

LUCAS DIAS BRAGA

ESTUDO DO FENÔMENO DE INSTABILIDADE DE ESTRUTURAS CILÍNDRICAS DE
PAREDES FINAS SUBMETIDAS AO CARREGAMENTO DE PRESSÃO EXTERNA.

Guaratinguetá

2012

LUCAS DIAS BRAGA

ESTUDO DO FENÔMENO DE INSTABILIDADE DE ESTRUTURAS CILÍNDRICAS DE
PAREDES FINAS SUBMETIDAS AO CARREGAMENTO DE PRESSÃO EXTERNA.

Trabalho de Graduação apresentado ao
Conselho de Graduação em Engenharia
Mecânica da Faculdade de Engenharia do
Campus de Guaratinguetá, Universidade
Estadual Paulista, como parte dos requisitos
para a obtenção do diploma de Graduação em
Engenharia Mecânica.

Orientador: Prof. Dr. José Elias Tomazini

Guaratinguetá

2012

Braga, Lucas Dias

B813e Estudo do fenômeno de instabilidade de estruturas cilíndricas de paredes finas submetidas ao carregamento de pressão externa / Lucas Dias Braga – Guaratinguetá : [s.n], 2012.

68 f : il.

Bibliografia: f. 59

Trabalho de Graduação em Engenharia Mecânica – Universidade Estadual Paulista, Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, 2012.

Orientador: Prof. Dr. José Elias Tomazini

1. Flambagem (Mecânica)

I. Título

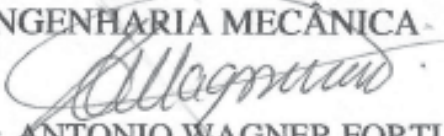
CDU 620.173.26

**ESTUDO DO FENÔMENO DE INSTABILIDADE DE ESTRUTURAS CILÍNDRICAS DE
PAREDES FINAS SUBMETIDAS AO CARREGAMENTO DE PRESSÃO EXTERNA**

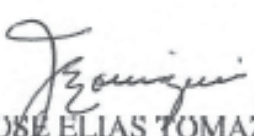
LUCAS DIAS BRAGA

**ESTE TRABALHO DE GRADUAÇÃO FOI JULGADO ADEQUADO
COMO PARTE DO REQUISITO PARA A OBTENÇÃO DO DIPLOMA DE
"GRADUADO EM ENGENHARIA MECÂNICA"**

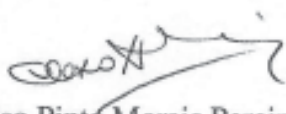
**APROVADO EM SUA FORMA FINAL PELO CONSELHO DE CURSO DE
GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA**


Prof. Dr. **ANTONIO WAGNER FORTI**
Coordenador

BANCA EXAMINADORA:


Prof. Dr. **JOSE ELIAS TOMAZINI**
Orientador/UNESP-FEG


Prof. Dr. **Marcelo Sampaio Martins**
UNESP-FEG


Prof. Dr. **Celso Pinto Moraes Pereira**
UNESP-FEG

Dezembro de 2012

DADOS CURRICULARES

LUCAS DIAS BRAGA

NASCIMENTO	21/10/1988 – SÃO JOSÉ DOS CAMPOS / SP
FILIAÇÃO	Messias Aparecido Braga Silvia Regina Dias Braga
2007/2012	Curso de Graduação Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá Universidade Estadual Paulista - UNESP

Dedicatória

Dedico este trabalho a minha amiga Luiza e aos meus familiares pela paciência, apoio e incentivo ao longo de toda a minha vida.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus por minha vida, por minha família e por todas as oportunidades de crescimento pessoal e profissional.

Agradeço a todos os meus amigos e colegas de trabalho pela amizade e pelo suporte nos momentos de grande dificuldade.

Pela orientação e apoio durante a realização deste trabalho, agradeço ao meu orientador, Professor Dr. José Elias Tomazini.

Epígrafe

“Loucura é fazer a mesma coisa
repetitivamente, e esperar resultados diferentes.”

Albert Einstein

BRAGA, L. D. Estudo do fenômeno de instabilidade de estruturas cilíndricas de paredes finas submetidas ao carregamento de pressão externa. 2012. 68 f. Trabalho de Graduação (Graduação em Engenharia Mecânica) – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2012.

RESUMO

As estruturas com formato de cascas cilíndricas de paredes finas são amplamente utilizadas em diversos ramos da indústria, incluindo as áreas de engenharia civil, mecânica, nuclear, naval, petróleo, aeroespacial, entre outras. A vasta aplicabilidade das cascas cilíndricas e a importância do conhecimento sobre o fenômeno da instabilidade constituem as principais motivações para realização deste trabalho, uma vez que tais fatores possuem grande importância no desenvolvimento de projetos de engenharia. Apresenta-se um estudo detalhado sobre a análise da instabilidade de cascas cilíndricas baseado em teorias analíticas, cujos resultados são comparados com os resultados obtidos pelo método dos elementos finitos. O tipo de carregamento e as condições de contorno analisadas baseiam-se nos tipos mais comuns encontrados nos projetos de engenharia e se referem respectivamente à pressão externa e a restrição radial do deslocamento nas bordas das extremidades dos cilindros. Os cálculos baseados no método dos elementos finitos foram executados com o auxílio do programa ANSYS 13.0. Os resultados obtidos com esses cálculos possuem grande coerência com a teoria apresentada na nota técnica NACA Nº 1341 (BATDORF, 1947), considerando uma larga faixa de aplicação. Por outro lado, o método apresentado no livro "Theory of Elastic Stability" (TIMOSHENKO; GERE, 1936) possui aplicação restrita e apresentou desvios consideráveis em vários casos.

PALAVRAS-CHAVE: Cascas cilíndricas de paredes finas, pressão externa, instabilidade, método dos elementos finitos.

BRAGA, L. D. Instability analysis of thin walled cylindrical shells subjected to lateral external pressure. 2012. 68 p. Monograph (Undergraduate Work in Mechanical Engineering) – Faculdade de Engenharia do Campus de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista, Guaratinguetá, 2012.

ABSTRACT

Thin walled cylindrical shells are widely used in many areas of industry, including civil, mechanical, nuclear, marine, petroleum and aerospace engineering. The wide application of thin cylindrical shells and the importance of instability phenomenon are the motivation basis to this study, since these factors have a great importance in engineering projects. It is presented a detailed study about the instability of cylindrical shells based on theoretical calculation, which results are compared with finite elements method calculation. The loading and boundary conditions analyzed are based on the most common types verified in real engineering projects and refer respectively to lateral (external) pressure and cylinders with simply supported edges. The calculation based on the finite elements method was executed with ANSYS 13.0 software. The results obtained with this calculation are in good agreement with the analytical theory presented in the technical note NACA N° 1341 (BATDORF, 1947) considering a wide range of applicability. On the other hand, the analytical method presented in the book "Theory of Elastic Stability" (TIMOSHENKO; GERE, 1936) has a very restrict applicability and has presented considerable deviations in a great sort of the analyzed cases.

KEYWORDS: Thin cylindrical shells, lateral or external pressure, instability, finite elements method.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Tubos para transporte de fluidos petroquímicos (XinYuanTai Steel Pipe Group)	14
Figura 2 – Tubo de sucção da usina hidrelétrica de Itaipu – diâmetro de 11 m (Jornal de Itaipu eletrônico - jie.itaipu.gov.br)	15
Figura 3 – Tanque intermediário presente em um ônibus espacial – (modificada) (http://science.ksc.nasa.gov)	15
Figura 4 – Coordenadas e componentes de deslocamento – (modificada) (DONNELL, 1935).	19
Figura 5 – Forças e momentos atuantes no elemento de casca cilíndrica (DONNELL, 1935).	20
Figura 6 – Valores críticos do coeficiente de tensão circunferencial “ k_y ” para cilindros com extremidades simplesmente apoiadas – (modificada) (BATDORF, 1947)	25
Figura 7 – Comparação entre a solução teórica proposta com testes experimentais e outras soluções teóricas encontradas na literatura – (modificada) (BATDORF, 1947)	26
Figura 8 – Seção de um anel sob a ação de pressão externa uniforme – (modificada) (TIMOSHENKO; GERE, 1936).	28
Figura 9 – Esforços atuantes na casca cilíndrica (TIMOSHENKO; GERE, 1936).	30
Figura 10 – Relação linear entre as coordenadas “ α ” e “ ϕ ” obtida para valores fixos de “ L/r ” e “ n ” – (modificada) (TIMOSHENKO; GERE, 1936).	33
Figura 11 – Elemento de casca SHELL281 (ANSYS 13.0).	42
Figura 12 – Modo de falha do modelo de cálculo Nº 1 (ANSYS 13.0).	47
Figura 13 – Modo de falha do modelo de cálculo Nº 2 (ANSYS 13.0).	48
Figura 14 – Modo de falha do modelo de cálculo Nº 3 (ANSYS 13.0).	48
Figura 15 – Modo de falha do modelo de cálculo Nº 4 (ANSYS 13.0).	49
Figura 16 – Modo de falha do modelo de cálculo Nº 5 (ANSYS 13.0).	49
Figura 17 – Modo de falha do modelo de cálculo Nº 6 (ANSYS 13.0).	50
Figura 18 – Modo de falha do modelo de cálculo Nº 7 (ANSYS 13.0).	50
Figura 19 – Modo de falha do modelo de cálculo Nº 8 (ANSYS 13.0).	51
Figura 20 – Modo de falha do modelo de cálculo Nº 9 (ANSYS 13.0).	51
Figura 21 – Relação “ k_y ” x “ Z ” (ANSYS 13.0).	53
Figura 22 – Detalhe do gráfico “ k_y ” x “ Z ” - $3000 < Z < 30000$ (ANSYS 13.0).	55
Figura 23 – Modo de falha do modelo de cálculo Nº 10 (ANSYS 13.0).	60
Figura 24 – Modo de falha do modelo de cálculo Nº 11 (ANSYS 13.0).	60

Figura 25 – Modo de falha do modelo de cálculo Nº 12 (ANSYS 13.0).	61
Figura 26 – Modo de falha do modelo de cálculo Nº 13 (ANSYS 13.0).	61
Figura 27 – Modo de falha do modelo de cálculo Nº 14 (ANSYS 13.0).	62
Figura 28 – Modo de falha do modelo de cálculo Nº 15 (ANSYS 13.0).	62
Figura 29 – Modo de falha do modelo de cálculo Nº 16 (ANSYS 13.0).	63
Figura 30 – Modo de falha do modelo de cálculo Nº 17 (ANSYS 13.0).	63
Figura 31 – Modo de falha do modelo de cálculo Nº 18 (ANSYS 13.0).	64
Figura 32 – Modo de falha do modelo de cálculo Nº 19 (ANSYS 13.0).	64
Figura 33 – Modo de falha do modelo de cálculo Nº 20 (ANSYS 13.0).	65
Figura 34 – Modo de falha do modelo de cálculo Nº 21 (ANSYS 13.0).	65
Figura 35 – Modo de falha do modelo de cálculo Nº 22 (ANSYS 13.0).	66
Figura 36 – Modo de falha do modelo de cálculo Nº 23 (ANSYS 13.0).	66
Figura 37 – Modo de falha do modelo de cálculo Nº 24 (ANSYS 13.0).	67
Figura 38 – Modo de falha do modelo de cálculo Nº 25 (ANSYS 13.0).	67
Figura 39 – Modo de falha do modelo de cálculo Nº 26 (ANSYS 13.0).	68
Figura 40 – Modo de falha do modelo de cálculo Nº 27 (ANSYS 13.0).	68

LISTA DE SÍMBOLOS

u, v, w, s	Coordenadas axial, tangencial, radial e circunferencial da casca cilíndrica.
t, r, L	Espessura, raio médio e comprimento da casca cilíndrica.
E	Módulo de elasticidade do material.
μ	Coefficiente de Poisson do material.
$\gamma_x, \gamma_s, \gamma_{xs}$	Deformações longitudinais da casca cilíndrica.
k_x, k_s, k_{xs}	Deformações de flexão (curvatura) da casca cilíndrica.
N_x, N_s	Forças normais atuantes na casca cilíndrica - coordenada circunferencial.
$T_x, T_s, T_{xs}, T_{xs}'$	Forças cortantes atuantes na casca cilíndrica - coordenada circunferencial.
$G_x, G_s, G_{xs}, G_{xs}'$	Momentos fletores e torsores atuantes na casca cilíndrica - coordenada circunferencial.
N_x, N_y, N_{xy}, N_{yx}	Forças normais atuantes na casca cilíndrica - coordenada angular.
Q_x, Q_y	Forças cortantes atuantes na casca cilíndrica - coordenada angular.
M_x, M_y, M_{xy}, M_{yx}	Momentos fletores e torsores atuantes na casca cilíndrica - coordenada angular.
σ_x	Tensão axial atuante na casca cilíndrica.
τ	Tensão de cisalhamento atuante na casca cilíndrica.
σ_y	Tensão circunferencial (membrana) atuante na casca cilíndrica.
p	Pressão externa uniforme.
p_{cr}	Pressão crítica que resulta na instabilidade da casca. - $p_{cr} = \frac{\sigma_y t}{r}$
D	Rigidez flexional da placa plana. - $D = \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)}$
Z	Parâmetro de curvatura dos cilindros.
k_y	Coefficiente de tensão circunferencial. - $Z = \frac{L^2}{rt} \sqrt{1-\mu^2}$
G	Fator relacionado a razão entre o raio e a espessura da casca. - $G = \frac{r}{t} \sqrt{1-\mu^2}$
n	Número de ondas circunferenciais verificados durante a instabilidade.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	13
1.1 Objetivos	17
1.1.1 Objetivo Geral	17
1.1.2 Objetivos Específicos	17
2 REVISÃO DA LITERATURA.....	18
2.1 Estudo da estabilidade de tubos de paredes finas submetidos à torção	18
2.2 Um método simplificado de análise da estabilidade elástica de cascas cilíndricas	22
2.3 Instabilidade de anéis e tubos circulares sob ação de pressão externa uniforme	28
2.4 Introdução ao Método dos Elementos Finitos (MEF)	33
2.5 Análise de instabilidade linear utilizando o ANSYS 13.0	35
3 METODOLOGIA DE CÁLCULO	37
3.1 Cálculos baseados em métodos analíticos	39
3.2 Cálculo baseado na teoria dos elementos finitos - ANSYS 13.0	40
4 ANÁLISE DOS RESULTADOS	45
4.1 Testes de malha	45
4.2 Resultados dos cálculos	46
5 CONCLUSÕES	57
REFERÊNCIAS	59
APÊNDICE A - Modos de instabilidade dos modelos de cálculo de número 10 ao 27	60

1 INTRODUÇÃO

A tecnologia tem apresentado nas últimas décadas um desenvolvimento acelerado, o qual é impulsionado principalmente pelas necessidades dos mercados industriais. As indústrias de praticamente todos os setores têm enfrentado um cenário de alta competitividade, no qual a redução de custos e a qualidade dos produtos são impostas como questão de sobrevivência para qualquer empresa.

A indústria aeronáutica, por exemplo, investe constantemente no projeto de aeronaves que possam voar com velocidades cada vez maiores e isso resulta na busca por estruturas cada vez mais leves. A redução do número de nervuras e de outros elementos que fornecem rigidez à estrutura pode ser considerada uma solução viável para a redução de massa de uma aeronave. Como consequência, os revestimentos passam a suportar maiores parcelas do carregamento e a capacidade para prever com precisão o comportamento mecânico desse tipo de elemento torna-se cada vez mais importante (BATDORF, 1947).

Os elementos de casca, tais como os revestimentos das aeronaves, estão presentes em outros diversos ramos da indústria. No ramo da engenharia civil, estruturas de casca podem ser encontradas em grandes coberturas e em uma diversidade de pontes; na indústria automobilística, muitas estruturas também são cascas; na indústria aeronáutica, as fuselagens de aeronaves e foguetes são feitas de estruturas do tipo casca; na arquitetura naval, os cascos dos navios também constituem cascas. Em todos esses casos, uma estrutura de parede fina cobre uma grande área e deve suportar cargas externas (CHAPELLE; BATHE, 2003).

Uma estrutura de casca consiste basicamente em uma estrutura tridimensional, a qual é delgada em uma direção e longa nas demais. Essas estruturas são encontradas em abundância na natureza e apesar de possuírem espessuras pequenas, podem suportar cargas consideráveis de forma efetiva (CHAPELLE; BATHE, 2003).

As principais suposições apresentadas nas teorias clássicas de placas finas também constituem a base das teorias analíticas de cascas finas. Entretanto, existe uma grande diferença no comportamento mecânico dessas estruturas quando submetidas ao carregamento de cargas externas. O equilíbrio estático de uma placa plana submetida a uma carga lateral somente é possível pela ação de momentos fletores e torsores acompanhados de forças cortantes. Por outro lado, as cascas transmitem as cargas superficiais por tensões de membrana, as quais agem paralelamente ao plano tangencial da superfície média da casca e também são distribuídas uniformemente ao longo da espessura. Essa propriedade interessante que as cascas possuem as tornam em geral estruturas muito mais rígidas e econômicas do que placas submetidas às mesmas condições (TIMOSHENKO; KRIEGER, 1959).

As estruturas cilíndricas de paredes finas constituem elementos estruturais do tipo casca e são amplamente utilizadas na construção de produtos associados às indústrias de engenharia civil, mecânica, nuclear, naval, petróleo (off-shore), aeroespacial, entre outras.

As figuras apresentadas a seguir ilustram algumas possíveis utilizações para estruturas cilíndricas de paredes finas.



Figura 1 – Tubos para transporte de fluidos petroquímicos (XinYuanTai Steel Pipe Group).

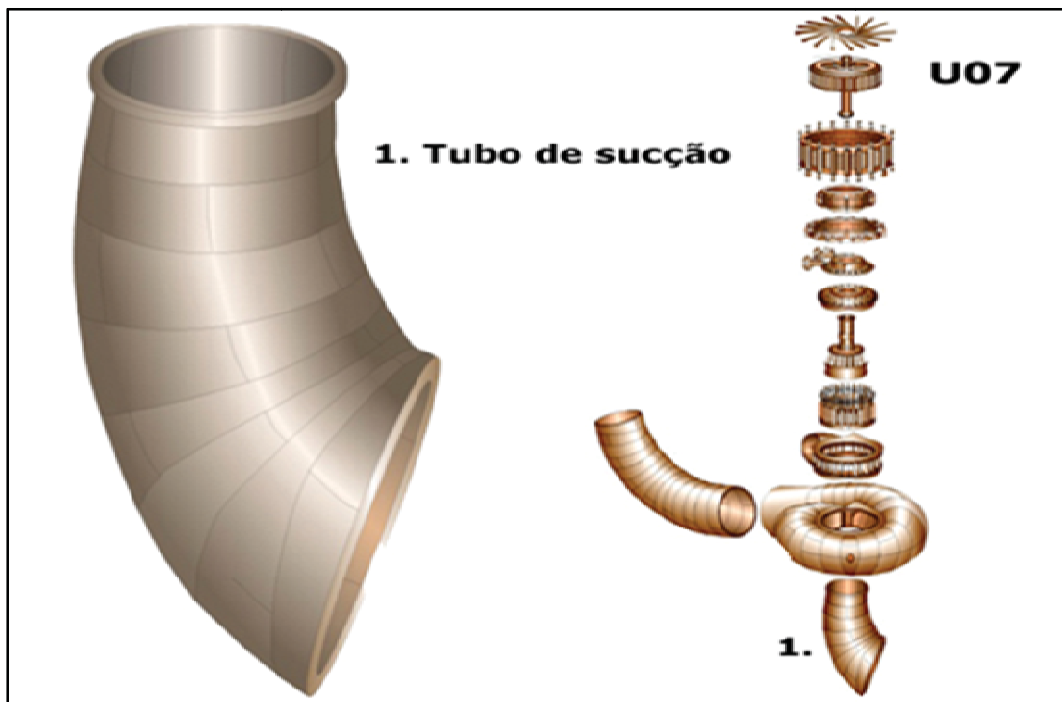


Figura 2 – Tubo de sucção da usina hidrelétrica de Itaipu – diâmetro de 11 m
(Jornal de Itaipu eletrônico - jie.itaipu.gov.br).

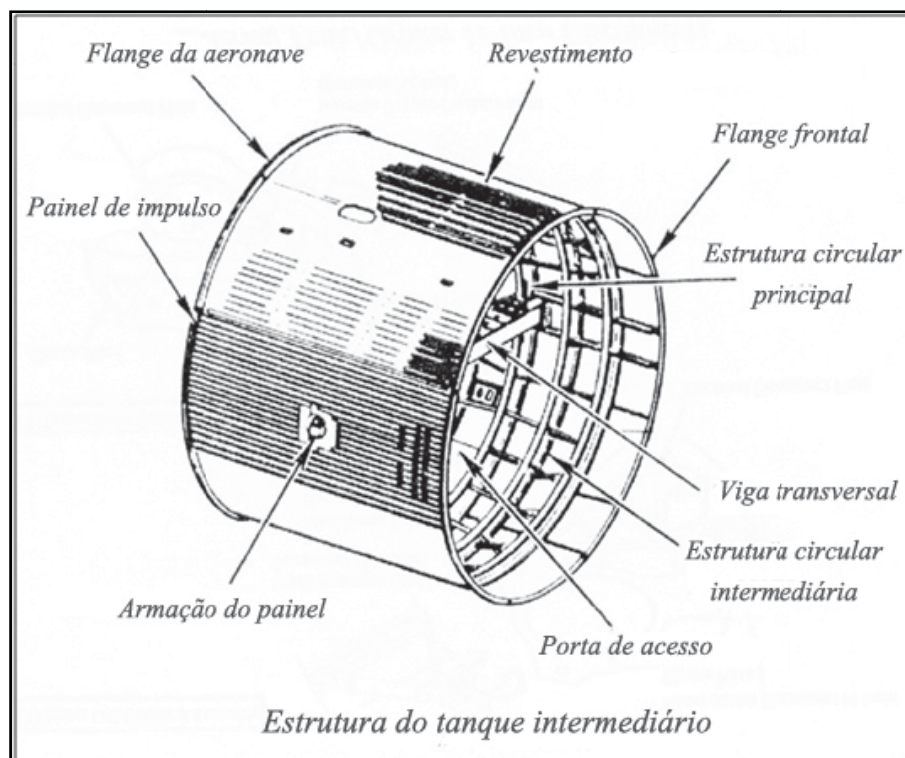


Figura 3 – Tanque intermediário presente em um ônibus espacial – (modificada)
(<http://science.ksc.nasa.gov>).

Os primeiros estudos analíticos de estruturas do tipo casca datam do início do século 20. Na época, os métodos utilizados se baseavam no conhecimento físico/matemático dos problemas de casca. As teorias e as soluções encontradas eram aproximações do comportamento físico real desse tipo de estrutura (CHAPELLE; BATHE, 2003).

Uma diversidade de teorias analíticas foi desenvolvida ao longo do século 20 obtendo-se uma série de soluções aproximadas, entretanto, os avanços mais significativos pertinentes à análise de cascas foram obtidos com o desenvolvimento do método dos elementos finitos (CHAPELLE; BATHE, 2003).

O método dos elementos finitos aplicado à análise do comportamento mecânico de estruturas formadas por cascas passou por um grande desenvolvimento ao longo das últimas décadas. A capacidade do método dos elementos finitos continua a se desenvolver em virtude dos desafios presentes na análise de estruturas formadas por cascas. As dificuldades são aparentes quando se considera as cascas complexas com curvaturas arbitrárias, imperfeições relativas aos materiais, condições de contorno e carregamento diversos, principalmente no que se refere às estruturas com espessuras finas (CHAPELLE; BATHE, 2003).

Dada às características de sua geometria, as cascas cilíndricas de paredes finas são suscetíveis ao fenômeno de instabilidade, principalmente quando as mesmas estão submetidas ao carregamento de pressão externa. No que se refere ao projeto desse tipo de estrutura, o fenômeno de instabilidade deve ser cuidadosamente analisado e coeficientes de segurança coerentes devem ser adotados, pois esse tipo de fenômeno não apresenta indícios anteriores à falha e pode ser catastrófico para qualquer projeto mecânico.

As cascas cilíndricas apresentam uma forma geométrica simples, a qual pode ser parametrizada em função de um pequeno número de variáveis (raio, espessura e comprimento), entretanto, o estudo analítico da estabilidade elástica desse tipo de estrutura se baseia na resolução de sistemas de equações diferenciais de grau elevado.

A importância da instabilidade de cascas cilíndricas nos projetos de engenharia e as dificuldades associadas ao estudo desse fenômeno constituem as principais motivações para a realização do presente trabalho.

1.1 Objetivos

1.1.1 Objetivo Geral

Esse trabalho apresenta como objetivo geral avaliar o fenômeno de instabilidade elástica em cascas cilíndricas de paredes finas submetidas ao carregamento de pressão externa e uniforme, considerando a condição de contorno de extremidades (bordas externas) simplesmente apoiadas (restrição de deslocamento na direção radial dos cilindros).

1.1.2 Objetivos Específicos

- Avaliar os resultados de carga crítica de instabilidade determinados a partir de soluções analíticas encontradas na literatura.
- Avaliar os resultados de carga crítica de instabilidade determinados a partir do cálculo baseado no método dos elementos finitos (MEF) com a utilização do programa ANSYS 13.0.
- Comparar os resultados obtidos com os diferentes métodos analisados, determinar os principais parâmetros que influenciam a instabilidade desse tipo de estrutura e avaliar a aplicabilidade de cada método de cálculo.

2 REVISÃO DA LITERATURA

2.1 Estudo da estabilidade de tubos de paredes finas submetidos à torção

Os primeiros estudos analíticos referentes à estabilidade de cascas cilíndricas estão relacionados com o comitê americano de consultoria aeronáutica - NACA (*National Advisory Committee for Aeronautics*). Os primeiros trabalhos publicados datam das décadas de 30 e 40. O relatório NACA Nº 479 (DONNELL, 1935) apresenta um estudo sobre a estabilidade de tubos redondos de paredes finas submetidos à torção. Uma solução teórica é desenvolvida objetivando a determinação da carga crítica de torção sob a qual os tubos se tornam instáveis. A solução proposta foi obtida através de um processo de derivação simplificada das equações diferenciais de equilíbrio, na qual alguns termos puderam ser negligenciados sem grandes prejuízos para o nível de precisão da solução.

Os resultados teóricos obtidos são comparados com uma série de testes experimentais indicando que o torque de falha experimental é sempre menor que o torque de falha teórico. O torque de falha experimental apresentou uma média de 75% e um mínimo de 60% do torque teórico calculado. Entretanto, as deformações verificadas nos testes experimentais apresentaram grande proximidade com os valores calculados teoricamente para uma ampla gama de formas e materiais. Por esse motivo, a diferença de resultados existente entre a solução teórica e os testes experimentais foi atribuída às imperfeições geométricas dos tubos reais (excentricidades).

No estudo apresentado no relatório NACA Nº 479 (DONNELL, 1935), as equações de equilíbrio dos elementos de uma casca cilíndrica foram obtidas através de uma forma simplificada. A figura ilustrada a seguir indica os componentes de deslocamento da superfície média de uma casca cilíndrica durante a ocorrência da instabilidade devida ao carregamento de torção.

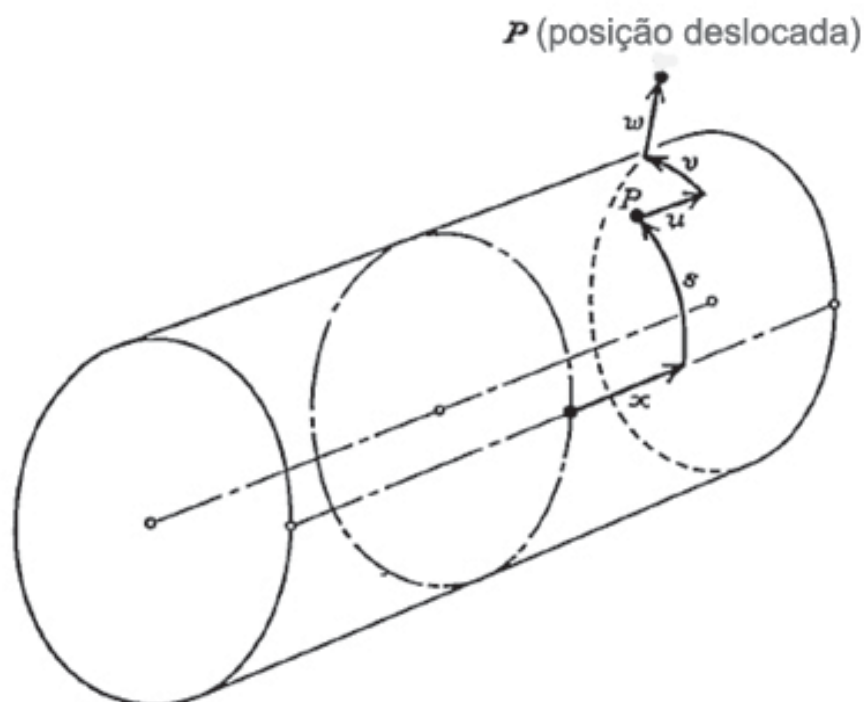


Figura 4 – Coordenadas e componentes de deslocamento – (modificada) (DONNELL, 1935).

Uma coordenada circunferencial “ s ” é utilizada em preferência a uma angular, uma vez que isso resulta em expressões mais simples e facilita a visualização da relação existente entre uma placa curva e o caso limite de uma placa plana (raio “ r ” infinito).

As hipóteses adotadas para cálculo estão de acordo com as mais usuais, incluindo material perfeitamente elástico, tubo perfeitamente cilíndrico e deflexões pequenas comparadas às espessuras. A distorção devido ao cisalhamento transversal é negligenciada, pois a magnitude desse carregamento apresenta uma influência muito pequena nos cálculos.

Se as linhas perpendiculares à superfície média da casca permanecem deste modo durante a distorção, então os deslocamentos de todos os pontos de uma casca cilíndrica podem ser determinados em função das coordenadas “ u ”, “ v ” e “ w ” (axial, tangencial e radial respectivamente). Primeiramente são determinadas as relações geométricas entre essas coordenadas e as deformações em todas as partes da casca cilíndrica. A seguir, as relações entre tensões e deformações são determinadas pelas relações de Hooke e Poisson. Por último, todas as tensões atuantes em dado elemento da casca cilíndrica são relacionadas pelas equações de equilíbrio.

As deformações longitudinais (γ_x , γ_s , γ_{xs}) e de flexão (k_x , k_s , k_{xs}) na superfície média da casca cilíndrica devido à instabilidade podem ser determinadas através das seguintes expressões:

$$\begin{aligned} \gamma_x &= \frac{\partial u}{\partial x} & \gamma_s &= \frac{\partial v}{\partial s} + \frac{w}{r} & \gamma_{xs} &= \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ k_x &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} & k_s &= \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} & k_{xs} &= \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial s} \end{aligned} \quad (1)$$

Essas expressões são as mesmas conhecidas para o caso de uma placa plana com a inclusão do termo “ w/r ” na expressão de γ_s , onde “ r ” é o raio da superfície média da casca. Esse termo se deve à mudança nas dimensões circunferenciais quando ocorre uma mudança no raio, o qual produz a seguinte deformação:

$$\frac{r+w}{r} - 1 = \frac{w}{r} \quad (2)$$

As forças normais (N_x , N_s) e cortantes (T_x , T_s , T_{xs} , T_{xs}') e os momentos fletores e torsões (G_x , G_s , G_{xs} , G_{xs}') resultantes por unidade de comprimento da seção da casca cilíndrica são obtidos pela somatória das tensões atuantes sobre a espessura desta seção conforme indicado na figura a seguir:

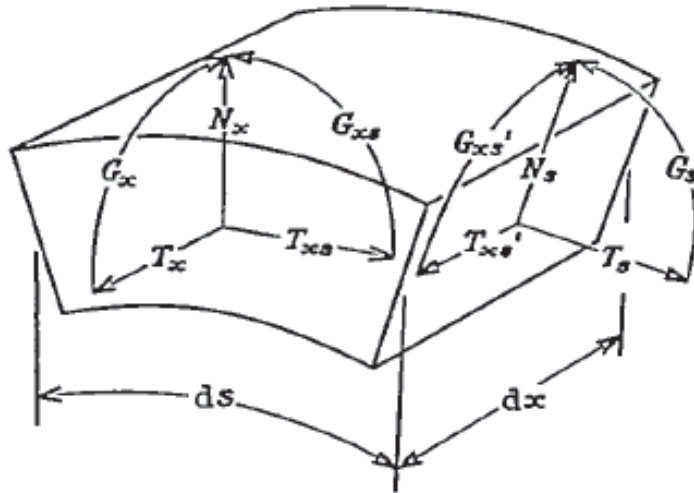


Figura 5 – Forças e momentos atuantes no elemento de casca cilíndrica (DONNELL, 1935).

$$\begin{aligned}
T_x &= \frac{Et}{1-\mu^2}(\gamma_x + \mu\gamma_s) \quad ; \quad T_s = \frac{Et}{1-\mu^2}(\gamma_s + \mu\gamma_x) \\
T_{xs} &= T'_{xs} = \frac{Et}{2(1+\mu)}\gamma_{xs} \quad ; \quad G_x = \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)}(k_x + \mu k_s) \\
G_s &= \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)}(k_s + \mu k_x) \quad ; \quad G_{xs} = G'_{xs} = \frac{Et^3}{12(1+\mu)}k_{xs}
\end{aligned} \tag{3}$$

Onde “ E ” é o módulo de elasticidade do material, “ t ” é a espessura da casca e “ μ ” é o coeficiente de Poisson.

Para o caso de um tubo submetido à torção, a distribuição de tensões antes do início da instabilidade será a mesma indicada pela mecânica básica. Uma tensão de cisalhamento “ S ” estará presente nos planos normal e longitudinal. Devido a essa tensão será verificada uma distorção na direção circunferencial.

A solução geral indicada no relatório NACA N° 479 (DONNELL, 1935) é obtida após um extenso processo de simplificação matemática das equações de equilíbrio, a qual independe dos termos “ u ” e “ v ”, tal como ilustrado a seguir:

$$\frac{Et^3}{12(1-\mu^2)}\nabla^8 w + \frac{Et}{r^2}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2St\nabla^4\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial s}\right) = 0 \tag{4}$$

Onde:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial s^2}$$

E ∇^4 equivale ao operador ∇^2 aplicado duas vezes consecutivas.

A equação (4) corresponde ao mesmo resultado obtido para o caso de uma placa plana, com exceção do segundo termo. Se “ r ” tender ao infinito nessa equação, o segundo termo da equação será nulo. Isso significa que esse termo representa o principal efeito sobre a curvatura em uma grande quantidade de problemas e, portanto, tal equação representa a condição completa de equilíbrio na maior parte dos problemas. Para tubos submetidos a uma pressão externa “ p ”, o último termo da equação (4) será dado por “ $\nabla^4 p$ ”.

2.2 Um método simplificado de análise da estabilidade elástica de cascas cilíndricas

As equações de equilíbrio de cascas cilíndricas determinadas no relatório NACA N° 479 (DONNELL, 1935) para encontrar as tensões críticas de cilindros sob torção são utilizadas na nota técnica NACA N° 1341 (BATDORF, 1947) para encontrar as tensões críticas que causam a instabilidade de cascas cilíndricas com extremidades apoiadas e sob outras condições de carregamento.

O estudo apresentado indica que as equações do relatório NACA N° 479 fornecem soluções que podem ser obtidas de forma fácil e os resultados obtidos dependem basicamente de dois parâmetros adimensionais, sendo um dependente das tensões críticas e outro dependente essencialmente da geometria do cilindro. A precisão das soluções teóricas pôde ser comparada com uma série de testes experimentais.

A maior parte dos trabalhos teóricos relacionados à instabilidade de cascas cilíndricas utilizavam três equações diferenciais simultâneas para expressar as relações entre as componentes de deslocamento “ u ”, “ v ” e “ w ” (axial, circunferencial e radial) na superfície média da casca. Entretanto, o estudo apresentado no relatório NACA N° 479 (DONNELL, 1935) conseguiu mostrar que as diferentes soluções teóricas possuíam diferenças baseadas na inclusão ou omissão de termos relativamente sem importância ou de ordem superior. A solução proposta no relatório NACA N° 479 (DONNELL, 1935) se resume à utilização de equações mais simples que dependem apenas dos termos mais essenciais. Além disso, foi possível demonstrar que os termos omitidos possuíam pequena influência nos resultados, e então, respeitando-se as condições analisadas, tem-se que as equações simplificadas podem ser aplicáveis a uma grande quantidade de problemas práticos.

De acordo com a teoria proposta no relatório NACA N° 479 (DONNELL, 1935), o equilíbrio de uma casca cilíndrica pode ser determinada por uma única equação em termos da componente “ w ”. Essa equação consiste basicamente na equação (4) aplicada para o caso de tubos submetidos a uma pressão externa “ p ”, a qual pode ser reescrita da seguinte forma:

$$D\nabla^8 w + \frac{Et}{r^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + t\nabla^4 \left(\sigma_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\tau \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \sigma_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \nabla^4 p = 0 \quad (5)$$

Onde “ E ” é o módulo de elasticidade do material, “ t ” é a espessura e “ r ” é o raio da casca cilíndrica. “ σ_x ”, “ τ ” e “ σ_y ” representam respectivamente as componentes de tensão axial, cisalhante e circunferencial atuantes na casca.

“ D ” é uma variável de cálculo chamada de rigidez flexional de uma placa plana. Essa variável relaciona a equação diferencial da curva de deflexão da placa com o respectivo momento fletor resultante da aplicação de uma carga transversal (TIMOSHENKO, KRIEGER; 1959).

Para o caso específico de um cilindro submetido a uma pressão lateral externa constante, apenas tensões circunferenciais são causadas, e, além disso, para uma pressão “ p ” constante, o termo “ $\nabla^4 p$ ” que aparece na equação (5) é nulo. Deste modo, a equação (5) pode ser reduzida à seguinte equação:

$$D\nabla^8 w + \frac{Et}{r^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \sigma_y t \nabla^4 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (6)$$

Onde:

$$\sigma_y = \frac{pr}{t} \quad e \quad D = \frac{Et^3}{12(1 - \mu^2)}$$

Dividindo-se a equação (6) por “ D ” e fazendo-se as substituições necessárias, obtém-se a seguinte equação:

$$\nabla^8 w + \frac{12Z^2}{L^4} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + k_y \frac{\pi^2}{L^2} \nabla^4 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (7)$$

Onde “Z” é um parâmetro de curvatura dos cilindros e “ k_y ” é um coeficiente de tensão circunferencial, os quais podem ser determinados pelas seguintes expressões:

$$Z = \frac{L^2}{rt} \sqrt{1 - \mu^2} \quad e \quad k_y = \frac{\sigma_y L^2 t}{\pi^2 D}$$

Onde “L” é o comprimento das cascas cilíndricas.

As condições de contorno correspondentes às extremidades simplesmente apoiadas (ausência de deflexão/momento nas extremidades) são dadas pelas seguintes relações:

$$w(0, y) = w(L, y) = 0 \quad e \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0, y) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(L, y) = 0$$

Considerando essas condições de contorno, a solução da equação (7) pode ser descrita pela seguinte expressão:

$$w = w_0 \sin \frac{\pi y}{\lambda} \sin \frac{m\pi x}{L} \quad (8)$$

Onde “m” é um número inteiro.

Aplicando-se essa solução na equação (7) e após simplificação matemática obtém-se a seguinte solução para “ k_y ”:

$$k_y = \frac{(m^2 + \beta^2)^2}{\beta^2} + \frac{12Z^2 m^4}{\pi^4 \beta^2 (m^2 + \beta^2)^2} \quad (9)$$

Onde:

$$\beta = \frac{L}{\lambda}$$

O parâmetro λ equivale à metade do comprimento da onda na direção circunferencial.

A Figura 7 apresenta a comparação entre a solução teórica proposta na nota técnica NACA N° 1341 (BATDORF, 1947) com uma série de testes experimentais e outras soluções teóricas encontradas na literatura pertinente.

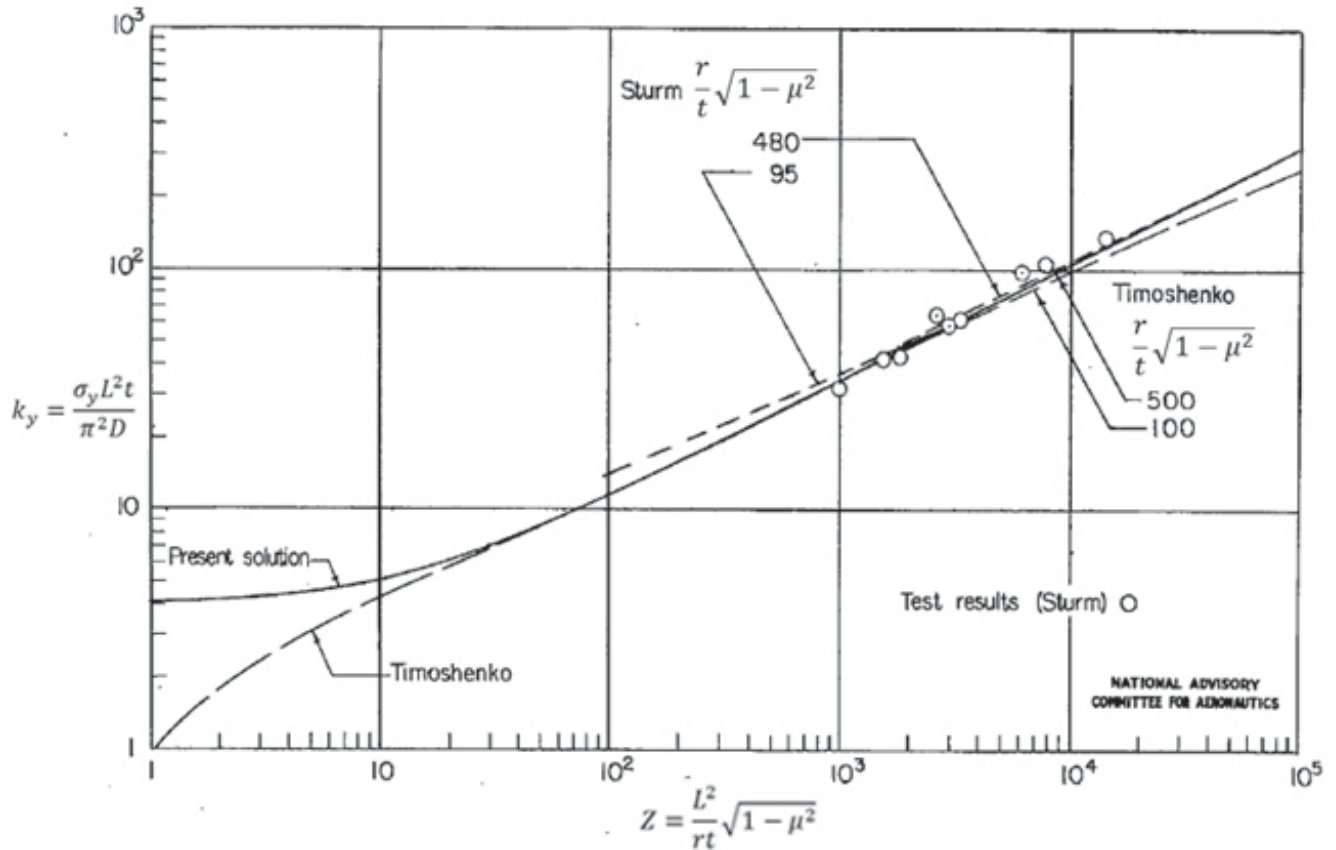


Figura 7 – Comparação entre a solução teórica proposta com testes experimentais e outras soluções teóricas encontradas na literatura – (modificada) (BATDORF, 1947).

A teoria apresentada para determinar a pressão lateral externa sob a qual um cilindro com paredes finas irá perder a estabilidade considera que a falha é ocasionada apenas pela ação de uma tensão circunferencial “ σ_y ”:

$$\sigma_y = k_y \frac{\pi^2 D}{L^2 t} \quad (11)$$

A abscissa do gráfico corresponde ao parâmetro de curvatura “ Z ”, o qual fornece uma indicação da razão do quadrado do comprimento do cilindro dividida pelo produto do raio e espessura do mesmo. A Figura 6 indica que para pequenas curvaturas, “ k_y ” se aproxima de

uma constante igual a 4. Esse caso representa a condição de uma placa plana apoiada submetida à compressão longitudinal.

Quando o parâmetro de curvatura “ Z ” aumenta, o coeficiente de tensão circunferencial “ k_y ” também aumenta, sendo que para grandes valores de “ Z ”, a curva do gráfico se aproxima a uma reta com inclinação $\frac{1}{2}$, a qual pode ser aproximada pela seguinte expressão:

$$k_y = 1,04Z^{1/2} \quad (12)$$

Para um dado valor de “ r/t ”, quando a razão “ L^2/rt ” aumenta, o número de ondas circunferenciais diminui. As curvas das Figuras 6 e 7 foram obtidas com a hipótese de que o número de ondas circunferenciais “ n ” pode variar continuamente, entretanto, na prática, sabe-se que “ n ” deve assumir apenas valores inteiros com um valor mínimo igual a 2. Logo, quando o parâmetro “ Z ” se torna grande, as curvas dos resultados devem ser divididas segundo os diferentes valores de “ r/t ”. Cilindros com paredes espessas podem atingir $n = 2$ com comprimentos moderados, entretanto, cilindros com paredes finas podem atingir $n = 2$ apenas com comprimentos extremamente grandes.

Na Figura 7, os resultados são comparados com outras teorias e resultados experimentais. Verifica-se que para valores de “ Z ” inferiores a 20, a teoria apresentada por Timoshenko (TIMOSHENKO, 1936) apresenta resultados muito inferiores aos resultados obtidos com a teoria apresentada na nota técnica NACA N° 1341 (BATDORF, 1947).

Os resultados da nota técnica NACA N° 1341 (BATDORF, 1947) indicam que para cilindros muito longos, os quais apresentam $n = 2$, uma das condições de validade da equação (4) ($n^2 \gg 1$) não é mais satisfeita e, portanto, erros razoáveis podem ser esperados. Neste caso, a pressão crítica calculada pela equação (4) é dada por $4D/r^3$, enquanto outros resultados teóricos baseados em teorias mais complexas fornecem para o mesmo caso $3D/r^3$. Estes casos específicos são aplicáveis apenas quando $\left(\frac{L}{r}\right) > \left(\frac{5r}{t}\right)$; ou seja, para cilindros com paredes finas, sendo que esta condição só é obtida para razões “comprimento/raio” extremamente grandes. Recomenda-se então que nestes casos seja utilizado um coeficiente de correção equivalente a 0,75.

2.3 Instabilidade de anéis e tubos circulares sob a ação de pressão externa uniforme

Segundo a teoria apresentada no livro “Theory of Elastic Stability” (TIMOSHENKO; GERE, 1936), a instabilidade de um anel circular submetido à pressão uniforme externa pode ser determinada analiticamente considerando os esforços atuantes nesse elemento conforme Figura 8 a seguir:

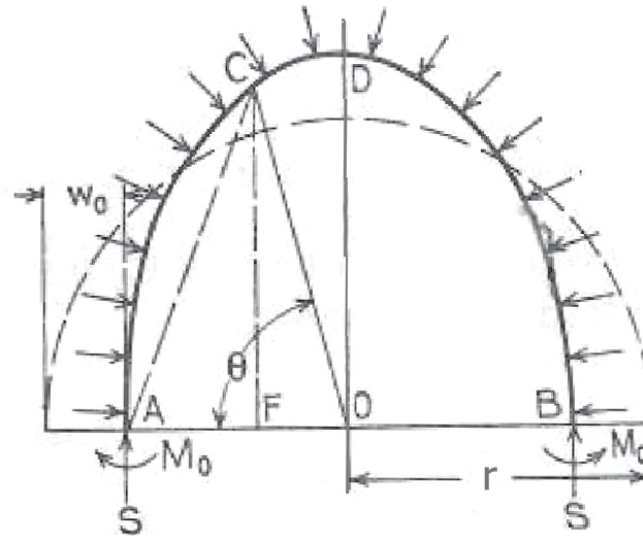


Figura 8 – Seção de um anel sob a ação de pressão externa uniforme – (modificada)
(TIMOSHENKO; GERE, 1936).

A Figura 8 apresenta a metade da seção de um anel. A linha tracejada representa a forma circular inicial do anel e a linha contínua representa a forma deformada devido à ação de uma pressão externa. Os eixos “AB” e “OD” são considerados como eixo de simetria para a forma de instabilidade. A ação da parte inferior removida age sobre a parte superior do anel. Esse efeito pode ser representado por uma força compressiva “S” e por um momento fletor “ M_0 ” atuantes nas duas partes do anel. Sendo “r” o raio inicial do anel, “p” a pressão externa uniforme por unidade de comprimento e “ w_0 ” os deslocamentos radiais em “A” e “B”, então a força compressiva “S” atuante em “A” e “B”, e o momento fletor “M” atuante em qualquer seção transversal “C” serão dados por:

$$S = p(r - w_0) = p\overline{AO}$$

$$M = M_0 + p\overline{AO} \cdot \overline{AF} - \frac{p}{2} \cdot \overline{AC}^2 \quad (13)$$

Aplicando-se esses esforços na equação diferencial da curva de deslocamento do anel circular, obtém-se a seguinte equação:

$$\frac{d^2 w}{d\theta^2} + w \left(1 + \frac{pr^3}{EI} \right) = \frac{-M_0 r^2 + pr^3 w_0}{EI} \quad (14)$$

Onde “ E ” é o módulo de elasticidade do anel e “ I ” é a inércia transversal considerada.

A pressão crítica é obtida pela integração dessa equação, considerando a seguinte solução geral:

$$w = A_1 \sin k\theta + A_2 \cos k\theta + \frac{-M_0 r^2 + pr^3 w_0}{EI + pr^3} \quad (15)$$

Onde:

$$k^2 = 1 + \frac{pr^3}{EI}$$

A menor raiz diferente de zero dessa expressão é $k = 2$.

Portanto, para um anel circular submetido ao carregamento de pressão externa, a pressão crítica “ p_{cr} ” que causa a instabilidade elástica do anel é dada pela seguinte equação:

$$p_{cr} = \frac{3EI}{r^3} \quad (16)$$

Para o caso de um tubo circular, basta substituir “ E ” por “ $E/(1 - \mu^2)$ ” e “ I ” por “ $t^3/12$ ” na equação anterior, onde “ t ” é a espessura do tubo. Logo:

$$p_{cr} = \frac{E}{1 - \mu^2} \left(\frac{t}{2r} \right)^2 \quad (17)$$

A Equação (16) foi determinada para anéis circulares, entretanto, a utilização dessa equação pode ser ampliada para cascas cilíndricas com extremidades livres submetidas à ação de pressão lateral externa uniforme. Essa equação pode ainda ser utilizada para cascas com determinadas restrições nas extremidades, desde que o comprimento do cilindro seja tão longo que o efeito da restrição imposta nas extremidades possa ser desprezada.

Por outro lado, quando a razão comprimento/diâmetro não for muito grande, as condições de contorno impostas nas extremidades das cascas cilíndricas não poderão ser desprezadas. Nesse caso, a determinação da pressão crítica que causa a instabilidade deve ser determinada com base nas equações diferenciais que definem as relações de deformação em uma casca cilíndrica.

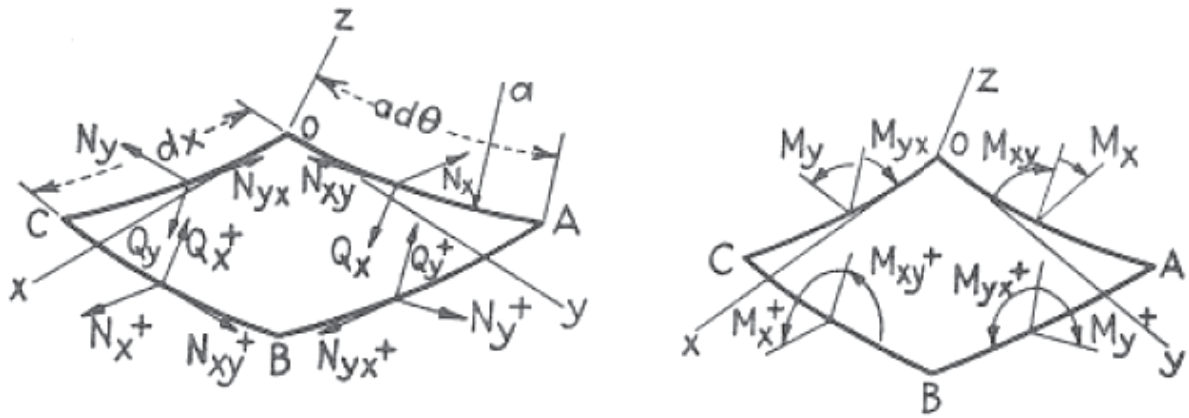


Figura 9 – Esforços atuantes na casca cilíndrica (TIMOSHENKO; GERE, 1936).

Os esforços indicados por “ N_x ”, “ N_y ”, “ N_{xy} ” e “ N_{yx} ” representam as forças normais, “ Q_x ”, “ Q_y ” representam as forças cortantes, e “ M_x ”, “ M_y ”, “ M_{xy} ” e “ M_{yx} ” representam os momentos fletores e torsores atuantes em um dado elemento da casca cilíndrica. Considerando os esforços atuantes devido à ação de uma pressão externa uniforme, pode-se concluir que com exceção de “ N_y ”, os demais esforços podem ser desprezados:

(18)

Neste caso, o equilíbrio da casca cilíndrica se resume às seguintes equações:

$$\begin{aligned}
 r \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial \theta} - N_y \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) &= 0 \\
 \frac{\partial N_y}{\partial \theta} + r \frac{\partial N_{yx}}{\partial x} - Q_y &= 0 \\
 r \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial \theta} + N_y \left(1 + \frac{\partial v}{r \partial \theta} + \frac{\partial^2 w}{r \partial \theta^2} \right) + pr &= 0
 \end{aligned} \tag{19}$$

Onde “ r ” é o raio da casca cilíndrica.

Nessas equações, admite-se que os momentos fletor e torsor são pequenos e, portanto, os produtos derivados desses momentos em função de “ u ”, “ v ” e “ w ” podem ser desprezados. Uma solução particular dessas equações é obtida assumindo-se que sob a ação de uma pressão externa uniforme, a casca cilíndrica mantém sua seção transversal cilíndrica apresentando apenas uma compressão uniforme na direção circunferencial. Então:

$$v = 0 \quad ; \quad w = \frac{r^2 p}{Et}$$

Onde “ E ” é o módulo de elasticidade do material e “ t ” é a espessura da casca cilíndrica.

A determinação da pressão crítica que causa a instabilidade se resume à solução do conjunto de equações diferenciais (19). Considerando uma casca cilíndrica com extremidades simplesmente apoiadas, têm-se as seguintes condições de contorno:

$$w = 0 \quad ; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$

Após um extenso trabalho matemático, obtém-se a seguinte equação para determinação da pressão crítica que causa a instabilidade em cascas cilíndricas:

$$\frac{(1 - \mu^2)p_{cr}r}{Et} = \frac{1 - \mu^2}{(n^2 - 1)(1 + n^2L^2/\pi^2r^2)} + \frac{t}{12r^2} \left(n^2 - 1 + \frac{2n^2 - 1 - \mu}{1 + n^2L^2/\pi^2r^2} \right) \quad (20)$$

Onde “ L ” é comprimento da casca cilíndrica, “ μ ” é o coeficiente de Poisson, e “ n ” é o número de ondas circunferenciais verificados durante a instabilidade.

Quando a casca cilíndrica for muito longa, “ L/r ” assume um valor muito grande e os termos contendo o quadrado dessa razão no denominador podem ser desprezados. Logo:

$$p_{cr} = \frac{Et^3(n^2 - 1)}{12r^3(1 - \mu^2)} \quad (21)$$

Para “ $n = 2$ ”, a última equação se resume à solução encontrada para a instabilidade de um anel circular (equação (16)). Os resultados obtidos com a equação (21) foram ilustrados graficamente no livro “Theory of Elastic Stability” (TIMOSHENKO; GERE, 1936) considerando a seguinte notação:

$$\frac{pr(1 - \mu^2)}{Et} = \varphi \quad e \quad \frac{t^2}{12r^2} = \alpha$$

Neste caso, para um dado valor de “ L/r ” e para um valor adotado de “ n ”, obtém-se uma relação linear entre as coordenadas “ α ” e “ φ ”. A pressão crítica pode ser estimada com base nessas relações. Considera-se ainda que o número de ondas circunferenciais sob as quais ocorre a instabilidade aumenta com a diminuição do comprimento e da espessura da casca cilíndrica. Tais resultados são ilustrados no gráfico a seguir:

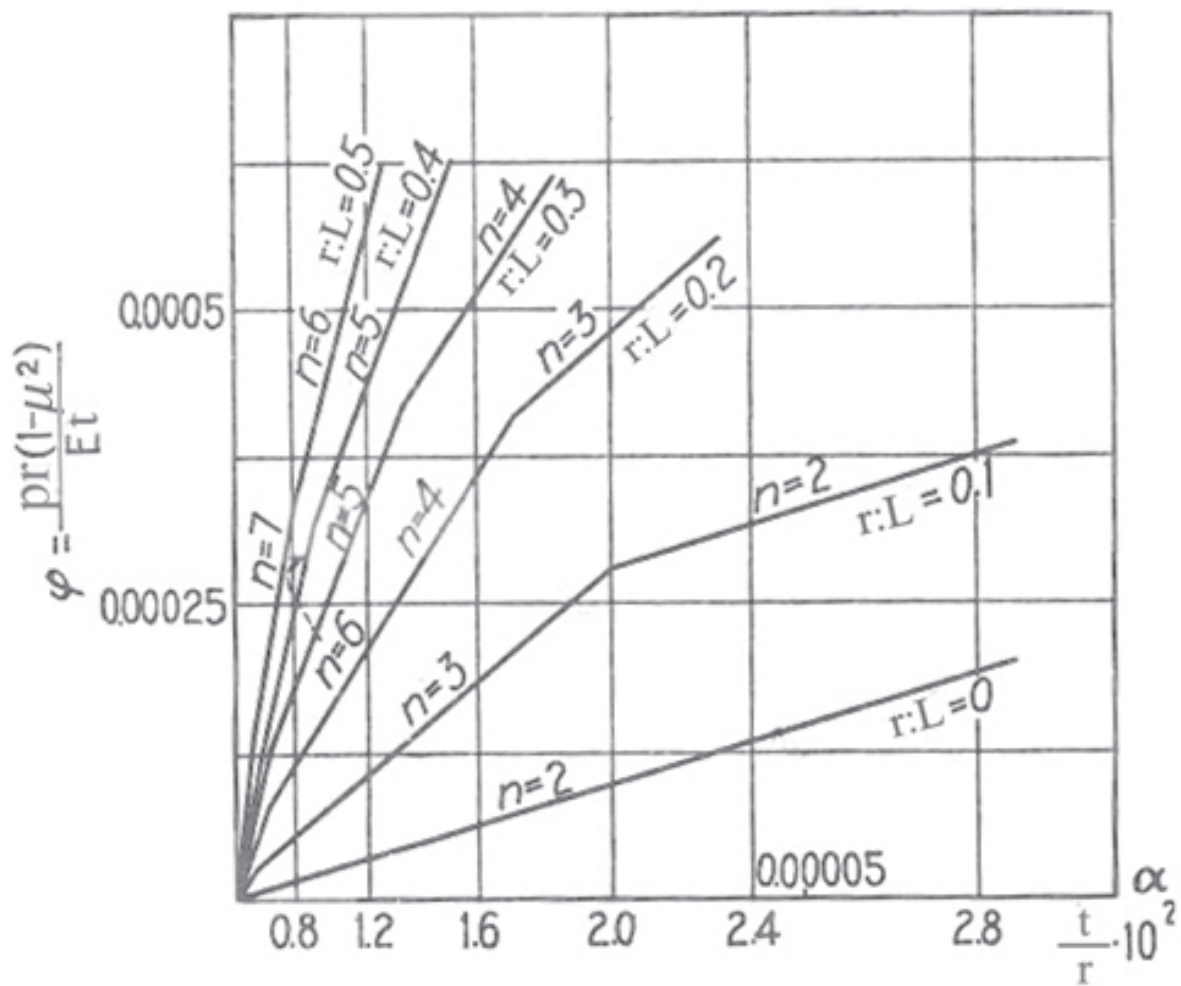


Figura 10 – Relação linear entre as coordenadas “ α ” e “ φ ” obtida para valores fixos de “ L/r ” e “ n ” - (modificada) (TIMOSHENKO; GERE, 1936).

2.4 Introdução ao Método dos Elementos Finitos (MEF)

O método dos elementos finitos (MEF) é um procedimento numérico utilizado para obter soluções numéricas para uma série de problemas de engenharia, incluindo análise de tensões, transferência de calor, eletromagnetismo e mecânica dos fluidos (MOAVENI, 1999).

Esse método foi originalmente desenvolvido na década de 50 na indústria aeronáutica, a qual necessitava na época de meios efetivos para representar o comportamento de complexas estruturas aeronáuticas em análises estáticas e dinâmicas (NASR-BISMARCK, 1993).

Muitos problemas de engenharia não possibilitam a obtenção de soluções analíticas exatas. Essa incapacidade de obter soluções exatas pode ser atribuída à natureza das equações diferenciais que governam esses problemas, as quais podem ser extremamente complexas e podem gerar grandes dificuldades relacionadas às condições iniciais e de contorno. O método dos elementos finitos contorna essas incapacidades com aproximações numéricas (MOAVENI, 1999).

No método dos elementos finitos, considera-se que a região de análise é constituída por diversas sub-regiões interconectadas, ou seja, os elementos. Para cada elemento assume-se uma solução conveniente a partir da qual as condições gerais de equilíbrio podem ser derivadas. A solução aproximada é obtida quando todas essas condições de equilíbrio são satisfeitas (RAO, 2005).

Uma solução baseada no método dos elementos finitos pode ser dividida em três etapas básicas (STOLARSKI; NAKASONE, 2006):

1 – Pré-processamento: definição da geometria e das propriedades mecânicas dos materiais, seleção do tipo de elemento e a discretização do modelo em elementos através da aplicação de uma malha adequada.

2 – Solução: definição dos carregamentos e das condições de contorno e posterior solução numérica das equações relativas ao problema modelado.

3 – Pós-processamento: Análise dos resultados incluindo deslocamentos nodais, reações (forças e momentos) e distribuição de tensões ou temperatura, dependendo do tipo de análise.

O método dos elementos finitos utiliza uma formulação integral para criar uma série de equações algébricas utilizando uma função contínua para representar a solução aproximada de cada elemento. A solução completa é então obtida através da organização das soluções de cada elemento considerando a condição de continuidade nas regiões de transição (MOAVENI, 1999).

O método dos elementos finitos pode apresentar diferentes formas de resolução entre as quais se destacam a formulação direta, na qual as equações de equilíbrio dos nós são arranjadas de forma a se obter uma equação matricial representada pela seguinte forma geral:

$$\{R\} = [K]\{u\} - \{F\}$$

Onde:

$\{R\}$ = matriz das reações;

$[K]$ = matriz de rigidez;

$\{u\}$ = matriz de deslocamento;

$\{F\}$ = matriz do carregamento externo.

Outra forma comum de resolução dos problemas é a formulação baseada na energia potencial total mínima. Nesse caso, considera-se que as cargas externas aplicadas sobre um corpo irão resultar em uma dada deformação. Durante a deformação, o trabalho realizado pelas forças externas é armazenado no material na forma de energia elástica, também chamada de energia de deformação. Essa formulação declara que para um sistema estável, o deslocamento de uma determinada posição de equilíbrio ocorre de tal modo que a energia potencial total do sistema é a mínima.

2.5 Análise de instabilidade linear utilizando o ANSYS 13.0

O programa ANSYS consiste em uma ferramenta de análise baseada no método dos elementos finitos que possui uma variedade de aplicações e é utilizada para a obtenção da solução numérica de uma variedade de problemas mecânicos. Esses problemas podem incluir análises estática e dinâmica, estrutural (linear e não linear), transferência de calor, mecânica dos fluidos, bem como problemas acústicos e de eletromagnetismo (STOLARSKI; NAKASONE, 2006).

Uma análise de instabilidade linear (*linear buckling*) indica a carga teórica sob a qual determinada estrutura irá falhar. Esse método corresponde às abordagens encontradas na literatura. A flambagem de uma coluna, por exemplo, seguirá o comportamento descrito pela teoria de Euler. Entretanto, imperfeições e singularidades evitam que a maior parte das

estruturas reais obedeça aos comportamentos de instabilidade deduzidos teoricamente. Por outro lado, uma análise de instabilidade não-linear apresenta resultados mais precisos. Isto ocorre, pois nesse tipo de análise considera-se os efeitos de grandes deformações; ou seja, a matriz de rigidez dos elementos é atualizada a cada iteração. Esse método ainda possibilita a inclusão de imperfeições iniciais, deformação plástica e folgas.

Cascas cilíndricas de paredes finas submetidas ao carregamento de pressão externa podem ser simuladas com um modelo de cálculo simples. Por esse motivo será utilizada uma análise de instabilidade linear para comparar os diferentes resultados encontrados com o método dos elementos finitos e com os métodos analíticos teóricos.

Uma análise de instabilidade linear deve sempre ser precedida por uma análise estrutural estática. Os resultados obtidos com a análise de instabilidade linear são representados por fatores de carga que escalam as cargas aplicadas na análise estrutural.

Uma estrutura qualquer pode apresentar infinitos modos de instabilidade, cada um associado a um diferente padrão de instabilidade. Na maioria dos casos, o modo de instabilidade mais importante é o que apresenta o menor fator de carga, uma vez que esse modo representará o maior risco para a estrutura.

Outro ponto importante referente a uma análise de instabilidade linear consiste na visualização dos modos de instabilidade. Apesar de facilitar o entendimento sobre como uma parte ou montagem se deforma durante o fenômeno da perda de estabilidade, os resultados obtidos com esse tipo de análise não representam deformações reais. Analogamente, as tensões resultantes desse cálculo representam apenas a distribuição de tensões em um dado componente no momento de ocorrência da instabilidade.

Os passos necessários para realizar uma análise de instabilidade linear consistem basicamente em realizar um pré-cálculo com um modelo de cálculo estrutural estático e a seguir realizar a análise de instabilidade. Os parâmetros mais importantes nesse tipo de análise são a quantidade de modos de falha a serem calculados e a opção de cálculo dos resultados de tensão e deformação.

3 METODOLOGIA DE CÁLCULO

O estudo proposto possui como objetivo avaliar os parâmetros que influenciam o fenômeno de instabilidade em cascas cilíndricas. Para tanto são realizados cálculos analíticos, os quais são comparados com cálculos realizados com o método dos elementos finitos utilizando o programa ANSYS 13.0. Para facilitar a análise dos resultados, os testes propostos possibilitam a avaliação da influência de dois parâmetros principais. Esses dois parâmetros são baseados na nota técnica NACA Nº 1341 (BATDORF, 1947) e consistem em um fator de curvatura do cilindro “ Z ” e um fator que relaciona a razão entre raio e espessura “ G ”:

$$Z = \frac{L^2}{rt} \sqrt{1 - \mu^2} \quad e \quad G = \frac{r}{t} \sqrt{1 - \mu^2}$$

Onde “ L ” é o comprimento, “ r ” é o raio e “ t ” é a espessura da casca cilíndrica. “ μ ” é o coeficiente de Poisson do material analisado.

Para efeito de cálculo considera-se 27 modelos de cascas cilíndricas. Esses 27 modelos estão divididos em 3 grupos, cada um apresentando um determinado valor fixo do parâmetro “ G ” ($G = 20, 50$ e 100). O parâmetro “ Z ” apresenta a mesma variação dentro desses três grupos ($Z = 5, 10, 50, 100, 500, 1000, 5000, 10000$ e 50000). Os modelos de cálculo foram definidos de modo a facilitar a análise dos resultados, pois baseado na nota técnica NACA Nº 1341 (BATDORF, 1947), espera-se que os parâmetros “ Z ” e “ G ” influenciem significativamente o fenômeno da instabilidade nesse tipo de estrutura. As características geométricas de cada modelo foram definidas com base nos valores de “ G ” e “ Z ”, considerando-se uma espessura fixa “ t ” de 5 mm. Deste modo, as demais características geométricas de cada modelo, incluindo o comprimento “ L ” e o raio “ r ” são definidos através das equações que definem os parâmetros “ Z ” e “ G ”.

As propriedades mecânicas adotadas se referem a um aço carbono com propriedades mecânicas comuns encontradas na literatura, incluindo módulo de elasticidade “ E ” de 210 GPa e um coeficiente de Poisson “ μ ” igual a 0,3. A pressão de teste utilizada “ p ” equivale a uma carga nominal de 1,00 MPa.

A tabela a seguir indica os parâmetros geométricos utilizados em cada modelo de cálculo:

Tabela 1 – Parâmetros geométricos dos modelos de cálculo.

Modelo	G	Z	t [mm]	L [mm]	r [mm]
1	20	5	5,00	52,50	104,83
2	20	10	5,00	74,20	104,83
3	20	50	5,00	165,80	104,83
4	20	100	5,00	234,50	104,83
5	20	500	5,00	524,20	104,83
6	20	1000	5,00	741,30	104,83
7	20	5000	5,00	1657,50	104,83
8	20	10000	5,00	2344,10	104,83
9	20	50000	5,00	5241,50	104,83
10	50	5	5,00	82,90	262,07
11	50	10	5,00	117,30	262,07
12	50	50	5,00	262,10	262,07
13	50	100	5,00	370,70	262,07
14	50	500	5,00	828,80	262,07
15	50	1000	5,00	1172,10	262,07
16	50	5000	5,00	2620,80	262,07
17	50	10000	5,00	3706,30	262,07
18	50	50000	5,00	8287,50	262,07
19	100	5	5,00	117,30	524,14
20	100	10	5,00	165,80	524,14
21	100	50	5,00	370,70	524,14
22	100	100	5,00	524,20	524,14
23	100	500	5,00	1172,10	524,14
24	100	1000	5,00	1657,50	524,14
25	100	5000	5,00	3706,30	524,14
26	100	10000	5,00	5241,50	524,14
27	100	50000	5,00	11720,20	524,14

3.1 Cálculos baseados em métodos analíticos

A execução dos cálculos analíticos está baseada nas teorias apresentadas na nota técnica NACA N° 1341 (BATDORF, 1947) e no livro “Theory of Elastic Stability” (TIMOSHENKO; GERE, 1936).

Considerando os resultados apresentados na nota técnica NACA N° 1341 (BATDORF, 1947), as pressões críticas que causam a instabilidade em cada modelo de cálculo são determinadas a partir do gráfico apresentado na Figura 6. Cada modelo de cálculo possui um determinado valor para o parâmetro “Z” e para o parâmetro “G”. Com esses dois parâmetros de entrada pode-se obter do gráfico o coeficiente de tensão circunferencial “ k_y ”, a partir do qual pode-se determinar a tensão crítica de instabilidade utilizando a equação (11):

$$\sigma_y = k_y \frac{\pi^2 D}{L^2 t} \quad (11)$$

Com o valor da tensão crítica pode-se então determinar a respectiva pressão crítica de que causa a instabilidade na casca cilíndrica utilizando a seguinte equação:

$$p_{cr} = \frac{\sigma_y t}{r}$$

Considerando as teorias apresentadas no livro “Theory of Elastic Stability” (TIMOSHENKO; GERE, 1936), as pressões críticas que causam a instabilidade (p_{cr}) podem ser obtidas diretamente com as equações (20) e (21). A equação (21) é uma forma simplificada da equação (20) e se aplica apenas quando a razão entre o comprimento e raio é muito grande.

$$\frac{(1 - \mu^2)p_{cr}r}{Et} = \frac{1 - \mu^2}{(n^2 - 1)(1 + n^2 L^2 / \pi^2 r^2)} + \frac{t}{12r^2} \left(n^2 - 1 + \frac{2n^2 - 1 - \mu}{1 + n^2 L^2 / \pi^2 r^2} \right) \quad (20)$$

$$p_{cr} = \frac{Et^3(n^2 - 1)}{12r^3(1 - \mu^2)} \quad (21)$$

3.2 Cálculo baseado na teoria dos elementos finitos - ANSYS 13.0

Dada a grande quantidade de cálculos a serem realizados, optou-se por elaborar uma macro para facilitar e agilizar o processo de obtenção de resultados com o ANSYS 13.0. A macro utilizada é apresentada na sequência:

```

/PREP7
MAT,1
MP,EX,1,2.1E5
MP,PRXY,1,0.3
ET,,SHELL281,
SECTYPE,1,SHELL,,LAYER1,
SECDATA,ESPESSURA,1,,
K,1,0,0,0
K,2,0,0,COMPRIMENTO/2
K,3,0,0,COMPRIMENTO
CIRCLE,1,RAIO,,,,
CIRCLE,2,RAIO,,,,
CIRCLE,3,RAIO,,,,
L,4,8
L,8,12
L,5,9
L,9,13
L,6,10
L,10,14
L,7,11
L,11,15
AL,1,5,13,15
AL,2,6,15,17
AL,3,7,17,19
AL,4,8,19,13
AL,5,9,14,16
AL,6,10,16,18
AL,7,11,18,20
AL,8,12,20,14
AESIZE,ALL,TAMANHODAMALHA

```

```

AMESH,ALL
AREVERSE,ALL,0
SF,ALL,PRES,PRESSÃODETESTE
CSYS,1
LSEL,S,LINE,,1,4,1,0
LSEL,A,LINE,,9,12,1,0
CM,BORDAS,LINE
NSEL,S,NODE,,BORDAS
D,ALL,UX,0
WSPRINGS
ALLSEL
NROTAT,ALL
/SOLU
PSTRES,ON
SOLVE
FINISH
/SOLU
OUTRES,ALL,ALL
ANTYPE,BUCKLE
BUCOPT,LANB,3,
MXPAND,3
SOLVE
FINISH

```

Os comandos ilustrados nas 7 primeiras linhas da macro servem para ativar as opções de elaboração do modelo de cálculo. O comando “/PREP7” ativa o pré-processador habilitando as opções para definir as propriedades mecânicas do material utilizado, a geometria, a malha, as condições de contorno e os carregamentos do modelo de cálculo.

O comando “MAT,1” cria o material “1” e os comandos “MP,EX,1,2.1E5” e “MP,PRXY,1,0.3” associam a esse material respectivamente um módulo de elasticidade de 210000 MPa e um coeficiente de Poisson de 0,3.

Os comandos “ET,,SHELL281,” “SECTYPE,1,SHELL,,LAYER1,” e “SECDATA,ESPESSURA,1,,,” definem o tipo de elemento utilizado e a esse elemento

associam uma determinada seção com uma determinada espessura. O elemento utilizado é um elemento de casca do tipo SHELL281, o qual possui oito nós e seis graus de liberdade: translações em X, Y e Z, e rotações sobre os eixos X, Y, e Z. Esse tipo de elemento pode ser utilizado em várias aplicações, incluindo instabilidade linear e modelos com grandes deformações/rotações.

A figura a seguir ilustra a geometria, as posições dos nós e o sistema de coordenadas do elemento SHELL281. O elemento é definido pelas informações da seção (espessura) e por oito nós (I, J, K, L, M, N, O e P). O elemento também pode ter uma forma triangular quando os nós K, L e O assumem o mesmo número de nó.

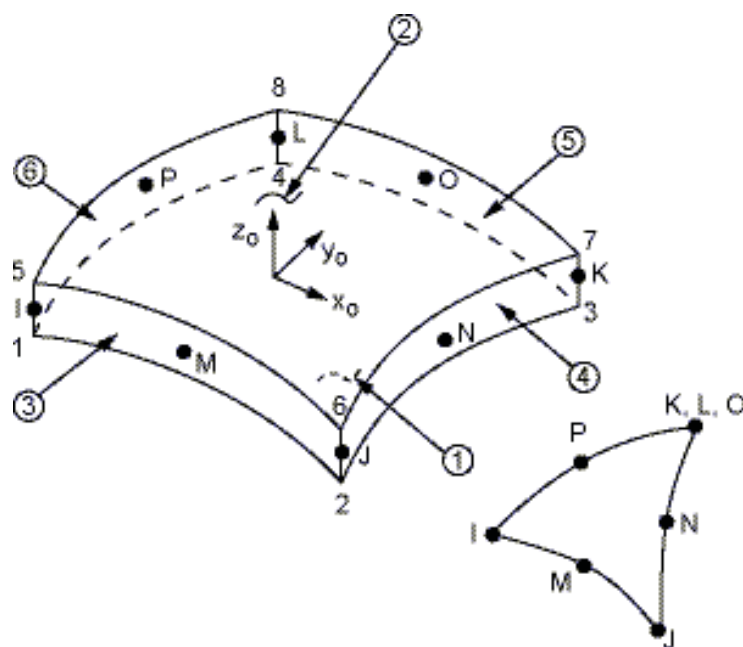


Figura 11 – Elemento de casca SHELL281 (ANSYS 13.0).

As linhas de número 8 até 29 correspondem à construção da geometria dos cilindros. Primeiramente são criados alguns “keypoints” na linha de centro dos cilindros nas extremidades e na seção central. Nessas posições são criados círculos com o raio do cilindro. Então, são criadas linhas conectando os círculos e a partir dessas linhas são criadas as áreas que formam o cilindro. As numerações adotadas para realizar as conexões entre as entidades geométricas foram ajustadas de forma a se adequar a sequência automática do programa.

Os comandos “AESIZE,ALL,TAMANHODAMALHA” e “AMESH,ALL” respectivamente definem o tamanho da malha nas áreas que formam os cilindros e a seguir aplicam essa malha configurada no modelo de cálculo de forma automática.

O comando “AREVERSE,ALL,0” inverte a normal das áreas dos cilindros de forma que a pressão de teste seja aplicada na parte externa dos cilindros e não na parte interna. O comando “SF,ALL,PRES,PRESSÃODETESTE” aplica a pressão de teste adotada em todas as superfícies do cilindro.

O comando “CSYS,1” altera o sistema de coordenadas ativo para o sistema cilíndrico e os comandos “LSEL,S,LINE,,1,4,1,0” e “LSEL,A,LINE,,9,12,1,0” selecionam as linhas das extremidades dos cilindros. O comando “CM,BORDAS,LINE” cria um componente específico com as duas linhas das extremidades e o comando “NSEL,S,NODE,,BORDAS” seleciona todos os nós pertencentes à essas linhas. Com esses nós selecionados, aplica-se o comando “D,ALL,UX,0” para restringir o movimento desses nós na direção radial (UX).

Os primeiros testes realizados não alcançaram a convergência devido a uma instabilidade verificada na direção axial (Z) do modelo. Para contornar essa instabilidade foram aplicadas molas fracas (“*Weak Springs*”) através do comando “WSPRINGS”. Esse comando importa uma macro automática do próprio programa que aplica molas nas extremidades do modelo. Essas molas são conectadas a um referencial fixo e possuem uma rigidez tão pequena que a influência nos resultados pode ser desprezada.

O comando “ALLSEL” seleciona todos os componentes do modelo e o comando “NROTAT,ALL” rotaciona os nós para o sistema de coordenadas cilíndrico ativo.

O comando “/SOLU” habilita as funções que configuram as opções de solução do modelo e o comando “PSTRES,ON” define que os resultados da análise estrutural estática devem ser alocados para suportar a análise de instabilidade linear subsequente.

O comando “SOLVE” dá início à solução da análise estrutural estática e após o término dos cálculos, o comando “FINISH” finaliza a análise estrutural estática.

Com os resultados obtidos da análise estrutural estática, utiliza-se novamente o comando “/SOLU” para definir as opções da análise de instabilidade linear. O comando “OUTRES,ALL,ALL” determina que todos os resultados da solução sejam gravados no arquivo de saída do cálculo. O comando “ANTYPE,BUCKLE” define o novo tipo de análise, ou seja, instabilidade linear. O comando “BUCOPT,LANB,3,” determina o método de extração e a quantidade de modos a serem calculados. O comando “MXPAND,3” determina a quantidade de modos a serem expandidos pelo programa de modo a possibilitar a visualização gráfica dos modos de instabilidade. Optou-se por calcular os três primeiros modos de instabilidade, entretanto, apenas os modos circunferenciais serão analisados.

Com todas as opções definidas utiliza-se novamente os comandos “SOLVE” e “FINISH” para dar início aos cálculos e finalizar a análise de instabilidade linear. Os resultados são então obtidos em função de um fator multiplicativo da pressão teste nominal adotada (1,00 MPa).

4 ANÁLISE DOS RESULTADOS

4.1 Testes de malha

O tamanho dos elementos influencia diretamente a convergência da solução e por isso esse parâmetro deve ser escolhido com cuidado. Espera-se que o nível de precisão da solução aumente com a diminuição do tamanho dos elementos. Entretanto, o uso de elementos muito pequenos também implica em um maior tempo de trabalho computacional (RAO, 2005).

Antes de iniciar os cálculos com o programa ANSYS 13.0, alguns testes foram realizados de modo a escolher um tamanho de malha adequado para os diferentes modelos de cálculo. Desta forma, o primeiro modelo de cada grupo ($G = 20, 50$ e 100), ou seja, os modelos números 1, 10 e 19, foram calculados com diferentes tamanhos de malha a fim de padronizar um tamanho de malha para cada grupo de cálculo. Os testes realizados são resumidos na tabela a seguir:

Tabela 2 – Resultados dos testes de malha.

Modelo / Teste	Tamanho de malha (mm)	Fator de carga crítica
1-1	5	392,91
1-2	10	393,03
1-3	15	392,76
10-1	10	66,27
10-2	15	66,25
10-3	20	66,27
19-1	15	16,86
19-2	20	16,86
19-3	25	16,87

Os tamanhos de malha adotados estão indicados em negrito na tabela acima. Os testes realizados indicam que os tamanhos de malha analisados apresentaram variações muito pequenas nos resultados, sendo que os tamanhos de malha adotados se referem àqueles que apresentaram a melhor relação entre o aspecto visual da malha, o tempo de solução dos cálculos e a memória alocada pelos arquivos do programa.

4.2 Resultados dos cálculos

Os resultados obtidos com os diferentes métodos de cálculo são apresentados na tabela seguinte, a qual apresenta as pressões críticas calculadas que causam a instabilidade nos modelos de cálculo “ p_{cr} ” de acordo com as diferentes metodologias propostas e também a quantidade de meias ondas circunferenciais “ n ” visualizadas nos resultados obtidos com o ANSYS 13.0 de acordo com os diferentes modos de instabilidade:

Tabela 3 – Resultados dos cálculos.

Modelo	G	Z	ANSYS 13.0	BATDORF	TIMOSHENKO		
			p_{cr} [MPa]	n	p_{cr} [MPa]	p_{cr} (Eq. 20) [MPa]	p_{cr} (Eq. 21) [MPa]
1	20	5	393,03	7	377,72	282,98	100,16
2	20	10	191,56	6	209,65	226,43	73,04
3	20	50	67,95	4	73,27	176,06	31,3
4	20	100	46,22	4	48,57	111,61	31,3
5	20	500	20,32	3	20,43	70,76	16,69
6	20	1000	14,02	2	14,29	163,91	6,26
7	20	5000	6,71	2	8,77	39,03	6,26
8	20	10000	6,4	2	8,38	22,72	6,26
9	20	50000	6,26	2	8,32	9,57	6,26
10	50	5	66,25	11	60,59	45,46	16,03
11	50	10	31,51	9	34,21	37,74	10,68
12	50	50	10,94	7	11,73	22,57	6,41
13	50	100	7,42	6	7,77	19,61	4,67
14	50	500	3,1	5	3,27	9,79	3,21
15	50	1000	2,36	4	2,29	10,12	2
16	50	5000	1,15	3	1,01	6,52	1,07
17	50	10000	0,61	2	0,71	16,69	0,4
18	50	50000	0,41	2	0,54	3,69	0,4
19	100	5	16,86	16	15,46	11,38	4,26
20	100	10	7,96	13	8,56	9,27	2,8
21	100	50	2,75	9	2,93	6,77	1,34
22	100	100	1,86	8	1,94	5,58	1,05
23	100	500	0,8	8	0,82	2,07	1,05
24	100	1000	0,55	5	0,57	3,6	0,4
25	100	5000	0,25	3	0,25	5,51	0,13
26	100	10000	0,17	3	0,18	2,85	0,13
27	100	50000	0,07	2	0,08	3,33	0,05

As figuras ilustradas a seguir representam uma ilustração gráfica dos modos de falha encontrados para os nove primeiros modelos analisados. Ressalta-se que estão sendo apresentados apenas os modos de instabilidade circunferencial. Com exceção dos modelos 1, 10 e 19, os demais modelos apresentaram o modo de instabilidade circunferencial logo no primeiro modo de falha. Os modos de falha pertinentes aos outros modelos de cálculo serão ilustrados no APÊNDICE A.

Os modelos 1, 10 e 19 apresentam um parâmetro de curvatura muito pequeno ($Z = 5$), de tal forma que os dois primeiros modos de falha verificados nesses casos ocorreu na direção axial dos cilindros. Uma vez que os modos de instabilidade axial não são objetivo desse estudo e considerando ainda que nenhum tipo de restrição axial foi imposta nos modelos de cálculo, tais resultados não serão analisados no presente trabalho. Além disso, os resultados encontrados para os modos de instabilidade circunferencial estão em conformidade com os estudos apresentados na nota técnica NACA Nº 1341 (BATDORF, 1947), uma vez que o parâmetro de tensão circunferencial “ k_y ” obtido nesses casos tende a 4.

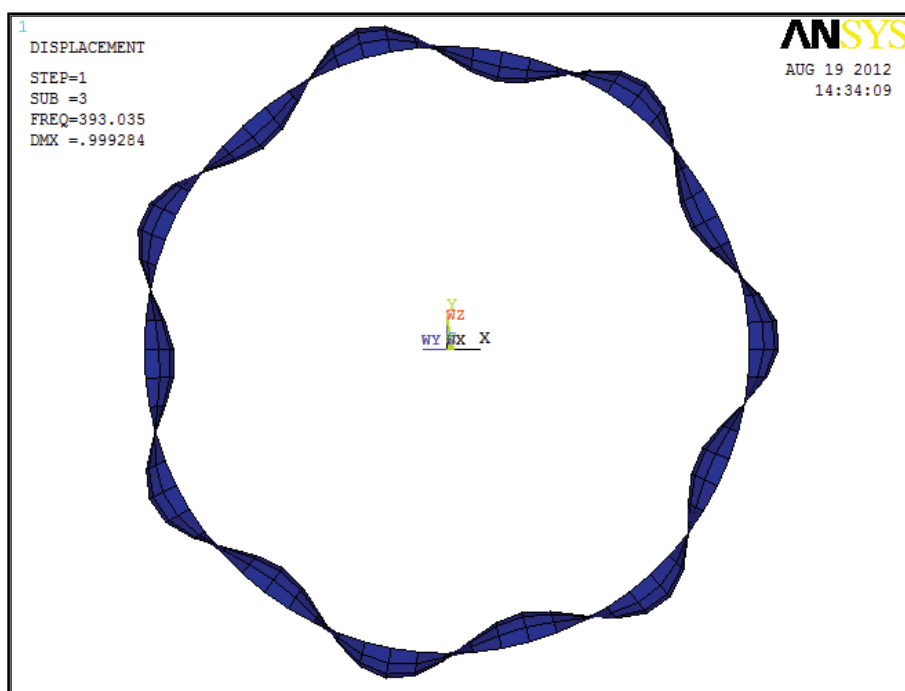


Figura 12 – Modo de falha do modelo de cálculo Nº 1 (ANSYS 13.0).

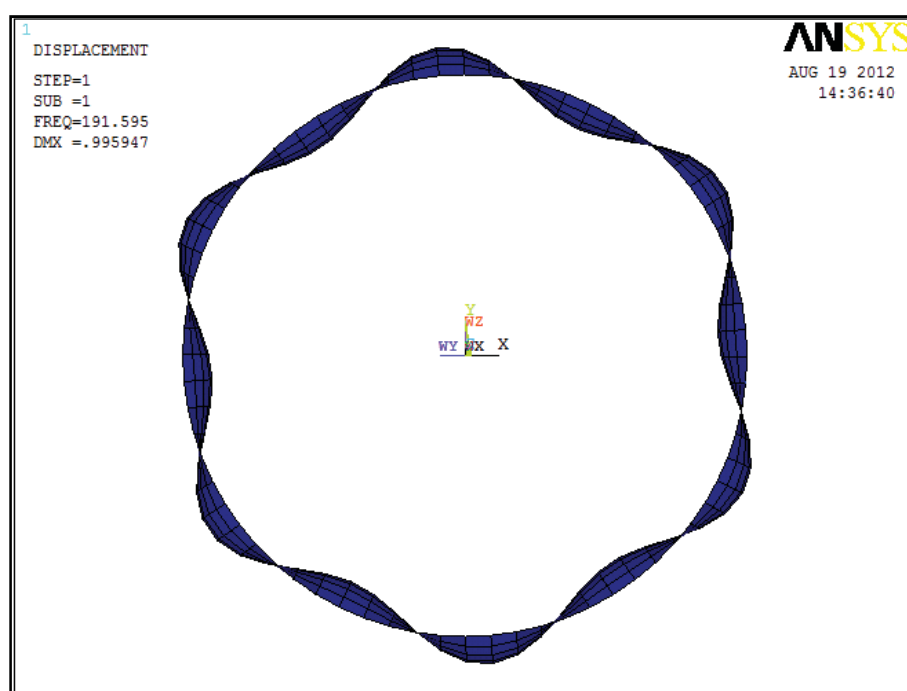


Figura 13 – Modo de falha do modelo de cálculo N° 2 (ANSYS 13.0).

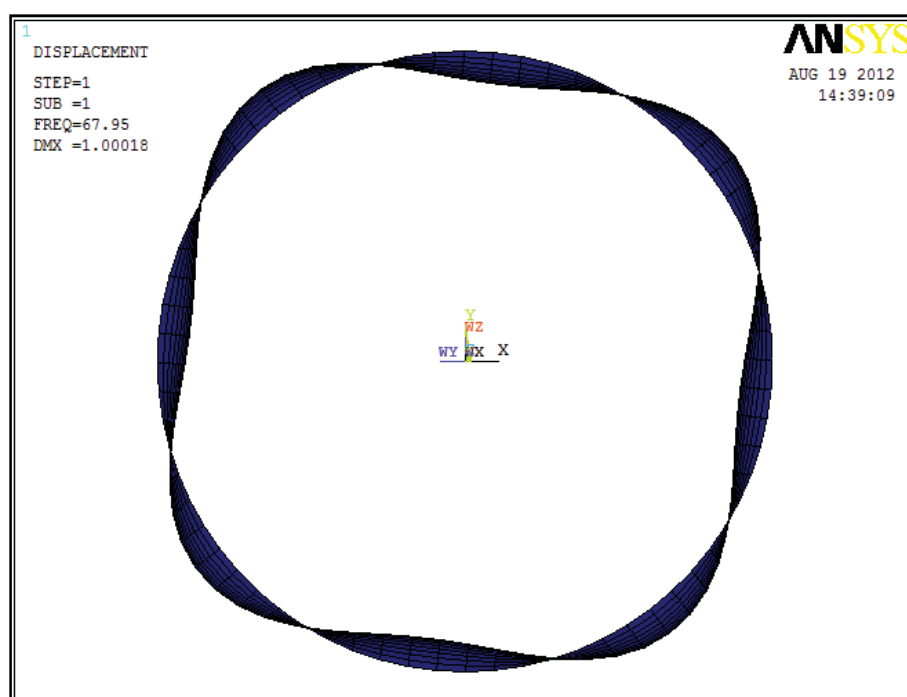


Figura 14 – Modo de falha do modelo de cálculo N° 3 (ANSYS 13.0).

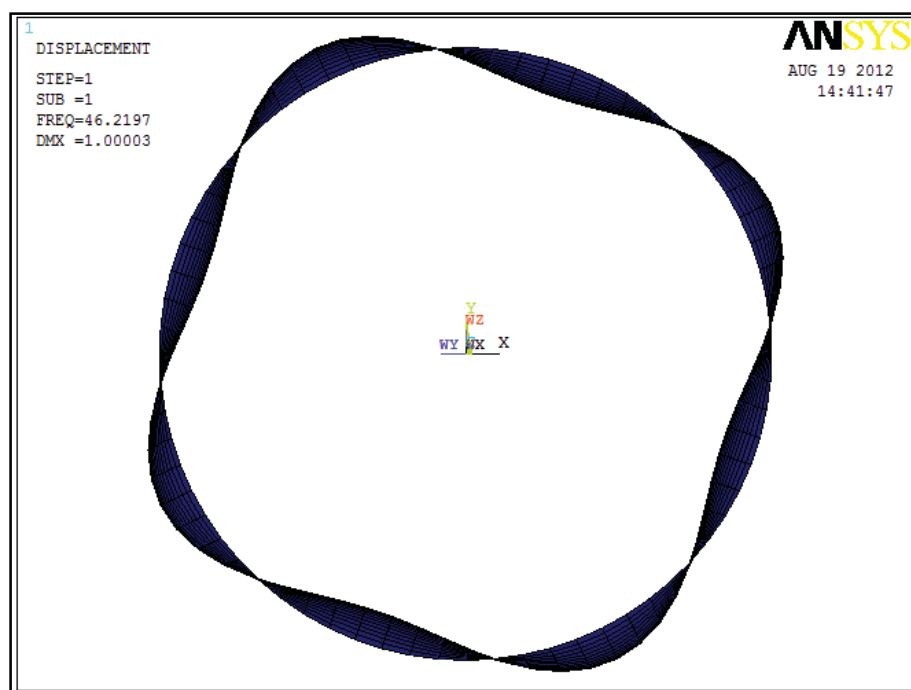


Figura 15 – Modo de falha do modelo de cálculo N° 4 (ANSYS 13.0).

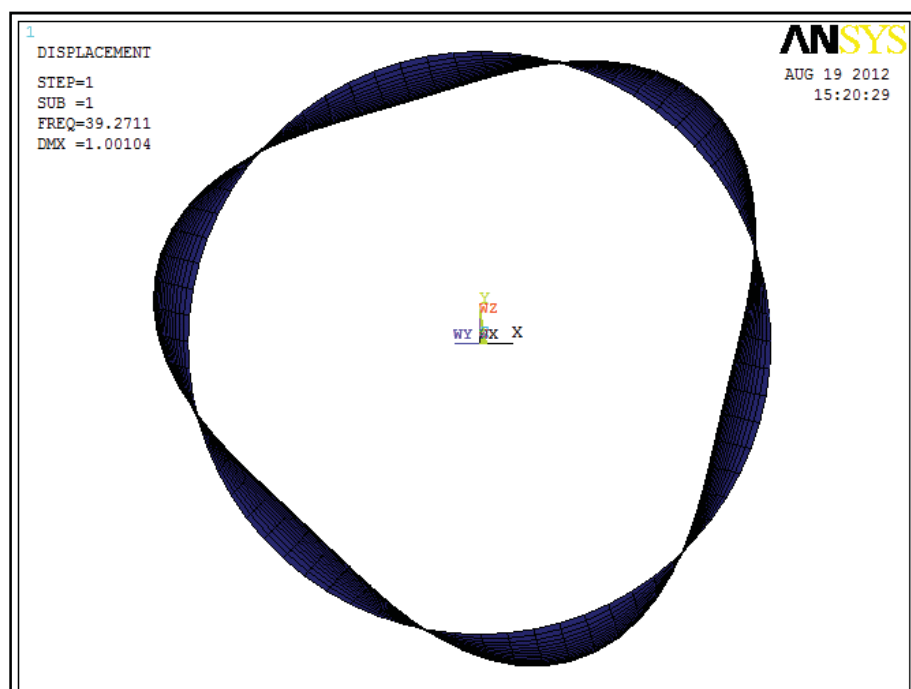


Figura 16 – Modo de falha do modelo de cálculo N° 5 (ANSYS 13.0).

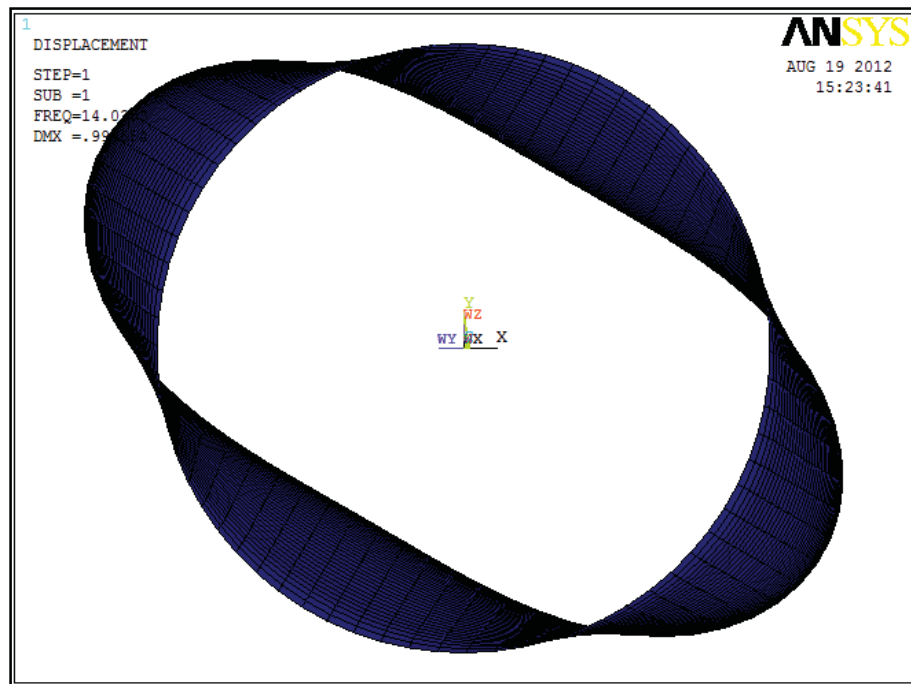


Figura 17 – Modo de falha do modelo de cálculo N° 6 (ANSYS 13.0).

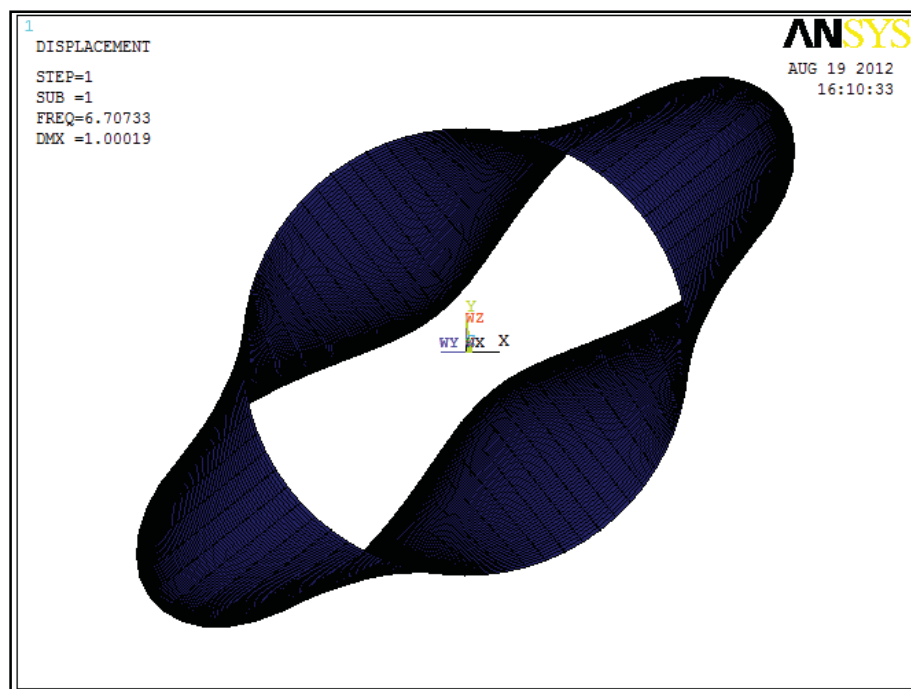


Figura 18 – Modo de falha do modelo de cálculo N° 7 (ANSYS 13.0).

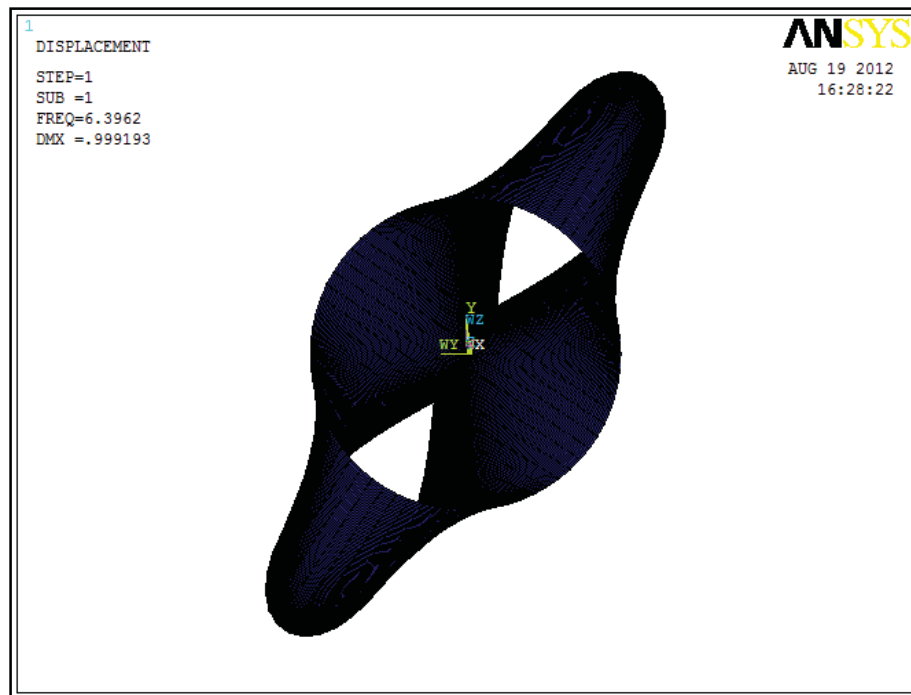


Figura 19 – Modo de falha do modelo de cálculo N° 8 (ANSYS 13.0).

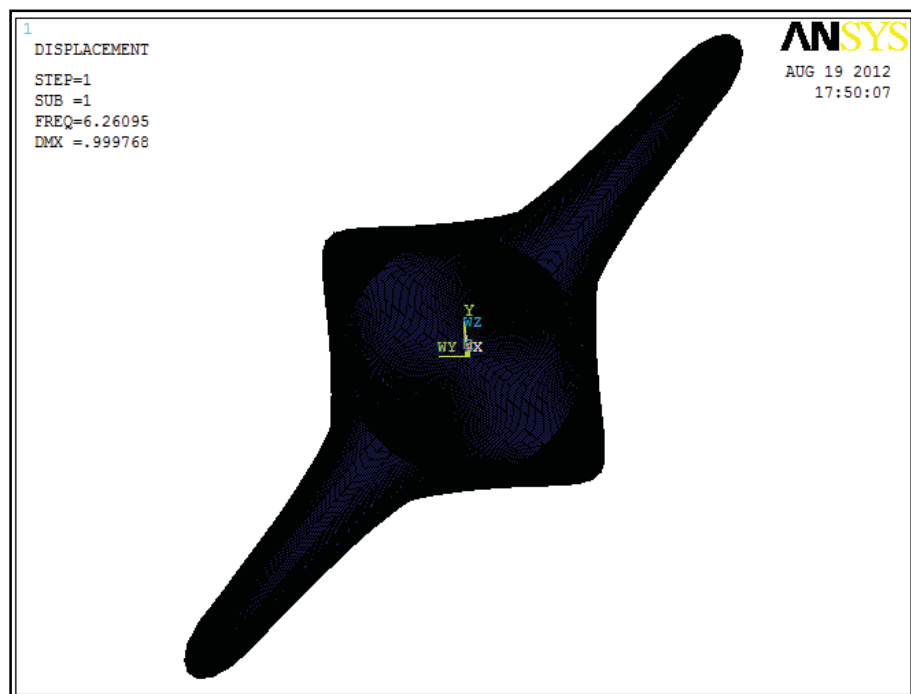


Figura 20 – Modo de falha do modelo de cálculo N° 9 (ANSYS 13.0).

A tabela apresentada a seguir indica os desvios percentuais das pressões críticas que causam a instabilidade circunferencial tomando-se como base de comparação os resultados do ANSYS 13.0.

Tabela 4 – Pressões críticas: desvios calculados para os diferentes métodos de cálculo.

MODELO	BASE DE CÁLCULO p_{cr} [MPa]	DESVIOS PERCENTUAIS [%]		
	ANSYS 13.0	BATDORF	TIMOSHENKO	
			Equação (20)	Equação (21)
1	393,03	-4,05	-38,89	-292,39
2	191,56	8,63	15,40	-162,28
3	67,95	7,27	61,41	-117,08
4	46,22	4,83	58,59	-47,66
5	20,32	0,52	71,28	-21,72
6	14,02	1,90	91,45	-123,95
7	6,71	23,45	82,81	-7,18
8	6,40	23,64	71,84	-2,23
9	6,26	24,76	34,56	0,00
10	66,25	-9,33	-31,39	-75,81
11	31,51	7,90	19,78	-66,09
12	10,94	6,72	106,28	-41,40
13	7,42	4,55	164,25	-37,00
14	3,10	5,15	215,86	3,39
15	2,36	-3,21	328,66	-15,12
16	1,15	-13,91	467,37	-7,09
17	0,61	13,66	2635,50	-34,32
18	0,41	23,44	799,98	-2,28
19	16,86	-9,04	-32,49	-74,75
20	7,96	7,03	16,47	-64,77
21	2,75	6,19	146,04	-51,44
22	1,86	4,31	200,10	-43,46
23	0,80	2,09	158,28	31,46
24	0,55	3,80	554,83	-27,15
25	0,25	0,95	2105,44	-46,58
26	0,17	3,75	1578,09	-21,44
27	0,07	10,93	4656,70	-28,45

Os resultados obtidos com os cálculos realizados com o ANSYS 13.0 foram utilizados para construir o gráfico ilustrado a seguir, o qual apresenta a relação entre o parâmetro de curvatura “Z” e o coeficiente de tensão circunferencial “ k_y ”.

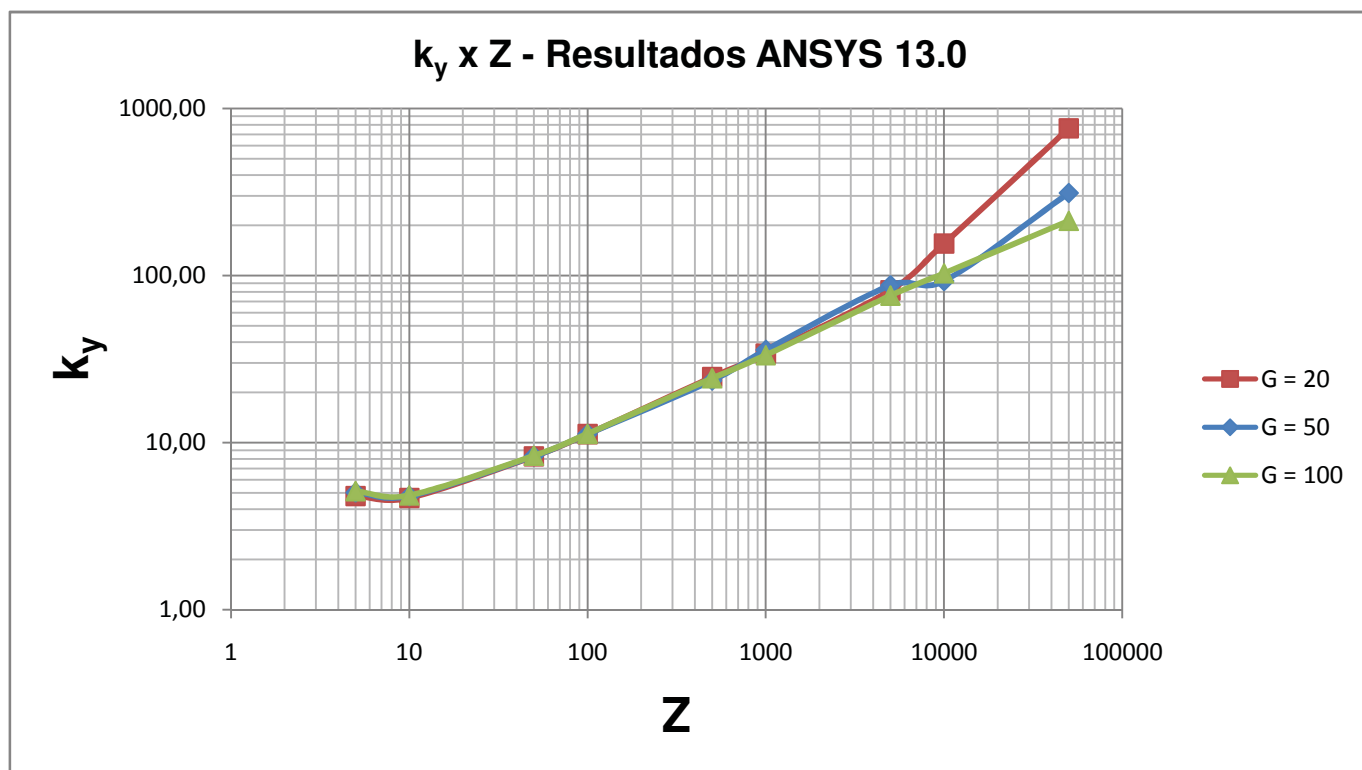


Figura 21 – Relação “ k_y ” x “Z” (ANSYS 13.0).

O gráfico obtido com os resultados dos cálculos realizados com o método dos elementos finitos utilizando o programa ANSYS 13.0 apresenta grande semelhança ao gráfico ilustrado na nota técnica NACA N° 1341 (BATDORF, 1947). De fato, para coeficientes de curvatura “Z” inferiores a 10, tem-se que o coeficiente de tensão circunferencial tende a uma constante igual a 4. De acordo também com a nota técnica NACA N° 1341 (BATDORF, 1947), esse caso corresponde no limite a condição de uma placa plana apoiada submetida à compressão longitudinal, e, para valores de “Z” compreendidos entre 10 e 5000, a curva do gráfico se aproxima a uma linha reta com inclinação $\frac{1}{2}$. Nesses casos o valor do coeficiente de tensão circunferencial pode ser obtido com boa aproximação a partir da seguinte expressão:

$$k_y = 1,04Z^{1/2}$$

A razão “ r/t ” apresentou influência considerável nos resultados apenas para valores de “ Z ” superiores a 5000. Nesses casos, quanto menor a razão “ r/t ”, maior é o afastamento da curva de uma linha reta. Ou seja, quanto menor for o valor do parâmetro “ G ”, maior será o coeficiente de tensão circunferencial obtido no gráfico para um mesmo valor de “ Z ”.

Tomando-se como base as pressões críticas resultantes do cálculo realizado com o ANSYS 13.0, os desvios calculados em relação à teoria apresentada na nota técnica NACA N° 1341 (BATDORF, 1947) foram razoavelmente pequenos para todos os modelos analisados. Em geral, para um valor fixo de “ G ”, os desvios aumentam com o aumento do parâmetro “ Z ”. Considerando a variação de “ G ”, percebe-se que quanto maior o valor desse parâmetro, menor é o desvio de cálculo encontrado em comparação com os resultados obtidos com o método dos elementos finitos. Para cilindros muito longos (valores de “ Z ” muito grandes), uma das condições de validade da equação (4) ($n^2 \gg 1$) não é mais satisfeita e, portanto, erros razoáveis podem ser esperados. Nestes casos, recomenda-se então a utilização de um coeficiente de correção equivalente a 0,75.

Para valores de “ Z ” iguais ou inferiores a 1000, os desvios calculados apresentaram valores inferiores a 10% em todos os modelos de cálculo. Por outro lado, para valores de “ Z ” superiores a 1000, os desvios calculados apresentaram um aumento considerável, principalmente para o menor valor de “ G ” analisado. O maior desvio calculado foi de 24,76%. Utilizando o fator 0,75 citado anteriormente nesse caso, o desvio calculado diminuiu para apenas 0,32%.

Outro ponto interessante relativo à comparação entre os resultados obtidos com a teoria apresentada na nota técnica NACA N° 1341 (BATDORF, 1947) e com o método dos elementos finitos pode ser percebido na Figura 22 a seguir:

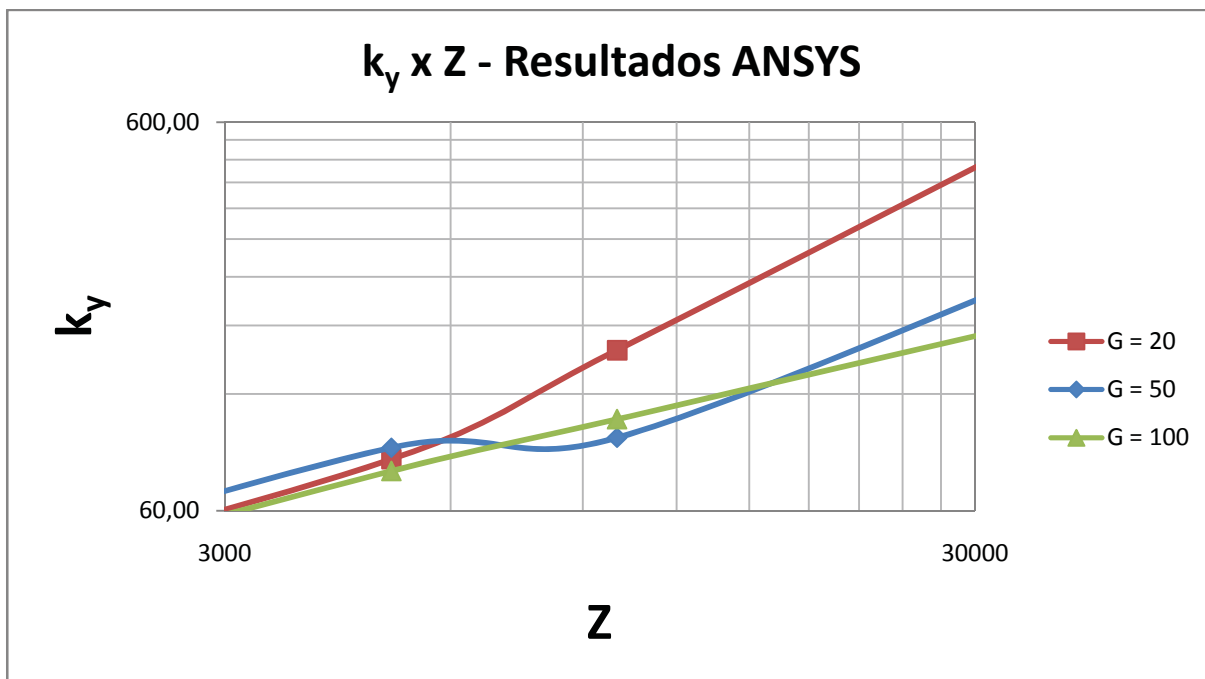


Figura 22 – Detalhe do gráfico “ k_y ” x “ Z ” - $3000 < Z < 30000$ (ANSYS 13.0).

Essa figura representa uma ampliação da Figura 21 para valores de “ Z ” compreendidos entre 3000 e 30000. Verifica-se que para $G = 50$, o coeficiente de tensão circunferencial obtido apresenta uma redução que aparentemente está em desacordo com o comportamento global das curvas encontradas. Entretanto, analisando os resultados obtidos percebe-se que entre $Z = 5000$ e $Z = 10000$ tem-se uma redução do número de meias ondas circunferenciais “ n ” para $G = 50$. A teoria analítica apresentada na nota técnica NACA Nº 1341 (BATDORF, 1947) considera uma variação contínua de “ n ”. Conclui-se, portanto, que o gráfico teórico não foi capaz de demonstrar esse comportamento devido à condição de contorno aplicada na solução analítica do problema.

Por outro lado, os resultados obtidos com a teoria analítica descrita no livro “Theory of Elastic Stability” (TIMOSHENKO; GERE, 1936) apresentaram desvios consideráveis tanto para a equação (20) quanto para a equação (21). Verificou-se que a equação (20) forneceu resultados razoáveis apenas para valores muito pequenos do parâmetro de curvatura, tais como $Z = 5$ e $Z = 10$. E mesmo nesses casos, os desvios calculados se mostraram bem maiores quando comparados aos resultados obtidos com o gráfico da nota técnica NACA Nº 1341 (BATDORF, 1947).

Para valores de “ Z ” superiores a 10, a equação (20) começa a perder significado, sendo que os desvios calculados começam a atingir níveis extremamente altos (maiores que 1000%), principalmente para os casos que apresentam as maiores razões de “ r/t ”. Nesses casos, a equação (21) apresentou uma série de resultados mais interessantes representados por desvios calculados bem inferiores.

5 CONCLUSÕES

Este estudo teve como objetivo avaliar os parâmetros que influenciam a instabilidade de cascas cilíndricas submetidas ao carregamento de pressão uniforme externa. A condição de contorno considerada nos cálculos se resume a extremidades simplesmente apoiadas; ou seja, tanto nos métodos de cálculos analíticos quanto no método dos elementos finitos considerou-se apenas a restrição radial das bordas localizadas nas extremidades dos cilindros.

Os cálculos e as comparações executadas demonstraram que o método analítico empregado na nota técnica NACA Nº 1341 (BATDORF, 1947) para determinar a carga crítica que causa a instabilidade circunferencial apresenta resultados que estão em pleno acordo com o método dos elementos finitos empregado com o programa ANSYS 13.0. Os desvios calculados em relação a esses dois métodos foram bem pequenos de modo que os dois métodos podem ser utilizados com boa aproximação na determinação dessa carga crítica. Em relação aos resultados da nota técnica NACA Nº 1341 (BATDORF, 1947), deve-se fazer uma ressalva para modelos que apresentam comprimentos muito grandes e uma consequente quantidade de ondas circunferenciais “ n ” igual a 2. Esses casos só ocorrem com parâmetros de curvatura extremamente grandes, e, nesses casos, coeficientes de correção adequados devem ser utilizados visando a minimização dos erros. Na prática, os modelos que apresentam um parâmetro “ G ” igual ou inferior a 20 podem ser corrigidos com boa aproximação utilizando um fator equivalente a 0,75.

Por outro lado, as soluções encontradas no livro “Theory of Elastic Stability” (TIMOSHENKO; GERE, 1936) possuem uma amplitude de aplicação muito restrita. Verifica-se que para os modelos analisados, a equação (20) forneceu resultados razoáveis apenas para valores de “ Z ” muito pequenos. Para valores de “ Z ” maiores, a equação (21) mostrou-se mais adequada, principalmente para o primeiro grupo de testes, os quais possuem um parâmetro “ G ” equivalente a 20.

Sendo assim, pode-se dizer que os resultados encontrados na nota técnica NACA Nº 1341 (BATDORF, 1947) apresentam grande aplicabilidade prática, de modo que com o auxílio do gráfico ilustrado na Figura 6, as pressões críticas que causam a instabilidade

circunferencial em cascas cilíndricas podem ser determinadas de forma fácil e rápida em função de poucos parâmetros. Em virtude da importância do fenômeno de instabilidade, recomenda-se estudar cada projeto caso a caso de modo a utilizar fatores de segurança adequados contra esse tipo de falha.

Como sugestão para próximos estudos acerca desse tema, recomenda-se avaliar a influência de diferentes condições de contorno aplicadas nas extremidades dos cilindros e também a inclusão de nervuras circunferenciais ao longo do comprimento dos cilindros de modo a aumentar as cargas críticas resultantes, viabilizando soluções alternativas para projetos mecânicos que se baseiam nesse tipo de estrutura.

REFERÊNCIAS

BATDORF, S. B. **A simplified method of elastic-stability analysis for thin cylindrical shells. I - Donnell's Equation. Technical Note N° 1341.** 51f. NACA - National Advisory Committee for Aeronautics, Langley, VA, USA, 1947.

BATDORF, S. B. **A simplified method of elastic-stability analysis for thin cylindrical shells. II - Modified Equilibrium Equation. Technical Note N° 1342.** 34f. NACA - National Advisory Committee for Aeronautics, Langley, VA, USA, 1947.

CHAPELLE, D; BATHE, K. J. **The finite element analysis of shells - Fundamentals..** 1ª Ed. New York, NY, USA, Springer, 2003. 330 p.

DONNELL, L. H. **Stability of thin-walled tubes under torsion - Report N° 479.** 22f. NACA - National Advisory Committee for Aeronautics, Langley, VA, USA, 1935.

MOAVENI, S. **Finite Element Analysis. Theory and Application with ANSYS..** 3ª Ed. Upper Saddle River, NJ, USA, Pearson Prentice Hall, 2008. 860 p.

NASR-BISMARCK, M. N. **Finite elements in applied mechanics.** 1ª Ed. São José dos Campos, SP, Abaeté Gráfica, 1993.

RAO, S. S. **The finite element method in engineering..** 4ª Ed. Burlington, MA, USA, Elsevier, 2005. 663 p.

STOLARSKI, T; NAKASONE, Y. **Engineering analysis with ANSYS software..** 1ª Ed. Burlington, MA, USA, Elsevier, 2006. 456 p.

TIMOSHENKO, S. P; GERE, J. M. **Theory of Elastic Stability - International Student Edition..** 2ª Ed. Tokyo, Japão: McGraw Hill Book Company, 1961. 541p.

TIMOSHENKO, S. P; KRIEGER, S. **Theory of plates and shells.** 2ª Ed. New York, NY, USA, McGraw-Hill, 1959. 580 p.

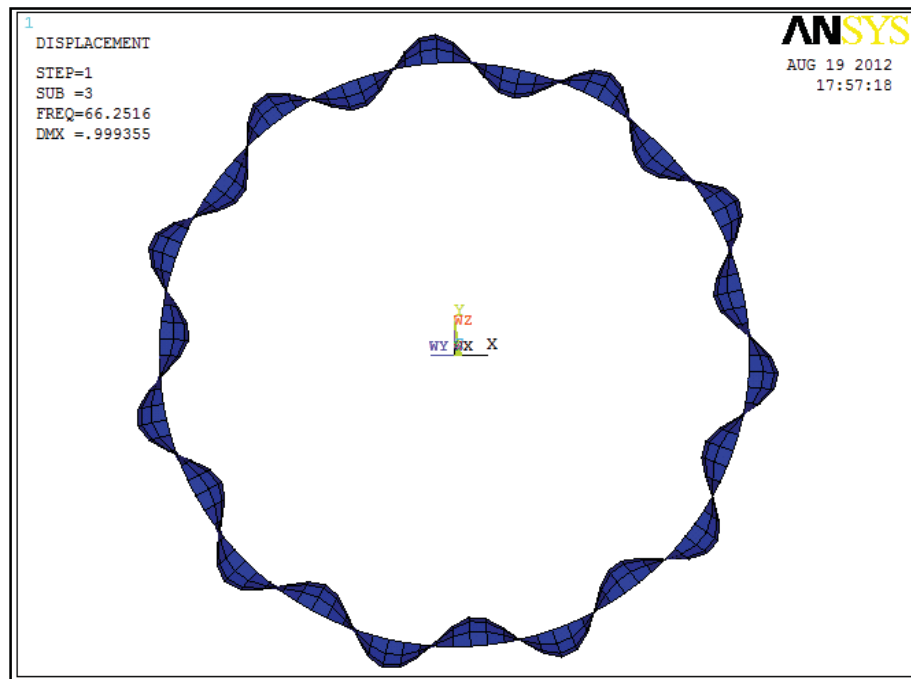
APÊNDICE A - Modos de instabilidade dos modelos de cálculo de número 10 ao 27

Figura 23 – Modo de falha do modelo de cálculo N° 10 (ANSYS 13.0).

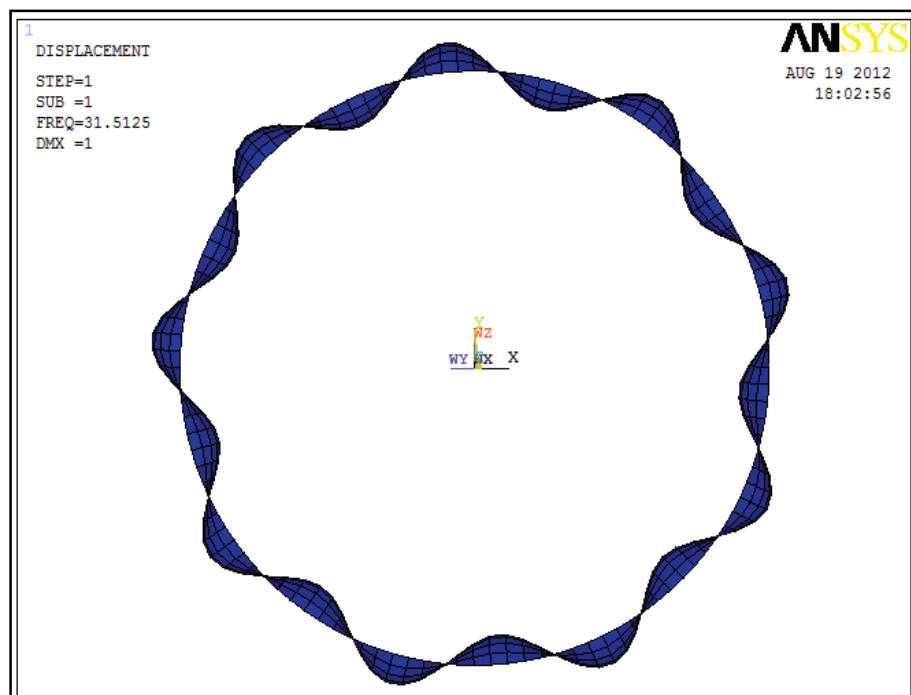


Figura 24 – Modo de falha do modelo de cálculo N° 11 (ANSYS 13.0).

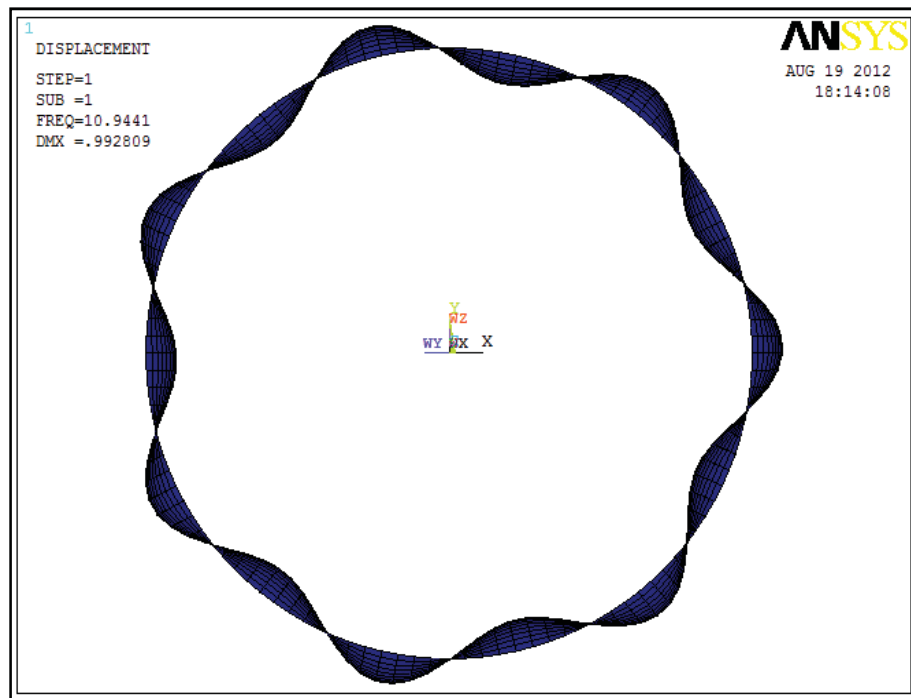


Figura 25 – Modo de falha do modelo de cálculo N° 12 (ANSYS 13.0).

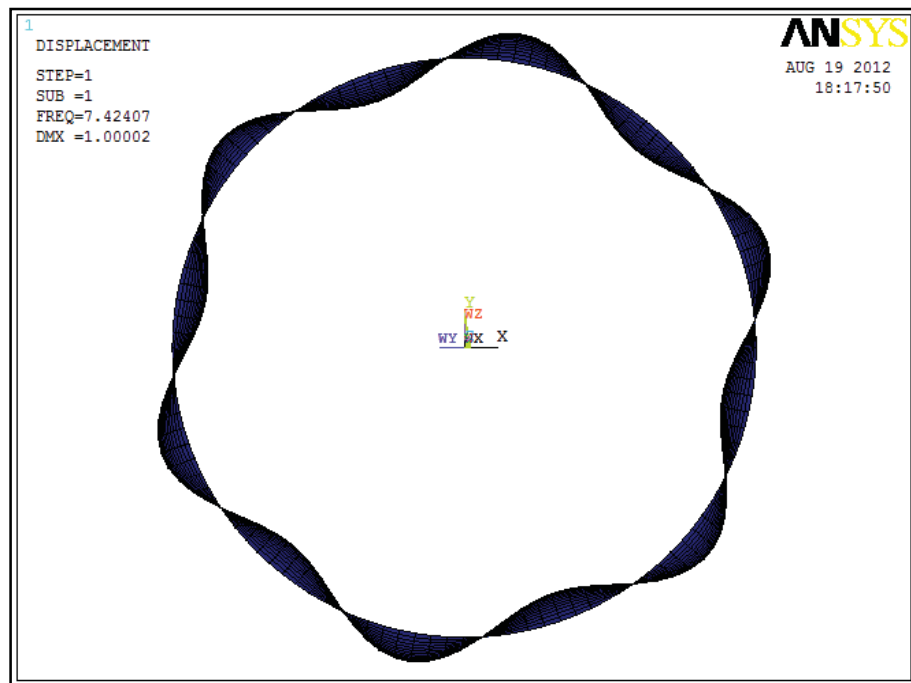


Figura 26 – Modo de falha do modelo de cálculo N° 13 (ANSYS 13.0).

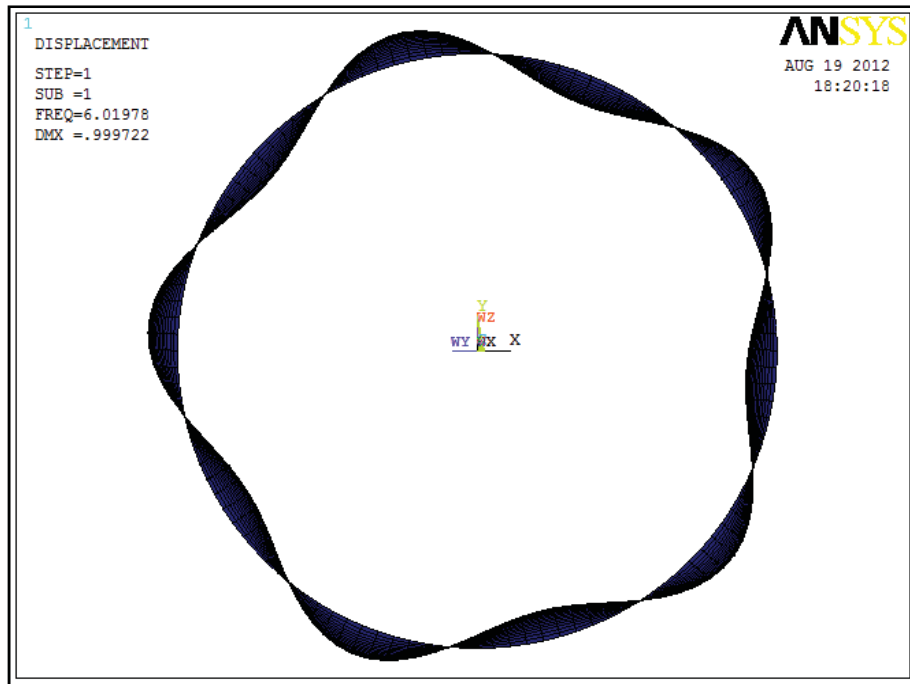


Figura 27 – Modo de falha do modelo de cálculo N° 14 (ANSYS 13.0).

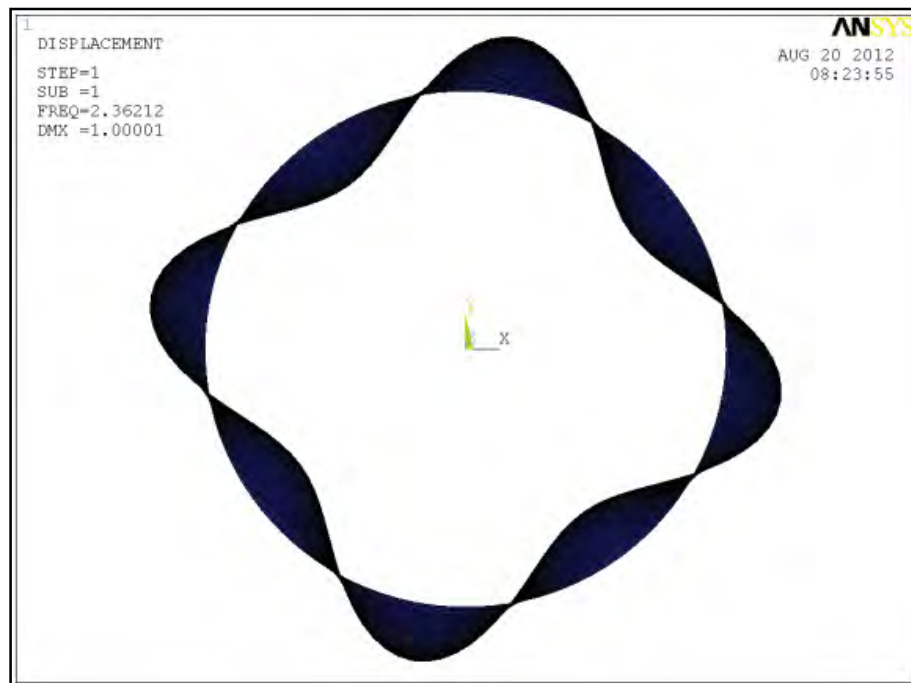


Figura 28 – Modo de falha do modelo de cálculo N° 15 (ANSYS 13.0).

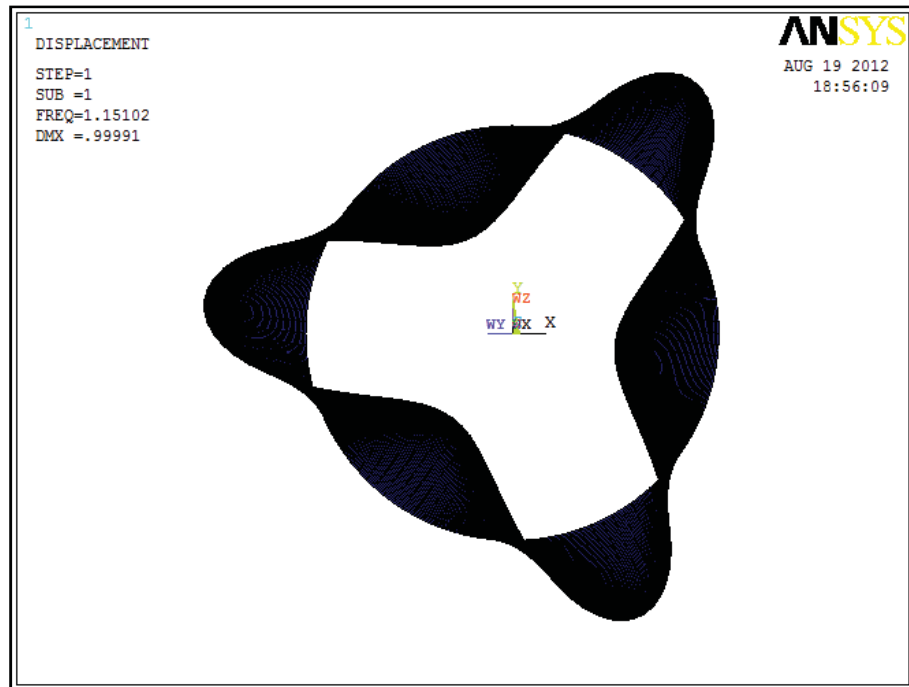


Figura 29 – Modo de falha do modelo de cálculo N° 16 (ANSYS 13.0).

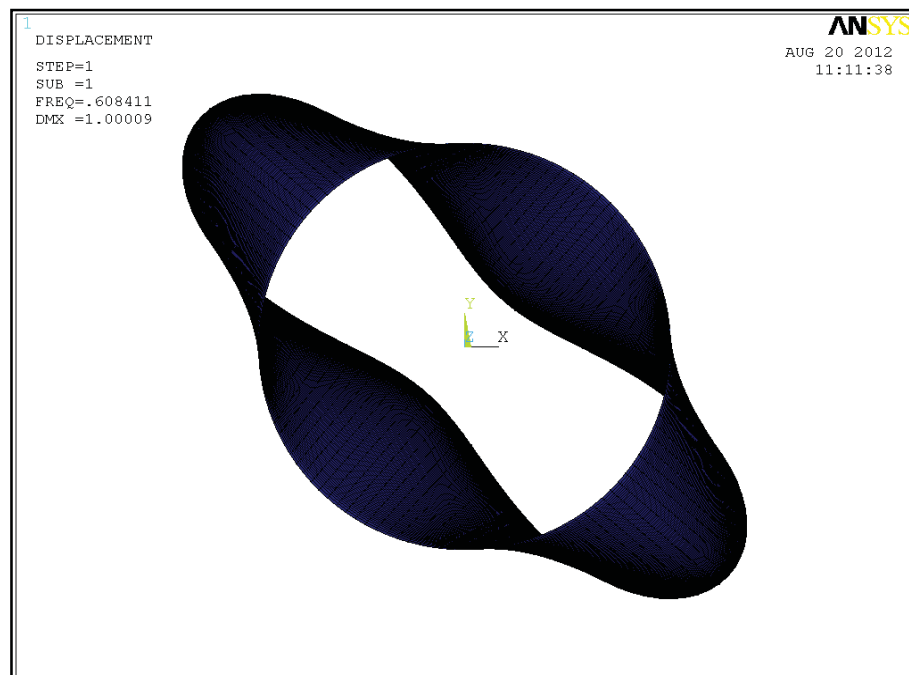


Figura 30 – Modo de falha do modelo de cálculo N° 17 (ANSYS 13.0).

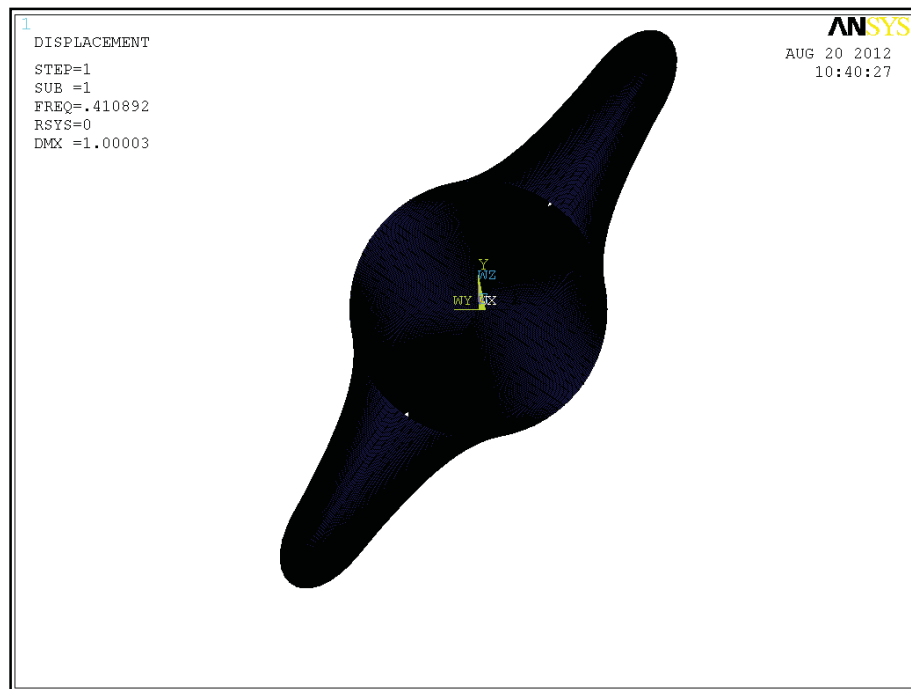


Figura 31 – Modo de falha do modelo de cálculo N° 18 (ANSYS 13.0).

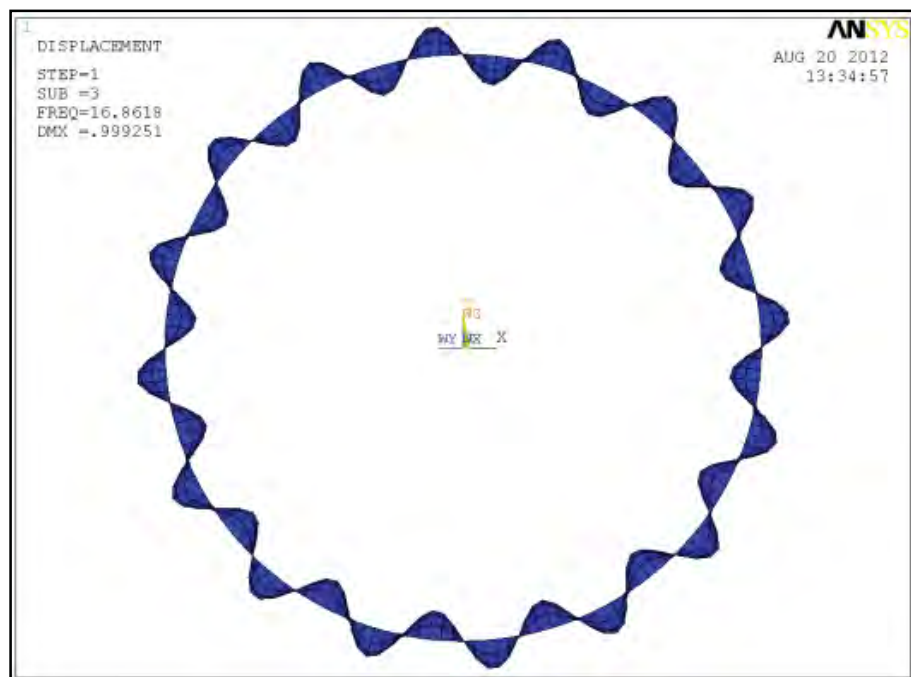


Figura 32 – Modo de falha do modelo de cálculo N° 19 (ANSYS 13.0).

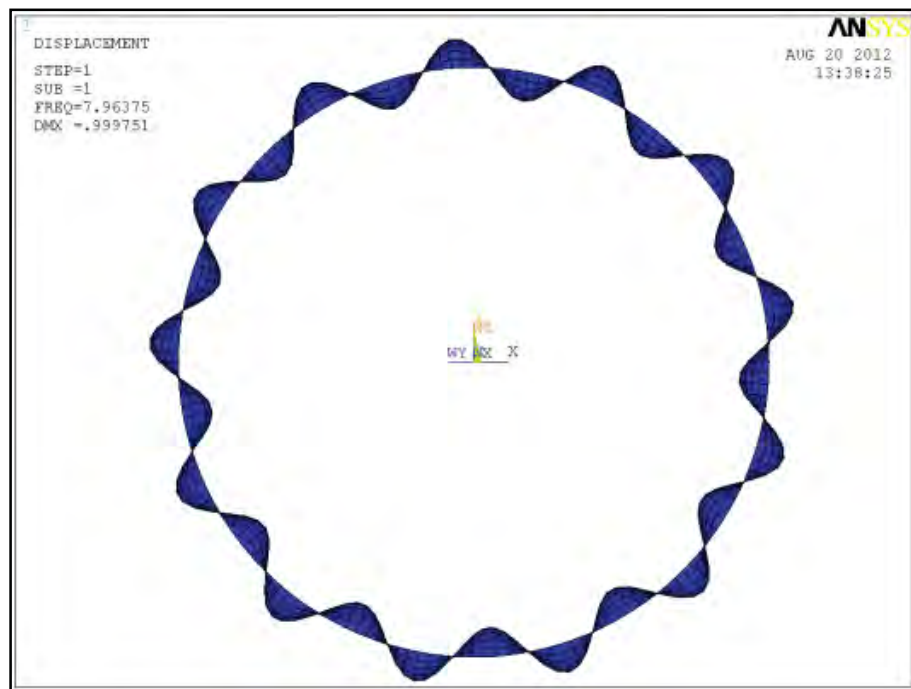


Figura 33 – Modo de falha do modelo de cálculo N° 20 (ANSYS 13.0).

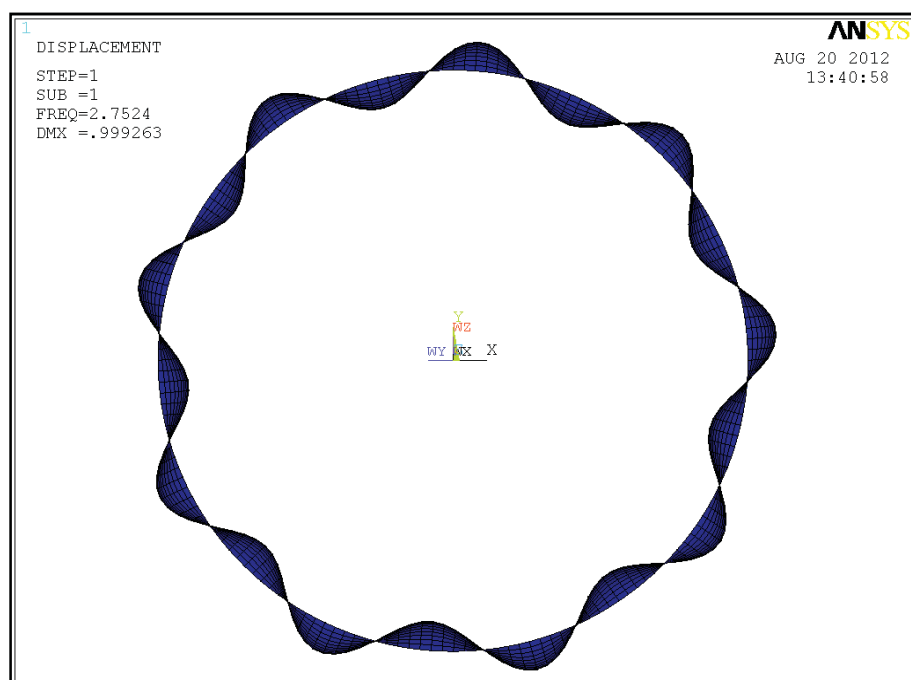


Figura 34 – Modo de falha do modelo de cálculo N° 21 (ANSYS 13.0).

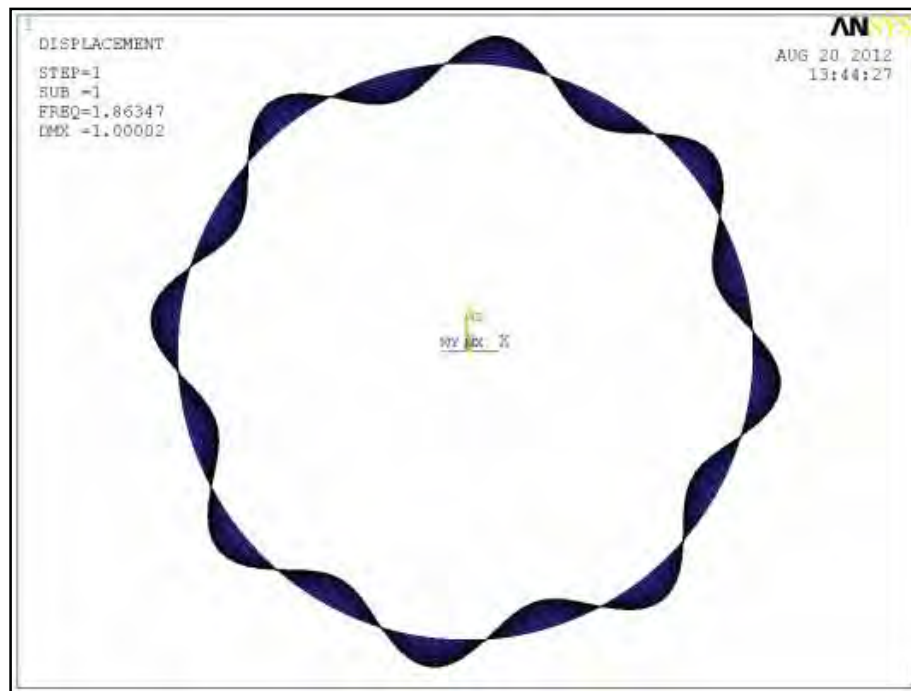


Figura 35 – Modo de falha do modelo de cálculo N° 22 (ANSYS 13.0).

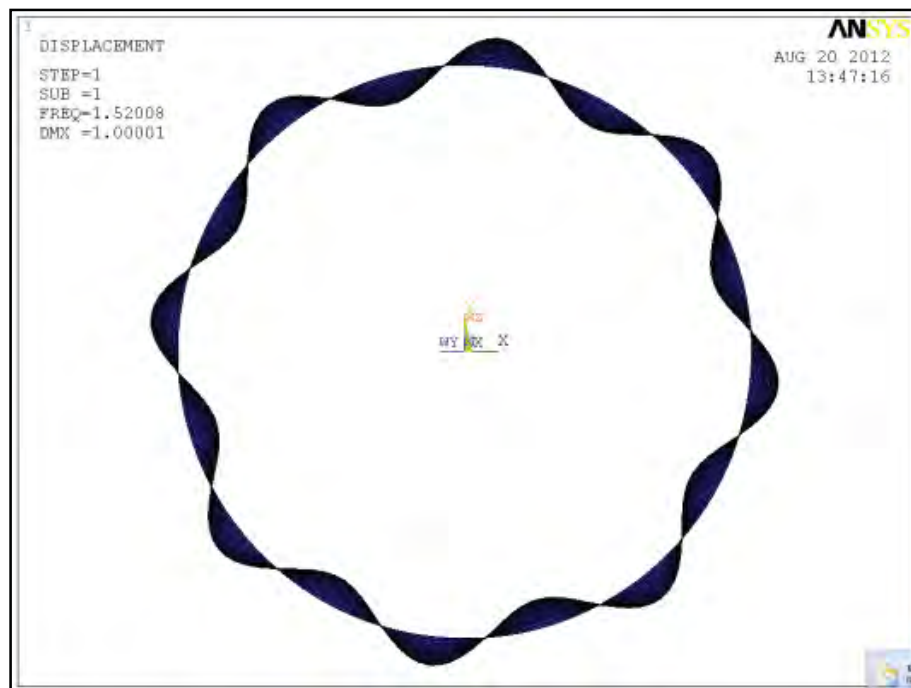


Figura 36 – Modo de falha do modelo de cálculo N° 23 (ANSYS 13.0).

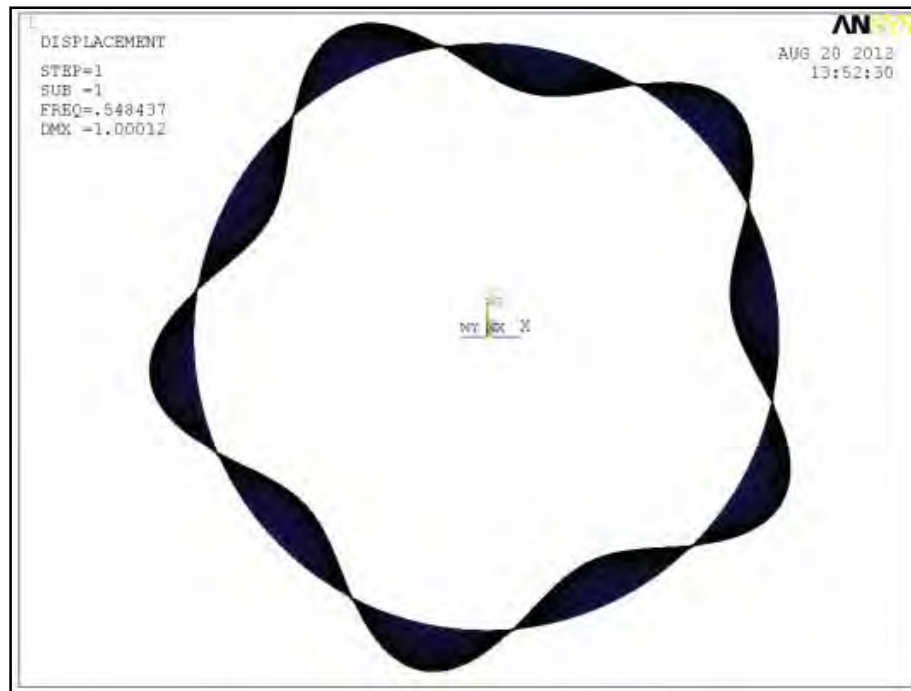


Figura 37 – Modo de falha do modelo de cálculo N° 24 (ANSYS 13.0).

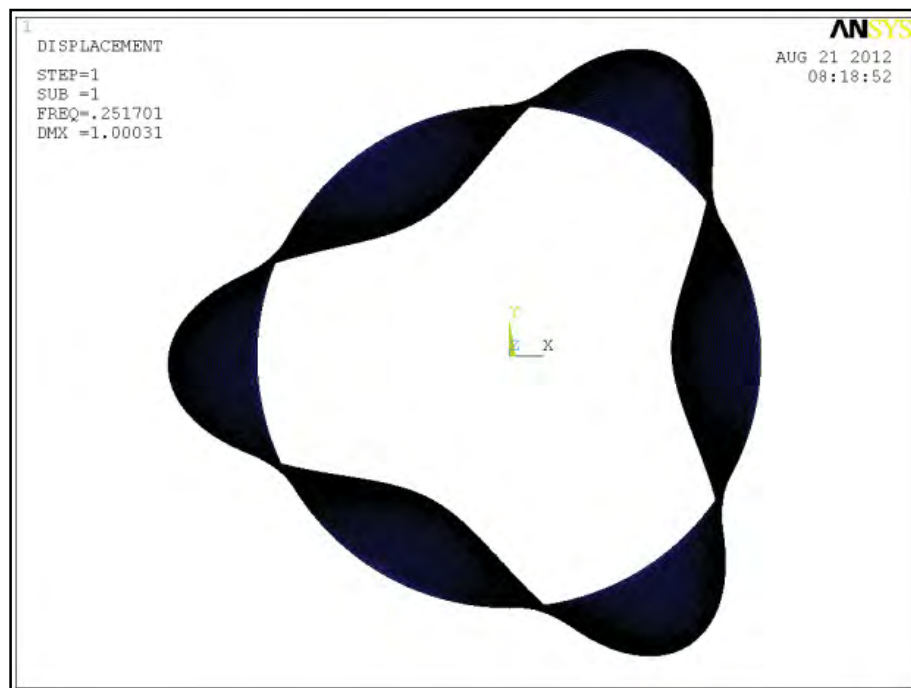


Figura 38 – Modo de falha do modelo de cálculo N° 25 (ANSYS 13.0).

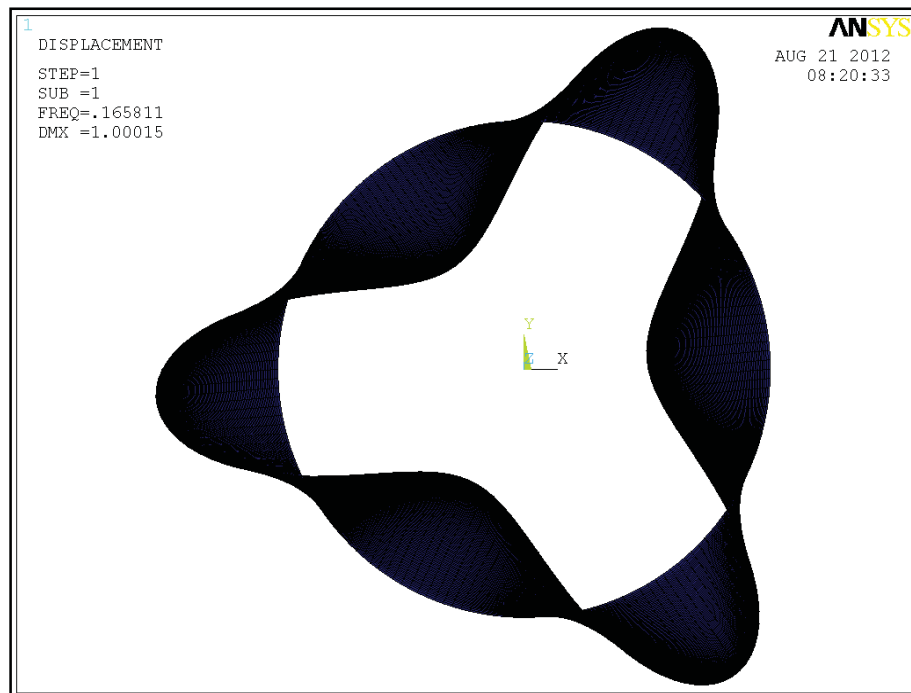


Figura 39 – Modo de falha do modelo de cálculo N° 26 (ANSYS 13.0).

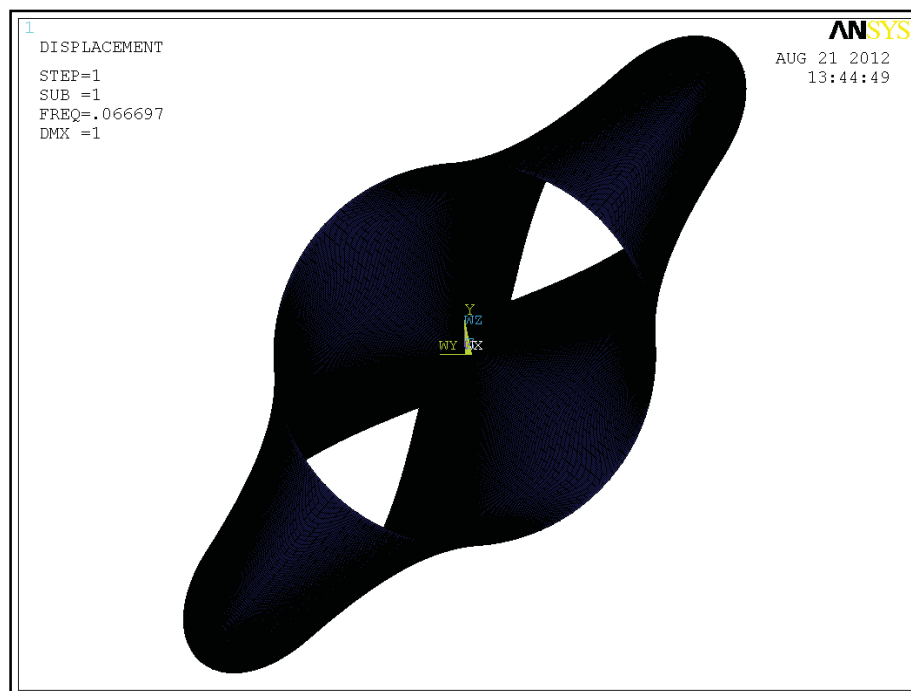


Figura 40 – Modo de falha do modelo de cálculo N° 27 (ANSYS 13.0).