suaves, é conhecido que as soluções ótimas, sob algumas hipóteses, satisfazem regras de multiplicadores de Lagrange. Por exemplo, as condições de *Karush-Kuhn-Tucker* (KKT) [46, 51]. No contexto da teoria de controle ótimo, as condições necessárias de otimalidade para problemas com restrições mistas de controle e de estado mais conhecidas são dadas por formas fortes e fracas do Princípio do Máximo, do inglês *Maximum Principle* (MP), [6, 7, 24, 28, 33, 34, 35, 36, 37, 52, 61, 73].

Como, a depender do problema de otimização estudado, nem sempre podemos encontrar soluções exatas (analíticas), mesmo que elas existam, a verificação de condições como KKT ou Princípio do Máximo (forte ou fraco) pode ser uma tarefa muito difícil ou mesmo impossível. Felizmente, em muitos casos, isso não é necessário, já que uma solução numérica aproximada (obtida por métodos numéricos) pode fornecer informações suficientes para os propósitos pretendidos. Numericamente, o que precisamos são de condições de otimalidade que possam ser verificadas em cada iteração do método e que forneçam alguma garantia de que, a partir da k -ésima iteração, a solução u^k obtida seja satisfatória, levando à parada do algoritmo. As ferramentas teóricas que validam essa abordagem são fornecidas pelas condições de otimalidade sequenciais.

Em linhas gerais, uma condição de otimalidade sequencial associada à proposição matemática $\mathcal{P}$ é satisfeita em u se existe uma sequência $\{u^k\}$ convergindo (em alguma topologia) para u tal que $\mathcal{P}(u^k)$ é verificada. A proposição deve ser formulada de modo que, sempre que u é uma solução do problema, exista uma sequência u^k convergindo (em alguma topologia) para u que satisfaça $\mathcal{P}$. Tipicamente, a validade de $\mathcal{P}$ está vinculada a uma sequência de variáveis de tolerância ao erro $\{\varepsilon^k\}$ que converge (em alguma topologia) para 0. Assim, se soubermos que um algoritmo gera uma sequência que satisfaz $\mathcal{P}$, é seguro encerrar sua execução quando o parâmetro ε^k associado for suficientemente pequeno.

Em [3], Andreani, Haeser e Martínez introduzem condições de otimalidade sequenciais para problemas de programação não linear em espaços de dimensão finita chamadas de *Approximate* (ou *Asymptotic*) *Karush-Kuhn-Tucker* (AKKT) *conditions*. Essas condições podem ser consideradas como versões inexatas das clássicas condições KKT. Com base no trabalho de Andreani, Haeser e Martínez, Börgens et al. em [13] estenderam o conceito das condições AKKT para problemas postos em espaços de dimensão infinita, mais especificamente em espaços de Banach (reais). Seus resultados são os mais gerais dentre uma série de trabalhos relacionados, incluindo [14, 45, 75]. Dados os espaços de

Banach (reais) $\mathcal{B}$ e $\tilde{\mathcal{B}}$, a versão do problema de otimização não linear estudada em [13] é dada por:

$$\text{minimizar } J(u) \quad \text{sobre } u \in C \text{ satisfazendo } \mathcal{G}(u) \in K, \quad (1.1)$$

em que $C \subset \mathcal{B}$ e $K \subset \tilde{\mathcal{B}}$ são conjuntos não vazios, fechados e convexos, e as funções $J : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{R}$ e $\mathcal{G} : \mathcal{B} \rightarrow \tilde{\mathcal{B}}$ são continuamente diferenciáveis no sentido de Fréchet.

Diferentemente da programação não linear, condições de otimalidade sequenciais para problemas de controle ótimo permanece uma área pouco explorada. Tendo em mente esta constatação e motivados pelas análises das condições AKKT (dimensão finita e infinita), o presente trabalho tem como objetivo investigar condições necessárias de otimalidade de primeira ordem, do tipo sequencial, para problemas de controle ótimo que podem envolver funções de custo não suaves, campos vetoriais não suaves e restrições mistas tanto nas variáveis de controle quanto nas variáveis de estado, na forma de igualdades e desigualdades. O problema em questão, denotado por (P) , tem a seguinte apresentação:

$$\text{minimizar } \ell(x(S), x(T))$$

sobre funções absolutamente contínuas $x : [S, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ e funções mensuráveis

$u : [S, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ satisfazendo

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \quad \text{q.t.p. em } [S, T], \quad (1.2)$$

$$0 = b(t, x(t), u(t)) \quad \text{q.t.p. em } [S, T], \quad (1.3)$$

$$0 \geq g(t, x(t), u(t)) \quad \text{q.t.p. em } [S, T], \quad (1.4)$$

$$u(t) \in U(t) \quad \text{q.t.p. em } [S, T], \quad (1.5)$$

$$(x(S), x(T)) \in C, \quad (1.6)$$

em que o intervalo $[S, T]$, as funções $\ell : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f : [S, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, $b : [S, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m_b}$ e $g : [S, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m_g}$, a multifunção¹ não vazia $U : [S, T] \rightsquigarrow \mathbb{R}^m$ e o conjunto $C \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ são dados.

Como apontado por de Pinho e Rosenblueth em [30], é bem conhecido que o Princípio do Máximo de Pontryagin [68] geralmente não se aplica a (P) . Contudo, se algumas hipóteses de regularidade são impostas sobre as restrições mistas, como evidenciado em [6, 7, 28, 33, 73], tal aplicação passa a ser possível. Essas hipóteses são conhecidas como *Constraint Qualifications* (CQ) que, em Português, são referidas como condições de qualificação, ou também como qualificações de restrição. A CQ mais comum na literatura envolve uma condição de posto completo da matriz Jacobiana das restrições mistas em relação à variável de controle “ u ”, como exemplo podemos citar o estudo de de Pinho e Ilchmann feito em [28]. Mas além disso, existem condições de qualificação do tipo posto constante [6], Mangasarian-Fromovitz [7, 24, 30, 33], *Weak Basic Constraint Qualification*

¹ Dizemos que uma aplicação $F : [S, T] \rightsquigarrow \mathbb{R}^m$ é uma *multifunção* se para cada $t \in [S, T]$, $F(t)$ é subconjunto de $\mathbb{R}^m$.

(WBCQ) [52], algumas das quais requerem hipóteses de interioridade e convexidade [73], entre outras.

Adotando uma abordagem semelhante a feita na investigação das condições AKKT, podemos explorar condições sequenciais de otimalidade necessárias no contexto da teoria de controle ótimo como aproximações das condições dadas pelo princípio do máximo fraco² clássico [6, 7, 28, 33, 73]. A formalização dessas condições para problemas na forma de (P) é o primeiro objetivo do presente trabalho. Chamamos tais condições de Princípio do Máximo Fraco Assintótico ou condições *Asymptotic Weak Maximum Principle* (AWMP) em referência às formas aproximadas das condições dadas pelo princípio do máximo fraco clássico, por exemplo, em [6, 27, 30]. Uma das vantagens da utilização das condições AWMP reside no fato de podermos evitar a utilização de qualquer tipo de condições de qualificação como as que foram mencionadas anteriormente, que na prática podem ser extremamente difíceis de serem verificadas. Além disso, a característica sequencial das condições AWMP torna sua aderência aos métodos numéricos essencialmente natural. Por exemplo, elas podem ser usadas para justificar critérios de parada para alguns algoritmos. Vale ressaltar que o conceito de *Approximate Maximum Principle* (AMP) proposto por Mordukhovich e Shvartsman, como visto em [62, 63, 64], é diferente do conceito de AWMP. Apesar da nomenclatura semelhante e de ambas serem formulações relaxadas das condições do princípio do máximo clássico, as análises AMP seguem uma formulação discreta do problema de controle ótimo, enquanto os estudos das condições AWMP são derivados a partir da formulação contínua (Problema (P)). Ressaltamos também que o conceito de condições AWMP é diferente de “subotimalidade”, do inglês *suboptimality*, apresentado em [39, Teorema 7.1], [43, Teorema 2, p. 63] e [44, Corolário 1]. Apesar das condições de subotimalidade poderem ser aplicadas mesmo nos casos onde não garantimos a existência de soluções ótimas, tais noções ainda não estão estabelecidas (até onde sabemos) para problemas na forma de (P) (problemas com restrições mistas de estado e de controle). Mesmo para problemas mais simples como os encontrados em [39, Seção 7], [43, Seção 2, p. 63], e [44, Seção 4], a subotimalidade, apesar de estar relacionada à noção de solução aproximada, não requer nenhum tipo de convergência das sequências de processos $\{(x^k, u^k)\}$ que satisfazem, de forma relaxada, as condições do princípio do máximo, como ocorre nas condições AWMP.

Dada a generalidade do Problema (1.1), Börgens et al. em [13] conseguem resolver alguns problemas de controle ótimo. No entanto, para que as condições AKKT sejam aplicadas, é necessária suavidade nas funções objetivo e de restrições. Em nossas análises, não impomos nenhuma hipótese de diferenciabilidade no campo vetorial f que descreve a dinâmica e nem mesmo na função objetivo ℓ . Derivamos as condições de otimalidade em termos de subdiferenciais limites. Portanto, mesmo que consigamos escrever (P) na forma

² O termo “princípio do máximo fraco” vem do inglês *Weak Maximum Principle* (WMP).

de (1.1), as funções objetivo e de restrição resultantes não serão necessariamente suaves. Todavia, escrever (P) no formato do Problema (1.1) não é uma tarefa fácil e nem mesmo sabemos se é sempre possível. As estratégias de reescritas encontradas na literatura são para versões simplificadas de (P) , por exemplo, para a versão que denotamos por $(\hat{P})$, em que $\ell(x(S), x(T)) = \ell(x(T))$ e $C = \{x_S\} \times \mathbb{R}^n$ para um vetor $x_S \in \mathbb{R}^n$ dado, e sobre algumas hipóteses adicionais, como por exemplo, $f \in C^2$ (f duas vezes continuamente diferenciável). Um maior detalhamento pode ser consultado em [16, Capítulo 1]. Assim, para problemas no formato de (P) , nossa abordagem é mais geral do que a apresentada por [13], no sentido de que pode ser aplicada a uma classe mais ampla de problemas. Outra característica interessante da análise desenvolvida neste trabalho é que o espaço das funções de restrições não precisa necessariamente ser de Hilbert, por exemplo, L^2 , como usado por Kanzow, Steck e Wachsmuth em [45], ou mesmo estar densamente imerso em algum espaço de Hilbert arbitrário, como feito por Börgens, Kanzow e Steck em [14]. Além disso, conseguimos evitar todas as hipóteses de reflexividade dos espaços, como aquelas necessárias em [13, 14, 45].

Como comentamos anteriormente, as condições de otimalidade sequenciais são ferramentas teóricas que podem ser usadas para justificar a parada de métodos numéricos. Neste trabalho, trazemos um algoritmo no qual as condições AWMP funcionam com tal finalidade. Antes de entrar nos detalhes desta investigação, vamos primeiro comentar a respeito da diferença entre abordagens numéricas diretas e indiretas em controle ótimo. Em [77], Zhu, Trélat e Cerf enfatizam que métodos indiretos resolvem o problema numericamente com base no princípio do máximo, enquanto métodos diretos envolvem a discretização das variáveis de estado e controle para resolver o problema de otimização não linear resultante. Por meio dessa classificação, as condições AWMP são naturalmente mais adequadas aos métodos indiretos, pois possuem a mesma essência, isto é, são baseadas no princípio do máximo. Para problemas de controle ótimo sem restrições mistas na forma de igualdades e desigualdades, os métodos de aproximações sucessivas, como os apresentado por Krylov e Chernous'ko [49, 50], os métodos de Hamiltoniano aumentado, como os de Bonnans [12] e Sakawa e Shindo [72], e o método *Sequential Quadratic Hamiltonian* (SQH) (combinação dos dois últimos) proposto por Breitenbach e Borzì em [17], especificamente sua versão para problemas de controle ótimo com EDOs, veja [16, Algoritmo 2.3], são exemplos de métodos indiretos. Pesquisamos na literatura por métodos indiretos capazes de resolver problemas no formato de (P) (ou mesmo na forma mais simples, $(\hat{P})$) e gerar sequências no formato AWMP, mas não obtivemos sucesso. Dois dos principais estudos que se alinham com $(\hat{P})$ são apresentados por Sakawa em [71] e Borzì em [16, Seção 2.3]. No primeiro, Sakawa, usando uma condição de qualificação do tipo posto completo, resolve uma versão mais simples de $(\hat{P})$, que é suave e possui apenas restrições mistas de estado e de controle na forma de desigualdades. No segundo, Borzì

usa o método SQH-PE³ para problemas semelhantes a $(\hat{P})$. No entanto, as sequências produzidas por ambos os métodos não atendem aos requisitos estabelecidos pelo princípio do máximo fraco assintótico. O método SQH-PE, em particular, não possui um mecanismo para uma escolha adaptativa do parâmetro de penalização e dos multiplicadores de Lagrange associados às restrições mistas, essencial para as investigações das condições AWMP. Nesse cenário, chegamos ao segundo objetivo deste trabalho, que é apresentar um método numérico capaz de resolver problemas de controle ótimo na forma de $(\hat{P})$ e gerar sequências cujas condições AWMP funcionam como critério geral de parada. Para isso, utilizando como fontes de inspiração as abordagens existentes para problemas de programação não linear, como [5, 14, 45], e a ideia de penalização do método SQH-PE, propomos uma variante adequada do método de Lagrangiano aumentado.

O método de Lagrangiano aumentado para problemas de programação não linear está entre os mais conhecidos e notáveis. Exemplos no caso de dimensão finita incluem [10, 66], e no caso de dimensão infinita [14, 45]. No entanto, pouco se discute sobre sua aplicação no contexto de problemas de controle ótimo. Algumas obras que seguem uma linha semelhante, como as realizadas por Aguiar, Camponogara e Foss em [1, 2], tratam de problemas diferentes de (P) ou $(\hat{P})$. O foco está em problemas na forma de Equações Diferenciais Algébricas, do inglês *Differential Algebraic Equations* (DAE), e apenas no caso em que existem somente restrições mistas de estado e de controle na forma de igualdades. Nesse sentido, a contribuição deste trabalho é apresentar uma variante adequada do método de Lagrangiano aumentado para problemas de controle ótimo que podem ter funções de custo não suaves, campos vetoriais não suaves e restrições mistas de estado e de controle na forma de igualdades e desigualdades, capaz de gerar sequências no formato AWMP. As análises teóricas apresentadas por [10, 14, 45, 66] serviram como fontes de inspiração para o desenvolvimento do nosso estudo.

O terceiro e último objetivo deste trabalho é apresentar uma nova condição de qualificação fundamentada nas situações mínimas sob as quais as condições AWMP implicam na validade do princípio do máximo fraco clássico. Novamente inspirados no contexto da programação não linear, mais especificamente nas condições *Cone Continuity Property* (CCP) [3], *Asymptotically Mordukhovich-regularity* (AM-regularidade) [60] e *AKKT-regularidade* (ou *AKKT-regularity*) [13], propomos uma nova condição de regularidade, denominada AWMP-regularidade (ou *AWMP-regularity*), que assegura a implicação desejada, ou seja, a validade do princípio do máximo fraco clássico para (P) a partir das condições AWMP, funcionando, assim, como uma condição de qualificação. A AWMP-regularidade foi formulada a partir de duas estratégias. A primeira segue imediatamente da caracterização de condições AWMP exibida no Capítulo 3, mais especificamente pelas Definições 3.1 e 3.2, e é satisfeita apenas quando as sequências de multiplicadores

³ PE é uma abreviatura para *Penalty Estimates*.

$\{\lambda_k\} \subset [0, +\infty)$ e $\{p^k\} \subset W_n^{1,1}$ são limitada e uniformemente limitada, respectivamente, e vale a implicação “se $\lambda_k \rightarrow \lambda$ e $p^k \rightarrow p$ uniformemente para algum $(\lambda, p) \in [0, +\infty) \times W_n^{1,1}$, então $(\lambda, p) \neq (0, 0)$ ”. Já na segunda estratégia, apresentamos um estudo que incorpora os conceitos de continuidade completa e semicontinuidade sequencial fraca, vide as Definições 2.5 e 2.6. A ideia básica consiste em reformular as condições AWMP apresentadas no Capítulo 3 de uma forma mais restrita na qual a hipótese necessária à primeira estratégia seja dispensável. Em ambas as estratégias adotadas, caracterizamos o cenário sob o qual a AWMP-regularidade é a condição mais fraca que precisamos impor para que as condições AWMP impliquem no princípio do máximo fraco clássico. Por exemplo, uma hipótese que usamos foi exigir que a função de custo ℓ e a função que descreve a dinâmica f fossem continuamente diferenciáveis. Também estabelecemos alguns critérios suficientes para a validade da AWMP-regularidade.

As condições de otimalidade sequenciais fornecidas pelo princípio do máximo fraco assintótico destacam-se dos trabalhos presentes na literatura, pois podem ser obtidas, por exemplo, através de uma versão adequada do método de Lagrangiano aumentado. Em outras palavras, são condições de otimalidade com um grande potencial prático, já que existem ferramentas para gerá-las. Além disso, a regularidade AWMP estabelece condições mínimas sob as quais as condições sequenciais implicam nas condições de otimalidade clássicas estabelecidas pelo princípio do máximo. Portanto, o princípio do máximo fraco assintótico fornece ferramentas teóricas que podem ser aplicadas de forma prática para a escolha de candidatos à soluções de problemas de controle ótimo e a regularidade AWMP, quando satisfeita, filtra esse conjunto de candidatos com a mesma precisão do princípio do máximo.

O presente trabalho está estruturado da seguinte forma. Começamos introduzindo as principais definições, notações e resultados clássicos utilizados ao longo do texto no Capítulo 2. No Capítulo 3, estabelecemos as condições AWMP como condições necessárias de otimalidade para o Problema (P) e ilustramos sua relação com as condições do princípio do máximo fraco clássico. O Capítulo 4 é dedicado à apresentação de uma variante adequada do método de Lagrangiano aumentado para problemas de controle ótimo capaz de gerar sequências cujas condições AWMP funcionam como critério geral de parada. Ainda no Capítulo 4 fornecemos exemplos numéricos que demonstram a viabilidade prática do algoritmo proposto. No Capítulo 5 fazemos um estudo da regularidade AWMP e propomos uma nova condição de qualificação para problemas na forma de (P) , enquanto no Capítulo 6 exibimos uma forma alternativa para o estudo da regularidade AWMP desenvolvida no Capítulo 5 que envolve hipóteses de continuidade completa e semicontinuidade sequencial fraca. Por fim, algumas considerações finais e projeções para trabalhos futuros são feitas no Capítulo 7.

2 PRELIMINARES

Neste capítulo expomos as principais notações, definições, resultados e hipóteses que foram essenciais no estudo da condição necessária de otimalidade sequencial para problemas de controle ótimo proposta neste trabalho. Com o objetivo de uma melhor organização, dividimos o capítulo em duas seções. Na Seção 2.1 apresentamos as notações, definições e resultados básicos e na Seção 2.2 exibimos o conjunto das hipóteses fundamentais para a teoria desenvolvida.

2.1 NOTAÇÕES, DEFINIÇÕES E RESULTADOS BÁSICOS

Ao longo deste trabalho, denotamos convergência forte, fraca e fraca estrela por $\rightarrow$, $\rightharpoonup$ e $\rightharpoonup^*$, respectivamente. Usamos B para a bola unitária fechada centrada na origem independentemente da dimensão do espaço euclidiano subjacente e da sua norma $|\cdot|$; L_l^p com $1 \leq p \leq \infty$ para representar os tradicionais espaços $L^p([S, T]; \mathbb{R}^l)$; $W_l^{1,1}$ para o espaço das funções absolutamente contínuas $x : [S, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$, também denotado por $W^{1,1}([S, T]; \mathbb{R}^l)$; $\mathcal{U}_m$ para o espaço das funções mensuráveis $u : [S, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$; e $(b, g)(\cdot)$ para $(b(\cdot), g(\cdot))$. Além disso, dado $(\bar{x}, \bar{u}), (x^k, u^k) \in W_n^{1,1} \times \mathcal{U}_m$, $k \in \mathbb{N}$, $\bar{b}(t)$, $\bar{g}(t)$, $b^k(t)$ e $g^k(t)$ são usados para $b(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))$, $g(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))$, $b(t, x^k(t), u^k(t))$ e $g(t, x^k(t), u^k(t))$, nessa ordem. A função Hamiltoniana não maximizada $\mathcal{H} : [S, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m_b} \times \mathbb{R}^{m_g} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ associada ao Problema (P) é dada por:

$$\mathcal{H}(t, x, p, q, r, u) := p \cdot f(t, x, u) + q \cdot b(t, x, u) + r \cdot g(t, x, u).$$

Além das notações mencionadas, vamos considerar os seguintes resultados.

Proposição 2.1. *Sejam $\{a_k\}, \{b_k\} \subset \mathbb{R}$. As seguintes implicações são satisfeitas:*

(i) *se $\{a_k\}$ e $\{b_k\}$ são sequências limitadas superiormente, então*

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} (a_k + b_k) \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} a_k + \limsup_{k \rightarrow \infty} b_k;$$

(ii) *se $\{a_k\}$ e $\{b_k\}$ são sequências limitadas inferiormente, então*

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} (a_k + b_k) \geq \liminf_{k \rightarrow \infty} a_k + \liminf_{k \rightarrow \infty} b_k.$$

Uma demonstração para o Item (i) da Proposição 2.1 pode ser encontrada em [26, p. 93] e o Item (ii) segue de maneira semelhante.

Proposição 2.2. *Seja $\{a_k\} \subset \mathbb{R}$. Se $\liminf_{k \rightarrow \infty} a_k$ existe, então também existe uma subsequência $\{a_{k_l}\}$, com $l \in \mathbb{N}$, tal que*

$$\lim_{l \rightarrow \infty} a_{k_l} = \liminf_{k \rightarrow \infty} a_k.$$

Uma demonstração para a Proposição 2.2 pode ser encontrada em [48, Prova da Proposição 2.33, p. 33].

Relembramos também algumas definições básicas da teoria de controle ótimo que são amplamente utilizadas no decorrer do presente trabalho.

Definição 2.1. Um *processo* para o Problema (P) é um par (x, u) formado por um controle $u \in \mathcal{U}_m$ e um arco $x \in W_n^{1,1}$ que é solução de $\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t))$ para quase todo ponto em $[S, T]$, ou seja, solução de (1.2).

Definição 2.2. Um *processo factível* para o Problema (P) é um processo que satisfaz as restrições (1.3), (1.4), (1.5) e (1.6), isto é, quase todo ponto em $[S, T]$, valem $0 = b(t, x(t), u(t))$, $0 \geq g(t, x(t), u(t))$, $u(t) \in U(t)$ e $(x(S), x(T)) \in C$.

Definição 2.3. Um processo factível $(\bar{x}, \bar{u})$ é dito *mínimo local fraco* de (P) se existe $\delta > 0$ tal que $\ell(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) \leq \ell(x(S), x(T))$ para todos os processos factíveis (x, u) tais que $(x(t), u(t)) \in \Omega_\delta(t) := \{(y, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : |(y, v) - (\bar{x}(t), \bar{u}(t))| \leq \delta\}$ para quase todo ponto em $[S, T]$.

As Definições 2.4, 2.5 e 2.6 apresentadas adiante podem ser encontradas em [22, Definição 2.11, p. 31], [65, Item (b) da Definição 2.1, p. 15] e [47, Definição 12.21], respectivamente.

Definição 2.4. Seja $\mathcal{T}$ um espaço topológico. Uma função $\psi : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ é dita *semicontínua inferior* (em inglês, *lower semicontinuous* ou, de forma abreviada, *lsc*) se, para todo $M \in \mathbb{R}$, o conjunto de subníveis $\{v \in \mathcal{T} : \psi(v) \leq M\}$ é fechado.

Quando $\mathcal{T}$ é um espaço métrico, existe uma caracterização muito útil das funções semicontínuas inferiores.

Proposição 2.3 (Caracterização de funções lsc [22, Proposição 2.15, p. 32]). *Seja $\mathcal{T}$ um espaço métrico, e $\psi : \mathcal{T} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Então ψ é lsc se, e somente se, para cada $v \in \mathcal{T}$ e $M \in \mathbb{R}$, temos*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} v^k = v, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \psi(v^k) \leq M \quad \Rightarrow \quad \psi(v) \leq M.$$

Definição 2.5. Sejam $\mathcal{B}$ e $\tilde{\mathcal{B}}$ espaços de Banach reais e D um subconjunto não vazio de $\mathcal{B}$. Dizemos que $\phi : D \rightarrow \tilde{\mathcal{B}}$ é *completamente contínua* se para toda sequência $\{x^k\} \subset D$ tal que $x^k \rightharpoonup x$, com $x \in D$, tivermos que $\phi(x^k) \rightarrow \phi(x)$.

Definição 2.6. Seja $\varphi : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida no espaço normado $\mathcal{N}$. Dizemos que φ é *fracamente sequencialmente semicontínua inferior* (ou *fracamente sequencialmente lsc*) se para toda sequência $\{x^k\} \subset \mathcal{N}$ e todo $x \in \mathcal{N}$ tal que $x^k \rightharpoonup x$, tivermos

$$\varphi(x) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \varphi(x^k).$$

De maneira simétrica estabelecemos o conceito de função fracamente sequencialmente semicontínua superior.

Definição 2.7. Seja $\varphi : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida no espaço normado $\mathcal{N}$. Dizemos que φ é *fracamente sequencialmente semicontínua superior* (ou *fracamente sequencialmente usc*¹) se para toda sequência $\{x^k\} \subset \mathcal{N}$ e todo $x \in \mathcal{N}$ tal que $x^k \rightharpoonup x$, tivermos

$$\varphi(x) \geq \limsup_{k \rightarrow \infty} \varphi(x^k).$$

Relembramos a definição de função convexa, pois ela será importante para o Teorema 2.1 apresentado em sequência.

Definição 2.8. Seja $\varphi : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida no espaço normado $\mathcal{N}$. Dizemos que φ é *convexa* se

$$\varphi((1 - \alpha)x + \alpha y) \leq (1 - \alpha)\varphi(x) + \alpha\varphi(y)$$

para todo $x, y \in \mathcal{N}$ e $\alpha \in [0, 1]$. Se $-\varphi$ for convexa, então dizemos que φ é *côncava*.

Teorema 2.1 ([47, Teorema 12.25, p. 397]). *Seja $\varphi : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função convexa definida no espaço normado $\mathcal{N}$ e fortemente sequencialmente lsc, isto é, tal que para toda sequência $\{x^k\} \subset \mathcal{N}$ e todo $x \in \mathcal{N}$, temos que*

$$x^k \rightarrow x \quad \Rightarrow \quad \varphi(x) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \varphi(x^k).$$

Então, φ é fracamente sequencialmente lsc.

Observação 2.1. Como consequência do Teorema 2.1, se φ for côncava, então φ é fracamente sequencialmente usc. Mais que isso, se φ for afim (portanto, convexa e côncava simultaneamente), então φ é fracamente sequencialmente contínua, ou seja, para toda sequência $\{x^k\} \subset \mathcal{N}$ e todo $x \in \mathcal{N}$ tal que $x^k \rightharpoonup x$, temos que

$$\varphi(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(x^k).$$

Uma ilustração deste resultado pode ser conferida em [47, Figura 12.4, p. 398].

A Definição 2.9, exibida logo abaixo, estabelece o conceito de conjunto fracamente sequencialmente fechado.

Definição 2.9 ([32, Definição 9.15, p. 207]). Um subconjunto K de um espaço com produto interno $\mathcal{H}$ é dito *fracamente sequencialmente fechado* se $\{x^k\} \subset K$ e $x^k \rightharpoonup x$ implica em $x \in K$.

¹ O termo “usc” vem do inglês *upper semi-continuous*.

Alguns conceitos padrões de análise não suave também são usados neste trabalho. Aqui destacamos apenas alguns dos principais. Desta forma, um melhor detalhamento pode ser consultado em, por exemplo, [22, 23, 25, 76].

Definição 2.10 (Cone normal proximal [76, Definição 4.2.1, p. 129]). Dado um conjunto fechado $C \subset \mathbb{R}^n$ e um ponto $x \in C$, o *cone normal proximal a C em x* , escrito como $\mathcal{N}_C^P(x)$, é o conjunto

$$\mathcal{N}_C^P(x) := \{v \in \mathbb{R}^n : \text{existe } M > 0 \text{ tal que } v \cdot (y - x) \leq M|y - x|^2 \text{ para todo } y \in C\}.$$

Os elementos em $\mathcal{N}_C^P(x)$ são chamados *normais proximais a C em x* .

Definição 2.11 (Cone normal limite [76, Definição 4.2.3, p. 130]). Dado um conjunto fechado $C \subset \mathbb{R}^n$ e um ponto $x \in C$, o *cone normal limite a C em x* , escrito como $\mathcal{N}_C(x)$, é o conjunto

$$\mathcal{N}_C(x) := \{v \in \mathbb{R}^n : \text{existem } x^k \xrightarrow{C} x, v^k \rightarrow v \text{ tais que } v^k \in \mathcal{N}_C^P(x^k) \text{ para todo } k\}.$$

Os elementos em $\mathcal{N}_C(x)$ são chamados *normais limites a C em x* . Esse cone também é conhecido como *cone normal de Mordukhovich*.

As Definições 2.12 e 2.13 apresentadas abaixo serão úteis para definirmos o conceito de subdiferenciais limites.

Definição 2.12 (Epígrafo). O conjunto

$$\text{epi}(f) := \{(x, M') \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : M' \geq f(x)\}$$

é o *epígrafo da f* .

Definição 2.13 (Domínio efetivo). O *domínio efetivo* de uma função f em $S \subset \mathbb{R}^n$, que denotamos por $\text{dom}(f)$, é a projeção em $\mathbb{R}^n$ do epígrafo de f :

$$\text{dom}(f) = \{x : \text{existe } \mu \text{ tal que } (x, \mu) \in \text{epi}(f)\} = \{x : f(x) < \infty\}.$$

A partir da noção de cone normal limite, pode ser estabelecido o conceito de subdiferencial limite, como apresentado na próxima definição.

Definição 2.14 (Subdiferencial limite [76, Definição 4.3.1, p. 135]). Tome uma função semicontínua inferior $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ e um ponto $x \in \text{dom}(f)$. A *subdiferencial limite de f em x* é o conjunto

$$\partial f(x) := \left\{ \xi : (\xi, -1) \in \mathcal{N}_{\text{epi}(f)}(x, f(x)) \right\}.$$

A subdiferencial limite também é conhecida como *subdiferencial de Mordukhovich*.

A Definição 2.15 apresentada adiante caracteriza o que são ϵ -minimizadores.

Definição 2.15 (ϵ -minimizador [76, p. 111]). Seja (W, d_W) (aqui d_W é a métrica do espaço W) um espaço métrico completo, uma função semicontínua inferior $\Psi : W \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $x_0 \in \text{dom}(\Psi)$ e $\epsilon > 0$. Dizemos que x_0 é um ϵ -*minimizador* para Ψ , se

$$\Psi(x_0) \leq \inf_{x \in W} \Psi(x) + \epsilon.$$

A seguir enunciamos alguns dos principais teoremas usados ao longo deste trabalho. Não apresentamos suas demonstrações, mas indicamos referências que podem ser consultadas para tal fim.

Teorema 2.2 (Princípio variacional de Ekeland [39, Teorema 1.1]). *Tome um espaço métrico completo (W, d_W) , uma função semicontínua inferior $\Psi : W \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, um ponto $x_0 \in \text{dom}(\Psi)$ e números $\alpha > 0$ e $\beta > 0$. Assuma que*

$$\Psi(x_0) \leq \inf_{x \in W} \Psi(x) + \beta\alpha.$$

Então, existe $\bar{x} \in W$ tal que

- (i) $\Psi(\bar{x}) \leq \Psi(x_0)$,
- (ii) $d_W(x_0, \bar{x}) \leq \beta$,
- (iii) $\Psi(\bar{x}) \leq \Psi(x) + \alpha d_W(x, \bar{x})$ para todo $x \in W$.

Teorema 2.3 (Princípio variacional de Ekeland - Versão fraca [8, Teorema 3.3.1, p. 91]). *Tome um espaço métrico completo (W, d_W) e uma função $\Psi : W \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ semicontínua inferior, não trivial (tal que $\text{dom}(\Psi) \neq \emptyset$) e limitada inferiormente. Além disso, considere $x_0 \in \text{dom}(\Psi)$ e um número $\epsilon > 0$. Então, existe $\bar{x} \in W$, tal que*

- (i) $\Psi(\bar{x}) + \epsilon d_W(x_0, \bar{x}) \leq \Psi(x_0)$,
- (ii) $\Psi(\bar{x}) < \Psi(x) + \epsilon d_W(x, \bar{x})$ para todo $x \neq \bar{x}$.

Teorema 2.4 (Teorema de Dunford-Pettis - Versão enunciada por Vinter em [76, Teorema 2.5.1, p. 87]). *Se Z é um subconjunto limitado de L_n^1 , então as seguintes condições são equivalentes.*

- (i) *Toda sequência em Z tem uma subsequência convergindo para alguma função L_n^1 , com relação à topologia fraca de L_n^1 ;*
- (ii) *Para cada $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para cada conjunto mensurável $I_D \subset [S, T]$ e $x \in Z$ satisfazendo $\text{med}(I_D) < \delta$ (aqui a medida referida é a de Lebesgue), temos*

$$\int_{I_D} x(t) dt < \epsilon.$$

Uma demonstração para o Teorema 2.4 pode ser encontrada em [38].

Seguindo as afirmações feitas por Vinter em [76, p. 87], quando a Condição (ii) do Teorema 2.4 é satisfeita, dizemos que “a família de funções Z é equi-integrável”. Uma condição suficiente para verificar a equi-integrabilidade consiste em checar se a família de funções é “uniformemente integravelmente limitada” no sentido de que existe uma função integrável $\phi \in L_n^1$ tal que

$$|x(t)| \leq \phi(t) \quad \text{q.t.p. em } [S, T].$$

2.2 HIPÓTESES FUNDAMENTAIS

A seguir apresentamos o conjunto das principais hipóteses que utilizamos ao longo deste trabalho. Com o objetivo de destacar melhor cada uma, elas foram divididas em um total de seis. As três primeiras são tratadas na Subseção 2.2.1 e recebem o termo “básicas”, pois são necessárias para a aplicação do princípio do máximo sem restrições mistas, que é um resultado fundamental para a nossa abordagem. As outras três são referidas como “adicionais” e exibidas na Subseção 2.2.2. Tais hipóteses são comumente encontradas na literatura, por exemplo em [6, 28, 29, 30, 67].

2.2.1 Hipóteses Básicas

As três hipóteses tratadas nesta subseção são necessárias a uma versão fraca do Princípio do Máximo de Pontryagin [68], proposta por de Pinho e Vinter em [31, Teorema 3.2], para uma variante de (P) , denotada por (P_I) , obtida descartando as restrições mistas (1.3) e (1.4), ou seja, dada por:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } \ell(x(S), x(T)) \\ &\text{sobre } (x, u) \in W_n^{1,1} \times \mathcal{U}_m \text{ satisfazendo} \\ &\quad \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \quad \text{q.t.p. em } [S, T], \\ &\quad u(t) \in U(t) \quad \text{q.t.p. em } [S, T], \\ &\quad (x(S), x(T)) \in C. \end{aligned}$$

Chamamos (P_I) de *problema de controle ótimo sem restrições mistas*, ou simplesmente, *problema irrestrito*.

A função Hamiltoniana não maximizada associada ao Problema (P_I) é dada por $\mathcal{H}_{P_I} : [S, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ em que

$$\mathcal{H}_{P_I}(t, x, p, u) := p \cdot f(t, x, u).$$

Observação 2.2. As definições de processo factível (Definição 2.2) e mínimo local fraco (Definição 2.3) mudam para o Problema (P_I) . Porém a mudança é pequena, basta desconsiderarmos as restrições mistas.

Tomando um processo de referência $(\bar{x}, \bar{u})$ para (P_I) e um parâmetro $\delta > 0$, as hipóteses básicas são dadas por:

(H1) A função $f(\cdot, x, u)$ é Lebesgue mensurável para cada (x, u) e existe uma função integrável k_f tal que, para todo $(x, u), (x', u') \in \Omega_\delta(t)$ e quase todo ponto em $[S, T]$,

$$|f(t, x, u) - f(t, x', u')| \leq k_f(t)|(x, u) - (x', u')|.$$

(H2) O gráfico de U , dado por $\text{Gr}(U) := \{(t, v) : t \in [S, T] \text{ e } v \in U(t)\}$, é um conjunto Borel mensurável e $U_\delta(t) := (\bar{u}(t) + \delta B) \cap U(t)$ é fechado em quase todo ponto em $[S, T]$.

(H3) C é fechado e ℓ é localmente Lipschitz em uma vizinhança de $(\bar{x}(S), \bar{x}(T))$.

O teorema abaixo é uma versão não suave e fraca do Princípio do Máximo de Pontryagin [68] que foi proposta por de Pinho e Vinter em [31, Teorema 3.2].

Teorema 2.5 (Princípio do máximo fraco clássico para problemas irrestritos). *Seja $(\bar{x}, \bar{u})$ um minimizador local fraco para o Problema (P_I) . Suponha que as Hipóteses (H1) – (H3) sejam satisfeitas para algum $\delta > 0$. Então, existem $\lambda \in [0, +\infty)$, $p \in W_n^{1,1}$ e $\zeta \in L_m^1$ tais que, para quase todo ponto em $[S, T]$,*

$$\begin{aligned} \lambda + \|p\|_{L_n^\infty} &\neq 0, \\ (-\dot{p}(t), \zeta(t)) &\in \text{co} \partial_{x,u} \mathcal{H}_{P_I}(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t)), \\ \zeta(t) &\in \text{co} \mathcal{N}_{U(t)}(\bar{u}(t)), \\ (p(S), -p(T)) &\in \lambda \partial \ell(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) + \mathcal{N}_C(\bar{x}(S), \bar{x}(T)). \end{aligned}$$

Observação 2.3. Os multiplicadores $\lambda \in [0, +\infty)$ e $p \in W^{1,1}$ são comumente conhecidos como o *multiplicador custo* e o *co-estado* (ou *arco adjunto*), respectivamente. Além disso, as quatro condições necessárias fornecidas pelo Teorema 2.5 são homogêneas com respeito aos multiplicadores (λ, p) , ou seja, se (λ, p) funcionam como um conjunto de multiplicadores, então para qualquer $\alpha > 0$, $(\alpha\lambda, \alpha p)$ também funcionam. Como $\lambda + \|p\|_{L_n^\infty} \neq 0$, podemos tomar $\alpha = (\lambda + \|p\|_{L_n^\infty})^{-1}$, definir $(\tilde{\lambda}, \tilde{p}) := (\alpha\lambda, \alpha p)$ e concluir que o Teorema 2.5 continua válido para os novos multiplicadores $(\tilde{\lambda}, \tilde{p})$ com $\tilde{\lambda} + \|\tilde{p}\|_{L_n^\infty} = 1$.

Observação 2.4 ([76, p. 204]). O jacobiano generalizado de Clarke [23, Definição 2.6.1, p. 70] de uma função $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ em um ponto y , denotado por $DL(y)$, tem a seguinte propriedade (vide [23, Proposição 2.6.4, p. 71]), para qualquer vetor $r \in \mathbb{R}^m$,

$$\text{co} \partial(r \cdot L)(y) = r DL(y),$$

em que $\partial(r \cdot L)(y)$ é a subdiferencial limite da função $y \mapsto r \cdot L(y)$. Dessa propriedade segue que a conclusão

$$-\dot{p}(t) \in \text{co} \partial_{x,u} \mathcal{H}_{P_I}(t, \bar{x}(t), p(t), \bar{u}(t)) \quad \text{q.t.p. em } [S, T]$$

do Teorema 2.5 pode ser equivalentemente escrita como

$$-\dot{p}(t) \in p(t) D_{x,u} f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) \quad \text{q.t.p. em } [S, T],$$

em que $D_{x,u} f(t, x, u)$ denota o jacobiano generalizado de Clarke de f com respeito a (x, u) no ponto (t, x, u) . Além disso, pela Hipótese (H1), existe uma função integrável k_f tal que, para todo $(x, u), (x', u') \in \Omega_\delta(t)$, $l = 1, \dots, n$ e quase todo ponto em $[S, T]$,

$$|f_l(t, x, u) - f_l(t, x', u')| \leq |f(t, x, u) - f(t, x', u')| \leq k_f(t) |(x, u) - (x', u')|.$$

Logo, usando [23, Item (d) da Proposição 2.6.2, p. 70], com $K(t) := \max\{k_f(t), \dots, k_f(t)\} = k_f(t)$ para todo $t \in [S, T]$, podemos concluir que

$$D_{x,u} f(t, x, u) \subset k_f(t) B$$

para todo $(x, u) \in \Omega_\delta(t)$ e quase todo ponto em $[S, T]$.

A partir do Teorema 2.5 podemos falar de estacionariedade de processos para problemas de controle ótimo.

Definição 2.16. Dizemos que um processo $(\bar{x}, \bar{u})$ é estacionário para o Problema (P_I) , se ele satisfaz as condições do Teorema 2.5.

2.2.2 Hipóteses Adicionais

Tomando um processo de referência $(\bar{x}, \bar{u})$ para (P) e um parâmetro $\delta > 0$, as hipóteses adicionais consideradas nesta subseção são dadas por:

(H4) $(b, g)(\cdot, x, u)$ é mensurável para cada (x, u) .

(H5) $(b, g)(t, \cdot, \cdot)$ é continuamente diferenciável em $(\bar{x}(t), \bar{u}(t)) + \delta B$ quase todo ponto em $[S, T]$ e existe uma função integrável k_{bg} tal que, para todo $(x, u), (x', u') \in \Omega_\delta(t)$ e quase todo ponto em $[S, T]$,

$$|(b, g)(t, x, u) - (b, g)(t, x', u')| \leq k_{bg}(t) |(x, u) - (x', u')|.$$

(H6) Existem funções integráveis c_f e c_{bg} tais que $|f(t, x, u)| \leq c_f(t)$ e $|(b, g)(t, x, u)| \leq c_{bg}(t)$ para todo $(x, u) \in \Omega_\delta(t)$ e quase todo ponto em $[S, T]$.

A afirmação adiante estabelece uma hipótese alternativa a (H6).

Afirmção 2.1. Se as Hipóteses (H1) e (H5) forem válidas, então a Hipótese (H6) pode alternativamente ser substituída por:

(H6)' As funções $K_f(t) := |f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))|$ e $K_{bg}(t) := |(b, g)(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))|$ são integráveis sobre $[S, T]$ e $\bar{u} \in L_m^\infty$.

A validade da Afirmção 2.1 dar-se pelo fato das hipóteses (H1), (H5) e (H6)' implicarem em (H6). A prova deste resultado pode ser conferida no Apêndice A.

Considerando a validade de (H1) – (H6), sob certas hipóteses, como podem ser vistas em [6, 7, 28, 29, 30, 33, 67, 73] por exemplo, o Princípio do Máximo Fraco clássico é dado como segue.

Teorema 2.6 (Princípio do Máximo Fraco clássico). *Seja $(\bar{x}, \bar{u})$ um minimizador local fraco para o Problema (P). Então existem $\lambda \in [0, +\infty)$, $p \in W_n^{1,1}$, $q \in L_{m_b}^1$, $r \in L_{m_g}^1$ e $\zeta \in L_m^1$ tais que, para quase todo ponto em $[S, T]$,*

$$\begin{aligned} \lambda + \|p\|_{L^\infty} &\neq 0, \\ (-\dot{p}(t), \zeta(t)) &\in \text{co} \partial_{x,u} \mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), q(t), r(t), \bar{u}(t)), \\ \zeta(t) &\in \text{co} \mathcal{N}_{U(t)}(\bar{u}(t)), \\ r(t) \cdot g(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) &= 0 \quad e \quad r(t) \leq 0, \\ (p(S), -p(T)) &\in \lambda \partial \ell(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) + \mathcal{N}_C(\bar{x}(S), \bar{x}(T)). \end{aligned}$$

Feitas todas as considerações sobre notações, principais definições, alguns resultados da literatura e as hipóteses fundamentais, já podemos iniciar nossas análises sobre as condições AWMP. Esse é o foco do Capítulo 3.

3 UMA CONDIÇÃO DE OTIMALIDADE SEQUENCIAL

O objetivo deste capítulo é apresentar o princípio do máximo fraco assintótico, em inglês *Asymptotic Weak Maximum Principle* (AWMP), e garantir que as condições fornecidas por ele são genuínas condições necessárias de otimalidade para problemas de controle ótimo na forma de (P) . De maneira geral, as condições do princípio do máximo fraco assintótico podem ser compreendidas como aproximações das condições do princípio do máximo fraco clássico, tais como as versões apresentadas em [6, 27, 30]. Além disso, sua validade independe de condições de qualificação e ele é naturalmente adequado para métodos numéricos, pois suas condições podem ser empregadas como critérios de parada em algoritmos, conforme discutiremos no Capítulo 4.

Para uma melhor organização das ideias, dividimos o presente capítulo da seguinte forma. Na Seção 3.1 apresentamos as definições de sequências e processos AWMP, que são fundamentais para a versão do princípio do máximo fraco assintótico apresentado na Seção 3.2. Por fim, na Seção 3.3, estabelecemos a relação entre o princípio do máximo fraco assintótico e o Princípio do Máximo Fraco clássico (Teorema 2.6).

3.1 SEQUÊNCIAS E PROCESSOS AWMP

As duas definições fundamentais do presente trabalho são apresentadas abaixo. A primeira pode ser considerada como uma versão relaxada (aproximada) das condições do princípio do máximo fraco clássico (Teorema 2.6) em termos de sequências. Existem muitas possibilidades dessa relaxação, a que foi usada é uma das mais simples e que nos permitiu chegar aos resultados deste trabalho. A segunda justifica por que o termo “asymptotic” (assintótico) é empregado em “Asymptotic Weak Maximum Principle” (Princípio do Máximo Fraco Assintótico).

Iniciamos definindo o conceito de *sequência associada ao princípio do máximo fraco assintótico* ou simplesmente *sequência AWMP*.

Definição 3.1 (Sequências AWMP). Uma sequência $\{(x^k, u^k, \zeta^k, p^k, q^k, r^k, \lambda_k)\} \subset W_n^{1,1} \times \mathcal{U}_m \times L_m^1 \times W_n^{1,1} \times L_{m_b}^1 \times L_{m_g}^1 \times [0, +\infty)$ é chamada de uma *sequência associada ao princípio do máximo fraco assintótico*, ou simplesmente uma *sequência AWMP*, se existirem um $\delta > 0$ e sequências $\{(\varepsilon^k, \eta^k)\} \subset L_n^1 \times L_m^1$, $\{\theta^k\} \subset \mathcal{C} := \{\phi \in L_{m_g}^1 : \phi_j(t) \leq 0, j = 1, \dots, m_g, \text{ q.t.p. em } [S, T]\}$ e $\{(\vartheta^k, \nu^k)\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ tais que, para cada $k \in \mathbb{N}$ e quase todo ponto em $[S, T]$,

- (i) $\lambda_k + \|p^k\|_{L_n^\infty} \neq 0$;
- (ii) $(-p^k(t), \zeta^k(t)) - (\varepsilon^k(t), \eta^k(t)) \in \text{co } \partial_{x,u} \mathcal{H}(t, x^k(t), p^k(t), q^k(t), r^k(t), u^k(t))$;
- (iii) $\zeta^k(t) \in \text{co } \mathcal{N}_{U_\delta(t)}(u^k(t))$;

- (iv) $r_j^k(t)g_j^-(t, x^k(t), u^k(t)) = \theta_j^k(t)$ e $r_j^k(t) \leq 0$, $j = 1, \dots, m_g$;
- (v) $(p^k(S), -p^k(T)) - (\vartheta^k, \nu^k) \in \lambda_k \partial \ell(x^k(S), x^k(T)) + \mathcal{N}_C(x^k(S), x^k(T))$;

em que

$$g_j^-(t, x, u) := \max\{-g_j(t, x, u), 0\} \quad \forall t \in [S, T], \quad j = 1, \dots, m_g,$$

$\varepsilon^k \rightarrow 0$ em L_n^1 , $\eta^k \rightarrow 0$ em L_m^1 , $\theta_j^k(t) \rightarrow 0$ para quase todo ponto em $[S, T]$ e para cada $j = 1, \dots, m_g$, $\vartheta^k \rightarrow 0$ e $\nu^k \rightarrow 0$.

Na Definição 3.1 não impomos nenhuma forma de convergência da sequência $\{(x^k, u^k, \zeta^k, p^k, q^k, r^k, \lambda_k)\}$. Se considerarmos algum tipo de convergência da sequência $\{(x^k, u^k)\}$ teremos algumas implicações, como por exemplo, a segunda definição mais relevante deste trabalho, que é a de processos AWMP, apresentada a seguir.

Definição 3.2 (Processos AWMP). Seja $(\bar{x}, \bar{u})$ um processo factível para o Problema (P). Chamamos $(\bar{x}, \bar{u})$ de um *processo limite do princípio do máximo fraco assintótico*, ou simplesmente um *processo AWMP*, se existir uma sequência AWMP $\{(x^k, u^k, \zeta^k, p^k, q^k, r^k, \lambda_k)\}$ tal que $x^k \rightarrow \bar{x}$ uniformemente e $u^k \xrightarrow{\text{med}} \bar{u}$.

Na Definição 3.2 não estamos assumindo qualquer tipo de convergência ou limitação sob a sequência de multiplicadores associados às restrições mistas $\{(q^k, r^k)\}$. Tampouco, sob as sequências dos outros multiplicadores $\{(p^k, \lambda_k)\}$ e $\{\zeta^k\}$. Além disso, a convergência uniforme da sequência $\{x^k\}$ pode ser expressa como

$$\|x^k - \bar{x}\|_{L_n^\infty} \rightarrow 0,$$

e a convergência da sequência $\{u^k\}$ ocorre na medida de Lebesgue, ou seja, para qualquer $\varrho > 0$, segue que

$$\text{med}(\{t \in [S, T] : |u^k(t) - \bar{u}(t)| \geq \varrho\}) \rightarrow 0.$$

3.2 O PRINCÍPIO DO MÁXIMO FRACO ASSINTÓTICO

O teorema a seguir foi inspirado nos resultados de programação não linear para espaços de Hilbert [75, Proposição 3.50, p. 53] e espaços de Banach [13, Proposição 3.3]. Essencialmente, mostramos que todo minimizador local de (P) é um processo AWMP, ou seja, provamos que AWMP é uma condição de otimalidade para o Problema (P). É importante enfatizar que nenhuma condição de regularidade (ou qualificação de restrição) ou hipótese de interioridade foi imposta sobre as funções de restrições b e g .

Teorema 3.1 (Princípio do Máximo Fraco Assintótico). *Seja $(\bar{x}, \bar{u})$ um minimizador local fraco de (P). Se, para algum $\delta > 0$, as Hipóteses (H1) – (H6) forem satisfeitas, então $(\bar{x}, \bar{u})$ é um processo AWMP.*

Demonstração. Reduzimos $\delta > 0$, se necessário, de modo que $(\bar{x}, \bar{u})$ seja um minimizador local fraco do Problema (P) com relação a todos os processos factíveis (x, u) tais que $(x(t), u(t)) \in \Omega_\delta(t)$ quase todo ponto em $[S, T]$ e as Hipóteses (H1) – (H6) sejam satisfeitas. Com a finalidade de organizar as ideias, dividimos a prova em quatro passos.

Passo 1: *Aplicamos o Princípio Variacional de Ekeland.*

Começamos definindo o conjunto

$$W := \left\{ (x, u) \in W_n^{1,1} \times \mathcal{U}_m \left| \begin{array}{ll} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) & \text{q.t.p. em } [S, T], \\ x(t) \in \bar{x}(t) + \delta B & \text{q.t.p. em } [S, T], \\ u(t) \in U_\delta(t) & \text{q.t.p. em } [S, T], \\ (x(S), x(T)) \in C \end{array} \right. \right\},$$

e a aplicação $d_W : W \times W \rightarrow \mathbb{R}$,

$$d_W((x, u), (x', u')) := |x(S) - x'(S)| + \int_S^T |u(t) - u'(t)| dt.$$

Note que como $(\bar{x}, \bar{u}) \in W$, W é não vazio.

Tomamos também uma sequência de números positivos $\{\epsilon_k\}$ tal que $\epsilon_k \rightarrow 0$ quando $k \rightarrow +\infty$ e, para cada $k \in \mathbb{N}$, definimos a função $\ell_k : W \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$\ell_k(x, u) := \epsilon_k^2 \exp(\ell(x(S), x(T)) - \ell(\bar{x}(S), \bar{x}(T))) + \frac{1}{\epsilon_k} \mathcal{P}(x, u),$$

em que a função $\mathcal{P} : W \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por

$$\mathcal{P}(x, u) := \int_S^T \left[\sum_{i=1}^{m_b} (b_i(t, x(t), u(t)))^2 + \sum_{j=1}^{m_g} (\max\{g_j(t, x(t), u(t)), 0\})^2 \right] dt. \quad (3.1)$$

Finalmente, podemos considerar a seguinte sequência de problemas de otimização:

$$\text{minimizar } \ell_k(x, u) \quad \text{sobre } (x, u) \in W. \quad (3.2)$$

A afirmação a seguir estabelece algumas condições necessárias para a aplicação do princípio variacional de Ekeland (Teorema 2.2) e uma verificação da sua validade pode ser conferida no Apêndice A.

Afirmação 3.1. A aplicação d_W define uma métrica em W , (W, d_W) é um espaço métrico completo e a função ℓ_k é semicontínua inferior em (W, d_W) para cada $k \in \mathbb{N}$.

Como, $(\bar{x}, \bar{u})$ é um minimizador local fraco do Problema (P), em particular, é um processo factível, de modo que, $\ell_k(\bar{x}, \bar{u}) = \epsilon_k^2$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Além disso, pelo fato de ℓ_k ser uma função que assume apenas valores não negativos, segue que

$$\ell_k(\bar{x}, \bar{u}) \leq \inf_{(x, u) \in W} \ell_k(x, u) + \epsilon_k^2.$$

Portanto, para cada $k \in \mathbb{N}$, concluímos que $(\bar{x}, \bar{u})$ é um ϵ_k^2 -minimizador (Definição 2.15) para o Problema (3.2). Logo, pelo princípio variacional de Ekeland (Teorema 2.2), existe uma sequência $\{(x^k, u^k)\} \subset W$ tal que, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$d_W((x^k, u^k), (\bar{x}, \bar{u})) \leq \epsilon_k^2 \quad (3.3)$$

e (x^k, u^k) minimiza a função de custo perturbada

$$\ell_k(x, u) + \epsilon_k d_W((x^k, u^k), (x, u)) \quad (3.4)$$

sobre W .

Passo 2: *Obtemos as convergências da Definição 3.2.*

De (3.3) segue que

$$x^k(S) \rightarrow \bar{x}(S) \quad \text{e} \quad \|u^k - \bar{u}\|_{L_m^1} \rightarrow 0. \quad (3.5)$$

Pela desigualdade de Chebyshev (Teorema B.10), para qualquer $\varrho > 0$,

$$\begin{aligned} \text{med}(\{t \in [S, T] : |u^k(t) - \bar{u}(t)| \geq \varrho\}) &\leq \frac{1}{\varrho} \int_S^T |u^k(t) - \bar{u}(t)| dt \\ &= \frac{1}{\varrho} \|u^k - \bar{u}\|_{L_m^1} \end{aligned}$$

para cada $k \in \mathbb{N}$. Então, de (3.5), $u^k \xrightarrow{\text{med}} \bar{u}$. Portanto, pelo Teorema de Riesz (Teorema B.11), podemos concluir, extraindo uma subsequência (não renomearemos), que $u^k(t) \rightarrow \bar{u}(t)$ quase todo ponto em $[S, T]$. Além disso, como $\{(x^k, u^k)\} \subset W$ para todo $k \in \mathbb{N}$, $\dot{x}^k(t) = f(t, x^k(t), u^k(t))$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e quase todo ponto em $[S, T]$, pela Hipótese (H6), a sequência $\{\dot{x}^k\}$ é uniformemente integravelmente limitada. Assim, pelo Teorema de Dunford-Pettis (Teorema 2.4), podemos extrair uma subsequência (novamente não renomearemos), tal que $\{\dot{x}^k\}$ converge fracamente em L_n^1 , isto é, $\dot{x}^k \rightharpoonup \varsigma$ para alguma função $\varsigma \in L_n^1$. Logo, definindo

$$\tilde{x}(t) := \bar{x}(S) + \int_S^t \varsigma(s) ds,$$

concluímos que $\dot{\tilde{x}}(t) = \varsigma(t)$ quase todo ponto em $[S, T]$, $\tilde{x}(S) = \bar{x}(S)$ e

$$x^k(t) = x^k(S) + \int_S^t \dot{x}^k(s) ds \rightarrow \bar{x}(S) + \int_S^t \varsigma(s) ds = \tilde{x}(t) \quad \text{uniformemente}, \quad (3.6)$$

pois $x^k \in W_n^{1,1}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, $x^k(S) \rightarrow \bar{x}(S)$ e

$$\int_S^t \dot{x}^k(s) ds \rightarrow \int_S^t \varrho(s) ds \quad \text{uniformemente}.$$

Como já vimos, $\dot{x}^k(t) = f(t, x^k(t), u^k(t))$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e quase todo ponto em $[S, T]$. Assim, integrando ambos os lados da igualdade de S a t , tomando o limite

com $k \rightarrow \infty$, usando as convergências fraca de $\{\dot{x}^k\}$, uniforme de $\{x^k\}$ e quase todo ponto em $[S, T]$ de $\{u^k\}$ juntamente com a Hipótese (H6) e o Teorema da Convergência Dominada (Teorema B.9), concluímos que $\dot{\tilde{x}}(t) = f(t, \tilde{x}(t), \bar{u}(t))$ quase todo ponto em $[S, T]$. Consequentemente, $\tilde{x}$ é uma solução para o problema

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), \bar{u}(t)) & \text{q.t.p. em } [S, T], \\ x(S) = \bar{x}(S). \end{cases} \quad (3.7)$$

Pela unicidade da solução de (3.7) (Teoremas B.2 e B.3), concluímos que $\bar{x}(t) = \tilde{x}(t)$ para quase todo $t \in [S, T]$. Portanto, por (3.6), $x^k(t) \rightarrow \bar{x}(t)$ uniformemente.

Passo 3: *Estudamos a otimalidade do problema perturbado.*

Partindo do Problema (3.4) e usando as definições de W e d_W , concluímos que, para cada $k \in \mathbb{N}$, (x^k, u^k) é um minimizador local fraco para o Problema (P^k) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{minimizar } \epsilon_k^2 \exp(\ell(x(S), x(T)) - \ell(\bar{x}(S), \bar{x}(T))) \\ \quad + \frac{1}{\epsilon_k} \mathcal{P}(x, u) + \epsilon_k |x(S) - x^k(S)| + \epsilon_k \int_S^T |u(t) - u^k(t)| dt \\ \text{sobre } (x, u) \in W_n^{1,1} \times \mathcal{U}_m \text{ satisfazendo} \\ \quad \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \quad \text{q.t.p. em } [S, T], \\ \quad x(t) \in \bar{x}(t) + \delta B \quad \text{q.t.p. em } [S, T], \\ \quad u(t) \in U_\delta(t) \quad \text{q.t.p. em } [S, T], \\ \quad (x(S), x(T)) \in C. \end{array} \right.$$

Como $x^k \rightarrow \bar{x}$ uniformemente, descartando os termos iniciais da sequência $\{x^k\}$ (mais uma vez não renomearemos), garantimos que $x^k(t) \in \bar{x}(t) + (\delta/2)B$ quase todo ponto em $[S, T]$. Consequentemente, para cada $k \in \mathbb{N}$, (x^k, u^k) também é um minimizador local fraco para uma variante do Problema (P^k) , denotado por $(\tilde{P}^k)$, obtida ao descartar a restrição $x(t) \in \bar{x}(t) + \delta B$ quase todo ponto em $[S, T]$. A partir de agora trabalharemos com este problema.

A função $\mathcal{H}_k^\lambda : [S, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ é a função Hamiltoniana não maximizada associada ao Problema $(\tilde{P}^k)$, definida como

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_k^\lambda(t, x, p, u) &:= p \cdot f(t, x, u) \\ &\quad - \lambda \left[\frac{1}{\epsilon_k} \left(\sum_{i=1}^{m_b} (b_i(t, x, u))^2 + \sum_{j=1}^{m_g} (\max \{g_j(t, x, u), 0\})^2 \right) + \epsilon_k |u - u^k(t)| \right]. \end{aligned}$$

Portanto, pelo princípio do máximo fraco para problemas irrestritos (Teorema 2.5), garantimos a existência de $\lambda_k \geq 0$, $p^k \in W_n^{1,1}$ e $\zeta^k \in L_m^1$ tais que, para cada $k \in \mathbb{N}$ e quase

todo ponto em $[S, T]$,

$$\lambda_k + \|p^k\|_{L_n^\infty} = 1, \quad (3.8)$$

$$(-\dot{p}^k(t), \zeta^k(t)) \in \text{co } \partial_{x,u} \mathcal{H}_k^{\lambda_k}(t, x^k(t), p^k(t), u^k(t)), \quad (3.9)$$

$$\zeta^k(t) \in \text{co } \mathcal{N}_{U_\delta(t)}(u^k(t)), \quad (3.10)$$

$$(p^k(S), -p^k(T)) \in \lambda_k \left[\partial(\epsilon_k^2 \exp(\ell(x^k(S), x^k(T)) - \ell(\bar{x}(S), \bar{x}(T)))) \right. \\ \left. + \epsilon_k B \times \{0\} \right] + \mathcal{N}_C(x^k(S), x^k(T)). \quad (3.11)$$

Passo 4: *Deduzimos as condições (i)-(v) da Definição 3.1.*

A Condição (iii) da Definição 3.1 é obtida diretamente de (3.10). Verifiquemos, portanto, as demais condições. Com efeito, partindo de (3.9), usando a Regra da Soma (Proposição B.2), comutação com (-1) (Proposição B.3) e a Regra da Cadeia (Teorema B.12), para cada $k \in \mathbb{N}$ e quase todo ponto em $[S, T]$,

$$(-\dot{p}^k(t), \zeta^k(t)) \in \text{co } \partial_{x,u}(p^k(t) \cdot f(t, x^k(t), u^k(t))) + \left\{ \left[\sum_{i=1}^{m_b} q_i^k(t) \nabla_{x,u} b_i(t, x^k(t), u^k(t)) \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{j=1}^{m_g} r_j^k(t) \nabla_{x,u} g_j(t, x^k(t), u^k(t)) \right] \right\} + \{(\varepsilon^k(t), \eta^k(t))\} \quad (3.12)$$

em que, para todo $k \in \mathbb{N}$ e $t \in [S, T]$,

$$q_i^k(t) := -\frac{2\lambda_k}{\epsilon_k} b_i(t, x^k(t), u^k(t)), \quad i = 1, \dots, m_b, \quad (3.13)$$

$$r_j^k(t) := -\frac{2\lambda_k}{\epsilon_k} \max\{g_j(t, x^k(t), u^k(t)), 0\}, \quad j = 1, \dots, m_g, \quad (3.14)$$

$$\varepsilon^k(t) := 0$$

e

$$\eta^k(t) := -\epsilon_k \lambda_k \xi^k(t) \quad (3.15)$$

para alguma função Lebesgue mensurável ξ^k tal que $\xi^k(t) \in B$ para cada $k \in \mathbb{N}$ e quase todo ponto em $[S, T]$. A existência da função Lebesgue mensurável ξ^k tal que $\xi^k(t) \in B$ para cada $k \in \mathbb{N}$ e quase todo ponto em $[S, T]$ é garantida por algum teorema de seleção mensurável adequado, por exemplo, o Teorema de Seleção Mensurável de Aumann (Teorema B.14).

Por (3.12) e pelos Corolários B.1 e B.2,

$$(-\dot{p}^k(t), \zeta^k(t)) - (\varepsilon^k(t), \eta^k(t)) \in \text{co } \partial_{x,u} \mathcal{H}(t, x^k(t), p^k(t), q^k(t), r^k(t), u^k(t))$$

para cada $k \in \mathbb{N}$ e quase todo ponto em $[S, T]$.

Como $\xi^k(t) \in B$ para cada $k \in \mathbb{N}$ e quase todo ponto em $[S, T]$, $\epsilon_k \rightarrow 0$ e, por (3.8), $\{\lambda_k\}$ é uma sequência limitada, de (3.15), segue que $\eta^k \rightarrow 0$ uniformemente. Logo,

converge forte em L_m^1 e, como consequência da Proposição B.1, $\eta^k \rightharpoonup 0$. Obviamente, $\varepsilon^k \rightharpoonup 0$. Além disso, de (3.15), $(\varepsilon^k, \eta^k) \in L_n^1 \times L_m^1$ para cada $k \in \mathbb{N}$, e da Hipótese (H6), (3.13) e (3.14), concluímos que $(q^k, r^k) \in L_{m_b}^1 \times L_{m_g}^1$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Portanto, a Condição (ii) da Definição 3.1 é verificada.

Definindo $\theta_j^k(t) := 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, $j = 1, \dots, m_g$, quase todo ponto em $[S, T]$, e usando (3.14), segue que $\theta^k \subset \mathcal{C}$,

$$r_j^k(t)g_j^-(t, x^k(t), u^k(t)) = \theta_j^k(t) \quad \text{e} \quad r_j^k(t) \leq 0 \quad (3.16)$$

para cada $k \in \mathbb{N}$, $j = 1, \dots, m_g$, quase todo ponto em $[S, T]$. Portanto, a Condição (iv) da Definição 3.1 é satisfeita.

Usando a Regra da Cadeia (Teorema B.12), para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \partial(\epsilon_k^2 \exp(\ell(x^k(S), x^k(T)) - \ell(\bar{x}(S), \bar{x}(T)))) \\ \subset \epsilon_k^2 \exp(\ell(x^k(S), x^k(T)) - \ell(\bar{x}(S), \bar{x}(T))) \partial \ell(x^k(S), x^k(T)). \end{aligned}$$

Portanto, a partir de (3.11), para cada $k \in \mathbb{N}$, segue que

$$\begin{aligned} (p^k(S), -p^k(T)) \in \lambda_k \epsilon_k^2 \exp(\ell(x^k(S), x^k(T)) - \ell(\bar{x}(S), \bar{x}(T))) \partial \ell(x^k(S), x^k(T)) \\ + \lambda_k(\epsilon_k \gamma^k, 0) + \mathcal{N}_C(x^k(S), x^k(T)) \end{aligned}$$

para algum $\gamma^k \in B$. Portanto, definindo $\tilde{\lambda}_k := \lambda_k \epsilon_k^2 \exp(\ell(x^k(S), x^k(T)) - \ell(\bar{x}(S), \bar{x}(T)))$ e $(\vartheta^k, \nu^k) := (\lambda_k \epsilon_k \gamma^k, 0)$ para todo $k \in \mathbb{N}$, temos que

$$(p^k(S), -p^k(T)) - (\vartheta^k, \nu^k) \in \tilde{\lambda}_k \partial \ell(x^k(S), x^k(T)) + \mathcal{N}_C(x^k(S), x^k(T))$$

para cada $k \in \mathbb{N}$. É claro que $\vartheta^k \rightarrow 0$, uma vez que $\{\lambda_k\}$ e $\{\gamma^k\}$ são limitadas e $\epsilon_k \rightarrow 0$. Evidentemente, pela própria definição, $\nu^k \rightarrow 0$. Consequentemente, a Condição (v) da Definição 3.1 é verificada.

Finalmente, a partir de (3.8), deduzimos que $\tilde{\lambda}_k + \|p^k\|_{L_n^\infty} \neq 0$, completando assim a demonstração do teorema. $\square$

Observação 3.1. Na prova do Teorema 3.1, as sequências $\{\varepsilon^k(t)\}$ e $\{\eta^k(t)\}$ são uniformemente limitadas para todo $k \in \mathbb{N}$ e quase todo ponto em $[S, T]$. Não impomos nenhuma limitação a tais sequências na Definição 3.1, porém, em resultados subsequentes, quando necessário, faremos uma suposição adicional dessa natureza.

3.3 PRINCÍPIO DO MÁXIMO FRACO ASSINTÓTICO $\times$ PRINCÍPIO DO MÁXIMO FRACO CLÁSSICO

Começamos esta seção apresentando um exemplo onde tanto as condições do princípio do máximo fraco clássico (Teorema 2.6), quanto as condições do princípio do máximo

fraco assintótico são verificadas. Em seguida evidenciamos as relações existentes entre os dois resultados. Em síntese, o princípio do máximo fraco clássico implica no princípio do máximo fraco assintótico, mas a volta nem sempre é satisfeita, como podemos ver nos Exemplos 3.2 e 3.3, exibidos mais adiante.

Exemplo 3.1 ([6, Exemplo 4.5]). O problema de controle ótimo estudado neste exemplo é dado por:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } x(1) \\ & \text{sobre } (x, u) \in W^{1,1}([0, 1]; \mathbb{R}) \times L^\infty([0, 1]; \mathbb{R}^2) \text{ satisfazendo} \\ & \quad \dot{x}(t) = tu_1(t)^2 + u_2(t)^2 \quad \text{q.t.p. em } [0, 1], \\ & \quad 0 = x(t) + u_1(t) + u_2(t) \quad \text{q.t.p. em } [0, 1], \\ & \quad 0 = 2x(t) + 2u_1(t) + 2u_2(t) \quad \text{q.t.p. em } [0, 1], \\ & \quad (x(0), x(1)) \in \{0\} \times \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Pelo fato de $\dot{x}(t) = tu_1(t)^2 + u_2(t)^2 \geq 0$ para quase todo ponto em $[0, 1]$, temos que x é crescente. Assim, como $x(0) = 0$, segue que $x(1) \geq 0$. Se $x(1) = 0$, então

$$\dot{x}(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad tu_1(t)^2 + u_2(t)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad u_1(t) = u_2(t) = 0 \quad \text{q.t.p. em } [0, 1].$$

Consequentemente, $(\bar{x}, (\bar{u}_1, \bar{u}_2)) = (0, (0, 0))$ é o minimizador local fraco para o problema, pois é o único processo tal que $x(1) = 0$.

A função Hamiltoniana não maximizada para este problema é dada por

$$\mathcal{H}(t, x, p, (q_1, q_2), (u_1, u_2)) = p(tu_1^2 + u_2^2) + q_1(x + u_1 + u_2) + q_2(2x + 2u_1 + 2u_2)$$

e as condições do princípio do máximo fraco clássico (Teorema 2.6) são dadas por

$$\begin{aligned} & \lambda + \|p\|_{L^\infty([0,1];\mathbb{R})} \neq 0, \\ & -\dot{p}(t) = q_1(t) + 2q_2(t) \quad \text{q.t.p. em } [0, 1], \\ & 0 = 2tp(t)\bar{u}_1(t) + q_1(t) + 2q_2(t) \quad \text{q.t.p. em } [0, 1], \\ & 0 = 2p(t)\bar{u}_2(t) + q_1(t) + 2q_2(t) \quad \text{q.t.p. em } [0, 1], \\ & (p(0), -p(1)) \in \{0\} \times \{\lambda\} + \mathbb{R} \times \{0\}, \end{aligned}$$

em que $\lambda \in [0, +\infty)$, $p \in W^{1,1}([0, 1]; \mathbb{R})$ e $q = (q_1, q_2) \in L^1([0, 1]; \mathbb{R}^2)$.

Portanto, o princípio do máximo fraco clássico é válido com $\lambda = 1$, $p(t) \equiv -1$, $q_1(t) \equiv 0$ e $q_2(t) \equiv 0$.

Vamos mostrar que $(\bar{x}, (\bar{u}_1, \bar{u}_2)) = (0, (0, 0))$ também é um processo AWMP. Com efeito, para todo $k \in \mathbb{N}$, tomamos $(x^k, (u_1^k, u_2^k)) = (0, (0, 0))$ e, para algum $\delta > 0$, cada

$k \in \mathbb{N}$ e quase todo ponto em $[0, 1]$, consideramos o seguinte sistema

$$\lambda_k + \|p^k\|_{L^\infty([0,1];\mathbb{R})} \neq 0,$$

$$-\dot{p}^k(t) - \varepsilon^k(t) = q_1^k(t) + 2q_2^k(t), \quad (3.17)$$

$$\zeta_1^k(t) - \eta_1^k(t) = 2tp^k(t)u_1^k(t) + q_1^k(t) + 2q_2^k(t), \quad (3.18)$$

$$\zeta_2^k(t) - \eta_2^k(t) = 2p^k(t)u_2^k(t) + q_1^k(t) + 2q_2^k(t), \quad (3.19)$$

$$(\zeta_1^k(t), \zeta_2^k(t)) \in \mathcal{N}_{((\bar{u}_1(t), \bar{u}_2(t)) + \delta B) \cap \mathbb{R} \times \mathbb{R}}(u_1^k(t), u_2^k(t)) = \{0\} \times \{0\}, \quad (3.20)$$

$$(p^k(0), -p^k(1)) - (\vartheta^k, \nu^k) \in \lambda_k\{(0, 1)\} + \mathcal{N}_{\{0\} \times \mathbb{R}}(x^k(0), x^k(1)) = \mathbb{R} \times \{\lambda_k\}, \quad (3.21)$$

em que $\{((\zeta_1^k, \zeta_2^k), p^k, (q_1^k, q_2^k), \lambda_k)\} \subset L^1([0, 1]; \mathbb{R}^2) \times W^{1,1}([0, 1]; \mathbb{R}) \times L^1([0, 1]; \mathbb{R}^2) \times [0, +\infty)$, $\{(\varepsilon^k, (\eta_1^k, \eta_2^k))\} \subset L^1([0, 1]; \mathbb{R}) \times L^1([0, 1]; \mathbb{R}^2)$, $\{(\vartheta^k, \nu^k)\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\varepsilon^k \rightarrow 0$ em $L^1([0, 1]; \mathbb{R})$, $(\eta_1^k, \eta_2^k) \rightarrow (0, 0)$ em $L^1([0, 1]; \mathbb{R}^2)$, $\vartheta^k \rightarrow 0$ e $\nu^k \rightarrow 0$.

Para todo $k \in \mathbb{N}$, definimos $(q_1^k(t), q_2^k(t)) \equiv (0, 0)$. Assim, de (3.17) – (3.20),

$$\dot{p}^k(t) = -\varepsilon^k(t), \quad \eta_1^k(t) = 0 \quad \text{e} \quad \eta_2^k(t) = 0$$

para cada $k \in \mathbb{N}$ e quase todo ponto em $[0, 1]$. Como $p^k \in W^{1,1}([0, 1]; \mathbb{R})$ para cada $k \in \mathbb{N}$, tomando $\varepsilon^k(t) \equiv 1/k$ para todo $k \in \mathbb{N}$, temos que

$$p^k(t) = p^k(0) + \int_0^t \dot{p}^k(s) ds = p^k(0) - \int_0^t \frac{1}{k} ds \quad (3.22)$$

para cada $k \in \mathbb{N}$ e todo $t \in [0, 1]$. Consequentemente,

$$p^k(1) = p^k(0) - \int_0^1 \frac{1}{k} dt$$

para cada $k \in \mathbb{N}$. Usando (3.21), segue que

$$-\nu^k - \lambda_k = p^k(0) - \int_0^1 \frac{1}{k} dt = p^k(0) - \frac{1}{k} \quad \Rightarrow \quad p^k(0) = -\nu^k - \lambda_k + \frac{1}{k} \quad (3.23)$$

para cada $k \in \mathbb{N}$. Então, de (3.22) e (3.23),

$$p^k(t) = -\frac{1}{k}t - \nu^k - \lambda_k + \frac{1}{k}$$

para cada $k \in \mathbb{N}$ e todo $t \in [0, 1]$. Logo, tomando $\lambda_k = 1$ e $\nu^k = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, obtemos

$$p^k(t) = -\frac{1}{k}t - \frac{(k-1)}{k}$$

para cada $k \in \mathbb{N}$ e todo $t \in [0, 1]$. Portanto, como $\lambda_k + \|p^k\|_{L^\infty([0,1];\mathbb{R})} \geq 1$ para cada $k \in \mathbb{N}$, definindo $\vartheta^k = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, segue que $(\bar{x}, (\bar{u}_1, \bar{u}_2))$ é um processo AWMP.

No Exemplo 3.1, se tivéssemos tomado

$$\begin{aligned} (x^k(t), (u_1^k(t), u_2^k(t)), p^k(t), (q_1^k(t), q_2^k(t)), \lambda_k) &\equiv (\bar{x}(t), (\bar{u}_1(t), \bar{u}_2(t)), p(t), (q_1(t), q_2(t)), \lambda) \\ &\equiv (0, (0, 0), -1, (0, 0), 1) \end{aligned}$$

e

$$(\varepsilon^k(t), (\eta_1^k(t), \eta_2^k(t)), \vartheta^k, \nu^k) \equiv (0, (0, 0), 0, 0),$$

para cada $k \in \mathbb{N}$, também garantiríamos que $(\bar{x}, (\bar{u}_1, \bar{u}_2))$ é um processo AWMP. Este fato é sempre válido, ou seja, se $(\bar{x}, \bar{u})$ for um processo para o Problema (P) que satisfaz o princípio do máximo fraco clássico (Teorema 2.6), com $(\zeta, p, q, r, \lambda) \in L_m^1 \times W_n^{1,1} \times L_{m_b}^1 \times L_{m_g}^1 \times [0, +\infty)$, então tomando

$$(x^k(t), u^k(t), \zeta^k(t), p^k(t), q^k(t), r^k(t), \lambda_k) \equiv (\bar{x}, \bar{u}, \zeta, p, q, r, \lambda)$$

e

$$(\varepsilon^k(t), \eta^k(t), \theta^k(t), \vartheta^k, \nu^k) \equiv (0, 0, 0, 0, 0)$$

para cada $k \in \mathbb{N}$, podemos concluir que $(\bar{x}, \bar{u})$ também é um processo AWMP.

Os Exemplos 3.2 e 3.3, exibidos logo abaixo, exploram o fato do princípio do máximo fraco clássico não ser verificado e o princípio do máximo fraco assintótico ser satisfeito.

Exemplo 3.2 ([6, Exemplo 4.1]). Considere o seguinte problema de controle ótimo:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } x(1) \\ & \text{sobre } (x, u) \in W^{1,1}([0, 1]; \mathbb{R}) \times L^\infty([0, 1]; \mathbb{R}^2) \text{ satisfazendo} \\ & \quad \dot{x}(t) = u_1(t) \quad \text{q.t.p. em } [0, 1], \\ & \quad 0 = x(t) + u_1(t) + 2u_2(t) \quad \text{q.t.p. em } [0, 1], \\ & \quad 0 = u_1(t) + 2u_2(t) \quad \text{q.t.p. em } [0, 1]. \end{aligned}$$

O único processo factível é $(\bar{x}, (\bar{u}_1, \bar{u}_2)) = (0, (0, 0))$, consequentemente, ele é ótimo. Além disso, como a função Hamiltoniana não maximizada para este problema é dada por

$$\mathcal{H}(t, x, p, (q_1, q_2), (u_1, u_2)) = pu_1 + q_1(x + u_1 + 2u_2) + q_2(u_1 + 2u_2),$$

as condições do princípio do máximo fraco clássico (Teorema 2.6) são dadas por

$$\lambda + \|p\|_{L^\infty([0,1];\mathbb{R})} \neq 0, \tag{3.24}$$

$$\begin{aligned} -\dot{p}(t) &= q_1(t) & \text{q.t.p. em } [0, 1], \\ 0 &= p(t) + q_1(t) + q_2(t) & \text{q.t.p. em } [0, 1], \end{aligned} \tag{3.25}$$

$$0 = 2q_1(t) + 2q_2(t) \quad \text{q.t.p. em } [0, 1], \tag{3.26}$$

$$(p(0), -p(1)) = \lambda(0, 1), \tag{3.27}$$

em que $\lambda \in [0, +\infty)$, $p \in W^{1,1}([0, 1]; \mathbb{R})$ e $q = (q_1, q_2) \in L^1([0, 1]; \mathbb{R}^2)$.

De (3.26), $q_1(t) + q_2(t) = 0$ para quase todo $t \in [0, 1]$. Substituindo esse resultado em (3.25), pela continuidade de p em $[0, 1]$, segue que $p(t) = 0$ para todo $t \in [0, 1]$ e,

consequentemente, (3.27) implica em $\lambda = 0$. Logo, $\lambda + \|p\|_{L^\infty([0,1];\mathbb{R})} = 0$ e por (3.24) o sistema de equações não pode ter solução. Portanto, o princípio do máximo não é satisfeito.

Agora vamos mostrar que $(\bar{x}, (\bar{u}_1, \bar{u}_2)) = (0, (0, 0))$ é um processo AWMP. Com efeito, para todo $k \in \mathbb{N}$, tomamos $(x^k, (u_1^k, u_2^k)) = (0, (0, 0))$ e, para cada $k \in \mathbb{N}$ e quase todo ponto em $[0, 1]$, consideramos o seguinte sistema

$$\begin{aligned} \lambda_k + \|p^k\|_{L^\infty([0,1];\mathbb{R})} &\neq 0, \\ -\dot{p}^k(t) - \varepsilon^k(t) &= q_1^k(t), \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$-\eta_1^k(t) = p^k(t) + q_1^k(t) + q_2^k(t), \quad (3.29)$$

$$-\eta_2^k(t) = 2q_1^k(t) + 2q_2^k(t), \quad (3.30)$$

$$(p^k(0), -p^k(1)) - (\vartheta^k, \nu^k) = \lambda_k(0, 1), \quad (3.31)$$

em que $\{(p^k, (q_1^k, q_2^k), \lambda_k)\} \subset W^{1,1}([0, 1]; \mathbb{R}) \times L^1([0, 1]; \mathbb{R}^2) \times [0, +\infty)$, $\{(\varepsilon^k, (\eta_1^k, \eta_2^k))\} \subset L^1([0, 1]; \mathbb{R}) \times L^1([0, 1]; \mathbb{R}^2)$, $\{(\vartheta^k, \nu^k)\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\varepsilon^k \rightharpoonup 0$ em $L^1([0, 1]; \mathbb{R})$, $(\eta_1^k, \eta_2^k) \rightharpoonup (0, 0)$ em $L^1([0, 1]; \mathbb{R}^2)$, $\vartheta^k \rightarrow 0$ e $\nu^k \rightarrow 0$.

Tomando $(q_1^k(t), q_2^k(t)) \equiv (0, 0)$ para todo $k \in \mathbb{N}$, de (3.28), (3.29) e (3.30),

$$\dot{p}^k(t) = -\varepsilon^k(t), \quad p^k(t) = -\eta_1^k(t) \quad \text{e} \quad \eta_2^k(t) = 0 \quad (3.32)$$

para cada $k \in \mathbb{N}$ e quase todo ponto em $[0, 1]$. Além disso, de (3.31),

$$p^k(0) = \vartheta^k \quad \text{e} \quad p^k(1) = -\lambda_k - \nu^k \quad (3.33)$$

para cada $k \in \mathbb{N}$. Assim, como $p^k \in W^{1,1}([0, 1]; \mathbb{R})$ para cada $k \in \mathbb{N}$, de (3.32) e (3.33),

$$p^k(t) = p^k(0) + \int_0^t \dot{p}^k(s) ds = \vartheta^k - \int_0^t \varepsilon^k(s) ds$$

para cada $k \in \mathbb{N}$ e quase todo ponto em $[0, 1]$. Logo, considerando $\nu^k = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, de (3.33), para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$\lambda_k = -p^k(1) = -\vartheta^k + \int_0^1 \varepsilon^k(t) dt.$$

Finalmente, tomando $\vartheta^k = -1/k$ e $\varepsilon^k(t) \equiv 1/k$ para todo $k \in \mathbb{N}$, segue que

$$\begin{aligned} \lambda_k &= -\left(-\frac{1}{k}\right) + \int_0^1 \frac{1}{k} dt = \frac{2}{k}, \\ p^k(t) &= -\frac{1}{k} - \int_0^t \frac{1}{k} ds = -\frac{(t+1)}{k}, \\ \eta_1^k(t) &= -p^k(t) = \frac{t+1}{k} \end{aligned}$$

para cada $k \in \mathbb{N}$. Portanto, $\lambda_k + \|p^k\|_{L^\infty([0,1];\mathbb{R})} \neq 0$ para cada $k \in \mathbb{N}$ e, consequentemente, $(\bar{x}, (\bar{u}_1, \bar{u}_2)) = (0, (0, 0))$ é um processo AWMP.

O Exemplo 3.3, exibido logo abaixo, evidencia o fato de podermos aplicar as condições AWMP mesmo em problemas não regulares. No caso do exemplo abaixo, não valem as condições de regularidade de posto completo [27], de Mangasarian-Fromovitz [24, 30] e de posto constante [6]. Em problemas não regulares, o princípio do máximo clássico pode não valer; vale, porém, uma versão estendida, onde a variável adjunta (co-estado) não é necessariamente absolutamente contínua, mas uma função de variação limitada, e a equação adjunta contém um novo termo que envolve uma medida não-negativa e uma função “salto”. No caso do princípio do máximo assintótico, podemos trabalhar sem este novo termo e com a sequência de variáveis adjuntas absolutamente contínuas. Mais detalhes sobre problemas não regulares podem ser conferidos em, por exemplo, [9, 34, 35, 36, 61] e nas referências neles contidas.

Exemplo 3.3 (Problema não regular [36, Exemplo 1]). Sejam $S = -(\sigma + \alpha)$, $T = \sigma + \alpha$, $\sigma > 0$, $\alpha > 0$ e $\beta = \alpha^2/2$. O problema de controle ótimo não regular estudado neste exemplo é dado por:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } x_2(T) - x_2(S) \\ & \text{sobre } (x, u) \in W^{1,1}([0, 1]; \mathbb{R}^2) \times L^\infty([0, 1]; \mathbb{R}) \text{ satisfazendo} \\ & \quad \dot{x}_1(t) = u(t) \quad \text{q.t.p. em } [S, T], \\ & \quad \dot{x}_2(t) = x_1(t) \quad \text{q.t.p. em } [S, T], \\ & \quad 0 \geq \frac{1}{2}(u(t)^2 - 2x_1(t)) \quad \text{q.t.p. em } [S, T], \\ & \quad (x_1(S), x_1(T)) \in \{\beta\} \times \{\beta\}, \\ & \quad (x_2(S), x_2(T)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Em [36], Dmitruk e Osmolovskii provam que

$$\begin{aligned} ((\bar{x}_1(t), \bar{x}_2(t)), \bar{u}(t)) &= \left(\left(\frac{1}{2}(t + \sigma)^2, \frac{1}{6}(t + \sigma)^3 \right), t + \sigma \right), \quad \text{se } t \in [S, -\sigma), \\ ((\bar{x}_1(t), \bar{x}_2(t)), \bar{u}(t)) &= ((0, 0), 0), \quad \text{se } t \in [-\sigma, \sigma], \\ ((\bar{x}_1(t), \bar{x}_2(t)), \bar{u}(t)) &= \left(\left(\frac{1}{2}(t - \sigma)^2, \frac{1}{6}(t - \sigma)^3 \right), t - \sigma \right), \quad \text{se } t \in (\sigma, T] \end{aligned}$$

satisfaz as condições de uma versão do princípio do máximo clássico para problemas não regulares, intitulada por eles como *local minimum principle* (LMP). Neste exemplo, vamos mostrar que $((\bar{x}_1, \bar{x}_2), \bar{u})$ também é um processo AWMP. Com efeito, para todo $k \in \mathbb{N}$, tomamos $((x_1^k(t), x_2^k(t)), u^k(t)) \equiv ((\bar{x}_1(t), \bar{x}_2(t)), \bar{u}(t))$. Além disso, como a função Hamiltoniana não maximizada para o problema é dada por

$$\mathcal{H}(t, (x_1, x_2), (p_1, p_2), r, u) = p_1 u + p_2 x_1 + r \left[\frac{1}{2}(u^2 - 2x_1) \right],$$

para cada $k \in \mathbb{N}$ e quase todo ponto em $[S, T]$, vamos considerar o seguinte sistema

$$\begin{aligned} \lambda_k + \|p^k\|_{L^\infty} &\neq 0, \\ -\dot{p}_1^k(t) - \varepsilon_1^k(t) &= p_2^k(t) - r^k(t), \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$-\dot{p}_2^k(t) - \varepsilon_2^k(t) = 0, \quad (3.35)$$

$$-\eta^k(t) = p_1^k(t) + r^k(t)u^k(t), \quad (3.36)$$

$$r^k(t)(\max\{-(1/2)(u^k(t))^2 - 2x_1^k(t), 0\}) = \theta^k(t), \quad (3.37)$$

$$r^k(t) \leq 0, \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned} (p_1^k(S), -p_1^k(T)) - (\vartheta_1^k, \nu_1^k) &\in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \\ (p_2^k(S), -p_2^k(T)) - (\vartheta_2^k, \nu_2^k) &= \{-\lambda_k\} \times \{\lambda_k\}, \end{aligned} \quad (3.39)$$

em que $\{(p_1^k, p_2^k), r^k, \lambda_k\} \subset W_2^{1,1} \times L_1^1 \times [0, +\infty)$, $\{(\varepsilon_1^k, \varepsilon_2^k), \eta^k\} \subset L_2^1 \times L_1^1$, $\{(\vartheta^k, \nu^k)\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $(\varepsilon_1^k, \varepsilon_2^k) \rightarrow (0, 0)$ em L_2^1 , $\eta^k \rightarrow 0$ em L_1^1 , $\theta^k(t) \rightarrow 0$ quase todo ponto em $[S, T]$, $(\vartheta_1^k, \vartheta_2^k) \rightarrow (0, 0)$ e $(\nu_1^k, \nu_2^k) \rightarrow (0, 0)$.

Tomando $\varepsilon_2^k(t) \equiv 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, de (3.35),

$$\dot{p}_2^k(t) = \varepsilon_2^k(t) = 0$$

para cada $k \in \mathbb{N}$ e quase todo $t \in [S, T]$. Logo, p_2^k é constante para cada $k \in \mathbb{N}$ e, de (3.39), $p_2^k(t) = -\lambda_k + \vartheta_2^k$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e quase todo ponto em $[S, T]$. Assim, considerando $\lambda_k = 1$ e $\vartheta_2^k = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, segue que $p_2^k(t) \equiv -1$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Tomando

$$p_1^k(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}(t + \sigma), & \text{se } t \in [S, -\sigma), \\ 0, & \text{se } t \in [-\sigma, \sigma], \\ \frac{1}{2}(t - \sigma), & \text{se } t \in (\sigma, T] \end{cases}$$

para cada $k \in \mathbb{N}$, temos que

$$\dot{p}_1^k(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{se } t \in [S, -\sigma), \\ 0, & \text{se } t \in [-\sigma, \sigma], \\ \frac{1}{2}, & \text{se } t \in (\sigma, T] \end{cases}$$

para cada $k \in \mathbb{N}$. Portanto, de (3.34),

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} - \varepsilon_1^k(t) &= -1 - r^k(t) && \text{q.t.p. em } [S, -\sigma), \\ -\varepsilon_1^k(t) &= -1 - r^k(t) && \text{q.t.p. em } [-\sigma, \sigma], \\ -\frac{1}{2} - \varepsilon_1^k(t) &= -1 - r^k(t) && \text{q.t.p. em } (\sigma, T] \end{aligned}$$

para cada $k \in \mathbb{N}$. Consequentemente,

$$\begin{cases} r^k(t) = \varepsilon_1^k(t) - \frac{1}{2} & \text{q.t.p. em } [S, -\sigma), \\ r^k(t) = \varepsilon_1^k(t) - 1 & \text{q.t.p. em } [-\sigma, \sigma], \\ r^k(t) = \varepsilon_1^k(t) - \frac{1}{2} & \text{q.t.p. em } (\sigma, T] \end{cases} \quad (3.40)$$

para cada $k \in \mathbb{N}$. Como por (3.38), $r^k(t) \leq 0$ para cada $k \in \mathbb{N}$ e quase todo ponto em $[S, T]$, segue que

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^k(t) &\leq \frac{1}{2} & \text{q.t.p. em } [S, -\sigma), \\ \varepsilon_1^k(t) &\leq 1 & \text{q.t.p. em } [-\sigma, \sigma], \\ \varepsilon_1^k(t) &\leq \frac{1}{2} & \text{q.t.p. em } (\sigma, T] \end{aligned}$$

para cada $k \in \mathbb{N}$. Tomando $\varepsilon_1^k(t) \equiv 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, de (3.40),

$$\begin{aligned} r^k(t) &= -\frac{1}{2} & \text{q.t.p. em } [S, -\sigma), \\ r^k(t) &= -1 & \text{q.t.p. em } [-\sigma, \sigma], \\ r^k(t) &= -\frac{1}{2} & \text{q.t.p. em } (\sigma, T] \end{aligned}$$

para cada $k \in \mathbb{N}$. Logo, de (3.36),

$$\begin{aligned} -\eta^k(t) &= \frac{1}{2}(t + \sigma) + \left[-\frac{1}{2}(t + \sigma) \right] & \text{q.t.p. em } [S, -\sigma), \\ -\eta^k(t) &= 0 & \text{q.t.p. em } [-\sigma, \sigma], \\ -\eta^k(t) &= \frac{1}{2}(t - \sigma) + \left[-\frac{1}{2}(t - \sigma) \right] & \text{q.t.p. em } (\sigma, T] \end{aligned}$$

para cada $k \in \mathbb{N}$. Assim, $\eta^k(t) \equiv 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

De (3.37), para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \left(\max \left\{ -\frac{1}{2} \left[(t + \sigma)^2 - 2 \left(\frac{1}{2}(t + \sigma)^2 \right) \right] \right\} \right) &= \theta^k(t) & \text{q.t.p. em } [S, -\sigma), \\ -\frac{1}{2} (\max\{0, 0\}) &= \theta^k(t) & \text{q.t.p. em } [-\sigma, \sigma], \\ -\frac{1}{2} \left(\max \left\{ -\frac{1}{2} \left[(t - \sigma)^2 - 2 \left(\frac{1}{2}(t - \sigma)^2 \right) \right] \right\} \right) &= \theta^k(t) & \text{q.t.p. em } (\sigma, T]. \end{aligned}$$

Portanto, tomando $\theta^k(t) \equiv 0$ e $\vartheta_1^k = \nu_1^k = \nu_2^k = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, concluimos que $((\bar{x}_1, \bar{x}_2), \bar{u})$ é um processo AWMP.

4 UM MÉTODO DE LAGRANGIANO AUMENTADO PARA CONTROLE ÓTIMO

Em problemas de controle ótimo nem sempre podemos encontrar soluções exatas¹, mesmo que elas existam, tornando a verificação de condições como as fornecidas pelo Princípio do Máximo desafiadora. Felizmente, soluções aproximadas muitas vezes são suficientes. Numericamente, buscamos condições de otimalidade verificáveis em cada iteração, garantindo que a solução obtida a partir da k -ésima iteração seja satisfatória, permitindo a parada do algoritmo. Isso é respaldado por condições de otimalidade sequenciais, como por exemplo as condições AWMP.

Neste capítulo, apresentamos detalhadamente uma variante adequada do método de Lagrangiano aumentado clássico cujas condições AWMP podem ser usadas como critério geral de parada. A análise teórica teve como fonte de inspiração os trabalhos [10, 14, 45, 66]. Para uma simplificação no estudo desenvolvido, trabalhamos com uma versão restrita do Problema (P) , denotada por $(\hat{P})$, na qual

$$\ell(x(S), x(T)) = \ell(x(T))$$

e

$$x(S) = x_S$$

para algum vetor $x_S \in \mathbb{R}^n$ dado. As investigações da versão geral, isto é, problemas na forma de (P) , são pretensões para trabalhos futuros.

O método de Lagrangiano aumentado em problemas de programação não linear é amplamente reconhecido, destacado em trabalhos como [10, 66] para dimensões finitas e [14, 45] para dimensões infinitas. Apesar disso, existe uma escassez de discussões sobre sua aplicação em problemas de controle ótimo. Trabalhos anteriores, como por exemplo o estudo realizado por Aguiar, Camponogara e Foss em [1, 2], abordam problemas distintos de $(\hat{P})$, concentrando-se em Equações Diferenciais Algébricas com restrições mistas apenas na forma de igualdades.

Para nossas análises, consideramos as seguintes hipóteses:

($\hat{H}1$) A função $f(\cdot, x, u)$ é Lebesgue mensurável para cada (x, u) e existe uma função integrável $\hat{k}_f$ tal que, para todo $(x, u), (x', u') \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ e quase todo ponto em $[S, T]$,

$$|f(t, x, u) - f(t, x', u')| \leq \hat{k}_f(t)|(x, u) - (x', u')|.$$

($\hat{H}2$) O gráfico de U é um conjunto Borel mensurável e $U(t)$ é fechado quase todo ponto em $[S, T]$.

¹ No presente contexto, soluções exatas são entendidas como minimizadores locais fracos.

($\hat{H}3$) ℓ é Lipschitz em $\mathbb{R}^n$.

($\hat{H}4$) $(b, g)(\cdot, x, u)$ é mensurável para cada (x, u) .

($\hat{H}5$) A função $(b, g)(t, \cdot, \cdot)$ é continuamente diferenciável em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ para quase todo ponto em $[S, T]$ e existe uma função integrável $\hat{k}_{bg}$ tal que, para todo $(x, u), (x', u') \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ e quase todo ponto em $[S, T]$,

$$|(b, g)(t, x, u) - (b, g)(t, x', u')| \leq \hat{k}_{bg}(t)|(x, u) - (x', u')|.$$

($\hat{H}6$) Existem funções integráveis $\hat{c}_f$ e $\hat{c}_{bg}$ tais que $|f(t, x, u)| \leq \hat{c}_f(t)$ e $|(b, g)(t, x, u)| \leq \hat{c}_{bg}(t)$ para todo $(x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ e quase todo ponto em $[S, T]$.

($\hat{H}7$) $U(t)$ é limitado para quase todo ponto em $[S, T]$.

4.1 O MÉTODO

Na presente seção, apresentaremos o método de Lagrangiano aumentado para problemas na forma de $(\hat{P})$ cujas condições AWMP são utilizadas como um critério geral de parada. Mas, antes de detalharmos o algoritmo do método proposto, vamos considerar o seguinte conjunto:

$$\hat{W} := \left\{ (x, u) \in W_n^{1,1} \times \mathcal{U}_m \left| \begin{array}{ll} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) & \text{q.t.p. em } [S, T], \\ u(t) \in U(t) & \text{q.t.p. em } [S, T], \\ x(S) = x_S \end{array} \right. \right\}.$$

Por definição, para cada $u \in \mathcal{U}_m$ tal que $u(t) \in U(t)$ quase todo ponto em $[S, T]$, existe um único $x \in W_n^{1,1}$ tal que $(x, u) \in \hat{W}$. Com base nessa unicidade, dado $(x, u) \in \hat{W}$, dizemos que x é uma *trajetória correspondente a u*.

Consideramos também a seguinte definição de função Lagrangiano aumentado.

Definição 4.1. Para algum $\rho > 0$, definimos a *função Lagrangiano aumentado* $\mathcal{L}_\rho : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m_b} \times \mathbb{R}_+^{m_g} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\mathcal{L}_\rho(x, q, r, u) := \ell(x(T)) + \int_S^T L_\rho(t, x, q, r, u) dt$$

em que $L_\rho : [S, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m_b} \times \mathbb{R}_+^{m_g} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por

$$L_\rho(t, x, q, r, u) := \frac{\rho}{2} \left[\sum_{i=1}^{m_b} \left(b_i(t, x, u) + \frac{q_i}{\rho} \right)^2 + \sum_{j=1}^{m_g} \left(\max \left\{ g_j(t, x, u) + \frac{r_j}{\rho}, 0 \right\} \right)^2 \right].$$

Algoritmo 4.1 Método de Lagrangiano aumentado para controle ótimo

Escolha $u^0(t) \in U(t)$ quase todo ponto em $[S, T]$, $\lambda_0 \in [0, +\infty)$, $\gamma > 1$, $\rho_0 > 0$, $\tau \in (0, 1)$, $q_L, q_R \in \mathbb{R}^{m_b}$ e $r_R \in \mathbb{R}^{m_g}$ com $q_R > q_L$ e $r_R > 0$.

Calcule $x^0(t)$ usando $\dot{x}(t) = f(t, x(t), u^0(t))$ quase todo ponto em $[S, T]$, com $x(S) = x_S$.

Escolha $(\tilde{q}^0(t), \tilde{r}^0(t)) \in R_B$ quase todo ponto em $[S, T]$, em que

$$R_B := \left\{ (\phi(t), \psi(t)) \in \mathbb{R}^{m_b+m_g} \mid \begin{array}{l} (\phi, \psi) \in L_{m_b}^1 \times L_{m_g}^1 \text{ e} \\ (q_L, 0) \leq (\phi(t), \psi(t)) \leq (q_R, r_R) \quad \forall t \in [S, T] \end{array} \right\}.$$

Tome $\varrho \in \partial \ell(x^0(T))$, $\omega \in D_x f(t, x^0, u^0)$ e encontre p^0 resolvendo

$$\dot{p}(t) = -\omega^T p - \sum_{i=1}^{m_b} (-\tilde{q}^0) \nabla_x b_i(t, x^0, u^0) - \sum_{j=1}^{m_g} (-\tilde{r}^0) \nabla_x g_j(t, x^0, u^0),$$

com $p(T) = -\lambda_0 \varrho$.

Para todo $t \in [S, T]$ e $j = 1, \dots, m_g$, $V_j^0(t) := \max \{g_j(t, x^0(t), u^0(t)), 0\}$ e $(q^0(t), r^0(t)) := (-\tilde{q}^0(t), -\tilde{r}^0(t))$.

$k = 0$.

Enquanto $(x^k, u^k, p^k, q^k, r^k, \lambda_k)$ não satisfaz um critério de parada adequado, **faça**

Passo 1. Calcule um controle *subótimo* u^{k+1} , a trajetória correspondente x^{k+1} e os multiplicadores associados (λ_{k+1}, p^{k+1}) para $(\hat{P}_k)$:

$$\text{minimizar } \mathcal{L}_{\rho_k}(x, \tilde{q}^k, \tilde{r}^k, u) \quad \text{sobre } (x, u) \in \hat{W}.$$

(As condições para um determinado controle ser subótimo para $(\hat{P}_k)$ podem ser encontradas no Lema 4.1, apresentado mais a frente).

Passo 2. Para todo $t \in [S, T]$ e $j = 1, \dots, m_g$,

$$V_j^{k+1}(t) := \max \{g_j(t, x^{k+1}(t), u^{k+1}(t)), -\tilde{r}_j^k(t)/\rho_k\}.$$

Se

$$\begin{aligned} \max \{ \|b(\cdot, x^{k+1}(\cdot), u^{k+1}(\cdot))\|_{L_{m_b}^1}, \|V^{k+1}\|_{L_{m_g}^1} \} \\ \leq \tau \max \{ \|b(\cdot, x^k(\cdot), u^k(\cdot))\|_{L_{m_b}^1}, \|V^k\|_{L_{m_g}^1} \}, \end{aligned}$$

então $\rho_{k+1} = \rho_k$; Caso contrário, $\rho_{k+1} = \gamma \rho_k$.

Passo 3. Para todo $t \in [S, T]$, $i = 1, \dots, m_b$ e $j = 1, \dots, m_g$, $q_i^{k+1}(t) := -(\tilde{q}_i^k(t) + \rho_k b_i(t, x^{k+1}(t), u^{k+1}(t)))$, $r_j^{k+1}(t) := -\max \{\tilde{r}_j^k(t) + \rho_k g_j(t, x^{k+1}(t), u^{k+1}(t)), 0\}$ e $(\tilde{q}_i^{k+1}(t), \tilde{r}_j^{k+1}(t)) := \text{proj}_{R_B}(-q_i^{k+1}(t), -r_j^{k+1}(t))$.

Passo 4. $k = k + 1$.

As condições para um determinado controle ser subótimo para $(\hat{P}_k)$ podem ser encontradas no Lema 4.1 apresentado logo abaixo.

Lema 4.1. *Se as Hipóteses $(\hat{H}1)$ - $(\hat{H}7)$ forem válidas, então para cada sequência de números positivos ϵ_{k+1} , com $\epsilon_{k+1} \rightarrow 0$, existem $\{(x^{k+1}, u^{k+1})\} \subset \hat{W}$ (para cada $k \in \mathbb{N}$, x^{k+1} é a trajetória correspondente a u^{k+1}), $\{(\lambda_{k+1}, p^{k+1}, \xi^{k+1})\} \subset (0, +\infty] \times W_n^{1,1} \times L_m^1$, $\{(\varepsilon^k, \eta^k)\} \subset L_n^1 \times L_m^1$ e $\{\nu^k\} \subset \mathbb{R}^n$, tal que, para cada $k \in \mathbb{N}$,*

$$\mathcal{L}_{\rho_k}(x^{k+1}, \tilde{q}^k, \tilde{r}^k, u^{k+1}) \leq \inf_{(x,u) \in \hat{W}} \mathcal{L}_{\rho_k}(x, \tilde{q}^k, \tilde{r}^k, u) + \epsilon_{k+1}^2$$

para cada $\rho_k \in [0, +\infty)$ e $(\tilde{q}^k, \tilde{r}^k) \in R_B$. Além disso, para cada $k \in \mathbb{N}$ e quase todo ponto em $[S, T]$,

$$\lambda_{k+1} + \|p^{k+1}\|_{L_n^\infty} = 1;$$

$$(-\dot{p}^{k+1}(t), \xi^{k+1}(t)) - (\varepsilon^k(t), \eta^k(t)) \in \text{co} \partial_{x,u} \hat{\mathcal{H}}_{\rho_k}(t, x^{k+1}(t), p^{k+1}(t), \tilde{q}^k(t), \tilde{r}^k(t), u^{k+1}(t));$$

$$\xi^{k+1}(t) \in \text{co} \mathcal{N}_{U(t)}(u^{k+1}(t));$$

$$-p^{k+1}(T) - \nu^{k+1} \in \lambda_{k+1} \partial \ell(x^{k+1}(T));$$

em que $\hat{\mathcal{H}}_\rho(t, x, p, \tilde{q}, \tilde{r}, u) := p \cdot f(t, x, u) - L_\rho(t, x, \tilde{q}, \tilde{r}, u)$. Além disso, $\varepsilon^k \rightarrow 0$ em L_n^1 , $\eta^k \rightarrow 0$ em L_m^1 e $\nu^{k+1} \rightarrow 0$.

Demonstração. Definindo o mapeamento $d_{\hat{W}} : \hat{W} \times \hat{W} \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$d_{\hat{W}}((x, u), (x', u')) := |x(S) - x'(S)| + \int_S^T |u(t) - u'(t)| dt,$$

de forma semelhante a prova da Afirmação 3.1, podemos concluir que $(\hat{W}, d_{\hat{W}})$ é um espaço métrico completo e que $\mathcal{L}_{\rho_k}(\cdot, \tilde{q}^k, \tilde{r}^k, \cdot)$ é semicontínua inferior em $(\hat{W}, d_{\hat{W}})$ para cada $k \in \mathbb{N}$, $\rho_k \in [0, +\infty)$ e $(\tilde{q}^k, \tilde{r}^k) \in R_B$. Portanto, pelo Princípio Variacional de Ekeland (Teorema 2.2), existe uma sequência $\{(x^{k+1}, u^{k+1})\} \subset \hat{W}$ (para cada $k \in \mathbb{N}$, x^{k+1} é a trajetória correspondente a u^{k+1}) tal que, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{L}_{\rho_k}(x^{k+1}, \tilde{q}^k, \tilde{r}^k, u^{k+1}) \leq \inf_{(x,u) \in \hat{W}} \mathcal{L}_{\rho_k}(x, \tilde{q}^k, \tilde{r}^k, u) + \epsilon_{k+1}^2$$

e

$$\mathcal{L}_{\rho_k}(x^{k+1}, \tilde{q}^k, \tilde{r}^k, u^{k+1}) \leq \mathcal{L}_{\rho_k}(x, \tilde{q}^k, \tilde{r}^k, u) + \epsilon_{k+1} d_{\hat{W}}((x^{k+1}, u^{k+1}), (x, u)) \quad (4.1)$$

para cada $k \in \mathbb{N}$, $\rho_k \in [0, +\infty)$, $(\tilde{q}^k, \tilde{r}^k) \in R_B$ e todo $(x, u) \in \hat{W}$.

Para concluirmos o resultado, seguindo o mesmo raciocínio dos Passos 3 e 4 da demonstração do Teorema 3.1, basta escrevermos (4.1) como um problema de controle ótimo, usar o princípio do máximo fraco (Teorema 2.5) e, para todo $k \in \mathbb{N}$ e $t \in [S, T]$, definirmos

$$\nu^{k+1} := 0 \quad \text{e} \quad (\varepsilon^{k+1}(t), \eta^{k+1}(t)) := (0, -\epsilon_{k+1} \gamma^{k+1}(t))$$

para alguma função Lebesgue mensurável γ^{k+1} tal que $\gamma^{k+1}(t) \in B$ para cada $k \in \mathbb{N}$ e quase todo ponto em $[S, T]$. A existência da função Lebesgue mensurável γ^{k+1} tal que $\gamma^{k+1}(t) \in B$ para cada $k \in \mathbb{N}$ e quase todo ponto em $[S, T]$ é garantida por algum teorema de seleção mensurável adequado, por exemplo, o Teorema de Seleção Mensurável de Aumann (Teorema B.14). $\square$

4.2 UM ESTUDO DA OTIMALIDADE E DA FACTIBILIDADE

O teorema a seguir, sob algumas hipóteses, garante uma propriedade de otimalidade para os pontos de acumulação das sequências geradas pelo Algoritmo 4.1, quando eles existem.

Teorema 4.1. *Seja $(\bar{x}, \bar{u})$ um ponto de acumulação da sequência $\{(x^k, u^k)\}$ gerada pelo Algoritmo 4.1 no sentido de que, por meio da extração de uma subsequência (não renomearemos), $x^k \rightarrow \bar{x}$ uniformemente e $u^k \xrightarrow{\text{med}} \bar{u}$. Se $(\bar{x}, \bar{u})$ é um processo factível para $(\hat{P})$ e as Hipóteses $(\hat{H}1)$ - $(\hat{H}7)$ são satisfeitas, então $(\bar{x}, \bar{u})$ é um processo AWMP.*

Demonstração. Pelas Hipóteses $(\hat{H}1)$ - $(\hat{H}7)$, o Passo 1 do Algoritmo 4.1 e o Lema 4.1, as Condições (i), (iii) e (v) da Definição 3.1 são satisfeitas para cada $k \in \mathbb{N}$ e quase todo ponto em $[S, T]$, com $\nu^{k+1} \rightarrow 0$. A Condição (ii) também é uma consequência do Lema 4.1, sendo suficiente definir $q_i^{k+1}(t) := -(\tilde{q}_i^k(t) + \rho_k b_i(t, x^{k+1}(t), u^{k+1}(t)))$ e $r_j^{k+1}(t) := -\max\{\tilde{r}_j^k(t) + \rho_k g_j(t, x^{k+1}(t), u^{k+1}(t)), 0\}$ para todo $k \in \mathbb{N}$, $i = 1, \dots, m_b$, $j = 1, \dots, m_g$ e $t \in [S, T]$. A convergência de $\{(\varepsilon^k, \eta^k)\}$ segue diretamente do Lema 4.1.

Para verificar a validade da Condição (iv) da Definição 3.1, tomamos $\theta_j^{k+1}(t) := r_j^{k+1}(t)g_j^-(t, x^{k+1}(t), u^{k+1}(t))$ para todo $k \in \mathbb{N}$, $j = 1, \dots, m_g$ e todo $t \in [S, T]$. Além disso, dado que $u^k \xrightarrow{\text{med}} \bar{u}$, pelo Teorema de Riesz (Teorema B.11), podemos considerar, através da extração de uma subsequência (não renomearemos), que $u^k(t) \rightarrow \bar{u}(t)$ quase todo ponto em $[S, T]$. Logo, pela convergência uniforme de $\{x^k\}$ e a continuidade de $g_j(t, \cdot, \cdot)$ quase todo ponto em $[S, T]$, com $j = 1, \dots, m_g$, segue que $g_j^{k+1}(t) = g_j(t, x^{k+1}(t), u^{k+1}(t)) \rightarrow \bar{g}_j(t) = g_j(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))$ quase todo ponto em $[S, T]$, com $j = 1, \dots, m_g$. Vamos analisar os dois casos a seguir:

- (a) $\{\rho_k\}$ é limitada. Nesse caso, concluímos que existem k_0 e $\bar{\rho} > 0$ tais que $\rho_k = \bar{\rho}$ para todo $k \geq k_0$. Isso significa que o Algoritmo 4.1 encontrou uma sequência em que

$$\begin{aligned} \max\{\|b(\cdot, x^{k+1}(\cdot), u^{k+1}(\cdot))\|_{L_{m_b}^1}, \|V^{k+1}\|_{L_{m_g}^1}\} \\ \leq \tau^k \max\{\|b(\cdot, x^{k_0}(\cdot), u^{k_0}(\cdot))\|_{L_{m_b}^1}, \|V^{k_0}\|_{L_{m_g}^1}\} \quad \forall k \geq k_0. \end{aligned}$$

Como $\tau \in (0, 1)$, tomando o limite com $k \rightarrow \infty$, $\|V^{k+1}\|_{L_{m_g}^1} \rightarrow 0$. Assim, de acordo com Teorema B.6, podemos considerar, através da extração de uma subsequência (não renomearemos), que

$$V_j^{k+1}(t) = \max\{g_j^{k+1}(t), -\tilde{r}_j^k(t)/\rho_k\} \rightarrow 0 \quad (4.2)$$

quase todo ponto em $[S, T]$, com $j = 1, \dots, m_g$. Fixamos arbitrariamente $t \in [S, T]$ e $j \in \{1, \dots, m_g\}$, e consideramos dois subcasos:

- (i) Definimos $\mathbb{N}_1 := \{k : V_j^{k+1}(t) = -\tilde{r}_j^k(t)/\rho_k\}$. Se $\mathbb{N}_1$ for vazio ou finito, é suficiente excluir o Subcaso (i) (considerando uma subsequência) e focar apenas no Subcaso (ii), exibido adiante. Caso contrário, para $k \in \mathbb{N}_1$,

$$g_j^{k+1}(t) \leq \frac{-\tilde{r}_j^k(t)}{\rho_k} \Leftrightarrow \tilde{r}_j^k(t) + \rho_k g_j^{k+1}(t) \leq 0.$$

Logo, $r_j^{k+1}(t) = -\max\{\tilde{r}_j^k(t) + \rho_k g_j^{k+1}(t), 0\} = 0$ para $k \in \mathbb{N}_1$ e

$$\theta_j^{k+1}(t) = r_j^{k+1}(t)g_j^-(t, x^{k+1}(t), u^{k+1}(t)) = 0, \quad k \in \mathbb{N}_1.$$

- (ii) Definimos $\mathbb{N}_2 := \{k : V_j^{k+1}(t) = g_j^{k+1}(t)\}$. Se $\mathbb{N}_2$ for vazio ou tiver um número finito de elementos, então é suficiente (considerando uma subsequência) excluir o Subcaso (ii) e trabalhar apenas com o Subcaso (i). Caso contrário, para $k \in \mathbb{N}_2$,

$$g_j^{k+1}(t) \geq \frac{-\tilde{r}_j^k(t)}{\rho_k} \Leftrightarrow \tilde{r}_j^k(t) + \rho_k g_j^{k+1}(t) \geq 0.$$

Assim, $r_j^{k+1}(t) = -\max\{\tilde{r}_j^k(t) + \rho_k g_j^{k+1}(t), 0\} = -\tilde{r}_j^k(t) - \rho_k g_j^{k+1}(t)$, $k \in \mathbb{N}_2$, e $\{r_j^{k+1}(t)\}$ é uma sequência limitada quase todo ponto em $[S, T]$ (veja a definição de $\tilde{r}^k$ no Passo 3 do Algoritmo 4.1; note ainda que $\{g_j^{k+1}(t)\}$ é convergente, e portanto limitada). Além disso, por (4.2), quando $k \in \mathbb{N}_2$ e $k \rightarrow \infty$,

$$g_j^-(t, x^{k+1}(t), u^{k+1}(t)) = \max\{-g_j^{k+1}(t), 0\} \rightarrow 0.$$

Logo,

$$\theta_j^{k+1}(t) = r_j^{k+1}(t)g_j^-(t, x^{k+1}(t), u^{k+1}(t)) \rightarrow 0$$

sempre que $k \in \mathbb{N}_2$ e $k \rightarrow \infty$.

Em síntese, $\theta_j^{k+1}(t) \rightarrow 0$ quase todo ponto em $[S, T]$, com $j = 1, \dots, m_g$. Além disso, é imediato que $\{\theta^{k+1}\} \subset \mathcal{C}$.

- (b) $\rho_k \rightarrow +\infty$. Novamente, fixamos arbitrariamente $t \in [S, T]$ e $j \in \{1, \dots, m_g\}$, e consideramos dois subcasos:

- (i) Definimos $\mathbb{N}_3 := \{k \in \mathbb{N} : g_j^{k+1}(t) \geq 0\}$. Para $k \in \mathbb{N}_3$,

$$g_j^-(t, x^{k+1}(t), u^{k+1}(t)) = \max\{-g_j^{k+1}(t), 0\} = 0$$

e, conseqüentemente,

$$\theta_j^{k+1}(t) = r_j^{k+1}(t)g_j^-(t, x^{k+1}(t), u^{k+1}(t)) = 0.$$

- (ii) Definimos $\mathbb{N}_4 := \{k \in \mathbb{N} : g_j^{k+1}(t) < 0\}$. Se o conjunto $\mathbb{N}_4$ for vazio ou conter um número finito de elementos, por meio de uma subsequência, podemos excluir o Subcaso (ii). Portanto, só precisamos analisar o caso em que $\mathbb{N}_4$ possui infinitos elementos. Para isso, observe que $\{g_j^{k+1}(t)\}$ é limitada quase todo ponto em $[S, T]$, já que é convergente, e $\{\tilde{r}_j^k(t)\}$ é uniformemente limitada por construção (vide Passo 3 do Algoritmo 4.1). Assim, $\tilde{r}_j^k(t) + \rho_k g_j^{k+1}(t) < 0$ para $k \in \mathbb{N}_4$ suficientemente grande. Logo,

$$r_j^{k+1}(t) = -\max\{\tilde{r}_j^k(t) + \rho_k g_j^{k+1}(t), 0\} = 0,$$

para $k \in \mathbb{N}_4$ suficientemente grande. Consequentemente,

$$\theta_j^{k+1}(t) = r_j^{k+1}(t) g_j^-(t, x^{k+1}(t), u^{k+1}(t)) = 0$$

para $k \in \mathbb{N}_4$ suficientemente grande.

Por (i) e (ii), $\theta_j^{k+1}(t) \rightarrow 0$ quase todo ponto em $[S, T]$, com $j = 1, \dots, m_g$. Além disso, como no Subcaso (a), é imediato que $\{\theta^{k+1}\} \subset \mathcal{C}$.

Portanto, dos Subcasos (a) e (b), verificamos a validade da Condição (iv) da Definição 3.1 e concluímos o resultado. $\square$

No Teorema 4.1, assumimos a factibilidade do processo $(\bar{x}, \bar{u})$. Infelizmente, não podemos garantir se essa propriedade é sempre válida ou não. No entanto, podemos assegurar que $(\bar{x}, \bar{u})$ é um forte candidato à factibilidade, como pode ser visto no Teorema 4.2 apresentado logo abaixo. As ideias apresentadas aqui são derivadas de [13, 14], onde os autores também encontraram um problema na verificação da factibilidade do ponto limite da sequência gerada pelo algoritmo do tipo Lagrangiano aumentado proposto por eles, embora no contexto das condições AKKT. Como o método de Lagrangiano aumentado é, essencialmente, um método de penalidade, a dificuldade em demonstrar a factibilidade dos pontos de acumulação das sequências geradas já era, de fato, esperada.

Teorema 4.2. *Seja $(\bar{x}, \bar{u})$ um ponto de acumulação da sequência $\{(x^k, u^k)\}$ gerada pelo Algoritmo 4.1 no sentido de que, por meio da extração de uma subsequência (não renomearemos), $x^k \rightarrow \bar{x}$ uniformemente e $u^k \xrightarrow{\text{med}} \bar{u}$. Suponha que as Hipóteses $(\hat{H}1)$ - $(\hat{H}7)$ sejam satisfeitas. Além disso, assuma que:*

- $(\hat{H}8)$ *existam constantes positivas M_1 e M_2 , com $|\varepsilon^k(t)| \leq M_1$ e $|\eta^k(t)| \leq M_2$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e quase todo ponto em $[S, T]$, em que as sequências $\{\varepsilon^k\} \subset L_n^1$ e $\{\eta^k\} \subset L_m^1$ são dadas pelo Lema 4.1.*

Então, $(\bar{x}, \bar{u})$ é um processo estacionário para o Problema (P_P) :

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} \quad \int_S^T \frac{1}{2} \left[\sum_{i=1}^{m_b} (b_i(t, x(t), u(t)))^2 + \sum_{j=1}^{m_g} (\max\{g_j(t, x(t), u(t)), 0\})^2 \right] dt \\ & \text{sobre} \quad (x, u) \in \hat{W}. \end{aligned}$$

Demonstração. Primeiro, verificamos a viabilidade de $(\bar{x}, \bar{u})$ para o Problema (P_P) .

Como $u^k \xrightarrow{\text{med}} \bar{u}$, pelo Teorema de Riesz (Teorema B.11), podemos considerar, extraíndo uma subsequência (não renomearemos), que $u^k(t) \rightarrow \bar{u}(t)$ quase todo ponto em $[S, T]$. Assim, $\bar{u}(t) \in U(t)$ quase todo ponto em $[S, T]$. Além disso, pelo Lema 4.1 e pela Hipótese $(\hat{H}6)$, $\{\dot{x}^k\}$ é uniformemente integravelmente limitada. Portanto, pelo teorema de Dunford-Pettis (Teorema 2.4), podemos escolher uma subsequência (novamente, não renomearemos) de modo que $\{\dot{x}^k\}$ convirja fracamente em L_n^1 para alguma função $\varsigma \in L_n^1$. Portanto, definindo $\tilde{x}(t) := \bar{x}(S) + \int_S^t \varsigma(s) ds$, concluímos que $\dot{\tilde{x}}(t) = \varsigma(t)$ quase todo ponto em $[S, T]$, $\tilde{x}(S) = \bar{x}(S)$ e $x^k(t) \rightarrow \tilde{x}(t)$ uniformemente. Devido à unicidade do limite, $\tilde{x} = \bar{x}$ em $W_n^{1,1}$. No entanto, $\dot{x}^k(t) = f(t, x^k(t), u^k(t))$ para cada $k \in \mathbb{N}$ e quase todo ponto em $[S, T]$. Integrando ambos os lados da igualdade de S até t , tomando o limite com $k \rightarrow \infty$, usando a convergência fraca de $\{\dot{x}^k\}$, a convergência uniforme de $\{x^k\}$ e a convergência quase todo ponto em $[S, T]$ de $\{u^k\}$ juntamente com a Hipótese $(\hat{H}6)$ e o Teorema da Convergência Dominada (Teorema B.9), concluímos que $\dot{\tilde{x}}(t) = f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))$ quase todo ponto em $[S, T]$. Portanto, o processo $(\bar{x}, \bar{u})$ é viável para o Problema (P_P) .

Agora, consideramos os dois seguintes casos.

Caso 1: $\{\rho_k\}$ tem uma subsequência limitada.

Da mesma forma que foi feito no Subcaso (a) da prova do Teorema 4.1, podemos concluir que

$$\max\{\|b(\cdot, x^{k+1}(\cdot), u^{k+1}(\cdot))\|_{L_{m_b}^1}, \|V^{k+1}\|_{L_{m_g}^1}\} \rightarrow 0.$$

Assim, pelo Teorema B.6, podemos considerar, através da extração de subsequências (não renomearemos), que $b(t, x^k(t), u^k(t)) \rightarrow 0$ e $V^k(t) \rightarrow 0$ quase todo ponto em $[S, T]$. Pela continuidade de $(b, g)(\cdot)$ (vide Hipótese $(\hat{H}5)$) e pelas convergências de $\{x^k\}$ e $\{u^k\}$, segue que $b(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) = 0$ quase todo ponto em $[S, T]$. Além disso, como

$$g_j(t, x^{k+1}(t), u^{k+1}(t)) \leq \max\{g_j(t, x^{k+1}(t), u^{k+1}(t)), -\tilde{r}_j^k(t)/\rho_k\} = V_j^{k+1}(t)$$

para todo $k \in \mathbb{N}$, $j = 1, \dots, m_g$ e quase todo ponto em $[S, T]$, podemos concluir que $g(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) \leq 0$ quase todo ponto em $[S, T]$.

Portanto, $(\bar{x}, \bar{u})$ é uma solução ótima global para o Problema (P_P) .

Caso 2: $\{\rho_k\}$ não possui uma subsequência limitada.

Usando o Lema 4.1 e definindo

$$\begin{aligned} &(\hat{p}^{k+1}(t), \hat{\xi}^{k+1}(t), \hat{\varepsilon}^{k+1}(t), \hat{\eta}^{k+1}(t), \hat{\nu}^{k+1}(t)) \\ &:= \rho_k^{-1}(p^{k+1}(t), \xi^{k+1}(t), \varepsilon^{k+1}(t), \eta^{k+1}(t), \nu^{k+1}(t)) \end{aligned}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$ e $t \in [S, T]$, segue que

$$\hat{\xi}^{k+1}(t) \in \text{co}\mathcal{N}_{U(t)}(u^{k+1}(t)), \quad \hat{p}^{k+1}(T) = -\rho_k^{-1}\lambda_{k+1}\nabla_x \ell(x^{k+1}(T)) - \hat{\nu}^{k+1} \quad (4.3)$$

e

$$\begin{aligned} &(-\dot{\hat{p}}^{k+1}(t), \hat{\xi}^{k+1}(t)) - (\hat{\varepsilon}^{k+1}(t), \hat{\eta}^{k+1}(t)) \in \text{co}\partial_{x,u}(\hat{p}^{k+1}(t) \cdot f(t, x^{k+1}(t), u^{k+1}(t))) \\ &\quad - \left\{ \left[\sum_{i=1}^{m_b} \hat{q}_i^{k+1}(t) \nabla_{x,u} b_i^{k+1}(t) + \sum_{j=1}^{m_g} \hat{r}_j^{k+1}(t) \nabla_{x,u} g_j^{k+1}(t) \right] \right\}, \quad (4.4) \end{aligned}$$

para cada $k \in \mathbb{N}$ e quase todo ponto em $[S, T]$, com

$$\hat{q}_i^{k+1}(t) := b_i^{k+1}(t) + \frac{\tilde{q}_i^k(t)}{\rho_k} \quad \text{e} \quad \hat{r}_j^{k+1}(t) := \max \left\{ g_j^{k+1}(t) + \frac{\tilde{r}_j^k(t)}{\rho_k}, 0 \right\}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$, $i = 1, \dots, m_b$, $j = 1, \dots, m_g$ e $t \in [S, T]$.

Agora, observe que, pelo Algoritmo 4.1 e pela Hipótese ($\hat{H}6$), existe uma função integrável $\hat{c}$ tal que $|\hat{q}_i^{k+1}(t)| + |\hat{r}_j^{k+1}(t)| \leq \hat{c}(t)$ quase todo ponto em $[S, T]$. Além disso, pela Hipótese ($\hat{H}1$) e as conclusões da Observação 2.4, $\text{co}\partial_{x,u}(\hat{p}^{k+1}(t) \cdot f(t, x^{k+1}(t), u^{k+1}(t))) = \hat{p}^{k+1}(t) D_{x,u} f(t, x^{k+1}(t), u^{k+1}(t))$ e $D_x f(t, x^{k+1}(t), u^{k+1}(t)) \subset \hat{k}_f(t) B$ quase todo ponto em $[S, T]$, e de acordo com a Hipótese ($\hat{H}5$), $\nabla_x(b, g)$ é limitada por uma função integrável quase todo ponto em $[S, T]$. Assim, por (4.4) e pela Hipótese ($\hat{H}8$), garantimos a existência de uma função integrável $\hat{K}$ tal que, para cada $k \in \mathbb{N}$ e quase todo ponto em $[S, T]$,

$$|\dot{\hat{p}}^{k+1}(t)| \leq \hat{k}_f(t) |\hat{p}^{k+1}(t)| + \hat{K}(t).$$

Portanto, pela desigualdade de Gronwall (Lema B.1),

$$|\hat{p}^{k+1}(t)| \leq \exp(\|\hat{k}_f\|_{L_1^1}) \left[|\hat{p}^{k+1}(T)| + \|\hat{K}\|_{L_1^1} \right]$$

para todo $k \in \mathbb{N}$ e $t \in [S, T]$. Por (4.3), vemos que $\hat{p}^{k+1}(T) \rightarrow 0$, então $\{\hat{p}^{k+1}(T)\}$ é limitada. Consequentemente, existe uma constante $M > 0$ tal que

$$|\hat{p}^{k+1}(t)| \leq M.$$

Pelo teorema de Dunford-Pettis (Teorema 2.4), por meio da extração de uma subsequência, segue que, para alguma função absolutamente contínua $p \in W_n^{1,1}$, $\hat{p}^{k+1} \rightarrow p$ uniformemente e $\dot{\hat{p}}^{k+1} \rightharpoonup \dot{p}$ em L_n^1 .

Similarmente, podemos garantir (através de uma subsequência, se necessário) que $\hat{\xi}^{k+1} \rightharpoonup \xi$ para algum $\xi \in L_m^1$. Além disso, pela Hipótese ($\hat{H}7$), as sequências $\{\varepsilon^{k+1}(t)\}$

e $\{\eta^{k+1}(t)\}$ são uniformemente limitadas. Consequentemente, $\hat{\varepsilon}^{k+1}(t) \rightarrow 0$ e $\hat{\eta}^{k+1}(t) \rightarrow 0$ quase todo ponto em $[S, T]$.

A partir das convergências de $\{x^k\}$ e $\{u^k\}$, da continuidade de $(b, g)(t, \cdot, \cdot)$ em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ quase todo ponto em $[S, T]$, e da limitação uniforme de $\{\bar{q}^k(t)\}$ e $\{\hat{r}^k(t)\}$ para todo $t \in [S, T]$ garantida pelo Algoritmo 4.1, segue que

$$\hat{q}^{k+1}(t) \rightarrow \bar{b}(t) \quad \text{e} \quad \hat{r}^{k+1}(t) \rightarrow \max \{\bar{g}(t), 0\}$$

quase todo ponto em $[S, T]$.

Uma modificação direta na prova do Teorema da Compacidade das Trajetórias [23, Teorema 3.1.7, p. 118] e um apelo às propriedades de semicontinuidade superior dos cones normais limites e subdiferenciais limites, permitem-nos tomar limite nas relações (4.3) e (4.4) e concluir que

$$\begin{aligned} (-\dot{p}(t), \xi(t)) &\in \text{co} \partial_{x,u}(p(t) \cdot f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))) \\ &\quad - \left\{ \left(\sum_{i=1}^{m_b} \bar{b}_i(t) \nabla_{x,u} \bar{b}_i(t) + \sum_{j=1}^{m_g} \max\{\bar{g}_j(t), 0\} \nabla_{x,u} \bar{g}_j(t) \right) \right\}, \\ \xi(t) &\in \text{co} \mathcal{N}_{U(t)}(\bar{u}(t)), \\ p(T) &= 0 \end{aligned}$$

quase todo ponto em $[S, T]$.

Portanto, $(\bar{x}, \bar{u})$ é um processo estacionário para o Problema (P_P) . $\square$

4.3 APLICAÇÕES

Nesta seção, apresentamos algumas aplicações do método de Lagrangiano aumentado para problemas de controle ótimo proposto neste trabalho (Algoritmo 4.1). A implementação computacional foi realizada no MATLAB[®] [56]. Tomamos $\rho_0 := 10^{-2}$, $\gamma := 1.71$ e $\tau := 10^{-3}$. O critério geral de parada para o Algoritmo 4.1 foi composto pelas Condições (i)-(v) da Definição 3.1. Utilizamos uma precisão de 10^{-5} . Adotamos 10^3 como o número máximo de iterações e 80 pontos para discretizar uniformemente o intervalo $[S, T]$. Para ilustrar a versatilidade do algoritmo proposto, apresentamos duas estratégias distintas para resolver os Subproblemas $(\hat{P}_k)$.

4.3.1 Estratégia 1

O Lema 4.1 fornece a existência e a caracterização de soluções subótimas para os Subproblemas $(\hat{P}_k)$, mas não estabelece condições para o cálculo delas. O próximo resultado, inspirado no estudo desenvolvido por Hamel em [43], garante que, para cada $k \in \mathbb{N}$, qualquer método capaz de fornecer um ϵ_k -minimizador para o Subproblema $(\hat{P}_k)$, com $\epsilon_k > 0$ para cada $k \in \mathbb{N}$ e $\epsilon_k \rightarrow 0$, cumpre o critério do Passo 1 do Algoritmo 4.1.

Proposição 4.1. *Sejam $\{\epsilon_{k+1}\}$ uma sequência de números positivos, com $\epsilon_{k+1} \rightarrow 0$, e $\{(\hat{x}^{k+1}, \hat{u}^{k+1})\} \subset \hat{W}$, tais que, para cada $k \in \mathbb{N}$, $\rho_k \in [0, +\infty)$ e $(\tilde{q}^k, \tilde{r}^k) \in R_B$,*

$$\mathcal{L}_{\rho_k}(\hat{x}^{k+1}, \tilde{q}^k, \tilde{r}^k, \hat{u}^{k+1}) \leq \inf_{(x,u) \in \hat{W}} \mathcal{L}_{\rho_k}(x, \tilde{q}^k, \tilde{r}^k, u) + \epsilon_{k+1}^2. \quad (4.5)$$

Se as Hipóteses $(\hat{H}1)$ - $(\hat{H}6)$ forem válidas, então existem $\{(x^{k+1}, u^{k+1})\} \subset \hat{W}$, $\{(\lambda_{k+1}, p^{k+1}, \xi^{k+1})\} \subset (0, +\infty] \times W_n^{1,1} \times L_m^1$, $\{(\varepsilon^k, \eta^k)\} \subset L_n^1 \times L_m^1$ e $\{\nu^k\} \subset \mathbb{R}^n$, tais que, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{L}_{\rho_k}(x^{k+1}, \tilde{q}^k, \tilde{r}^k, u^{k+1}) \leq \mathcal{L}_{\rho_k}(\hat{x}^{k+1}, \tilde{q}^k, \tilde{r}^k, \hat{u}^{k+1}) \leq \inf_{(x,u) \in \hat{W}} \mathcal{L}_{\rho_k}(x, \tilde{q}^k, \tilde{r}^k, u) + \epsilon_{k+1}^2,$$

para cada $\rho_k \in [0, +\infty)$ e $(\tilde{q}^k, \tilde{r}^k) \in R_B$ e todo $(x, u) \in \hat{W}$. Além disso, para cada $k \in \mathbb{N}$ e quase todo ponto em $[S, T]$,

$$\begin{aligned} \|u^{k+1} - \hat{u}^{k+1}\|_{L_m^1} &\leq \epsilon_{k+1}; \\ \lambda_{k+1} + \|p^{k+1}\|_{L_n^\infty} &= 1; \\ (-\dot{p}^{k+1}(t), \xi^{k+1}(t)) - (\varepsilon^{k+1}(t), \eta^{k+1}(t)) \\ &\quad \in \text{co } \partial_{x,u} \hat{\mathcal{H}}_{\rho_k}(t, x^{k+1}(t), p^{k+1}(t), \tilde{q}^k(t), \tilde{r}^k(t), u^{k+1}(t)); \\ \xi^{k+1}(t) &\in \text{co } \mathcal{N}_{U(t)}(u^{k+1}(t)); \\ -p^{k+1}(T) - \nu^{k+1} &\in \lambda_{k+1} \partial \ell(x^{k+1}(T)); \end{aligned}$$

em que $\hat{\mathcal{H}}_\rho$ é definido como no Lema 4.1. Além disso, $\varepsilon^{k+1} \rightarrow 0$ em L_n^1 , $\eta^{k+1} \rightarrow 0$ em L_m^1 e $\nu^{k+1} \rightarrow 0$.

Demonstração. A demonstração deste resultado é semelhante à do Lema 4.1. Portanto, vamos considerar o mesmo conjunto $\hat{W}$ e a mesma aplicação $d_{\hat{W}}$, isto é,

$$\hat{W} = \left\{ (x, u) \in W_n^{1,1} \times \mathcal{U}_m \left| \begin{array}{ll} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) & \text{q.t.p. em } [S, T], \\ u(t) \in U(t) & \text{q.t.p. em } [S, T], \\ x(S) = x_S \end{array} \right. \right\}.$$

e $d_{\hat{W}} : \hat{W} \times \hat{W} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$d_{\hat{W}}((x, u), (x', u')) = |x(S) - x'(S)| + \int_S^T |u(t) - u'(t)| dt.$$

Assim, usando os mesmos argumentos da prova da Afirmação 3.1, podemos concluir que $(\hat{W}, d_{\hat{W}})$ é um espaço métrico completo e que $\mathcal{L}_{\rho_k}(\cdot, \tilde{q}^k, \tilde{r}^k, \cdot)$ é semicontínua inferior em $(\hat{W}, d_{\hat{W}})$ para cada $k \in \mathbb{N}$, $\rho_k \in [0, +\infty)$ e $(\tilde{q}^k, \tilde{r}^k) \in R_B$.

Como, por hipótese, (4.5) é válida, pelo Princípio Variacional de Ekeland (Teorema 2.2), existe uma sequência $\{(x^{k+1}, u^{k+1})\} \subset \hat{W}$ (para cada $k \in \mathbb{N}$, x^{k+1} é a trajetória correspondente a u^{k+1}) tal que, para cada $k \in \mathbb{N}$, $\|u^{k+1} - \hat{u}^{k+1}\|_{L_m^1} \leq \epsilon_{k+1}$ e

$$\mathcal{L}_{\rho_k}(x^{k+1}, \tilde{q}^k, \tilde{r}^k, u^{k+1}) \leq \mathcal{L}_{\rho_k}(\hat{x}^{k+1}, \tilde{q}^k, \tilde{r}^k, \hat{u}^{k+1}) \leq \inf_{(x,u) \in \hat{W}} \mathcal{L}_{\rho_k}(x, \tilde{q}^k, \tilde{r}^k, u) + \epsilon_{k+1}^2 \quad (4.6)$$

para cada $\rho_k \in [0, +\infty)$ e $(\tilde{q}^k, \tilde{r}^k) \in R_B$ e todo $(x, u) \in \hat{W}$.

Usando um raciocínio análogo ao dos Passos 3 e 4 da demonstração do Teorema 3.1, para concluirmos o resultado, é suficiente escrevermos (4.6) no formato de um problema de controle ótimo, usar o princípio do máximo fraco (Teorema 2.5) e, para todo $k \in \mathbb{N}$ e $t \in [S, T]$, tomar $\nu^{k+1} := 0$ e $(\varepsilon^{k+1}(t), \eta^{k+1}(t)) := (0, -\epsilon_{k+1}\gamma^{k+1}(t))$ para alguma função Lebesgue mensurável γ^{k+1} tal que $\gamma^{k+1}(t) \in B$ para cada $k \in \mathbb{N}$ e quase todo ponto em $[S, T]$. A garantia da existência de γ^{k+1} segue de algum teorema de seleção mensurável adequado, por exemplo, o Teorema de Seleção Mensurável de Aumann (Teorema B.14). $\square$

A Estratégia 1 consiste inicialmente em utilizar a mesma abordagem empregada por Börgens, Kanzow e Steck em [14], Borzì em [16] e Kanzow, Steck e Wachsmuth em [45], isto é, reescrever problemas de controle ótimo como problemas de programação não linear (em dimensão infinita) por meio de um “mapa de controle para estado”². No contexto dos Subproblemas $(\hat{P}_k)$, partindo do PVI

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) & \text{q.t.p. em } [S, T], \\ x(S) = x_S, \end{cases} \quad (4.7)$$

com $u(t) \in U(t)$, vamos supor que seja possível encontrar um mapa de controle para estado $\mathcal{S} : \mathcal{U}_m \rightarrow W_n^{1,1}$ tal que

$$\mathcal{S}(u) = x.$$

Assim, podemos reescrever $(\hat{P}_k)$ como um novo problema que possui apenas a restrição $u(t) \in U(t)$ quase todo ponto em $[S, T]$. Algumas condições para a existência e boa definição do mapa de controle para estado $\mathcal{S}$ são discutidas por Borzì em [16, Capítulo 1].

Em síntese, resolvemos $(\hat{P}_k)$ da seguinte forma:

- (i) Consideramos uma discretização $\mathcal{D}$ do intervalo $[S, T]$, com N pontos. Para cada $t \in \mathcal{D}$, encontramos $u^{k+1}(t)$ usando alguma função do MATLAB, por exemplo, `fmincon`, resolvendo o seguinte problema de programação não linear:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } \mathcal{L}_{\rho^k}(t, \mathcal{S}(u)(t), \tilde{q}^k(t), \tilde{r}^k(t), u) \\ &\text{sobre } u(t) \in U(t). \end{aligned}$$

(Na prática, vemos o mapa de controle para estado $\mathcal{S}$ como um solucionador do PVI (4.7), que, para um dado u , retorna um único x . Em nossos testes, utilizamos o método de Runge-Kutta de quarta ordem.)

² O termo “mapa de controle para estado” consiste de uma tradução literal do termo em inglês *control-to-state map*.

(ii) Obtemos o estado x^{k+1} associado a u^{k+1} resolvendo:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u^{k+1}(t)), \quad x(S) = x_S.$$

(iii) Calculamos (p^{k+1}, ζ^{k+1}) , em que p^{k+1} é o coestado associado a u^{k+1} e x^{k+1} e $\zeta^{k+1} \in L_m^1$, resolvendo:

$$\begin{aligned} (\dot{p}(t), \zeta(t)) &= -p(t) \nabla_{x,u} f(t, x^{k+1}(t), u^{k+1}(t)) \\ &\quad + \nabla_{x,u} \hat{L}_{\rho^k}(t, x^{k+1}(t), q^{k+1}(t), r^{k+1}(t), u^{k+1}(t)), \\ p(T) &= -\nabla \ell(x(T))|_{x^{k+1}(T)}, \\ \zeta(t) &\in \text{co}\mathcal{N}_{U(t)}(u^{k+1}(t)) \end{aligned}$$

em que q^{k+1} e r^{k+1} são definidos conforme o Passo 3 do Algoritmo 4.1.

Além das condições AWMP, o critério geral de parada para o Algoritmo 4.1 deve garantir que a sequência gerada satisfaça as condições da Proposição 4.1. Desta forma, precisamos usar a seguinte condição adicional:

$$|\mathcal{L}_{\rho^{k+1}}(t, x^{k+1}(t), \tilde{q}^{k+1}(t), \tilde{r}^{k+1}(t), u^{k+1}(t)) - \mathcal{L}_{\rho^k}(t, x^k(t), \tilde{q}^k(t), \tilde{r}^k(t), u^k(t))| \leq 10^{-5}.$$

Feitas as devidas considerações, exibimos dois exemplos que ilustram a aplicação da Estratégia 1. O primeiro exemplo é uma pequena adaptação do Exemplo 3.2, pois adicionamos restrições ao estado inicial e ao conjunto das variáveis de controle. Essas modificações não afetam as análises desenvolvidas anteriormente, e o problema ainda possui a solução única $(\bar{x}, (\bar{u}_1, \bar{u}_2)) = (0, (0, 0))$, que, por sua vez, não satisfaz o princípio do máximo fraco clássico (Teorema 2.6). O segundo exemplo traz o bastante conhecido Problema de Rayleigh, ver por exemplo [40, 59].

Exemplo 4.1. Considere o seguinte problema de controle ótimo:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar } x(1) \\ &\text{sobre } (x, u) \in W^{1,1}([0, 1]; \mathbb{R}) \times L^\infty([0, 1]; \mathbb{R}^2) \text{ satisfazendo} \\ &\quad \dot{x}(t) = u_1(t) \quad \text{q.t.p. em } [0, 1], \\ &\quad 0 = x(t) + u_1(t) + 2u_2(t) \quad \text{q.t.p. em } [0, 1], \\ &\quad 0 = u_1(t) + 2u_2(t) \quad \text{q.t.p. em } [0, 1], \\ &\quad (u_1(t), u_2(t)) \in [-1, 1] \times [-1, 1] \quad \text{q.t.p. em } [0, 1], \\ &\quad x(0) = 0. \end{aligned}$$

O método de Lagrangiano aumentado proposto forneceu as soluções numéricas apresentadas na Figura 1. Os erros absolutos entre as soluções exatas e aquelas calculadas pelo Algoritmo 4.1 para x , u_1 e u_2 foram aproximadamente $e_x \approx 1,790 \times 10^{-4}$, $e_{u_1} \approx 1,136 \times 10^{-2}$ e $e_{u_2} \approx 5,700 \times 10^{-3}$, respectivamente.

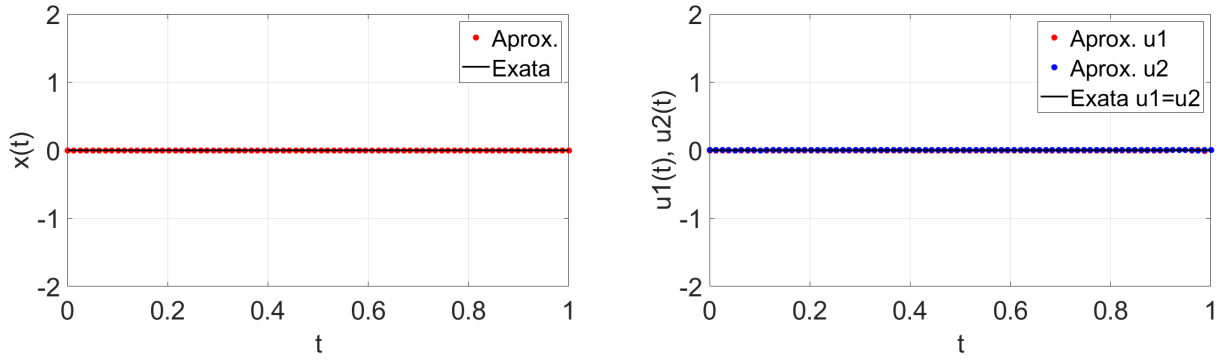


Figura 1 – Resultados numéricos para $(u_1^0(t), u_2^0(t)) \equiv (1, 1)$, $q_L = (-50, -50)$, $q_R = (50, 50)$, $(\tilde{q}_1^0(t), \tilde{q}_2^0(t)) \equiv (10, 10)$. O método executou 36 iterações.

Como já mencionamos, o princípio do máximo fraco clássico não é válido para este problema. No entanto, o princípio do máximo fraco assintótico é satisfeito. Além disso, conseguimos resolvê-lo usando o Algoritmo 4.1, o que reforça a validade das afirmações feitas ao longo deste trabalho.

A versão do Problema de Rayleigh que trazemos no Exemplo 4.2, apresentado logo abaixo, é a mesma que foi investigada por Maurer e Osmolovskii em [59]. A única modificação feita foi considerar o espaço das variáveis de estado como sendo o de funções absolutamente contínuas, ou seja, $W^{1,1}([0, 4,5]; \mathbb{R}^2)$ em vez do espaço $W^{1,\infty}([0, 4,5]; \mathbb{R}^2)$. No entanto, isso não é um problema, pois $W^{1,\infty}([0, 4,5]; \mathbb{R}^2) \subset W^{1,1}([0, 4,5]; \mathbb{R}^2)$.

Exemplo 4.2 (Problema de Rayleigh). Considere o seguinte problema³:

$$\begin{aligned}
 &\text{minimizar} \quad \int_0^{4,5} (x_1(t))^2 + (x_2(t))^2 dt \\
 &\text{sobre } (x, u) \in W^{1,1}([0, 4,5]; \mathbb{R}^2) \times L^\infty([0, 4,5]; \mathbb{R}) \text{ satisfazendo} \\
 &\quad \dot{x}_1(t) = x_2(t) \quad \text{q.t.p. em } [0, 4,5], \\
 &\quad \dot{x}_2(t) = -x_1(t) + x_2(t)(1.4 - 0.14(x_2(t))^2) + u(t) \quad \text{q.t.p. em } [0, 4,5], \\
 &\quad 0 \geq \alpha - u(t) - x_1(t), \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \text{q.t.p. em } [0, 4,5], \\
 &\quad 0 \geq u(t) + x_1(t) - \beta, \quad \beta \in \mathbb{R}, \quad \text{q.t.p. em } [0, 4,5], \\
 &\quad u(t) \in \mathbb{R} \quad \text{q.t.p. em } [0, 4,5], \\
 &\quad (x_1(0), x_2(0)) = (-5, -5).
 \end{aligned}$$

Em [59], Maurer e Osmolovskii, utilizaram o pacote de solucionadores de problemas de controle ótimo *Numerical Discretisation method for Optimal Control problems with Constraints in Controls and States* (NUDOCCCS) desenvolvido por Büskens em [19] (veja também [20]) em conjunto com o método de parametrização de arcos (em inglês,

³ O problema do Exemplo 4.2 está escrito na forma de Lagrange, enquanto o Problema $(\hat{P})$ está escrito na forma de Mayer. Felizmente, isso não é um obstáculo para nossas análises, pois problemas na forma de Lagrange podem ser reescritos na forma de Mayer, veja por exemplo [67, Observação A.1.].

arc-parametrization method) [57] e condições suficientes de segunda ordem [59, Teorema 3.1] para resolver o Problema de Rayleigh, quando fixado alguns valores de α e β . O pacote NUDOCSS resolve problemas de controle ótimo discretizados usando métodos de programação não linear. Como métodos de integração adaptativa de alta ordem são implementados no NUDOCSS, é necessário menos de 1000 pontos de grade para obter soluções altamente precisas, como afirmam Maurer e de Pinho em [58]. Nas simulações realizadas por Maurer e Osmolovskii em [59] foram utilizados de 500 - 1000 pontos.

Assim como Maurer e Osmolovskii em [59], consideramos três combinações distintas para α e β . As três situações analisadas foram dadas como segue.

Caso I: $\alpha = -5$ e $\beta = 0$;

Caso II: $\alpha = -8$ e $\beta = 0$;

Caso III: $\alpha = -10$ e $\beta = 0$.

De acordo com Maurer e Osmolovskii em [59], o comportamento do minimizador local fraco para o problema é bang-bang no Caso I (ver Figura 2), bang-bang no Caso II (ver Figura 4) e bang-bang-singular no Caso III (ver Figura 6).

Os resultados numéricos fornecidos pelo método de lagrangiano aumentado proposto para os Casos I, II e III são fornecidos pelas Figuras 3, 5 e 7, respectivamente.

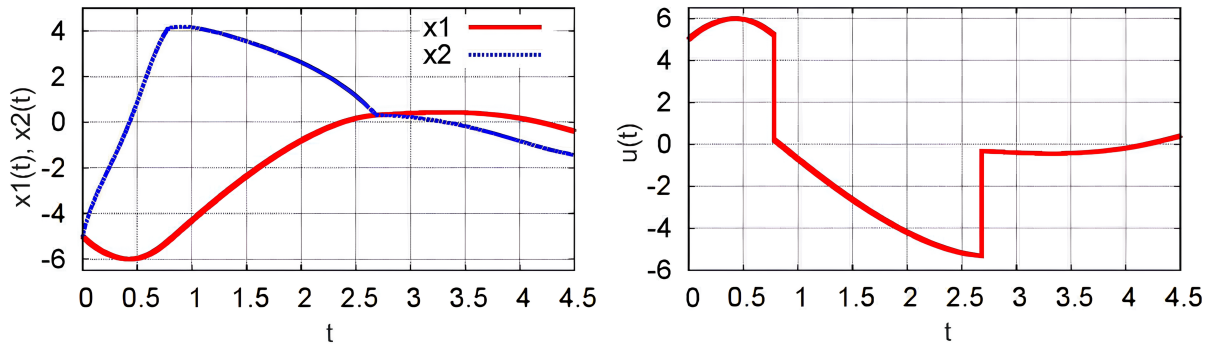


Figura 2 – Resultados apresentados por Maurer e Osmolovskii em [59, Figura 3] para o Caso I.

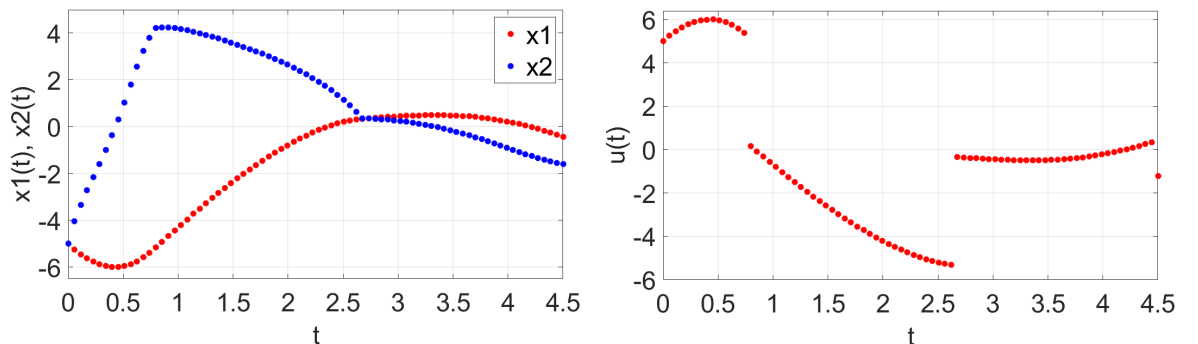


Figura 3 – Resultados numéricos para o Caso I tomando $u^0(t) \equiv 0$, $r_R = (50, 50)$ e $(\tilde{r}_1^0(t), \tilde{r}_2^0(t)) \equiv (10, 10)$, após 33 iterações.

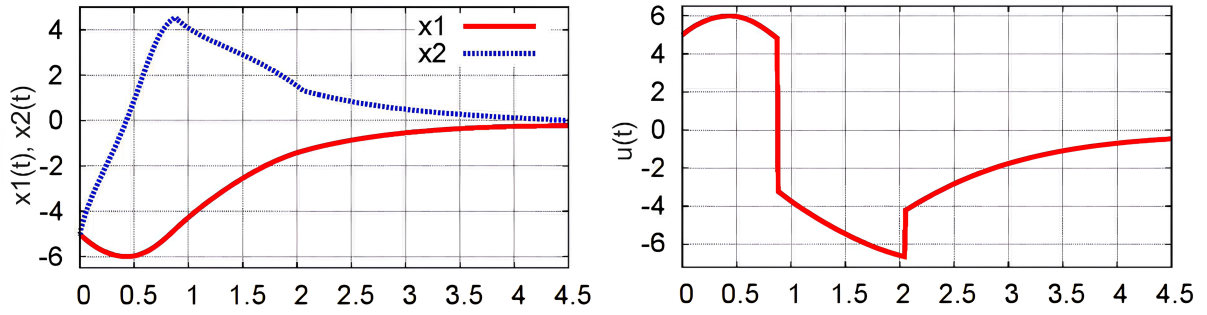


Figura 4 – Resultados apresentados por Maurer e Osmolovskii em [59, Figura 4] para o Caso II.

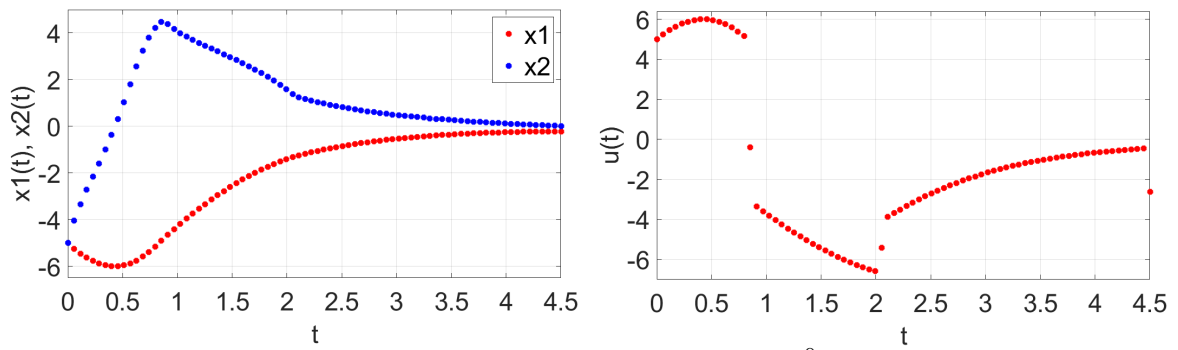


Figura 5 – Resultados numéricos para o Caso II tomando $u^0(t) \equiv 0$, $r_R = (50, 50)$ e $(\hat{r}_1^0(t), \hat{r}_2^0(t)) \equiv (10, 10)$, ao final de 31 iterações.

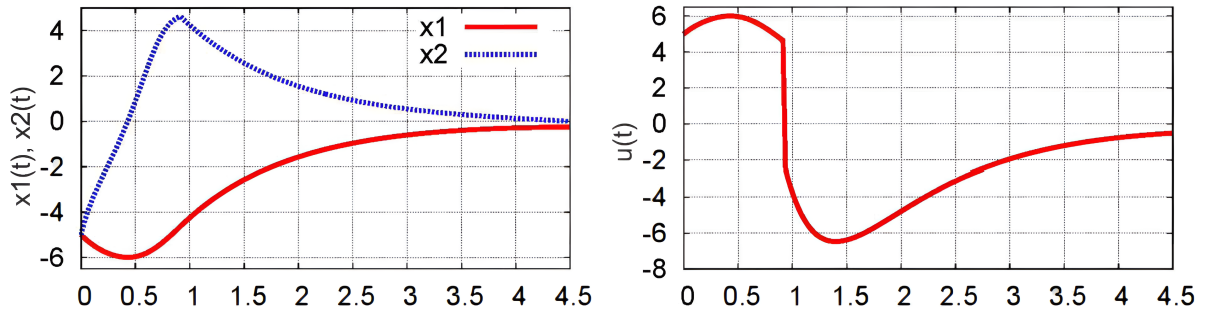


Figura 6 – Resultados exibidos por Maurer e Osmolovskii em [59, Figura 5] para o Caso III.

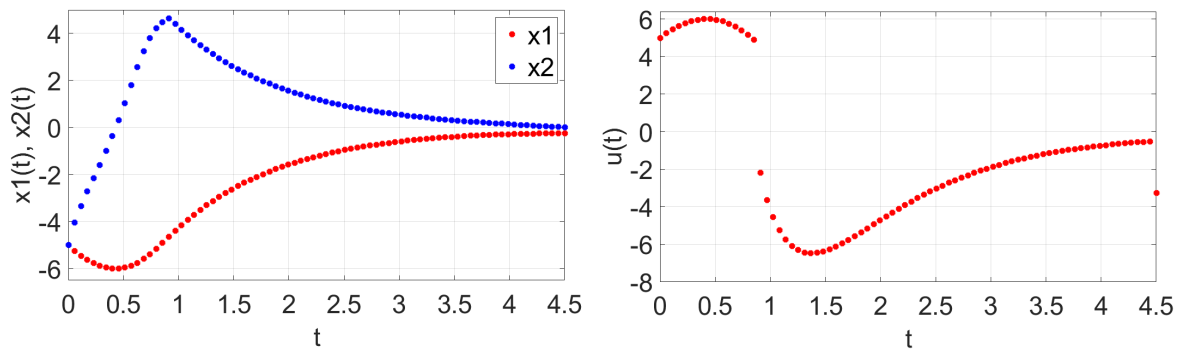


Figura 7 – Resultados numéricos para o Caso III tomando $u^0(t) \equiv 0$, $r_R = (50, 50)$ e $(\hat{r}_1^0(t), \hat{r}_2^0(t)) \equiv (10, 10)$, após 31 iterações.

Os resultados nas Figuras 3, 5 e 7 comparados com os obtidos por Maurer e Osmolovskii em [59] (Figuras 2, 4 e 6) evidenciam que o Algoritmo 4.1 capturou eficientemente o comportamento das soluções para o Problema de Rayleigh nos diferentes casos estudados, reforçando o bom desempenho do método proposto.

Ao selecionar o Problema de Rayleigh, foi possível avaliar a habilidade do método em identificar a estrutura de minimizadores locais fracos e lidar com não linearidades. O Algoritmo 4.1 provou sua eficácia ao capturar de maneira precisa o comportamento das soluções em cenários diversos, reforçando assim a confiabilidade do método perante desafios complexos.

4.3.2 Estratégia 2

Resolvemos os Subproblemas $(\hat{P}_k)$ utilizando o método SQH proposto por Breitenbach e Borzì em [17], mais especificamente sua versão para EDOs, por exemplo, [16, Algoritmo 2.3]. Os parâmetros utilizados foram $\epsilon_{\text{SQH}} = 1.6$, $\kappa_{\text{SQH}} = 10^{-8}$, $\sigma_{\text{SQH}} = 5$, $\zeta_{\text{SQH}} = 10^{-8}$ e $\eta_{\text{SQH}} = 10^6$. O número máximo de iterações foi definido como 200. Escolhemos o método SQH porque, sob certas hipóteses, que os exemplos escolhidos nesta seção satisfazem, ele gera sequências que cumprem as condições necessárias do Passo 1 do Algoritmo 4.1, veja [16, Seção 2.5].

Exemplo 4.3 ([74, Exemplo 1, p. 271]). O problema consiste em:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } \int_0^1 -x(t) \, dt \\ & \text{sobre } (x, u) \in W^{1,1}([0, 1]; \mathbb{R}) \times L^\infty([0, 1]; \mathbb{R}) \text{ satisfazendo} \\ & \quad \dot{x}(t) = x(t) + u(t) \quad \text{q.t.p. em } [0, 1], \\ & \quad 0 \geq u(t) + x(t) - 2 \quad \text{q.t.p. em } [0, 1], \\ & \quad u(t) \in [-1, 1] \quad \text{q.t.p. em } [0, 1], \\ & \quad x(0) = 0. \end{aligned}$$

Uma solução exata $(\bar{x}, \bar{u})$ para este problema, juntamente com os multiplicadores associados $(\bar{p}, \bar{r})$, é dada por

$$(\bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{p}(t), \bar{r}(t)) = (e^t - 1, 1, (4 - 2 \ln(2))e^{-t} - 1, 0)$$

para todo $t \in [0, \ln(2)]$ e

$$(\bar{x}(t), \bar{u}(t), \bar{p}(t), \bar{r}(t)) = (2t + 1 - 2 \ln(2), 1 + 2 \ln(2) - 2t, 1 - t, -(1 - t))$$

para todo $t \in (\ln(2), 1]$, veja [74, p. 273]⁴.

⁴ Em [74, Exemplo 1, p. 271] a restrição mista é dada na forma $2 - x(t) - u(t) \geq 0$ quase todo ponto em $[0, 1]$. Contudo, para aplicarmos o Algoritmo 4.1, reescrevemos essa restrição como $0 \geq u(t) + x(t) - 2$ quase todo ponto em $[0, 1]$. Essa mudança provocou a inversão no sinal do multiplicador $\bar{r}$ em relação ao seu equivalente q_3 em [74, p. 273].

Na Figura 8, além da solução exata, exibimos os resultados obtidos pelo método proposto para x , u e os multiplicadores p e r . Os erros absolutos fornecidos pelo Algoritmo 4.1 para x , p , e r foram aproximadamente $e_x \approx 3,871 \times 10^{-3}$, $e_p \approx 1,711 \times 10^{-2}$, e $e_r \approx 4,131 \times 10^{-5}$, respectivamente. Além disso, como a função Hamiltoniana não maximizada associada ao problema é dada por

$$\mathcal{H}(t, x, p, r, u) = p(x + u) + x + r(u + x - 2),$$

segue que $\mathcal{H}(1, \bar{x}(1), \bar{p}(1), \bar{r}(1), \bar{u}(1)) = \bar{x}(1)$, pois $\bar{p}(1) = \bar{r}(1) = 0$. Portanto, qualquer $u \in [-1, 1]$ minimiza $\mathcal{H}(1, x(1), p(1), r(1), u)$. Assim, o método SQH pode apresentar problemas em $t = 1$, como é possível ver na Figura 8. No entanto, como procuramos u em $L^\infty([0, 1]; \mathbb{R})$, podemos desconsiderar $u(1)$ em nossa análise de erro, resultando em $e_u \approx 3,708 \times 10^{-3}$ como erro absoluto para a variável de controle.

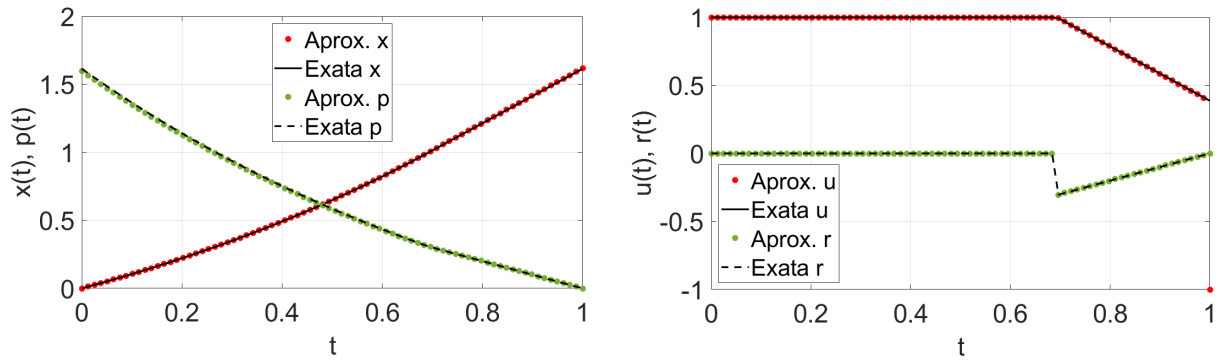


Figura 8 – Resultados numéricos para $u^0(t) \equiv 1$, $r_R = 50$, $\bar{r}^0(t) \equiv 10$ e 20 iterações.

No Algoritmo 4.1, a suavidade da função de custo não é necessária, semelhante às condições AWMP. O exemplo a seguir ilustra essa situação.

Exemplo 4.4. O problema é dado por:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar } |x(1) - 2| \\ & \text{sobre } (x, u) \in W^{1,1}([0, 1]; \mathbb{R}) \times L^\infty([0, 1]; \mathbb{R}) \text{ satisfazendo} \\ & \quad \dot{x}(t) = u(t) \quad \text{q.t.p. em } [0, 1], \\ & \quad 0 \geq -u(t) + 0.5x(t) \quad \text{q.t.p. em } [0, 1], \\ & \quad u(t) \in [0, 2] \quad \text{q.t.p. em } [0, 1], \\ & \quad x(0) = 0. \end{aligned}$$

Como a função de custo é não negativa e o par $(\bar{x}(t), \bar{u}(t)) = (2t, 2)$ para todo $t \in [0, 1]$ é viável, concluímos que é uma solução ótima. Na Figura 9, apresentamos o gráfico dessa solução juntamente com os resultados obtidos pelo método de Lagrangiano aumentado proposto. Os erros absolutos fornecidos pelo Algoritmo 4.1 para x e u foram aproximadamente $e_x \approx 1,888 \times 10^{-7}$ e $e_u \approx 6,428 \times 10^{-5}$, respectivamente.

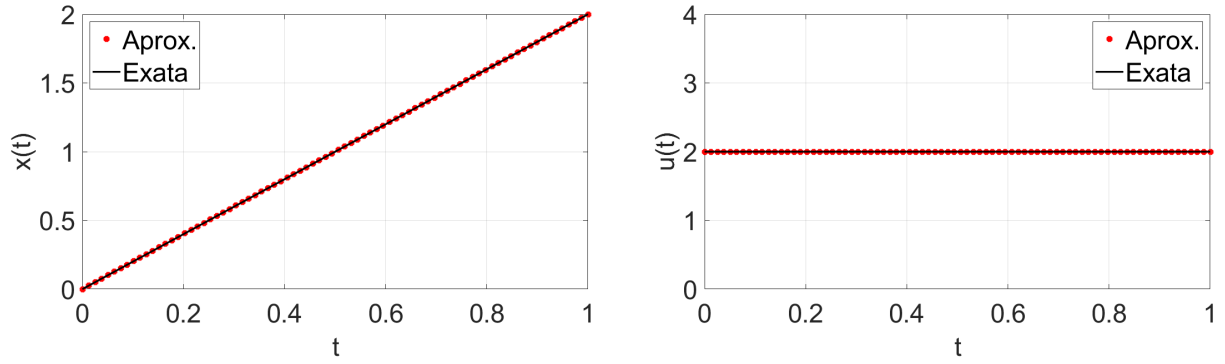


Figura 9 – Resultados numéricos para $u^0(t) \equiv 0$, $r_R = 50$, $\tilde{r}^0(t) \equiv 10$, $\lambda_0 = 1$ e 14 iterações.

Com base nos resultados apresentados nos Exemplos 4.1, 4.2, 4.3 e 4.4, podemos concluir que o método proposto conseguiu encontrar soluções aproximadas para problemas com diferentes características, tais como problemas onde não vale o princípio do máximo fraco clássico, problemas não lineares, captação de descontinuidades em problemas com soluções do tipo bang-bang e problemas com função de custo não suave, demonstrando assim sua viabilidade prática e potencial. A aplicação do método a problemas mais complexos está prevista para trabalhos futuros.

5 UMA NOVA CONDIÇÃO DE QUALIFICAÇÃO

Neste capítulo, investigamos as condições mínimas sob as quais as condições AWMP propostas no Capítulo 3 implicam no princípio do máximo fraco clássico (Teorema 2.6), seguindo algumas ideias que foram exploradas no contexto da programação não linear [3, 13, 60]. Mais especificamente, no caso de dimensão finita para problemas suaves, na condição *Cone Continuity Property* (CCP) [3], no caso de dimensão finita para problemas não suaves, na condição *Asymptotically Mordukhovich-regularity* (AM-regularidade) [60] e, no caso de dimensão infinita para problemas suaves, na regularidade AKKT (ou *AKKT-regularity*) [13]. Através da inspiração obtida, propomos uma nova condição de regularidade para as condições AWMP denominada AWMP-regularidade (ou *AWMP-regularity*). Esta nova condição, como veremos neste capítulo, atua como uma condição de qualificação e assegura a validade do princípio do máximo fraco clássico.

5.1 CONDIÇÃO DE QUALIFICAÇÃO AWMP-REGULARIDADE

Motivados pelas condições AWMP, dado $\delta > 0$, para cada $x \in W_n^{1,1}$, $u \in \mathcal{U}_m$ e $\theta \in \mathcal{C}$, vamos considerar os seguintes conjuntos:

$$\mathcal{M}(x, u) := \left\{ \begin{array}{l} (\varphi, \psi, \gamma, \xi) \\ \in L_n^1 \times L_m^1 \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{para quase todo ponto em } [S, T], \\ (\varphi(t), \psi(t), \gamma, \xi) \\ \in \left(\text{co } \partial_{x,u}(p(t) \cdot f(t, x(t), u(t))) - \{(-\dot{p}(t), 0)\}, \right. \\ \left. \lambda \partial \ell(x(S), x(T)) - \{(p(S), -p(T))\} \right), \\ (\lambda, p) \in [0, +\infty) \times W_n^{1,1} \text{ e } \lambda + \|p\|_{L_n^\infty} \neq 0 \end{array} \right. \right\}$$

e

$$\mathcal{M}_\delta(x, u, \theta) := \left\{ \begin{array}{l} (\varphi, \psi, \gamma, \xi) \\ \in L_n^1 \times L_m^1 \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \end{array} \left| \begin{array}{l} \text{para quase todo ponto em } [S, T], \\ (\varphi(t), \psi(t), \gamma, \xi) \\ = \left(\sum_{i=1}^{m_b} q_i(t) \nabla_{x,u} b_i(t, x(t), u(t)) \right. \\ \quad \left. + \sum_{j=1}^{m_g} r_j(t) \nabla_{x,u} g_j(t, x(t), u(t)), 0, 0 \right) \\ \quad + (0, -\zeta(t), \pi_1, \pi_2), \\ (q, r) \in L_{m_b}^1 \times L_{m_g}^1, \\ (\zeta, \pi_1, \pi_2) \in L_m^1 \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \\ \zeta(t) \in \text{co } \mathcal{N}_{U_\delta(t)}(u(t)), \\ r_j(t) g_j^-(t, x(t), u(t)) = \theta_j(t), \quad j = 1, \dots, m_g, \\ r_j(t) \leq 0, \quad j = 1, \dots, m, \\ (\pi_1, \pi_2) \in \mathcal{N}_C(x(S), x(T)) \end{array} \right. \right\}.$$

O lema apresentado adiante estabelece uma forma alternativa para escrever o princípio do máximo fraco clássico (Teorema 2.6).

Lema 5.1. *Seja $(\bar{x}, \bar{u})$ um processo factível para (P) . Então as condições do princípio do máximo fraco clássico (Teorema 2.6) são satisfeitas em $(\bar{x}, \bar{u})$ se, e somente se,*

$$\mathcal{M}(\bar{x}, \bar{u}) \cap (-\mathcal{M}_\delta(\bar{x}, \bar{u}, 0)) \neq \emptyset$$

para algum $\delta > 0$.

Demonstração. $\Rightarrow$) Pelo princípio do máximo fraco clássico (Teorema 2.6), existem $(\lambda, p, \zeta, q, r) \in [0, +\infty) \times W_n^{1,1} \times L_m^1 \times L_{m_b}^1 \times L_{m_g}^1$ tais que

$$\lambda + \|p\|_{L_n^\infty} \neq 0, \quad (5.1)$$

$$(-\dot{p}(t), \zeta(t)) \in \text{co} \partial_{x,u} \mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), q(t), r(t), \bar{u}(t)), \quad (5.2)$$

$$\zeta(t) \in \text{co} \mathcal{N}_{U(t)}(\bar{u}(t)), \quad (5.3)$$

$$r(t) \cdot g(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) = 0 \quad \text{e} \quad r(t) \leq 0, \quad (5.4)$$

$$(p(S), -p(T)) \in \lambda \partial \ell(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) + \mathcal{N}_C(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) \quad (5.5)$$

para quase todo ponto em $[S, T]$.

Como, por hipótese, $(\bar{x}, \bar{u})$ é factível, de (5.4),

$$r_j(t) g_j^-(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) = r_j(t) (\max\{-g_j(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)), 0\}) = r_j(t) (-g_j(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))) = 0$$

para $j = 1, \dots, m_g$ e quase todo ponto em $[S, T]$.

Por (5.2),

$$(\varphi(t), \psi(t)) \in \text{co} \partial_{x,u} (p(t) \cdot f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))) - (-\dot{p}(t), 0) \quad \text{q.t.p. em } [S, T], \quad (5.6)$$

em que

$$(\varphi(t), \psi(t)) := - \sum_{i=1}^{m_b} q_i(t) \nabla_{x,u} b_i(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) - \sum_{j=1}^{m_g} r_j(t) \nabla_{x,u} g_j(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) + (0, \zeta(t))$$

para todo $t \in [S, T]$.

Pelas conclusões da Observação 2.4, segue que $\text{co} \partial_{x,u} (p(t) \cdot f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))) = p(t) D_{x,u} f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))$ quase todo ponto em $[S, T]$ e $D_{x,u} f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) \subset k_f(t) B$ quase todo ponto em $[S, T]$. Assim, como $\dot{p} \in L_n^1$, pois $p \in W_n^{1,1}$, usando (5.6), podemos concluir que $(\varphi, \psi) \in L_n^1 \times L_m^1$.

De (5.3), $\zeta(t) \in \text{co} \mathcal{N}_{U(t)}(\bar{u}(t)) = \text{co} \mathcal{N}_{U_\delta(t)}(\bar{u}(t))$ para qualquer $\delta > 0$ e quase todo ponto em $[S, T]$.

Por (5.5),

$$(\gamma, \xi) \in \lambda \partial \ell(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) - (p(S), -p(T))$$

para algum $-(\gamma, \xi) \in \mathcal{N}_C(\bar{x}(S), \bar{x}(T))$. Portanto, usando (5.1), concluímos a primeira parte do resultado.

$\Leftarrow$) Seja $(\varphi, \psi, \gamma, \xi) \in \mathcal{M}(\bar{x}, \bar{u}) \cap (-\mathcal{M}_\delta(\bar{x}, \bar{u}, 0))$. Por definição, $(\varphi, \psi, \gamma, \xi) \in L_n^1 \times L_m^1 \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ e existe $(\lambda, p, q, r) \in [0, +\infty) \times W_n^{1,1} \times L_m^1 \times L_{m_b}^1 \times L_{m_g}^1$, tal que, para quase todo ponto em $[S, T]$,

$$(\varphi(t), \psi(t)) \in \text{co} \partial_{x,u}(p(t) \cdot f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))) - \{(-\dot{p}(t), 0)\}, \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} (\varphi(t), \psi(t)) = & - \sum_{i=1}^{m_b} q_i(t) \nabla_{x,u} b_i(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) \\ & - \sum_{j=1}^{m_g} r_j(t) \nabla_{x,u} g_j(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) + (0, \zeta(t)), \end{aligned} \quad (5.8)$$

$$\zeta(t) \in \text{co} \mathcal{N}_{U_\delta}(\bar{u}(t)) \quad \text{para algum } \delta > 0, \quad (5.9)$$

$$r_j(t) g_j^-(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) = 0 \quad \text{e} \quad r_j(t) \leq 0, \quad j = 1, \dots, m_g, \quad (5.10)$$

$$(\gamma, \xi) \in \lambda \partial \ell(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) - (p(S), -p(T)), \quad (5.11)$$

$$-(\gamma, \xi) \in \mathcal{N}_C(\bar{x}(S), \bar{x}(T)), \quad (5.12)$$

$$\lambda + \|p\|_{L_n^\infty} \neq 0. \quad (5.13)$$

Por (5.7), (5.8) e os Corolários B.1 e B.2,

$$\begin{aligned} (-\dot{p}(t), \zeta(t)) \in & \text{co} \partial_{x,u}(p(t) \cdot f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))) \\ & + \sum_{i=1}^{m_b} q_i(t) \nabla_{x,u} b_i(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) + \sum_{j=1}^{m_g} r_j(t) \nabla_{x,u} g_j(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) \\ = & \text{co} \partial_{x,u} \mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), q(t), r(t), \bar{u}(t)) \end{aligned}$$

quase todo ponto em $[S, T]$. Além disso, de (5.9), $\zeta(t) \in \text{co} \mathcal{N}_{U_\delta}(\bar{u}(t)) = \text{co} \mathcal{N}_U(\bar{u}(t))$ quase todo ponto em $[S, T]$ e, de (5.11), (5.12) e (5.13),

$$(p(S), -p(T)) \in \lambda \partial \ell(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) - \{(\gamma, \xi)\} \subset \lambda \partial \ell(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) + \mathcal{N}_C(\bar{x}(S), \bar{x}(T))$$

com $\lambda + \|p\|_{L_n^\infty} \neq 0$.

Agora, note que da factibilidade de $(\bar{x}, \bar{u})$ e de (5.10), para $j = 1, \dots, m_g$ e quase todo ponto em $[S, T]$,

$$r_j(t)(-g_j(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))) = r_j(t)(\max\{-g_j(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)), 0\}) = r_j(t)g_j^-(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) = 0.$$

Portanto, $r(t) \cdot g(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) = 0$ quase todo ponto em $[S, T]$ e concluímos a prova. $\square$

O Lema 5.2, enunciado e demonstrado adiante, garante que, sob algumas hipóteses, podemos representar as condições AWMP de uma forma alternativa que envolve o limite

externo/superior fraco do tipo Painlevé-Kuratowski da multifunção $\mathcal{M}_\delta : W_n^{1,1} \times \mathcal{U}_m \times \mathcal{C} \rightsquigarrow L_n^1 \times L_m^1 \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dado por

$$\text{w-lim sup}_{\substack{x \rightarrow \bar{x}, u \xrightarrow[\theta \rightarrow 0]{\text{med}} \bar{u}}} \mathcal{M}_\delta(x, u, \theta) :=$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\varphi, \psi, \gamma, \xi) \\ \in L_n^1 \times L_m^1 \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \end{array} \left| \begin{array}{l} \exists \{(x^k, u^k, \theta^k)\} \subset W_n^{1,1} \times \mathcal{U}_m \times \mathcal{C} : \\ x^k \rightarrow \bar{x} \text{ uniformemente, } u^k \xrightarrow{\text{med}} \bar{u}, \\ \theta_j^k(t) \rightarrow \theta_j(t) \text{ q.t.p. em } [S, T], j = 1, \dots, m_g, \\ (\varphi^k, \psi^k) \rightarrow (\varphi, \psi) \text{ em } L_n^1 \times L_m^1, \\ (\gamma^k, \xi^k) \rightarrow (\gamma, \xi), \\ (\varphi^k, \psi^k, \gamma^k, \xi^k) \in \mathcal{M}_\delta(x^k, u^k, \theta^k) \text{ para todo } k \in \mathbb{N} \end{array} \right. \right\}.$$

Lema 5.2. *Seja $(\bar{x}, \bar{u})$ um processo AWMP para o Problema (P), em que valem as Hipóteses (H1) – (H6) e a sequência AWMP associada seja dada por $\{(x^k, u^k, \zeta^k, p^k, q^k, r^k, \lambda_k)\} \subset W_n^{1,1} \times \mathcal{U}_m \times L_m^1 \times W_n^{1,1} \times L_{m_b}^1 \times L_{m_g}^1 \times [0, +\infty)$, com $\{(\varepsilon^k, \eta^k)\} \subset L_n^1 \times L_m^1$ como na Definição 3.1. Suponha que*

(H7) *existam funções integráveis k_ε e k_η tais que $|\varepsilon^k(t)| \leq k_\varepsilon(t)$ e $|\eta^k(t)| \leq k_\eta(t)$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e quase todo ponto em $[S, T]$;*

(H8) *exista uma função integrável k_φ tal que*

$$\left| \sum_{i=1}^{m_b} q_i^k(t) \nabla_x b_i(t, x^k(t), u^k(t)) + \sum_{j=1}^{m_g} r_j^k(t) \nabla_x g_j(t, x^k(t), u^k(t)) \right| \leq k_\varphi(t)$$

para todo $k \in \mathbb{N}$ e quase todo ponto em $[S, T]$;

(H9) *exista $M > 0$, com $\lambda_k + \|p^k\|_{L_n^\infty} \leq M$ para cada $k \in \mathbb{N}$; e se $\lambda_k \rightarrow \lambda$ e $p^k \rightarrow p$ uniformemente, então existe $t_0 \in [S, T]$ tal que $\lambda + |p(t_0)| \neq 0$.*

Então

$$\mathcal{M}(\bar{x}, \bar{u}) \cap \left(- \text{w-lim sup}_{\substack{x \rightarrow \bar{x}, u \xrightarrow[\theta \rightarrow 0]{\text{med}} \bar{u}}} \mathcal{M}_\delta(x, u, \theta) \right) \neq \emptyset.$$

Demonstração. Como, por hipótese, $(\bar{x}, \bar{u})$ é um processo AWMP para (P), então, por definição, existem $\delta > 0$ e sequências $\{(x^k, u^k, \zeta^k, p^k, q^k, r^k, \lambda_k)\} \subset W_n^{1,1} \times \mathcal{U}_m \times L_m^1 \times W_n^{1,1} \times L_{m_b}^1 \times L_{m_g}^1 \times [0, +\infty)$, $\{(\varepsilon^k, \eta^k)\} \subset L_n^1 \times L_m^1$, $\{\theta^k\} \subset \mathcal{C}$ e $\{(\nu^k, \nu^k)\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$

tais que, para cada $k \in \mathbb{N}$ e quase todo ponto em $[S, T]$,

$$\lambda_k + \|p^k\|_{L_n^\infty} \neq 0, \quad (5.14)$$

$$(-\dot{p}^k(t), \zeta^k(t)) - (\varepsilon^k(t), \eta^k(t)) \in \text{co } \partial_{x,u} \mathcal{H}(t, x^k(t), p^k(t), q^k(t), r^k(t), u^k(t)), \quad (5.15)$$

$$\zeta^k(t) \in \text{co } \mathcal{N}_{U_\delta(t)}(u^k(t)), \quad (5.16)$$

$$r_j^k(t) g_j^-(t, x^k(t), u^k(t)) = \theta_j^k(t) \quad \text{e} \quad r_j^k(t) \leq 0, \quad j = 1, \dots, m_g, \quad (5.17)$$

$$(p^k(S), -p^k(T)) - (\vartheta^k, \nu^k) \in \lambda_k \partial \ell(x^k(S), x^k(T)) + \mathcal{N}_C(x^k(S), x^k(T)), \quad (5.18)$$

em que $\varepsilon^k \rightharpoonup 0$ em L_n^1 , $\eta^k \rightharpoonup 0$ em L_m^1 , $\theta_j^k(t) \rightarrow 0$ quase todo ponto em $[S, T]$, com $j = 1, \dots, m_g$, $\vartheta^k \rightarrow 0$, $\nu^k \rightarrow 0$, $x^k \rightarrow \bar{x}$ uniformemente e $u^k \xrightarrow{\text{med}} \bar{u}$.

Por (5.16), $u^k(t) \in U_\delta(t)$ para cada $k \in \mathbb{N}$ e quase todo ponto em $[S, T]$, pois do contrário, pela definição de cone normal, $\text{co } \mathcal{N}_{U_\delta(t)}(u^k(t))$ seria vazio.

De (5.18), existe algum $(\pi_1^k, \pi_2^k) \in \mathcal{N}_C(x^k(S), x^k(T))$ tal que

$$(p^k(S), -p^k(T)) - (\vartheta^k, \nu^k) \in \lambda_k \partial \ell(x^k(S), x^k(T)) + \{(\pi_1^k, \pi_2^k)\} \quad (5.19)$$

para cada $k \in \mathbb{N}$. Então, para todo $k \in \mathbb{N}$ e quase todo $t \in [S, T]$, vamos definir

$$\begin{aligned} (\varphi^k(t), \psi^k(t), \gamma^k, \xi^k) := & \left(-\sum_{i=1}^{m_b} q_i^k(t) \nabla_{x,u} b_i(t, x^k(t), u^k(t)) \right. \\ & \left. - \sum_{j=1}^{m_g} r_j^k(t) \nabla_{x,u} g_j(t, x^k(t), u^k(t)), 0, 0 \right) + (0, \zeta^k(t), -\pi_1^k, -\pi_2^k). \end{aligned}$$

Logo, usando (5.16), (5.17) e (5.19), podemos concluir que

$$(\varphi^k, \psi^k, \gamma^k, \xi^k) \in -\mathcal{M}_\delta(x^k, u^k, \theta^k)$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Pela Hipótese (H8), existe uma função integrável k_φ tal que $|\varphi^k(t)| \leq k_\varphi(t)$ para cada $k \in \mathbb{N}$ e quase todo ponto em $[S, T]$. Portanto, pelo Teorema de Dunford-Pettis (Teorema 2.4), por meio da extração de uma subsequência (não renomearemos), podemos concluir que $\varphi^k \rightharpoonup \varphi$ para alguma função $\varphi \in L_n^1$.

Pela Hipótese (H9), $\lambda_k \leq M$ e $|p^k(T)| \leq M$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Assim, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass (Teorema B.1), podemos extrair uma subsequência (não renomearemos) e garantir que $\lambda_k \rightarrow \lambda$ e $p^k(T) \rightarrow p_T$, com $(\lambda, p_T) \in [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$.

Por (5.15) e (5.18), para cada $k \in \mathbb{N}$ e quase todo ponto em $[S, T]$,

$$(\varphi^k(t), \psi^k(t)) - (\varepsilon^k(t), \eta^k(t)) \in \text{co } \partial_{x,u} (p^k(t) \cdot f(t, x^k(t), u^k(t))) - \{(-\dot{p}^k(t), 0)\} \quad (5.20)$$

e

$$(\gamma^k, \xi^k) - (\vartheta^k, \nu^k) \in \lambda_k \partial \ell(x^k(S), x^k(T)) - \{(p^k(S), -p^k(T))\}. \quad (5.21)$$

Como pelas conclusões da Observação 2.4, $\text{co}\partial_{x,u}(p^k(t) \cdot f(t, x^k(t), u^k(t))) \subset p^k(t)D_{x,u}f(t, x^k(t), u^k(t))$ e $D_{x,u}f(t, x^k(t), u^k(t)) \subset k_f(t)B$ para cada $k \in \mathbb{N}$ e quase todo ponto em $[S, T]$, de (5.20) e das Hipóteses (H7) e (H8),

$$\begin{aligned} |p^k(t)| &\leq |p^k(t)|k_f(t) + |\varepsilon^k(t)| + |\varphi^k(t)| \\ &\leq |p^k(t)|k_f(t) + k_\varepsilon(t) + k_\varphi(t). \end{aligned}$$

Logo, pela desigualdade de Gronwall (Lema B.1),

$$\begin{aligned} |p^k(t)| &\leq \exp(\|k_f\|_{L_1^1})[|p^k(T)| + \|(k_\varepsilon + k_\varphi)\|_{L_1^1}] \\ &\leq \exp(\|k_f\|_{L_1^1})[M + \|(k_\varepsilon + k_\varphi)\|_{L_1^1}] \end{aligned} \quad (5.22)$$

para todo $k \in \mathbb{N}$ e quase todo ponto em $[S, T]$. Consequentemente, $\{p^k\}$ é uniformemente integravelmente limitada. Então, com a ajuda do Teorema de Dunford-Pettis (Teorema 2.4), através da extração de uma subsequência (não renomearemos), podemos concluir que, para alguma função $p \in W_n^{1,1}$, $p^k \rightarrow p$ uniformemente e $\dot{p}^k \rightharpoonup \dot{p}$ em L_n^1 .

Pela Hipótese (H7), existe uma função integrável k_η tal que $|\eta^k(t)| \leq k_\eta(t)$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e quase todo ponto em $[S, T]$. Assim, por (5.20) e (5.22), segue que

$$\begin{aligned} |\psi^k(t)| &\leq |p^k(t)|k_f(t) + |\eta^k(t)| \\ &\leq \left[\exp(\|k_f\|_{L_1^1})(M + \|(k_\varepsilon + k_\varphi)\|_{L_1^1}) \right] k_f(t) + k_\eta(t) \end{aligned}$$

para cada $k \in \mathbb{N}$ e quase todo ponto em $[S, T]$. Consequentemente, $\{\psi^k\}$ é uniformemente integravelmente limitada. Assim, novamente pelo Teorema de Dunford-Pettis (Teorema 2.4), extraíndo uma subsequência (mais uma vez não renomearemos), concluímos que $\psi^k \rightharpoonup \psi$ para alguma função $\psi \in L_m^1$.

Como $\lambda_k \leq M$ e, pela Hipótese (H3), ℓ é localmente Lipschitz, de (5.21) e (5.22), segue que a sequência $\{(\gamma^k, \xi^k)\}$ é limitada. Então, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass (Teorema B.1), podemos tomar uma subsequência (não renomearemos) tal que $(\gamma^k, \xi^k) \rightarrow (\gamma, \xi)$ para algum $(\gamma, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Portanto,

$$(\varphi, \psi, \gamma, \xi) \in -\text{w-lim sup}_{\substack{x \rightarrow \bar{x}, u \xrightarrow{\text{med}} \bar{u} \\ \theta \rightarrow 0}} \mathcal{M}_\delta(x, u, \theta).$$

Uma modificação direta na prova do Teorema da Compacidade das Trajetórias [23, Teorema 3.1.7, p. 118] e um apelo às propriedades de semicontinuidade superior dos cones normais e subdiferenciais limites, permitem-nos tomar limite nas relações (5.20) e (5.21) para obter

$$\begin{aligned} (\varphi(t), \psi(t), \gamma, \xi) &\in \text{co}\partial_{x,u}(p(t) \cdot f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))) - \{(-\dot{p}(t), 0)\} \\ &\quad \times (\lambda\partial\ell(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) - \{(p(S), -p(T))\}) \end{aligned}$$

quase todo ponto em $[S, T]$. Além disso, como $\lambda_k \rightarrow \lambda$ e $p^k \rightarrow p$ uniformemente, pela Hipótese (H9), existe um $t_0 \in [S, T]$ tal que $\lambda + |p(t_0)| \neq 0$. Consequentemente, $\lambda + \|p\|_{L_n^\infty} \neq 0$, pois $p \in W_n^{1,1}$. Portanto,

$$(\varphi, \psi, \gamma, \xi) \in \mathcal{M}(\bar{x}, \bar{u})$$

e concluímos a demonstração. $\square$

No Exemplo 3.1, verificamos a validade das condições AWMP, quando consideradas as seqüências

$$(x^k(t), (u_1^k(t), u_2^k(t))) = (0, (0, 0)), \quad \lambda_k = 1, \quad p^k(t) = -\frac{1}{k}t - \frac{(k+1)}{k}, \quad (q_1^k(t), q_2^k(t)) = (0, 0), \\ \varepsilon^k(t) = \frac{1}{k}, \quad (\eta_1^k(t), \eta_2^k(t)) = (0, 0), \quad \vartheta^k = 0 \quad \text{e} \quad \nu^k = 0$$

para todo $k \in \mathbb{N}$ e $t \in [0, 1]$. Logo, pelo fato da seqüência $\{\varepsilon^k(t)\}$ ser uniformemente limitada para todo $k \in \mathbb{N}$, a Hipótese (H7) é satisfeita. Mais que isso, definindo $b_1(t, x, (u_1, u_2)) := x + u_1 + u_2$ e $b_2(t, x, (u_1, u_2)) := 2x + 2u_1 + 2u_2$, podemos concluir que

$$q_1^k(t) \nabla_x b_1(t, x^k(t), (u_1^k(t), u_2^k(t))) + q_2^k(t) \nabla_x b_2(t, x^k(t), (u_1^k(t), u_2^k(t))) = q_1^k(t) + 2q_2^k(t) = 0$$

para cada $k \in \mathbb{N}$ e quase todo ponto em $[0, 1]$. Consequentemente, a Hipótese (H8) é verificada. Por fim, como $\lambda_k \rightarrow 1 =: \lambda$ e $p^k \rightarrow -1 =: p$ uniformemente, segue que $\lambda + \|p\|_{L^\infty([0,1];\mathbb{R})} = \lambda + \max_{t \in [0,1]} \{|p(t)|\} = 2$. Logo, como $\lambda + |p(t)| > 0$ para todo $t \in [0, 1]$, a Hipótese (H9) também é satisfeita. Portanto, podemos perceber que as Hipóteses (H7) – (H9) não são de difícil verificação.

Inspirados nos resultados fornecidos pelos Lemas 5.1 e 5.2, definimos a regularidade AWMP para o Problema (P) como segue.

Definição 5.1. Um processo $(\bar{x}, \bar{u})$, factível para o Problema (P), é dito *Asymptotic Weak Maximum Principle regular*, ou simplesmente processo AWMP-regular (ou AWMP-regular), sempre que

$$\text{w-lim sup}_{\substack{x \rightarrow \bar{x}, u \xrightarrow{\text{med}} \bar{u} \\ \theta \rightarrow 0}} \mathcal{M}_\delta(x, u, \theta) \subset \mathcal{M}_\delta(\bar{x}, \bar{u}, 0).$$

Com base na Definição 5.1, o próximo resultado segue imediatamente dos Lemas 5.1 e 5.2. Basicamente, ele nos diz que a condição AWMP-regular funciona como uma condição de qualificação para o Problema (P), ou seja, garante a validade do princípio do máximo fraco clássico.

Teorema 5.1. *Seja $(\bar{x}, \bar{u})$ um minimizador local fraco para (P). Suponha que as Hipóteses (H1) – (H9) são satisfeitas. Se $(\bar{x}, \bar{u})$ for um processo AWMP-regular de (P), então $(\bar{x}, \bar{u})$ satisfaz as condições do princípio do máximo fraco clássico (Teorema 2.6).*

Exemplo 5.1. No Exemplo 3.2, exploramos o fato do princípio do máximo fraco clássico (Teorema 2.6) não ser verificado e o princípio do máximo fraco assintótico ser satisfeito. Na ocasião, a sequência AWMP considerada foi dada por

$$(x^k(t), (u_1^k(t), u_2^k(t))) = (0, (0, 0)), \quad \lambda_k = \frac{2}{k}, \quad p^k(t) = -\frac{t+1}{k}, \quad (q_1^k(t), q_2^k(t)) = (0, 0),$$

$$\varepsilon^k(t) = \frac{1}{k}, \quad (\eta_1^k(t), \eta_2^k(t)) = \left(\frac{t+1}{k}, 0\right), \quad \vartheta^k = -\frac{1}{k} \quad \text{e} \quad \nu^k = 0$$

para todo $k \in \mathbb{N}$ e $t \in [0, 1]$. Assim, como a sequência $\{\varepsilon^k(t)\}$ é uniformemente limitada para todo $k \in \mathbb{N}$, a Hipótese (H7) é verificada. Além disso, se definirmos $b_1(t, x, (u_1, u_2)) := x + u_1 + 2u_2$ e $b_2(t, x, (u_1, u_2)) := u_1 + 2u_2$, então

$$q_1^k(t) \nabla_x b_1(t, x^k(t), (u_1^k(t), u_2^k(t))) + q_2^k(t) \nabla_x b_2(t, x^k(t), (u_1^k(t), u_2^k(t))) = q_1^k(t) = 0$$

para cada $k \in \mathbb{N}$ e quase todo ponto em $[0, 1]$. Logo, a Hipótese (H8) é satisfeita. Contudo, como era de se esperar, alguma das hipóteses do Teorema 5.1 deve falhar, nesse caso podemos ver que a Hipótese (H9) não se cumpre. Basta observar que $\lambda_k \rightarrow \lambda = 0$ e $p^k \rightarrow p = 0$ uniformemente, mas não existe nenhum $t_0 \in [0, 1]$ tal que $\lambda + |p(t_0)| \neq 0$.

5.2 CONDIÇÃO DE REGULARIDADE MAIS FRACA

A presente seção tem como objetivo a verificação de que a condição AWMP-regular é a condição mais fraca sob a qual AWMP implica no princípio do máximo fraco clássico. O sentido de “condição mais fraca” deve ser entendido como o do enunciado do Lema 5.3, apresentado logo abaixo. Além disso, é relevante destacar que analisamos apenas o caso suave. O caso não suave traz grandes dificuldades técnicas e, por esse motivo, será deixado como tema de investigações futuras.

Antes de apresentarmos o enunciado do Lema 5.3, vamos considerar a seguinte relação:

- (R) $(\bar{x}, \bar{u})$ um processo AWMP para (P) , com a sequência $\{(\lambda_k, p^k)\} \subset [0, +\infty) \times W_n^{1,1}$ em que $\lambda_k \rightarrow \lambda$ e $p^k \rightarrow p$ uniformemente $\Rightarrow (\bar{x}, \bar{u})$ um processo que satisfaz as condições do princípio do máximo fraco clássico (Teorema 2.6), com os multiplicadores $(\lambda, p) \in [0, +\infty) \times W_n^{1,1}$.

Lema 5.3. *Sejam dados $(\bar{x}, \bar{u}) \in W_n^{1,1} \times \mathcal{U}_m$, $\delta > 0$, as funções de restrições mistas b e g , o conjunto fechado C e a multifunção não vazia U . Suponha que as restrições (1.3), (1.4), (1.5) e (1.6) sejam satisfeitas, isto é, para quase todo ponto em $[S, T]$, valem $0 = b(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))$, $0 \geq g(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))$, $\bar{u}(t) \in U(t)$ e $(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) \in C$. Se as Hipóteses (H2), (H4) – (H6) forem válidas e para cada par de funções $\ell(\cdot, \cdot)$ e $f(t, \cdot, \cdot)$ continuamente diferenciáveis em quase todo ponto em $[S, T]$, a Relação (R) for verificada, então $(\bar{x}, \bar{u})$ é um processo AWMP-regular.*

Demonstração. Seja $\delta > 0$, tal que as Hipóteses (H2), (H5) e (H6) sejam satisfeitas. Vamos considerar

$$(\varphi, \psi, \gamma, \xi) \in \text{w-lim sup}_{\substack{x \rightarrow \bar{x}, u \xrightarrow{\text{med}} \bar{u} \\ \theta \rightarrow 0}} \mathcal{M}_\delta(x, u, \theta).$$

Por definição, existem $\{(x^k, u^k, \theta^k)\} \subset W_n^{1,1} \times \mathcal{U}_m \times \mathcal{C}$ e $\{(\varphi^k, \psi^k, \gamma^k, \xi^k)\} \subset L_n^1 \times L_m^1 \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ tais que $x^k \rightarrow \bar{x}$ uniformemente, $u \xrightarrow{\text{med}} \bar{u}$, $\theta_j^k(t) \rightarrow 0$ quase todo ponto em $[S, T]$, com $j = 1, \dots, m_g$, $(\varphi^k, \psi^k) \rightarrow (\varphi, \psi)$, $(\gamma^k, \xi^k) \rightarrow (\gamma, \xi)$,

$$(\varphi^k, \psi^k, \gamma^k, \xi^k) \in \mathcal{M}_\delta(x^k, u^k, \theta^k) \quad (5.23)$$

para todo $k \in \mathbb{N}$.

Pelo Teorema de Riesz (Teorema B.11), podemos considerar, extraindo uma subsequência (não renomearemos), que $u^k(t) \rightarrow \bar{u}(t)$ quase todo ponto em $[S, T]$.

De (5.23), garantimos a existência de sequências $\{(q^k, r^k)\} \subset L_{m_b}^1 \times L_{m_g}^1$, $\{\zeta^k\} \subset L_m^1$ e $\{(\pi_1^k, \pi_2^k)\} \subset \mathcal{N}_C(x^k(S), x^k(T))$ tais que $r_j^k(t)g_j^-(t, x^k(t), u^k(t)) = \theta_j^k(t)$, $r_j^k(t) \leq 0$, $\zeta^k(t) \in \text{co}\mathcal{N}_{U_\delta(t)}(u^k(t))$ e

$$\begin{aligned} (\varphi^k(t), \psi^k(t), \gamma^k, \xi^k) = & \left(\sum_{i=1}^{m_b} q_i^k(t) \nabla_{x,u} b_i(t, x^k(t), u^k(t)) \right. \\ & \left. + \sum_{j=1}^{m_g} r_j^k(t) \nabla_{x,u} g_j(t, x^k(t), u^k(t)), 0, 0 \right) + (0, -\zeta^k(t), \pi_1^k, \pi_2^k) \end{aligned}$$

para cada $k \in \mathbb{N}$, $j = 1, \dots, m_g$ e quase todo ponto em $[S, T]$.

Pela definição de $\mathcal{M}_\delta$ e de cone normal limite, $u^k(t) \in U_\delta(t)$ e $(x^k(S), x^k(T)) \in C$ para cada $k \in \mathbb{N}$ e quase todo ponto em $[S, T]$, pois do contrário $\mathcal{M}_\delta(x^k, u^k, \theta^k) = \emptyset$ para cada $k \in \mathbb{N}$ e teríamos uma contradição com (5.23).

Agora, para todo $t \in [S, T]$, vamos definir as seguintes matrizes

$$A(t) := \begin{bmatrix} \varphi_1(t) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \varphi_2(t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \varphi_n(t) \end{bmatrix}_{n \times n} \quad \text{e} \quad B(t) := \begin{bmatrix} \psi_1(t) & \psi_2(t) & \cdots & \psi_m(t) \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{n \times m}.$$

Além disso, consideramos também o seguinte problema de controle ótimo auxiliar (P_A):

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} \quad \ell(x(S), x(T)) \\ & \text{sobre} \quad (x, u) \in W_n^{1,1} \times \mathcal{U}_m \text{ satisfazendo} \\ & \quad \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \quad \text{q.t.p. em } [S, T], \\ & \quad 0 = b(t, x(t), u(t)) \quad \text{q.t.p. em } [S, T], \\ & \quad 0 \geq g(t, x(t), u(t)) \quad \text{q.t.p. em } [S, T], \\ & \quad u(t) \in U_\delta(t) \quad \text{q.t.p. em } [S, T], \\ & \quad (x(S), x(T)) \in C, \end{aligned}$$

em que

$$\ell(x(S), x(T)) := (-2\gamma + \mathbf{1}_{n \times 1})^T x(S) + (-2\xi - \mathbf{1}_{n \times 1})^T x(T) \quad (5.24)$$

e, para todo $t \in [S, T]$,

$$f(t, x(t), u(t)) := -2A(t)x(t) - 2B(t)u(t). \quad (5.25)$$

Para todo $k \in \mathbb{N}$ e $t \in [S, T]$, vamos definir

$$\lambda_k := \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad p^k(t) := \left(\frac{\mathbf{1}}{2}\right)_{n \times 1}.$$

Assim, $(\lambda_k, p^k) \in [0, +\infty) \times W_n^{1,1}$, $\lambda_k + \|p^k\|_{L_n^\infty} = 1$ e $\dot{p}^k(t) \equiv 0$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Além disso, $\lambda_k \rightarrow 1/2 =: \lambda$ e $(p^k, \dot{p}^k) \rightarrow (p, \dot{p}) = (1/2, 0)$ uniformemente.

Para todo $k \in \mathbb{N}$ e $t \in [S, T]$, definimos também

$$(\varepsilon^k(t), \eta^k(t)) := -\nabla_{x,u} f(t, x^k(t), u^k(t))^T p^k(t) + (-\dot{p}^k(t), 0) - (\varphi^k(t), \psi^k(t)) \quad (5.26)$$

e

$$(\vartheta^k, \nu^k) := -\lambda_k \nabla \ell(x^k(S), x^k(T)) + (p^k(S), -p^k(T)) - (\gamma^k, \xi^k). \quad (5.27)$$

De (5.24) – (5.27),

$$(\varepsilon^k(t), \eta^k(t)) = (\varphi(t), \psi(t)) - (\varphi^k(t), \psi^k(t)) \quad (5.28)$$

e

$$(\vartheta^k, \nu^k) = (\gamma, \xi) - (\gamma^k, \xi^k)$$

para cada $k \in \mathbb{N}$ e quase todo ponto em $[S, T]$. Logo, $\varepsilon^k \rightharpoonup 0$ em L_n^1 , $\eta^k \rightharpoonup 0$ em L_m^1 , $\vartheta^k \rightarrow 0$ e $\nu^k \rightarrow 0$. Consequentemente, $(\bar{x}, \bar{u})$ é um processo AWMP para (P_A) . Portanto, por hipótese, $(\bar{x}, \bar{u})$ satisfaz as condições do princípio do máximo fraco (Teorema 2.6), com os multiplicadores $(\lambda, p(t)) \equiv (1/2, 1/2)$, isto é, existem $\zeta \in L_m^1$ e $(q, r) \in L_{m_b}^1 \times L_{m_g}^1$ tais que, para quase todo ponto em $[S, T]$,

$$\begin{aligned} \lambda + \|p\|_{L_n^\infty} &\neq 0, \\ (-\dot{p}(t), \zeta(t)) &= \nabla_{x,u} \mathcal{H}(t, \bar{x}(t), p(t), q(t), r(t), \bar{u}(t)), \end{aligned} \quad (5.29)$$

$$\zeta(t) \in \text{co} \mathcal{N}_{U(t)}(\bar{u}(t)), \quad (5.30)$$

$$\begin{aligned} r(t) \cdot g(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) &= 0 \quad \text{e} \quad r(t) \leq 0, \\ (p(S), -p(T)) &\in \lambda \nabla \ell(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) + \mathcal{N}_C(\bar{x}(S), \bar{x}(T)). \end{aligned} \quad (5.31)$$

Assim, como $(\bar{x}, \bar{u})$ é viável,

$$r_j(t) g_j^-(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) = r_j(t) (-g_j(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))) = -r_j(t) g_j(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) = 0$$

para $j = 1, \dots, m_g$ e quase todo ponto em $[S, T]$.

Por (5.29), para quase todo ponto em $[S, T]$,

$$\begin{aligned} & -\nabla_{x,u} f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))^T p(t) + (-\dot{p}(t), 0) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{m_b} q_i(t) \nabla_{x,u} b_i(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) + \sum_{j=1}^{m_g} r_j(t) \nabla_{x,u} g_j(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) \right) + (0, -\zeta(t)). \end{aligned} \quad (5.32)$$

De (5.31), existe $(\pi_1, \pi_2) \in \mathcal{N}_C(\bar{x}(S), \bar{x}(T))$, tal que

$$(\pi_1, \pi_2) = -\lambda \nabla \ell(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) + (p(S), -p(T)). \quad (5.33)$$

Portanto, por (5.26), (5.27), (5.32) e (5.33), pelas convergências de $\{x^k\}$, $\{u^k\}$, $\{p^k\}$, $\{\dot{p}^k\}$ e $\{\lambda_k\}$, pela continuidade de ℓ e f , e pela unicidade dos limites,

$$(\varphi(t), \psi(t)) = \left(\sum_{i=1}^{m_b} q_i(t) \nabla_{x,u} b_i(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) + \sum_{j=1}^{m_g} r_j(t) \nabla_{x,u} g_j(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) \right) + (0, -\zeta(t))$$

para quase todo ponto em $[S, T]$ e

$$(\gamma, \xi) = (\pi_1, \pi_2).$$

Como de (5.30), $\zeta(t) \in \text{co}\mathcal{N}_U(\bar{u}(t)) = \text{co}\mathcal{N}_{U_\delta}(\bar{u}(t))$ quase todo ponto em $[S, T]$, segue que

$$(\varphi, \psi, \gamma, \xi) \in \mathcal{M}_\delta(\bar{x}, \bar{u}, 0)$$

e, portanto, $(\bar{x}, \bar{u})$ é um processo AWMP-regular. $\square$

5.3 CRITÉRIOS SUFICIENTES PARA A REGULARIDADE AWMP

Finalizamos este capítulo apresentando alguns critérios suficientes à regularidade AWMP. Tais critérios estão organizados no Lema 5.4, apresentado mais adiante. Mas, antes de enunciá-lo, vamos considerar a seguinte observação.

Observação 5.1. Lembre-se de que, dadas quaisquer sequências $\{(x^k, u^k, \theta^k)\} \subset W_n^{1,1} \times \mathcal{U}_m \times \mathcal{C}$ e $\{(\varphi^k, \psi^k, \gamma^k, \xi^k)\} \subset L_n^1 \times L_m^1 \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ com $(\varphi^k, \psi^k, \gamma^k, \xi^k) \in \mathcal{M}_\delta(x^k, u^k, \theta^k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$, pela definição de $\mathcal{M}_\delta(x^k, u^k, \theta^k)$, existem sequências $\{(q^k, r^k)\} \subset L_{m_b}^1 \times L_{m_g}^1$, $\{\zeta^k\} \subset L_m^1$ e $\{(\pi_1^k, \pi_2^k)\} \subset \mathcal{N}_C(x^k(S), x^k(T))$ tais que $r_j^k(t) g_j^-(t, x^k(t), u^k(t)) = \theta_j^k(t)$, $r_j^k(t) \leq 0$, $\zeta^k(t) \in \text{co}\mathcal{N}_{U_\delta(t)}(u^k(t))$ e

$$\begin{aligned} (\varphi^k(t), \psi^k(t), \gamma^k, \xi^k) &= \left(\sum_{i=1}^{m_b} q_i^k(t) \nabla_{x,u} b_i(t, x^k(t), u^k(t)) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^{m_g} r_j^k(t) \nabla_{x,u} g_j(t, x^k(t), u^k(t)), 0, 0 \right) + (0, -\zeta^k(t), \pi_1^k, \pi_2^k) \end{aligned}$$

para cada $k \in \mathbb{N}$, $j = 1, \dots, m_g$ e quase todo ponto em $[S, T]$. Em geral, as seqüências $\{(q^k, r^k)\} \subset L_{m_b}^1 \times L_{m_g}^1$ e $\{\zeta^k\} \subset L_m^1$ podem ser ilimitadas mesmo se $\{(x^k, u^k, \theta^k)\}$ e $\{(\varphi^k, \psi^k, \gamma^k, \xi^k)\}$ convergirem.

O resultado a seguir discute a situação sob a qual as seqüências $\{(q^k, r^k)\} \subset L_{m_b}^1 \times L_{m_g}^1$ e $\{\zeta^k\} \subset L_m^1$ podem ser escolhidas como limitadas.

Lema 5.4. *Seja $(\bar{x}, \bar{u})$ um processo factível para (P) . Suponha que dados $\delta > 0$ e*

$$(\varphi, \psi, \gamma, \xi) \in \text{w-lim sup}_{\substack{x \rightarrow \bar{x}, u \xrightarrow{\text{med}} \bar{u} \\ \theta \rightarrow 0}} \mathcal{M}_\delta(x, u, \theta),$$

as Hipóteses (H3) – (H6) sejam válidas e que as seqüências $\{(q^k, r^k)\} \subset L_{m_b}^1 \times L_{m_g}^1$ e $\{\zeta^k\} \subset L_m^1$ (vide Observação 5.1) satisfazem as seguintes condições:

- (i) *existem funções integráveis k_q e k_r tais que $|q^k(t)| \leq k_q(t)$ e $|r^k(t)| \leq k_r(t)$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e quase todo ponto em $[S, T]$,*
- (ii) *existe uma função integrável k_ζ tal que $|\zeta^k(t)| \leq k_\zeta(t)$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e quase todo ponto em $[S, T]$.*

Então, $(\bar{x}, \bar{u})$ é um processo AWMP-regular.

Demonstração. Sejam $\delta > 0$ e

$$(\varphi, \psi, \gamma, \xi) \in \text{w-lim sup}_{\substack{x \rightarrow \bar{x}, u \xrightarrow{\text{med}} \bar{u} \\ \theta \rightarrow 0}} \mathcal{M}_\delta(x, u, \theta).$$

Por definição, existem $\{(x^k, u^k, \theta^k)\} \subset W_n^{1,1} \times \mathcal{U}_m \times \mathcal{C}$ e $\{(\varphi^k, \psi^k, \gamma^k, \xi^k)\} \subset L_n^1 \times L_m^1 \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ tais que $x^k \rightarrow \bar{x}$ uniformemente, $u \xrightarrow{\text{med}} \bar{u}$, $\theta_j^k(t) \rightarrow 0$ quase todo ponto em $[S, T]$, com $j = 1, \dots, m_g$, $(\varphi^k, \psi^k) \rightharpoonup (\varphi, \psi)$ em $L_n^1 \times L_m^1$, $(\gamma^k, \xi^k) \rightarrow (\gamma, \xi)$, $(\varphi^k, \psi^k, \gamma^k, \xi^k) \in \mathcal{M}_\delta(x^k, u^k, \theta^k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Ainda por definição, existem seqüências $\{(q^k, r^k)\} \subset L_{m_b}^1 \times L_{m_g}^1$, $\{\zeta^k\} \subset L_m^1$ e $\{(\pi_1^k, \pi_2^k)\} \subset \mathcal{N}_C(x^k(S), x^k(T))$ tais que $\zeta^k(t) \in \text{co}\mathcal{N}_{U_\delta(t)}(u^k(t))$,

$$r_j^k(t)g_j^-(t, x^k(t), u^k(t)) = \theta_j^k(t), \quad r_j^k(t) \leq 0 \quad (5.34)$$

e

$$\begin{aligned} (\varphi^k(t), \psi^k(t), \gamma^k, \xi^k) = & \left(\sum_{i=1}^{m_b} q_i^k(t) \nabla_{x,u} b_i(t, x^k(t), u^k(t)) \right. \\ & \left. + \sum_{j=1}^{m_g} r_j^k(t) \nabla_{x,u} g_j(t, x^k(t), u^k(t)), 0, 0 \right) + (0, -\zeta^k(t), \pi_1^k, \pi_2^k) \end{aligned} \quad (5.35)$$

para cada $k \in \mathbb{N}$, $j = 1, \dots, m_g$ e quase todo ponto em $[S, T]$.

Pelo Teorema de Riesz (Teorema B.11), podemos considerar, extraindo uma subsequência (não renomearemos), que $u^k(t) \rightarrow \bar{u}(t)$ quase todo ponto em $[S, T]$.

Por (5.35), $(\pi_1^k, \pi_2^k) = (\gamma^k, \xi^k)$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Como $(\gamma^k, \xi^k) \rightarrow (\gamma, \xi)$, segue que $(\pi_1^k, \pi_2^k) \rightarrow (\gamma, \xi)$. Além disso, por hipótese, existe uma função integrável k_ζ tal que $|\zeta^k(t)| \leq k_\zeta(t)$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e quase todo ponto em $[S, T]$. Logo, pelo Teorema de Dunford-Pettis (Teorema 2.4), existe uma subsequência $\{\zeta^k\}$ (mais uma vez não renomearemos) tal que $\zeta^k \rightharpoonup \zeta$ em L_m^1 e

$$\int_S^t \zeta^k(s) ds \rightarrow \int_S^t \zeta(s) ds \quad \text{uniformemente.}$$

Mais uma vez usando as hipóteses, garantimos a existência de funções integráveis k_q e k_r tais que $|q^k(t)| \leq k_q(t)$ e $|r^k(t)| \leq k_r(t)$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e quase todo ponto em $[S, T]$. Portanto, definindo

$$\tilde{q}^k(t) := \frac{q^k(t)}{1 + k_q(t) + k_r(t)} \quad \text{e} \quad \tilde{r}^k(t) := \frac{r^k(t)}{1 + k_q(t) + k_r(t)}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$ e $t \in [S, T]$, segue que $\{\tilde{q}^k\}$ e $\{\tilde{r}^k\}$ são uniformemente limitadas. Logo, por meio da extração de subsequências (não renomearemos), podemos concluir que $\tilde{q}^k \rightharpoonup^* \tilde{q}$ e $\tilde{r}^k \rightharpoonup^* \tilde{r}$ em $L_{m_b}^\infty$ e $L_{m_g}^\infty$, respectivamente. Além disso, de (5.34) e (5.35), para cada $k \in \mathbb{N}$, $j = 1, \dots, m_g$, e quase todo ponto em $[S, T]$,

$$\tilde{r}_j^k(t) g_j^-(t, x^k(t), u^k(t)) = \theta_j^k(t) \left(\frac{1}{1 + k_q(t) + k_r(t)} \right), \quad \tilde{r}_j^k(t) \leq 0 \quad (5.36)$$

e

$$\begin{aligned} & \left(\varphi^k(t) \left(\frac{1}{1 + k_q(t) + k_r(t)} \right), \psi^k(t) \left(\frac{1}{1 + k_q(t) + k_r(t)} \right) \right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{m_b} \tilde{q}_i^k(t) \nabla_{x,u} b_i(t, x^k(t), u^k(t)) + \sum_{j=1}^{m_g} \tilde{r}_j^k(t) \nabla_{x,u} g_j(t, x^k(t), u^k(t)) \right) \\ &+ \left(0, -\zeta^k(t) \left(\frac{1}{1 + k_q(t) + k_r(t)} \right) \right), \end{aligned}$$

com $\theta_j^k(t) \rightarrow 0$ para $j = 1, \dots, m_g$ e quase todo ponto em $[S, T]$. Assim, de (5.36), para qualquer conjunto Lebesgue mensurável $I \subset [S, T]$, para $j = 1, \dots, m_g$, deduzimos que

$$\begin{aligned} \int_I \theta_j^k(t) \left(\frac{1}{1 + k_q(t) + k_r(t)} \right) dt &= \int_I \tilde{r}_j^k(t) g_j^-(t, x^k(t), u^k(t)) dt \\ &= \int_I \tilde{r}_j^k(t) [g_j^-(t, x^k(t), u^k(t)) - g_j^-(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))] dt \\ &+ \int_I \tilde{r}_j^k(t) g_j^-(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) dt \end{aligned} \quad (5.37)$$

e

$$\int_I \tilde{r}_j^k(t) dt \leq 0 \quad (5.38)$$

para cada $k \in \mathbb{N}$. Lembramos que $x^k \rightarrow \bar{x}$ uniformemente, $u^k(t) \rightarrow \bar{u}(t)$ quase todo ponto em $[S, T]$ e $\tilde{r}^k \rightharpoonup^* \tilde{r}$ em $L_{m_g}^\infty$. Como $\{\tilde{r}^k\}$ é uniformemente limitada e, pela Hipótese (H6), existe uma função integrável c_f tal que $|g_j(t, x^k(t), u^k(t))| \leq |g(t, x^k(t), u^k(t))| \leq c_f(t)$ para todo $k \in \mathbb{N}$, $j = 1, \dots, m_g$ e quase todo ponto em $[S, T]$, segue que $\{\tilde{r}_j^k(t)g_j^-(t, x^k(t), u^k(t))\}$ é uma sequência dominada (isto é, possui uma função integrável que a limita em quase todo ponto em $[S, T]$). Consequentemente, por (5.36), $\{\theta_j^k(t)\}(1 + k_q(t) + k_r(t))^{-1}$ também é uma sequência dominada. Logo, tomando limite com $k \rightarrow \infty$ em ambos os membros de (5.37) e (5.38), podemos aplicar o Teorema da convergência dominada (Teorema B.9) na integral no primeiro membro da igualdade e na primeira integral no segundo membro e usando o fato de $g(t, \cdot, \cdot)$ ser contínua para quase todo ponto em $[S, T]$, para concluir que

$$\tilde{r}_j(t)g_j^-(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) = 0 \quad \text{e} \quad \tilde{r}_j(t) \leq 0 \quad (5.39)$$

para $j = 1, \dots, m_g$ e quase todo ponto em $[S, T]$. De modo semelhante, note que para qualquer conjunto Lebesgue mensurável $\hat{I} \subset [S, T]$, usando (5.35), podemos concluir que

$$\begin{aligned} \int_{\hat{I}} \varphi^k(t) \left(\frac{1}{1 + k_q(t) + k_r(t)} \right) dt &= \int_{\hat{I}} \sum_{i=1}^{m_b} \tilde{q}_i^k(t) \left[\nabla_x b_i(t, x^k(t), u^k(t)) - \nabla_x b_i(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) \right] dt \\ &\quad + \int_{\hat{I}} \sum_{j=1}^{m_g} \tilde{r}_j^k(t) \left[\nabla_x g_j(t, x^k(t), u^k(t)) - \nabla_x g_j(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) \right] dt \\ &\quad + \int_{\hat{I}} \sum_{i=1}^{m_b} \tilde{q}_i^k(t) \nabla_x b_i(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) dt \\ &\quad + \int_{\hat{I}} \sum_{j=1}^{m_g} \tilde{r}_j^k(t) \nabla_x g_j(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) dt \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \int_{\hat{I}} \psi^k(t) \left(\frac{1}{1 + k_q(t) + k_r(t)} \right) dt &= \int_{\hat{I}} \sum_{i=1}^{m_b} \tilde{q}_i^k(t) \left[\nabla_u b_i(t, x^k(t), u^k(t)) - \nabla_u b_i(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) \right] dt \\ &\quad + \int_{\hat{I}} \sum_{j=1}^{m_g} \tilde{r}_j^k(t) \left[\nabla_u g_j(t, x^k(t), u^k(t)) - \nabla_u g_j(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) \right] dt \\ &\quad + \int_{\hat{I}} \sum_{i=1}^{m_b} \tilde{q}_i^k(t) \nabla_u b_i(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) dt \\ &\quad + \int_{\hat{I}} \sum_{j=1}^{m_g} \tilde{r}_j^k(t) \nabla_u g_j(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) dt \\ &\quad - \int_{\hat{I}} \zeta^k(t) \left(\frac{1}{1 + k_q(t) + k_r(t)} \right) dt \end{aligned}$$

para cada $k \in \mathbb{N}$. Assim, aplicando limite com $k \rightarrow \infty$, usando as convergências uniforme de $\{x^k\}$, quase todo ponto em $[S, T]$ de $\{u^k\}$, fraca em $L_m^1 \times L_n^1 \times L_m^1$ de $\{(\zeta^k, \varphi^k, \psi^k)\}$ e fraca estrela em $L_n^\infty \times L_m^\infty$ de $\{(\tilde{q}^k, \tilde{r}^k)\}$, juntamente com a continuidade de $\nabla_{x,u}(b, g)(t, \cdot, \cdot)$ quase todo ponto em $[S, T]$, vide Hipótese (H5), a limitação uniforme de $\{\tilde{q}^k\}$ e de $\{\tilde{r}^k\}$

e o Teorema da convergência dominada (Teorema B.9), vide Hipótese (H6), segue que

$$\begin{aligned} & \left(\varphi(t) \left(\frac{1}{1 + k_q(t) + k_r(t)} \right), \psi(t) \left(\frac{1}{1 + k_q(t) + k_r(t)} \right) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{m_b} \tilde{q}_i(t) \nabla_{x,u} b_i(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) + \sum_{j=1}^{m_g} \tilde{r}_j(t) \nabla_{x,u} g_j(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) \\ &+ \left(0, -\zeta(t) \left(\frac{1}{1 + k_q(t) + k_r(t)} \right) \right) \end{aligned} \quad (5.40)$$

quase todo ponto em $[S, T]$.

Definindo $q(t) := (1 + k_q(t) + k_r(t))\tilde{q}(t)$ e $r(t) := (1 + k_q(t) + k_r(t))\tilde{r}(t)$ para todo $t \in [S, T]$, de (5.39) e (5.40), temos que

$$r_j(t)g_j^-(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) = 0 \quad \text{e} \quad r_j(t) \leq 0$$

e

$$(\varphi(t), \psi(t)) = \sum_{i=1}^{m_b} q_i(t) \nabla_{x,u} b_i(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) + \sum_{j=1}^{m_g} r_j(t) \nabla_{x,u} g_j(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t)) + (0, -\zeta(t))$$

quase todo ponto em $[S, T]$. Por fim, recorrendo às propriedades de semicontinuidade superior dos cones normais limites, concluímos que

$$\zeta(t) \in \text{co}\mathcal{N}_{U(t)}(\bar{u}(t)) \quad \text{e} \quad (\gamma, \xi) \in \mathcal{N}_C(\bar{x}(S), \bar{x}(T))$$

quase todo ponto em $[S, T]$. Logo,

$$(\varphi, \psi, \gamma, \xi) \in \mathcal{M}_\delta(\bar{x}, \bar{u}, 0)$$

e, portanto, $(\bar{x}, \bar{u})$ é um processo AWMP-regular. $\square$

Em [13, Teorema 5.2], Börgens et al. ao estudarem as relações da AKKT-regularidade com outras condições de qualificação para problemas de programação não linear em espaços de dimensão infinita provam, usando um resultado similar ao Lema 5.4, que a condição de Robinson (RCQ) (condição equivalente a condição de Mangasarian-Fromovitz para problemas em espaços de dimensão finita) implica na AKKT-regularidade. Portanto, acreditamos que o Lema 5.4 será muito útil para estabelecer conexões entre a condição de qualificação AWMP-regularidade e as condições de qualificação presentes na literatura para problemas de controle ótimo, tais como as CQs do tipo posto completo [28], posto constante [6], Mangasarian-Fromovitz [24, 30] e WBCQ [52]. Isso ocorre porque, sob as hipóteses do Lema 5.4, a parte mais desafiadora torna-se a verificação das limitações das sequências $\{q^k\}$, $\{r^k\}$ e $\{\zeta^k\}$ por funções integráveis k_q , k_r e k_ζ , respectivamente.

6 UMA FORMA ALTERNATIVA PARA O ESTUDO DA REGULARIDADE AWMP

No Capítulo 5, mais especificamente no Lema 5.2, quando estudamos condições mínima sob as quais AWMP implicava no princípio do máximo fraco clássico (Teorema 2.6), uma hipótese adicional precisou ser usada. Assumindo que a sequência AWMP associada ao processo $(\bar{x}, \bar{u})$ seja dada por $\{(x^k, u^k, \zeta^k, p^k, q^k, r^k, \lambda_k)\} \subset W_n^{1,1} \times \mathcal{U}_m \times L_m^1 \times W_n^{1,1} \times L_{m_b}^1 \times L_{m_g}^1 \times [0, +\infty)$, a hipótese em questão consistia em exigir que

(H9) exista $M > 0$, com $\lambda_k + \|p^k\|_{L_n^\infty} \leq M$ para cada $k \in \mathbb{N}$; e se $\lambda_k \rightarrow \lambda$ e $p^k \rightarrow p$ uniformemente, então existe $t_0 \in [S, T]$ tal que $\lambda + |p(t_0)| \neq 0$.

Neste capítulo mostramos que podemos abrir mão da Hipótese (H9) ao adotar uma outra abordagem que envolve os conceitos de continuidade completa e semicontinuidade sequencial fraca, Definições 2.5 e 2.6, respectivamente. Com este propósito, dado $\delta > 0$, definimos as seguintes funções

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : D \subset W_n^{1,1} \times L_m^2 &\rightarrow L_n^\infty \\ (x, v) &\mapsto \mathcal{F}(x, v) : [S, T] \rightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\mapsto \mathcal{F}(x, v)(t) := \int_S^t f(s, x(s), v(s)) ds \end{aligned}$$

em que $D := \{(x, v) \in W_n^{1,1} \times E : x(t) \in \bar{x}(t) + \delta B \text{ q.t.p. em } [S, T]\}$, com $E := \{v \in L_m^2 : v(t) \in U_\delta(t) \text{ q.t.p. em } [S, T]\}$, e

$$\begin{aligned} \mathcal{P} : W_n^{1,1} \times L_m^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, v) &\mapsto \mathcal{P}(x, v) \end{aligned}$$

com

$$\mathcal{P}(x, v) := \int_S^T \left[\sum_{i=1}^{m_b} (b_i(t, x(t), v(t)))^2 + \sum_{j=1}^{m_g} (\max \{g_j(t, x(t), v(t)), 0\})^2 \right] dt. \quad (6.1)$$

A Afirmção 6.1, apresentada mais adiante, garante a boa definição de $\mathcal{F}$. A boa definição de $\mathcal{P}$ segue diretamente da boa definição das funções b e g .

Afirmção 6.1. Se valem as Hipóteses (H2) e (H6) e o conjunto $U_\delta(t)$ for convexo para quase todo ponto em $[S, T]$, então $\mathcal{F}(x, v) \in L_n^\infty$ para todo $(u, v) \in D$.

Prova. Seja $(x, v) \in D$. Pela definição de D , $(x(t), u(t)) \in \Omega_\delta(t)$ para quase todo ponto em $[S, T]$. Logo, pela Hipótese (H6), existe uma função integrável c_f tal que $|f(t, x(t), v(t))| \leq c_f(t)$ quase todo ponto em $[S, T]$. Assim, para quase todo ponto em $[S, T]$,

$$|\mathcal{F}(x, v)(t)| \leq \int_S^t |f(s, x(s), v(s))| ds \leq \int_S^t c_f(s) ds \leq \int_S^T c_f(t) dt \leq M$$

para algum $M > 0$. Portanto, $\mathcal{F}(x, v) \in L_n^\infty$ para todo $(u, v) \in D$. $\square$

Dados o processo de referência $(\bar{x}, \bar{u})$ e $\delta > 0$ como os mesmos das Hipóteses (H1) – (H6), para as investigações deste capítulo, vamos considerar a seguinte hipótese:

(H10) As funções $\mathcal{F}$ e $\mathcal{P}$ são completamente contínua e fracamente sequencialmente semicontínua inferior (ou fracamente sequencialmente lsc), respectivamente. Além disso, o conjunto $U_\delta(t)$ é convexo para quase todo ponto em $[S, T]$.

6.1 UMA VERSÃO ALTERNATIVA DAS CONDIÇÕES AWMP

Nesta seção reestruturaremos as condições AWMP trocando a Condição (i) da Definição 3.1 por uma condição mais restritiva, isto é, ao invés de pedirmos que $\lambda_k + \|p^k\|_{L_n^\infty} \neq 0$ para cada $k \in \mathbb{N}$, vamos exigir que

$$\lambda_k + \|p^k\|_{L_n^\infty} = 1 \quad (6.2)$$

para cada $k \in \mathbb{N}$.

Note que a Condição (6.2) implica na Hipótese (H9). Tendo em mente essa observação, neste capítulo, vamos considerar uma versão modificada de processos AWMP dada pela seguinte definição.

Definição 6.1 (Processos AWMP - Versão alternativa). Seja $(\bar{x}, \bar{u})$ um processo factível para o Problema (P) . Chamamos $(\bar{x}, \bar{u})$ de um *processo limite do princípio do máximo fraco assintótico*, ou simplesmente um *processo AWMP*, se existir uma sequência AWMP $\{(x^k, u^k, \zeta^k, p^k, q^k, r^k, \lambda_k)\}$ tal que $\lambda_k + \|p^k\|_{L_n^\infty} = 1$ para cada $k \in \mathbb{N}$, $x^k \rightarrow \bar{x}$ uniformemente e $u^k \xrightarrow{\text{med}} \bar{u}$.

A partir da Hipótese (H10) e da Definição 6.1, podemos apresentar a seguinte versão alternativa para o princípio do máximo fraco assintótico.

Teorema 6.1 (Princípio do Máximo Fraco Assintótico - Versão alternativa). *Seja $(\bar{x}, \bar{u})$ um minimizador local fraco de (P) . Se, para algum $\delta > 0$, as Hipóteses (H1) – (H5), (H6)' e (H10) forem satisfeitas, então $(\bar{x}, \bar{u})$ é um processo AWMP no sentido da Definição 6.1.*

Demonstração. Reduzimos $\delta > 0$, caso seja necessário, de modo que $(\bar{x}, \bar{u})$ seja um minimizador local fraco de (P) com relação a todos os processos factíveis (x, u) tais que $(x(t), u(t)) \in \Omega_\delta(t)$ quase todo ponto em $[S, T]$ e as Hipóteses (H1) – (H6) e (H10) sejam satisfeitas. Para organizar as ideias, dividimos a prova em quatro passos.

Passo 1: Penalizamos as restrições mistas e aplicamos o princípio variacional de Ekeland.

Consideramos W e d_W como na demonstração do Teorema 3.1, isto é,

$$W := \left\{ (x, u) \in W_n^{1,1} \times \mathcal{U}_m \left| \begin{array}{ll} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) & \text{q.t.p. em } [S, T], \\ x(t) \in \bar{x}(t) + \delta B & \text{q.t.p. em } [S, T], \\ u(t) \in U_\delta(t) & \text{q.t.p. em } [S, T], \\ (x(S), x(T)) \in C \end{array} \right. \right\},$$

e $d_W : W \times W \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$d_W((x, u), (x', u')) := |x(S) - x'(S)| + \int_S^T |u(t) - u'(t)| dt.$$

Pela Afirmação 3.1, (W, d_W) é um espaço métrico completo. Além disso, como $(\bar{x}, \bar{u}) \in W$, W é não vazio.

Para $k \in \mathbb{N}$, tomamos a função $J_k : W \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ definida por

$$J_k(x, u) := \ell(x(S), x(T)) + \mathcal{Q}(x, u) + k\mathcal{P}(x, u)$$

em que

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} : \quad W &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, u) &\mapsto \mathcal{Q}(x, u) := \int_S^T |x(t) - \bar{x}(t)|^2 dt + \int_S^T |u(t) - \bar{u}(t)|^2 dt, \end{aligned}$$

e $\mathcal{P}$ é definida como em (3.1), ou seja, $\mathcal{P} : W \rightarrow \mathbb{R}$ em que

$$\mathcal{P}(x, u) := \int_S^T \left[\sum_{i=1}^{m_b} (b_i(t, x(t), u(t)))^2 + \sum_{j=1}^{m_g} (\max\{g_j(t, x(t), u(t)), 0\})^2 \right] dt.$$

Além disso, construímos a seguinte sequência de problemas de otimização:

$$\text{minimizar } J_k(x, u) \text{ sobre } (x, u) \in W. \quad (6.3)$$

Afirmação 6.2. A função J_k é semicontínua inferior em (W, d_W) para cada $k \in \mathbb{N}$.

A prova da Afirmação 6.2 segue de forma análoga a da Afirmação 3.1.

Aplicamos a versão fraca do princípio variacional de Ekeland (Teorema 2.3) e garantimos a existência de uma sequência $\{(x^k, u^k)\} \subset W$ tal que, para cada $k \in \mathbb{N}$ e para todo $(x, u) \in W$,

$$\begin{aligned} \ell(x^k(S), x^k(T)) + \mathcal{Q}(x^k, u^k) + k\mathcal{P}(x^k, u^k) &\leq \ell(x(S), x(T)) + \mathcal{Q}(x, u) + k\mathcal{P}(x, u) \\ &\quad + \frac{1}{k} d_W((x, u), (x^k, u^k)). \end{aligned} \quad (6.4)$$

Passo 2: Obtemos as convergências da Definição 6.1.

Como $\{(x^k, u^k)\} \subset W$, $(x^k(t), u^k(t)) \in \Omega_\delta(t)$ quase todo ponto em $[S, T]$. Assim,

$$|x^k(S) - \bar{x}(S)| \leq \delta \quad \text{e} \quad \|u^k - \bar{u}\|_{L_m^\infty} \leq \delta \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (6.5)$$

Por (6.5) e a Hipótese (H6)', $\|u^k\|_{L_m^\infty} \leq \tilde{M}$, com $\tilde{M} := \delta + \|\bar{u}\|_{L_m^\infty}$. Assim, $|u^k(t)| \leq \tilde{M}$ quase todo ponto em $[S, T]$ e, conseqüentemente,

$$\int_S^T |u^k(t)|^2 dt \leq \int_S^T \tilde{M}^2 dt \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Tomando $\tilde{M}' := \tilde{M}^2(T - S)$ concluímos que $\|u^k\|_{L_m^2} \leq \tilde{M}'$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Então, pelos Teoremas B.7 e B.8, existe uma subsequência $\{u^k\} \subset L_m^2$ (não renomearemos), tal que $u^k \rightharpoonup \hat{u}$ para alguma função $\hat{u} \in L_m^2$. Além disso, como $\{(x^k, u^k)\} \subset W$, segue que

$$u^k \in E := \{u \in L_m^2 : u(t) \in U_\delta(t) \text{ q.t.p. em } [S, T]\}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$.

Vamos considerar a seguinte afirmação.

Afirmação 6.3. Dado $\delta > 0$, considere o conjunto não vazio

$$E := \{v \in L_m^2 : v(t) \in U_\delta(t) \text{ q.t.p. em } [S, T]\}.$$

Se a Hipótese (H2) for válida e o conjunto $U_\delta(t)$ for convexo para quase todo ponto em $[S, T]$, então E é um conjunto fracamente sequencialmente fechado.

Exibimos uma demonstração para a Afirmação 6.3 no Apêndice A.

Então, pela convergência fraca de $\{u^k\}$ e a Afirmação 6.3, $\hat{u} \in E$. Consequentemente, $\hat{u}(t) \in U_\delta(t)$. Portanto,

$$\hat{u}(t) \in U(t) \quad \text{q.t.p. em } [S, T]. \quad (6.6)$$

Usando novamente (6.5) podemos concluir que $|x^k(S)| \leq \tilde{M}''$ para todo $k \in \mathbb{N}$, com $\tilde{M}'' := \delta + |\bar{x}(S)|$. Desta forma, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass (Teorema B.1), através da extração de uma subsequência (mais uma vez não renomearemos), temos que $x^k(S) \rightarrow x_S$ para algum $x_S \in \mathbb{R}^n$. Além disso, pela Hipótese (H6), existe uma função integrável c_f tal que $|\dot{x}^k(t)| \leq c_f(t)$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e quase todo ponto em $[S, T]$. Consequentemente, $\{\dot{x}^k\}$ é uniformemente integravelmente limitada e pelo Teorema de Dunford-Pettis (Teorema 2.4) garantimos a existência de uma subsequência $\{\dot{x}^k\}$ (não renomearemos) tal que $\dot{x}^k \rightharpoonup \varsigma$ para alguma função $\varsigma \in L_n^1$. Logo, tomando

$$\hat{x}(t) := x_S + \int_S^t \varsigma(s) ds,$$

concluímos que $\dot{\hat{x}}(t) = \varsigma(t)$ quase todo ponto em $[S, T]$, $\hat{x}(S) = x_S$ e

$$x^k(t) \rightarrow \hat{x}(t) \quad \text{uniformemente,} \quad (6.7)$$

pois, $x^k \in W_n^{1,1}$, $x^k(S) \rightarrow x_S$ e

$$\int_S^t \dot{x}^k(s) ds \rightarrow \int_S^t \varsigma(s) ds \quad \text{uniformemente.}$$

Assim, $x^k \rightarrow \hat{x}$, com $\hat{x} \in W_n^{1,1}$. Então, pela Proposição B.1, $x^k \rightharpoonup \hat{x}$. Além disso, como

$$\|x^k - \hat{x}\|_{L_n^2}^2 = \int_S^T |x^k(t) - \hat{x}(t)|^2 dt \leq \|x^k - \hat{x}\|_{L_n^\infty}^2 (T - S) \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

de (6.7), segue que

$$x^k \rightarrow \hat{x} \quad \text{em } L_n^2. \quad (6.8)$$

Pela definição de W , $\dot{x}^k(t) = f(t, x^k(t), u^k(t))$ para cada $k \in \mathbb{N}$ e quase todo ponto em $[S, T]$. Integrando ambos os lados de S a t e tomando o limite com $k \rightarrow \infty$, temos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_S^t \dot{x}^k(s) ds = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_S^t f(s, x^k(s), u^k(s)) ds = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{F}(x^k, u^k)(t).$$

Assim, usando as convergências fracas de $\{\dot{x}^k\}$, $\{x^k\}$ e $\{u^k\}$ mais a Hipótese (H10),

$$\int_S^t \dot{\hat{x}}(s) ds = \mathcal{F}(\hat{x}, \hat{u})(t) = \int_S^t f(s, \hat{x}(s), \hat{u}(s)) ds \quad \text{q.t.p. em } [S, T].$$

Portanto,

$$\dot{\hat{x}}(t) = f(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) \quad \text{q.t.p. em } [S, T]. \quad (6.9)$$

Considerando $(x, u) = (\bar{x}, \bar{u})$ em (6.4), temos

$$\ell(x^k(S), x^k(T)) + \mathcal{Q}(x^k, u^k) + k\mathcal{P}(x^k, u^k) \leq \ell(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) + \frac{1}{k} d_W((\bar{x}, \bar{u}), (x^k, u^k))$$

para cada $k \in \mathbb{N}$. Aplicando $\limsup$ com $k \rightarrow \infty$ em ambos os lados, concluímos que

$$\ell(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) \geq \limsup_{k \rightarrow \infty} [\ell(x^k(S), x^k(T)) + \mathcal{Q}(x^k, u^k) + k\mathcal{P}(x^k, u^k)], \quad (6.10)$$

pois, por (6.5),

$$\begin{aligned} d_W((\bar{x}, \bar{u}), (x^k, u^k)) &= |x^k(S) - \bar{x}(S)| + \int_S^T |u^k(t) - \bar{u}(t)| dt \\ &\leq \delta + \|u^k - \bar{u}\|_{L_m^\infty} (T - S) \\ &\leq \delta(1 + T - S) \end{aligned}$$

para cada $k \in \mathbb{N}$.

Por (6.10), e pelo Item (ii) da Proposição 2.1,

$$\begin{aligned} \ell(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) &\geq \limsup_{k \rightarrow \infty} [\ell(x^k(S), x^k(T)) + \mathcal{Q}(x^k, u^k) + k\mathcal{P}(x^k, u^k)] \\ &\geq \liminf_{k \rightarrow \infty} [\ell(x^k(S), x^k(T)) + \mathcal{Q}(x^k, u^k) + k\mathcal{P}(x^k, u^k)] \\ &\geq \liminf_{k \rightarrow \infty} \ell(x^k(S), x^k(T)) + \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{Q}(x^k, u^k) + \liminf_{k \rightarrow \infty} [k\mathcal{P}(x^k, u^k)]. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Além disso, como por definição $\mathcal{Q}(x, u) \geq 0$ para todo $(x, u) \in W$, segue que $\liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{Q}(x^k, u^k)$ existe. Assim, pela Proposição 2.2, extraindo uma subsequência (não renomearemos), podemos concluir que

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{Q}(x^k, u^k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{Q}(x^k, u^k) = \limsup_{k \rightarrow \infty} \mathcal{Q}(x^k, u^k). \quad (6.12)$$

Portanto, usando (6.11), a continuidade local de ℓ , vide Hipótese (H3), a convergência uniforme de $\{x^k\}$ e (6.12), ao longo de uma subsequência (não renomearemos), temos que

$$\ell(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) \geq \ell(\hat{x}(S), \hat{x}(T)) + \limsup_{k \rightarrow \infty} \mathcal{Q}(x^k, u^k) + \liminf_{k \rightarrow \infty} [k\mathcal{P}(x^k, u^k)]. \quad (6.13)$$

Agora, note que de (6.13) e da não-negatividade da função $\mathcal{Q}$,

$$\ell(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) \geq \ell(\hat{x}(S), \hat{x}(T)) + \liminf_{k \rightarrow \infty} [k\mathcal{P}(x^k, u^k)]. \quad (6.14)$$

Consequentemente,

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{P}(x^k, u^k) = 0,$$

pois do contrário a relação (6.14) não poderia ser satisfeita, visto que $k \rightarrow +\infty$. Então, pelas convergências fracas de $\{x^k\}$ e $\{u^k\}$ juntas com a Hipótese (H10),

$$\begin{aligned} 0 &= \liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{P}(x^k, u^k) \\ &\geq \mathcal{P}(\hat{x}, \hat{u}) \\ &= \int_S^T \left[\sum_{i=1}^{m_b} (b_i(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)))^2 + \sum_{j=1}^{m_g} (\max \{g_j(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)), 0\})^2 \right] dt. \end{aligned}$$

Logo, $b(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) = 0$ e $g(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t)) \leq 0$ quase todo ponto em $[S, T]$. Além disso, por (6.9), pela convergência uniforme de $\{x^k\}$, por $(x^k(S), x^k(T)) \in C$ para todo $k \in \mathbb{N}$, e pelo fato de C ser fechado (Hipótese (H3)), $\dot{\hat{x}}(t) = f(t, \hat{x}(t), \hat{u}(t))$ quase todo ponto em $[S, T]$ e $(\hat{x}(S), \hat{x}(T)) \in C$. Portanto, como por (6.6), $\hat{u}(t) \in U(t)$ quase todo ponto em $[S, T]$, podemos concluir que o processo $(\hat{x}, \hat{u})$ é factível para o Problema (P).

Pelo fato de $(\hat{x}, \hat{u}) \in \Omega_\delta(t)$ quase todo ponto em $[S, T]$, usando a minimalidade local fraca de $(\bar{x}, \bar{u})$, quando considerada a não-negatividade da função $\mathcal{P}$, concluímos de (6.13) que

$$\begin{aligned} \ell(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) &\geq \ell(\hat{x}(S), \hat{x}(T)) + \limsup_{k \rightarrow \infty} \mathcal{Q}(x^k, u^k) \\ &\geq \ell(\bar{x}(S), \bar{x}(T)) + \limsup_{k \rightarrow \infty} \left(\int_S^T |x^k(t) - \bar{x}(t)|^2 dt + \int_S^T |u^k(t) - \bar{u}(t)|^2 dt \right). \end{aligned}$$

Logo,

$$\|u^k - \bar{u}\|_{L_m^2} \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \|x^k - \bar{x}\|_{L_n^2} \rightarrow 0. \quad (6.15)$$

Pela unicidade do limite em L_n^2 e as convergências em (6.8) e (6.15), $\hat{x} = \bar{x}$ em L_n^2 . Então, $\hat{x}(t) = \bar{x}(t)$ quase todo ponto em $[S, T]$. Portanto, pela continuidade de x^k para cada $k \in \mathbb{N}$ e (6.7), $x^k \rightarrow \bar{x}$ uniformemente.

Pela desigualdade de Chebyshev (Teorema B.10), para qualquer $\varrho > 0$,

$$\begin{aligned} \text{med}(\{t \in [S, T] : |u^k(t) - \bar{u}(t)| \geq \varrho\}) &= \text{med}(\{t \in [S, T] : |u^k(t) - \bar{u}(t)|^2 \geq \varrho^2\}) \\ &\leq \frac{1}{\varrho^2} \int_S^T |u^k(t) - \bar{u}(t)|^2 dt \\ &= \frac{1}{\varrho^2} \|u^k - \bar{u}\|_{L_m^2}^2 \end{aligned}$$

para cada $k \in \mathbb{N}$. Portanto, usando (6.15), concluímos que $u^k \xrightarrow{\text{med}} \bar{u}$.

Passo 3: *Aplicamos o Princípio do Máximo Fraco.*

Expressamos a propriedade de minimização dada por (6.4) da seguinte forma: para cada $k \in \mathbb{N}$, (x^k, u^k) é um minimizador local fraco para o Problema (P_1^k) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{minimizar } \ell(x(S), x(T)) + \mathcal{Q}(x, u) + k\mathcal{P}(x, u) \\ \quad + \frac{1}{k}|x(S) - x^k(S)| + \frac{1}{k} \int_S^T |u(t) - u^k(t)| dt \\ \text{sobre } (x, u) \in W_n^{1,1} \times \mathcal{U}_m \text{ satisfazendo} \\ \quad \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \quad \text{q.t.p. em } [S, T], \\ \quad x(t) \in \bar{x}(t) + \delta B \quad \text{q.t.p. em } [S, T], \\ \quad u(t) \in U_\delta(t) \quad \text{q.t.p. em } [S, T], \\ \quad (x(S), x(T)) \in C. \end{array} \right.$$

Como $x^k \rightarrow \bar{x}$ uniformemente, descartando os termos iniciais das sequências, garantimos que $x^k(t) \in \bar{x}(t) + (\delta/2)B$ para cada $k \in \mathbb{N}$ e quase todo ponto em $[S, T]$. Logo, (x^k, u^k) é um minimizador local fraco para uma variante do Problema (P_1^k) , denotado por $(\tilde{P}_1^k)$, obtida descartando a restrição $x(t) \in \bar{x}(t) + \delta B$ quase todo ponto em $[S, T]$. A partir de agora iremos trabalhar apenas com este problema.

A função Hamiltoniana para $(\tilde{P}_1^k)$ é dada por

$$\tilde{\mathcal{H}}_k^\lambda(t, x, p, u) = p \cdot f(t, x, u) - \lambda \left[\tilde{Q}(t, x, u) + k\tilde{P}(t, x, u) + \frac{1}{k}|u - u^k(t)| \right],$$

com $\tilde{Q} : [S, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ e $\tilde{P} : [S, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$\tilde{Q}(t, x, u) := |x - \bar{x}(t)|^2 + |u - \bar{u}(t)|^2$$

e

$$\tilde{P}(t, x, u) := \sum_{i=1}^{m_b} (b_i(t, x, u))^2 + \sum_{j=1}^{m_g} (\max\{g_j(t, x, u), 0\})^2.$$

Aplicando o princípio do máximo fraco (Teorema 2.5) ao Problema $(\tilde{P}_1^k)$ garantimos a existência de $\lambda_k \geq 0$, $p^k \in W_n^{1,1}$ e $\zeta^k \in L_m^1$ tais que, para cada $k \in \mathbb{N}$ e quase todo ponto em $[S, T]$,

$$\lambda_k + \|p^k\|_{L^\infty} = 1, \quad (6.16)$$

$$(-\dot{p}^k(t), \zeta^k(t)) \in \text{co } \partial_{x,u} \tilde{\mathcal{H}}_k^{\lambda_k}(t, x^k(t), p^k(t), u^k(t)), \quad (6.17)$$

$$\zeta^k(t) \in \text{co } \mathcal{N}_{U_\delta(t)}(u^k(t)), \quad (6.18)$$

$$(p^k(S), -p^k(T)) \in \lambda_k [\partial \ell(x^k(S), x^k(T)) + k^{-1} B \times \{0\}] + \mathcal{N}_C(x^k(S), x^k(T)). \quad (6.19)$$

Passo 4: Deduzimos as condições da Definição 3.1 e a condição adicional dada por (6.2).

A condição adicional, isto é, $\lambda_k + \|p^k\|_{L^\infty} = 1$ para cada $k \in \mathbb{N}$, é fornecida diretamente de (6.16) e, conseqüentemente, a Condição (i) da Definição 3.1 também é verificada. Além disso, a Condição (iii) da Definição 3.1 é dada por (6.18). Vamos agora investigar as demais. Com efeito, partindo de (6.17), usando a Regra da Soma (Proposição B.2), a comutação com (-1) (Proposição B.3) e a Regra da Cadeia (Teorema B.12), para cada $k \in \mathbb{N}$ e quase todo ponto em $[S, T]$, temos

$$\begin{aligned} (-\dot{p}^k(t), \zeta^k(t)) &\in \text{co } \partial_{x,u} \left(p^k(t) \cdot f(t, x^k(t), u^k(t)) \right) \\ &\quad + \left\{ \left(-2\lambda_k(x^k(t) - \bar{x}(t)), -2\lambda_k(u^k(t) - \bar{u}(t)) \right) \right. \\ &\quad + \left[\sum_{i=1}^{m_b} q_i^k(t) \nabla_{x,u} b_i(t, x^k(t), u^k(t)) + \sum_{j=1}^{m_g} r_j^k(t) \nabla_{x,u} g_j(t, x^k(t), u^k(t)) \right] \Big\} \\ &\quad + \{0\} \times -\lambda_k \left(\frac{1}{k} B \right) \end{aligned} \quad (6.20)$$

em que, para todo $k \in \mathbb{N}$ e quase todo $t \in [S, T]$,

$$q_i^k(t) := -2k\lambda_k b_i(t, x^k(t), u^k(t)), \quad i = 1, \dots, m_b \quad (6.21)$$

e

$$r_j^k(t) := -2k\lambda_k \max\{g_j(t, x^k(t), u^k(t)), 0\}, \quad j = 1, \dots, m_g. \quad (6.22)$$

Logo, pelas Hipóteses (H5) e (H6)', $q^k \in L_{m_b}^1$ e $r^k \in L_{m_g}^1$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Além disso, usando algum teorema de seleção mensurável adequado, por exemplo, o Teorema de Seleção Mensurável de Aumann (Teorema B.14), garantimos a existência de uma sequência de funções Lebesgue mensuráveis $\{\xi^k\}$ tal que $\xi^k(t) \in B$ para cada $k \in \mathbb{N}$ e quase todo ponto em $[S, T]$. Assim, para todo $k \in \mathbb{N}$ e quase todo ponto em $[S, T]$, podemos definir

$$\varepsilon^k(t) := -2\lambda_k(x^k(t) - \bar{x}(t)) \quad \text{e} \quad \eta^k(t) := -2\lambda_k(u^k(t) - \bar{u}(t)) - \lambda_k \left(\frac{1}{k} \xi^k(t) \right). \quad (6.23)$$

Conseqüentemente, de (6.20) – (6.23),

$$\begin{aligned} (-\dot{p}^k(t), \zeta^k(t)) &\in \text{co } \partial_{x,u} (p^k(t) \cdot f(t, x^k(t), u^k(t))) + \{(\varepsilon^k(t), \eta^k(t))\} \\ &\quad + \left\{ \left[\sum_{i=1}^{m_b} q_i^k(t) \nabla_{x,u} b_i(t, x^k(t), u^k(t)) + \sum_{j=1}^{m_g} r_j^k(t) \nabla_{x,u} g_j(t, x^k(t), u^k(t)) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Logo, pelos Corolários B.1 e B.2, para cada $k \in \mathbb{N}$,

$$(-p^k(t), \zeta^k(t)) - (\varepsilon^k(t), \eta^k(t)) \in \text{co} \partial_{x,u} \mathcal{H}(t, x^k(t), p^k(t), q^k(t), r^k(t), u^k(t)).$$

De (6.23), da limitação de $\{\lambda_k\}$ e da definição de W , segue que $(\varepsilon^k, \eta^k) \in L_n^1 \times L_m^1$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Além disso, como $u^k \rightarrow \bar{u}$ em L_m^2 , segue que $u^k \rightarrow \bar{u}$ em L_m^1 (consequência da desigualdade de Hölder dada pelo Teorema B.5). Assim, pela Proposição B.1, $u^k \rightharpoonup \bar{u}$ em L_m^1 . De forma análoga podemos concluir que $x^k \rightharpoonup \bar{x}$ em L_n^1 . Logo, mais uma vez usando (6.23), concluimos que

$$\varepsilon^k \rightharpoonup 0 \quad \text{e} \quad \eta^k \rightharpoonup 0.$$

Portanto, a Condição (ii) da Definição 3.1 é verificada.

Definindo $\theta_j^k(t) := 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, $j = 1, \dots, m_g$, e $t \in [S, T]$, e usando (6.22), segue que $\theta^k \subset \mathcal{C}$, $r_j^k(t) \leq 0$ e

$$\begin{aligned} r_j^k(t) g_j^-(t, x^k(t), u^k(t)) &= -2k \lambda_k (\max\{g_j(t, x^k(t), u^k(t)), 0\} \max\{-g_j(t, x^k(t), u^k(t)), 0\}) \\ &= \theta_j^k(t) \end{aligned}$$

para cada $k \in \mathbb{N}$, $j = 1, \dots, m_g$ e quase todo ponto em $[S, T]$. Logo, a Condição (iv) da Definição 3.1 é cumprida.

Por fim, observe que a partir de (6.19),

$$(p^k(S), -p^k(T)) \in \lambda_k \partial \ell(x^k(S), x^k(T)) + \lambda_k(k^{-1}\sigma^k, 0) + \mathcal{N}_C(x^k(S), x^k(T))$$

para cada $k \in \mathbb{N}$ e algum $\sigma^k \in B$. Consequentemente,

$$(p^k(S), -p^k(T)) - \lambda_k(k^{-1}\sigma^k, 0) \in \lambda_k \partial \ell(x^k(S), x^k(T)) + \mathcal{N}_C(x^k(S), x^k(T))$$

para cada $k \in \mathbb{N}$ e algum $\sigma^k \in B$. Então, definindo $\vartheta^k := k^{-1}\lambda_k\sigma^k$ e $\nu^k := 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, temos que

$$(p^k(S), -p^k(T)) - (\vartheta^k, \nu^k) \in \lambda_k \partial \ell(x^k(S), x^k(T)) + \mathcal{N}_C(x^k(S), x^k(T))$$

para cada $k \in \mathbb{N}$. Além disso, como $\{\lambda_k\}$ é uma sequência limitada e $\sigma^k \in B$, segue que $\vartheta^k \rightarrow 0$ e verificamos a Condição (v) da Definição 3.1, como queríamos. $\square$

6.2 REGULARIDADE AWMP

Nesta seção, baseados no conceito de processos AWMP para o Problema (P) estabelecido pela Definição 6.1, vamos verificar que a condição AWMP-regular (Definição 5.1) ainda é uma condição de qualificação para (P) quando a Hipótese (H9) é substituída pela Hipótese (H10). Seguindo um caminho semelhante ao realizado na Seção 5.1, apresentamos o lema a seguir.

Lema 6.1. *Seja $(\bar{x}, \bar{u})$ um processo AWMP para o Problema (P) no sentido da Definição 6.1. Assuma que a sequência AWMP associada seja dada por $\{(x^k, u^k, \zeta^k, p^k, q^k, r^k, \lambda_k)\} \subset W_n^{1,1} \times \mathcal{W}_m \times L_m^1 \times W_n^{1,1} \times L_{m_b}^1 \times L_{m_g}^1 \times [0, +\infty)$, com $\{(\varepsilon^k, \eta^k)\} \subset L_n^1 \times L_m^1$ como na Definição 3.1; que*

(H7) existam funções integráveis k_ε e k_η tais que $|\varepsilon^k(t)| \leq k_\varepsilon(t)$ e $|\eta^k(t)| \leq k_\eta(t)$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e quase todo ponto em $[S, T]$;

e que

(H8) exista uma função integrável k_φ tal que

$$\left| \sum_{i=1}^{m_b} q_i^k(t) \nabla_{x,u} b_i(t, x^k(t), u^k(t)) + \sum_{j=1}^{m_g} r_j^k(t) \nabla_{x,u} g_j(t, x^k(t), u^k(t)) \right| \leq k_\varphi(t)$$

para todo $k \in \mathbb{N}$ e quase todo ponto em $[S, T]$.

Então

$$\mathcal{M}(\bar{x}, \bar{u}) \cap \left(- \text{w-lim sup}_{\substack{x \rightarrow \bar{x}, u \xrightarrow{\text{med}} \bar{u} \\ \theta \rightarrow 0}} \mathcal{M}_\delta(x, u, \theta) \right) \neq \emptyset.$$

A demonstração do Lema 6.1 segue de forma semelhante a do Lema 5.2. A única alteração substancial é que a nova condição dada por (6.2), isto é, $\lambda_k + \|p^k\|_{L_n^\infty} = 1$ para cada $k \in \mathbb{N}$, cumpre o papel da Hipótese (H9).

Com base na Definição 5.1, o resultado apresentado adiante segue imediatamente dos Lemas 5.1 e 6.1. Em linhas gerais ele garante que a condição AWMP-regular é uma condição de qualificação para o Problema (P), ou seja, garante a validade do princípio do máximo fraco clássico.

Teorema 6.2. *Seja $(\bar{x}, \bar{u})$ um minimizador local fraco de (P). Suponha que as Hipóteses (H1) – (H5), (H6)', (H7), (H8) e (H10) são satisfeitas. Se $(\bar{x}, \bar{u})$ for um processo AWMP-regular de (P), então $(\bar{x}, \bar{u})$ satisfaz as condições do princípio do máximo fraco clássico (Teorema 2.6).*

Exemplo 6.1. Novamente retomamos o Exemplo 3.2. Vamos verificar inicialmente que a Hipótese (H10) é satisfeita. Com efeito, definimos $f(t, x, (u_1, u_2)) := u_1$, $b_1(t, x, (u_1, u_2)) := x + u_1 + 2u_2$ e $b_2(t, x, (u_1, u_2)) := u_1 + 2u_2$. Note que as funções $f(t, \cdot, (\cdot, \cdot))$, $b_1(t, \cdot, (\cdot, \cdot))$ e $b_2(t, \cdot, (\cdot, \cdot))$ são afins para quase todo ponto em $[0, 1]$. Logo, pelo resultado da Observação 2.1, para toda sequência $\{(x^k, (v_1^k, v_2^k))\} \subset W^{1,1}([0, 1]; \mathbb{R}) \times L^2([0, 1]; \mathbb{R}^2)$, tal que $(x^k, (v_1^k, v_2^k)) \rightharpoonup (\hat{x}, (\hat{v}_1, \hat{v}_2))$, temos

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} b_1(t, x^k, (v_1^k, v_2^k)) &= b_1(t, \hat{x}, (\hat{v}_1, \hat{v}_2)), \\ \lim_{k \rightarrow \infty} b_2(t, x^k, (v_1^k, v_2^k)) &= b_2(t, \hat{x}, (\hat{v}_1, \hat{v}_2)) \end{aligned}$$

e

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(t, x^k, (v_1^k, v_2^k)) = f(t, \hat{x}, (\hat{v}_1, \hat{v}_2)).$$

para quase todo ponto em $[0, 1]$.

Como $(\bar{x}, (\bar{u}_1, \bar{u}_2)) = (0, (0, 0))$, segue que

$$K_f(t) := |f(t, \bar{x}(t), (\bar{u}_1(t), \bar{u}_2(t)))| = |\bar{u}_1(t)| = 0$$

e

$$\begin{aligned} K_{b_1, b_2}(t) &:= |(b_1(t, \bar{x}(t), (\bar{u}_1(t), \bar{u}_2(t))), b_1(t, \bar{x}(t), (\bar{u}_1(t), \bar{u}_2(t))))| \\ &= |(\bar{x}(t) + \bar{u}_1(t) + 2\bar{u}_2(t), \bar{u}_1(t) + 2\bar{u}_2(t))| \\ &= 0 \end{aligned}$$

para quase todo ponto em $[0, 1]$. Consequentemente, K_f e K_{b_1, b_2} são integráveis. Pelo fato de $(\bar{u}_1, \bar{u}_2) = (0, 0)$, é imediato que $(\bar{u}_1, \bar{u}_2) \in L^\infty([0, 1]; \mathbb{R}^2)$. Portanto, a Hipótese (H6)' é satisfeita. Como pela linearidade de f a Hipótese (H1) também é satisfeita para f , a Hipótese (H6) é cumprida para f (vide Afirmação 2.1) e pelo Teorema da convergência dominada (Teorema B.9),

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{F}(x^k, (v_1^k, v_2^k))(t) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^t f(s, x^k(s), (v_1^k(s), v_2^k(s))) \, ds \\ &= \int_0^t \lim_{k \rightarrow \infty} f(s, x^k(s), (v_1^k(s), v_2^k(s))) \, ds \\ &= \int_0^t f(s, \hat{x}(s), (\hat{v}_1(s), \hat{v}_2(s))) \, ds \\ &= \mathcal{F}(\hat{x}, (\hat{v}_1, \hat{v}_2))(t) \end{aligned}$$

para quase todo ponto em $[0, 1]$. Além disso, usando o Lema de Fatou (Lema B.2),

$$\begin{aligned} &\liminf_{k \rightarrow \infty} \mathcal{P}(x^k, (v_1^k, v_2^k)) \\ &= \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_0^1 [(b_1(t, x^k(t), (v_1^k(t), v_2^k(t))))^2 + (b_2(t, x^k(t), (v_1^k(t), v_2^k(t))))^2] \, dt \\ &\geq \int_0^1 \liminf_{k \rightarrow \infty} [(b_1(t, x^k(t), (v_1^k(t), v_2^k(t))))^2 + (b_2(t, x^k(t), (v_1^k(t), v_2^k(t))))^2] \, dt \\ &= \int_0^1 [(b_1(t, \hat{x}(t), (\hat{v}_1(t), \hat{v}_2(t))))^2 + (b_2(t, \hat{x}(t), (\hat{v}_1(t), \hat{v}_2(t))))^2] \, dt \\ &= \mathcal{P}(\hat{x}, (\hat{v}_1, \hat{v}_2)). \end{aligned}$$

Logo, $\mathcal{F}$ é completamente contínua e $\mathcal{P}$ é fracamente sequencialmente semicontínua inferior. Portanto, a Hipótese (H10) é verificada.

Na análise desenvolvida no Exemplo 3.2, consideramos

$$\begin{aligned} (x^k(t), (u_1^k(t), u_2^k(t))) &= (0, (0, 0)), \quad \lambda_k = \frac{2}{k}, \quad p^k(t) = -\frac{t+1}{k}, \quad (q_1^k(t), q_2^k(t)) = (0, 0), \\ \varepsilon^k(t) &= \frac{1}{k}, \quad (\eta_1^k(t), \eta_2^k(t)) = \left(\frac{t+1}{k}, 0\right), \quad \vartheta^k = -\frac{1}{k} \quad \text{e} \quad \nu^k = 0 \end{aligned}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$ e $t \in [0, 1]$. Tal sequência não garante que $(0, (0, 0))$ seja um processo AWMP para o Problema (P) no sentido da Definição 6.1. Basta ver que

$$\lambda_k + \|p^k\|_{L_n^\infty} = \frac{2}{k} + \max_{t \in [0, 1]} \left\{ \left| -\frac{t+1}{k} \right| \right\} = \frac{3}{k} \neq 1$$

para cada $k \in \mathbb{N}$. Contudo, considerando as sequências

$$(x^k(t), (u_1^k(t), u_2^k(t))) = (0, (0, 0)), \quad \lambda_k = \frac{1}{2}, \quad p^k(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t \in \left[0, \frac{k}{k+1}\right), \\ -\left(\frac{k+1}{2}\right)t + \frac{k}{2}, & \text{se } t \in \left[\frac{k}{k+1}, 1\right] \end{cases}$$

$$(q_1^k(t), q_2^k(t)) = (-\dot{p}^k(t), \dot{p}^k(t)), \quad \varepsilon^k(t) = 0, \quad (\eta_1^k(t), \eta_2^k(t)) = (-p^k(t), 0), \quad \vartheta^k = 0 \quad \text{e} \quad \nu^k = 0$$

para todo $k \in \mathbb{N}$ e $t \in [0, 1]$, teremos a garantia de $(0, (0, 0))$ é um processo AWMP para o Problema (P) no sentido da Definição 6.1. Entretanto, a Hipótese (H8) não é verificada. Com efeito, note que

$$q_1^k(t) \nabla_x b_1(t, x^k(t), (u_1^k(t), u_2^k(t))) + q_2^k(t) \nabla_x b_2(t, x^k(t), (u_1^k(t), u_2^k(t))) = q_1^k(t)$$

para cada $k \in \mathbb{N}$ e quase todo ponto em $[0, 1]$. Como

$$q_1^k(t) = -\dot{p}^k(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t \in \left[0, \frac{k}{k+1}\right), \\ -\frac{k+1}{2}, & \text{se } t \in \left[\frac{k}{k+1}, 1\right] \end{cases}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$ e quase todo ponto em $[0, 1]$, a sequência $\{q_1^k\}$ não pode ser limitada quase todo ponto em $[0, 1]$ por uma função integrável que independa de $k \in \mathbb{N}$. Consequentemente, a Hipótese (H8) não é satisfeita.

Como vimos no Exemplo 3.2, as condições do princípio do máximo fraco clássico (Teorema 2.6) não são verificadas para o problema. Logo, já esperávamos que alguma das hipóteses do Teorema 6.2 falharia.

A verificação de que AWMP-regular (caso em que ℓ e $f(t, \cdot, \cdot)$ são suaves quase todo ponto em $[S, T]$) é a condição mais fraca sob a qual AWMP implica no princípio do máximo fraco clássico e a análise dos critérios suficientes para a garantia da validade da condição AWMP-regular, estudadas nas Seções 5.2 e 5.3, respectivamente, permanecem válidas sob a definição alternativa de processos AWMP estabelecida pela Definição 6.1. Além disso, os resultados verificados no Capítulo 4 para o método de Lagrangiano aumentado proposto também continuam sendo satisfeitos.

Portanto, os resultados apresentados nos Capítulos 5 e 6 estabelecem situações alternativas sob as quais podemos usar a nova condição de qualificação proposta neste trabalho, ou seja, a condição AWMP-regular. Mais especificamente, no Capítulo 5, uma

hipótese sob os multiplicadores associados às funções ℓ e f precisou ser usada. Já no Capítulo 6, abrindo mão dessa hipótese, precisamos usar hipóteses de continuidade completa, semicontinuidade sequencial fraca e convexidade sobre o conjunto $U_\delta(t)$ para quase todo ponto em $[S, T]$. Desta forma, a escolha da abordagem adequada deve ocorrer mediante as características fornecidas pelo problema de interesse.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, apresentamos as condições AWMP. Elas são condições necessárias de otimalidade sequenciais para certos problemas de controle ótimo que envolvem restrições mistas nas variáveis de estado e de controle na forma de igualdades e desigualdades. Para organizar os conceitos, primeiro definimos o que são sequências AWMP e depois o que são processos AWMP. Demonstramos que todo minimizador local fraco de um problema de controle ótimo da forma (P) é necessariamente um processo AWMP, o que significa que as condições satisfeitas pelos processos AWMP podem ser consideradas como genuínas condições necessárias de otimalidade. Nenhuma condição de qualificação foi imposta. Em um segundo momento, propomos um método do tipo Lagrangiano aumentado para problemas de controle ótimo que, sob certas hipóteses, gera sequências cujas condições AWMP funcionam como critério geral de parada. Além disso, aplicamos o algoritmo proposto para resolver numericamente alguns problemas de controle ótimo mais simples encontrados na literatura, demonstrando a viabilidade prática do algoritmo e destacando seu potencial. Nossa terceira e última contribuição foi derivar uma nova condição de regularidade, a qual denominamos AWMP-regularidade. Essa condição, por sua vez, atua como uma condição de qualificação, isto é, garante a validade do princípio do máximo. Mostramos também que, sob certas hipóteses, AWMP-regularidade é a condição mínima sob a qual as condições AWMP implicam no princípio do máximo e estabelecemos alguns critérios suficientes para a AWMP-regularidade.

Como as condições de otimalidade tradicionais têm que ser verificadas na solução ótima do problema estudado, que a depender de sua complexidade, pode tornar a obtenção de tal solução uma tarefa árdua ou mesmo impraticável, as condições de otimalidade sequenciais, tais como as fornecidas pelo princípio do máximo fraco assintótico, se destacam como poderosas ferramentas, visto que existem caminhos práticos para a sua obtenção, por exemplo, através de uma versão adequada do método de Lagrangiano aumentado. Adicionalmente, a regularidade AWMP estabelece condições mínimas sob as quais essas condições sequenciais implicam nas condições de otimalidade clássicas estabelecidas pelo princípio do máximo. Em resumo, o princípio do máximo fraco assintótico define critérios práticos para a seleção de candidatos a soluções em problemas de controle ótimo e a regularidade AWMP, quando atendida, assegura que esses critérios possuem precisão equivalente às condições do princípio do máximo.

Embora as condições AWMP representem um conjunto de condições necessárias de otimalidade que podem ser obtidas de maneira prática, a abordagem escolhida no presente trabalho, que consiste em utilizar uma versão adequada do método de Lagrangiano aumentado, introduz uma dificuldade inerente à natureza desse método. Dado que os métodos do tipo Lagrangiano aumentado são, em essência, métodos de penalização, a verificação da factibilidade dos pontos de acumulação das sequências por eles gerados

se torna uma tarefa não trivial. Acreditamos que uma possível superação desse desafio poderia envolver a exploração de outros métodos.

Dada a natureza de (P) , tivemos que trabalhar com espaços de dimensão infinita, tais como L_l^p , $W_l^{1,1}$ e $\mathcal{U}_m$. Desta forma, além da dificuldade destacada no parágrafo anterior, tivemos problemas com a extração de subsequências convergente, visto que ferramentas comumente usada em espaços de dimensão finita, por exemplo, o Teorema de Bolzano-Weierstrass (Teorema B.1), não se aplicam a tais espaços de dimensão infinita.

Em linhas gerais, uma das maiores contribuições deste trabalho foi trazer o conceito de condições de otimalidade sequenciais para o contexto de controle ótimo. Esperamos que os resultados obtidos sirvam como um ponto de partida para futuras pesquisas nesta área, estimulando o desenvolvimento contínuo do conhecimento e práticas no campo da teoria de controle ótimo e condições de otimalidade.

Como investigações futuras pretendemos:

- Estabelecer as relações entre a AWMP-regularidade e as condições de qualificação para problemas de controle ótimo existentes na literatura, por exemplo, as CQs do tipo posto completo [28], posto constante [6], Mangasarian-Fromovitz [24, 30], WBCQ [52], entre outras.
- Propor novas condições de otimalidade sequenciais de segunda ordem para problemas de controle ótimo, algo semelhante às condições AKKT2 [4] da programação não linear.
- Implementar o método de Lagrangiano aumentado para problemas de controle ótimo mais complexos (problemas na forma de (P) , número maior de restrições, restrições não lineares, etc.).
- Investigar se outros métodos numéricos satisfazem as condições AWMP. A ideia inicial consiste em estudar versões para controle ótimo de métodos para problemas de programação não linear que satisfazem as condições AKKT, tais como os métodos de programação quadrática sequencial [69], alguns métodos de pontos interiores [21] e métodos de restauração inexata [54].
- Aplicar nossa teoria a problemas reais, por exemplo, em modelos de espalhamento de doenças como a Covid 19 e a dengue, tratamento do câncer, extração avançada de petróleo, dentre outros.
- Estudar outras condições de otimalidade sequenciais para problemas de controle ótimo na forma de (P) . Um primeiro caminho que julgamos viável é, assim como fizemos com as condições AWMP, recorrer à programação não linear, mais especificamente às condições AGP (*Approximate Gradient Projection*) [55].

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] M. A. Aguiar, E. Camponogara e B. Foss. “An augmented Lagrangian for optimal control of DAE Systems: Algorithm and Properties”. Em: *IEEE Transactions on Automatic Control* 66.1 (2021), pp. 261–266. DOI: 10.1109/TAC.2020.2976042.
- [2] M. A. Aguiar, E. Camponogara e B. Foss. “An augmented Lagrangian method for optimal control of continuous time DAE systems”. Em: *2016 IEEE Conference on Control Applications (CCA)*. 2016, pp. 1185–1190. DOI: 10.1109/CCA.2016.7587967.
- [3] R. Andreani, G. Haeser e J. M. Martínez. “On sequential optimality conditions for smooth constrained optimization”. Em: *Optimization* 60.5 (2011), pp. 627–641. DOI: 10.1080/02331930903578700.
- [4] R. Andreani, G. Haeser, A. Ramos e P. J. S. Silva. “A second-order sequential optimality condition associated to the convergence of optimization algorithms”. Em: 37.4 (2017), pp. 1902–1929. DOI: 10.1093/imanum/drw064.
- [5] R. Andreani, J. M. Martínez, A. Ramos e P. J. S. Silva. “A cone-continuity constraint qualification and algorithmic consequences”. Em: *SIAM J. Optim.* 26 (2016), pp. 96–110. DOI: 10.1137/15M1008488.
- [6] R. Andreani, V. A. de Oliveira, J. T. Pereira e G. N. Silva. “A weak maximum principle for optimal control problems with mixed constraints under a constant rank condition”. Em: *IMA Journal of Mathematical Control and Information* 37.3 (2020), pp. 1021–1047. DOI: 10.1093/imamci/dnz036.
- [7] A. V. Arutyunov. *Optimality Conditions: Abnormal and Degenerate Problems*. Vol. 526. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2000.
- [8] J. -P. Aubin e H. Frankowska. *Set-Valued Analysis*. Modern Birkhäuser Classics, reprint of the 1990 edition. Boston: Birkhäuser Boston, 1979.
- [9] J. A. Becerril, K. L. Cortez e M. d. R. de Pinho. “A minimum principle for affine-convex control problems with nonregular mixed constraints”. Em: *Institute of Electrical and Electronics Engineers. Transactions on Automatic Control* 68.8 (2023), pp. 5081–5088. DOI: 10.1109/tac.2022.3218586.
- [10] D. Bertsekas. *Nonlinear Programming*. Belmont: Athena Scientific, 1995.
- [11] V. I. Bogachev. *Measure Theory*. Vol. 1. Berlin: Springer, 2007.
- [12] J. F. Bonnans. “On an algorithm for optimal control using Pontryagin’s maximum principle”. Em: *SIAM Journal on Control and Optimization* 24.3 (1986), pp. 579–588. DOI: 10.1137/0324034.

- [13] E. Börgens, C. Kanzow, P. Mehlitz e G. Wachsmuth. “New constraint qualifications for optimization problems in Banach spaces based on asymptotic KKT Conditions”. Em: *SIAM J. Optim.* 4 (2020), pp. 2956–2982. DOI: 10.1137/19M1306804.
- [14] E. Börgens, C. Kanzow e D. Steck. “Local and global analysis of multiplier methods for constrained optimization in Banach spaces”. Em: *SIAM Journal on Control and Optimization* 57.6 (2019), pp. 3694–3722. DOI: 10.1137/19M1240186.
- [15] A. Borzì. *Modelling with Ordinary Differential Equations: A comprehensive approach*. 1^a ed. New York: CRC Press, 2020.
- [16] A. Borzì. *The Sequential Quadratic Hamiltonian method: Solving optimal control problems*. 1^a ed. New York: CRC Press, 2023.
- [17] T. Breitenbach e A. Borzì. “A Sequential Quadratic Hamiltonian method for solving parabolic optimal control problems with discontinuous cost functionals”. Em: *Journal of Dynamical and Control Systems* 25 (2019), pp. 403–435. DOI: 10.1007/s10883-018-9419-6.
- [18] H. Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Universitext. New York: Springer, 2010.
- [19] C. Büskens. “Optimierungsmethoden und Sensitivitätsanalyse für optimale Steuerprozesse mit Steuer- und Zustands-Beschränkungen”. Dissertação de mestrado. Alemanha: Institut für Numerische Mathematik, Universität Münster, 1998.
- [20] C. Büskens e H. Maurer. “SQP-methods for solving optimal control problems with control and state constraints: adjoint variables, sensitivity analysis and real-time control”. Em: vol. 120. 1-2. 2000, pp. 85–108. DOI: 10.1016/S0377-0427(00)00305-8.
- [21] L. Chen e D. Goldfarb. “Interior-point l_2 -penalty methods for nonlinear programming with strong global convergence properties”. Em: *Mathematical Programming. A Publication of the Mathematical Programming Society* 108.1 (2006), pp. 1–36. DOI: 10.1007/s10107-005-0701-5.
- [22] F. Clarke. *Functional Analysis, Calculus of Variations and Optimal Control*. London: Springer-Verlag, 2013.
- [23] F. Clarke. *Optimization and Nonsmooth Analysis*. New York: Wiley, 1983.
- [24] F. Clarke e M. d. R. de Pinho. “Optimal control problems with mixed constraints”. Em: *SIAM Journal on Control and Optimization* 48.7 (2010), pp. 4500–4524. DOI: 10.1137/090757642.
- [25] F. Clarke, Y. S. Ledyaev, R. J. Stern e P. R. Wolenski. *Nonsmooth Analysis and Control Theory*. New York: Springer, 1998.

- [26] D. W. Cunningham. *Real analysis: with proof strategies*. 1^a ed. Boca Raton: CRC Press, 2021.
- [27] M. d. R. de Pinho. “Mixed constrained control problems”. Em: *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 278.2 (2003), pp. 293–307. DOI: 10.1016/S0022-247X(02)00351-7.
- [28] M. d. R. de Pinho e A. Ilchmann. “Weak maximum principle for optimal control problems with mixed constraints”. Em: *Nonlinear Analysis* 48 (2002), pp. 1179–1196. DOI: 10.1016/S0362-546X(01)00094-3.
- [29] M. d. R. de Pinho, P. Loewen e G. N. Silva. “A weak maximum principle for optimal control problems with nonsmooth mixed constraints”. Em: *Set-Valued and Variational Analysis* 17.2 (2009), pp. 203–221. DOI: 10.1007/s11228-009-0108-1.
- [30] M. d. R. de Pinho e J. F. Rosenblueth. “Necessary conditions for constrained problems under Mangasarian–Fromowitz conditions”. Em: *SIAM Journal on Control and Optimization* 47.1 (2008), pp. 535–552. DOI: 10.1137/060663623.
- [31] M. d. R. de Pinho e R. B. Vinter. “An Euler-Lagrange inclusion for optimal control problems”. Em: *IEEE Transactions on Automatic Control* 40.7 (1995), pp. 1191–1198. DOI: 10.1109/9.400492.
- [32] F. Deutsch. *Best Approximation in Inner Product Spaces*. 1^a ed. New York: Springer-Verlag, 2001.
- [33] A. V. Dmitruk. “Maximum principle for the general optimal control problem with phase and regular mixed constraints”. Em: *Computational Mathematics and Modeling* 4 (1993), pp. 364–377. DOI: 10.1007/BF01128760.
- [34] A. V. Dmitruk. “On the development of Pontryagin’s maximum principle in the works of A. Ya. Dubovitskii and A. A. Milyutin”. Em: *Control and Cybernetics* 38.4A (2009), pp. 923–957.
- [35] A. V. Dmitruk e N. P. Osmolovskii. “Local minimum principle for an optimal control problem with a nonregular mixed constraint”. Em: *SIAM Journal on Control and Optimization* 60.4 (2022), pp. 1919–1941. DOI: 10.1137/21M1411469.
- [36] A. V. Dmitruk e N. P. Osmolovskii. “Local minimum principle for optimal control problems with mixed constraints: the nonregular case”. Em: *Applied Mathematics and Optimization* 88.1 (2023), Artigo N^o 16, pp. 1–42. DOI: 10.1007/s00245-023-09993-1.
- [37] A. J. Dubovitskii e A. A. Miljutin. “Necessary conditions for a weak extremum in optimal control problems with mixed constraints of inequality type”. Em: *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.* 8 (1968), pp. 725–779.
- [38] N. Dunford e J. T. Schwartz. *Linear Operators. Part I: General Theory*. London: Wiley-Interscience (Wiley Classics Library), 1988.

- [39] I. Ekeland. “On the variational principle”. Em: *J. Math. Anal. Appl.* 47.2 (1974), pp. 324–353. DOI: 10.1016/0022-247X(74)90025-0.
- [40] Z. Foroozandeh, M. Shamsi e M. d. R. de Pinho. “A mixed-binary non-linear programming approach for the numerical solution of a family of singular optimal control problems”. Em: *International Journal of Control* 92.7 (2019), pp. 1551–1566. DOI: 10.1080/00207179.2017.1399216.
- [41] P. Freire. *A Importância do Ato de Ler: em três artigos que se completam*. São Paulo: Cortez, 1989.
- [42] R. A. Gordon. *The integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock*. Vol. 4. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 1994. DOI: 10.1090/gsm/004.
- [43] A. Hamel. “Suboptimality theorems in optimal control”. Em: *Variational calculus, optimal control and applications (Trassenheide, 1996)*. Vol. 124. Internat. Ser. Numer. Math. Birkhäuser, Basel, 1998, pp. 61–68.
- [44] A. H. Hamel. “A suboptimality condition for generalized control systems”. Em: *2001 European Control Conference (ECC)* (2001), pp. 250–252. DOI: 10.23919/ECC.2001.7075914.
- [45] C. Kanzow, D. Steck e D. Wachsmuth. “An augmented Lagrangian method for optimization problems in Banach spaces”. Em: *SIAM Journal on Control and Optimization* 56.1 (2018), pp. 272–291. DOI: 10.1137/16M1107103.
- [46] W. Karush. “Minima of Functions of Several Variables with Inequalities as Side Constraints”. Dissertação de Mestrado. Chicago: University of Chicago, 1939.
- [47] N. Katzourakis e E. Varvaruca. *An Illustrative Introduction to Modern Analysis*. 1ª ed. New York: Chapman e Hall/CRC, 2017.
- [48] S. G. Krantz. *Foundations of Analysis*. New York: CRC Press, 2015.
- [49] I. A. Krylov e F. L. Chernous’ko. “An algorithm for the method of successive approximations in optimal control problems”. Em: *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics* 12.1 (1972), pp. 15–38. DOI: 10.1016/0041-5553(72)90063-8.
- [50] I. A. Krylov e F. L. Chernous’ko. “On a method of successive approximations for the solution of problems of optimal control”. Em: *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics* 2.6 (1963), pp. 1371–1382. DOI: 10.1016/0041-5553(63)90353-7.
- [51] H. W. Kuhn e A. W. Tucker. “Nonlinear Programming”. Em: *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 1950*. Berkeley e Los Angeles: University of California Press, 1951, pp. 481–492.

- [52] A. Li e J. J. Ye. “Necessary optimality conditions for optimal control problems with nonsmooth mixed state and control constraints”. Em: *Set-Valued and Variational Analysis. Theory and Applications* 24.3 (2016), pp. 449–470. DOI: 10.1007/s11228-015-0358-z.
- [53] E. L. Lima. *Curso de Análise*. 1^a ed. Vol. 2. Rio de Janeiro: IMPA, 2014.
- [54] J. M. Martínez e E. A. Pilotta. “Inexact-restoration algorithm for constrained optimization”. Em: *Journal of Optimization Theory and Applications* 104.1 (2000), pp. 135–163. DOI: 10.1023/A:1004632923654.
- [55] J. M. Martínez e B. F. Svaiter. “A practical optimality condition without constraint qualifications for nonlinear programming”. Em: *Journal of Optimization Theory and Applications* 118.1 (2003), pp. 117–133. DOI: 10.1023/A:1024791525441.
- [56] MATLAB. *Version 9.12.0.2039608 (R2022a) Update 5*. Natick, Massachusetts: The MathWorks Inc., 2022.
- [57] H. Maurer, C. Büskens, J.-H. R. Kim e C. Y. Kaya. “Optimization methods for the verification of second order sufficient conditions for bang-bang controls”. Em: 26.3 (2005), pp. 129–156. DOI: 10.1002/oca.756.
- [58] H. Maurer e M. d. R. de Pinho. “Optimal control of epidemiological SEIR models with L^1 -objectives and control-state constraints”. Em: *Pacific Journal of Optimization. An International Journal* 12.2 (2016), pp. 415–436.
- [59] H. Maurer e N. Osmolovskii. “Second-order conditions for optimal control problems with mixed control-state constraints and control appearing linearly”. Em: *52nd IEEE Conference on Decision and Control*. 2013, pp. 514–519. DOI: 10.1109/CDC.2013.6759933.
- [60] P. Mehrlitz. “Asymptotic stationarity and regularity for nonsmooth optimization problems”. Em: *Journal of Nonsmooth Analysis and Optimization* 1 (2020), Artigo Nº 6575, pp. 1–30. DOI: 10.46298/jnsao-2020-6575.
- [61] A. A. Miljutin. *Maximum Principle in a General Optimal Control Problem*. Moscow: Fizmatlit, 2001 (em russo).
- [62] B. S. Mordukhovich. “An approximate maximum principle for finite-difference control systems”. Em: *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics* 28.1 (1988), pp. 106–114. DOI: 10.1016/0041-5553(88)90229-7.
- [63] B. S. Mordukhovich e I. Shvartsman. “The approximate maximum principle in constrained optimal control”. Em: *SIAM Journal on Control and Optimization* 43.3 (2004), pp. 1037–1062. DOI: 10.1137/S0363012903433012.

- [64] B. S. Mordukhovich e I. A. Shvartsman. “Approximate maximum principle for discrete approximations of optimal control systems with nonsmooth objectives and endpoint constraints”. Em: *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations* 19.3 (2013), pp. 811–827. DOI: 10.1051/cocv/2012034.
- [65] D. Motreanu, V. V. Motreanu e N. Papageorgiou. *Topological and Variational Methods with Applications to Nonlinear Boundary Value Problems*. 1^a ed. New York: Springer, 2014.
- [66] J. Nocedal e S. J. Wright. *Numerical Optimization*. 2^a ed. New York: Springer, 2006.
- [67] J. T. Pereira. “Generalização das condições de otimalidade para problemas de controle ótimo com restrições mistas”. Tese de doutorado. Campinas: Universidade Estadual de Campinas, 2020.
- [68] L. S. Pontryagin, V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze e E. F. Mischenko. *The Mathematical Theory of Optimal Processes*. New York: Wiley-Interscience, 1962.
- [69] Liqun Qi e Zengxin Wei. “On the constant positive linear dependence condition and its application to SQP methods”. Em: *SIAM Journal on Optimization* 10.4 (2000), pp. 963–981. DOI: 10.1137/S1052623497326629.
- [70] H. L. Royden e P. M. Fitzpatrick. *Real Analysis*. 4^a ed. Hoboken: Prentice Hall, 2010.
- [71] Y. Sakawa. “On local convergence of an algorithm for optimal control”. Em: *Numerical Functional Analysis and Optimization* 3.3 (1981), pp. 301–319. DOI: 10.1080/01630568108816092.
- [72] Y. Sakawa e Y. Shindo. “On global convergence of an algorithm for optimal control”. Em: *IEEE Transactions on Automatic Control* 25.6 (1980), pp. 1149–1153. DOI: 10.1109/TAC.1980.1102517.
- [73] A. B. Schwarzkopf. “Optimal controls with equality state constraints”. Em: *Journal of Optimization Theory and Applications* 19 (1976), pp. 455–468. DOI: 10.1007/BF00941487.
- [74] A. Seierstad e K. Sydsaeter. *Optimal Control Theory with Economic Applications*. USA: Elsevier North-Holland, Inc., 1986.
- [75] D. Steck. “Lagrange multiplier methods for constrained optimization and variational problems in Banach spaces”. Ph.D. thesis. Würzburg: Institute of Mathematics, Universität Würzburg, 2018.
- [76] R. Vinter. *Optimal Control*. Boston: Birkhäuser, 2000.
- [77] J. Zhu, E. Trélat e M. Cerf. “Geometric optimal control and applications to aerospace”. Em: *Pacific Journal of Mathematics for Industry* 9.8 (2017), pp. 1–41. DOI: 10.1186/s40736-017-0033-4.

A DEMONSTRAÇÕES SUPRIMIDAS NO TEXTO

Neste apêndice encontram-se algumas das demonstrações mais técnicas que foram suprimidas ao longo do texto para garantir uma maior fluidez na leitura. Foi utilizado o padrão de repetir o enunciado do resultado e em seguida demonstrá-lo.

Afirmção 2.1. Se as Hipóteses (H1) e (H5) forem válidas, então a Hipótese

(H6) Existem funções integráveis c_f e c_{bg} tais que $|f(t, x, u)| \leq c_f(t)$ e $|(b, g)(t, x, u)| \leq c_{bg}(t)$ para todo $(x, u) \in \Omega_\delta(t)$ e quase todo ponto em $[S, T]$

pode alternativamente ser substituída por:

(H6)' As funções $K_f(t) := |f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))|$ e $K_{bg}(t) := |(b, g)(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))|$ são integráveis sobre $[S, T]$ e $\bar{u} \in L_m^\infty$.

Prova. Suponha que a Hipótese (H1) seja satisfeita. Então, existe uma função integrável k_f tal que para todo $(x, u) \in \Omega_\delta(t)$ e quase todo ponto em $[S, T]$,

$$|f(t, x, u) - f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))| \leq k_f(t)|(x, u) - (\bar{x}(t), \bar{u}(t))|.$$

Logo, para todo $(x, u) \in \Omega_\delta(t)$ e quase todo ponto em $[S, T]$,

$$|f(t, x, u)| \leq k_f(t)|(x, u) - (\bar{x}(t), \bar{u}(t))| + |f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))| \leq c_f(t)$$

em que $c_f(t) := k_f(t)\delta + |f(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))|$ q.t.p. em $[S, T]$. Pela Hipótese (H6)', c_f é integrável.

De modo análogo, pela Hipótese (H5), existe uma função integrável L_{bg} tal que para todo $(x, u) \in \Omega_\delta(t)$ e quase todo ponto em $[S, T]$,

$$|(b, g)(t, x, u) - (b, g)(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))| \leq L_{bg}(t)|(x, u) - (\bar{x}(t), \bar{u}(t))|.$$

Assim, para todo $(x, u) \in \Omega_\delta(t)$ e quase todo ponto em $[S, T]$,

$$|(b, g)(t, x, u)| \leq L_{bg}(t)|(x, u) - (\bar{x}(t), \bar{u}(t))| + |(b, g)(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))| \leq c_{bg}(t),$$

com $c_{bg}(t) := L_{bg}(t)\delta + |(b, g)(t, \bar{x}(t), \bar{u}(t))|$ quase todo ponto em $[S, T]$. Portanto, pela Hipótese (H6)', c_{bg} é integrável, e concluímos o resultado. $\square$

Afirmção 3.1. A aplicação $d_W : W \times W \rightarrow \mathbb{R}$,

$$d_W((x, u), (x', u')) := |x(S) - x'(S)| + \int_S^T |u(t) - u'(t)| dt$$

define uma métrica em

$$W := \left\{ (x, u) \in W_n^{1,1} \times \mathcal{U}_m \left| \begin{array}{ll} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) & \text{q.t.p. em } [S, T], \\ x(t) \in \bar{x}(t) + \delta B & \text{q.t.p. em } [S, T], \\ u(t) \in U_\delta(t) & \text{q.t.p. em } [S, T], \\ (x(S), x(T)) \in C \end{array} \right. \right\},$$

(W, d_W) é um espaço métrico completo e a função $\ell_k : W \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\ell_k(x, u) := \epsilon_k^2 \exp(\ell(x(S), x(T)) - \ell(\bar{x}(S), \bar{x}(T))) + \frac{1}{\epsilon_k} \mathcal{P}(x, u),$$

em que a função $\mathcal{P} : W \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por

$$\mathcal{P}(x, u) := \int_S^T \left[\sum_{i=1}^{m_b} (b_i(t, x(t), u(t)))^2 + \sum_{j=1}^{m_g} (\max\{g_j(t, x(t), u(t)), 0\})^2 \right] dt,$$

é semicontínua inferior em (W, d_W) para cada $k \in \mathbb{N}$.

Prova. Mostremos inicialmente que d_W é uma métrica em W . Para isso, vamos considerar $(x, u), (x', u'), (x'', u'') \in W$.

(a) É imediato das propriedades das normas $|\cdot|$ e $\|\cdot\|_{L_m^1}$ que $d_W((x, u), (x', u')) \geq 0$.

(b) Mostremos que $d_W((x, u), (x', u')) = 0$ se, e somente se, $(x, u) = (x', u')$ em W .

$\Leftarrow$) Se $(x, u) = (x', u')$ em W , segue que $x(t) = x'(t)$ para todo $t \in [S, T]$ (em particular, $x(S) = x'(S)$) e $u(t) = u'(t)$ quase todo ponto em $[S, T]$. Logo, $d_W((x, u), (x', u')) = 0$.

$\Rightarrow$) Suponha que $d_W((x, u), (x', u')) = 0$. Pela definição de d_W , $x(S) = x'(S)$ e $u(t) = u'(t)$ quase todo ponto em $[S, T]$. Consequentemente, pela definição de W e pela unicidade da solução do PVI

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f(t, y(t), u(t)) & \text{q.t.p. em } [S, T], \\ y(S) = x(S) = x'(S) \end{cases}$$

dada pelo Teorema de Carathéodory (Teoremas B.2 e B.3), segue que $x(t) = x'(t)$ para todo $t \in [S, T]$.

(c) Pelas propriedades das normas $|\cdot|$ e $\|\cdot\|_{L_m^1}$, $d_W((x, u), (x', u')) = d_W((x', u'), (x, u))$.

(d) Por fim, novamente usando as propriedades das normas $|\cdot|$ e $\|\cdot\|_{L_m^1}$,

$$\begin{aligned} d_W((x, u), (x'', u'')) &= |x(S) - x''(S)| + \int_S^T |u(t) - u''(t)| dt \\ &\leq |x(S) - x'(S)| + |x'(S) - x''(S)| \\ &\quad + \int_S^T |u(t) - u'(t)| dt + \int_S^T |u'(t) - u''(t)| dt \\ &= d_W((x, u), (x', u')) + d_W((x', u'), (x'', u'')). \end{aligned}$$

Portanto, (W, d_W) é um espaço métrico.

Agora, vamos mostrar que (W, d_W) é completo. Com efeito, tome uma sequência de Cauchy $\{(x^k, u^k)\} \subset W$, isto é, tal que $d_W((x^k, u^k), (x^l, u^l)) \rightarrow 0$, quando $k, l \rightarrow +\infty$. Desta forma, pela definição de d_W , quando $k, l \rightarrow +\infty$,

$$|x^k(S) - x^l(S)| \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \|u^k - u^l\|_{L_m^1} \rightarrow 0.$$

Consequentemente, $\{x^k(S)\}$ e $\{u^k\}$ são sequências de Cauchy em $\mathbb{R}^n$ e L_m^1 , respectivamente. Como $\mathbb{R}^n$ é completo,

$$x^k(S) \rightarrow x_S \tag{A.1}$$

para algum $x_S \in \mathbb{R}^n$. Além disso, pelo Teorema de Fischer–Riesz (Teorema B.4), L_m^1 é um espaço de Banach com a norma $\|\cdot\|_{L_m^1}$. Logo, $\{u^k\}$ converge para algum $u \in L_m^1$. Assim, u é mensurável e, consequentemente, $u \in \mathcal{U}_m$. Além disso, como $u^k \rightarrow u$ na norma L_m^1 , temos que

$$\int_S^T |u^k(t) - u(t)| dt \rightarrow 0. \tag{A.2}$$

Pelo Teorema B.6, existe uma subsequência (não renomearemos), tal que $u^k(t) \rightarrow u(t)$ quase todo ponto em $[S, T]$.

Pelo fato de $\{(x^k, u^k)\} \subset W$, $u^k(t) \in U_\delta(t)$ para cada $k \in \mathbb{N}$ e quase todo ponto em $[S, T]$. Consequentemente, como $U_\delta(t)$ é fechado para quase todo ponto em $[S, T]$, vide Hipótese (H2), $u(t) \in U_\delta(t)$ quase todo ponto em $[S, T]$. Portanto, $u(t) \in \bar{u}(t) + \delta B$ e $u(t) \in U(t)$ quase todo ponto em $[S, T]$.

Como pela definição de W , $\dot{x}^k(t) = f(t, x^k(t), u^k(t))$ para cada $k \in \mathbb{N}$ e quase todo ponto em $[S, T]$, usando a Hipótese (H6), garantimos a existência de uma função integrável c_f , tal que $|\dot{x}^k(t)| \leq c_f(t)$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e quase todo ponto em $[S, T]$. Logo, $\{\dot{x}^k\}$ é uniformemente integravelmente limitada e, pelo Teorema de Dunford-Pettis (Teorema 2.4), existe uma subsequência $\{\dot{x}^k\}$ (mais uma vez não renomearemos) tal que $\dot{x}^k \rightharpoonup \varsigma$ para alguma função $\varsigma \in L_n^1$. Desta forma, definindo

$$x(t) := x_S + \int_S^t \varsigma(s) ds,$$

segue que $\dot{x}(t) = \varsigma(t)$ quase todo ponto em $[S, T]$, $x(S) = x_S$ e $x \in W_n^{1,1}$. Assim, como

$$x^k(S) \rightarrow x_S, \quad \int_S^t \dot{x}^k(s) ds \rightarrow \int_S^t \varsigma(s) ds \quad \text{uniformemente}$$

e $x^k \in W_n^{1,1}$ para cada $k \in \mathbb{N}$, podemos concluir que

$$x^k(t) = x^k(S) + \int_S^t \dot{x}^k(s) ds \rightarrow x_S + \int_S^t \varsigma(s) ds = x(t) \quad \text{uniformemente.}$$

Pela definição de W , $x^k(t) \in \bar{x}(t) + \delta B$ e $(x^k(S), x^k(T)) \in C$ para cada $k \in \mathbb{N}$ e quase todo ponto em $[S, T]$. Assim, pela convergência uniforme de $\{x^k\}$ e por C ser fechado, vide Hipótese (H3), $x(t) \in \bar{x}(t) + \delta B$ quase todo ponto em $[S, T]$ e $(x(S), x(T)) \in C$.

Sabemos que $\dot{x}^k(t) = f(t, x^k(t), u^k(t))$ para cada $k \in \mathbb{N}$ e quase todo ponto em $[S, T]$. Logo, integrando ambos os lados sobre s de S a t , tomando limite, usando as convergências uniforme de $\{x^k\}$, fraca de $\{\dot{x}^k\}$ e quase todo ponto em $[S, T]$ de $\{u^k\}$ mais a Hipótese (H6), o Teorema da convergência dominada (Teorema B.9) e a continuidade de $f(t, \cdot, \cdot)$ garantida pela Hipótese (H1), segue que

$$\int_S^t \dot{x}(s) ds = \int_S^t f(s, x(s), u(s)) ds \quad \text{q.t.p. em } [S, T].$$

Consequentemente, $\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t))$ quase todo ponto em $[S, T]$ e $(x, u) \in W$.

Portanto, como pelas convergências (A.1) e (A.2), $d_W((x^k, u^k), (x, u)) \rightarrow 0$, concluímos que (W, d_W) é completo.

Para finalizar a prova da Afirmação 3.1, usando a Proposição 2.3, vamos mostrar que a função ℓ_k é semicontínua inferior em (W, d_W) para cada $k \in \mathbb{N}$. Com efeito, sejam $\{(x^l, u^l)\} \subset W$, $(x^*, u^*) \in W$ e $M \in \mathbb{R}$. Suponha que

$$d_W((x^l, u^l), (x^*, u^*)) \rightarrow 0 \quad \text{e} \quad \lim_{l \rightarrow \infty} \ell_k(x^l, u^l) \leq M \quad (\text{A.3})$$

para cada $k \in \mathbb{N}$.

Por (A.3),

$$x^l(S) \rightarrow x^*(S) \quad \text{e} \quad \|u^l - u^*\|_{L_m^1} \rightarrow 0.$$

Assim, pelo Teorema B.6, existe uma subsequência $\{u^l\}$ (não renomearemos), tal que $u^l(t) \rightarrow u^*(t)$ quase todo ponto em $[S, T]$. Além disso, da definição de W , $\dot{x}^l(t) = f(t, x^l(t), u^l(t))$ para cada $l \in \mathbb{N}$ e quase todo ponto em $[S, T]$. Logo, pela Hipótese (H6), existe uma função integrável c_f tal que, $|\dot{x}^l(t)| \leq c_f(t)$ para todo $l \in \mathbb{N}$ e quase todo ponto em $[S, T]$. Consequentemente, $\{\dot{x}^l\}$ é uniformemente integravelmente limitada e pelo Teorema de Dunford-Pettis (Teorema 2.4), existe uma subsequência $\{\dot{x}^l\}$ (mais uma vez não renomearemos) tal que $\dot{x}^l \rightharpoonup \tilde{\zeta}$ para alguma função $\tilde{\zeta} \in L_n^1$. Então, tomando

$$\tilde{x}(t) := x^*(S) + \int_S^t \tilde{\zeta}(s) ds,$$

concluimos que $\tilde{x}(t) = \tilde{\zeta}(t)$ quase todo ponto em $[S, T]$, $\tilde{x}(S) = x^*(S)$ e

$$x^l(t) = x^l(S) + \int_S^t \dot{x}^l(s) ds \rightarrow \tilde{x}(t) = x^*(S) + \int_S^t \tilde{\zeta}(s) ds \quad \text{uniformemente,}$$

pois $x^l \in W_n^{1,1}$ para cada $l \in \mathbb{N}$, $x^l(S) \rightarrow x^*(S)$ e

$$\int_S^t \dot{x}^l(s) ds \rightarrow \int_S^t \tilde{\zeta}(s) ds \quad \text{uniformemente.}$$

Como vimos, $\dot{x}^l(t) = f(t, x^l(t), u^l(t))$ para todo $l \in \mathbb{N}$ e quase todo ponto em $[S, T]$. Assim, integrando ambos os lados da igualdade de S a t , tomando o limite com $l \rightarrow \infty$, usando as convergências fraca de $\{\dot{x}^l\}$, uniforme de $\{x^l\}$ e em quase todo ponto em $[S, T]$ de $\{u^l\}$ juntamente com a Hipótese (H6) e o Teorema da Convergência Dominada (Teorema B.9), concluimos que $\dot{\tilde{x}}(t) = f(t, \tilde{x}(t), u^*(t))$ quase todo ponto em $[S, T]$. Consequentemente, $\tilde{x}$ é uma solução para o problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u^*(t)) & \text{q.t.p. em } [S, T], \\ x(S) = x^*(S). \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

Logo, pela unicidade da solução de (A.4) (Teoremas B.2 e B.3), concluimos que $\tilde{x}(t) = x^*(t)$ para quase todo $t \in [S, T]$. Portanto, $x^k(t) \rightarrow x^*(t)$ uniformemente.

Voltando a (A.3), usando a definição da função ℓ_k , para cada $k \in \mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned} M &\geq \lim_{l \rightarrow \infty} \ell_k(x^l, u^l) \\ &= \lim_{l \rightarrow \infty} \left[\epsilon_k^2 \exp(\ell(x^l(S), x^l(T)) - \ell(\bar{x}(S), \bar{x}(T))) + \frac{1}{\epsilon_k} \mathcal{P}(x^l, u^l) \right] \end{aligned}$$

em que a função $\mathcal{P} : W \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por

$$\mathcal{P}(x, u) = \int_S^T \left[\sum_{i=1}^{m_b} (b_i(t, x(t), u(t)))^2 + \sum_{j=1}^{m_g} (\max\{g_j(t, x(t), u(t)), 0\})^2 \right] dt.$$

Logo, das convergências uniformes de $\{x^l\}$ e quase todo ponto em $[S, T]$ de $\{u^l\}$, das continuidades de ℓ e quase todo ponto em $[S, T]$ de $(b, g)(t, \cdot, \cdot)$ (Hipóteses (H3) e (H5)), juntamente com a Hipótese (H6) e o Teorema da Convergência Dominada (Teorema B.9),

$$M \geq \epsilon_k^2 \exp(\ell(x^*(S), x^*(T)) - \ell(\bar{x}(S), \bar{x}(T))) + \frac{1}{\epsilon_k} \mathcal{P}(x^*, u^*) = \ell_k(x^*, u^*)$$

para cada $k \in \mathbb{N}$. Portanto, pela Proposição 2.3, podemos concluir que ℓ_k é semicontínua inferior em (W, d_W) para cada $k \in \mathbb{N}$. $\square$

Afirmção 6.3. Dado $\delta > 0$, considere o conjunto não vazio

$$E := \{v \in L_m^2 : v(t) \in U_\delta(t) \text{ q.t.p. em } [S, T]\}.$$

Se a Hipótese (H2) for válida e o conjunto $U_\delta(t)$ for convexo para quase todo ponto em $[S, T]$, então E é um conjunto fracamente sequencialmente fechado.

Demonstração. Mostramos inicialmente que E é sequencialmente fechado. Com efeito, seja $\{u^k\} \subset E$ tal que $u^k \rightarrow u$ em L_m^2 . Então, pelo Teorema B.6, existe uma subsequência $\{u^k\}$ (não renomearemos) tal que $u^k(t) \rightarrow u(t)$ quase todo ponto em $[S, T]$. Pela definição de E , $u^k(t) \in U_\delta(t)$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e quase todo ponto em $[S, T]$. Assim, como $U_\delta(t)$ é

fechado, vide Hipótese (H2), $u(t) \in U_\delta(t)$ para quase todo ponto em $[S, T]$. Logo, $u \in E$ e, consequentemente, o conjunto E é sequencialmente fechado.

Agora mostramos que E é convexo. Para isso, tomamos $v, v' \in E$ e $\alpha \in [0, 1]$. Evidentemente, $(1 - \alpha)v + \alpha v' \in L_m^2$ e $v(t), v'(t) \in U_\delta(t)$ para quase todo ponto em $[S, T]$. Por hipótese $U_\delta(t)$ é convexo para quase todo ponto em $[S, T]$. Então,

$$(1 - \alpha)v(t) + \alpha v'(t) \in U_\delta(t) \quad \text{q.t.p. em } [S, T].$$

Logo, $(1 - \alpha)v + \alpha v' \in E$ e concluímos que E é convexo.

Portanto, como L_m^2 é um espaço com produto interno, por [32, Item (2) do Teorema 9.16, p. 207], segue que E é fracamente sequencialmente fechado. $\square$

B TEOREMAS, RESULTADOS E DEFINIÇÕES AUXILIARES

Neste apêndice exibimos uma coleção de teoremas e resultados auxiliares que foram utilizados ao longo do texto. Não apresentamos suas demonstrações, mas apontamos referências que podem ser consultadas para tal fim.

Teorema B.1 (Bolzano-Weierstrass [53, Teorema 5, p. 17]). *Toda sequência limitada em $\mathbb{R}^n$ possui uma subsequência convergente.*

Lema B.1 (Desigualdade de Gronwall [29, Lema 1]). *Tome uma função absolutamente contínua $\phi : [S, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$. Suponha que existam funções integráveis não negativas k e v tais que*

$$|\dot{\phi}(t)| \leq k(t)|\phi(t)| + v(t) \quad \text{q.t.p. em } [S, T].$$

Então,

$$|\phi(t)| \leq \exp\left(\int_t^T k(s) \, ds\right) \left[|\phi(T)| + \int_t^T \exp\left(\int_s^T -k(s) \, ds\right) v(s) \, ds\right]$$

para todo $t \in [S, T]$. Além disso,

$$|\phi(t)| \leq \exp(\|k\|_{L_1^1}) \left[|\phi(T)| + \|v\|_{L_1^1}\right]$$

para todo $t \in [S, T]$.

Teorema B.2 (Teorema de Carathéodory 1 [15, Teorema 3.8, p. 35]). *Sejam $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ e $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida em V dado por*

$$V := \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : |t - t_0| \leq a, |x - x_0| \leq b\}.$$

Suponha que ϕ seja mensurável em t para cada x fixo e contínua em x para cada t fixo. Se existe uma função integrável não negativa c_ϕ no intervalo $|t - t_0| \leq a$ tal que

$$|f(t, x)| \leq c_\phi(t), \quad (t, x) \in V,$$

então existe uma solução x de

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t)), \quad x(0) = x_0 \tag{B.1}$$

no sentido de

$$x(t) = x_0 + \int_S^t f(s, y(s)) \, ds \tag{B.2}$$

em algum intervalo $|t - t_0| \leq c$, $c > 0$, satisfazendo $x(0) = x_0$.

Teorema B.3 (Teorema de Carathéodory 2 [15, Teorema 3.9, p. 37]). *Suponha que as hipóteses do Teorema B.2 sejam válidas e ainda que ϕ seja localmente Lipschitz. Então existe uma única solução x para (B.1) no sentido de (B.2) em algum intervalo $I_J = [t_0 - c, x_0 + c]$, $c > 0$.*

Teorema B.4 (Teorema de Fischer–Riesz [18, Teorema 4.8, p. 93]). *L^p é um espaço de Banach para qualquer p , $1 \leq p \leq \infty$.*

Teorema B.5 (Desigualdade de Hölder [18, Teorema 4.6, p. 91]). *Seja $1 \leq p \leq \infty$ e $p' \in \mathbb{R}$ tal que*

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Se $\phi \in L^p$ e $\varphi \in L^{p'}$, então $\phi\varphi \in L^1$ e

$$\int |\phi\varphi| \leq \|\phi\|_{L^p} \|\varphi\|_{L^{p'}}.$$

Teorema B.6 ([18, Teorema 4.9, p. 94]). *Assuma que $\mathcal{M}$ seja um espaço de medida separável. Seja $\{\phi^k\}$ uma sequência em $L^p(\mathcal{M})$ e $\phi \in L^p(\mathcal{M})$ tal que $\|\phi^k - \phi\|_{L^p(\mathcal{M})} \rightarrow 0$. Então, existe uma subsequência $\{\phi^k\}$ (não renomearemos), tal que $\phi^k \rightarrow \phi$ para quase todo ponto em $\mathcal{M}$.*

Teorema B.7 ([18, Teorema 4.13, p. 98]). *Assuma que $\mathcal{M}$ seja um espaço de medida separável. Então $L^p(\mathcal{M})$ é separável para qualquer p , $1 \leq p < \infty$.*

Teorema B.8 ([18, Teorema 3.18, p. 70]). *Seja $\mathcal{B}$ um espaço de Banach separável e $\{\phi^k\}$ uma sequência limitada em $\mathcal{B}$. Então existe uma subsequência $\{\phi^k\}$ (não renomearemos), tal que $\phi^k \rightharpoonup x$ em que $x \in \mathcal{B}$.*

Proposição B.1 ([18, Item (ii) da Proposição 3.5, p. 58]). *Sejam $\mathcal{B}$ um espaço de Banach, $\phi \in \mathcal{B}$ e $\{\phi^k\} \subset \mathcal{B}$. Se $\phi^k \rightarrow \phi$, então $\phi^k \rightharpoonup \phi$.*

Teorema B.9 (Teorema da convergência dominada [42, Teorema 3.25, p. 45]). *Sejam $S, T \in \mathbb{R}$ com $S < T$, $\{\phi^k\}$ uma sequência de funções integráveis definidas em $[S, T]$ e φ uma função integrável em $[S, T]$. Suponha que $\phi^k(t) \rightarrow \phi(t)$ quase todo ponto em $[S, T]$. Se $|\phi^k(t)| \leq \varphi(t)$ para todo $k \in \mathbb{N}$ e quase todo ponto em $[S, T]$, então ϕ é integrável em $[S, T]$ e*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_S^T \phi^k(t) dt = \int_S^T \phi(t) dt.$$

Lema B.2 (Lema de Fatou [42, Teorema 3.20, p. 43]). *Sejam $S, T \in \mathbb{R}$ com $S < T$. Se $\{\phi^k\}$ é uma sequência de funções mensuráveis não negativas definidas em $[S, T]$, então*

$$\int_S^T \liminf_{k \rightarrow \infty} \phi^k \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_S^T \phi^k.$$

Teorema B.10 ([11, Teorema 2.5.3, p. 123]). *Seja $\mathcal{L}$ um espaço com a medida de Lebesgue. Para qualquer função integrável ϕ e qualquer $\varrho > 0$ tem-se*

$$\text{med}(\{t \in \mathcal{L} : |\phi(t)| \geq \varrho\}) \leq \frac{1}{\varrho} \int_{\mathcal{L}} |\phi(t)| dt.$$

Teorema B.11 (Teorema de Riesz [70, Teorema 4, p. 100]). *Sejam $\mathcal{L}$ um espaço com a medida de Lebesgue e $\{\phi^k\} \subset \mathcal{L}$. Se $\phi^k \xrightarrow{\text{med}} \phi$ com $\phi \in \mathcal{L}$, ou seja, converge na medida em $\mathcal{L}$, então existe uma subsequência $\{\phi^k\}$ (não renomearemos), que converge quase todo ponto para ϕ em $\mathcal{L}$.*

A próxima definição pode ser encontrada, por exemplo, em [23, p. 30] e será útil para os resultados que são apresentados em sequência.

Definição B.1. Sejam $\mathcal{B}$ e $\tilde{\mathcal{B}}$ espaços de Banach. Diremos que $\Psi : \mathcal{B} \rightarrow \tilde{\mathcal{B}}$ admite uma *derivada estrita* em $\bar{x}$, que também é um elemento de $\mathcal{L}(\mathcal{B}, \tilde{\mathcal{B}})$ (espaço dos funcionais lineares contínuos de $\mathcal{B}$ para $\tilde{\mathcal{B}}$) denotado $D\Psi(\bar{x})$, quando para cada v , vale

$$\lim_{\substack{x^k \rightarrow \bar{x} \\ t \rightarrow 0}} \frac{\Psi(x^k + tv) - \Psi(x^k)}{t} = D\Psi(\bar{x}) \cdot v,$$

e desde que a convergência seja uniforme para v em conjuntos compactos.

O corolário apresentado adiante estabelece uma relação entre funções suaves e estritamente diferenciáveis.

Corolário B.1 (Relação entre suavidade e diferenciabilidade estrita [23, p. 32]). *Se ϕ é continuamente diferenciável em $\bar{x}$, então ϕ é estritamente diferenciável em $\bar{x}$ e, portanto, Lipschitz próximo a $\bar{x}$.*

Proposição B.2 (Regra da Soma [23, Proposição 2.3.3, p. 38]). *Sejam $\phi_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $i = 1, \dots, m$ funções semicontínuas inferiores e $\bar{x} \in \cap_i \text{dom}(\phi_i)$. Defina $\phi := \phi_1 + \dots + \phi_m$. Então,*

$$\text{co } \partial \left(\sum_{i=1}^m \phi_i \right) (\bar{x}) \subset \sum_{i=1}^m \text{co } \partial \phi_i (\bar{x}).$$

O corolário apresentado a seguir segue diretamente da Proposição B.2.

Corolário B.2 ([23, Corolário 1, p. 39]). *A igualdade na Proposição B.2 será válida quando todas, exceto no máximo uma das funções ϕ_i , $i = 1, \dots, m$, forem estritamente diferenciáveis em $\bar{x}$.*

Proposição B.3 (Comutação com (-1) [76, Proposição 4.7.5, p. 157]). *Considere uma função $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que seja Lipschitz contínua em uma vizinhança de um ponto $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$. Então*

$$\text{co } \partial(-\phi)(\bar{x}) = -\text{co } \partial\phi(\bar{x}).$$

Teorema B.12 (Regra da Cadeia [23, Teorema 2.3.10, p. 45]). *Seja ϕ uma aplicação de $\mathcal{B}$ para outro espaço de Banach $\tilde{\mathcal{B}}$, e seja φ uma função real em $\tilde{\mathcal{B}}$. Suponha que ϕ seja diferenciável em $\bar{x}$ e que φ seja Lipschitz em uma vizinhança $\phi(\bar{x})$. Então $\psi = \varphi \circ \phi$ é Lipschitz em uma vizinhança x , e tem-se*

$$\text{co } \partial\psi(\bar{x}) \subset \text{co } \partial\varphi(\phi(\bar{x})) \circ \nabla\phi(\bar{x}).$$

A Definição B.2 apresentada abaixo pode ser encontrada, por exemplo, em [76, p. 71].

Definição B.2. Tome uma multifunção $\Gamma : [S, T] \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$. Dizemos que uma função $x : [S, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma *seleção mensurável* para Γ se

- (i) x é Lebesgue mensurável, e
- (ii) $x(t) \in \Gamma(t)$ q.t.p. em $[S, T]$.

A partir da Definição B.2, podemos exibir os seguintes resultados.

Teorema B.13 ([76, Teorema 2.3.11, p. 71]). *Seja $\Gamma : [S, T] \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ uma multifunção não vazia. Assuma que Γ é fechada e mensurável. Então Γ tem uma seleção mensurável.*

Teorema B.14 (Teorema de Seleção Mensurável de Aumann [76, Teorema 2.3.12, p. 71]). *Seja $\Gamma : [S, T] \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ uma multifunção não vazia. Assuma que $\text{Gr}(\Gamma)$ seja Borel mensurável. Então, Γ tem uma seleção mensurável.*