

**UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
FACULDADE DE ENGENHARIA
CÂMPUS DE ILHA SOLTEIRA**

SAMUEL HENRIQUE DOS SANTOS SILVA

**PROJETO E IMPLEMENTAÇÃO DE CONTROLE LQR PARA ENSINO DE
SISTEMAS DINÂMICOS: APLICAÇÃO AO HELICÓPTERO 3-DOF DA QUANSER**

SAMUEL HENRIQUE DOS SANTOS SILVA

**PROJETO E IMPLEMENTAÇÃO DE CONTROLE LQR PARA ENSINO
DE SISTEMAS DINÂMICOS: APLICAÇÃO AO HELICÓPTERO 3-DOF
DA QUANSER**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à
Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira –
UNESP como parte dos requisitos para obtenção
do título de Bacharel em Engenharia Elétrica e
grau de Engenheiro Eletricista.

Prof. Dr. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira
Orientador

Ilha Solteira
2025

FICHA CATALOGRÁFICA

Desenvolvida pela Diretoria Técnica de Biblioteca e Documentação

S586p Silva, Samuel Henrique dos Santos.
Projeto e implementação de controle LQR para ensino em sistemas dinâmicos: aplicação ao helicóptero 3-DOF da quanser / Samuel Henrique dos Santos Silva. -- Ilha Solteira: [s.n.], 2025
55 f. : il.

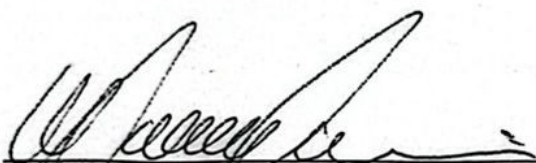
Trabalho de conclusão de curso - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira. Área de conhecimento: Engenharia Elétrica, 2025

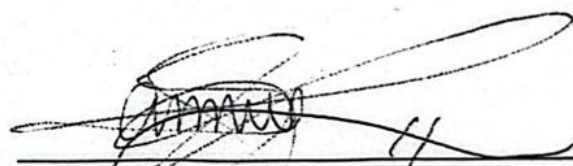
Orientador: Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira
Inclui bibliografia

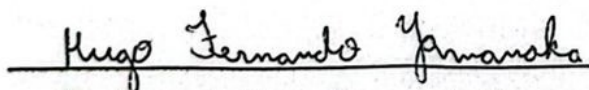
1. Controle moderno. 2. Helicóptero 3-DOF. 3. Regulador quadrático linear (LQR).

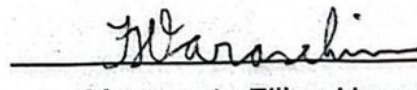
ATA DE DEFESA DE TRABALHO DE GRADUAÇÃO

Aos doze dias do mês de dezembro do ano de dois mil e vinte e cinco, o discente **Samuel Henrique dos Santos Silva**, matriculado sob o nº 191051233, tendo como banca examinadora o seu orientador, o *Prof. Dr. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira*, o *Doutorando Hugo Fernando Yamanaka* e o *Mestrando Filipe Honorio Varaschim*, apresentou o Trabalho de Graduação intitulado "Projeto e Implementação de Controle LQR para Ensino em Sistemas Dinâmicos: Aplicação ao Helicóptero 3-DOF da Quanser", obtendo a nota 10,0 (DEZ INTEIROS) e conceito APROVADO.


Prof. Dr. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira
- orientador -


Samuel Henrique dos Santos Silva
- discente -


Doutorando Hugo Fernando Yamanaka
- Membro da Banca -


Mestrando Filipe Honorio Varaschim
- Membro da Banca -

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho de graduação aos meus pais como um ato de profundo agradecimento, respeito e amor.

Marinalva Alves dos Santos Silva e Joamil Soares da Silva, vocês foram, e sempre serão, a minha base, a minha força e o meu maior motivo. Tudo o que conquistei até hoje carrega a marca de vocês. Esta conquista é a prova viva da história que construímos juntos.

Vocês lutaram por mim muito antes de eu compreender o tamanho de cada sacrifício. Carregaram o peso dos meus sonhos, renunciaram aos próprios e fizeram de tudo para que eu tivesse oportunidades que vocês nunca tiveram. Se hoje estou de pé, é porque vocês nunca permitiram que eu caísse. Se hoje alcanço algo, é porque vocês me ensinaram, dia após dia, o valor da persistência.

Mas acima de qualquer vitória acadêmica, foram a amizade, a confiança e o amor que me formaram primeiro. Na faculdade eu aprendi cálculos, modelos e teorias, mas muito antes de qualquer sala de aula fui ensinado por vocês, e nenhum curso de engenharia no mundo é capaz de ensinar o que aprendi dentro de casa. Os princípios que carrego, o caráter que cultivo e a pessoa que sou nasceram dos exemplos de vocês.

Este diploma é nosso. É fruto da nossa história, da nossa luta e do nosso amor. E tenho certeza de que este é apenas o começo das muitas vitórias que ainda vamos colher juntos nesta vida.

Obrigado por tudo. Obrigado por ontem, por hoje e por tudo o que ainda virá. Vocês são, e sempre serão, o meu maior orgulho.

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador, Prof. Dr. Marcelo Carvalho Minhoto Teixeira, por me ensinar que a engenharia vai muito além de fórmulas e cálculos. Seu modo singular de interpretar a realidade me marcou profundamente e moldou a forma como compreendo a engenharia e seu papel no mundo.

Ao Doutorando Hugo Fernando Yamanaka, por todos os momentos em que compartilhamos o laboratório e dividimos reflexões que levarei para toda a vida. Obrigado por me mostrar, na prática, que fazer ciência é também um ato de generosidade, compromisso e humanidade.

À minha namorada, Hanny Naomi Kanashiro Lemes, seu amor, seu carinho, cada puxão de orelha, cada conselho e cada presença silenciosa fez toda a diferença. Hanny, você me ajudou a reencontrar minha essência e sua presença torna tudo mais leve. Em muitos momentos, acreditou em mim antes mesmo que eu conseguisse acreditar. Dividir a vida com alguém que admiro tanto é um privilégio que levo comigo todos os dias.

À Antônia Gonçalves Belotti, que cuidou de mim como uma segunda mãe e moldou quem eu sou hoje. À minha avó materna, Maria Alves dos Reis, e aos meus avós que já partiram.

Às minhas duas madrinhas e aos meus dois padrinhos, que sempre fizeram de tudo por mim. À Marisa e ao Marcel, que me apoiaram nos momentos mais importantes e nunca mediram esforços para me ajudar. Em especial ao Cícero e Rose Santos, por me receberem como seu quarto filho e pelo lar sempre aberto, nunca me esquecerei de todos os momentos que vocês dividiram comigo.

Aos meus amigos que tiveram comigo em algum momento dessa caminhada, Marcelo, Ivan, Douglas e Camila. Aos companheiros de turma João Padovan, Luís Madeira, Gustavo Akio, Vitor Takahashi, Fabricio, Eric, Gabriel, os Lucas e Rogerio, que levarei para a vida. Aos meus companheiros de república que dividiram todos esses anos durante minha passagem por Ilha Solteira. Se fui feliz é porque tive essas boas pessoas comigo!

Ao Cursinho Vitoriano, por ter sido a porta que me permitiu chegar aonde estou. Aos professores, em especial à Nathaly Martinez.

À UNESP, casa que me transformou em todas as dimensões possíveis.



“A persistência guiou meus passos; a força da minha família os sustentou. Este trabalho é o nosso legado em conhecimento.”

RESUMO

O presente Trabalho de Graduação apresenta o projeto, a simulação e a implementação prática de um controlador moderno, o Regulador Linear Quadrático (LQR), aplicado ao sistema Helicóptero 3-DOF da Quanser, disponível no Laboratório de Pesquisa em Controle (LPC) da Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira (UNESP). A proposta fundamenta-se na modelagem matemática em espaço de estados e na solução da Equação Algébrica de Riccati, com o objetivo didático de capacitar estudantes no projeto e operação segura de sistemas dinâmicos multivariáveis. A metodologia adotada explora a sintonia das matrizes de ponderação (Q e R) para garantir que a norma do ganho de realimentação respeite a faixa de segurança operacional $60 \leq \|K\| \leq 200$, do sistema. Os resultados obtidos, tanto em simulações via Matlab/Simulink® quanto na bancada experimental, validaram a eficiência do controlador na estabilização dos ângulos de elevação, arfagem e viagem, demonstrando o compromisso entre desempenho dinâmico e facilidade no projeto.

Palavras-chave: Controle Moderno. Helicóptero 3-DOF. Regulador Quadrático Linear (LQR).

ABSTRACT

This Undergraduate Thesis presents the design, simulation, and practical implementation of a modern controller, the Linear Quadratic Regulator (LQR), applied to the Quanser 3-DOF Helicopter system, available at the Control Research Laboratory (LPC) of the Faculty of Engineering of Ilha Solteira (UNESP). The proposal is based on state-space mathematical modeling and the solution of the Algebraic Riccati Equation, with the didactic objective of training students in the design and safe operation of multivariable dynamic systems. The adopted methodology explores the tuning of the weighting matrices (Q and R) to ensure that the feedback gain norm respects the system's operational safety range $60 \leq \|K\| \leq 200$. The results obtained, both in simulations via Matlab/Simulink® and on the experimental testbed, validated the efficiency of the controller in stabilizing the elevation, pitch, and travel angles, demonstrating the trade-off between dynamic performance and ease of design.

Keywords: Modern Control. 3-DOF Helicopter. Linear Quadratic Regulator (LQR).

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Descrição simplificada de um sistema de controle.....	18
Figura 2 – Descrição de um sistema dinâmico de forma geral.....	22
Figura 3 – Diagrama de blocos de um sistema de controle linear de tempo contínuo, representado no espaço de estados.....	25
Figura 4 – Interpretação geométrica de estabilidade e instabilidade de estados de equilíbrio...29	
Figura 5 – Interpretação geométrica do Teorema de Lyapunov.....	31
Figura 6 – Sistema Regulador Ótimo.....	34
Figura 7 - Helicóptero 3-DOF da Quanser.....	37
Figura 8 – Helicóptero 3-DOF da QUANSER do LPC.....	37
Figura 9 – Diagrama do Helicóptero 3-DOF.....	38
Figura 10 – BOEING H-47 CHINOOK.....	39
Figura 11 – Diagrama de blocos do Helicóptero de Bancada com regulador ótimo.....	42
Figura 12 – Resposta simulada do Helicóptero de Bancada 3-DOF para as condições iniciais de Q_{min}	48
Figura 13 – Resposta simulada do Helicóptero de Bancada 3-DOF para as condições iniciais de $Q_{máx}$	49
Figura 14 – Resposta Temporal das Posições Angulares.....	51
Figura 15 – Esforço do Controle (Tensão em Volts).....	52

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Parâmetros e valores do sistema do Helicóptero 3-DOF da Quanser.....	39
--	----

LISTA DE SIGLAS E ABREVIATURAS

SISO	<i>Single Input, Single output</i> (Sistemas de entrada e saída única).
MIMO	<i>Multiple Input, Multiple Output</i> (Múltiplas entradas e saídas).
LQR	Linear-Quadratic Regulator (Regulador quadrático linear).
3-DOF	<i>3 Degrees Of Freedom</i> (3 graus de liberdade).
DC	<i>Direct Current</i> (Corrente contínua).
LTI	<i>Linear Time-Invariant</i> (Linear e Invariante no Tempo)
FT	Função de Transferência
EE	Espaço de Estados
FCC	Forma Canônica Controlável
BIBO	<i>Bounded-Input, Bounded-Output</i>
DRE	<i>Differential Riccati Equation</i> (Equação Diferencial de Riccati)
ARE	<i>Algebraic Riccati Equation</i> (Equação Algébrica de Riccati)
FEIS	Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira.
LPC	Laboratório de Pesquisa em Controle.
UNESP	Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho".

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais.
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais.
$\mathbb{R}^{m \times n}$	Conjunto de matrizes reais de dimensão $m \times n$.
$\mathbb{K}_r$	Conjunto $\{1, 2, \dots, r\} \subset \mathbb{N}$, dos primeiros r números naturais.
$\ K\ $	Norma euclidiana do controlador K .
t	Tempo.
t_0	Tempo inicial.
P	Matriz simétrica definida positiva.
$u(t)$	Lei de controle.
λ	Travel (viagem).
ε	Elevation (elevação).
ρ	Pitch (arfagem).
A, B e C	Matrizes de espaço de estados do Helicóptero 3-DOF.
V_f e V_b	Sinais de controle dianteiro e traseiro, respectivamente.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	15
1.1 OBJETIVO	17
2 REVISÃO DE LITERATURA	17
2.1 EVOLUÇÃO DA ENGENHARIA DE CONTROLE	18
2.1.1 Controle Clássico: Princípios e Limitações	19
2.1.2 Surgimento da Teoria do Controle Moderno	20
2.2 MODELAGEM MATEMÁTICA EM ESPAÇO DE ESTADOS	21
2.2.1 Definição Matemática	22
2.2.2 Espaço de Estados	25
2.2.2.1 Forma Canônica Controlável	26
2.3 CRITÉRIO DE ESTABILIDADE DE LYAPUNOV	26
2.3.1 Método de Lyapunov	27
2.4 REGULADOR LINEAR QUADRÁTICO	31
2.4.1 Definição de Regulador Linear Quadrático	32
2.4.2 Solução do Problema da Otimização	34
2.4.3 Equação Algébrica de Riccati (ARE)	35
3 SISTEMA HELICÓPTERO 3-DOF	37
3.1 DESCRIÇÃO DO SISTEMA	37
3.2 EQUACIONAMENTO DO SISTEMA E MODELO NO ESPAÇO DE ESTADOS DO HELICÓPTERO 3-DOF	39
4 PROJETO E IMPLEMENTAÇÃO DE UM CONTROLADOR PARA O HELICÓPTERO 3-DOF	41
4.1 PROJETO DO CONTROLADOR	41
4.2 SIMULAÇÃO DO PROJETO	44
4.3 IMPLEMENTAÇÃO	50
5 CONCLUSÃO	54

1 INTRODUÇÃO

A evolução da engenharia de controle, a partir de 1960, teve como importante desdobramento o surgimento da teoria de controle moderno. Até então, no controle clássico, os resultados eram obtidos por meio de análises de resposta em frequência e lugar das raízes, aplicados principalmente a sistemas de entrada e saída única (*SISO – Single Input, Single output*). Com o avanço dos computadores, da eletrônica e sistemas dinâmicos, tornou-se evidente a necessidade de controlar sistemas cada vez mais complexos, caracterizados por suas múltiplas entradas e saídas (*MIMO – Multiple Input, Multiple Output*). Nesse contexto, a teoria de controle moderno, baseada em modelos matemáticos reais e na formalização por variáveis de estado, foi desenvolvida para superar limitações intrínsecas do controle clássico (Ogata, 2010).

Segundo Dorf e Bishop (2011), a produtividade pode ser entendida como a relação entre saída obtida e os recursos empregados como entrada. Nesse sentido, na busca pela produção cada vez mais precisa de produtos confiáveis e exatos, o homem vem aperfeiçoando suas técnicas, reduzindo força bruta e substituindo-a pela mecanização progressiva. Processos antes realizados manualmente passam a ser executados por máquinas, implementadas com tecnologia avançada, um conceito conhecido como automação. Assim, a automação é empregada para aumentar a produtividade e melhorar o desempenho de sistemas, possibilitando a realização de tarefas com maior precisão, rapidez e constância.

Para que a automação atinja seus objetivos de precisão e constância, é essencial comandar o comportamento dessas máquinas e processos, que são, por natureza, sistemas dinâmicos. Os sistemas dinâmicos, que são o objeto de estudo central na engenharia de controle moderno, caracterizam-se por apresentarem um comportamento dependente não apenas do instante presente, mas também do passado, influenciando o estado futuro do sistema. Essa dependência é formalizada pela noção de variáveis de estado, que constituem o menor conjunto de variáveis independentes necessárias para descrever completamente a dinâmica do sistema a qualquer instante. Essa abordagem é fundamental para o desenvolvimento de controladores eficazes que garantam a estabilidade e o desempenho desejados, mesmo em processos dinâmicos e sujeitos a variações constantes (Ogata, 2010).

As variáveis de estado podem ser utilizadas em sistemas de controle tanto de malha aberta quanto de malha fechada. O sistema de controle em malha fechada, também conhecido como sistema de controle com realimentação (*feedback*, em inglês), é aquele no qual as variáveis de

estado do sistema são realimentadas e comparadas com um sinal de referência, de modo que a diferença resultante, ou erro, determine a ação de controle. Esse tipo de sistema é o mais comumente empregado devido à sua capacidade de corrigir perturbações e garantir maior precisão no controle. A partir desse conceito surge a otimização dinâmica, base do controle ótimo, que visa encontrar uma lei de controle que minimize um índice de desempenho, sujeita a restrições tanto nas variáveis de estado quanto nas variáveis de controle. Essa abordagem permite projetar controladores que otimizam o desempenho do sistema sob condições reais e limitações práticas. (Alves, 2022).

Este trabalho utiliza as técnicas do Regulador Linear Quadrático (do inglês, *Linear Quadratic Regulator* – LQR), uma metodologia consolidada da teoria de controle. O LQR baseia-se na solução da equação algébrica de Riccati, associada a critérios de estabilidade de Lyapunov, e tem como objetivo otimizar uma função de custo quadrática. Na prática, essa otimização resulta em uma ponderação ótima que equilibra o menor dispêndio de energia de controle com a maior precisão possível das variáveis controladas (Neto e Silva, 2023). A escolha desta metodologia fundamenta-se na abordagem sistemática que o LQR oferece para o projeto de controladores ótimos, operando por meio da retroação das variáveis de estado. Embora esta técnica seja amplamente consolidada, sua implementação eficaz em sistemas realistas apresenta desafios. A dependência direta das variáveis de estado da planta torna o controlador sensível a variações paramétricas e distúrbios externos, fatores que podem comprometer o desempenho desejado.

O Helicóptero com três graus de liberdade (3-DOF) é um modelo de simulação de voo que permite o movimento em três eixos distintos: viagem, arfagem e elevação. No modelo 3-DOF da Quanser, disponível no Laboratório de Pesquisa em Controle (LPC), dois motores de corrente contínua (DC) são fixados nas extremidades de uma estrutura retangular, acionando duas hélices cujos eixos são paralelos, com o vetor de empuxo perpendicular ao quadro. O corpo do helicóptero está suspenso por uma junta instrumentada localizada na extremidade de um braço longo, permitindo sua inclinação livre ao redor do centro. Esse braço está conectado a uma junta com dois graus de liberdade, permitindo inclinação e rotação. A outra extremidade do braço possui um contrapeso para que a massa efetiva seja reduzida, facilitando que o impulso gerado pelos motores eleve o sistema. A aplicação de uma tensão positiva ao motor frontal provoca uma inclinação positiva, enquanto a mesma tensão aplicada ao motor traseiro resulta em inclinação negativa. De maneira semelhante, qualquer comando positivo nos motores também gera a elevação do conjunto, ou seja, a inclinação do braço (Quanser, 2012).

A realização deste projeto será fundamental para o entendimento do conceito teórico sobre controle moderno por meio da aplicação do método Regulador Linear Quadrático, implementado de forma prática no Helicóptero de Bancada 3-DOF da Quanser® a fim de demonstrar, de maneira didática e aplicada, a eficiência do projeto de controladores em espaço de estados e possibilitar que futuros alunos(as) possam compreender, implementar e operar o sistema com segurança, consolidando conhecimentos teóricos e práticos na área de controle automático.

1.1 OBJETIVO

O objetivo deste trabalho é projetar e implementar um controlador Regulador Linear Quadrático (LQR) para o Helicóptero de Bancada 3-DOF da Quanser®, com foco didático para capacitar estudantes a compreender os conceitos teóricos essenciais e aplicar esse conhecimento na prática, operando o equipamento com segurança. A eficiência do método LQR será validada por meio de simulações e implementação prática, seguida da análise dos resultados.

2 REVISÃO DE LITERATURA

O projeto do Regulador Linear Quadrático (LQR), técnica central de controle ótimo abordada neste trabalho, exige uma fundamentação teórica robusta. Antes que a formulação do LQR possa ser detalhada (Seção 2.4), é imprescindível estabelecer a linguagem matemática sobre a qual ele opera: a teoria dos sistemas dinâmicos.

Enquanto o resultado final almejado neste trabalho é o controle prático do helicóptero 3-DOF: um sistema inerentemente instável que precisa ser ativamente estabilizado em seu ponto de operação; esta seção é dedicada a formalizar os conceitos que permitem essa tradução. Será abordado aqui como a dinâmica física da planta é modelada matematicamente, primariamente através da representação em espaço de estados (Seção 2.2.2). Esta formulação é o alicerce que permite, posteriormente, analisar a estabilidade (Seção 2.3.1) e projetar o controlador.

2.1 EVOLUÇÃO DA ENGENHARIA DE CONTROLE

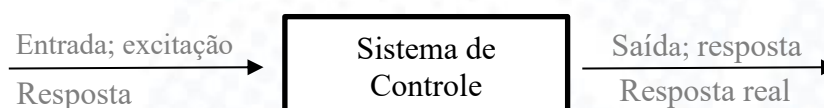
A palavra controle é amplamente utilizada em diferentes contextos, e neste trabalho assume papel central. Controle refere-se ao ato de governar ou regular algo, visando manter ou alcançar um determinado estado ou comportamento.

Este conceito não se limita a processos complexos, está presente em diversas situações do cotidiano e acompanha a humanidade desde seus primórdios. Por exemplo, no futebol, a técnica da “embaixadinha” consiste em controlar a bola por meio de impulsos sutis dos pés para mantê-la estável e sob domínio. Outro exemplo popular é o controle remoto, um dispositivo eletrônico que permite ajustar parâmetros diversos, como o canal e o volume da televisão, facilitando a interação do usuário com o aparelho.

Embora diferentes em natureza, esses exemplos ilustram a essência do controle: agir sobre um sistema ou processo para atingir objetivos predefinidos. No campo da engenharia, a teoria do controle trata exatamente dessa atuação sobre sistemas dinâmicos, utilizando conhecimentos físicos e matemáticos para modelar e manipular variáveis relevantes de forma precisa (Garcia, 2017).

Ampliando esse conceito, sistemas de controle compreendem o conjunto formado pelo sistema a ser controlado (chamado planta) e o controlador, que manipula suas variáveis de entrada para alcançar uma saída desejada atendendo a critérios de desempenho específicos. Segundo Nise (2013), esses sistemas estão presentes em diversos aspectos da sociedade moderna, desde mecanismos naturais, como o pâncreas, que regula o nível de glicose no sangue, até aplicações tecnológicas complexas, como o controle da trajetória de um ônibus espacial em órbita da Terra. A fim de facilitar a visualização do conceito, a Figura 1 apresenta uma descrição simplificada de um sistema de controle, ilustrando seus componentes básicos e a interação entre eles (Nise, 2013).

Figura 1 – Descrição simplificada de um sistema de controle.



Fonte: Nise (2013).

A partir da compreensão de que sistemas de controle podem ser modelados, analisados e manipulados de forma científica, a engenharia passou a desenvolver métodos sistemáticos para estudar e projetar controladores capazes de atingir objetivos específicos. Historicamente, a busca por soluções mais adequadas à crescente complexidade dos processos levou à consolidação de diferentes abordagens para análise e síntese de sistemas de controle. Dentre as principais, destacam-se o controle clássico e o controle moderno. Compreender a lógica e as limitações do controle clássico, portanto, é fundamental para entender por que surgiu a necessidade de métodos mais avançados, culminando no desenvolvimento do controle moderno.

A seguir, serão apresentados os princípios, aplicações e limitações da abordagem clássica, estabelecendo a base para a discussão evolutiva da engenharia de controle.

2.1.1 Controle Clássico: Princípios e Limitações

O controle clássico, em seu conceito, refere-se ao método baseado em resposta em frequência e lugar das raízes, utilizando combinações de métodos analíticos como transformadas de Laplace. Sua característica principal é a natureza SISO (*single-input, single-output*), ou seja, possuir uma única entrada e uma única saída. Essa abordagem é comumente aplicada a plantas lineares e invariantes no tempo. Devido à sua limitação a sistemas com uma única entrada e saída, o controle clássico apresenta aplicabilidade restrita em sistemas multivariáveis, conhecidos como MIMO (*multiple-input, multiple-output*). Entretanto, essa restrição do controle clássico ao paradigma SISO não deve ser encarada de forma negativa, pois foi justamente essa limitação que motivou o desenvolvimento de técnicas baseadas na formulação em espaço de estados, direcionadas ao controle de sistemas MIMO, e que fundamentam a teoria do controle moderno atualmente. (Aguirre *et al.*, p.86, 2007).

Nesse contexto do controle clássico, a função de transferência emerge como uma representação fundamental. Ela constitui uma propriedade inerente ao sistema, sendo independente da forma da entrada ou do tipo de excitação aplicada. Quando essa função não é previamente conhecida, ela pode ser obtida de maneira experimental, por meio da aplicação de sinais de entrada conhecidos e da análise das respostas correspondentes do sistema (Ogata, 2010).

Reforçando a sua importância nesse domínio, em Assunção e Teixeira (2018), a função de transferência é apresentada como ferramenta fundamental para a análise e projeto de controladores clássicos, por permitir relacionar matematicamente a entrada e a saída dos sistemas no domínio de Laplace. Dessa forma, essa abordagem possibilita a aplicação de métodos como o lugar das raízes

e a análise da resposta em frequência. Apesar da utilidade da função de transferência, sua aplicação é restrita a sistemas dinâmicos lineares invariantes no tempo, o que limita o projeto para sistemas com características diferentes, como os sistemas variantes no tempo que serão abordados neste trabalho. Ainda assim, os autores exemplificam aplicações práticas do controle clássico em sistemas como servomotores, que podem ser empregados em experimentos de controle de equilíbrio, por exemplo, na manutenção da posição de uma esfera sobre uma superfície móvel, situação análoga ao ato de manter uma bola em equilíbrio com impulsos sutis, como na execução de uma embaixadinha. Esse exemplo ilustra o uso efetivo desses conceitos em sistemas reais. Assim como o desafio de manter uma bola em uma "embaixadinha" exige um controle preciso e contínuo para compensar perturbações e alcançar um objetivo de equilíbrio, a engenharia de controle busca soluções para desafios semelhantes, porém em contextos técnicos mais complexos.

2.1.2 Surgimento da Teoria do Controle Moderno

A teoria de controle moderno desloca o foco do engenheiro do tratamento isolado de polos e frequências para a modelagem explícita e ao espaço de estados, privilegiando uma descrição temporal que permite projetar controladores a partir do próprio modelo matemático da planta. Entretanto, essa aproximação traz à tona uma tensão crucial: a dependência do desempenho e, sobretudo, da estabilidade à precisão do modelo. Esse problema não é mero detalhe técnico, é um princípio orientador do projeto: aceitar que modelos são aproximativos leva diretamente à formulação de controladores que toleram incertezas estruturais e paramétricas. Assim nasce o problema do controle robusto, cuja essência prática é transformar incertezas conhecidas em requisitos de projeto: definir o "envelope" de erro admissível e garantir, dentro desse envelope, estabilidade e desempenho. No contexto deste trabalho, entender esse percurso do modelo ideal ao projeto robusto permite justificar escolhas de metodologia (por exemplo, projeto por espaço de estados com análise de margens de robustez) e orientar experimentos que quantifiquem quão sensível é a planta real às imprecisões do modelo (Ogata, 2010).

O surgimento da teoria de controle moderno consolidou-se como uma abordagem capaz de representar sistemas dinâmicos de maneira mais completa, utilizando o formalismo matricial e as variáveis de estado para descrever simultaneamente várias entradas e saídas. O desafio fundamental nesses sistemas é o acoplamento, onde uma única entrada afeta múltiplas saídas, tornando ineficazes as abordagens clássicas baseadas em laços de controle independentes (SISO).

O helicóptero 3-DOF, objeto deste estudo, é um exemplo canônico de sistema MIMO acoplado, o que justifica a necessidade da abordagem moderna.

Convém observar que a representação no espaço de estados, base matemática dessa nova teoria, será abordada em detalhe na Seção 2.2.2, evidenciando como essa formulação estabelece o elo entre a modelagem dinâmica e o projeto de controladores modernos.

2.2 MODELAGEM MATEMÁTICA EM ESPAÇO DE ESTADOS

Embora a modelagem de sistemas dinâmicos possa ser descrita por diferentes formalismos, como as equações diferenciais de alta ordem ou as funções de transferência, a teoria de controle moderno adota primariamente a representação no espaço de estados. Este formalismo foca na dinâmica interna do sistema no domínio do tempo e é a linguagem matemática fundamental para o projeto do LQR.

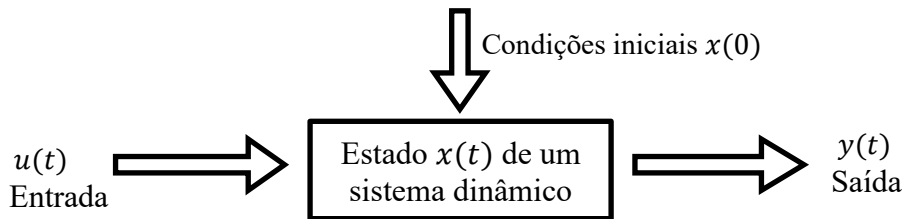
Para estabelecer esta representação, é essencial definir seus conceitos-chave:

- **Estado:** O estado de um sistema dinâmico é o menor conjunto de variáveis, tais que o conhecimento dessas variáveis em $t = t_0$, junto ao conhecimento da entrada para $t \geq t_0$, determina totalmente o comportamento do sistema para qualquer instante $t \geq t_0$ (Ogata, 2010).
- **Variáveis de Estado:** As variáveis de estado de um sistema dinâmico são aquelas que constituem o menor conjunto de variáveis capazes de determinar o estado deste sistema dinâmico. Dessa forma, caso ao menos n variáveis $x_1, x_2, \dots, x_n$ são necessárias para descrever todo o comportamento de um sistema dinâmico, de tal modo que, sendo dada a entrada para $t \geq t_0$ e especificado o estado inicial em $t = t_0$, o estado futuro do sistema fique completamente estabelecido e, então, essas n variáveis formem um conjunto de variáveis de estado (Ogata, 2010).
- **Vetor de Estado:** Caso sejam necessárias n variáveis de estado para descrever completamente o comportamento de dado sistema, então essas n variáveis de estado poderão ser consideradas os n componentes de um vetor x . Este vetor será o vetor de estado, dado um estado do sistema $x(t)$ para qualquer instante $t \geq t_0$, uma vez que é sabido o estado em $t = t_0$ e a entrada $u(t)$ para $t \geq t_0$ é especificada (Ogata, 2010).

- **Espaço de Estados:** o espaço de estados provém de um espaço de dimensão n , cujos eixos coordenados são formados pelos eixos $x_1, x_2, \dots, x_n$ em que $x_1, x_2, \dots, x_n$ são as variáveis de estado (Ogata, 2010).

Ainda, para Bishop (2011), as variáveis de estado descrevem a resposta futura de um sistema, dado o estado presente, as excitações de entrada e as equações que descrevem a dinâmica. Assim, a forma geral de um sistema dinâmico está mostrada na Figura 2.

Figura 2 – Descrição de um sistema dinâmico de forma geral.



Fonte: Bishop (2011).

2.2.1 Definição Matemática

Na modelagem de sistemas dinâmicos usando o espaço de estados, trabalham-se três tipos fundamentais de variáveis: as variáveis de entrada (que influenciam o sistema), as variáveis de saída (que podem ser medidas ou observadas) e as variáveis de estado (que representam o "estado interno" do sistema e sua memória dinâmica). A representação de um mesmo sistema físico no espaço de estados pode ser feita de várias formas diferentes, ou seja, não existe um conjunto específico de equações para descrever o sistema. Contudo, apesar dessas variações na modelagem, uma característica constante é que o número de variáveis de estado necessárias para descrever completamente a dinâmica do sistema é sempre o mesmo, independentemente da representação escolhida. Isso quer dizer que, embora possa haver diferentes maneiras de escrever as equações no espaço de estados, a dimensão do vetor de estado (quantidade de variáveis de estado) permanece invariável para o mesmo sistema (Ogata, 2010).

Em um sistema dinâmico, os elementos responsáveis por 'memorizar' os valores das entradas desempenham papel fundamental na descrição da dinâmica do sistema. No contexto de sistemas de controle de tempo contínuo, os integradores funcionam como dispositivos de memória cujas saídas podem ser consideradas variáveis que definem o estado interno do sistema. Portanto, as saídas dos integradores podem ser escolhidas como variáveis de estado, e o número total dessas

variáveis de estado representa completamente a dinâmica do sistema, correspondendo ao número de integradores presentes no modelo (Ogata, 2010).

Seja um sistema com múltiplas entradas e múltiplas saídas com n integradores e r entradas $u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t)$ em m saídas $y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)$, em que as n saídas dos integradores serão as variáveis de estado $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$, então têm-se

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= f_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t), \\ \dot{x}_2(t) &= f_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t), \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(t) &= f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t),\end{aligned}\tag{1}$$

em que as saídas são dadas por

$$\begin{aligned}y_1(t) &= g_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t), \\ y_2(t) &= g_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t), \\ &\vdots \\ y_m(t) &= g_m(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t).\end{aligned}\tag{2}$$

Mas, definindo em matrizes, têm-se

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad f(x, u, t) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \end{bmatrix},\tag{3}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{bmatrix}, \quad g(x, u, t) = \begin{bmatrix} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ \vdots \\ g_m(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \end{bmatrix}.\tag{4}$$

Simplificando, obtêm-se

$$\dot{x} = f(x, u, t),\tag{5}$$

$$y = g(x, u, t).\tag{6}$$

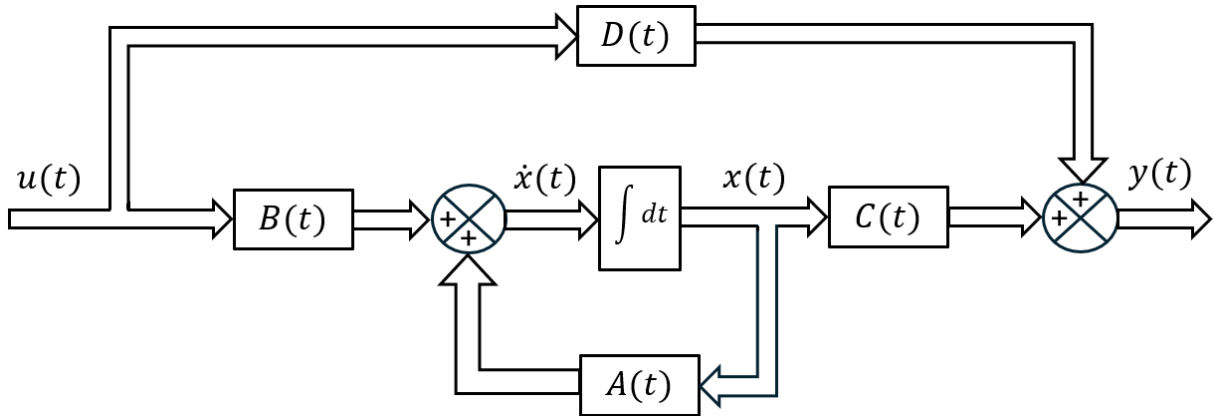
Linearizando (5) e (6) em torno de um ponto específico de operação, têm-se

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad (7)$$

$$y(t) = C(t)x(t) + D(t)u(t), \quad (8)$$

em que $A(t)$ é a matriz de estado, $B(t)$ a matriz de entrada, $C(t)$ a matriz de saída e $D(t)$ a matriz de transmissão direta (Ogata, 2010). A Figura 3 apresenta essa representação em diagrama de blocos.

Figura 3 – Diagrama de blocos de um sistema de controle linear de tempo contínuo, representado no espaço de estados.



Fonte: Ogata (2010).

Ainda, um sistema dinâmico consiste em um número finito de elementos concentrados e pode ser descrito por equações diferenciais ordinárias, nas quais o tempo é a variável independente. Dessa forma, utilizando a notação vetorial-matricial, uma equação diferencial de ordem n elementos do vetor formam um conjunto de variáveis de estado, então a equação diferencial vetorial-matricial é uma equação de estado. Assim, relacionando com as equações (7) e (8), pode-se definir a equação de estado matricial-vetorial em

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}, \quad (9)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \cdots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \cdots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1} & d_{n2} & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Da mesma forma, as equações diferenciais que descrevem a dinâmica do sistema podem ser expressas de forma compacta através da notação vetorial-matricial. Ao agrupar as n variáveis de

estado na matriz coluna $x(t)$, que definimos como vetor de estado, e agrupar os r sinais de entrada no vetor de entrada $u(t)$, o sistema de equações é consolidado na equação diferencial de estado apresentada em

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (11)$$

$$\dot{y}(t) = Cx(t) + Du(t), \quad (12)$$

As equações (9) e (10) apresentam a forma vetorial-matricial explícita do modelo de estado. Para simplificar a notação e facilitar a manipulação algébrica, estas equações são comumente reescritas de forma compacta, como apresentado em (11) e (12).

Portanto, (11) é referida como a Equação de Estado e (12) como a Equação de Saída. De modo geral, a modelagem matemática em espaço de estados de um sistema de controle linear e invariante no tempo (LTI) é representada por este par de equações, que é a base para o projeto de controle moderno.

2.2.2 Espaço de Estados

Definido a equação do espaço de estados, podemos retornar a discussão sobre a evolução da engenharia de controle. Embora a Função de Transferência (FT) seja o pilar da teoria de controle clássica e a representação em Espaço de Estados (EE) seja a fundação da teoria moderna, é crucial entender que elas não são abordagens excludentes. Pelo contrário, para sistemas Lineares Invariantes no Tempo (LTI), ambas são descrições matemáticas complementares do mesmo sistema físico, cada uma oferecendo uma perspectiva única e poderosa. A Função de Transferência, $G(s)$, oferece uma perspectiva externa, descrevendo a relação de entrada-saída (y/u) do sistema. A FT, então, permite uma análise clara da estabilidade (via polos e zeros) e do desempenho em frequência (via diagramas de Bode), sendo a base para a análise de margens de robustez (margem de ganho e fase).

Fica claro que sua principal limitação, contudo, é a dificuldade intrínseca em lidar com sistemas de múltiplas entradas e múltiplas saídas (*MIMO*), como o helicóptero 3-DOF, devido ao fenômeno do acoplamento. Por outro lado, a representação em Espaço de Estados descreve a dinâmica "interna" completa do sistema através do vetor de estado $x(t)$. Esta abordagem é superior para a modelagem de sistemas *MIMO* e é a linguagem matemática necessária para técnicas de controle ótimo, como o LQR, que é formulado explicitamente sobre as matrizes A e B .

Subsequentemente, as ferramentas do Controle Clássico são empregadas para a análise de robustez. Assim, a função de transferência de um sistema representado por uma equação diferencial linear invariante no tempo é definida como a relação entre a transformada de Laplace da saída (função de resposta) e a transformada de Laplace da entrada (função de excitação), admitindo que as condições iniciais sejam nulas.

2.2.2.1 Forma Canônica Controlável

Além da modelagem derivada das leis da física, a representação em espaço de estados pode ser estruturada em formas padronizadas, conhecidas como Formas Canônicas, que estabelecem uma ligação direta entre os coeficientes da função de transferência do sistema e os elementos das matrizes A , B e C . Neste contexto, destaca-se a Forma Canônica Controlável (FCC). A forma canônica controlável é importante na discussão do projeto de sistema de controle pela abordagem por alocação de polos e é representada por

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad (13)$$

$$y = [b_n - a_n b_0 \mid b_{n-1} - a_{n-1} b_0 \mid \cdots \mid b_1 - a_1 b_0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + b_0 u. \quad (14)$$

2.3 CRITÉRIO DE ESTABILIDADE DE LYAPUNOV

Para Assunção e Teixeira (2018), a estabilidade de um sistema é definida por sua capacidade de manter uma resposta controlada diante de qualquer excitação. Se um sistema recebe uma perturbação, dois resultados são possíveis: ou o sistema demonstra ser estável, retornando ao seu estado de equilíbrio após a perturbação, ou demonstra ser instável, caso a perturbação interfira de forma que sua resposta saia do controle. Partindo desse princípio, a análise da estabilidade torna-se uma abordagem fundamental no projeto de sistemas de controle.

Para formalizar a análise da estabilidade, Assunção e Teixeira (2018) argumenta que a avaliação puramente empírica ou por observação é insuficiente, sendo imperativa a adoção de critérios matemáticos sistemáticos. Neste contexto, um dos pilares conceituais é a estabilidade *BIBO* (*Bounded-Input, Bounded-Output*). Este critério estabelece que um sistema é estável se, e

somente se, todo e qualquer sinal de entrada limitado (*bounded*) aplicado ao sistema produzir um sinal de saída correspondentemente limitado. Segundo o autor, a aplicação rigorosa deste princípio assegura a generalidade e a confiabilidade na análise, superando as limitações dos métodos experimentais. Esta abordagem analítica é, portanto, fundamental para o desenvolvimento e a validação de sistemas de controle, permitindo o projeto de sistemas robustos e com comportamento previsível sob diversas condições de operação.

As ferramentas canônicas do Controle Clássico, também detalhadas em Assunção e Teixeira (2016), são projetadas precisamente para avaliar este critério *BIBO*. Técnicas como o critério de Routh-Hurwitz, a análise do Lugar das Raízes e os diagramas de Bode e Nyquist, todas fundamentadas na representação por função de transferência, são comprovadamente eficazes para a análise de sistemas de entrada única e saída única (*SISO*). Contudo, a complexidade inerente a sistemas de múltiplas entradas e múltiplas saídas (*MIMO*), como o modelo de helicóptero 3-DOF objeto deste estudo, expõe as limitações dessa abordagem clássica. Para tais sistemas, a representação por espaço de estados (Controle Moderno) é mais adequada, exigindo um critério de estabilidade focado na estabilidade interna. Esta é rigorosamente avaliada pelo Método Direto de Lyapunov, que, por sua vez, constitui a base teórica para o projeto de controladores ótimos como o LQR que será abordado de forma mais específica adiante.

2.3.1 Método de Lyapunov

O método direto de Lyapunov, indicado para análise de sistemas não lineares e/ou variantes no tempo, é aplicável a sistemas de qualquer ordem. Para realizar essa análise, é fundamental definir alguns conceitos básicos (Assunção; Teixeira 2016).

A análise de estabilidade pelo Método Direto de Lyapunov exige uma formalização matemática rigorosa do comportamento dos estados do sistema. Diferente da análise clássica (*BIBO*), esta abordagem foca na estabilidade interna. Para fundamentar esta análise, é imperativo definir formalmente os conceitos-chave, começando pelo Ponto de Equilíbrio e pela Região Esférica, que delimita a vizinhança da análise. A partir disso, pode-se diferenciar os comportamentos das trajetórias do sistema em: Estabilidade (no sentido de Lyapunov), que garante que as trajetórias permaneçam nessa vizinhança; Estabilidade Assintótica, que garante a convergência de volta ao equilíbrio; e Instabilidade.

Considere um sistema dinâmico descrito pela equação (9) que não possui entrada de controle, isto é, $u = 0$. Nesse caso, tem-se que:

$$\dot{x}(t) = Ax(t). \quad (15)$$

A partir do sistema descrito, analisa-se os conceitos:

- **Estado de equilíbrio:** Um vetor constante x_e é um estado de equilíbrio do sistema (15) se $\dot{x}(t) = Ax_e = 0$. Ou seja, se todas as derivadas das variáveis de estado forem nulas. Isto significa que as variáveis de estado não estão variando no tempo. Neste caso, o estado x_e é dito estado em equilíbrio ou ponto de equilíbrio.
- **Região Esférica:** Para a definição de estabilidade, considere uma região esférica de raio k em torno de um estado de equilíbrio x_e dada por:

$$\|x - x_e\| \leq k, \quad (16)$$

em que $\|x - x_e\|$ denota norma euclidiana e é dada por

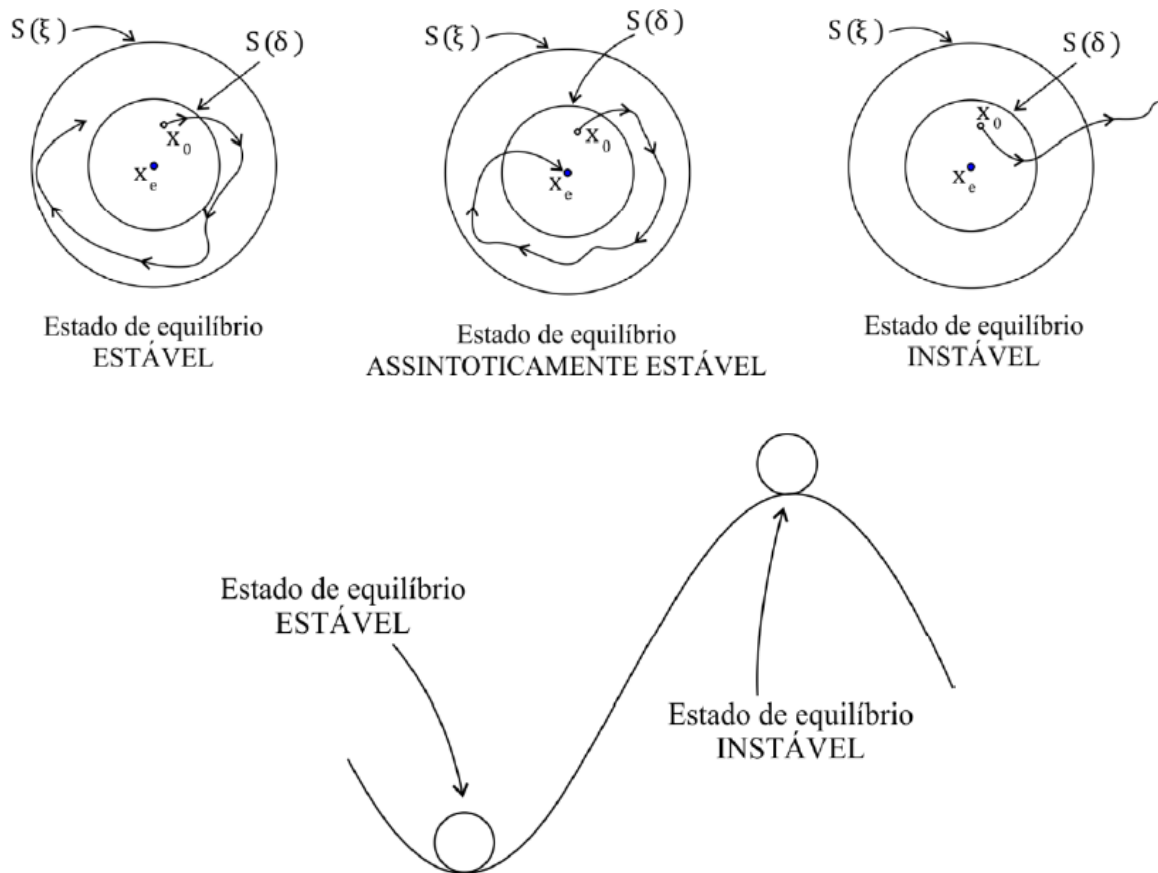
$$\|x - x_e\| = [(x_1 - x_{1e})^2 + (x_2 - x_{2e})^2 + \dots + (x_n - x_{ne})^2]^{\frac{1}{2}}. \quad (17)$$

Seja $S(\delta)$ a região que consiste no conjunto de todos os pontos tais que $\|x - x_e\| \leq \delta$, sendo x_0 o estado inicial e $S(\delta)$ a região que consiste em todos os pontos para os quais $\|x - x_e\| \leq \xi, \forall t > 0$ (Assunção; Teixeira, 2016).

- **Estabilidade:** Um ponto de equilíbrio x_e é classificado como estável por Lyapunov por qualquer região de tolerância $S(\xi)$ definida ao seu redor, for possível encontrar uma região de partida $S(\delta)$ suficientemente próxima do equilíbrio, tal que toda trajetória iniciada em $S(\delta)$ permaneça confinada dentro de $S(\xi)$ para todo tempo (Assunção; Teixeira, 2016).
- **Estabilidade Assintótica:** O equilíbrio é dito assintoticamente estável se, além de ser estável por Lyapunov, ele também atrair as trajetórias próximas, fazendo com que toda solução iniciada em $S(\delta)$ convirja para x_e à medida que o tempo tende ao infinito (Assunção; Teixeira, 2016).
- **Instabilidade:** Um equilíbrio é instável se ele não for estável; ou seja, se existir uma região $S(\xi)$ para a qual nenhuma região de partida $S(\delta)$ (por menor que seja) consiga garantir que as trajetórias permaneçam em $S(\xi)$, existindo sempre ao menos uma trajetória que escapa." (Assunção; Teixeira, 2016).

A Figura 4 ilustra as possibilidades apresentadas (Assunção; Teixeira, 2016).

Figura 4 – Interpretação geométrica de estabilidade e instabilidade de estados de equilíbrio.



Fonte: Assunção e Teixeira (2016).

As definições de estabilidade são conceituais, mas verificá-las na prática exigiria a análise de todas as trajetórias do sistema, o que é inviável. Para solucionar isso, o Método Direto de Lyapunov (ou Segundo Método de Lyapunov) fornece uma ferramenta analítica poderosa. Este método baseia-se na busca por uma função escalar $V(x)$, chamada de "Função Candidata de Lyapunov", que age de forma análoga à "energia" total de um sistema físico. A estabilidade do sistema pode ser provada simplesmente analisando as propriedades matemáticas desta função $V(x)$ e de sua derivada temporal, $\dot{V}(x)$.

Uma função escalar $V(x)$ é definida positiva em uma região Ω se $V(x) > 0$ para todos os vetores de estado não nulos x na região Ω e $V(0) = 0$. Da mesma forma, uma função escalar $V(x)$ é dita definida negativa se $-V(x)$ for definida positiva (Assunção; Teixeira, 2016).

De maneira similar, uma função escalar é dita semidefinida positiva se for positiva ou nula para todos os vetores de estado x em uma região Ω , sendo nula na origem $x = 0$. Consequentemente, uma função escalar é dita semidefinida negativa se $-V(x)$ for semidefinida positiva (Assunção; Teixeira, 2016).

Embora essas definições sejam gerais para qualquer função $V(x)$, a sua aplicação torna-se concreta no estudo de sistemas lineares. Para esta classe de sistemas, a candidata a Função de Lyapunov $V(x)$ é universalmente escolhida como uma Forma Quadrática, que tem a estrutura matemática $V(x) = x^T P x$, onde P é uma matriz simétrica.

A forma quadrática constitui uma classe de funções escalares que desempenham um papel importante na análise de estabilidade. Ela é dada por:

$$V(x) = x^T P x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1n} \\ P_{12} & P_{22} & \cdots & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{1n} & P_{2n} & \cdots & P_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad (18)$$

O critério de Sylvester fornece a condição necessária e suficiente para determinar se uma forma quadrática $V(x)$ é definida positiva. A condição é que todos os menores principais sucessivos de P sejam positivos (Assunção; Teixeira, 2016):

$$P_{11} > 0, \det \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} > 0, \dots, \det \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \cdots & P_{1n} \\ P_{12} & P_{22} & \cdots & P_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{1n} & P_{2n} & \cdots & P_{nn} \end{bmatrix} > 0. \quad (19)$$

Uma vez estabelecido como testar se $V(x) = x^T P x$ é positiva, a segunda condição é que sua derivada temporal, $\dot{V}(x)$ seja definida negativa. Seja a derivada de $V(x)$:

$$\dot{V}(x(t)) = x^T(t)(A^T P + P A)x(t). \quad (20)$$

Por convenção, impomos que essa matriz seja igual a uma matriz definida negativa genérica, $-Q$, onde Q é qualquer matriz simétrica definida positiva. Assim, a condição de estabilidade é formalmente expressa pelo Teorema de Lyapunov.

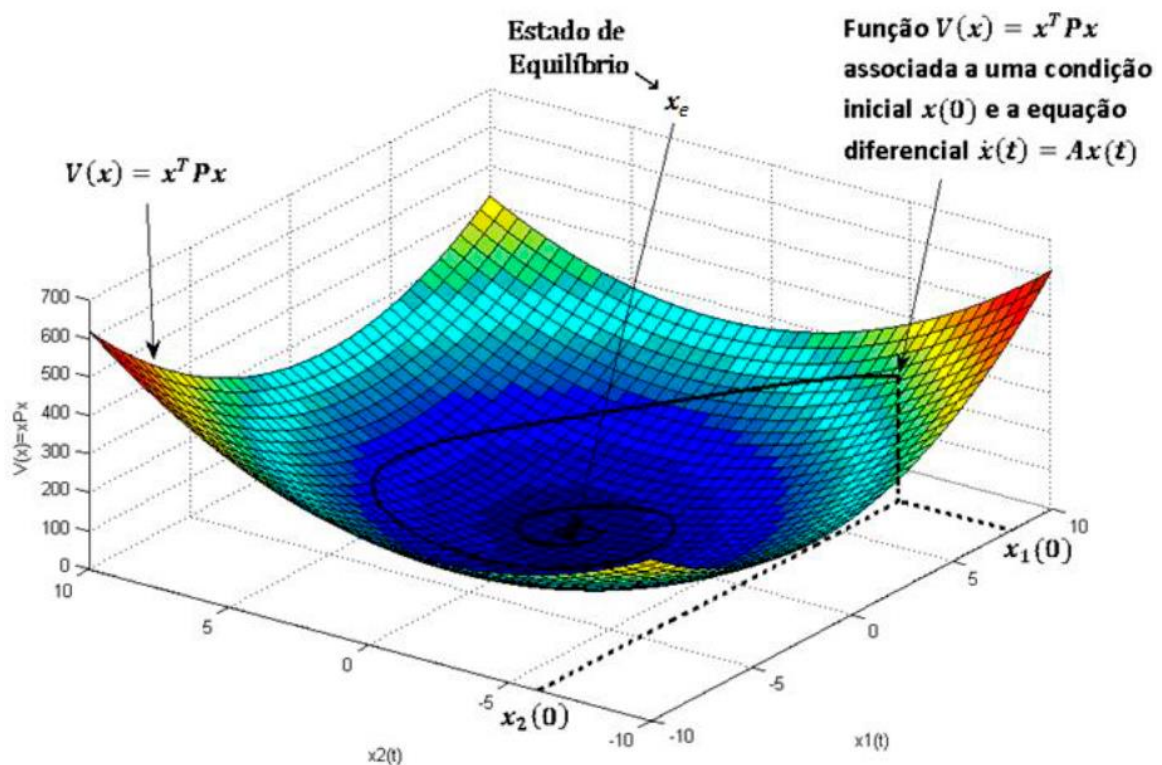
Teorema de Lyapunov: Considerando o sistema dado por (15), em que $x(t)$ é o vetor de estado e A uma matriz constante ($n \times n$), com elementos reais, uma condição necessária e suficiente para que o estado de equilíbrio $x_e = 0$ seja assintoticamente estável é que, dada uma

matriz Q simétrica definida positiva qualquer, exista uma matriz P simétrica definida positiva de modo que

$$A^T P + P A = -Q. \quad (21)$$

A Figura 5 ilustra o aspecto da função de Lyapunov usada para demonstrar estabilidade de um sistema dinâmico.

Figura 5 – Interpretação geométrica do Teorema de Lyapunov.



Fonte: Assunção e Teixeira (2016).

2.4 REGULADOR LINEAR QUADRÁTICO

Ao abordar o Controle Ótimo, é fundamental entender que não se trata apenas de mais uma técnica para estabilizar um sistema dinâmico. O controle clássico, muitas vezes focado em corrigir o erro, tem a estabilidade como seu objetivo principal. No controle ótimo, essa perspectiva muda: a estabilidade deixa de ser o fim e passa a ser o ponto de partida, sendo um requisito mínimo. A compreensão do controle ótimo pode ser abordada sob três perspectivas complementares: matemática, física e de engenharia (Bishop 2011).

- Engenharia: Define o que é "ótimo" ao ponderar o que é mais importante: velocidade de resposta, consumo de energia, segurança, robustez a distúrbios, etc.
- Matemática: Traduz essas metas de engenharia em uma função de custo (um funcional) a ser minimizada.
- Física: Garante que o modelo usado e os custos associados (como o esforço de controle) representem fielmente as limitações físicas do sistema real.

Essa nova abordagem, inserida no contexto do Controle Moderno, é imensamente poderosa. Ela permite tratar de sistemas variantes no tempo e não lineares, abrindo possibilidades cruciais para processos complexos onde "energia consumida, tempo, segurança e atendimento de vínculos são cruciais", como em missões aeroespaciais ou processos químicos, que impulsionaram seu desenvolvimento nas décadas de 1950 e 1960.

Contudo, como aponta Neto e Silva (2023), há um "preço" a se pagar: a necessidade de uma nova ferramenta matemática. A otimização não é mais de variáveis algébricas, mas sim de um funcional (uma função de funções). Felizmente, para a classe de sistemas lineares e utilizando um funcional de custo quadrático, essa complexa otimização resulta em uma solução elegante e de forma fechada: o Regulador Linear Quadrático (LQR).

O LQR se torna, portanto, a ferramenta prática que aplica a teoria do controle ótimo para garantir o desempenho desejado, sendo o objeto de estudo deste trabalho.

2.4.1 Definição de Regulador Linear Quadrático

O conceito teórico do controle ótimo tem como solução o Regulador Quadrático Linear, o qual nesta seção será descrito em suas equações e sistemáticas. O método clássico de controle ótimo LQR (Linear Quadratic Regulator) resolve uma equação de Riccati "para trás no tempo" no qual é necessário o conhecimento do modelo do sistema (Lewis; Vrabie; Syrmos, 2012).

Enquanto a formulação geral do problema de horizonte finito resulta em uma Equação Diferencial de Riccati (DRE) com um ganho $K(t)$ variante no tempo, o problema do Regulador foca no caso de horizonte infinito ($t_f \rightarrow \infty$). Neste cenário, busca-se um ganho de controle constante que garanta a estabilidade do sistema em malha fechada indefinidamente. Essa condição simplifica a DRE para a sua forma de estado estacionário, a Equação Algébrica de Riccati (ARE), que é a base do LQR clássico (Lewis; Vrabie; Syrmos, 2012)

Segundo Bishop 2011, o desempenho de um sistema de controle, escrito em termos das variáveis de estados do sistema, pode ser expresso como

$$J = \int_0^{t_f} g(x, u, t) dt, \quad (22)$$

seja x o vetor de estado, u o vetor de controle e t_f o instante final, J definirá o custo, isto é, o comportamento do sistema, com base no vetor de estado para um sistema em equilíbrio. Para o problema de regulação, o interesse reside em minimizar o erro do sistema, levando-o ao seu ponto de equilíbrio (Bishop 2011).

Neste tipo de problema, o vetor de estado desejado é a origem, ou seja, $x_d = 0$. Consequentemente, o próprio vetor de estado x pode ser interpretado como o vetor de erro, pois qualquer afastamento do equilíbrio ($x \neq 0$) é, por definição, um erro que se deseja minimizar (Bishop 2011).

Conforme estabelecido, o problema do regulador visa anular o erro, que neste caso é análogo ao próprio vetor de estado x . A solução clássica para este problema é o Problema do Regulador Quadrático Ótimo, que, como aponta Ogata (2010), se distingue por definir o custo do desempenho através de uma função quadrática. Esta escolha é fundamental, pois traduz o objetivo de engenharia de penalizar tanto o erro quanto o gasto de energia (esforço de controle) em uma forma matemática que admite uma solução analítica elegante. O índice de desempenho J para o problema do regulador quadrático em horizonte infinito é, portanto, expresso como:

$$J = \int_0^{\infty} (x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t))dt, \quad (23)$$

sendo Q uma matriz simétrica definida positiva (ou semidefinida positiva) e R uma matriz simétrica definida positiva. Note que o primeiro termo se refere ao custo associado ao erro de estado e o segundo termo representa o consumo de energia dos sinais de controle.

As matrizes Q e R determinam a importância relativa do erro e o consumo dessa energia. Assim, se o sistema for controlável, a minimização de J em (22) sempre torna o sistema estável em malha fechada.

2.4.2 Solução do Problema da Otimização

Para encontrar a lei de controle $u(t)$ que realiza a minimização do funcional J , conforme na Equação (22), aplica-se esta otimização a um sistema linear invariante no tempo, cuja dinâmica é descrita em espaço de estados por (Ogata 2010):

$$\dot{x} = Ax(t) + Bu(t), \quad (24)$$

A teoria de controle ótimo demonstra que a solução ótima que minimiza o índice de desempenho é uma realimentação de estados (malha fechada), onde o vetor $u(t)$ é dado por uma matriz de ganho constante K (Ogata 2010):

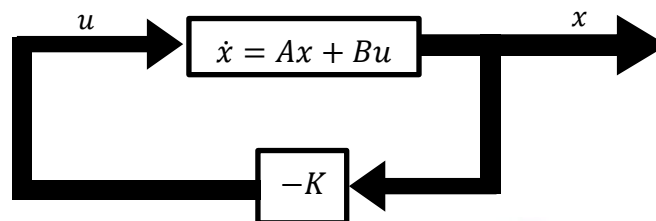
$$u(t) = -Kx(t), \quad (25)$$

substituindo a (25) em (24), obtemos:

$$\dot{x} = Ax(t) - BKx(t) = (A - BK)x(t), \quad (26)$$

Sendo (26) o resultado da solução ótima que descreve a dinâmica do novo sistema em malha fechada. A configuração ótima comentada nesta seção pode ser vista na Figura 6.

Figura 6 – Sistema Regulador Ótimo.



Fonte: Adaptado de Ogata (2010).

Desta forma, o projeto LQR pode ser compreendido como uma síntese de três perspectivas complementares. A perspectiva da Física estabelece o modelo do sistema da Equação (24), representando as leis e restrições reais da planta. A perspectiva da Engenharia define o que é "ótimo", materializando-se no julgamento de engenharia para a escolha e ponderação das matrizes de custo Q e R . Por fim, a perspectiva da Matemática fornece a ferramenta (notavelmente a Equação de Riccati) que une o modelo físico (A, B) aos objetivos de engenharia (Q, R) para, sistematicamente, calcular a solução de controle ótima.

2.4.3 Equação Algébrica de Riccati (ARE)

Como introduzido, a ferramenta matemática que une o modelo físico da planta e os objetivos de engenharia para encontrar o ganho ótimo K é a Equação Algébrica de Riccati (ARE). Considerando que o sistema realimentado (26) seja estável, substituindo (25) em (23):

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\infty} (x^T(t)Qx(t) + x^T(t)K^T(t)RKx(t))dt, \\ &= \int_0^{\infty} (x^T(t)(Q + K^T RK)x(t))dt. \end{aligned} \quad (27)$$

A partir deste ponto, aplicando os conceitos de estabilidade de Lyapunov comentados anteriormente, considera-se P uma matriz simétrica definida positiva:

$$x^T(t)(Q + K^T RK)x(t) = -\frac{d}{dt}(x^T(t)Px(t)), \quad (28)$$

Dessa forma, agora considerando $\dot{x}(t) = (A - BK)x(t)$:

$$\begin{aligned} x^T(t)(Q + K^T RK)x(t) &= -\frac{d}{dt}(x^T(t)Px(t)) = -\dot{x}^T(t)Px(t) - x^T(t)P\dot{x}(t), \\ &= -x^T[(A - BK)^T P + P(A - BK)]x(t). \end{aligned} \quad (29)$$

comparando ambos os lados da Equação (37) é possível notar que, para $x(t)$ qualquer, temos que

$$(A - BK)^T P + P(A - BK) = -(Q + K^T RK). \quad (30)$$

A comparação dos termos na Equação (29) resulta na Equação de Lyapunov para o sistema em malha fechada, apresentada na Equação (30). Esta equação é a conclusão da prova de estabilidade, pois ela conecta formalmente a estabilidade do sistema realimentado (26) à existência de uma matriz P simétrica e definida positiva. Desta forma, a teoria de Lyapunov garante que, se for possível resolver a Equação (30) e encontrar tal matriz P , o sistema em malha fechada é comprovadamente estável, possuindo todos os seus polos (os autovalores da matriz $A - BK$) com partes reais negativas.

Ainda, retomamos que o índice de desempenho pode ser calculado considerando $P = (Q + K^T RK)$.

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{\infty} (x^T(t)(Q + K^T RK)x(t))dt \\ J &= -x^T(t)Px(t)|_0^{\infty} \end{aligned} \quad (31)$$

$$J = -x^T(\infty)Px(\infty) + x^T(0)Px(0).$$

Suposto que todos os autovalores de $(A - BK)$ tenham partes reais negativas, tem-se $x(\infty) \rightarrow 0$. Portanto,

$$J = x^T(0)Px(0). \quad (32)$$

garantindo que J pode ser obtido em termos da condição inicial $x(0)$ e P .

Por fim, para comprovar que K satisfaz o mínimo valor do índice de desempenho, obtendo-se a solução do problema de controle quadrático ótimo, supõe-se que R seja uma matriz simétrica definida positiva $R = T^T T$, em que T é uma matriz não singular

$$(A^T - B^T K^T)P + P(A - BK) + Q + K^T T^T T K = 0. \quad (33)$$

reescrita como:

$$A^T P + PA + [TK - (T^T)^{-1} B^T P]^T [TK - (T^T)^{-1} B^T P] - PBR^{-1}B^T P + Q = 0. \quad (34)$$

A minimização de J em relação a K requer minimização de

$$x^T(t)[TK - (T^T)^{-1} B^T P]^T [TK - (T^T)^{-1} B^T P]x(t) = 0. \quad (35)$$

em relação a K . Como o termo em (35) não é negativo, o mínimo ocorre quando ele é zero ou quando

$$TK = (T^T)^{-1} B^T P. \quad (36)$$

Portanto,

$$K = T^{-1}(T^T)^{-1} B^T P = R^{-1} B^T P. \quad (37)$$

A Equação (37) fornece a fórmula explícita para o ganho ótimo K . No entanto, note que este ganho K é, ele próprio, dependente da matriz P , que ainda precisa ser determinada. Para isso, quando o índice do desempenho é dado em (23), é linear e é dada por:

$$u(t) = -Kx(t) = -R^{-1} B^T P x(t). \quad (38)$$

A matriz P em (37) deve satisfazer (30) ou considerando (33)-(37), a seguinte equação reduzida:

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0. \quad (39)$$

Essa equação reduzida é denominada equação matricial reduzida de Riccati.

3 SISTEMA HELICÓPTERO 3-DOF

3.1 DESCRIÇÃO DO SISTEMA

A figura apresentada ilustra o equipamento em análise. Pode-se observar que o corpo do helicóptero possui dois motores de corrente contínua (CC): o motor dianteiro (front motor) e o motor traseiro (back motor), responsáveis pela movimentação do helicóptero de bancada por meio das suas hélices propulsoras. Em uma das extremidades da haste retangular que conecta o corpo do helicóptero há um contrapeso, cuja função principal é garantir o equilíbrio e a estabilização do sistema, contrapondo o peso do helicóptero. Dessa forma, o sistema realiza movimentos em três graus de liberdade: viagem (travel λ), elevação (elevation ε) e arfagem (pitch ρ), como apresenta a Figura 7 e Figura 8.

Figura 7 - Helicóptero 3-DOF da Quanser.



Fonte: Quanser (2012).

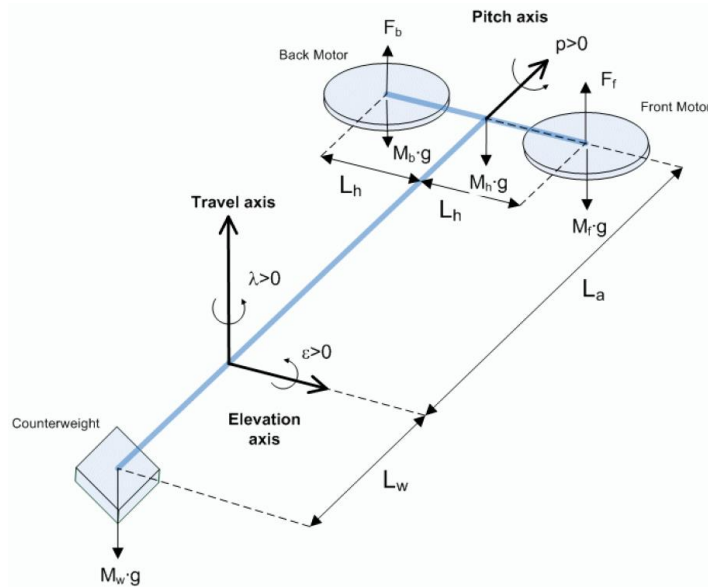
Figura 8 – Helicóptero 3-DOF da QUANSER do LPC.



Fonte: Autoria própria.

O Helicóptero conta com três encoders, que funcionam como sensores responsáveis por fornecer um feedback preciso ao sistema de controle, permitindo que ele tome decisões para manter a estabilidade. Cada encoder monitoriza um grau de liberdade específico do sistema, ou seja, existe um sensor dedicado para cada tipo de movimento. O diagrama do Helicóptero 3-DOF é apresentado na Figura 9.

Figura 9 – Diagrama do Helicóptero 3-DOF.



Fonte: Quanser (2012).

As entradas deste sistema são as tensões de cada motor e a saída, o movimento em si. Dessa forma, ao entrar com tensões nos motores, isso fará com que o corpo suba, no eixo de elevação. Caso a tensão do motor dianteiro V_f seja maior que a tensão no motor traseiro V_b , o Helicóptero sofrerá uma inclinação no eixo de arfagem, movendo o corpo para frente, que consequentemente gera um movimento no eixo de viagem. As variáveis ξ e γ representam as integrais dos ângulos de elevação e deslocamento, respectivamente ou seja (Quanser, 2012):

$$\xi = \int_0^t (\epsilon - \epsilon_{ref}) dt, \quad \gamma = \int_0^t (\lambda - \lambda_{ref}) dt, \quad (40)$$

em que ϵ_{ref} e λ_{ref} são as referências para a elevação e deslocamento do sistema, evitando que o sistema vá sempre a zero. Além disso, não há uma referência para o ângulo pitch (ρ), já que é o ângulo de controle do sistema e estará sempre entorno de zero. O Helicóptero 3-DOF também possui um sistema de massa ativa para criar perturbações, porém não será explorada (Quanser, 2012).

A Figura 10 apresenta o modelo físico real do helicóptero de bancada analisado neste estudo.

Figura 10 – BOEING H-47 CHINOOK.



Fonte: <https://www.boeing.com/defense/ch-47-chinook>.

3.2 EQUACIONAMENTO DO SISTEMA E MODELO NO ESPAÇO DE ESTADOS DO HELICÓPTERO 3-DOF

Este sistema apresenta os seguintes parâmetros:

Tabela 1 – Parâmetros e valores do sistema do Helicóptero 3-DOF da Quanser.

Símbolo	Descrição	Valor	Unidade
K_f	Constante de força de propulsão da hélice	0,1188	N/V
M_h	Massa do Helicóptero (corpo, propulsores, encoders, etc.)	1,15	kg
M_w	Massa do contrapeso	1,87	kg
M_f	Massa do propulsor dianteiro (metade do corpo do Helicóptero)	0,575	kg
M_b	Massa do propulsor traseiro	0,713	kg
L_a	Distância do eixo de viagem até o corpo do Helicóptero	0,660	m
L_h	Distância do eixo de arfagem até cada motor	0,178	m
L_w	Distância do eixo de viagem até o contrapeso	0,470	m
g	Constante de gravidade	9,81	m/s ²
J_w	Momento de inércia do motor	$3,9 \times 10^{-7}$	kg.m ²
J_e	Momento de inércia sobre o eixo de elevação	0,91	kg.m ²
m	Massa das peças do conjunto de massa ativa	0,154	kg

Fonte: Quanser (2012).

Usando a fórmula de Euler-Lagrange (56), são derivadas as equações não lineares de movimento do sistema de Helicóptero 3-DOF. Essas equações são linearizadas em torno do zero

e é encontrado o modelo linear de espaço de estados (A, B, C, D) que descreve a dinâmica de posição angular em relação à tensão do sistema. Assim, da representação de espaço de estados, têm-se

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y^T} = 0, \quad (41)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} x = A \cdot x + B \cdot U, \quad (42)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} y = C \cdot y + D \cdot U. \quad (43)$$

Ainda, define-se que o vetor de estados do Helicóptero é

$$x^T = \left[\varepsilon, \rho, \lambda, \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon, \frac{\partial}{\partial t} \rho, \frac{\partial}{\partial t} \lambda, \xi, \gamma \right], \quad (44)$$

e, com $\varepsilon, \rho, \lambda$ sendo ângulo de elevação, arfagem e viagem respectivamente, o vetor de saída será

$$y^T = [\varepsilon, \rho, \lambda]. \quad (45)$$

Com isso, a matriz de espaço de estados do Helicóptero será dada por (46), (47) e (48), sendo explorada na próxima seção (Quanser, 2012).

$$A_{8 \times 8} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{(L_w m_w - 2L_a m_f)g}{m_w L_w^2 + 2m_f L_h^2 + 2m_f L_a^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (46)$$

$$B_{8 \times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{L_a K_f}{2m_f L_a^2 + m_w L_w^2} & \frac{L_a K_f}{2m_f L_a^2 + m_w L_w^2} \\ \frac{1}{2} \frac{K_f}{m_f L_h} & -\frac{1}{2} \frac{K_f}{m_f L_h} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (47)$$

$$C_{3 \times 8} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (48)$$

4 PROJETO E IMPLEMENTAÇÃO DE UM CONTROLADOR PARA O HELICÓPTERO 3-DOF

4.1 PROJETO DO CONTROLADOR

No Capítulo 2.4, foi estabelecida a fundamentação teoria do Regulador Linear Quadrático (LQR), detalhando como a solução da Equação Algébrica de Riccati (ARE) permite encontrar um ganho de controle ótimo K que minimiza um índice de desempenho quadrático J .

Inicia-se nesta etapa (Seção 4.1) o projeto, e consequentemente, a implementação (Seção 4.2), que aplica essa teoria ao modelo do Helicóptero 3-DOF. Conforme discutido na Seção 2.4.2, o projeto LQR une as perspectivas da física (modelo), da matemática (solução da ARE) e da engenharia (ponderação de custos).

Na prática de projeto, o foco não está no cálculo direto de K , que é uma consequência matemática, mas sim na escolha e sintonia das matrizes de ponderação Q e R . Essas matrizes são as ferramentas que traduzem os objetivos de desempenho do sistema em termos matemáticos. Elas atuam como os graus de liberdade do projeto, permitindo traduzir requisitos físicos, como rapidez de resposta ou economia de bateria, em parâmetros numéricos que a equação de Riccati possa processar.

Evidencia-se, portanto, que a atribuição arbitrária de valores a tais matrizes é inadequada para garantir a eficácia do projeto. Nesse contexto, propõe-se uma análise criteriosa dos elementos da diagonal principal de Q e R , os quais ponderam diretamente a energia e a importância relativa de cada estado na função de custo.

A metodologia adotada para a definição das matrizes segue os princípios descritos a seguir:

- **Matriz Q :** A Matriz Q , definida como a Matriz de Penalidade de Estado, atua diretamente sobre a precisão do sistema. Para que a importância de cada variável de estado seja ponderada de forma independente, esta matriz é usualmente estruturada na forma diagonal. Nesse arranjo, os elementos da diagonal principal definem a

prioridade de convergência: valores maiores indicam uma necessidade de redução mais rápida do erro para aquele estado específico.

Exemplo: q_1 refere-se à importância do erro de x_1 . Quando maior q_1 , mais rápido será reduzido o erro de x_1 , assim por diante (de forma semelhante para $x_2, x_3, \dots, x_n$). Por exemplo,

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 0 \\ 0 & 0 & q_3 \end{bmatrix}. \quad (49)$$

- **Matriz R :** A Matriz R é a matriz de penalidade de esforço. Ela é responsável por regular o dispêndio de energia do sistema. A atribuição de valores elevados a esta matriz penaliza o acionamento excessivo dos atuadores, resultando em sinais de controle mais conservadores e suaves. Essa característica é essencial para evitar a saturação dos motores e prevenir danos aos componentes físicos do Helicóptero.

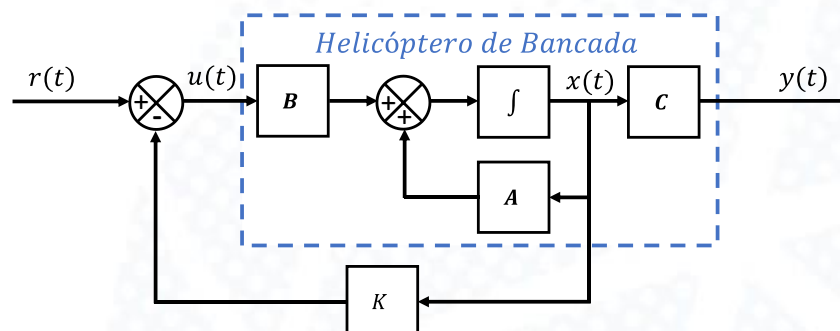
Exemplo: r_1 refere-se à energia absorvida da entrada u_1 . Quanto maior é r_1 , menor é a energia absorvida de u_1 , e mais lento é o controle dependente dessa entrada. Quanto menor r_1 maiores os ganhos relativos à entrada u_1 .

$$R = \begin{bmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{bmatrix}. \quad (50)$$

Uma vez estabelecida a metodologia para a ponderação das matrizes Q e R , e consequentemente obtido o ganho ótimo K , a implementação do controlador segue a topologia clássica de realimentação de estados. Nesta estrutura, o vetor de estados $x(t)$ é medido e realimentado através da matriz de ganho, gerando o sinal de controle $u(t)$ que atua sobre a planta.

A Figura 11 ilustra o diagrama de blocos desta implementação aplicada ao Helicóptero de Bancada.

Figura 11 – Diagrama de blocos do Helicóptero de Bancada com regulador ótimo.



Fonte: Adaptado de Ogata (2010).

Estabelecida a estrutura de controle, volta-se a atenção para o objeto de estudo. O objetivo é elaborar um sistema de controle capaz de regular os ângulos de elevação (ϵ) e de deslocamento (λ) do Helicóptero de Bancada 3-DOF.

Embora a dinâmica real do sistema seja não linear, adota-se para o projeto do controlador LQR o modelo linearizado no ponto de operação, em consonância com as diretrizes do fabricante (Quanser, 2002) e a modelagem da Seção 3. A Equação (51) apresenta a representação matricial deste modelo nominal. As matrizes de estado A e de entrada B ali expostas foram obtidas mediante a substituição direta dos parâmetros físicos (Tabela 1) nas equações dinâmicas do sistema.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1,2304 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0,0858 & 0,0858 \\ 0,5810 & -0,5810 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (51)$$

Observação: Todos os outros detalhes técnicos dos sensores, placas de interface, drivers, amplificadores de potência, etc, podem ser encontrados no manual do fabricante (Quanser, 2012).

A tradução da fundamentação teórica para aplicação prática concretizou-se através da modelagem computacional no ambiente do software Matlab®. Nessa etapa, as matrizes dinâmicas A e B , Equação (51), foram transcritas de forma que as matrizes de ponderação Q e R fossem implementadas para atuar como diretrizes de desempenho, isto é, ditar as regras de comportamento do sistema e conduzir o cálculo do ganho K . Analisou-se os ganhos K da realimentação, de forma a manter um intervalo seguro de operação de $60 \leq \|K\| \leq 200$, em que $\|K\|$ é a Norma Euclidiana definida como a raiz da soma do quadrado de cada elemento da matriz K .

Desta forma, as simulações a seguir têm como objetivo validar o comportamento do controlador nos extremos dessa faixa de segurança. Serão analisados cenários onde a ponderação de Q leva a norma do ganho para valores próximos ao limite inferior aceitável e ao limite superior, verificando se o desempenho se mantém robusto mesmo nas fronteiras da operação segura.

Para a sintonia do controlador, optou-se por fixar a matriz de ponderação do esforço de controle, R , e variar apenas a matriz de ponderação dos estados, Q . Essa abordagem justifica-se pelo fato de que o ganho ótimo K no projeto LQR é determinado pela relação relativa entre as penalidades Q e R , e não por seus valores absolutos. Fixar R estabelece uma penalidade base

constante para o consumo de energia, permitindo que a agressividade do controlador e, consequentemente, a norma do ganho $\|K\|$, sejam ajustadas exclusivamente através da ponderação dos erros em Q . Isso simplifica o projeto sem perda de generalidade na busca pelo desempenho desejado.

4.2 SIMULAÇÃO DO PROJETO

A seguir serão demonstrado e comentado os prompts usados no ambiente Matlab. Para a execução da simulação, foram seguidos os passos descritos abaixo:

1. Carregar os parâmetros e as matrizes A e B do sistema no Matlab/Simulink®;

```
clear all
clc
%Parâmetros

% Constante de força de empuxo da hélice encontrada experimentalmente (N/V)
Kf = 0.1188;
% Massa do corpo do Helicoptero (kg)
m_h = 1.15;
% Massa do Contrapeso (kg)
m_w = 1.87;
% Massa do conjunto da hélice dianteira = motor + proteção + hélice + corpo (kg)
m_f = m_h / 2;
% Massa do conjunto da hélice traseira = motor + proteção + hélice + corpo (kg)
m_b = m_h / 2;
% Distância entre o pivô de arfagem (pitch) e cada motor (m)
Lh = 7.0 * 0.0254;
% Distância do pivô de elevação até o corpo do helicóptero (m)
La = 26.0 * 0.0254;
% Distância do pivô de elevação até o contrapeso (m)
Lw = 18.5 * 0.0254;
% Constante Gravitacional (m/s^2)
g = 9.81;
Je=(m_w*Lw^2)+(m_f*La^2)+(m_b*La^2);
%Momento de Inercia de Deslocamento
Jt=(m_w*Lw^2)+(m_f*((La^2)+(Lh^2)))+(m_b*((La^2)+(Lh^2)));
%Je=0.91;
%Jt=Je;

%Equações
A62=(2*m_f*La-m_w*Lw)*g/(2*m_f*La^2+2*m_f*Lh^2+m_w*Lw^2);
B41=La*Kf/(m_w*Lw^2+2*m_f*La^2);
B51=1/2*Kf/m_f/Lh;
B42=B41;
B52=-B51;

%Matrizes
A=[0 0 0 1 0 0 0 0;0 0 0 0 1 0 0 0;0 0 0 0 0 1 0 0;0 0 0 0 0 0 0 0;0 0 0 0 0 0 0 0;0 A62 0 0 0 0 0 0;1 0 0 0 0 0 0 0;0 0 1 0 0 0 0 0]
B=[0 0 0 B41 B51 0 0 0;0 0 0 B42 B52 0 0 0]'
C=[1 0 0 0 0 0 0 0;0 1 0 0 0 0 0 0;0 0 1 0 0 0 0 0]
```

2. Com base na teoria apresentada anteriormente, criou-se as matrizes Q e R de dimensões adequadas (ou seja, cada matriz Q será uma matriz 8x8 e R uma matriz 2x2);

Seja o Helicóptero 3-DOF da *Quanser*, um projeto que conta com 8 estados, a sintonia das 3 posições, 3 velocidades e 2 parcelas integrais foi ajustada para que o esforço de controle permanecesse no limiar inferior de segurança. A Matriz $Q_{\min}$ estabelecida é disposta em

$$Q_{\min} = \begin{bmatrix} 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}. \quad (52)$$

Analogamente, propõem-se agora ponderações para as posições, velocidades e integrais que resultem em uma norma de ganho próxima ao limite superior da faixa de segurança. A Matriz $Q_{\max}$ estabelecida é disposta em

$$Q_{\max} = \begin{bmatrix} 255 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 255 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 255 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 17 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 17 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 17 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 170 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 170 \end{bmatrix}. \quad (53)$$

Conforme a metodologia adotada, o valor proposto para a penalidade da ação de controle, R , disposto em (54), mantém-se constante para ambos os extremos de Q .

$$R = \begin{bmatrix} 0.1000 & 0 \\ 0 & 0.1000 \end{bmatrix}. \quad (54)$$

```
R = diag([0.1 0.1])
% --- Norma Mínima (K~60) ---
Qmin = diag([18 18 18 1.2 1.2 1.2 12 12]);
% --- Norma Máxima (~200) ---
Qmax = diag([255 255 255 17 17 17 170 170]);
```

3. Encontrar os ganhos K da realimentação utilizando a função '*lqr*' do Matlab/Simulink®.

```
% --- Norma Mínima (K~60) ---
[Kmin, Pmin, Emin] = lqr(A, B, Qmin, R);

% --- Norma Máxima (~200) ---
[Kmax, Pmax, Emax] = lqr(A, B, Qmax, R);
```

4. Testar as condições iniciais do sistema $x_0 = [1 \ -0.1 \ -1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$, verificar se o projeto é eficiente, ou seja, se as variáveis de estado do sistema vão a zero. Além disso, vocês vão verificar a **norma de K**, por meio do comando ' $norm(K)$ '. A norma deve estar **entre 60 e 200** por motivos de segurança do equipamento;

```
% --- Norma Mínima (K~60) ---
NormaMin = norm(Kmin)
% --- Norma Máxima (~200) ---
NormaMax = norm(Kmax)

%Resposta à condição inicial para Qmin -----
AAmin=[A-B*Kmin];
BBmin=B;
CCmin=C;
DDmin=[0];
X0min=[1 -0.1 -1 0 0 0 0]';

t=0:0.001:10;
[pmin,qmin]=size(t);
umin=zeros(2,qmin);
[ymin,xmin]=lsim(AAmin,BBmin,CCmin,DDmin,umin,t,X0min);

y11min=[1 0 0 0 0 0 0]*xmin';
y12min=[0 1 0 0 0 0 0]*xmin';
y13min=[0 0 1 0 0 0 0]*xmin';

figure(1)
plot(t,y11min,'LineWidth', 3);
hold on
plot(t,y12min,'r:','LineWidth', 3);
plot(t,y13min,'k-.','LineWidth', 3);
grid on;
set(gca,'FontName', 'Arial','FontSize',18);
ylabel('Variação das Posições Angulares [rad]');
xlabel('Tempo [s]');
title('Gráfico para Qmin')
legend('Elevação','Arfagem','Deslocamento','Location','northeast');

%Resposta à condição inicial para Qmax -----
AAmax=[A-B*Kmax];
BBmax=B;
CCmax=C;
DDmax=[0];
X0max=[1 -0.1 -1 0 0 0 0]';

t=0:0.001:10;
[pmax,qmax]=size(t);
umax=zeros(2,qmax);
[ymax,xmax]=lsim(AAmax,BBmax,CCmax,DDmax,umax,t,X0max);

y11max=[1 0 0 0 0 0 0]*xmax';
```

```
y12max=[0 1 0 0 0 0 0 0]*xmax';
y13max=[0 0 1 0 0 0 0 0]*xmax';

figure(2)
plot(t,y11max,'LineWidth', 3);
hold on
plot(t,y12max,'r:','LineWidth', 3);
plot(t,y13max,'k-.','LineWidth', 3);
grid on;
set(gca,'FontName', 'Arial','FontSize',18);
ylabel('Variação das Posições Angulares [rad]');
xlabel('Tempo [s]');
title('Gráfico para Qmáx')
legend('Elevação','Arfagem','Deslocamento','Location','northeast');
```

A execução do algoritmo LQR para os cenários propostos resultou em valores exatos de norma de ganho de $\|K\| = 60,2771$ para o cenário de mínima atuação e $\|K\| = 197,2246$ para o cenário de máxima atuação. Esses resultados confirmam que ambos os projetos respeitam rigorosamente os limites da faixa de segurança operacional estabelecida $60 \leq \|K\| \leq 200$, mas geram comportamentos dinâmicos distintos que refletem a física do voo.

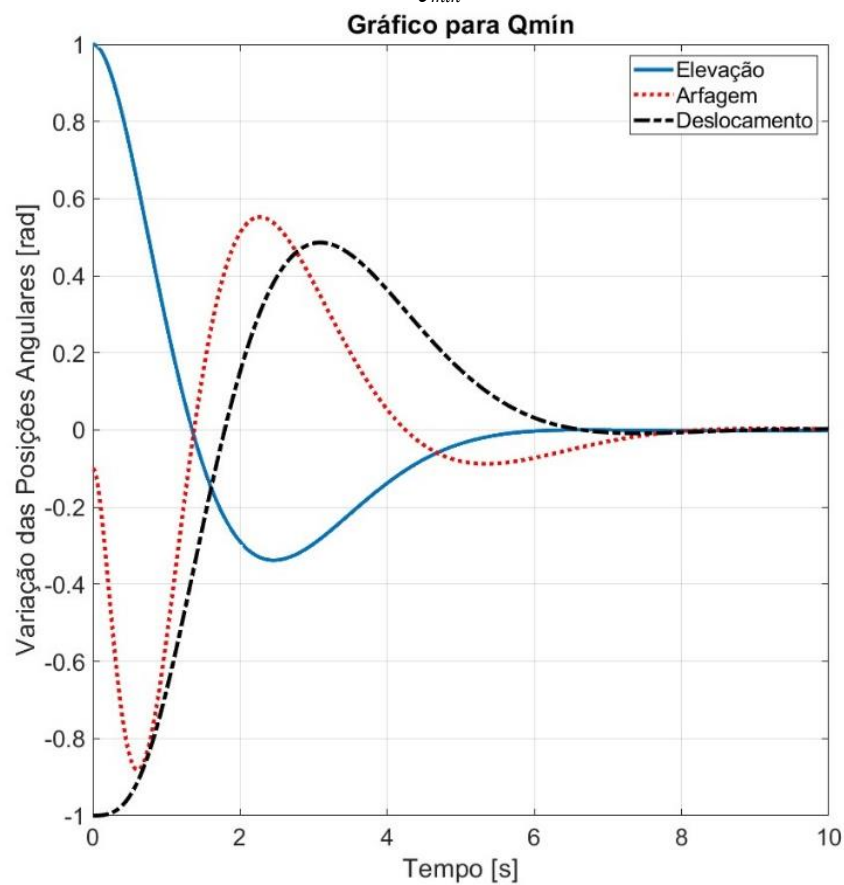
No cenário conservador ($\|K\| = 60,2771$), observa-se na curva de Elevação um comportamento subamortecido acentuado, onde a inércia do corpo do helicóptero vence momentaneamente a ação dos motores, gerando um undershoot significativo antes da estabilização. Em contraste, no cenário agressivo ($\|K\| = 197,2246$), a alta penalidade sobre os erros confere ao sistema uma rigidez dinâmica: o controlador atua quase instantaneamente para frear a descida e corrigir a posição, reduzindo drasticamente o tempo de acomodação.

A diferença de desempenho torna-se ainda mais evidente na relação acoplada entre Arfagem (Pitch) e Deslocamento (Travel). Como o sistema é subatuado, a correção do deslocamento depende da inclinação do "nariz" do helicóptero para vetoração do empuxo. No caso de $\|K\| = 197,2246$, essa manobra é executada com eficácia superior: a oscilação rápida da Arfagem indica que o controlador inclina o helicóptero agressivamente para gerar aceleração lateral e, tão logo o erro diminui, retoma a postura horizontal, travando o movimento. Já para $\|K\| = 60,2771$, a resposta de Arfagem é lenta e suave, o que resulta em uma correção de deslocamento arrastada, priorizando a economia de energia em detrimento da precisão de rastreamento. Em condições operacionais reais, a dinâmica do sistema tende a exigir o comportamento observado no cenário de máxima atuação. A presença de perturbações não modeladas, assimetrias mecânicas e ruídos de medição impõe a necessidade de respostas rápidas de arfagem e correções rígidas de deslocamento. A utilização de controladores conservadores

mostra-se inadequada para a aplicação prática, visto que a lentidão na correção de erros pode comprometer a rejeição de distúrbios e elevar o risco de saturação.

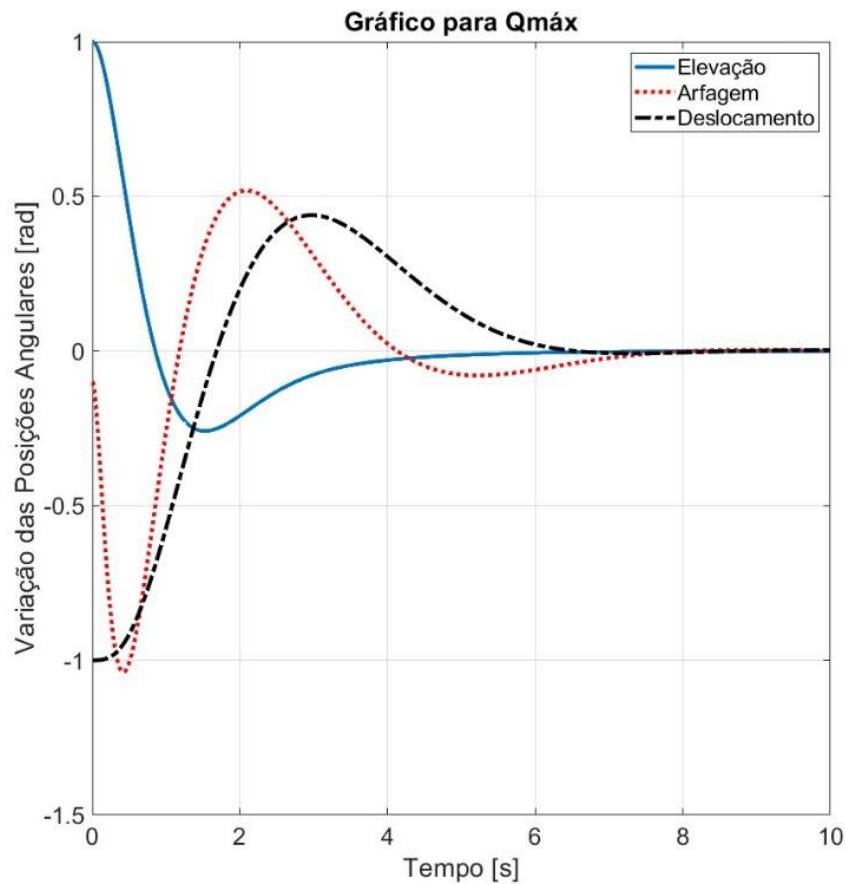
Apesar dessas discrepâncias temporais, ambas as simulações demonstraram que o projeto é eficiente, uma vez que todas as variáveis de estado angular convergiram para zero, indicando a estabilização bem-sucedida do sistema na origem e a anulação do erro estacionário graças à ação integral. A resposta comparativa do helicóptero para essas condições iniciais e os diferentes ganhos pode ser visualizada nas Figuras (12) e (13).

Figura 12 – Resposta simulada do Helicóptero de Bancada 3-DOF para as condições iniciais de Q_{min} .



Fonte: Autoria Própria.

Figura 13 – Resposta simulada do Helicóptero de Bancada 3-DOF para as condições iniciais de $Q_{m\acute{a}x}$.



Fonte: Autoria Própria.

Considerando os limites de estabilidade definidos por $K_{m\acute{a}x}$ e $K_{m\acute{i}n}$, utilizou-se o script apresentado a seguir para plotagem das curvas de resposta reais. A análise detalhada do desempenho e a discussão dos resultados obtidos serão apresentadas na seção subsequente.

```
clear; clc; close all;

load tempofile
load estadospraticos
load tensaopratico

% Conversão para graus
estados_graus = 180 * estados / pi;
tempo_vec = tempo(1,:);

%% Figura 1: Estados (Ângulos) - Qmáx
figure(1)
set(gcf, 'Color', 'w');
hold on; % Permite plotar linha por linha

plot(tempo_vec, estados_graus(2,:), 'Color', 'r', 'LineWidth', 4); %
Elevação
plot(tempo_vec, estados_graus(3,:), 'Color', 'b', 'LineWidth', 4); % Arfagem
```



```
plot(tempo_vec, estados_graus(4,:), 'Color', 'g', 'LineWidth', 4); % Viagem
hold off;
grid on; grid minor;
xlabel('Tempo (s)', 'FontSize', 12, 'FontWeight', 'bold');
ylabel('Ângulo (graus)', 'FontSize', 12, 'FontWeight', 'bold');
title('Resposta Temporal das Posições Angulares para Qmáx', 'FontSize', 14);
legend({'Elevação', 'Arfagem', 'Viagem'}, 'FontSize', 12, 'Location', 'best');
% Maximiza a janela na tela
set(gcf, 'WindowState', 'maximized');
% FORÇA O MATLAB A SALVAR EXATAMENTE COMO VOCÊ VÊ NA TELA
set(gcf, 'PaperPositionMode', 'auto');
%% Figura 2: Sinal de Controle (Tensão) - Qmáx
figure(2)
set(gcf, 'Color', 'w');
hold on;
% Plotando cada motor com sua cor
plot(tempo_vec, tensao(2,:), 'Color', 'b', 'LineWidth', 2); % Motor 1
plot(tempo_vec, tensao(3,:), 'Color', 'r', 'LineWidth', 2); % Motor 2
hold off;
grid on; grid minor;
xlabel('Tempo (s)', 'FontSize', 12, 'FontWeight', 'bold');
ylabel('Tensão (V)', 'FontSize', 12, 'FontWeight', 'bold');
title('Esforço do controle para Qmáx', 'FontSize', 14);
legend({'Motor 1 (Dianteiro)', 'Motor 2 (Traseiro)'}, 'FontSize', 12, 'Location', 'best');
% Maximiza a janela na tela
set(gcf, 'WindowState', 'maximized');
% FORÇA O MATLAB A SALVAR EXATAMENTE COMO VOCÊ VÊ NA TELA
set(gcf, 'PaperPositionMode', 'auto');
saveas(figure(1), 'Angulos_Qmax.png'); saveas(figure(2), 'Esforco_Qmax.png');

%Foi feito a mesma coisa para Qmín
```

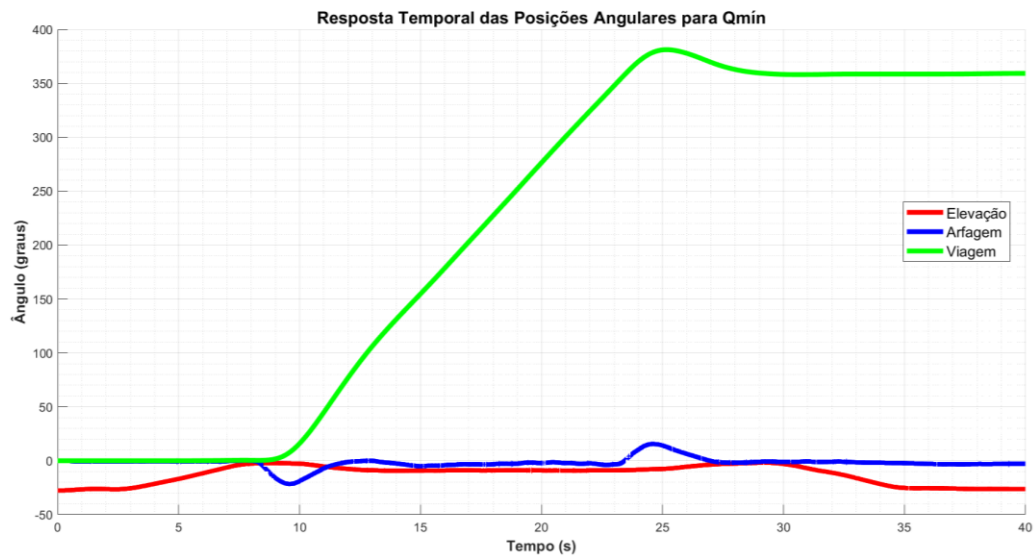
4.3 IMPLEMENTAÇÃO

Como validação do controlador projetado, têm-se as equações a seguir com as matrizes $K_{mín}$ e $K_{máx}$, bem como as Figuras (14) e (15) que apresentam os resultados de desempenho referentes, respectivamente, às posições angulares e à tensão dos motores para $Q_{máx}$ e $Q_{mín}$.

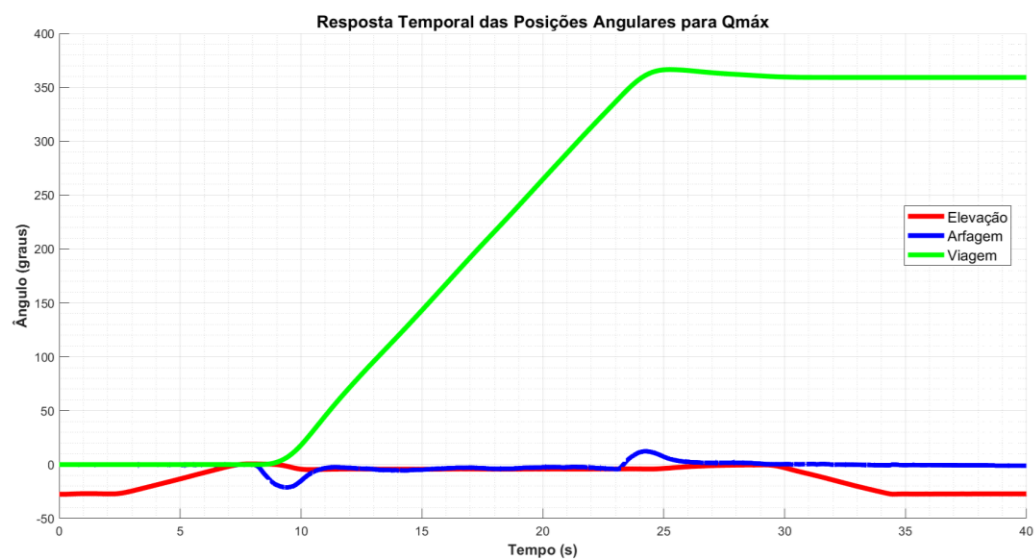
$$K_{mín} = \begin{bmatrix} 17,7832 & 21,9209 & -22,5210 & 14,6040 & 6,6128 & -26,9298 & 7,7460 & -7,7460 \\ 17,7832 & -21,9209 & 22,5210 & 14,6040 & -6,6128 & 26,9298 & 7,7460 & 7,7460 \end{bmatrix} e \quad (55)$$

$$K_{máx} = \begin{bmatrix} 53,1260 & 64,4277 & -80,1967 & 26,5372 & 13,9960 & -88,4333 & 29,1548 & -29,1548 \\ 53,1260 & -64,4277 & 80,1967 & 26,5372 & -13,9960 & 88,4333 & 29,1548 & 29,1548 \end{bmatrix} \quad (56)$$

Figura 14 – Resposta Temporal das Posições Angulares.



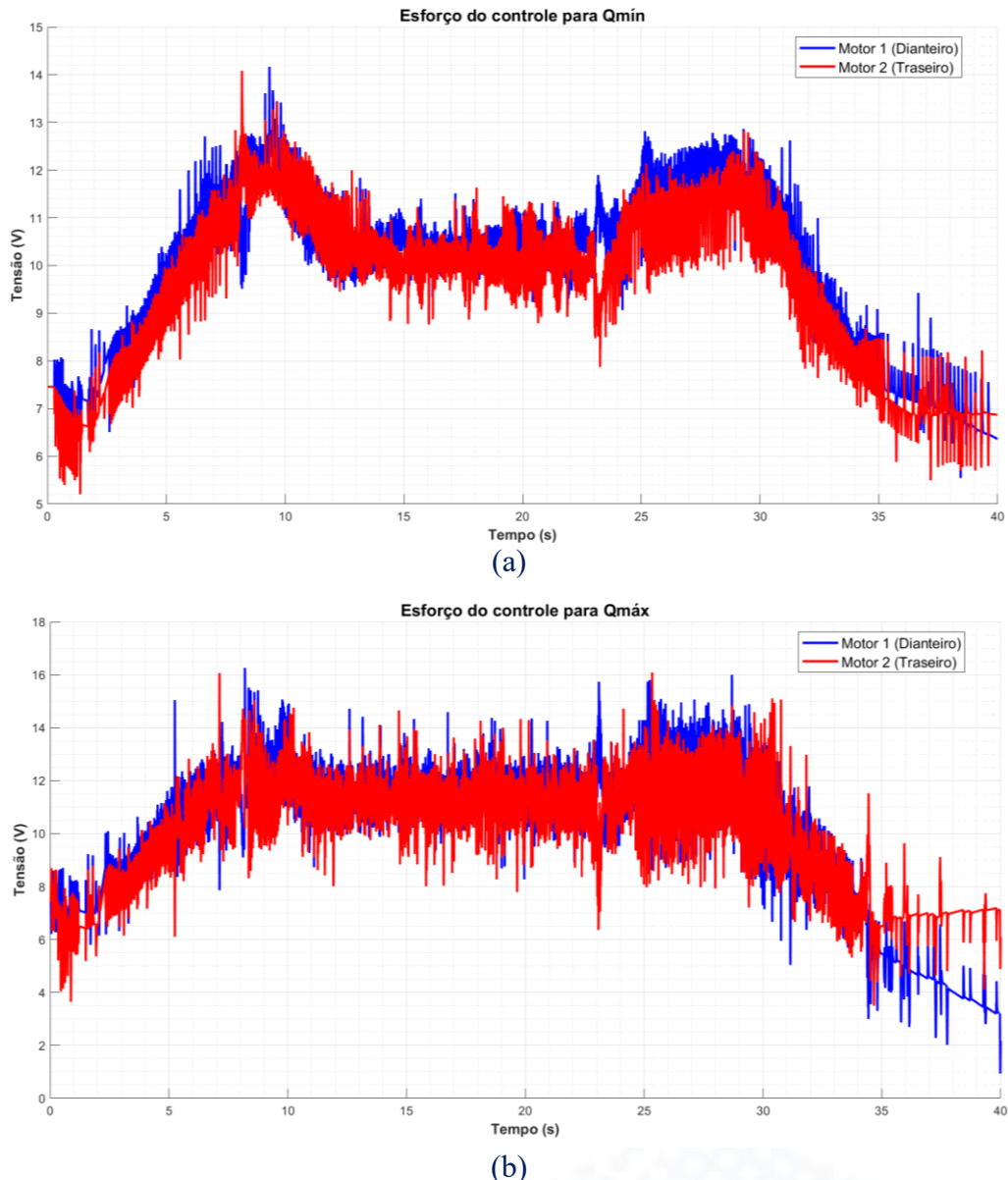
(a)



(b)

Fonte: Autoria Própria.

Figura 15 – Esforço do Controle (Tensão em Volts)



Fonte: Autoria Própria.

A resposta dinâmica dos estados para ambos os cenários ($Q_{máx}$ e $Q_{mín}$), apresentada na Figura (14), evidencia que o movimento predominante ocorre no eixo de *Travel*, o qual rastreia com precisão a referência de trajetória de 360° .

No cenário $Q_{mín}$, observa-se no eixo de *Travel* um dinâmica de aproximação suave, caracterizada, contudo, por um sobressinal (*overshoot*) indicativo de uma ação de frenagem lenta. O sistema excede a referência e demanda um tempo de acomodação considerável para dissipar o momento inercial e retornar ao ponto de equilíbrio. Esse comportamento evidencia que o controlador, ao priorizar a economia de energia, exerce menor autoridade de frenagem sobre a

inércia do corpo, diferentemente do cenário $Q_{\text{máx}}$, onde a recuperação da trajetória ocorre de forma imediata.

O comportamento da elevação de ambos os cenários se destaca pela robustez: partindo da posição de repouso mecânico em $-27,5^\circ$, o sistema alcança o ponto de operação (0°) de forma suave, sem apresentar sobressinal (*overshoot*) excessivo, o que demonstra um amortecimento eficaz do controlador. Uma vez em regime permanente, a elevação mantém-se estável em 0° , comprovando a capacidade do LQR em sustentar o voo pairado (*hover*) e vencer a gravidade, retornando à posição de repouso apenas no pouso final.

Simultaneamente, o ângulo de *Arfagem* (*Pitch*) exibe um comportamento coerente com a física do sistema: observa-se uma inclinação negativa inicial, onde o nariz abaixa, gerando o vetor de empuxo necessário para impulsionar o helicóptero para frente. As pequenas perturbações observadas posteriormente refletem as correções dinâmicas para manutenção da velocidade.

A eficácia da implementação é corroborada pela análise comparativa do esforço de controle Figura (15). Em ambos os cenários, as tensões aplicadas aos motores dianteiro e traseiro operaram em torno do ponto de equilíbrio necessário para a compensação gravitacional, mantendo-se sempre distantes dos limites de saturação. Contudo, a comparação visual revela o custo do desempenho: enquanto o cenário $Q_{\text{mín}}$ resultou em sinais de comando suaves e limpos, o cenário $Q_{\text{máx}}$ apresentou um sinal ruidoso e oscilatório. Essa característica no ganho máximo evidência que a busca por uma resposta rígida amplifica ruídos de medição e impõe maior estresse vibratório aos atuadores.

Diante da estabilidade global observada nos estados e da segurança operacional nos atuadores, conclui-se que a implementação prática foi um sucesso, validando o projeto do controlador LQR para o helicóptero 3-DOF.

5 CONCLUSÃO

Para a realização deste trabalho, foi fundamental o mergulho nas ferramentas matemáticas que definem o Controle Moderno: a modelagem em espaço de estados, a análise de estabilidade via critério de Lyapunov e a otimização quadrática através da Equação Algébrica de Riccati. Através delas, e utilizando o modelo do Helicóptero 3-DOF, foi possível projetar controladores que não apenas estabilizassem o sistema, mas que obedecessem rigorosamente à restrição de norma do controlador $60 \leq \|K\| \leq 200$, essencial para a segurança da implementação prática.

Assim, após as simulações em ambiente Matlab/Simulink®, explorou-se a dualidade matemática permitida por essa faixa de segurança. Ao contrário da abordagem robusta, que lida com incertezas paramétricas e falhas, o projeto LQR nos permitiu testar os limites do desempenho puro. Elaborou-se cenários distintos variando as matrizes de ponderação Q , resultando em dois comportamentos antagônicos dentro da mesma zona de segurança: um controlador conservador $Q_{\min}\|K\| = 60.2771$ e um agressivo $Q_{\max}\|K\| = 197.2246$.

A implementação prática no Helicóptero 3-DOF do LPC revelou que apesar das faixas de sintonia testadas representarem extremos operacionais, ambas garantiram o equilíbrio do sistema. Observou-se que o uso do ganho máximo $Q_{\max}$ não implica necessariamente em um aumento da qualidade da estabilidade, mas reflete uma compensação direta: a rigidez obtida cobra seu preço no aumento do esforço de controle e ruído. Isso demonstra que o projeto eficaz não deve buscar apenas a agressividade, mas sim o ponto de balanço ideal entre desempenho e preservação dos atuadores.

Por fim, constata-se que a aplicação do método LQR possibilitou a compreensão detalhada da dinâmica interna do sistema, fundamentando a análise em termos de energia e variáveis de estado, o que estabelece o alicerce teórico indispensável para o desenvolvimento de técnicas subsequentes, como o Controle Robusto, abordado em trabalhos correlatos, as quais surgem para mitigar falhas e incertezas não contempladas pelo modelo linear. Sob essa ótica, constata-se que os controladores projetados atenderam às especificações com êxito e o experimento final demonstrou que, não obstante ser uma técnica consolidada, o LQR oferece lições fundamentais sobre o equilíbrio entre a prudência operacional, necessária à preservação do equipamento, e a assertividade exigida para o domínio da dinâmica de voo, evidenciando, assim, que a robustez efetiva origina-se, primordialmente, da compreensão ótima do sistema.

REFERÊNCIAS

- AGUIRRE, L. A. et. al. **Enciclopédia de Automática Controle & Automação**. 1. ed. São Paulo: Blücher, 2007.
- ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M. **Controle Linear - Volume 1: Sistemas Contínuos no Tempo**. Ilha Solteira: UNESP/FEIS, 2018.
- ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M. **Controle Linear - Volume 2**. Ilha Solteira: UNESP/FEIS, 2016. (Revisado em Fevereiro de 2023)
- ASSUNÇÃO, E.; TEIXEIRA, M. C. M. **Controle Linear - Volume 3: Sistemas Discretos no Tempo**. Ilha Solteira: UNESP/FEIS, 2020.
- ALVES JUNIOR, D. A. **Projeto de controlador robusto LQR via desigualdades matriciais lineares**. 2022. 50 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Ilha Solteira, 2022.
- DORF, Richard C.; BISHOP, Robert H. **Modern Control Systems**. 12. ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2011.
- GARCIA, H. B. **Teoria de controle moderno**. Londrina: Editora e Distribuidora Educacional S.A. 2017. 240 p.
- LEWIS, F. L.; VRABIE, D. L.; SYRMOS, V. L. **Optimal Control**. 3. ed. Hoboken: John Wiley & Sons, 2012.
- NISE, N. S. **Engenharia de sistemas de controle**. Tradução e revisão técnica Jackson Paul Matsuura. - 6. ed. - [Reimpr.]. - Rio de Janeiro: LTC, 2013.
- OGATA, K. **Modern control engineering**. Prentice hall, 2010.
- QUANSER. **Position Control 3-DOF Helicopter Reference Manual**. 2012.
- SILVA, V. G.; NETO, J. V. F. **Desacoplamento e Controle LQR com Formulação LMI para Sistemas MIMO**. Trends in Computational and Applied Mathematics, v. 24, n. 4, p. 679-698, 2023.