

UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA “JÚLIO DE MESQUITA FILHO”
FACULDADE DE ENGENHARIA – CÂMPUS DE ILHA SOLTEIRA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

Nayara Longo Sartor Zagui

Modelagem e simulação do desenvolvimento temporal e espacial da ferrugem
asiática da soja por meio de equações diferenciais e lógica *fuzzy*

ILHA SOLTEIRA – SP
2021



Nayara Longo Sartor Zagui

Modelagem e simulação do desenvolvimento temporal e espacial da ferrugem asiática da soja por meio de equações diferenciais e lógica *fuzzy*

Tese apresentada à Faculdade de Engenharia do Campus de Ilha Solteira – UNESP, como parte dos requisitos para obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica.

Prof. Dr. Carlos Roberto Minussi
Orientador

ILHA SOLTEIRA – SP

2021



FICHA CATALOGRÁFICA

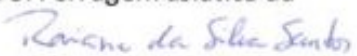
Desenvolvido pelo Serviço Técnico de Biblioteca e Documentação

Z18m Zagui, Nayara Longo Sartor.
Modelagem e simulação do desenvolvimento temporal e espacial da ferrugem asiática da soja por meio de equações diferenciais e lógica fuzzy / Nayara Longo Sartor Zagui. -- Ilha Solteira: [s.n.], 2021
108 f. : il.

Tese (Doutorado em Engenharia Elétrica) - Universidade Estadual Paulista. Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira. Área de conhecimento: Engenharia Elétrica, 2021

Orientador: Carlos Roberto Minussi
Inclui bibliografia

1. Lógica fuzzy. 2. Equações diferenciais parciais. 3. Ferrugem asiática da soja.


Raiane da Silva Santos

CERTIFICADO DE APROVAÇÃO

TÍTULO DA TESE: Modelagem e Simulação do Desenvolvimento Temporal e Espacial da Ferrugem Asiática da Soja Por Meio de Equações Diferenciais e Lógica Fuzzy

AUTORA: NAYARA LONGO SARTOR ZAGUI

ORIENTADOR: CARLOS ROBERTO MINUSSI

Aprovada como parte das exigências para obtenção do Título de Doutora em ENGENHARIA ELÉTRICA, área: Automação pela Comissão Examinadora:


Prof. Dr. CARLOS ROBERTO MINUSSI (Participação Virtual)
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP

Prof^a. Dr^a. ANNA DIVA PLASENCIA LOTUFO (Participação Virtual)
Departamento de Engenharia Elétrica / Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - UNESP

Prof. Dr. ANDRE KRINDGES (Participação Virtual)
Departamento de Matemática / Universidade Federal de Mato Grosso - UFMT

Prof. Dr. JOÃO FREDERICO DA COSTA AZEVEDO MEYER (Participação Virtual)
Departamento de Matemática Aplicada / Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP

Prof. Dr. JOSÉ GUILHERME MAGALINI SANTOS DECANINI (Participação Virtual)
Departamento de Eletrotécnica / Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo - IFSP

Ilha Solteira, 10 de setembro de 2021

Dedico ao meu pai e ao meu avô: duas gerações de agricultores. Também ao meu filho e ao meu marido, que me doaram e se doaram para que esse projeto se concretizasse.

AGRADECIMENTOS

Alienado é aquele que pensa que escreveu sozinho uma tese de doutorado. Não há como não ter recebido ajuda de pelo menos uma dezena de pessoas. Até mesmo aqueles amigos que só nos ouviram e falaram "Tudo vai dar certo!", nos ajudou. Mais que isso, também foram indispensáveis, porque além de tudo que já é inerente a uma pesquisa, precisamos de saúde mental para chegar até o fim.

Então, começo agradecendo à Deus. Em um dos meus desabafos, um amigo me disse para fazer muita oração. Em resposta, disse a ele: "Todos os dias. Acho que é isso que tem me mantido em pé"! E de fato, a fé foi muito importante em toda a trajetória, desde os processos seletivos que não deram certo, até a reta final, em meio a uma pandemia, com tanta incerteza a respeito de tantas coisas. Mesmo nas horas mais angustiantes, nunca deixei de acreditar que Deus estava comigo, e que por isso, sairia vencedora!

Aos professores Carlos Roberto Minussi e André Krindges, pois sem eles nada disso teria se tornado realidade. Professor Minussi aceitou me orientar mesmo sem me conhecer, ou conhecer alguém que me conhecia. Depois de tantos processos seletivos, curso de verão, tentativas frustradas, ele confiou em mim. Depois confiou de novo, quando me deu a liberdade de trabalhar com o que me motivava. E aí entra o professor André, que mesmo de maneira indireta, me fez chegar até o professor Minussi, quando falou para mim "Conversa com a Leidy". Ele também confiou em mim quando o convidei para me ajudar a resolver um problema da nossa região. Mesmo tendo muito pouco para lhe oferecer, aceitou o desafio. E acreditou na minha capacidade mesmo quando eu não acreditava. Conseguiu tirar o melhor de mim a cada "iteração". Ambos me ensinaram muito, cada um de um jeito, com suas características e seus conhecimentos. E mesmo que escrevesse um livro, não seria suficiente para expressar toda a gratidão que sinto por eles. Agradeço também às professoras Anna Diva e Mara, do laboratório da Unesp, SINTEL, e ao professor Moiseis, do laboratório da UFMT, LAMAP. É em professores como eles que me inspiro.

À minha família, que inclusive aumentou desde o início do doutorado. A maternidade estava em meus planos para depois do doutorado. Pensei em desistir, já que engravidei um mês depois do início das aulas. Sabia que tanto uma responsabilidade quanto a outra eram de magnitudes inimagináveis para mim. Mas a chegada de um filho só poderia ter deixado a história ainda mais bela. Em meio a tantas viagens, algumas vezes Ivan e eu precisávamos nos ausentar. Agradeço aos meus sogros Daicie e José, aos meus cunhados Mônica e Wagner, e à minha fiel ajudante Seleamar, que cuidaram tão bem do José Neto, quando não estávamos por perto.

Às minhas amigas Liliana, Lucy e Mayra, por me darem suporte emocional ao longo desses quase cinco anos. Todas nós estávamos em algum momento dos nossos doutorados, e embora fossem áreas diferentes, é incrível como as dificuldades, as angústias e as

alegrias são tão parecidas. Era o "vai dar tudo certo" delas que me confortava. Aos meus amigos Luciano, Thais e Vinícius, que me socorreram quando precisava de ajuda com georreferenciamento e geoestatística. Ainda vamos desenvolver muitos trabalhos juntos.

A todos os meus colegas de laboratório, em especial à Tânia, pela sua disponibilidade em ajudar a todos que precisam, Tatiana, Monara e Thais. Nossas tardes no laboratório eram muito agradáveis. Sempre lembrarei com carinho daquela época.

Fui muito feliz durante esses cinco anos. Ia trabalhar feliz, motivada. Se naquela semana o trabalho não rendia, na outra com certeza daria bons frutos. Se naquele dia estava desesperada porque as coisas não tinham saído como planejado, no outro estava feliz porque tinha resolvido o problema. Passei por uma gravidez, uma cirurgia e uma pandemia nesse tempo! A pessoa e profissional que iniciou os estudos, em 19/09/2016, definitivamente não é a mesma que escreve esses agradecimentos. É com os olhos marejados de lágrimas que encerro dizendo: Tudo valeu a pena! Obrigada!

Disciplina é liberdade, compaixão é fortaleza, ter bondade é ter coragem...
(Legião Urbana - Há Tempos)

RESUMO

O Mato Grosso é o maior produtor de soja do país. A Ferrugem Asiática da Soja é uma doença que já causou muitos prejuízos ao agronegócio brasileiro. A planta amadurece precocemente, atrapalhando o enchimento da vagem, diminuindo drasticamente a produtividade. É causada pelo fungo *Phakopsora pachyrhizi*. Para que uma doença de planta se estabeleça, é necessário a presença de patógeno, de planta suscetível e de condições ambientais favoráveis. Nesta pesquisa foi desenvolvido um sistema *fuzzy* reunindo essas três variáveis como entradas, tendo como saída a vulnerabilidade da região à doença. A presença de patógeno foi medida por meio de uma equação difusão-advecção adequada ao problema. Alguns coeficientes basearam-se na literatura, outros foram inferidos por sistema *fuzzy* e outros obtidos por dados reais. A partir do mapeamento das propriedades produtoras, foram estabelecidas as localidades onde existem plantas susceptíveis. As condições ambientais favoráveis, foram obtidas também a partir de sistema *fuzzy*, cujas entradas eram *temperatura* e *molhamento foliar*. Dados disponibilizados pelo IBGE, INMET e Consórcio Antiferrugem foram utilizados para abastecer o modelo, e todos os tratamentos, testes e simulações foram efetuadas dentro do ambiente MATLAB®. Embora a doença escolhida seja a ferrugem asiática da soja, o modelo teve caráter generalista, de forma que poderia ser reproduzido para qualquer enfermidade de planta de mesmo perfil.

Palavras-chave: Lógica *fuzzy*. Equações diferenciais parciais. Ferrugem asiática da soja.

ABSTRACT

Mato Grosso is the largest soy producer in the country. And Asian Soy Rust is a disease that has already caused a lot of damage to Brazilian agribusiness. The plant matures prematurely, hindering the filling of the pod, drastically reducing productivity. It is caused by the fungus *Phakopsora pachyrhizi*. For a plant disease to establish itself, the presence of a pathogen, a susceptible plant, and favorable environmental conditions are necessary. This research developed a *fuzzy* system gathering these three variables as inputs, having as output the vulnerability of the region to the disease. The presence of the pathogen was measured using a diffusion-advection equation appropriate to the problem. Some coefficients were based on the literature, others were measured by a *fuzzy* system and others were obtained by real data. From the mapping of producing properties, the locations where there are susceptible plants were established. And the favorable environmental conditions were also obtained from a *fuzzy* system, whose inputs were *temperature* and *leaf wetness*. Data provided by IBGE, INMET, and Consortium Antirust were used to fuel the model, and all treatments, tests, and simulations were carried out within the MATLAB® environment. Although the disease chosen as Asian soybean rust, the model was general in nature, so that it could be reproduced for any disease of plant with the same profile.

Keywords: *Fuzzy* logic. Partial differential equations. Asian soybean rust.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Condições de fronteira do tipo Von Neumann	28
Figura 2 – Recorte da malha	45
Figura 3 – Esquema Ilustrativo Sistema <i>Fuzzy</i> Favorabilidade (AACPD)	50
Figura 4 – Gráfico SF Favorabilidade	51
Figura 5 – Ocorrências versus rodovias	52
Figura 6 – Recorte campo vetorial	53
Figura 7 – Sistema <i>Fuzzy Decaimento</i>	54
Figura 8 – Conjuntos <i>fuzzy</i> do SF <i>Decaimento</i>	55
Figura 9 – Sistema <i>Fuzzy Ferrugem</i>	57
Figura 10 – Conjuntos <i>fuzzy</i> do SF <i>Ferrugem</i>	58
Figura 11 – Fluxograma	60
Figura 12 – Concentrações de esporos ao longo da safra	63
Figura 13 – Concentrações de esporos para as localidades onde foram registradas ocorrências	64
Figura 14 – Mapa da favorabilidade	65
Figura 15 – Mapa de hospedeiros	67
Figura 16 – Ocorrência <i>fuzzy</i> para as localidades onde foram registradas ocorrências	70
Figura 17 – Ocorrência <i>fuzzy</i> para as localidades onde foram registradas ocorrências	71
Figura 18 – Ocorrência <i>fuzzy</i> para as localidades onde foram registradas ocorrências	72
Figura 19 – <i>Boxplots</i> para as variáveis utilizadas na pesquisa	84
Figura 20 – Correlação Linear de Pearson entre as variáveis utilizadas no estudo . .	85
Figura 21 – Densidade e histograma para a variável favorabilidade	85

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Comparação entre RNL e SF	48
Tabela 2 – Base de regras <i>fuzzy</i> para o Decaimento	55
Tabela 3 – Base de regras <i>fuzzy</i> para o SFF	59
Tabela 4 – Parâmetros utilizados na EDA	61
Tabela 5 – Concentração de esporos para as localidades onde foram registradas ocorrências	62
Tabela 6 – Dados da <i>favorabilidade</i> para as ocorrências da FAS	66
Tabela 7 – Possibilidade de ocorrer FAS segundo SFF	68
Tabela 8 – Análise descritiva para as variáveis do SFF	68
Tabela 9 – Registros de ocorrência <i>fuzzy</i> e quantidade de dias que a localidade foi suscetível à doença	69
Tabela 10 – Análise descritiva para as variáveis utilizadas na pesquisa	84
Tabela 11 – Validação Cruzada para as diferentes potências avaliadas para o in- terpolador IDW para a estimativa da favorabilidade da ferrugem da soja	85
Tabela 12 – Avaliação do semivariograma selecionado para modelar a variabilidade da favorabilidade e verificação da dependência espacial das amostras	86
Tabela 13 – Ranking para a avaliação do melhor interpolador espacial para a variá- vel ferrugem da soja	86

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AACPD	Área Abaixo da Curva de Progresso da Doença
AACPI	Área Abaixo da Curva de Progresso da Incidência da doença
AACPS	Área Abaixo da Curva de Progresso da Severidade da doença
CONAB	Companhia Nacional de Abastecimento
ED	Equações Diferenciais
EDA	Equação Difusão-Advecção
EDO	Equações Diferenciais Ordinárias
EDP	Equações Diferenciais Parciais
FAS	Ferrugem Asiática da Soja
IBGE	Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística
IDW	Inverse Distance Weighting
INMET	Instituto Nacional de Meteorologia
LASSO	Least Absolute Shrinkage and Selection Operator
LF	Lógica <i>Fuzzy</i>
NHUR	Número de Horas de Umidade Relativa
R^2	Coefficiente de Determinação
RNL	Regressão Não Linear
SBRF	Sistema Baseado em Regras <i>Fuzzy</i>
SF	Sistema <i>Fuzzy</i>
SFF	Sistema <i>Fuzzy</i> Ferrugem
SIR	Suscetíveis, Infectados e Recuperados
SQR	Soma dos Quadrados do Resíduo
SUPG	Streamline Upwind Petrov-Galerkin
UR	Umidade Relativa

$C(t, x, y)$	Concentração de poluente no meio no ponto (x, y) no instante t
$C^0(x, y)$	Concentração de poluente no meio no ponto (x, y) no instante 0
C_h	Solução aproximada de C
C^2	Função contínua em todo o domínio, cujas derivadas primeiras e segundas são contínuas em todo o domínio
$\frac{\partial C}{\partial t}$	Variação da concentração de poluente no meio em relação ao tempo
$\frac{\partial C}{\partial x}$	Variação da concentração de poluente no meio em relação ao eixo das abscissas
$\frac{\partial C}{\partial y}$	Variação da concentração de poluente no meio em relação ao eixo das ordenadas
\vec{J}	Fluxo
\vec{J}_1	Fluxo difusivo
\vec{J}_2	Fluxo advectivo
∇C	Vetor gradiente da concentração de poluente no meio
α	Coefficiente de difusibilidade efetiva no meio
\vec{v}	Campo de velocidades no meio
v_1	Componente horizontal de velocidades no meio
v_2	Componente vertical de velocidades no meio
σ	Coefficiente de decaimento total no meio
f	Termo fonte de poluição
Ω	Domínio da equação
\mathbb{R}	Conjunto dos números reais
\mathbb{R}^2	Plano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$
$\partial\Omega$	Fronteira de Ω
Γ_q	Conjunto q da fronteira de Ω
K_q	Coefficiente de perda de poluentes sobre Γ_q
θ_q	Função de perda de poluentes sobre Γ_q

η	Vetor unitário exterior à Ω
$\frac{\partial C}{\partial \eta}$	Variação da concentração de poluente no meio em relação a η
u	Função integrável no sentido de Lebesgue sobre Ω
v	Função integrável no sentido de Lebesgue sobre Ω
μ	Medida usada na integral de Lebesgue sobre Ω
$L^2(\Omega)$	Espaço das funções $u \in \Omega$, tal que $\int_{\Omega} u ^2 d\mu < \infty$
$H^1(\Omega)$	Espaço de Sobolev
$(\cdot, \cdot)_{L^2(\Omega)}$	Produto interno sobre Ω
$\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(\Gamma)}$	Produto interno sobre $\Gamma \subset \partial\Omega$
$\ \cdot\ _{L^2(\Omega)}$	Norma de $L^2(\Omega)$
\mathcal{V}	Espaço das funções teste
$\mathcal{V}^{(h)}$	Subespaço de \mathcal{V}
\mathcal{B}	Base de $\mathcal{V}^{(h)}$
φ_i	Função base
w	Função teste
n_e	Número total de elementos
k_e	Elemento global
\hat{k}	Elemento de referência
T_e	Transformação linear que relaciona \hat{k} e k_e
JT_e	Jacobiana de T_e
T	Matriz inversa da transposta da Jacobiana
$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x}$	Derivada da função global em relação ao eixo das abscissas
$\frac{\partial \varphi_i}{\partial y}$	Derivada da função global em relação ao eixo das ordenadas
$\frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi}$	Derivada da função local em relação ao eixo das abscissas
$\frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta}$	Derivada da função local em relação ao eixo das ordenadas

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	16
2	REVISÃO DE LITERATURA	18
2.1	SOJA E SUA IMPORTÂNCIA ECONÔMICA PARA O BRASIL . .	18
2.2	FERRUGEM ASIÁTICA DA SOJA	20
2.3	MODELOS MATEMÁTICOS PARA A PREDIÇÃO DA FERRUGEM ASIÁTICA DA SOJA	23
3	EQUAÇÃO DIFUSÃO-ADVECÇÃO	25
3.1	MODELO CLÁSSICO	26
3.2	FORMULAÇÃO VARIACIONAL	29
3.2.1	Discretizações espaciais	32
3.2.2	Discretizações temporais	34
3.2.3	Discretização do domínio	35
4	MODELAGEM DA DINÂMICA ESPAÇO-TEMPORAL DA FERRUGEM ASIÁTICA DA SOJA	46
4.1	CONSTRUÇÃO DOS MAPAS	47
4.1.1	Mapa de favorabilidade da FAS para o estado de Mato Grosso	47
4.1.1.1	<i>Sistema de lógica fuzzy para descrever o processo monocíclico da ferrugem asiática da soja (ALVES et al., 2011)</i>	48
4.1.1.2	<i>Construção do mapa de favorabilidade</i>	49
4.1.2	Mapa de concentração de esporos do fungo <i>Phakopsora pa- chyrrhizi</i> para o estado de Mato Grosso	51
4.1.3	Mapa da presença de plantas hospedeiras no estado de Mato Grosso	56
4.2	SISTEMA <i>FUZZY</i> FERRUGEM	56
5	RESULTADOS E DISCUSSÕES	61
5.1	MAPAS	61
5.2	SISTEMA <i>FUZZY</i> FERRUGEM	66
6	CONCLUSÕES	73
	REFERÊNCIAS	75

	APÊNDICES	82
	APÊNDICE A – ANÁLISE ESTATÍSTICA DO MAPA DE FAVORABILIDADE DE MATO GROSSO	83
	APÊNDICE B – LÓGICA FUZZY	87
B.1	SUBCONJUNTOS FUZZY	87
B.1.1	Operações entre conjuntos <i>fuzzy</i>	88
B.2	SISTEMA BASEADO EM REGRAS FUZZY	89
B.2.1	<i>Fuzzificação</i>	89
B.2.2	Inferência <i>fuzzy</i>	90
B.2.3	<i>Defuzzificação</i>	91
B.3	MODELOS FUZZY PARA COEFICIENTES DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS	92
B.3.1	Modelos de EDP integrados à lógica <i>fuzzy</i> e métodos probabilísticos no tratamento de incertezas: uma aplicação à febre aftosa em bovinos	92
B.3.2	Dispersão de poluente em sistema de reservatório: modelagem matemática e simulação computacional utilizando-se aproximação numérica e conjuntos <i>fuzzy</i>	94
B.3.3	Modelagem <i>fuzzy</i> na saúde	95
	APÊNDICE C – ESFORÇOS COMPUTACIONAIS E CÓDIGOS EM MATLAB®	97

1 INTRODUÇÃO

O estado do Mato Grosso é um dos maiores produtores de grãos do país. Desta forma, sua economia depende, de maneira significativa, do sucesso da colheita de suas safras. Este, por sua vez, depende de variáveis determinadas pela natureza, como chuva e/ou sol nos momentos certos, e outras que podem ser controladas, mesmo que parcialmente, pelo homem. São os casos das doenças ocasionadas nas plantações, que podem ser tão decisivas quanto a chuva e o sol.

Diante da importância em conter esses patógenos, inúmeros estudos são realizados frequentemente em todo o país. Entender o que os provocam, como são disseminados, identificar os seus sintomas, entre outros, é crucial para determinar como evitá-los e/ou controlá-los. Assim, pesquisar as suas evoluções é de grande valia para compreender todo o processo.

Quando se fala em *cultivo de grãos*, é impossível não se lembrar da soja. Da mesma forma, quando se trata das doenças que a acometem, é impossível não se lembrar da Ferrugem Asiática da Soja (FAS).

Não existem barreiras para o fungo *Phakopsora pachyrhizi*, causador desta doença. Seus esporos são levados pelo vento, e ao atingir um hospedeiro, com poucas horas de condições favoráveis, podem germinar e, posteriormente, gerar mais esporos. Seu hospedeiro principal é a planta de soja, mas na entressafra, pode sobreviver na planta do feijão, por exemplo.

É nesse sentido que surgem as Equações Diferenciais Parciais (EDP) e a Lógica Fuzzy (LF) (ZADEH, 1965), importantes ferramentas matemáticas utilizadas na modelagem de inúmeros problemas das mais variadas áreas. Elas são capazes de sistematizar fenômenos da natureza, comportamentos econômicos e sociais, entre outros, possibilitando, muitas vezes, a previsão de seus desenvolvimentos em determinados momentos, ou sob determinadas circunstâncias.

Diante disso, a presente pesquisa visa compreender a evolução da FAS, por ser uma doença de grande importância econômica para o estado de Mato Grosso. Para tanto, a concentração de esporos será estimada por meio de EDP, o ambiente favorável à doença por meio de LF, e a relação entre essas variáveis, e também entre a existência de hospedeiros, será desenvolvida por meio de LF. Assim, o problema será modelado por meio da combinação dessas ferramentas.

O texto está distribuído entre 4 capítulos, além da introdução, conclusões e apêndices. O próximo capítulo traz uma revisão bibliográfica que trata da soja e da sua importância, explora com maiores detalhes a FAS e apresenta um levantamento de pesquisas que buscaram modelar matematicamente a sua predição.

O terceiro capítulo trata da EDP que será usada para a modelagem do problema. Apresenta sua formulação clássica, variacional, entre outros conceitos. Apresenta a malha para a qual serão calculadas as soluções numéricas da ED.

O quarto capítulo explica a construção dos Sistemas *Fuzzy* (SF) *Decaimento*, que será usado para gerar dados da equação, e *Ferrugem*, para estimar a chance da doença ocorrer. Além disso, explica o tratamento dos dados de entrada para esses controladores, e de que maneira serão usados para gerar cenários e simulações. Todos os algoritmos executados foram elaborados especificamente para essa pesquisa em ambiente MATLAB®.

No quinto capítulo são apresentados os resultados, bem como a validação do Sistema *Fuzzy* Ferrugem (SFF). As primeiras ocorrências de cada localidade registradas para as safras entre 2015/2016 e 2019/2020 foram levantadas. Parte desses dados serviu para ajustar o modelo, parte para verificar sua eficiência.

As conclusões apresentarão as impressões que ficaram a respeito de tudo que foi estudado, das dificuldades em executar testes e reproduzir simulações. Algumas ideias de como melhorar o modelo também ficaram registradas nesse capítulo. Por fim, expõe os vislumbres em relação à ferrugem asiática da soja e ao modelo desenvolvido.

Os apêndices trazem algumas explicações de forma mais detalhada. O primeiro apêndice traz a análise estatística que levou à escolha do método de interpolação para os dados que se referem às condições ambientais favoráveis ao progresso da doença. O segundo apresenta uma explanação da LF, as fases que compõem um SF, e alguns exemplos de pesquisas que integraram SF e ED. O último apêndice traz os códigos computacionais bem como a descrição dos recursos computacionais utilizados nas simulações. Boa leitura!

2 REVISÃO DE LITERATURA

2.1 SOJA E SUA IMPORTÂNCIA ECONÔMICA PARA O BRASIL

A soja é um grão que, de uma forma ou de outra, se faz presente no preparo de alimentos de muitas famílias. Óleo de soja, leite de soja, carne de soja são só alguns exemplos de mantimentos produzidos a partir dela. Mas sua importância não se resume a isso. Com o seu farelo também é fabricado ração para alimentar os mais diversos rebanhos, e com o seu óleo é possível produzir energia. Seu cultivo, no Brasil, se dá ao longo de todo o território onde haja agricultura. Assim se tornou, nas últimas décadas, um dos produtos mais exportados pelo país.

Seu nome científico é *Glycine max*, e faz parte da família das leguminosas, bem como a ervilha e o feijão. É um herbáceo ereto, espesso e anual que pode atingir 1,5 m de altura. Possui uma infinidade de usos nos setores alimentício e industrial, e representa uma das principais fontes de óleo vegetal comestível e de proteínas para o uso de ração animal (CANADIAN FOOD INSPECTION AGENCY, 2012). Seus grãos são compostos por 40,4% de proteínas, 24,5% de lipídios, 17,3% de carboidratos, 9,31% de fibras, 5,6% de água e 2,9% de outros constituintes (SILVA *et al.*, 2006).

A soja é considerada uma das culturas mais antigas, tendo surgido na China há milênios (BEZERRA *et al.*, 2015; EMPRESA BRASILEIRA DE PESQUISAS AGROPECUARIAS - EMBRAPA, 2003). Veio para o Ocidente no século XX, quando os Estados Unidos iniciaram o seu cultivo e, em poucas décadas, o crescimento da área cultivada tornou-se exponencial. No Brasil, sua exploração comercial começou a ganhar importância a partir dos anos 40, no Rio Grande do Sul. Sua produção cresceu significativamente nos anos 60, e se estabeleceu como principal produto do Agronegócio brasileiro nos anos 70, na região Sul do país. Entre as décadas de 80 e 90, o cultivo do grão se expandiu significativamente também para a região tropical do Brasil (EMBRAPA, 2003).

Como as condições da Região Sul eram as mais parecidas com as da China, inicialmente, a produção de soja se restringia a estes estados. A partir da década de 70, melhoramentos genéticos possibilitaram o cultivo do grão em regiões de baixa latitude. Além disso, a correção da parte química dos solos, as boas características físicas e topográficas do Cerrado, bem como melhorias nas práticas de manejo da cultura, permitiram o crescimento e a exploração do seu potencial produtivo (SILVA; SEDIYAMA; BORÉM, 2015).

A expansão da soja na Amazônia Legal se deve, além dos fatos já citados, aos incentivos fiscais, baixo valor de áreas para plantio e desenvolvimento de tecnologias (EMBRAPA, 2003). Entretanto, a expansão para novos territórios do bioma Cerrado, como a região conhecida por Matopiba (Maranhão, Piauí, Tocantins e Bahia) esbarra em

problemas de logística para o transporte do grão e em questões ambientais (FREITAS, 2011).

O desenvolvimento da soja compreende as fases vegetativa e reprodutiva. A duração dessas fases é controlada geneticamente e influenciada por condições ambientais (NOGUEIRA *et al.*, 2013 apud MATSUO; FERREIRA; SEDIYAMA, 2015). Em condições brasileiras, o ciclo de desenvolvimento das variedades é de 120 a 150 dias (FEHR *et al.*, 1971 apud COSTA; COSTA, 2016). Entre semeadura e germinação são aproximadamente 10 dias; para o desenvolvimento vegetativo, entre 55 e 60 dias; para a floração, entre 10 e 20 dias; para a formação de vagens, entre 25 e 45 dias, e; para a maturação, aproximadamente 30 dias (NAKANO, 2011 apud COSTA; COSTA, 2016).

O cultivo de soja exige solos profundos, que permitam que a planta explore maior quantidade de nutrientes e água disponíveis. Também devem ser bem drenados, já que a soja não tolera encharcamento, e bem aerados para o desenvolvimento do sistema radicular. A topografia deve ser plana ou com leve declividade para facilitar as técnicas mecânicas de cultivo (SILVA; SEDIYAMA; BORÉM, 2015).

Quanto à umidade, é importante a disponibilidade de água, em quantidades certas, durante todo o desenvolvimento da cultura, mas principalmente na germinação-emergência e na floração-enchimento de grãos (SILVA; SEDIYAMA; BORÉM, 2015). Para máximo rendimento, a necessidade total de água na cultura varia entre 450 a 800 mm/ciclo, dependendo das condições climáticas, do manejo da cultura e da duração do ciclo da cultivar (EMBRAPA, 2003).

No que tange temperatura, a ideal para seu crescimento está em torno de 30 °C, se adaptando bem entre 20 °C e 30 °C para a temperatura do ar. Para a semeadura, a temperatura adequada para o solo também está nessa faixa. Já a floração da soja somente é induzida com temperaturas acima de 13 °C (EMBRAPA, 2003). Além disso, floresce em fotoperíodos (número de horas de luz/dia) menores que um máximo crítico, por isso é chamada planta de dias curtos. Assim, é semeada na primavera/verão e floresce quando os dias já estão se encurtando no verão (SILVA; SEDIYAMA; BORÉM, 2015).

Apesar de não ser conhecida como alimento básico (como são conhecidos o arroz e o milho, por exemplo), pela qualidade da sua proteína e pelo baixo custo relativo de sua produção, a soja tornou-se importante fonte proteica para a complementação da dieta. O óleo extraído do seu grão e o farelo são utilizados na alimentação humana. Além disso, o seu emprego como adubo verde e forrageiro na alimentação animal a custos baixos, aumenta a produção de carne nos países onde é cultivada, diminuindo também o preço da carne (BEZERRA *et al.*, 2015).

O grão tem ganhado espaço também na produção de energia renovável, particularmente no mercado voltado para os biocombustíveis. Nos últimos anos, a principal

matéria-prima para a produção de biodiesel tem sido o óleo de soja. Há expectativas para que essa nova demanda cresça, tanto pela necessidade de se obter fontes mais baratas de energia, quanto pela busca da redução do impacto ambiental proveniente do uso de combustíveis fósseis. Para tanto, é essencial que os usos da terra, de recursos humanos, de máquinas, implementos e insumos agrícolas sejam maximizados (SILVA, 2009; BEZERRA *et al.*, 2015).

Na safra 2012/13, foram produzidos 267,48 milhões de toneladas de soja em área cultivada de 102,93 milhões de hectares. Estados Unidos, Brasil e Argentina são os maiores produtores dessa oleaginosa, sendo responsáveis, juntos, pela produção de cerca de 80% da soja consumida no mundo (BEZERRA *et al.*, 2015).

A expansão da área cultivada, entretanto, esbarra principalmente em problemas com pragas, doenças, plantas daninhas etc. Dentre esses fatores limitantes, é possível destacar o controle da FAS, doença que será explorada na próxima seção.

2.2 FERRUGEM ASIÁTICA DA SOJA

A Ferrugem Asiática da Soja é uma doença que, se não for controlada, pode causar sérios prejuízos econômicos às plantações da leguminosa. É causada por um fungo, cujos esporos são facilmente disseminados pelo vento. Ao entrar em contato com novos hospedeiros, em condições favoráveis, produzem mais esporos do fungo, que também são levados pelo vento, e assim sucessivamente. Desta forma, se não for contida, a doença ganha proporções inimagináveis.

Muito patógenos, tais como fungos, bactérias, vírus e nematoides, atacam a soja. Entretanto, a doença causada pelo fungo *Phakopsora pachyrhizi*, tem sido considerada uma das mais importantes. Foi relatada pela primeira vez no Japão em meados de 1900, e em 1914 já havia se disseminado por vários países do sudeste da Ásia (HENNING; GODOY, 2006).

No Brasil, foi identificada em 2001, e no ano-safra de 2002/03 já havia se espalhado pelas principais regiões produtoras do país, causando prejuízos relevantes. Na safra 2003/04, somando-se gastos com aquisições e pulverizações de fungicidas às perdas originadas pela redução dos rendimentos, o desfalque estimado superou o montante de dois bilhões de dólares (DALLAGNOL, 2005).

A doença pode antecipar o ciclo da soja em até 25 dias, o que acarreta na formação de grãos pequenos, reduzindo consideravelmente a produtividade. Os principais hospedeiros do *Phakopsora pachyrhizi* são a soja, a jicama (*Pachyrhizus erosus*), o kudzu (*Pueraria phaseoloides*) e o feijão-de-corda (*Vigna unguiculata*). O ciclo de vida do fungo se inicia quando o uredósporo (esporo), oriundo da urédia, encontra o hospedeiro. Ao atingir a folha de soja, por exemplo, com 6 horas de molhamento foliar e temperatura

favorável, o uredóspero germina e penetra a folha. Em condições favoráveis à infecção e à colonização, os sintomas podem surgir entre 5 e 7 dias, e novos uredósporos, entre 9 e 12 dias. Esses esporos são então levados pelo vento ou orvalho, iniciando novamente o ciclo (ZAMBOLIM, 2006).

Para a dispersão do patógeno, e o desenvolvimento da epidemia de forma severa, temperaturas noturnas entre 18 e 26°C acompanhadas de precipitações frequentes são condições indispensáveis. Temperaturas superiores a 50°C, entretanto, são letais ao patógeno, e variando entre 15 e 32°C produzem urédias com uredósporos (BALARDIN; NAVARINI; DALLAGNOL, 2005; ZAMBOLIM, 2006).

No campo, a doença surge geralmente em locais de alta umidade no solo, pouco ventilados e sujeitos a nevoeiros, em folhas baixas de soja, pois tendem a permanecer molhadas por mais tempo. Passa, então, para as folhas situadas acima por respingos de chuva e umidade, coincidindo geralmente com a formação de vagens. Para as plantas adjacentes, a doença é transmitida se houver vento e/ou respingo de chuva (ZAMBOLIM, 2006).

Observações de campo, e dados fornecidos por diversos programas de controle da FAS, permitem afirmar que a incidência e a severidade da doença são dependentes da época de semeadura, ciclo da cultivar, local, regime hídrico e térmico, e adequações dos programas de controle de inverno e verão (BALARDIN; NAVARINI; DALLAGNOL, 2005). Para Alves (2006), os fatores que afetam a epidemia são relacionados ao ambiente (temperatura, molhamento foliar e radiação), ao hospedeiro (idade da planta e da folha e estágio fenológico) e ao patógeno (idade e concentração dos esporos, idade e tamanho da lesão e idade da urédia).

Depois do surgimento da FAS, cultivos tardios praticamente deixaram de ser adotados. Além disso, cultivares de ciclo longo favorecem o ataque do patógeno, já que ficam mais tempo no campo, e cultivares de porte alto dificultam a colocação dos fungicidas nas partes mais baixas das plantas. Assim, esses tipos de soja devem ser evitados, e dentro da época recomendada para a região, a semeadura deve ser efetuada o mais cedo e no período mais curto possível (ANDRADE; ANDRADE, 2006).

A existência de plantas *guaxas* ou *tigueras* (plantas remanescentes da colheita anterior) nas áreas de plantio, o cultivo da soja *safrinha* (ainda que pouco praticado atualmente), a antecipação da semeadura dos plantios de verão, condições climáticas favoráveis ao fungo e a provável ocorrência de novas raças do patógeno são fatores que favorecem o desenvolvimento da FAS (RAETANO; MERLIN, 2006). Assim, a eliminação de plantas involuntárias, bem como a criação de legislação que regulamenta práticas desse tipo e institui o vazio sanitário, são medidas complementares adotadas para o controle da doença (ANDRADE; ANDRADE, 2006).

A instituição do vazio sanitário tem como objetivo a eliminação de hospedeiros. Para tanto, proíbe a semeadura da soja ou a existência de plantas vivas na lavoura durante um período predeterminado. É uma medida implementada nos estados do Paraná, São Paulo, Minas Gerais, Mato Grosso do Sul, Mato Grosso, Goiás, Bahia, Rondônia, Pará, Maranhão, Tocantins, e também no Distrito Federal. Órgãos estaduais são responsáveis pela fiscalização da prática e seu descumprimento acarreta em multas que podem variar de R\$ 22.000,00 – R\$ 220.000,00 (BECKER *et al.*, 2017). Além disso, esse período muda de uma região para outra. Em Mato Grosso e em Santa Catarina, por exemplo, é estabelecido entre 15 de junho e 15 de setembro (aproximadamente 90 dias), sendo isentas da medida somente áreas de pesquisa científica, de produção de sementes genéticas, entre outros casos específicos (APROSOJA, 2015; SANTA CATARINA, 2017).

A incidência da FAS varia de uma região para outra, a depender do regime hídrico, condições climáticas de entressafra e do manejo da cultura (BALARDIN; NAVARINI; DALLAGNOL, 2005). Principalmente em regiões mais favoráveis à doença e em grandes propriedades, Yorinori (2005) sugere como estratégias de controle: aumentar a área de rotação com outras culturas (milho, arroz ou algodão); optar por cultivares mais precoces, concentrando as semeaduras no começo da época indicada (pois se desenvolvem sob condições menos favoráveis à FAS); evitar a semeadura em várias épocas e cultivares tardios (pois receberão os esporos “produzidos” nas primeiras semeaduras); semear a soja com densidade de planta que permita o bom arejamento foliar para otimizar a aplicação de fungicidas, e; não semear soja na entressafra e eliminar o máximo de soja guaxa (pois essas plantas multiplicarão o fungo que estará disponível no início da safra seguinte).

O controle químico ainda é o que se tem na falta de cultivares resistentes/tolerantes à doença. De maneira geral, aplicar o fungicida de forma preventiva torna o controle mais eficiente, entretanto, poderá exigir várias aplicações, dependendo das condições climáticas, ou ser dispensável, o que aumenta o custo da produção (YORINORI, 2005). De forma curativa, a eficiência do fungicida depende da rápida constatação do início da doença, do clima e da capacidade operacional, já que a aplicação deve cobrir, muitas vezes, extensas áreas de plantio num curto período de tempo (ZAMBOLIM, 2006).

De qualquer forma, é uma doença de difícil previsão. Sua ocorrência inicial e severidade dependem das condições climáticas e da proximidade da fonte de inóculo, que podem variar muito de um ano para outro. Além disso, as diferentes condições climáticas e a existência de plantas guaxas (nas lavouras ou nas margens das estradas) ou plantas hospedeiras suscetíveis, impossibilitam elaborar uma receita que atenda a todas as regiões produtoras de soja (YORINORI, 2005). Assim, compreender a doença segundo aspectos espaciais e temporais permite a obtenção de informações úteis que possibilitem a construção de um programa de controle eficiente e racional (BALARDIN; NAVARINI; DALLAGNOL, 2005).

Diante de todo o exposto, fica evidente a necessidade de se entender a FAS. Em geral, toda a complexidade que envolve a doença é o que motiva pesquisadores de todas as áreas, na busca pela remediação ou ao menos prevenção. Nesse sentido, a próxima seção apresenta de forma sucinta algumas pesquisas que tiveram como objetivo simular o desenvolvimento da FAS.

2.3 MODELOS MATEMÁTICOS PARA A PREDIÇÃO DA FERRUGEM ASIÁTICA DA SOJA

Como já foi dito, a ferrugem asiática da soja é uma doença que causa severos danos ao cultivo do grão e, conseqüentemente, consideráveis prejuízos financeiros. Por isso, várias pesquisas são realizadas com a intenção de controlá-la, de classificar os riscos de sua ocorrência, de determinar a sua favorabilidade, a sua severidade, enfim: com a intenção de prevê-la.

A invasão da FAS revelou quão vulneráveis são os ecossistemas agrícolas a patógenos de plantas transportados pelo ar. É essa vulnerabilidade que despertou amplos interesses no desenvolvimento de previsões de doenças (PAN *et al.*, 2010).

Megeto *et al.* (2014) construíram uma árvore de decisão para classificação de ocorrências de FAS usando variáveis meteorológicas como base. Eles modelaram a influência da temperatura e da precipitação para predizer situações de ocorrência ou não ocorrência da doença.

Batchelor, Yang e Tschanz (1997) desenvolveram uma rede neural (HAYKIN, 2008) para predizer a severidade da FAS para uma determinada cultivar de soja. Para tanto, utilizaram-se de dados de 73 epidemias e progresso da doença, que foram medidos semanalmente ao longo de dois anos para cada experimento de plantio.

Kim, Wang e Yang (2005) produziram um modelo de taxa de infecção aparente diária para simular a severidade da FAS. Combinando variáveis meteorológicas e critérios biológicos pertinentes, construíram um sistema de lógica *fuzzy* para estimar essa taxa que, aplicada a equação diferencial de dinâmica populacional, simulou a severidade da doença.

Alves *et al.* (2011) estudaram os efeitos da temperatura e do molhamento foliar no processo monocíclico da FAS em três cultivares do grão, a partir de um sistema de lógica *fuzzy* e modelos de regressão não linear. Com a implementação do sistema, foi possível observar áreas favoráveis à doença.

Wen, Bowen e Hartman (2017) desenvolveram modelos empíricos para prever o movimento aéreo de curta distância de urediniósporos de *Phakopsora pachyrhizi* usando machine learnig. Essas abordagens foram baseadas em variáveis ambientais e utilizaram dados de contagem de urediniósporos coletados de armadilhas de esporos ativos e passivos

em quatro ambientes no sul dos Estados Unidos. O estudo comparou modelos usando o LASSO, a regressão *Zero-inflated Poisson/regular Poisson*, floresta aleatória e redes neurais.

Isard *et al.* (2005) construíram um sistema de previsão de aerobiologia da FAS, com o intuito de avaliar o movimento potencial de patógenos da América do Sul para os Estados Unidos. O modelo é configurado em um formato modular para incluir todas as etapas do processo de aerobiologia. Para caracterizar a força e a distribuição da fonte de esporos, a colonização e a progressão da doença nos locais atingidos, os submodelos de desenvolvimento do hospedeiro e de progressão da doença, respectivamente, são conduzidos por dados climáticos. O sistema também prevê a liberação de esporos e fuga do dossel nas áreas de origem, mortalidade por causa da exposição à radiação solar durante o transporte atmosférico e deposição úmida nas regiões de destino.

A partir dos trabalhos mencionados, é possível perceber a utilização de inteligência artificial, de equações diferenciais ou da combinação de ambas no desenvolvimento dos modelos propostos. De forma geral, todos têm a intenção de contribuir para, sempre que possível, antever o comportamento da FAS. Também este é o objetivo deste estudo, e para tanto serão combinadas as técnicas da Lógica *Fuzzy* com as da Equação de Difusão-Advecção no desenvolvimento do modelo.

3 EQUAÇÃO DIFUSÃO-ADVECÇÃO

A Equação Difusão-Advecção (EDA) é um tipo de Equação Diferencial (ED) amplamente usada para modelar os mais variados fenômenos. O objetivo, em geral, é obter uma função que descreva a concentração (ou a dispersão). Pode ser concentração de animais infectados por um vírus, de poluentes num rio, dispersão de um determinado veneno no ar, entre outros.

Diniz (2003) utilizou a referida equação para modelar a dispersão de poluentes num sistema ar-água. No primeiro momento, modelou o transporte aéreo do poluente e seu depósito na superfície do corpo aquático, com domínio bidimensional na vertical. Na sequência, para substâncias poluentes que penetram na água, incluiu o meio aquático, com domínio bidimensional na horizontal.

Missio (2008) construiu um sistema de Equações Diferenciais Parciais (EDP) do tipo SIR (suscetíveis, infectados e recuperados) para simular o comportamento da febre aftosa em bovinos. Dessa forma, a primeira equação modela a população suscetível à doença, a segunda, a população infectada e a terceira, a população recuperada. Tratam-se, nos três casos, de adequações da EDA.

Wolmuth (2009) modelou o comportamento evolutivo de poluentes oriundos da atividade agroindustrial na região do lago de Manso, em Mato Grosso. Para tanto, utilizou a EDA, num domínio bidimensional, que caracteriza a superfície de um corpo aquático. Com a ferramenta algorítmica construída a partir da pesquisa, é possível gerar cenários utilizando-se das variações do vento e redução da taxa de escoamento de produtos agroquímicos.

Krindges (2011) também fez a modelagem de um problema de dispersão de poluentes no lago do Manso, a partir da mesma ED. Entretanto, o domínio abordado foi tridimensional. Além de produzir material e método para avaliação qualitativa, com atenção nesse problema, o objetivo também foi o de construir um modelo genérico que pudesse ser aplicado a qualquer problema que se encaixe na categoria na qual a pesquisa está inserida.

Para doenças transmitidas pelo ar com um componente de dispersão de esporos, os modelos de transporte evoluíram baseando-se em modelos de poluentes atmosféricos que calculam a dispersão de aerossóis suspensos emitidos de uma fonte pontual. Esses esporos são tratados como partículas poluentes, exceto pela questão da viabilidade dos esporos. Assim, a dispersão a longa distância, como qualquer problema dinâmico-físico em que tanto a advecção quanto a difusão são dominantes, pode ser modelada a partir de uma abordagem Euleriana de Difusão-Advecção (PAN *et al.*, 2010).

Os modelos difusão-advecção Euleriana assumem que a difusão atmosférica é aná-

loga à difusão molecular. Além disso, cumprem a Lei de Fick, que determina que a taxa de difusão é proporcional ao gradiente de concentração do material de difusão (MCCARTNEY; FITT; WEST, 2006).

A seguir, serão apresentados o modelo clássico da EDA, bem como explicações sucintas dos termos que a constituem. Alguns conceitos sobre Formulação Variacional, Discretização de Equações e do Domínio também serão abordados e contextualizados ao problema desta pesquisa.

3.1 MODELO CLÁSSICO

Chamando de $C(t, x, y)$ a concentração de poluente no meio em estudo no ponto (x, y) no instante t , para a equação de difusão-advecção para C , tem-se:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \{\text{div(fluxo)}\} + \{\text{decaimento}\} = \{\text{fonte}\} \quad (1)$$

De forma mais específica, o fluxo do poluente é dividido em duas parcelas: o fluxo difusivo (difusão efetiva), que contém os efeitos da difusão molecular e da turbulenta, e fluxo advectivo (transporte), responsável pelos movimentos macroscópicos do meio. O fluxo difusivo (\vec{J}_1) cumpre a lei de Fick (OKUBO; LEVIN, 2001). Por isso, é possível afirmar que a matéria tende a se espalhar se movimentando de locais de maior concentração para locais de menor concentração. Ou seja, é proporcional ao gradiente da densidade do poluente ($\vec{J}_1 = -\alpha \nabla C$). Já o fluxo advectivo (\vec{J}_2) é o movimento provocado por agentes externos, como o campo de velocidades do meio. Nesse caso, é dado pelo produto da velocidade (\vec{v}) pela concentração ($\vec{J}_2 = \vec{v} C$). O fluxo por difusão efetiva e transporte advectivo é dado, portanto, por (WOLMUTH, 2009; VÁSQUEZ, 2005):

$$\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2 = -\alpha \nabla C + \vec{v} C.$$

A perda de massa no sistema, constituída pelas alterações sofridas pela substância ao longo do tempo pelos mais diversos fatores, é o que determina o decaimento (ou degradação). Em várias situações, assume-se que essa perda é linearmente proporcional à própria concentração. E os meios pelos quais a substância é introduzida e retirada do sistema são as fontes e os sorvedouros, respectivamente (WOLMUTH, 2009; VÁSQUEZ, 2005).

Fazendo a separação entre fluxo difusivo e fluxo advectivo, a equação (1) pode ser reescrita como segue (KRINDGES, 2011; WOLMUTH, 2009; DINIZ, 2003; INFORZATO, 2008; POLETTI, 2009):

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \{\text{difusão}\} - \{\text{transporte}\} - \{\text{decaimento}\} + \{\text{fonte}\}.$$

É importante notar que os operadores gradiente, divergente e laplaciano nas descrições a seguir são apenas em relação às variáveis espaciais, e não em relação à variável temporal. Dessa forma, para a modelagem clássica desses fenômenos, em espaço de dimensão arbitrária, tem-se:

$$\begin{aligned} \{\text{difusão}\} &= \nabla \cdot (-\alpha \nabla C), \text{ segundo Okubo e Levin (2001);} \\ \{\text{transporte}\} &= \nabla \cdot (\vec{v} C), \text{ segundo Edelstein-Keshet (1988);} \\ \{\text{decaimento}\} &= \sigma C, \text{ segundo Marchuk (1986).} \end{aligned}$$

Assim, a equação que modela o fenômeno da dispersão de determinada substância num domínio bidimensional é dada por

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \nabla \cdot (\alpha \nabla C) - \nabla \cdot (\vec{v} C) - \sigma C + f, \quad (x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2, \quad t \in (0, T] \subset \mathbb{R},$$

sendo:

- $\alpha = \alpha(t, x, y)$ o coeficiente de difusibilidade efetiva no meio;
- $\vec{v} = \vec{v}(t, x, y) = (v_1(t, x, y), v_2(t, x, y))$ o campo de velocidades no meio;
- $\sigma = \sigma(t, x, y)$ o coeficiente de decaimento total no meio;
- $f = f(t, x, y)$ é o termo fonte.

A condição inicial é dada por $C(0, x, y) = C_0(x, y)$, $(x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$, e são consideradas as seguintes condições de contorno, cuja representação gráfica está registrada na Figura 1:

1. Do tipo Von Neumann não homogênea para ingresso de poluente

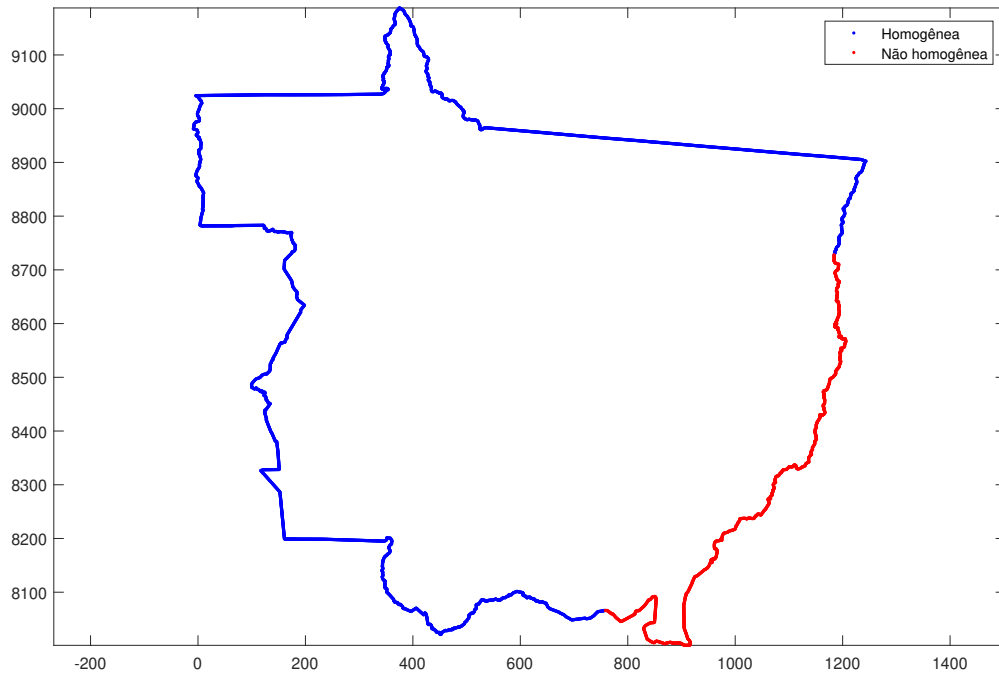
$$\alpha \frac{\partial C}{\partial \eta} \Big|_{\Gamma_q} = \theta(t, x, y), \text{ sendo } \theta \text{ uma função dada e } q = 1;$$

2. Do tipo Von Neumann homogênea para fronteira(s) sem perda de poluente

$$\alpha \frac{\partial C}{\partial \eta} \Big|_{\Gamma_q} = 0, \text{ sendo } q = 2.$$

Dessa forma, o modelo clássico da EDA envolve um termo difusivo e um advectivo, além de um coeficiente de degradação e um termo fonte. O termo difusivo consiste no divergente do produto entre o coeficiente de difusão e o gradiente da concentração. Esse coeficiente pode ser uma constante ou pode variar em função do tempo, do espaço, de condições ambientes etc. O termo advectivo é dado pelo divergente do produto escalar entre um campo vetorial e a concentração. Já a degradação é o produto do coeficiente de degradação pela concentração. Esse coeficiente também pode ser constante ou variável.

Figura 1 – Condições de fronteira do tipo Von Neumann



Fonte: Elaboração da própria autora.

O termo fonte, por fim, caracteriza a introdução de novos objetos, cuja concentração se deseja modelar.

Por fim, a equação para a qual será obtida a solução numérica é dada por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial C}{\partial t} = \nabla \cdot (\alpha \nabla C) - \nabla \cdot (\vec{v} C) - \sigma C + f, \quad (x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2, \quad t \in (0, T] \subset \mathbb{R} \\ \nabla \cdot \vec{v} = 0 \\ \alpha \frac{\partial C}{\partial \eta} |_{\Gamma_1} = \theta(t, x, y) \\ \alpha \frac{\partial C}{\partial \eta} |_{\Gamma_2} = 0 \\ C(0, x, y) = C^0(x, y), \forall (x, y) \in \Omega \end{array} \right. \quad (2)$$

Observando a equação, é possível afirmar que trata-se de uma ED linear de segunda ordem. Assim, para que a equação (2) seja satisfeita, é necessário garantir a continuidade da função solução C e de suas derivadas parciais até a ordem dois. Entretanto, nem sempre isso é possível. Para esses casos, é necessário construir a formulação variacional, também chamada de formulação fraca da ED.

3.2 FORMULAÇÃO VARIACIONAL

Embora vários problemas sejam modelados matematicamente por ED, muitas delas não possuem soluções analíticas. Nesses casos, recorre-se, dentre outras técnicas para obtenção de soluções numéricas, à Formulação Variacional da equação. Com ela é possível obter valores aproximados da equação em pontos predeterminados do seu domínio, possibilitando uma compreensão geral do fenômeno estudado.

A formulação variacional reescreve a formulação clássica da ED (ou do sistema de equações), de forma que suas soluções devem ser procuradas em um espaço com menos restrições para diferenciabilidade. A essas soluções dão-se o nome de *soluções fracas* (MISSIO, 2008).

É possível afirmar que a solução de um problema de valor inicial existe em qualquer intervalo que contenha o ponto inicial e no qual os coeficientes da ED são contínuos, para o caso de ED lineares. Se, entretanto, algum dos coeficientes for descontínuo em determinados pontos, a solução pode ser descontínua ou até mesmo deixar de existir nesses pontos do intervalo (BOYCE; DIPRIMA, 2014).

Assim, para satisfazer a ED no seu modelo clássico (2), a função solução C deve ser, obrigatoriamente, no mínimo de classe C^2 , ou seja, além de ser contínua em todo o domínio, suas derivadas primeiras e segundas também o devem ser. Na prática, entretanto, a função que modela o termo fonte ou as condições iniciais nem sempre são contínuas em relação ao tempo ou ao espaço. Em outras palavras, problemas ambientais geralmente não possuem as condições de regularidade que a formulação clássica exige (POLETTI, 2009; WOLMUTH, 2009).

Métodos de aproximação, cujos instrumentos não têm as exigências de regularidade da formulação forte, são uma alternativa para esses problemas (WOLMUTH, 2009). Assim, a opção natural é o uso da formulação variacional (também chamada de formulação fraca do problema), que "[...] ‘enfraquece’ as hipóteses de regularidade da solução, ‘alargando’ condições necessárias para achar ou construir a solução procurada [...]" (POLETTI, 2009, p. 15).

Nos métodos variacionais, o objetivo é obter uma solução aproximada de uma ED dentro de um espaço conveniente de funções, de dimensão finita. A solução aproximada, nesse subespaço, é uma projeção exata da solução, e pode ser escrita como uma combinação linear de um número finito de funções conhecidas, as quais formam a base desse subespaço. Assim, procuram-se, com a resolução do sistema de equações algébricas resultante do processo de discretização, os coeficientes desta expansão linear, de forma que a ED seja satisfeita. Para tanto, o problema deve ser reescrito em sua forma fraca (CARVALHO; VALÉRIO, 2012). Entretanto, antes de se obter a formulação variacional (ou formulação fraca) da equação (2), é preciso entender algumas definições importantes

e enunciar o Teorema de Green, que serão apresentados a seguir.

Supondo $u \in \Omega$ e $v \in \Omega$ funções, com $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, tais que sejam contínuas u e suas derivadas primeiras e segundas e v e suas derivadas primeiras. O Teorema de Green garante que vale a seguinte igualdade (KRINDGES, 2004):

$$\int_{\Omega} (-\Delta u)v dx = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx - \int_{\partial\Omega} (\eta \cdot \nabla u)v d\partial\Omega.$$

sendo η o vetor unitário exterior à $\partial\Omega$.

Seja $L^2(\Omega)$ o espaço das funções $u \in \Omega$, que são integráveis, no sentido de Lebesgue, sobre Ω , com $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Tem-se:

$$L^2(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \text{ com } \int_{\Omega} |u(x, y)|^2 d\mu < \infty \right\}.$$

Considerando $u \in L^2(\Omega)$, u possui derivadas fracas de todas as ordens. Entretanto, não é possível afirmar que essas derivadas fracas também pertençam a $L^2(\Omega)$. Assim, é preciso definir o espaço $H^m(\Omega)$, de forma que se a função $u(x, y)$ pertence a $H^m(\Omega)$, então $u(x, y)$ e suas derivadas $\frac{\partial^i u}{\partial x^i}$ e $\frac{\partial^i u}{\partial y^i}$, com $1 \leq i \leq m$, pertençam a $L^2(\Omega)$ (POLETTI, 2009). Para a formulação fraca da equação (2), é preciso garantir apenas que as primeiras derivadas parciais pertençam a $L^2(\Omega)$. Assim, define-se o espaço de Sobolev:

$$H^1(\Omega) = \left\{ u(x, y) \in L^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x} \in L^2(\Omega) \text{ e } \frac{\partial u}{\partial y} \in L^2(\Omega) \right\}.$$

Definem-se produtos internos e normas para os espaços $L^2(\Omega)$ e $H^1(\Omega)$, de forma a facilitar a busca das funções testes, com as quais constrói-se a solução aproximada do problema. Para o desenvolvimento desta formulação variacional, são estabelecidos como produto interno e norma de $L^2(\Omega)$, respectivamente:

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} uv d\mu \text{ e } \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 = (u, u)_{L^2(\Omega)}$$

sobre o domínio Ω , sendo μ a medida usada na integral de Lebesgue. E:

$$\langle u, v \rangle_{L^2(\Gamma)} = \int_{\Gamma} uv d\partial\Omega$$

o produto interno sobre parte da fronteira de Ω , sendo $\Gamma \subset \partial\Omega$.

Em $H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$, tem-se como produto interno e norma, respectivamente:

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + (\nabla u | \nabla v)_{L^2(\Omega)} \text{ e } \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2$$

sendo $(\nabla u \parallel \nabla v)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} d\mu + \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} d\mu$, e $u \in H^1(\Omega)$ e $v \in H^1(\Omega)$.

Posto isso, trabalhar com a formulação variacional consiste em (WOLMUTH, 2009; POLETTI, 2009; MISSIO, 2008):

1. considerar as derivadas do modelo clássico no sentido fraco;
2. efetuar o produto interno de cada termo de (2) pela função teste $w \in H^1(\Omega)$.

Multiplicando cada termo de (2) por $w \in H^1(\Omega)$, obtém-se:

$$\frac{\partial C}{\partial t} w = \nabla \cdot (\alpha \nabla C) w - \nabla \cdot (\vec{v} C) w - (\sigma C) w + f w. \quad (3)$$

Integrando (3) em relação às variáveis espaciais:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial C}{\partial t} w d\mu = \int_{\Omega} \nabla \cdot (\alpha \nabla C) w d\mu - \int_{\Omega} \nabla \cdot (\vec{v} C) w d\mu - \int_{\Omega} (\sigma C) w d\mu + \int_{\Omega} f w d\mu \quad (4)$$

para todo $w \in H^1(\Omega)$.

Como em Diniz (2003), que considerou $\nabla \cdot \vec{v} = 0$ para aproximar um campo "bem comportado" no sentido do fluxo aéreo, nesta pesquisa também adotou-se $\nabla \cdot \vec{v} = 0$. Por isso, usando que $\nabla \cdot (\vec{v} C) = (\nabla \cdot \vec{v}) \cdot C + \vec{v} \cdot \nabla C$, tem-se $\nabla \cdot (\vec{v} C) = \vec{v} \cdot \nabla C$. Assim, substituindo em (4) e isolando o termo fonte tem-se:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial C}{\partial t} w d\mu - \alpha \int_{\Omega} \nabla \cdot (\nabla C) w d\mu + \int_{\Omega} (\vec{v} \cdot \nabla C) w d\mu + \int_{\Omega} (\sigma C) w d\mu = \int_{\Omega} f w d\mu \quad (5)$$

para todo $w \in H^1(\Omega)$.

Usando o teorema de Green para o termo difusivo, tem-se:

$$\alpha \int_{\Omega} \nabla \cdot (\nabla C) w d\mu = -\alpha \int_{\Omega} (\nabla C \cdot \nabla w) d\mu + \alpha \int_{\partial\Omega} \frac{\partial C}{\partial \eta} w d\partial\Omega. \quad (6)$$

Tendo em vista que $\partial\Omega = \bigcup_{q=1}^2 \Gamma_q$ e dadas as condições de fronteira, tem-se:

$$\alpha \int_{\partial\Omega} \frac{\partial C}{\partial \eta} w d\partial\Omega = \int_{\Gamma_1} \theta w d\partial\Omega + \int_{\Gamma_2} 0 w d\partial\Omega. \quad (7)$$

Dessa forma, substituindo (7) em (6) o termo difusivo fica sendo:

$$\alpha \int_{\Omega} \nabla \cdot (\nabla C) w d\mu = -\alpha \int_{\Omega} (\nabla C \cdot \nabla w) d\mu + \left(\int_{\Gamma_1} \theta w d\partial\Omega \right). \quad (8)$$

Usando (8) em (5), chega-se a:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\partial C}{\partial t} w d\mu + \alpha \int_{\Omega} (\nabla C \cdot \nabla w) d\mu + \int_{\Omega} (\vec{v} \cdot \nabla C) w d\mu + \int_{\Omega} (\sigma C) w d\mu = \\ = \int_{\Omega} f w d\mu + \int_{\Gamma_1} \theta w d\partial\Omega \end{aligned} \quad (9)$$

para todo $w \in H^1(\Omega)$.

Reescrevendo a equação usando as notações de produto interno introduzidas anteriormente, tem-se:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial C}{\partial t}, w \right)_{L^2(\Omega)} + \alpha (\nabla C \| \nabla w)_{L^2(\Omega)} + ((\vec{v} \cdot \nabla C), w)_{L^2(\Omega)} + ((\sigma C), w)_{L^2(\Omega)} = \\ = (f, w)_{L^2(\Omega)} + \langle \theta, w \rangle_{L^2(\Gamma_1)} \end{aligned} \quad (10)$$

para todo $w \in H^1(\Omega)$. A equação (10) é, portanto, a formulação variacional da equação (2).

Assim, procura-se uma solução $C \in \mathcal{V}$, que satisfaça (10), com \mathcal{V} sendo o espaço das funções que pertencem a $L^2(\Omega)$ e cujas derivadas espaciais (em x e y) e temporal também pertençam a $L^2(\Omega)$:

$$\mathcal{V} = \left\{ C \in L^2[(0, T), H^1(\Omega)] : \frac{\partial C}{\partial t} \in L^2(\Omega), \forall t \in [0, T] \right\}.$$

A partir das demonstrações desenvolvidas em sua tese de doutorado, Inforzato (2008) provou a existência e unicidade de solução da sua equação. Fazendo as adequações necessárias a sua equação, são garantidas a existência e unicidade de solução da equação (10).

Construída a formulação variacional (10), algum método numérico adequado deve ser usado para aproximar a solução. O *Método de Galerkin via Elementos Finitos* (KRINDGES, 2011) utiliza a formulação variacional das equações, permitindo a discretização das variáveis espaciais e posteriormente, a obtenção de aproximações numéricas da solução.

3.2.1 Discretizações espaciais

Seja $\mathcal{V}^{(h)}$ um subespaço de $H^1(\Omega)$ de dimensão finita gerado pela base $\mathcal{B} = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n_h}\}$. A aproximação da solução de (10), ou a sua projeção no subespaço $\mathcal{V}^{(h)}$ pode ser escrita como combinação linear dos elementos da base \mathcal{B} :

$$C_h = \sum_{j=1}^{n_h} c_j(t) \varphi_j(x, y). \quad (11)$$

Essas funções φ_i , chamadas de funções base, permitirão construir uma aproximação da solução do problema variacional. Trata-se de uma discretização espacial finita do domínio do problema, sobre a qual é construída a base \mathcal{B} de funções do subespaço finito $\mathcal{V}^{(h)}$ (VÁSQUEZ, 2005).

Substituindo C_h na formulação variacional (10), tem-se:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial C_h}{\partial t}, w \right)_{L^2(\Omega)} + \alpha (\nabla C_h \| \nabla w)_{L^2(\Omega)} + ((\vec{v} \cdot \nabla C_h), w)_{L^2(\Omega)} + ((\sigma C_h), w)_{L^2(\Omega)} = \\ = (f, w)_{L^2(\Omega)} + \langle \theta, w \rangle_{L^2(\Gamma_1)} \end{aligned} \quad (12)$$

para todo $w \in \mathcal{V}^{(h)}$. Por (11) tem-se que:

$$\frac{\partial C_h}{\partial t} = \sum_{j=1}^{n_h} \frac{dc_j}{dt} \varphi_j \quad \text{e} \quad \nabla C_h = \sum_{j=1}^{n_h} c_j \nabla \varphi_j. \quad (13)$$

Usando (11) e (13) em (12) tem-se:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{j=1}^{n_h} \frac{dc_j}{dt} \varphi_j, w \right)_{L^2(\Omega)} + \alpha \left(\sum_{j=1}^{n_h} c_j \nabla \varphi_j \| \nabla w \right)_{L^2(\Omega)} + \left(\left(\vec{v} \cdot \sum_{j=1}^{n_h} c_j \nabla \varphi_j \right), w \right)_{L^2(\Omega)} + \\ + \left(\left(\sigma \sum_{j=1}^{n_h} c_j \varphi_j \right), w \right)_{L^2(\Omega)} = (f, w)_{L^2(\Omega)} + \langle \theta, w \rangle_{L^2(\Gamma_1)} \end{aligned} \quad (14)$$

para todo $w \in \mathcal{V}^{(h)}$.

Esse procedimento corresponde ao conceito de separação de variáveis, e como as funções $c_j(t)$ não dependem de (x, y) , é possível tirá-las do produto interno (SAAVEDRA, 2005). Então:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n_h} \frac{dc_j}{dt} (\varphi_j, w)_{L^2(\Omega)} + \alpha \sum_{j=1}^{n_h} c_j (\nabla \varphi_j \| \nabla w)_{L^2(\Omega)} + \sum_{j=1}^{n_h} c_j ((\vec{v} \cdot \nabla \varphi_j), w)_{L^2(\Omega)} + \\ + \sum_{j=1}^{n_h} c_j ((\sigma \varphi_j), w)_{L^2(\Omega)} = (f, w)_{L^2(\Omega)} + \langle \theta, w \rangle_{L^2(\Gamma_1)} \end{aligned} \quad (15)$$

para todo $w \in \mathcal{V}^{(h)}$.

No Método de Galerkin, as funções teste (também chamadas de funções peso) w são da mesma classe das funções base (VÁSQUEZ, 2005). Dessa forma, sendo a equação (15) válida para todo $w \in \mathcal{V}^{(h)}$, é suficiente avaliá-la para os elementos da base de $\mathcal{V}^{(h)}$.

Portanto:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n_h} \frac{dc_j}{dt} (\varphi_j, \varphi_i)_{L^2(\Omega)} + \alpha \sum_{j=1}^{n_h} c_j (\nabla \varphi_j \| \nabla \varphi_i)_{L^2(\Omega)} + \sum_{j=1}^{n_h} c_j ((\vec{v} \cdot \nabla \varphi_j), \varphi_i)_{L^2(\Omega)} + \\ + \sum_{j=1}^{n_h} c_j ((\sigma \varphi_j), \varphi_i)_{L^2(\Omega)} = (f, \varphi_i)_{L^2(\Omega)} + \langle \theta, \varphi_i \rangle_{L^2(\Gamma_1)} \end{aligned} \quad (16)$$

para todo $\varphi_i \in \mathcal{B}$.

Organizando-se a equação (16), é possível escrever essa sentença sob a forma de um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n_h} \frac{dc_j}{dt} (\varphi_j, \varphi_i)_{L^2(\Omega)} + \\ + \sum_{j=1}^{n_h} c_j \left[\alpha (\nabla \varphi_j \| \nabla \varphi_i)_{L^2(\Omega)} + ((\vec{v} \cdot \nabla \varphi_j), \varphi_i)_{L^2(\Omega)} + ((\sigma \varphi_j), \varphi_i)_{L^2(\Omega)} \right] = \\ = (f, \varphi_i)_{L^2(\Omega)} + \langle \theta, \varphi_i \rangle_{L^2(\Gamma_1)} \end{aligned} \quad (17)$$

para todo $\varphi_i \in \mathcal{B}$. Fazendo $C_h = [c_1(t), c_2(t), \dots, c_{n_h}(t)]^T$, e $C'_h = \left[\frac{c_1}{dt}, \frac{c_2}{dt}, \dots, \frac{c_{n_h}}{dt} \right]^T$ a partir dessa expressão tem-se:

$$MC'_h(t) + WC_h(t) = H + N, \quad (18)$$

sendo as matrizes $M = (m_{ij})_{n_h \times n_h}$, $W = (w_{ij})_{n_h \times n_h}$, $H = (h_i)_{n_h \times 1}$ e $N = (n_i)_{n_h \times 1}$ dados por:

$$\begin{aligned} m_{ij} &= (\varphi_j, \varphi_i)_{L^2(\Omega)}; \\ w_{ij} &= \alpha (\nabla \varphi_j \| \nabla \varphi_i)_{L^2(\Omega)} + ((\vec{v} \cdot \nabla \varphi_j), \varphi_i)_{L^2(\Omega)} + ((\sigma \varphi_j), \varphi_i)_{L^2(\Omega)}; \\ h_i &= (f, \varphi_i)_{L^2(\Omega)}; \\ n_i &= \langle \theta, \varphi_i \rangle_{\Gamma_1}. \end{aligned}$$

Os vetores $C'_h(t)$ e $C_h(t)$ serão obtidos a partir da resolução do sistema. Assim, tem-se um sistema de equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, para as quais as soluções são obtidas com relativa facilidade teórica.

3.2.2 Discretizações temporais

A discretização temporal da equação se dará por meio do esquema de diferenças finitas conhecido pelo nome de Crank-Nicolson (KRINDGES, 2011). Esse método dá origem a um esquema incondicionalmente estável e de ordem 2, e por isso tem sido muito utilizado. Consiste em tomar o instante médio entre dois instantes subsequentes, ou seja,

usa-se a diferença centrada no tempo $t^{n+\frac{1}{2}}$, obtendo as seguintes aproximações:

$$\begin{aligned} \frac{dc_j}{dt} \Big|_{t^{n+\frac{1}{2}}} &= \frac{c_j^{n+1} - c_j^n}{\Delta t}, \quad c_j^{n+\frac{1}{2}} = \frac{c_j^{n+1} + c_j^n}{2}, \\ M^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{M^{n+1} + M^n}{2}, \quad W^{n+\frac{1}{2}} = \frac{W^{n+1} + W^n}{2}, \\ H^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{H^{n+1} + H^n}{2} \quad \text{e} \quad N^{n+\frac{1}{2}} = \frac{N^{n+1} + N^n}{2}. \end{aligned}$$

Substituindo t em (18) por $t^{n+\frac{1}{2}}$, tem-se:

$$M^{n+\frac{1}{2}} \left[\frac{dC_h^{n+\frac{1}{2}}}{dt} \right] + W^{n+\frac{1}{2}} \left[C_h^{n+\frac{1}{2}} \right] = H^{n+\frac{1}{2}} + N^{n+\frac{1}{2}}.$$

Assim:

$$M^{n+\frac{1}{2}} \left[\frac{C_h^{n+1} - C_h^n}{\Delta t} \right] + W^{n+\frac{1}{2}} \left[\frac{C_h^{n+1} + C_h^n}{2} \right] = H^{n+\frac{1}{2}} + N^{n+\frac{1}{2}}.$$

Colocando C_h^{n+1} e C_h^n em evidência e multiplicando tudo por Δt , tem-se que a solução do sistema de equações diferenciais (18) pode ser aproximada pela solução do seguinte sistema

$$\left[M^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{2} W^{n+\frac{1}{2}} \right] \cdot C_h^{n+1} = \left[M^{n+\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{2} W^{n+\frac{1}{2}} \right] \cdot C_h^n + \Delta t \left(H^{n+\frac{1}{2}} + N^{n+\frac{1}{2}} \right). \quad (19)$$

O sistema (19) será resolvido, iterativamente, no tempo, a partir de uma condição inicial. Além disso, para a construção das matrizes M , W , H e N , será necessário calcular alguns produtos internos. Para tanto, serão definidas a seguir as funções φ 's a serem utilizadas no processo.

3.2.3 Discretização do domínio

Discretizar o domínio consiste em substituir a análise em uma região contínua, pela análise em um conjunto finito de pontos. Um método comum utilizado para tanto é o dos Elementos Finitos. Assim, constrói-se sobre o domínio uma malha que será formada por elementos geométricos que, no caso do domínio bidimensional, podem ser triângulos, quadriláteros, entre outros. A partir dessa malha e da adequada escolha das funções que compõem a base do espaço $\mathcal{V}^{(h)}$, será possível obter aproximações espaciais para a solução via elementos finitos.

A técnica dos Elementos Finitos é bastante adequada para a composição de aproximações da solução de problemas de valor de contorno. Consiste em dividir o domínio

da solução em um número finito de subdomínios simples, também chamados elementos simples, e em cada um, tomar funções convenientes (funções teste). Desta maneira, uma solução aproximada da EDP pode ser localmente obtida para cada um desses elementos. Todos esses domínios e suas funções são estrategicamente reunidos, gerando assim a solução total (WOLMUTH, 2009).

O método consiste em escolher adequadamente as funções φ' s para que, juntamente com suas derivadas, sejam diferentes de zero em uma pequena parcela do domínio. Com isso, a integral no domínio se reduz a integrais em parte do domínio, onde as funções e suas derivadas são simultaneamente diferentes de zero, o que simplifica o processo de integração (CARVALHO; VALÉRIO, 2012).

O procedimento se resume em:

1. Criar uma malha em Ω , definindo qual figura geométrica será utilizada para os elementos finitos;
2. Determinar o grau dos polinômios de aproximação (que atuarão sobre cada elemento).

Sendo adequado ao problema, as funções da base $\mathcal{B} = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n_h}\}$ podem ser escolhidas do tipo linear por partes, satisfazendo a seguinte condição:

$$\varphi_i(x_j, y_j) = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}, \quad (20)$$

com (x_i, y_i) sendo as coordenadas dos vértices das figuras geométricas, também chamadas de nós da malha (POLETTI, 2009).

Para a resolução do sistema (19), a discretização da região Ω se dará por meio de elementos finitos triangulares de primeira ordem. As funções da base serão definidas de modo a satisfazerem a condição (20). Denote com $\{k_e\}_{e=1}^{nte}$ uma família finita de nte triângulos k_e , dois a dois disjuntos ou tendo como interseção somente uma aresta ou um vértice, tal que:

$$\Omega_h = \bigcup_{e=1}^{nte} k_e.$$

Cada um dos triângulos da malha será um subdomínio simples, onde serão calculadas as integrais localmente. Defina o triângulo cujos vértices são $(1, 0)$, $(0, 1)$ e $(0, 0)$ como sendo de referência (\hat{k}) . Dessa forma, as funções φ' s restritas a esse elemento de referência serão:

$$\varphi_{\hat{1}}(\xi, \eta) = \xi; \quad (21)$$

$$\varphi_{\hat{2}}(\xi, \eta) = \eta; \quad (22)$$

$$\varphi_{\hat{3}}(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta. \quad (23)$$

A técnica usada na implementação do método de elementos finitos requer que se defina uma transformação afim $T_e : \hat{k} \rightarrow k_e$ que relacione o elemento referência \hat{k} a um elemento genérico k_e . Ou seja, da forma como foram definidos (21), (22) e (23), T_e deve transformar:

$$(1, 0) \rightarrow (x_1, y_1);$$

$$(0, 1) \rightarrow (x_2, y_2);$$

$$(0, 0) \rightarrow (x_3, y_3).$$

Assim, é possível definir a seguinte transformação linear:

$$T_e(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} x_1 - x_3 & x_2 - x_3 \\ y_1 - y_3 & y_2 - y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} \quad (24)$$

que equivale à

$$x(\xi, \eta) = x_3 + (x_1 - x_3)\xi + (x_2 - x_3)\eta \text{ e}$$

$$y(\xi, \eta) = y_3 + (y_1 - y_3)\xi + (y_2 - y_3)\eta$$

e cuja matriz Jacobiana é dada por

$$JT_e(\xi, \eta) = \begin{pmatrix} x_1 - x_3 & x_2 - x_3 \\ y_1 - y_3 & y_2 - y_3 \end{pmatrix}.$$

Sabendo que $\varphi_{\hat{i}}(\xi, \eta) = \varphi_i(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$, as derivadas das funções globais em termos das derivadas locais serão dadas por:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi_{\hat{i}}}{\partial \xi} &= \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} (x_1 - x_3) + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} (y_1 - y_3) \text{ e} \\ \frac{\partial \varphi_{\hat{i}}}{\partial \eta} &= \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} (x_2 - x_3) + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} (y_2 - y_3). \end{aligned}$$

Matricialmente, tem-se:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_{\hat{i}}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \varphi_{\hat{i}}}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_3 & y_1 - y_3 \\ x_2 - x_3 & y_2 - y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \end{pmatrix} = (JT_e)^T \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Chamando $T = ((JT_e)^T)^{-1}$, tem-se:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \\ \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_{\hat{i}}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \varphi_{\hat{i}}}{\partial \eta} \end{pmatrix}.$$

Usando essa relação, é possível escrever:

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_{\hat{i}}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \varphi_{\hat{i}}}{\partial \eta} \end{pmatrix} = T(1, :) \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_{\hat{i}}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \varphi_{\hat{i}}}{\partial \eta} \end{pmatrix}$$

e

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial y} = \begin{pmatrix} T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_{\hat{i}}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \varphi_{\hat{i}}}{\partial \eta} \end{pmatrix} = T(2, :) \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_{\hat{i}}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \varphi_{\hat{i}}}{\partial \eta} \end{pmatrix}$$

sendo $T(1, :)$ e $T(2, :)$ a primeira e a segunda linha de T , respectivamente.

De posse das derivadas das funções de base globais escritas como uma combinação linear das funções de base local, é possível escrever as integrais sobre os elementos globais em função das integrais sobre o elemento de referência. Os cálculos estão divididos em casos.

Primeiro caso:

$$\begin{aligned} (\varphi_j, \varphi_i)_{k_e} &= \iint_{k_e} \varphi_j \varphi_i dy dx = \iint_{\hat{k}} \varphi_{\hat{j}} \varphi_{\hat{i}} |\det JT_e| d\eta d\xi = |\det JT_e| \iint_{\hat{k}} \varphi_{\hat{j}} \varphi_{\hat{i}} d\eta d\xi = \\ &= |\det JT_e| (\varphi_{\hat{j}}, \varphi_{\hat{i}})_{\hat{k}}. \end{aligned}$$

Segundo caso:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right)_{k_e} &= \iint_{k_e} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} dy dx = \\ &= \iint_{\hat{k}} \left[\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_{\hat{j}}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \varphi_{\hat{j}}}{\partial \eta} \end{pmatrix} \right] \left[\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_{\hat{i}}}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \varphi_{\hat{i}}}{\partial \eta} \end{pmatrix} \right] |\det JT_e| d\eta d\xi = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= |\det JT_e| \iint_{\hat{k}} \left[(T_{11} \ T_{12}) \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_j}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \varphi_j}{\partial \eta} \end{pmatrix} \right] \left[\begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi} & \frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{11} \\ T_{12} \end{pmatrix} \right] d\eta d\xi = \\
 &= |\det JT_e| \iint_{\hat{k}} (T_{11} \ T_{12}) \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_j}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \varphi_j}{\partial \eta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi} & \frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{11} \\ T_{12} \end{pmatrix} d\eta d\xi = \\
 &= |\det JT_e| \iint_{\hat{k}} (T_{11} \ T_{12}) \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_j}{\partial \xi} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi} & \frac{\partial \varphi_j}{\partial \xi} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \varphi_j}{\partial \eta} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi} & \frac{\partial \varphi_j}{\partial \eta} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{11} \\ T_{12} \end{pmatrix} d\eta d\xi = \\
 &= |\det JT_e| (T_{11} \ T_{12}) \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial \xi}, \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi} \right)_{\hat{k}} & \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial \xi}, \frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta} \right)_{\hat{k}} \\ \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial \eta}, \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi} \right)_{\hat{k}} & \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial \eta}, \frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta} \right)_{\hat{k}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T_{11} \\ T_{12} \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Chamando $Mr = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial \xi}, \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi} \right)_{\hat{k}} & \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial \xi}, \frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta} \right)_{\hat{k}} \\ \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial \eta}, \frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi} \right)_{\hat{k}} & \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial \eta}, \frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta} \right)_{\hat{k}} \end{pmatrix}$, e repetindo o processo para $\left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \right)_{k_e}$, $\left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right)_{k_e}$ e $\left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \right)_{k_e}$ tem-se:

$$\left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right)_{k_e} = |\det JT_e| T(1, :) \cdot Mr \cdot T(1, :)';$$

$$\left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \right)_{k_e} = |\det JT_e| T(1, :) \cdot Mr \cdot T(2, :)';$$

$$\left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right)_{k_e} = |\det JT_e| T(2, :) \cdot Mr \cdot T(1, :)';$$

$$\left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \right)_{k_e} = |\det JT_e| T(2, :) \cdot Mr \cdot T(2, :)'.$$

Usando essa notação, o termo $(\nabla \varphi_j \| \nabla \varphi_i)_{k_e}$ ficará da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 (\nabla \varphi_j \| \nabla \varphi_i)_{k_e} &= \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right)_{k_e} + \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial y}, \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \right)_{k_e} = \\
 &= |\det JT_e| \cdot [T(1, :) \cdot Mr \cdot T(1, :)' + T(2, :) \cdot Mr \cdot T(2, :)'].
 \end{aligned}$$

Terceiro caso:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial x}, \varphi_i\right)_{k_e} &= \iint_{k_e} \frac{\partial\varphi_j}{\partial x} \varphi_i dy dx = \\
&= \iint_{\hat{k}} \left(T_{11} \frac{\partial\varphi_j}{\partial\xi} + T_{12} \frac{\partial\varphi_j}{\partial\eta}\right) \varphi_i |\det JT_e| d\eta d\xi = \\
&= |\det JT_e| \iint_{\hat{k}} \left(T_{11} \frac{\partial\varphi_j}{\partial\xi} + T_{12} \frac{\partial\varphi_j}{\partial\eta}\right) \varphi_i d\eta d\xi = \\
&= |\det JT_e| \iint_{\hat{k}} \left(T_{11} \frac{\partial\varphi_j}{\partial\xi} \varphi_i + T_{12} \frac{\partial\varphi_j}{\partial\eta} \varphi_i\right) d\eta d\xi = \\
&= |\det JT_e| \left[T_{11} \iint_{\hat{k}} \frac{\partial\varphi_j}{\partial\xi} \varphi_i d\eta d\xi + T_{12} \iint_{\hat{k}} \frac{\partial\varphi_j}{\partial\eta} \varphi_i d\eta d\xi \right] = \\
&= |\det JT_e| \left[T_{11} \left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial\xi}, \varphi_i\right)_{\hat{k}} + T_{12} \left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial\eta}, \varphi_i\right)_{\hat{k}} \right] = \\
&= |\det JT_e| \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial\xi}, \varphi_i\right)_{\hat{k}} \\ \left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial\eta}, \varphi_i\right)_{\hat{k}} \end{pmatrix} = |\det JT_e| T(1, :) \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial\xi}, \varphi_i\right)_{\hat{k}} \\ \left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial\eta}, \varphi_i\right)_{\hat{k}} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Repetindo o processo para $\left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial y}, \varphi_i\right)_{k_e}$, tem-se:

$$\left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial y}, \varphi_i\right)_{k_e} = |\det JT_e| T(2, :) \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial\xi}, \varphi_i\right)_{\hat{k}} \\ \left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial\eta}, \varphi_i\right)_{\hat{k}} \end{pmatrix}.$$

Quarto caso:

$$\begin{aligned}
\left(\varphi_j, \frac{\partial\varphi_i}{\partial x}\right)_{k_e} &= \iint_{k_e} \frac{\partial\varphi_j}{\partial x} \varphi_i dy dx = \\
&= \iint_{\hat{k}} \varphi_j \left(T_{11} \frac{\partial\varphi_i}{\partial\xi} + T_{12} \frac{\partial\varphi_i}{\partial\eta}\right) |\det JT_e| d\eta d\xi = \\
&= |\det JT_e| \iint_{\hat{k}} \left(T_{11} \frac{\partial\varphi_j}{\partial\xi} + T_{12} \frac{\partial\varphi_j}{\partial\eta}\right) \varphi_i d\eta d\xi = \\
&= |\det JT_e| \iint_{\hat{k}} \left(T_{11} \frac{\partial\varphi_j}{\partial\xi} \varphi_i + T_{12} \frac{\partial\varphi_j}{\partial\eta} \varphi_i\right) d\eta d\xi = \\
&= |\det JT_e| \left[T_{11} \iint_{\hat{k}} \frac{\partial\varphi_j}{\partial\xi} \varphi_i d\eta d\xi + T_{12} \iint_{\hat{k}} \frac{\partial\varphi_j}{\partial\eta} \varphi_i d\eta d\xi \right] = \\
&= |\det JT_e| \left[T_{11} \left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial\xi}, \varphi_i\right)_{\hat{k}} + T_{12} \left(\frac{\partial\varphi_j}{\partial\eta}, \varphi_i\right)_{\hat{k}} \right] =
\end{aligned}$$

$$= |\det JT_e| \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial \xi}, \varphi_i \right)_{\hat{k}} \\ \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial \eta}, \varphi_i \right)_{\hat{k}} \end{pmatrix} = |\det JT_e| T(1, :) \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial \xi}, \varphi_i \right)_{\hat{k}} \\ \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial \eta}, \varphi_i \right)_{\hat{k}} \end{pmatrix}.$$

Repetindo o processo para $\left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial y}, \varphi_i \right)_{k_e}$, tem-se:

$$\left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial y}, \varphi_i \right)_{k_e} = |\det JT_e| T(2, :) \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial \xi}, \varphi_i \right)_{\hat{k}} \\ \left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial \eta}, \varphi_i \right)_{\hat{k}} \end{pmatrix}.$$

Tratando das integrais sobre os elementos de fronteira (segmentos de retas), será usada a mesma notação usada nos triângulos, observando que se trata de dimensão diferente. As φ 's sobre o elemento de referência \hat{k} são:

$$\varphi_{\hat{1}}(\xi) = 1 - \xi; \quad (25)$$

$$\varphi_{\hat{2}}(\xi) = \xi. \quad (26)$$

A transformação afim $T_e : \hat{k} \rightarrow k_e$ que relaciona um elemento referência \hat{k} a um elemento genérico k_e , ou seja, que relaciona

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow (x_1, y_1) \text{ e} \\ 1 &\rightarrow (x_2, y_2), \end{aligned}$$

é definida por:

$$T_e(\xi) = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} \xi + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

que é equivalente a

$$\begin{aligned} x(\xi) &= x_1 + (x_2 - x_1)\xi; \\ y(\xi) &= y_1 + (y_2 - y_1)\xi. \end{aligned}$$

Assim, tem-se $\varphi_{\hat{i}}(\xi) = (\varphi_i(x(\xi), y(\xi)))$ e:

$$\frac{\partial T_e}{\partial \xi} = \frac{\partial x}{\partial \xi} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \vec{j} = (x_2 - x_1) \vec{i} + (y_2 - y_1) \vec{j}.$$

Sobre a fronteira, serão dois casos.

Primeiro caso:

$$(\varphi_j, \varphi_i)_{k_e} = \int_{k_e} \varphi_j \varphi_i dx = \int_{\hat{k}} \varphi_{\hat{j}}(\xi) \varphi_{\hat{i}}(\xi) \left\| \frac{\partial T_e}{\partial \xi} \right\| d\xi = \left\| \frac{\partial T_e}{\partial \xi} \right\| \int_{\hat{k}} \varphi_{\hat{j}} \varphi_{\hat{i}} d\xi = \left\| \frac{\partial T_e}{\partial \xi} \right\| (\varphi_{\hat{j}}, \varphi_{\hat{i}})_{\hat{k}}.$$

Segundo caso:

$$(1, \varphi_i)_{k_e} = \int_{k_e} \varphi_i dx = \int_{\hat{k}} \varphi_{\hat{i}}(\xi) \left\| \frac{\partial T_e}{\partial \xi} \right\| d\xi = \left\| \frac{\partial T_e}{\partial \xi} \right\| \int_{\hat{k}} \varphi_{\hat{i}} d\xi = \left\| \frac{\partial T_e}{\partial \xi} \right\| (1, \varphi_{\hat{i}})_{\hat{k}}.$$

Esses são todos os produtos internos que serão usados para a determinação dos elementos das matrizes M , W , H e N . É possível notar que esses produtos internos sobre os elementos e elementos de fronteira são combinações de integrais sobre o elemento de referência (triângulo e segmento de reta de referência). Essas integrais sobre os elementos de referência serão calculadas e seus resultados serão armazenados em matrizes, as chamadas Submatrizes de Rigidez.

Substituindo $\varphi_{\hat{i}}$ e $\varphi_{\hat{j}}$ por (21), (22) e (23) nas integrais a serem calculadas, e considerando todas as combinações entre as funções, tem-se:

$$\begin{aligned} \left((\varphi_{\hat{i}}, \varphi_{\hat{j}})_{\hat{k}} \right)_{\hat{i}\hat{j}} &= \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ 1-\xi-\eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi & \eta & 1-\xi-\eta \end{pmatrix} d\eta d\xi = \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \begin{pmatrix} \xi^2 & \xi\eta & -\xi(\xi+\eta-1) \\ \xi\eta & \eta^2 & -\eta(\xi+\eta-1) \\ -\xi(\xi+\eta-1) & -\eta(\xi+\eta-1) & (\xi+\eta-1)^2 \end{pmatrix} d\eta d\xi = \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{12} & \frac{1}{24} & \frac{1}{24} \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{12} & \frac{1}{24} \\ \frac{1}{24} & \frac{1}{24} & \frac{1}{12} \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\left(\frac{\partial \varphi_{\hat{i}}}{\partial \xi}, \frac{\partial \varphi_{\hat{j}}}{\partial \xi} \right)_{\hat{k}} \right)_{\hat{i}\hat{j}} &= \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ 1-\xi-\eta \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \begin{pmatrix} \xi & \eta & 1-\xi-\eta \end{pmatrix} d\eta d\xi = \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} d\eta d\xi = \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} d\eta d\xi = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta}, \frac{\partial \varphi_j}{\partial \xi} \right)_{\widehat{k}} \right)_{\widehat{ij}} &= \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ 1-\xi-\eta \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \begin{pmatrix} \xi & \eta & 1-\xi-\eta \end{pmatrix} d\eta d\xi = \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} d\eta d\xi = \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} d\eta d\xi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial \xi}, \frac{\partial \varphi_j}{\partial \eta} \right)_{\widehat{k}} \right)_{\widehat{ij}} &= \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ 1-\xi-\eta \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \eta} \begin{pmatrix} \xi & \eta & 1-\xi-\eta \end{pmatrix} d\eta d\xi = \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} d\eta d\xi = \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} d\eta d\xi = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta}, \frac{\partial \varphi_j}{\partial \eta} \right)_{\widehat{k}} \right)_{\widehat{ij}} &= \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \frac{\partial}{\partial \eta} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ 1-\xi-\eta \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \eta} \begin{pmatrix} \xi & \eta & 1-\xi-\eta \end{pmatrix} d\eta d\xi = \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} d\eta d\xi = \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} d\eta d\xi = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\left(\varphi_i, \frac{\partial \varphi_j}{\partial \xi} \right)_{\widehat{k}} \right)_{\widehat{ij}} &= \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ 1-\xi-\eta \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \begin{pmatrix} \xi & \eta & 1-\xi-\eta \end{pmatrix} d\eta d\xi = \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ 1-\xi-\eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} d\eta d\xi =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \begin{pmatrix} \xi & 0 & -\xi \\ \eta & 0 & -\eta \\ 1-\eta-\xi & 0 & \xi+\eta-1 \end{pmatrix} d\eta d\xi = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}; \\
\left(\left(\varphi_{\hat{i}}, \frac{\partial \varphi_{\hat{j}}}{\partial \eta} \right)_{\hat{k}} \right)_{\hat{i}\hat{j}} &= \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ 1-\xi-\eta \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \eta} \begin{pmatrix} \xi & \eta & 1-\xi-\eta \end{pmatrix} d\eta d\xi = \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ 1-\xi-\eta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} d\eta d\xi = \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-\xi} \begin{pmatrix} 0 & \xi & -\xi \\ 0 & \eta & -\eta \\ 0 & 1-\eta-\xi & \xi+\eta-1 \end{pmatrix} d\eta d\xi = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Para o caso dos elementos de fronteira, substituindo $\varphi_{\hat{i}}$ e $\varphi_{\hat{j}}$ por (25), e (26) nas integrais a serem calculadas, e considerando todas as combinações entre as funções, tem-se:

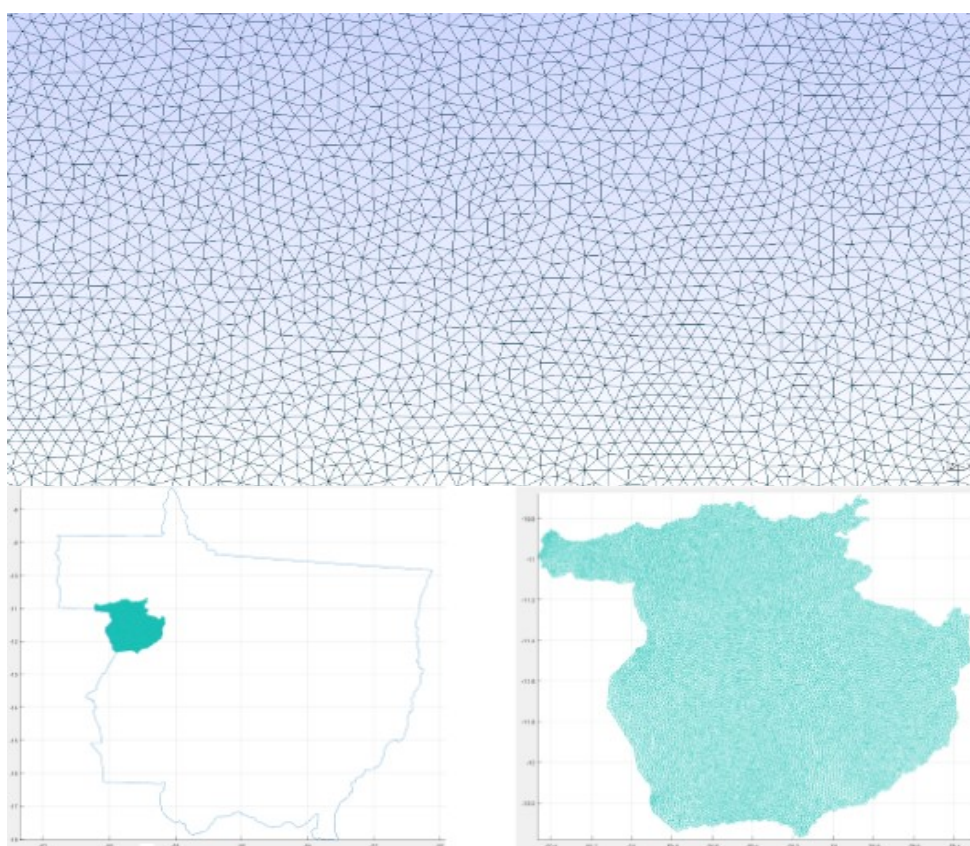
$$\begin{aligned}
\left((\varphi_{\hat{i}}, \varphi_{\hat{j}})_{\hat{k}} \right)_{\hat{i}\hat{j}} &= \int_0^1 \begin{pmatrix} 1-\xi \\ \xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-\xi & \xi \end{pmatrix} d\xi = \int_0^1 \begin{pmatrix} (\xi-1)^2 & -\xi(\xi-1) \\ -\xi(\xi-1) & \xi^2 \end{pmatrix} d\xi = \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix};
\end{aligned}$$

$$\left((1, \varphi_{\hat{j}})_{\hat{k}} \right)_{\hat{i}\hat{j}} = \int_0^1 1 \begin{pmatrix} 1-\xi \\ \xi \end{pmatrix} d\xi = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Assim, na montagem das matrizes M , W , H e N , cada elemento corresponde a combinações de produtos internos entre as funções base e/ou suas derivadas. Essas matrizes são simétricas, e os seus tamanhos são determinados pelo número de nós da malha de elementos finitos.

A construção da malha usada na pesquisa, que pode ser observada na Figura 2, foi desenvolvida com o software livre Gmsh, a partir de dados disponibilizados pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE). O domínio escolhido para a EDA foi o território limitado pelo estado do Mato Grosso. São 5.417.224 triângulos e 2.712.315 nós, sendo 7.404 nós de fronteira e 2.704.911 nós internos.

Figura 2 – Recorte da malha



Fonte: Elaboração da própria autora.

4 MODELAGEM DA DINÂMICA ESPAÇO-TEMPORAL DA FERRUGEM ASIÁTICA DA SOJA

O objetivo desta pesquisa foi modelar o desenvolvimento temporal e espacial da Ferrugem Asiática da Soja em uma determinada região. Para tanto, desenvolveu-se um sistema *fuzzy* que relaciona condições ambientais favoráveis para o progresso da doença (favorabilidade), concentração do fungo *Phakopsora pachyrhizi* (esporos) e existência de plantas hospedeiras (soja).

A Lógica *Fuzzy* pode ser vista como uma das ferramentas matemáticas mais eficazes para lidar com o problema da ignorância e da subjetividade, imprecisões e verdades parciais, viabilizando o *manuseio* de problemas do mundo real, muitas vezes com soluções de baixo custo (MISSIO, 2008). Sendo assim, para podenrar quão são favoráveis as condições climáticas para que a doença se desenvolva, utilizou-se o Sistema *Fuzzy* (SF) desenvolvido por Alves *et al.* (2011).

Para estimar a concentração do patógeno, construiu-se uma Equação de Difusão-Advecção (EDA) capaz de modelar a sua dispersão. A EDA é amplamente utilizada para modelar os mais variados fenômenos. Dessa forma, é demasiadamente conhecida no meio científico.

Para a presença de plantas hospedeiras, são consideradas regiões produtoras de soja e seu entorno. Além disso, também consideram-se localidades próximas a rodovias, visto que as plantas de soja guaxa que se multiplicam ao longo das estradas também favorecem a conservação do fungo.

O ideal seria desenvolver o modelo integrando os principais estados produtores de soja, reproduzindo o *caminho* que os esporos do fungo percorrem por essas regiões. Entretanto, uma pesquisa assim vai além do escopo/magnitude de uma tese de doutorado. Por isso, decidiu-se por desenvolvê-la em um estado. A região escolhida foi o território limitado pelo estado de Mato Grosso, na região Centro-Oeste do Brasil. É o maior produtor de soja do país. Na safra 2020/2021 foi responsável por produzir sozinho, 26,5% de toda a soja brasileira, que corresponde a pouco menos que 36 milhões de toneladas (COMPANHIA NACIONAL DE ABASTECIMENTO - CONAB, 2021).

Dessa forma, foram construídos, mapas da favorabilidade, da concentração de esporos do fungo e da presença de plantas hospedeiras. Neste capítulo, será apresentado o desenvolvimento desses mapas, bem como o desenvolvimento do SF. Além disso, um fluxograma será exposto, para que a pesquisa possa ser compreendida como um todo.

4.1 CONSTRUÇÃO DOS MAPAS

Os mapas constituem os valores para as variáveis de entrada do SF que estimam a chance de uma região ser acometida pela ferrugem asiática da soja. A essa estimativa será dada o nome de *ocorrência* fuzzy. Para os registros de *ocorrências reais* foram usados os disponibilizados pelo Consórcio Antiferrugem, entre as safras 2015/2016 e 2019/2020.

Na construção do mapa que indica condições ambientais favoráveis ao progresso da doença, foram considerados os dados entre final de 2018 e final de 2019 do Instituto Nacional de Meteorologia (INMET). Tratam-se de coletas realizadas pelas estações meteorológicas de superfície automática, localizadas no estado e em regiões vizinhas. Procedeu-se da mesma forma em relação à construção do campo vetorial que constituiu a EDA para o mapa da concentração de esporos. No ambiente MATLAB[®] foram tratados os dados de entrada, a geração dos valores de todos os mapas, bem como das suas imagens.

Foram construídos sobre a malha apresentada no capítulo anterior. Assim, foi possível atribuir a cada ponto da malha, valor de proximidade com *hospedeiros*, de *concentração* de esporos e de *favorabilidade* do ambiente.

4.1.1 Mapa de favorabilidade da FAS para o estado de Mato Grosso

Mapas de favorabilidade da FAS vêm sendo construídos há alguns anos para estados produtores de soja. Em sua pesquisa, Silva e Rommel (2005) relataram a geração de mapas mensais e semanais de favorabilidade para o estado do Paraná. Os dados eram obtidos a partir de informações de estações meteorológicas. Os mapas faziam parte da base do sistema de aviso de epidemia para a doença, desenvolvido pela Fundação ABC com apoio de universidades, institutos e empresas do ramo agrícola.

O desenvolvimento do mapa de Favorabilidade da FAS para o estado de Mato Grosso baseou-se na figura criada por Alves *et al.* (2011), que apresenta as áreas favoráveis ao desenvolvimento da ferrugem da soja em Minas Gerais. Os autores as estimaram por meio de um SF, que foi alimentado com observações da temperatura média mensal de Janeiro em 39 estações meteorológicas do INMET, para o período de 1961 até 1990, e com período de molhamento foliar fixado em 12 horas, usando altitude, latitude e longitude como covariáveis.

Dessa forma, dados disponíveis para o estado de Mato Grosso foram levantados e tratados para serem utilizados no SF. Em seguida, os valores obtidos foram interpolados, possibilitando a construção do mapa. Todo esse desenvolvimento, bem como uma explanação a respeito da pesquisa de Alves *et al.* (2011), serão apresentados com maiores detalhes nos próximos tópicos.

Tabela 1 – Comparação entre RNL e SF

Método	AACPI observada			AACPS observada		
	Conquista	Savana	Suprema	Conquista	Savana	Suprema
RNL	0.8962*	0.85583*	0.91599*	0.81441*	0.8497*	0.89295*
FLS	0.92195*	0.8603*	0.93697*	0.81548*	0.85303*	0.7958*

*1% significância

Fonte: (ALVES *et al.*, 2011).

4.1.1.1 Sistema de lógica fuzzy para descrever o processo monocíclico da ferrugem asiática da soja (ALVES *et al.*, 2011)

Motivados pela ocorrência sazonal da FAS, pela existência de especialistas e literatura na área, pela importância da cultura e pela facilidade em adquirir informações, Alves *et al.* (2011) estudaram o efeito do binômio temperatura-molhamento foliar no desenvolvimento da doença. O experimento foi desenvolvido para as cultivares de soja Conquista, Savana e Suprema.

A princípio, foi desenvolvido um experimento sob condições controladas para a validação do sistema, que consistiu em combinar 4 temperaturas (15°C, 20°C, 25°C e 30°C) com 5 períodos de molhamento foliar (0, 6, 12, 18 e 24 horas). Assim, os dados de intensidade da doença foram levantados e, com eles, a área abaixo da curva de progresso da incidência da doença (AACPI) e da severidade (AACPS) foram calculadas para todas as combinações temperatura-molhamento foliar, nas 3 cultivares de soja. A partir desses valores, as variáveis significativas no teste F foram submetidas à análise de regressão não linear para a obtenção de uma equação que representou os efeitos da interação da temperatura com duração do molhamento foliar sobre a intensidade da ferrugem. A intenção foi a de comparar os resultados dessas equações com os do SF. Por isso, a variável dependente desse sistema foi denominada de área abaixo da curva de progresso da doença (AACPD) e de intensidade da doença, já que nesse caso, foram considerados tanto resultados de AACPI quanto de AACPS no desenvolvimento do SF.

Assim, o conjunto de 20 estimativas (combinação de 4 temperaturas por 5 períodos de molhamento foliar) obtidas pelo SF foi comparado com os 3 conjuntos (um para cada cultivar) de valores calculados de AACPI a partir dos dados observados pelo experimento, e com os outros 3 conjuntos de valores, calculados da mesma forma, de AACPS. Também os 6 conjuntos de estimativas obtidas a partir das regressões não lineares foram comparados com os conjuntos de valores calculados. Como resultado dessas comparações, os autores constataram que, com exceção da AACPS da cultivar Suprema, houve maior correlação dos dados observados com as estimativas do SF do que com os modelos de regressão não linear (RNL), como pode ser observado na Tabela 1.

Passada a fase de validação, o SF foi implementado com o uso de Sistema de Informações Geográficas e Geostatística. Os dados de temperatura, utilizados para alimentá-lo,

basearam-se em observações de temperatura mensal média de 39 estações climatológicas do INMET, referentes às Normais Climatológicas (1961-1990) do mês de janeiro. Quanto ao molhamento foliar, fixou-se 12 horas em todas as estações consideradas.

Como existem poucas estações climatológicas disponíveis em Minas Gerais, os autores optaram por utilizar a cokrigagem como técnica de interpolação. Trata-se de um modelo geoestatístico que leva em consideração, além da variação espacial, uma variável independente para estimar o valor de interesse num determinado local (ANDRIOTTI, 2003). Assim, adicionaram-se os valores de altitude, latitude e longitude, referentes às estações do INMET, à malha regular no interior do estado, por entenderem que essas variáveis influenciam na variação da temperatura, bem como na ocorrência de doenças. Em seguida, aplicaram a cokrigagem para espacializar o progresso potencial da doença com base nessas variáveis. E assim foi possível construir o *Mapa da Favorabilidade da FAS* para o estado de Minas Gerais, estimada por SF, correspondente ao período de 1961 a 1990.

4.1.1.2 Construção do mapa de favorabilidade

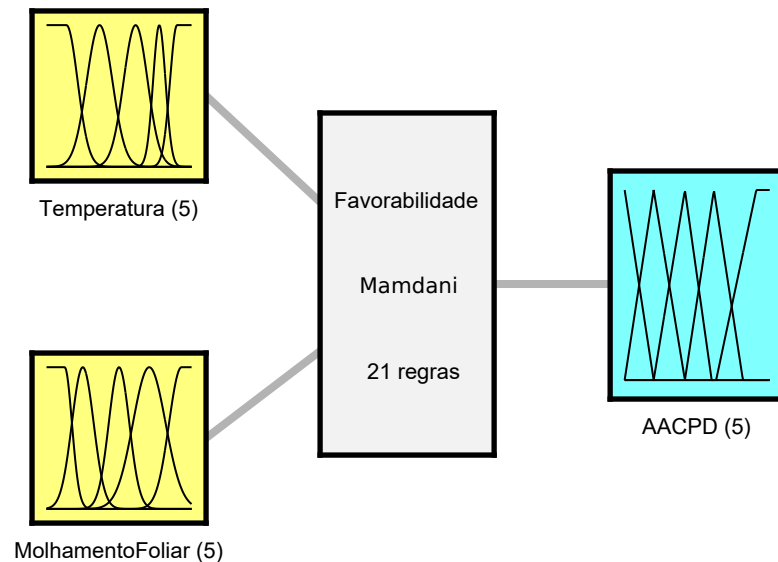
Com base no que foi apresentado anteriormente, é possível afirmar que Alves *et al.* (2011) construíram e validaram um SF capaz de contribuir para o entendimento da FAS. Esse controlador tem potencial para indicar, a partir de dados de temperatura e molhamento foliar, quais áreas apresentam condições favoráveis ao progresso da doença. Sendo assim, para a construção do mapa da região de estudo foi necessário, antes de mais nada, reproduzir o SF em questão.

Os parâmetros dos conjuntos *fuzzy* para temperatura, molhamento foliar e área abaixo da curva de progresso da doença (AACPD) foram estimados, já que não foram especificados na pesquisa. A base de regras, entretanto, foi reproduzida fielmente. As Figuras 3 e 4 mostram o sistema *fuzzy* e o gráfico gerado.

Quanto aos dados para alimentar o SF, foram utilizados registros de 50 estações meteorológicas de superfície automática do INMET, localizadas no estado e em regiões vizinhas. Os dados são disponibilizados de hora em hora, para os últimos 365 dias. Por causa dessa limitação, foram considerados os dados registrados entre 21/12/2018 e 20/12/2019.

Nas estações automáticas, para a variável de entrada *Temperatura* (°C), recomenda-se que o valor diário seja obtido a partir da média aritmética de todos os registros para o dia (PEREIRA; ANGELOCCI; SENTELHAS, 2007). Por hora, são disponibilizados dados de temperatura instantânea, máxima e mínima. Assim, todos os valores para o dia foram somados e divididos pelo número de observações. Construiu-se, então, uma matriz de 365 dias por 50 estações para essa variável.

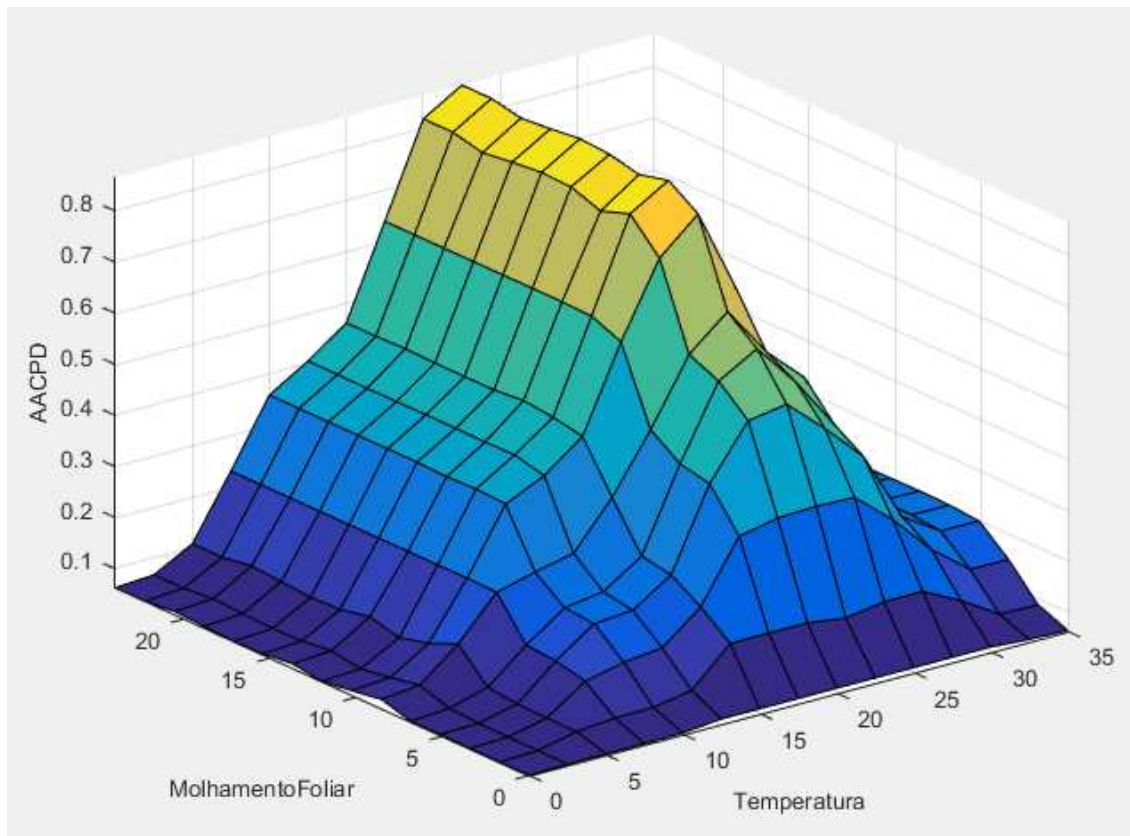
Quanto ao molhamento foliar, um método simples para a sua determinação é

Figura 3 – Esquema Ilustrativo Sistema *Fuzzy* Favorabilidade (AACPD)

Fonte: Elaboração da própria autora.

considerá-lo igual ao número de horas com umidade relativa do ar acima de um valor pre-estabelecido. Em geral, toma-se 85% (Número de Horas de Umidade Relativa – NHUR 85%), 90% (NHUR 90%) ou 95% (NHUR 95%) como valor limite (PEREIRA; ANGELOCCI; SENTELHAS, 2007). Desta forma, para a variável de entrada *Molhamento Foliar* (h), foram usados dados de *Umidade Relativa do Ar*. Para esses registros, também são disponibilizados dados instantâneos, máximos e mínimos. Assim, fez-se a média aritmética entre esses valores por hora, o que gerou até 24 dados de umidade relativa por dia por estação. Esses dados foram interpolados, gerando um valor para cada minuto do dia. O molhamento foliar foi determinado, então, pela soma dos minutos que tiveram UR 90%, convertido em horas, e armazenado numa matriz de 365 dias por 50 estações.

Como é possível observar, o tratamento dos dados de entrada do SF para a elaboração do mapa do Mato Grosso se difere do dispensado aos dados de Minas Gerais. Isso se deve ao fato de que na região desta pesquisa existem poucas estações meteorológicas convencionais, o que impossibilitou a elaboração de medidas a partir de uma série histórica. Em contrapartida, os registros feitos para todas as horas do dia nas estações automáticas permitiram a estimativa diária do molhamento foliar. Assim, não foi preciso mantê-lo constante em 12 horas, como fizeram os autores, na elaboração do mapa para Minas Gerais.

Figura 4 – Gráfico SF Favorabilidade

Fonte: Elaboração da própria autora.

Para a interpolação, foram testados os modelos *Inverse distance weighting* (IDW) e Krigagem. O IDW, ou inverso da distância, é o modelo determinístico local mais usado, e que produz resultado parecido ao da Krigagem ordinária. Quanto à Krigagem, trata-se de uma técnica geoestatística de estimativa de valores de variáveis distribuídas no espaço ou no tempo, ou em ambos, baseada em valores próximos quando considerados dependentes mutuamente pela análise variográfica (CAMARGO; FUKS; CÂMARA, 2004).

4.1.2 Mapa de concentração de esporos do fungo *Phakopsora pachyrhizi* para o estado de Mato Grosso

Para estimar a concentração de esporos do fungo *Phakopsora pachyrhizi*, causador da FAS, construiu-se uma EDA, que é composta por fonte, transporte, termo difusivo e decaimento. Tratam-se, respectivamente, de locais onde o patógeno é *produzido*, do campo vetorial que o leva de um lugar para outro do sistema, da sua própria capacidade de dispersão e da sua taxa de mortalidade.

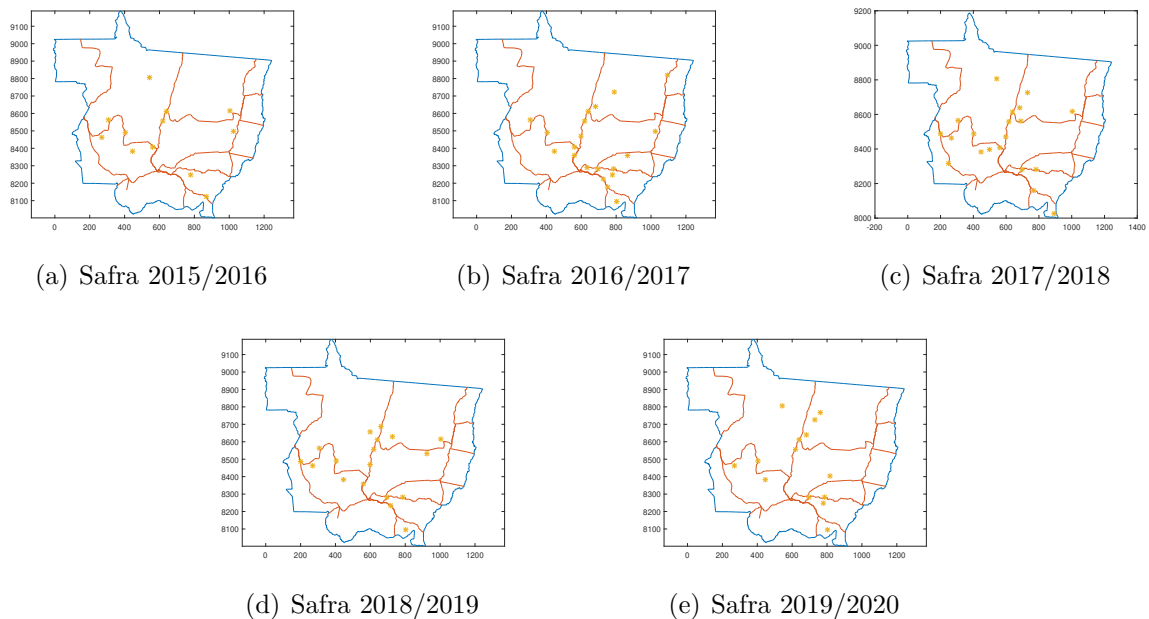
Fontes foram localizadas ao longo de todas as principais rodovias do estado. Silva *et al.* (2005) explicam que por ser um patógeno biotrófico, o agente responsável pela doença somente se multiplica e sobrevive em tecidos vivos. Dessa forma, a soja voluntária e

os hospedeiros alternativos garantem a sobrevivência do fungo, dando origem ao inóculo inicial para as próximas epidemias. Além disso, sempre que a soja é colhida e transportada, os grãos que caem ao longo das estradas germinam nas primeiras chuvas e podem ser infectadas pelo patógeno. Dessa forma, favorecem a sua sobrevivência durante a entressafra, servindo de elo entre uma safra e outra, ou de *ponte verde* (YORINORI, 2006a).

O problema das plantas guaxas (voluntárias), existentes ao lado das pistas, é mais sério em Mato Grosso, em Minas Gerais e em São Paulo, onde é grande a concentração de áreas de pivô central (YORINORI, 2006b). Os grãos que caem nas estradas do Mato Grosso, durante o escoamento da safra, têm provocado prejuízos consideráveis com a proliferação de doenças. Assim os esporos da ferrugem são difundidos pelas rodovias do centro-oeste (OLIVI; QUINTANS, 2014).

Na Figura 5, mostram-se as ocorrências da doença entre as safras de 2015/2016 e 2019/2020, e as principais rodovias do estado. É possível observar que a maioria delas são situadas próximas a essas rodovias. Isso reforça a hipótese de considerar pontos próximos às rodovias como fontes de inóculo.

Figura 5 – Ocorrências versus rodovias



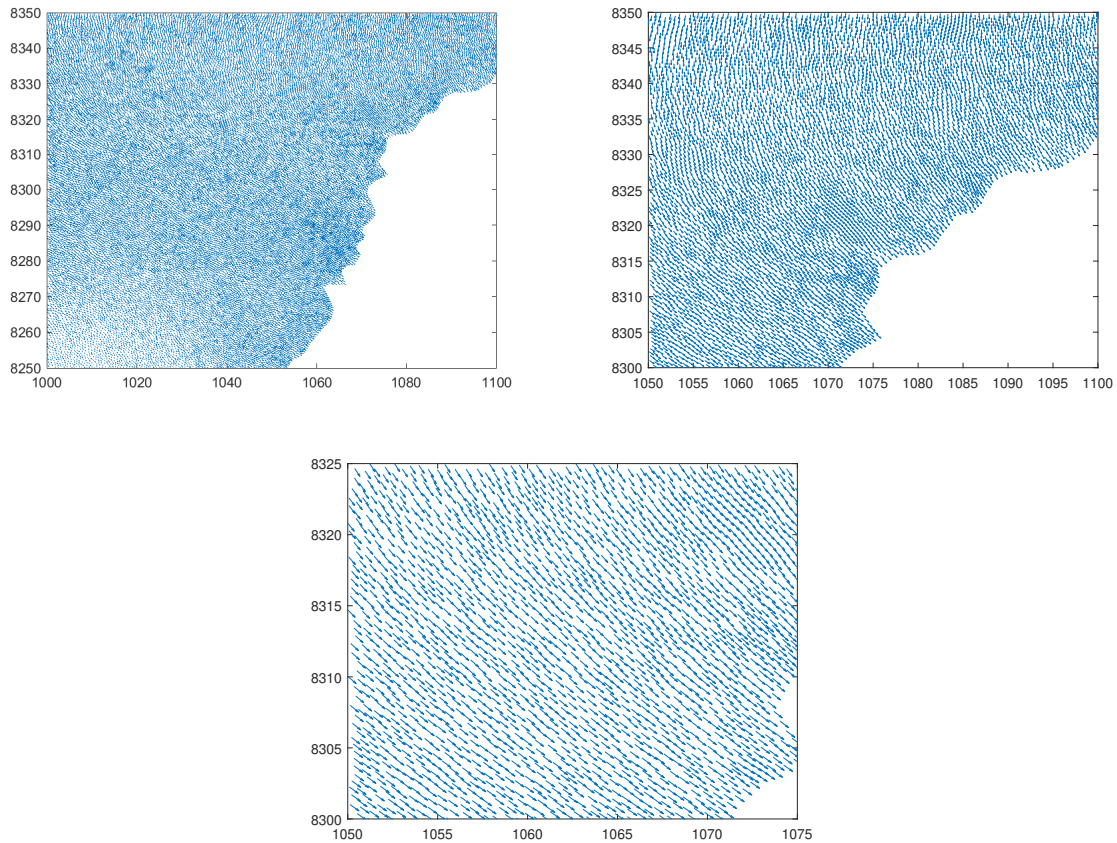
Fonte: Elaboração da própria autora.

As áreas de terra situadas à margem das rodovias estaduais são de interesse público e correspondem à faixa de recuo. São 20 m para a direita e 20 m para a esquerda, medidos a partir do eixo central da rodovia (MATO GROSSO, 2004). Por isso, aumentando ligeiramente esse limite, todo nó da malha que está distante até 50 metros de alguma rodovia principal foi usado como fonte.

O transporte foi representado pelo campo vetorial obtido a partir dos dados da velocidade e direção do vento, disponíveis nas estações automáticas do INMET. Dessa

forma, em todos os pontos da malha, para todos os dias do ano, foi possível obter um vetor correspondente. Assim, o transporte foi variável a cada dia, de elemento para elemento. A Figura 6 apresenta um recorte do campo vetorial, em três escalas diferentes.

Figura 6 – Recorte campo vetorial

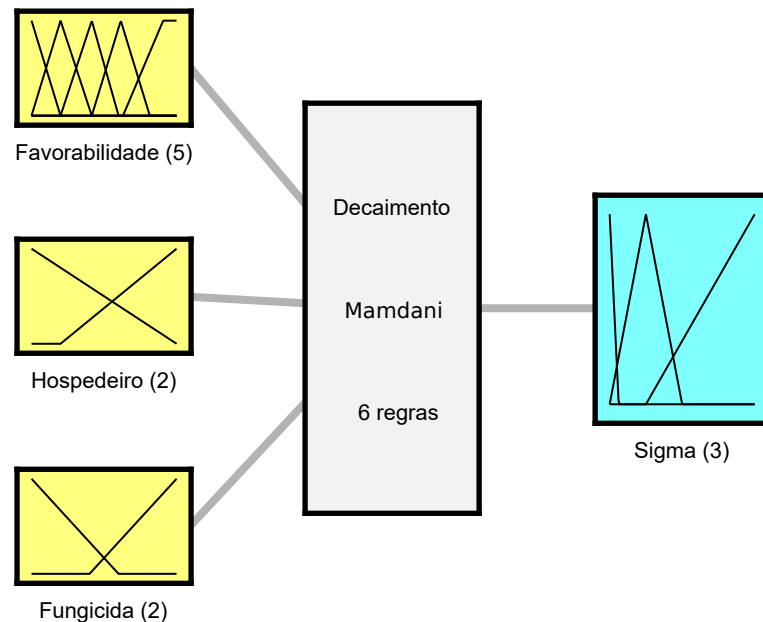


Fonte: Elaboração da própria autora.

Além disso, ao campo vetorial foram acrescentados vetores paralelos às rodovias em todos os nós da malha que estão distantes até 1 km de alguma rodovia principal. As dimensões desses vetores são proporcionais à distância que se encontram da rodovia (quanto mais próximo, maior a intensidade do vetor). Dessa forma, foi possível simular a influência da circulação de veículos sobre o campo vetorial.

O coeficiente de difusão usado foi equivalente ao parâmetro considerado no cenário três de Diniz (2003), com o tempo dado em semanas. Nessa configuração, o autor simula a dispersão de um poluente atmosférico no ar. Como o esporo do fungo *Phakopsora pachyrhizi* pode ser considerado como partícula poluente (PAN *et al.*, 2010), o dado fora usado como base.

Para o decaimento, construiu-se um SF, cujas variáveis de entrada são o mapa de *favorabilidade*, o mapa da *hospedeiros* e a aplicação de *fungicida*, como é possível observar nas Figuras 7 e 8.

Figura 7 – Sistema *Fuzzy* Decaimento

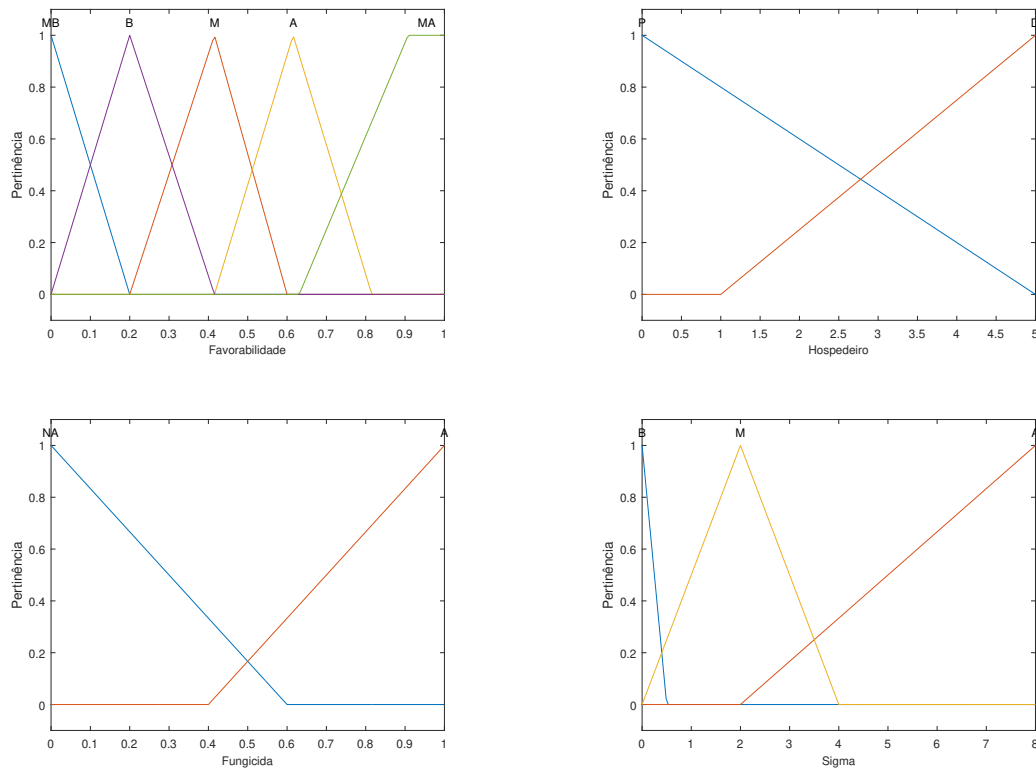
Fonte: Elaboração da própria autora.

Para que haja infecção e esporulação, é preciso que as condições ambientais sejam favoráveis. Dessa forma, *temperatura* associada ao período de *molhamento foliar*, são determinantes para a manutenção dos esporos (BONDE *et al.*, 2007; IGARASHI *et al.*, 2014). Esses dados determinam a AACPD do SF criado por Alves *et al.* (2011). Por isso, a variável favorabilidade, que é equivalente à AACPD, constitui um dos conjuntos *fuzzy* que determina o decaimento dos esporos. *MB* se refere a valores para condições favoráveis *Muito Baixas*, *Baixas* (*B*), *Médias* (*M*), *Altas* (*A*) e *Muito Altas* (*MA*).

A entrada *Hospedeiro* se refere à distância que o ponto se encontra de uma planta de soja. Quanto maior a distância às propriedades, menores são as condições que o esporo do fungo tem de se manter. São considerados entorno das propriedades produtoras os pontos que estiverem a até 5 km de distância. Serão classificados entre *Próximos* (*P*) e *Distantes* (*D*).

A variável *Fungicida* está relacionada à *aplicação* (*A*) ou *não aplicação* (*NA*) de controle químico, nas plantações ou em áreas suscetíveis a plantas guaxas. Em áreas onde o clima é extremamente favorável, ou dependendo da pressão de doença na região, as aplicações preventivas de fungicidas garantem o controle da doença (SILVA *et al.*, 2005). Além disso, a escolha do fungicida é um passo muito importante, bem como a tecnologia de aplicação empregada (ANDRADE; ANDRADE, 2006).

Figura 8 – Conjuntos *fuzzy* do SF *Decaimento*



Fonte: Elaboração da própria autora.

Tabela 2 – Base de regras *fuzzy* para o Decaimento

1	SE favorabilidade é <i>MB</i> E hospedeiros é <i>P</i> E fungicida é <i>NA</i> ENTÃO sigma é <i>M</i> .
2	SE favorabilidade é <i>B</i> E hospedeiros é <i>P</i> E fungicida é <i>NA</i> ENTÃO sigma é <i>M</i> .
3	SE favorabilidade é <i>M</i> E hospedeiros é <i>P</i> E fungicida é <i>NA</i> ENTÃO sigma é <i>B</i> .
4	SE favorabilidade é <i>A</i> E hospedeiros é <i>P</i> E fungicida é <i>NA</i> ENTÃO sigma é <i>B</i> .
5	SE favorabilidade é <i>MA</i> E hospedeiros é <i>P</i> E fungicida é <i>NA</i> ENTÃO sigma é <i>B</i> .
6	SE hospedeiro é <i>D</i> OU fungicida é <i>A</i> ENTÃO sigma é <i>A</i> .

Fonte: Elaboração da própria autora.

A variável *Sigma*, que representa o coeficiente de decaimento (σ) da EDA, recebe, portanto, influência desses três indicadores. O seu intervalo equivale aproximadamente a variação entre 0 /hora e 0.4 /hora. A base de regras que determina a relação entre essas variáveis é composta por 6 regras, como é possível observar na Tabela 2.

Para a resolução do sistema foi utilizado o método de inferência de Mamdani (MAMDANI, 1977), com a *defuzzificação* pelo Centro de Área. Como para cada dia e para cada nó existe um valor associado de favorabilidade, também existirá um para o coeficiente de decaimento. Mantendo componentes da equação variando no tempo e no espaço, buscou-se aproximar ao máximo as simulações da realidade.

4.1.3 Mapa da presença de plantas hospedeiras no estado de Mato Grosso

Este mapa temático baseou-se no mapeamento disponibilizado pela Companhia Nacional de Abastecimento (CONAB) para as culturas de verão para a safra de 2014/2015. A presença de plantas hospedeiras foi medida principalmente pela distância do ponto à uma propriedade.

Os nós da malha localizados dentro das propriedades ou a menos de 50 metros das rodovias principais, foram considerados a distância zero de hospedeiros. Pontos fora das propriedades, mas distantes até 1 km, foram considerados (em maior ou menor grau) como próximos de hospedeiros. Todos os demais nós foram considerados distantes de hospedeiros, representando a ausência de hospedeiros.

Dessa forma, foram apresentadas as bases que possibilitaram a obtenção dos dados de entrada do SF. A seguir, será explicado de que maneira os conjuntos *fuzzy* irão se relacionar para estimar a chance da doença acometer determinada região.

4.2 SISTEMA FUZZY FERRUGEM

Em muitos casos, a obtenção de resultados reais para um determinado problema dependeria de uma função a várias variáveis. Entretanto, a modelagem dessa função nem sempre é possível. Muitas vezes os pesquisadores dispõem somente do conhecimento de quais variáveis e como a relação entre elas influenciam o fenômeno estudado. Para um Sistema Baseado em Regras *Fuzzy* (SBRF) isso é suficiente.

Um SBRF, ou simplesmente Sistema *Fuzzy* (SF), ou Controlador *Fuzzy*, como o próprio nome sugere, é um sistema que envolve conjuntos *fuzzy* e um grupo de regras dadas na linguagem corrente que ao final do processo devolvem um valor numérico real. Esses conjuntos e esse grupo de regras podem ser criados a partir da experiência de especialistas.

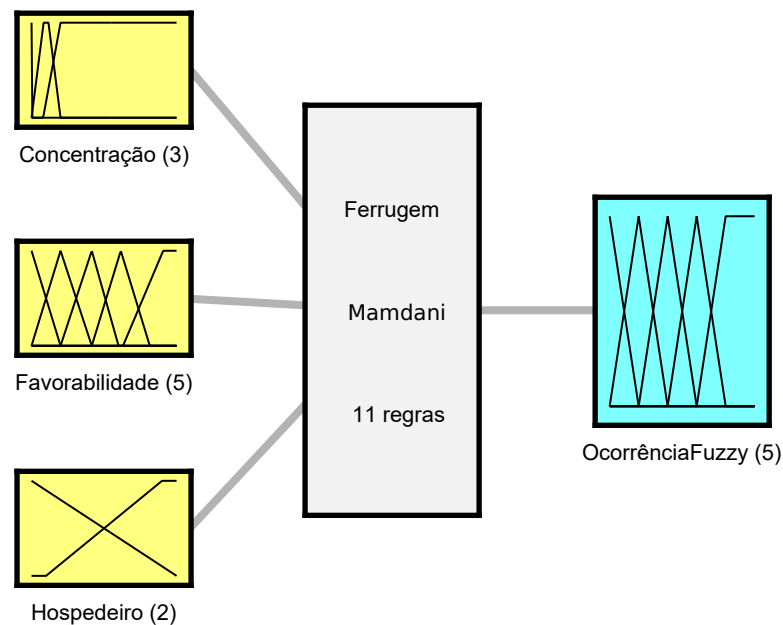
É possível citar muitas pesquisas que desenvolveram um SF com o intuito de prever determinado fenômeno. Santos (2016), em sua pesquisa, obteve o perfil de carga elétrica residencial, com o intuito de detectar os picos e os vales, e incentivar a mudança de hábitos dos consumidores no consumo de energia elétrica. O próprio SF desenvolvido por Alves *et al.* (2011), utilizado nesta pesquisa para determinar quão favoráveis são as condições ambientais para o desenvolvimento da FAS.

Além disso, pesquisadores têm usado SF para determinar coeficientes de suas equações. Em sua pesquisa, Missio (2008) estudou a dinâmica espacial e temporal da febre aftosa em bovinos. Para tanto, elaborou um modelo envolvendo equações diferenciais parciais com parâmetros de difusão e transmissão incertos, que foram estimados por meio de SF. Poletti (2009) propôs um método para o estudo da dispersão espacial e temporal de

um poluente num sistema de reservatório. Para a análise desse tipo de situação, modelou os principais fenômenos envolvidos por meio de uma EDA, que teve os coeficientes de difusão e de degradação, bem como o campo vetorial modelados por SF. Lopes e Jafelice (2005) propuseram um SF para o diagnóstico de doenças das vias aéreas superiores e inferiores, relacionando os sinais e sintomas de alguns pacientes com as doenças em questão, e modelaram a velocidade de eliminação de fármacos no organismo do indivíduo por meio de outro SF, para a sua aplicação no modelo farmacocinético clássico.

Para que a FAS ocorra, três condições são imprescindíveis: existência de planta suscetível, de patógeno virulento e de condições ambientais favoráveis (SILVA; ROMMEL, 2005). Assim, fica claro quais são as variáveis que influenciam a ocorrência da doença, mas não a função que as relaciona. Essa incerteza motivou a construção do SF. Como é possível observar na Figura 9, é composto por três variáveis de entrada (*favorabilidade, concentração e hospedeiro*) e uma variável de saída (*ocorrência fuzzy*).

Figura 9 – Sistema *Fuzzy Ferrugem*



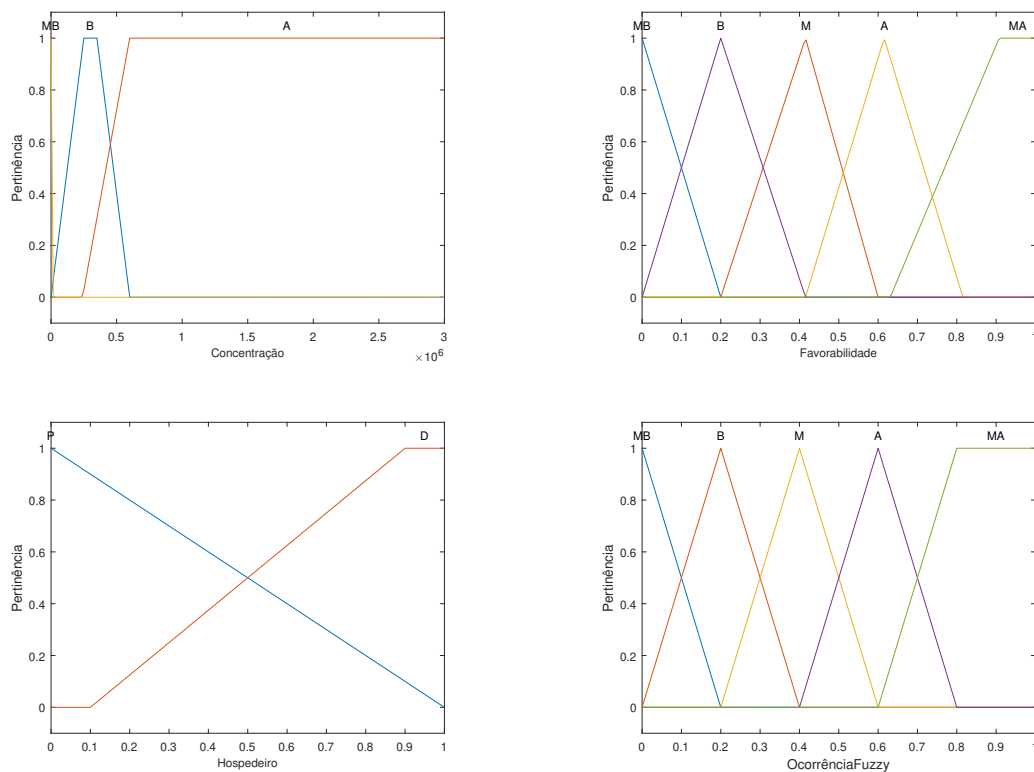
Fonte: Elaboração da própria autora.

A variável *Concentração* se refere a quantidade de esporos por km². O agente causal da FAS tem período de incubação muito curto. Além disso, sobre a planta é produzida grande quantidade de esporos por lesão, que possuem alta velocidade de dispersão (ZAMBOLIM, 2006). Por essas razões, a concentração foi dividida apenas entre *Alta (A)*, *Baixa (B)* e *Muito Baixa (MB)*.

A entrada *Hospedeiro* também se refere à distância que o ponto se encontra de uma planta de soja, como no SF criado para estimar o decaimento. Quanto maior a distância às propriedades, menores são as chances de haver planta hospedeira no local. Por isso, estabeleceu-se uma faixa de 1 km no entorno das propriedades para atribuir diferentes níveis de pertencimento aos subconjuntos *Próximo (P)* e *Distante (D)*.

Ao atingirem as folhas de soja, com pelo menos 6 horas de molhamento foliar e temperatura favorável, os esporos germinam. Se as condições são favoráveis à infecção e à colonização, os sintomas podem surgir em poucos dias (ZAMBOLIM, 2006). Por isso a *Favorabilidade*, usada no SF criado para estimar o decaimento, também foi definida como variável de entrada.

Figura 10 – Conjuntos *fuzzy* do SF *Ferrugem*



Fonte: Elaboração da própria autora.

A saída *Ocorrência* fuzzy representa a possibilidade da doença ocorrer. As funções de pertinência dessa variável são *Muito Baixa (MB)*, *Baixa (B)*, *Média (M)*, *Alta (A)* e *Muito Alta (MA)*. Quanto mais próximo de 1, maior é a chance da doença acontecer. Na Figura 10 é ilustrada a reunião dessas 4 variáveis. A base de regras que estabelece a relação entre elas, é composta por 11 regras e está descrita na Tabela 3.

Para a resolução do *Sistema Fuzzy Ferrugem (SFF)* foi utilizado o método de inferência de Mamdani com a *defuzzificação* pelo Centro de Área. Assim, para cada dia do período analisado, e para cada nó da malha, será obtido um valor de *ocorrência* fuzzy, representando o quão a região é suscetível ao desenvolvimento da doença.

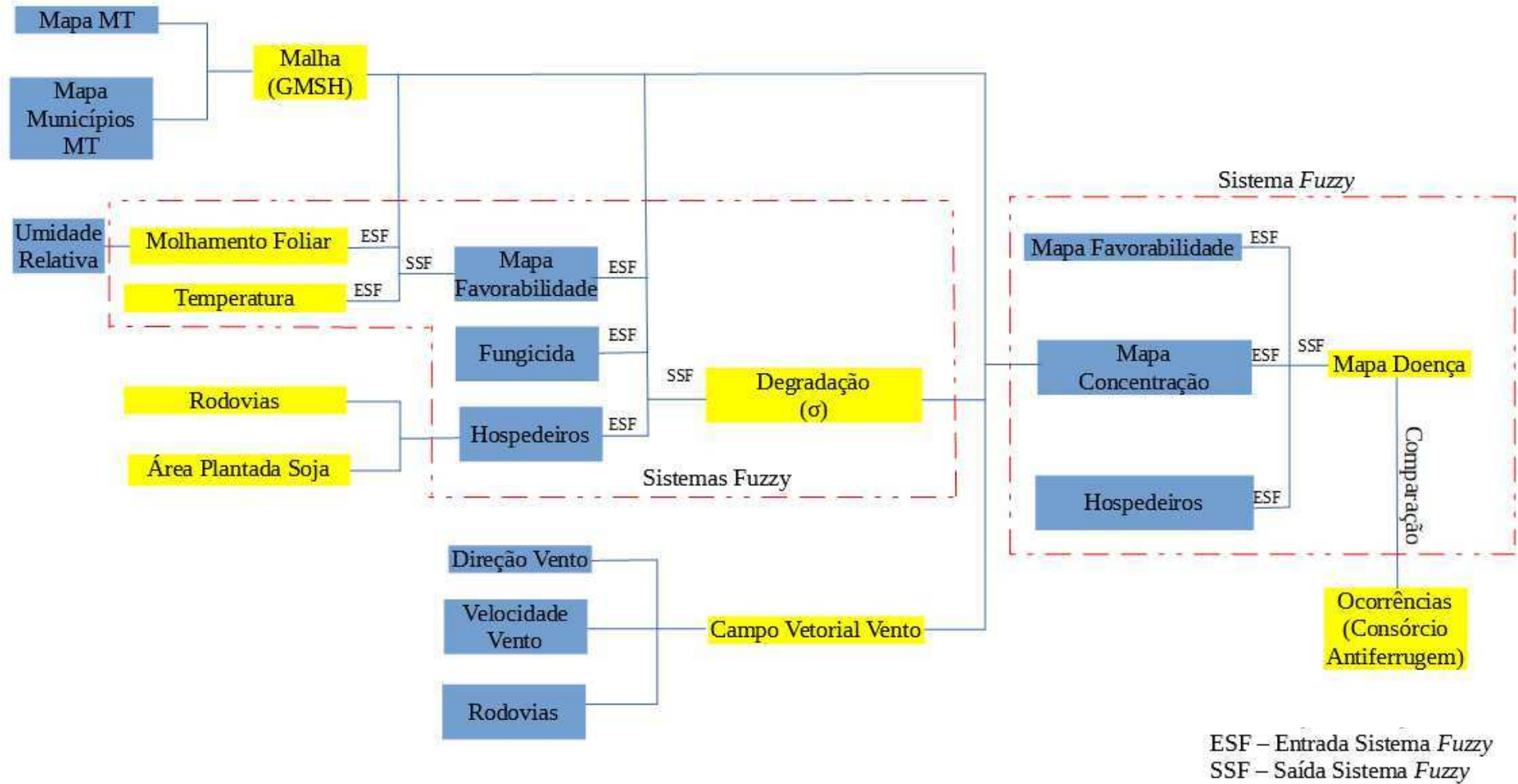
Tabela 3 – Base de regras *fuzzy* para o SFF

1	SE concentração é <i>MB</i> OU hospedeiro é <i>D</i> ENTÃO ocorrência <i>fuzzy</i> é <i>MB</i> .
2	SE concentração é <i>B</i> E favorabilidade é <i>MB</i> E hospedeiro é <i>P</i> ENTÃO ocorrência <i>fuzzy</i> é <i>MB</i> .
3	SE concentração é <i>B</i> E favorabilidade é <i>B</i> E hospedeiro é <i>P</i> ENTÃO ocorrência <i>fuzzy</i> é <i>B</i> .
4	SE concentração é <i>B</i> E favorabilidade é <i>M</i> E hospedeiro é <i>P</i> ENTÃO ocorrência <i>fuzzy</i> é <i>M</i> .
5	SE concentração é <i>B</i> E favorabilidade é <i>A</i> E hospedeiro é <i>P</i> ENTÃO ocorrência <i>fuzzy</i> é <i>A</i> .
6	SE concentração é <i>B</i> E favorabilidade é <i>MA</i> E hospedeiro é <i>P</i> ENTÃO ocorrência <i>fuzzy</i> é <i>A</i> .
7	SE concentração é <i>A</i> E favorabilidade é <i>MB</i> E hospedeiro é <i>P</i> ENTÃO ocorrência <i>fuzzy</i> é <i>B</i> .
8	SE concentração é <i>A</i> E favorabilidade é <i>B</i> E hospedeiro é <i>P</i> ENTÃO ocorrência <i>fuzzy</i> é <i>M</i> .
9	SE concentração é <i>A</i> E favorabilidade é <i>M</i> E hospedeiro é <i>P</i> ENTÃO ocorrência <i>fuzzy</i> é <i>A</i> .
10	SE concentração é <i>A</i> E favorabilidade é <i>A</i> E hospedeiro é <i>P</i> ENTÃO ocorrência <i>fuzzy</i> é <i>MA</i> .
11	SE concentração é <i>A</i> E favorabilidade é <i>MA</i> E hospedeiro é <i>P</i> ENTÃO ocorrência <i>fuzzy</i> é <i>MA</i> .

Fonte: Elaboração da própria autora.

O fluxograma a seguir apresenta de forma sistematizada todas as etapas desenvolvidas para a elaboração do modelo. Pela Figura 11 observa-se que algumas informações foram usadas em mais que um processo, como é o caso do mapa de favorabilidade, das rodovias e do mapa dos hospedeiros. Assim, utilizando de forma eficiente as informações disponíveis, foi possível construir esse modelo.

Figura 11 – Fluxograma



Fonte: Elaboração da própria autora.

5 RESULTADOS E DISCUSSÕES

A construção de um modelo para *mapear* o desenvolvimento temporal e espacial da ferrugem asiática da soja baseou-se em pesquisas das mais diversas áreas. Autores como Zambolim (2006), Krindges (2011) e Santos (2016), são exemplos de pesquisas que foram constantemente citadas, cujos contextos são diferentes entre si. Neste capítulo serão apresentados os resultados de toda essa interdisciplinaridade.

Alguns mapas de *concentração de esporos* e os mapas de *favorabilidade e hospedeiros* serão expostos. Além disso, o *Sistema Fuzzy Ferrugem* (SFF) será testado nas ocorrências registradas para a doença entre as safras de 2015/2016 e 2019/2020. Como os dados que alimentaram o modelo, de forma direta ou indireta, são de 2018/2019, essa safra é usada como referência.

5.1 MAPAS

Serviram como variáveis de entrada para o SFF mapas de *concentração de esporos*, de *favorabilidade* e *hospedeiros*. Além disso, os dois últimos também alimentaram o controlador *fuzzy* que determinou o coeficiente de *decaimento* da equação que gerou os resultados do primeiro.

Alguns parâmetros utilizados na simulação da *concentração* variaram no tempo e no espaço, como foi o caso do *transporte* e do *decaimento*. O coeficiente de *difusão* se baseou na pesquisa de Diniz (2003), e os valores atribuídos aos parâmetros *fonte* e θ , nas pesquisas de Melching, Bromfield e Kingsolver (1979) e Alves, Furtado e Bergamin Filho (2006). Os dados estão resumidos na Tabela 4.

Tabela 4 – Parâmetros utilizados na EDA

Parâmetro	Valor	Unidades
Δt	0,02	semanas
α	100,8	km ² /semana
θ	75×10^5	esporos/(km/semana)
f	135×10^6	esporos/(km ² /semana)

Fonte: Elaboração da própria autora.

Por lesão, são produzidos, no mínimo, em torno de 3 esporos nas folhas de soja (face superior e inferior) depois de 2 semanas de inoculação (MELCHING; BROMFIELD; KINGSOLVER, 1979). Cada cm² de lesão pode ter até 50 lesões (ALVES; FURTADO; BERGAMIN FILHO, 2006). Assim, cada cm² de lesão produz em torno de 75 esporos por semana.

Para o instante *zero* considerou-se o dia 31 de outubro, que é o dia da primeira ocorrência da doença registrada na safra de 2018/2019. Além disso, para as demais safras

consideradas, esses registros aconteceram a partir de novembro ou dezembro. As concentrações foram calculadas até dia 30 de abril, quando se encerra a colheita da soja para Mato Grosso, segundo Companhia Nacional de Abastecimento - CONAB (2015). Na Figura 12, é retratada a dispersão de esporos para o último dia de cada mês.

Na Figura 13, são apresentadas as concentrações de esporos para os pontos onde ocorreu a doença na safra 2018/2019. A maior concentração registrada para essas localidades foi de 1.340.409 esporos, na cidade de Lucas do Rio Verde, cujo primeiro registro de ocorrência foi em 18 de janeiro. Além disso, é possível observar que próximo às rodovias existe maior concentração de esporos. Assim, fica evidente o problema das sojas guaxas na beira das rodovias.

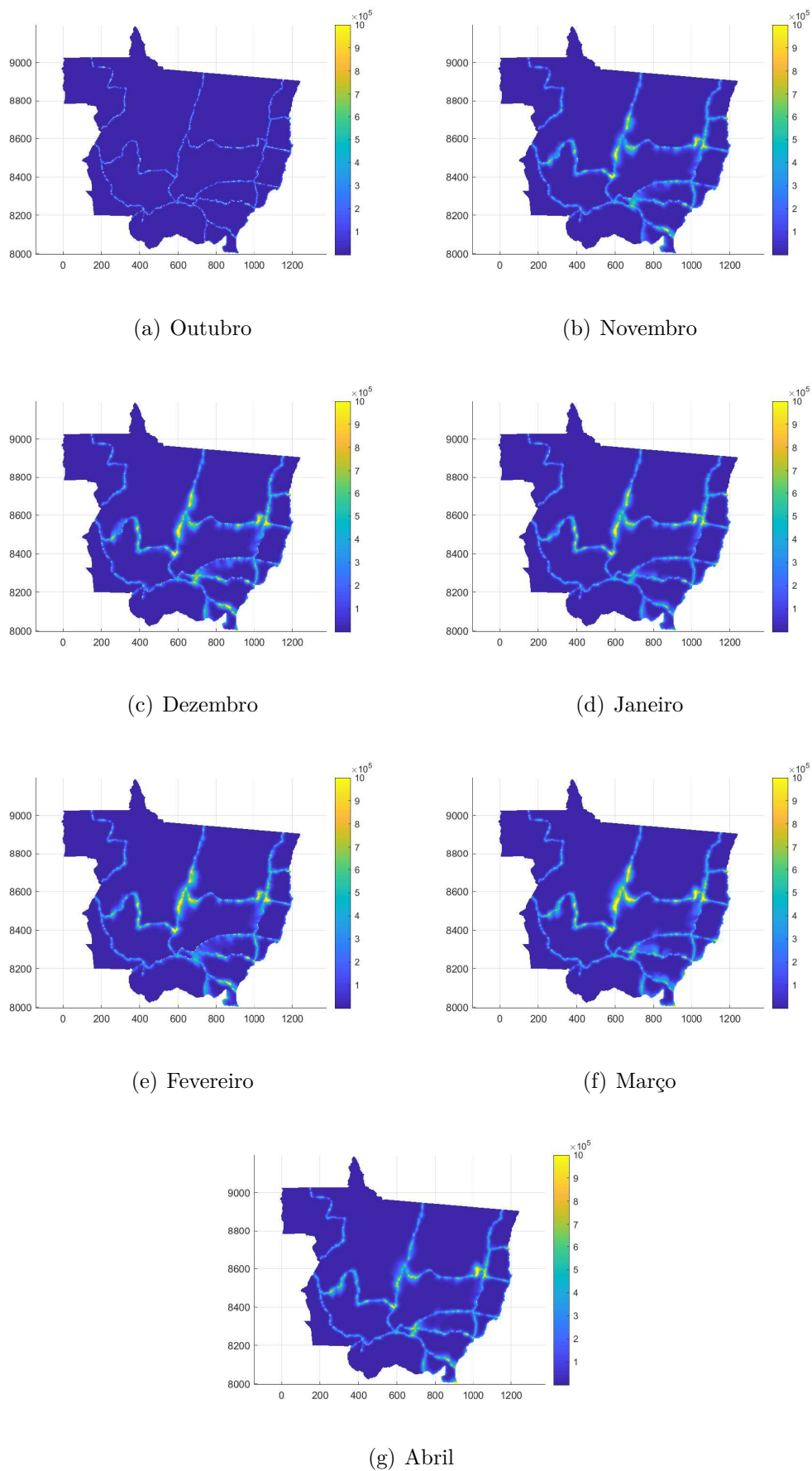
Deve-se considerar que os primeiros sinais da doença demoram entre 5 e 7 dias para surgirem (ZAMBOLIM, 2006). Além disso, pode ter havido atraso na observação dos sintomas. Dessa forma, os dados de concentração para essas localidades foram registrados para o intervalo entre o nono e o quinto dia anteriores ao registro da ocorrência, na Tabela 5.

Tabela 5 – Concentração de esporos para as localidades onde foram registradas ocorrências

Cidade	Registro	9º dia	8º dia	7º dia	6º dia	5º dia
Sapezal	13/12/2018	104535	77176	99957	143572	167451
Jaciara	18/12/2018	258741	278827	286588	271713	213765
Tangará da Serra	26/12/2018	6111	5588	6036	5339	5248
Campo Novo do Parecis	27/12/2018	85451	98989	94717	100269	86804
Querência	28/12/2018	526776	619361	697381	677027	709100
Campo Verde	28/12/2018	705336	638635	572333	537763	574251
Comodoro	03/01/2019	329817	313162	325870	263684	232012
Gaúcha do Norte	08/01/2019	311626	299473	256300	203947	185248
Ipiranga do Norte	10/01/2019	4283	4816	5553	6263	7117
Campos de Júlio	14/01/2019	208944	208391	196693	190338	188681
Sorriso	15/01/2019	691461	736802	670118	629460	612840
Lucas do Rio Verde	18/01/2019	1261478	1279944	1306017	1194618	1227913
Primavera do Leste	21/01/2019	273590	270741	365522	278794	250307
Nova Mutum	22/01/2019	524426	521278	519531	478418	476376
Feliz Natal	22/01/2019	2009	2403	2059	1722	1247
Itiquira	28/01/2019	1501	1615	1968	2013	2320
Rosário Oeste	22/02/2018	293574	283378	297023	307183	295643
Sinop	15/03/2019	264368	280852	387574	545172	586313

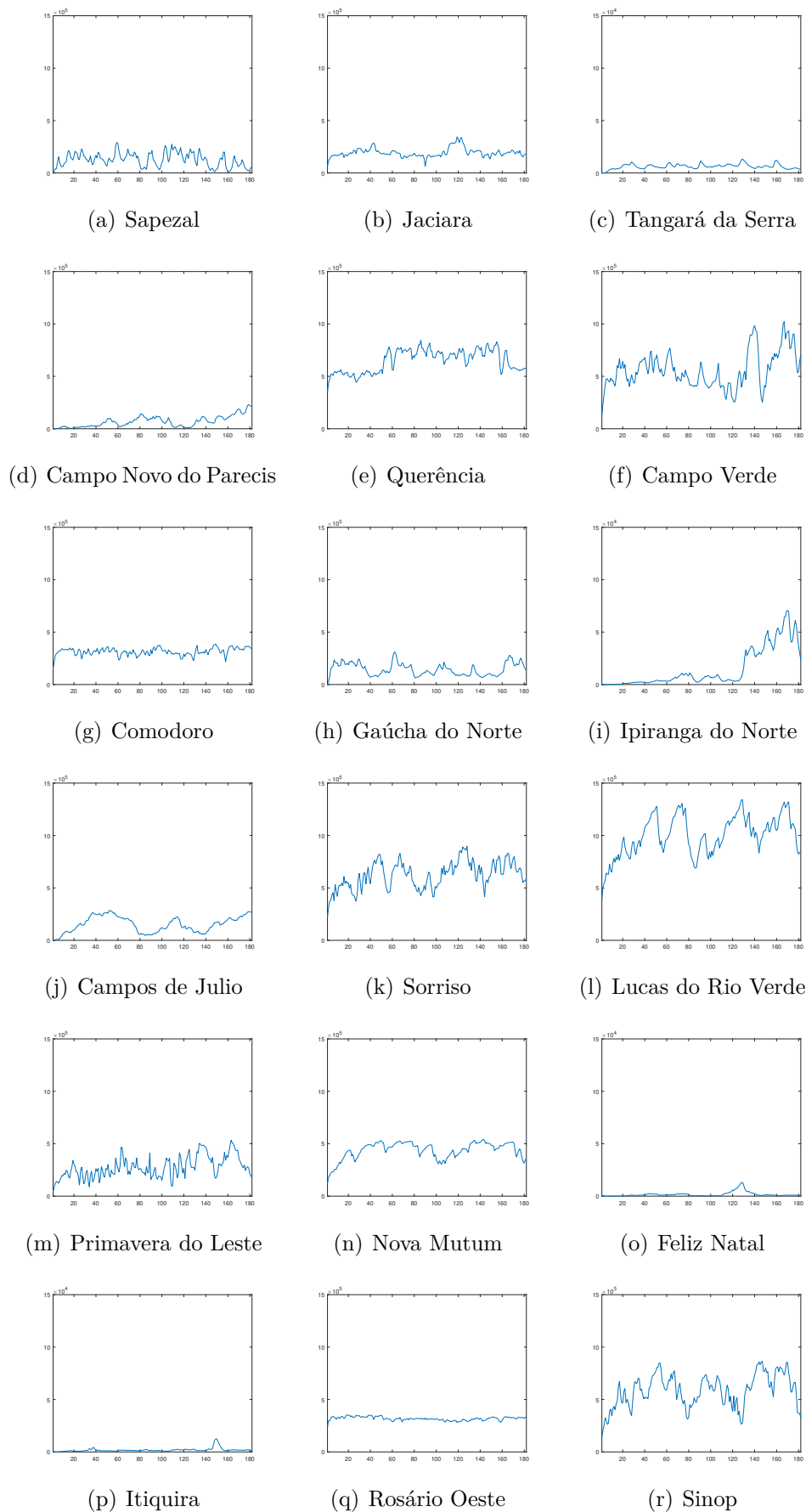
Fonte: Elaboração da própria autora.

Figura 12 – Concentrações de esporos ao longo da safra



Fonte: Elaboração da própria autora.

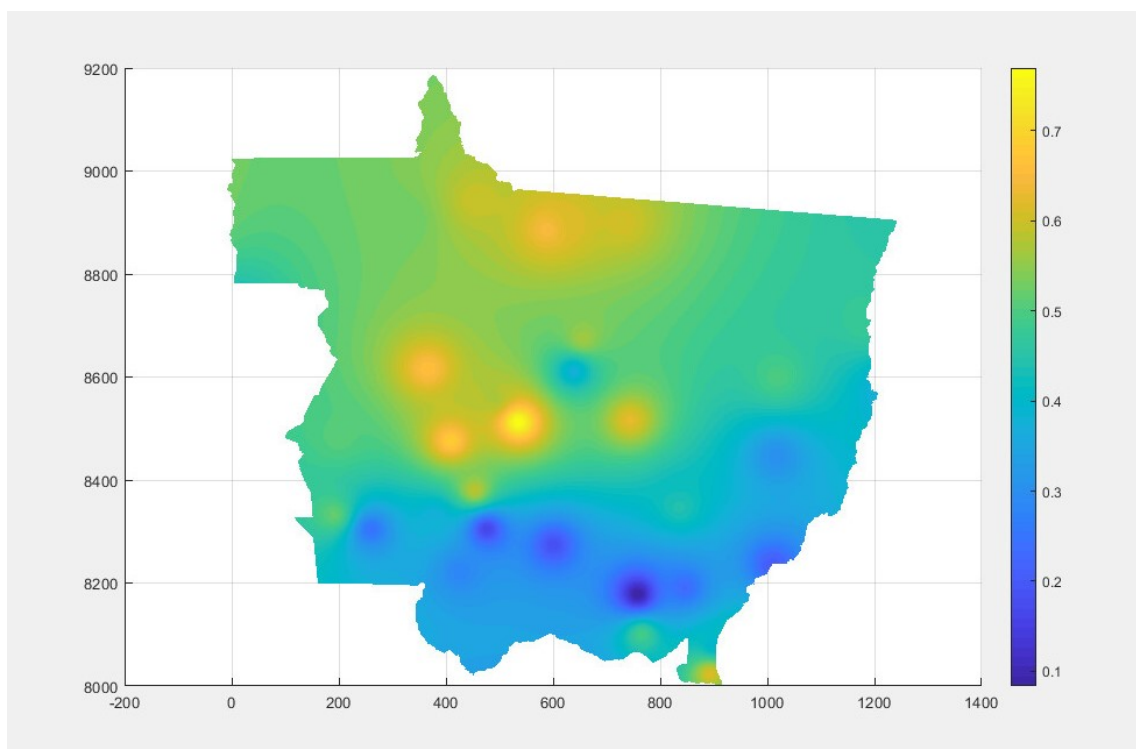
Figura 13 – Concentrações de esporos para as localidades onde foram registradas ocorrências



Fonte: Elaboração da própria autora.

Para o mapa da *favorabilidade*, foi necessário interpolar os dados obtidos nas estações localizadas no estado e em seu entorno. Dentre os interpoladores avaliados, o IDW com potência igual a dois foi o mais representativo. Já o modelo geostatístico ocupou a terceira posição, dentre os 6 interpoladores analisados. Assim, diferente de Alves *et al.* (2011), que usou a cokrigagem em seus dados, a partir do IDW de grau quadrático, confeccionou-se o mapa temático (Figura 14), obtendo os valores da favorabilidade para todos os nós da malha, para janeiro (como em Alves *et al.* (2011)).

Figura 14 – Mapa da favorabilidade



Fonte: Elaboração da própria autora.

Silva, Lima e Oliveira (2010) compararam três métodos de estimação para pH do solo (inverso do quadrado da distância, polinomial e krigagem) e chegaram à conclusão de que a krigagem forneceu resultados com menores erros do que os outros dois métodos. Já para trabalhos em climatologia utilizam-se do interpolador IDW, por causa da sua simplicidade de manuseio, como em Reis *et al.* (2004), Braz *et al.* (2007) e Amorim *et al.* (2006).

Os interpoladores apresentaram boa precisão para estimativa de valores em locais não amostrados para a variável favorabilidade a ferrugem da soja. É possível observar que o maior índice de condições favoráveis ao desenvolvimento da doença ocorre na região central do estado, ao passo que os locais de menor favorabilidade ocorrem na região sul.

Como para os dados de concentração, para os de *favorabilidade* também foram identificados os registrados entre o nono e o quinto dia anteriores ao registro da ocorrência,

Tabela 6 – Dados da *favorabilidade* para as ocorrências da FAS

Cidade	Registro	9º dia	8º dia	7º dia	6º dia	5º dia
Sapezal	13/12/2018	0,5385	0,7017	0,7279	0,7049	0,6435
Jaciara	18/12/2018	0,6310	0,4671	0,3246	0,4840	0,4674
Tangará da Serra	26/12/2018	0,5788	0,5819	0,5385	0,0844	0,4466
Campo Novo do Parecis	27/12/2018	0,1291	0,1341	0,4940	0,4692	0,7334
Querência	28/12/2018	0,5423	0,5689	0,4821	0,5739	0,6876
Campo Verde	28/12/2018	0,8123	0,1958	0,2116	0,2138	0,4642
Comodoro	03/01/2019	0,8117	0,8259	0,8346	0,8462	0,8534
Gaúcha do Norte	08/01/2019	0,6786	0,6381	0,4597	0,3164	0,3900
Ipiranga do Norte	10/01/2019	0,6461	0,5223	0,5554	0,7029	0,6084
Campos de Júlio	14/01/2019	0,5778	0,6404	0,5778	0,6650	0,5754
Sorriso	15/01/2019	0,0792	0,5831	0,3307	0,1144	0,4966
Lucas do Rio Verde	18/01/2019	0,4178	0,5546	0,6186	0,3701	0,6028
Primavera do Leste	21/01/2019	0,3833	0,2249	0,4546	0,1760	0,1927
Nova Mutum	22/01/2019	0,6275	0,5895	0,4460	0,4033	0,4190
Feliz Natal	22/01/2019	0,5817	0,5797	0,3126	0,2459	0,2114
Itiquira	28/01/2019	0,5994	0,3961	0,1072	0,1186	0,2928
Rosário Oeste	22/02/2018	0,5292	0,3747	0,6078	0,5801	0,3808
Sinop	15/03/2019	0,7288	0,5676	0,5730	0,6264	0,5365

Fonte: Elaboração da própria autora.

na Tabela 6. O maior valor entre os cinco foi identificado porque será determinante para a obtenção da *ocorrência* fuzzy para cada localidade.

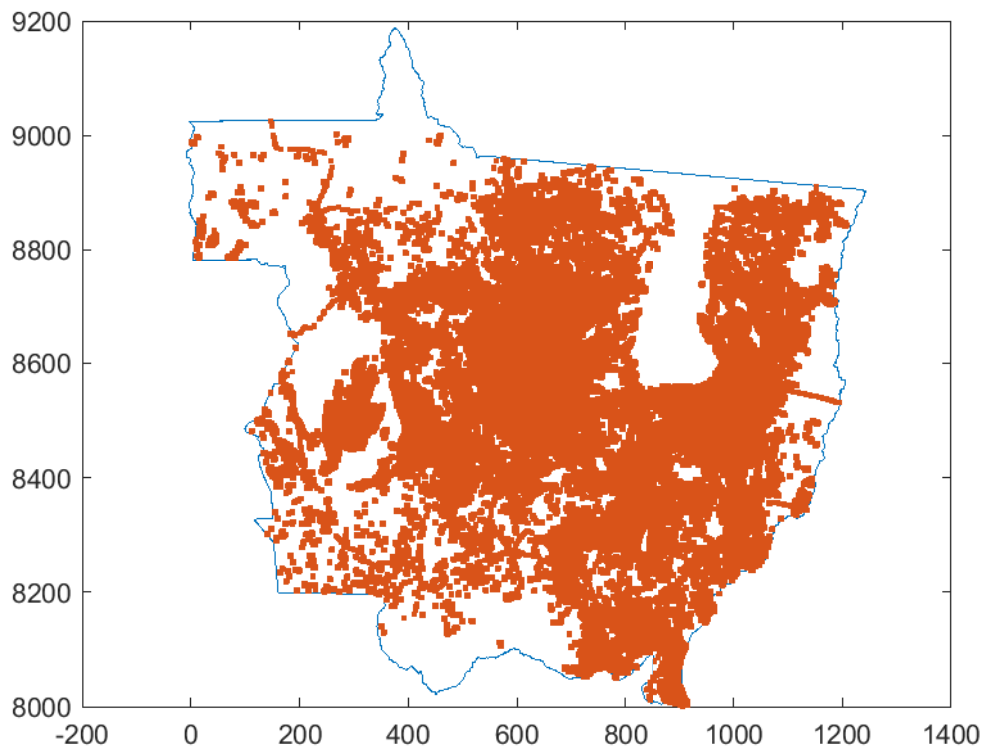
A última entrada do controlador SFF, que mapeia os *hospedeiros* do patógeno, é apresentado na Figura 15. Nele estão marcados todos os pontos que estão próximos às rodovias até 50 m, e todos os pontos que estão dentro ou distantes até 1 km das propriedades. Todos os outros nós da malha foram considerados *distantes*.

Apresentados os mapas que constituíram as variáveis de entrada do *Sistema Fuzzy Ferrugem*, na próxima seção será verificada a sua eficiência, por meio de comparações entre as safras.

5.2 SISTEMA FUZZY FERRUGEM

Para verificar a eficiência do sistema, foram levantadas as ocorrências registradas pelo Consórcio Antiferrugem durante as safras de 2015/2016 até 2019/2020, para o estado de Mato Grosso. Foram tomadas as localizações e as datas dos primeiros registros para cada cidade. Em seguida, examinou-se a *ocorrência* fuzzy para a safra 2018/2019, que serviu para ajustar o modelo, e para as demais localidades, onde a doença foi registrada em outras safras, para verificar o seu percentual de acertos.

Para o dia de maior *favorabilidade*, identificou-se o valor da *concentração*. Assim, foram obtidos pares ordenados contendo (*concentração*, *favorabilidade*) para cada ocor-

Figura 15 – Mapa de hospedeiros

Fonte: Elaboração da própria autora.

rência. Nesses nós, a variável *hospedeiro* assumiu sempre o valor *zero*, já que se subentende que existe planta de soja naquele ponto. Assim, para esses ternos ordenados (*concentração, favorabilidade, 0*) foram calculadas as ocorrências *fuzzy*. Os resultados estão na Tabela 7.

Para as comparações feitas a seguir, são levados em consideração os dados observados na Tabela 7. A possibilidade de ocorrer a doença foi de mais 50% para todas as localidades. O menor valor de ocorrência *fuzzy* foi de 0,5, em Tangará da Serra e em Feliz Natal, onde observaram-se pequenas concentrações de esporos e relativa baixa favorabilidade (em relação aos demais registros da tabela). Para a *favorabilidade*, o menor valor registrado foi em Primavera do Leste. Embora tenha sido menor que 0,5, a concentração de esporos garantiu uma ocorrência *fuzzy* de 0,5318. Em relação à *concentração*, o menor valor foi observado em Itiquira, onde a favorabilidade em torno de 0,6 assegurou que a chance de acontecer a doença fosse de 53%. Nos dois últimos casos, observaram-se valores ligeiramente maiores que o mínimo registrado. A Tabela 8 apresenta a análise descritiva das variáveis de entrada e de saída do SFF. Para cada dia de ocorrência registrada na Tabela 7, gerou-se um mapa. As 18 imagens foram reunidas nas Figuras 16, 17 e 18.

Dessa forma, consideraram-se *suscetíveis à doença*, localidades que apresentaram ocorrência *fuzzy* maior que 0,5. Assim, buscou-se nas demais safras, quais localidades apresentaram ocorrência *fuzzy* maior que 0,5. Para isso, o intervalo para o qual verificou-se

Tabela 7 – Possibilidade de ocorrer FAS segundo SFF

	Cidade	Concentração	Favorabilidade	Ocorrência <i>fuzzy</i>
1	Sapezal	99.958	0,7279	0,6000
2	Jaciara	258.741	0,6310	0,6157
3	Tangará da Serra	5.588	0,5819	0,5000
4	Campo Novo do Parecis	677.027	0,7334	0,8223
5	Querência	62.837	0,6876	0,6000
6	Campo Verde	705.336	0,8123	0,8332
7	Comodoro	232.012	0,8534	0,6000
8	Gaúcha do Norte	311.626	0,6786	0,6582
9	Ipiranga do Norte	6.263	0,7029	0,6000
10	Campos de Júlio	190.338	0,6650	0,6000
11	Sorriso	736.802	0,5831	0,8197
12	Lucas do Rio Verde	1.306.017	0,6186	0,8465
13	Primavera do Leste	365.522	0,4546	0,5318
14	Nova Mutum	524.426	0,6275	0,7802
15	Feliz Natal	2.009	0,5817	0,5000
16	Itiquira	1.501	0,5994	0,5324
17	Rosário Oeste	297.023	0,6078	0,6439
18	Sinop	264.368	0,7288	0,6287

Fonte: Elaboração da própria autora.

Tabela 8 – Análise descritiva para as variáveis do SFF

Variável	Mínimo	Máximo	Média	Mediana
Concentração	1.501	1.306.017	335.966	261.555
Favorabilidade	0,4546	0,8534	0,6597	0,6480
Ocorrência <i>fuzzy</i>	0,5000	0,8465	0,6507	0,6078

Fonte: Elaboração da própria autora.

a maior favorabilidade variou entre o nono dia anterior e o dia seguinte da ocorrência, isto porque os dados para essa variável referem-se à safra de referência. Em seguida, repetiu-se o procedimento adotado para as ocorrências registradas em 2018/2019. Além disso, observou-se por quantos dias durante o ano-safra, as localidades apresentaram ocorrência *fuzzy* maior ou igual a 0,5. Os dados estão resumidos na Tabela 9.

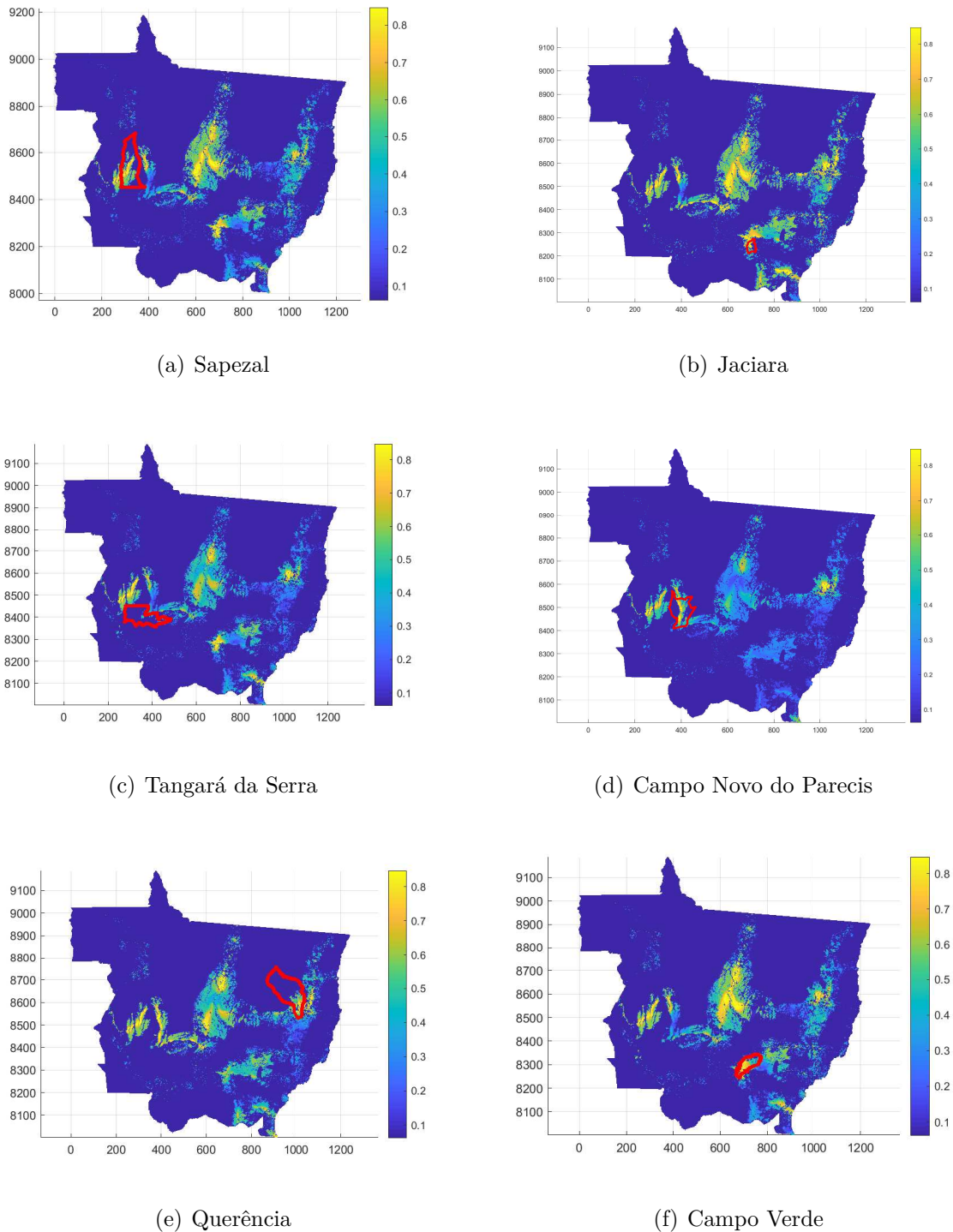
Dentre todas as 84 primeiras ocorrências registradas ao longo dessas cinco safras, em apenas 16 o SFF não conseguiu medir corretamente a suscetibilidade do local à FAS. Nesse sentido, o controlador acertou a sua previsão em 81% dos registros. Por outro lado, dentre as 38 cidades onde foram registradas ocorrências, apenas em 3 cidades não foi registrado valor maior que 0,5 para nenhum dia do ano-safra. Por essa análise, o percentual de acerto foi de 92%.

Além disso, pelas Figuras 16, 17, 18 e pela Tabela 9 é possível observar que as regiões de Sapezal, Campo Novo do Parecis, Campo Verde, Ipiranga do Norte, Campos de Júlio, Sorriso, Lucas do Rio Verde, Nova Mutum e Sinop são as mais suscetíveis à

Tabela 9 – Registros de ocorrência *fuzzy* e quantidade de dias que a localidade foi suscetível à doença

	Cidade	Safras				Dias
		2015/2016	2016/2017	2017/2018	2019/2020	
1	Pontes e Lacerda	-	-	0,600	-	41
2	Poxoréu	0,0690	0,0987	-	0,0690	30
3	Cláudia	-	-	0,6000	0,6000	86
4	Confresa	-	0,7599	-	-	149
5	Pedra Preta	-	-	0,2420	-	49
6	Santo Antônio do Leste	-	0,6000	-	-	114
7	Rondonópolis	-	0,2479	-	-	51
8	Chapada dos Guimarães	-	0,6000	-	-	32
9	Canarana	0,6310	0,4927	-	-	60
10	Santo Afonso	-	-	0,5796	-	88
11	Marcelândia	-	-	-	0,0634	0
12	Paranatinga	-	-	-	0,6000	77
13	Diamantino	0,5745	0,5792	0,5792	-	68
14	Alto Taquari	-	-	0,6000	-	107
15	União do Sul	-	0,0633	-	-	0
16	Nova Ubiratã	-	-	0,6314	-	130
17	Tabaporã	0,0633	-	0,0633	0,0633	0
18	Alto Garças	0,8222	-	-	-	131
19	Vera	-	0,6017	0,6000	0,6000	94
20	Juscimeira	-	0,4362	-	-	57
21	Gaúcha do Norte	-	-	-	-	47
22	Campo Novo do Parecis	0,8222	0,7936	0,8351	0,8351	112
23	Feliz Natal	-	-	-	-	43
24	Sorriso	0,5719	0,8229	0,8398	0,8398	116
25	Comodoro	-	-	0,6683	-	137
26	Querência	0,6000	-	0,5870	-	117
27	Campos de Júlio	0,6000	-	0,6000	0,6000	109
28	Primavera do Leste	-	0,3492	0,2354	0,7324	70
29	Campo Verde	-	0,8332	0,8332	0,7241	116
30	Sinop	-	-	-	-	160
31	Itiquira	-	0,1641	-	0,1641	61
32	Jaciara	-	-	-	-	52
33	Rosário Oeste	-	0,6439	-	-	66
34	Ipiranga do Norte	-	-	-	-	84
35	Sapezal	0,6000	0,6000	0,6000	-	137
36	Nova Mutum	-	0,7615	0,7615	-	139
37	Tangará da Serra	0,6000	0,6000	0,6000	0,6000	122
38	Lucas do Rio Verde	0,7808	0,7471	0,8293	0,8457	161

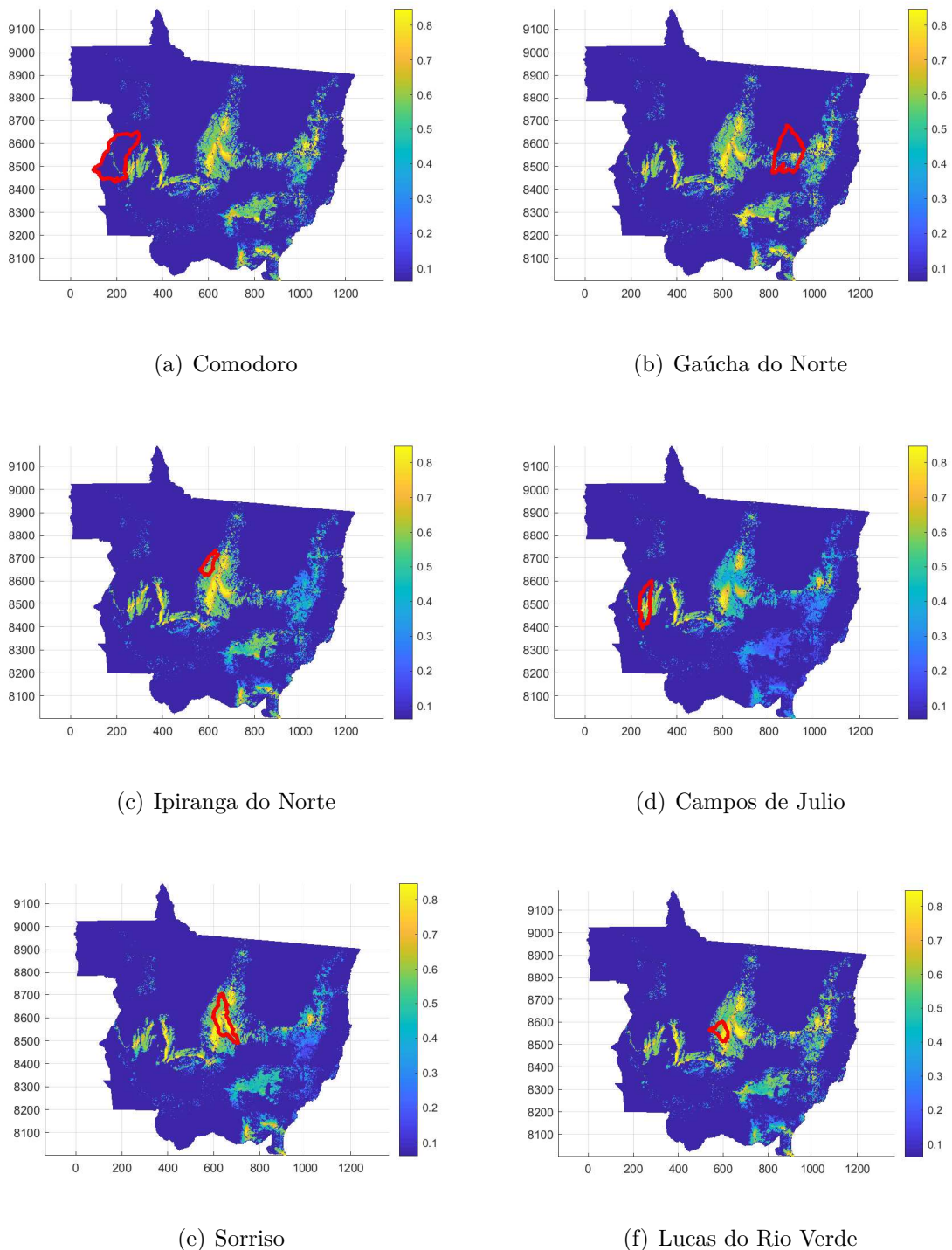
Fonte: Elaboração da própria autora.

Figura 16 – Ocorrência *fuzzy* para as localidades onde foram registradas ocorrências

Fonte: Elaboração da própria autora.

doença. Dessa forma, para o Mato Grosso, essas são as áreas que mais necessitam de atenção.

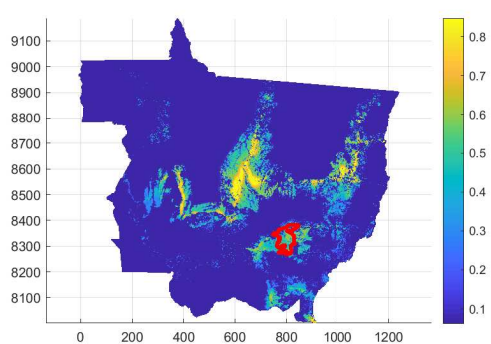
Diante do que foi apresentado, observa-se que, embora a base de dados fosse relativamente pequena, a sua utilização de forma eficiente associada às ferramentas certas possibilitou a construção de um modelo robusto para a identificação de regiões mais vul-

Figura 17 – Ocorrência *fuzzy* para as localidades onde foram registradas ocorrências

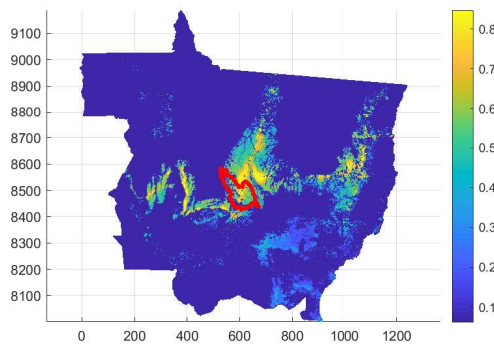
Fonte: Elaboração da própria autora.

neráveis em Mato Grosso. Além disso, cepa virulenta de um patógeno (fungo, bactéria ou vírus), hospedeiros distribuídos em uma região e condições ambientais favoráveis são fatores que, em conjunto, formam o *triângulo da enfermidade* de plantas (ALTIERI, 1999). Sendo assim, adequando os dados de favorabilidade, a localidade de hospedeiros, e criando uma EDA para o patógeno em questão, o modelo apresentado nessa pesquisa pode servir

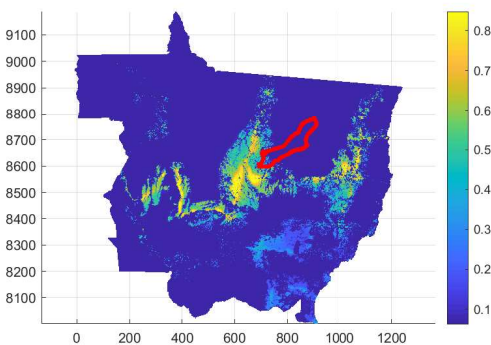
Figura 18 – Ocorrência *fuzzy* para as localidades onde foram registradas ocorrências



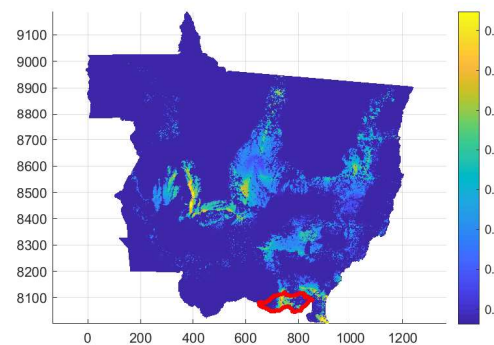
(a) Primavera do Leste



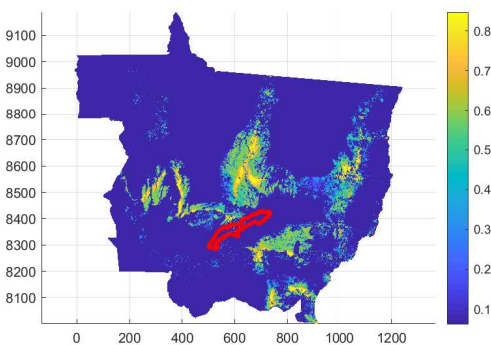
(b) Nova Mutum



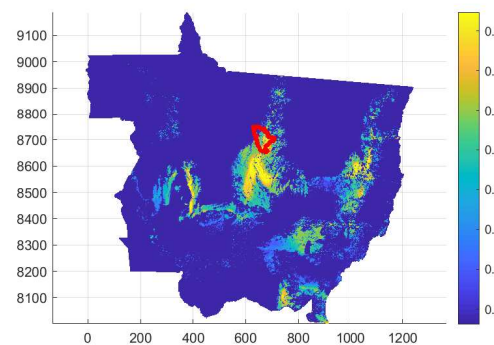
(c) Feliz Natal



(d) Itiquira



(e) Rosário Oeste



(f) Sinop

Fonte: Elaboração da própria autora.

como base para o estudo de inúmeras doenças que se encaixem nesse perfil.

6 CONCLUSÕES

A ferrugem asiática da soja está presente nas lavouras brasileiras há 20 anos. Desde a primeira safra acometida por ela, muito tem se aprendido a seu respeito. Entretanto, ainda há muito o que pesquisar.

São determinantes para o seu desenvolvimento, presença de esporos, condições favoráveis e plantas hospedeiras. Já que não se sabe ao certo a relação entre essas variáveis, optou-se pela construção de um sistema *fuzzy* para relacioná-las. Para a obtenção de dados desses últimos, existia, de certa forma, uma ordem de tarefas a serem executadas. No caso do primeiro, nada estava claro.

Para o mapa das *favorabilidades*: reproduza o SF de Alves *et al.* (2011), obtenha os valores possíveis (onde existiam dados de temperatura e umidade relativa do ar), encontre o melhor interpolador, interpole!

Para o mapa de *hospedeiros*: obtenha as coordenadas das propriedades produtoras de soja, identifique os pontos que estão localizados no interior e distantes a menos de 1 km dessas propriedades.

O SFF foi igualmente dependente dessas três variáveis, mas a obtenção da entrada *concentração* de esporos, de fato foi a que mais exigiu *criatividade*. Embora a EDA seja amplamente usada, não existem tantas pesquisas tratando de poluentes atmosféricos. Dessa forma, muitas coisas que se referiram à simulação dos dados dessa variável foram inovadoras. Além disso, utilizou-se também de um SF para a obtenção de um dos coeficientes da equação.

Muito foi feito, mas ainda seria possível fazer mais. Em relação a dados, aumentar a quantidade de registros de temperatura e umidade relativa do ar, melhora a interpolação, devolvendo dados ainda mais robustos para a favorabilidade. A localização da propriedade onde verificou-se ocorrência da doença e uma malha mais completa de rodovias que atravessem o estado, também potencializariam os resultados do SFF. Além disso, identificar propriedades produtoras de feijão e pastos plantados com forrageiras que são hospedeiros alternativos do fungo, tornaria os resultados mais precisos.

Para a EDA que modelou a concentração de esporos, embora a malha usada nesta pesquisa tenha sido grande, a construção de uma malha ainda mais refinada poderia diminuir a restrição em relação à velocidade do vento. Investir na implementação de Streamline Upwind Petrov-Galerkin (SUPG) também possibilitaria maior liberdade com o campo de velocidades. Além disso, identificar a concentração real de esporos em alguns pontos do domínio, tornaria os resultados numéricos da EDA ainda mais consistentes. E investigar melhor o efeito dos fungicidas sobre o coeficiente de decaimento, traria melhoras para o controlador que o define. Dessa forma, seria possível aplicar um controle químico

mais eficiente.

Novas abordagens podem ser feitas a partir desta pesquisa. Para a *defuzzificação* do SFF foi utilizado o Método Mamdani. Utilizar o método Takagi-Sugeno pode ser uma nova proposta. Além disso, a partir da vasta base de dados existente no programa *Consórcio Antiferrugem*, poderia ser construída uma rede neural para predição da doença.

Dado o caráter generalista da ferramenta sugerida aqui, a partir de adequações, qualquer doença poderia ser modelada pelo sistema *fuzzy* desenvolvido nesta pesquisa. Dessa forma, ficam como sugestões de trabalhos futuros, a modelagem da ferrugem do cafeeiro, que apresenta, de forma geral, características parecidas com as da ferrugem asiática da soja, e aproveitando o momento histórico, a modelagem da COVID 19.

Essa pesquisa contou com análises estatísticas, dados espaciais, matemática aplicada, inteligência artificial, pesquisas agrícolas, entre outros. Mostrou quão poderosa é a interdisciplinaridade quando usada para resolver problemas do mundo real. Entretanto, conter a ferrugem asiática da soja ainda é um desafio para a agricultura mundial.

Além do mais, o instrumental construído nesta tese presta-se a, de modo eficiente, simular hipóteses indicadas pelos diversos especialistas ligados à dispersão do fungo causador da ferrugem asiática da soja, estabelecer estratégias de contingência e de combate à doença, além de criar um ferramental para outras possíveis doenças. Pode-se também mencionar a originalidade da abordagem transdisciplinar no esforço de incluir diversas variáveis presentes e relevantes para o uso criterioso da equação difusão-advecção na modelagem de fenômenos análogos. Finalmente, pode-se evidenciar que esta pesquisa se constitui, na realidade, em um ponto de partida para mais ações deste tipo em situações-problema, melhorando os métodos e ampliando seu espectro de uso efetivo.

REFERÊNCIAS

- ALTIERI, M. A. *Agroecologia: bases científicas para una agricultura sustentable*. 4. ed. Montevideo: Nordan-Comunidad, 1999. 339 p. Disponível em: <http://agroeco.org/wp-content/uploads/2010/10/Libro-Agroecologia.pdf>. Acesso em: 30 jul. 2021.
- ALVES, M. C. *Geoestatística e sistemas fuzzy na proteção de plantas*. 2006. 186 f. Tese (Doutorado) — Programa de Pós-Graduação em Agronomia, Universidade Federal de Lavras, Lavras, 2006. Disponível em: http://www.sbicafe.ufv.br/bitstream/handle/123456789/6658/Tese_Marcelo%20de%20Carvalho%20Alves.pdf?sequence=1&isAllowed=y. Acesso em: 07 mar. 2021.
- ALVES, M. C.; POZZA, E. A.; CARVALHO, L. G.; SANCHES, L. *Fuzzy logic system modeling soybean rust monocyclic process*. In: EL-SHEMY, H. (Ed.). *Soybean physiology and biochemistry*. [S.l.]: BoD-Books on Demand, 2011. p. 63–82.
- ALVES, S. A. M.; FURTADO, G. Q.; BERGAMIN FILHO, A. Influência das condições climáticas sobre a ferrugem da soja. In: ZAMBOLIM, L. (Ed.). *Ferrugem asiática da soja*. Viçosa: UFV, DFP, 2006. p. 37–60.
- AMORIM, F. C. F.; RIBEIRO, A.; LEITE, C. C.; LEAL, B.; SILVA, J. B. d. Avaliação de dois métodos de espacialização da precipitação pluvial para o estado de Alagoas. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE METEOROLOGIA, 14., 2006, Florianópolis. *Anais[...]*. Florianópolis, 2006.
- ANDRADE, P. J. M.; ANDRADE, D. F. A. A. Controle químico da ferrugem asiática da soja. In: ZAMBOLIM, L. (Ed.). *Ferrugem asiática da soja*. Viçosa: UFV, DFP, 2006. p. 61–72.
- ANDRIOTTI, J. L. S. *Fundamentos de estatística e geoestatística*. São Leopoldo: Unisinos, 2003. 165 p.
- APROSOJA. *Vazio sanitário*. Mato Grosso: [s.n.], 2015. Disponível em: <http://www.aprosoja.com.br/download/informe-tecnico/2015-10-01-12-05-5696-informe-tecnico-vazio-sanitario.pdf>. Acesso em: 11 mar. 2021.
- BALARDIN, R. S.; NAVARINI, L.; DALLAGNOL, L. J. Epidemiologia da ferrugem da soja. In: JULIATTI, F. C.; POLIZEL, A. C.; HAMAWAKI, O. T. (Ed.). *I Workshop brasileiro sobre a ferrugem asiática*. Uberlândia: EDUFU, 2005. p. 39–50.
- BATCHELOR, W. D.; YANG, X. B.; TSCHANZ, A. T. Development of a neural network for soybean rust epidemics. *American Society of Agricultural Engineers*, Saint Joseph, v. 40, n. 1, p. 247–252, 1997.
- BECKER, W. R. *et al.* Sensoriamento remoto como ferramenta de verificação do vazio sanitário da soja no estado do paraná na safra verão 2013/2014. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE SENSORIAMENTO REMOTO, 18., 2017, Santos. *Anais[...]*. Santos: INPE, 2017. p. 3760–3766. Disponível em: <https://proceedings.science/sbsr/papers/sensoriamento-remoto-como-ferramenta-de-verificacao-do-vazio-sanitario-da-soja-no-estado-do-parana-na-safra-verao-2013-2>. Acesso em: 12 mar. 2021.

- BEZERRA, A. R. G.; SEDIYAMA, T.; BORÉM, A.; SOARES, M. M. Importância econômica. In: SEDIYAMA, T.; SILVA, F.; BORÉM, A. (Ed.). *Soja: do plantio à colheita*. Viçosa: Ed. UFV, 2015. p. 9–26.
- BONDE, M. R.; BERNER, D. K.; NESTER, S. E.; FREDERICK, R. D. Effects of temperature on urediniospore germination, germ tube growth, and initiation of infection in soybean by *Phakopsora* isolates. *Phytopathology*, Saint Paul, v. 97, n. 8, p. 997–1003, 2007. Disponível em: <https://apsjournals.apsnet.org/doi/pdf/10.1094/PHYTO-97-8-0997>. Acesso em: 11 jul. 2021.
- BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno*. 9. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2014.
- BRAZ, R. L.; RIBEIRO, C. A. D.; FERREIRA, D. S.; CECILIO, R. A. Uso de séries históricas e técnicas de sig no estudo da distribuição temporal e espacial da pluviosidade na bacia barra seca localizada ao norte do estado do espírito santo. In: ENCONTRO LATINO AMERICANO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA, 11., 2007, São José dos Campos. *Anais[...]*. São José dos Campos, 2007. p. 54–57.
- CAMARGO, E.; FUKS, S. D.; CÂMARA, G. Análise espacial de superfícies. In: CÂMARA, G.; CARVALHO, M.; DRUCK, S.; MONTEIRO, A. M. (Ed.). *Análise espacial de dados geográficos*. Brasília: EMBRAPA, 2004. Disponível em: <http://www.dpi.inpe.br/gilberto/livro/analise/cap3-superfícies.pdf>. Acesso em: 15 mar. 2021.
- CANADIAN FOOD INSPECTION AGENCY. *The biology of Glycine max (L.) merr. (soybean)*. Ontario: Plant Biosafety Office, 2012. Disponível em: <https://www.inspection.gc.ca/plant-varieties/plants-with-novel-traits/applicants/directive-94-08/biology-documents/glycine-max-l-merr-/eng/1330975306785/1330975382668>. Acesso em: 11 mar. 2021.
- CARVALHO, M. S.; VALÉRIO, J. V. *Introdução ao método dos elementos finitos: aplicação em dinâmica de fluidos*. São Carlos: SBMAC, 2012. 121 p. (Coleção notas em matemática aplicada, 61). Disponível em: http://arquivo.sbmac.org.br/arquivos/notas/livro_61.pdf. Acesso em: 22 mar. 2021.
- COMPANHIA NACIONAL DE ABASTECIMENTO - CONAB. *Calendário de plantio e colheita de grãos no Brasil 2019*. Brasília: CONAB, 2015. Disponível em: <http://www.conab.gov.br>. Acesso em: 27 jul. 2021.
- COMPANHIA NACIONAL DE ABASTECIMENTO - CONAB. *Acompanhamento da safra brasileira*. Brasília: CONAB, 2021. 1-115 p. (Safra 2020/21, 8). Disponível em: <https://www.conab.gov.br/info-agro/safra/gaos/boletim-da-safra-de-gaos>. Acesso em: 30 jun. 2021.
- COSTA, F. M.; COSTA, J. N. M. Soja. In: SILVA, N. M. d.; ADAIME, R.; ZUCCHI, R. A. (Ed.). *Pragas agrícolas e florestais na Amazônia*. Brasília: Embrapa, 2016. p. 419–435.
- DALLAGNOL, A. Consórcio anti-ferrugem. In: JULIATTI, F. C.; POLIZEL, A. C.; HAMAWAKI, O. T. (Ed.). *I Workshop brasileiro sobre a ferrugem asiática*. Uberlândia: EDUFU, 2005. p. 11–20.

- DINIZ, G. L. *Dispersão de poluentes num sistema ar-água: modelagem, aproximação e aplicações*. 2003. 120 f. Tese (Doutorado) — Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2003. Disponível em: http://repositorio.unicamp.br/jspui/bitstream/REPOSIP/260278/1/Diniz_GeraldoLucio_D.pdf. Acesso em: 26 mar. 2021.
- EDELSTEIN-KESHET, L. *Mathematical models in biology*. New York: Random-House, 1988.
- EMPRESA BRASILEIRA DE PESQUISAS AGROPECUARIAS - EMBRAPA. *Tecnologias de produção de soja – região central do Brasil – 2004*. Londrina: Embrapa Soja: Embrapa Agropecuária Oeste: Embrapa Cerrados: EPAMIG: Fundação Triângulo, 2003. 237 p. (Sistemas de Produção / Embrapa Soja, 4). Disponível em: <https://ainfo.cnptia.embrapa.br/digital/bitstream/item/54358/1/Sistemas-de-Producao-4.pdf>. Acesso em: 26 mar. 2021.
- FREITAS, M. C. M. A cultura da soja no Brasil: o crescimento da produção brasileira e o surgimento de uma nova fronteira agrícola. *Enciclopédia Biosfera*, Goiânia, v. 7, n. 12, p. 1–12, 2011. Disponível em: <https://www.conhecer.org.br/enciclop/2011a/agrarias/a%20cultura%20da%20soja.pdf>. Acesso em: 26 mar. 2021.
- HAYKIN, S. *Neural networks and learning machines*. 3. ed. New Jersey: Prentice-Hall, 2008.
- HENNING, A. A.; GODOY, C. V. Situação da ferrugem da soja no Brasil e no mundo. In: ZABOLIM, L. (Ed.). *Ferrugem asiática da soja*. Viçosa: UFV, DFP, 2006. p. 1–14.
- IGARASHI, W. T.; SILVA, M. A. A. e.; IGARASHI, S.; SAAB, O. J. G. A.; FRANÇA, J. A. d. Duração e porcentagem de molhamento foliar determinados pelos espaçamento entrelinhas, e influência sobre a ferrugem asiática da soja. *Summa Phytopathol*, Botucatu, v. 40, n. 2, p. 123–127, 2014. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/sp/a/GrXXfHJgQ3pbXrx8ynXxYmh/?lang=pt&format=pdf>. Acesso em: 11 jul. 2021.
- INFORZATO, N. F. *Dispersão de poluentes num sistema ar-água: modelagem matemática, aproximação numérica e simulação computacional*. 2008. 109 f. Tese (Doutorado) — Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2008. Disponível em: http://repositorio.unicamp.br/bitstream/REPOSIP/307287/1/Inforzato_NelsonFernando_D.pdf. Acesso em: 13 abr. 2021.
- ISAAKS, E. H.; SRIVASTAVA, R. M. *Applied geostatistics*. New York: Oxford University Press, 1989.
- ISARD, S. A.; GAGE, S. H.; COMTOIS, P.; RUSSO, J. M. Principles of the atmospheric pathway for invasive species applied to soybean rust. *BioScience*, Oxford, v. 55, n. 10, p. 851–861, 2005. Disponível em: <https://academic.oup.com/bioscience/article/55/10/851/274382>. Acesso em: 16 abr. 2021.
- JAFELICE, R. S. M.; BARROS, L. C.; BASSANEZI, R. C. *Teoria dos conjuntos fuzzy com aplicações*. 2. ed. São Carlos: SBMAC, 2012. 119 p. (Coleção notas em matemática aplicada, 17). Disponível em: http://arquivo.sbmac.org.br/arquivos/notas/livro_17.pdf. Acesso em: 16 abr. 2021.

- KIM, K. S.; WANG, T. C.; YANG, X. B. Simulation of apparent infection rate to predict severity of soybean rust using a *Fuzzy* logic system. *The American Phytopathological Society*, Saint Paul, v. 95, n. 10, p. 1122–1131, 2005. Disponível em: <https://apsjournals.apsnet.org/doi/pdf/10.1094/PHYTO-95-1122>. Acesso em: 19 abr. 2021.
- KLIR, G. J.; YUAN, B. *Fuzzy sets and fuzzy logic: theory and applications*. Rio de Janeiro: Prentice Hall do Brasil, 1995.
- KRINDGES, A. *Método de Galerkin descontínuo de elementos finitos para equações elípticas*. 2004. 83 f. Dissertação (Mestrado) — Curso de Pós-Graduação em Matemática e Computação Científica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2004. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/87369/204406.pdf?sequence=1&isAllowed=y>. Acesso em: 11 maio 2021.
- KRINDGES, A. *Modelagem e simulação computacional de um problema tridimensional de difusão-advecção com uso de Navier-Stokes*. 2011. 72 f. Tese (Doutorado) — Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2011. Disponível em: <http://repositorio.unicamp.br/handle/REPOSIP/307274>. Acesso em: 06 fev. 2020.
- LOPES, W. A.; JAFELICE, R. S. M. Modelagem *fuzzy* na saúde. *FAMAT em Revista*, Uberlândia, n. 5, p. 85–126, 2005. Disponível em: http://www.portal.famat.ufu.br/sites/famat.ufu.br/files/Anexos/Bookpage/Famat_Revista_05.pdf. Acesso em: 6 fev. 2020.
- MAMDANI, E. H. Application of fuzzy logic to approximate reasoning using linguistic synthesis. *IEEE Transactions on Computers*, [S.I.], v. 26, n. 12, p. 1182–1191, 1977.
- MARCHUK, G. I. *Mathematical models in environmental problems: studies in mathematics and its applications*. Netherlands: North-Holland, 1986. v. 16.
- MATO GROSSO. *Lei N^o 8.280, de 30 de dezembro de 2004*: Dispõe sobre a definição e fixação de áreas de interesse público e de proteção às rodovias estaduais e dá outras providências. Cuiabá, 2004. Disponível em: <http://rouxinol.mt.gov.br/Aplicativos/Sad-Legislacao/LegislacaoSad.nsf/709f9c981a9d9f468425671300482be0/fe36dfb39e5b14d503256f9e00636189?OpenDocument>. Acesso em: 30 jan. 2020.
- MATSUO, E.; FERREIRA, S. d. C.; SEDIYAMA, T. Botânica e fenologia. In: SEDIYAMA, T.; SILVA, F.; BORÉM, A. (Ed.). *Soja: do plantio à colheita*. Viçosa: Ed. UFV, 2015. p. 27–53.
- MCCARTNEY, H. A.; FITT, B. D. L.; WEST, J. S. Dispersal of foliar plant pathogens: mechanisms, gradients and spatial patterns. In: COOKE, B. M.; JONES, D. G. G.; KAYE, B. (Ed.). *The Epidemiology of Plant Diseases*. New York: Springer-Verlag, 2006. p. 168–169.
- MEGETO, G. A. S.; OLIVEIRA, S. R. M.; PONTE, E. M. D.; MEIRA, C. A. A. Árvore de decisão para classificação de ocorrências de ferrugem asiática em lavouras comerciais com base em variáveis meteorológicas. *Eng. Agric.*, Jaboticabal, v. 34, n. 3, p. 590–599, 2014. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/270196656_Arvore_de_decisao_para_classificacao_de_ocorrencias_de_ferrugem_asiatica_em_lavouras_comerciais_com_base_em_variaveis_meteorologicas. Acesso em: 22 abr. 2021.

MELCHING, J. S.; BROMFIELD, K. R.; KINGSOLVER, C. H. Infection, colonization, and uredospore production on wayne soybean by four cultures of *Phakopsora pachyrhizi*, the cause of soybean rust. *Phytopathology*, Saint Paul, v. 69, p. 1262–1265, 1979.

Disponível em: https://www.apsnet.org/publications/phytopathology/backissues/Documents/1979Articles/Phyto69n12_1262.PDF. Acesso em: 25 jul. 2021.

MISSIO, M. *Modelos de EDP integrados à lógica fuzzy e métodos probabilísticos no tratamento de incertezas: uma aplicação à febre aftosa em bovinos*. 2008. 187 f. Tese (Doutorado) — Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2008. Disponível em: http://repositorio.unicamp.br/bitstream/REPOSIP/307556/1/Missio_Maristela_D.pdf. Acesso em: 22 abr. 2021.

OKUBO, A.; LEVIN, S. A. *Diffusion and Ecological Problems: modern perspectives*. 2. ed. New York: Springer, 2001.

OLIVI, J. B.; QUINTANS, S. Soja guaxa prolifera nas estradas em mato grosso. *Notícias agrícolas*, Engenheiro Coelho, 21 jul. 2014. Disponível em: <https://www.noticiasagricolas.com.br/videos/entrevistas/142663-entrevista-com-wanderlei-dias-guerra-mapa-cuiaba.html#.YVuE9prMKM->. Acesso em: 04 out. 2021.

PAN, Z.; LI, X.; YANG, X. B.; ANDRADE D.; XUE, L. M. N. Prediction of plant diseases through modelling and monitoring airborne pathogen dispersal. *CAB Reviews Perspectives in Agriculture Veterinary Science Nutrition and Natural Resources*, n. 18, 2010. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/306395998_Prediction_of_plant_diseases_through_modelling_and_monitoring_airborne_pathogen_dispersal. Acesso em: 22 abr. 2021.

PEREIRA, A. R.; ANGELOCCI, L. R.; SENTELHAS, P. C. *Meteorologia Agrícola 306*. Piracicaba: Universidade de São Paulo, Escola Superior de Agricultura “Luiz de Queiroz”, Departamento de Ciências Exatas, 2007. Disponível em: http://www.leb.esalq.usp.br/leb/aulas/lce306/MeteorAgricola_Apostila2007.pdf. Acesso em: 23 abr. 2021.

POLETTI, E. C. C. *Dispersão de poluente em sistema de reservatório: modelagem matemática e simulação computacional utilizando-se aproximação numérica e conjuntos fuzzy*. 2009. 105 f. Tese (Doutorado) — Faculdade de Engenharia Elétrica e de Computação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2009. Disponível em: http://repositorio.unicamp.br/jspui/bitstream/REPOSIP/261076/1/Poletti_ElaineCristinaCatapani_D.pdf. Acesso em: 23 abr. 2021.

RAETANO, C. G.; MERLIN, A. Avanços tecnológicos no controle da ferrugem da soja. In: ZAMBOLIM, L. (Ed.). *Ferrugem asiática da soja*. Viçosa: UFV, DFP, 2006. p. 115–138.

REIS, R. J. *et al.* Determinação das áreas de potencial de riscos de precipitações intensas em belo horizonte. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE METEOROLOGIA, 13., 2004, Fortaleza. *Anais[...]*. Fortaleza, 2004.

SANTA CATARINA. *Portaria SAR nº 18/2017, de 20/07/2017: Proíbe a semeadura de soja no período de 11 de fevereiro a 14 de setembro de cada ano no estado de Santa Catarina*. Santa Catarina, 2017. Disponível em: <https://www.legisweb.com.br/legislacao/?id=347144>. Acesso em: 30 abr. 2021.

- SANTOS, T. A. A. *Determinação de perfil de curva de carga residencial baseado num sistema-fuzzy*. 2016. 66 f. Tese (Doutorado) — Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista, Ilha Solteira, 2016. Disponível em: https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/143424/santos_taa_dr_ilha.pdf?sequence=3&isAllowed=y. Acesso em: 30 abr. 2021.
- SILVA, A. F.; LIMA, J. S.; OLIVEIRA, R. B. Métodos de interpolação para estimar o pH em solo sob dois manejos de café arábica. *Idesia (Arica)*, Arica, v. 28, n. 2, p. 61–66, 2010.
- SILVA, A. F.; SEDIYAMA, T.; BORÉM, A. Exigências edafoclimáticas. In: SEDIYAMA, T.; SILVA, F.; BORÉM, A. (Ed.). *Soja: do plantio à colheita*. Viçosa: Ed. UFV, 2015. p. 54–65.
- SILVA, J. V. C. *Comportamento de cultivares de soja na presença da ferrugem asiática, em relação a programas de controle químico*. 2009. 57 f. Dissertação (Mestrado) — Instituto de Ciências Agrárias, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, 2009. Disponível em: <https://repositorio.ufu.br/bitstream/123456789/12119/1/junia.pdf>. Acesso em: 30 abr. 2021.
- SILVA, L. H. C. P.; CAMPOS, H. D.; SILVA, J. R. C.; RIBEIRO, G. C.; NEVES, D. L. Ferrugem asiática em Goiás: controle químico e hospedeiros alternativos. In: JULIATTI, F. C.; POLIZEL, A. C.; HAMAWAKI, O. T. (Ed.). *I Workshop brasileiro sobre a ferrugem asiática*. Uberlândia: EDUFU, 2005. p. 135–180.
- SILVA, M. S.; NAVES, M. M. V.; OLIVEIRA, R. B.; LEITE, O. S. M. Composição química e valor protéico do resíduo de soja em relação ao grão de soja. *Ciênc. Tecnol. Aliment.*, Campinas, v. 26, n. 3, p. 571–576, 2006. Disponível em: http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0101-20612006000300014. Acesso em: 30 abr. 2021.
- SILVA, O. C.; ROMMEL, C. C. Ferrugem asiática da soja (*Phakopsora pachyrhizi*): sistema de aviso. In: JULIATTI, F. C.; POLIZEL, A. C.; HAMAWAKI, O. T. (Ed.). *I Workshop brasileiro sobre a ferrugem asiática*. Uberlândia: EDUFU, 2005. p. 221–229.
- SOUZA, J. M. R. d. *Estimativa do coeficiente de difusão para problemas (prioritariamente) ecológicos*. 2014. 174 f. Tese (Doutorado) — Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2014. Disponível em: http://repositorio.unicamp.br/jspui/bitstream/REPOSIP/307269/1/Souza_JulianaMartaRodriguesde_D.pdf. Acesso em: 30 abr. 2021.
- VÁSQUEZ, J. C. S. *Comportamento evolutivo de descarga de água de produção decorrente de atividade offshore: tratamento numérico e simulação computacional*. 2005. 83 f. Tese (Doutorado) — Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2005. Disponível em: http://repositorio.unicamp.br/jspui/bitstream/REPOSIP/307289/1/SaavedraVasquez_JulioCesar_D.pdf. Acesso em: 6 maio 2021.
- WEN, L.; BOWEN, C. R.; HARTMAN, G. L. Prediction of short-distance aerial movement of *Phakopsora pachyrhizi* urediniospores using machine learning. *The American Phytopathological Society*, Saint Paul, v. 107, n. 10, p. 1187–1198, 2017. Disponível em: <https://apsjournals.apsnet.org/doi/10.1094/PHYTO-04-17-0138-FI>. Acesso em: 30 abr. 2021.

WOLMUTH, L. D. *Modelagem e simulação do comportamento evolutivo de poluentes em corpos aquáticos de grande extensão: o caso da represa do rio Manso*. 2009. 64 f. Dissertação (Mestrado) — Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2009. Disponível em: http://repositorio.unicamp.br/bitstream/REPOSIP/307277/1/Wolmuth_LeidyDiane_M.pdf. Acesso em: 5 maio 2021.

YORINORI, J. T. A ferrugem "asiática" da soja no continente americano: evolução, importância econômica e estratégias de controle. In: JULIATTI, F. C.; POLIZEL, A. C.; HAMAWAKI, O. T. (Ed.). *I Workshop brasileiro sobre a ferrugem asiática*. Uberlândia: EDUFU, 2005. p. 21–37.

YORINORI, J. T. Agressiva, ferrugem asiática exige manejo integrado. *Visão Agrícola*, Piracicaba, n. 5, p. 96–99, 2006. Disponível em: <https://www.esalq.usp.br/visaoagricola/sites/default/files/va05-fitossanidade05.pdf>. Acesso em: 5 maio 2021.

YORINORI, J. T. Ferrugem asiática da soja: o desafio continua e como aprimorar o seu controle. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE SOJA, 4., 2006, Londrina. *Anais[...]*. Londrina: Embrapa Soja, 2006. p. 102–108. Disponível em: <https://ainfo.cnptia.embrapa.br/digital/bitstream/item/113358/1/ferrugem.pdf>. Acesso em: 5 maio 2021.

ZADEH, L. *Fuzzy sets. Information and Control*, Cambridge, v. 8, p. 338–353, 1965.

ZAMBOLIM, L. Manejo integrado da ferrugem asiática da soja. In: ZAMBOLIM, L. (Ed.). *Ferrugem asiática da soja*. Viçosa: UFV, DFP, 2006. p. 73–98.

Apêndices

APÊNDICE A – ANÁLISE ESTATÍSTICA DO MAPA DE FAVORABILIDADE DE MATO GROSSO

Embora se tenha registros para 365 dias do ano, para a elaboração do mapa foram considerados apenas os dados de janeiro de 2019. Esse período foi escolhido porque é o mesmo mês para o qual Alves *et al.* (2011) desenvolveram o mapa de Minas Gerais. Assim, obtiveram-se 31 dados diários para as variáveis mencionadas para as estações, a partir das quais foram calculadas as respectivas médias aritméticas para o mês. Assim, para cada par ordenado de *Temperatura* e *Molhamento Foliar* foi gerada uma AACPD, que varia entre 0 e 1.

Para a interpolação, foram testados os modelos *Inverse distance weighting* (IDW) e Krigagem. O IDW, ou inverso da distância, é o modelo determinístico local mais usado, e que produz resultado parecido ao da Krigagem ordinária. Quanto à Krigagem, trata-se de uma técnica geoestatística de estimativa de valores de variáveis distribuídas no espaço ou no tempo, ou em ambos, baseada em valores próximos quando considerados dependentes mutuamente pela análise variográfica (CAMARGO; FUKS; CÂMARA, 2004).

Na análise geoestatística, os modelos teóricos para ajuste foram: esférico, exponencial, gaussiano, linear sem patamar e efeito pepita puro. A escolha do modelo seguiu os critérios adotados pelo software GS+, que utiliza a menor soma dos quadrados do resíduo (SQR) e o maior coeficiente de determinação (R²). O ajuste dos dados a partir do semivariograma possibilitou definir os seguintes parâmetros: efeito pepita (C₀), patamar (C₀+C) e alcance (A).

Quanto à validação dos métodos avaliados, utilizou-se o *Cross Validation* (Validação Cruzada) para a escolha da técnica mais adequada aos dados. Na validação cruzada, a estimativa da variável de interesse é testada nos locais das amostras existentes. O valor da amostra em um local específico é temporariamente descartado do conjunto de dados de amostra. Em seguida, é estimado o valor no mesmo local usando as amostras restantes. O dado estimado é, então, comparado com o observado. Este procedimento é repetido para todas as amostras disponíveis (ISAAKS; SRIVASTAVA, 1989).

Dessa forma, foram gerados pares ordenados para cada método de interpolação testado (*Valor estimado*, *Valor observado*). O eixo das abscissas representou os valores estimados a partir da validação cruzada, e o das ordenadas, os valores calculados a partir do SF.

Para a comparação entre as técnicas, recorreu-se ao modelo de regressão linear simples. Ainda segundo Isaaks e Srivastava (1989), para um método de estimativa perfeito, o gráfico de dispersão dos valores verdadeiros e estimados seria plotado como uma linha reta. Sendo assim, é possível julgar vários métodos de estimativa pela proximidade com

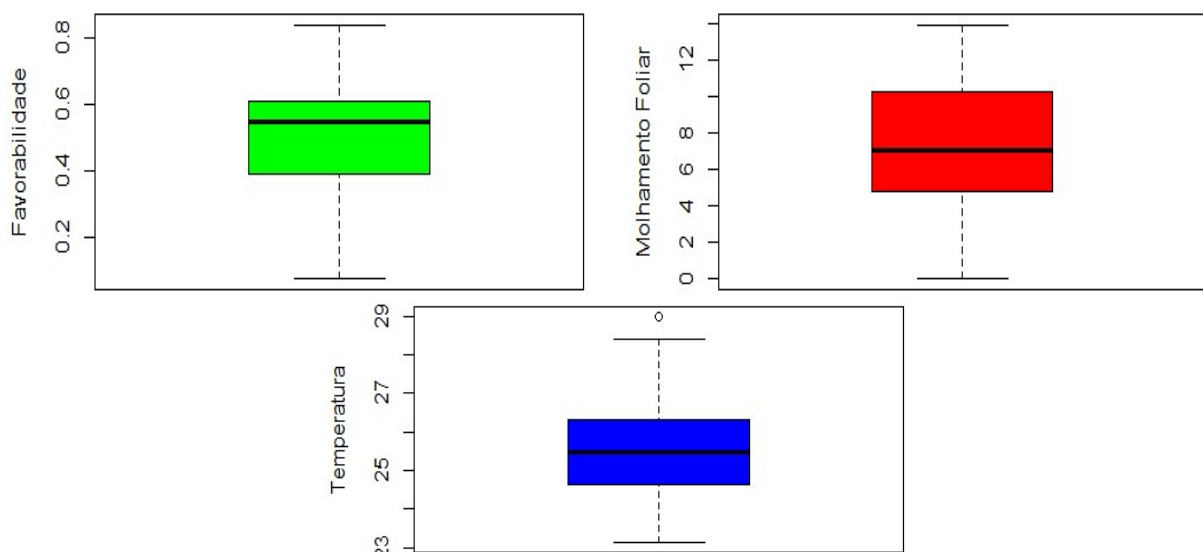
Tabela 10 – Análise descritiva para as variáveis utilizadas na pesquisa

Variável	Mínimo	Máximo	Média	Mediana	Sx	CV%
Favorabilidade	0,07	0,84	0,49	0,55	0,19	38,07
Molhamento Foliar (horas)	0,00	13,90	7,21	6,99	3,87	53,73
Temperatura(°C)	23,13	29,01	25,55	25,49	1,36	5,33

Fonte: Elaboração da própria autora.

que seus gráficos de dispersão chegam a esse ideal. Assim, considerando x como o valor estimado e y o valor observado, o ideal é que a reta obtida pela regressão linear seja descrita pela equação $y = x$. Representando a reta geral obtida por $y = bx + a$, e comparando com a ideal, quanto mais próximo a estiver de 0 e b estiver de 1, maior será a representatividade do método de interpolação. Além disso, quanto mais próximo o coeficiente de determinação R^2 estiver de 1, melhor. Por fim, realizou-se um ranking com os melhores valores de a , b e R^2 das regressões lineares para cada método avaliado.

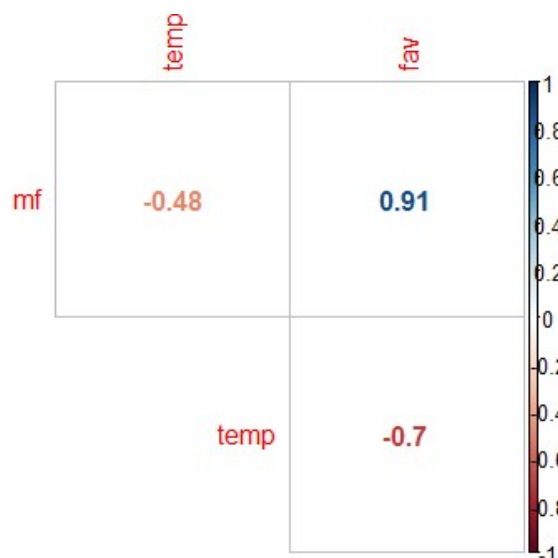
Na Tabela 10 são apresentadas as medidas de tendência central e de dispersão para as variáveis utilizadas na pesquisa. O molhamento foliar e a temperatura apresentaram a maior e menor variabilidade dentre as três variáveis utilizadas, respectivamente. É possível observar a ausência de dados discrepantes (Figura 19), em que nenhuma das variáveis apresenta uma forte assimetria, com exceção da favorabilidade, a qual possui uma maior frequência na calda direita da distribuição (Figura 20). O molhamento foliar e favorabilidade apresentam uma correlação forte e positiva, ao passo que a temperatura e molhamento foliar demonstram uma relação inversa e moderada, ocorrendo o mesmo para a favorabilidade e temperatura.

Figura 19 – *Borplots* para as variáveis utilizadas na pesquisa

Fonte: Elaboração da própria autora.

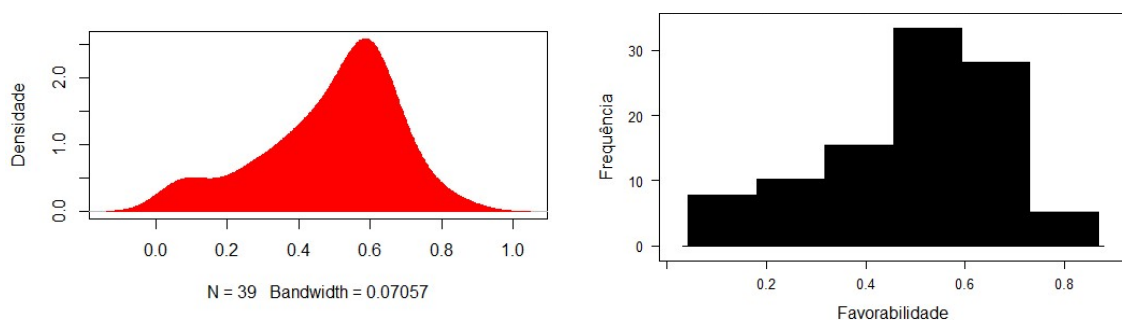
A partir da Tabela 11, são verificados os parâmetros estimados e a estatística de ajuste na validação cruzada para o interpolador IDW, nas diferentes potências avaliadas.

Figura 20 – Correlação Linear de Pearson entre as variáveis utilizadas no estudo



Fonte: Elaboração da própria autora.

Figura 21 – Densidade e histograma para a variável favorabilidade



Fonte: Elaboração da própria autora.

Tabela 11 – Validação Cruzada para as diferentes potências avaliadas para o interpolador IDW para a estimativa da favorabilidade da ferrugem da soja

Validação Cruzada			
Potência avaliada (IDW)	a	b	R ²
1	-0,11	1,18	0,30
2	-0,01	0,98	0,29
3	0,11	0,74	0,24
4	0,19	0,60	0,19

a = Coeficiente Linear; b = Coeficiente Angular; R² = Coeficiente de Determinação

Fonte: Elaboração da própria autora.

Assim, pode-se observar que todos os coeficientes lineares (intercepto) foram próximos de zero e os coeficientes angulares (inclinação) próximos de uma unidade. Dentre as quatro potências avaliadas, a linear apresentou o maior coeficiente de determinação, enquanto a potência de grau quatro proporcionou a menor estatística de ajuste.

Ao avaliar o semivariograma ajustado a partir do modelo gaussiano, verifica-se um

Tabela 12 – Avaliação do semivariograma selecionado para modelar a variabilidade da favorabilidade e verificação da dependência espacial das amostras

Variável	Modelo	C_0	$C_0 + C$	A	GD	Classe	R^2	SSR	Cross Validation		
									a	b	R^2_{CV}
Fav	Gaussiano	0,0019	0,0376	2043,7	0,94	Forte	0,72	0,0006	-0,12	1,2	0,27

C_0 = Efeito pepita; $C_0 + C$ = Patamar; A = Alcance; GD = Grau de dependência espacial; R^2 = Coeficiente de Determinação; SSR = Erro Residual; a = Coeficiente Linear; b = Coeficiente Angular; R^2_{cv} = Coeficiente de Determinação na validação cruzada.

Fonte: Elaboração da própria autora.

Tabela 13 – Ranking para a avaliação do melhor interpolador espacial para a variável ferrugem da soja

Parâmetro	Favorabilidade					
	Geoestatística	IDW1	IDW2	IDW3	IDW4	IDW5
a	3	2	1	2	4	5
b	2	3	1	4	5	6
R^2	3	1	2	4	5	6
Soma	8	6	4	10	14	17
Posição	3 ^o	2 ^o	1 ^o	4 ^o	5 ^o	6 ^o

Fonte: Elaboração da própria autora.

alto grau de dependência espacial para a favorabilidade (Tabela 12). Por meio do efeito pepita (C_0), o qual representa a variância não identificada no semivariograma da favorabilidade, observa-se um valor próximo de zero. O alcance (A) demonstrado na Tabela 12, representa a distância máxima em que dois pontos amostrais são correlacionados espacialmente, ao passo que determinações em distâncias superiores retratam independências entre si. Ao avaliar a validação cruzada do modelo geoestatístico, verificam-se valores semelhantes aos encontrados para o interpolador IDW, com o coeficiente linear (intercepto) próximo de zero e coeficiente angular (inclinação) próximo de uma unidade.

A partir dos parâmetros estimados e do coeficiente de determinação calculado na validação cruzada tanto para o interpolador IDW nas diferentes potências, quanto para o modelo geoestatístico, construiu-se um ranking atribuindo notas de 1 a 6. Assim, como o interpolador IDW com potência igual a 1 demonstrou o maior coeficiente de determinação, atribuiu-se nota 1 para este, enquanto o IDW com potência igual a 5 apresentou o menor valor desta estatística de ajuste, recebeu nota 6, como é possível observar na Tabela 13. Por fim, dentre os interpoladores avaliados, o que apresentou menor somatório das notas foi o IDW com potência igual a dois, já o modelo geoestatístico ocupou a terceira posição. Portanto, a partir do IDW de grau quadrático, confeccionou-se o mapa temático.

APÊNDICE B – LÓGICA *FUZZY*

A Lógica *Fuzzy* (LF) é um ramo da Inteligência Artificial que vem sendo amplamente difundido nas últimas décadas. É considerada robusta, possibilitando a quantificação de variáveis linguísticas, bem como a apreciação dessas variáveis pelos computadores.

A Teoria dos Conjuntos *Fuzzy* (TCF) foi apresentada em 1965 por Lotfi A. Zadeh (ZADEH, 1965). O objetivo era dar um tratamento matemático a alguns termos linguísticos subjetivos como “aproximadamente”, “em torno de”, entre outros. Seria possível, a partir daí, a reprodução e armazenagem de informações incertas em computador, permitindo o cálculo com dados imprecisos, tal qual faz o ser humano. A possibilidade de manipulação desse tipo de informação é o que tem tornado a TCF uma das áreas emergentes em tecnologia contemporânea (JAFELICE; BARROS; BASSANEZI, 2012).

Os limites dos conjuntos objetos da TCF não são precisos como no caso dos clássicos. A participação em um conjunto *fuzzy* não é uma questão de afirmação ou negação, mas sim uma questão de grau. Essa capacidade de expressar transições graduais de “membros” para “não membros” (e vice-versa) fornece não apenas uma representação significativa e poderosa de incertezas de medição, mas também de conceitos vagos expressos em linguagem natural (KLIR; YUAN, 1995)).

Pode ser entendida como a extensão da teoria dos conjuntos clássicos, sendo válidos os conceitos básicos como funções de pertinência, operações *fuzzy* com conjuntos, números, etc. (SANTOS, 2016). A diferença entre uma e outra é que a primeira permite vários níveis de “pertencimento” de um elemento a seus conjuntos, enquanto a segunda se restringe a “pertence” ou “não pertence”.

A seguir serão apresentados com maiores detalhes a estrutura que compõe a TCF, suas operações e relações, bem como o Sistema *Fuzzy* e seus componentes. Além disso, serão expostos trabalhos que utilizaram da LF como ferramenta para determinar os coeficientes das ED que modelaram seus problemas.

B.1 SUBCONJUNTOS *FUZZY*

Antes de definir o que é um subconjunto *fuzzy*, deve-se entender o que levou Zadeh a essa definição. Para tanto, considere um conjunto universo U não vazio, e um conjunto A de U . Esse conjunto A tem associado, naturalmente, uma função característica $\chi_A : U \rightarrow \{0, 1\}$, definida por:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

Dessa forma, o domínio dessa função é o conjunto universo U e o contra-domínio é o conjunto $\{0, 1\}$.

A intenção de Zadeh foi a de flexibilizar a pertinência de elementos ao conjunto, criando a ideia de grau de pertinência. Assim, os elementos poderiam pertencer parcialmente ao conjunto. Para isso, ampliou o contra-domínio da função característica χ_A para o intervalo $[0, 1]$ (MISSIO, 2008).

Dessa forma, um subconjunto *fuzzy* F do conjunto universo U (clássico) é definido a partir de uma função de pertinência u , pré-fixada, que relaciona a cada elemento x de U um número $u(x)$, no intervalo $[0, 1]$, chamado de grau de pertinência de x a F . Assim, o conjunto *fuzzy* F é representado por sua função de pertinência $u_F : U \rightarrow [0, 1]$ (JAFELICE; BARROS; BASSANEZI, 2012; MISSIO, 2008).

A partir dessa definição, é fácil entender que para a pertinência plena de x em F , tem-se $u_F(x) = 1$, e para a não pertinência, $u_F(x) = 0$. Além disso, nota-se que um subconjunto clássico A de U é um caso particular de conjunto *fuzzy*, para o qual a função de pertinência assume somente os valores de 0 e 1.

Para as funções de pertinência, são consideradas funções numéricas gráficas ou tabuladas, desde que atribuam valores entre 0 e 1 para qualquer variável em seu conjunto universo, que representam os valores de pertinência *fuzzy*. A forma para essas funções são totalmente arbitrárias. Sua escolha deve ser feita de modo a representar o subconjunto *fuzzy* da melhor forma possível, levando em consideração o contexto do problema estudado.

B.1.1 Operações entre conjuntos *fuzzy*

Como observado anteriormente, qualquer conjunto clássico pode ser entendido como um caso particular de um conjunto *fuzzy*. Logo, todas as operações válidas entre aqueles conjuntos são também válidas para esses. Dentre elas, destacam-se: interseção, união e complemento.

As ideias dessas operações são muito parecidas com os conceitos já conhecidos para o caso clássico. A fim de explaná-las, considere o conjunto universo U , seus subconjuntos *fuzzy* A e B , cujas funções de pertinência são dadas, respectivamente, por $\mu_A : U \rightarrow [0, 1]$ e $\mu_B : U \rightarrow [0, 1]$, e o elemento x , tal que $x \in U$.

Diz-se que A é um subconjunto *fuzzy* de B se, e somente se, $\mu_A(x) \leq \mu_B(x), \forall x \in U$. Além disso, $A = B$ se, e somente se, $\mu_A(x) = \mu_B(x), \forall x \in U$. Por convenção, a função de pertinência do conjunto vazio \emptyset é indicada por $\mu_{\emptyset}(x) = 0$ e do conjunto universo U por $\mu_U(x) = 1, \forall x \in U$.

A interseção é dada pelo operador AND, também chamado *min*, simbolizado por (\wedge) , cuja função de pertinência resulta no menor valor entre os níveis de pertencimento

de um elemento qualquer:

$$\mu_{(A \cap B)}(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$

A união é dada pelo operador OR, também chamado *max*, simbolizado por (\vee), cuja função de pertinência resulta no maior valor entre os níveis de pertencimento de um elemento qualquer:

$$\mu_{(A \cup B)}(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$

O complemento de um conjunto *fuzzy* é dado pelo operador NOT, cuja função de pertinência é a diferença entre 1 (que representa a função de pertinência do conjunto universo), e o nível de pertencimento de um elemento qualquer ao conjunto *fuzzy* para o qual se deseja determinar o complemento:

$$\mu_{A'}(x) = \mu_U(x) - \mu_A(x) = 1 - \mu_A(x)$$

com A' sendo o complemento de A .

B.2 SISTEMA BASEADO EM REGRAS FUZZY

Um SBRF, ou simplesmente Sistema *Fuzzy*, ou Controlador *Fuzzy*, como o próprio nome sugere, é um sistema que envolve conjuntos *fuzzy* e um grupo de regras dadas na linguagem corrente que ao final do processo devolvem um valor numérico real. É composto por três etapas: *fuzzificação*, *inferência fuzzy* e *defuzzificação*.

De forma sucinta, consiste em criar subconjuntos *fuzzy* para as variáveis de entrada (*fuzzificação*); regras, envolvendo principalmente os operadores OR(OU) e AND(E), que relacionem esses subconjuntos (*inferência fuzzy*), e; subconjuntos *fuzzy* ou funções para as variáveis de saída (*fuzzificação*). Dessa forma, é gerada uma saída *fuzzy* que será convertida em um número real (*defuzzificação*). Esses conjuntos e esse grupo de regras podem ser criados a partir da experiência de especialistas.

B.2.1 *Fuzzificação*

A *fuzzificação* é o processo por meio do qual é atribuído a cada uma das variáveis, de entrada e de saída (quando a saída é dada também por conjuntos *fuzzy*), funções de pertinência entre 0 e 1 para cada subconjunto *fuzzy* que representa aquela variável linguística. Todas essas variáveis são valores numéricos reais.

A variável linguística *fuzzy* é entendida como uma variável cujos valores assumidos são subconjuntos *fuzzy*. Ou seja, qualitativamente são expressos por termos linguísticos e

quantitativamente por uma função de pertinência. É caracterizada por: nome da variável; conjuntos de termos linguísticos, e; domínio de valores (reais) da variável que denota a sua medida (MISSIO, 2008).

Assim, dados um conjunto universo $U \subset \mathbb{R}$, seus subconjuntos *fuzzy* A e B , cujas funções de pertinência são dadas, respectivamente, por $\mu_A : U \rightarrow [0, 1]$ e $\mu_B : U \rightarrow [0, 1]$, e o elemento x , tal que $x \in U$. A variável x assumirá, depois da *fuzzificação*, os valores $\mu_A(x)$ e $\mu_B(x)$.

B.2.2 Inferência *fuzzy*

A Inferência *Fuzzy* é o processo por meio do qual as regras *fuzzy* serão aplicadas. As sentenças são criadas de forma a relacionarem, convenientemente, os subconjuntos *fuzzy* das variáveis linguísticas por meio, principalmente, dos operadores OR e/ou AND. Cada uma delas gera um valor entre 0 e 1, que será usado, posteriormente, no processo de *defuzzificação*.

As regras *fuzzy* são constituídas por declarações do tipo Se (antecedentes) – Então (consequentes). Os antecedentes são sempre definidos a partir dos subconjuntos *fuzzy* das variáveis de entrada. Já os consequentes podem ser obtidos de duas maneiras: pelos subconjuntos *fuzzy* das variáveis de saída (Método Mamdani) (MAMDANI, 1977) ou por uma função das variáveis de entrada (Método Takagi-Sugeno).

No Método Mamdani, uma regra é definida pelo produto cartesiano *fuzzy* dos conjuntos *fuzzy* que compõem o antecedente e o consequente da regra. Além disso, relaciona as regras por meio do operador lógico OR. Já no Método Takagi-Sugeno, o consequente de cada regra é uma função das variáveis de entrada (JAFELICE; BARROS; BASSANEZI, 2012).

Para exemplificar, considere:

- . O conjunto universo $U_A \subset \mathbb{R}$, seus subconjuntos *fuzzy* A_1 e A_2 , cujas funções de pertinência são dadas, respectivamente, por $\mu_{(A_1)} : U_A \rightarrow [0, 1]$ e $\mu_{(A_2)} : U_A \rightarrow [0, 1]$, e o elemento x , tal que $x \in U_A$; e,
- . O conjunto universo $U_B \subset \mathbb{R}$, seus subconjuntos *fuzzy* B_1 e B_2 , cujas funções de pertinência são dadas, respectivamente, por $\mu_{(B_1)} : U_B \rightarrow [0, 1]$ e $\mu_{(B_2)} : U_B \rightarrow [0, 1]$, e o elemento y , tal que $y \in U_B$.

Para o método de Mamdani, considere ainda o conjunto universo $U_C \subset \mathbb{R}$, seus subconjuntos *fuzzy* C_1 e C_2 , cujas funções de pertinência são dadas, respectivamente, por $\mu_{(C_1)} : U_C \rightarrow [0, 1]$ e $\mu_{(C_2)} : U_C \rightarrow [0, 1]$, e o elemento z , tal que $z \in U_C$. Tem-se:

Regra 1: Se (x é A_1 E y é B_1) então (z é C_1).

Regra 2: Se (x é A_2 E y é B_2) então (z é C_2).

A partir, então, dos respectivos antecedentes, obtém-se as saídas *fuzzy* $\mu_{(C_1)}(z) = \mu_{(A_1)}(x) \wedge \mu_{(B_1)}(y) = \min\{\mu_{(A_1)}(x), \mu_{(B_1)}(y)\}$ e $\mu_{(C_2)}(z) = \mu_{(A_2)}(x) \wedge \mu_{(B_2)}(y) = \min\{\mu_{(A_2)}(x), \mu_{(B_2)}(y)\}$.

Para o método Takagi-Sugeno, considere as funções que mapeiam a saída para as respectivas regras dadas por $f_1 : U_A \times U_B \rightarrow \mathbb{R}$ e $f_2 : U_A \times U_B \rightarrow \mathbb{R}$. Tem-se:

Regra 1: Se (x é A_1 E y é B_1) então $z = f_1(x, y)$.

Regra 2: Se (x é A_2 E y é B_2) então $z = f_2(x, y)$.

Assim, os antecedentes das Regras 1 e 2 gerarão, respectivamente, as saídas *fuzzy*.

$$w_1 = \mu_{(A_1)}(x) \wedge \mu_{(B_1)}(y) = \min\{\mu_{(A_1)}(x), \mu_{(B_1)}(y)\} \text{ e}$$

$$w_2 = \mu_{(A_2)}(x) \wedge \mu_{(B_2)}(y) = \min\{\mu_{(A_2)}(x), \mu_{(B_2)}(y)\}.$$

B.2.3 Defuzzificação

A *defuzzificação* é o processo por meio do qual se obtém o valor numérico real resultante da aplicação do sistema *fuzzy*. É nesta etapa que a saída *fuzzy* obtida é transformada em saída *crisp* (número real). O método escolhido para a *defuzzificação* deve levar em conta o método utilizado na inferência.

O mais comum é usar o Centro de Gravidade, também chamado de Centro de Área ou Centroide para a execução desse processo. É semelhante à media ponderada para a distribuição de dados, sendo que os pesos, neste caso, são os valores de pertinência de z_i ao conjunto C (MISSIO, 2008; JAFELICE; BARROS; BASSANEZI, 2012).

Para o método de Mamdani, a cada regra é gerada uma região, cuja “altura” é dada por $\mu_{(C_i)}(z)$. Na sequência, efetua-se a união dessas áreas por meio da operação OR entre as regras. Por fim, para a *defuzzificação*, pode-se utilizar o método Centro de Área:

$$CA = \frac{\sum_{i=0}^n u_i \mu_{C_i}(z)}{\sum_{i=0}^n \mu_{C_i}(z)}$$

com u_i sendo o valor (ou valor médio) no domínio de z para o(s) qual(is) se tem o maior valor de pertinência em C_i .

Para o método Takagi-Sugeno, a *defuzzificação* é dada justamente pela média ponderada das saídas de cada regra:

$$z = \frac{\sum_{i=0}^n w_i f_i}{\sum_{i=0}^n w_i}$$

com w_i sendo os pesos.

B.3 MODELOS *FUZZY* PARA COEFICIENTES DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Vários tipos de fenômenos (da natureza, sociais etc.) podem ser modelados por Equações Diferenciais (ED). Existem tipos generalizados de ED que são capazes de explicar determinados comportamentos a partir de algumas características conhecidas do problema.

A Equação Difusão-Advecção (EDA), de forma geral, modela problemas que envolvem a difusibilidade de um material em um determinado meio, levando em conta a influência de forças externas que definem a advecção. O que difere a EDA de um problema para a EDA de outro são, além do campo vetorial e da fonte, os coeficientes de difusão e de degradação. Esses, entretanto, nem sempre são dados, e obtê-los experimentalmente pode ser inviável.

Para muitos problemas de química, física, engenharia e alguns de biologia que envolvem difusão, é possível obter o valor do seu coeficiente em ambiente controlado. Mas para problemas, como os de ecologia, a difusão é de indivíduos e/ou de um risco de infecção entre indivíduos. Para esses casos, por exemplo, não é possível usar as mesmas técnicas, ou o método factível é muito caro e/ou difícil de ser realizado (SOUZA, 2014).

Desta forma, a LF vem sendo aliada de pesquisadores para uma estimativa satisfatória desses coeficientes, e de tantos outros que compõem as mais diversas ED. A seguir, serão apresentadas de forma sucinta e clara algumas pesquisas que se utilizaram desta ferramenta para tratar a subjetividade dos coeficientes de suas equações.

B.3.1 Modelos de EDP integrados à lógica *fuzzy* e métodos probabilísticos no tratamento de incertezas: uma aplicação à febre aftosa em bovinos

Em sua pesquisa, Missio (2008) estudou a dinâmica espacial e temporal da febre aftosa em bovinos, propondo um modelo integrado envolvendo EDP, LF e métodos probabilísticos. Para tanto, elaborou um modelo SIR (*suscetíveis, infecciosos e recuperados*) envolvendo EDP com parâmetros de difusão e transmissão incertos, que foram estimados por meio de SBRF.

No modelo SIR, a população estudada é dividida entre:

- Suscetíveis ($S = S(t)$), que representa o número de indivíduos sadios que podem contrair a doença por contato com infecciosos, no instante t ;

- Infecciosos ($I = I(t)$), que representa o número de indivíduos que contraíram a doença e que tornam-se transmissores dela por contato, no instante t , e;
- Recuperados ($R = R(t)$), que representa o número de indivíduos que se recuperam da doença, deixando de participar da dinâmica da doença, no instante t .

A formulação matemática do modelo SIR, é um problema de valor inicial, que pode ser representado pelo sistema não linear de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO):

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta SI \\ \frac{dI}{dt} = \beta SI - \mu I \\ \frac{dR}{dt} = \mu I \end{cases}$$

com $t \geq 0$, satisfazendo as condições iniciais $S(0) = S_0$, $I(0) = I_0$, $R(0) = 0$, β sendo a taxa de transmissão e μ a taxa com que os indivíduos passam de infectados para recuperados.

A pesquisadora incorpora a dinâmica espacial da febre aftosa ao modelo por meio da equação de difusão. Além disso, considera que os animais vivem agregados e em condições físicas diferenciadas por causa da presença ou não da doença, e que os animais não se dispersam aleatoriamente em seu ambiente. Dessa forma, os coeficientes de difusão são distintos para cada grupo de animais. Esses coeficientes variam em função do espaço, do tempo e da densidade populacional de suas respectivas classes (suscetíveis, infecciosos ou recuperados), mas também são dependentes de outros fatores difíceis de serem mensurados quantitativamente. Da mesma forma, a transmissão, que pode se dar de maneira direta (encontro de suscetível com infeccioso) ou de maneira indireta (encontro de suscetível com vetores transmissores), também depende de variáveis incertas. Assim, a autora incorporou informações subjetivas aos parâmetros de difusão e de transmissão por meio de SBRF.

Criou as variáveis fuzzy *População* (P), *Características Ambientais* (C), *Fase da Doença* (FD) e *Tempo de Infecção* (τ), para os coeficientes de difusão de indivíduos suscetíveis ($D_S = D_S(C, P)$), infecciosos ($D_I = D_I(C, P, FD(\tau))$) e recuperados ($D_R = D_R(C, P)$). Para a taxa de infecção β , criou as variáveis fuzzy *Conduta Pessoal* (CP) e *Estrutura de Produção* (EP). Para a inferência utilizou o Método de Mamdani e para a defuzzificação, o Centro de Área.

Assim, o novo sistema tomou a seguinte forma:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\nabla \cdot (D_S(C, P)\nabla S) - \beta(\theta(CP, EP))SI \\ \frac{dI}{dt} = \nabla \cdot (D_I(C, P, FD(\tau))\nabla I) + \beta(\theta(CP, EP))SI - \mu I \\ \frac{dR}{dt} = \nabla \cdot (D_R(C, P)\nabla R) + \mu I \end{cases}$$

sendo $S = S(x, y; t)$, $I = I(x, y; t)$ e $R = R(x, y; t)$, com $(x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ e $t \in (0, T)$ para algum $T > 0$, satisfazendo as condições iniciais $S(x, y; 0) = S_0(x, y)$, $I(x, y; 0) = I_0(x, y)$ e $R(x, y; 0) = 0$.

Utilizou o Método de Galerkin via Elementos Finitos para a discretização espacial e para a temporal, o Método de Crank-Nicolson. Para alimentar o SBRF correspondente a cada variável, utilizou-se de modelo probabilístico para a geração de números aleatórios.

Os resultados obtidos nas simulações de diversos cenários foram coerentes quando comparados com os de um sistema clássico de ED tipo SIR. Além disso, foi possível visualizar como as variáveis subjetivas afetam a propagação da epidemia, tornando factível monitorar e controlar a dispersão do vírus no ambiente, quando adotadas ações socioeconômicas e ambientais apropriadas.

B.3.2 Dispersão de poluente em sistema de reservatório: modelagem matemática e simulação computacional utilizando-se aproximação numérica e conjuntos *fuzzy*

Em sua pesquisa, Poletti (2009) propôs um método para o estudo da dispersão espacial e temporal de um poluente num sistema de reservatório. Para a análise desse tipo de situação, modelou os principais fenômenos envolvidos por meio da EDA com parâmetros *fuzzy*.

Conforme explicado anteriormente, a EDA apresenta coeficientes de difusão e de degradação, bem como um campo vetorial (ou coeficiente de transporte). Esses três termos foram modelados por LF.

Para o transporte, criou a variável *fuzzy Vento*, cujo domínio corresponde à velocidade dos ventos predominantes. Para a degradação, as variáveis *Quantidade de Matéria* e *Tipo de Ambiente*. No caso da difusão, o *Transporte* e a *Degradação* foram as variáveis *fuzzy* utilizadas para gerar o coeficiente. Para a inferência utilizou o Método de Mamdani e para a *defuzzificação*, o Centro de Área.

Assim, sua equação tomou a seguinte forma:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \nabla \cdot (\alpha(V_1, \sigma)) - \nabla \cdot ((V_1(Vento), 0)c) - \sigma(\text{Qtde. de matéria, Tipo de ambiente})c + f$$

sendo $c = c(x, y; t)$, com $(x, y) \in \Omega \subset \mathbb{R}^2$ e $0 < t \leq T$.

Utilizou o Método de Galerkin via Elementos Finitos para a discretização espacial e para a temporal, o Método de Crank-Nicolson.

O estudo permitiu a avaliação qualitativa do comportamento do poluente no reservatório. Além disso, os instrumentos da TCF permitiram uma melhor leitura dos coeficientes de transporte, degradação e difusão com a inclusão de incertezas.

B.3.3 Modelagem *fuzzy* na saúde

Em seu trabalho, Lopes e Jafelice (2005) desenvolveram duas pesquisas: propuseram um sistema *fuzzy* para o diagnóstico de doenças das vias aéreas superiores e inferiores, relacionando os sinais e sintomas de alguns pacientes com as doenças em questão, e; modelaram a velocidade de eliminação de fármacos no organismo do indivíduo por meio de um SBRF, para a sua aplicação no modelo farmacocinético clássico. Como somente este último trata-se de um exemplo da integração entre LF e ED, a apresentação desta pesquisa será restrita a ele.

Em Farmacologia, um problema fundamental é estimar como a concentração de um fármaco diminui no sangue de um indivíduo. A partir desse conhecimento é possível determinar a dosagem a ser inserida e o intervalo de tempo que cada aplicação deve ser feita. O modelo mais simples que descreve essa taxa de eliminação é dado, em termos matemáticos, por:

$$\frac{dy}{dt} = -ky$$

com $y = y(t)$ sendo a concentração de um fármaco no organismo, k a constante de velocidade de eliminação do fármaco, com $t \geq 0$, satisfazendo a condição inicial $y(0) = y_0$.

Entretanto, a mesma dose de medicamento pode produzir as mais variadas constantes de eliminação, dependendo da função renal. Assim, as autoras criaram um SBRF para a determinação de k , cujas variáveis de entrada são *Volume Urinário* (v), *Clearance de Creatinina* ($clcr$) e *pH Sérico* (p). Desta forma, a equação passou a ser:

$$\frac{dy}{dt} = -k(v, clcr, p)y$$

Para a resolução do SBRF, foi utilizado o método de inferência de Mamdani com a defuzzificação pelo Centro de Área. A ED possui solução analítica, de forma que basta resolvê-la separando as variáveis e integrando os dois lados da igualdade.

Para as simulações, consideraram uma mesma prescrição de certo fármaco para três indivíduos: um com função renal normal, um com função renal comprometida e um terceiro com função renal também comprometida, porém com nível de saturação

do fármaco menor que o segundo. De acordo com o especialista, os resultados obtidos condizem com a realidade de seus pacientes, indicando que há necessidade de mudança na prescrição da dose, para que não ocorra intoxicação.

APÊNDICE C – ESFORÇOS COMPUTACIONAIS E CÓDIGOS EM MATLAB®

A máquina utilizada para executar todos os testes e cenários é um servidor do laboratório de Matemática Aplicada (LAMAP) da Universidade Federal de Mato Grosso (UFMT) contendo 144 GB de memória *ram* e dois processadores Intel *Xeon* quad-core, totalizando 6 núcleos de cada um. Para as simulações das concentrações de esporos, os algoritmos confeccionados foram aprimorados para poderem ser paralelizados. Foram 1.400 iterações, que levavam em média 170 segundos para gerar a matriz de rigidez e calcular a solução a cada passo do tempo.

Os códigos computacionais implementados estão na sequência. Trata-se do programa que calcula o perfil da dispersão de esporos do fungo *Phakopsora pachyrhizi*, causador da ferrugem asiática da soja, a cada passo no tempo. Embora a EDA não contemple condição de fronteira do tipo Robin, e a do tipo Von Neumann não homogênea seja constante no tempo, esse código está pronto para receber esses tipos de variações.

```
%% Dados do domínio: matrizes coordenadas, elementos e elementos
de fronteira %%
```

```
%clear all
```

```
format long;
```

```
load VEL.mat
```

```
load malha_MT.mat
```

```
load Norm_VEEL.mat
```

```
Vmax=max(v_max);
```

```
load Cor_Rod_1km.mat
```

```
load Fonte_rod.mat
```

```
load Kteta_ban.mat
```

```
load Deca.mat
```

```

[nte,~]=size(elementos);%Número total de elementos, triângulos
[ntn,~]=size(coordenadas);%Número total de nós
[ntef,~]=size(elementos_frenteira);%Número total de elementos de frenteira

elementos=[elementos(:,1) elementos(:,3) elementos(:,2)];%sentido anti-
%-horário

elementos_frenteira=[elementos_frenteira(:,3) elementos_frenteira(:,2)];
%sentido anti-horário

%% Dados de entrada %%

dt=0.02;%delta t
alpha=100.8;%alpha equivalente a (0,6 km2/h)
teta=75*10^5;%Von Neumann para uma faixa de frenteira de espessura de 1m
%com 1cm² de lesão por toda a extensão da frenteira
ro=4;%intensidade do vento adicional nas rodovias
fonte=18*teta;%são 0,055*75*10^8 esporos/(km²*semana) por triângulo, divi-
%dido por 3 nós
conv=604.8;%fator para converter a velocidade do vento que está em
%m/s para km/semana
uni_t=7;%Unidade de tempo em dias
f=sparse(ntn,1);%fonte
C0=zeros(ntn,1);%condição inicial
n_ite=input('numero de iteracoes=');
VEEL=[VEL(:,304:365,:) VEL(:,1:303,:)]; %Para o primeiro dia ser 31/10
sigma=[siigma(:,304:365) siigma(:,1:303)]; %Para o primeiro dia ser 31/10
Vcor=COR(:,2:3);%Componentes horizontais e verticais para os corredores
no_fonte=Fonte;

clear siigma

%% Tratando Kteta e fonte %%

Kteta=teta*Kteta;
f(no_fonte,1)=fonte;

```

```

%% Corredor em torno das rodovias %%

[ncorre,~]=size(COR);

Vel=VEEL;

for i=1:ncorre

    Vel(COR(i,1),:,2)=VEEL(COR(i,1),:,2)+ro*Vcor(i,2);
    Vel(COR(i,1),:,1)=VEEL(COR(i,1),:,1)+ro*Vcor(i,1);

end

Vel=168/Vmax*Vel;%garantindo vento máximo de 1km/h

clear VEEL

%% Submatrizes de rigidez (sentido anti-horário) %%

%fj_fi_glob=det(jacob)*fj_fi
fj_fi=[1/12 1/24 1/24;1/24 1/12 1/24;1/24 1/24 1/12];

%dfjx_dfix_glob=abs(det(jacob))*T(1,:)*[dfjcsi_dficsi dfjcsi_dfieta;
%                                     dfjeta_dficsi dfjeta_dfieta]*(T(1,:))'
%dfjy_dfiy_glob=abs(det(jacob))*T(2,:)*[dfjcsi_dficsi dfjcsi_dfieta;
%                                     dfjeta_dficsi dfjeta_dfieta]*(T(2,:))'
%dfjx_dfiy_glob=abs(det(jacob))*T(1,:)*[dfjcsi_dficsi dfjcsi_dfieta;
%                                     dfjeta_dficsi dfjeta_dfieta]*(T(2,:))'
%dfjy_dfix_glob=abs(det(jacob))*T(2,:)*[dfjcsi_dficsi dfjcsi_dfieta;
%                                     dfjeta_dficsi dfjeta_dfieta]*(T(1,:))'
dfjcsi_dficsi=[1/2 0 -1/2;0 0 0;-1/2 0 1/2];
dfjcsi_dfieta=[0 0 0;1/2 0 -1/2;-1/2 0 1/2];
dfjeta_dficsi=[0 1/2 -1/2;0 0 0;0 -1/2 1/2];
dfjeta_dfieta=[0 0 0;0 1/2 -1/2;0 -1/2 1/2];

```

```

%dfjx_fi_glob=abs(det(jacob))*T(1,:)*[dfjcsi_fi;dfjeta_fi]
%dfjy_fi_glon=abs(det(jacob))*T(2,:)*[dfjcsi_fi;dfjeta_fi]
dfjcsi_fi=[1/6 0 -1/6;1/6 0 -1/6;1/6 0 -1/6];
dfjeta_fi=[0 1/6 -1/6;0 1/6 -1/6;0 1/6 -1/6];

%um_fi_front_glob=jac*um_fi_front
um_fi_front=[1/2;1/2];

%fj_fi_front_glob=jac*fj_fi_front
fj_fi_front=[1/3 1/6;1/6 1/3];

%% Construção matrizes M, W, R, N e H, equações e solução %%

solucao1=[];
indice1=[];
solucao2=[];
indice2=[];
solucao3=[];
indice3=[];
solucao4=[];
indice4=[];

%% Matrizes N e R%%

IJ=zeros(2,4,ntef);

parfor kk=1:ntef
    IJ(:,:,kk)=torre_IJ_front(kk,elementos_frenteira,2,4)
end
I_frontK=IJ(:,1:2,:); I_frontK=I_frontK(:);
J_frontK=IJ(:,3:4,:); J_frontK=J_frontK(:);
clear IJ

IJ=zeros(2,2,ntef);

parfor kk=1:ntef
    IJ(:,:,kk)=torre_IJ_front(kk,elementos_frenteira,2,2)
end

```

```
I_fronteta=IJ(:,1,:); I_fronteta=I_fronteta(:);
J_fronteta=IJ(:,2,:); J_fronteta=J_fronteta(:);
clear IJ
```

```
IJ=zeros(3,6,nte);
tic
parfor kk=1:nte
    IJ(:,:,kk)=torre_IJ(kk,elementos);
end
I=IJ(:,1:3,:); I=I(:);
J=IJ(:,4:6,:); J=J(:);
clear IJ
montagemIJ=toc
```

```
%% Montagem e Resolução Sistema %%
```

```
for t=1:n_ite
    t
    dia0=floor(uni_t*dt*(t-1))+1;
    dia0=mod(dia0,365);
    if dia0==0
        dia0=365;
    end
    dia1=floor(uni_t*dt*t)+1;
    dia1=mod(dia1,365);
    if dia1==0
        dia1=365;
    end
    dia2=floor(uni_t*dt*(t+1))+1;
    dia2=mod(dia2,365);
    if dia2==0
        dia2=365;
    end

    if t==1 || dia1~=dia2 || dia1~=dia0

        FRONT=zeros(2,3,ntef);
        SAIDA=zeros(3,9,nte);
```

```

% Tratamento dos dados que variam no tempo para paralelização %
KTETA=Kteta(:,[dia1 dia2]);
SIG=sigma(:,[dia1 dia2]);
VELo=Vel(:,[dia1 dia2],:);

tic
parfor kk=1:ntef
    kteta=[KTETA(kk,:)];kteta=mean(kteta);
    FRONT(:,:,kk)=encher_matriz_frenteira(kk,coordenadas,
        elementos_frenteira,bandeira,um_fi_front,fj_fi_front,kteta);
end
parfor_NR=toc

tic
N=FRONT(:,3,:);N=N(:);
R=FRONT(:,1:2,:);R=R(:);

N=sparse(I_fronteta,J_fronteta,N,ntn,1);
R=sparse(I_frontK,J_frontK,R,ntn,ntn);
montagem_NR=toc

tic
parfor k=1:nte
    %[x1 y1;x2 y2;x3 y3]
    COORD=[coordenadas(elementos(k,1),1) coordenadas(elementos(k,1),2);
        coordenadas(elementos(k,2),1) coordenadas(elementos(k,2),2);
        coordenadas(elementos(k,3),1) coordenadas(elementos(k,3),2)];
    %componentes horizontais do vento nos 3 nós do triângulo,
    %nas iterações t e t+1
    VEL1=[VELo(elementos(k,1),1,2) VELo(elementos(k,1),2,2);
        VELo(elementos(k,2),1,2) VELo(elementos(k,2),2,2);
        VELo(elementos(k,3),1,2) VELo(elementos(k,3),2,2)];
    %componentes horizontais do vento nos 3 nós do triângulo,
    %nas iterações t e t+1
    VEL2=[VELo(elementos(k,1),1,1) VELo(elementos(k,1),2,1);
        VELo(elementos(k,2),1,1) VELo(elementos(k,2),2,1);
        VELo(elementos(k,3),1,1) VELo(elementos(k,3),2,1)];

```

```

%sigma nas iterações t e t+1
SIGMA=[SIG(elementos(k,1),1) SIG(elementos(k,1),2);
        SIG(elementos(k,2),1) SIG(elementos(k,2),2);
        SIG(elementos(k,3),1) SIG(elementos(k,3),2)];
v1=mean(VEL1);v1=mean(v1);
v2=mean(VEL2);v2=mean(v2);
sig=mean(SIGMA);sig=mean(sig);
SAIDA(:, :, k)=MWH(COORD,v1,v2,sig,alf,dfjcsi_dficsi,
dfjeta_dficsi,dfjcsi_dfieta,dfjeta_dfieta,dfjcsi_fi,
dfjeta_fi,fj_dficsi,fj_dfieta,fj_fi);
end
parfor_MWH=toc

tic
M=SAIDA(:, 1:3, :);M=M(:);
W=SAIDA(:, 4:6, :);W=W(:);
H=SAIDA(:, 7:9, :);H=H(:);

M=sparse(I, J, M, ntn, ntn);
W=sparse(I, J, W, ntn, ntn);
H=sparse(I, J, H, ntn, ntn);
montagem_MWH=toc

tic
A=M+(dt/2)*(W+R);
b=(M-(dt/2)*(W+R))*CO+dt*(H*f+N);
montagem_SL=toc

tic
[LL,UU,PP,QQ]=lu(A);
zz=LL\ (PP*b);
yy=UU\zz;
C1=QQ*yy;
resolucao_SL=toc

CO=C1;

```

```
else
    tic
    b=(M-(dt/2)*(W+R))*C0+dt*(H*f+N);
    zz=LL\(PP*b);
    yy=UU\zz;
    C1=QQ*yy;
    C0=C1;
    solucao_sem_montagem=toc

end

if dia1~=dia2
    if t<=650
        solucao1=[solucao1 C0];
        indice1=[indice1 t];
        save cen_1 solucao1 indice1 -v7.3
    elseif t>650 && t<=1300
        solucao2=[solucao2 C0];
        indice2=[indice2 t];
        save cen_2 solucao2 indice2 -v7.3
        clearvars solucao1
    elseif t>1300 && t<=1950
        solucao3=[solucao3 C0];
        indice3=[indice3 t];
        save cen_3 solucao3 indice3 -v7.3
        clearvars solucao2
    elseif t>1950
        solucao4=[solucao4 C0];
        indice4=[indice4 t];
        save cen_4 solucao4 indice4 -v7.3
        clearvars solucao3
    end
end

end

end
```

```

%% Matrizes M W e H %%
function saida=MWH(COORD,v1,v2,sig,alf,dfjcsi_dficsi,dfjeta_dficsi,dfjcsi_dfieta,dfjeta_dfieta,dfjcsi_fi,dfjeta_fi,
fj_dficsi,fj_dfieta,fj_fi)
saida=zeros(3,9);

%Jacobiana

jacob=[COORD(1,1)-COORD(3,1) COORD(2,1)-COORD(3,1);%[x1-x3 x2-x3;y1-y3 y2-y3]
COORD(1,2)-COORD(3,2) COORD(2,2)-COORD(3,2)];

T=1/(det(jacob))*[jacob(2,2) -jacob(2,1);-jacob(1,2) jacob(1,1)];

for i=1:3
    for j=1:3

        fj_fi_glob=abs(det(jacob))*fj_fi(i,j);

        dfjx_dfix_glob=abs(det(jacob))*T(1,:)*[dfjcsi_dficsi(i,j) dfjcsi_dfieta(i,j);
            dfjeta_dficsi(i,j) dfjeta_dfieta(i,j)]*(T(1,:)');
        dfjy_dfiy_glob=abs(det(jacob))*T(2,:)*[dfjcsi_dficsi(i,j) dfjcsi_dfieta(i,j);
            dfjeta_dficsi(i,j) dfjeta_dfieta(i,j)]*(T(2,:)');
        dfjx_dfiy_glob=abs(det(jacob))*T(1,:)*[dfjcsi_dficsi(i,j) dfjcsi_dfieta(i,j);
            dfjeta_dficsi(i,j) dfjeta_dfieta(i,j)]*(T(2,:)');
        dfjy_dfix_glob=abs(det(jacob))*T(2,:)*[dfjcsi_dficsi(i,j) dfjcsi_dfieta(i,j);
            dfjeta_dficsi(i,j) dfjeta_dfieta(i,j)]*(T(1,:)');
    end
end

```

```
dfjx_fi_glob=abs(det(jacob))*T(1,:)*[dfjcsi_fi(i,j);dfjeta_fi(i,j)];
dfjy_fi_glob=abs(det(jacob))*T(2,:)*[dfjcsi_fi(i,j);dfjeta_fi(i,j)];

m=fj_fi_glob;
w=alf*(dfjx_dfix_glob+dfjy_dfiy_glob)+v1*dfjx_fi_glob+v2*dfjy_fi_glob+sig*fj_fi_glob;
h=fj_fi_glob;

saida(i,[j j+3 j+6])=[m w h];

end

end

end
```

```

%% Função encher_matriz_frenteira %%
function front=encher_matriz_frenteira(k,coord,elem_front,bandeira,um_fi_front,fj_fi_front,kteta)
front=zeros(2,3);

TT=[coord(elem_front(k,2),1)-coord(elem_front(k,1),1);coord(elem_front(k,2),2)-coord(elem_front(k,1),2)];
jac=sqrt((TT(1))^2+(TT(2))^2);

for il=1:2
    for jl=1:2

        rij=(bandeira(k)-1)*kteta*jac*fj_fi_front(il,jl);
        ni=(2-bandeira(k))*kteta*jac*um_fi_front(il);
        %1 se a frenteira for do tipo Von Neumann e 2 se a condição de frenteira for do tipo Robin

        front(il,jl)=rij;
        front(il,3)=ni;

    end
end
end

```

```
%% Função torre_IJ %%

function saida=torre_IJ(kk,elem)
saida=zeros(3,6);
for il=1:3
    ig=elem(kk,il);
    for jl=1:3
        jg=elem(kk,jl);
        saida(il,[jl jl+3])=[ig jg];
    end
end
end

%% Função torre_IJ_front

function saida=torre_IJ_front(kk,elem,m,n)
saida=zeros(m,n);
nn=0.5*n;
for il=1:m
    ig=elem(kk,il);
    for jl=1:nn
        if nn==1
            saida(il,[jl jl+nn])=[ig 1];
        else
            jg=elem(kk,jl);
            saida(il,[jl jl+nn])=[ig jg];
        end
    end
end
end
end
```