Joel Roberto Guimarães Vasco

# Desenvolvimento de software utilizando a técnica SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics) na geração de ondas de submersão

Ilha Solteira 2014

### Joel Roberto Guimarães Vasco

### Desenvolvimento de software utilizando a técnica SPH (Smoothed Particle Hydrodynamics) na geração de ondas de submersão

Tese de Doutorado apresentada à Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira – Unesp – como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica. Especialidade: Automação

Orientador: Carlos Roberto Minussi Coorientador: Geraldo de Freitas Maciel

Ilha Solteira 2014

### FICHA CATALOGRÁFICA Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

V331d	Vasco, Joel Roberto Guimarães Vasco. Desenvolvimento de software utilizando a técnica sph (smoothed particle hydrodynamics) na geração de ondas de submersão / Joel Roberto Guimarães Vasco Vasco Ilha Solteira: [s.n.], 2014 124 f. : il.
	Tese (doutorado) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira. Área de conhecimento: Automação, 2014
	Orientador: Carlos Roberto Minussi Co-orientador: Geraldo De Freitas Maciel Inclui bibliografia
	1. Geração de ondas. 2. Métodos numéricos. 3. Ondas de impacto. 4. Métodos particulados. 5. SPH. 1,2,3,4,5 = 690



### CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

#### TÍTULO: DESENVOLVIMENTO DE SOFTWARE UTILIZANDO A TÉCNICA SPH (SMOOTHED PARTICLE HYDRODYNAMICS) NA GERAÇÃO DE ONDAS DE SUBMERSÃO

### AUTOR: JOEL ROBERTO GUIMARAES VASCO ORIENTADOR: Prof. Dr. CARLOS ROBERTO MINUSSI CO-ORIENTADOR: Prof. Dr. GERALDO DE FREITAS MACIEL

Aprovado como parte das exigências para obtenção do Título de DOUTOR EM ENGENHARIA ELÉTRICA, Área: AUTOMAÇÃO, pela Comissão Examinadora:

Prof. Dr. GERALDO DE FREITAS MACIEL

Departamento de Engenharia Civil / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

Profa. Dra. ANNA DIVA PLASENCIA LOTUFO Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

Jara L. M. Ropes

Profa. Dra. MARA LÚCIA MARTINS LOPES Departamento de Matemática / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira

in M. W days do ab

Prof. Dr. LUÍS MIGUEL CHAGAS DA COSTA GIL Departamento de Engenharia Mecânica e Industrial / Universidade Nova de Lisboa

Prof. Dr. CHENG LIANG YEE Departamento de Engenharia Qívil //Escola Politécnica da Usp

Data da realização: 14 de fevereiro de 2014.

Para meus pais

### AGRADECIMENTOS

Mais uma etapa de um longo caminho encontra seu fim. Neste difícil percurso pessoal, somos agraciados com o convívio de várias pessoas, que também fazem suas jornadas e em algum momento há uma interseção de caminhos. Nestas interseções, auxílios são naturalmente ofertados, mesmo na forma de uma conversa informal, e são capazes de garantir a energia e disposição necessárias para continuarmos a jornada. É neste espaço oportuno que essas pessoas (ou entidades) são lembradas. Listarei todos aqueles que de alguma forma contribuíram para a conclusão com sucesso do trabalho em questão, mas não por ordem de importância. De antemão, peço desculpas a alguém que porventura venha a esquecer. Isto posto, agradeço:

- À Agência de fomento FAPESP pela concessão da bolsa, garantindo minha dedicação exclusiva à pesquisa. Agradeço também ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica (PPGEE), por entender e abraçar meu plano de pesquisa.
- À CAPES/FCT, que através do projeto "Amigos de Boussinesq", do qual faço parte há muito tempo, possibilitou-me um período sanduíche de um ano em Lisboa-PT. Neste contexto, não posso deixar de citar os pesquisadores do LNEC que tão bem me receberam: Juana Fortes, Eric Didier, Rui Capitão, Ruth Lemos, João Alfredo e Teresa Reis. Também agradeço ao meu tutor, Luís Gil, da Universidade Nova de Lisboa, que em muito contribuiu para garantir uma boa estada em terras além-mar.
- Aos colegas de trabalho do LNEC: Jorge Gadelho, Maria de Fátima, Gonçalo Jesus, Ruben Silva, Diogo Neves, Gil Souza, Euclides Rodrigues, Ricardo Martins, Sara Rodrigues, Edgar Matias, Ana Mendonça, Laurinda Almada, Mariana Rocha, Joanne Laranjeiro, Mário Moreno, Gonçalo Faria, Javier Ramalleira e Liliana Pinheiro, pela convivência.
- Ao Laboratório do Tanque de Provas Numérico (TPN) da Poli-USP, na figura dos professores Cheng Liang Yee e Kazuo Nishimoto, que sempre foram extremamente receptivos em minhas visitas. Uma pena que as visitas ficaram, com o passar dos anos, menos frequentes do que eu gostaria. Aos colegas do TPN: Márcio Tsukamoto, Fábio Motezuki e Pedro Cardozo.
- À banca examinadora, por aceitar contribuir, com entusiasmo e critério científico, na avaliação deste trabalho.
- Aos docentes de Ilha Solteira, pelo convívio de longa data. Agradeço aos meus orientadores, na figura do Prof. Carlos Minussi, pelo meu acolhimento do projeto dentro do programa de pós-graduação, além de ser uma pessoa com atitude extremamente otimista,

que propõe soluções (concretas) aos problemas vivenciados, além das oportunidades vislumbradas e concretizadas. Agradeço ao Prof. Milton Dall'Aglio, pela capacidade em resolver problemas em diversos assuntos e bons conselhos. Apenas lamento a falta de tempo para poder aprender como ele tudo o que julgo suficiente. Agradeço também ao Prof. Dib Gebara, pelas conversas e conselhos.

- Aos colegas de trabalho de Goiânia, pelo acolhimento e carinho com que fui recebido.
- Aos colegas pessoais, quer em São Paulo, quer em Ilha Solteira: Humberto Ruggeri, Evandro Cunha, Luciana Kataoka, Adriana Vieira, Fabiana Oliveira, José Carlos, Sandra e Guilherme Fiorot.
- À minha família, principalmente pelo apoio incondicional. Agradeço também aos meus amigos de minha terra natal, Orlando Cavalari e Fabrício de Paula.

### **RESUMO**

O escorregamento de massas sólidas em lagos de águas tranquilas geram ondas devido à transferência de energia da massa deslizante para o corpo d'água. Essas ondas, chamadas de ondas de submersão, em particular as ondas solitárias, são conhecidas e estudadas há vários anos principalmente pela capacidade energética deste tipo de onda e seu potencial danoso. Entretanto, aproximações analíticas do fenômeno em tela esbarram em diversas dificuldades. Em outras palavras, a fase de geração de ondas, notadamente das ondas de impacto, é sabidamente complexa, não apenas pela dificuldade no estabelecimento da superfície livre (região do *splash*), mas também pelo relacionamento da dinâmica do material impactante com a altura da onda resultante. Por esse motivo, técnicas numéricas vêm sendo empregadas nestes fenômenos. Entre as aproximações numéricas utilizadas mais recentemente, os métodos sem malha vêm ganhando notoriedade, principalmente frente às suas vantagens. Livres da discretização da malha, problemas de superfície livre, mesmo com alta variabilidade, são factíveis. Neste contexto, lança-se mão de um código baseado no modelo SPH (Smoothed Particle Hydrodymanics), desenvolvido no âmbito desta Tese de Doutoramento e validado utilizando casos clássicos da literatura em escoamentos de fluido ideal (ruptura de barragens, geração e quebra de onda e esvaziamento de um reservatório) e real, de reologia newtoniana (Poiseuille com superfície livre, Poiseuille plano, escoamento de Couette e ruptura de barragens). De posse do código numérico, estima-se a altura da onda solitária gerada a partir do impacto de uma massa deslizante em meio líquido. A massa deslizante é representada por duas formas distintas: um bloco indeformável, modelado como um corpo rígido e um fluido ideal. No caso do bloco indeformável, embora o perfil de onda seja bem representado, a altura da onda é superestimada, fato também relatado pela literatura no assunto. No caso da massa deslizante modelada por um fluido ideal, há concordância numérico-experimental tanto na forma quanto na amplitude da onda gerada.

Palavras-chave: Onda solitária. Impacto. SPH.

### ABSTRACT

Landslides that impact into water (such as lakes) can generate waves due to the energy transfer from the solid to the water. These submerged waves, or more specifically solitons, are well known and have been studied for many years specially because of their massive energy and destructive potential. However, analitical approches of this problem are difficult. In another words, the wave's generation phase is complex, primary due to the determination of the free surface (splash) and correlation between the energy of the landslide and the genereted wave. So, numerical methods are an alternative and interesting option. Among the recently used numerical methods, the mesh free has become notorious because of its advantages. Without the mesh restrain, free surface problems are easier to handle. In this context it is proposed a program based on SPH (Smoothed Particle Hydrodymanics) model, developed in this Thesis and tested in different scenarios considering the flow of ideal (dam break, wave generation and wave breaking and reservoir) and newtonian fluids (free surface Poiseuille flow, plane Poiseuille flow, Couette flow and dam break). So, the numerical code is used in order to evaluate the solitary wave height that is generated from the impact of a mass, which represents a landslide in a fluid. The mass is represented by two forms: an undeformable solid block and an ideal fluid. Both forms are tested, and the solitary wave is reproduced, and compared to experiments. Differences are noted among wave heights using a solid block, as reported by the literature. The comparison with the results from the mass represented as an ideal fluid showed a good approach for both the shape and the wave amplitude.

Keywords: Soliton. Impact. SPH.

# LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 –	Exemplo de problema complexo: uma comparação entre um experimento (à esquerda) e o modelo numérico <i>SPH</i> desenvolvido pelo autor (à direita), em	
	instantes aproximadamente iguais.	34
Figura 2 –	À esquerda, o raio de ação da função $W$ e à direita os valores da grandeza interpolados, representados pelas barras verticais cuja altura é proporcional ao inverso da distância $r_{ij}$ .	42
Figura 3 –	Subdivisão do domínio computacional para diminuir o número de partículas de busca na criação da lista de vizinhança. À esquerda, vê-se todo o domínio computacional, enquanto à direita vê-se o detalhe da região de interesse.	43
Figura 4 –	Função de suavização ou núcleo W.	44
Figura 5 –	Partículas fantasma, com condição $\vec{u_{gh}} \cdot \vec{t} = -\vec{u_i} \cdot \vec{t}, \forall i.$	51
Figura 6 –	Croqui esquemático com as distâncias horizontais ( $\psi$ ) e verticais ( $\xi$ ) entre as partículas da fronteira e fluida.	54
Figura 7 –	À esquerda, um croqui esquemático de uma ruptura de barragens, enquanto que à direita, observa-se o líquido retido, em ensaio experimental.	59
Figura 8 –	Comparação numérico-experimental, para uma relação $H_0/L_0 = 1$ com (a) $H_0 = 2,86$ cm e (b) $H_0 = 5,72$ cm.	61
Figura 9 –	Comparação numérico-experimental, para uma relação $H_0/L_0 = 2$ com (a) $H_0 = 5,72$ cm e (b) $H_0 = 2,86$ cm.	61
Figura 10 –	Disposição geral para geração de ondas: (a) croqui esquemático e (b) domí- nio discretizado.	63
Figura 11 –	Comparação teórico-numérica da frequência da onda gerada pelo batedor.	64
Figura 12 –	Comparação teórico-numérica da altura $H/S$ da onda gerada pelo batedor.	66
Figura 13 –	Posição da superfície livre, para o tempo $t = 3,91$ s, com $w = 5,5$ Hz, $S = 0,25$ m, declividade da praia de 10% e a profundidade normal de 0,5 m	67
Figura 14 –	À esquerda, são apresentadas as características geométricas do reservatório e orifício simulados. À direita, percebe-se a disposição inicial das partículas	
	para um nível de aproximadamente 1,2 m no reservatório.	68
Figura 15 –	Comparação teórico-numérica da variação do nível do reservatório.	69
Figura 16 –	Evolução temporal no problema de esvaziamento de um reservatório. As diferentes figuras (da esquerda para a direita, de cima para baixo), corres-	
	pondem aos tempos 0,53, 1,38, 2,63 e 3,61 s de simulação.	70

- Figura 17 Função de suavização, derivada primeira e derivada segunda de *W*, considerada como sendo do tipo *spline* cúbica 2D normalizada neste exemplo.
  Como dito no texto, percebe-se uma mudança de sinal na derivada segunda com a distância adimensional *s*. (Nota: as derivadas são calculadas por métodos numéricos de primeira ordem).
- Figura 18 Perfil de velocidade para o Poiseuille plano permanente (à esquerda), para um  $Re \approx 0,01$  e resultados de Cueille (2005), para o Poiseuille plano, com Re = 0,01 e sem suavização do campo de velocidades (à direita).
- Figura 19 Comparação entre o perfil de velocidades esperado (linha contínua, teórica) com o numérico (pontos). Mesmo com a presença da viscosidade, as partículas se mantém organizadas, fato esse ilustrado pelos pontos na figura, que representam uma linha de partículas, que permanecem com a mesma altura do começo da simulação.
- Figura 20 À esquerda, a variação espacial da massa específica, no tempo t = 1,5 s, mostra que a condição de incompressibilidade é reproduzida no escoamento. À direita, a posição das partículas no mesmo instante.
- Figura 21 À esquerda, disposição das partículas nos instantes iniciais e, à direita, o escoamento no instante t = 0,29 s. O domínio é retratado apenas em um trecho de 1 m, sendo a fronteira periódica capaz de reproduzir, na simulação, o regime permanente. A coloração indica a intensidade do vetor velocidade (azul escuro, u = 0, vermelho,  $u = u_{max}$ ).
- Figura 22 À esquerda, comparação entre o perfil de velocidade analítico e numérico, com variação na resolução espacial. À direita, influência do tipo de velocidade atribuída às partículas fantasma, para condição de contorno de aderência no fundo do canal, com  $d/\Delta x = 35$ .
- Figura 23 À esquerda, disposição das partículas nos instantes iniciais e, à direita, o escoamento no instante t = 0,20 s. O domínio é retratado apenas em um trecho de 1 m e a coloração indica a intensidade do vetor velocidade (azul escuro, u = 0, vermelho,  $u = u_{max}$ ).
- Figura 24 Resultados analíticos e numéricos do perfil de velocidade do Poiseuille plano no centro do domínio computacional, nos tempos t = 0,01 s (+), 0,02 s (×), 0,05 s (\*), 0,1 s (□) e ∞ (■). Os símbolos indicam os resultados numéricos, enquanto que a linha contínua representa os resultados analíticos, nos respectivos tempos.
- Figura 25 À esquerda, disposição das partículas nos instantes iniciais e, à direita, o escoamento no instante t = 0, 10 s. O domínio é retratado apenas em um trecho de 1 m, sendo a fronteira periódica capaz de reproduzir, na simulação, o regime permanente. A coloração indica a intensidade do vetor velocidade (azul escuro, u = 0, vermelho,  $u = u_{max}$ ).

73

75

77

78

79

79

80

81

82

Figura 26 – Resultados analíticos e numéricos do perfil de velocidade do Couette no centro do domínio computacional, nos tempos $t = 0.01$ s (+), 0.02 s (×).	
$0.03 \text{ s}$ (*) $0.04 \text{ s}$ ( $\square$ ) $e \propto (\blacksquare$ ). Os símbolos indicam os resultados numéri-	
cos enquanto que a linha contínua representa os resultados analíticos nos	
respectivos tempos.	83
Figura 27 – Comparação entre os resultados experimentais de Minussi (2007), teóricos	
de Ritter e numéricos para o problema de ruptura de barragem retendo ma-	
terial newtoniano, com altura de 0,07 m (a) e 0,10 m (b).	84
Figura 28 – Comparação entre os resultados experimentais de Leite (2009) e numéricos	
para o problema de ruptura de barragem retendo material newtoniano, com	
altura de 0,08 m (a), 0,10 m (b) e 0,12 m (c).	85
Figura 29 – Tipos de leis reológicas.	87
Figura 30 – Variação da viscosidade aparente com a profundidade, em um problema tipo	
Poiseuille com superfície livre, com $\mu_{max} = 1000$ Pa s.	88
Figura 31 – À esquerda, pode-se ver o canal de ondas onde os ensaios foram efetuados	
e à direita, um detalhe da rampa de lançamento de material deslizante com	
comporta aberta.	93
Figura 32 – Procedimento para determinação da velocidade da frente do deslizamento	
pelo tratamento de imagens sucessivas.	94
Figura 33 – Comparação numérico e experimental para a onda gerada pelo impacto de um bloco único	97
Figura 34 – Impacto do bloco e formação da onda, sendo as características da simulação	
as mesmas que as utilizadas em Monaghan, Kos e Issa (2003)	98
Figura 35 – À esquerda, bloco utilizado por Maciel e Nascimento (2002) e à direita,	
configuração da primeira aproximação.	99
Figura 36 – À esquerda, a comparação numérica para o cálculo de pressão em um tanque em repouso. À direita, a resultante do balanco de quantidade de movimento	
numérica gerada apenas pelo gradiente de pressão. O valor teórico de tal	
balanco deve ser igual a 9.81.	99
Figura 37 – Comparação numérico experimental da onda gerada pelo impacto de um	
bloco em águas tranquilas, em função do número de Froude no impacto.	100
Figura 38 – Geração numérica da onda solitária com o código <i>SPH</i> , utilizando as condi-	
cões de contorno dadas pelas forcas radiais (MONAGHAN: KAJTAR, 2009)	. 101
Figura 39 $-$ (a) Posição da superfície livre, medida a aproximadamente 1.7 m do ponto	
de impacto e (b) a dinâmica do centro de gravidade do material deslizante.	
para $d = 0.15$ m (8022 partículas)	103
Figura 40 – (a) Posição da superfície livre, medida a aproximadamente $1.7$ m do ponto	100
de impacto e (b) a dinâmica do centro de gravidade do material deslizante	
nara uma lâmina d'água de $0.175 \text{ m}$ (6878 partículas)	103
para anna tannina e agua de 0,175 m (0076 particulas).	105

Figura 41	- (a) Posição da superfície livre, medida a aproximadamente 1,7 m do ponto	
	de impacto e (b) a dinâmica do centro de gravidade do material deslizante,	
	para uma lâmina normal de 0,20 m (6035 partículas).	104
Figura 42	- Imagens para vários tempos (de cima para baixo): 16/30, 24/30, 33/30,	
	42/30 e $53/30$ s. À esquerda, resultados experimentais e à direita as simu-	
	lações SPH.	105
Figura 43	- À esquerda, resultado exato para interpolação proposta e à direita os resul-	
	tados do interpolador MLS.	122
Figura 44	– À esquerda, resultado do SPH para interpolação da função $f(x,y) = x + y$ e	
	à direita os erros envolvidos.	122
Figura 45	- À esquerda, resultado exato para interpolação proposta e à direita os resul-	
	tados do interpolador MLS, agora com as partículas desordenadas.	123
Figura 46	– À esquerda, resultado do SPH para interpolação da função $f(x,y) = x + y$ e	
	à direita os erros envolvidos, com as partículas desordenadas.	124

### LISTA DE SÍMBOLOS E ABREVIAÇÕES

- $\alpha$ ,  $\beta$  parâmetros da viscosidade artificial no método SPH
- $\beta_m$  fator de correção que garante que a força exercida pela parede nas partículas fluidas (equação 66, p. 54) seja independente do número de partículas da fronteira
- $\Delta h$  incremento dos métodos de integração de equações diferenciais de primeira ordem (s)
- $\Delta p$  espaçamento entre partículas na fronteira (m)
- $\Delta t$  passo de tempo numérico (s)
- $\Delta x$  espaçamento médio entre partículas (m)
- $\Delta$  incremento no raio de vizinhança para cálculo da tabela Verlet (m)
- $\delta(\vec{r} \vec{r}_j)$  função impulso ou delta de Dirac
- $\kappa$  fator de proporcionalidade entre  $r_s e \Delta x$
- $\lambda$  parâmetro do método *MPS* (equação 9, p. 38)
- $\langle \cdot \rangle$  indica aproximação da função original
- $|\vec{\mathscr{D}}|$  taxa de deformação, calculado usando  $|\vec{\mathscr{D}}| = \sqrt{\vec{\mathscr{D}} : \vec{\mathscr{D}}} (s^{-1})$
- $\vec{\mathscr{D}}$  tensor taxa de deformação (s<sup>-1</sup>)
- $\vec{\mathscr{T}}$  tensor de tensões (Pa)
- $\mathscr{K}$  índice de consistência (Pa s)
- $\mathcal{N}$  índice do escoamento
- $\mathscr{T}_c$  tensão crítica (Pa)
- $\vec{\mathscr{F}}$  segundo membro da equação da conservação de quantidade de movimento, escrita na forma *SPH* (m/s<sup>2</sup>)
- $\mathscr{D}$  segundo membro da equação da conservação de massa, escrita na forma SPH (kg/m<sup>3</sup> s)
- *H* segundo membro da equação 34 (p. 44), quando o comprimento de suavização é considerado variável na simulação (m/s)
- $\mu$  viscosidade dinâmica do fluido (Pa s)

Hann	viscosidade	aparente	(Pa	s)
mapp	viscosidade	aparente	(1 a	5)

- v viscosidade cinemática do fluido (m<sup>2</sup>/s)
- $\phi$  campo qualquer, seja escalar, vetorial ou tensorial
- $\Pi_{ij}$  viscosidade artificial
- $\psi$  distância horizontal entre as partícula de fronteira e fluida (ver fig. 6, p. 54, m)
- $\rho$  massa específica do fluido (kg/m<sup>3</sup>)
- $\rho_0$  massa específica inicial (kg/m<sup>3</sup>)
- $\rho_s$  massa específica do material sólido (kg/m<sup>3</sup>)
- $\theta$  inclinação, seja de um canal ou rampa (rad)
- ε constante *XSPH* que varia entre 0 e 1 (valor usual: 0, 5, equação 40, p. 45)
- *σ* função peso no método *MPS* (equação 4, p. 37)
- $\vec{\nabla}$  vetor nabla, de coordenadas  $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$
- $\vec{\Omega}$  velocidade angular do material único (rad/s)
- $\vec{\tau}$  torque total atuando no corpo único (N m)
- $\vec{C}$  centro de massa do material deslizante único (m, m)
- $\vec{F}$  força total atuante no material único (N)
- $\vec{f}$  força por unidade de massa atuando na partícula (m/s<sup>2</sup>)
- $\vec{f}_p$  função com as mesmas características do núcleo de suavização (MONAGHAN; KOS; ISSA, 2003)
- $\vec{j}$  vetor unindo as partículas *i* e *j*
- $\vec{U}$  velocidade do centro de massa do material único (m/s)
- $\vec{\sigma}$  tensor de Cauchy ( $\vec{\sigma} = -p\vec{l} + \vec{\mathscr{T}}$ ) (Pa)
- $\vec{g}$  representa a força de corpo gravitacional (m/s<sup>2</sup>)
- $\vec{n}$  versor normal externo à parede
- $\vec{r}$  posição da partícula (x, y) (m, m)
- $\vec{t}$  versor normal tangencial à parede

- $\vec{u}$  vetor velocidade do escoamento (m/s)
- $\xi$  distância vertical entre as partícula de fronteira e fluida (ver fig. 6, p. 54, m)
- $\zeta_i$  variáveis do interpolador MLS
- $A_o$  área do orifício (vide fig. 14, p. 68, m<sup>2</sup>)
- $A_r$  área do reservatório (vide fig. 14, p. 68, m<sup>2</sup>)
- $A_{ij}$  uma matriz, geralmente relacionada a problemas lineares tipo Ax = b
- $B_{ij}$  matriz de renormalização
- *c* celeridade do som (m/s)
- $C_d$  coeficiente de descarga do orifício
- D dimensões do espaço de simulação (D = 2)
- *d* profundidade normal (m)
- $e_1, e_2$  parâmetros para cálculo da correção da instabilidade de tensão (equação 67, p. 55), que variam conforme  $p_i$  e  $p_j$ , respectivamente.
- $F_x$  componente horizontal da força de corpo, no problema do Poiseuille plano

Frimp número de Froude no impacto do bloco com o meio líquido

- *G* índice (sobrescrito) que representa o núcleo gaussiano
- gh índice (subscrito) que indica partícula fantasma
- *H* altura da onda (m)
- *h* comprimento de suavização (m)
- $H_0$  altura inicial do fluido, utilizada em problemas do tipo ruptura de barragens ou no esvaziamento de um reservatório (m)
- $h_0$  comprimento de suavização inicial na simulação (m)
- *I* matriz identidade
- *i*,*l* índice (subscrito) para denominar partículas fluidas
- IS índice (sobrescrito) para indicar a aplicação da interpolação de Shepard
- J momento de inércia em torno do centro de massa, para o material único (kg  $m^2$ )
- *j* índice (subscrito) para determinar partículas fluidas vizinhas da partícula *i*

- *K* uma constante
- *k* índice (subscrito) que indica partícula de parede
- $k_0$  número de onda (m<sup>-1</sup>)
- *L* comprimento de onda (m)
- $L_0$  largura inicial do material retido, em problemas do tipo ruptura de barragens (m)
- *M* massa do material deslizante único (kg)
- *m* massa (kg)
- *Ma* número de Mach
- MLS índice (sobrescrito) para indicar a aplicação da interpolação MLS
- *n* contador incremental
- $N_0$  indicativo de massa específica inicial
- *P* expressão que determina a componente horizontal da força por unidade de massa exercida pela fronteira
- *p* pressão (Pa)
- $p_1, p_2$  constantes da equação 64 (p. 53, Monaghan, 1994)
- Q expressão que determina a componente vertical da força por unidade de massa exercida pela fronteira (m/s<sup>2</sup>)
- $r_p$  raio da partícula (m)
- $r_s$  domínio de suporte (m)
- $r_{ij}$  distância entre as partículas *i* e *j*, ou seja:  $r_{ij} = \|\vec{r}_i \vec{r}_j\|$
- *S* deslocamento (*stroke*) do gerador de ondas (m)
- s mudança de variáveis para cálculo do núcleo de suavização: s = r/h
- SC índice (sobrescrito) que representa o núcleo dado por uma spline cúbica
- T tempo adimensional, dado por  $T = t \sqrt{H_0 g / L_0^2}$
- t tempo (s)

 $u_x(y,t)$  Perfil de velocidades teórico, nos problemas do Poiseuille e Couette (m/s)

V máxima velocidade encontrada na simulação (m/s)

- *V<sub>imp</sub>* velocidade de impacto do bloco com o meio líquido, quando o centro de massa do bloco intercepta a lâmina d'água normal (m/s)
- *v<sub>sig</sub>* velocidade de referência (m/s) para cálculo da viscosidade artificial (KAJTAR; MO-NAGHAN, 2008)
- W representa a função peso, ou núcleo de suavização
- *w* frequência da onda  $(s^{-1})$
- *x* direção ou coordenada horizontal (m)
- y direção ou coordenada vertical (m)
- *Z* alcance adimensional da frente, em problemas de ruptura de barragens
- z alcance da frente de onda, em problemas do tipo ruptura de barragens (m)
- MPS Moving Particle Semi-implicit Method
- SPH Smoothed Particle Hydrodymanics
- ALE Arbitrary Lagrange Euler
- EFGM Element-free Garlekin Method
- ISPH Incompressible Smoothed Particle Hydrodynamics
- LES Large Eddy Simulation
- MDF Método das Diferenças Finitas
- MEC Método dos Elementos de Contorno
- MEF Método dos Elementos Finitos
- MFI Método de Fronteira Imersa, ou Immersed Boundary Method
- MLS Moving Least Squares
- MSM Métodos Sem Malha
- MVF Método dos Volumes Finitos
- PIV Particle Image Velocimetry
- VOF Volume of fluid

# SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	27
1.1	OBJETIVO	29
1.2	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	29
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	31
2.1	FORMULAÇÃO EULERIANA $ imes$ LAGRANGIANA	31
2.2	MÉTODOS NUMÉRICOS TRADICIONAIS	31
2.3	DIFERENÇAS ENTRE MÉTODOS TRADICIONAIS E MÉTODOS SEM MA-	22
2.4	LIA (MSM)	25
2.4	PRINCÍDIOS DOS DIEEDENTES MÉTODOS NUMÉDICOS	26
2.3	PRINCIPIOS DOS DIFERENTES METODOS NUMERICOS	30
3	O MÉTODO MPS	37
4	O MÉTODO SPH	39
4.1	FUNDAMENTOS DO MÉTODO SPH	39
4.2	A FUNÇÃO NÚCLEO DE SUAVIZAÇÃO W	41
4.3	COMPRIMENTO DE SUAVIZAÇÃO	43
4.4	EQUAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO	44
4.5	DESLOCAMENTO DE PARTÍCULAS	45
4.6	EQUAÇÃO DA CONTINUIDADE	45
4.7	CORREÇÕES APLICADAS AO SPH	46
4.7.1	Reinicialização da massa específica	47
4.7.1.1	Interpolador de Shepard	47
4.7.1.2	Interpolador MLS	47
4.7.2	Renormalização	<b>48</b>
4.8	LEIS DE ESTADO PARA PRESSÃO	49
4.9	VISCOSIDADE ARTIFICIAL	50
4.10	CONDIÇÕES DE CONTORNO	50
4.10.1	Partículas fantasma	51
4.10.2	Fronteiras reativas	53
4.11	INSTABILIDADES NO SPH	54
4.12	EVOLUÇÃO TEMPORAL	55
4.12.1	Preditor-Corretor	56
4.12.2	Método Verlet	56
4.12.3	Runge-Kutta	57

4.13	COMPARAÇÃO ENTRE MÉTODOS NUMÉRICOS: SPH e MPS	58
5	ESCOAMENTO DE FLUIDOS IDEAIS	59
5.1	RUPTURA DE BARRAGENS	59
5.1.1	Descrição do modelo numérico	60
5.1.2	Resultados	60
5.2	GERAÇÃO, PROPAGAÇÃO E QUEBRA DE ONDAS	62
5.2.1	Fase de geração	62
5.2.1.1	Teoria de pequena amplitude	63
5.2.1.2	Modelo numérico	63
5.2.1.3	Resultados	64
5.2.1.4	Teoria do gerador de onda	65
5.2.2	Propagação de ondas	65
5.2.3	Quebra de ondas	66
5.3	ESVAZIAMENTO DE UM RESERVATÓRIO	67
6	ESCOAMENTO DE FLUIDOS REAIS	71
6.1	ESCOAMENTO DE FLUIDOS NEWTONIANOS	71
6.1.1	Incorporação do tensor de tensões	72
6.1.2	Viscosidade numérica como viscosidade real	72
6.1.3	Demais aproximações	74
6.1.4	Inconvenientes da formulação adotada	75
6.2	ESTUDOS DE CASO	76
6.2.1	Fronteiras periódicas	76
6.2.2	Poiseuille com superfície livre	78
6.2.3	Poiseuille plano	80
6.2.4	Couette	81
6.2.5	Ruptura de barragem	82
6.3	ESCOAMENTO DE FLUIDOS NÃO NEWTONIANOS	84
6.3.1	Reologia	86
6.3.2	Tensor de tensões	86
7	ONDAS DE IMPACTO	89
7.1	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	90
7.2	METODOLOGIA	92
7.2.1	Procedimento experimental: material fragmentado	93
7.2.2	Procedimento experimental: material único	94
7.2.3	Procedimento numérico: dinâmica de um corpo rígido	95
7.2.4	Procedimento numérico: material fragmentado	96
7.2.5	Resultados	96

7.2.5.1	Material único: comparação com Monaghan, Kos e Issa (2003)	96
7.2.5.2	Material único: comparação com Maciel e Nascimento (2002)	97
7.2.5.3	Material fragmentado	102
8	DISCUSSÃO E CONCLUSÕES	107
8.1	PERSPECTIVAS DE TRABALHOS FUTUROS	108
8.2	TRABALHOS PUBLICADOS	109
	REFERÊNCIAS	111
	APÊNDICE A ERROS NO SPH	117
A.1	ERROS NA INTERPOLAÇÃO INTEGRAL	117
A.2	ERROS NA INTERPOLAÇÃO DO SOMATÓRIO	118
A.3	ERROS NA INTERPOLAÇÃO DAS DERIVADAS	119
	APÊNDICE B TESTES NUMÉRICOS	121
B.1	EFEITO DA RENORMALIZAÇÃO NO INTERPOLADOR NUMÉRICO	121
B.1.1	Partículas ordenadas	121
B.1.2	Partículas desordenadas	121

### 1 INTRODUÇÃO

As ondas, sejam mecânicas ou eletromagnéticas, representam ao mesmo tempo um fenômeno complexo e de fundamental importância para toda humanidade. Tal assertiva pode ser verificada observando a gama de situações que tem ligação direta com o conceito de ondas, por exemplo: a propagação da luz natural do sol, a capacidade de distinguir sons diversos ou a quebra de ondas do mar na praia. As situações evocadas dão apenas uma ideia dos diferentes ramos em que as ondas são o fenômeno característico e principal objeto de estudo.

Dada a importância e a frequência com que as ondas são observadas na natureza, os pesquisadores vêm dispendendo esforços no sentido de compreender e evitar os problemas relacionados a esses fenômenos. Pode-se citar, com intuito ilustrativo, os prejuízos e as consequências que podem ser ocasionadas pelas ondas, em situações não controladas:

- a) prejuízos financeiros, através de uma falha no sistema de distribuição de energia elétrica;
- b) danos ambientais, causados por uma ruptura de uma barragem retendo rejeitos de indústrias de papel;
- c) prejuízos materiais, através da ruína de estruturas portuárias devido à excessiva ondulação causada por mau tempo e;
- d) perda de vidas, como no caso de uma *tsunami* atingindo uma comunidade junto à linha de costa.

Sendo assim, desenvolvem-se meios de evitar ou ao menos aliviar os efeitos danosos apontados, e que passam, invariavelmente, pela análise do padrão de onda. Não é preciso lembrar, todavia, que as análises do padrão de onda só são possíveis graças a etapa de monitoramento, o que muitas vezes ocasiona dificuldades por causa da quantidade excessiva de dados a serem tratados, tornando a intervenção uma tarefa mais lenta (ALLEN; APOSTOLV; KREISS, 2005).

No caso do sistema de distribuição de energia elétrica, há uma necessidade em se obter, de forma rápida, o tipo de anomalia presente na onda de tensão, tais como transitórios, variação de tensão, distorções de forma, flutuações ou oscilações (MALANGE, 2010). A rapidez é necessária para que ações de mitigação possam ser empreendidas, afim de evitar, em um caso mais extremo, um colapso no sistema (vulgo "apagão"). As ações de intervenção são balizadas por um tratamento prévio dos parâmetros da onda (frequência, amplitude, simetria e formato), obtidos com a utilização de métodos tais como: Tranformadas de Fourier, Wavelets, Redes Neurais, Lógica Fuzzy ou uma combinação entre eles (MALANGE, 2010).

De forma semelhante, sistemas de previsão e alerta de navegação de embarcações baseiam-se no monitoramento dos ventos incidentes e principalmente ondas, e no tratamento dos dados. Tendo em vista o caráter estratégico das hidrovias no desenvolvimento do país, principalmente no tocante ao transporte de mercadorias, projetos como o FINEP Ondisa, desenvolvido na Unesp - Ilha Solteira, visam integrar um sistema de monitoramento e previsão de altura de ondas para identificar rotas mais seguras para embarcações na hidrovia Tietê-Paraná. Não é preciso ressaltar que o sucesso do sistema de alerta passa pelos modelos empregados no tratamento dos dados.

Sendo assim, sabe-se que diversas técnicas numéricas e de programação foram desenvolvidas para lidar com o tratamento dos sinais, ou de maneira mais específica, da onda incidente. Por exemplo, Allen, Apostolv e Kreiss (2005) ressaltam os benefícios na substituição de um tratamento prévio dos dados de entrada através de programas específicos, em detrimento a dispositivos físicos, resultando em uma redução do tempo para a tomada das ações de mitigação. Nesse sentido, alguns esforços também são dirigidos não só para o tratamento do sinal em si, mas também da sua geração.

Uma onda pode ser gerada das mais variadas formas, sendo caracterizada por uma perturbação ou pulso que tem capacidade de transportar energia. Por exemplo, podem-se citar as ondas geradas pelo deslocamento de uma embarcação em meio líquido (ondas de Kelvin, ou *ship waves*), ondas geradas pelo impacto da estrutura do casco de embarcações na superfície da água (*slamming*), ondas geradas por impacto de massas sólidas em meio líquido (deslizamento de terra ou rocha em lagos de barragem), entre outras.

Modelos numéricos são desenvolvidos, baseados nas mais diferentes premissas, com o intuito de reproduzir numericamente o fenômeno físico como um todo. Tradicionalmente, métodos numéricos para reprodução de fenômenos físicos, como a geração de ondas, baseiam-se na discretização do domínio de cálculo em malhas. Entretanto, frente à limitação de representação de domínios de geometrias complexas, descontinuidades ou superfícies móveis, aplicam-se algumas técnicas para contornar tais inconvenientes, como a reestruturação de malha ou malhas adaptativas. Dessa forma, é possível tratar as descontinuidades do domínio, mas que, em contrapartida, aumentam consideravelmente o tempo de processamento além de atrelar a confiabilidade da solução obtida ao algoritmo de reestruturação de malha.

Novos métodos numéricos, desvencilhados do paradigma de discretização da malha, vêm ganhando força nos últimos anos, principalmente pela capacidade em representar fenômenos altamente não-lineares e a naturalidade com a qual trata descontinuidades. Estes métodos são conhecidos como métodos de partículas.

Os métodos de partículas podem ser definidos, de uma maneira geral, como métodos numéricos de solução de um problema físico que não necessitam de malhas no domínio a ser simulado (*meshfree*). Este domínio é representado por um conjunto de partículas, cuja dinâmica é determinada de acordo com as equações de balanço (massa e quantidade de movimento),

escritas na forma Lagrangiana. Dentre os métodos de partículas destacam-se o *SPH* (*Smoothed Particle Hydrodymanics*) e o *MPS* (*Moving Particle Semi-implicit Method*).

Frente à possibilidade de eliminar as restrições decorrentes da utilização de malhas em domínios de geometrias cada vez mais complexas e ao desenvolvimento recente, eventos e publicações internacionais acerca dos métodos de partículas vêm aumentando significativamente. Esse fato reforça e elucida o interesse da comunidade científica internacional na aplicação dos métodos de partículas aos problemas de Engenharia e sua potencialidade. No entanto, essa tendência internacional, no tocante a publicações e formação de recursos humanos, é ainda muito incipiente no cenário nacional.

#### 1.1 OBJETIVO

Diante do exposto, pretende-se lançar mão de um código próprio, desenvolvido e testado no âmbito desta Tese de Doutoramento, com base no método *SPH*, para simular fenômenos que envolvam geração de ondas, com especial atenção aos problemas de ondas de impacto. O código desenvolvido será confrontado com resultados experimentais, analíticos e numéricos, quando houver disposição, de modo a aferir seu desempenho global.

### 1.2 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Este documento está organizado em 8 capítulos e duas partes. A primeira parte é dedicada à introdução, que compreende a revisão bibliográfica e a descrição dos métodos numéricos. A segunda parte trata especificamente dos estudos de caso efetuados, ou seja, das simulações numéricas de problemas de Engenharia. É dada uma breve descrição do que se espera, em cada capítulo, na sequência.

O capítulo 2 é dedicado ao Estado da Arte, em que será apresentado os tipos de métodos numéricos, culminando com os métodos particulados. São observados os dois métodos particulados cogitados para serem utilizados no âmbito deste trabalho, sendo o primeiro deles, o *MPS*, detalhado no capítulo 3. Na sequência, no capítulo 4 é mostrado em detalhes o modelo Lagrangiano *SPH*. Por se tratar de uma técnica relativamente recente, foi incluído todo o equacionamento utilizado e o passo a passo necessário ao seu completo entendimento.

Já na Parte II, no capítulo 5, ilustram-se algumas simulações de casos teste, normalmente análises de desempenho e validação do código numérico. Utilizam-se, para tal fim, a simulação do problema de ruptura de barragens (seção 5.1, p. 59), a geração, propagação e quebra de ondas (seção 5.2, p. 62) e o esvaziamento de um reservatório (seção 5.3, p. 67). O escoamento é considerado, no capítulo 5, bidimensional e ideal, regido pela equação de Euler.

Os escoamentos reais são abordados no capítulo 6, através de estudos de caso clássicos em escoamentos de reologia newtoniana, como o Poiseuille em superfície livre (seção 6.2.2, p. 78), o Poiseuille plano (seção 6.2.3, p. 80) e o escoamento Couette (seção 6.2.4, p. 81).

Análises transientes e estacionárias são realizadas, onde é possível observar o comportamento do código *SPH* implementado. Posteriormente, é apresentado o equacionamento do escoamento não newtoniano, a problemática e estudos de caso.

No capítulo 7 aborda-se a geração de ondas devido ao impacto de massas sólidas em meio líquido em repouso. É feita uma breve revisão do problema e simulações com material indeformável (seção 7.2.5.1, p. 96) e fragmentado (seção 7.2.5.3, p. 102), comparando com resultados da literatura.

As discussões e conclusões a respeito do trabalho em geral são apresentadas no capítulo 8. Faz-se um adendo posterior com as perspectivas para o encaminhamento do trabalho e possíveis mudanças ou melhorias são propostas, com objetivo de continuação da linha de pesquisa. São referenciados, também, os trabalhos publicados pela equipe de trabalho, com enfoque na temática abordada.

Em seguida, apresentam-se a bibliografia citada no texto e apêndices.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Dos vários fenômenos físicos observados pelo homem, se é capaz de modelar apenas a parte minoritária, sendo traduzida em equações matemáticas. Estabelecidas as equações matemáticas e hipóteses, segue-se a tentativa de resolvê-las. Muitas vezes, a solução analítica não é possível para uma determinada situação, em decorrência de dificuldades diversas (topologia complexa, não-linearidades, singularidades, entre outras). Dessa forma, recorre-se a métodos de solução alternativos, como a modelagem numérica.

Na modelagem numérica, aplicam-se alguns conceitos às equações originais (diferenciais parciais) que regem o fenômeno físico, transformando-as em equações algébricas, para que possam ser resolvidas de forma incremental, em passos. Vistos dessa forma, pode-se dizer que os métodos numéricos nada mais são do que uma ferramenta para a solução de equações algébricas. Existem, no entanto, várias categorias de métodos numéricos, como será visto na sequência.

### 2.1 FORMULAÇÃO EULERIANA × LAGRANGIANA

Existem duas maneiras diferentes de descrever um sistema físico: a Euleriana e a Lagrangiana. Essas duas visões distintas são importantes, uma vez que influenciam diretamente no sistema de equações resultante de um dado problema.

A formulação Lagrangiana acompanha o movimento de um elemento, espacial e temporalmente. O comportamento global do sistema é conhecido quando é determinada a trajetória de todos os elementos do domínio. Já na formulação Euleriana observa-se a variação das grandezas pontualmente (na verdade, em uma pequena região do domínio). Os elementos não são acompanhados e o comportamento global do sistema é determinado quando o campo estudado é conhecido em todo o domínio. Existe também uma aproximação mista, chamada ALE, que figura como alternativa para algoritmos de malhas adaptativas.

### 2.2 MÉTODOS NUMÉRICOS TRADICIONAIS

Chamam-se, neste trabalho, de métodos numéricos tradicionais aqueles que necessitam de malha e que, geralmente, seguem a formulação Euleriana. Em termos de métodos numéricos de resolução do problema, atualmente, pode-se apontar como os mais comuns: o Método das Diferenças Finitas (MDF), Volumes Finitos (MVF), Elementos Finitos (MEF), Elementos de Contorno (MEC).

A utilização do MDF é adequada para grandes domínios e com requerimentos interme-

diários de memória. Entretanto, para compensar a falta de precisão, o domínio deve ser dividido em pequenos elementos, resultando em uma malha densa e estruturada. O MVF pode ser considerado como uma variação do MDF, sendo a principal diferença o balanço integral da grandeza avaliada em cada célula do domínio numérico, além de poder ser escrito na forma conservativa e ser mais flexível com o uso de malhas adaptativas. Cabe ainda lembrar o VOF (*Volume of fluid*), técnica muito utilizada na dinâmica dos fluidos computacional para determinar a posição da superfície livre. Kleefsman et al. (2005), lançam mão da técnica VOF associada ao MVF para determinar a superfície livre, regida pela equação de Navier-Stokes, para simular problemas de impacto em meio liquído, como o embarque de água no convés (*green water*), analisado como um problema tipo ruptura de barragem com presença de obstáculo posterior, e o *slamming* de um diedro e cilindro rígidos incidindo sobre meio líquido em repouso. Cheng e Arai (2002) ana-lisam o efeito do *sloshing* tridimensionalmente em seu modelo numérico em diferenças finitas juntamente com a técnica Surf para determinação da posição da superfície livre.

Cheng (1995) modela numericamente em duas dimensões o slamming utilizando as equações de Euler (em coordenadas generalizadas), considerando a separação do escoamento do corpo incidente e ação gravitacional. As equações são discretizadas através de um esquema em diferenças finitas de forma explícita. Maciel (1991) analisa a queda de elementos sólidos indeformáveis e fragmentados, analisando experimental, numérica e analiticamente o fenômeno de avalanches nos grandes lagos europeus. O autor reproduz a energia adquirida pelo fluido em termos da altura da onda solitária gerada, analisando as teorias de Saint-Venant, Boussinesq e Serre (MACIEL, 1991). Nascimento (2001) usa um modelo numérico (MVF) com base nas equações de Serre para estimar a energia da onda formada pela incidência de um bloco, considerado indeformável, que desliza em um plano inclinado e incide num meio líquido em repouso. Mais recentemente, Souza (2007) perfaz o mesmo caminho, agora com material fragmentado (granular) e equipamentos de elevada precisão tanto na determinação do campo orbital quanto nas alturas de onda. Um estudo analítico do impacto hidrodinâmico em águas restritas é realizado por Korobin (1999), através de métodos assintóticos, analisando um objeto tipo caixa. Oliver (2002) também estuda o impacto hidrodinâmico em águas rasas de forma algébrica, ressaltando a importância em conhecer a mecânica desse fenômeno complexo.

O MEF possui boa acurácia com poucos elementos, entretanto o método tem a desvantagem de alto consumo de memória. O MEF é usado normalmente para descrever o comportamento de sólidos. Mitra e Sinhamahapatra (2005) usam o MEF para descrever o comportamento da superfície livre submetida ao *sloshing* em um tanque retangular usando uma formulação em termos da pressão. Bereznitski (2003) utiliza a formulação MEF tanto para representar a estrutura quanto o fluido em seu estudo sobre a influência da hidroelasticidade nos impactos hidrodinâmicos.

O MEC tem a vantagem de diminuir a dimensão do problema, pois precisa apenas encontrar a solução no contorno do domínio. Tanizawa (1998) utiliza a formulação MEC no domínio fluido em seu modelo totalmente não-linear, com equações que se baseiam na velocidade e aceleração, em problemas de impacto hidrodinâmico em superfícies elásticas.

# 2.3 DIFERENÇAS ENTRE MÉTODOS TRADICIONAIS E MÉTODOS SEM MALHA (M-SM)

É evidente que, em relação aos métodos numéricos mais tradicionais, como o MDF e MEF, a diferença fundamental dos MSM é que não há necessidade da criação de uma malha. Em geral, nos MSM, o domínio físico é definido por uma porção de partículas, podendo ser geradas de forma aleatória e que não possuem qualquer tipo de conectividade. Entretanto, alguns MSM como o *Element-free Garlekin Method* (EFGM) se apoiam em células para fazer a integração do sistema matricial (BELYTSCHKO; LU; GU, 1994 apud LIU, 2003), não se caracterizando, portanto, essencialmente como um método de partícula.

Há ainda de se ressaltar que, na criação de malhas, as geometrias curvas, por exemplo, são representadas por elementos compostos por segmentos de reta com topologia bem definida e que acompanham a fronteira. Portanto, a equivalência entre o domínio físico e o discretizado é maior quando há mais elementos. Nos MSM, a fronteira pode ser representada por uma série de partículas, sem conectividade entre elas. Pode-se perceber, deste fato, de que a forma da mais complexa geometria pode ser representada sem maiores dificuldades. Na figura 1 é ilustrado um problema dificilmente tratado pelos métodos numéricos tradicionais, com variação brusca da superfície livre, um sólido com movimento livre (três graus de liberdade no plano) e uma fronteira em arco de circunferência.

As condições de contorno são fundamentais para que seja obtida a solução do problema proposto. Nos métodos tradicionais, há uma equivalência entre a condição de contorno matemática e numérica, sendo uma questão de definir o comportamento das variáveis nas fronteiras do domínio computacional. O mesmo artifício não é tão direto em MSM, até porque não há partículas fora do domínio, o que resulta em diversas técnicas para lidar com essas dificuldades. No caso particular do *SPH*, os maiores exemplos de condições de contorno são as fronteiras reativas (*boundary forces*) e as partículas fantasma (*ghost particle*). Utilizando as condições de contorno do tipo *boundary forces*, especial atenção deve ser dada às condições iniciais de simulação. Em outras palavras, deve-se garantir, nos instantes iniciais, o equilíbrio das partículas. Isso significa que a posição inicial das partículas tem influência no resultado final, diferente do que foi preconizado inicialmente (MONAGHAN, 2006). Condições iniciais também afetam as simulações com partículas fantasma (LACHAMP, 2003).

O método *SPH* em particular aproxima um campo qualquer em um domínio definido por uma mescla de pontos de discretização (partículas). Para cada uma dessas partículas, podese escrever uma formulação integral do campo. Entretanto, quando esses métodos são utilizados para resolver problemas de impacto hidrodinâmico, em geral, os esforços calculados apresentam oscilações. Especula-se que a origem de tais oscilações possam decorrer dos erros maiores **Figura 1** – Exemplo de problema complexo: uma comparação entre um experimento (à esquerda) e o modelo numérico *SPH* desenvolvido pelo autor (à direita), em instantes aproximadamente iguais.



Fonte: Do próprio autor.
que o *SPH* comete na aproximação integral de derivadas, em relação à aproximação integral de funções. Dessa forma, o cálculo do gradiente da pressão na equação do balanço de quantidade de movimento incorre em um erro naturalmente maior, que aliado a uma distribuição irregular de massa específica, e por conseguinte pressão, possa resultar nas oscilações de esforços observadas.

## 2.4 PASSOS GERAIS PARA RESOLVER UM PROBLEMA USANDO MSM

Uma vez definidas, de maneira geral, as diferenças e semelhanças entre os métodos tradicionais e os MSM, descrevem-se os passos para solução de problemas usando MSM. Primeiramente, define-se o domínio a ser simulado através da distribuição de partículas. A densidade de partículas pode ser constante ou não, e algumas vezes é necessário que existam mais partículas em regiões de interesse. A partícula contém informações diversas como massa, massa específica, velocidade, posição, energia interna, entre outras, dependendo do problema.

A relação entre as diversas partículas se dá por meio de uma função peso, que apresenta certas propriedades interessantes e que depende essencialmente do inverso da distância entre as partículas. Desse modo, a maior influência no cálculo das grandezas envolvidas está condicionada às partículas mais próximas. Por esse motivo, geralmente limita-se o raio de atuação da função peso a uma distância conhecida da partícula em questão. Essa distância pode ser chamada de domínio de suporte ( $r_s$ , *support domain*), e deve ser escolhida de modo a garantir uma área adequada para interpolação. Normalmente, o domínio de suporte é escolhido com base na distância característica da simulação, que pode ser tomada como uma fração do espaçamento médio entre partículas ( $\Delta x$ ), ou seja,  $r_s = \kappa \Delta x$ .

Algumas das propriedades que as funções peso apresentam são comentadas na sequência. A mais importante e comum aos MSM é em relação à unicidade (equação 1), ou seja:

$$\sum_{j} W_j(\vec{x}) = 1. \tag{1}$$

Outras propriedades são desejáveis, e variam de método para método. Uma delas é uma similaridade entre a função peso e a função Delta de Dirac, por exemplo.

Uma vez discretizadas, forma-se o sistema de equações a ser resolvido. Normalmente, para problemas de dinâmica dos fluidos, o sistema de equações resultante é composto por equações diferenciais em relação ao tempo, que podem ser resolvidas usando métodos dependendo a abordagem (explícita ou implícita).

Não é raro se deparar (e principalmente quando lida-se com problemas implícitos) com o sistema linear do tipo Ax = b, onde a incógnita x é a entrada para o passo de tempo seguinte. Neste caso, há métodos específicos para a solução do sistema linear, que podem ser iterativos ou diretos. Exemplos de métodos diretos são a eliminação de Gauss e a decomposição matricial LU. Já como métodos iterativos, pode-se citar o método de Gauss e suas variantes (Gauss-Jacobi e Gauss-Seidel), *Successive over-relaxation method*, entre outros. Independentemente da abordagem explícita ou implícita, com a solução do sistema de equações discretizado, obtém-se a variação temporal dos deslocamentos, velocidades e acelerações das partículas.

## 2.5 PRINCÍPIOS DOS DIFERENTES MÉTODOS NUMÉRICOS

O desenvolvimento de um método numérico passa pelo estabelecimento de um princípio matemático e de certas hipóteses de simplificação. Tomando-se inicialmente o MDF: nesse método, as equações parciais são aproximadas por equações algébricas embasadas no conceito de derivação, através da expansão da função em séries de Taylor. O MEF, por exemplo, baseia-se tradicionalmente nos princípios dos trabalhos virtuais. Da mesma forma, os MSM baseiam-se em diferentes princípios para sua construção. Pode-se dizer também que, quando um método numérico baseia-se nos métodos residuais, por exemplo, suas equações estão escritas na formulação fraca (*weak form*). Os métodos baseados em expansões de Taylor são baseados na formulação forte (*strong form*).

O ideal, em termos de modelagem, seria a obtenção da solução das equações escritas segundo a formulação forte. Esse fato, no entanto, não é possível em alguns problemas de Engenharia. Por esse motivo, uma das alternativas é alterar as equações de balanço do problema em questão, fazendo com que elas não sejam mais totalmente consistentes. Dessa forma, obtém-se soluções fracas em relação a funções ou vetores teste, o que resulta na formulação fraca.

Em relação aos MSM, existem aqueles escritos na formulação fraca e forte. Para desenvolver o trabalho de doutoramento em tela, várias alternativas de MSM foram cogitadas para utilização como ferramenta na análise de problemas de geração de ondas. Era desejável que o método adotado seguisse a formulação forte, como por exemplo o *MPS* e o *SPH*.

Embora o *SPH* tenha sido criado para resolver problemas no domínio astrofísico (LUCY, 1977; GINGOLD; MONAGHAN, 1977), este método tem sido aplicado em diversas áreas, notadamente a mecânica dos fluidos (COLAGROSSI, 2004; LACHAMP, 2003; MONAGHAN, 1982; MORRIS, 1996; OGER et al., 2006; VILA, 1998). Já o *MPS* foi desenvolvido para lidar especificamente com escoamentos incompressíveis (KOSHIZUKA; NOBE; OKA, 1998), sendo bastante difundido na Engenharia Naval.

# 3 O MÉTODO MPS

O método *MPS* foi concebido originalmente para lidar com escoamentos incompressíveis. Em termos gerais, pode-se dizer que o problema da geração de ondas por impacto hidrodinâmico apresenta baixa dependência com a compressibilidade do fluido, o que tira ainda maior proveito da arquitetura desse método. Sendo assim, as equações motrizes utilizadas no *MPS* são as equações da continuidade e de Navier-Stokes, com a hipótese de escoamento incompressível:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0, \tag{2}$$

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + v\vec{\nabla}^2\vec{u} + \vec{g}.$$
(3)

Adota-se, para restringir as interações entre as partículas a uma região de raio finito ( $r_s$ ), uma função peso  $\overline{\omega}$ , definida como:

$$\boldsymbol{\varpi}(r) = \begin{cases} \frac{r_s}{r_{ij}} - 1 & r_{ij} < r_s, \\ 0 & r_{ij} \ge r_s. \end{cases}$$
(4)

A função peso pode, no entanto, apresentar formulações diferentes. Um estudo nesse sentido foi empreendido por Ataie-Ashtiani e Farhadi (2006), comparando os resultados experimentais e numéricos resultantes de seis formulações diferentes para a função peso, avaliado para o problema tipo ruptura de barragens.

Um indicativo da massa específica da partícula,  $N_i$ , é definido por:

$$N_i = \sum_{j \neq i} \boldsymbol{\sigma}(r_{ji}). \tag{5}$$

Pela definição do gradiente, pode-se perceber que o operador nabla aplicado a um campo escalar  $\phi$  qualquer entre duas partículas *i* e *j*, é:

$$\vec{\nabla}\phi = \frac{\phi_j - \phi_i}{r_{ji}^2} (\vec{r}_j - \vec{r}_i).$$
(6)

O vetor gradiente da partícula *i* é obtido medianizando os vetores gradiente segundo a função peso:

$$\vec{\nabla}\phi_i = \frac{D}{N_i} \sum_{j \neq i} \left[ \frac{(\phi_j - \phi_i) \left(\vec{r}_j - \vec{r}_i\right)}{r_{ji}^2} \boldsymbol{\varpi}(r_{ji}) \right].$$
(7)

Já o operador laplaciano é dado por:

$$\nabla^2 \phi_i = \frac{2D}{\lambda N_0} \sum_{j \neq i} (\phi_j - \phi_i) \, \boldsymbol{\varpi}(r_{ji}), \tag{8}$$

com:

$$\lambda = \frac{\int_{v} \boldsymbol{\varpi}(r) r^{2} dv}{\int_{v} \boldsymbol{\varpi}(r) dv}.$$
(9)

Para resolver o sistema de equações governantes, utiliza-se um algoritmo semi-implícito. Primeiramente, no passo explícito, a dinâmica das partículas é determinada pela solução da equação de conservação de quantidade de movimento:

$$(\vec{u})_{i}^{*} = (\vec{u})_{i}^{t} + \Delta t \, (\nu \nabla^{2} (\vec{u})_{i}^{t} + \vec{g}_{i}), \tag{10}$$

$$(\vec{r})_{i}^{*} = (\vec{r})_{i}^{t} + \Delta t \, (\vec{u})_{i}^{*}.$$
(11)

No passo seguinte, a equação da continuidade é resolvida implicitamente:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{u})_{i}^{,} = -\frac{1}{\Delta t} \frac{\rho_{i}^{t+\Delta t} - \rho_{i}^{*}}{\rho_{0}} = -\frac{1}{\Delta t} \frac{N_{i}^{t+\Delta t} - N_{i}^{*}}{N_{0}}, \qquad (12)$$

$$(\vec{u})_i^{,} = -\frac{\Delta t}{\rho} (\vec{\nabla} p_i^{t+\Delta t}).$$
(13)

com  $(\vec{u})_i^{,} = (\vec{u})_i^{t+\Delta t} + (\vec{u})_i^{*}$ . Na equação 12, substitui-se a massa específica pelo seu respectivo indicativo (equação 5). Combinando as duas equações acima resulta:

$$(\nabla^2 p)_i^{t+\Delta t} = \frac{\rho}{\Delta t^2} \left[ \frac{N_i^{t+\Delta t} - N_i^*}{N_0} \right].$$
(14)

Adotando que o indicativo de massa específica do fluido é uma função linear da massa específica, tem-se:

$$\frac{N_i^{t+\Delta t}}{N_0} = \frac{\rho_i^{t+\Delta t}}{\rho_0},\tag{15}$$

desconsiderando os efeitos de compressibilidade do fluido. Substituindo a equação 15 na equação 14 chega-se a equação de pressão final que é resolvida pelo método:

$$(\nabla^2 p)_i^{t+\Delta t} = -\frac{\rho}{\Delta t^2} \left[ \frac{N_i^* - N_0}{N_0} \right].$$
(16)

## 4 O MÉTODO SPH

O método *SPH* foi criado inicialmente para resolver problemas astrofísicos no espaço tridimensional (LUCY, 1977; GINGOLD; MONAGHAN, 1977). No entanto, a simplicidade com que fenômenos complexos são modelados faz do *SPH* uma ferramenta de solução interessante, tendo sido estudada extensivamente e estendida para diversos problemas e áreas de atuação (VILA, 1998).

O *SPH*, como é um método sem malha, lagrangiano e de partícula, possui características particulares. Sem dúvida, possui vantagens especiais sobre os métodos numéricos tradicionais, baseados em malhas, sendo a mais significativa a natureza adaptativa do *SPH*. Essa adaptabilidade é alcançada em um estágio inicial na aproximação da variável do campo, que é realizada em cada passo de tempo baseada na quantidade atual e local de partículas.

O significado da sigla *SPH* exprime a filosofia do método. O primeiro termo *Smoothed* representa a suavização ou medianização segundo o peso das variáveis do campo na vizinhança da partícula, visando principalmente a estabilidade do método. O termo *Particle* refere-se à utilização de partículas para discretização do domínio físico. O terceiro termo *Hydrodynamics* representa o nicho de atuação do método. Assim, a combinação da adaptabilidade, natureza particulada e lagrangiana leva o método *SPH* a ser aplicado em diferentes áreas da engenharia e ciência. De certa maneira, o termo *Hydrodynamics* pode ser interpretado como mecânica de forma geral. Em algumas literaturas (KUM; HOOVER; POSCH, 1995 apud LIU, 2003) esse método é chamado de *Smoothed Particle Mechanics*.

## 4.1 FUNDAMENTOS DO MÉTODO SPH

Do ponto de vista computacional, representa-se o fluido por uma porção de partículas evoluindo com a velocidade do escoamento. Cada partícula representa um ponto de interpolação na qual todas as propriedades do fluido são conhecidas. Exprimindo então a função  $\phi$  como um campo variável qualquer (escalar, vetorial ou tensorial), a seguinte igualdade verifica:

$$\phi(\vec{r}) = \int \phi(\vec{r}_j) \,\delta(\vec{r} - \vec{r}_j) \,d\vec{r}_j \tag{17}$$

Se a função delta de Dirac for substituída por uma função  $W(\vec{r} - \vec{r}_j, h)$ , que satisfaça as seguintes condições:

$$\int W(\|\vec{r} - \vec{r}_j\|, h) \, d\vec{r}_j = 1 \tag{18}$$

$$\lim_{h \to 0} W(\|\vec{r} - \vec{r}_j\|, h) = \delta(\vec{r} - \vec{r}_j)$$
<sup>(19)</sup>

A função  $\phi$  pode, então, ser reescrita como:

$$\phi(\vec{r}) \approx \int \phi(\vec{r}_j) W(\|\vec{r} - \vec{r}_j\|, h) d\vec{r}_j$$
(20)

Na forma apresentada pela equação 20, a função  $\phi(\vec{r})$  pode ser considerada como sendo uma regularização da função  $\phi$  original. O termo W inserido, cujas propriedades assemelhamse às do delta de Dirac, justificam a nomenclatura núcleo de suavização (*smoothing kernel*) e o parâmetro h é o domínio de suporte, que no *SPH* recebe a denominação de comprimento de suavização (*smoothing lenght*) do núcleo.

Aplicando a equação 20 no domínio discretizado, tem-se:

$$\langle \phi(\vec{r}) \rangle = \sum_{j} \phi_j \frac{m_j}{\rho_j} W(\|\vec{r} - \vec{r}_j\|, h)$$
(21)

no qual, de maneira geral, o valor de  $\phi$  em  $\vec{r}_j$  (ou na partícula *j*) é denotado por  $\phi_j$ .

Pode-se ainda aplicar o gradiente à função  $\phi$ , utilizando novamente a equação 20:

$$\vec{\nabla}\phi(\vec{r}) \approx \int \vec{\nabla}\phi(\vec{r}_j) W(\|\vec{r} - \vec{r}_j\|, h) d\vec{r}_j$$
(22)

Integrando a equação 22 por partes, desprezando os termos de superfície e aplicando as propriedades do núcleo *W* (OGER et al., 2007) que serão discutidas posteriormente (na seção 4.2, p. 41), resulta:

$$\vec{\nabla}\phi(\vec{r}) \approx \int \phi(\vec{r}_j) \vec{\nabla}W(\|\vec{r} - \vec{r}_j\|, h) d\vec{r}_j$$
(23)

Que pode ser escrito como:

$$\langle \vec{\nabla} \phi(\vec{r}) \rangle = \sum_{j} \phi_{j} \frac{m_{j}}{\rho_{j}} \vec{\nabla} W(\|\vec{r} - \vec{r}_{j}\|, h)$$
(24)

No entanto, utiliza-se comumente a equação 25 (MONAGHAN, 2005):

$$\rho \,\vec{\nabla} \phi(\vec{r}) = \vec{\nabla} (\rho \,\phi(\vec{r})) - \phi(\vec{r}) \,\vec{\nabla} \rho \tag{25}$$

Que dá origem a uma das expressões para o gradiente de  $\phi$  que pode ser utilizada no *SPH*:

$$\langle \vec{\nabla} \phi(\vec{r}) \rangle_i = \frac{1}{\rho_i} \sum_j m_j \left( \phi_j - \phi_i \right) \vec{\nabla} W(r_{ij}, h)$$
(26)

Da mesma forma, para o divergente do campo vetorial  $\vec{u}$ , pode-se obter diretamente:

$$\langle \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \rangle_i = \sum_j m_j \vec{u}_j \cdot \vec{\nabla} W(r_{ij}, h)$$
(27)

Novamente, opta-se por um rearranjo no divergente, escrevendo-o como (MONAGHAN, 2005):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = \frac{1}{\rho} [\vec{\nabla} \cdot (\rho \, \vec{u}) - \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \rho]$$
(28)

Que resulta na proposta de aproximação do divergente de uma função vetorial  $\vec{u}$ , muito comum na formulação *SPH*:

$$\langle \vec{\nabla} \cdot \vec{u} \rangle_i = \frac{1}{\rho_i} \sum_j m_j \left( \vec{u}_j - \vec{u}_i \right) \cdot \vec{\nabla}_i W(r_{ij}, h)$$
(29)

sendo que o termo  $\vec{\nabla}_i W(r_{ij}, h)$  representa o gradiente de  $W(r_{ij}, h)$  em relação às coordenadas da partícula *i*.

As representações do divergente e gradiente de uma função qualquer serão utilizadas para reescrever as equações de balanço (continuidade e quantidade de movimento) segundo a forma *SPH*. De modo a facilitar, emprega-se a notação:  $W_{ij} = W(r_{ij},h)$ ,  $\phi_{ij} = \phi_i - \phi_j$  e  $\bar{\phi}_{ij} = (\phi_i + \phi_j)/2$ . Os símbolos indicando funções aproximadas ( $\langle \cdot \rangle$ ) também serão omitidos, de agora em diante, considerando-os implícitos nas equações.

## 4.2 A FUNÇÃO NÚCLEO DE SUAVIZAÇÃO W

O núcleo de suavização é uma função analítica e contínua e tem a responsabilidade de interpolar uma grandeza qualquer entre partículas, limitada pela máxima distância *Kh*, *K* contante. Pode-se dizer que o núcleo de suavização tem o mesmo papel dos esquemas de discretização nos métodos tipo MDF (central, *upwind*, etc.). Sendo respeitadas as restrições impostas pelas equações 18 e 19, qualquer função pode ser candidata a representar *W*. A regularização gaussiana (equação 30) pode ser considerada a primeira categoria de núcleo de suavização aplicada (MONAGHAN; KOS; ISSA, 2003):

$$W^{G}\left(\frac{r}{h}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left[-\left(\frac{r}{h}\right)^{2}\right]$$
(30)

Para facilitar a notação, comumente adota-se s = r/h.

Existem vantagens na adoção do núcleo gaussiano, sendo uma delas obtida pelo comportamento da função exponencial, no sentido que derivadas do núcleo pode ser escrita em função do próprio núcleo:

$$\frac{dW^G}{ds} = -2sW^G \tag{31}$$

Além disso, Morris (1996) aponta que a transformada de Fourier do núcleo gaussiano é gaussiano e que há boa estabilidade do método como um todo quando o núcleo gaussiano é utilizado. No entanto, a falta de suporte compacto faz com que todas as partículas do domínio influenciem umas as outras (ou seja, K é infinito), mesmo que as contribuições sejam pequenas para partículas afastadas.

Um outro tipo de núcleo bastante utilizado são as funções splines, sendo a cúbica bidi-

mensional dada pela equação 32:

$$W^{SC}(s) = \frac{10}{7\pi\hbar^2} \begin{cases} \frac{2}{3} - s^2 + \frac{s^3}{2}, & \text{se} \quad 0 < s \le 1\\ \frac{(2-s)^3}{6}, & \text{se} \quad 1 < s \le 2\\ 0, & \text{se} \quad s > 2 \end{cases}$$
(32)

Uma das maiores vantagens na utilização do núcleo regido pela *spline* cúbica é que a função é exatamente nula para s > 2, ou seja, para uma distância superior a 2h, como pode ser visto na equação 32. Essa propriedade é o suporte compacto, que reduz drasticamente o tempo computacional, já que a contribuição das partículas é limitada a um raio 2h. No entanto, em algumas aplicações, pode-se notar acentuados efeitos dispersivos (MORRIS, 1996). A figura 2 ilustra a aplicação do núcleo de suavização, no caso em que o raio de interação é limitado em 2h.

**Figura 2** – À esquerda, o raio de ação da função *W* e à direita os valores da grandeza interpolados, representados pelas barras verticais cuja altura é proporcional ao inverso da distância  $r_{ij}$ .



Fonte: Do próprio autor.

Independente da formulação do núcleo de suavização, é importante lembrar que a transformação do domínio contínuo para o discreto passa por estabelecer as distâncias entre as partículas intervenientes, uma vez que  $W \rightarrow W(r_{ij}, h)$ . O estabelecimento das partículas vizinhas, ou simplesmente da vizinhança, exige um esforço computacional, que pode ser reduzido pela propriedade de suporte compacto de alguns núcleos de suavização. Entretanto, para que seja explorada as vantagens do suporte compacto, algumas alterações são exigidas no *SPH*. Em outras palavras, não há vantagens significativas em usar o núcleo regido por *splines* se é necessário varrer todas as partículas para verificar se a distância até a partícula considerada é menor que 2h. Para contornar esse inconveniente, Morris (1996) apresenta um algoritmo de busca de vizinhos, baseado na subdivisão do domínio em células quadradas, de lado 2h. Conhecendo-se, de antemão, quais partículas pertencem a cada célula (através de uma lista de ligação), é possível restringir a pesquisa das partículas vizinhas apenas às células adjacentes (células pintadas na figura 3). Esse artifício reduz drasticamente o tempo computacional exigido para a construção das vizinhanças das partículas. Há outras técnicas, como a tabela Verlet (COLAGROSSI, 2004, *Verlet table*), que consiste na introdução de um segundo raio, maior que o original apenas por um valor  $\Delta$ . Garante-se que, para um dado número de passos de tempo, uma partícula, mesmo com a máxima velocidade permitida, não ultrapassaria a região ao qual pertence. Dessa forma, otimiza-se ainda mais a busca por vizinhos, garantindo que durante os números de passo de tempo estabelecidos, todos os vizinhos da partícula em questão estarão incluídos.

**Figura 3** – Subdivisão do domínio computacional para diminuir o número de partículas de busca na criação da lista de vizinhança. À esquerda, vê-se todo o domínio computacional, enquanto à direita vê-se o detalhe da região de interesse.



Fonte: Do próprio autor.

A diferenciabilidade do núcleo de suavização é um fator importante, uma vez que a aproximação do gradiente de uma função qualquer depende exclusivamente das derivadas da função de suavização, como mostram as equações 26 e 29. Há um consenso geral de que o erro no cálculo de derivadas de funções (equação 26) é maior do que a aproximação de funções (equação 21) (MONAGHAN, 2005). A figura 4 ilustra os núcleos gaussiano e *spline* cúbico.

## 4.3 COMPRIMENTO DE SUAVIZAÇÃO

O comprimento de suavização h está intimamente relacionado à resolução numérica desejada, e é uma denominação particular do *SPH* para o domínio de suporte ( $r_s$ ). Se o escoamento simulado não apresenta regiões com grande variação de massa específica, o comprimento h pode-se manter constante. Contudo, para simular choques ou impactos, onde há variação súbita da massa específica localmente, é preciso variar h de acordo, de tal forma que o número de partículas vizinhas se mantenha próximo de um valor constante.



Figura 4 – Função de suavização ou núcleo W.

Fonte: Do próprio autor.

Toma-se *h* como uma proporção do espaçamento da partículas inicial ( $\Delta x$ ). Normalmente, em problemas bidimensionais,  $h = 1, 2\Delta x$ . Para esse valor de *h*, e considerando o suporte compacto do núcleo de raio 2*h*, espera-se a presença de, em média, 20 partículas vizinhas (MORRIS, 1996).

Propõe-se, como aproximação inicial, uma expressão que relacione diretamente h com a variação da massa específica (equação 33). Essa expressão, todavia, necessita estabelecer previamente a massa específica da partícula *i*, cujo cálculo depende de  $h_i$ .

$$h_i = h_0 \left(\frac{\rho_0}{\rho_i}\right)^{\frac{1}{d}} \tag{33}$$

Desse modo, para estabelecer uma expressão para *h*, deriva-se a equação 33 com relação a *t*, injetando a equação da continuidade no termo resultante, obtém-se:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{d}h\vec{\nabla}\cdot\vec{u} \tag{34}$$

## **4.4** EQUAÇÃO DA QUANTIDADE DE MOVIMENTO

A equação da quantidade de movimento:

$$\frac{d\vec{u}_i}{dt} = -\frac{\left(\vec{\nabla}p\right)_i}{\rho_i} \tag{35}$$

implica na representação do gradiente de um escalar na formulação *SPH*. Aplicando a equação 26, resulta:

$$\left(\vec{\nabla}p\right)_{i} = -\frac{1}{\rho_{i}}\sum_{j}m_{j}p_{ij}\vec{\nabla}_{i}W_{ij}$$
(36)

A expressão 36, contudo, não conserva a quantidade de movimento linear e angular exatamente. Para solucionar esse problema, reescreve-se o gradiente de outra forma, de acordo com a equação 37:

$$\frac{\vec{\nabla}p}{\rho} = \vec{\nabla}\left(\frac{p}{\rho}\right) + \frac{p}{\rho^2}\vec{\nabla}\rho \tag{37}$$

A equação resultante para a quantidade de movimento fica:

$$\frac{d\vec{u}_i}{dt} = -\sum_j m_j \left(\frac{p_i + p_j}{\rho_i \rho_j}\right) \vec{\nabla}_i W_{ij}$$
(38)

que conserva exatamente a quantidade de movimento linear e angular. No entanto, existem outras maneiras de reescrever o gradiente que conservam a quantidade de movimento exatamente (LACHAMP, 2003; MORRIS, 1996).

## 4.5 DESLOCAMENTO DE PARTÍCULAS

As partículas são deslocadas de acordo com:

$$\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{u}_i \tag{39}$$

Existem métodos que melhoram a estabilidade da equação 39. Um desses métodos é o XSPH, que adiciona o seguinte termo à equação 39:

$$\Delta \vec{u}_i = \varepsilon \sum_j m_j \frac{\vec{u}_{ij}}{\bar{\rho}_{ij}} W_{ij} \tag{40}$$

sendo  $\varepsilon$  uma constante que varia entre 0 e 1 (valor usual:  $\varepsilon = 0,5$ ). Segundo Monaghan e Kos (1999), essa correção mantém as partículas mais ordenadas, além de prevenir penetração em casos de escoamentos de alta velocidade. Lachamp (2003) ressalta que o termo corretor sugerido (equação 40) não introduz dissipação viscosa suplementar, aumentando ligeiramente, todavia, a dispersão do sistema.

#### 4.6 EQUAÇÃO DA CONTINUIDADE

Devido às características do sistema particulado, pode-se dizer que o balanço de massa é dispensável no *SPH*, uma vez que a massa das partículas é constante e, numa determinada simulação, não há acréscimo nem redução no número de partículas. No entanto, o escoamento de fluidos como a água, no *SPH*, é considerado como fracamente compressível. Dessa forma,

não se garante que a massa específica seja constante, tampouco  $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$ . Ou seja, resolve-se a equação:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \,\vec{\nabla} \cdot \vec{u} \tag{41}$$

Como já visto (seção 4.1, p. 39), pode-se obter a aproximação desejada aplicando diretamente o conceito do *SPH* ao divergente (equação 24), que resulta:

$$\rho_i = \sum_j m_j W_{ij}. \tag{42}$$

A equação 42 conserva exatamente o volume total, uma vez que o número de partículas e massa de cada partícula são constantes ao longo da simulação. Mas, principalmente em problemas com superfície livre, nota-se um decaimento acentuado na massa específica nas proximidades da superfície livre, o que resulta em comportamentos indesejáveis nessa região. Para contornar esses inconvenientes, opta-se por um rearranjo na formulação do divergente (equação 28), que aplicado à equação da continuidade resulta:

$$\frac{d\rho_i}{dt} = \rho_i \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} \vec{u}_{ij} \cdot \vec{\nabla}_i W_{ij}$$
(43)

Utilizando a equação 43, o problema de queda repentina na massa específica é contornado pois a massa específica pode ser atribuída a cada partícula, fazendo assim com que a variação  $d\rho/dt$  dependa da aproximação ou afastamento relativo entre as partículas (termo  $\vec{u}_{ij}$ não nulo). Podem ser aplicadas correções e/ou suavizações à massa específica de tempos em tempos na simulação, para contornar o fato da equação 43 não conservar o volume total.

## 4.7 CORREÇÕES APLICADAS AO SPH

As imposições ao núcleo de suavização (equações 18 e 19), que devem ser obedecidas para que o núcleo de suavização assuma as propriedades do delta de Dirac num limite quando  $h \rightarrow 0$ , podem ser eventualmente violadas. Isto pode acontecer dada uma certa desorganização no posicionamento das partículas, que somam um número finito distribuídas em um domínio discreto. Em outras palavras, não é garantido que o número de vizinhos de cada partícula permaneça constante, nem tampouco guardem a mesma distância entre partículas. Colagrossi (2004) mostra as equações que normalmente deveriam, mas não são sempre satisfeitas pelo núcleo de suavização:

$$\sum_{j} m_{j} W_{ij} / \rho_{j} = 1 \qquad \sum_{j} m_{j} \vec{\nabla} W_{ij} / \rho_{j} = \vec{0}$$

$$\sum_{j} \vec{r}_{j} m_{j} W_{ij} / \rho_{j} = \vec{r}_{i} \qquad \sum_{j} m_{j} \vec{r}_{j} \cdot \vec{\nabla} W_{ij} / \rho_{j} = I.$$
(44)

A seguir, são discutidas duas técnicas diferentes para corrigir alguns erros no *SPH*: A renormalização e a reinicialização da massa específica.

#### 4.7.1 Reinicialização da massa específica

A reinicialização da massa específica é uma correção aplicada em intervalos de tempo pré-definidos (LAIGLE; LACHAMP; NAAIM, 2007) cujo objetivo é amenizar os efeitos negativos na utilização da equação 43 para a equação da continuidade. A correção envolve aplicar, para todas as partículas, a equação 42, que conserva totalmente o volume na simulação.

Entretanto, caso o núcleo de suavização  $W_{ij}$  não seja normalizado, ou seja,  $\sum_j W_{ij} \neq 1$ , a aplicação da correção insere ainda mais erros, causando a degradação do campo de pressões. Sendo assim, altera-se o núcleo de suavização original, através dos interpoladores de Shepard ou o MLS (*Moving Least Squares*).

#### **4.7.1.1** Interpolador de Shepard

O interpolador de Shepard (SHEPARD, 1968) é uma técnica simples, de baixo consumo de tempo computacional, que permite uma correta interpolação de funções constantes, ou seja, pode-se dizer que é uma técnica de ordem zero. A correção aplicada ao núcleo de suavização é dada por:

$$W_{ij}^{IS} = \frac{W_{ij}}{\sum_l m_l W_{il} / \rho_l}.$$
(45)

#### 4.7.1.2 Interpolador MLS

O interpolador MLS apresenta ordem *n*, sendo capaz de interpolar exatamente um polinômio de mesma ordem. No entanto, por causa do número crescente de operações e tempo computacional, limita-se a técnica à ordem 1. Para o caso supracitado, o núcleo de suavização é dado por:

$$W_{ij}^{MLS} = \left(\zeta(0)_i + \zeta(1)_i(x_j - x_i) + \zeta(2)_i(y_j - y_i)\right) W_{ij},\tag{46}$$

sendo que o vetor  $\zeta_i$  é calculado, bidimensionalmente, resolvendo um sistema de equações lineares,  $A_{ij}\zeta_i = b$ , sendo:

$$A_{ij} \begin{bmatrix} \zeta(0)_i \\ \zeta(1)_i \\ \zeta(2)_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$
(47)

com:

$$A_{ij} = \sum_{j} \begin{bmatrix} 1 & x_j - x_i & y_j - y_i \\ x_j - x_i & (x_j - x_i)^2 & (x_j - x_i)(y_j - y_i) \\ y_j - y_i & (x_j - x_i)(y_j - y_i) & (y_j - y_i)^2 \end{bmatrix} W_{ij} \frac{m_j}{\rho_j}.$$
 (48)

É interessante notar que, em casos onde a partícula tem poucos vizinhos, a matriz  $A_{ij}$  pode ser singular. Como esse fato impossibilita a aplicação do interpolador de forma plena, faz-se uma verificação da possibilidade de redução da matriz, para uma submatriz que possua determinante não-nulo. Esta característica de envelopamento de  $A_{ij}$  constitui uma das características do interpolador MLS, que baseia-se em uma ordem variável (DILTS, 1999).

Como a ordem do interpolador escolhida é 1, logicamente que a submatriz resultante dá origem a um método de ordem zero, que é o interpolador de Shepard ( $\zeta(1)_i \in \zeta(2)_i$  iguais a zero na equação 46).

#### 4.7.2 Renormalização

Por meio da renormalização, procura-se satisfazer as restrições ao núcleo de suavização (equação 18), independente da escolha do comprimento de suavização ou da organização das partículas. Bonet e Lok (1999) destacam as vantagens das correções, tanto no núcleo de suavização quanto no gradiente. Sendo assim, uma função qualquer pode ser calculada como:

$$\phi_i = \sum_j \phi_j \, m_j \, W_{ij}^{IS} / \rho_j. \tag{49}$$

sendo  $W_{ij}^{IS}$  dado pela equação 45. Essa correção nada mais é do que a aplicação do interpolador de Shepard.

Quanto ao gradiente, tem-se a equação 50:

$$\vec{\nabla}\phi_i = \sum_j \phi_j m_j \tilde{\nabla} W_{ij}^{IS} / \rho_j.$$
(50)

sendo que o termo  $\tilde{\nabla} W_{ij}^{IS}$  é obtido corrigindo o gradiente do núcleo de suavização  $W_{ij}^{IS}$ , fazendo:  $\tilde{\nabla} W_{ij}^{IS} = B_{ij} \nabla W_{ij}^{IS}$ .

O cálculo de  $\nabla W_{ij}^{IS}$  é obtido aplicando o gradiente à equação 45, que resulta em:

$$\nabla W_{ij}^{IS} = \frac{\left(\nabla W_{ij} \sum_{j} m_{j} W_{ij} / \rho_{j}\right) - \left(W_{ij} \sum_{j} m_{j} \nabla W_{ij} / \rho_{j}\right)}{\left(\sum_{j} m_{j} W_{ij} / \rho_{j}\right)^{2}}$$
(51)

Finalmente, para determinar  $\tilde{\nabla}W_{ij}^{IS}$  resta estabelecer  $B_{ij}$ . Essa matriz é obtida impondo a condição  $\int (x_j - x_i)W_{ij}dr_j = 0$  ao gradiente do núcleo de suavização, que resulta em:

$$B_{ij} = \begin{bmatrix} \sum_{j} \frac{m_{j}}{\rho_{j}} \frac{\partial W^{IS}}{\partial r} \frac{x_{j}(x_{i}-x_{j})}{r_{ij}} & \sum_{j} \frac{m_{j}}{\rho_{j}} \frac{\partial W^{IS}}{\partial r} \frac{y_{j}(x_{i}-x_{j})}{r_{ij}} \\ \sum_{j} \frac{m_{j}}{\rho_{j}} \frac{\partial W^{IS}}{\partial r} \frac{x_{j}(y_{i}-y_{j})}{r_{ij}} & \sum_{j} \frac{m_{j}}{\rho_{j}} \frac{\partial W^{IS}}{\partial r} \frac{y_{j}(y_{i}-y_{j})}{r_{ij}} \end{bmatrix}^{-1}$$
(52)

No trabalho de doutoramento em tela, opta-se apenas pela renormalização do gradiente do kernel. Dentre os motivos principais, destaca-se que a correção mista sugerida por Bonet e Lok (1999) (equação 50) pode ser substituída pela aproximação:

$$\vec{\nabla}\phi_i = \sum_j \left(\phi_j - \phi_i\right) m_j \nabla W_{ij} / \rho_j,\tag{53}$$

que ainda campos constantes serão calculados exatamente. Adotando a equação 53, a matriz de correção  $B_{ij}$  fica:

$$B_{ij} = \begin{bmatrix} -\sum_{j} \frac{m_j}{\rho_j} \frac{\partial W^{IS}}{\partial r} \frac{(x_i - x_j)^2}{r_{ij}} & \sum_{j} \frac{m_j}{\rho_j} \frac{\partial W^{IS}}{\partial r} \frac{(x_i - x_j)(y_j - y_i)}{r_{ij}} \\ \sum_{j} \frac{m_j}{\rho_j} \frac{\partial W^{IS}}{\partial r} \frac{(y_i - y_j)(x_j - x_i)}{r_{ij}} & -\sum_{j} \frac{m_j}{\rho_j} \frac{\partial W^{IS}}{\partial r} \frac{(y_i - y_j)^2}{r_{ij}} \end{bmatrix}^{-1}$$
(54)

### 4.8 LEIS DE ESTADO PARA PRESSÃO

A modelagem da pressão é um ponto delicado da técnica *SPH* aplicada a escoamentos incompressíveis, devido à falta de controle explícito da massa específica local. Como o *SPH* converge bem para escoamentos compressíveis, aproxima-se o caso incompressível por um escoamento quase-compressível através de uma equação de estado para a pressão. Essa equação de estado é da forma  $p = p(\rho)$  e, além de fechar o sistema de equações do *SPH*, mantém sua característica essencialmente explícita. Outras técnicas, como o *MPS* (e também o ISPH, ou *SPH* Incompressível), dispensam a utilização de uma equação de estado pois apostam na solução implícita da equação da pressão (equação de Poisson,  $\nabla^2 \phi + K = 0$ , *K* é uma constante), gerando naturalmente um cenário de incompressibilidade.

Cabe lembrar que a aproximação para o caso incompressível está intimamente ligada à escolha da celeridade do som da simulação. Isso porque, em escoamentos com baixo número de Mach (*Ma*), as variações de massa específica são proporcionais a  $Ma^2$ , sendo *Ma* dado por:

$$Ma = u/c \tag{55}$$

Então, restringindo-se as velocidades no fluido para que Ma seja da ordem de  $O(10^{-1})$ , garante-se que as variações de massa específica sejam na ordem de 1%. Normalmente, a celeridade do som utilizada na simulação segue esse procedimento, isso porque a utilização do valor físico da celeridade do som implicaria em um tempo de processamento muito maior, sem no entanto qualquer ganho significativo. Em outras palavras, o valor de *c* na simulação deve ser suficientemente alto para reduzir as oscilações de ordem numérica (ex: simulação de escoamentos ideais) e suficientemente baixo para permitir que o modelo tenha um passo de tempo razoável. Assim, via de regra, considera-se um valor *c* bem menor do que o seu valor real. É comum adotar c = 10V, sendo *V* a máxima velocidade encontrada na simulação.

Existem diversas propostas para a equação de estado. Uma das formulações mais comuns é aquela dada pela equação 56, sendo a relação entre pressão e massa específica dada por:

$$p_i = \frac{c^2 \rho_0}{7} \left[ \left( \frac{\rho_i}{\rho_0} \right)^7 - 1 \right]$$
(56)

Laigle, Lachamp e Naaim (2007) utilizam uma expressão bem simples para a pressão (equação 57), e segundo os autores resultados satisfatórios foram obtidos da análise de escoamentos não-Newtonianos sobre obstáculos:

$$p_i = p_0 + c^2 (\rho_i - \rho_0) \tag{57}$$

#### 4.9 VISCOSIDADE ARTIFICIAL

Observa-se, em problemas de escoamento regidos pela equação de Euler sem qualquer tipo de viscosidade, oscilações que não correspondem à física, geralmente ocasionadas por uma difusão numérica de pequena ordem. Assim como em outros métodos, adiciona-se à equação de quantidade de movimento um termo para anular essas oscilações, correspondendo à conhecida viscosidade numérica. No *SPH*, vários termos de correção já foram propostos (LACHAMP, 2003; MORRIS, 1996), mas aquele que é mais largamente utilizado é uma espécie de pressão viscosa, dada por:

$$\Pi_{ij} = \begin{cases} \frac{-\alpha \bar{c}_{ij} \tilde{\mu}_{ij} + \beta \tilde{\mu}_{ij}^2}{\bar{\rho}}, & \text{se} \quad \vec{u}_{ij} \cdot \vec{r}_{ij} < 0\\ 0, & \text{se} \quad \vec{u}_{ij} \cdot \vec{r}_{ij} \ge 0 \end{cases}$$
(58)

com:

$$\tilde{\mu}_{ij} = \frac{h \vec{u}_{ij} \cdot \vec{r}_{ij}}{r_{ij}^2 + 0.01 \, h^2} \tag{59}$$

Introduzindo o termo  $\Pi_{ij}$  (equação 58) na equação de quantidade de movimento (equação 38), resulta:

$$\frac{d\vec{u}_i}{dt} = -\sum_j m_j \left(\frac{p_i + p_j}{\rho_i \rho_j} + \Pi_{ij}\right) \vec{\nabla}_i W_{ij} \tag{60}$$

Pode-se perceber pela equação 60 o motivo da denominação de pressão viscosa ou pressão artificial para o termo  $\Pi_{ij}$ , uma vez que é inserido diretamente no termo de gradiente de pressões da equação de quantidade de movimento. Recentemente, Kajtar e Monaghan (2008) propõem um novo tipo de equação para a viscosidade artificial, que é dada por:

$$\Pi_{ij} = -\frac{\alpha \, v_{sig} \vec{u}_{ij} \cdot \vec{j}}{\bar{\rho}_{ij} r_{ij}} \tag{61}$$

Prova-se que as duas formulações para viscosidade artificial (equações 58 e 61) são idênticas (pode ser verificado no capítulo 6, seção 6.1.2, p. 72).

Percebe-se, pela maneira como a viscosidade artificial é equacionada, que ela é diferente de zero apenas quando  $\vec{u}_{ij} \cdot \vec{r}_{ij} \ge 0$ . Isso ocorre porque quando o produto escalar em destaque é negativo, as partículas estão se aproximando. Nesta situação, a viscosidade artificial é positiva, gerando uma força de repulsão entre as partículas. No caso em que o produto escalar é positivo, as partículas estão se afastando e a viscosidade artificial é negativa, gerando uma força de atração entre as partículas. Dessa forma, é comum considerar a viscosidade artificial apenas quando as partículas aproximam-se umas das outras, anulando seu efeito de atração no caso de distanciamento.

## 4.10 CONDIÇÕES DE CONTORNO

Originalmente, o *SPH* foi concebido para tratar de problemas no domínio astrofísico, portanto em problemas com condições de fronteira menos restritivas que fronteiras sólidas, por

exemplo. Além disso, não há a necessidade de estabelecer certas condições de contorno. Por exemplo, não é necessário estabelecer a condição dinâmica ou cinemática na superfície livre. Essas condições estão, de certa forma, incorporadas à formulação do método (OGER et al., 2007).

Entretanto, na grande maioria dos problemas em Engenharia, lida-se com condições de contorno mais restritivas (impermeabilidade de paredes, condição de aderência, etc). Tais condições de contorno não são satisfeitas automaticamente pelas equações do método. Dessa forma, o tratamento das fronteiras recebe atenção especial e seguem basicamente duas vertentes: a adoção das partículas fantasma (*ghost particles*) ou fronteiras reativas (*boundary forces*).

#### 4.10.1 Partículas fantasma

No caso das partículas fantasma, quando uma partícula aproxima-se da fronteira, há o espelhamento da partícula, criando uma partícula fictícia com a mesma distância normal à parede. Essa partícula fictícia, ou partícula fantasma, possui as mesmas características da partícula real, entretanto o sentido da velocidade segue a condição de contorno da parede. Esse artifício aumenta a vizinhança da partícula próxima à parede, garantindo unicidade do somatório do núcleo de suavização (equação 18). A figura 5 exemplifica como são criadas as partículas fantasma para simular uma condição de contorno.



Fonte: Do próprio autor.

De acordo com a condição de impenetrabilidade, a componente normal da velocidade da partícula fantasma deve ser contrária à da partícula real. Sendo assim:

$$\vec{u_{gh}} \cdot \vec{n} = -\vec{u_i} \cdot \vec{n},\tag{62}$$

para fronteiras que não se movem.

Já para a componente tangencial da velocidade da partícula fantasma, existem basicamente três maneiras diferentes de representação, considerando a fronteira em repouso:

- a)  $\vec{u_{gh}} \cdot \vec{t} = -\vec{u_i} \cdot \vec{t}, \forall i$
- b)  $\vec{u_{gh}} \cdot \vec{t} = \vec{u_i} \cdot \vec{t}, \forall i$
- c)  $\vec{u_{gh}} \cdot \vec{t} = 0, \forall i$

Na primeira forma, a componente tangencial da velocidade da partícula fantasma é igual e oposta à da partícula fluida. Esta seria a melhor tradução da condição de contorno do tipo aderência (*no-slip*). Já a segunda forma lança mão da simetria, ou espelhamento das propriedades. Esta condição de contorno representa bem a condição de deslizamento (*free-slip*) (COLA-GROSSI, 2004).

Finalmente, a terceira forma de representar a componente tangencial da velocidade das partículas fantasma é considerá-la com a mesma velocidade da fronteira (velocidade relativa nula), qualquer que seja *i*. Embora não existe equivalência matemática para esse conceito, podese considerar que o efeito que essa imposição causa ao escoamento é da aderência.

Rodriguez-Paz e Bonet (2004) abordam a condição de aderência para fluidos Binghamianos, utilizando o *SPH*, como uma compatibilidade de forças na fronteira, adicionando o atrito do fundo de acordo com o atrito interno do material escoante. Além disso, os autores também discorrem a respeito da possibilidade das partículas escaparem do domínio, passando através de uma fronteira impermeável. Nesta situação, considera-se que há uma condição de reflexão, de maneira que a partícula é reintroduzida no domínio em uma posição que depende da elasticidade da fronteira.

Takeda, Miyama e Sekiya (1994) utilizam uma aproximação que mescla a atribuição de velocidades das partículas fantasma com partículas fixas. Os autores, para estabelecer as condições de contorno cinemáticas nas fronteiras do escoamento Poiseuille plano criam, de forma aleatória, partículas fora do domínio fluido, as chamadas partículas imaginárias. Quando uma partícula real tem uma imaginária como vizinha, a velocidade da imaginária é calculada com:  $\vec{u_{gh}} = -d_B/d_A\vec{u_i}$ , onde  $d_B$  é a distância normal da partícula imaginária gh à fronteira e  $d_A$  é a distância normal da partícula real i à fronteira. A proposta de Takeda, Miyama e Sekiya (1994) garante uma interpolação linear da velocidade entre as partículas i e gh de tal forma que, na fronteira, a velocidade é nula. Morris, Fox e Zhu (1997) utilizam uma equação semelhante, limitando o valor de  $\vec{u_{gh}}$  em 1, $5\vec{u_i}$ .

Recentemente, em um estudo feito por Maciá et al. (2011), os autores verificaram o cálculo do laplaciano da velocidade na fronteira em escoamentos newtonianos no *SPH*. A despeito dos cálculos incorretos, os autores apontaram que a condição de aderência apresentada por Takeda, Miyama e Sekiya (1994) é a que mais se aproxima do valor esperado, dentre as formas usuais de representar esta condição de contorno. A implementação das partículas fantasma seguiu os preceitos apontados anteriormente, através de uma matriz de transformação. No capítulo 6 serão feitos vários testes numéricos utilizando as partículas fantasma.

#### 4.10.2 Fronteiras reativas

No caso de fronteiras reativas, utiliza-se o conceito de atração e repulsão molecular (MONAGHAN; KOS, 1999). Sendo assim, a fronteira é representada por uma linha de partículas reais que exercem uma força a qualquer partícula que entrar em seu raio de vizinhança.

Em termos de equacionamento, as fronteiras reativas são tratadas como proposto por Peskin (ou, mais precisamente, por Sirovich, já que o autor considera as fronteiras não elásticas, diferentemente de Peskin) (MONAGHAN; KAJTAR, 2009). Segundo estes autores, não é feita uma analogia matemática das condição de contorno, mas sim adiciona-se um termo à equação fonte (quantidade de movimento) cujo efeito global seja o mesmo. Em outras palavras, não é feita uma compatibilidade cinemática correspondente à condição de contorno na fronteira ( $\vec{u}$  normal à parede nula), mas sim uma compatibilidade de forças. Sabe-se que com esse artifício, Peskin (2002) vem obtendo sucesso com o Método de Fronteira Imersa na representação de sistemas cardiovasculares e aplicações na biomecânica em geral. Inserindo o termo representativo da força exercida pela parede na equação de quantidade de movimento (60), tem-se:

$$\frac{d\vec{u}_i}{dt} = -\sum_j m_j \left(\frac{p_i + p_j}{\rho_i \rho_j} + \Pi_{ij}\right) \vec{\nabla}_i W_{ij} + \sum_k \left(\vec{f}_{ik} - m_k \Pi_{ik} \vec{\nabla}_i W_{ik}\right)$$
(63)

sendo que a soma em j abrange as partículas fluidas enquanto k as partículas de parede.

Ressaltam-se os problemas oriundos do acréscimo de um termo suplementar à equação de quantidade de movimento, em problemas que exigem a estacionaridade como condição inicial. Nessas situações, frequentemente faz-se um aquecimento do modelo, através de um amortecimento artificial, para que as partículas se acomodem e que a posição de equilíbrio seja naturalmente atingida.

O desenvolvimento das fronteiras reativas acontece, naturalmente, quando o *SPH* começa a ser aplicado a problemas em superfície livre (MONAGHAN, 1994). Inicialmente, a força da parede assume a forma:

$$\vec{f}_{ik} = K\left(\left(\frac{\Delta x}{\|\vec{r}_{ik}\|}\right)^{p_1} - \left(\frac{r_0}{\|\vec{r}_{ik}\|}\right)^{p_2}\right) \frac{\vec{r}_{ik}}{\|\vec{r}_{ik}\|^2}$$
(64)

sendo que  $p_1$  e  $p_2$  devem satisfazer a condição  $p_1 > p_2$ . Para os valores típicos, são reportados (MONAGHAN, 1994)  $p_1 = 4$  e  $p_2 = 2$  e K é escolhido conforme o tipo de problema. Para o caso de ruptura de barragens, toma-se  $K = gH_0$ .

Posteriormente, Monaghan e Kos (1999) descrevem a força exercida pela parede como uma composição de duas parcelas, uma vertical (Q) e uma horizontal (P), sendo:

$$\vec{f}_{ik} = P(\psi_{ik}) Q(\xi_{ik}) \vec{n}$$
(65)

A figura 6 ilustra uma situação com o emprego das fronteiras reativas.



**Figura 6** – Croqui esquemático com as distâncias horizontais ( $\psi$ ) e verticais ( $\xi$ ) entre as partículas da fronteira e fluida.

Fonte: Do próprio autor.

Já Monaghan, Kos e Issa (2003) alteram os valores dos componentes  $Q \in P$  propostos em Monaghan e Kos (1999), inserindo uma formulação que varia com a distância, semelhante ao comportamento do núcleo de suavização. Uma nota importante e inovadora das fronteira reativas apresentadas por Monaghan, Kos e Issa (2003) é o tratamento do escoamento nos cantos da fronteira. Os autores modificam o vetor normal se a partícula fluida está na região entre as normais das paredes que compõe o canto. O vetor normal, nesse caso, será dado pelo vetor unitário que liga o canto à partícula fluida. Notam-se, pela alteração do vetor normal e a utilização de uma parcela na composição da força da parede semelhante a um núcleo de suavização, os preconizadores da formulação de fronteira radial, apresentada em Kajtar e Monaghan (2008).

Finalmente, Kajtar e Monaghan (2008) alteram a forma de como a força de fronteira é calculada. Inicialmente, os autores mostram, através da transformada de Fourier da força da fronteira, que esta é proporcional à função do núcleo de suavização. Posteriormente, os autores mostram que a força tangencial tradicionalmente inserida nos modelos têm baixa intensidade se comparada com a força radial. Sendo assim, Kajtar e Monaghan (2008) desprezam os termos tangenciais da força de fronteira (*P* na equação 65) e chegam a:

$$\vec{f}_{ik} = \frac{0,01}{\beta_m} c_i^2 \vec{r}_{ik} W(r_{ik}/h)$$
(66)

#### 4.11 INSTABILIDADES NO SPH

De modo geral, podem surgir algumas instabilidades no *SPH*, um delas sendo caracterizada por um aglutinamento de partículas que não tem correspondência com nenhum aspecto físico. Esse aglutinamento acontece devido a pressões negativas, induzidas pela equação de estado, por isso é conhecida como instabilidade de tensão (*tensile instability*). Um dos primeiros trabalhos que identificaram a instabilidade de tensão foi Swegle, Hicks e Attaway (1995), através de uma análise para definir os critérios de estabilidade do *SPH*. Os autores utilizaram como referências o estado de tensão no escoamento e a derivada segunda do núcleo de suavização. Apesar de apontar as fontes da instabilidade, que são basicamente o aparecimento de pressões negativas, os autores não propõe um método para a sua correção, além de recomendar cuidados adicionais na escolha do núcleo de suavização. Seguiram-se posteriormente estudos a respeito da estabilidade do *SPH*, tal como Morris (1996).

Mais tarde, Monaghan (2000) propõe que a instabilidade de tensão pode ser eliminada a partir da inserção de uma tensão artificial. A ideia é garantir que o aglutinamento seja evitado, a partir de um termo adicional de repulsão entre partículas. Esse termo seria então somado ao balanço de quantidade de movimento (equação 60), e representa a repulsão física entre os átomos em um sólido real. No caso de escoamentos de fluidos, essa tensão artificial se reduz a uma pressão artificial, dada por:

$$R_{ij} = \left(e_1 \frac{|p_i|}{\rho_i \rho_j} + e_2 \frac{|p_j|}{\rho_i \rho_j}\right) \left(\frac{W(r_{ij})}{W(\Delta x)}\right)^4,\tag{67}$$

sendo  $e_1 = 0,01$  caso  $p_i > 0$ , caso contrário  $e_1 = 0,2$ . Da mesma forma,  $e_2 = 0,01$  caso  $p_j > 0$ , caso contrário  $e_2 = 0,2$ .

A equação de quantidade de movimento fica então, sem considerar as condições de fronteira e as forças de corpo:

$$\frac{d\vec{u}_i}{dt} = -\sum_j m_j \left( \frac{p_i + p_j}{\rho_i \rho_j} + \Pi_{ij} + R_{ij} \right) \vec{\nabla}_i W_{ij}$$
(68)

#### 4.12 EVOLUÇÃO TEMPORAL

Considerando, inicialmente, que o sistema de equações do *SPH* pode ser escrito na forma:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{u} \tag{69}$$

$$\frac{du}{dt} = \vec{\mathscr{F}} \tag{70}$$

$$\frac{d\rho}{dt} = \mathscr{D} \tag{71}$$

e no caso de considerar a variação do comprimento de suavização h:

$$\frac{dh}{dt} = \mathscr{H}.\tag{72}$$

Para solucionar esse sistema de equações explícitas, pode ser aplicado qualquer método de integração de equações diferenciais de primeira ordem, como o *Leap-Frog* ou Preditor-Corretor, desde que a máxima ordem do erro do método seja  $O(\Delta h^2)$ , sendo  $\Delta h$  o incremento do método. A limitação com relação à ordem do erro se dá, principalmente, pelo erro intrínseco do *SPH*. Sabe-se, por expansão em séries de Taylor, que o *SPH* possui um erro da ordem de  $O(h^2)$ , portanto não há razão para utilizar métodos de integração de ordem superior a  $O(\Delta h^2)$ .

Monaghan (2005) cita que as propriedades conservativas do método de integração são mais atrativas do que uma elevada ordem de precisão. Para apoiar essa assertiva, Monaghan (2005) fez uma simulação utilizando dois métodos de integração: o Runge-Kutta de 4<sup>*a*</sup> ordem e um integrador do tipo Verlet. Embora seja de segunda ordem, os resultados obtidos com o integrador Verlet são melhores que aqueles obtidos com o esquema Runge-Kutta. A justificativa reside no fato de que o integrador Verlet conserva a quantidade de movimento angular e é reversível. Faz-se importante ressaltar, entretanto, que há certa relação entre as condições de contorno e os métodos de integração. Nas simulações feitas por Monaghan (2005), foram utilizadas as condições de contorno do tipo fronteira reativa.

Ilustram-se, brevemente, os passos de alguns dos métodos de integração utilizados

#### 4.12.1 Preditor-Corretor

O método Preditor-Corretor, ou Euler Melhorado, pode ser sintetizado nos seguintes passos:

- a) Calcular  $\vec{u}, \vec{\mathscr{F}} \in \mathscr{D}$  no instante atual (*t*);
- b) Calcular  $\vec{u}$ ,  $\vec{\mathscr{F}}$  e  $\mathscr{D}$  no instante intermediário ( $t + \Delta t/2$ );
- c) Os valores em  $t + \Delta t$  serão dados pela equação do método:

$$\vec{r}^{t+\Delta t} = \vec{r}^{t} + \frac{1}{2}\Delta t \left[ \vec{u}^{t} + \vec{u}^{t+\Delta t/2} \right]$$
 (73)

$$\vec{u}^{t+\Delta t} = \vec{u}^{t} + \frac{1}{2} \Delta t \left[ \vec{\mathscr{F}}^{t} + \vec{\mathscr{F}}^{t+\Delta t/2} \right]$$
 (74)

$$\rho^{t+\Delta t} = \rho^{t} + \frac{1}{2}\Delta t \left[ \mathscr{D}^{t} + \mathscr{D}^{t+\Delta t/2} \right]$$
(75)

## 4.12.2 Método Verlet

O método de integração simplético Verlet utiliza-se das características conservativas do integrador simplético (KAJTAR; MONAGHAN, 2008). Este método pode ser resumido nos seguintes passos:

- a) Calcular  $\vec{\mathscr{F}}^t \in \mathscr{D}^t$  (*t* é o instante atual);
- b) Calcular  $\vec{r}^{t+\Delta t/2} \in \rho^{t+\Delta t/2}$  no instante intermediário, fazendo:

$$\vec{r}^{t+\Delta t/2} = \vec{r}^{t} + \frac{1}{2} \Delta t \vec{u}^{t},$$
 (76)

$$\rho^{t+\Delta t/2} = \rho^t + \frac{1}{2} \Delta t \mathscr{D}^t; \qquad (77)$$

- c) Com as coordenadas no tempo intermediário definidas, pode-se proceder o cálculo de  $\vec{\mathscr{F}}^{t+\Delta t/2}$ :
- d) A última etapa consiste em determinar  $\vec{u}^{t+\Delta t}$  e  $\vec{r}^{t+\Delta t}$ , fazendo:

$$\vec{u}^{t+\Delta t} = \vec{u}^{t} + \Delta t \vec{\mathscr{F}}^{t+\Delta t/2}, \tag{78}$$

$$\vec{r}^{t+\Delta t} = \vec{r}^{t+\Delta t/2} + \frac{1}{2}\Delta t \vec{u}^{t+\Delta t};$$
(79)

- e) Com  $\vec{u}^{t+\Delta t}$  e  $\vec{r}^{t+\Delta t}$ , calcula-se  $\mathscr{D}^{t+\Delta t}$ ;
- f) Finalmente, determina-se  $\rho^{t+\Delta}$  fazendo:

$$\rho^{t+\Delta} = \rho^{t+\Delta t/2} + \frac{1}{2} \Delta t \mathscr{D}^{t+\Delta t}.$$
(80)

## 4.12.3 Runge-Kutta

O método de Runge-Kutta de segunda ordem é empregado em algumas simulações, ao longo deste trabalho. O método pode ser descrito como:

- a) Calcular  $\vec{\mathscr{F}}^t \in \mathscr{D}^t$  no instante atual;
- b) Calcular  $\vec{r}^{t+\Delta t/2}$ ,  $\vec{u}^{t+\Delta t/2}$  e  $\rho^{t+\Delta t/2}$  no instante intermediário;

$$\vec{r}^{t+\Delta t/2} = \vec{r}^{t} + \frac{1}{2}\Delta t \, \vec{u}^{t},$$
(81)

$$\vec{u}^{t+\Delta t/2} = \vec{u}^{t} + \frac{1}{2}\Delta t \,\vec{\mathscr{F}}^{t}, \qquad (82)$$

$$\rho^{t+\Delta t/2} = \rho^t + \frac{1}{2}\Delta t \,\mathscr{D}^t; \qquad (83)$$

- c) Com os valores intermediários, calcular  $\vec{\mathscr{F}}^{t+\Delta t/2}$  e  $\mathscr{D}^{t+\Delta t/2}$ :
- d) Finalmente, calcular as grandezas no tempo final:

$$\vec{r}^{t+\Delta t} = \vec{r}^{t} + \frac{1}{2} \Delta t \, \vec{u}^{t+\Delta t/2}, \qquad (84)$$

$$\vec{u}^{t+\Delta t} = \vec{u}^{t} + \frac{1}{2} \Delta t \, \vec{\mathscr{F}}^{t+\Delta t/2}, \qquad (85)$$

$$\rho^{t+\Delta t} = \rho^{t} + \frac{1}{2} \Delta t \, \mathscr{D}^{t+\Delta t/2}; \qquad (86)$$

As equações de evolução temporal valem para todas as partículas fluidas. Para casos especiais, por exemplo, na presença de um sólido com movimento livre, devem ser observadas restrições adicionais, que serão tratadas oportunamente (seção 7.2.3, p. 95). As condições de estabilidade numérica também variam de problema para problema.

# 4.13 COMPARAÇÃO ENTRE MÉTODOS NUMÉRICOS: SPH e MPS

É interessante notar que, embora seja um método que reproduza bem a incompressibilidade do escoamento, a função núcleo do *MPS* não possui derivada primeira contínua, o que resulta em maior oscilação para um mesmo número de partículas em comparação com o *SPH* (MONAGHAN; KOS; ISSA, 2003).

Há, também, uma variante do *SPH* que descarta a necessidade de uma equação de estado para a pressão, assim como no *MPS*. Shao (2006) usa essa variante do *SPH* para analisar a quebra da onda e galgamento em barragens, incluindo efeitos turbulentos em sua modelagem. Diante do exposto, decidiu-se utilizar o *SPH* como método numérico neste trabalho.

## **5 ESCOAMENTO DE FLUIDOS IDEAIS**

De modo a validar o código apresentado na Parte I, apresentam-se testes clássicos da literatura para geração de ondas e escoamentos em superfície livre. Nesta fase, serão avaliados os casos de ruptura de barragens (*dam break*), a geração de ondas por meio de batedor (*wavemaker*) e o esvaziamento de um reservatório, através de um orifício. Nos problemas alinhavados, observa-se principalmente o comportamento do código no que tange à representação de escoamentos ideais bidimensionais.

#### **5.1** RUPTURA DE BARRAGENS

O problema típico de ruptura de barragem ou barreira é caracterizado por uma porção de líquido retido por uma comporta, que subitamente é removida. A massa liquida avança, então, como uma onda, com velocidade da frente definida. Tal categoria de fenômeno apresenta grande interesse do ponto de vista de Engenharia, e devido à facilidade de implementação, é comumente usado como um caso teste para verificação de códigos numéricos em desenvolvimento. A figura 7 ilustra um ensaio experimental do problema em questão.

**Figura 7** – À esquerda, um croqui esquemático de uma ruptura de barragens, enquanto que à direita, observa-se o líquido retido, em ensaio experimental.



Fonte: Do próprio autor.

Fonte: Minussi (2007).

Utilizam-se, neste primeiro teste, os resultados obtidos por Martin e Moyce (1952). Os autores usaram um canal de pequenas dimensões,  $5,72 \times 5,72 \times 12,7$  cm, de modo que a altura e a largura do fluido retido pudessem ser alteradas, de modo a possibilitar a obtenção de diversas relações geométricas.

#### 5.1.1 Descrição do modelo numérico

Representam-se as variáveis do problema de ruptura de barragens através da altura do material retido, tal como ilustrado na figura 7. O material retido é modelado como um fluido ideal, com massa específica  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ . A lâmina d'água varia nos ensaios em dois valores: 2,86 e 5,72 cm. Os efeitos da viscosidade artificial estão presentes, com  $\alpha = 0,3$  e  $\beta = 0$ .

O núcleo de suavização usado é o *spline* cúbico 2D, cujo comprimento de suavização vale  $h = 1, 2\Delta x$ , sendo que  $\Delta x$  variou entre 1,25 e 2,5 mm, com o propósito de manter a resolução constante (ou seja, o número de partículas distribuídas na vertical). A celeridade do som da simulação vale c = 23 m/s.

As condições de contorno são representadas pelas fronteiras reativas, sendo que a força na parede é dada pelo produto de um termo horizontal (P) e outro vertical (Q, apresentados na equação 65), são dados por:

$$P(\psi) = \begin{cases} 1 - \frac{\psi}{\Delta p}, & \text{se} \quad 0 < \psi < \Delta p \\ 0, & \text{se} \quad 0 \ge \psi \ge \Delta p \end{cases}$$
(87)

$$Q(\xi) = \begin{cases} \frac{2}{3}K, & \text{se } 0 < \xi/h < 2/3\\ K\left(2\frac{\xi}{h} - \frac{3}{2}\left(\frac{\xi}{h}\right)^2\right), & \text{se } 2/3 < \xi/h < 1\\ \frac{1}{2}K(2 - \xi/h)^2, & \text{se } 1 < \xi/h < 2\\ 0, & \text{se } \xi \ge 2 \end{cases}$$
(88)

sendo  $K = 0.02 c^2 / \xi$ . Como condição inicial, foi imposto o gradiente de pressão teórico para todas as partículas fluidas. Usa-se a correção XSPH para deslocamento das partículas, com  $\varepsilon = 0.5$ , e a clássica equação de estado para a pressão (equação 56).

O passo de tempo  $\Delta t$  obedece às restrições impostas pela condição CFL (Courant-Friedrichs-Lewy) e é o menor valor entre  $\Delta t_1$  e  $\Delta t_2$ , sendo  $\Delta t_1 = h_i/(c+0,6\alpha)$  calculado para todas as partículas fluidas e  $\Delta t_2 = y/(0, 1c)$ , calculado para todas as partículas interagindo com a fronteira. O integrador numérico utilizado foi do tipo Preditor-Corretor (apresentado na seção 4.12.1).

#### 5.1.2 Resultados

De modo a facilitar na organização, os resultados são agrupados e apresentados com mesma relação  $H_0/L_0$ . Sendo assim, para o caso de  $H_0/L_0 = 1$ , foram escolhidas duas configurações: uma com  $H_0 = 2,86$  cm e outra com  $H_0 = 5,72$  cm. No caso de  $H_0 = 2,86$  cm, tem-se a respectiva simulação *SPH*, contando com quase 1500 partículas para representação do fluido escoante e fronteiras do problema. A figura 8a mostra a comparação dos resultados obtidos com os resultados experimentais de Martin e Moyce (1952). Já na figura 8b, faz-se a mesma comparação, mas para o segundo caso, com  $H_0 = 5,72$  cm, contando com uma simulação com pouco mais de 1500 partículas.

**Figura 8** – Comparação numérico-experimental, para uma relação  $H_0/L_0 = 1$  com (a)  $H_0 = 2,86$  cm e (b)  $H_0 = 5,72$  cm.



Fonte: Do próprio autor.

Para o caso  $H_0/L_0 = 2$ , foram também ensaiados para duas composições geométricas:  $H_0 = 5,72$  cm e  $H_0 = 2,86$  cm. No primeiro caso, foram geradas partículas com espaçamento médio de 1,25 mm, o que resultou em aproximadamente de 2800 partículas. Mantendo o mesmo  $\Delta x$ , para a segunda altura de material retido, obteve-se pouco mais de 1400 partículas. Os resultados, com a respectiva simulação numérica, são mostrados nas figuras 9a e 9b.

**Figura 9** – Comparação numérico-experimental, para uma relação  $H_0/L_0 = 2$  com (a)  $H_0 = 5,72$  cm e (b)  $H_0 = 2,86$  cm.



Fonte: Do próprio autor.

Nas figuras 8 e 9, os resultados numéricos foram normalizados, sendo  $Z = z/L_0$  o alcance adimensional da frente, e  $T = t\sqrt{H_0g/L_0^2}$  o tempo adimensional. Tanto nos dados experimentais quanto nos numéricos, há um ajuste no zero, mediante a incapacidade do aparato experimental na determinação precisa do tempo inicial do ensaio. Em termos práticos, esse procedimento apenas translada a envoltória obtida para o alcance da frente. É possível notar em algumas figuras uma repentina mudança de declividade na tendência dos resultados experimentais. Esse fato pode ser explicado pela influência dos aspectos viscosos do escoamento, uma vez que as dimensões características do ensaio e notadamente da frente da ruptura são relativamente pequenas. No entanto, a análise de fluido ideal restringe-se à etapa inercial da ruptura, evidenciada nos primeiros momentos do fenômeno. Nesta região, principalmente nos casos em que a frente de ruptura possui menor razão  $H_0/L_0$  (figuras 8a e 8b), há concordância entre resultados experimentais e numéricos. Essas verificações comprovam a validade do modelo para ruptura de barragem em fluido ideal.

## 5.2 GERAÇÃO, PROPAGAÇÃO E QUEBRA DE ONDAS

É sabido que o padrão de ondas incidente em áreas costeiras é de fundamental importância, não só pela determinação de zonas com baixa influência das ondas, mas também para o dimensionamento de obras de contenção e proteção.

A dinâmica das ondas em áreas costeiras, objeto de estudo da Hidráulica Marítima, está assentada, de modo geral, na existência de um potencial de velocidades donde derivam as propriedades cinemáticas do escoamento. Uma aproximação analítica apresenta dificuldades, uma vez que as equações que regem o problema da onda, com diminuição da profundidade, têm forte característica não-linear. Nesse contexto, avaliar ainda a dinâmica da quebra da onda, torna o problema ainda mais complexo. Modelos numéricos tradicionais aplicados ao problema em foco apresentam dificuldades, mesmo em se tratando de modelos munidos de malhas adaptativas.

Sendo assim, pretende-se discutir as seguintes fases: geração, propagação e quebra das ondas.

#### 5.2.1 Fase de geração

A geração das ondas, na natureza, ocorre em alto mar, em regiões distantes e que sofrem a ação constante dos ventos. Em ensaios laboratoriais, é praticamente impossível reproduzir o mesmo cenário natural, portanto recorre-se a geradores ou batedores de onda. Tais equipamentos são instalados na extremidade de um canal, que gera ondas a partir de seus movimentos, cuja frequência e amplitude dependem do tipo de onda desejada. Existem basicamente três tipos de geradores de onda: os do tipo pistão, os *flaps* e os de cunha. Na outra extremidade do canal, normalmente é instalada uma praia amortecedora, com declividade de 30°, que é responsável pela minimização dos efeitos da onda refletiva. De plano, pode-se observar um esquema do ensaio de geração de ondas através da figura 10.

Serão feitas comparações, inicialmente, entre as características da onda gerada numericamente com resultados teóricos, advindos da teoria de onda de pequena amplitude. Em segundo lugar, a onda gerada será confrontada com os resultados da teoria dos geradores de onda **Figura 10** – Disposição geral para geração de ondas: (a) croqui esquemático e (b) domínio discretizado.





#### (DEAN; DALRYMPLE, 1991).

#### 5.2.1.1 Teoria de pequena amplitude

Sabe-se que a relação teórica entre a frequência do gerador com o comprimento de onda é dada por:

$$w^2 = g k_0 \tanh(k_0 d) \tag{89}$$

Sendo assim, foram simuladas cinco frequências diferentes do gerador, sendo que o comprimento de onda numérico foi medido a partir das imagens geradas na etapa de pósprocessamento. A lâmina d'água foi mantida constante, sendo d = 0,15 m e a massa específica do fluido  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ .

#### 5.2.1.2 Modelo numérico

A simulação da geração da onda considera o escoamento do fluido como ideal, assim como a teoria de pequena amplitude. Mesmo nesses casos, é necessária a presença da viscosidade artificial, com  $\alpha = 0,01$  e  $\beta = 0$ . A celeridade do som da simulação foi adotada como c = 10 m/s.

O núcleo de suavização usado é o *spline* cúbico 2D, com comprimento de suavização vale  $h = 1, 2\Delta x$ , sendo  $\Delta x = 1$  cm. Nessas condições, foram geradas quase 6 mil partículas, distribuídas entre partículas fluidas e de fronteira, em uma grade quadrada de lado  $\Delta x$ , em um canal de dimensões reduzidas. As condições de contorno são as fronteiras reativas, sendo a força da parede dada por Monaghan, Kos e Issa (2003). A condição inicial é o perfil de pressão teórico, com as partículas em repouso ( $\vec{u} = \vec{0}$ ). A correção XSPH, com  $\varepsilon = 0, 5$ , e a equação de estado para a pressão (equação 56), são usadas.

As partículas, quando dispostas no canal para simulação, podem apresentar uma pequena perturbação, devido à não estacionaridade das partículas, fruto da formulação de fronteira utilizada. Por esse motivo, uma simulação teste foi empreendida, apenas para avaliar essa oscilação, sem a influência do gerador de ondas. No entanto, foi observada perturbação na ordem  $O(10^{-3})$  na posição central do canal.

#### 5.2.1.3 Resultados

A figura 11 mostra a comparação entre os resultados obtidos. Optou-se por um canal de dimensões reduzidas (4 m de comprimento), com registro da elevação da superfície livre obtido na posição central. Desta forma, limita-se a frequência do gerador de ondas de tal forma que o máximo comprimento de onda gerado seja menor que a metade da dimensão do canal.

Figura 11 – Comparação teórico-numérica da frequência da onda gerada pelo batedor.



Fonte: Do próprio autor.

Justificam-se os erros na comparação teórico-numérica tendo como base a profundidade relativa (d/L) e declividade (H/L) das ondas geradas. O valor de d/L está próximo do limite entre águas intermediárias e águas rasas. Sabe-se que a teoria de pequena amplitude, base para obtenção da equação 89, representa bem as ondas em regime de águas profundas, não repetindo o mesmo grau de sucesso para ondas em regime de águas rasas.

Além disso, os valores de declividade figuram entre 1,5 e 8%, considerados altos para comparação com a teoria linear. Todavia, a configuração necessária para simular um caso perto do ideal seria desvantajoso do ponto de vista numérico, pois demandaria uma quantidade maior de partículas (aumento considerável da lâmina normal). Normalmente, considerando apenas uma máquina (processamento não paralelizado), limita-se a simulação em 20 mil partículas.

Cabe ainda lembrar que, em problemas com condição de contorno periódica, pode aparecer a instabilidade de tensão (*tensile instability*). Evitando a instabilidade mencionada, simulações numéricas foram realizadas e comparadas com a proposta teórica de Dean e Dalrymple (1991) (equação 90).

Mesmo com os inconvenientes citados, a configuração apresentada foi escolhida principalmente pelo tempo de processamento e número de partículas que uma simulação em águas profundas necessitaria. Consideram-se os resultados satisfatórios, dentro do erro esperado em projetos de Engenharia que, a exceção de uma frequência com erro relativo de 10,44%, todos os erros obtidos foram menores que 10%.

#### 5.2.1.4 Teoria do gerador de onda

A relação teórica entre altura de onda e deslocamento do gerador (H/S) do tipo pistão, de acordo com o equacionamento apresentado em Dean e Dalrymple (1991), é:

$$\frac{H}{S} = \frac{2\left(\cosh(2k_0d) - 1\right)}{\sinh(2k_0d) + 2k_0d} \tag{90}$$

Realiza-se uma simulação numérica do código *SPH* para verificar a equação 90. A configuração é a mesma apresentada no caso de geração de ondas, com a exceção da lâmina d'água, que vale d = 0,3 m e do  $\Delta x = 2,01$  cm. Com isso, foram dispostas quase 16 mil partículas num canal de 15 m de comprimento.

A figura 12 mostra o resultado da comparação teórico-numérica. Vale observar que o número de onda da simulação foi obtido através da imagem (medição direta da distância entre duas cristas sucessivas).

Para o ponto próximo a  $(H/S; k_0 d) = (1; 1)$  na figura 12, mudou-se a profundidade normal para 1,5 m e diminuindo a resolução, mantendo o número de partículas e demais parâmetros praticamente iguais. Nota-se que a penalização na resolução influencia diretamente o desempenho dos resultados numéricos, e que por causa dessa limitação, não foi possível a obtenção de mais pontos em outras regiões do gráfico.

No entanto, para a região em que a resolução é adequada, os resultados são próximos da proposição teórica propostos por Dean e Dalrymple (1991) e dentro da margem de erro esperada em projetos de Engenharia.

#### 5.2.2 Propagação de ondas

Para verificar a propagação de ondas no *SPH*, que aparentemente é uma tarefa trivial, bastaria constatar que as ondas geradas na seção anterior mantivessem as mesmas características ao longo de todo o comprimento do canal. Entretanto, foi observado a partir de várias simulações que a altura das ondas diminui à medida que se propagam. Tal fato comprova que existe algum aspecto dissipativo no modelo e contraria os fundamentos teóricos. Ou seja, a dissipação observada só pode ter origem numérica.



**Figura 12** – Comparação teórico-numérica da altura H/S da onda gerada pelo batedor.

Fonte: Do próprio autor.

Uma das razões possíveis que explica tal comportamento é o próprio equacionamento do *SPH*, que garante que o modelo é conservativo apenas na ausência de forças externas. Como a força motriz do fenômeno em questão é a ação restauradora da gravidade (força externa de corpo), não se pode mais dizer, com certeza, que o modelo é conservativo. Sabe-se que, com o aumento do número de partículas, os efeitos de dissipação na altura da onda são minimizados, mas não são eliminados. Esta comprovação leva a crer que a dissipação é inversamente proporcional ao número de partículas. Talvez pelas dificuldades apontadas na propagação da onda no *SPH*, tenha havido um crescente interesse, recentemente, em modelos de acoplamento entre o *SPH* e modelos de propagação de ondas, como o FUNWAVE (NARAYANASWAMY et al., 2010). Desse modo, restringe-se o *SPH* a fase de quebra e interação com fronteiras sólidas, que por si só caracterizam-se como fenômenos complexos, onde pequenas dissipações podem ser desprezadas.

## 5.2.3 Quebra de ondas

A quebra da onda é um fenômeno que ocorre quando a velocidade da partícula na crista é maior que a celeridade da onda. Existem também critérios de quebra com relação ao ângulo de abertura da onda na crista. Para problemas de águas restritas, pode-se caracterizar a quebra da onda como uma resposta do escoamento à mudança de topografia do fundo, ou seja, ligada a diminuição de profundidade.

Por ser um fenômeno complexo, não existe uma aproximação analítica da quebra da

onda. Há, no entanto, critérios indicativos de que acontecerá a quebra, baseados nas características da onda e na profundidade normal. Sendo assim, aplica-se o método *SPH* a uma configuração de problema em que aconteça a quebra da onda.

O gerador de ondas, na simulação numérica, obedece uma lei tipo  $0,25 \sin(5,5t+\Phi)$ . Nessa configuração, o comprimento (*L*) e a altura (*H*) da onda gerada são de, respectivamente, 1,9 e 0,38 m. Ambos os resultados estão em consonância com aqueles observados na simulação.

Novamente, utiliza-se a viscosidade artificial ( $\alpha = 0,01$  e  $\beta = 0$ ). O núcleo de suavização é do tipo *spline* cúbico 2D, com  $h/\Delta x = 1,2$ . O número de partículas é pouco maior que 4 mil e o tempo de processamento (programa principal) é da ordem de 15 minutos. Percebe-se que a onda gerada na situação simulada quebrará, considerando o critério de Mei (1989). A figura 13 ilustra a superfície livre quando da quebra da onda.

**Figura 13** – Posição da superfície livre, para o tempo t = 3,91 s, com w = 5,5 Hz, S = 0,25 m, declividade da praia de 10% e a profundidade normal de 0,5 m



Fonte: Do próprio autor.

Os resultados para a quebra da onda, assunto bastante estudado em Engenharia Oceânica, mostram que a forma da onda pode ser reproduzida através do *SPH*. Esse problema, do ponto de vista numérico, é de difícil tratamento, se aplicados os métodos tradicionais de rastreamento da fronteira em VOF, por exemplo.

#### 5.3 ESVAZIAMENTO DE UM RESERVATÓRIO

O problema de estimar o tempo necessário para o esvaziamento de um reservatório resulta de um simples balanço de massa, onde a variação de massa no volume de controle deve ser igual ao fluxo de massa que sai através de um orifício. A solução teórica pode ser expressa, para um reservatório de área constante, em termos da equação 91:

$$t^{t_0 + \Delta t} - t^{t_0} = 2 \frac{A_r}{C_d A_o \sqrt{2g}} \sqrt{H_y^{t_0} - H_y^{t_0 + \Delta t}}$$
(91)

O modelo numérico segue as mesmas características apresentadas, com aproximadamente 13 mil partículas e c = 35 m/s. As dimensões do reservatório e orifício simulados, assim como a disposição geral das partículas para simulação em *SPH* podem ser vistas na figura 14.

**Figura 14** – À esquerda, são apresentadas as características geométricas do reservatório e orifício simulados. À direita, percebe-se a disposição inicial das partículas para um nível de aproximadamente 1,2 m no reservatório.



Fonte: Do próprio autor.

Para aplicação da equação 91 resta a definição do coeficiente de descarga. Foi obtido um coeficiente de contração de 0,4 (relação entre a área do jato e área do orifício), com auxílio das imagens geradas na simulação. Já o coeficiente de velocidade foi estimado em 0,77, que resultou em um coeficiente de descarga próximo de 0,3.

A comparação da diminuição do nível no reservatório numérica com os resultados teóricos é mostrada na figura 15.

A diferença inicial observada no resultado numérico apresentado na figura 15 deve-se à maneira como a fronteira é modelada. Como foi usada a condição de contorno do tipo fronteira reativa, que responde à aproximação de uma partícula com uma força inversamente proporcional à distância normal, sabe-se que a posição inicial em que as partículas estão dispostas não corresponde à posição de equilíbrio. Em outras palavras, existe uma distância ótima para haver o equilíbrio do sistema, e essa distância ótima depende da profundidade local e da distribuição inicial das partículas.



Figura 15 – Comparação teórico-numérica da variação do nível do reservatório.

Fonte: Do próprio autor.

Algumas imagens em tempos diferentes são dispostas na figura 16, de modo que podem ser observados tanto a formação do jato livre quanto o escoamento à jusante.

Pode-se perceber que os resultados do *SPH* são compatíveis com a aproximação teórica, além de fornecer indícios do escoamento caótico à jusante do orifício.

**Figura 16** – Evolução temporal no problema de esvaziamento de um reservatório. As diferentes figuras (da esquerda para a direita, de cima para baixo), correspondem aos tempos 0,53, 1,38, 2,63 e 3,61 s de simulação.



Fonte: Do próprio autor.
# 6 ESCOAMENTO DE FLUIDOS REAIS

Sem dúvida, a modelagem de escoamentos de fluidos ideais é mais simples, em relação aos escoamentos de fluidos reais, sejam eles newtonianos ou não newtonianos. Entretanto, escoamentos de fluidos newtonianos aparecem com certa frequência na natureza, e apresentam um desafio a sua solução, uma vez que são regidos pela equação de Navier-Stokes. Para problemas com condições de contorno simples, existem soluções analíticas, o que não é o caso de problemas mais complexos, no qual se enquadram a grande maioria dos problemas da Engenharia. Como exemplo, vários conceitos simples da Hidráulica fundamental tem ligação direta com a viscosidade do escoamento. Da distribuição de velocidades no interior de um conduto à relação entre a perda de carga e a velocidade, todos passam por considerar, de antemão, os aspectos viscosos do fluido escoante. Além disso, problemas como deslizamentos de terra, *debris flows*, escoamentos de efluentes, também são exemplos de problemas que levam em conta uma lei reológica não newtoniana, que é bem diferente da ideal, invíscida. Os fatos citados reforçam a necessidade da modelagem de escoamentos de fluidos reais.

Aliado aos fatos comentados, salienta-se também a crescente utilização de modelos numéricos, seja como uma ferramenta de auxílio em projetos, seja na previsão ou comportamento geral do escoamento. Nesse contexto, os métodos sem malha (MSM) aparecem como opção recente e interessante, tendo em vista suas vantagens em relação aos métodos tradicionais, que necessitam de uma malha para discretização do domínio. Uma dessas vantagens é a capacidade de lidar com descontinuidades, que podem aparecer em problemas de superfície livre.

Sendo assim, utiliza-se o código *SPH* para realização de testes numéricos em problemas clássicos de escoamentos de fluidos reais. Em uma primeira etapa, são abordados os escoamentos de fluidos newtonianos aplicados aos problemas do Poiseuille plano, Poiseuille com superfície livre e o escoamento de Couette. Avaliam-se tanto a solução permanente quanto a transiente, de modo a atestar a capacidade do modelo empregado.

Em um segundo momento, aborda-se a reologia não newtoniana, elucidando o equacionamento, as condições de contorno e condições iniciais para o problema tipo Poiseuille com superfície livre e Poiseuille plano.

#### 6.1 ESCOAMENTO DE FLUIDOS NEWTONIANOS

Nesta primeira etapa, apresentam-se os problemas relacionados ao equacionamento do laplaciano segundo a filosofia *SPH* (seção 6.3.2), as aproximações para o tratamento do termo viscoso (seções 6.1.2 e 6.1.3), os inconvenientes oriundos da formulação do termo viscoso empregada (seção 6.1.4) e finalmente os estudos de caso (seção 6.2).

## 6.1.1 Incorporação do tensor de tensões

O equacionamento do termo viscoso da equação de Navier-Stokes, no *SPH*, apresenta particularidades e modos diferentes de discretização. Primeiramente, não convém aplicar a expressão  $\frac{d^2\phi}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{d\phi}{dx}\right)$  diretamente à filosofia *SPH*. Neste caso, a discretização seria dada por:

$$\left(\frac{d^2\phi}{dr^2}\right)_i = \sum_j m_j \phi_j \frac{d^2 W_{ij}}{dr_i^2}.$$
(92)

Como nota-se pela equação 92, a derivada segunda da função qualquer  $\phi$  está intimamente ligada à derivada segunda do núcleo de suavização utilizado. Sendo assim, é natural que o fenômeno físico deva ser compatível com as propriedades matemáticas do núcleo de suavização escolhido. Não é o caso, em decorrência de uma mudança de sinal na derivada segunda de todos os núcleos de suavização com *s*.

De modo a exemplificar o que a mudança de sinal da derivada segunda do núcleo de suavização significa, em termos de simulação, toma-se um exemplo em que a equação 92 esteja representando a difusão de calor em uma barra. Não faz sentido algum a transferência de calor da partícula *i* para *j* ser função da distância entre elas, e não da temperatura entre as partículas. Além do problema supracitado, a equação 92 não conserva exatamente a quantidade de movimento.

Em suma, o comportamento das funções em destaque é mostrado na figura 17.

Sendo assim, buscam-se outras maneiras de representar derivadas segundas no *SPH*. Algumas tentativas foram feitas, como por exemplo a utilização da própria expressão da viscosidade artificial clássica. Mostra-se tal assertiva na sequência.

#### 6.1.2 Viscosidade numérica como viscosidade real

Nesta seção, serão verificadas tanto a equação da viscosidade artificial clássica quanto uma equação para viscosidade recente (KAJTAR; MONAGHAN, 2008), que inclusive vem sendo usada como representante da viscosidade real do fluido escoante (CAPONE, 2009). Pretende-se demostrar que não houve alteração no equacionamento. Sendo assim, a formulação tradicional para viscosidade artificial é dada por:

$$\Pi_{ij} = \begin{cases} \frac{-\alpha \, \bar{c}_{ij} \, \mu_{ij} + \beta \, \mu_{ij}^2}{\bar{\rho}_{ij}}, & \text{se} \quad \vec{u}_{ij} \cdot \vec{r}_{ij} < 0\\ 0, & \text{se} \quad \vec{u}_{ij} \cdot \vec{r}_{ij} \ge 0 \end{cases}$$
(93)

com:

$$\mu_{ij} = \frac{h_{ij}\vec{u}_{ij}\cdot\vec{r}_{ij}}{\|\vec{r}_{ij}\|^2 + 0.01\,\bar{h}_{ii}^2}.$$
(94)

**Figura 17** – Função de suavização, derivada primeira e derivada segunda de W, considerada como sendo do tipo *spline* cúbica 2D normalizada neste exemplo. Como dito no texto, percebese uma mudança de sinal na derivada segunda com a distância adimensional s. (Nota: as derivadas são calculadas por métodos numéricos de primeira ordem).



Fonte: Do próprio autor.

A nova equação, pode ser escrita da forma geral (KAJTAR; MONAGHAN, 2008; MO-NAGHAN; KAJTAR, 2009):

$$\Pi_{ij} = -\frac{\alpha \, v_{sig} \vec{u}_{ij} \cdot \vec{j}}{\bar{\rho}_{ij} \|\vec{r}_{ij}\|} \tag{95}$$

Faz-se, então, a manipulação da equação 93, para chegar em 95. Primeiramente, é importante destacar a importância do parâmetro  $\beta$  (da equação 93). Esse termo foi incluído tendo em mente problemas astrofísicos, normalmente em situações com alto número de Mach, para evitar que as partículas nessas simulações penetrassem umas nas outras. Sendo assim, para o caso particular de problemas de hidráulica, onde o número de Mach é pequeno, não faz sentido considerar  $\beta$  (pode-se ver esse pormenor em vários trabalhos, por exemplo, MONAGHAN; KOS, 1999). Portanto, adota-se  $\beta = 0$  e inserindo esse valor na equação 93 resulta:

$$\Pi_{ij} = -\frac{\alpha \,\bar{c}_{ij}}{\bar{\rho}_{ij}} \left( \frac{\bar{h}_{ij} \,\vec{u}_{ij} \cdot \vec{r}_{ij}}{\|\vec{r}_{ij}\|^2 + 0.01 \,\bar{h}_{ij}^2} \right) \tag{96}$$

O termo  $0,01 \bar{h}_{ij}^2$  foi adicionado à formulação original apenas para evitar a indeterminação na divisão por zero. Nesse sentido, é bom lembrar que a equação da viscosidade numérica foi toda construída, ou seja, não parte de nenhum conceito físico. O que mais se aproxima é a semelhança da viscosidade numérica *SPH* de viscosidades numéricas de outros métodos. Com base nas elucidações anteriores, pode-se retirar o termo  $0,01 \bar{h}_{ii}^2$ , dando origem a:

$$\Pi_{ij} = -\frac{\alpha \, \bar{c}_{ij} \, \bar{h}_{ij} \, \vec{u}_{ij} \cdot \vec{r}_{ij}}{\bar{\rho}_{ij} \, \|\vec{r}_{ij}\|^2} \tag{97}$$

Se for adotado  $v_{sig} = (c_i + c_j)/2$ , chega-se a:

$$\Pi_{ij} = -\frac{\alpha v_{sig} \bar{h}_{ij} \vec{u}_{ij} \cdot \vec{r}_{ij}}{\bar{\rho}_{ij} \left\| \vec{r}_{ij} \right\|^2}$$
(98)

Finalmente, considerando  $\vec{j} = h_{ij}\vec{r}_{ij}/||\vec{r}_{ij}||$  (conceito do vetor permanece o mesmo), chega-se à equação 95. Ou seja, não houve qualquer tipo de alteração na formulação da viscosidade artificial. Apenas escreve-se a equação 93 de forma mais compacta e já adaptada a problemas de superfície livre ( $\beta = 0$ ).

## 6.1.3 Demais aproximações

Pode-se citar, ainda no contexto de representação da derivada segunda no *SPH*, Morris, Fox e Zhu (1997), que descrevem a derivada segunda combinando uma discretização *SPH* com diferenças finitas. A equação da conservação da quantidade de movimento com a parcela viscosa toma a forma:

$$\frac{d\vec{u}_i}{dt} = -\sum_j m_j \left(\frac{p_i}{\rho_i^2} + \frac{p_j}{\rho_j^2}\right) \vec{\nabla}_i W_{ij} + \sum_j \frac{m_j(\mu_i + \mu_j)\vec{u}_{ij}}{\rho_i \rho_j} \left(\frac{1}{\vec{r}_{ij}} \frac{\partial W_{ij}}{\partial \vec{r}_i}\right).$$
(99)

Sabe-se que a expressão 99 conserva exatamente a quantidade de movimento linear, mas a quantidade de movimento angular é apenas conservada de maneira aproximada (ambos os casos, na ausência de forças externas). Pode-se dizer também que a contribuição ao Laplaciano é paralela ao vetor de diferença de velocidades entre as partículas (SOUTO-IGLESIAS et al., 2010).

Morris, Fox e Zhu (1997), utilizando a equação 99, simularam com sucesso os casos de escoamento de fluido viscoso com baixo número de Reynolds como o Poiseuille plano e o Couette, assim como o escoamento entorno de um cilindro.

Opta-se, no entanto, por uma aproximação mais completa, adotada por Lachamp (2003). A formulação adotada tem a vantagem de poder, com uma alteração do tensor de tensões, poder abranger outras leis reológicas. Segundo Lachamp (2003), a equação de balanço de quantidade de movimento para uma lei reológica qualquer, é dada por:

$$\frac{\partial u_i^x}{\partial t} = \sum_j m_j \left( \frac{\sigma_{xx}^i + \sigma_{xx}^j}{\rho_i \rho_j} + \Pi_{ij} \right) \frac{\partial W_{ij}}{\partial r_x} + \sum_j m_j \left( \frac{\sigma_{xy}^i + \sigma_{xy}^j}{\rho_i \rho_j} \right) \frac{\partial W_{ij}}{\partial r_y}.$$
 (100)

A equação 100 foi implementada para a reologia newtoniana. Ou seja, para definir o tensor de Cauchy, teve-se que construir, paralelamente, o tensor de deformações para avaliar o tensor newtoniano  $(\vec{\mathscr{T}} = \mu(\vec{\mathscr{D}} - 1/2\vec{\nabla} \cdot \vec{u}\vec{I})).$ 

## 6.1.4 Inconvenientes da formulação adotada

Em um primeiro momento, a utilização da equação 100 apresenta problemas em forma de oscilações em torno da solução teórica permanente, quando feitas simulações com escoamento de fluido viscoso e que afetam de maneira global a resposta do modelo. Essas oscilações foram removidas utilizando uma correção no campo de velocidades, similar àquela empregada à pressão, e são mostradas na seção 6.2. Entretanto, poucos casos na literatura relatam esse tipo de procedimento. Basa, Quinlan e Lastiwka (2009), por exemplo, apresentam instabilidades parecidas com aquelas encontradas neste trabalho (figura 18a), entretanto a correção proposta pelos autores reside no fato de aplicar uma correção no campo de pressões. Maciá et al. (2011) e Souto-Iglesias et al. (2010) alertam para o fato de que, utilizando a velocidade tangencial contrária para representar a condição de aderência, o Laplaciano da velocidade é nulo na parede (para um modelo unidimensional, como aquele apresentado na equação 99).

**Figura 18** – Perfil de velocidade para o Poiseuille plano permanente (à esquerda), para um  $Re \approx 0,01$  e resultados de Cueille (2005), para o Poiseuille plano, com Re = 0,01 e sem suavização do campo de velocidades (à direita).



Fonte: Do próprio autor.

Fonte: Cueille (2005, p. 73, fig. 3.2).

O fato do Laplaciano ser nulo independe do perfil de velocidades. Uma provável solução seria alterar a condição de aderência na parede, para que o valor correto na parede seja obtido (TAKEDA; MIYAMA; SEKIYA, 1994; MACIÁ et al., 2011). Foi observado, no entanto, que o comportamento apresentado é inerente à formulação, conforme relatado por Cueille (2005) e ilustrado na figura 18b. Neste caso, a suavização do campo de velocidades, como realizada, é recomendada.

## 6.2 ESTUDOS DE CASO

#### 6.2.1 Fronteiras periódicas

Neste tipo especial de condição de contorno, as partículas fluidas que abandonam o domínio são automaticamente reintroduzidas, em uma outra região, de modo que seja possível alcançar, ao cabo de tempo finito, um regime de escoamento permanente. Além disso, a criação das partículas fantasma, para este tipo de fronteira, é bem diferente do convencional, e será explicado a seguir.

Normalmente, em problemas de escoamento onde deseja-se reduzir o domínio computacional, são necessárias duas fronteiras periódicas ( $A \in B$ ), sendo que as partículas saem por uma e reentram por outra. Para que o efeito de escoamento seja obtido, as partículas reais que estão próximas à parede A criam partículas fantasma em B, assim como as partículas reais próximas a B criam partículas fantasma em A. Em outras palavras, o efeito de espelhamento é inverso: na fronteira A estão as partículas espelhadas por B e vice-versa. Para que o efeito desejado fosse obtido, os arquivos responsáveis pela criação das partículas fantasma e reintrodução das partículas no domínio (reflexão) foram alterados segundo as premissas descritas.

De modo a testar a fronteira periódica em uma simulação, propõe-se um problema similar àquele apresentado por Monaghan (2006). Trata-se de um escoamento em um domínio retangular (1,0 × 0,6), com condição de contorno periódica tanto nas fronteiras verticais quanto nas horizontais. O núcleo de suavização usado é o *spline* cúbico 2D, cujo comprimento de suavização vale  $h = 1,2\Delta x$ . A resolução espacial escolhida foi de  $\Delta x = 0,017$  m, o que resultou em um número de partículas pouco maior que 2100. A viscosidade artificial não é utilizada ( $\alpha = 0$ e  $\beta = 0$ ).

As condições cinemáticas iniciais contemplam  $u_x = 2\pi \sin(y/0,6)$  e  $u_y = 0$ . As partículas são posicionadas nos vértices formados por quadrados, de lado  $\Delta x$ . A massa específica inicial das partículas  $\rho_i = \rho = 1000$  kg/m<sup>3</sup>, o que resulta em  $p_i = 0$ . O fluido possui uma viscosidade cinemática  $v = 10^{-3}$ m<sup>2</sup>/s, caracterizando escoamento com número de Reynolds de 600.

É aplicada, a cada 0,01 s, uma correção que visa diminuir a oscilação da pressão, comum em métodos particulados, que é uma interpolação baseada no método MLS. Tal correção é aplicada à massa específica. Emprega-se, também, a renormalização do gradiente do núcleo de suavização, como medida adicional de correção.

O passo de tempo  $\Delta t$  é calculado automaticamente a cada iteração, aproveitando da característica explícita do *SPH*, e é o menor valor entre  $\Delta t_1 e \Delta t_2$ , sendo  $\Delta t_1 = 0.5 h_i/(|\vec{u}_i|+c)$  e  $\Delta t_2 = 0.25 h_i^2 \rho_i/\mu$ , calculado para todas as partículas fluidas. O integrador numérico utilizado foi do tipo Runge-Kutta de 2<sup>*a*</sup> ordem, e a celeridade do som da simulação vale c = 23,29 m/s.

A figura 19 mostra a distribuição de velocidade em t = 1,5 s. Dois importantes pontos

**Figura 19** – Comparação entre o perfil de velocidades esperado (linha contínua, teórica) com o numérico (pontos). Mesmo com a presença da viscosidade, as partículas se mantém organizadas, fato esse ilustrado pelos pontos na figura, que representam uma linha de partículas, que permanecem com a mesma altura do começo da simulação.



Fonte: Do próprio autor.

podem ser observados a partir da figura 19. O primeiro diz respeito à reprodução da fronteira periódica, em que o perfil de velocidades se manteve inalterado. Tal comportamento, de uma maneira similar, foi obtido por Monaghan (2006), com exceção aos pontos onde a derivada  $\partial^2 u_x / \partial y^2$  é grande. Na região apontada, os resultados de Monaghan (2006) apresentam uma ligeira redução do campo de velocidade.

O segundo aspecto de destaque é a reprodução de um escoamento predominantemente inercial por um modelo viscoso, mesmo com as dificuldades inerentes quando  $\mu \rightarrow 0$ . Ou seja, obtém-se o comportamento de fluido ideal, para altos números de Reynolds, e a reprodução integral do perfil de velocidades justifica tal assertiva.

Já na figura 20, são apresentadas tanto a variação de massa específica quanto a posição das partículas. Nota-se, de antemão, que não há variação substancial na massa específica, que consequentemente ilustra pouca variação do campo de pressões (uma vez que  $p = p(\rho)$ ). Percebe-se também que as partículas permanecem organizadas, que aliado com os comentários anteriores mostram sucesso na representação da condição de contorno periódica. **Figura 20** – À esquerda, a variação espacial da massa específica, no tempo t = 1,5 s, mostra que a condição de incompressibilidade é reproduzida no escoamento. À direita, a posição das partículas no mesmo instante.



Fonte: Do próprio autor.

#### 6.2.2 Poiseuille com superfície livre

Uma vez avaliadas as condições de contorno do tipo fronteiras periódicas, passam-se aos testes clássicos de escoamentos de fluidos viscosos, com baixo número de Reynolds. O primeiro caso teste em questão procura simular o regime permanente de um Poiseuille com superfície livre, que nada mais é do que um escoamento de fluido viscoso, em canal inclinado. O regime completamente desenvolvido é atingido quando a força gravitacional for equilibrada pela resistência ao escoamento (atrito interno viscoso).

Neste caso, a intensidade do perfil de velocidades teórico  $u_x(y)$  é dada por (MORRIS; FOX; ZHU, 1997):

$$u_x(y) = \frac{\rho g d^2 \sin \theta}{\mu} \left( \frac{y}{d} - \frac{1}{2} \left( \frac{y}{d} \right)^2 \right).$$
(101)

A configuração da simulação foi a mesma utilizada para o teste da fronteira periódica. No entanto, para encontrar uma resolução adequada, foram escolhidas quatro configurações distintas para a razão entre a altura da lâmina d'água e o espaçamento inicial  $(d/\Delta x)$ : 25, 35 40 e 50. Com isso, procurou-se estabelecer uma resolução espacial cuja solução numérica fosse o mais próximo possível da analítica, com a menor quantidade possível de partículas.

Faz-se também um teste relativo à condição de contorno no fundo do canal. Como nesse caso a condição é de aderência, utiliza-se tanto a velocidade nula  $(\vec{u_{gh}} \cdot \vec{t} = 0)$  quanto a velocidade igual e oposta  $(\vec{u_{gh}} \cdot \vec{t} = -\vec{u_i} \cdot \vec{t})$  na atribuição das velocidades das partículas fantasma.

Para retratar o Poiseuille com superfície livre, foram escolhidos os seguintes parâmetros físicos e geométricos:  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ , d = 0,6 m, inclinação de  $16,45^\circ$  e uma viscosidade cinemática de 1 m<sup>2</sup>/s, que resulta em um número de Reynolds de 0,3.

Em virtude da implementação realizada, não se faz necessário inclinar o domínio computacional, como pode ser visto na figura 21. Ao invés disso, aplica-se o efeito da inclinação a ação gravitacional, permitindo, dessa forma, manter o domínio na horizontal.

**Figura 21** – À esquerda, disposição das partículas nos instantes iniciais e, à direita, o escoamento no instante t = 0,29 s. O domínio é retratado apenas em um trecho de 1 m, sendo a fronteira periódica capaz de reproduzir, na simulação, o regime permanente. A coloração indica a intensidade do vetor velocidade (azul escuro, u = 0, vermelho,  $u = u_{max}$ ).





Os resultados, ilustrando o comportamento da simulação com a variação do número de partículas e o efeito da velocidade da partícula fantasma no perfil de velocidades permanente podem ser vistos na figura 22.

**Figura 22** – À esquerda, comparação entre o perfil de velocidade analítico e numérico, com variação na resolução espacial. À direita, influência do tipo de velocidade atribuída às partículas fantasma, para condição de contorno de aderência no fundo do canal, com  $d/\Delta x = 35$ .



Fonte: Do próprio autor.

Pode-se notar, através da figura 22, que mesmo para a menor razão  $d/\Delta x$ , o perfil de

velocidade apresenta um erro relativo na velocidade máxima de pouco mais de 2%. Também é possível notar que o perfil dado pela condição de contorno  $\vec{u_{gh}} \cdot \vec{t} = 0$  apresenta melhores resultados na parte superior do perfil de velocidades, em relação a condição de contorno  $\vec{u_{gh}} \cdot \vec{t} = -\vec{u_i} \cdot \vec{t}$ . Cabe lembrar que foi escolhido  $t_{\infty} = 2$  s de simulação como o tempo  $t_{\infty}$ , ou o tempo para atingir o regime permanente.

Diante dos resultados apresentados, escolhem-se  $d/\Delta x = 35$  e a condição de contorno  $\vec{u_{gh}} \cdot \vec{t} = 0$  para os próximos estudos de caso. Além disso, pode-se comprovar que o tensor de tensões implementado reproduz o perfil de velocidades analítico, no caso permanente. A seguir, aspectos transientes serão testados, com o Poiseuille plano e o escoamento tipo Couette.

## 6.2.3 Poiseuille plano

O Poiseuille plano é um escoamento que se dá entre placas paralelas, consideradas infinitas, com uma força motriz, que pode ser um gradiente de pressão. Neste problema, utiliza-se como força motriz uma força de corpo ( $F_x$ ), paralela às placas. A componente horizontal da velocidade teórica transiente  $u_x(y,t)$  desenvolvida em termos de séries é dada por (MORRIS; FOX; ZHU, 1997):

$$u_x(y,t) = \frac{F_x}{2\nu}y(H_0 - y) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4F_x H_0^2}{\nu \pi^3 (2n+1)^3} \sin\left(\frac{ny}{H_0}(2n+1)\right) \exp\left(-\frac{(2n+1)^2 \pi^2 \nu}{H_0^2}t\right).$$
 (102)

A disposição inicial das partículas, bem como a evolução da simulação em um instante são ilustradas na figura 23.

**Figura 23** – À esquerda, disposição das partículas nos instantes iniciais e, à direita, o escoamento no instante t = 0, 20 s. O domínio é retratado apenas em um trecho de 1 m e a coloração indica a intensidade do vetor velocidade (azul escuro, u = 0, vermelho,  $u = u_{max}$ ).





Utilizam-se, para realização das simulações do Poiseuille plano,  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ ,  $H_0 = 0.6 \text{ m}$ ,  $F_x = 2.78 \text{ m/s}^2 \text{ e } v = 1 \text{ m}^2/\text{s}$ , que resulta em um número de Reynolds de 0.075. A

resolução espacial obedece à razão  $d/\Delta x = 35$  e a massa específica das partículas vale  $\rho_i = 1,02\rho$ , de modo que a pressão inicial não seja nula, evitando comportamentos indesejáveis (MONAGHAN, 2006). O método MLS é aplicado, neste caso, a cada  $20\Delta t$ , com correções no campo de velocidade. A condição de contorno de impenetrabilidade nas placas superior e inferior são do tipo partículas fantasma, com  $u_{gh}^2 \cdot \vec{t} = 0$ .

Os perfis de velocidade na parte central do domínio (x = 0, 5 m), ao fim de 0,15 s de simulação ( $t_{\infty} = 0, 15$  s), podem ser vistos na figura 24.

**Figura 24** – Resultados analíticos e numéricos do perfil de velocidade do Poiseuille plano no centro do domínio computacional , nos tempos t = 0,01 s (+), 0,02 s (×), 0,05 s (\*), 0,1 s ( $\Box$ ) e  $\infty$  ( $\blacksquare$ ). Os símbolos indicam os resultados numéricos, enquanto que a linha contínua representa os resultados analíticos, nos respectivos tempos.



Fonte: Do próprio autor.

Como pode ser observado na figura 24, os resultados numéricos aproximam-se dos analíticos, indicando que o modelo *SPH* implementado consegue reproduzir o escoamento transiente.

## 6.2.4 Couette

O problema tipo Couette nada mais é do que o escoamento entre duas placas paralelas, também consideradas infinitas, sendo que uma das placas possui velocidade não nula. Na simulação *SPH*, a placa superior é dotada de velocidade, cuja intensidade  $V_{ps}$  é de 0,1 m/s, deslocando-se da esquerda para a direita. A componente horizontal da solução teórica transiente  $u_x(y,t)$  do problema é dada por (MORRIS; FOX; ZHU, 1997):

$$u_x(y,t) = \frac{V_{ps}}{H_0}y + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2V_{ps}}{n\pi} (-1)^n \sin\left(\frac{n\pi}{H_0}y\right) \exp\left(-v\frac{n^2\pi^2}{H_0^2}t\right).$$
 (103)

Para o escoamento do tipo Couette, é feita uma adaptação do simulador do Poiseuille plano, alterando a condição de contorno na placa superior:  $\vec{u_{gh}} = (V_{ps}; 0)$ , e removendo a força de corpo:  $\vec{g} = (F_x; F_y) = (0; 0)$ . A figura 25 mostra a posição e velocidade das partículas em dois instantes da simulação.

**Figura 25** – À esquerda, disposição das partículas nos instantes iniciais e, à direita, o escoamento no instante t = 0, 10 s. O domínio é retratado apenas em um trecho de 1 m, sendo a fronteira periódica capaz de reproduzir, na simulação, o regime permanente. A coloração indica a intensidade do vetor velocidade (azul escuro, u = 0, vermelho,  $u = u_{max}$ ).





A comparação dos resultados analítico e numérico, do aspecto transiente do escoamento, pode ser vista na figura 26.

Os resultados numéricos apresentados na figura 26 corroboram o desempenho do modelo *SPH*, que reproduz tanto aspectos transientes quanto permanentes de escoamentos de fluidos viscosos, com baixo número de Reynolds. Isso só foi possível através da construção do modelo fundado nas condições de contorno do tipo partículas fantasma e fronteiras periódicas, que foram previamente tratadas em problemas particulares.

## 6.2.5 Ruptura de barragem

Rupturas de barragem são problemas que vêm sendo estudados desde o final do século XIX, com os trabalhos de Ritter, sendo o escoamento de fluido ideal (sem atrito). Posteriormente, para levar em conta os aspectos viscosos do fluido escoante, o efeito do atrito de fundo (proporcional ao coeficiente de Chézy) foi adicionado. O sistema de equações resultante, com **Figura 26** – Resultados analíticos e numéricos do perfil de velocidade do Couette no centro do domínio computacional, nos tempos t = 0,01 s (+), 0,02 s (×), 0,03 s (\*), 0,04 s ( $\Box$ ) e  $\infty$  ( $\blacksquare$ ). Os símbolos indicam os resultados numéricos, enquanto que a linha contínua representa os resultados analíticos, nos respectivos tempos.



Fonte: Do próprio autor.

a hipótese de águas rasas, tem sido resolvido com o auxílio de métodos numéricos (FAURE; NAHAS, 1961 apud NSOM; DEBIANE; PIAU, 2000).

Considerando o impacto social e importância, o problema de ruptura de barragens é usado como aplicação do modelo numérico newtoniano desenvolvido neste trabalho. Para tal, são utilizados os resultados experimentais de Minussi (2007) e Leite (2009). Os autores utilizaram o mesmo aparato experimental, composto por um reservatório de dimensão 0,5 m de largura por 0,3 m de profundidade.

Minussi (2007) utilizou um fluido composto por uma solução de glicose, com massa específica  $\rho_s = 1285 \text{ kg/m}^3$  e viscosidade dinâmica  $\mu = 0,205 \text{ Pa s}$  determinada em reômetro. O autor avaliou o problema de ruptura de barragem para duas alturas:  $H_0 = 0,07 \text{ e } 0,1 \text{ m}$ . Já Leite (2009) utilizou glicerol como fluido retido ( $\rho_s = 1262 \text{ kg/m}^3 \text{ e } \mu = 0,86 \text{ Pa s}$ ), com as alturas de 0,08, 0,1 e 0,12 m.

Nesta simulação, a equação de estado para pressão é dada pela equação 56. A celeridade do som c vale 8,29 e 9,9 m/s, para as lâminas de 0,07 e 0,1 m, respectivamente (MINUSSI, 2007), e 8,88,9,93 e 10,88 m/s para as lâminas de 0,08, 0,1 e 0,12 m, respectivamente (LEITE,

**Figura 27** – Comparação entre os resultados experimentais de Minussi (2007), teóricos de Ritter e numéricos para o problema de ruptura de barragem retendo material newtoniano, com altura de 0,07 m (a) e 0,10 m (b).



Fonte: Do próprio autor.

2009). A condição inicial é de pressão hidrostática. A condição de contorno cinemática nas fronteiras é de impenetrabilidade e aderência, com velocidade tangencial contrária  $(\vec{u_{gh}} \cdot \vec{t} = -\vec{u_i} \cdot \vec{t})$ . Os resultados para o avanço da frente, podem ser vistos nas figuras 27 e 28.

Foram feitas diversas implementações ao código numérico desenvolvido pelo autor para simular escoamentos de fluidos dotados de reologia newtoniana. Entre as mais importantes, destacam-se a codificação das partículas fantasma, as condições de contorno de aderência e as fronteiras periódicas. O resultado de tal empreitada pode ser conferido através do estudo de caso com o Poiseuille plano, com superfície livre e o Couette, onde o perfil de velocidades esperado é reproduzido pelo modelo numérico (figuras 22, 24 e 26). Além disso, um estudo de caso particular, aplicado a um problema de interesse na Engenharia, a ruptura de barragem, foi verificado. Pode-se dizer que o código numérico reproduz o alcance da frente, para o caso de escoamento de fluido newtoniano (figuras 27 e 28).

## 6.3 ESCOAMENTO DE FLUIDOS NÃO NEWTONIANOS

Seja uma encosta de um reservatório de uma barragem que, em virtude de um plano preferencial de fissuração ou qualquer outro motivo, desestabiliza-se e parcela solta vem a incidir no lago formado pelo reservatório. A estratégia para simular a massa que se desprende da encosta pode ser dividida em duas correntes principais: considerá-la formada por um bloco único e indeformável, ou o conjunto de várias partículas pequenas. Se considerada um bloco único, pode-se aplicar as equações que regem um corpo livre, caso contrário pode-se aproximar a massa deslizante por um fluido, de reologia invíscida, ideal. Tais estratégias são abordadas oportunamente no capítulo 7.

**Figura 28** – Comparação entre os resultados experimentais de Leite (2009) e numéricos para o problema de ruptura de barragem retendo material newtoniano, com altura de 0,08 m (a), 0,10 m (b) e 0,12 m (c).



Fonte: Do próprio autor.

No entanto, sabe-se que o material que se desprende da encosta pode vir a apresentar características singulares, diferentes daquelas idealizadas nas aproximações supracitadas. Algumas destas singularidades podem ser, por exemplo, alto atrito interno, o que dissiparia parte da energia cinética adquirida ao deslizar em direção ao lago; ou ainda coesão, onde pequenas partes do material ficam aderidas às paredes da encosta. Tais características são retratadas por Shao e Lo (2003), tratando do problema de ruptura de barragens retendo material newtoniano e não newtoniano em uma versão incompressível do *SPH*. Ghadampour et al. (2013), também utiliza o ISPH para reproduzir escoamentos de fluidos não newtonianos, notadamente a ruptura de barragens e o escoamento sob uma comporta. Diferentemente de Shao e Lo (2003), Ghadampour et al. (2013) utilizam o modelo turbulento LES (*Large Eddy Simulation*) na determinação do tensor de tensões. O modelo não newtoniano utilizado pelos autores é baseado no conceito de viscosidade aparente (elucidado na seção 6.3.2, p. 86).

Hosseini, Manzari e Hannani (2007), baseando-se em um modelo *SPH* explícito, simularam escoamentos newtonianos e não newtonianos utilizando como condição de contorno na fronteira uma aproximação semelhante ao adotado por Takeda, Miyama e Sekiya (1994), com a exceção de que as partículas externas não são geradas aleatoriamente e impõe-se a condição de velocidade nula às partículas externas ( $\vec{u} = \vec{0}$ ).

Sendo assim, propõe-se uma aproximação do material que desliza de um plano inclinado e incide em um lago de águas tranquilas por um fluido, de características não newtonianas, para simular tanto o atrito interno quanto a coesão das partículas sólidas que constituem o material deslizante. Para tanto, faz-se inicialmente uma revisão dos conceitos básicos da reologia não newtoniana, seu equacionamento e o modelo implementado utilizado no *SPH*.

#### 6.3.1 Reologia

A reologia é a ciência que estuda o comportamento da matéria escoante, ou seja, sua fluidez. De uma forma simplista, a reologia busca modelos de fechamento (ou equações constitutivas) para a equação de balanço de quantidade de movimento, normalmente relacionando tensões e taxas de deformações. Sendo assim, definem-se fluidos não newtonianos como aqueles que apresentam uma relação não linear entre tensão de cisalhamento e taxa de deformação, ao contrário dos escoamentos de fluidos newtonianos.

Em alguns casos, onde há a presença de uma tensão crítica e a tensão aplicada ao fluido é menor que a tensão crítica, o fluido não newtoniano se comporta como um sólido. Em outras palavras, pode-se escrever:

$$\left|\vec{\mathscr{D}}\right| \begin{cases} =0, & \text{se} \quad \mathscr{T} \leq \mathscr{T}_{c} \\ \neq 0, & \text{se} \quad \mathscr{T} > \mathscr{T}_{c} \end{cases}$$
(104)

Como pode-se perceber pela equação 105, só há escoamentos se  $\mathcal{T} > \mathcal{T}_c$ . Neste caso, a tensão de cisalhamento atuante no fluido, caso o fluido siga o modelo de Herschel-Bulkley, é dada por  $\mathcal{T} = \mathcal{T}_c + \mathcal{K} |\vec{\mathcal{D}}|^{\mathcal{N}}$ . No entanto, existem vários tipos de modelos distintos de fluidos não newtonianos, como é ilustrado pela figura 29.

O objetivo da implementação do modelo não newtoniano desta Tese de Doutoramento é tratar o caso mais geral, ou seja, modelo de Herschel-Bulkley. Na sequência, é mostrado o equacionamento dos modelos não newtonianos em termos da filosofia *SPH*.

#### 6.3.2 Tensor de tensões

Assim como para problemas de escoamentos de fluidos newtonianos, existem várias tentativas de incorporar a reologia não newtoniana no *SPH*. Capone (2009) utiliza a formulação de viscosidade artificial (equação 95, p. 73), mas com um  $\alpha_{eff}$ , que varia de partícula para partícula e depende da taxa de deformações. Este tipo de abordagem é bastante comum, principalmente em análises empíricas, e é conhecida por viscosidade aparente ( $\mu_{app}$ ). A viscosidade aparente é uma função que varia de partícula para partícula e transforma o cálculo do tensor não



Figura 29 – Tipos de leis reológicas.

Fonte: Do próprio autor.

newtoniano em um newtoniano equivalente:

$$\mathscr{T} = \mathscr{T}_{c} + \mathscr{K} |\vec{\mathscr{D}}|^{\mathscr{N}} \to \vec{\mathscr{T}} = \left(\frac{\mathscr{T}_{c}}{|\vec{\mathscr{D}}|} + \mathscr{K} |\vec{\mathscr{D}}|^{\mathscr{N}-1}\right) \vec{\mathscr{D}},\tag{105}$$

com:

$$\mu_{app} = \frac{\mathscr{T}_c}{|\vec{\mathscr{D}}|} + \mathscr{K} |\vec{\mathscr{D}}|^{\mathscr{N}-1}.$$
(106)

Em outras palavras, o tensor de tensões não newtoniano, escrito na forma simétrica, vale  $\vec{\mathcal{T}} = \mu_{app}(\vec{\mathcal{D}} - 1/2\vec{\nabla}\cdot\vec{u}\vec{l})$ . Com o conceito de viscosidade aparente (equação 106), pode-se utilizar a mesma equação do balanço de quantidade de movimento do caso newtoniano (equação 100, p. 74) no *SPH*. Entretanto, nota-se que para taxas de deformação pequenas, a viscosidade aparente assume valores cada vez maiores (figura 30). Sendo assim, limita-se a variação da viscosidade aparente, adotando:

$$\mu_{app} = \min\left(\frac{\mathscr{T}_c}{|\vec{\mathscr{D}}|} + \mathscr{K}|\vec{\mathscr{D}}|^{\mathscr{N}-1}, \mu_{max}\right).$$
(107)

A determinação de  $\mu_{max}$  tem influência direta no perfil final do escoamento. Hammad e Vradis (1994, apud SHAO; LO, 2003) sugerem que, a partir de um valor de  $10^3 \mathcal{K}$ , os resultados de seu modelo numérico para simular escoamentos de fluidos binghamianos não apresentavam diferenças significativas. Já para Lachamp (2003), testes devem ser feitos para verificar o limite a partir do qual  $\mu_{max}$  não interfere. Hosseini, Manzari e Hannani (2007), em seu modelo

**Figura 30** – Variação da viscosidade aparente com a profundidade, em um problema tipo Poiseuille com superfície livre, com  $\mu_{max} = 1000$  Pa s.



Fonte: Do próprio autor.

SPH para determinação de escoamentos de fluidos não newtonianos, não fazem comentários adicionais acerca da escolha de  $\mu_{max}$ , embora utilizem um modelo baseado na viscosidade aparente.

Shao e Lo (2003) lembram que o modelo de Cross pode ser utilizado em detrimento da viscosidade aparente, para evitar instabilidades numéricas. Um dos motivos para instabilidades na adoção da viscosidade aparente pode ser explicado devido ao desconhecimento da condição de contorno  $\partial \mu_{app} / \partial \vec{n}$ , o que impossibilita sua aplicação a alguns problemas. Lachamp (2003) salienta esse fato ao lembrar que a viscosidade aparente deve ser de classe  $C^1$  na fronteira, de tal forma que sua derivada possa ser calculada. Desse modo, deve-se evitar, ao trabalhar com partículas fantasma, que as propriedades das partículas sejam simplesmente espelhadas. Como condição de contorno, Hosseini, Manzari e Hannani (2007) utilizam *dummy particles* e apenas salientam a condição tipo aderência para a velocidade.

Outro inconveniente é que, se for utilizada a condição de contorno para velocidade tangencial nula, a equação 107 fornece  $\mu_{max}$  para as partículas fantasma sendo que o valor seria  $\mathcal{K}$ .

# 7 ONDAS DE IMPACTO

Problemas com ondas de impacto aparecem com frequência em vários cenários na Engenharia, como por exemplo no choque do casco de embarcações rápidas com a superfície da água ou o desmoronamento de massa sólidas em lagos de águas tranquilas. No caso específico do desmoronamento de massas sólidas, seja o material sólido na forma de uma massa única ou como fragmentos, há a preocupação de se quantificar a altura da onda gerada. Por esse motivo, e devido à quantidade de energia envolvida no processo, desde a metade do século passado, pesquisadores vêm desenvolvendo e aprimorando métodos para estimar a altura de onda gerada. Em outras palavras, procura-se estudar o processo de transferência de energia mecânica do material deslizante, cuja cinética pode ser obtida, para o meio líquido.

A modelagem matemática do fenômeno em questão apresenta dificuldades, e frequentemente esquemas numéricos aparecem como alternativa viável de solução. Aproveitando as características lagrangianas da formulação *SPH*, será quantificada, nessa seção, a onda gerada pelo impacto de uma massa sólida, tanto na forma fragmentada como uma massa sólida única, indeformável, em um canal de ondas. No caso de um material indeformável, será possível verificar o equacionamento adotado para sólidos com deslocamentos livres (na seção 7.2.3).

A preocupação no entendimento do fenômeno descrito é reforçada face à quantidade de acidentes reportados no literatura, alguns conhecidos mundialmente. Os dois casos de envergadura mundial mais conhecidos são o da baía de Lituya, nos Estados Unidos, e do rio Vajont, na Itália, relatados em diversos trabalhos (CAPONE, 2009; FRITZ, 2002; SOUZA, 2007). Faz-se aqui um breve relato de ambos acidentes.

A baía de Lituya situa-se na costa sul do Alasca, Estados Unidos. Em 1958, um intenso tremor de terra fez com que um volume de rocha de aproximadamente 0,03 km<sup>3</sup> adentrasse na baía. A onda formada atingiu uma floresta a quase 525 m acima do nível da baía, e que foi totalmente destruída. Nesse cenário extremo, especula-se que os efeitos sísmicos tenham contribuído para a geração de uma onda de tal altura. Porém, acredita-se que o deslocamento do material sólido para a baía foi o fator determinante na formação da onda gigante.

Em 1960 foi construída uma barragem, no rio Vajont, a aproximadamente 100 km ao norte de Veneza, Itália. Três anos mais tarde, ocorreu um grande deslizamento, que causou uma verdadeira catástrofe. O fato ocorreu quando o volume retido na barragem era pouco maior que dois terços da capacidade total. Foi então que uma rocha, cujo volume era de aproximadamente 0,27 km<sup>3</sup> penetrou quase horizontalmente no reservatório, gerando uma onda que alcançou a Vila de Casso, situada a 270 m acima do nível da água e 245 m da crista mais alta da barragem.

No cenário nacional, também há relatos de ondas formadas por deslizamentos de terra,

que incidem basicamente em lagos de barragens, como aqueles em Paraibuna, em São Paulo, e Paraitinga, no Rio de Janeiro (JORGE, 1984). Existem também casos de deslizamentos no reservatório de Furnas, onde instabilidades detectadas na encosta do morro dos Cabritos permitiam o desprendimento de massas sólidas, que ganhavam velocidade e atingiam o reservatório, provocando ondas capazes de romper cabos de 0,5 polegada (JORGE, 1984). Temendo que acontecesse o escorregamento de massas sólidas com maior volume para o reservatório, foi proposto um estudo em modelo reduzido (escala 1:75), na década de 80, que incluíram medidas de contenção e proteção das encostas.

Assim exposto, e devido à série de consequências causadas por fenômenos de impacto em maior ou menor magnitude, torna-se importante quantificar seus riscos potenciais, que estão diretamente ligados à energia da onda (ou seja, sua altura). A energia que a onda adquire depende da quantidade de movimento da massa deslizante e agrega fatores tais como velocidade de queda e massa deslocada.

## 7.1 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

As primeiras observações de ondas formadas por quedas de materiais sólidos podem ser atribuídas a Scott Russell, que em 1844 gerou ondas do tipo solitária a partir da queda vertical de um bloco em um canal de ondas. De lá para cá, pode-se perceber algumas tendências nos trabalhos, que serão observadas na sequência.

Após mais de um século das observações de Scott Russell, começaram a surgir mais trabalhos relacionados à geração de ondas causadas pelo deslocamento de massas sólidas. A maioria dos trabalhos baseiam-se em modelos empíricos, como aqueles feitos por Prins (1958). Neste trabalho, os ensaios tiveram como objetivo a geração de ondas através de uma perturbação local na superfície livre. Dentre os principais resultados alcançados por Prins (1958) pode-se citar a dependência entre a amplitude da perturbação inicial e a profundidade local e o comprimento do deslizamento com a profundidade local.

Os trabalhos analíticos ficavam restritos a hipóteses demasiadamente simplificadoras. Neste contexto, destacam-se os trabalhos de Kranzer e Keller (1955), realizados no intuito de determinar os efeitos de ondas geradas por explosões na vizinhança da superfície livre. Estes estudos também baseados na teoria linear das ondas de gravidade fornecem formulações diretas que permitem determinar alturas de ondas (em primeira aproximação) produzidas por impulsões localizadas em meio fluido de profundidade finita.

A solução clássica para as ondas geradas por uma elevação ou depressão da superfície livre com velocidade inicial nula foi inicialmente formulada por Cauchy-Poisson. A partir destes resultados, Unoki e Nakano (1953) realizaram um estudo bidimensional com perturbação inicial agindo sobre uma superfície limitada e de profundidade infinita. Tal trabalho foi utilizado no cálculo de tsunamis oriundas de maremotos.

Wiegel (1955) baseia-se na teoria da onda solitária para desenvolver seu modelo, associando a energia contida na onda gerada pelo impacto localizado com a energia potencial disponível do deslizamento. Wiegel (1955) limita em 2% da energia potencial disponível à geração da onda. Como material deslizante, o autor utilizou blocos de geometria variada (e sempre submersos) em um modelo reduzido de um reservatório. Vale ressaltar que o método apresenta, contudo, uma certa fragilidade quanto à limitação de 2% no balanço energético entre o deslizamento e a onda formada. Uma série de experimentos realizados por Maciel (1991) chegou a coeficientes que variaram entre 5% a 15% da energia cinética incidente.

A partir da década de 70, aparecem trabalhos que levam em conta a cinemática do corpo impactante (NODA, 1970). Mesmo assim, vários pesquisadores ainda consideram que os aspectos geométricos do deslizamento seriam preponderantes na geração da onda (HUBER, 1980).

Nos anos 90, os modelos numéricos, baseados em Diferenças Finitas ou variantes, aparecem com o objetivo de quantificar a energia transferida da massa deslizante ao meio líquido, e consequentemente prever a altura da onda gerada. Maciel (1991), dentre muitas outras validações de formulações e realização de experimentos, utilizou duas técnicas, em modelo numérico, para a simulação de geração de ondas devido a deslizamento impactando em meio líquido. A primeira técnica implementada pelo pesquisador no Modelo de Saint Venant leva em consideração a geração da onda como resultado do balanço entre o atrito na interface deslizamento/líquido, deslizamento/canal associado a uma modificação da topografia do fundo, devido à intrusão de massa sólida. A segunda técnica leva em consideração a geração da onda pela diferença de entrada de uma vazão líquida proporcional à vazão sólida correspondente ao deslizamento. O coeficiente de proporcionalidade é determinado experimentalmente.

Dando continuidade aos estudos de Maciel, Nascimento (2001) operacionalizou um modelo numérico a partir das equações de Serre, tendo validado as mesmas para o caso de deslizamento de blocos indeformáveis. O autor fez uma comparação de seus resultados experimentais e numéricos para validação do seu modelo numérico. Nascimento (2001) também avaliou as taxas de transferência de energia do bloco único deslizante para a água e encontrou valores entre 1 a 14%, não ultrapassando os encontrados por Huber (1980) para materiais granulares de 20%, tampouco os de Maciel (1991) de 15%.

Carvalho e Carmo (2006) realizaram um estudo numérico e experimental sobre ondas geradas por deslizamentos. Neste estudo, os autores ensaiaram o deslizamento de blocos de calcário de volume variável em um canal, provido de rampa de lançamento. Através dos experimentos, Carvalho e Carmo (2006) validaram dois modelos numéricos apresentados: um baseado nas equações de Navier-Stokes para a conservação de massa e quantidade de movimento, bidimensional e outro, baseado nas equações de Boussinesq, unidimensional.

Estudos de ondas geradas por impacto no *SPH* só foram possíveis a partir da definição das condições de contorno em fronteiras sólidas (MONAGHAN, 1994). Monaghan e Kos (2000) simularam a queda de um bloco vertical e geraram ondas solitárias, com pequenos erros relativos (numérico  $\times$  experimental) na altura. Quando em um plano inclinado, Monaghan, Kos e Issa (2003) tentaram estabelecer uma relação entre as características físicas e geométricas do bloco incidente com a altura da onda refletida, considerando válida a suposição de que a onda refletida se comporte como uma onda solitária de Kortweg-de Vries, usando o modelo numérico *SPH*. Desta vez, o modelo numérico superestimava a altura da onda, em relação aos resultados experimentais. Vale lembrar que o bloco simulado pelos autores permanece na rampa e não experimenta mudança de inclinação ao longo do percurso.

Alguns trabalhos de cunho experimental, com novos equipamentos, também figuram na literatura. Pode-se citar, como exemplo, Fritz (2002), que estudou a fase inicial das ondas geradas por deslizamento. Para tanto, utilizou material fragmentado e a tecnologia PIV (*Particle Image Velocimetry*), possibilitando o estudo dos campos de velocidades do material deslizante através da cinemática das partículas. Fritz (2002) apresentou duas importantes contribuições: a previsão da máxima crista de onda gerada por um deslizamento e o volume da primeira onda a uma distância conhecida.

Souza (2007) retoma os trabalhos de Maciel (1991), agora considerando o impacto de materiais granulares. O autor utilizou a metodologia numérica, a partir de alterações no modelo de Nascimento (2001) e experimental, através de ensaios de queda de material fragmentado em canal. Entretanto, o modelo numérico utilizado por Souza (2007) sofre com várias limitações impostas pela técnica de volumes finitos. Uma dessas, por exemplo, é que o modelo numérico considera o material deslizante apenas na fase submersa.

O objetivo deste capítulo é, independente dos trabalhos de ordem numérica que figuram na literatura, em diferenças finitas e volumes finitos, efetuar a simulação numérica do fenômeno de deslizamento de material sólido único e fragmentado, através da técnica Lagrangiana *SPH*. O desempenho geral do código será avaliado através da comparação numérico experimental, principalmente, da altura da onda de submersão gerada. Aspectos secundários, como a dinâmica do material deslizante (velocidade do centro geométrico), também serão tratados.

#### 7.2 METODOLOGIA

Por se tratar de dois tipos de problemas distintos, um considerando o material único e outro fragmentado, e devido à necessidade de resultados para validação do modelo numérico, esta seção será dividida em duas partes: procedimento experimental e numérico. No procedimento experimental, será feito um relato de como os dados foram obtidos e as configurações do aparato experimental utilizado. Já no procedimento numérico, serão descritos os dois modelos numéricos simulados, tanto para material fragmentado quanto único, descrevendo também as equações para sólidos com movimentos livres no *SPH*.

## 7.2.1 Procedimento experimental: material fragmentado

Os resultados para validação do modelo *SPH* com material fragmentado foram realizados por Souza (2007), no Laboratório de Hidráulica da Unesp, Ilha Solteira, em um canal de ondas com 0,30 m de largura, 0,50 m de altura e 10 m de comprimento. Para o lançamento do material deslizante foi instalada uma rampa metálica, com um ângulo de inclinação de 30° e uma transição suave até o fundo do canal. A rampa foi dotada de um fechamento acrílico nas laterais para evitar a fuga de material. A comporta que mantém o material condicionado à rampa é aberta mecanicamente por meio de um solenoide. A figura 31 mostra um panorama do aparato experimental.

**Figura 31** – À esquerda, pode-se ver o canal de ondas onde os ensaios foram efetuados e à direita, um detalhe da rampa de lançamento de material deslizante com comporta aberta.



Fonte: Souza (2007, p. 84).

O material deslizante utilizado é composto por esferas de vidro. As esferas apresentam uma boa esfericidade, com um diâmetro médio de 19,88 mm ( $\pm 0,1$  mm) e massa específica de 2530 kg/m<sup>3</sup> ( $\pm 250$  kg/m<sup>3</sup>). A altura da onda gerada é medida através de sondas capacitivas micro controladas.

Para a determinação do campo de velocidades da massa deslizante no meio líquido, foi utilizada a técnica de cinematografia. Os ensaios eram gravados com uma filmadora profissional JVC GY-DV500U, que possui o sistema de cor NTSC (imagens com resolução de  $720 \times 480$  pixeis). Os vídeos obtidos foram convertidos em imagens estáticas para tratamento em programa vetorial. Esse tratamento envolve a determinação do centro geométrico do material deslizante, a velocidade do centro geométrico e a velocidade da frente do material deslizante. As velocidades foram obtidas a partir da distância percorrida entre uma imagem e outra, e sabendo-se que o intervalo entre fotografias é de 1/30 s (considerando uma aproximação do padrão NTSC), foi possível a obtenção de uma velocidade média no percurso. A figura 32 ilustra a obtenção da

velocidade da frente do deslizamento.

**Figura 32** – Procedimento para determinação da velocidade da frente do deslizamento pelo tratamento de imagens sucessivas.



Fonte: Souza (2007, p. 103).

## 7.2.2 Procedimento experimental: material único

A comparação entre os resultados do código numérico e experimentais é realizada para duas situações distintas: a primeira segue o trabalho de Monaghan, Kos e Issa (2003), em que os autores estudaram a influência do impacto de um bloco único através da medição da altura da onda em um canal. O aparato experimental dos autores conta com um canal de ondas de 40 cm de largura por 40 cm de altura por 7 m de comprimento e com um ângulo de inclinação de 10°. Devido à intensidade do impacto, formação do jato e incorporação de ar no seio da massa líquida, Monaghan, Kos e Issa (2003) mediram a altura da onda refletida no fundo do canal. Neste caso, a dinâmica do bloco não é conhecida.

A segunda situação avaliada baseia-se nos resultados experimentais de Maciel e Nascimento (2002), obtidos no Laboratório de Hidráulica da Unesp – Ilha Solteira, portanto em um canal de ondas com as mesmas dimensões apontadas na subseção 7.2.1 (0,30 m de largura, 0,50 m de altura e 10 m de comprimento). Utilizou-se uma versão modificada do código *SPH* para tratar a rampa de inclinação de  $30^\circ$  e a conformação em arco de circunferência entre a rampa e o fundo do canal, sendo as forças reativas calculadas de acordo com Monaghan e Kajtar (2009). O campo de velocidades do bloco é conhecido.

#### 7.2.3 Procedimento numérico: dinâmica de um corpo rígido

A representação do deslizamento de material solido único passa por estabelecer, segundo os conceitos do *SPH*, a dinâmica de um corpo rígido. Sendo assim, pode-se descrever os limites do corpo rígido como compostos por partículas de fronteira, que exercem uma força de repulsão exatamente como estabelecido nas condições de contorno do tipo fronteira reativa (MONAGHAN; KOS; ISSA, 2003). A principal diferença é que o corpo rígido obedece equações adicionais, que são a dinâmica do centro de massa e rotação em torno do centro de massa. A equação da dinâmica do corpo de centro  $\vec{C}$  e massa *M* é:

$$M\frac{d\vec{U}}{dt} = \vec{F} \tag{108}$$

Já para a rotação em torno do centro de massa, tem-se:

$$J\frac{d\dot{\Omega}}{dt} = \vec{\tau} \tag{109}$$

Escrevendo as equações 108 e 109 em termos da partícula de fronteira k, tem-se:

$$M\frac{d\vec{U}}{dt} = \sum_{k} m_k \vec{f}_k \tag{110}$$

$$J\frac{d\vec{\Omega}}{dt} = \sum_{k} m_k (\vec{r}_k - \vec{C}) \times \vec{f}_k$$
(111)

Considerando  $\vec{f}_k$  a força exercida pelas partículas fluidas no corpo rígido, tem-se:

$$\vec{f}_k = \sum_i \vec{f}_{ki} \tag{112}$$

Como deseja-se que o princípio de ação e reação seja preservado na ausência de forças externas (conservação da quantidade de movimento linear e angular), escreve-se:

$$\vec{f}_{ki} = -\frac{m_i}{m_i + m_k} \vec{f}_p \tag{113}$$

De maneira análoga, a força por unidade de massa na partícula de fluido i devido à partícula de parede k é dada por:

$$\vec{f}_{ik} = \frac{m_k}{m_i + m_k} \vec{f}_p \tag{114}$$

de tal forma que  $m_k \vec{f}_{ki} = -m_i \vec{f}_{ik}$ .

Uma vez determinadas as forças e consequentemente as velocidades  $\vec{U} \in \vec{\Omega}$ , faz-se a mudança de posição das partículas do corpo rígido:

$$\frac{d\vec{r}_k}{dt} = \vec{U} + \vec{\Omega} \times (\vec{r}_k - \vec{C})$$
(115)

## 7.2.4 Procedimento numérico: material fragmentado

A modelagem, no *SPH*, do material fragmentado, é apenas a adição de outro fluido ideal na simulação, com características físicas próprias, como massa específica. O método numérico *SPH*, com características Lagrangianas, particulado e sem malha, é adequado para representar problemas com grandes distorções no domínio fluido. O código utilizado para realização das simulações foi desenvolvido pela equipe de trabalho e validado para alguns casos de escoamentos de fluido ideal, como a geração e quebra de ondas (VASCO et al., 2009) e ondas de impacto (VASCO; MACIEL; MINUSSI, 2010).

## 7.2.5 Resultados

## 7.2.5.1 Material único: comparação com Monaghan, Kos e Issa (2003)

De posse das novas equações a serem introduzidas no modelo (113 e 115, além das equações 108 e 109), foram realizadas simulações de impacto de um bloco único em meio líquido em repouso. A água, com massa específica  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ , é modelada como fluido ideal. O bloco utilizado possui a forma de cubo com 38,5 cm de largura por 10,7 cm de altura por 30 cm de comprimento e uma massa de 37,7 kg. A lâmina d'água normal é de 21 cm e variam-se as velocidades de impacto do bloco.

Utiliza-se o núcleo de suavização do tipo *spline* cúbico 2D. O comprimento de suavização das partículas  $h = 1, 2\Delta x$ , sendo  $\Delta x \approx 7$  mm, o que dá mais de 18 mil partículas. Como condição inicial, as partículas estão dispostas nas arestas de uma grade quadrada de lado  $\Delta x$ , com perfil de pressões hidrostático e velocidade nula. As coordenadas ótimas do bloco único são determinadas através de uma rotina de pré-processamento, através da solução implícita das equações 108 e 109, baseada em um algoritmo tipo Newton-Raphson. O bloco é animado de velocidade inicial, que varia conforme o ensaio.

A viscosidade artificial e a pressão são calculadas segundo as equações clássicas (equação 56), com  $\alpha = 0,01$ . É utilizado o integrador Preditor-Corretor (seção 4.12.1) e o passo de tempo  $\Delta t$  é calculado e atualizado automaticamente em cada passo de tempo. Elege-se  $\Delta t$  como o menor valor entre  $\Delta t_1$ ,  $\Delta t_2$  e  $\Delta t_3$ , sendo  $\Delta t_1 = h_i/(c+0,6\alpha)$  calculado para todas as partículas fluidas,  $\Delta t_2 = y/(0,1c)$  e  $\Delta t_3 = h_i/f_{ik}^2$  calculados para todas as partículas interagindo com a fronteira. A celeridade do som da simulação é de c = 30 m/s.

A figura 33 mostra a relação entre o número de Froude no impacto do bloco e a respectiva onda gerada adimensional, para cinco velocidades de impacto diferentes. Nota-se que os resultados numéricos obtidos estão mais próximos dos experimentais. No entanto, salienta-se o desconhecimento da dinâmica do bloco ensaiada por Monaghan, Kos e Issa (2003). Em outras palavras, Monaghan, Kos e Issa (2003), diferentemente da aproximação adotada neste trabalho, incluíram pequenos ajustes na vizinhança das partículas no impacto para coincidir a dinâmica do bloco numérico com o experimental. Além disso, no aparato experimental utilizado por Mo-

**Figura 33** – Comparação numérico e experimental para a onda gerada pelo impacto de um bloco único



Fonte: Do próprio autor.

naghan, Kos e Issa (2003), o bloco único viaja em rampa de baixa declividade ( $10^{\circ}$ ), não passa por mudança de declividade, sendo a onda formada quase que unicamente pelo mecanismo de transferência de energia. Fatores como a declividade do fundo podem ser descartados, simplificando o problema, principalmente do ponto de vista analítico.

A figura 34 mostra uma sequência de imagens obtida da simulação numérica. Pode-se perceber a formação do jato e a dificuldade na simulação de tais problemas.

## 7.2.5.2 Material único: comparação com Maciel e Nascimento (2002)

Em uma primeira aproximação do código *SPH* aplicado aos resultados de Maciel e Nascimento (2002), pensou-se em utilizar a mesma geometria de Monaghan, Kos e Issa (2003), que resulta na alteração da inclinação da rampa (de 30 para  $10^{\circ}$ ) e a ausência de uma conformação em arco de circunferência adequada entre a rampa e o fundo. O bloco indeformável possui, na simulação, as dimensões apresentadas em Maciel e Nascimento (2002): 0,325 m de comprimento, 0,29 m de largura, 0,075 m de altura, massa de 9 kg e um chanfro de 45°. A figura 35 mostra as dimensões do bloco na primeira aproximação.

Para a configuração supracitada, os erros na altura da onda, medidos a 4,5 m do ponto de impacto, em relação aos resultados de Maciel e Nascimento (2002), são da ordem de 30%. Entretanto, o que chama a atenção é que a onda gerada pelo modelo numérico assemelha-se mais a um ressalto móvel do que a uma onda solitária, que é o perfil observado experimentalmente.



**Figura 34** – Impacto do bloco e formação da onda, sendo as características da simulação as mesmas que as utilizadas em Monaghan, Kos e Issa (2003)

Fonte: Do próprio autor.

Portanto, faz-se necessário buscar alternativas de modelagem para representar fielmente o aparato experimental. Isso foi possível graças a utilização do conceito de força radial apresentado em Monaghan e Kajtar (2009), descrito brevemente no final da seção 4.10.2.

De modo a verificar que a formulação de fronteira radial Monaghan e Kajtar (2009) não altera demasiadamente o balanço de forças nas partículas fluidas, um teste numérico foi proposto para determinar a pressão no fundo de um tanque em repouso. Embora pareça um teste simples, sabem-se das dificuldades inerentes à reprodução da estacionaridade em simulações com fronteiras reativas, tendo em vista a adição de termos extra a equação de balanço de **Figura 35** – À esquerda, bloco utilizado por Maciel e Nascimento (2002) e à direita, configuração da primeira aproximação.





quantidade de movimento. Para evitar esse inconveniente, faz-se um aquecimento do modelo, utilizando um fator de amortecimento (que vale 0,98), que é aplicado a equação de integração numérica (seção 4.12.2, p. 56). De forma geral, os parâmetros são os mesmos de Monaghan e Kajtar (2009). Os resultados podem ser vistos na figura 36.

**Figura 36** – À esquerda, a comparação numérica para o cálculo de pressão em um tanque em repouso. À direita, a resultante do balanço de quantidade de movimento numérica gerada apenas pelo gradiente de pressão. O valor teórico de tal balanço deve ser igual a 9,81.



Fonte: Do próprio autor.

Frente ao sucesso na reprodução da fronteira radial (figura 36), empreende-se um estudo prévio de calibração do modelo no que tange aos parâmetros numéricos, notadamente a viscosidade artificial e o espaçamento médio entre as partículas. Quanto maior  $\alpha$ , menor é a oscilação da posição experimentada pela partícula. Por consequência, maior será o efeito dissipativo na propagação das ondas. Em contrapartida,  $\Delta x$  determina a quantidade de partículas e qual amplitude de onda será bem representada na simulação. Antuono et al. (2010) recomendam, como espaçamento ótimo para propagação de ondas, a relação  $r_p/H \approx O(10^{-1})$ . Considerando, segundo os resultados experimentais de Maciel e Nascimento (2002), uma altura de onda de 0,03 a 0,05 m, tem-se  $d/\Delta x = 15$ . Definido o espaçamento, o número de partículas total correspondente é de 8276, distribuídas em 1473 para fronteiras e 6803 para o fluido. A massa específica da água vale  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$  e o núcleo de suavização utilizado é o Wendland 2D quartic (MONAGHAN; KAJTAR, 2009). Já para o cálculo das forças nas paredes, utiliza-se o Wendland 1D quintic (MONAGHAN; KAJTAR, 2009). O comprimento de suavização das partículas vale  $h = 1,5\Delta x$ . A pressão é calculada segundo a equação de estado clássica (equação 56) e a viscosidade artificial é aplicada ao problema ( $\alpha = 0,02$ , equação 61), assim como a correção para evitar a instabilidade de tensão.

Utiliza-se o integrador Verlet (seção 4.12.2), com passo de tempo  $\Delta t$  obedecendo às restrições impostas pela condição CFL e uma celeridade do som de c = 50 m/s. Disso, resulta um passo de tempo  $\Delta t$  da ordem de  $O(10^{-4})$  a  $O(10^{-5})$ .

A figura 37 ilustra uma comparação entre os níveis da água, medidos a 4,5 m do ponto de impacto, obtidos experimentalmente por Maciel e Nascimento (2002) e numericamente pelo código *SPH* proposto neste trabalho, para cinco velocidades de lançamento do bloco distintas.

**Figura 37** – Comparação numérico experimental da onda gerada pelo impacto de um bloco em águas tranquilas, em função do número de Froude no impacto.



Fonte: Do próprio autor.

Os resultados numéricos, de acordo com a figura 37, superestimam a altura da onda. Atribui-se tal fato aos aspectos não modelados pelo código numérico, como o ar (problema bifásico) e o escoamento nas laterais e fundo do bloco, que podem alterar substancialmente o atrito experimentado pelo bloco. Este fato corrobora observações de outros autores (MO-NAGHAN; KOS; ISSA, 2003) de que o *SPH* necessita de um tratamento especial para representar a transferência de energia do bloco para o meio líquido. Entretanto, é importante ressaltar

a representação correta da onda solitária pelo modelo numérico proposto, como observada na figura 38.

**Figura 38** – Geração numérica da onda solitária com o código *SPH*, utilizando as condições de contorno dadas pelas forças radiais (MONAGHAN; KAJTAR, 2009).



Fonte: Do próprio autor.

## 7.2.5.3 Material fragmentado

Foi empreendido um estudo prévio de calibração do modelo no que tange aos parâmetros numéricos. O material fragmentado tem massa específica  $\rho_s = 2530 \text{ kg/m}^3$  e a água  $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$ . Ambos são simulados como escoamentos ideais. A lâmina d'água varia nos ensaios, sendo três valores distintos: 0, 15, 0, 175 e 0, 20 m.

O núcleo de suavização usado é o Wendland 2D *quartic*. As condições de contorno são do tipo fronteira reativa, lançando mão da formulação mais recente na literatura (equação 66), utilizando o núcleo do tipo Wendland 1D *quintic* para o cálculo das forças (MONAGHAN; KAJTAR, 2009). O comprimento de suavização das partículas  $h = 1,5\Delta x$ , sendo  $\Delta x = d/20$ , o que resulta em um número de partículas diferente para cada lâmina d'água. Como condição inicial, as partículas estão dispostas nas arestas de uma grade quadrada de lado  $\Delta x$ . De modo a evitar que as partículas adquiram movimentações excessivas no início da simulação, é feito um aquecimento do modelo, utilizando um fator de amortecimento. O fator de amortecimento é aplicado na evolução das partículas (velocidade e posição) quando acontece a integração numérica, e vale 0,98. Para os resultados deste capítulo, o fator de amortecimento está presente até 1,0 s.

A pressão é calculada segundo a equação de estado clássica (equação 56). A viscosidade artificial é aplicada ao problema ( $\alpha = 0,025$ , equação 61), assim como a correção para evitar a instabilidade de tensão. Para a evolução no tempo, utiliza-se, o integrador Verlet (seção 4.12.2), mais interessante por possuir características conservativas (MONAGHAN, 2005). O passo de tempo  $\Delta t$  obedece às restrições impostas pela condição CFL, e é o menor valor entre  $\Delta t_1 = \Delta t_2$ , sendo  $\Delta t_1 = h_i/(2c)$  calculado para todas as partículas fluidas e  $\Delta t_2 = |r_{ik} - \Delta x|/V$  calculado para todas as partículas interagindo com a fronteira. A celeridade do som da simulação é de c = 22, 15 m/s.

A figura 39 ilustra o resultado da comparação, para a lâmina d'água de 0,15 m.

Cabe salientar que foi efetuado um ajuste do zero da simulação. Mesmo sem ajuste, as diferenças de fase entre os resultados numéricos e experimentais são da ordem de um décimo de segundo. Além disso, percebe-se que o modelo numérico reproduz a altura da onda experimental, com erro relativo da ordem de 1% (altura numérica de 0,238 m e altura experimental de 0,241 m).

Já para o caso da figura 39b, que reproduz a dinâmica do centro de gravidade do material deslizante, nota-se o comportamento parabólico da evolução do deslocamento × velocidade de avanço. Tal comportamento é esperado, devido à ação das forças externas atuantes no material fragmentado. De maneira resumida, assume-se que o material acelera, devido à gravidade, até que o seu centro de gravidade cruza a linha d'água. A partir daí, há uma desaceleração, causada pela resistência imposta pelo meio líquido. Essa desaceleração acontece até que o material deslizante esteja completamente em repouso.

**Figura 39** – (a) Posição da superfície livre, medida a aproximadamente 1,7 m do ponto de impacto e (b) a dinâmica do centro de gravidade do material deslizante, para d = 0,15 m (8022 partículas).



Fonte: Do próprio autor.

Devido à técnica de captura da imagem, há uma variação considerável dos resultados experimentais. No entanto, o alcance do material acompanha a tendência percebida pelos resultados experimentais, evidenciados pela figura 39b.

Já para a lâmina d = 0,175 m, segue a comparação entre os resultados numérico e o experimental, mostrados na figura 40.

**Figura 40** – (a) Posição da superfície livre, medida a aproximadamente 1,7 m do ponto de impacto e (b) a dinâmica do centro de gravidade do material deslizante, para uma lâmina d'água de 0,175 m (6878 partículas).



Fonte: Do próprio autor.

Como pode ser notado na figura 40a, o resultado numérico reproduz, com fidelidade, a altura da onda. O erro relativo, nesse caso, é menor que 1%. Os dois casos ilustrados nas figuras 39a e 40a também foram bem representados pelo modelo numérico em Volumes Finitos de Nascimento (2001), conforme testes realizados em Souza (2007).

Os resultados ilustrando o comportamento do modelo para o último caso, com lâmina de 0,20 m, são apresentados na figura 41.

**Figura 41** – (a) Posição da superfície livre, medida a aproximadamente 1,7 m do ponto de impacto e (b) a dinâmica do centro de gravidade do material deslizante, para uma lâmina normal de 0,20 m (6035 partículas).



Fonte: Do próprio autor.

Com a lâmina de 0,20 m, a tendência é a diminuição do número de partículas e uma relativa degradação dos resultados numéricos em detrimento dos experimentais. Este fato pode ser verificado através do erro relativo, que desta vez esteve na casa dos 2% (altura numérica de 0,265 m e altura experimental de 0,27 m). Mesmo assim, considera-se que a diferença esteja na casa do erro experimental e numérico cometido nos respectivos ensaios.

De modo a ilustrar o progresso da simulação, é mostrada a figura 42, que compara, quadro a quadro, a evolução do modelo numérico com o ensaio experimental. Pode-se perceber que no *splash* (tempo t = 0,53 s), o modelo numérico assume uma interrupção brusca da superfície livre, diferente do que acontece experimentalmente (uma incorporação gradativa da parte sólida e parte gasosa - ar - no seio da massa líquida). Talvez este fato seja decorrente da não modelagem do ar, tampouco da tensão superficial da água. Na sequência, há semelhanças entre os resultados nos instantes t = 0,8 e 1,1 s, com a ressalva que, no último, há a formação precoce da segunda onda. No entanto, é objetivo do estudo em tela a modelagem apenas da onda principal, por ser mais danosa do ponto de vista energético.

Nos instantes que seguem (t = 1, 4 e 1, 76 s), também pode-se perceber a compatibilidade entre os resultados para o perfil da linha d'água. Já em relação à dinâmica do material, ou mais precisamente o alcance do material deslizante, percebe-se que os resultados numéricos estão aquém dos resultados experimentais. Uma possível razão é um valor elevado para viscosidade artificial, que foi imposto para suavização do modelo numérico.

No geral, pode-se dizer que o modelo bem representou as principais características do fenômeno complexo de impacto de material fragmentado em meio líquido.

**Figura 42** – Imagens para vários tempos (de cima para baixo): 16/30, 24/30, 33/30, 42/30 e 53/30 s. À esquerda, resultados experimentais e à direita as simulações *SPH*.



Fonte: Souza (2007, p. 114)

Fonte: Do próprio autor.
# 8 DISCUSSÃO E CONCLUSÕES

Inicialmente, é apresentada, nesta Tese de Doutorado, uma introdução aos modelos lagrangianos, com ênfase no *SPH*. Este método numérico, sem malha, mostra-se como uma opção atraente para a solução de problemas de Engenharia, principalmente frente às suas vantagens. Dessa forma, como estabelecido na seção Objetivos (seção 1.1, p. 29), desenvolveu-se um código baseado no modelo *SPH* para simular fenômenos que envolvam geração de ondas, com especial atenção aos problemas de impacto em águas tranquilas.

Passa-se, numa segunda fase, a uma aplicação do código desenvolvido para escoamentos de fluidos ideais em problemas de Engenharia, através de estudos de caso, no capítulo 5. Frente aos resultados apresentados para os problemas de ruptura de barragens (figuras 8, p. 61 e 9, p. 61), geração e quebra de onda (figuras 11, p. 64; 12, p. 66 e 13, p. 67) e esvaziamento de um reservatório (figura 15, p. 69), pode-se dizer que o desempenho foi satisfatório e dentro das margens de erro esperadas.

Posteriormente, estudos de caso foram empreendidos para escoamentos de fluidos reais, inicialmente para uma reologia newtoniana, no capítulo 6. Entre os estudos de caso, destacam-se o Poiseuille com superfície livre (figura 22, p. 79), Poiseuille plano (figura 24, p. 81) e o escoamento de Couette (figura 26, p. 83). Tal empreitada só foi possível mediante a implementação do tensor de tensões viscoso (seção 6.1.3, equação 100, p. 74) e das condições de contorno do tipo partículas fantasma (descrita na seção 4.10.1, p. 51), que aliada com a adoção de fronteiras periódicas (seção 6.2.1, p. 76), possibilita a simulação de um problema transiente até a obtenção do regime permanente. Apresentam-se, também no capítulo 6, os escoamentos de fluidos não newtonianos (seção 6.3, p. 84), em termos do equacionamento e as técnicas numéricas para simulação. Entretanto, em virtude do desconhecimento da condição de contorno para viscosidade aparente no fundo (condição tipo Neumann  $\partial \mu_{app}/\partial \vec{n}$ ), não foi possível a obtenção do regime permanente.

As modelagens de escoamentos de fluidos ideais e reais atuam como pano de fundo para a problemática evidenciada nesta Tese de Doutoramento. O problema de impacto hidrodinâmico de uma massa sólida que desliza por um plano inclinado pode ser visto como a simplificação da desestabilização de uma encosta de um reservatório de uma barragem, por exemplo. A massa deslizante pode ser modelada como um bloco único e indeformável, ou o conjunto de várias partículas pequenas. Se considerada um bloco único, pode-se aplicar as equações que regem um corpo livre, caso contrário pode-se aproximar a massa deslizante por um fluido. Tal fluido pode seguir uma reologia ideial ou real, seja newtoniana ou não newtoniana.

Sendo assim, a partir dos resultados dos capítulos 5 e 6, aliado a modelagem de um

sólido como um corpo livre (três graus de liberdade no plano, seção 7.2.3, p. 95) e as condições de contorno dadas por forças radiais recentemente apresentadas em Monaghan e Kajtar (2009) (seção 4.10.2, p. 53), devidamente testadas (figura 36, p. 99), pôde-se realizar o estudo da geração de ondas devido ao impacto no capítulo 7, comparando os resultados do modelo numérico com os resultados experimentais de Monaghan, Kos e Issa (2003) (figura 33, p. 97) e Maciel e Nascimento (2002) (figura 37, p. 100). Embora os resultados numéricos ilustrados pelas figuras 33 e 37 não se aproximam dos resultados experimentais, a formação da onda solitária é observada numericamente, assim como experimentalmente, como pode ser visto na figura 38 (p. 101).

Cabe ressaltar, também, as correções implementadas ao modelo *SPH*. Entre estas, podese citar as correções para evitar erros de interpolação (interpolador de Shepard, seção 4.7.1.1, p. 47 e interpolador MLS, seção 4.7.1.2, p. 47) e garantir que o soma da função núcleo de suavização em todas as partículas vizinhas é unitária, também chamada de renormalização (seção 4.7.2, p. 48). Realiza-se, então, um estudo prévio para avaliar a implementação realizada do interpolador MLS (apêndice B.1, p. 121), avaliando as vantagens na adoção de um interpolador espacial de ordem elevada. Neste sentido, alia-se uma correção na equação da conservação da massa com a renormalização do núcleo de suavização *W*, para evitar a inserção de mais erros, tal como preconizado na seção 4.7.1 (p. 47). Observam-se os benefícios da implementação das correções nos resultados do capítulo 6.

Sendo assim, e tendo em vista os resultados apresentados, onde foi observado o desempenho do *SPH*, pode-se dizer que o método possui potencialidades e que não se restringe a um nicho de aplicação, pois além de reproduzir fenômenos intrinsecamente não-lineares e/ou descontínuos, também obteve resultados próximos na comparação teórico numérica quando aplicado a problemas clássicos, como àqueles da Hidráulica Fundamental.

#### 8.1 PERSPECTIVAS DE TRABALHOS FUTUROS

Embora muito tenha sido feito, alguns pontos ainda carecem de maior investigação. Dentre eles, o mais importante é com relação à reologia do material escoante, no problema de geração de ondas devido ao impacto. Dessa forma, é desejável que as condições de contorno sejam corretamente implementadas no código *SPH* em desenvolvimento. Dessa forma, problemas de ruptura da barragens envolvendo materiais viscoplásticos poderiam ser simulados e serviriam de base para uma validação do código.

Entretanto, é importante salientar que o ideal seria implementar a reologia não newtoniana no mesmo código que trata do corpo livre, com as condições de contorno dadas por forças radiais (MONAGHAN; KAJTAR, 2009). Isso porque a criação de partículas fantasma não é simples para problemas de geometria qualquer, principalmente nos cantos do domínio que diferem de 90°. Utilizando as forças radiais e a viscosidade artificial como a real, como preconizado em Capone (2009), seria possível simular as encostas, com uma geometria qualquer. Outros pontos que podem ser explorados:

- a) encontrar uma função que relacione a dinâmica do bloco indeformável com a altura da onda, de modo a representar mais fielmente a transferência de energia do bloco para o meio líquido;
- b) verificar a possibilidade de paralelização do código, para tratar uma quantidade maior de partículas. Problemas que lidam com propagação de ondas poderão, assim, representar mais fielmente os resultados experimentais;
- c) forçar a incompressibilidade do escoamento, através de uma mudança no sistema de equações (ISPH);
- d) introdução da equação do transporte difusivo, através da adoção de uma propriedade extra por partícula (concentração). Dessa forma, seria possível avaliar transporte de massa e problemas correlatos.

### 8.2 TRABALHOS PUBLICADOS

A título de informação, seguem os trabalhos publicados baseados na linha de pesquisa em questão.

- a) VASCO, J. R. G.; MACIEL, G. F.; MINUSSI, C. R.; VILA, J. P. Métodos numéricos lagrangeanos: estudos de caso aplicados a problemas de engenharia hidráulica e de recursos hídricos. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE RECURSOS HÍDRICOS, 18., 2009, Campo Grande. *Anais...* Campo Grande: [s.n.], 2009.
- b) VASCO, J. R. G.; DIDIER, E.; NEVES, M. G.; MACIEL, G. F.; MINUSSI, C. R. Modelagem numérica da geração e quebra de ondas usando o método SPH. In: ESCOLA DE PRIMAVERA DE TRANSIÇÃO E TURBULÊNCIA, 7., 2010, Ilha Solteira. *Anais...* Ilha Solteira: [s.n.], 2010.
- c) VASCO, J. R. G.; MACIEL, G. F.; MINUSSI, C. R. Condições de contorno em técnicas lagrangeanas: tratamento de fronteiras. In: CONGRESO LATINOAMERICANO DE HIDRÁULICA, 24., 2010, Punta del Leste. *Anais...* Punta del Leste: [s.n.], 2010.
- d) VASCO, J. R. G.; SOUZA, A. L. O.; MACIEL, G. F.; MINUSSI, C. R. Desenvolvimento de um método numérico lagrangeano na determinação de alturas de ondas de impacto em meios líquidos. In: CONGRESSO DE MÉTODOS NUMÉRICOS EM ENGENHARIA, 2011, Coimbra. *Anais...* Coimbra: [s.n.], 2011.
- e) DIDIER, E.; MARTINS, R.; NEVES, M. G.; VASCO, J. R. G. Interaction between wave and coastal structure: Validation of two lagrangian numerical models with experimental

results. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON COMPUTATIONAL METHODS IN MARINE ENGINEERING - MARINE, 2011, Lisboa. *Proceedings*... Lisboa: [s.n.], 2011.

- f) VASCO, J. R. G.; MACIEL, G. F.; MINUSSI, C. R. Uma introdução às técnicas lagrangeanas: Uma aplicação do método SPH a problemas de engenharia. *Revista Brasileira de Recursos Hídricos*, Porto Alegre, v. 16, n. 1, p.67–82, 2011. ISSN 1414-381X.
- g) VASCO, J. R. G.; MACIEL, G. F.; MINUSSI, C. R. Geração de ondas solitárias com o SPH. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE RECURSOS HÍDRICOS, 19., 2013, Bento Golçalves. *Anais...* Bento Golçalves: [s.n.], 2013.
- h) VASCO, J. R. G.; MACIEL, G. F.; MINUSSI, C. R. Técnicas de correção em métodos numéricos particulados: um estudo de caso baseado no SPH. In: CILAMCE, 34., 2013, Pirenópolis. *Anais...* Pirenópolis: [s.n.], 2013.

Além disso, há um trabalho em avaliação:

 a) VASCO, J. R. G.; MACIEL, G. F.; MINUSSI, C. R. Simulação de escoamentos viscosos no SPH. *Revista Brasileira de Recursos Hídricos*, Porto Alegre, 2014. Submetido em 11 set. 2013. Status atual no sistema do periódico indica "Rev. Requisitadas Finalizadas" na data 27 nov. 2013.

# REFERÊNCIAS

ALLEN, D. E.; APOSTOLV, A.; KREISS, D. Automated analysis of power system events. *IEEE Power and Energy magazine*, New York, v. 3, n. 5, p. 48–55, 2005.

ANTUONO, M. et al. Gravity wave prapagation solved through an enhanced SPH method. In: IAHR 2010 EUROPEAN CONGRESS, 1., 2010, Edinburgh. *Proceedings*... Edinburgh: [s.n.], 2010.

ATAIE-ASHTIANI, B.; FARHADI, L. A stable moving particle semi-implicit method for free surface flows. *Fluid Dynamic Research*, Moscow, v. 38, n. 4, p. 241–256, 2006.

BASA, M.; QUINLAN, N. J.; LASTIWKA, M. Robustness and accuracy of SPH formulations for viscous flow. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, New Jersey, v. 60, n. 10, p. 1127–1148, 2009.

BELYTSCHKO, T.; LU, Y. Y.; GU, L. Element-free galerkin methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Chichester, v. 37, p. 229–256, 1994.

BEREZNITSKI, A. Local hydroelastic response of ship structures under impact loads from water. 2003. 125 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) — Delft University of Technology, Delft, 2003.

BIERBRAUER, F.; BOLLADA, P. C.; PHILLIPS, T. N. A consistent reflected image particle approach to the treatment of boundary conditions in Smoothed Particle Hydrodynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Amsterdam, v. 198, n. 41-44, p. 3400–3410, 2009.

BONET, J.; LOK, T. S. L. Variational and momentum preservation aspects of Smooth Particle Hydrodynamic formulations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Amsterdam, v. 180, n. 1-2, p. 97–115, 1999.

CAPONE, T. *SPH numerical modelling of impulse water waves generated by landslides.* 2009. 121 f. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) — Università di Roma, Roma, 2009.

CARVALHO, R. F.; CARMO, J. S. A. Numerical and experimental modeling of the generation and propagation of waves caused by landslides into reservoirs and their effects on dams. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON FLUVIAL HYDRAULICS - RIVER FLOW, 5., 2006, Lisboa. *Proceedings...* Lisboa: [s.n.], 2006.

CHENG, L. Y. Evaluation of water impact load by numerical simulation and its applications to ship design. 1995. 148 f. Tese (Doutorado em Engenharia Naval) — Universidade Nacional de Yokohama, Yokohama, 1995.

CHENG, L. Y.; ARAI, M. A numerical treatment of the boundary condition for stable assessment of hydrodynamic impact pressure. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON OFFSHORE MECHANICS AND ARCTIC ENGINEERING, 21., 2002, Oslo. *Proceedings...* Oslo: [s.n.], 2002.

COLAGROSSI, A. A meshless lagrangian method for free-surface and interface flows with fragmentation. 2004. 219 f. Tese (Doutorado em Mecânica Teórica e Aplicada) — Universitá di Roma, Roma, 2004.

CUEILLE, P. V. Modélisation par smoothed particle hydrodynamics des phénomènes de diffusion présents dans un écoulement. 2005. 166 f. Tese (Doutorado em Mecânica) — Institut National des Sciences Appliquées (INSA), Toulouse, 2005.

DEAN, R. G.; DALRYMPLE, R. A. *Water wave mechanics for engineers and scientists*. 2. ed. Singapura: World Scientific, 1991. 353 p.

DILTS, G. A. Moving-least-squares-particle hydrodynamics-i. consistency and stability. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Chichester, v. 44, n. 8, p. 1115–1155, 1999.

FAURE, J.; NAHAS, N. Etude numérique et expérimentale d'intumescences à forte courbure du front. *La Houille Blanche*, Les Ulis, v. 5, p. 576–587, 1961.

FRITZ, H. M. *Initial phase of landslide generated impulse waves*. 2002. 249 f. Tese (Doutorado em Ciências Técnicas) — ETH Zurich, Universidade de Zurique, Zurique, 2002.

GHADAMPOUR, Z. et al. Numerical simulation of free surface mudflow using incompressible SPH. *Transactions of Civil Engineering*, Shiraz, v. 37, n. C1, p. 77–95, 2013.

GINGOLD, R. A.; MONAGHAN, J. J. Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars. *Royal Astronomic Society*, Londres, v. 181, p. 375–389, 1977.

HAMMAD, K.; VRADIS, G. C. Flow of a non-newtonian bingham plastic through an axisymmetric sudden contraction: effects of reynolds and yield numbers. *American Society of Mechanical Engineers (ASME), Fluids Engineering Division (FED)*, New York, v. 179, p. 63–69, 1994.

HOSSEINI, S. M.; MANZARI, M. T.; HANNANI, S. K. A fully explicit three-step sph algorithm for simulation of non-newtonian fluid flow. *International Journal of Numerical Methods for Heat and Fluid Flow*, Bingley, v. 17, n. 7, p. 715–735, 2007.

HUBER, A. *Schwallwlllen in seen als folge von belsstürzen*. 1980. 200 f. Tese (Doutorado em Ciências Técnicas) — Swiss Federal Institute of Technology, Universidade de Zurique, Zurique, 1980.

JORGE, F. N. *Mecanismos dos escorregamentos em encostas marginais de reservatórios.* 1984. 146 f. Dissertação (Mestrado em Geotecnia) — Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1984.

KAJTAR, J.; MONAGHAN, J. J. SPH simulations of swimming linked bodies. *Journal of Computational Physics*, Maryland Heights, v. 227, p. 8568–8587, 2008.

KLEEFSMAN, K. M. T. et al. A volume-of-fluid based simulation method for wave impact problems. *Journal of Computational Physics*, Maryland Heights, v. 206, p. 363–393, 2005.

KOROBIN, A. Shallow-water impact problems. *Journal of Engineering Mathematics*, Dordrecht, v. 35, p. 233–250, 1999.

KOSHIZUKA, S.; NOBE, A.; OKA, Y. Numerical analysis of breaking waves using the moving particle semi-implicit method. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Chichester, v. 26, n. 7, p. 751–769, 1998.

KRANZER, H.; KELLER, J. *Water waves produced by explosions*. Charleston: Nabu Press, 1955. 74 p.

KUM, O.; HOOVER, W. G.; POSCH, H. A. Viscous conducting flows with smooth-particle applied mechanics. *Physics Review E*, College Park, v. 109, p. 67–75, 1995.

LACHAMP, P. *Modélisation numérique de l'effet d'un obstacle sur les écoulements de fluides à seuil par la méthode SPH*. 2003. 160 f. Tese (Doutorado em Ciências da Terra) — Université Joseph Fourier, Grenoble, 2003.

LAIGLE, D.; LACHAMP, P.; NAAIM, M. SPH-based numerical investigation of mudflow and other complex fluid flow interactions with structures. *Computational Geosciences*, Dordrecht, v. 11, n. 4, p. 297–306, 2007.

LEITE, L. O. B. *Determinação física e numérica de corridas de lama resultantes de ruptura de barreira retendo material viscoplástico*. 2009. 185 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) — Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2009.

LIU, G. R. *Mesh free methods*: moving beyond the finite element method. Flórida: CRC, 2003. 692 p.

LUCY, L. B. A numerical approach to the testing of the fission hypothesis. *The Astronomical Journal*, Washington, v. 82, p. 1013–1024, 1977.

MACIÁ, F. et al. Theoretical analysis of the no-slip boundary condition enforcement in SPH methods. *Progress of Theoretical Physics*, Minato-ku, v. 125, n. 6, p. 1091–1121, 2011.

MACIEL, G. F. Contribution expérimentale et théorique à l'etude des ondes produites par des glissements solides dens des retenues de barrages. 1991. 168 f. Tese (Doutorado em Engenharia Mecânica) — Université Joseph Fourier, Grenoble, 1991.

MACIEL, G. F.; NASCIMENTO, M. F. Validação do modelo de serre para descrever ondas de submersão geradas pela intrusão de massa sólida em meio líquido. *Revista Brasileira de Recursos Hídricos*, Porto Alegre, v. 7, n. 3, p. 25–32, 2002.

MALANGE, F. C. V. *Rede neuro-fuzzy-wavelet para detecção e classificação de anomalias de tensão em sistemas elétricos de potência.* 2010. 128 f. Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) — Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2010.

MARTIN, J. C.; MOYCE, W. J. Part IV: An experimental study of the collapse of liquid columns on a rigid horizontal plane. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Matematical and Physical Sciences*, Londres, v. 244, n. 882, p. 312–324, 1952.

MEI, C. C. *The applied dynamics of ocean surface waves*. Singapura: World Scientific, 1989. 740 p.

MINUSSI, R. B. *Rompimento de barreiras*: análise experimental e numérica na previsão de velocidades de propagação de frentes de material hiperconcentrado. 2007. 128 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) — Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2007.

MITRA, S.; SINHAMAHAPATRA, K. P. Coupled slosh dynamics of liquid filled containers using pressure based finite element method. In: EXPLORING INNOVATION IN EDUCATION AND RESEARCH, 1., 2005, Tainan. *Proceedings...* Tainan: iCEER, 2005.

MONAGHAN, J. J. Why particle methods work. *Journal on Scientific Computing*, Abingdon, v. 3, n. 4, p. 422–433, 1982.

MONAGHAN, J. J. Simulating free surface flows with SPH. *Journal of Computational Physics*, Maryland Heights, v. 110, p. 399–406, 1994.

MONAGHAN, J. J. SPH without a tensile instability. *Journal of Computational Physics*, Maryland Heights, v. 159, p. 290–311, 2000.

MONAGHAN, J. J. Smoothed particle hydrodynamics. *Reports on Progress in Physics*, Bristol, v. 68, n. 8, p. 1703–1759, 2005.

MONAGHAN, J. J. Smoothed particle hydrodynamic simulations of shear flow. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Oxford, v. 365, p. 199–213, 2006.

MONAGHAN, J. J.; KAJTAR, J. B. SPH particle boundary forces for arbitrary boundaries. *Journal of Computer Physics Communications*, Maryland Heights, v. 180, p. 1811–1820, 2009.

MONAGHAN, J. J.; KOS, A. Solitary waves on a cretan beach. *Journal of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering*, New York, v. 125, n. 3, p. 145–154, 1999.

MONAGHAN, J. J.; KOS, A. Scott Russell's wave generator. *Physics of Fluids*, New York, v. 12, p. 622–630, 2000.

MONAGHAN, J. J.; KOS, A.; ISSA, N. Fluid motion generated by impact. *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*, New York, v. 129, n. 6, p. 250–259, 2003.

MORRIS, J. P. Analysis of smoothed particle hydrodynamics with applications. 1996. 169 f. Tese (Doutorado em Filosofia) — Monash University, Melbourne, 1996.

MORRIS, J. P.; FOX, J.; ZHU, Y. Modeling low reynolds number for incompressible flow using SPH. *Journal of Computational Physics*, Maryland Heights, v. 136, p. 214–226, 1997.

NARAYANASWAMY, M. et al. SPHysics-FUNWAVE hybrid model for coastal wave propagation. *Journal of Hydraulic Research*, Delft, v. 48, n. Extra Issue (2010), p. 85–93, 2010.

NASCIMENTO, M. F. Aproximação das equações da classe Boussinesq no processo de geração de onda na interface sólido-líquido: uma abordagem numérico-experimental com compromisso de engenharia. 2001. 108 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) — Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2001.

NODA, E. Water waves generated by landslides. *Journal of Waterways Harbors Coastal Engineering*, New York, v. 96, p. 835–855, 1970.

NSOM, B.; DEBIANE, K.; PIAU, J. M. Bed slope effect on the dam break problem. *Journal of Hydraulic Research*, Londres, v. 38, n. 6, p. 459–464, 2000.

OGER, G. et al. Two-dimensional SPH simulations of wedge water entries. *Journal of Computational Physics*, Maryland Heights, v. 213, p. 803–822, 2006.

OGER, G. et al. An improved SPH method: Towards higher order convergence. *Journal of Computational Physics*, Maryland Heights, v. 225, p. 1472–1492, 2007.

OLIVER, J. M. *Water entry and related problems*. 2002. 150 f. Tese (Doutorado em Filosofia) — University of Oxford, Hilary, 2002.

PESKIN, C. S. The immersed boundary method. *Acta Numerica*, Cambridge, v. 11, p. 479–517, 2002.

PRINS, J. E. Characteristics of waves generated by a local disturbance. *Transactions American Geophysical Union*, Washington, v. 39, p. 865–874, 1958.

RODRIGUEZ-PAZ, M. X.; BONET, J. A corrected smooth particle hydrodynamics method for the simulation of debris flows. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, New York, v. 20, n. 1, p. 140–163, 2004.

SCHOENBERG, I. J. Contributions to the problem of approximation of equidistant data by analytic functions: part A. *Quartely of Applied Mathematics*, Providence, v. 4, p. 45–99, 1946.

SHAO, S. Incompressible SPH simulation of wave breaking and overtopping with turbulence modelling. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, Chichester, v. 50, p. 597–621, 2006.

SHAO, S.; LO, E. Y. M. Incompressible SPH method for simulating newtonian and non-newtonian flows with a free surface. *Advances in Water Resources*, Southampton, v. 26, p. 787–800, 2003.

SHEPARD, D. A two-dimensional interpolation function for irregularly-spaced data. In: ACM NATIONAL CONFERENCE, 23., 1968, New York. *Proceedings*... New York: ACM, 1968. p. 517–524.

SIROVICH, L. Initial and boundary value problems in dissipative gas dynamics. *Physics of Fluids*, New York, v. 10, n. 1, p. 24–34, 1967.

SOUTO-IGLESIAS, A. et al. SPH no-slip BC implementation analysis at the continuous level. In: ERCOFTAC SPHERIC WORKSHOP ON SPH APPLICATIONS, 5., 2010, Manchester. *Proceedings...* Manchester: [s.n.], 2010.

SOUZA, A. L. O. *Métodos analíticos, numéricos e experimentais para o cálculo de ondas de impacto em meios líquidos.* 2007. 194 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) — Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2007.

SWEGLE, J. W.; HICKS, D. L.; ATTAWAY, S. W. Smoothed particle hydrodynamics stability analysis. *Journal of Computational Physics*, Maryland Heights, v. 116, n. 1, p. 123–134, 1995.

TAKEDA, H.; MIYAMA, S.; SEKIYA, M. Numerical simulation of viscous flow by smoothed particle hydrodynamics. *Progress of Theoretical Physics*, Kyoto, v. 92, n. 5, p. 939–960, 1994.

TANIZAWA, K. A time-domain simulation method for hydroelastic impact problem. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON HYDROELASTICITY IN MARINE TECHNOLOGY, 2., 1998, Fukuoka. *Proceedings*... Fukuoka: [s.n.], 1998.

UNOKI, S.; NAKANO, M. On the cauchy-poisson waves caused by the eruption of a submarine volcano. *Oceanographical Magazine*, Tóquio, v. 5, p. 119–141, 1953.

VASCO, J. R. G.; MACIEL, G. F.; MINUSSI, C. R. Condições de contorno em técnicas lagrangeanas: Tratamento de fronteiras. In: CONGRESO LATINOAMERICANO DE HIDRÁULICA, 24., 2010, Punta del Este. *Anais...* Punta del Este: [s.n.], 2010.

VASCO, J. R. G. et al. Métodos numéricos lagrangeanos: Estudos de caso aplicados a problemas de engenharia hidráulica e de recursos hídricos. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE RECURSOS HÍDRICOS, 18., 2009, Campo Grande. *Anais...* Campo Grande: [s.n.], 2009.

VILA, J. P. Méthodes particulaires régularisées - développements récents et nouvelles applications. In: ESAIM - CONGRES D'ANALYSE NUMÉRIQUE, 29., 1998, Les Ulis. *Proceedings...* Les Ulis: EDP Sciences, 1998. v. 3, p. 131–146.

WIEGEL, R. L. Laboratory studies of gravity waves generated by the movement of a submerged body. *Transactions American Geophysical Union*, Hoboken, v. 36, n. 5, p. 759–774, 1955.

# APÊNDICE A – ERROS NO SPH

De maneira geral, não é trivial encontrar o erro do *SPH*, simplesmente porque as partículas, ao longo da simulação, encontram-se em um estado aparentemente desordenado. No início do desenvolvimento do *SPH*, pensava-se que o erro total das simulações poderia ser descrito como uma função de densidade de probabilidade de massa, similar às estimativas de Monte Carlo. No entanto, os erros são bem menores que aqueles estimados por essa aproximação. Isso porque, nas simulações *SPH*, as partículas estão desordenadas, mas segundo um princípio, ou equacionamento, não aleatoriamente espalhadas. Em outras palavras, o que causou a desordenação não foi uma simples função aleatória, mas sim o resultado do balanço da forças que regem o escoamento. Portanto há um padrão conhecido ao qual as partículas obedecem. Esta propriedade do *SPH* diferencia em muito o erro calculado usando estimativas baseadas em aleatoriedades.

Além disso, uma vez que a desordem das partículas depende da dinâmica, não é possível fazer as tradicionais estimativas como aquelas feitas em MDF ou MEF. De fato, pelo menos para configurações próximas ao equilíbrio, sabe-se que as partículas do *SPH* buscam a melhor posição, que varia de acordo com o núcleo de suavização utilizado. Esse cenário é bem diferente daquele vislumbrado em MDF, onde procura-se a melhor fórmula de interpolação dada a malha existente. Por esse motivo, o *SPH* depende de comparações com soluções conhecidas, experimentos ou o estudo da variação do erro com o número de partículas.

Para facilitar a exposição a seguir, faz-se uma separação dos erros do *SPH* em três, que podem ser considerados os mais comuns e que serão relatados na sequência: o erro na interpolação integral, o erro na interpolação do somatório e o erro na derivação de funções contínuas.

### A.1 ERROS NA INTERPOLAÇÃO INTEGRAL

Esse erro decorre da aproximação de uma função qualquer pela convolução da função no ponto com a função impulso ou delta de Dirac (princípio básico de toda formulação *SPH*). Considerando a interpolação integral em uma dimensão:

$$\phi_I(x) = \int \phi(x') W(x - x', h) dx' = \phi(x) + \int \left(\phi(x') - \phi(x)\right) W(x - x', h) dx'.$$
(116)

O erro pode ser expresso em termos da expansão em série de Taylor de  $\phi(x')$ , assumindo

que W é uma função impar em (x - x'), resulta:

$$\phi_I(x) = \phi(x) + \frac{Kh^2}{2} \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} + \dots$$
(117)

sendo K uma constante que depende do tipo de núcleo de suavização. Aqui, percebe-se que o erro na interpolação integral é de, pelo menos, segunda ordem, e que K explicita a relação entre o tipo de núcleo de suavização e a expansão em série de Taylor. Sendo assim, pode-se supor que K é a constante para a qual a integral do núcleo de suavização é unitária.

Os termos de terceira ordem são nulos por causa da simetria do problema, abrindo caminho para um modelo de ordem superior (4, desde que anule-se K, o que pode ser conseguido com alguns núcleos de suavização específicos). Um resultado interessante é que todas as estimativas feitas anteriormente assumem a extensão por todo o domínio. Sendo assim, onde existem fronteiras e há o truncamento do domínio fluido, o erro é naturalmente maior. Cabe lembrar que, quando as condições de contorno do tipo partículas fantasma são usadas, não há problemas com truncamento de domínio.

# A.2 ERROS NA INTERPOLAÇÃO DO SOMATÓRIO

Considerando as partículas igualmente espaçadas, pode-se usar a fórmula de Poisson para estimar o erro no somatório:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} f(j) = \int_{-\infty}^{\infty} f(j) dj + 2\sum_{r=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\pi r j) f(j) dj, \qquad (118)$$

sendo j, no segundo membro da equação 118, tratado como uma grandeza contínua.

Considerando a interpolação da função  $g(x) = \alpha_I + \beta_I x$  e as partículas igualmente espaçadas com espaçamento  $\Delta$  ao longo de uma linha infinita com  $\rho = 1$  e  $m = \Delta$ , a interpolação *SPH* no ponto  $x_a = \Delta a$  para a função g(x) resulta:

$$\Delta \sum_{j=-\infty}^{\infty} (\alpha_I + \beta_I j \Delta) W(a\Delta - j\Delta, h).$$
(119)

Se for feita uma translação ao ponto  $a\Delta$  e for usada a fórmula de Poisson juntamente com a consideração de que o núcleo de suavização é uma função ímpar, a equação 119 torna-se:

$$(\alpha_I + \beta_I a \Delta) \left( \int_{-\infty}^{\infty} W(q,h) \, dq + 2 \int_{-\infty}^{\infty} \cos\left(\frac{2\pi q}{\Delta}\right) W(q,h) \, dq + \dots \right). \tag{120}$$

A equação 120 mostra que o erro depende da transformada de Fourier do núcleo de suavização (SCHOENBERG, 1946 apud MONAGHAN, 2005). Ou seja, pode-se particularizar a equação 120 para o tipo de núcleo de suavização utilizado. Por exemplo, se o núcleo de suavização for do tipo *spline* cúbico, a equação 120 fica:

$$(\alpha_I + \beta_I a \Delta) \left( 1 + 2 \left( \frac{\sin(\pi h/\Delta)}{\pi h/\Delta} \right)^4 + \dots \right).$$
(121)

Observa-se que, para o núcleo de suavização em questão, os erros desaparecem caso  $h = \Delta$  e são pequenos caso  $h > \Delta$ . Os mesmos resultados podem ser obtidos em duas dimensões. Entretanto, note que os resultados obtidos valem apenas se as partículas estiverem igualmente espaçadas, o que é muito difícil em uma simulação do *SPH*. Mas, de qualquer forma, evidenciase a relação entre o desordenamento das partículas e o erro no método numérico.

# A.3 ERROS NA INTERPOLAÇÃO DAS DERIVADAS

Sabe-se que, para o caso das derivadas, o erro na estimativa dg(x)/dx é maior que a estimativa da função g(x). Talvez por causa desse comportamento, oscilações no campo de pressão são observadas com frequência no *SPH*, uma vez que a aceleração total da partícula é igualada ao gradiente da pressão na equação do balanço de quantidade de movimento.

Pode-se generalizar e dizer, com certeza, que existem dois principais fatores que influenciam e são fontes de erro no *SPH*: o fato das partículas não estarem igualmente espaçadas e a descontinuidade de partículas. Nesse sentido, a utilização de métodos de correção, tais como a reinicialização da massa específica, a renormalização e a utilização das partículas fantasma como condição de contorno (evita a descontinuidade de partículas nas fronteiras sólidas) parecem opções no sentido de melhorar o desempenho do método *SPH*.

Outra fonte de erros, evidenciada na interpolação no somatório de uma função, depende da escolha do núcleo de suavização e dos parâmetros  $h \in \Delta$ . Em termos gerais, de acordo com o apresentado anteriormente, pode-se assumir que este erro é pequeno desde que seja adotado  $h > \Delta$ . Bierbrauer, Bollada e Phillips (2009) chamam esses erros de erro de suavização (depende de h) e o erro de discretização (depende da relação  $h/\Delta x$ ).

# **APÊNDICE B – TESTES NUMÉRICOS**

Neste capítulo são apresentados testes de desempenho geral do código *SPH* em desenvolvimento. Verifica-se, inicialmente, um interpolador espacial de ordem elevada para minimizar os efeitos negativos na utilização de uma equação de continuidade que não conserva exatamente a massa (equação 43). Posteriormente, testa-se o balanço de forças na formulação de fronteira reativa de Monaghan e Kajtar (2009).

# B.1 EFEITO DA RENORMALIZAÇÃO NO INTERPOLADOR NUMÉRICO

Sabe-se que a ordenação das partículas tem relação com os erros envolvidos no *SPH*. Por esse motivo, serão efetuados casos teste de interpolação de funções com partículas ordenadas e desordenadas. No caso da função simulada, será escolhida uma de comportamento linear.

O teste consiste em distribuir, de forma equiespaçadas, as partículas no intervalo (0,5;1,5)no eixo x e (0,5;1,5) no eixo y, com o espaçamento constante. O núcleo de suavização usado é o *spline* cúbico 2D, e  $h/\Delta x = 2$ . Dessa forma, pretende-se interpolar a função linear f(x,y) = x+y, para todas as 361 partículas criadas.

#### **B.1.1** Partículas ordenadas

A figura 43a mostra o cálculo teórico para a interpolação proposta e a figura 43b o resultado para o MLS. Os erros envolvidos são ínfimos, o que mostra a capacidade do interpolador escolhido.

O desempenho do *SPH* sem correção é mostrado na figura 44a. Os erros envolvidos são demasiadamente grandes, chegando a mais de 70%, conforme ilustra a figura 44b. Evidentemente, os erros nos cantos do domínio são os maiores, devido à falta de partículas. Mas mesmo no interior do domínio, não é garantida a normalização do núcleo de suavização, levando ao resultado evidenciado.

### **B.1.2** Partículas desordenadas

Neste caso, foi adicionada à posição inicial das partículas ( $\vec{r}_i$ ) um ruído, de magnitude aleatória de valor  $\pm 0,25\Delta x$ , de tal forma que  $\vec{r}_i = \vec{r}_i \pm 0,25\Delta x$ . Comparam-se os resultados do MLS e do *SPH* com o valor teórico nas figuras 45 e 46. Os erros deveriam, assim como no caso das partículas ordenadas, serem nulos para o interpolador MLS. No entanto, os valores máximos do erro relativo são desprezíveis (da ordem de  $10^{-4}\%$ ).



Figura 43 – À esquerda, resultado exato para interpolação proposta e à direita os resultados do interpolador MLS.



**Figura 44** – À esquerda, resultado do *SPH* para interpolação da função f(x,y) = x + y e à direita os erros envolvidos.



Fonte: Do próprio autor.

**Figura 45** – À esquerda, resultado exato para interpolação proposta e à direita os resultados do interpolador MLS, agora com as partículas desordenadas.



### Fonte: Do próprio autor.

Mesmo no interior do domínio, a representação da função linear, pelo *SPH standard* não é satisfatória (figura 46a). Os erros da interpolação são ainda maiores, como já era esperado, em relação ao caso com as partículas ordenadas, chegando a mais de 70%, conforme ilustra a figura 46b.

**Figura 46** – À esquerda, resultado do *SPH* para interpolação da função f(x,y) = x + y e à direita os erros envolvidos, com as partículas desordenadas.



Fonte: Do próprio autor.